EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

Renaldini Opus de [illegible]cem

CAROLI RENALDINII

PATRITII ANCONITANI;

ET IN CELEBERRIMA

PISANA ACADEMIA

Philosophiæ Ordinarij Interpretis.

OPVS MATHEMATICVM

IN QVO

Vtraque Algebra, vetus scilicet, & noua à se in Opere, hac de re pridem edito, pertractata nouis præceptis; nouisq; demonstrationibus illustratur.

Methodus quoque Resolutionis, & Compositionis Mathematicæ longè copiosiùs, quàm ibidem, ad abstrusiora Theoremata, & Problemata enodanda declaratur.

Pars prior Numerosam Algebram complectens.

BONONIÆ, Ex Typographia H.H. Ducij. MDCLV.

Superiorum permissu.

SERENISSIMO

COSMO MAGNO

ETRVRIAE PRINCIPI.

CAROLVS RENALDINIVS F.

DEcet humanitatem tuam incomparabilem, decet ſummam clementiam Sereniſs. Princeps mihi ignoſcere, ſi quæ à me tibi cōſecrata, minus digna tàm excelſo, & glorioſo nomine conſpexeris; Non alteri, quam tibi minimè accommodata videbantur. Argumentum haud ignobile meæ tractationis, interq; abſtruſiora Matheſeos arcana non poſtremum debebatur non niſi Principi alacritatem, ſolertiamq; Ingenij maximam à natura ſortito. Quod ſi Principis immortalem gloriam anhelantis intereſt armorum ſtrepitu æque, ac litterarum otio delectari. Tû profectò maioribus non absimilis procliuem animum ad litteras nactus, non minus, quam ad arma tractanda sępe numero Mineruæ Templum inuises, quam e Iouis capite in armis editam commenti sunt prudẽtes Studia fouere S.P.& omne litterarum genus in oculis ferre Imperatoris partes etiam Imperatoribus videbantur; quibus nihil ideo antiquius fuit, quàm vt homines, vel humili loco natos, in quibus tamen ornatus doctrinæ elucesceret, ad sublimiores honoris gradus extollerent. Nec me latet excelsum animum Serenit. Tuę eodem sensu litteratorũ genus omne prosecuturum; Id enim heroica Indoles, Diuinitus tibi elargita, omnino pollicetur. Quod si Magnus ille Augustus nullum labi diem sine meditatione ingenij patiebatur, non dubium, quin tu ad maiora contendas, vt imitatione Scipionis etiam in medijs difficilimi belli apparatibus bonarũ artium studia colas, Philosophorum Lycea frequentes, longè maiori cum gloria. At si qua disciplina Principis animum maximè decorat, si qua inclytum reddit Famę fulgore

Pla-

Platonis quidem oraculo, Ciuilis ipſa eſt, Politicorum acclamatione, notitia inſuper Hiſtoriarum. Non minoris tamen eſt cultura Matheſeos, celebriorum præſertim eius partium Militaris, & Mechanices, vt ideo Plutarcus ſummis laudibus Pyrrum extulerit, quòd eum hę magna delectatione perfunderent. Hæc me Sereniſs. Princeps impulerunt, vt quos aſpicis labores meos tibi conſecratos vellem, Qui ſi minus felices ob ingenij mei tenuitatem extiterunt, Tu, qua ſoles, ſumma humanitate exigui etiam ponderis munera excipere ne deſpicias. Quod ſi feceris altiora quoq; quoad mearum virium imbecilitas patietur, meditari conabor.

V.D.

V. D. Andreas Cutica Pœnit. pro Illustriss. ac Reuerendiss. D. Archiepiscopo Bononiæ, & Principe.

V. P. Alexander Simoneta ex Societate Iesu pro Reuerendiss. P. Inquis. Bononiæ.

Imprimatur.

Fr. Gulielmus Inquisitor Bononiæ.

INDEX CAPITVM

Quæ in hoc volumine continentur.

CAPVT PRIMVM.

CAPVT II.

CAP. III.

Diui-

CAP. IV.

CAP. V.

CAP. VI.

CAP. VII.

CAP. VIII.

CAP. VIIII.

CAP. X.

CAP. XI.

CAP. XII.

Me-

CAP. XIII.

CAP. XIV.

Para-

Para-

SECVNDVM EXEMPLORVM GENVS.

✠✠✠

Erra-

Errata priusquàm legatur corrigenda.

PAg. 10. l. 26. Regula. c. Regola. pag. 13. l. 16. surdorum. o. surdorum. p. 75. l. 10. & dene-
minatum. c. & non denominatum p. 85. l. 26. & perposito. c. & apposito. pag. 88. l. 16.
825. c. 135. p. 87. l. R (725. R.) ibid. l. 17. R (782. Q.) c. R (162. Q.) p. 99. l. 21. fractionum
tum c. fractionum ostenditur tum p. 154. l. 18. dum tamen ponas in anteriora c. prorupturus
in anteriora p. 167. l. 22. triplum lateris primi 433. c. triplum quadratum lateris primi 432.
p. 170. l. vlt. æquale est c. æqualis est. p. 172. l. 1. Cubo c. Cubocubo. 185. l. 6. 1 Q = 10 R. ✠
75 C 1 Q = — 10 R. ✠ 75. p. 193. l. penult. 1782. c. 17864. p. 208. l. 27. Plana, adde præsta
ptis... ibidem l. 29. è regione 384. scribe excessus planorum ablatitiorum. & l. 30. è re-
gione 10148. scribe Reliquum resoluendi quadrati p. 209. infra lineam 12. sub num. 26. scri-
be 176. sic. 16 & è regione numeri 176. scribe Summa planorum ablatis. & l. 18. Excessus.
16 adde ablatitiorum. ibid. 254. 25. ibid. è regione numerorum 288. & 36.
—— scribe Plana ablatitia; & è regione num. 2916. scribe Summa planorum ob-
176 lat. & l. 30. Planum ablatitium c. Planum addititium p. 216. l. 6. 69. c. 64.
p. 232. l. 27. Planum adde ablatitium p. 233. l. 14. 159. c. 156. ibid. l. 23. superiorum c. infe-
riorum p. 235. l. 27. addititiorum c. ablatitiorum p. 236. l. 29. 288. c. 268. p. 237. l. 19. infe-
riorum c. superiorum. & l. 20. & 22. numeri 24. & 49. ita collocentur 24
p. 257. l. 27. 126034. c. 120624. & l. 32. 528536. c. 582526. l. 37. 88220. 49
c. 88219. p. 263. l. vlt. 188712. c. 188832. p. 264. l. penult. 3376048. ——
c. 3375048. p. 267. l. 2. 68600. c. 98600. l. 23. 101300. c. 101390. pag. 189
237. l. 30. 195. c. 2652. pag. 277. l. 15. num. 27. promoueatur dextrorsum vnius figuræ spatio.
p. 279. l. 37. 771700. c. 771600. p. 281. l. 17. 3880. c. 3808. e regione eius dextrorsum scribe
Factum à latere secundo in coefficiens solidum. p. 284. l. 24. ablatitia c. addititia p. 288. l. 15.
numerus 13104. promoue dextrorsum vnius figuræ spatio p. 295. è regione num 84. l. 4. scribe
coefficiens. & l. 13. 4604. a. 4704. p. 297. l. 25. 47300. c. 49360. p. 298. 197128. c. 197120. p.
303. l. 16. 2130. c. 2160. & l. 23. lege 225125. & l. 24. 14705. c. 1470. p. 307. l. 20. dele 1. & è
regione 880. l. vlt. scribe Reliquum resoluendi cubi p. 309. l. 41. è regione 352. scribe Summa
additiorum l. 42. 376125. c. 376. & è regione scribe Excessus; inferius lin. sequenti scribe
127125. è regione scribe Reliquum resoluendi cubi p. 310. infra l. 23. scribo 98. è regione
scribe summa additiorum l. 25. dele 14705. & l. 26. 220425. c. 127125. p. 320. l. vlt. 13375. c.
15375. p. 323. l. 13. 32520. c. 34520. p. 324. l. 9. 32. promoue sinistrorsum, item, & l. 10. n. 24. &
fiat dispositio talis 32 & l. 14. 54520. c. 34520. p. 329. l. 33. in cubum primi c. in
24 quadruplum cubum primi p. 333. l. 12. 200. c. 200. R. & infra
8 l. 24. lege 4000. A latere p. 337. l. 15. 176. c. 1176. primo in
40 coefficiens solidum, quæ verba dele l. 46. p. 340. l. 2. 160. c. 80.
—— quæ scribe, vt antecedat vnius figuræ spatio lin. 7. 244536. c.
34520 88426. p. 344. l. 9. 998720. p. 350. l. vlt. 243388. c. 244382. l. 14.
Quo subtracto ex numero c. ex quo subtracto numero p. 357. l. 21. 300. R. c. 800. R. p. 384. l.
26. hoc autem subtrahatur l. 27. ex numero efficiendo c. numerus efficiendi p. 423. l. 26. Radi-
cum numerus c. Radicum pretium p. 472. l. 30. Cæterum auterum autem c. causè autem p.
488. l. 8. eiusdem c. cuiusdam,

Admonitio.

REliqua errata, quæ Typographi, & Reuisoris incuria irrepserunt præcipue in Paradigmis, quantum ad notatam dispositionem, siue collocationem studioso Lectori corrigenda relinquimus. Corrigere autem ea facile poterit, si quæ à nobis præcepta traduntur, quantum ad earum collocationem diligenter obseruauerit.

AD

AD LECTOREM.

SI quid esset, Benigne Lector, quod lucubrationibus meis in studijs bonarum Artium cõsequutus fuissem; nihil Typis committere planè animum induxeram, calamumq; reprimere mihi duxeram opportunum; hoc sæculo quandoquidem Aristarchorum feracissimo laboriosum est quidpiam in re litteraria moliri, quod ipsis arrideat, quod ipsis nauseosum non sit: hi namque diligenter id animo tractant aliorum monumenta versantes; idq; meditantur, vt aliquid in ipsis adinueniant; si tamen adinueniunt, quod aliquo pacto minùs probandum esse videatur: immemores cecinisse Lyricum,

Sunt delicta tamen, quibus ignouisse velimus,
Nam, neq; chorda sonum reddit, quem vult manus, & mens; *Horatius in Arte Poetica.*
Poscentiq; grauem persæpe remittit acutum,
Nec semper feriet quodcunq; minabitur arcus.

Recusant eundem audire canentem.

Verùm vbi plura nitent in carmine non ego paucis
Offendar maculis, quas, aut incuria fudit:
Aut humana parum cauit Natura.

Eorum vnusquisq; se credit inter eruditiores Olympum (vt cum quodam Neoterico loquar) quasi eminentiores montes; hoc est sublimiora cæterorum ingenia, vix ad eius radices se se extollant: quasi nimirum ingenij serenitate fastigium illius fæliciter æmulantes, in perpetua quadam ignorantiæ caligine reliquos omnes ipsi miserandos inspiciant: eorum quisq; se inter alios tanquam Solem inter minora Sydera credit; quasi cæteri si qua luce splendescant, eam ab ipso mutuentur; quinimo omnia tenebris inuoluta suis radijs illustrantem, & illustria obumbrantem haberi Solem omninò contendit. Oh quot Suffeni, qui quidem in operibus suis plurimum se mirantur, sibi blandiuntur, & arrident! Deplorent quæsò Mundi calamitatem, quòd post eorum mortem hic sit, vt priùs in ignorantiæ tenebris remansurus: quasi cum ipsis Sapientia in hoc Orbe terrarum orta, cum eisdem sit moritura.

Ante faustum eorum natalem fuit ne perpetuò quidem natura prorsus inualida ad ferax ingenium in lucem edendum, fæcunda solùm nascentibus ipsis, sterilis autem in posterum? Est ne fortassis eorum ingenium recti mensura, ad quam vnusquisq; debeat aptari? Oh incredibilem hominum audaciam, oh impudentiam irridendam! Quorsum tanta iactantia, tantusq; aliorum contemptus? Torrentes (vt Lepidissimus ille dicebat) aquarum inopes, magno strepitu ad mare defluunt; altus verò amnis, placidè citra murmur prolabitur. At non mirandum; propterea quòd obtrectatione alienæ scientiæ famam sibi aucupantur. Eos oportet meminisse, aliena facta, vel cuilibet facillimum esse reprehendere. Nec existiment, se posse Lyricum imitari canentem;

Horatius in Arte.

ego fungar vice cotis, acutum
Reddere quæ ferrum valet, exors ipsa secandi.

Nam ipsis exprobrarem illud.

Martialis lib.1.Epig. 92. ad Laelium.

Carpere vel noli nostra, vel ede tua.

Aristoteles Politicorũ lib.8.cap.6.

Siquidem summus ille Peripateticorum Princeps non insulsè protulit. *Non est porrò obscurum valde referre ad id, vt cuiusdammodi homines fiant; si quis ipse in muneribus, operibusq; fungendis versetur. Nam fieri non potest, aut vix quidem certè, vt qui non fuerunt, munerum, atq; operum participes boni iudices artis fiant.* Annibal non immeritò contemnebat Phormionem illum, qui hostem cum numquam, numquam castra vidisset, se adstante copiosè tamen de Imperatoris officio, & de omni re militari disputare auderet.

Hęc vna huius tempestatis mordax dicacitas me Pythagoræ discipulum, hoc est taciturnum reddere potuisset, & velut Agathonis lapis mihi silentium indixisset, nisi me haud lateret, eorum dicta ex pelui fulgura esse, & plus apud me bonarum artium studiosos adiuuandi cupido valuisset, quàm timor obtrectationis futuræ. Illud tamen per-

perſpicuum eſt; ſi quandoq; nodum aliquem ipſis propoſueris diſſoluendum, te auditurum eos dicentes, vel ſe difficultatem non aſſequi: vel per curas, quibus detinentur ſibi nauare operam ſtudijs non licere, vel id genus alia, quibus haud laborioſum eſt deprehendere nihil ijs cordi eſſe, niſi ſe ipſos laudibus efferre, vt proprij nominis immortalitatem conſequantur: nihil ipſis antiquius, quàm curare, vt alij, tanquam ſi his offuſa ſempiterna nox eſſet, in tenebris vitam traducant. De his tamen hactenus; Qualeſcunq; mei fuerint labores excipe, Benigne Lector, hilari animo, & vtiliores à me, ni fallor, in re litteraria lucubrationes expecta, dum interim te ſaluere etiam, atq; etiam iubeo. Florentiæ, Anno à Virginis partu 1654. Kalen. Ianuarij.

TOTIVS OPERIS PRAEFATIO.

OMNIVM cuiuscunq; ordinis disciplinarum, si quæ præclaris, egregijsq; laudibus efferenda Sapientum omnium consilio iudicetur, si quæ est, cuius nomen honestissimum, commendatissimumq; nobis par sit ad Sydera vsq; tollere, ea profectò Mathesis est, quæ cæteris rei consideratæ dignitate, demonstrationum firmitate, perspicuitateq; mirum in modum antecellit. Vnam tamen si excipias, quæ id contemplandum assumit, cuius præstantiam, atq; excellentiam, nullis finibus contineri, luce est meridiana splendidius; & certè, neq; lubentiùs, quàm huic præstantissimæ, neq; liberiùs, quàm huic vtilissimæ laudantis operam impendi decet. Huius tamen innumeris laudibus hic silentio inuolutis cum sapientissimo Socrate sat erit vnum illud adnotasse. Illos, qui præcipuo quodam naturæ munere sunt ad Mathesin accommodati ad omne disciplinæ genus acutiores apparere, qui verò hebetiori sunt ingenio, hac vna eruditos nihil etiam amplius vtilitatis assequentes se ipsis ingeniosiores effici solere; quæ namq; dicebat ipse, difficiliorem, addiscenti, cogitantiq; laborem, curamq; ingerat, non facilè vllam ex rationalibus, honestisq; disciplinis præter hanc inuenies; quod autem difficile, ac arduum, illud idem præclarum asserebat eloquentissimus Tullius. Matheseos autem illa pars illustris, cæteris dignitate præstans, celebris, atq; summopere commendanda, nomine Algebra nuncupata, quæ si rem inspicias, quam sua contem-

Mathematicarū dignitas.

Socratis dictum.

Algebra Mathematicarū præstantissima pars.

platione persequitur, secretiora naturæ mysteria perscrutatur; & quasi solerti labore, illius dum arcana rimatur: eadem summa felicitate, non citra mortalium admirationem, præter omnem spem consequitur.

Hæc illa, quæ de natura celebriora mysteria auarè occultante, quasi victoriam reportans, atq; triumphans: iurè, ac meritò potest gloriari. Hoc planè mirandum, quòd illa reluctante, quæ in veritatis thesauris clauduntur: quæq; ibi delitescentia, nulli consequi licet; & si cæteras Mathes eos partes diligenter percurras, vni huic obuiam occurrunt. In hoc fortasse deficiens ista videbitur; quòd etiam si numeros tàm excelsa contemplatione persequatur, non omnibus sit numeris absoluta; quòd amplissimarum, ac innumerarum suarum laudum præconia minimè valeat, ad numerorum calculum redigere. Sed caue ne te iniquum iudicem præbeas; hoc enim nescio quid redolet sublimitatis, ac eius præstantiam arguit. Hæc autem non quadam probabilitate conijciens, sed certissimis, euidentissimisq; demonstrationibus suffulta, sua promit oracula; non minùs, quàm quæuis alia, quæ certitudine, ac perspicuitate, cæteris omnibus creditur anteire. Verùm enim verò, si præstantissimam hanc, quòd sublimia mysteria recludat, occultissimas causas perscrutetur; atq; adeo maxima tractet, certitudine summa, & ineffabili quadam perspicuitate sectetur: inuitus etiam fatearis, & æquo animo feras oportet, vt ad eius laudem immortalem hoc etiam decoris, quasi coronis accedat; nimirum eam sic inter cæteras eminere;

Quantù n lenta solent inter viburna cupressi.

Contende, si potes, amabò, vt aliam inuenias, quæ ex Matheseos thesauro deprompta in ijs, quæ inter mortales vsu venire solent, non solùm maiori pompa triumphi, in debellanda mortalium ignorantia; sed vtilitate maiori commendabilior videatur; Quid igitur mirum, si Græcia docta scientiarum mater, & altrix se hanc peperisse glorietur? Quid mirum si Palladi hoc tantummodo beneficio se deuinctam profiteatur? Nullum præclarius nimirum ei acceptum referens, quàm hoc splendidissimum animi decus. Multoq; minus peritiores Arabes nobis admirationem ingerent, quòd hanc quam maximè celebrarint; quandoquidem hæc vna

Græci se hanc adinuenisse profitentur.

Arabes hanc Matheseos par-

Pro-

Problematibus innumeris facientes, satis: citra puluerem Aenigmata proposita fęliciter enodantes, proprij nominis laudes, ad sydera sustulerunt. Quò cum ingenij fertilitate se superari à Gręcis minimè paterentur; aduertentes magnum, atq; veracem esse solertię testem huius eximię contemplationis inuentum, quasi Mineruę portentum, non ijs acceptum, sed sibi referendum esse maluerunt. Hęc planè illustria sunt, titulisq; pręclarissimis decora: quę etiam à sagacissimis viris admirationem extorqueant. Longè tamen sublimiora, quę recentiorum perspicacitate nouę huius nominis Arti comparatę iurè meritoq; debentur. Nihil in illius laudibus tàm excelsum, quod in hac longè sublimius non sit; nihil in illa tàm illustre splendescit, quod in hac pręclarius non eniteat. Humanus animus hac vna sic exornatus videtur, vt cęterarum disciplinarum ornamenta in eo, quasi delitescant huius obruta radijs. Nemini cęlum syderibus exornatum, & sculptum intueri licet, dum ingenti splendore Solis vndequaq; perfunditur. Si quis Dedalæo ingenio Matheseos immensum æquor conscendere auderet, velitq; plenissimis velis, quasi archipirata profiteretur; hac destitutus, vtpote lumine viduatus, mea sententia desiperet; mihiq; videretur ille, de quo Lyricus ad hominis audaciam detestandam elegantissimè cecinit.

tem, quam maximè celebrauunt.

Cum Gręcis de eius inuentione contendunt.

Noua Algebra maximè commendabilis.

Illi robur, & æs triplex
Circa pectus erat, qui fragilem truci
Commisit pelago ratem
Primus, nec timuit præcipitem Affricum.

Horatius lib. 1. Ode 3.

Is adeo magnos difficultatum scopulos offenderet; vt

Vix durare carinæ
Possent imperiosius
Aequor

Vtq; tibi longè magis constet huius artis pręstantia, hominem illum animo si placet, aduerte minùs excelsa numerorum contemplatione contentum, requisitum, vt vel ad humanam necessitatem in ijs, quę inter mortales vsu venire solent: vel ad solius veritatis indagationem Problema, vel Theorema explicet, parum etsi difficultatibus inuolutum: illum enim perspicies, vndiq; vexatum angustijs, huc illuc cursitantem, vt vnius, vel alterius, melioris

Eius dignitas magis declaratur, & vtilitas explicatur.

lioris

lioris notæ monumenta versans, quod in optatis habet assequatur. At verò, vt summa spe animatus varia, diuersaq; volumina adit, & consulit: sic exanimatus eadem abijcit, quòd se incassum laborasse cognoscat; conspicies illum mæstè cogitantem, mœrore contabescentem, tædioq; affectum sic, vt nihil supra.

Vtilitas eius comprobatur.

Non secus ac iter aggressus, cum occidente Sole, vel nullus est color rebus, ad diuersorium peruenire non licuit: deuius, tenebris horrendis deterritus progredi nequit, inscius quid agat, spe tantùm futuræ lucis ad optatum locum se peruenturum sistit. Ita quidem ille, cuiusdam demonstrationis aggressus iter; lumine veritatis, quod ex elementis Mathescos tenue quidem affulget, omnino destitutus, tenebris inuolutus gradum sistet, quo se vertat ignorans non nisi huius disciplinæ, tanquam nouæ radiantis præsidio lucis iter prosequuturus. Ferax adeo campus Mathesis est, quo certè non feracior alter: at in latebris veritas constituta non obuia occurrit. Hæc autem venatrix est; quæ sagaci quodam, vt ita dicam, odoratu cuncta indagat, rimatur, perquirit, assequitur. Veritas adeo iacet occulta, vt Sapiens ille in profundissimo puteo, sibi eam esse persuaserit; inde minimè exire, nisi videlicet Saturni, hoc est diuturni temporis vi extrahatur. Sed hoc inuito Mathescos ista pars veritatem absconditam, quàm citissimè extrahit.

Cæteræ Mathesews partes commendantur.

Geometria.

Cætera quoq; Mathescos partes dignissimæ sunt, vt summis laudibus efferantur. Geometria quidem suis gloriari potest. Hæc illa, qua præditum esse oportebat adeuntem Platonis academiam. Hæc illa, quæ admirandis operibus mortales delectat, eorundem consulit vtilitati, ampla nimirum terrarum spatia, Turrium, atq; Montium celsitudines, profunditates abyssi, Maria, Terras, Cælos, vniuersum Orbem sedulò dimetitur.

Astronomia.

Nec Astronomia destituitur præconijs suis, vtpote illa, quæ duabus alijs Geometria, & Arithmetica suffulta Cælum conscendit, illius, Syderumq; perennem conuersionem, ortum, occasum, sua contemplatione persequens immanem illorum cupiditatem explet, qui animi sublimioris impulsu in illa fulgentissima lumina rapiũtur.

Musice.

Musice quoq; iucundissima, & vtilissima tractat: Quid Melodia suauius? Quid humano generi vtilius? Dorius quandoquidem concentus prudentiæ largitor est, & castitatis effector. Phrygius

pu-

pugnas excitat, votumq; furoris inflammat. Aeolius animi tempestates tranquillat, somnumq; placatis affert. Lydius intellectum obtusis acuit, & terreno desiderio grauatis cælestium appetentiam inducit animorum formator eximius. Magna hæc profectò sunt, de quibus Modulatrix disciplina suam tractationem instituit. Quid verò non operosum, non mirandum Mechanicæ præstat?

Mechanicæ.

Hæc etiam inuita Natura ingentia pondera sursum euolare facit. Hæc machinamenta molitur, quibus mortalibus, prodigiosa quidem Dedalæis operibus, & Archimedæis attestantibus patrare licet. Cæteræ omnes laudibus sunt quidem cumulatissimæ. Sed nulla maioribus, quàm Arithmetica, quàm præcipua eius pars, quæ consueuit Algebra nuncupari, quàm denique hæc noua excogitata.

Arithmetica cæteris præfertur.

Vniuersæ Arithmeticæ gloriam, & vtilitatem prætermitto; cum eam neminem latere mihi persuasum habeam. Vna tamen sufficeret Romanos olim sagacissimos, atq; seuerissimos in liberis educandis, in nulla alia disciplina passos esse pueros, quàm in hac se iugiter exercere.

Eius æstimatio apud Romanos.

Algebra præstantissima Arithmetica pars.

Neq; hìc prosequar laudum amplissimarum præconia superius adumbrata veteri, quæ debentur Algebræ. Noua tantum sibi gloriæ vendicauit, vt Matheseos vniuersæ ditissimum thesaurum, nulla expeditiùs, vel fæliciùs, quàm hæc, quasi clauis in Cælesti quadam officina elaborata gratia communis mortalium vtilitatis, etiam reluctante Natura possit aperire.

Noua celebratur, vtpote veteri præstantior.

Celebris igitur iure credita Matheseos pars, quæ plura feliciter occultata detegit, quàm aliæ suscipiant detegenda; plura explicat, & absolutissimè tractat, quàm aliæ delibent; & quidem genere maxima, occultatione causarum difficillima, consecutionum implicatione laboriosissima, multiplicitate combinationum implicatissima, atq; demum temporis diuturnitate longissima. Hæc analysi quandoquidem instituta sua, eo progreditur ad veritatem indagandam, quò alteri minimè licet peruenire. Per analyseos vestigia huic demonstrare conceditur, quod alijs omninò denegatur; adeo nimirum, vt veritas nullos fines agnoscens, ab hac vna finibus coerceri patiatur; quò non immeritò dicerem Palladem è cætu litteratorum, nullum maius habere vectigal, quàm illud, quod huius disciplinæ cultor labore exigit suo: ac proinde non mirandum, si verticem extollens pronunciauerit.

 Nul-

Nullum non Problema soluere.

Vieta ad calcem isagoges.

Vtramq; nos autem explicandam: nouis inuentis, firmisq; demonstrationibus muniendam suscepimus; nam etiam quicunq; sunt habiti mortalium Sapientissimi, multa scisse dicuntur, non omnia, neq; contemplationibus suis maiores nostri veritatis omnia vestigia detexerunt. Veritas enim omnibus patet, nondum est occupata: multum etiam ex illa futuris relictum est; vt Moralis asserebat, eosq; docendo sterilis non euasit, vt nobis nihil sui possit impertiri.

Seneca.

Nomen huius artis explicatur.

Veteris Algebrae inuentor.

Diophantus Alexandrinus in proœmio.

Ad hanc autem disciplinam, quod attinet, si quid sibi velit nomen eius inquiras, scito illud Arabicum esse restaurationem significans, sic appellata, quòd restauratione passim vtatur: non à nomine Gebra appellatione desumpta, quasi ab auctore suo; quem potius credendum opinor Diophantum Alexandrinum initio librorum ad Dionysium sibi huius disciplinae gloriam inuentionis deferentem, atq; testantem ad suam vsq; tempestatem in tenebris latitasse, inquit enim. Quod negotium, vt videtur fortasse difficilius (quippe ignotum adhuc) cum animi incipientium ad bonam de re dextrè conficiendam, spem concipiendam nequaquam sint procliues. *Varia est quoq; nomina sortita; quandoquidem Almucabula nuncupari consueuit, quòd oppositione inter duo extrema vtatur nomine illo significata. Ars etiam dicitur magna, quòd caeteris Arithmeticae partibus dignitate longè antecellat; Regula verò Radicis, vel census, seu quadrati solet nuncupari, quòd in enodandis Aenigmatibus, Radicibus, & Quadratis vtatur. Nos autem Itali Regula* della Cosa, *consueuimus appellare; cum Radicem quaesitam* Cosa, *nuncupemus.*

Varia nomina sortita est. Almucabula dicitur.

Ars magna.

Regula rei, vel census dici consueuit.

Noua Algebrae inuentor.

Vetus cur numerosa dicatur.

Noua cur speciosa.

Nouae autem huius inuentorem Franciscum Vietam extitisse ambiget nemo; Diophantaea proinde, vt nuncupabitur illa, sic etiam haec Vietaea dicetur Illa, quòd numerorum characteres adhibeat Numerosa solet appellari; haec autem quòd Alphabeti formas, speciesq; frequentet speciosa nuncupabitur.

At verò desumentes initium à Numerosa, tanquam à vetustiori, Speciosae etiam fundamento, nostram tractationem aggrediemur. Nominibus autem explicatis, si quis quaereret, quid

ipsa

ipsa sit, fies voti compos, ni fallor, hac intellecta definitione. Algebra scientia est, quæ ex datis magnitudinibus æqualitatis beneficio magnitudinem ignotam adinueniens, explicans, atq; demonstrans Problemata non soluta soluit; malè soluta reijcit; atq; Theorematum veritatem inquirit. *Quæ quidem definitio satis videtur, ni fallor, huius facultatis naturam explicare, quemadmodum facilè constabit ijs, qui in hoc puluere fuerint, etsi mediocriter versati.* *Algebræ definitio.*

At verò in vtraq; Algebra laboribus exantlatis, & vtriusq; artis explicatione absoluta, ad iucundissimum, vtilissimumq; tractatum de Methodo, tàm noua, quàm antiqua Resolutionis, & Compositionis Mathematicæ faciemus gradum: in quo vnicuiq; maximam vtriusq; Algebræ vtilitatem licebit intueri, animaduertenti magna facilitate, nullo negotio ea Problemata resolui: Aenigmatibus fieri satis, quæ Matheseos professoribus plurimum negotij facessunt. Huic autem contemplationi veteris Algebræ vsum ad Geometricè Problemata resoluenda non inutiliter annectemus: vnde constabit veterem Logisticen, non tàm angustis finibus coerceri; quemadmodum nonnullis videbatur; eos enim longè ampliores in Aenigmatibus enodandis ostendemus, quorundam Problematum exemplo, quæ quidem huius Artis, tàm veteris, quàm nouæ præsidio destituta prorsus videbantur. His autem ea, quæ constructione operaria non egent, subijciemus, postremum locum arti, methodoq; deprehendendi, & impossibilitatem, & vanitatem Problematum relinquentes (quod etiam in Numerosa tetigimus) qua quidem contemplatione huius celebris, penèq; Diuinæ Matheseos partis extrema persequemur. *Tertius Operis diuisio, & ordo.*

SYNOPSIS EORUM,

Quæ in hoc Volumine continentur.

CAROLI RENALDINII
PATRITII ANCONITANI,
Et in celeberrima Piſarum Academia Philoſophiæ Ordinarij Interpretis.

ALGEBRA VETVS, DIOPHANTAEA, SIVE NVMEROSA.

De Numeris Denominatis, ſiue Poteſtatibus.

CAPVT PRIMVM.

ETSI ferè omnes, qui diſciplinam hanc tractandam ſuſceperunt, triplex numerorum genus contemplentur; nihilominus ſi rem ipſam introſpicere diligenter placet, comperiemus vnicum eſſe in hac Arte tractandum, vtpote illi peculiare, & proprium: quandoquidem duo reliqua, nimirum irrationalium, ſiue ſundorum ſimplicium, & compoſitorum, potiùs ad vulgarem Arithmeticam pertinent, quos ibi nos latè proſequuti ſumus. Ad hanc igitur partem illud propriè genus numerorum attinet, qui in quauis Geometrica progreſſione ab vnitate ſumunt initium; qui quidem varia ſunt nomina ſortiti; propterea quod quibuſdam placuit eos Quantitates, Species, Dignitateſq; nuncupare. Maluerunt alij numeros eoſdem Coſſicos, itemq; Figuratos, atq; Denominatos appellare. Franciſcus autem Vieta Mathematicus præſtantiſſimus Diophantum Alexandrinum imitatus, Poteſtates eos nuncupauit. Cum autem noſtri conſilij ſit nedum Vietæam, ſed etiam Diophantæam Algebram pertractare; propterea hoſce numeros contemplabimur, primò quidem eorum

Numeri, quos propriè Algebra ſpeculatur.

rum

rum nomina, & characteres explicantes, ad eorundem Algorithmos deinceps progressuri.

In proposita igitur quacunq; Geometrica progressione initium deducente ab Vnitate, Primus terminus, hoc est vnitas, simplicem, ac absolutum repræsentat numerum. Cæterum *Progressio Geometrica est series plurium numerorum se in eadem proportione superantium.* Vt est e. g. hæc numerorum series 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. Vel hæc 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c. Prima progreditur per proportionem duplam, adeo vt quilibet numerus duplo maior sit eo numero, qui eum proximè antecedit. Secunda verò per proportionem triplam.

Progressio Geometrica quid.

Vtraq; autem harum progressionum ab 1, incipit; potest autem institui progressio Geometrica initium non desumendo ab 1, sed à quouis numero; vt si esset hæc numerorum series 3, 6, 12, 24, &c. vel 5, 10, 20, &c.

Sed eò redeat vnde huc flexit oratio. In qualibet Geometrica progressione sumente initium ab Vnitate, Primus terminus, hoc est vnitas numerum absolutum, ac simplicem repræsentat; Secundus autem terminus vnitatem sequens Radix omnium sequentium terminorum dicitur: hic enim est Radix tertij termini; cum ex eius multiplicatione in se ipsum procreetur tertius; & ex multiplicatione eiusdem secundi in tertium procreetur quartus; & ex multiplicatione eiusdem secundi in quartum producatur quintus, & sic deinceps. Hæc est enim numerorum continuè ab vnitate proportionalium natura. Si enim fuerint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales; constat ex demonstratis ad 10. Propositionem Octaui lib. Elementorum secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc tertium fieri quartum, ex eodem autem in hunc quartum produci quintum, & ita deinceps. Demonstratur enim ibi, ex eo quia C, D, E, A, sunt continuè proportionales ab vnitate; D, tertium numerum ab vnitate fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E. Cum enim sit, vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad E, & E, ad A, æque metietur vnitas ipsum C,

&C,

& C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A; At verò vnitas metitur ipſum C, per C, ergo C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A, per C, metietur. Proinde C, ſeipſum multipli-

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1
Vnitas.

cans fecit D, multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A, ob id erit ſecundus ab vnitate ex numeris continuè proportionalibus radix omnium ſequentium, &c.

Hi porrò numeri cuiuſcunq; progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis, Denominati, Coſſici, & Dignitates Algebricæ nuncupantur. Characteres autem, & nomina horum terminorum non eadem ſunt apud omnes; proinde iuxta duplicem viam, Diophantæam vnam, ac Vietæam alteram in medium afferemus.

Nomina, & Characteres iuxta quoſdam Analyſtas.

N. Numerus ſimplex, & abſolutus.

1. ℞. *Radix, Latus, Italicè verò* Coſa, *Latinè Res: Ab aliquibus verò Tantum appellatur, & ſolet hoc pacto deſignari nimirum co.* 2.
2. *Q. Quadratus, Zenſus, Cenſus, Potentia. Hanc autem Poteſtatem aliqui ſic deſignant ce.* 4.
3. *C. Cubus aliqui eum ita deſignant cu.* 8.
4. *QQ. Quadrato-quadratus, Biquadratus, Cenſicenſus, Zenſizenſus, Potentia potentiæ, & hoc pacto depingitur ce, ce.* 16.
5. *SS. Primus relatus, Solidus primus, Surdeſolidus, Surſolidus, Superſolidus, & à quibuſdam ſic deſignatur Rel. P.* 32.
6. *QC. Quadrato-cubus, Cenſi-cubus, Zenſi-cubus, Potentia cubi, Cubi-Zenſus, Quadrati-cubus, Cubi-quadratus; &*

hanc

hanc Potestatem sic aliqui designarunt ce, cu. Quamobrem, vt significarent quatuor quadraticubos, hoc modo scribere solebant 4 ce, cu, ad significandos octo quadratocubos, ita scripserunt 8 ce, cu, &c. 64.

7. *BSS. Secundus relatus, Solidus secundus, Bsurdesolidus, Bisurdesolidus, Sursolidus, Supersolidus secundus, Relatus secundus, & solet etiam hoc pacto depingi Rel. 2.* 128.

8. *QQQ. Quadrato-quadrato-quadratus, Triquadratus, Censi-censi-census, Zensi-zensi-zensus, Quadratus quadrati-quadrati; & à nonnullis ita designatur ce, ce, ce.* 256.

9. *CC. Cubi-cubus, Cubus-cubi, Bicubus, & à plerisq; hic adhibetur character, cu, cu.* 512.

10. *QSS. Quad. primi relati, Quadrati solidus, Census primi relati, Zensurdesolidus, Potentia primi relati, Quadr. Surdesolidi, Surdesolidus quadrati. Aliqui eum sic designant Ce. Rel. P.* 1024.

11. *CSS. Tertius relatus, Solidus tertius, Csurdesolidus, Zensurdesolidus, Supersolidus tertius, & nonnulli hoc vtuntur charactere Rel. 3.* 2048.

12. *QQC. Quadrato-quadrato cubus, Censi-censi-cubus, Zensi-zensi-cubus, Cubus de potentia potentiæ.* 4096.

13. *DSS. Quartus relatus, Solidus quartus, Dsurdesolidus, & à quamplurimis ita designatur Rel. 4.* 8192.

Cæterum diuersitatem characterum, & nominum operæ pretium duximus adnotare, ne discendi studiosum in varijs libris perlegendis vexet, aut remoretur ambiguitas. Verùm enim verò præter hæc, oportet aduertere characterem N, significare numerum absolutum, & simplicem: adeo vt numerus cui appositius fuerit pro absoluto, & simplici habeatur; itaut 5. N. nil aliud significent, quàm quinq; vnitates simplices, & absolutas. At verò quia hic character plerumq; negligitur, & omittitur, nec solet numeris apponi, quando pro absolutis habendi sunt; ob id siuè aliquis numerus hoc signum gerat, siuè non, accipi debet pro numero absoluto.

Se-

Secundum characterem, dicebamus esse ℞, atq; significare Radicem, vel Rem; adeo vt numerus, cui sit appositus, à Radicibus denominetur. Itaq; 6 ℞, significant sex radices, vel res: ita fit, vt si progressio Geometrica habeat e. g. 2. in secundo loco; 6 ℞, sint duodecim vnitates: si verò habeat 3. in secundo loco; 6 ℞, sint decem & octo vnitates, & ita de reliquis. *Secundus character est ℞.*

Dicebamus tertium characterem esse Q, & significare Quadratum; hunc eundem characterem Censum à plerisq; notauimus appellari. Itaut 6 Q, sint sex Quadrati, vel Zensi; quo fit, vt si tertius numerus progressionis Geometricæ sit 4. fit inquam, vt 6 Q, sint viginti quatuor vnitates; si verò 9, sit tertius numerus ab vnitate 6 Q, valebunt quinquaginta quatuor vnitates. *Tertius character est Q.*

Quartus character C, cum denotet cubum, 6 C, significabunt sex cubos; adeo vt si cubus fuerit 8, necessariò 6 C, sint 48, vnitates; si cubus fuerit 27, & 6 C, sint 162. vnitates.

Nomina, & Characteres iuxta Diophantum, & Vietam.

1.	N.	*Latus, siue Radix.*	2.
2.	Q.	*Quadratus.*	4.
3.	C.	*Cubus.*	8.
4.	QQ.	*Quadrato-quadratus.*	16.
5.	QC.	*Quadrato-cubus.*	32.
6.	CC.	*Cubo-cubus.*	64.
7.	QQC.	*Quadrato-quadrato-cubus.*	128.
8.	QCC.	*Quadrato-cubo-cubus.*	256.
9.	CCC.	*Cubo-cubo-cubus.*	512.
10.	QQCC.	*Quadrato-quadrato-cubo-cubus.*	1024.
11.	QCCC.	*Quadrato cubo-cubo-cubus.*	2048.
12.	CCCC.	*Cubo-cubo cubo-cubus.*	4096.
13.	QQCCC.	*Quadrato-quadrato-cubo-cubo-cubus.*	8192.

Non omnes conueniunt cum Diophanto in nominãdis dignitatibus.

Liquet ex hactenus dictis à Diophanto, Vietaq; dissentire nonnullos; etenim quadrato-cubus apud Diophantum, & Vietam inter Potestates quintum sortitur locum, apud reliquos autem sextum. Insuper apud Diophantum, atq; Vietam cubo-cubus est sexta Potestas; at apud alios nona, & sic de reliquis, vt aduertentibus cernere licet. Nos autem ad denotandam Radicem loco N, vtemur R, in cæteris non dissentimus, & charactere N, vtemur ad significandum numerum absolutum.

N, quid significet.

Superest, vt hic methodum aperiamus, qua possimus inquirere characteres datis locis potestatum, & contra; idq; iuxta duplicem viam: & qua arte Potestates ipsas in infinitum propagare valeamus. Interim primò videamus, quid nam sibi velint denominationes illæ, & qua ratione ducant originem à termino cuiuscunq; progressionis Geometricæ ab Vnitate initium desumente. Animaduertendum autem est Potestatum loca denotari per numeros dispositos secundùm naturalem seriem, initio desumpto ab vnitate; qui quidem numeri à plerisq; dicuntur exponentes, & ab alijs indicantes; cur autem sic dicantur, mox videbimus.

Exponens numeri, qui dicantur.

Explicatur descriptio progressionũ naturaliũ, et Geometr.

Initium sit, vt dictum est, ab Vnitate, loquendo de Potestatum exponentibus; alioquin naturalis progressio ducit originem ab o, exponente numeri absoluti, si tamen exponens propriè dici potest.

Ex superiori descriptione à nobis posita perspicuum relinquitur significatum diuersarum appellationum, & origo earundem à terminis Geometricæ progressionis.

Superior tabula explicatur.

Medio loco posuimus characteres, quibus Potestates designantur: ad læuam legentis posuimus progressionem naturalem, numerorum incipientium à o, quorum est munus exponere Potestatum characteres medio loco positos, terminosq; Geometricæ progressionis ad dexteram legentis.

Cur numeri naturalis progres-

Pluribus autem de causis dici possunt Exponentes; Prima est, quia per terminum o, respondentem numero absoluto

ſoluto denotatur ipſe numerus ſimplex, & abſolutus ex vnitatibus compoſitus, proinde nullo exponente inſignitur; niſi hanc figuram o, exponentem dicere velimus; hunc numerum abſolutum aliqui, & nos cum ipſis hoc deſignamus charactere N; etſi talem eſſe intelligendum velimus cum aliquis numerus ſine vlla nota ponitur; Vt, 2, 4, 6, 20, &c. Significamus autem per notam o, numerum illum nullam habere denominationem, ex numeris denominatis. *ſimilis dicãtur exponẽtes. Prima cauſa.* *Nota o, quid ſignificet.*

Secunda cauſa, cur commemorati numeri exponentes dicantur, ea eſt, quia per ſecundum terminum eiuſdem naturalis progreſſionis reſpondentem characteri N, ſecundum Diophantum, & Vietam, & ſecundum nos R, & numero 2, ex alio latere in Geometrica progreſſione conſtituto denotatur R, hoc eſt Radicẽ eſſe primam denominationẽ in numeris Denominatis, vocariq; Radicem; itaut numerus ſecundus in Geometrica progreſſione, primam ſortiatur denominationem; & ſic de reliquis diſcurrendum eſt. Tertius deinde terminus 2, oſtendit tertium numerum Geometricæ progreſſionis eſſe ſecundam denominationem, & appellari Quadratum, & ita de cæteris intelligendum eſt. *Secunda ratio.*

Tertia ratio eſt, quia quilibet duo numeri exponentes appellati, ſi inuicem multiplicentur, producunt exponentem illius characteris, qui componitur ex illis characteribus aſſumptorum exponentium, ſi loquamur ſecundum communem viam; at iuxta Diophantum, ſi exponentes ſimul addantur fit exponens poteſtatis, quæ conſtat ex characteribus aſſumptorum exponentium, vt infra dicemus. Exemplum in via communi. Si ſumatur numerus 2, exponens Quadrati, & 3, exponens Cubi, ducanturq; adinuicem, producitur numerus 6, exponens poteſtatis, characteriſq; QC; ſcilicet; Quadratocubi; quæ quidem poteſtas, conſtat ex Q, & C, poteſtatibus aſſumptorum exponentium 2, & 3, ſed iuxta Diophantum addantur ad inuicem 3, & 3, fiet numerus 6, exponens poteſtatis CC; & ſic de reliquis. *Tertia ratio.*

 Quar-

Quarta ratio. Quarta ratio, quia ſecundum communem viam, ſi diuidatur, quicunq; numerus maior per minorē quemcunque; quotiens, integer ſi fuerit, deſignat exponentem characteris, qui relinquitur, facta ſubtractione characteris numeri exponentis diuidentis ex charactere numeri exponentis diuiſi. Vt ſi 6, exponens huius characteris QC, diuidatur per 2, exponentem characteris Q, fit quotiens 3, exponens characteris C, qui quidem relinquitur, ſi ex hoc charactere QC, exponentis 6, tollatur character Q, exponentis 2. Prætereà ſi numerus 12, exponens characteris QQC, diuidatur per 4, exponentem characteris QQ, fit quotiens 3, exponens characteris C, qui relinquitur, ſi ex QQC, tollatur QQ. At iuxta Diophantum, ſi componens numerus exponens ſubtrahatur à ſuo compoſito exponente, relinquitur exponens characteris, qui remanet, ſi ſubtrahatur character ſubtracti exponentis à charactere exponentis, à quo fit ſubtractio.

Quinta ratio. Quinta ratio eſt, quia deſignant idem exponentes progreſſionis naturalis numerórum; deſignant inquam quot proportiones Geometricæ progreſſionis intercedant inter quemlibet numerum eiuſdem Geometricæ progreſſionis, & vnitatem: exponens enim numerus ſemper eſt vno minor, quàm numerus terminorum progreſſionis Geometricæ; tot ſunt enim proportiones ipſæ, quot ipſi termini vno dempto, vt 1, ſupra R, & ſupra 2, ſignificat inter 2, ſiue Radicem, progreſſionis Geometricæ, atq; vnitatem, vnicam contineri proportionem 2, ad 1. At verò 2, ſupra Q, & 4, denotant inter 4, ſiue Q, hoc eſt Quadratum, atq; vnitatem duas comprehendi proportiones 4, ad 2, & 2, ad 1. Præterea 3, ſupra C, & 8, ſignificant inter 8, ſiue C, & vnitatem tres cadere proportiones, nempè 8, ad 4, & 4, ad 2, & 2, ad 1.

Sexta ratio. Sexta ratio eſt, quia terminus naturalis progreſſionis denotat geneſin ex ipſa radice termini ſibi correſpondentis in Geometrica progreſſione, docet nimirum, quot repetitiones Radicis requirantur ad illius termini procreationem;

tionem; vt figura 2, respondens numero 4, & Q, declarat Quadratum, siue secundam denominationem produci ex multiplicatione Radicis bis positæ: etenim si radix 2, bis ponatur hoc modo 2, 2, & fiat multiplicatio 2, in 2, procreabitur Quadratus 4: ita per numerum 3, respondentem numero 8, & C, significamus Cubum, siue tertiam denominationem, produci ex Radice ter posita, & multiplicata; etenim si Radix 2, ter ponatur hoc modo 2, 2, 2, & fiat multiplicatio 2, in 2, & numeri 4, producti fiat pariter multiplicatio in 2, emerget Cubus 8. Præterea per numerum 5, respondentem in via communi SS, & 32, denotatur oportere quinquies repetere 2, Radicem progressionis in proportione dupla, vt 2, 2, 2, 2, 2; facta namq; multiplicatione, emergunt 32: & eodem modo secundum Diophantum, quoad characterem QC, cui respondet numerus 5.

Septima ratio est, quia Arithmeticorum terminorum additio Geometricorum terminorum præcipuè multiplicationi respondet; itaut numerus emergens ex additione terminorum Arithmeticæ progressionis, respondeat producto numero è mutua multiplicatione terminorum Geometricæ progressionis, qui à numeris illis exponebantur; sic diuisioni respondet subtractio. Vt si simul addantur 2, & 5, numeri progressionis Arithmeticæ faciunt 7. Ita se habent Q, & SS, quorum exponentes sunt illi numeri 2, & 5, nimirum 4, & 32; etenim Q, est 4, & SS, est 32, si inter se multiplicentur, fiunt 128, videlicet BSS, secundum viam communem; huius autem exponens est 7: ita secundum Diophantum, si 2, & 5, simul addantur fiunt 7; ita Q, & QC, quorum exponentes sunt 2, & 5, nimirum 4, & 32, si inter se multiplicentur, fiunt 128, scilicet QQC, cuius exponens est 7.

Septima ratio.

Explicatur hæc septima ratio, tàm iuxta viam communẽ, quã iuxta Diophantum.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 4 \\ \hline 128 \end{array}$$

Non dissimili modo, sicut 3, & 9, simul faciunt 12, ita C, & CC, nempe 8, & 512, quorum exponentes sunt 3, & 9, inter se multiplicati producunt 4096, nimirum QQC, cuius exponens est, numerus 12, secundum viam communem,

nem; ſic etiam ſuo modo iuxta Diophantum. Ita quoq; de ſubtractione dicendum, vt enim ſubtrahendo 5, à 7, remanet 2; ſic diuidendo BSS, nimirum 128, cuius exponens eſt 7, per SS, nimirum per 32, cuius exponens eſt 5, emergit numerus 4, videlicet Q, cuius exponens eſt 2: eodem pacto ſicut ſubtrahendo 3, ex 12, remanent 9, ita diuidendo QQC, nimirum 4096, cuius exponens eſt 12, per C, nempè per 8, cuius exponens eſt 3, emergit CC, ſcilicet 512, cuius exponens eſt 9; idq; ſecundum communem viam: non diſſimili modo res eueniet ſecundum Diophantum. Verùm hactenus de his, quæ videnda relinquimus apud alios; obiter enim hæc adnotanda duximus, ne mutila ſit tractatio.

Dato poteſtatis loco, ſecundum vtrãq; viã charactere adinuenire, & cõtra.

Reuertamur ad id, quod erat nobis agendum; nimirum dato poteſtatis loco, ſecundum vtramq; viam, reperire characterem, & contra.

Characteres vel ſunt ſimplices, vel compoſiti.

Characteres, quibus ipſæ poteſtates conſignantur, vel ſimplices ſunt, ſiuè ſolitarij; vel compoſiti, nempè conſtantes ex pluribus. Simplices quidē ſunt tres, ſcilicet Quadratus, Cubus, & Surdeſolidus; reliqui autem compoſiti dicuntur, quòd ex ſimplicibus componantur. Hoc verò trifariam accidere poteſt, vel enim exponens eſt numerus compoſitus par, vel compoſitus impar, vel omnino incompoſitus, ſiuè primus. Quid autem ſint numeri iſti docet Euclides.

Lib. ſeptimo.

Explicatur ſuperior doctrina.

Eſto numerus compoſitus par poteſtatis exponens, cuius character quæritur 10: hic numerus diuidatur per 2, fit quotiens 5; hic autem cum ſit numerus primus non eſt rurſus diuidendus: reperiantur characteres debiti numeris 2, & 5, tanquàm exponentibus; & reperiemus characterem QSS, deberi numero 10: itaq; Surdeſolidus quadrati, eſt poteſtas quæſita. Rurſus quæratur character exponentis 12: diuidatur numerus hic per 2, fit quotiens 6; qui rurſus cum ſit compoſitus par, diuidatur per 2, & fit quotiens 3: ergo 2, 2, 3, ſunt partes, quibus deſignantur characteres componentes characterem quæſitum. Inuentis ergo characracteribus, qui numeris 2, 2, 3, debentur, nempè QQC, fiet quæsitus character QQC; atq; adeo poteſtas quæſita erit Quadrato-quadrato-cubus. Cæterùm huiuſmodi diuiſio inſtituenda eſt per numerum minimum primum; & ſi quotiens fuerit quoq; numerus compoſitus, diuidatur per numerum primum, nimirùm qui eum metitur; & hac methodo procedatur, donec occurrat quotiens nullam partem aliquotam habens; atq; adeo primus: qui quidem diuiſores, & ſi aliquandò contingat, vt idem ſæpius repetatur, vnà cum quotiente vltimo ordinatim diſponantur, ita ut maiores poſteriorem locum obtineant.

Quomodo ſit inſtituenda diuiſio.

Secundò hoc idem aſſequemur, indagando numeros, qui ſi inuicem multiplicentur, producant numerum exponentem oblatum; & inuentis numeris aſſignando characteres debitos. Vt ſi fuerit exponens 10; numeri, qui eum producunt, ſunt 2, & 5, quibus debentur Q, & SS; proindè character debitus numero 10, erit QSS, atq; poteſtas erit Quadratus primi relati. Quod ſi character vnius ex numeris, per quos fit multiplicatio, ignoretur; character, atq; poteſtas eadem arte reperiatur.

Secundus modus.

Si verò poteſtatis exponens fuerit numerus impar compoſitus, vt 9, diuidatur in partes numeroſq; primos, quibus reperiantur characteres. Itaq; diuidatur per 3, & fit quotiens 3; hi verò, cum ſint numeri primi, non expoſcunt vlteriorem partitionem; debentur autem his, characteres C, & C; proinde quæſitus character erit CC, & poteſtas Cubo-cubus. Eodem modo ſi numerus exponens eſſet numerus 15; diuidatur enim per 3, & fiet quotiens 5; hiſce verò numeris debentur C, & SS: quamobrem quæſitus character erit CSS, & eius poteſtas Cubus primi relati, vel Cubiſurdeſolidus, nimirum decima quinta poteſtas.

Quid agendū, quando poteſtatis exponēs fuerit numerus impar.

At ſi numerus exponens oblatus fuerit numerus primus, vt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, &c. eorum characteres, ac poteſtates ſic inueſtigantur; habita tamen hac animaduerſione, nēpè à numeris primis ſignificari relatos, initio ſumpto à quinario nūmero. Cum itaq; exponentis numeri 5,

Quando numerus exponēs oblatus fuerit numerus primus.

meri 5, character sit SS, & potestas Primo relatus; ob id secundi numeri primi, nimirum 7, character erit 2SS, & potestas Secundus relatus: sed ad confusionem tollendam vtimur litteris Alphabeti numerorum loco, initio facto à littera B; itaq; 2SS, denotatur BSS.

Huius methodi fundamentum.

Huius autem methodi fundamentum est. Quoniam in quacunque Geometrica progressione, tertius terminus ab vnitate est quadratus, vt demonstrat Euclides lib. 9. Propos. 8. quamobrem illius character est Q, cuius exponens est 2, numerus minimus primus: & quoniam (vt idem ostendit) quartus ab vnitate est Cubus; ob id eius character est C, cuius exponens est 3, numerus autem ab vnitate sextus, neq; Quadratus, neq; Cubus est, nisi existente Quadrato, vel Cubo secundo, ab vnitate termino: proinde sextus hoc designatur charactere SS; diciturq; potestas hæc, Primo relatus. Et quoniam in reliquis numeris primis idem contingit; propterea relati dicuntur, nempè Secundus relatus, Tertius relatus, &c. prout magis, vel minùs recedunt ab ipso Primo relato.

Lib. 9. Propos. 10.

Quomodo dato charactere & Potestate reperiatur exponens, & locus.

Ad inuestigandum potestatis locum, siue numerum exponentem hæc ars adhibenda est. Primò ad indagandum locum Potestatis, cuius exponens est numerus compositus; singulis characteribus correspondentes exponentes applicentur, & inter se multiplicentur: numerus enim ipsa multiplicatione procreatus locum indicabit potestatis.

Exemplum ad superiorem doctrinam illustrandam.

Sit in quæstione locus potestatis illius, cuius character est QC: exponentes sunt 2, & 3, numero 2, respondet character Q, & numero 3, character C; si 2, ducantur in 3, vel è contra, producitur numerus 6, exponens oblati characteris QC.

Quādo propositus character exponitur à numero incomposito.

Quod si character propositus exponatur à numero incomposito; accipiatur ex progressione primorum numerorum, numerus primus debitus proposito characteri incomposito. Hoc autem sic assequemur: facto initio à quinario, numerentur ex ordine numeri primi; sic enim facilè reperietur ille, qui proposito characteri respondet. Esto,

exem-

exemplum. Sit propositus character CSS, nempè Tertius relatus: eius exponens erit numerus primus 11, cum hic sit tertius à quinario inter numeros primos, in eorum progressione. Hactenus de via communi.

Exemplũ.

In via Diophanti, atq; Vietæ ita procedendum est. Potestatis exponens in binarios, ternariosq; numeros resoluatur, & his competentes characteres assignentur, sic enim prosiliet quæsitus character.

Quomodo hæc omnia fieri debeãt in via Diophanti, & Vietæ.

Quæratur character exponentis 10, hic numerus resoluatur in 2, 2, 3, 3, reperiantur characteres hisce numeris respondentes, nempè Q, Q, C, C, & emerget character QQCC respondens exponenti 10.

Exẽplo illustratur superior doctrina.

Ratio, fundamentumq; huius regulæ est. Quoniam potestates omnes iuxta Diophantum, Vietæq; consilium, denominantur à Quadrato, vel Cubo, simplo, vel multiplo, vel mixto; à simplo, vt est Cubus; à multiplo, vt est Cubocubus; à misto, vt est Quadrato-cubus: quo fit, vt quæuis potestas composita, pro partibus sui exponentis, habeat numeros 2, vel 3; aut 2, & 3.

Huius regulæ ratio.

Potestates secundum Diophantũ vnde sumãt denominationem.

Si verò dato charactere, quæratur potestatis exponens, atq; locus; singulis characteribus, assignentur numeri competentes; etenim summa coalescens ex illis exponentem, & locum indicabit. Quæratur exponens, & locus, cuius character est QQCC: Quoniam exponentes sunt 2, 2, 3, 3, quorum est summa 10; proinde dicemus exponentem characteris QQCC, esse 10, & locum eius esse decimum.

Quãdo dato charactere, quæritur potestatis exponens, & locus.

Exemplũ.

Fundamentum est, quia secundum Diophantum, & Vietam exponens, & locus potestatis habetur ex additione exponentium.

Huius regulæ fundamentum.

Exponens autem sæpesæpius plures habet resolutiones; in huiusmodi casu, ea est vsurpanda diuisio, quæ pauciores partes complectitur. Vt numerus 10, Primò resoluitur in 2, 2, 2, 2, 2, Secundò in 2, 2, 3, 3: Secunda resolutio præfertur primæ, etsi legitimè factæ; quandoquidem partes possidet pauciores. Sic etiam numerus 12, Primò

Quãdo exponens plures habet resolutiones; ea est vsurpanda, quæ pauciores partes habet.

resol-

resolui potest in 2, 2, 2, 2, 2, 2, Secundò in 3, 3, 3, 3; Tertiò in 4, 4, 4; Quartò in 6, 6; Hæc postrema nimirum, quæ duas continet partes 6, 6, cæteris præferri debet.

Cùm autem mista est potestas, præferantur depressiores ijs, quæ sunt elatiores. Vt quadrati præferantur cubis, &c. Itaq; potestas decima, quantumuis hoc vtroq; modo designari possit, nempè QQCC, & CCQQ: nihilominus prior designatio adhibenda est.

Quænam via sit eligenda. Duplici modo potestates propagari possunt. Primus propagationis modus.

Per quam autem viam incedere debeat Analysta, adhuc res est in controuersia, quam explicandam suscepit Gloriosus Exercit. 2, Decadis 2: in cuius gratiam aduertit duplici methodo propagari posse potestates; communi, & singulari ad mentem Diophanti.

Primo modo fit per multiplicationem potestatis in latus, quo pacto alia posterior emergit. Vt latus in latus producit quadratum; & si quadratus in idem latus ducatur producit Cubum, Cubus in idem latus facit quadratoquadratum; & sic deinceps.

Secundus propagationis modus.

Secundo modo tanquam via singulari propagantur potestates, si multiplicentur potestates, & gignatur potestas. Vt si quadratus ducatur in quadratum, fit quadrato-quadratus. Si verò quadratus ducatur in Cubum fit Quadrato-cubus, iuxta Diophantum: secundum alios fit primus relatus. Cubus autem in Cubum, facit Cubo cubum, ad mentem Diophanti: secundum aliorum consilium, facit Quadrato-cubum; & ita deinceps.

a Lib. 9. prop. 8. Ratio pro primo propagationis modo.

Primus propagandi modus innititur ijs, quę demonstrat [a] Euclides; ostendit enim, si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales extiterint, tertium ab vnitate Quadratum esse, quartum autem Cubum, septimum verò Cubum, & Quadratum. Cum itaq; dignitates Algebricæ nil aliud sint, quàm numeri Geometricè proportionales in progressione continua; ob id satis videtur idonea prima propagationis via.

Exemplum ad explicandam supe-

Sit Geometrica progressio in proportione dupla 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, &c. Liquet numerum 64, simul

qua-

quadratum, & cubum esse; etenim eius latus quadratum est 8, cubicum verò est 4; quapropter numerus 64, potiùs videtur appellandus Quadrato cubus, quàm Cubo cubus; Cumq; 32, neq; sit quadratus, neq; cubus, non videtur dici posse quadrato-cubus.

rierem do-ctrinam.

Diophãtus quã ratione innixus.

Diophanti opinioni fauet multiplicationis actus; etenim si 6C, ducantur in 4Q, producuntur 24 QC, siquidem exponentes sunt 2, & 3, quorum summa est 5. Quapropter QC, quintum sortitur locum inter potestates; & ita de cæteris sentiendum est.

Discrimen unde proueniat.

Discrimen à diuersitate eorum, à quibus desumuntur denominationes, certè proficiscitur. Etenim secundum communem viam potestates denominentur ab ipsa multiplicatione quadratica, cubica, &c. Vt si cubus multiplicetur quadraticè, fit quadrato-cubus, si verò cubicè, fit cubo-cubus; vt si 8, multiplicetur quadraticè, fit numerus 64, nimirum quadrato-cubus.

Potestatum denominatio ad mentem Diophanti.

Iuxta consilium Diophanti, denominatio potestatum desumitur ab ipsis potestatibus, quæ multiplicantur. Quapropter si ducatur numerus cubus 8, in se, fit numerus 64; cum itaq; 64, producatur ex multiplicatione numeri cubi in numerum cubum; ob id non iniuria numerus 64, dicetur cubo-cubus. Cumq; numerus 32 producatur ex ductu numeri 4, quadrati in 8, numerum cubum; dicendus videtur quadrato-cubus.

Sententia, & rationes Gloriosi.

Gloriosus in memorato loco eligẽdam putat viam Diophanti, atq; Vietæ; tùm quia elegantior est, tùm quia sic agere cogit multiplicationis actus: siquidem potestas gignitur per multiplicationem aliarum potestatum; potestas verò genita, denominatur à summa exponentium earum potestatum, quæ inter se multiplicantur.

Alia ratio.

Arguit præterea, quia omne compositum denominari debet à partibus componentibus; ergo potestas genita denominari debet à potestatibus ex quibus componitur; proindè quadratus ductus in cubum, efficit quadrato-cubum.

Refellitur opinio Gloriosi.

Nobis autem rationes allatæ conuincere non videntur; tùm quia non apparet hæc maior elegantia; tùm quia falsum est ad id cogi nos ab actu multiplicationis, quinimò is oppositum persuadet gratis verò dicta putamus quæ Gloriosus subiungit dicens, non ab ijs, quæ multiplicantur, sed ab actu multiplicationis petendam esse ipsam denominationem. Siquidem potestas quadrati denominationem accipit ab actu multiplicationis, non ab ijs, quæ multiplicantur. Potestas Cubi suam denominationem certè mutuatur ab actu multiplicationis, non autem ab ijs, quæ multiplicantur.

Vnde sumatur denominatio potestatum.

Quamobrem etiam reliquæ potestates denominationem ab actu multiplicationis accipient.

Secũda ratio ad idem ostendendũ.

Secundò hoc idem suadetur, examinando, quid sibi velint hi loquendi modi, Quadrato-quadratus, Quadrato-cubus, &c. Certè cõperiemus nihil aliud significare, quàm radicem, sic, vel sic fuisse multiplicatam. Exempli gratia numerus 16, dicetur quadrato-quadratus, quia procreatur ex duplici multiplicatione quadratica radicis 2. Non ob id Diophanti, Vietæq; sententiam reijcimus; solùm hęc innuisse volumus, vt perspicuum fiat, rationes illas non conuincere.

Numerus 16. cur quadrato quadratus dicatur.

Vberioris doctrinæ gratia nonnulla afferemus, quæ nimirum Analysta mutuatur ab Elementis, quæq; vtriq; Algebræ inseruiunt: Numerosæ quidem peculiaria fiunt, si ad numeros contrahantur; eadem verò, si generaliter sumantur, in Algebra Speciosa poterunt adhiberi.

Quæ Analysta mutuatur ex elementis Matheseos.

Quæ Analysta mutuatur ab Elementis Matheseos hæc sunt.

1 *Totum suis partibus æquari.*
2 *Quæ eidem æquantur, inter se esse æqualia.*
3 *Si æqualia, æqualibus addantur; tota esse æqualia.*
4 *Si æqualia, æqualibus auferantur; tota esse æqualia.*

5 Si

5 *Si æqualia per æqualia multiplicentur; facta esse æqualia.*
6 *Si æqualia per æqualia diuidantur; orta esse æqualia.*
7 *Si quæ sunt proportionalia directè, esse proportionalia inuersè, & alternè.*
8 *Si proportionalia, similia, proportionalibus similibus addantur; tota esse proportionalia.*
9 *Si proportionalia similia, proportionalibus similibus auferantur; residua esse proportionalia.*
10 *Si proportionalia, per proportionalia multiplicentur; facta esse proportionalia.*
11 *Si proportionalia, per proportionalia diuidantur; orta esse proportionalia.*
12 *A communi multiplicatione, vel diuisione, seu communi multiplicatore, vel diuisore, æqualitatem non immutari, vel rationem.*
13 *Facta sub singulis segmentis, æquari facto sub toto.*
14 *Facta continuè sub magnitudinibus, vel ex ijs continuè orta esse æqualia; quocunque magnitudinum ordine, ductio, vel applicatio fiat.*
15 *Si fuerint tres, quatuorue magnitudines; quod autem fit sub extremis terminis, æquale sit ei quod fit à medio in se, vel sub medijs; sunt proportionales, & è conuerso.*
16 *Si fuerint tres, quatuorue magnitudines; & sit, vt prima ad secundam, ita secunda illa, vel tertia, quapiam ad aliam: erit quod fit sub extremis terminis, æquale ei, quod fit sub medijs.*

De prioribus his propositionibus vsq; ad sextam inclusiuè, non est cur verba faciamus; cum per se pateant.

Ad septimam quod attinet, patet: quandoquidem si est, vt 12, ad 8, ita 6, ad 4; erit [a] inuersè, vt 8, ad 12, ita 4, ad 6: deinde quia est, vt 12, ad 8, ita 6, ad 4; erit [b] etiam alternè, vt 12, ad 6, ita 8, ad 4.

Septima explicatio, ac demonstratio.

a Coroll. 4. propos. quinti.

b 16. propos. quinti.

Ad octauam quod attinet. Si est, vt 12, ad 8, ita 6, ad 4: si his similia proportionalia addantur 15, 10, 18, 12; vt fiant 27, 18, 24, 16: erit, vt 27, ad 18, ita 24, ad 16. Debent autem esse proportionalia similia. Si enim, vt est 12,

Octaua explicatur, & demonstratur.

ad 8,

Exēplo explicatur. ad 8, ita sit 6, ad 4, quæ proportio est sesquialtera; sit verò vt 10, ad 2, ita 15, ad 3, quæ proportio est quintupla; facta verò additione, prouenient 22, 10, 21, 7: non erunt hi numeri proportionales, non est enim, vt 22, ad 10, ita 21, ad 7.

Demonstratur. Sunto proportionales A, B, C, D; & ipsis addantur similes proportionales E, F, G, H; proueniant autem I, K, L, M: Dico I, K, L, M; proportionales esse; itaut quemadmodum est I, ad K, ita sit L, ad M.

a 16. quinti. Quoniam est, vt A, ad B, ita E, ad F; erit [a] permutando, vt A, ad E, ita B, ad F, & erit *b 18. quinti.* [b] componendo, vt A plus E, ad E, ita B plus F, ad F; & rursus *c 16. quinti.* permutando, erit [c] A plus E, ad B plus F, vt E, ad F, seu vt G, ad H: at vt G, ad H, ita concludetur C, plus G, ad D plus H; ergo, vt A plus E, ad B plus F, ita erit C plus G, ad D plus H; hoc est, vt I, ad K, ita L, ad M. Si itaq; proportionalia, &c.

A	B	C	D
12	8	6	4
E	F	G	H
15	10	18	12
I	K	L	M
27	18	24	16

Nona patet ex dictis. Ad nonam quod attinet: patet ex dictis.

Decima explicatur, & exemplo illustratur. Quantum autem ad decimam, facili negotio declarabitur, & demonstrabitur. Sint proportionales 12, 8, 6, 4; item 15, 10, 24, 16: Vel 12, 8, 6, 4; item 10, 5, 14, 7. Si fiat multiplicatio, vt vides; fient termini producti 180, 80, 144, 64, in primo exemplo; & 120, 40, 84, 28, in secundo, proportionales. Ratio, quia dum proportionalia, per proportionalia multiplicantur, componuntur eædem proportiones. Proportiones autem, quæ ex eisdem proportionibus componuntur, inter se sunt eædem.

12	8	6	4
15	10	24	16
180	80	144	64
12	8	6	4
10	5	14	7
120	40	84	28

Proportiones, quæ ex eisdem proportionibus componūtur inter se sūt eædem.

Proportionum autem compositionem fieri multiplicatione

tione terminorum antecedentium, & consequentium ad inuicem, perspicuum est ex ijs, quæ demonstrauit Euclides, tùm ad 23. sexti, tùm ad 5. octaui libri Elementorum.

Declaratur magis; nàm cum sint 12, & 8, item 10, & 5, (vtar posteriori exemplo) si multiplicemus 12, per 10, & 8, per 5, componetur proportio productorum, scilicet 120, & 40, ex proportione 12, ad 8, & 10, ad 5. Sic etiam cum sint 6, & 4, item 14, & 7; multiplicemus autem 14, per 6, item 7, per 4; proportio productorum 84, & 28, composita erit ex proportione 6, ad 4, & 14, ad 7; hoc est ex 12, ad 8, & 10, ad 5. Quamobrem ex eisdem proportionibus componitur ratio 120, ad 40, ex quibus componitur proportio 84, ad 28. Itaq; 120, 40; 84, 28, proportionales erunt. Rectè igitur dictum fuit: Si proportionalia per proportionalia multiplicentur, orta esse proportionalia. Eadem intelligenda de priori exemplo, & de omnibus alijs, quæ excogitari possunt. *Declaratur superior doctrina.*

Porrò hæc est proportionum multiplicatio, quæ fit in proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. Non enim est proportionum additio, quemadmodum perperam nonnulli crediderunt. *Hæc est proportionum multiplicatio, quæ fit in proportionū compositione.*

Ad id autem ostendendum. Sunto duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales. Ducatur antecedens A, in antecedentem C, & fiat E; ducaturq; consequens B, in consequentem D, & fiat F. Dico proportionem E, ad F, compositam esse ex proportione A, ad B, & C, ad D. *Demōstratio.*

A	B	C	D	E	F
12	8	15	10	180	80
				G	
				120	

Ex B, in C, fiat G. Quoniam ex A, B, in C, fiunt E, G; erit [a] vt A, ad B, ita E, ad G. Et quoniam rursus ex B, in C, D, fiunt G, F; erit [b] vt C, ad D, ita G, ad F. At verò proportio E, ad F, componitur ex E, ad G, & G, ad F: & vt A, ad B, ita E, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad F. Ergo proportio E, ad F, componitur ex proportione A, ad B, &

a 18. septimi.
b 17. septimi.

C, ad

C, ad D. Quod erat ostendendum. Cæterum compositio proportionum, quam in memoratis locis intendit Euclides, respondet multiplicationi denominatorum inter se; at verò hæc proportionum multiplicatio, non differt à multiplicatione denominatorum inter se: rectè igitur concludebatur.

Vndecima propositio declaratur. Quantum ad vndecimam; patet ex eo quia, dum proportionalia per proportionalia diuiduntur ex eisdem proportionibus, aliæ eædem proportiones auferuntur: vt enim opere multiplicationis proportiones simul componuntur, ita quoq; diuisione vna proportio ex alia aufertur; quandoquidem diuisio resoluit, quod super efficit multiplicatio.

Exemplo illustratur superior doctrina. Sint proportionales 180, 80, 108, 48. Diuidantur per proportionales 12, 8, 6, 4: Orientur 15, 10, 18, 12, pariter proportionales.

Demonstratio. Demonstrabitur autem, si supponamus hanc subtractionem fieri per diuisionem, & esse contrariam compositioni. Sit subtrahenda proportio C, ad D, ex proportione A, ad B: Hoc potiùs est diuidere proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D; quàm proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahere, vt videbimus.

A	B	A	B
180	80	108	48
C	D	C	D
12	8	6	4
E	F	E	F
1440	960	432	288
G		G	
2160		648	

Ex A, in D, fiat E: & ex B, in C, fiat F. Dico proportionem

nem E, ad F, quæ producitur ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, esse eam, quæ relinquitur sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: seu quod idem est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportione C, ad D, & E, ad F. Fiat G, ex A, in C. Quoniam ex A, B, in C, fiunt G, F; erit [a] vt A, ad B, ita G, ad F. Et rursus quoniam ex A, in C, D, fiunt G, E; erit [b] vt C, ad D, ita G, ad E. At verò cum proportio G, ad F, sit composita ex proportionibus G, ad E, & E, ad F; erit proportio A, ad B; quæ eadem est cum proportione G, ad F, composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est C, ad D, & E, ad F: quamobrem subtracta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B; remanebit proportio E, ad F, quod erat ostendendum.

a 18. septimi.

b 18. septimi.

Demõstratio principalis supra dicterum.

Si verò A, diuidatur per C; proueniat H: Si B, diuidatur per D; proueniat I: Si verò L, diuidatur per N; proueniat P: Si M, diuidatur per O; proueniat Q: & D, multiplicans A, faciat E; vt C, multiplicando B, faciat F; item O, multiplicando L, faciat R; & N, multiplicando M, faciat S.

A	B	L	M
180	80	108	48
C	D	N	O
12	8	6	4
H	I	P	Q
15	10	18	12
E	F	R	S
1440	960	432	288

Proinde C, multiplicando H, producit A; siquidem A, dùm per C, diuidebatur, proueniebat H. Item D, multiplicans I, producit B; & N, multiplicans P, producit L; vt O, multiplicans Q, producit M. At verò D, multiplicans A fe-

cerat E; & C, multiplicans B, fecerat F; item O, multiplicans L, fecerat R; & N, multiplicans M, fecerat S: erit, vt E, ad F, ita H, ad I; &, vt R, ad I, ita P, ad Q: Quandoquidem C, multiplicans H, producit A; & D, multiplicans I, producit B; item N, multiplicando P, producit L; & O, multiplicando Q, producit M. At verò C, multiplicando B, producit F; & D, multiplicando A, producit E; item O, multiplicando L, producit R; & N, multiplicando M, producit S: Quoties igitur vnitas metitur C, toties H, metitur A; & quoties vnitas metitur D, toties I, metitur B; & quoties vnitas metitur N, toties P, metitur L, &c. At verò quoties vnitas metitur C, toties B, metitur F; & quoties vnitas metitur D, toties A, metietur E; & quoties vnitas metitur N, toties M, metietur S, &c. Vt igitur vnitas ad C, ita H, ad A; &, vt vnitas ad D, ita I, ad B; & vt vnitas ad N, ita P, ad L, &c. Sed, vt vnitas, ad C, ita B, ad F; ergo vt H, ad A, ita B, ad F. Et vt vnitas, ad D, ita A, ad E: ergo,
a 23. quinti. vt I, ad B, ita A, ad E: quapropter erit [a] secundum rationem perturbatam, vt H, ad E, ita I, ad F; ac proinde per-
b 16. quinti. mutando, erit [b] quidem H, ad I, vt E, ad F. Eodem discursu concludemus esse, vt R, ad S, ita P, ad Q.

Speculum demonstrationis.

Vnitas	C	H	A	Vnitas	N	P	L
	12	15	180		6	18	108
Vnitas	D	I	B	Vnitas	O	Q	M
	8	10	80		4	12	48
Vnitas	C	B	F	Vnitas	N	M	S
	12	80	960		6	48	288
Vnitas	D	A	E	Vnitas	O	L	R
	8	180	1440		4	108	432

Compendiosius idem traditur.

H	A	E	P	L	R
15	180	1440	18	108	432
I	B	F	Q	M	S
10	80	960	12	48	288

Sed

Sed E, F, R, S, sunt proportionales: quandoquidem C, D, N, O, proportionales ex hypothesi, multiplicantes terminos proportionales A, B, L, M; nimirum D, multiplicans A; & C, multiplicans B; item O, multiplicans L; & N, multiplicans M, fecerunt terminos E, F, R, S: ob id erunt etiam proportionales illi quatuor termini H, I, P, Q, quod erat ostendendum. Rectè igitur dictum fuit. Si proportionalia, per proportionalia diuidãtur, orta esse proportionalia.

SCHOLION.

Assumpsimus superius proportiones, quæ ex eisdem proportionibus componuntur, inter se quoq; easdem esse: cum ostenderemus, si proportionalia per proportionalia multiplicentur, facta esse proportionalia. Nec immeritò; si quidem facilè demonstrari potest: & communiter id ab antiquis Geometris receptum est; vt videre licet passim apud Apollonium, Pappum, & alios. *Declarantur ea, quæ superius assumpta fuerunt.*

Quoad hunc alium arguendi modum attinet, de quo postremo loco verba fecimus; si nimirum proportionalia per proportionalia diuidantur, &c. apud nobilissimos Geometras ipsum reperire licet.

Quantum ad duodecimam propositionem; ea certè constat, neq; indiget explicatione: si namq; duo sint æqualitatis extrema, quæ per communem diuisorem diuidantur, æqualitas non euanescit. Vt 100 $\sqsupset$ 100. per communem diuisorem institutæ diuisione, vt per 5; fiet adhuc æquatio inter 20, ex vna parte, & 20, ex altera. Neq; curandum, quòd allata æquatio sit inutilis ad artificium Algebricum, vt suo loco constabit, eã enim attulimus exempli loco, ad hanc veritatem ostendendam, ad quod illa planè sufficit. Idem constat in æquatione vtili. Vt si 10R, æquentur 100, adhuc 2R, æquabuntur 20. *Duodecima ostenditur.*

Proportio quoque non immutatur, vt si sint proportionales. *Nec immutatur proportio.*

60, 20, 150, 50.

Facta applicatione ad 5, omnibus scilicet terminis diuisis per 5; adhuc erunt proportionales.

12, 4, 30, 10.

Eandem nimirum triplam proportionem retinentes termini ex applicatione, vel diuisione prouenientes.

SCHOLION.

His, quæ superius allata fuerunt, præcipuè innititur Algebra.

Elementorum cognitio, maximè necessaria, ad hanc matheseos partem.

Hæc omnia patent ex Elementis; placuit nihilominus explicationem aliquam in gratiam Tyronum afferre. Cæterum his, quæ attulimus, præcipuè vtitur Algebra, etiam si ea omnibus Matheseos partibus inseruiant: Ob id non inutile duximus, ea hic adnotare, eò vel maximè, quòd si quæ difficiliora videntur, curauimus, vt qua potuimus facilitate, clariora hoc in loco exhiberentur: vt his nimirum iactis fundamentis, Ars ipsa melius percipiatur. Inde tamen non fit, quin Elementorum, quorum cognitio apud Euclidem habetur, ad hanc disciplinam, atq; Matheseos partem necessaria sit; Nemo enim ænigmata soluens, eorum demonstrationes fæliciter contexet; quinimò, neq; hanc artem perfectè assequetur illius cognitionis expers. Sunt enim elementa prima, quorum notitiam præhabere oportet, ad omnem Matheseos partem capescendam.

Non abs re iudicauimus has infrascriptas definitiones in memoriam reuocare.

DEFINITIONES.

Quadratũ, seu Potẽtia quid.

Quadratum, quod etiam Potentia nuncupatur, est illa Potestas, quæ producitur ex multiplicatione lateris in se; seu quæ producitur ex radice bis posita, & multiplicata.

Cubus quid.

Cubus est illa potestas, quæ producitur ex ductu quadrati in latus; seu quæ emergit ex radice ter posita, & multiplicata.

Quadrato-quadratũ quid.

Quadrato-quadratum est illa, quæ emergit ex multiplicatione quadrati in se; seu quæ fit radice quater posita, & multiplicata.

Cætera potestates,

Et non dissimili modo poterunt reliquæ Potestates definiri, tam

iuxta

iuxta mentem eorum, qui dissentiunt à Diophanto, in ipsis appellationibus, quàm ad mentem eiusdem Diophanti. Et hinc patet, quid sint Radices, Quadrata, Cubica, &c.

quid sint insinuatur. Quid sint radices.

Additio numeri ad numerum est acceptio illius numeri, qui pracisè coalescit tanquam ex partibus, ex numeris illis qui addi dicuntur. *Additio quid.*

Subtractio est sumptio excessus numeri vnius supra numerum alterum. *Subtractio quid.*

Multiplicatio numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem. *Multiplicatio quid.*

Seu multiplicatio numeri per numerum, est acceptio numeri illius, qui ad multiplicatum, eam habet rationem, quam multiplicans ad vnitatem. *Aliter.*

Sumptus hic numerus Productum dicitur. *Productũ.*

Diuisio numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuisus, ad diuidentem. *Diuisio quid.*

Seu diuisio numeri per numerum, est acceptio numeri, ad quem diuisus eam habet rationem, quam diuidens ad vnitatem. *Aliter.*

Acceptus hic numerus Prouenìens, siue Quotiens appellatur. *Quotiens.*

Ad denotandam autem Additionem, Defectum, & Aequalitatem his vtimur characteribus nempè † est signum additorum, & — est signum defectorum. Vt verò denotemus aliquid alicui æquale esse breuitati consulentes talem notam frequentabimus ⫽. Cæterum signa † & — afficiunt numeros subsequentes, vt si esset 4Q † 2R signo † afficitur numerus 2R, non autem 4Q. Quando verò nullum signum præcedit numerum intelligitur numerus ille affectus signo †. Vt significemus radicem, quæ est Potestas, hoc vtimur charactere R, sed pro signo radicali præponendo numeris, hoc vtemur charactere ℞ ad distinctionem radicis, quæ est Potestas. Ad denotandam radicem quadratam ita scribimus ℞Q; ad radicem cubicam significandam, hoc vtimur charactere ℞C, & sic de reliquis. Signum autem hoc ℞ ( ), significat radicem vniuersalem, siuè

Characterum nõnullorũ explicatio. Signum † quid significet, quid signum — quid ⫽ significet. Character R quid significet. Character ℞ quid significet.

siuè ligatam; itaq; ℞ Q( ), denotabit radicem quadratam vniuersalem, & sic de reliquis. Quomodo autem id intelligi debeat suo loco explicabimus. Sat est hic ipsum characterem indicasse. Cum autem absolutè hunc adhibemus characterem ℞, intelligi volumus radicem quadratam, & si scribatur sine addito charactere Q; quod maximè est obseruandum, & memoriæ mandandum.

De numeratione numerorum Denominatorum, seu Potestatum, tàm simplicium, quàm compositarum per numeros, tàm absolutos, quàm irrationales seu surdos.

CAPVT II.

Numeratio potestatum. CHaracteres, vnitati, vel numeris apponuntur, & Potestates ipsis characteribus denotatæ ab illis numerantur. Vt 1R, 2R; 1Q, 2Q; 1C, 2C, &c. Significamus autem per numerum characteri præpositum, multitudinem illius Potestatis, quæ ab illo charactere significatur, atq; adeo hac nota 1R, denotamus 1R, hac verò 2R, duas radices, hac alia 3R, tres radices, &c. Præterea hac nota 1Q, significamus vnum quadratum, hac alia 2Q, denotamus duo quadrata, & ita de reliquis, &c.

Numeri simplices, qui dicantur. Numeri autem Simplices dicuntur, cum in ipsis non exprimitur signum † vel —. Cum autem hisce coniunguntur signis †, vel —; vt si ita se haberent 10Q† 4R, Vel 6C† 3Q, item 7Q — 2R, vel 12C — 5Q: *Numeri compositi.* huiusmodi numeri Compositi dicuntur; propriè tamen sibi nomen istud vendicarunt ij, qui signo † connectuntur; *Diminuti numeri qui.* cæteri namq; per signum — Diminuti nuncupantur. Illi verò, quibus vtrumq; interponitur signum, vt 8QQ† 10C — 4Q† 10R, Mixti dicuntur. *Horum numerorũ expressio.* Omnes tamen generali quadam nomenclatura Compositi dici possunt. Quo verò pacto exprimantur videamus.

Cum

Cum ſcribimus 5Q† 3R, nil aliud denotamus, quàm quinque quadrata plus tribus radicibus. Item 6Q† 7R, ſic efferuntur, ſex quadrata plus ſeptem radicibus. Præterea 6Q ⟝ 10R, ſic pronunciantur, ſex quadrata minus decem radicibus. Quod ſi fuerit trinomium, vt 25Q† 6R ⟝ 10C, pronunciabitur hoc modo, vigintiquinq; quadrata plus ſex radicibus minus decem cubis; & ita de reliquis intelligendum eſt. Quod ſi non omnes ſint numeri denominati, ſed intercipiantur numeri abſoluti, vt 15C† 5Q† 6R† 2 non diſſimili modo efferuntur; videlicet quindecim cubi plus quinque quadratis plus ſex radicibus plus duabus vnitatibus.

Quo pacto fiat numerorum pronunciatio.

Huc vſq; de Poteſtatum numeratione per numeros abſolutos ſequitur per irrationales, ſeu ſurdos. Quando ſoli ponuntur, vt ℞Q7R, ℞Q10R, ℞C75Q, ℞Q 8C, &c. ſic exprimuntur: Radix quadrata ſeptem radicum: Radix quadrata decem quadratorum: Radix cubica quindecim quadratorum: Radix quadrata decem & octo cuborum. Cum autem ſignis coniunguntur, eodem pacto diſcurrendum eſt, quo ſupra oportere dicebamus. Vt 2Q† ℞Q3R ⟝ 2, ſic pronunciabuntur: duo quadrata plus radice quadrata trium radicum minus duabus vnitatibus.

Numeratio poteſtatum per numeros irrationales.

Quòd ſi radix fuerit ligata, ſiuè vniuerſalis, eaq; ſimplex, vt ℞ (15Q) vel ℞ (17C), ſignificatur extrahendam eſſe radicem quadratam, vel cubicam, vel aliam quamcumq; iuxta characteris naturam, non ſolùm ex numero, verùm etiam ex poteſtate, & ita pronunciatur: Radix quadrata ligata, ſiue vniuerſalis, quindecim quadratorum: Radix quadrata ligata, ſeu vniuerſalis decem & ſeptem cuborum.

Radix ligata ſimplex.

Si radix fuerit ligata, ſiue vniuerſalis compoſita, vt ℞Q (6† ℞Q5R) ſic pronunciabitur: Radix quadrata vniuerſalis ſex vnitatum plus radice quadrata quinq; radicum: & ita de ſingulis quid ſibi velint patet ex dictis, & ſuo loco de numeris ſurdis.

Radix ligata, ſeu vniuerſalis compoſita.

SCHO-

SCHOLION.

Declarantur præcepta superius tradita.

VT faciliùs intelligantur, quæ superiùs à nobis dicta sunt, placuit hic Scholion apponere. Cum scribimus ℞ 7 R, vel ℞ 7 Q, significare intendimus R, valorem, ductum esse in ℞ 7, & 1 Q, pretium ductum esse in ℞ 7, &c. Vt si sit ℞ 16 R, idem erit ac 4 R; si sit ℞ 16 Q, erit idem ac 4 Q.

At verò dum intra parenthesim clauduntur, significamus extrahendam esse ℞ tàm ex numero, quàm ex dignitate; Itaq; dum dicimus ℞ (7 R) significamus extrahendam esse radicem, tàm ex numero, quàm ex dignitate. Sic dum scribimus ℞ (10 Q) & ℞ (16 C) eodem modo intelligi debent, &c.

Explicatio supradictorum.

Explicabimus tamen facilè, quid significare intendimus, si in absolutos numeros, omnia hæc resoluamus hac lege. Sit ℞ Q (25 Q); & per, R pretium intelligamus 6, siuè ponamus, R pretium esse 6, erit 1 Q, valor 36; Itaq; 25 Q valebunt 900; huius autē numeri ℞ Q est 30, cum itaq; nos scribimus ℞ (25 Q) intelligimus extrahendam esse radicem quadratam tàm ex numero 25, quàm ex Q, ac proinde cum ℞ Q numeri 25, sit 5, & ipsius Q radix sit R, erit latus quadratum 5 R, cuius valor est 30, nempè ℞ Q, numeri 900, vti perspicuum est.

Quando fit inclusio intra parenthesim.

Quando itaq; fit inclusio intra parenthesim, significamus extrahendam esse radicem, tàm ex numero, quam ex dignitate; adeo vt pretium illius sit radix numeri, qui fit ex dignitatis valore multiplicato in numerum ipsum; Vt huius ℞ Q (25 Q) si 1 R, valor est 6, certè valebit 30, cum autem non includitur intra parenthesim, significatur valor dignitatis multiplicatus per numerum illum irrationalem; vt si esset ℞ Q 7 Q significatur 36, pretium vnius Q, multiplicatum esse per ℞ Q 7.

Quādo dignitas habet radicē, numerus autem non habet.

Cùm autem dignitas habet radicem, numerus verò non habet, sitq; radix extrahenda; oportet eruere radicem ex dignitate, numero verò præponendum est signum radicale. Vt si esset 20 Q: huius profectò erit radix quadrata hæc, nempè ℞ Q 20 R, ex dignitate, quandoquidem radix extra hi potest; non autem ex numero, cui præpositum est signum radicale. At verò per ℞ Q 20 R signi-

significare intendimus pretium 1 R, esse multiplicatum per ℞ Q numeri 20, etenim numerus ille consurgens per multiplicationem, est illius numeri, scilicet ℞ Q 20 R, pretium. Cæterum ipsius ℞ Q 20 R, quadratum est 20 Q, & huius pretium est 720;

720	20 Q
℞ Q 720	℞ Q 20 R

si nimirum valor 1 R, est 6, quo fit, vt lateris illius valor, nimirum ipsius ℞ Q 20 R, qui est latus ipsius 20 Q, fit inquam, vt sit ℞ Q 720.

Ad hoc autem magis declarandum vtamur numero habente radicem, perinde ac si radicem non haberet. Sit igitur 25 Q: huius numeri ℞ Q, erit ℞ Q 25 R; quod si vnius radicis pretium sit 6, ipsius 25 Q, pretium erit 900. Et ipsius ℞ 25 R, erit ℞ 900, hoc est 30, hic enim numerus respondet 5 R, quæ æquipollent ipsi ℞ 25 R, quemadmodum 30, æquipollent ℞ 900. Hæc autem omnia ex opposito paradigmate possunt innotescere.

Quæ superius dicta sunt magis declarantur.

900	25 Q
℞ Q 900	℞ Q 25 R
30	5 R

Recolendum autem est in memoriam id, quod superius innuimus, nimirum hæc signa † & — referri ad numeros, qui ea sequuntur, nunquam autem ad præcedentes. Præterea illud etiam præ oculis habendum; numerum scilicet, quem neutrum horum signorum præcedit, intelligendum habere signum additorum, seu additionis.

Nonnulla in memoriam reuocanda.

Cæterum, quæ hactenus diximus intelligenda sunt, de omni radicis genere, & si tantummodo de radice quadrata verba fecerimus.

De Algorithmo Denominatorum numerorum, siue Potestatum.

CAPVT III.

Algorithmus quid.

ALgorithmus nihil est aliud, quàm numerorum tractatio, complectens illas vulgatas operationes, nimirum Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, & Diuisionem. De his autem à nobis in præsentia est habendus sermo; & primò tractandum de huiusmodi operationibus, quoad numeros denominatos, qui numerantur per numeros absolutos, initio facto ab additione.

Numerorum Denominatorum Additio.

OPERATIO PRIMA.

Numerorũ denominatorum diuisio. Simplices Compositi Diminuti Mixti. Simplices, vel sunt eiusdẽ, vel diuersæ denominationis. Præceptum additionis. Demõstratio.

AVt numeri denominati addendi sunt simplices, & solitarij, vt 5 R, 8 R, 15 R, 20 Q, 11 C &c. vel compositi, vt 20 Q † 2 R, & 7 C † 3 Q &c. Diminuti, vt 15 Q — 6 R, & 4 C — 2 Q &c. at verò Misti, vt 18 C † 10 Q — 6 R, & 10 C — 7 Q † 4 R. Si simplices, vel sunt eiusdem appellationis, vt R, vel Q, vel C, &c. Si fuerint denominationis eiusdem, eodem pacto fieri debet additio, quo fit in numeris vulgaribus, retento eodem charactere; itaq; si sit iniunctum ad 20 R, addere 10 R, fiet summa 30 R, si verò 15 Q, debeant addi ad 5 Q, fiet aggregatum 20 Q, & sic de singulis.

Demonstratio eadem est cum illa numerorum vulgarium; cum enim additio numeri ad numerum, nihil aliud sit, quàm acceptio, &c. Certè non alio modo fieri debet, neq; illa summa potest exhiberi, quàm simul vniendo partes, ex quibus constat; omnis enim numerus ex illis parti-

bus

bus coaleſcit, in quas reſoluitur (quemadmodum omnis alia quantitas) & quæ ſimul ſumptæ reſtituunt totum.

Quod ſi numeri denominati, fuerint appellationis diuerſæ, adduntur beneficio ſigni additorum; nimirum †. Itaq; ſi ſit opus ad 10 Q, addere 20 R, emerget aggregatum 10 Q† 20 R; Item ex 12 C, ad 20 QQ, fit ſumma 20 QQ† 12 C &c. & ſemper ſumma eſt numerus compoſitus. *Quādo numeri denominati fuerint denominationis diuerſa.*

Demonſtratio eſt, quia additio ſincera ſine ſigno, fit inter homogenea; proinde cum hæc heterogenea ſint, nequeunt inuicem addi, hoc eſt addi vnum ad alterum, niſi per ſignum †. Idem autem intelligendum eſt, ſi ſit opus addere numerum nudum ab omni charactere, ad numerum charactere affectum, & è contra, vt ex 12, ad 20 Q, fit ſumma 20 Q† 12, & ita de ſingulis. *Demonſtratio.*

Verùm ſi debet fieri additio inter numeros compoſitos, diminutos, & miſtos, ſiuè ſimplicis ad compoſitum, diminutum, & miſtum, ſiuè compoſiti, ad compoſitum, diminutum, & miſtum; additio fieri debet inter illos, qui ſunt eiuſdem appellationis: quòd ſi non eſſent eiuſdem appellationis, abſoluetur additio eodem ſigno †. *Præceptū.*

Si ſit opus addere ad 8 R † 5, numerum 4, fiet ſumma 8 R † 9. Vel ad 8 R † 5, addere debeamus 4 R; fit ſumma 12 R † 5, ſi verò ad numeros compoſitos debeamus addere numeros compoſitos, per quos intelligo tàm compoſitos propriè, quàm diminutos, & miſtos, vt ad 20 C † 5 Q, ſit opus addere 10 C † 7 Q. Aduertendum eſt, num ipſi numeri addendi appellationis eiuſdem, afficiantur ſignis †, vel—. Etenim ſi eadem ſigna ipſis præfigentur, abſoluetur additio, addendo ſimilia ſimilibus, vt ex 10 C † 7 Q, ad 20 C † 5 Q, fit ſumma 30 C † 12 Q, cuius demonſtratio infra patebit. Item ex 10 Q † 4 R, & 8 Q † 2 R, fit ſumma 18 Q † 6 R. Quòd ſi non ſint affecti numeri eiuſdem characteris, ſignis eiſdem; ſed vnus ſigno †, alter verò —: in huiuſmodi caſu, habendus eſt præ oculis, horum ſignorum Algorithmus, tàm ad additionem, quàm ad cæteras operationes ritè inſtituendas. Cæterùm cùm in compoſitis *Exemplū.*

F 2 non

non intercedit, nisi signum †, omnes necesse est eodem signo afficiantur, sicuti de diminutis quoad signum ⟞, secus autem demistis.

Algorithmus signorum ✠ *&* ⟞.

Algorithmus signorũ †, & ⟞ necessarius.

HIc igitur Algorithmum horum signorum aggrediemur, vtpotè necessarium ad Algebricas operationes instituendas, & ab additione ipsorum exordiemur. Tùm quia, simplicior operatio cùm sit, omnibus alijs præmittenda est. Tùm quia numerorum denominatorum hic circa additionem versatur tractatio, quæ sine additione signorum †, & ⟞ nequit absolui.

Signorum ✠, *&* ⟞ *Additio*.

† *ad* † *additur, & fit* †. *Hoc est, plus ad plus additur, & fit plus.*

⟞ *ad* ⟞ *additur, & fit* ⟞. *Hoc est, minus ad minus additur, & fit minus.*

† *ad* ⟞ *subtrahitur, & notatur maius. Hoc est, plus ad minus subtrahitur, & notatur maius.*

⟞ *ad* † *subtrahitur, & notatur maius. Hoc est, minus ad plus subtrahitur, & notatur maius.*

De subtractione agemus in sequentibus, videlicet, tàm signorum †, & ⟞ quàm Potestatum.

Declarantur superiora præcepta, & exemplis illustrantur.

Si itaq; instituenda est additio inter numeros compositos, quibus interponuntur diuersa signa †, & ⟞, atq; numeri eiusdem appellationis, diuersis signis afficiantur; habenda est ratio additionis signorum prædictorum.

Exem-

Exempla Additionis signorum +, *&* —.

18Q + 8R	30C — 35Q	12Q + 6R	16C — 5Q
15Q — 2R	14C + 10Q	14Q — 8R	28C + 10Q
33Q + 6R	44C — 25Q	26Q — 2R	44C + 5Q

15C + 12Q — 10R	30C + 15Q + 10R
14C — 16Q + 4R	40C — 7Q + 0
29C — 4Q — 6R	70C + 8Q + 10R

12QC + 10QQ + 0C — 4Q + 2R
20QC + 15QQ + 15C + 8Q — 4R

32QC + 25QQ + 15C + 4Q — 2R

14CC + 6QC + 8C + 16Q — 15R — 18
10CC + 12QC — 5C + 19Q — 9R — 15

24CC + 18QC + 3C + 35Q — 24R — 33

Itaq; commutatur operatio additionis in subtractionem; subtrahitur enim minor ex maiore, & reliquo numero tribuitur signum maioris numeri, à quo facta est subtractio. Demonstratio signorum †, & — facilis est, & quidem quoad signa †, & †, non est cur verba faciamus. *Commutatur operatio additionis in subtractionem, &c.* *Demonstratio.*

Perspicuum est etiam rectè additionem institui, addendo partes partibus: *Nam idem est partes addere partibus, & aggregata simul colligere, idem est inquam, ac totum addere toti.* *Propositio.*

Sic etiam si † addatur ad † fieri †. Etenim *Si fuerint plures numeri in quotlibet partes diuisi, numerus factus ex aggregatione integrorum, aequalis est numero facto ex additione aggregatorum ex partibus. Quod si fuerit vnus indiuisus, diuisus alter,* *Additio † ad †. Propositio.*

alter; Ille qui fit ex indiuiso, & toto diuiso, æqualis est illi, qui fit ex additione indiuisi, ad alterutram partium, plus altera parte.

Exemplum. Si sint e.g. duo numeri, quorum vnus 75, diuisus in duas partes 60, & 15, alter 16, diuisus in duas partes 10, & 6, si 6, addatur ad 15, fiunt 21, si 10, ad 60, fiunt 70, horum summa est 91, quanta fit ex 75, & 16, simul iunctis. Quòd si vnus diuisus fuerit, puta 75, in 60, & 15, alter indiuisus, nimirum 6, additis 6, ad alterutram partium, puta vel ad 60, vel ad 15, fit summa 60 + 21, vel 66 + 15, nempe 81; Idem autem numerus habetur si ad 75, addantur 6.

$$\begin{array}{r} 60+15 \\ 10+6 \\ \hline 70+21 \\ 21 \\ \hline 91 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ 6 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ 16 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60+15 \\ 6 \\ \hline 60+21 \end{array}\ \text{hoc est } 81.$$

$$\begin{array}{r} 60+15 \\ 6 \\ \hline 66+15 \end{array}\ \text{hoc est numerus idem } 81.$$

Additio — ad —. Ita etiam de additione — ad —: & nimirum rectè institutam esse, addendo minores minoribus, & maiores maioribus.

Propositio. *Aggregatum enim differentiarum addendarum æquale est differentiæ summæ ex minoribus, à summa ex maioribus.*

Propositio. Sic etiam si ad — addatur —, fieri —. *Quandoquidem differentiæ numerorum, si inuicem addantur, summa æqualis est aggregato maiorum, minus aggregato minorum.*

Sint

Sint e.g. 70 — 15, & 40 — 12, residuũ illud valet 55, istud 28, quorum summa 83, si verò addantur 12, ad 15, fient 27, si verò 40, ad 70, fient 110, horum autem differentia est 83, vt perspicuum est, quanta est summa ex 55, & 28.

70—15
40—12
110—27
27
83
55
28
83

Quòd verò si sint †, & —, fieri debeat subtractio, &c. & hoc modo rectè institutam esse operationem, subtrahendo eos, qui afficiuntur signis diuersis, &c. patet ex eo quia *Si sint duo numeri inæquales, quorum differentia subtrahi debet ab aliquo numero vtcunq; diuiso, idem est minorem ex duobus differentibus ab alterutra partium ipsius numeri diuisi subtrahere, & maiorem alteri parti coniungere, & huic aggregato reliquum illum numerum addere, ac est differentiam illorum numerorum addere ad numerum illum diuisum.* Additio † ad —, & — ad †. Propositio.

Sint 60 † 40, & 32 — 15, facta additione consurgit 92 † 25, idem est enim addere 32, ad 60, & summæ 92, addere 25, interuallum, seu differentiam inter 40, & 15, ac est numero 100, composito ex 60, & 40, addere 17, differentiam inter 32, & 15; vtroq; modo consurgent 117, pro summa quæsita.

60†40
32—15
92†25
25
117.

Fieri autem signum †, vel prout affectus est numerus maior, à quo fit subtractio, ex eo liquet: quòd *Si fuerit numerus quispiam vtcunq; diuisus, & ei addatur numerorum duorum differentia, summa æqualis erit aggregato ex alterutra parte numeri diuisi, & maiori ex duobus numeris differentibus, vna cum differẽtia inter alteram partem numeri diuisi, & numerum minorem ex duobus differentibus.* Propositio.

Hæc

Exemplis declaratur superior doctrina.

Hæc autem illustrari possunt exemplis. Sint duo numeri, compositus vnus 70 † 20, diminutus alter, scilicet 40 — 12: si ex 20, subtrahantur 12, remanent 8: si ad 70, addantur 40, fiunt 110: horum summa est 118, quanta resultat ex additione numeri 28, quo differt 40, à numero 12, ad 90, numerum conflatum ex 70, & 20. Vel si ad 20, addantur 40, fiunt 60: si ex 70, subtrahantur 12, remanent 58; quibus additis ad 60, fiunt 118 · dum enim addimus 40, ad 70 † 20, plus addimus, quàm oporteat; siquidem tantùm addere debemus 28, valorem illius residui 40 — 12,

$$\begin{array}{l} 70 + 20 \\ 40 - 12 \\ \hline 70 + 40 + 20 - 12 \\ \text{hoc est } 118. \end{array}$$

minuendus est igitur numerus 70 † 20, numero 12, quod fit subducendo 12, ab eius parte 20; nam facta subtractione, is, qui superest, puta 8, si addatur ad 70, fiunt 78, quibus si addantur 40, fiunt 118; vt videre licet in primo paradigmate. Sic & in secundo, dum subtrahitur 12, ex 70, &c. minuitur enim 70 † 20, numero 12, subtrahendo 12, de 70, &c.

$$\begin{array}{l} 70 + 20 \\ 40 - 12 \\ \hline 40 + 20 + 70 - 12 \\ \text{hoc est } 118. \end{array}$$

Demonstratio quoad potestates.

Quòd attinet ad Potestatos, etiam perspicuum est, rectè fuisse operationem institutam. Siquidem addere numerum Potestatum ad numerum Potestatum eiusdem appellationis, nihil est aliud, quàm addere productum vnius numeri in alterum, ad productum alterius numeri in eundem, per quem prior ille fuit multiplicatus. *Sed idem est multiplicare numerum per numerum, & alterum numerum per eundem numerum in quem ille ducebatur, & productos numeros in vnam summam colligere: idem est inquam, ac numeros diuersos illos colligere simul, summamq; ducere in eundem numerum, per quem fiebat communis multiplicatio; summæ enim sunt inuicem æquales.*

Propositio.

Vt si sint numeri 15, & 20, qui ducantur in 5, si 15, ducantur in 5, fiunt 75, si in 20, fiunt 100, horum summa est 175, modo si ad 15, addantur 20, fiunt 35, qui si ducantur in 5, fiunt quoque 175. *Exemplo illustratur superior doctrina.*

20	15
15	5
——	——
35	75
5	——
——	20
175	5
	——
	100
	75
	——
	175

Demonstratio est; quia *Numerus planus factus sub aliquo numero diuiso, & altero indiuiso, æqualis est numeris, qui fiunt ex multiplicatione eiusdem indiuisi, & qualibet parte diuisi.* *Propositio*

Sit numerus 35, diuisus in partes 15, & 20, alter autem indiuisus 5, numerus planus, qui continetur sub 35, & 5, nempe 175, æqualis est numero 75, facto ex parte 15, & indiuiso 5, vna cum numero 100, facto ex 20, in 5. *Exẽplo declaratur.*

A45	D10	E5B	C4
F240			
G180	H40	I20	K

Sint duo numeri AB, & C, ille quidem diuisus in partes AD, DE, EB, hic autem indiuisus; & C multiplicans AB, producat F, multiplicans autem AD, producat GH, multiplicans DE, producat HI, multiplicans EB, producat IK; Dico F, æqualem esse numeris GH, HI, IK, siquidem C, multiplicans AB, produxit F, ob id AB, metietur F, per C, nimirum AB, pars erit ipsius F, denominata à C, neq; dissimili argumento AD, pars erit ipsius GH, denominata à C, sic DE, ipsius HI, & EB ipsius IK; proinde quæ pars est AB, ipsius F, eadem erit AD, ipsius GH, & ita de cæteris. Sed quæ pars est AD, ipsius GH, eadem est totus AB, totius GK; per ea, quæ ad proposit. 5. lib. 7. ostenduntur; pro- *Demõstratio.*

inde quæ pars est AB, ipsius F, eadem erit AB, ipsius GK, ergo F, & GK, æquales erunt.

Additionis examen duplex est, scilicet per subtractionem, & per resolutionem in numeros absolutos, &c.

Examen autem additionis, num videlicet quis eam ritè, citraq; errorem exercuerit duplici pacto fieri potest. Primò per subtractionem, ad eum modum sanè, quo fit in numeris vulgaribus. Secundò resoluendo numeros addendos Potestatum, iuxta aliquam radicis statutam æstimationem, in numeros absolutos, & hos simul addendo, vel vnum ab altero subtrahendo, prout à signo †, vel — afficitur; mox resoluendo numeros Potestatum collectæ summæ. Signum autem ritè aliquem operatum fuisse erit, si numeri collectæ summæ resoluti, fuerint æquales numeris addendis resolutis simul sumptis. Esto exemplum. Videndum sit, num ex additione 8Q†4R, ad 10Q—2R, proueniat summa 18 Q†2R: resoluantur numeri addendi in numeros absolutos, iuxta aliquam radicis æstimationem, v. g. 3. erit enim 8Q†4R idem, quod 72†12, & si resoluantur 10Q—2R, erit 90—6, quorum summa est 162†6, hoc est 168; huic autem debet esse æqualis numerus 18Q †2R, in numeros absolutos redactus: & ita est; siquidem facta resolutione, erit summa 162†6, vt patet.

8Q † 4R
10Q — 2R
————
18Q † 2R
72 † 12
90 — 6
————
162 † 6

De numeris surdis.

Quoad numeros autem surdos, & irrationales, nihil amplius aduertendum occurrit, præter ea, quæ traduntur de logistica numerorum surdorum vulgarium. Itaq; si numeri irrationales, per quos numerantur potestates, fuerint æquales, addantur, vt illi; nempè facta multiplicatione per 2, redactũ ad radicis naturam, v. g. ad ℞Q10R, debeat addi ℞Q 10R, fiet summa ℞Q40R. Sic si fuerint radices cubicæ, &c. Vt si ad ℞C30Q, addi debeat ℞C30Q, fiet summa ℞C240Q: numerus enim 2, redigi debet ad naturam illius radicis, de qua loquimur. Quòd si numeri sint inæquales commensurabiles; agatur, vt de ipsis suo loco dictum est;

Quādo numeri sunt inæquales commensurabiles quid agendum.

vide-

videlicet ducatur vnus in alterum, & producti numeri extrahatur radix quadrata, quæ duplicetur; hoc autem duplum addatur summæ quadratorum, si loquamur de radicibus quadratis. Huius radix quadrata erit summa Potestatum, &c. Exemplum. Ad ℞Q20R, addatur ℞Q5R, fiet summa ℞Q45R; & si ad surdum denominatum addere deberemus numerum non surdum denominatum; vt ad ℞Q5Q, addere oporteat 3Q, fiet additio per signum †, & proueniet ℞Q5Q†3Q, & ita de reliquis. Item ex ℞Q8R, ad ℞Q18R, fiet summa ℞Q50R, cum ℞Q8, & ℞Q18, sint commensurabiles.

Quādo radices fuerint commensurabiles.

Cum autem radices non fuerint commensurabiles, absoluetur item additio, beneficio signi †, vt ad ℞Q7R, sit opus addere ℞5R, fiet summa ℞7R†℞5R. Item ex ℞C15R, ad ℞C6R, fiet summa ℞C15R†℞C6R. Item ex ℞36R ad ℞12Q fiet summa ℞36R†℞12Q siue ℞12Q†℞36R.

Primus incommensurabilitatis modus.

Verùm radices commemoratæ poterunt esse bifariam incommensurabiles. Primò quoad numerum; quando nimirum (loquendo de radicibus quadratis) numeri non sunt in proportione, vt numerus quadratus, ad numerum quadratum; & si loquamur de radicibus cubicis, non fuerint in ratione tanquam numerus cubus, ad numerum cubum, &c.

Secundus modus incommensurabilitatis.

Secundò, quando dignitates fuerint diuersæ; vt si quidam numerus surdus afficiatur cubo, alter verò Q&c. in huiusmodi casu absoluitur additio beneficio signi † vt ex ℞5Q, ad ℞20R, fit summa ℞5Q†℞20R, & ex his colligitur methodus additionis numerorum compositorum irrationalium denominatorum.

Additio numerorum simplicium, qui intra parenthesin clauduntur.

At verò hinc facilè constabit additio numerorum simplicium, qui intra parenthesin clauduntur; & radices vniuersales simplices dicuntur; obseruatis enim ijs, quæ diximus, facili negotio operationem expediemus. Vt si ad ℞(12C) addere debeamus 6R, fiet summa 6R†℞(12C) Item ex ℞(7QC) ad ℞(12C) fit ℞(7QC†12C) & si ad ℞(15C) addere oporteat ℞(5R) fit summa ℞(15C†5R)

Inſuper ex ℞ (13C) ad ℞ (17C) fit ſumma ℞ (13C † 17C) & ſic de reliquis incommenſurabilibus ſimplicibus vniuerſalibus radicibus. Vt ex ℞C (18Q) ad ℞C (15R) fit ℞C (18Q † 15R) & ex ℞C (18QC) ad ℞C (15R) fit ℞C (18QC † 15R) & ex ℞C (20Q) ad ℞C (15R) fit ℞C (20Q † 15R) & ex ℞C (18QQ) ad ℞C (7QQ) fit ℞C (18QQ † 7QQ).

Quando fuerint cōmenſurabiles quid agendum.

Si verò fuerint commenſurabiles obſeruentur præcepta, quæ traduntur de huiuſmodi numeris ſurdis in generali; ſi fuerint inquam commenſurabiles, tàm quoad numerum, quàm quoad Poteſtates. Ad ℞ (12R) addenda ſit ℞ (3R) fiet ſūma ℞ (27R) Item ad ℞ (32R) addere oporteat ℞ (2R) fiet ſumma ℞ (50R) Inſuper ex ℞ (8Q) ad ℞ (18Q) fiet ſumma ℞ (50Q) & ita de cæteris radicibus, nempe Cubicis, Quadrato-quadraticis, &c. obſeruatis præceptis conſentaneis earum naturis.

Exemplis declaratur ſuperior doctrina.

Præterea ex † ℞ (45C) ad — ℞ (5C) fit ſumma † ℞ (20C) etenim † ad — ſubtrahitur, remanetq; ſignum numeri maioris. Item ex ℞C (81Q) ad ℞C (24Q) fit ſumma ℞C (375Q) etenim communis diuiſor eſt 3, qui in 81, continetur viginti ſepties, & in 24, continetur octies; at verò ℞C, numeri 27, eſt 3, & numeri 8, eſt 2, horum ſumma eſt 5, huius cubus 125, qui ductus in 3, communem diuiſorem (hæc omnia iubent fieri præcepta numerorum irrationalium) facit 375. Præterea ex ℞C (20R) ad — ℞C (20R) fit ſumma 0, Item ex † ℞C (500R), ad — ℞C (256R) fit ſumma † ℞C (4R) etenim † & — in Additione ſubducuntur, remanetq; ſignum maioris numeri. Communis autem diuiſor eſt 4, qui numerum 500, metitur per 125, & numerum 256, per 64, modò ℞C, numeri 125, eſt 5, & numeri 64, eſt 4, quo ablato ex 5, remanet 1, cuius cubus eſt 1, qui ductus in 4, communem diuiſorem producit 4, &c. fit ergo ſumma † ℞C (4R).

Quando ſunt illi numeri ſurdi, qui radices vniuerſales compoſitæ dicũtur, quid agendum.

Porrò ſi fuerint illi numeri ſurdi, qui radices vniuerſales compoſitæ dicuntur, obſeruentur earum leges citra characteres poteſtatum traditæ, & ijdem tribuantur characteres ſummis collectis.

Pri-

Primò, videndum, num sint similes natura, & numero.

Primò videndum est, num sint similes natura, & numeros; deinde procedendum, vt diximus, de numeris surdis suo loco, &c. nempè addantur iuxta radicis naturam, vt suo loco docuimus.

Secūdo obseruandum num sint commensurabiles.

Secundò obseruandum num sint commensurabiles an non, si non extiterint commensurabiles, addantur signo †, si fuerint commensurabiles, obseruentur præcepta additionis Radicum Quadratarum, Cubicarum, &c. *Exempla.* Ex ℞(7Q†5R) ad ℞(3Q†2R) fit summa ℞(7Q†5R) † ℞(3Q†2R) ita si ad ℞(5Q†3R) addatur ℞(3Q†5R) fiet summa ℞(5Q†3R) † ℞(3Q†5R) sunt enim incommensurabiles.

Quando fuerint cōmensurabiles.

At verò si commensurabiles fuerint, obseruandum pręcepta Additionis, Radicum Quadratarum, Cubicarum, &c. Ita ex ℞(2Q†2R) ad ℞(32Q†8R) fiet summa ℞(50Q†18R) cum sint commensurabiles. Insuper ex additione ℞(12Q†8R) ad ℞(3Q†2R) fiet summa ℞(27Q†18R) etenim si 12 per 3 diuidatur, fit quotiens 4, numerus quadratus, si 3, per 3 diuidatur, fit quotiens 1, Radix autem quadrata numeri 4, est 2, & 1, est 1, harum radicum summa est 3, cuius quadratum est 9, quod si in 3, communem diuisorem ducatur, producitur 27; huic autem numero si addatur character Q, fiet summa 27Q. Deinde ipsorum 8, & 2, communis diuisor est 2, qui diuidens 8, facit quotientem 4, diuidens 2, facit 1; at ℞Q, numeri 4, est 2, & 1, est 1, quæ inuicem collectæ faciunt 3, huius quadratum est 9, quod si ducatur in 2, communem diuisorem producitur 18, cui apposito eodem charactere, fit summa 18R, hæ summæ additæ inuicem per signum †, & inclusæ intra parenthesin, pręposito tamen signo eodem radicali, faciunt summam quæsitam, hoc modo ℞(27Q†18R).

Explis explicantur, quæ superius dicta sunt.

Superior operatio numeris illustretur.

Hæc autem operatio enucleatur numeris absolutis hoc modo. Ad veritatem ostendendam supponamus 1R, pretium esse 2, quadratum erit 4, Itaq; 12Q, pretium erit 48, & 8R, erit 16, horum summa, vt vides est 64, cumq; includan-

48
16
—
64
8

tur

tur intra parenthesim præposito signo radicali quadrati; extrahatur ℞Q, estq; 8; Item 3Q, erunt 12; atq; adeo 2R, erunt 4, horum summa est 16, cuius ℞Q est 4, quæ addita ad 8, vnitates superius seruatas facit 12. Modo explicemus summam illam ℞(27Q†18R) cum 1R pretium sit 2, certè 27Q, valebunt 108, & 18R, valebunt 36, horum summa est 144, cuius ℞Q est 12, vt oportebat.

Exempla. Præterea ad ℞(512Q—150R) addatur ℞(72Q†150R) fiet summa ℞(968R). Namq; communis diuisor erit numerus 8, qui numerum 72, metitur per 9, & 512, metitur per 64, & ℞Q numeri 9, est 3, & numeri 64, est 8, horum summa est 11, huius quadratum est 121, quod ductum in 8, communem diuisorem facit 968Q, sed in addendis †, & — fit subtractio; Si ad — 150R, addantur † 150R fiet o, ac proinde summa erit ℞(968Q). Item si ad ℞(216C† 63R) addantur ℞(24C†28R) & ℞(54C†175R). Communis diuisor numerum, qui C, afficiuntur est 6, qui 216, metitur per 36, & 24, per 4, & 54, per 9. Horum radices quadratæ sunt 6, 3, 2, quorum summa 11, cuius quadratum est 121, quod si ducatur in 6, communem diuisorem; producitur 726C. Numerorum autem, qui R afficiuntur, communis diuisor est 7; qui 63, metitur per 9, & 28, per 4, & 175, per 25. Horum radices quadratæ sunt 3, 2, 5, quarum summa est 10, quæ ducta in 7, communem diuisorem facit 700R; Atq; adeo fiet summa intra parenthesim ℞(706C†700R).

Superior doctrina declaratur exemplis.

Superiora exẽpla numeris illustrantur. Poterunt autem explicari hæc omnia; quemadmodum alia superiora exempla nos enucleauimus. Vt si supponamus 1 R valorem esse ℞ 2, certe 1 Q, valebit 2, itaq; ℞(512Q) valebit 32, vt ℞(72Q) valebit 12, horum summa est 44; at verò si ℞(968Q) explicetur secundum eandem estimationem valebit quoq; 44; Si supponamus 1 R, valorem esse ℞ 3, quadratum erit 3, quo ducto in 512, fit 1536, item ducto in 72, fit 216; ergo ℞(512Q) valebit ℞ 1536, & ℞(72Q) valebit ℞ 216, si verò in vnam summam colligantur, fit ℞ 2904; at verò si ℞ 968, multiplicetur

cetur per 3, pretium quadrati, fiet 2904; atq; ℞ (968 Q) valebit ℞ 2904.

Numerorum Denominatorum Subtractio.

OPERATIO SECVNDA.

VEl facienda est subtractio numeri denominati ab alio numero eiusdem appellationis, vel diuersæ. Rursus, aut numeri sunt solitarij, & simplices, vt 10R, 6Q &c. vel compositi, per quos intelligo tàm propriè compositos, quàm diminutos, & mixtos. Et quicunq; sint, aut numerantur numeris absolutis, aut irrationalibus. *Subtractionis præcepta.*

Si fuerint appellationis eiusdem, subtrahatur numerus à numero, & reliquo idem tribuatur character; vt à 10 R subtrahendæ sint 4R, remanebunt 6R, à 12Q, subtrahi debent 4Q, remanebunt 8 Q, &c. *Quando sunt appellationis eiusdem.*

Demonstratio facilis est. Cum enim subtractio numerorum sit interualli, differentiæq; duorum numerorum acceptio; alio modo certè fieri non potest, quàm vnum ab alio auferendo *Differentia duorum numerorum siquidem, æqualis est maiori, ablato minori, siue minùs ipso minori.* *Demonstratio.* *Propositio.*

Si verò sint appellationis diuersæ, absoluetur subtractio beneficio signi —. Itaq; si abs 12Q, subtrahere debeamus 4R, fiet residuum 12Q—4R; Si abs 15C, subtrahenda sint 9Q, remanebunt 15C—9Q.

Demonstratio liquet. Etenim, quæ sunt heterogenea subtrahi non possunt nisi per signum —, constat autem hæc esse diuersæ naturæ; proinde necesse est, vt ita subtrahantur. *Quando sunt appellationis diuersæ.*

Quòd si numeri fuerint Compositi, Diminuti, & Mixti, habenda est præ oculis ratio signorum +, & —. *Demonstratio.*

Si

Signorum ✠, & — *Subtractio*.

✠ *à* ✠ *Subtrahitur, & remanet* ✠, *superiori termino existente maiori; alioquin remanet* —.

— *à* — *Subtrahitur, & remanet* — *superiori termino existente maiori; alioquin remanet* ✠.

✠ *à* — *Additur, & remanet* —.

— *à* ✠ *Additur, & remanet* ✠.

Exemplis illustratur superior doctrina. Quapropter si à 12Q✠8R, subducere debeamus 8Q✠4R, remanebunt 4Q✠4R. Item si à 12Q—4R, subducere debeamus 4Q—3R, remanebunt 8Q—1R.

Quando in subtractione alter numerorum habet signum ✠, *alter verò* —. At verò si in subtractione alter numerorum habuerit signum ✠, alter verò —, fiat iuxta præcepta signorum ✠, & — superiùs tradita; Itaq; hoc totum exemplis declarare iuuabit.

16Q✠4R	24Q✠4R
7Q—3R	15Q—6R
9Q✠7R	9Q✠10R
12Q—6R	14Q—2R
4Q✠3R	6Q✠4R
8Q—9R	8Q—6R

Et eodem pacto procedendum est in Plurimonijs.

16QC✠6QQ—4Q	14QQ✠12C—7Q
4QC✠4QQ✠2Q	5QQ—4C✠2Q
12QC✠2QQ—6Q	9QQ✠16C—9Q

Itaq; in subtractione commutatur species operationis; nimirum fit additio, summæq; tribuitur signum numeri superioris, à quo fieri debet subtractio.

In subtractione commutatur species operationis.

Hæc omnia facili negotio demonstrantur. Rectè operationem institui, cum eisdem signis † afficiuntur numeri, subtrahendo partes à partibus, ideò patet; quia *Si duo numeri vtcunq; fuerint diuisi, differentia totorum numerorum, æqualis est partium vnius numeri simul sumptis, à partibus alterius simul sumptis, differentijs. Seu idem est totum à toto subducere, ac est partes à partibus, & differentias in vnum colligere.*

Demonstratio.

Exempli gratia sint duo numeri diuisi 78, & 55, ille quidem in duas partes 60, & 18, hic autem in 40, & 15, sit diuisus. Si subtrahamus 15, & 18, remanent 3. Si ex 60, subducantur 40, remanent 20, horum summa est 23, tanta est autem differentia inter 78, & 55, vt patet.

60 † 18	
40 † 15	
20 † 3	78
	55
	23

Exemplo declaratur superior doctrina.

Retinendum autem esse idem signum †, siue —, prout numeri efficiuntur, ex eo constat; quòd *Si fuerint duo numeri vtcunq; diuisi; atq; adeo intercedat signum † : differentia totorum æqualis est differentiarum partium vnius numeri à partibus alterius, aggregato, vt patet ex dictis. Seu differentia totorum, æqualis est aggregato differentiarum, quibus partes vnius differunt à partibus alterius.*

Retinendum esse idem signum †, vel —. Propositio.

Rursus *Si duæ sint differentiæ, vna quidem duorum numerorum, alia verò duorum aliorum: idem est duos numeros differentes, à duobus numeris differentibus, singillatim subducere, & differentiam minorum emergentem, à maiorum differentia subtrahere; est idem inquam, ac est differentiam duorum, ab aliorum duorum differentia detrahere.*

Retinendum signum —.

Vt si sint 60—10, & 40—4, subtractis 4, ex 10, remanent 6, item subductis 40, ex 60, remanent 20, residuum erit 20—6, nempe 14, quantum planè residuum fit subtractis 36, ex 50.

60—10	50
40—4	36
20—6	14
60—4	56
40—10	30
20+6	26

Quando terminus superior afficitur signo —, estq; minor inferiori affecto signo itidem —, remanere signū +, ostenditur.

Quòd si terminus superior affectus signo —, minor sit inferiori itidem affecto signo —, remanere signum +, inde constat; quia *Si sint duo numeri differentes, & alij duo itidem differentes, ita tamen, vt terminus minor inferior, maior sit termino minori superiori; differentia, qua differunt differentiæ numerorum, æqualis est differentiæ maiorum numerorum, plus differentia minorum.*

Vt si sint 60—4, & 40—10, adeo vt ex 60—4, subtrahere debeamus 40—10, si ex 10, subducamus 4, residuum 6, addamus ad 20, differentiam inter 60, & 40, fit residuum quæsitum 20+6, nempè 26, quantum remanet subtractis 30, ex 56.

Declaratur magis superior doctrina.

Dum enim subtrahimus 40, ex 60, plus subducimus quàm oporteat; & numerum supponimus maiorem, à quo debeat fieri subtractio; ille quidem subtrahendus minui debet numero 10, ille verò numero 4. Hoc autem idem est; ac loco subtrahendi 4, ex 60, subducere 4, ex 10, itaut non amplius numerus 40, minuatur numero 10, sed potius 6, vt ex 60, subtrahantur 34, remaneant 26, quod est residuum illud 6, addere ad 20, differentiam inter 60, & 40.

Retinĕdum esse intercedens signum —. Propositio.

Retinendum autem esse intercedens signum —, cum terminus superior maior extiterit, liquet ex eo quia *Si sint duo numeri differentes, & itidem alij duo differentes; differentia istarum differentiarum æqualis est differentiæ maiorum numerorum è differentibus, minus differentia minorum.*

Quòd

Quòd ad ſigna +, & — attinet; nempè quando ſubtrahitur differentia duorum numerorum à numero diuiſo, vel è contra, retinendum eſſe ſignum ſuperioris termini, &c. facilitate eadem oſtenditur; etenim *Si fuerit numerus vtcunq; diuiſus, & duo numeri differentes, quorum differentia ſubtrahi debet à numero illo diuiſo; interuallum inter illorum duorum numerorum differentiam, & numerum diuiſum, æquale eſt differentiæ numeri maioris è duobus differentibus, ab vna parte numeri diuiſi, plus aggregato ex alterius parte, & altero è duobus numeris differentibus, nempe minori.* *Propoſitio.*

Non diſſimili modo procedendum erit, quando ab aliqua numerorum differentia ſubtrahi debet, numerus vtcunq; diuiſus in duas partes. Exemplum eſto. Sint duo numeri 60 + 10, & 40 — 7, adeo vt 40 — 7, ſubducere debeamus ex 60 + 10, remanebit 20 + 17, ſi nimirum addamus 7, ad 10, vt fiat 17, & ſi 40, ſubtrahamus ex 60, vt remaneat 20, fiatq; reſiduum 37, quantum fit ſi 33, numerus æquipollens reſiduo illi 40 — 7, ſubtrahamus ex 70, numero, qui æquipollet 60 + 10, quod poteſt ex dictis facilè intelligi. Dum enim ſubducimus 40, ex 60, ſubtrahimus, pluſquam oportet; neceſſe eſt igitur id, quod ſupererat, reſtituere illi, vnde facta eſt ſubtractio; quod vtiq; præſtamus addendo id àlteri parti numeri diuiſi, &c. *Exemplum ad ſuperius allata explicanda.*

60 + 10	70
40 — 7	33
20 + 17	37

Quantum autem ad Poteſtates ex eo liquidò conſtat, quòd *Si duo numeri in eundem numerum ducantur, & productum vnum minorem ſcilicet à maiori ſubtrahamus, reſiduum æquale eſt numero, qui fit, ſi ſubtracto minori, ex maiori duorum illorum, qui fuerant multiplicati, & qui relinquitur in illum eundem numerum tertium ducatur.* *Quoad poteſtates.*

Sint numeri A, B, qui multiplicati per C, producant D, & E, quorum differentia ſit F; Dico numerum F, æqualem eſſe I, numero, qui fit ex H, differentia inter A, & B, in C; *Demonſtratio.*

etenim cum C, multiplicans A, & B, producat D, & E, erit proportio D, ad E, quæ A, ad B; ergo, vt B, ad A, ita E, ad D, & diuidendo [a], vt B, minus A, ad A, ita E, minus D, ad D. Hoc est, vt H, ad A, ita F, ad D, seu, vt F, ad D, ita H, ad A; ergo permutando [b], vt F, ad H, ita D, ad A;

	H 20	
	5	
	I 100	
A 30		B 50
	C 5	G Vnitas
D 150		E 250
	F 100	

a 17. quinti.

b 16. quinti.

sed D, ad A, habet rationem, vt C, ad G vnitatem, nam C, multiplicando A, produxit D; ergo F, ad H, habebit rationem, vt C, ad vnitatem G; sed vt C, ad vnitatem, ita I, ad H, nam C, multiplicando H, produxit I; ergo erit I, ad H, vt F, ad H; quamobrem I, & F, erunt inter se æquales, quod erat ostendendum. Constat autem Potestates esse numeros, in quos duci intelliguntur ij, per quos numerantur.

Subtractionis examen, bifariã institui potest primò per additionẽ, secundo et resolutionẽ in numeros absolutos.

Subtractionis examen duobus modis institui potest; primò etenim comprobari potest subtractio per additionem, vt fit in numeris absolutis.

Secundò comprobatur commutando numeros denominatos in numeros absolutos; etenim facta hac resolutione, si numeri subtracti, & reliqui, vna simul collecti, fuerint æquales numeris, à quibus facta est subtractio, signum est nullum commissum esse errorem in operando.

Declaratio per exẽpla.

Exemplum. Subtrahamus 4Q+6R, ex 18Q+10R, remanebunt 14Q+4R, idq; num verum sit dignoscemus. Primò per additionem addendo nempè 4Q+6R, ad 14Q+4R; namq; si fuerit summa æqualis superiori numero, à quo facta est subtractio, rectè operatio instituta erit.

Secundò resoluantur 18Q+10R, in numeros absolutos, ſuppoſito 1R, pretio 2; erit 72+20, idem quod 18Q+10R. Deindè reſoluantur 4Q+6R, & erunt 16+12, facta ſubtractione, remanent 56+8, ſeu 64, modo reſoluamus 14Q+4R, & fiunt 56+8, ſeu 64. Dicendum ergo optimè operatum fuiſſe Analyſtam aſſerentem relinqui 14Q+4R, ſubtractis 4Q+6R, ex 18Q+10R.

Secundum ſubtractionis examẽ.

$$\begin{array}{r} 18Q + 10R \\ 4Q + 6R \\ \hline 14Q + 4R \\ 4Q + 6R \\ \hline 18Q + 10R \end{array}$$

Reliquum eſt, vt agamus de numeris denominatis irrationalibus, ſeu de poteſtatibus numeratis per numeros irrationales, tàm ſimplices, quàm compoſitos. Sed facilè cognoſcitur methodus obſeruanda, ex ijs, quæ traduntur de huiuſmodi numeris citra poteſtatum characteres. Quamobrem ſi radices fuerint ſimplices, fuerintq; eiuſdem appellationis, & extiterint commenſurabiles, fiat ſubtractio iuxta numeros irrationales ſimplices. Itaq; ſi ex ℞20R, ſubtrahere debeamus ℞5R, remanebit ℞5R, ſi ex ℞50Q, ſubtrahi debet ℞2Q, remanebit ℞Q32Q, & ſic de reliquis, &c.

Numeri denominati, dum numerantur per numeros irrationales.

Cum fuerint incommenſurabiles fit ſubtractio per ſignum —. Vt ex ℞30R, ſi ſubtrahimus ℞20R, remanebit ℞30R—℞20R, eodem pacto ſi fuerint numeri denominati diuerſæ appellationis, vel abſoluti. Quod ſi radices fuerint Cubicæ, Quadrato-quadraticæ, &c. obſeruentur earum præcepta de numeris ſurdis. Et hinc patet quid agendum in numeris irrationalibus compoſitis; ſic etiam de radicibus vniuerſalibus, &c. De his autem ſupra de additione tractantes loquuti ſumus; ſiuè ſint vniuerſales ſimplices, ſiuè compoſitæ; obſeruandum enim vtrum ſint commenſurabiles; quemadmodum de additione dicebamus; & expedietur ſubtractio iuxta leges numerorum irrationalium in generali.

Quando fuerint incommenſurabiles.

Itaq; ſi ex ℞(10Q) ſubtrahantur 5R, fiet reſiduum ℞(10Q)—5R, cum enim prorſus ſint incommenſurabiles, non

Exempla ad ſuperiora præcepta declarãda.

non poſſunt ſubtrahi, niſi per ſignum —. Rurſus ex ℞(12C) ſubducamus ℞(8Q) fiet reſiduum ℞(12C—8Q) & ex ℞(8C) ſi ſubtrahatur ℞(2R) remanet ℞(8C—2R) ex ℞(12C) ſi ſubtrahatur ℞(5C) remanet ℞(12C—5C) & ſic de reliquis radicibus vniuerſalibus ſimplicibus incommenſurabilibus.

Quando fuerint cõmenſurabiles.

Si fuerint commenſurabiles, vt à ℞(12C) ſi ſubtrahere debeamus ℞(3C) emerget pro reſiduo ℞(3C) rurſus à ℞(27C) ſi ſubtrahamus ℞(12C) remanebit ℞(3C) communis diuiſor eſt 3, qui 27, metitur per 9, & 12, metitur per 4, horum autem radices quadratæ ſunt 3, & 2; ſubductis autem 2, ex 3, remanet 1, cuius quadratum eſt 1, quod ſi ducatur in 3, communem diuiſorem producit numerum 3, & ita de reliquis radicibus, iuxta earum naturam intelligendum eſt; Numeris autem abſolutis hæc facilè declarari poſſunt.

Quando ſunt compoſita vniuerſales.

Si ſint compoſitæ vniuerſales, vel ſunt commenſurabiles, vel non; Si non ſunt commenſurabiles fiat detractio per idem ſignum —, vt ex ℞(15C+6Q) ſubtrahere debeamus ℞(12Q+4R) pro reſiduo emerget ℞(15C+6R) — ℞(12Q+4Q). Item ex ℞(40C+12R) ſubducere debeamus ℞(10QC+6R) & remanebit ℞(40C+12R) — ℞(10QC+6R) & ita de cæteris.

Quãdo numeri fuerint commenſurabiles, qua arte ſit inſtituẽda ſubtractio.

Quod ſi fuerint commenſurabiles, fiat ſubtractio iuxta leges horum ſurdorum numerorum, &c. ex ℞(384C+72R) detrahatur ℞(150C+200R) & remanebit ℞(54C—32R) communis diuiſor numerorum, qui charactere C, afficiuntur eſt 6, qui numeros 384, & 150, metitur per 64, & 25; quorum Radices quadratæ ſunt 8, & 5: at ex 8, ſubductis 5, remanet 3, cuius quadratum eſt 9, quod ductum in 6, communem diuiſorem, producit 54C: at verò numerorum, qui charactere R afficiuntur, eſt 8, qui numerum 72, metitur per 9, & 200, metitur per 25; at radix quadrata numeri 9, eſt 3, & numeri 25, eſt 5, à quibus ſubtractis 3, remanet numerus 2, cuius quadratum eſt 4, quod ductum in 8, producit 32, ſi verò ex + ſubtrahatur —, remanet +,

ma-

maiori existente superiori numero. Sin autem remanet —, proinde remanebit ℞ (54C—32R). Item ex ℞C (1512Q—320R) subtrahatur ℞C (875Q—40R) remanebit ℞Q (7Q—40R). Numerorum enim charactere Q, affectorum communis diuisor est 7, qui 1512, metitur per 216, & 875, metitur per 125; at verò ℞C, numeri 216, est 6, & numeri 125, est 5; ex 6, subductis 5, remanet 1, cuius cubus est 1, ductus autem in 7, communem diuisorem producit 7, & fit 7Q; Numerorum autem R, affectorum communis diuisor est 5, qui 320, metitur per 64, & 40, metitur per 8; at verò numeri 64; est ℞C, numerus 4. & numeri 8, est 2; hac subducta ex 4, remanet 2, huius cubus est 8, ductus autem in 5, communem diuisorem facit 40, & ita fiet 40R, at si ex — subducatur —, remanet —, superiori termino existente maiori. Item ℞ (48C+8Q) subtrahere debeamus ex ℞ (75C+32Q) remanebit ℞ (3C+4Q). Insuper ex ℞C (192Q+432R) detrahenda sit ℞C (81Q+250R) residuum erit ℞C (3Q+2R).

Numerorum Denominatorum Multiplicatio.

OPERATIO TERTIA.

Eodem pacto distinguendum est hic de numeris in multiplicatione, vt superiùs in Additione, & Subtractione dictum fuit. Ob id huiusmodi diuisiones non repetemus. *Eadem numerorũ distinctio in multiplicatione, quæ in cæteris operationibus.*

Si multiplicari debet numerus denominatus per numerum absolutum, fiat multiplicatio, vt in numeris absolutis, productoq; idem character apponatur; prouenit enim numerus eiusdem appellationis. Vt si 10R, multiplicari debeant per 4. fiunt 40R. *Multiplicatio numeri denominati per numerum absolutum.*

Cum autem numerus denominatus per numerum denominatum multiplicatur, fiat multiplicatio, vt in numeris absolutis; producto verò tribuatur character, qui debetur summæ exponentium characterum numerorum, qui multiplicantur. *Multiplicatio numeri denominati per numerum denominatũ.*

Vt

Vt multiplicare debeamus 6R, per 6R, fit productum 36Q, quoniam 1, exponens characteris R, ſi addatur ad 1, exponentem item ipſius R, facit 2, exponentem, cui debetur Q. Inſuper multiplicemus 6Q, per 5R, fit productum 30C, quoniam exponentes multiplicatorum ſunt 2, & 1, ex quibus coaleſcit 3, cui debetur C: & ſic de reliquis.

Demõſtratio quoad numeros.

Demonſtratio quoad numeros patet. Cum enim tunc numerus numerum multiplicare dicatur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis; Vnde multiplicatio numeri in numerum, eſt inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicãtium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium, ad vnitatem. Hoc aliter autem fieri non poteſt, quàm ducendo vnum in alterum, ſic .n. indagatur numerus, qui ad alterutrum multiplicãtium, eam habet rationem, quã alter multiplicãtium ad vnitatẽ;

Demõſtratio quoad characteres.

Propoſitio.

Quantum ad characteres; rectè nimirum inſtitui operationem additione exponentium, multiplicando partes, oſtenditur ex eo, quia *Si fuerint quatuor numeri, & qui fit ex primo in ſecundum ducatur in factum, ex tertio in quartum (nihil refert num ſint proportionales, an non) hoc eſt producti ex primo in ſecundum, & ex tertio in quartum multiplicentur adinuicem (per primum, & tertium intellige numeros per quos poteſtates numerantur; per ſecundum, & quartum verò poteſtates ipſas) is, qui emergit æqualis eſt illi, qui fit ſi multiplicetur primus in tertium, & ſecundus in quartum, & producti multiplicentur inter ſe.*

Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina.

Hæc autem exemplis, facilè poſſunt illuſtrari, & ratiocinio demonſtrari. Etenim ſi ſint quatuor numeri 2, 4, 8, 16, &, qui fit ex 2, in 4, ſcilicet 8, ducatur in 128, factum ex 8, in 16, fiet enim 1024; Idem autem numerus prouenit, ſi multiplicetur 2 per 8, & numerus productus

3,	7,	4,	9.
36		63	
21		12	
36		126	
72		63	
756		756	

16,

16, ducatur in 64, factum ex 4, in 16, nàm fiet 1024. Idem intellige si forent quatuor numeri 3, 7, 4, 9. qui non sunt proportionales.

Demonstratur autem hoc modo. Sint numeri A, B, C, D; & numerus A, multiplicans B, producat E, multiplicans C, producat F; at numerus D, multiplicans C, producat G, multiplicans B, producat H, erit [a], vt C, ad B, ita F, ad E; & quia D, multiplicans C, & B, producit G, & H, erit [b], vt C, ad B, ita G, ad H, sed vt C, ad B, ita F, ad E, ergo, vt F, ad E, ita erit G, ad H, quamobrem numerus factus ex F, in H, æqualis erit [c], facto ex E, in G, sed numerus F, producitur ex A, in C, & numerus H, ex B, in D, & numerus E, ex A, in B, & numerus G, ex C, in D, ergo, &c. Quod oportebat ostendere.

Demõstratio supradicterum.

A	B	C	D
3	7	4	9
F	E	G	H
12	21	36	63

[a] 17. septimi.
[b] 17. septimi.
[c] 19. septimi.

SCHOLION.

Demõstratur superius dicta, per reductionẽ numerorũ denominatorũ in numeros absolutos.

SVpponamus 4 &, eudenda esse in 3 R, sit 1 R, pretium 5, ergo 1 Q, valebit 25, Instituta multiplicatione fiet productum 12C. Modo primus numerus erit 3, secundus 5, tertius 4, & quartus 25, si resoluamus 3 R, in numeros absolutos, vtiq; trium radicum valor erit 15; & resolutis 4 Q, in numeros absolutos valor eorum erit 100; Itaq; ducere 4 Q, in 3 R, erit multiplicare 100, per 15, quorum productum est 1500, hoc est 15, numerus productus ex 3, primo in 5, secundum si ducatur in 100, numerum productum ex 4, tertio in 25, quartum producit 1500, quantum producit 12, numerus productus ex 3, in 4, primo in tertium, qui sunt numeri potestatum in 125, numerum factum ex 5, secundo in 25, quartum, videlicet, in cubum ex 5; cùm 5, sit radix quadrata numeri 25; vnde non mirum, si productum ex 4 Q, in 3 R, sit 12C; & ita de reliquis potestatibus intelligendum est.

3, 5, 4, 25;

Demõstratio multiplicationis potestatum. Propositio. Ad 11. propos. lib. 9. Euclidis.

Rectè verò fieri multiplicationem potestatum additione exponentium, &c. deducitur ex Elementis; ostenditur enim ibi *Si numerus in Geometrica progressione incipiente ab vnitate se ipsum multiplicet, numerum producit progressionis eiusdem; qui tantùm ab eo exclusiuè distat, quantùm is ab vnitate.* Hæc autem distantia cum habeatur additione exponentium,& eadem habebitur potestas quæsita. Quamobrem si 1Q, ducatur in se, fit 1QQ, quæ quidem potestas habebitur additione exponentium; etenim ipsa comparatur quotum locum occupet QQ, ab Q, exclusiuè, exponens enim est 4, qui designat secundum locum exclusiuè à 24, exponente Q, qui item secundum locum occupat ab Vnitate exclusiuè. Cum itaq; res ita se habeat, sequitur additione exponentium, quando potestas in se ducitur, comparari numerum, à quo designatur potestas emergens ex multiplicatione ipsa.

Additione exponentiũ, cõparatur numerus, à quo designatur potestas emergẽs ex multiplicatione, quando potestas in se ducitur, quando etiam in aliam. Propositio. Ad 11. propos. lib. 9. Euclidis.

Pariter eadem de causa, quando multiplicatur potestas aliqua in aliam potestatem; etenim habetur eodem loco Elementornm. *Si minor quispiam numerus Geometricæ progressionis ab vnitate incipientis, multiplicet quempiam maiorem progressionis eiusdem, producitur numerus, qui tantùm à maiori distat exclusiuè, in progressione eadem, quantùm minor exclusiuè distat ab Vnitate.* Vt si multiplicetur C, per R, producetur QQ, siquidem exponens R, est 1, & exponens C, est 3, qui simul additi faciunt 4, exponentem ipsius QQ, tantùm autem distat numerus 4, exclusiuè à 3, exponente characteris C, quantùm 1, exponens ipsius R, exclusiuè ab vnitate, quæ est progressionis Geometricæ initium. Cum itaq; additione exponentium procreatur numerus designans locum distantem, &c. etiam potestas quæsita designabitur.

Tabula cõducens plurimum ad potestatum multiplicationẽ. Eiusdem vsus.

Facilitatis autem gratia hæc tabella constructa est, vt quisq; oculorum ictu possit omnia conspicere, quantum nimirum ad potestatum multiplicationem.

Huius autem Tabellæ vsus hic est. Vel in fronte, vel à latere sinistro, quære exponentem characteris, ducendi in characterem alterum, cuius exponētem inſpice in fronte, vel à latere prout priorem exponentem in alterutro loco inſpexeris; tunc quære in angulo communi, vbi offertur character poteſtatis productæ.

Exponentes	1	2	3	4	5	6	7
	R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC
1 R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC
2 Q	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC
3 C	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC
4 QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC
5 QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC	CCCC
6 CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC	CCCC	QQCCC
7 QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC	CCCC	QQCCC	QCCCC

Quando autem numeri fuerint compoſiti, per quos tàm propriè compoſitos, quàm diminutos, & miſtos intelligo; habenda eſt ratio ſignorum ✠, & —, in cuius gratiam eorum multiplicationem addiſce. *Quādo numeri fuerint compoſiti.*

Signorum +, & − Multiplicatio.

+ in + facit +. Hoc est, Plus ductum in Plus facit Plus.
− in − facit +. Hoc est, Minus ductum in Minus facit Plus.
+ in − facit −. Hoc est, Plus ductum in Minus facit Minus.
− in + facit −. Hoc est, Minus ductum in Plus facit Minus.

Explicatur precepta. Itaq; siue numerum compositum ducere debeamus in numerum simplicem absolutum, siue in simplicem denominatum, siue in compositum; instituì debet multiplicatio secundum partes, & habenda est ratio potestatum, characterum, & signorum +, & −.

Exemplis enucleatur superior doctrina. Exemplis autem res fiet illustrior. Ducantur 10Q + 6R, in 5, fiet productum 50Q + 30R; Hoc si ducatur in 4R, fiet productum 200C + 120Q. Multiplicemus 8Q + 5R, in 6Q + 4R, fiet productum 48QQ + 62C + 20Q; Vel secundũ alios 48QQ + 20Q + 62C.

Etenim aliquibus visum est, ea, quæ fiunt ex multiplicatione extremorum ex vtraq; parte constitui, scribiq; debere in summa, priusquam ea, quæ emergunt ex multiplicatione per crucem: & quidem quando intercedit signum −, melius est ita scribere, sed illo non intercedente, nihil refert.

10Q + 6R
5
———
50Q + 30R
4R
———
200C + 120Q

8Q + 5R
6Q + 4R
———
32C + 20Q
48QQ + 30C
———
48QQ + 62C + 20Q

8Q + 5R
8Q + 4R
———
32C + 20Q
64QQ + 40C
———
64QQ + 72C + 20Q

Itaq;

Itaq; cum multiplicamus 8 Q—4 R, in 5 Q—2 R, & fit productum 40QQ—36C+8Q; sensus est, quod ab aggregato ex 40 QQ, & 8 Q, subtrahi debent 36C. Proinde melius fortassis erit scribere 40 QQ + 8 Q—36C. Quod enim C, maior Potestas, quam Q postponatur, nihil refert.

12Q+ 5R	8Q— 4R
6Q— 2R	5Q— 2R
—24C—10Q	—16C+ 8Q
72QQ+30C	40QQ—20C
72QQ+ 6C—10Q	40QQ—36C+ 8Q vel
	40QQ+ 8Q—36C

Hæc autem ita demonstrantur, & primò quidem rectè multiplicationis operationem institui, multiplicando partes singillatim, &c. ex eo patet; quia *Si fuerint duo numeri, & ipsorum alter in quotcunq; partes diuidatur; numerus emergens ex ductu illorum duorum numerorum, æqualis est numero, qui sub indiuiso numero, & qualibet diuisi numeri parte continetur.* Quod facilè demonstrari poterit ex ijs, quæ in Elementis ostenduntur. *Huius operationis demonstratio. Propositio.*

Itaq; idem est multiplicare diuisum in indiuisũ; ac est multiplicare partes ipsius diuisi in indiuisum, productosq; numeros in vnam colligere summam. Sit numerus 40, diuisus in duas partes 30, & 10; Si multiplicemus 10, per 5, producentur 50. Si 30, per 5, fient 150, horum summa est 200. Idem autem numerus 200, producitur ex multiplicatione numeri 40, in 5; Si igitur sint duo numeri, & ipsorum *Exemplis explicatur superior doctrina.*

30+10	
5	
150+50	
40	
5	
200	
30+10+ 6	
5	
150+50+30	

rum

rum alter in quotcunq; partes diuidatur; numerus emergens ex ductu illorum duorum numerorum, æqualis est numeris simul collectis, qui sub indiuiso numero, & qualibet diuisi numeri parte continentur. Idem intellige, si numerus diuisus sit in plures partes, quàm in duas.

Demonstratio. Hoc autem modo demonstrabimus, quæ diximus. Sint duo numeri AB, & C, quorum AB, sit diuisus in duas partes AD, DB; vel in plures quotcunq; exempli gratia tres AD, DE, EB, sit autem F, qui fit ex AB, in C, indiuisus autem C, multiplicans AB, producat F, multiplicans AD, producat GH, multiplicans DB, in prima figura producat HK; in secunda verò multiplicans AD, producat GH, & multiplicans DE, producat HI; Deniq; multiplicans EB, producat IK. Dico F, in prima figura æqualem esse GH, HK, seu GK, toti composito ex GH, HK; In secunda verò æqualem esse GH, HI, IK; seu GK, composito ex GH, HI, IK. Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F, metiatur AB, ipsum F, necesse est [a], per C; hoc est AB, erit pars ipsius F, denominata à C. Sic etiam ratione eadem AD, pars erit ipsius GH, & DB, ipsius HK, in prima figura; vt DE, ipsius HI, & EB, ipsius IK, in secunda figura; pars inquam erit à C, denominata; videlicet eadem pars, quæ est AB, ipsius F. Cum autem *Si sint quotcunq; numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars; & omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius*, vt demonstratur ad quintam propositionem lib. 7: ob id totus AB, totius GK, eadem pars erit, quæ AD, ipsius GH. Sed quæ pars est AD, ipsius GH, est AB, ipsius F: erit proinde AB totus, pars totius GK, quæ idem

A 30 D 10 B

C 5 F 200

G 150 H 50 K

A 30 D 10 E 6 B

C 5 F 230

G 150 H 50 I 30 K

a 2. pronũciatum.

AB,

AB, ipsius F; proinde GK, & F, erunt b, inter se æquales. Hoc etiam ex suprapofito diagrammate cognoscere licet.

b 4 præmis. septimi.

At si loquamur de multiplicatione compositi in compositum; certè non minùs patet demonstratio: quandoquidem *Si duo numeri fuerint vtcunq; diuisi; numerus planus comprehensus sub totalibus numeris, æqualis est aggregato illorũ, qui sub partibus comprehenduntur.*

Propositio.

Vt si sint duo numeri 40, & 26, quorum ille diuisus sit in duas partes 30, & 10; hic autem in 20, & 6; Si 40, ducentur in 26, producentur 1040. Idem autem numerus fiet; si ducatur 10, in 6; item 30, in 6; mox 20, in 10; itemq; 20, in 30: numeri enim producti 600, 200, 180, & 60, simul sumpti efficiunt 1040, vt patet ex hoc paradigmate.

Exemplis declaratur superior doctrina.

40	600	30 ✠ 10
26	380	20 ✠ 6
	60	
240		180 ✠ 60
80	1040	600 ✠ 200
1040		600 ✠ 380 ✠ 60

Quod attinet ad signa; nimirum ✠ in ✠ facere ✠, ex eo constat, *Quod si duo fuerint vtcunq; numeri diuisi: numerus emergens ex eorum multiplicatione, æqualis est numero plano comprehenso sub primis partibus; plus planis numeris, quorum vnus sub prima vnius, & secunda alterius; alter autem sub prima huius, & secunda illius; plus deniq; illo, qui fit sub secundis.*

Demõstratio quoad signa. Propositio.

Si enim fuerint duæ rectæ, secenturq; ambæ in quotcunq; segmenta; rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis: vt demonstrauit Commandinius in primam propositionem secundi Elementorum; quod vtiq; numeris etiam accommodari potest.

Propositio.

Sint

Exemplo declaratur superior propositio.

Sint numeri 70, & 30, quorum ille diuisus in 40, & 30, hic in 20, & 10. Ex 70, in 30, fit 2100. Idem autem fit si numerus planus 300, ex primis partibus 30, & 10, factus, addatur planis reliquis, vt patet.

		40 + 30	
		20 + 10	
		———	
		400 + 300	
800 + 600			
———			
800 + 600 + 400 + 300			

Demonstratio quoad signa —, & —: nempe — in — efficere +. Propositio.

Itidem perspicua est demonstratio, quoad signa —; & —: nimirum — in — efficere +. Etenim

Si fuerint duo numeri differentes, itemq; & alij duo: numerus planus, qui sub istis differentijs comprehenditur; æqualis est numero plano sub maioribus ex ipsis differentibus, plus plano sub minoribus, qui afficiuntur signo —, minus plano sub minori vnius, & maiori alterius, & ita vicissim. Hoc autem totum facilè deducetur ex Elementis. Quod facilè constare potest exemplo numerorum 60 — 20, & 40 — 10.

Demonstratio.

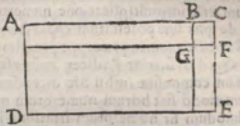
Rectangulum autem sit DC, comprehensum sub AC, CE, vna cum rectangulo sub BC, CF, æquale est rectangulo DG, sub AB, FE; plus rectangulo sub AC, CF, vna cum rectangulo sub EC, BC; constat autem AB, differentiam esse inter AC, BC, & FE, differentiam inter EC, & CF; si igitur à rectangulo sub AC, CE, plus rectangulo sub BC, CF, auferatur rectangulum sub AC, CF, plus rectangulo sub EC, CB, remanebit rectangulum DG, sub AB, FE, nempè sub differentijs.

	60 — 20	.60
	40 — 10	20
	———	———
	— 600 + 200	40
2400 — 800		———
200		40
———	40	10
2600	30	———
1400	———	30
———	1200	
1200		

Et

Quoad signa ✣, *et* —, *& è contra. Quoad numeros surdos.*

Et hinc etiam deducitur demonstratio quoad signa ✣, & —, itaut non sit opus vlteriori declaratione. Quoad numeros verò surdos, nihil occurrit dicendum; ex generali siquidem doctrina illorum perspicuum remanet, quid agendum in multiplicatione, quando afficiuntur characteribus Potestatum, &c.



Explicatur multiplicatio potestatum numeratarum à numeris irrationalibus.

Multiplicentur itaq; numeri irrationales, & in vnam summam colligantur exponentes potestatum; videatur character, qui huic debetur summæ, tribuaturq; producto ex multiplicatione, &c. Multiplicemus ℞ 5 R in 2, fit productum ℞ 20R. Præterea ex ℞ 6R, in 3R, fit ℞ 54Q. Insuper ex ℞ 7R, in ℞ 3R, fit ℞ 21Q; & sic de reliquis.

Difficultas.

Occurrit autem circa hoc vnum certè notatu dignum. Si sit iniunctum ducere numerum surdum dignitate affectum in numerum absolutum affectum quoq; dignitate; vt ℞ 7R in 2R: vtrum quadrantes numerum, vt illum nimirum ad alterius naturam reuocemus, nempè irrationalis, debeamus quadrare pariter ipsam dignitatem; itaut non sit instituenda multiplicatio inter ℞ 7 R, & 4 R, sed inter ℞ 7 R, & 4 Q. Rationes non desunt hinc inde.

Quid agendum.

Sed negatiuam sententiam esse probabiliorem opinor, & substineri posse faciliùs; nempè intactam relinquendam esse potestatem. Etenim Radix (vt aduertit Bombellius) nihil est aliud, quàm numerus in potentia: quapropter solùm discrimen est inter numeros; itaut ad dignitatem ipsam hoc non attineat. Id autem ita se habere perspicuum erit ex nostrorum Problematum resolutionibus, in quibus id, cum se obtulerit occasio, demonstrabimus.

Quãdo Radices sunt natura diuersæ.

Quòd si Radices fuerint natura diuersæ, reducantur ad eandem naturam; vt suo loco de multiplicatione irrationalium

nalium numerorum tractauimus. Eodem pacto procedendum erit in multiplicatione numerorum compositorum; vt de ipsis sine potestatum characteribus suo loco dictum est: additis tamen præceptis potestatum multiplicationis.

Quando Radices fuat vniuersales, Quod si fuerint Radices vniuersales, tàm simplices, quàm compositæ, nihil hic dicendum se offert; cum eodem modo fiat horum numerorum multiplicatio, quemadmodum fit numerorum irrationalium, simplicium, & compositorum, cum ipsis potestatibus non ligatorum, de quibus iam egimus: nihil enim aliud in his prætereà requiritur, quàm liberare numeros à clausulis, seu parenthesi, & eodem modo procedere, vt in illis; proindè hic silentio hanc operationem inuoluimus.

Multiplicationis probatio. Primus probationis modus, Cæterùm multiplicationis probatio rectè instituitur per diuisionem, de qua infra; quemadmodum diuisio per multiplicationem, vt postea constabit.

Secundus modus probationis: Deinde institui potest examen, & probatio multiplicationis, per resolutionem numerorum denominatorum, secundum aliquam radicem Geometricæ progressionis: etenim numeri denominati resoluti, si multiplicentur adinuicem, tantum efficere debent, quantum numeri denominati producti, si iuxta radicem eandem resoluantur. Vt ex du-

Exemplo declaratur superior doctrina. ctu 4R ✠ 2 in 3R ✠ 3, fiunt 12Q ✠ 18R ✠ 6. Resoluamus numeros denominatos secũdum radicis extimationem 3: erunt ergo 4R ✠ 2 idẽ quod 14; & 3R ✠ 3 idem quod 12: ex ductu autem 14, in 12, fiunt 168; quantum sanè fit ex resolutione iuxta eandem radicis extimationem ipsius producti 12Q ✠ 18R ✠ 6. Etenim 12Q idem est, quod 108, hoc est, 12Q valet 108;

		4R ✠ 2
		3R ✠ 3
		12R ✠ 6
12Q ✠	6R	
12Q ✠	18R ✠ 6	

108
54
6
168

si 1R,

si 1 R, valor sit 3: & 18R, idem quod 54; nàm si 1 R, valor est 3, vtiq; 18R, valebunt 54: modò si ad 108, addantur 54 ✠ 6, fiet summa 168, vt patet.

Hinc manifestum est, quod supra dicebamus; additionem terminorum Arithmeticæ progressionis respondere multiplicationi terminorum Geometricæ progressionis: etenim, vt ex additione 3, ad 5, fiunt 8; ita in via communi ex ductu SS, in C, quorum exponentes sunt 5, & 3, nimirum 32, in 8, producentur 128, seu QQQ, cuius exponens est 8; & in via Diophantæa, ex ductu QC, in C, fiet QCC: quapropter si character in characterem ducatur, producitur character tantùm distans a maiori exclusiuè, quantùm ab vnitate minor. *Additio terminorũ Arithmeticæ progressionis respõdet multiplicationi Geometricæ progressionis.*

Numerorum Denominatorum Diuisio.

OPERATIO QVARTA.

NOn minùs in diuisione, quàm in cæteris operationibus occurrere potest numerorum varietas in superioribus à nobis instituta. *In diuisione, vt in cæteris operationibus, occurrit numerorũ varietas, atq; distinctio.*

Si numerus denominatus diuidendus sit per numerum absolutum, & denominatum à potestatis charactere; instituatur diuisio, vt in numeris absolutis, seu vulgaribus: etenim pro quotiente numerus emerget appellationis eiusdem cum numero diuiso. Vt si diuidantur 100R, per 25; fiet quotiens 4R: insuper diuisis 30Q, per 10, fit quotiens 3Q: item si diuidantur 40C, per 2, quotiens emerget 20C; & sic de reliquis. *Quãdo numerus denominatus diuidi debet per numerum absolutum. Exẽplo declarantur præcepta.*

At verò si numerus denominatus diuidi debet per numerum denominatum; instituatur diuisio, vt in numeris vulgaribus, siuè absolutis, & emerget numerus alterius denominationis, quæ hac dignoscetur arte. *Quãdo numerus denominatus diuidi debet per numerum denominatũ.*

Exponens denominationis diuidentis subtrahatur ab exponente denominationis diuisæ, & numerus prosiliens, erit exponens denominationis quotientis. *Diuisionis supradictã præcepta.*

Exemplis doctrina tradita illustratur.

Vt diuidere debeamus 12R, per 3R: diuidatur 12 per 3, fiet quotiens 4: modo ad indagandam eius denominationem, exponens ipsius R, denominationis diuidentis, ab 1, exponente ipsius R, denominationis diuidendæ; factaq; subtractione, nihil remanebit. Ob id dicemus quotientem ipsius diuisionis, nimirum illorum denominationem esse 0: atq; adeò diuisis 12R, per 3R, fieri quotientem numerum absolutum. Diuidere operæ pretium sit 20C, per 5Q. Diuidantur 20, per 5, fit quotiens 4; deinde subtracto numero 2, exponente quadrati, abs 3, exponente ipsius C, remanebit 1, exponens huius denominationis Radicis: ob id dicemus diuisis 20C, per 5Q, fieri quotientem 4R: item diuisis 15Q, per 3R, fiet quotiens 5R: præterea diuisis 24QC, per 12C, fiet quotiens 2Q, &c.

In huius autem operationis gratiam hæc à nobis subijcitur tabella; in qua totum hoc perspicuè cernere licet: huius autem vsus facilis est, & relinquitur manifestus ex explicatione iam tradita Tabellæ superius positæ in gratiam multiplicationis.

Demonstratio.

Demonstratio hæc est. Cum diuisio numeri per numerum nihil aliud sit, quàm inuentio numeri, ad quem diuisus eam habet rationem, quam diuidens ad vnitatem. Hoc certè aliter fieri non potest, quàm applicando diuidendum ad diuidentem: exhibetur enim numerus quotiens; nimirum ostendens, quoties diuidendus diuisorem complectitur, & hic ad diuisum eam rationem habeat, quam vnitas ad diuisorem. Numerus enim numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

Sup-

Exponentes		1	2	3	4	5	6	7
Exponentes		R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC
1	R	N	R	Q	C	QQ	QC	CC
2	Q	R	N	R	Q	C	QQ	QC
3	C	Q	R	N	R	Q	C	QQ
4	QQ	C	Q	R	N	R	Q	C
5	QC	QQ	C	Q	R	N	R	Q
6	CC	QC	QQ	C	Q	R	N	R
7	QQC	CC	QC	QQ	C	Q	R	N

Supponamus 100, diuidi per 5; fit quotiens 20, numerus ostendens, quoties 5, continetur in 100: habet autem 20, ad 100, rationem eandem, quam habet 5, ad vnitatem. *Exēplo illustratur superior doctrina.*

$$\frac{100}{5}\ \ 20$$

1, 5, 20, 100.

Quod attinet ad potestates, sic ostenditur rectè operationem institui diuidendo potestates; nam *Si fuerint quatuor* *Demonstratio quoad potestates.*

Propositio. *tuor numeri (per primum, & tertium intelligo numeros, à quibus potestates numerantur; per secundum, & quartum potestates ipsas) diuidatur autem primus per tertium, & quotiens ducatur in quotientem secundi diuisi per quartum: producto numero æqualis est ille, qui emergit ex diuisione producti ex primo in secundum, per productum ex tertio in quartum, itaut in idem recidat, vtrouis modo procedatur.*

Exēplo explicatur superior doctrina. Sint quatuor numeri, vt vides.

140,	20,	10,	5.

Diuisis 140, per 10, fit quotiens 14: hic si ducatur in 4, numerum quotientem in diuisione numeri 20, per 5, producentur 56; modo si ducantur 140, in 20, producentur 2800; his porrò diuisis per 50, numerum productum ex multiplicatione numeri 10, per 5, fit quotiens 56. Hoc idem cernere licet in his alijs numeris 16, 8, 12, 4. Si 16, diuidamus per 12, fit quotiens $1\frac{1}{3}$; si verò 8, diuidamus per 4, fit quotiens 2; si verò $1\frac{1}{3}$, multiplicetur per 2, fiet numerus productus $2\frac{2}{3}$: modo si 16, multiplicemus per 8, producentur 128; his autem diuisis per 48, numerum productum ex 12, in 4, producetur quotiens $2\frac{2}{3}$, vt patet.

	A 14		
B 140			C 10
D 20			E 5
	F 4		
G 2800	H 56		I 50
	K 2800		
D 20	H 56	I 50	B 140

Sint

Sint numeri B, C, D, E; & quidem D, multiplicans B, producat G; & E, multiplicans C, producat I: diuidatur B, per C; proueniat A: diuidatur D, per E; & proueniat F: multiplicetur A, per F; & producatur H: si ducatur H, in I, producatur K. Dico K, æqualem esse G. Quoniam enim sunt quatuor numeri A, F, C, E; si E, multiplicetur per F, producitur D, toties continebitur E, in D, quoties vnitas continetur in F: & quia F, multiplicans A, producit H; toties continebitur A, in H, quoties vnitas in F. Ergo, vt E, ad D, ita A, ad H; & permutando [a], vt E, ad A, ita D, ad H: & quia C, multiplicans A, producit B; quoties vnitas continetur in C, toties A, continebitur in B: & quia C, multiplicans E, producit I; quoties vnitas continetur in C, toties E, continebitur in I. Vt igitur E, ad I, ita A, ad B; & permutando [b], vt E, ad A, ita I, ad B: sed vt E, ad A, ita est D, ad H: ergo vt D, ad H, ita I, ad B. Sunt igitur proportionales D, H, I, B; proinde, numerus factus ex D, in B, nimirum G, æqualis erit [a], numero K, facto ex H, in I, quod erat ostendendum, &c.

Demõstratio.

a 16. quinti.

b 16. quinti.

a 19. septimi.

Sint 6C, diuidendi per 12Q: supponamus 1R, valorem esse 5; si primus 6, diuidatur per tertium 12, prouenit quotiens $\frac{1}{2}$: diuidatur autem secundus 125, per 25, fiet quotiens 5; ducatur in $\frac{1}{2}$, fiet numerus productus $2\frac{1}{2}$; si multiplicemus 125, per 6, producentur 750; si verò 25, per 12, fient 300. At verò diuisis 750, per 300, emerget pro quotiente $2\frac{1}{2}$, nempè dimidium radicis. Rectè igitur dicebamus, &c. si namq; diuidantur 6C, per 12Q, prosilit in quotiente $\frac{1}{2}$R.

Exẽplo declaratur superior doctrina.

6	$\frac{1}{2}$	12
125		25
	5	
750	$2\frac{1}{2}$	300

$$\frac{750}{300}\ 2\tfrac{1}{2}$$

Opti-

Additione exponentiū rectè fieri potestatum multiplicationē ostenditur.

Optimè verò fieri diuisionem poteſtatum ſubtractione exponentium, patet ex eo quia, vt additione fit multiplicatio, ita ſubtractione fit diuiſio: quapropter vt addendo exponentem 2, ad exponentem 3, fit exponens 5, & cenſetur produci primus relatus in via communi, & quadrato-cubus iuxta Diophantum; ita etiam in eadem communi via ſubtrahendo 2, abs 5, remanebit exponens 3, cui reſpondit cubus in vtraq; via: & ſic de reliquis; obſeruato diſcrimiue inter Diophantum, & alios.

Cum numerum denominatum, per numerum abſolutum, vel per denominatum, tàm ſimplicem, quàm compoſitum diuidere debeamus (per compoſitos intelligo, tàm propriè compoſitos, quàm diminutos, & mixtos) habenda eſt ratio ſignorum ✠, & —: proinde aduertendum eſt, quid agendum circa hæc ſigna.

Diuiſio Signorum ✠, *&* —.

✠ *per* ✠ *emergit* ✠. *Hoc eſt, ſi Plus diuidatur per Plus, emergit Plus.*

— *per* — *emergit* ✠. *Hoc eſt, Minus ſi diuidatur per Minus, emergit Plus.*

✠ *per* — *emergit* —. *Hoc eſt, Plus ſi diuidatur per Minus, emergit Minus.*

— *per* ✠ *emergit* —. *Hoc eſt, ſi Minus diuidatur per Plus, emergit Minus.*

Si † diuidatur per †.

Cæterum potiùs vberioris doctrinæ gratia hæc adiecimus: vt plurimùm enim numerus compoſitus per compoſitum diuiſionem non patitur; ſed pro quotiente proſilit fractio, vt infra dicemus.

Si † diuidatur per †, fieri † oſtenditur.

Et quoad ſignorum, quæ iam recenſuimus ✠, & —, diuiſionem attinet; nempe ſi ✠ diuidatur per ✠ fieri ✠, ex ijs fit manifeſtum, quæ ſuperius circa multiplicationem in medium attulimus. Cum enim diceremus ✠ in ✠ efficere ✠, neceſſe eſt ex diuiſione ✠ per ✠ fieri ✠.

Se-

Secundò — per — emergere +, hoc eſt, ſi — per — diuidatur emergere +, patet; ſiquidem ducendo — in +, concluſimus ſupra produci —: ergo diuidendo — per — emerget +. Vt ſi ducantur + 12, in — 3, fiet productum — 36, quibus diuiſis per — 3, emerget pro quotiente + 12. Atverò diuidendo + per —, & è contra, produci —, ex eo conſtat; quod ſi + ducatur in —, producitur —, & è contra: ergo — ſi diuidatur per +, emerget —; ſic etiam è contra, &c.

Si — diuidatur per — fieri + demonſtratur.

Quando + diuidatur per —, vel contra, &c.

Iniunctum ſit diuidere 12 Q + 6 R per 3, fit quotiens 4 Q + 2 R: diuidantur 16 C + 4 Q per 2 Q, fiet quotiens 8 R + 2: inſuper ſi diuidere deberemus 20 C + 12 Q per 4 R, fit quotiens 5 Q + 3 R.

Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina.

Cum autem diuiſor fuerit numerus compoſitus, vt plurimum non poteſt inſtitui diuiſio, ſed in quotiente proſilit fractio: tunc autem diuiſio poterit inſtitui, quando partes diuidendi, ad partes diuiſoris eandem rationem habent; vt ſi diuidere deberemus 12 Q + 8, per 6 Q + 4. Quæ proportio eſt enim 12 Q, ad 6 Q, ea eſt 8, ad 4; proinde quotiens ex hac diuiſione proſiliens erit 2. Ita ſi 12 Q + 18, diuidere deberemus per 4 Q + 6, fiet quotiens 3.

Quãdo diuiſor fuerit numerus compoſitus.

Quãdo per numerum compoſitum inſtitui poteſt diuiſio.

Præterea diuidere ſit opus 16 Q + 6 R, per 8 R + 3. Fiet quotiens 2 R; eadem enim eſt proportio 16 Q, ad 8 R, quæ eſt 6 R, ad 3: poſſunt etiam alij caſus excogitari, in quibus diuiſio poterit inſtitui, ſed ex his facilè deprehendi poterunt.

Cum autem non poteſt fieri diuiſio, abſoluetur fractione. Vt ſit opus diuidere 7 Q + 15 R + 10, per 2 R + 2, fit quotiens $\frac{7Q + 15R + 10}{2R + 2}$. Inſuper diuidantur 10 C + 7 Q, per 5 R, fit quotiens $\frac{10C + 7Q}{5R}$. Inſuper diuidantur 3 R + 16, per 2, fit quotiens $\frac{3R + 16}{2}$. Item 8 R — 12, per 5, fit quotiens $\frac{8R - 12}{5}$.

Quãdo diuiſio per numerũ compoſitum inſtitui nequit, fit fractio.

Exemplis illuſtratur ſuperior doctrina.

L Con-

Quando diuisor est numerus denominatus maioris appellationis.

Contingit etiam fractio, quando numerus denominatus tàm simplex, quàm compositus per numerum simplicem denominatum appellationis maioris extiterit diuidendus. Vt si diuidere deberemus 10R, per 5 C, fit quotiens $\frac{10\,R}{5\,C}$. Item diuisis 12Q, per 6QC, fiet quotiens $\frac{12\,Q}{6\,QC}$.

Diuisio per numeros irrationales.

Superest, vt de numeris irrationalibus denominatis verba faciamus, &c. In his possunt varij contingere casus, quemadmodum superiùs dictum est. Diuidatur numerus per numerum, & quotienti præponatur signum radicale illius radicis, quæ diuiditur, &c.

Quando numeri irrationales sunt eiusdē denominationis, & sunt æquales.

Si numerum irrationalem per numerum æqualem, seu per radicem eiusdem numeri, & naturæ diuidi debet. Diuidatur radix per Radicem, nàm quotiens erit Vnitas; vt ex diuisione ℞ 6 Q, per ℞ 6 Q, fit quotiens 1: insuper diuersæ denominationis; vt ℞ 7 Q, per ℞ 7 R, fit quotiens 1 R: & sic de reliquis radicibus naturæ eiusdem, nempè diuidendo Radicem per Radicem, & dignitatem per dignitatem.

Quando numeri sūt eiusdē naturæ at verò fuerint inæquales, quid agendum.

Si fuerint naturæ eiusdem, sed numeri diuersi, vt si diuidere oporteat ℞ 60 Q, per ℞ 5 R, fiet quotiens diuidendo numerum per numerum, & dignitates per dignitates; emerget itaq; pro quotiente ℞ 12 R: item ℞ 48 Q, per ℞ 3 R, fiet quotiens 4 R: ita diuisa ℞ 80 C, per ℞ 5 R, fit quotiens 4 Q.

Num dum numerum quadramus, etiam dignitatem quadrare debeamus.

Sed hìc occurrit eadem dubitatio superiùs insinuata, vtrum dum numerum quadramus, etiam dignitatem quadrare debeamus. Existimo dignitatem relinquendam esse intactam; etenim ℞ 9 R, ducenda sit in 2 R, fit productum 6 Q, quod ita declaratur.

Exemplis enucleatur superior doctrina.

Supponamus 1 R, pretium esse 2, erit ergo dicendum ℞ 9 R, esse 6, idem est enim ℞ 9 R, ac est 3 R; insuper 2 R, erunt 4: itaq; ducendo ℞ 9 R, in 2 R, debet fieri numerus denominatus; qui resolutus tantum efficiat, quantum numeri illi denominati resoluti, si inter se ducantur. Constat autem si productum ex ℞ 9 R, in 12 R, dicatur esse 6 Q,

hoc

hoc si resoluatur, supposito 1 R, pretio 2, erit 24, quantum efficiunt numeri denominati ℞ 9 R, & 2 R, resolutæ si ducantur inter se, namq; 6, si ducantur in 4, producunt 24: at si quadraremus etiam dignitatem, fieret numerus productus 6 C, quod falsum est.

Si verò radices fuerint, tàm numero, quàm natura dissimiles, opus est illas reducere ad naturam eamdem, vt suo loco de irrationalibus numeris agentes verba fecimus. *Quãdo radices sunt tàm numero, quàm natura dissimiles.*

Quod si numerum per Radicem, vel è contra, diuidere debeamus, reuocetur numerus ad radicis naturam. Vt diuidere debeamus 10 Q, per ℞ 20 R, fiet quotiens ℞ 5 R. Sic etiam 6 QC, per ℞ 3 Q, fit quotiens ℞ 12 C. Item si radicem per numerum partiri, deberemus, vt ℞ 80 Q, per 2 R, fiet quotiens ℞ 20 R, & sic de reliquis. Hæc autem numeris absolutis declarare facillimum est, vt patet ex hactenus explicatis. *Quando numerus per radicẽ, vel è cõtra.*

Verùm cum numeri irrationales fuerint compositi, ea sunt obseruanda, quæ de huius generis numeris suo loco traduntur; ex ijs enim, & quæ modo diximus, facilè dignoscetur quid agendum: vt etiam de numeris illis, qui dicuntur radices vniuersales, tàm simplices, quàm compositæ. Horum enim numerorum diuisio, se habet instar diuisionis numerorum compositorum cum potestatibus, de quibus supra, qui nimirum ligati non sunt, obseruata ligatione tamen cum opus fuerit. *Quando numeri irrationales fuerint cõpositi.*

Diuisionis autem probatio rectè instituitur per multiplicationem, quam per diuisionem comprobari superiùs dicebamus. Comparari etiam potest resolutione numerorum denominatorum in numeros absolutos. Vt si diuidamus 20 Q, per 4 R, fit quotiens 5 R: resoluamus 20 Q, in numeros absolutos, supposito, pretio 2, esset 20 Q (facta resolutione in numeros absolutos, vt dictum est) idem quod 80, & 4 R, idem, quod 8, & 5 R, idem quod 10: diuisis autem 80, per 8, fit quotiens 10, quantum si resoluatur quotiens 5 R, secundum eandem radicem; diuidendus enim numerus denominatus resolutus, tantum producere *Diuisionis probatio.*

debet diuisus per diuisorem resolutum, quantum quotiens secundum eandem radicem pariter resolutus.

Additio numerorum Arithmeticæ progressionis respondet multiplicationi terminorũ progressionis Geometricæ.

Ex hactenus explicatis perspicuum remanet, nedum additionem numerorum Arithmeticæ progressionis respondere multiplicationi terminorum progressionis Geometricæ, vt superiùs innuimus; verùm etiam subtractionem diuisioni. Vt enim subtrahendo 4, ex 7, relinquuntur 3, ita diuiso BSS, per QQ, fit C, in via communi Ita namq; diuidendo BSS, nimirum 128, cuius exponens est 7, per QQ, hoc est per 16, cuius exponens est 4, prosilit numerus 8, nempe C, cuius exponens est 3. Et iuxta Diophantum, sicut subtrahendo 4, ex 7, remanent 3, sic diuiso QQC, per QQ, prosilit C, & ita de reliquis.

S C H O L I O N.

Quæ paulò obscuriùs tradita sũt hic maximè declarantur, & exẽplis præcipuè illustrantur.

VIdeor nonnulla paulò obscuriùs explicasse: in gratiam Tyronum, libet quædam aduertere. Cum itaq; supra diceremus radices natura, numeroq; similes, duplicandas, triplicandas, &c. seu multiplicandas per 2, per 3, &c. id intelligendum est iuxta Radicum numerum. Si fuerint 2, multiplicentur radices per 2, si tres per 3, & ita deinceps. Hoc autem fieri debet reducto numero in quem ducuntur ad naturam radicis. Si radices fuerint quadratæ debet numerus 2, vel 3, vel 4, &c. quadratè multiplicari. Si radices fuerint cubicæ, debent cubicè multiplicari, &c. prout suo loco de numeris surdis egimus. Insuper cum dicebamus, quando numerus irrationalis addendus est irrationali commensurabili, oportere radicem in radicem ducere, & producti latus duplicare, mox addendum hoc esse ad summam illorum numerorum, & numero emergenti signum radicale præfigendum esse, & characterem opponendum; vt si ad ℞ 2 0 R, addere sit operæ pretium ℞ 5 R, multiplicentur inter se, & fiet 100, cuius latus quadratum est 10, huius duplum 20, addatur ad 25, summam ex 20, & 5, & fiet summa 45, cui præponatur signum ℞ Q,

Additionis doctrina magis declaratur.

&

& apponatur R, erit summa radicum propositarum ℞45R: hoc intelligendum est de radicibus quadratis. De numeris autem surdis suo loco egimus: de cæteris verò radicum generibus, alia est obseruanda regula, quæ etiam radicibus quadratis inseruit, & generalissima est.

Methodus generalissima pro omnibus radicibus.

Nempè reperire oportet communē diuisorem, per quem diuisis numeris surdis addendis, à quotientibus extrahantur latera iuxta radicum naturam, & hæc in vnam summam colligantur; mox multiplicetur in se quadratè, vel cubicè, &c. iuxta radicis conditionem, & productum ducatur in communem diuisorem: nam si producto numero signum radicale præponatur, & eidem apponatur character potestatis; habebitur summa quæsita. Vt si proponantur superiores radices ℞20R, & ℞5R; communis diuisor horum numerorum 20, & 5, est 5, hic enim diuidens 20, facit quotientem 4, & 5, diuidens 5, facit quotientem 1, horum latera quadrata 2, & 1, quorum summa 3, si quadratè multiplicetur fiunt 9: modo hic numerus ducatur in 5, communem diuisorem, & fiunt 45; præponatur signum radicale, & apponatur character, fit summa ℞45R, vt priùs. Insuper propositæ sint ℞20R, & ℞45R, communis diuisor est 5, qui diuidens 20, facit quotientem 4, & diuidens 45, facit quotientem 9. Horum latera sunt 2, & 3, quorum summa 5, huius quadratum est 25, quo multiplicato per 5, communem diuisorem, producitur numerus 125, cui præposito signo radicali, & præposito charactere, erit summa quæsita ℞125R, quæ etiam habetur alio modo superiùs explicato.

Alia exempla ad eandem illustrã a præcepta.

Si proponatur ℞C81R, & ℞C24R, communis reperiatur diuisor, nempè 3, qui diuidens 81, facit quotientem 27, diuidens 24, facit quotientem 8, quorum latera cubica sunt 3, & 2, horum summa 5, huius cubus est 125, hic multiplicetur per 3, communem diuisorem fiunt 375: dicemus itaq; ex ℞C24R, ad ℞C81R, fieri ℞C375R, & ita de cæteris.

Quod de additione dicimus, de subtractione suo modo intel-

Subtractionis precepta explicatur. intelligendum est. Per primum modum, pro radicibus quadratis, ducantur ad inuicem, & productum latus duplicetur, hoc subtrahatur à summa numerorum surdorum, & residuo præposito signo radicali, & apposito charactere habetur residuum quæsitum. Vt ex ℞ 45 R, subtrahere sit opus ℞ 5, ducantur inter se, fiet numerus 225, cuius latus quadratum est 15; huius duplum 30, subtrahatur ex 50, nimirum à summa ex 45, & 5, & residuo 20, præposito charactere ℞, & postposito R, fiet pro residuo quæsito ℞ 20 R, & ita de reliquis. Si verò Radices fuerint cubicæ, vel aliæ alterius generis, &c. obseruetur secundus modus.

Exemplis explicatur superior doctrina. Quando radices sunt quadratæ.

Quando radices sunt cubicæ, vel cuiusq; alterius generis. Proponatur ℞C135R, & ℞C625R, communis diuisor est 5, qui diuidens 135, facit quotientem 27, & diuidens 625, facit 125, quorum latera cubica sunt 3, & 5; horum interuallum 2, cubicè multiplicetur, & fiet numerus 8, multiplicetur per 5, communem diuisorem, & producetur numerus 40, cui præposito signo radicali, & postposito charactere, fiet residuum quæsitum ℞ C 40 R, & ita de reliquis.

Quando sunt numeri irrationales compositi. Cum diceremus obseruandam esse legem numerorum surdorum, tractantes de numeris irrationalibus compositis, & de radicibus vniuersalibus, tàm simplicibus, quàm compositis, remisimus Lectorem, ad tractatum nostrum de huiusmodi numeris, adhibitis præceptis signorum ✠, & —. Itaq; si ad ℞24R✠℞20R; addere deberemus ℞ 6R✠℞5R, fiet summa ℞54R✠℞45R. Item ad ℞40R✠℞20R, addere debeamus ℞10R—℞5R, fit summa ℞90R✠℞5R: nam ex ℞10R, ad ℞40R, fit summa ℞90R: & ex —℞5R, ad ✠℞20R, fit ✠℞5R; etenim — ad ✠ subtrahitur, & notatur maius, &c. ita de reliquis radicum generibus intelligere oportet. Eodem modo sentiendum est suo modo de subtractione. Si sint Radices vniuersales, eæq; simplices, vt ex ℞(12R) & ℞(3R) fit summa ℞(27R): siquidem communis diuisor est 3, qui diuidens 12, facit quotientem 4, & diuidens 3, facit quotientem 1, horum latera quadrata sunt 2, & 1, quorum summa est 3, cuius quadratum est 9,

Subtractionis præcepta explicatur.

quod

quod si ducatur in 3, communem diuisorem, producetur 27: itaq; summa quæsita erit ℞ (27R). Insuper eodem pacto ex ℞C (40Q) ad ℞C (135Q) fit summa ℞C (725Q): nam communis diuisor est 5, qui diuidens 40, facit 8, diuidens autem 135, facit 27, horum latera cubica sunt 2, & 3, quorum summæ scilicet 5; cubus est 125, ducatur hic numerus 125 in 5, communem diuisorem, & fit 625; & ita erit quæsita summa ℞C (625Q): eadem arte procedendum est in reliquis. *Exempla, quibus superior doctrina explicatur.*

Quod de additione diximus suo modo de subtractione intelligendum est, vt ex ℞ (27R) subtracta ℞ (12R) remanet ℞ (3R): nam communis diuisor est 3, qui diuidens 27, facit 9, & diuidens 12, facit 4, quorum latera quadrata sunt 3, & 2, horum differentia est 1, cuius quadratum est 1, ducatur in 3, communem diuisorem, fiet numerus 3: itaq; ℞ (3R) erit residuum quæsitum. Et ex ℞C (750Q) subtracta ℞C (48Q) fit residuum ℞C (782Q): communis enim diuisor est 6, qui diuidens 750, facit 125, & diuidens 48, facit 8, quorum latera cubica sunt 2, & 5, horum differentia est 3, cuius cubus est 27, qui si ducatur in 6, communem diuisorem, producuntur 162, &c. & ita de reliquis radicum generibus. *Quæ de additione dicta sunt, etiam de subtractione sunt intelligenda.*

Insuper si radices extiterint vniuersales, compositæ, & commensurabiles, vt ex ℞ (27C✠45R) ad ℞ (48C✠20R) fit summa ℞ (147C✠125R): etenim communis diuisor numerorum, qui afficiuntur C, est 3, qui diuidens 27, facit 9, & diuidens 48, facit 16, quorum radices sunt 3, & 4, horum summa est 7 cuius quadratum 49, si ducatur in 3, communem diuisorem fiet numerus 147, & erit numerus cuborum: deinde quoad numeros radicum, communis diuisor est 5, qui diuidens 45, facit 9, & diuidens 20, facit 4, quorum radices sunt 3, & 2, summa horum numerorum est 5, cuius quadratum 25, si ducatur in 5, communem diuisorem, fit numerus radicum 125, & ✠ ad ✠ facit ✠: ob id erit summa quæsita ℞(147C✠125R): eodem pacto in reliquis radicū generibus, habita semper animaduersione signorum ✠, & —. *Quādo radices sunt vniuersales compositæ, & cōmensurabiles, earum additio explicatur.*

Quod

Quod autem de additione diximus, facilè potest etiam applicari subtractioni, adeo vt non sit opus vlteriori declaratione.

Explicatur subtractio radicū vniuersalium. Itaq; si R (175C + 20R) subtrahatur ex R (252C + 80Q), fiet residuum R (7C + 20R): & ex RC (1512Q — 320R) subtracta RC (875Q — 40R), fit residuum RC (7Q — 40R): etenim numerorum, qui Q, afficiuntur communis diuisor est 7, qui numerum 1512, metitur per 216, & numerum 875, metitur per 125; at verò R C, numeri 216, est 6, vt numeri 125, est 5, hoc ex illo subtracto, remanet 1, cuius cubus est 1, ducatur hic in 7, communem diuisorem, & producentur 7Q: communis diuisor numerorum, qui afficiuntur R, est 5, qui numerum 320, metitur per 64, & numerum 40, metitur per 8; at verò RC, numeri 64, est 4, vt numeri 8, est 2, hic si subtrahatur ex 4, remanet numerus 2, cuius cubus est 8, qui ductus in 5, communem diuisorem facit 40R; & fit —, cum ex — subtrahatur —: ob id residuum erit RC (7Q — 40R). Item ex R (75C + 18R) subtracta R (48C + 32R) remanet R (3C — 2R), obseruatis præceptis signorum +, & —. Cæterum vnusquisq; poterit præceptorum veritatem intueri, reducendo exempla numerorum denominatorum ad numeros absolutos.

Aduertatio circa ea, quæ hactenus dicta sunt de radicibus vniuersalibus simplicibus. Aduertendum autem, quando loquentes de radicibus vniuersalibus simplicibus dicebamus numeros claudendos intra parenthesim, non reddi sensum per huiusmodi inclusionem, vt radix sit extrahenda coniuncti: sed quòd latus, seu radix vnius, tam scilicet numeri, quàm dignitatis, loquendo de additione, intelligatur addita lateri alterius, scilicet tàm numeri, quàm dignitatis; si nimirum radix vniuersalis simplex, radici quoq; vniuersali simplici addi debet. Quamobrem si ad R (18C) addere deberemus R (9C) fit R (18C + 9C) cuius sensus est, vt radix tàm numeri, quàm dignitatis ipsius 9C, addita sit ipsius 18C, radici, tàm numeri, quàm dignitatis ad 18C; siquidem non addimus 9C, nàm fieret summa 27C, neq; ad R 18C, addi-

addimus ℞9C, sed ad ℞ (18C) addimus ℞ (9C) hoc est enim addere radicem vniuersalem, siuè ligatam ad ligatam; neq; est sensus, vt summa sit latus illius compositi. Quod per analysin in numeros absolutos perspicuum fiet. Sit opus ad ℞ (18C) addere ℞ (8R): sit 1R, pretium 2, ergo C. erit 8, quamobrem 18C, valebunt 144. huius autem ℞ est 12; insuper 8 R, valebunt 16, cuius ℞ est 4: at verò ex 12, & 4, fit 16. Itaq; si ex ℞ (18C), & ℞ (8R) dicamus fieri ℞ (18C ✠ 8R), sensus erit vt latera illarum radicum vniuersalium intelligantur in vnam summam collecta; non quòd summa illarum radicum sit radix illius compositi ex 18C, & 8 R, si quidem radix hæc esset R 160: constat autem ex additione illarum radicum vniuersalium simplicium nempè 12, & 4, non fieri ℞ 160, sed 16. Si quis autem ad euitandam æquiuocationem, vti vellet commatibus suis debitis locis, opportunè ageret: itaut hoc modo scribatur superius exemplum ℞ (18C, ✠, 8R): & ita de reliquis exemplis intelligendum est.

Exemplis enucleatur superior doctrina.

Si verò ℞ (12Q ✠ 8R) addere deberemus ad ℞ (3Q ✠ 2R): certè sumptis radicibus istis, tanquam vniuersalibus, siuè ligatis compositis, fiet summa ℞ (27Q ✠ 18R). Hoc autem innotescet resolutione horum numerorum in numeros absolutos: nam si supponamus 1 R, pretium esse 2; ergo trium quadratorum pretium erit 12, & duarum radicum pretium erit 4, ob id 3Q ✠ 2R, valebunt 16, quamobrem ℞ (3Q ✠ 2R) valebit 4. At verò eodem radicis pretio existente 2, certè 12Q, valebunt 48, & 8R, valebunt 16, horum summa est 64, proinde 12Q ✠ 8R, valebunt 64, huius radix quadrata est 8. Itaq; ℞ (12Q ✠ 8R) valebit 8. At si 4, valor ipsius ℞ (3Q ✠ 2R) addatur ad 8, valorem ipsius ℞ (12Q ✠ 8R); fit 12, quantum sanè est pretium ipsius ℞ (27 Q ✠ 18R): nam 27 Q, valebunt 108, & 18R, valebunt 36; at verò ex 108, & 36, fit numerus 144, cuius radix quadrata est 12: itaq; pretium ipsius ℞ (27Q ✠ 18R) erit 12.

De fractionibus, siuè minutijs numerorum denominatorum, ac de earundem Algorithmo.

CAPVT IV.

Operationes occurrentes in fractionibus numerorum denominatorum.

NVmeri quoq; denominati suas habent fractiones, siuè minutias, quemadmodum & vulgares; de his hic agendum superest: circa quas ferè eædem operationes occurrunt, quæ circa fractiones numerorum vulgarium; additis præceptis numerorum integrorum denominatorum, de quibus iam superiùs egimus, quantum nimirum ad characteres ipsos, & quoad signa ✢, & —.

Quo pacto numerentur fractiones numerorũ denominatorum.

Numerantur autem hoc modo, exempli gratia $\frac{12}{15R}$, significat duodecim vnitates diuisas esse per quindecim radices; & $\frac{18R}{50}$, denotat decem, & octo radices diuisas esse, per quinquaginta; $\frac{12QC + 10QQ}{7Q}$, significat numerum 12QC ✢ 10QQ, diuisum esse per 7Q; præterea $\frac{20C + 16R}{5Q + 3R}$, significat hunc numerum 20C ✢ 16R, diuisum esse per 5Q ✢ 3R, & ita de reliquis, & pronunciantur suo modo.

Operationes fractionum, quæ & quot.

Harum autem fractionum operationes hæ sunt, Abbreuiatio, tàm numerorum, quàm characterum, Reductio ad eundem denominatorem, & præterea Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio.

Fractionũ abbreuiatio quoad numeros.

Abbreuiatio fractionum, quoad numeros fit non dissimili modo, ac fit in minutijs vulgaribus, vt fractio ista $\frac{10Q}{5C}$, quoad numeros ad hanc reuocatur $\frac{2Q}{1C}$; & hęc $\frac{16Q}{4QC}$ ad hanc $\frac{4Q}{1QC}$, & ita de reliquis. Ita quoq; $\frac{24QC + 16Q}{64}$ ad

hanc

hanc $\frac{3QC + 2Q}{8}$; vel $\frac{24QC - 16Q}{64}$, ad hanc reuocabitur $\frac{3QC - 2Q}{8}$.

Huius autem abbreuiationis ars, quoad numeros in hoc consistit; nempè in inuentione maximæ communis mensuræ: idq; fit eo modo, quo fieri demonstratur in Elementis.

Abbreuiationis ars, quoad numeros, in quo consistat.

Datis enim duobus numeris non primis inter se, ipsorum oportet maximam exhibere mensuram. Subtrahatur minor ex maiori, quoties fieri potest, & numerus reliquus subtrahatur ex minori, & ita deinceps, minor semper ex maiori subtrahatur alterna detractione, quoad in numerum perueniretur, qui præcedentem metiatur: etenim si ad vnitatem perueniretur, numeri propositi essent inter se primi contra hypothesim. Modo reperiatur maxima communis mensura Numeratoris, & Denominatoris arte iam dicta, & factum erit, quod oportet. Subtrahatur à Denominatore Numerator, quoties fieri potest, & si quispiam relinquitur numerus, hic subtrahatur à numeratore, & si rursus quispiam relinquitur, hic subtrahatur ab ipso residuo, & ita deinceps donec perueniatur ad numerum, qui nihil in subtractione ipsa relinquat, sed residuum numerum metiatur: hic erit maxima communis mensura.

Datis duobus numeris non primis inter se maximam eorum exhibere mensuram.

Sint numeri AB CD, subtrahatur CD, ex AB; relinquat EB: hic subtrahatur ex CD, & remaneat FD, communis maxima mensura duorum AB, CD.

A...........E......B

C......F...D

Sit fractio $\frac{8}{22}$: subtrahatur 8, quoties fieri potest, nempè bis ex 22, remanebunt 6, quibus subtractis ab 8, remanent 2: itaq; dicemus 2, esse maximam communem mensuram; ac proinde diuisis 8, & 22, per 2, fient quotientes 4, & 11. Quotiens autem numeratoris fit numerator, & denominatoris, denominator: hæc emerget fractio illi æqualis $\frac{4}{11}$. Modus hic habetur apud Euclidem lib. 7. prop. 2.

Superior doctrina declaratur exemplo.

& modus, quo inueniri possit maxima mensura trium, aut plurium numerorum, colligitur ex propos. 3. eiusdem libri: quod autem ope subtractionis facimus, idem diuisionis beneficio consequimur.

Operatio abbreuiationis fractionũ cossicarũ ostenditur.

Demonstratio facilis est, ad numeros enim quod attinet cum minutiæ propositæ numeri per eundem numerum diuidantur, nimirum per maximam eorum communem mensuram, eadem erit proportio inter quotientes, quæ inter numeros diuisos.

Cum ergo per eundem numerum instituatur diuisio dum fit abbreuiatio, ob id erit eadem proportio: quamobrem illæ fractiones erunt æquales; quandoquidem si sint duæ minutiæ quarum denominatores, eandem habeant rationem ad numeratores sunt inter se æquales, cum eandem habeant proportionem ad vnitatem.

Demõstratio.

Hæc autem abbreuiatio sic ostenditur. Sint numeri A, B, non primi inter se (si namq; primi essent, vtiq; minutia AB, esset in minimis terminis constituta, neq; ad minores posset reuocari) sitq; eorum maxima communis mensura C, quæ quidem metiatur A, per D, & B, per E. Dico iam minutiam DE, cuius est numerator D, & denominator E, esse æqualem datę minutię AB; atq; in minimis terminis esse constitutam. Cum enim C, metiatur A, per D, & B, per E, producentur [a] quidem A, B, ex C in D, & E: quamobrem, vt A, ad B, ita erit [b] D ad E: atq; adeo minutiæ AB, DE, erunt inter se æquales; cum illę minutiæ, quarum numeratores, ad denominatores eandem habent proportionem, sint inter se æquales, vt alibi ostendimus. Quia autem C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos D, E; erunt proinde ex corollario propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B, quod propositum erat.

$$\frac{A\ 18}{B\ 24} \qquad \frac{D\ 3}{E\ 4} \qquad C\ 6$$

a 9. pronũciat septimi.
b 17. septimi.

Abbreuiatio characterum fit per detractionem exponentis

nentis minoris characteris, ab aliorum characterum exponentibus; & reliquis numeris tribuendo proprios characteres. Exempli gratia, hæc fractio $\frac{12Q}{18QQ}$, hoc modo abbreuiabitur. Primò quoad numeros, reuocabitur ad hanc $\frac{2}{3}$, vt patet ex præceptis traditis. Quoad characteres subtrahatur 2, exponens characteris Q, numeratoris à 4, exponente characteris QQ, denominatoris, & residuo 2, tribuatur character Q, tanquam proprio exponenti, quo affici denominatorem pronunciabimus: itaut fractio sit $\frac{2}{3Q}$. Ita $\frac{15C}{25QC}$ ad hanc reuocabitur $\frac{3}{5Q}$: & hęc $\frac{12Q + 8R}{4R + 4Q}$ reuocabitur ad hanc $\frac{3R + 2}{1 + 1R}$: & ita de singulis; quo fit, vt numerus minoris characteris fiat in hac abbreuiatione absolutus. Insuper fractionem, in qua extat numerus absolutus non posse abbreuiari, quoad characteres, ex hactenus explicatis perspicuum est. Vt hæc fractio $\frac{6}{24QC}$ non potest abbreuiari, quoad characteres; licet quoad numeros nihil prohibeat: ob id ipsa ad hanc reuocabitur $\frac{1}{4QC}$. At verò fractio ista $\frac{6Q}{5QC}$, quoad characteres reducetur ad hanc $\frac{6}{5QQ}$ in via communi, & iuxta Diophantum ad $\frac{6}{5C}$.

Abbreuiatio characterũ, quæ arte fiat.

Supponamus 1 R pretium esse 2: ob id fractio illa $\frac{6Q}{5QC}$ valebit $\frac{24}{320}$; atq; adeo si reducatur ad $\frac{6}{5QQ}$, cum hęc valeat $\frac{6}{80}$, seu $\frac{3}{40}$, quę ęqualis est priori fractioni $\frac{24}{320}$, benè se habebit reductio: supposito quod characteris QC, exponens sit 6, vt in via communi. Si verò iuxta Diophantum supponamus illius characteris QC, exponentem esse 5: dum radix est 2, quadrato-cubus erit 32; atq; adeo illa

Quæ hactenus dicta sũt, explicantur.

fra-

fractio $\frac{6Q}{5QC}$ valebit $\frac{24}{160}$: dumq; reducitur ad $\frac{6}{5C}$, hęc cum valeat $\frac{6}{40}$, & hæc fractio fit æqualis illi $\frac{24}{160}$; benè etiam se habebit operatio reductionis. Quod si per QC, intelligamus CC, iuxta Diophantum, eadem reductio continget, ac supra iuxta communem viam. Cęterum quoad numeros nequit fieri reductio.

Explicatur magis, quæ hactenus allata sũt.

Hæc autem $\frac{12Q}{4QC}$ reducetur ad hanc $\frac{12}{4QQ}$, si exponens QC, sit 6, seu sextum sortiatur locum inter dignitates, &c. & hoc quoad reductionem characterum: quoad numeros reducetur ad hanc $\frac{1}{1QQ}$. Vel ad hanc eandem, si cum Diophanto per QC, intelligamus CC; vel si intelligatur QC, iuxta Diophantum quintum habere locum: reducetur ad hanc $\frac{3}{1C}$. Hæc autem $\frac{18Q-9R}{6R+3Q}$ reducetur ad hanc $\frac{6R-3}{2+1R}$, vel suo modo iuxta Diophantum.

Demonstratio abbreuiationis characterum.

Abbreuiationis characterum demonstratio, ita se habet. Cum ista depressio fiat per eundem exponentem ita nimirum vt eadem distantia sit inter characteres ad quos facta est reductio, quæ inter characteres initio propositos: eadem erit proportio inter reductos, quæ inter propositos. Itaq; si hæc proponatur fractio $\frac{6C}{12QC}$, ad hanc reuocabitur $\frac{1}{2Q}$ iuxta Diophantum; & erunt inter se æquales: quæ ratio est enim 6C, ad 12QC, eadem est 1, ad 2Q; factum enim sub 6C, & 2Q, æquale est facto sub 12QC, & 1.

Explẽ illustratur superior doctrina.

Rursum ad magis declarandam, & clariùs illustrandam superiorem doctrinam, supponamus 1 R, pretium esse 2; ergo $\frac{6C}{12QC}$, erit idem quod $\frac{48}{384}$; insuper $\frac{1}{2Q}$ idem erit, quod

quod $\frac{1}{8}$: constat autem hanc fractionem fieri, si illa $\frac{48}{384}$ ad minimos terminos reuocetur.

Quo verò pacto reductio istarum fractionum ad eundem denominatorem fiat, aperiamus. Multiplicentur numeratores in denominatores per crucem, denominatores autem inter se, quemadmodum fit in minutijs vulgaribus. Exempli gratia $\frac{4R}{5Q}$, & $\frac{6C}{7QC}$, si ad eundem denominatorem sit opus reducere; fiat multiplicatio, vt hic apparet: & secundum communem viam reducetur ad istas $\frac{28BSS}{35QQQ}$, & $\frac{30SS}{35QQQ}$; at iuxta Diophantum ad has $\frac{28CC}{35QQC}$, & $\frac{30QC}{35QQC}$.

Demonstratio ita se habet: quoniam idem numerus 7QC, multiplicans duos 4R, & 5Q, producit numeros 28CC, & 35QQC; eadem erit proportio 28CC, ad 35QQC, quæ 4R, ad 5Q; & ideo æquales erunt fractiones $\frac{4R}{5Q}$, & $\frac{28CC}{35QQC}$, & ita de alijs fractionibus intelligendum est. *Huius operationis demonstratio.*

$$\begin{array}{cc} \frac{4R}{5Q} & \frac{6C}{7QC} \\[1em] \frac{28CC}{35QQC} & \frac{30QC}{35QQC} \\[1em] \frac{28BSS}{35QQQ} & \frac{30SS}{35QQQ} \end{array}$$

a 17. septimi.

Demonstratur enim in Elementis. *Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, geniti ex ipsis eandem habebunt rationem, quam multiplicati.* *Propositio.*

Si numerus integer, & fractio reduci debent ad eandem denominationem: numero integro, tanquam numeratori supponatur vnitas, tanquam denominator; & procedatur vt priùs. Exempli gratia 10, & $\frac{5R}{12Q}$ reducere

de-

debeamus ad eundem denominatorem: stabit hoc modo $\frac{10}{1}$ ✕ $\frac{5R}{12Q}$; & reducentur ad has $\frac{120Q}{12Q}$, & $\frac{5R}{12Q}$, hoc est 10, & $\frac{5R}{12Q}$.

Quando fractio adhæret integris. At si fractio adhæreat integris, priùs reducendi sunt integri ad fractionem ipsam; deinde procedendum, vt priùs. Reductio ad fractionem fiet, si multiplicentur integri per denominatorem fractionis, atq; productus numerus addatur numeratori. Exempli gratia 6C + $\frac{4R}{1Q}$, & $\frac{5C}{2QQ}$ reducere debeamus, ita vt fiat idē denominator vtriusq; ipsorū: ducatur 1QC, in 6C, vt fiat productum 6QCC; & erunt fractiones $\frac{6QCC+4R}{1Q}$, & $\frac{5C}{2QQ}$ reducendæ ad eandem denominationem, vt priùs. Quatuor autem extant, circa fractiones istas, operationes; quemadmodum circa numeros fractos vulgares contingunt. *Quatuor operationes circa fractiones.*

SCHOLION.

Notādum. *Agentes de numeratione fractionum denominatarum, superiùs dicebamus $\frac{12}{15R}$ significare, duodecim vnitates diuisas esse per quindecim Radices; & $\frac{18R}{50}$ significare, decem & octo Radices diuisas esse per 50: hæ porro significationes meliùs percipientur, si in numeros absolutos aliquas fractiones resoluamus. Sit fractio $\frac{270}{15R}$: per hanc fractionem significamus 270, vnitates diuisas esse per quindecim Radices. Si 1 R pretium sit 3, ergo 15 R, valebunt 45, & 270, si diuidatur per 45, fit quotiens 6; quamobrem illius fractionis $\frac{270}{15R}$ valor erit 6: ita quoq; si sit fractio $\frac{20R}{50}$, significat viginti Radices diuisas* *Explicatur superior fractionū doctrina.*

esse

esse per 10; si igitur 1R, pretium sit 3, proinde 20R, valebunt 60, quamobrem si 60, diuidantur per 10, fit quotiens 6, ob id istius fractionis valor erit 6.

Additio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO PRIMA.

Minutiæ addendæ, vel sunt eiusdem denominationis, vel diuersæ. Si eiusdem, colligantur numeratores in eandem summam, & interiecta linea scribatur denominator, quem cõmunem habent collecti numeratores; si sint fractiones istæ $\frac{3R}{8Q}$, & $\frac{5R}{8Q}$ fiet summa $\frac{8R}{8Q}$. Item $\frac{3R}{8C}$, & $\frac{5Q}{8C}$ fiet summa $\frac{3R+5Q}{8C}$: & insuper $\frac{5R+3Q}{15C}$, & $\frac{12QQ-6Q}{15C}$ fiet summa $\frac{12QQ-3Q+5R}{15C}$. *Minutiæ addẽdæ, vel sunt eiusdẽ, vel diuersæ denominationis. Quando habẽt similem denominationẽ.*

At verò si denominatores non fuerint omnino similes, minutiæ multiplicentur per crucem, productiq; numeri colligantur; vt fiat numerator fractionis quęsitę. Deinde denominatores ducantur inter se, vt producatur denominator eiusdem quæsitæ fractionis. Vt sint fractiones addendæ $\frac{5R}{4C} \times \frac{4R}{6Q}$ fiet summa $\frac{30C+16QQ}{24QC}$. Item $\frac{2R}{3Q} \times \frac{2}{3CQ}$ fiet summa $\frac{6QC+6Q}{9CC}$ hoc est $\frac{2C+2}{3QQ}$, & ita de reliquis. Itaq; harum minutiarum additio, non differt ab additione vulgarium minutiarum, habita semper ratione signorum $+$, & $-$, & characterum potestatum. *Quando sunt denominatores diuersi. Exemplis illustratur superior doctrina.*

Lubet exemplum aliquod in numeros absolutos resoluere ad hanc operationem magis illustrandam. Sint fractiones $\frac{2R}{3Q} \times \frac{2}{3QQ}$: dicebamus summam earum *Exemplum per numeros absolutos.*

esse $\frac{6QC+6Q}{9CC}$, hoc est $\frac{2C+2}{3QQ}$. Supponamus 1 R, pretium esse 5: fractio igitur illa $\frac{2R}{3Q}$, valebit $\frac{10}{75}$, altera autem $\frac{2}{3QQ}$ valebit $\frac{2}{1875}$. Si 1875, ducamus in 10, producetur numerus 18750: si verò 75, ducamus in 2, producentur 150; quibus additis ad 18750, fiet numerus 18900. Modo si ducamus 1875, in 75, fiet numerus 140625. Itaq; fractio erit $\frac{18900}{140625}$, quæ respondet fractioni $\frac{6QC+6Q}{9CC}$: etenim 6 QC, valent 18750; & 6 Q, valeant 150: adeo vt 6QC+6Q, valeant 18900. Insuper 9CC, valent 140625. Reducitur autem illa fractio $\frac{6QC+6Q}{9CC}$, ad hanc $\frac{2C+2}{3QQ}$, vt dictum est; nempè $\frac{18900}{140625}$, ad hanc $\frac{252}{1875}$: hæc autem æqualis erit illi $\frac{18900}{140625}$; eadem enim est proportio 18900, ad 140625, quæ 252, ad 1875.

Supradictæ operationis demonstratio.

Demonstratio quantum ad characteres, patet ex dictis, quantum ad numeros. Vna ex minutijs sit AB, altera verò CD: ducatur B, denominator in C, numeratorem; fiet E: deinde multiplicetur D in A, & fiat F; postea in vnam summam G, colligantur: multiplicetur B in D, & fiat H; itaut G, sit numerator, & H, denominator. Quoniam B, multiplicans C, D, produxit singulos E, H: erit [a], vt C, ad D, ita E, ad H: insuper quia D, multipli-

$$\frac{A\ 3}{B\ 5} \qquad \frac{C\ 5}{D\ 6}$$

$$\frac{E\ 25}{H\ 30} \qquad \frac{F\ 18}{H\ 30}$$

$$\frac{G\ 43}{H\ 30}$$

a 17. septimi.

plicans A, B, produxit F, H; erit [b], vt A, ad B, ita F, ad H. Quapropter fractio cuius numerator est E, & denominator H, erit æqualis ipsi fractioni, CD; vt patet ex ijs, quæ demonstrantur ad lib. nonum Elementorum: vt & fractio, cuius numerator est F, denominator H, erit æqualis fractioni AB: vt autem est E, ad H, ita EH, ad vnitatem, seu ad integrum, cuius est fractio; & vt F, ad H, ita FH, ad vnitatem, seu ad integrum cuius est fractio; habet enim fractio ad integrum, cuius est fractio, proportionem, quam habet numerator ad denominatorem, vt patet ex ijs, quæ demonstrantur loco citato: ergo vt G, ad H, nempe aggregatum ex E, & F, ad H, ita aggregatum ex EH, FH, hoc est AB, CD, ad vnitatem, seu ad integrum: sed vt G, ad H, ita est [c], quoq; GH, ad vnitatem, seu ad integrum; & vt G, ad H, ita (vt dicebamus) aggregatum ex GH, & FH, seu aggregatum ex AB, CD, ad vnitatem, seu ad integrum: ergo GH, fractio æqualis est fractionum AB, CD, aggregato; quod oportebat ostendere.

[b] 17. septimi.

[c] Per ea quæ demõstrãtur ad 9. lib. Elementorum.

SCHOLION.

Non desunt aliæ demonstrationes, quibus hæc operatio fractionum, tum quando minutiæ habent eundem denominatorem, tum quando diuersos denominatores habent: sufficiat autem hoc loco præsentem attulisse.

Subtractio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO SECVNDA.

Fractiones subtrahendæ, vel eundem habent denominatorem, vel diuersum: si eundem denominatorem habent; subtrahatur numerator vnius, à numeratore alterius, & sub residuo idem scribatur denominator.

Subtractionis præcepta.

Subtractionis exempla.

Vt sint fractiones subtrahendę $\frac{6R}{5C}$, & $\frac{15R}{5C}$, adeò vt $\frac{6R}{5C}$ subtrahere debeamus de $\frac{15R}{5C}$: subductis 6R, de 15R, remanent 9R, & erit residuum quæsitum $\frac{9R}{5C}$. Item subtracta fractione hac $\frac{8R}{7QC}$ de $\frac{15Q}{7QC}$, residuum fit $\frac{15Q - 8R}{7QC}$. Insuper $\frac{13Q + 2R}{5QC - 7}$ de $\frac{18C + 17Q - 5R}{5QC - 7}$, residuum erit $\frac{18C + 4Q - 7R}{5QC - 7}$.

Quando denominatores non fuerint omnino similes.

Si denominatores non fuerint omnino similes; reducendæ sunt fractiones ad eundem denominatorem, & eodem pacto facienda subtractio. Vt $\frac{4R}{5Q}$ de $\frac{8Q + 6R}{5C}$, residuum erit $\frac{20QQ + 30C}{25QC}$, hoc est $\frac{4R + 6}{5Q}$. Prętereа $\frac{3R}{2Q}$ de $\frac{13Q + 3}{4C}$, residuum erit $\frac{14QQ + 6Q}{8QC}$, seu $\frac{14Q + 6}{8C}$.

Explicatur superior doctrina, resolutis exemplis in numeros absolutos.

Hæc autem exempla, si in numeros absolutos resoluantur, multam afferent huic doctrinæ claritatem. Supponamus igitur 1R, pretium esse 2, ergo fractio illa $\frac{4R}{5Q}$ valebit $\frac{8}{20}$, illa verò $\frac{8Q + 6R}{5C}$ valebit $\frac{32 + 12}{40}$, seu $\frac{44}{40}$: & ita reliqua exempla resolui possunt. Itaq; persimilis est hæc subtractio illi, quæ fit in minutijs vulgaribus: adhibitis tamen præceptis signorum $+$, & $-$, & characterum potestatum, de quibus iam superiùs egimus.

Demonstratio quoad characteres.

Demõstratio quoad characteres facilè deducitur ex dictis.

$$\frac{8}{20} \qquad \frac{32 + 12}{40}$$

Demonstratio quoad numeros.

Quantum ad numeros ita se habet; siuè numeri eundem, siuè diuersos denominatores habeant:

$$\frac{320}{800} \qquad \frac{640 + 240}{800}$$

nam

nam si diuersi fuerint ad eundem denominatorem reuocentur, & procedit eadem demõstratio.

Sint duæ minutiæ; AB, quidem subtrahenda, & CD, illa à qua fieri debet subtractio. Ducatur B, in C, vt fiat E; deinde A, in D, vt fiat F: subtrahatur F, ex E; remaneat G, cui subscribatur numerus H, productus ex ductu B, in D. Dico GH, esse fractionem relictam ex subtractione AB, abs CD. Quoniam enim B, multiplicans singulos CD, facit singulos EH; erit [a], vt C, ad D, ita E, ad H: & insuper quoniam D, multiplicans singulos A B, facit singulos F, H; erit [b], vt A, ad B, ita F, ad H: quamobrem E H, æqualis erit ipsi CD; & FH, ipsi A B: & quia fractiones E H, FH, eundem habent denominatorem H;

$$\frac{20QQ}{25QC} \qquad \frac{640}{320} \quad \frac{320}{240} \qquad \frac{40QQ + 30C}{25QC}$$

$$\frac{320 + 240,\ \text{seu } 560.}{800}$$

$$\frac{20QQ + 30C}{25QC}$$

$$\frac{4QQ + 6C}{5QC} \qquad \frac{112}{160}$$

$$\frac{4R + 6}{5Q} \qquad \frac{14}{20}$$

$$\frac{A\ 3}{B\ 7} \quad \times \quad \frac{C\ 3}{D\ 5}$$

$$\frac{E\ 21}{H\ 35} \qquad \frac{F\ 15}{H\ 35}$$

$$\frac{G\ 6}{H\ 35}$$

a 17. septimi.

b 17. septimi.

proinde erunt inter se, vt numeratores E,F, quemadmodum suo loco ostẽdimus. Vt igitur E, ad F, ita minutia EH, ad minutiam FH: & quia minutiæ GH, FH, eundem habent denominatorem; erit vt G, ad F, ita minutia GH, ad minutiam FH; & componendo [c], vt GF, simul ad F, ita minutiæ GH, FH, simul ad F, minutiam FH: erat autem, vt E, ad F, ita EH, ad FH; atq; adeo conuertendo [d], vt F, ad E, ita FH, ad EH: ergo ex æquo [e], erit, vt G, F, simul ad E, ita minutiæ GH, FH, simul ad minutiam EH: at qui G,F, simul sunt æquales ipsi E (subduximus enim F, ex E, & remansit G) erunt ob id minutiæ GH, FH, simul æquales minutiæ EH: cum itaq; minutia EH, componatur ex duabus minutijs FH, GH; si subtrahatur FH, minutia remanens erit GH: at verò minutia EH, est æqualis minutiæ CD; & FH, minutiæ AB: subtracta igitur AB, ex CD, remanebit GH, quod est propositum.

$\frac{A\ 3}{B\ 7}$	$\times$	$\frac{C\ 3}{D\ 5}$
$\frac{E\ 21}{H\ 35}$		$\frac{F\ 15}{H\ 35}$
	$\frac{G\ 6}{H\ 35}$	

c 18. quinti.
d corol. 4. quinti.
e 22. quinti.

Multiplicatio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO TERTIA.

Multiplicationis præcepta.

MVltiplicentur numeratores inter se, vt fiat numerator productæ fractionis: multiplicentur denominatores, vt emergat denominator. Vt si deberemus multiplicare $\frac{5R}{4Q}$ in $\frac{3R}{5Q}$, fiet productum $\frac{15Q}{45QQ}$. Itẽ $\frac{6R}{7Q}$ in in $\frac{12R}{11C}$ faciunt $\frac{72Q}{77QC}$, iuxta Diophantum. Item ex $\frac{3Q+4R}{5C}$ in $\frac{4Q}{3C}$ fiunt $\frac{12QQ+16C}{15CC}$, iuxta Diophantum. Item ex $\frac{7C-4Q}{4Q+2R}$ in $\frac{7R}{4Q}$ fiunt $\frac{49QQ-28C}{16QQ+8C}$. Insuper ex $\frac{15QQ+3C}{7QCC}$ in 10R, fiunt $\frac{150QC+30QQ}{7QCC}$, iuxta Diophantum.

Quapropter multiplicatio fractionum numerorum denominatorum non est dissimilis illi, quæ fit in numeris vulgaribus fractis; habita ratione perpetuò signorũ +, & —, potestatumq́; , siuè dignitatum characterum.

Demonstratio sic se habet. Propositæ sint fractiones AB, CD: ductis numeratore in numeratorem, denominatore i denominatorem, fiat EF; vt E, sit numerator, & F, denominator. Quoniam autem ratio fractionis EF, ad CD, componitur ex rationibus numeri E, ad numerum C, & D, ad F; & ratio fractionis AB, ad ipsam vnitatem, seu ad integrum componitur, ex ratione numeri A, ad vnitatem ipsam, & ex ratione vnitatis ad numerum B: at verò per definitionem multiplicationis numerorum, vt A, numerus est ad vnitatem, sic numerus E, ad numerum C; & vt vnitas ad numerum B, sic numerus D, ad numerum F: ergo ex æquali[a], erit EF, ad CD, vt AB, multiplicans ad vnitatem, siuè ad integrum: ergo EF, erit prouenìens ex ductu AB, multiplicantis in CD, multiplicatam. *Demonstratio multiplicationis.* *a 11. quinti.*

$$\frac{A\ 3}{B\ 7} \qquad \frac{C\ 4}{D\ 5}$$

$$\frac{E\ 12}{F\ 35} \qquad \frac{G\ 60}{H\ 140}$$

Aliter. Facta multiplicatione numeratorum, & denominatorum, vt supra, producatur EF: mox ducatur F, in C, vt fiat H; & D, in E, vt fiat G: erit igitur per ea, quæ à nobis ostensa sunt alibi, vt minutia EF, ad minutiam CD, ita G, ad H: cumq́; C, multiplicans A, F, faciat E, H; *Aliter idē ostenditur.*

erit

a 17. septimi. erit[a], vt A, ad F, sic E, ad H; & permutando[b], vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans B, B, facit G, & F; ergo erit[c], vt E, ad B, ita G, ad F: igitur ex æqualitate perturbata erit[d], vt A, ad B, sic G, ad H: at verò vt G, ad H, ita minutia EF, ad minutiam CD: & vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, seu ad vnum: ergo vt minutia EF, ad minutiam CD, ita minutia AB, ad vnum, seu ad integrum, &c.

b 16. septimi.

c 17. septimi.

d 23. quinti.

$$\frac{A\ 3}{B\ 7} \quad \frac{C\ 4}{D\ 5} \quad \frac{E\ 12}{F\ 35}$$

H 140 G 60 $\quad \begin{matrix} A & E & B \\ G & F & H \end{matrix}$

Diuisio Fractionum Denominatarum.

OPERATIO QVARTA.

Diuisionis praecepta explicatur.

MVltiplicetur numerator fractionis diuidendæ, per denominatorem fractionis diuidentis; & proueniens supra lineam scribatur: deinde ducatur denominator fractionis diuidendæ, in numeros fractionis diuidentis; productus numerus, sub linea ponatur, vt emergat fractio, quæ erit quotiens quæsitus.

Exempla ad maiorē explicationem praeceptorum.

Vt $\frac{12Q + 6R}{5C}$ diuidere debeamus per $\frac{4R}{5}$, fit quotiens $\frac{60Q + 30R}{20QQ}$. Præterea si diuidere debeamus $\frac{6R}{8Q}$ per $\frac{4R}{5C}$, fiet quotiens $\frac{30QQ}{32C}$. Insuper diuisa fractione $\frac{6C - 5Q}{4QC}$ per $\frac{5R}{7QQ}$, fiet quotiens $\frac{42QQC - 35CC}{20CC}$ iuxta Diophantum, & ita de reliquis.

Demonstratio.

Demonstratio ita se habet. Fractio diuidenda sit AB, & diuidens CD: ducatur D, in A, & proueniat E; insuper C, du-

C, ducatur in B, & fiat F: vt ita quotiens sit EF, cuius numerator E, denominator F. Quoniam ergo proportio fractionis AB, ad fractionem EF, componitur ex ratione numeri A, ad E, & ex ratione numeri F, ad B; & vt A, ad E, sic vnitas ad D, & sicut F, ad B, ita C, ad vnitatem: ratio verò fractionis C, D, ad vnitatem, vel integrum, componitur ex ratione numeri C, ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad numerum D: ergo erit ex æquo ratio fractionis AB, ad EF, vt CD, ad vnitatem, siuè ad integrum; ergo per definitionem diuisionis, diuisa fractione AB, per CD, emergit EF, pro quotiente.

$$\frac{A\ 12}{B\ 15} \qquad \frac{2\ C}{7\ D}$$

$$\frac{E\ 84}{F\ 30}$$

Breuiùs. Ratio AB, ad EF, componitur ex ratione A, ad E, & F, ad B: vt verò A, ad E, sic vnitas ad D; & vt F, ad B, sic C, ad vnitatem: ratio autem CD, ad vnitatem, vel ad integrum, componitur ex C, ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad numerum D: ergo ex æquo ratio AB, ad EF, erit vt CD, ad vnitatem, seu ad integrum: ergo diuisa fractione AB, per CD, emerget EF.

Compendiosiùs eadem demonstratio traditur.

Aliter. Sit minutia AB, diuidenda per minutiam CD, & primò quidem huius, numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; itaut diuiso A per C, quotiens sit E, & diuiso B, per D, quotiens sit F. Dico minutiam EF, esse quotientem diuisionis minutiæ AB, per CD, minutiam. Quoniam C, metitur A, per E, & D, metitur B, per F; producetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F: ob id minutia AB, producta erit ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam CD: quamobrem ex definitione multiplicationis erit, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad vnum: cum itaq; sit, vt AB, minutia diuisa, ad CD, mi-

Aliter ipsius diuisionis operatio ostenditur.

$$\frac{A\ 12}{B\ 16} \qquad \frac{C\ \ 3}{D\ \ 8} \qquad \frac{E\ 4}{F\ 2}$$

nutiam diuidentem, ita minutia EF, ad vnum; erit ob id ex definitione diuisionis, minutia EF, quotiens diuisionis minutiæ AB, per minutiam CD, quod ostendendum erat.

Quod si numeri C, D, minutiæ CD, non metiantur numeros A, B, minutiæ AB; reducatur minutia AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod fiet si K, ex C, in D, procreatus ducatur

$\frac{E\ 24}{F\ 36}$	$\frac{A\ 2}{B\ 3}$	K 15	$\frac{C\ 3}{D\ 4}$	$\frac{G\ 8}{H\ 9}$
$\frac{E\ 90}{F\ 135}$	$\frac{A\ 6}{B\ 9}$	K 12	$\frac{C\ 3}{D\ 5}$	$\frac{G\ 30}{H\ 27}$

in A, B, vt gignantur E, F. Quoniam itaq; C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia GH, quotiens diuisionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, quod est propositum, &c.

Algorithmus irrationalium fractionum denominatorũ patet ex dictis.

Non est autem, cur hìc immoremur in explicando Algorithmo numerorum irrationalium fractionum denominatarum; facilè namq; ex dictis intelligi possunt, quæ circa ipsas occurrunt: qua verò arte probentur operationes istæ patet; siquidem explicuimus Additionem, Subtractionem, itemq; multiplicationem, diuisionem se mutuò probare.

SCHOLION.

Animaduersio.

IN superioribus demonstrationibus, præter Vnitatem hoc verbum, Integrum, vbi opus erat, adiecimus: siquidem minutiæ sunt fractiones, siuè particulæ, vel vnitatis, vel cuiuspiam numeri. Non enim in ea sumus sententia, vt existimemus, eas re-

spe-

ſpectu ſolius vnitatis, eſſe accipiendas: qui enim hoc ſibi perſuaſum habuerunt, certè decepti ſunt; vt alibi demonſtrauimus, cum de minutijs in Arithmetica tractaremus.

De extractione Radicum numerorum denominatorum, ſeu numerorum, cum dignitatibus, vel poteſtatibus.

CAPVT V.

ALibi docuimus, ex aliquo numero radicem extrahere, nil aliud eſſe, quàm reperire numerum aliquem, qui ſi in ſe multiplicetur iuxta radicis naturam quæſitæ, numerum producat illum, à quo radix eſt eruenda. Ita cum dignitatibus, &c. nil aliud erit, quàm exhibere numerum cum aliqua dignitate, qui numerum producat dignitate affectum, à quo radix extrahi debet, ſi in ſe ducatur, iuxta radicis naturam, nempè quadratè, ſi fuerit radix quadrata, cubicè ſi cubica, & ita de ſingulis.

Radicum numerorũ denominatorũ extractio, quid ſit.

Non eſt autem cur hìc ſermonem habeamus de methodo extrahendi radices à vulgaribus numeris; de his enim ſuo loco ſatis, ni fallor, loquuti ſumus: nunc ad rem noſtram accedamus; & primò de numeris ſimplicibus cum poteſtatibus, qua nimirum arte radices extrahantur ex ipſis.

Radicũ extractio ex numeris vulgaribus alibi tractanda.

Si ſit iniunctum radices extrahere ex aliquo numero cum dignitate, loquendo, vt diximus de numero denominato ſimplici: ſumatur propoſita radix illius numeri, relicto charactere, perinde ac ſi abſolutus eſſet: mox verò exponens characteris eiuſdẽ numeri diuidatur per exponentem characteris, à quo radix quæſita denominatur. Exempli gratia. Sit iniunctum radicem quadratam extrahere ex numero 16Q: accepta radice quadrata numeri 16, nempe 4; diuidatur exponens huius characteris Q, per exponen-

Radicũ numerorũ denominatorum extractio qua arte fiat.

ponentem, characteris Q, à quo nimirum ipsa radix mutuatur appellationem: diuidatur ergo numerus 2, per 2, fit quotiens 1, & exponens characteris R; erit ergo ℞ Q, numeri 16 Q, numerus 4 R. Eodem pacto si quæratur ℞, numeri 64CC; latus quadratum numeri est 8: & diuiso 6, exponente characteris CC, per 2, exponentem Q, à quo sumit radix appellationem; fiet quotiens 3, exponens characteris C: dicemus ergo latus quadratum numeri 64CC, esse 8C; & hoc in via Diophanti. Secundum alios non haberet radicem quadratam: cum exponens 9, secundum ipsos, characteris CC, non possit diuidi per 2; & fieri quotiens integer, &c. Insuper ℞C, numeri 125C, erit 5 R: siquidem numeri 125, est 5; & diuiso 3, exponente characteris C, per 3, exponentem characteris ℞, quæsitæ, fit 1, exponens ipsius R. Insuper ℞ Q, numeri 36QQ, erit 6 Q. Item quadrato-quadrata numeri 81QCC, secundum Diophantum, est 3Q; & secundum alios, numeri 81QQQ, erit idem 3Q: & ita de singulis, &c.

Aliter idē efficere.

Aliter. Sumatur (loquendo de radice quadrata) radix quadrata numeri, & ei apponatur character; cuius exponens, est dimidium characteris denominati.

℞C extractio.

Si sit extrahenda ℞ C: sumatur latus cubicum numeri, & ei apponatur character; cuius exponens est tertia pars exponentis characteris numeri, cuius latus quæritur, &c.

℞QQ extractio. *℞QC extractio.*

Si quæratur latus quadrato-quadratum: accepto latere numeri, quarta pars exponentis sumatur. Si quæratur ℞QC: sumpto numeri latere, accipiatur quinta pars exponentis, &c.

Per primū modum. *Per secundū modū.*

Quando autem numerus habet quidem radicem quadratam, vel cubicam, vel quadrato-quadratam, &c; sed instituta diuisione (per primum modum) exponentium in quotiente, non emergit numerus integer: vel (per secundum modum) si loquamur de ℞ Q, exponens nequit diuidi in duas partes æquales; si de ℞ C, in tres; si de ℞QQ, in quatuor; si de ℞QC, in quinque, &c: in huiusmodi casibus clauduntur numeri cum characteribus

intra

intra parenthesim, præposito charactere radicis extrahendæ, nempè quadratæ, cubicæ, &c. Vt si ex 4 C, extrahi quadratum latus deberet; illud foret ℞ (4C). si ex 16QC; esset ℞ (16QC). Et ita de reliquis, cum numerus non hebet latus: vt numeri 13C, latus quadratum erit ℞ (13C) · item numeri 28QC, latus quadratum erit ℞ (28QC): insuper latus cubicum numeri 27Q, erit ℞C (27Q): item latus cubicum numeri 64QQ, erit ℞C (64QQ): præterea numeri 35 Q, erit ℞C (35 Q): insuper numeri 72 QQ, erit ℞C, (72 QQ): & ita de singulis, cum etiam numeri latere carent.

Quādo numerus non habet radicē, & dignitatis exponens diuidi potest per exponētem characteris à quo radix denominatur.

At verò si numerus non habet radicem; & dignitatis exponens diuidi potest per exponentem characteris, à quo radix denominatur, sic vt in quotiente non prosiliat fractio, per primum modum: vel per secundum modum, exponens diuidi potest in duas, vel tres, vel quatuor, &c. prout opus fuerit, æquales partes. Præponatur numero signum radicale; & ei apponatur character debitus quotienti emergenti ex diuisione exponentium, vel dimidio, aut tertiæ, aut quartæ parti, &c. prout opus fuerit. Proinde ℞ Q, numeri 20Q, erit ℞ 20R: insuper ℞ C, numeri 40CC, erit ℞C 40Q, & numeri 50CCC, erit ℞C 50C.

Quando nec ex numero, nec ex potestate latus erui potest.

Quod si neq; ex numero, neq; ex potestate radix erui potest, arte eadem res expediri debet. Itaq; latus cubicum numeri 35Q, erit ℞C (35Q) item numeri 50QQ, erit ℞C (50QQ): nimirum clauduntur numeri intra paernthesim, vt supra dictum fuit.

Radicum extractio ex numeris compositis.

Nunc reliquum est, vt verba faciamus de extractione radicum ex numeris compositis cum dignitatibus: in cuius gratiam aduertendum est numeros istos quandoq; rationales, quandoq; irrationales esse.

Quando commemorati numeri fuerint irrationales; qua arte procedendum sit.

Si fuerint irrationales, clauduntur intra parenthesim, & fient radices vniuersales. Vt si quæratur ℞Q, huius numeri 15C ✠ 7Q ✠ 4R; ea erit ℞ (15C ✠ 7Q ✠ 4R): & si sit in quæstione ℞ C, numeri 18Q ✠ 14R ✠ 3; erit ℞C (18Q ✠ 14R ✠ 3): Item ℞Q, huius numeri 12C ✠ 7Q — 3R, erit

℞ (12

℞ (12C+7Q—3R): & ℞Q, numeri 38QQ+42C+27Q, erit ℞ (38QQ+42C+27Q): insuper numeri 7CC—℞25 QC+5QQ—℞45QQ—℞32C+5Q, erit hæc; nimirum ℞ (7CC—℞25QC+5QQ—℞45QQ—℞32C+5Q): & ita de reliquis.

Quando fuerint rationales, quid agendum. Cum autem numeri fuerint rationales, extrahendaq; sit radix quæsita; quo pacto dignoscere possimus, num rationales, vel irrationales sint, expediet declarare. Pluribus autem modis, quoad radicem quadratam, id assequi possumus.

Methodus extractionis, & primò quid obseruandum. Primò aduertendo num compositus numerus, ex illis, qui constituunt numerum, cuius latus quæritur, rationalis fuerit: tunc .n. numerus rationalis est. Vt 4Q+20R+25, rationalis est; etenim horum numerorum summa est 49, cuius latus quadratum est 7: item 16Q+20R+25, rationalis est; cum summa sit 81, numerus rationalis, cuius latus est 9: & ita de reliquis.

Quid secundò in extractione sit obseruandum. Secundò cognoscitur, quia si numerus compositus rationalis fuerit, cuius radix quadrata quæritur, oportet esse trinomium: si latus, binomium est: si verò latus fuerit trinomium; necesse est numerum esse quinquinomium: si latus est quatrinomium, necesse est numerum esse septinomium: si quinquinomium, numerum oportet esse nouinomium.

Quid tertiò expediat obseruare. Tertiò dignoscitur designatione punctorũ: si rationalis fuerit, designatis prima, & secunda figura ad sinistrã, deinde alternatim; necesse est postremũ remanere sine puncto.

His consideratis iniunctum sit latus extrahere quadratum ex hoc trinomio 4Q+20R+25, quod esse rationale dicebamus. Sumatur latus quadratum primi numeri 4, nempe 2; & 1, dimidium numeri 2, exponentis Q: ipsi verò 1, tanquam exponenti debetur R. Itaque erit prima figu-

Lateris indagatio. 2 R + 5

4Q+20R+25		2R+5
4Q+20R+25		
o o o		

gura 2 R, quę ponatur à latere vt vides; huius quadratum est 4 Q, quo sublato ex 4 Q, remanet o. Deinde ad habendam secũdam figuram, duplicetur 2R, prima figura, &, fiunt 4 R: per hunc autem numerum diuidere debemus sequentem numerum 20R, hoc est, periculum faciendum erit, quoties 20R, complectuntur 4 R; & reperiemus 5: subtrahamus 1, exponentem R, ab 1, exponente eiusdem R, & ita remanebit o: ita ut 5, sit numerus absolutus pro secunda figura. Cumq; + per + emergat +; erit latus quadratum quæsitum 2R + 5. Modò ducatur 5, in 4R, duplum primæ figuræ; fiunt 20R: subtractis 20R, remanet o. Mox verò subtrahatur numerus 25, quadratum secundæ figuræ, abs 25, vltimo numero, & remanet o: proinde latus quæsitum erit 2R + 5. Probatio verò fit, ducendo quadratè latus in se, vt hic cernere licet.

Operationis comprobatio.

	2 R	+	5
	2 R	+	5
	10 R	+	25
4 Q	+ 10 R		
4 Q	+ 20 R	+	25

Constat autem hunc extractionis modum persimilem esse illi, quo radices numerorum vulgarium extrahuntur.

Demonstratio in hoc sita est, quod numerus, cuius latus quadratum quæritur, componitur ex quadrato primæ figuræ lateris extrahendi, plus numero facto sub duplo primæ figuræ in figuram secundam, & quadrato secundæ figuræ.

Operationis demonstratio.

Quo autem pacto se habet synthesis, eodem etiam se habet analysis: extrahere nã que radicem, est resoluere numerum in partes, ex quibus coalescit.

4	27
28	27
49	189
729	54
	729
	. .
	2 7

Idq; declaratur in adiuncto paradigma-

tc

Declaratio supradictorum. te. Poterit autem quisque in omnibus alijs numeris, ita procedere in inuestiando latere quadrato, quando etiam latus ex pluribus, quàm ex duobus figuris constaret: & ex ijs, quæ diximus facilè deduci potest, quid agendum in numeris irrationalibus.

	225
	225
484	1125
220	450
25	450
50625	50625
	225

Radicis cubicæ extractio. Nunc de radicis cubicæ extractione ex ijsdem numeris compositis cum dignitatibus, verba faciemus. Primò autem videndum est, num numerus ipse rationalis sit, quod ità cognoscemus. Examinandum est, num ipsa numerorum summa sit rationalis, nec ne: si namq; rationalis fuerit; erit etiam rationalis numerus cum dignitatibus. Secundò si rationalis fuerit, quando notantur punctis figuræ, initio facto à dextris versùs sinistram, duabus figuris intermissis, tertia quæq; si notetur, in vltima figura cadat punctum postremum. Demum si latus constat ex duobus figuris, numerus componitur ex quatuor figuris; si verò tres habet figuras, numerus componitur ex septem.

Ex quadrinomio qua methodo radix extrahatur prima figura indagatio. Propositum sit quadrinomium istud, nimirum 8C+60Q+150R+125, cuius latus cubicum quæritur. Sumatur latus cubicum primæ figuræ 8, cuius radix est 2, & tertia pars numeri 3, exponentis characteris C, est 1, qui est exponens Radicis: erit ergo prima lateris figura 2R, cuius cubu 8C: Si subtrahamus ab 8C, remanebit o.

Secundæ figuræ inuestio. Pro secunda figura triplicetur 4, quadratum primæ figuræ; triplum autem est 12Q; & per 12Q diuidere oportet 60Q, fit quotiens numerus absolutus 5: ducantur 12Q, in 5, fiunt 60Q, quibus sublatis ab 60Q, remanet o: deinde multiplicetur 75, triplum quadrati secundæ figuræ 5, in 2R, fiet productum 150R; quod

abs

abs 150 R, si auferatur, remanebit o. Demum cubus secundæ figuræ 5, nempe 125, subtrahatur abs 125, & remanebit o. Operationis autem examen, scilicet rectè fuisse institutam, colligitur ope multiplicationis, nempe ducendo latus illud inuentum, cubicè &c. Non dissimili arte procedendum erit in alijs numeris propositis, & etiam in numeris surdis.

Demonstratio in eo sita est, quod cubus numerus cõponitur ex cubo primæ figuræ, plus triplo quadrati eiusdem primæ figuræ in secundam figuram, plus triplo primæ figuræ, plus cubo secundę: vt patet ex hoc exemplo. *Demõstratio.*

8
60
150
125
15625

25
25
125
50
625
25
3125
1250
15625

Ita etiam si latus cõstiterit ex pluribus figuris, quam duabus; vt si extrahi deberet latus cubicum ex hoc septinomio 8 CC + 36 QC + 78 QQ + 99 C + 78 Q + 36 R + 8. Sumatur enim latus primi termini 8 CC; quod latus erit 2 Q: eius autem cubo 8 CC, subtracto ex 8 CC, remanet o. Deinde per huius quadrati triplum, nempe 12 QQ, diuidantur 36 QC; fiet quotiens 3 R: & est secunda lateris figura. Modo ducantur 12 QQ, in 3 R; fiunt 36 QC: quibus sublatis abs 36 QC, remanebit o. Nunc autem subtrahere debemus 27 Q, triplum quadrati ipsius 3 R, ductum in primam figuram 2 Q, nempe 54 QQ, ab 78 QQ: & remanebit 24 QQ. Subtrahamus 27 C, cubum secundæ figuræ 3 R, ab 99 C; & remanebunt 72 C: quibus si addantur 78 Q, fiet 24 QQ + 72 C + 78 Q. *Quãdo latus constiterit ex pluribus figuris, quã duabus.*

Nunc inquirenda est secunda figura. Dico autem secundam; quoniam duæ priores nunc per modum vnius sumuntur.

Accipiatur 4 QQ + 12 C + 9 Q, quadratum primæ figuræ 2 Q + 3 R; & eius triplum, 12 Q Q + 36 C + 27 Q. Per hoc trinomium multiplicetur 24 QQ + 72 C + 78 Q; & fiet quotiens 2, numerus absolutus: modò si singula mēbra, nempe 12 QQ, 36 C, & 27 Q, ducantur in 2; fient producta 24 QQ, 72 C, & 54 Q: quibus subtractis à 24 QQ + 72 C + 78 Q, habita ratione signorum + & —, remanebit o; præter quam in 78 Q, remanebunt enim 24 Q: his addantur 36 R, & fiet 24 Q + 36 R. Ex hac subtrahere debemus triplum quadrati secundæ figuræ 2, nempe 12, ductum in primam figuram 2 Q + 3 R: cuius productum est 24 Q + 36 R. quo subtracto ex 24 Q + 36 R, remanet o. Modò ex 8, postrema numeri nota, subtrahamus cubum huius secundæ figuræ 2, nempe 8; & remanebit o.

Secunda figura inquisitio.

2 Q + 3 R	
2 Q + 3 R	
	6 C + 9 Q
4 QQ + 6 C	
4 QQ + 12 C + 9 Q	
3	
12 QQ + 36 C + 27 Q	

Quod attinet ad radicem quadrato quadratā, videndum est, num ille numerus, cuius ℞ QQ quæritur, sit rationalis. Id autem cognoscemus aduertendo, nū compositus numerus ex illas constituentibus, sit rationalis; item vt habeat radicē quadrato-quadratā. Tunc enim rationalis erit numerus, cuius queritur latus. Secundò si latus duas habet figuras, numerus debet habere quinque; si tres, debet habere nouem; & ita deinceps sentiendum est in vlterioribus, vt quisq; conijciet.

Radicis quadrato-quadratæ inuentio.

Deinde si rationalis fuerit, dum signentur notæ punctis hoc ordine, facto initio à dextris, quinta quæq; si notetur figura, tribus intermissis, in postrema ad sinistram cadat vltinum punctum. Deinde in extractione procedatur, vt supra; naturam tamen radicis extrahendæ, nimirum QQ; obseruando.

Non

Non dissimili modo procedendum erit in radicibus quadrato-cubicis, Cubo-cubicis &c. habita ratione naturę singularum radicum.

De secundis Radicibus, earumque Algorithmo.

CAPVT VI.

NOn inutiliter excogitatas fuisse radices secundas, constabit profectò ex Problematum resolutionibus, in quibus illas opus est adhibere: cum enim duo, tres, vel plures quęruntur numeri, sub incerta ratione, & pro primo posita est 1 R; non est oportunum pro secundo iterum 1 R, ponere, & sic pro tertio. &c: ob id eas excogitarunt Artifices, quas aliqui quantitates surdas, alij quantitates simplices, aut absolutas appellauere, & his vsi sunt characteribus 1 Q, 2 Q &c. hoc est, vna quantitas, duæ quantitates &c. Verùm quia 1 R, pretium primo loco positæ diuersum est à radice, secundo loco, & tertio loco posita &c; nisi characteribus distinguerentur, facilè confusio suboriretur, & ita in operationibus radices ipsę confunderentur, quo factum, est, vt secundæ radices inuenirentur: nisi verò alijs characteribus designarentur, in eadem essemus difficultate: proinde visum est alijs, secundas radices Alphabeti notis designare; atq; adeo ad denotandam radicem secundam distinctam ab ea, quæ primo loco posita est, ita scribunt 1 A; & ad designandam radicem secundam distinctam à duabus, primo, & secundo loco positis, hoc vtuntur charactere 1 B; & ita deinceps. &c.

Secundarũ radicum algorithmus.

Explicatur finis ob quē secunda radices adinuenta fuerint.

Harum autem radicum numeratio sic se habet: 1 A, vna secunda radix; 3 A, tres secundæ radices &c. Cum autem numero duo signa annectuntur: intelligitur numerus cum priori charactere, ductus in vnitatem posterioris signi: itaq; 1 R A, significat 1 R ductam in 1 A; & 5 R A, signifi-

Secundarũ radicum numeratio, quo pacto se habeant.

cat 5 R, ductas in 1 A; item 1 Q A, significat 1 Q, ductū in 1 A; & 5 Q A, denotat, 5 Q, ducta in 1 A; similiter 1 Q A Q, significat 1 Q, ductum in 1 A Q.

Secundarum Radicum Additio.

OPERATIO PRIMA.

Additionis praecepta Quādo radices secūdae sunt eiusdem generis.

ADitionis perficiēdae forma haec est. Si secundae radices fuerint eiusdem generis; addantur numeri inter se: & idem summae numerorum appingatur character secundae radicis. Itaque ex additione 5 A, ad 10 A, fiunt 15 A; & ex 5 B, ad 10 B, fiunt 15 B; & ita de reliquis.

Quando nō sunt generis eiusdem.

Cum autem secundae radices non fuerint eiusdem generis; fit additio beneficio signi ✠: vt ex 5 A, ad 10 B, fieret summa 5 A ✠ 10 B; & ex 3 R, ad 5 A, fieret summa 3 R ✠ 5 A; & ita de reliquis sentiendum est.

Secundarum Radicum subtractio.

OPERATIO SECVNDA.

Subtractionis praecepta

SVbtractio hac arte fiet. Si radices fuerint eiusdem generis, fit subtrahendo numerum à numero, & reliquo numero eundem characterem apponendo.

Vt ex 10 A, subtrahantur 4 A, remanebunt 6 A, & ex 12 B, sublatis 5 B, remanebunt 7 B. Quod si secundae radices diuersae fuerunt, fiet subtractio beneficio signi —. Itaq; si 6 B, subtrahere debeamus ex 10 A, remanebunt 10 A — 6 B, & ita de reliquis. &c.

Secundarum Radicum multiplicatio.

OPERATIO TERTIA.

AD multiplicationem quod attinet, ita procedendum est. Cum numerus primæ radicis multiplicandus est per numerum secundæ radicis signatæ solùm nota A, vel B, vel alia &c: multiplicari debent numeri inter se, & eadem signa apponi: exempli gratia, ex 1 R, in 1 A, fit 1 R A; hoc est, 1 R, ducta in 1 A: & ex 1 Q, in 1 A Q, fit 1 Q A Q; hoc est, 1 Q, ductum in 1 A Q. ex 4 R, in 3 A, fiunt 12 R A; hoc est, quatuor primæ radices ductæ in 3 A: ita pariter ex 5 A, in 5 R, fiunt 25 A R; nempe 25 A, ductæ in 1 R: ita ex 6 Q, in 4 B, fiunt 24 Q B, hoc est 24 Q, ducta in 4 B, &c.

Multiplicationis præcepta.

Multiplicationis exempla.

Cum autem absolutus numerus in numerum secundæ radicis ducitur, fit secundę radicis numerus: vt ex 8, in 4 B, fiunt 32 B: ex 9 in 5 C, fiunt 45 C &c. Si verò numerus secundę radicis ducendus sit in numerum secundæ radicis litteræ diuersę; ducatur numerus in numerum, productoque eędem apponantur litteræ: sic ex 5 A, in 8 B, fiunt 40 A B; nimirum 40 A, multiplicatæ per 1 B.

Absolutus per secundam radicem.

Secundæ radices diuersa litteræ inter se.

Cum autem secundæ radicis numerus ducitur in numerum secundæ radicis eiusdem litteræ, producitur character Q; ita tamen, vt eadem præponatur littera: itaq; ex 4 A, in 6 A, fiunt 24 A Q.

Secũdæ radices eiusdem litteræ inter se.

Cum numerus secundæ radicis ducitur in se, quadratè, vel cubicè &c. producitur character Q vel C, &c. præposita tamen eadem littera. Itaq; 1 A, in se multiplicata facit 1 A Q, hoc est vnum quadratum secundæ radicis: sensus enim est, vnam secundam radicem esse quadratè multiplicatam. Secundò ex 1 Q A, in 1 Q A, fit 1 Q A Q; hoc est, 1 Q, primæ radicis ductum in 1 Q, secundæ radicis. Ita 1 A, in se cubicè, facit 1 A C: & 2 A, in se cubicè, faciunt 8 A C; sic de B, vel C, &c.

Secũdæ radices in se quadratè, vel cubicè.

Quan-

Quãdo numerus secũdæ radicis ducitur in numerum alium eiusdem secundæ radicis.

Quando verò secundæ radicis numerus ducitur in numerum alium eiusdem secundæ radicis, quę habeat characterem denominatum; primus numerus intelligitur habere characterem R: itaq; ex 1 A, in 1 AQ fiet 1 AC; & ex 3 A, in 3 AQ, fient 9 AC.

Quando numerus denominatus simplex absq; nota radicis secundæ multiplicatur in numerũ signatum littera, & signo denominato.

Cum autem numerus denominatus simplex absq; nota radicis secundæ multiplicatur in numerum signatum littera, & signo denominato; ducitur numerus in numerum, productoq; eadem apponuntur signa: vt ex 4 C, in 5 AQ, fiunt 20 CAQ hoc est, 20 C, ducti in 1 AQ: nempe volumus significare 20 C, ductos fuisse in 1 AQ: ita ex 2 C, in 3 CAQ, fient 6 CCAQ: Item ex 1 C, in 1 RAQ, fit 1 QQAQ; hoc est, 1 QQ, ductus in 1 AQ: quantum quoque sit, si 1 QA, ducatur in se quadratè; namque ex 1 Q in se fit 1 QQ, ex 1 A in se, fit 1 AQ.

Cum numerus post litteram secundæ radicis gerens signum dignitatis ducitur in numerum, qui post eandem litteram secundæ radicis gerit quoq; dignitatis signũ; quid proueniat.

Cum numerus post litteram secundæ radicis, gerens signum dignitatis, in numerum ducitur, qui post eamdem litteram secundæ radicis gerit quoq; signum dignitatis; producitur numerus cum charactere, quem exponentes characterum dant; & ei præponi debet littera eadem radicis secundæ.

Quamobrem ex 3 AR, in 7 AC, fiunt 21 AQQ. Insuper ex 4 AQ, in 5 AC, fiunt 20 AQC, secundum Diophantum, qui ex Q, in C, putat fieri QC: secundum alios fit SS, nempe primus relatus, atq; adeo fieret 20 ASS.

At verò cum numerus post litteram secundę radicis, gerens potestatis characterem, in numerum ducitur, qui post characterem potestatis habet litteram quoq; secundæ radicis: producitur numerus, cum posteriori charactere dignitatis, quem secundæ radicis littera sequitur. Mox autem character potestatis apponitur, qui emergit, producitur q; ex priori charactere in litteram secundæ radicis; non secus ac si gereret signum, & characterem R: itaq; ex 2 AC, in 3 QA, fiunt 6 QAQQ: item ex 1 R, AQ, in 1 RAQ, fit 1 QAQQ; hoc est 1 RAQ, quadratè multiplicata in se, facit 1 QAQQ, &c.

Se-

Secundarum Radicum Diuiſio.

OPERATIO QVARTA.

QVo verò pacto debeat ſecundarum radicum inſtitui diuiſio, relinquitur explicandum. Priùs autem fieri debet reductio characterum dignitatum, per ſubtractionem ſimilium characterum. Itaq; ſi diuidantur 12RAQ, per 4AQ; reducantur characteres: & erunt diuidendæ 12R, per 4; & fiet quotiens 3R. Inſuper ex diuiſione 10CAQ, per 5AQ, fiet quotiens 2C; prius ſcilicet reductis ſignis: ſic etiam ſi diuidantur 10CAQ, per 5C, fiet quotiens 2AQ. *Præcepta diuiſionis.*

Si verò R, diuidi debet per numerum ſecundarum radicum, vt 12R, per 4A, fit fractio pro quotiente, & erit $\frac{12R}{4A}$. Inſuper ex diuiſione 20R, per 5B, fiet $\frac{20R}{5B}$.

Comprobantur autem operationes iſtæ iam dictæ ſcilicet multiplicatio, & diuiſio, reſolutione ipſarum radicum, tàm primarum, quàm ſecundarum, iuxta aliquam radicis extimationem. Itaq; ſupponamus 1R, pretium eſſe 2, & 1A eſſe 4. Si diximus ex 3R, in 3A, fieri 9RA, non malè diximus; etenim ſuppoſito 1R, pretio 2, pretium 3R, erit 6: & quia 1A, pretium dicimus eſſe 4, ergo 3A, pretium erit 12. Modo ſi ducantur 6, in 2, fient 72: conſtat autem tantum eſſe pretium ipſarum 9RA; nam 9R, pretium eſt 18; qui numerus ſi ducatur in pretium A, videlicet 4, fiet productum 72. Et ita poterit non diſſimili modo in reliquis caſibus inſtitui probatio, necnon facilè demonſtrari. *Supradictarũ operationum comprobatio.*

Vel ſi ſupponamus 1R, pretium 2, & 1A, pretium 3; ergo 3R, pretium erit 6: & quia 1A, pretium dicebamus eſſe 3; ergo 3A, pretium erit 9: his ductis in 6, fiunt 54: conſtat autem etiam 9RA, valere 54, ſi explicetur ſecundum earundem radicum extimationem. Huic autem reſolutioni plurimum inſeruit ſubiecta tabella.

Vel

	R	Q	C	QQ	SS	QC	BSS	QQQ	CC	QSS	&c.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	&c.
1	3	9	27	81	203	729	2187	6561	19683	59049	&c.

Vel iuxta Diophantum, vt videre licet in adiuncta tabella, quæ ſicuti præcedens poteſt in infinitum protrahi.

	R	Q	C	QQ	QC	CC	QQC	QCC	CCC	QQCC	QCCC
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147

Rectè igitur diceremus ex 2 R, in 3 A, fieri 6RA; ideſt, 6R, ductas in 1A: ſi namq; 1 R, valor dicatur 2, & 1A, dicatur 3; iam 2R, reſolutæ facient 4, & 3 A, facient 9: at verò 4, in 9, faciunt 36; quantum etiam faciunt 6R, nempe 12, ductæ in 1A, nimirum 3.

Declaratur ſuperior doctrina.

Sic etiam ex 3A, in 2R, fieri 6AR, hoc eſt 6 A, ductas in 1R, liquet ex eo quia 3A, ſunt 9, & 2 R, ſunt 4: at verò ex 9, in 4, fiunt 36; quantum ſcilicet faciunt 6A, ideſt 18, in 1R, nempe in 2.

Si verò multiplicaremus 1R, in 1A, produceretur 1RA; quia 1R, eſt 2, & 1A, eſt 3: fiunt autem 6, ex 2, in 3; quantum planè fit ex 1 R, ſcilicet ex 2, in 1 A, ideſt ex 3. Ita quoq; ex 1Q, in AQ, diceremus rectè fieri 1QAQ, nempe 1Q, ductum in 1AQ: nam 1Q, eſt 4, & 1AQ, eſt 9, ex 4, in 9, fiunt 36; quantum fit ex 1Q, nempe ex 4, in 1AQ, nimirum 9. Eodem ſanè modo poſſunt explicari alia exempla multiplicationis, itemq; diuiſionis, &c.

Vt

Vt ex diuisione 8CAQ,per 4AQ, fit quotiens 2C: siquidem 1R, pretium est 2, cubus erit 8; proinde 8 C, valebunt 64: at verò si 1A, pretium est 3, ergo A Q, valebit 9; quamobrem 8 C, ducti in 1AQ, valebunt 576: hic autem numerus si diuidatur per 4Q, secundæ radicis (dicebamus enim diuisorem esse 4AQ, hoc est 36) fiet quotiens 16, hoc est 2C.

Item ex diuisione 10 C A Q, per 5 C, fit quotiens 2 Q: nam diuidendo 720, per 40, fit quotiens 18; siquidem 10 CAQ, valent 720, & 5C, valent 40, &c.

Secundarum Radicum Extractio.

OPERATIO QVINTA.

ERuitur radix ex numero, si habet, eiq; littera secundæ radicis apponitur, reiecto charactere denominato, siue cossico. Vt radix quadrata numeri 36AQ, est 6A: insuper ℞C, numeri 9AC, est 3A: & ℞QQ, numeri 81DQQ, est 3D. *Radicum extractio ex secundis radicibus.*

Quod si numerus radicem non habet, vel character cossicus, non est eiusdem appellationis cum radice extrahenda; tunc præponendum est toti numero cum littera, & charactere, signum radicale, illius nimirum radicis, quæ extrahi debet. Vt radix cubica huius numeri 5 AQ, erit ℞ C 5AQ, vel radix cubica numeri 8AQ, erit ℞C8AQ, sicuti radix quadrata huius numeri 4AC, erit ℞Q4AC.

Cæterùm non dissimili modo, ac supra factum fuit, possunt explicari exempla huius operationis per numeros absolutos, iuxta aliquam radicis extimationem. Rectè namq; dicebamus, radicē numeri 36AQ esse 6A: propterea quod si 1A, valet 3, ergo AQ, valebit 9; proindè 36AQ, valebunt 324: quo fit vt si eius radix quadrata extrahatur, qualis est 18, habeatur valor istius numeri 6 A; namq; cum 1A; valor sit 3, profectò 6A, valebunt 18, vt patet. Proindè

indè rectè dicebamus illius numeri 36AQ, radicem quadratam esse 6A. Non dissimili modo alia innumera exempla poterunt explicari.

De Æquatione Algebrica.

CAPVT VII.

Aequatio Algebrica quid sit.

TOtum Algebræ artificium consistit in explicanda æquatione, quæ nihil aliud est, quàm *Aequalitatis proportio inter duas quantitates, vel res varie denominatas, seu certam notam ex vna parte, ex alia incertam, & ignotam,* & vt loquitur Vieta, *est magnitudinis incertæ cum certa comparatio.*

Definitionis explicatio.

Cum enim certam aliquam quantitatem cognoscimus, ex notitia illius deuenimus in cognitionem alterius illi æqualis; hoc enim pacto reperimus, quam progressionem Geometricam constituat quæsitus numerus, seu in quanam progressione numerus ille sortiatur locum vnitati proximum.

Requisitum ad commemoratam æquationē.

Cæterum æquatio de qua loquimur, necessariò debet esse inter variè denominata, & inter certum, & incertum, seu notum, & ignotum: siquidem inter ea, quæ sunt eiusdem denominationis, vel inutilis est, vt inter 10, & 10, vel inter 5R, & 5R; vel non est propriè æqualitas, vt inter 5, & 16. Aequatio verò de qua loquimur esset, si proponeremus 1R, pretium exempli gratia esse 5; tunc esset æquatio inter 10R, & 50: itaut si nos 1R, pretium lateret, & cognosceremus 10R, æquari 50; illico in 1R, pretij notitiam deueniremus: & ita de reliquis æqualitatis generibus intelligendum est. Debet itaq; æquatio ista esse proportio æqualitatis inter duas quantitates, siue res, quarum vna sit certa, & nota; altera incerta, & ignota: de his autem iterum in Algebra Speciosa loquemur.

Varia sunt autem huius æquationis genera: & primò

vel

vel simplex est æquatio, vel composita. Potestas enim aut pura est, aut affecta. Pura autem, & simplex æquatio est, in qua vnus terminus, vni termino comparatur, cum affectione vacat: vt inter Q, & R, aut inter R, & N; aut Q, & N: & ita simplex etiam esset, 3 C $\sqsupset$ 24. Cum taq; vnus terminus vni termino comparatur, simplex æquatio nuncupatur, tunc enim est pura potestas. *Aequatio simplex, vel composita. Potestas pura, vel affecta. Aequatio simplex quid.*

Quando verò plures potestates, seu dignitates numero certo comparantur; maior dignitas propriè sibi hoc Potestatis vendicat nomen: & numerus cui dignitates comparantur, Homogeneum comparationis appellatur; vt etiam in simplici æquatione. Dignitates autem existentes in æquatione, Gradus parodici ad potestatem dicuntur: itaut ad cubum sint gradus parodici latus, & quadratum; gradus enim parodici sunt dignitates infra potestatem existentes in æquatione, quemadmodum dictum est. *Aequatio composita quid. Potestas. Homogeneum comparationis. Gradus parodici.*

Potestas autem hoc modo se habens, Affecta dicitur. Hæc verò affectio, vel est per affirmationẽ, vel per negationem. Affectio per affirmationem fit per signum ✠, diciturq; Cataphatica affectio: per negationem fit per signum —, & Apophatica nuncupatur: at verò Amphibola, seu ambigua, cum dignitati maiori, siuè Potestati præfigitur signum —: quoniam hæc radix duplicem habet radicem, ideo Ambigua dicitur. *Affectio. Cataphatica. Apophatica. Amphibola.*

Sed cum afficiens homogeneum de potestate negatur, negatio est directa, atque adeo æquatio est directa: vt 1 Q — 4 R $\sqsupset$ 165, hæc æquatio negatio directa est; minor enim dignitas R, gerit signum negatum —; vel quia homogeneum afficiens 4 R, de potestate negatur. *Negatio directa.*

Cum autem contra potestas negatur de afficiente homogeneo sub gradu, negatio est inuersa: vt 14 R — 1 Q $\sqsupset$ 48, hæc æquatio inuersa, & ambigua est; siquidem dignitati maiori, nimirum 1 Q, signum negatum præfigitur, scilicet —; seu quia planum sub latere, & data coefficiente longitudine afficitur mulcta quadrati: quia verò potestas de afficiente homogeneo sub gradu negatur, indirecta dicitur. *Negatio inuersa.*

De h's autem iterum in Algebra Speciosa agēdum erit, scilicet de æquatione simplici absolutè, & de Climactica, & Polynomia.

Potestas tot affectionibus implicari potest, quot sunt gradus parodici ad potestatem.

Animaduertendum autem quot sunt gradus parodici ad potestatem, tot affectionibus posse potestatem implicari. Itaq; quadratum affici poterit, sub latere, seu radice; Cubus sub latere, & quadrato; insuper Quadrato-quadratum sub latere, quadrato, & cubo; præterea Quadrato-cubus, sub latere, quadrato, cubo, & Quadrato-quadrato; & ita deinceps.

Quot sint combinationes, quomodo cognoscatur.

Quot autem sint combinationes ita dignoscitur. Fiat progressio terminorum tot, quot sunt vnitates exponentis maioris dignitatis; & fiat ipsa in proportione dupla: à maiori termino ablata vnitate, remanet numerus, iuxta quē statui debet multiplicatio combinationum. Exempli gratia quæramus, quot combinationes habeat Quadratum: exponens eius est 2: ergo fiant duo termini in progressione dupla incipiente ab 1, & erit primus terminus 1, secundus 2: auferatur 1, abs 2, & remanebit 1; dicemus proinde Q. vnicam habere combinationem, nimirum Q, R, & N. Quæratur numerus combinationum Cubi: eius exponens est 3: tres ergo termini fiant in progressione dupla, ducente initium ab 1; itaq; erunt 1, 2, 4: à termino maiori si auferatur 1, remanebit numerus 3, designans tres esse combinationes cubi; nempe C, Q, N; item C, R, N, Præterea C, Q, R, N. Et ita consimili modo procedendum est in reliquis dignitatum combinationibus.

Combinationes istæ multiplicantur ratione signorum +, & —.

Multiplicantur autem hæ combinationes ratione signorum +, & —: quo fit, vt Q, tres habeat combinationes; primam Q + R = N; secundam R + N = Q, seu Q — R = N, nam iuxta Vietæ sententiam omnes dignitates ex vna parte constituuntur; tertiam R = Q + N, seu R — Q = N. Ita etiam pluribus modis, ratione horum signorum, variantur reliquæ æquationes.

Cæterum illud est in primis aduertendum, nondum sincerā operationem, vel methodum inuentam esse explicandi æquationes omnes compositas: sed tantùm illas, in quibus termini sunt Arithmeticè proportionales, seu habent eundem excessum; vt sunt infrascriptæ æquationes.

Nondum est adinuenta ars, qua æquationes omnes compositæ explicantur.

Q − R = N	2	1	0
Q + R = N	2	1	0
R − Q = N	1	2	0
QQ − Q = N	4	2	0
QQ + Q = N	4	2	0
Q − QQ = N	2	4	0
CC − C = N	6	3	0
CC + C = N	6	3	0
C − CC = N	3	6	0

Porrò si exponentes arithmeticè proportionales omnes sint maiores, quam 0, adhibendi sunt relicti, per subtractionem minimi numeri exponentis, vt reducantur ad illos, in quibus 0, interuenit.

At verò quando exponentes non seruant arithmeticam proportionem, seu non habent eundem excessum, vt C − Q = N, quorum exponentes sunt 3, 2, 0, & C − R = N, vbi exponentes sunt 3, 1, 0, & C − R = N, vbi exponentes sunt 3, 1, 0, & ita de reliquis, neque seruant eundem excessum; non fuit inuenta Ars hucusque, qua Radices harum Æquationum extrahantur: licet Vieta, & alij methodos quosdam generales tradiderint, quas inferiùs prosequemur. Quia tamen nec absolutissimæ, nec generalissimæ sunt; hinc est, vt in numeris irrationalibus locum non habeant; neq; in fractionibus exerceri possint: atque adeo methodi ipsæ sint potius tentatiuæ,

Quando exponentes non seruant arithmeticam proportionem.

Quando regulæ nouiter excogitatæ non inseruiant.

uæ, quàm absolutæ, vt videbimus. Cum enim 1 R pretium numerus est irrationalis, vel simplex, vel compositus, item numerus fractus; regulæ istę nouiter excogitatæ non satisfaciunt.

Quatuor sunt, in quibus consistit artificium explicandarũ Aequationum.

Verùm Æquationum explicandarum artificium in pluribus consistit: quatuor tamen ad summum numero sunt, quæ ad id conducunt; primum Æquationis inuentio; secundum inuentæ Æquationis Antithesis, seu Reductio; tertium Parabolismus, seu Diuisio; quartum Analysis, siuè Radicis extractio.

Superiùs dicta explicantur.

Primò enim oportet Æquationem inuenire; secundò si opus fuerit, eandem æquationem reducere; tertiò æquationem partiri per numerum Potestatis, seu dignitatis elatioris; quartò demum cum opus fuerit, Radicem ex quotiente extrahere. Non hæc tamen omnia necessaria sunt, sed duo perpetuò requiruntur: Inuentio æquationis, & Diuisio. De his ergo singillatim agendum superest: & primò de Æquationis inuentione.

De Æquationis Inuentione.

CAPVT VIII.

Aequationis inuentio. Quid Analysta curare debeat.

Quocunq; proposito Problemate resoluendo, debet illud in primis Analysta curare, vt ad aliquam Aequationem perueniat: & vt hoc assequatur, pro quæsito numero ponat Radicem; aduertendo, quòd si numerus quæsitus simplicem longitudinem importet, pro eo ponatur Radix; si sit numerus planus, ponatur Quadratum; si solidus, ponatur Cubus: deinde tractetur ipse numerus denominatus iuxta legem propositæ quæstionis, quod quisq; potius exercitatione, & vsu, quàm præceptis consequetur; aduertendo, quòd repertis tribus numeris proportionalibus, fiat æquatio inter quadratum medij, & factum sub extremis; si quatuor, inter factum sub

sub extremis, & factum sub medijs: insuper si eidem, vel eisdem numeris inueniantur ignoti numeri æquales, fiant æquales inter se: & alia huiusmodi memoria teneat.

Sit datum resoluendum Problema.

Propositum numerum in duas partes diuidere, quarum data sit differentia. *Exemplum primum,*

Pono itaq; numerum diuidendum, e. g. esse 100, & differentiam datam esse 20. Pars minor propositi numeri esto 1R; maior ergo erit 1R ✠ 20: cum enim vna debeat alteram excedere data differentia 20, si pars vna est 1R, alia necessariò erit 1R ✠ 20: harum autem partium summa est 2R ✠ 20; quæ æquatur proposito numero diuidendo 100. Vide igitur qua arte tractari debeant numeri, iuxta quæstionis tenorem: est autem certum omnes partes simul sumptas æquari toti. Cum totum sit 100, necesse est harum partium summam 2R ✠ 20, æquari 100: & ita nos ad æqualitatem peruenimus. *Aequationis inuentio.*

Rursus propositum sit illud Problema resoluere. *Exemplum secundum;*

Data summa duorum numerorum, & plano sub ipsis, reperire numeros.

Data sit numerorum summa 15, & planum sub ipsis 50. Esto numerus vnus 1R, alter ob id erit 15 — 1R: idq; manifestum est, siquidem si è summa duorum numerorum, auferatur vnus, reliquus erit alter quæsitus. Planum autem sub his est 15R — 1Q: & quia planum sub quæsitis numeris est 50; necesse est hoc planum 15R — 1Q, æquari 50: & ita ad æqualitatem peruenimus.

Insuper propositum sit Problema.

Datum numerum in data ratione partiri. *Exemplū tertium.*

Datus sit numerus 35, & ratio, vt 2, ad 5. Esto numeri pars vna 1R, alia necessariò erit 35 — 1R: vt autem est 2, ad 5, ita debet esse 1R, ad 35 — 1R; quare cum sint proportionales, erit factum sub extremis 70 — 2R, æquale 5R: & ita ad æqualitatem peruenimus; aduertentes factum sub extremis æquari facto sub medijs. Neq; dissimili modo in alijs Problematibus procedendum erit. Methodus au-

tem,

tem, vt diximus, prompta, & expedita potiùs exercitatione, quàm præceptis comparatur.

Proponatur hoc aliud Problema.

Exemplum quartum. *Quatuor numeros reperire ea lege; vt primus cum secundo, & tertio faciat 45; secundus cum tertio, & quarto efficiat 65; tertius cum quarto, & primo faciant 60; quartus autem cum primo, & secundo efficiant 55.*

Quatuor numeri simul sint 1R: ex hac autem subtractis prioribus tribus, qui dicebantur conficere 45, erit ob id quartus 1R—45; quamobrem primus erit 1R—65; proinde secundus erit 1R—60; atq; demum tertius erit 1R—55: hi autem omnes deberent efficere 1R; sed conficiunt 4R—225: proinde erit æquatio inter 1R, & 4R—225. Vide igitur qua arte ad æqualitatem perueniatur.

Rursus propositum sit Problema.

Exemplum quintum. *Datum numerum in duos cubos partiri, quorum laterum summa data sit.*

Hoc Problema determinationem habet, quam hic silentio prætereo; siquidem illud affero tantùm ad æquationem explicandam.

Datus sit numerus 224, diuidendus, vt Problema requirit, nempe in duos cubos, quorum latera faciant 8; prioris cubi latus esto 1R ✠ 4, hoc est plus dimidio summæ laterum; relinquitur proinde alterius cubi latus 4—1R. cubi verò ipsi erunt simul 24Q ✠ 128, & hi erunt æquales dato numero 224.

1C ✠ 12Q ✠ 48R ✠ 64
64 ✠ 12Q — 48R — 1C
―――――――――――――
24Q ✠ 128 ⊏⊐ 224

Exemplum sextum. *Dato aggregato trium numerorum proportionalium, & aggregato quadratorum ab extremis, distinguere singulos.*

Datus sit numerus 26, summa omnium. Sit autem 328, aggregatum quadratorum ab extremis. Medius ex tribus quæsitis numeris esto 1R, ergo summa extremorum erit 26—1R. Huius autem quadratum est 676—52R ✠ 1Q con-

continetq; quadratum extremorũ, plus duplo medij quadrato, vt alibi demõstrauim⁹. Inde igitur ablato duplo quadrato medij nimirum 2Q, restabit aggregatum quadratorum ab extremis 675—52R—1Q, æquale 328.

$$
\begin{array}{l}
26+1R \\
26-1R \\
\hline
-26R+1Q \\
676+26R \\
\hline
676-52R+1Q \\
2Q \\
\hline
676-52R-1Q = 328
\end{array}
$$

Numerum inuenire, cuius quadratus multiplicatus in datum numerum, procreet numerum, à quo si alius datus numerus subtrahatur, reliquus fiat quicunq; numerus datus. Exemplum septimum.

Sit numerus inueniẽdus, cuius quadratus multiplicatus in 5, faciat numerum, à quo si demantur 200, remaneat numerus 800. Quæsitus numerus esto 1R, qua ducta in se fit 1Q, hoc autem ducto in 5, fit numerus 5Q, à quo si subtrahantur 200, remanent 5Q—200, quæ debent æquari 800. Insuper propositum sit hoc aliud Problema.

Numerum inuenire, qui inter duos medius sit, isq; superet minorem dato numero, superetur q; à maiori, numero dato quolibet, & duo extremi efficiant summam datam quamcunq;. Exemplum octauum.

Sit iniunctum reperire numerum medium inter duos summam efficientes 62; adeo vt hic superet minorẽ numerũ 12, & superetur à maiori numero 10. Cum igitur maior superet medium numero 10, & medius minorem numero 12; ergo maior superabit minorem numero 22. Oportet itaq; diuidere numerum 62, in duos numeros, quorum differentia sit 22: si namq; minori inuento addatur numerus 12, habebitur numerus medius quæsitus. Pars minor esto 1R, altera nempe maior, erit 62—1R, harum autem differentia est 62—2R, & æquabitur 22, & ita sumus æquationem consequuti.

Exemplum nonum.

Duos numeros reperire, quorum productum sit 20, & differentia quadratorum sit 96.

Dico minorem ex numeris quæsitis esse 1R: cum igitur productus numerus debeat esse 20, erit alter $\frac{20}{1R}$. Nam producto sub duobus numeris diuiso per vnum ex illis duobus, exhibetur alter. Horum autem quadrata sunt 1Q, & $\frac{400}{1Q}$. Quoniam autem 1R, ponitur esse minor illorum numerorum; erit proinde 1Q, minus quadratum, quo subtracto de $\frac{400}{1Q}$, residuum erit $\frac{400}{1Q}$—1Q, & hæc erit differentia quadratorum; quamobrem erit æquatio inter 96, & $\frac{400}{1Q}$—1Q, & ita ad æquationem deuentum est.

Exemplum decimum.

Propositum numerum diuidere in duas partes, quorum quadrata datam habeant proportionem.

Sit iniunctum diuidere 5, in duas partes, quorum quadrata habeant proportionem vt 2, ad 3. Minor numerus esto 1R, maior igitur erit 5—1R, horum autem quadrata sunt 1Q, & 25 ✢ 1Q—10R, proinde erit 1Q, ad 25 ✢ 1Q—10R, vt 2, ad 3, atq; adeo numerus productus sub extremis, æquabitur facto sub medijs, ob id 50 ✢ 2Q—20R ⊐ 3Q.

Afferemus autem vnum, vel alterum exemplum eorum ænigmatum, quæ sunt ad res materiales contracta, deinde alia ad res Geometricas, vt quisq; videat methodum procedendi ad æquationem inquirendam.

Exemplum decimum primum.

Tantam habeo pecuniam, vt si ad ipsam accederent $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, & à summa detraheretur $\frac{1}{12}$, eiusdem pecuniæ quam habeo, tunc haberem aureos 120, quæritur quanta sit mea pecunia.

Aureorum summa esto 1R, ad hanc si accedant $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{3}$ R, $\frac{1}{4}$ R, facientes 1 $\frac{1}{12}$ R, fiet tota pecunia 2 $\frac{1}{12}$ R, ablata verò vtrinq; $\frac{1}{12}$ R, relinquentur 2R ⊐ 120, & ita ad æqualitatem deuentum erit.

Viator singulis diebus, 20 milliaria conficit, alius autem duo-

deci-

decimo post die elapso, idem iter aggreditur. Quaritur quot milliaria debeat posterior conficere, vt priorem 20 diebus assequatur. *Exemplum decimum secundum.*

Pono 1R, milliariorum: proinde in 20, diebus conficiet 20R, milliariorum; at verò prior singulis diebus conficiens 10, milliaria, absoluet in 20, diebus 200, milliaria; additis autem huic milliariorum numero 120, milliarijs, quæ iam ille 12, diebus confecerat, erit totus numerus milliariorum 320, quamobrem erit æquatio 20R $=$ 320. *Aequationis indagatio.* *Eiusdẽ inuentio.*

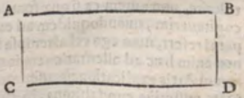
Duæ sunt militum turmæ, quarum vna superat alteram 90, militibus; sit autem in vtraq; distributio nummorum aureorum 600, quilibet autem minoris turmæ accipit 6 aureos amplius, quàm quilibet maioris: quæritur quot sint milites in qualibet turma. *Exemplum decimum tertium.*

Hoc nil aliud est, quàm diuidere 600, per duos numeros, quorum minor, à maiori excedatur numero 90, & sit quotus prioris diuisionis maior quoto posterioris numero 6.

Minor diuisor esto 1R, maior igitur erit 1R $+$ 90, per quos si diuidatur numerus 600, prouenient $\frac{600}{1R}$, & $\frac{600}{1R+90}$: quoniam autem prior quotus posteriorem superat numero 6, ob id posteriori debẽt addi 6, vt fiat $6+\frac{600}{1R+90}$, quamobrem erit æquatio huiusmodi $\frac{600}{1R} = 6+\frac{600}{1R+90}$.

Problemata ad res Geometricas pertinentia hæc sint.

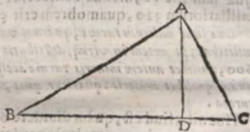
Propositum sit rectangulum ABCD, cuius area sit 40, & proportio laterum sit, vt 5, ad 1, quæruntur latera. *Exemplum decimum quartum.* *Aequationis indagatio.*



Latus BD, minus scilicet, dico esse 1R, erit igitur CD, maius 5R, hoc enim modo prædicta latera seruant cõstitutam proportionem; quamobrem 1R, si ducatur in 5R, fient 5Q, *Eiusdem inuentio.* area eiusdem rectanguli, siquidem hæc habetur per multiplicationem vnius lateris in aliud, proinde fiet æquatio $5Q = 40$.

Exemplum decimum quintum. *Propositum sit triangulum ABC, cuius sit latus vnum BC, 46, aliud BA, 30, tertium deniq; AC, 20, quæritur autem in quales partes perpendicularis AD, diuidat BC, nimirum quanta sit BD, & quanta DC.*

Aequationis inuentio. Pono BD, esse 1R, ergo DC, erit 46—1R, quoniam autẽ (per 47. primi) quadratum lateris AB, æquale est quadratis ex BD, & DA, si à 900, quadrato ex 30, nempè AB, subtraxero 1Q, nimirum quadratum ex BD, remanebit 900—1Q; si verò (ob eandem 47.) subtraxero 2116—92R ✠ 1Q, quadratum ex DC, subtraxero inquam ex 400, quadrato ipsius AC, remanebit 92R—1716—1Q. At verò remanebat 900—1Q, pro quadrato perpendicularis AD, & remanet etiam 92R—1716—1Q, pro quadrato eiusdem. Ob id erit æquatio 900—1Q = 92R—1716—1Q; & hac arte licuit ad æqualitatem peruenire. Methodus autem perueniendi ad ipsam æquationem constabit magis ex analysi variorum Problematum, quã suo loco ad maiorem huius Artis illustrationem afferemus.



Monitum. Cæterum ne me carpas velim, benigne Lector, quod exemplorum loco Problemata veterum Analystarum attulerim, non autem ea si quæ sunt, quæ proprio Marte excogitauerim, quandoquidem ad explicationem doctrinæ parui refert, num ego vel alter ipsa Problemata reperierit; non enim hæc ad ostentationem ingenij, sed potiùs ad maiorem Artis explicationem afferimus. Multa verò Problemata posteriùs enodabimus, in quibus totius Artis processum conspicere licebit.

De Antithesi, seu Reductione, vel Transpositione Æquationis.

CAPVT IX.

Antithesis quid sit. ANtithesis est numeri, seu quantitatis ex vna æquationis parte, in alteram partem, sub contrariâ nota affectionis transpositio. Ita ut si quantitas aliqua afficiatur hoc signo ✠, per Antithesin euadat affecta hoc nota —, & è contra.

Ad quid sit opus Antithesis. Per Antithesin autem, secundum quosdam, reducitur ex vna æquationis parte sola Potestas, seu Dignitas maior. Dicunt enim, cum in solutione alicuius Problematis ad æquationem deuentum fuerit; ita vt per numerum maioris characteris coëffici reliquus numerus æquationis diuidi non possit: tunc æquationis reductio fieri debet priùs quàm diuisio instituatur. Tunc autem diuisionem fieri non posse dicunt, cum maior dignitas, vel character, per cuius numerum fieri debet diuisio, vel non solus ponitur in altera parte æquationis, vel & si solus ponitur, tamen in reliqua parte quoq; idem character reperitur. Vt si esset æquatio 6 R — 10 ⫿ 50, deberet priùs reduci ad hanc 6 R ⫿ 50, antequam institueretur diuisio per 6, numerum maioris characteris; quoniam non solùm 6R, constituunt alteram æquationis partem, sed 6R—10. Sic etiam si æquatio foret inter 6R, & 80—2R, non posset institui diuisio per 6, numerum huius characteris R: quoniam etiam si numerus hic 6R, solus occupet alteram partem æquationis; idem nihilominus character in altera æquationis parte reperitur. Ita quoq; si feret æquatio inter 6R✠15, & 95—2R, nulla posset fieri diuisio; quoniam in vtraq; parte ipsius æquationis reperitur idem character R, & numerus absolutus. In omnibus autem supradictis æquationibus 1 R, valor est 10; si fiat reductio, vt dictum est, instituta diuisio-

ne,

ne, elicietur 1R, pretium 10; vt quisq; poterit experiri. Ita etiam dicunt, vt sola maior dignitas ex vna æquationis parte existat, hanc æquationem 52R—1Q ⊏ 576, in qua 1R, pretium est 16, reducendam priùs esse ad hanc 52R ⊏ 1Q+576, & demum ad 52R—576 ⊏ 1Q, seu 1Q ⊏ 52 R—576. Ita si esset æquatio inter 1Q—96, & 10R, in qua æquatione 1R, pretium est 16; ad hanc reducendam esse volunt 1Q ⊏ 10R+96. Præterea si esset æquatio inter 166+24R, & 2Q—4R+102: primò reducenda esset per restaurationem —4R, ad hanc æquationem, scilicet inter 166+28R, & 1Q+102: secundò hæc per transpositionem huius +102, hoc est per subtractionem ex vtraq; parte, ad hanc reducenda foret, videlicet inter 2Q, & 28R +64, in qua æquatione itidem 1R, valor est 16. Itaq; illi qui putant collocandam esse potestatem solam ex vna ipsius æquationis parte, arbitrantur Parabolismum, siue diuisionem per numerum maioris potestatis fieri non posse, nisi hoc pacto reductio fiat: quemadmodum neq; ipsam diuisionem institui posse, quando in vtraq; ęquationis parte eadem reperitur dignitas, siue potestas, vel numerus absolutus vtrobiq; inuenitur. Exempli gratia. Si esset æquatio 6R+10 ⊏ 70+2R, vides in vtraq; æquationis parte reperiri R, & numerum absolutum; ob id priùs ad hanc æquationem 4R ⊏ 60, deuenire oportet, quàm instituatur diuisio. Sic etiam de alijs æquationibus consimilibus, vt constare potest, ex superioribus exemplis.

Exempla.

Nos autem cum Vieta hac sola de causa putamus instituendam esse Antithesin: non quia ex vna æquationis parte sola maior dignitas esse debeat: sed quia dignitates debeant omnes ex vna parte existere: & insuper, quia eadem dignitas ex vtraq; parte esse non debet; sicuti neque numerus absolutus debet in vtraq; æquationis parte constitui.

Vieta ponit omnes dignitates ex vna æquationis parte.

Totum autem Antithesis artificium innititur illis communibus animi conceptibus. *Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent sunt æqualia. Et si æqualibus æqualia* ad-

Antithesis fundamentum quid.

addantur composita sunt æqualia. Hæc autem exemplis declarabimus.

Animaduertendum autem reductionis initium sumendum esse à signo —: à deffectu itaq; sumi debet initium, si nimirum defectus adsit. Deinde debet Analysta prosequi in reductione, videlicet reducendo signa ✠. Reductio signi — nuncupatur. Restauratio, & fit per additionem. Reductio signi ✠ fit per subtractione, vt inferiùs cõstabit. Et vt; paucis perstringam, numerus negatus, siue affectus signo —, vtriq; æquationis parti addendus est: & tunc instituenda reductio, id est numerus affirmatus, siue affectus signo ✠ ex vna parte in alteram transponendus est, hoc est auferri debet ex vtraque parte.

Quid aduertendum circa Antithesim.

Reductio signi —, restauratio nũcupatur, Reductio signi †, fit subtractione, vt signi —, fit additione.

Hęc autem Restauratio, siue additio, & Transpositio, siue subductio, quantumuis rectè fiat per regulam additionis, & subtractionis: tota tamen Reductionis, & Antithesis ars, duobus præceptis continetur, vt infra dicam.

Antithesis artificium duobus præceptis continetur.

Sit æquatio huiusmodi 2Q ✠ 36 ✠ 12R ⊏ 116 in qua æquatione 1R valor, est 4: hæc reuocabitur ad hanc 2Q ✠ 12R ⊏ 80, nempe.

Declaratur superior doctrina.

2Q ✠ 36 ✠ 12R ⊏ 116
✠ 36 ✠ 36

2Q ✠ 12R ⊏ 80

Detracto numero 36, vtrinque, siquis vellet solam ex vna parte æquationis maiorem dignitatem; ita se haberet æquatio, 2Q ⊏ 80 — 12R. Hoc magis constabit si resoluatur æquatio in numeros absolutos, erit enim huiusmodi.

Si 1R

$$32 + 36 + 48 = 116$$
$$\begin{array}{r} 36 \\ 48 \\ \hline 116 \end{array}$$

Reductionis ratio. Si 1 R, pretium sit 4; modò reducta erit $32 + 48 = 80$. Ratio autem superiùs insinuata est: cum enim æqualitas sit inter $2Q + 36 + 12R$, & 116, necesse est, si idem vtrinq; auferatur, nimirum numerus 36, remanere æqualitatem inter residua. Deinde proposita æquatio hęc $256 + 2Q - 32R = 160$, reuocabitur primò ad hanc $256 + 2Q = 160 + 32R$ nempe additione numeri $-32R$, vtrobiq; facta: deinde verò vtrinque auferendo 160, remanebit æquatio huiusmodi $96 + 2Q = 32R$: mox verò si vtrinq; auferantur $2Q$, fiet æquatio $32R - 2Q = 96$. Quod si numerus maioris dignitatis ex vna æquationis parte solus deberet remanere; fieret æquatio talis $2Q = 32R - 96$. Pretium 1 R; est 4, vel 12; vterq: numerus satisfacit. Itaq; resoluta æquatione $256 + 2Q - 32R = 160$ in numeros absolutos, erit ęquatio $256 + 32 - 128 = 160$: quæ reuocabitur primò ad hanc $256 + 32 = 160 + 128$, nempè additione 128, ex vtraq; parte; & vtrinq; ablatis 160, remanebit æquatio $96 + 32 = 128$.

Præceptum. In huiusmodi autē operatione cernere licet, quod communiter dici solet, *Quiquid trāsponitur mutat signum*, nempe quod illa particula æquationis, quæ gerit signum + transposita in alteram æquationis partem, acquirit signum −; hoc est subtrahitur ab altera æquationis parte: & illa, quæ habet signū − si transponatur, acquirit contrariā affectionis notā, nempe +, nimirū additur alteri æquationis parti.

Idem præceptū alijs verbis conceptum. Insuper, *Eadem signa subtrahunt, Diuersa verò addunt*; seu, vt alij loquuntur, *Homogenea signa negant, Heterogenea affirmant*. Huius autem præcepti sensus est iste, videlicet.

Si aliqua æquationis particula transponenda, gerens alterum ex duobus signis $+$, & $-$, in altera æquationis parte habuerit numerum maiorem, denominationis eiusdem cum eodem signo; fieri debet numerorum subtractio, & idem relinquendum signum $+$ vel $-$ ipsi residuo. Vt superiùs, quoniam tàm numerus 160, quam 256, habet signum $+$; ideo fieri debet numerorum subtractio, & residuo 96, præponendum idem signum. Quod si esset æquatio cum signo $-$ ex vtraq; parte, & afficeret numeros eiusdem denominationis, idem agendum esset. Vt si sit æquatio ista, in qua 1 R, valor est 6; sit inquam æquatio huiusmodi $9R - 15 = 15R - 51$; quoniam tàm 15, quàm 51, idem habent signum $-$ proinde, vt transponantur 15, debent auferri à 51, & idem relinquendum signũ $-$, itaut remaneat æquatio $9R = 15R - 36$: modò quia tam 9 R, quam 15 R, idem habent signum $+$, proinde auferantur 9 R, abs 15 R, & remanebit æquatio $0R = 6R - 36$; nunc vtrinq; addantur 36, fiet æquatio huiusmodi $6R = 36$: & ita in reliquis casibus procedendum erit. Sit rursus æquatio $54 + 4R = 1Q - 6R + 30$. Quoniam $+4R$, & $-6R$, diuersis signis afficiuntur; ob id adduntur 4 R, ad 6 R, vt fiant $-10R$; atque adeo sit æquatio $1Q - 10R + 30 = 54$. Quoniam autem 54, & 30, habent idem signum $+$, propterea debent subtrahi 30, à 54, vt remaneat æquatio huiusmodi $1Q - 10R = 24$. Hæc autem examinari possunt per radicis pretium, quod supponimus esse 12. Sit rursus æquatio $1Q + 4R + 42 = 10R + 1Q$: vtrinq; auferatur 1 Q, remanebit æquatio hæc $4R + 42 = 10R$: rursus vtrinq; sublatis 4 R, & remanebit $6R = 42$.

Eiusdem præcepti sensus.

Quando est æquatio cū signo —.

Exempla ad superiorem doctrinam illustrandam.

Antithesis itaq; in eo tota posita est, quod superiùs innuimus, scilicet in transpositione particularum. Cæterum hæc duo præcepta excogitarunt Artifices pro huius operationis compendio. Ad hanc autem operationem ritè exercendam, Additionis, & subtractionis regulæ sufficere possunt.

In quo demum Antithesis consistat, explicatur.

Reductio æquationum inter fractiones fit multiplicatione per crucem.

Supereſt vt hic verba faciamus de reductione æquationum inter fractiones, & inter numeros denominatos irrationales; & abſolutos numeros. De hoc iterum verò ſermo redibit Cap. de Paraboliſmo.

Reductio æquationis inter minutias fit multiplicatione per crucem, & reducitur ad æquationem integrorum; vt ſi eſſet æquatio $\frac{6R+24}{5} = \frac{72Q-396R}{3R}$, multiplicentur in crucem, nempe $6R+24$ in $3R$, & $72Q-396R$ in 5, & fient producta $18Q+72R = 360Q-1980R$; & per characterum abbreuiationem $18R+72 = 360R-1980$; & per abbreuiationem numerorum $1R+4 = 20R-110$: ac proinde $19R = 114$.

Numerorum abſolutorum exemplo ſuperior operatio illuſtratur.

Hęc autem operatio illuſtrior euadet, ſi reducantur omnes numeri in numeros abſolutos. Quamobrem ſit rurſus ęquatio $\frac{840}{4R} = 12+6R$; facta multiplicatione per crucem, reducetur ad hanc $48R+24Q = 840$; & facta abbreuiatione numerorum, per diuiſionem fiet $2R+1Q = 35$: huius autem æquationis Analyſi inſtituta reperietur $1R$, valor 5; ſecundum quod quidem pretium reſoluta ęquatione in numeros abſolutos, comperiemus operationem rectè inſtitutam fuiſſe. Sit rurſus æquatio $\frac{3R+200}{40} = 6$: per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc $3R+200 = 240$: & reſoluta æquatione per numeros abſolutos, poſito $1R$, pretio $13\frac{1}{3}$, operationem benè comperiemus inſtitutam. Sit æquatio $\frac{5R+60}{24} = 5$, reducetur ad hanc $5R+60 = 120$, & eſt $1R$, valor 12.

Si eſſet æquatio $\frac{122}{4R} = 6+3R$, fieri debet, vt ſupra multiplicatio, per crucem, vt eueniat æquatio huiuſmodi $24R+12Q = 122$, & per diuiſionem reducetur ad hanc $2R+1Q = 10\frac{1}{6}$. Inſtituta autem analyſi reperie-

tur

tur 1R valor hic ℞Q 11 1/6 — 1. Itaque resoluatur æquatio secundum hoc valoris pretium, & 2R, valebunt ℞Q44 4/6 — 2, atq; 1 Q. erit 12 1/6 — ℞Q44 4/6. ic etiam 24R, valebunt ℞Q6432 — 24, & 12Q, valebũt 146 — ℞Q6432: horum summa est 122.

℞Q11 1/6 — 1
℞Q11 1/6 — 1
———
— ℞Q11 1/6 + 1
11 1/6 — ℞Q11 1/6
———
12 1/6 — ℞Q44 4/6
℞Q44 4/6 — 2
———
10 1/6 Summa.

Porrò si resoluatur fractio in numeros eosdem absolutos, comperiemus rectè nos operatos fuisse: per communem enim diuisionem non immutatur æqualitas. Si itaq; 24R + 12Q, diuidamus per 6 + 3R, fiet quotiens 4R, & si idem diuidatur per 4R, fiet quotiens 6 + 3R: si 122 diuidantur per 4 R, fit quotiens $\frac{122}{4R}$.

Numeris absolutis explicatur superior operatio.

10 1/6 Summa
146 — ℞Q6432
℞Q6432 — 24
———
122 Summa

$\frac{122}{4R}$ ⨯ $\frac{6+3R}{1}$

24R + 12Q = 122

Cum autem dictum sit 1 R, valorem esse ℞ Q 11 1/6 — 1; certè 3 R, valebunt ℞ 100 1/2 — 3, & 4 R valebunt ℞ 178 4/6 — 4: hæc autem residua inuicem multiplicata faciunt 146 — ℞ 6432. Si verò ℞ 178 4/6 — 4, pretiũ nempe quatuor radicum, multiplicetur per 6; fiet ℞ Q6432 — 24 ideo produ-

℞Q100 1/2 — 3
℞Q178 4/6 — 4
———
— ℞Q1608 + 12
134 — ℞Q1608
———
146 — ℞Q6432
℞Q6432 — 24
———
122

citur tantùm 122, vt supra dictum est; Si autem multiplicetur $6 + ℞\,100 :-\,3$ hoc est $℞\,100 : + 3$, per $℞\,178 : - 4$ producitur 122. Hoc igitur diuiso per $℞\,178 : - 4$,

$$\begin{array}{r} ℞Q178 - 4 \\ 6 \\ \hline ℞Q6432 - 24 \end{array}$$

fiet quotiens $℞\,100 : + 3$: hic respondet fractioni $\frac{6 + 3R}{1}$; & fractioni $\frac{122}{4R}$, respondet etiam $℞\,100 : + 3$; ob id rectè dicebatur, &c.

Item si sit æquatio huiusmodi $\frac{24}{2R} = \frac{60}{1Q + 1R}$, reuocabitur ad hanc $120R = 24Q + 24R$. Hæc autē $\frac{4R + 16}{5} = \frac{48Q - 264R}{3R}$, ad hanc $12Q + 48R = 240Q - 1320R$.

Præterea si esset æquatio inter $\frac{6R + 10}{1R + 2}$, & $\frac{12}{1Q}$, reducetur ad hanc inter $6C + 10Q$, & $12R + 24$. Si foret æquatio inter $2Q + \frac{10R}{3Q}$, & $10 + \frac{15}{4R}$, reducetur ad hanc $\frac{6QQ + 10R}{3Q} = \frac{40R + 15}{4R}$, deinde per multiplicationem in crucem, fiet reductio vt supra, &c. Itē hęc æquatio $1Q = \frac{390R - 14Q}{25}$, reducetur ad hanc $25Q = 390R - 14Q$. Si sit æquatio $\frac{1Q}{24} = 384$, reducetur ad hanc $1Q = 9216$.

Declaratur superior doctrina de reductione.

Hoc totum explicari potest vna, vel altera æquationē resoluta in numeros absolutos. Vt si $1Q = \frac{390R - 14Q}{25}$; est 1R, pretium 10, ergo 1Q, valor erit 100; cum autem 1R, pretium sit 10, ergo 390R, valebunt 3900, & 14Q, valebunt 1400 his detractis à 3900, cum ille numerator sit, residuum, erit numerus 2500, quo diuiso per 25, fit quotiens

tiens 100. Non immeritò igitur dicebamus, si 1Q. æquatur $\frac{390R - 14Q}{25}$, etiam 25Q, æquari 390R—14Q: siquidem 25Q, valent 2500, tantu~ est autem valor istius residui 390R—14Q: Sic non dissimili modo hoc idem patebit in omni alio exemplo, quod in numeros absolutos non dissimili artificio resoluatur.

Hoc declaratur in minutijs vulgaribus. Si etenim ponantur duæ minutiæ $\frac{10}{30}$, & $\frac{2}{6}$, quæ sunt æquales, vt patet, multiplicētur autem per crucē, producentur numeri æquales 60, 60. *Declaratur superiùs dicta in minutijs vulgaribus &c.*

30	10
2	6
—	—
60	60

Demonstratio verò ita se habet. Quoniam ipsæ minutiæ æquales ponuntur, eadem erit proportio numeratoris minutiæ prioris ad denominatorem eiusdem, quæ numeratoris minutiæ posterioris ad eiusdem denominatorem. Exempli gratia. Cum sint æquales minutiæ $\frac{10}{30}$, & $\frac{2}{6}$, quę proportio est 10, ad 30, eadem erit 2, ad 6; quare numerus productus ex 30, in 2, æqualis erit producto ex 10, in 6: si itaq; numerator vnius ducatur in denominatorem alterius, & è contra numerator posterioris in denominatorem prioris, cum sit idem, ac ducere primum in quartum, & secundum in tertium ex quatuor numeris proportionalibus, producti numeri erunt inter se æquales. *Reductionis demonstratio.*

Quod attinet ad numeros surdos, quo pacto nimirum procedendum sit, patet ex superiùs explicatis. Sit ęquatio ℞24R ⊏ 12: fiat æquatio quadratorum, nempe 24Q ⊏ 144. Itaq; diuisis 144, per 24, prodibit in quotiente numerus 6, scilicet vnius quadrati pretium. Itaq; ℞6, erit 1R, valor: & ita videtur esse; quandoquidem si supponamus 1R, valorem esse ℞6, certè ℞24R, valebit 12, propterea quod, si ducamus ℞6, in ℞24 fiet productum ℞144, hoc est 12. At verò si 1R, pretium foret 6, multiplicata ℞24, per 6, fiet productum ℞864: quamobrem esset æquatio ℞24R ⊏ ℞864; non autem ℞24R ⊏ 12. *Explicatur operatio in numeris surdis.*

Clauius aliter operatur, putat enim quadratum è ℞

24R,

Cap. 16. Algebra. 24 R, esse 24 R, & facit æquationem inter 24 R, 144; quamobrem diuisione instituta, dicit 1R, pretium esse 6. At verò Clauium esse deceptum ex eo colligitur, quia si proponeretur æquatio huiusmodi ℞ 25 R ⊏⊐ 60; eadem esset, ac illa 5 R ⊏⊐ 60. Itaq; quemadmodum horum extremorũ quadrata in ista sunt 25 Q, & 3600; ita etiã quadrata extremorum in illa, erunt 25 Q, & 3600: sed instituta diuisione prosilit quotiens 144; scilicet 1 Q, pretium, cuius ℞ est 12, & est 1R, valor.

℞	24
℞	6
144	
⋅ ⋅	
1	2

At verò iuxta Clauium foret æquatio 25R ⊏⊐ 3600, diuisioneq; instituta fieret 1 R, pretium 144: rem autem sic se se habere confirmat, quia si ducamus 144, in 25, fit productum 3600, cuius ℞ est 60. Sed non benè videtur ipse ratiocinatus; etenim si 1R, pretium est 144, certè ℞25R, nempè 5R, non erit 60, sed numerus productus ex ℞ 25, in 144, nempè ℞518400, hoc est 720. Petendum autem à Clauio, cur postquam multiplicauit 144, per 25, extrahit ℞, ex numero producto 3600, non aliam equidem ob caussam, nisi quia, adhibuit 25R, non secus, ac si quadrata essent. Hoc autem est confundere R, cum Q. Meliùs igitur erit operationem exercere, vt supra dicebamus. Idq; declaratur magis, nam si feret æquatio ℞16Q ⊏⊐ 20, cum 16Q, habeat latus, nempe 4R, erit æquatio inter 4R, & 20: & ita est, quandoquidem si 1R, pretium fuerit 5, vtiq; 4R, valor erit 20, & 16Q, nimirum, quadrati ipsarum 4R, valor erit 400; quamobrem non erit huiusmodi quadratum, scilicet ipsius ℞16R, non erit inquam 16R, adeo vt æquatio sit 16R ⊏⊐ 400, sed potius 16Q. Ita quoq; supponamus 1R, pretium esse 6, & sit æquatio ℞ 24 R ⊏⊐ ℞ 864, erit etiam æquatio 24 Q ⊏⊐ 864; diuisis autem 864, per 24, fit quotiens 36, nimirum 1Q, pretium, & latus eius, nempe 6, erit 1R, valor.

Cæterum animaduertendum est, quando scribitur ℞ 24R, posse esse sensum, quod latus, seu radix erui debet, nedum

nedum ex numero, verum etiam ex potestate, quo pacto si supponatur 1R, pretium esse 6, erit ℞24R, idem quod 12: sed non benè hoc modo scribitur; etenim intra parenthesin scribi deberet sic ℞(24R) & foret æquatio huiusmodi ℞(24R) = 12. Quando verò scribitur ℞24R, sensus est, quòd numerus, cum non habeat radicem quadratam, ideo ei præpositum fuit signum radicale, & ex dignitate acceptum fuit latus.

Antithesis declaratur.

Cæterum hæc æquationis pars, quam Antithesin appellari dicebamus, dicitur Reductio, & insuper Transpositio; nàm licet hoc verbum Antithesis propriè significet oppositionem, seu contrapositionem; nihilominus, quoniam per reductionem, de qua loquimur, terminum existentem ex vna parte in alteram transponimus, qua ratione transpositio dicitur, contrariaq; nota affectus euadit: proinde ratione huius oppositionis, seu contrapositionis, reductio æquationis appellatur Antithesis, quam dicebamus esse transpositionem quantitatis ex vna æquationis parte in alteram partem sub contraria affectionis nota.

Cur hæc operatio dicatur antithesis.

Hypobibasmus quid.

Quando autem occurrit æquatio eiusmodi, vt in ipsa nullus extet absolutus numerus; tunc fieri debet Hypobibasmus, *Qui nihil est aliud, quam æqua depressio potestatis, & eius parodicorum graduum*. Hoc autem verbum propriè repressionem, subductionemque significat.

Qua methodo absoluatur hæc operatio, quæ hypobibasmus.

Exemplis declaratur superior doctrina.

Hypobibasmus autem fit hac arte, nimirum subducendo depressiorem gradum parodicum tùm à potestate, tùm ab alijs gradibus parodicis. Itaq; si proponatur æquatio 12Q = 48R, reuocari debet ad hanc 12R = 48, nempè subducendo R, abs Q. Præterea si fuerit æquatio huiusmodi 6C = 30Q, reducetur ad hãc 6R = 30. Ex & si esset 1C = 20R, ad hanc reuocabitur 1Q = 20. Insuper hęc æquatio 1C + 3Q = 6R, ad hanc reuocabitur 1Q + 3R = 6: huius æquationis autem radix est ℞8 — 1 ½. Pręterea 20QQ + 10C = 100Q, ad hanc reducetur 20Q + 10R = 100: huius æquationis ℞ est 2. Item 30QQ — 25C = 70Q, reuocabitur ad hanc 30Q — 25R = 70:

huius

huius ℞ est 2, & ita de reliquis.

Ad maiorẽ istius operationis illustrationẽ, aliqua resoluuntur æquationes.

Placet autem ad hanc operationem magis illustrādam, resoluere vnam, vel alteram æquationem in numeros absolutos, vt constet operationem hanc eo modo instituendam esse, quo explicuimus.

Exemplũ.

Sit æquatio 6C ⚌ 30R: sit 1R, pretium 5, ergo 6C, valebunt 750, & 30Q, valebunt 750. Si reducatur per Hypobibasmum ad hanc 6R ⚌ 30; optimè facta est reductio: quandoquidem cum 1R, valor sit 5, vtiq; 6R, valebunt 30.

30
25
150
60
750

Exemplũ.

Sit æquatio huiusmodi 3C + 4Q ⚌ 95R, per Hypobibasmum reducetur ad hanc 3Q + 4R ⚌ 95. Huius autem æquationis radix est 5; proinde 3C, valebunt 375: & 4Q, cum valeant 100, erit 3C + 4Q, alterius partis in æquatione pretium 475. At verò 95R, valebunt quoq; 475, si 1R, valor est 5. Cum autem reducta sit ad hanc 3Q + 4R ⚌ 95, benè facta est reductio; siquidem 3Q, valent 75, & 4Q, valent 20, proinde 75, cum 20, quoniam efficiunt vnam æquationis partem, nempè 3Q + 4R, benè dictum est æquari hanc partem alteri, in qua quidem sunt 95; quandoquidem 75, cum 20, faciunt 95.

De Parabolismo, seu Diuisione.

CAPVT X.

Facta reductione, debet institui parabolismus, siue applicatio, seu diuisio.

Facta reductione, cum opus fuerit in æquatione proposita, statim instituenda est diuisio per numerum maioris dignitatis, seu potestatis: per hunc enim debet Analysta particulas omnes æquationis diuidere.

Animaduersio.

Aduertēdo tamen in huiusmodi operatione, abijciendum characterem ipsum, & instituendam diuisionem per numerum, non secus, ac si non haberet sibi characterem annexum,

xum. Exemplis omnia declarabimus. Interim certum esse debet, *Parabolismum nil aliud esse, quàm homogeneorum applicationem ad quantitatem, in quam potestas ducitur*. Si sit æquatio $5R \sqsubset 50$; debet institui diuisio per numerum 5, per quem diuisis 50, emerget quotiens 10, & 1 R, pretium. Item $4Q \sqsubset 100$, fit quotiens 25, & 1 Q, pretium; itaq; 1 R, valor erit 5. Insuper $4C \sqsubset 108$; diuisione instituta fit quotiens 27, & 1C, pretium: itaut 1R, valor sit 3.

Parabolismus quid.

Constat autem hanc operationem esse compendium regulæ aureæ. Siquidem dum habemus $4Q \sqsubset 100$, & instituimus diuisionem; nil aliud efficere profectò curamus, quàm reperire pretium 1Q, dum constat 4Q, valorem esse 100: quasi diceremus, si 4Q, dant 100, quid dabit 1Q. Et ita de reliquis intelligendum est.

Parabolismus est cõpẽdium regulæ aureæ.

Insuper si proposita sit æquatio $2Q \sqsubset 20R - 12$, seu $20R - 2Q \sqsubset 12$; per diuisionem reducetur ad hanc $10R - 1Q \sqsubset 6$. Præterea si sit æquatio $10 + 60R \sqsubset 400$; diuisis omnibus per 10, fit æquatio $1Q + 6R \sqsubset 40$.

Explicatur magis superior doctrina.

Innititur autem hæc operatio communi illo pronunciato, *Si æqualia per æqualia diuidantur, quæ fiunt sunt æqualia*.

Parabolismi fundamentum.

Cum ergo posita esset æquatio $1Q + 60R \sqsubset 400$, nihil aliud diuisione inquirimus, quàm 1 Q, pretium; etenim nobis constabit 10Q, valorem esse $400 - 60R$: proinde compendio quodam ita ratiotinati sumus; si 10Q, dant $400 - 60R$, quid dabit 1 Q? & reperiemus dare $40 - 6R$. In forma verò ipsius regulæ aureę stabit hoc modo.

Quid per diuisionem inquiratur.

20Q	$400 - 60R$	1Q?	$40 - 6R$

Etenim si $400 - 60R$, ducamus in 1 Q, fiunt $400Q - 60C$; qui si diuidantur per 10 Q, fit quotiens $40 - 6R$. Eodem modo intellige in cæteris æquationibus. Breuitatis autem causa ommittitur, tota illa regulæ aureæ operatio, & diuisio per numerum maioris characteris instituitur, cum in idem recidat.

Hoc autem fieri debet, vt supra innuimus, abiecto cha-

racte-

Cum diuisor est vnitas non est opus diuisione, & quare.

ractere ipso, atq; per ipsum numerum, ac si characterem non haberet. Cæterum cum diuisor fuerit vnitas à maiori charactere denominata, non est opus diuisione, cum ex ipsa nihil noui emergat.

Declaratio supradictorum.

Hæc omnia facilè possunt explicari per resolutionem æquationum, ad numeros absolutos, & simplices. Vt si esset æquatio illa $10Q + 60R = 400$; cum $1R$, valor sit 4, certè $10Q$, valebunt 160, & $60R$, valebunt 240. Itaq; huius numeri compositi $10Q + 60R$, valor est 400. Dum autem omnia diuiduntur per 10, fit quotiens $1Q + 6R = 40$: & quidem optimè se habet æquatio; nam per communem diuisorem non immutatur æqualitas; dumq; diuiduntur pretia illorum numerorum denominatorum, scilicet dum diuiduntur numeri absoluti, euenit æqualitas. Nam si 400, pretium illius compositi $10Q + 60R$, diuiduntur per 10, fit quotiens 40. & si 400, numerus absolutus ex altera æquationis parte, & cui illi, tanquam homogeneo comparationis comparantur; si inquam 400, diuidatur per 10, fit itidem 40, vt patet: & ita de reliquis.

Non rarò contingit, vt oporteat reducere fractiones. Isomœria quid sit.

Verùm quia sæpè sæpius oportet fractiones reducere ad integros numeros, vt fiat legitima æquatio, facto Parabolismo; proinde de hac reductione aliqua dicenda occurrunt. Reductio autem hæc Isomœria nuncupatur; *Est enim hæc nihil aliud, quàm fractionum reductio, ad integros numeros, vt videbimus.*

Methodus, qua hæc operatio absoluitur. Exemplum 1.

Breuiter hæc potest obseruari methodus. Proposita sit æquatio $4QQ + 3C + 3Q + 2R = 1272$: si fiat Parabolismus per 4, numerum maioris dignitatis, reuocabitur ad hanc $1QQ + \frac{3C}{4} + \frac{3Q}{4} + \frac{2R}{4} = \frac{1272}{4}$.

Huius operationis regula declaratur.

Verùm vt ad integros numeros ęquationem reuocemus, oportet aduertere distantiam dignitatum ab inuicem. Et primò obseruo dignitatem C, distare abs QQ, per R: ideo ducatur 3, numerator in 4QQ, per quem factus est Parabolismus, & fiunt 12, quibus diuisis per 4, denominatorem fractionis, fit quotiens 3: ergo in ęquatione ponemus

1Q

1QQ+3C. Deinde quia Q, abs QQ, distat per Q; ideo quadratè in se ducatur idem numerus 4, numerus inquam quadrato quadratorum, & fit numerus 16, in quem ducantur 3, & productus numerus 48, diuidatur per 4, denominatorem, & fit quotiens 12Q: itaq; scribere debemus 1QQ+3C+12Q. Postea quoniam R, distat abs QQ, per C; proinde cubicè multiplicetur numerus 4, & producetur numerus 64, qui quidem ducatur in 2, numeratorem fractionis, & fit numerus 128; hic diuidatur per 4, fit quotiens 32, & ita habebimus 32R: itaut sit opus ad 1QQ +3C+12Q, addere numerum 32R, vt fiat summa 1QQ +3C+12Q+32R. Demum, quia numerus absolutus distat abs QQ, per QQ; proinde numerus 4, debet quadrato-quadraticè multiplicari, vt fiat numerus 256, per quem multiplicari debet 1272, numerus absolutus, & fiet 325632; hic diuidatur per 4, & fiet quotiens 81408: erit ergo per Isomœriam inuenta æquatio ista 1QQ+3C+12Q+32R = 81408.

Aduertendum autem 1R, pretium haberi, diuidendo per numerum QQ, hoc est per numerum quadrato-quadratorum, nempe per 4: diuidendo inquam numerum, qui extractione lateris ex æquatione pro 1R, pretio emergit. *Admonitio maximè necessaria.*

Hæc autem declarari possunt tali pacto. Supponamus 1R, pretium esse 4; eius QQ, erit 256; quamobrem 4QQ, erunt 1024; deinde 3C, erunt 192; & 3Q, erunt 48; ac demum 2R, erunt 8; quorum summa est 1272: itaq; est æquatio, vt supra 4QQ+3C+3Q+2R = 1272. *Declaratio supradictorum.*

1024
192
48
8
1272

Benè verò fieri Isomœriam, quemadmodum docuimus, declaratur hoc modo. Si 1R, pretium est 4, ergo latus æquationis erit 16, nempe numerus productus ex 4, vnius radicis pretio in 4, numerum quadrato-quadratorum. Modò QQ, numeri 16, est 65536; & 3C, si resoluantur, faciunt numerum 12288; *Declaratur rectè quidē Isomœriā institui modo tam explicato.*

65536
12288
3072
512
81408

& 12Q, faciunt 3072: demum 32R, faciunt 512; quorum summa est 81408: benè ergo dicebamus, æquationem illam reuocari ad hanc 1QQ + 3C + 12Q + 32R = 81408.

Exemplum 7. Sit æquatio 4C + 6Q + 10R = 700: diuisione instituta, fiet æquatio $1C + \frac{6Q}{4} + \frac{10R}{4} = \frac{700}{4}$. Cum Q, distet à C, per R: proinde multiplicetur 6, numerator per 4, numerum cuborũ; & numerus productus 24, diuidatur per 4, denominatorem, fiet quotiens 6; & numerus quadratorum erit 6. Deinde quia R, distat à C, per R, multiplicetur 10, numerator per 16, quadratum numeri cuborum; & numerus productus 160, diuidatur per 4, denominatorem fractionis; & quotiens 40, erit numerus radicum. Demum quoniam numerus absolutus distat à C, per C; proinde numerator 700, multiplicetur per 64, cubum numeri cuborum; & productus numerus 44800, diuidatur per 4, denominatorem fractionis; nam quotiens 11200, erit numerus absolutus: itaut illa æquatio ad hanc fit reducta 1C + 6Q + 40R = 11200. Hoc autem ita ostenditur. 1R pretium supponebam esse 5;

Declaratur doctrina tradita. modo ducatur in 4, numerum elatioris potestatis, & fit 20: itaq; 20, erit huius æquationis latus (diximus enim numerum emergentem pro latere diuidendum esse, per numerum maioris potestatis.) Cubus ex 20, est 8000: addantur 6Q, nempe 2400, & 40R, nimirum 800; fit summa 11200, prout in æquatione dicebamus euenire.

Exemplum 8. Sit æquatio 5QQ + 6C + 3Q + 7R = 154: diuisione instituta, fiet $1QQ + \frac{6C}{5} + \frac{3Q}{5} + \frac{7R}{5} = \frac{154}{5}$; quæ quidem, per Isomœriam ad hanc reuocabitur 1QQ + 6C + 15Q + 175R = 19250. Supponebam enim 1R, pretium esse 2: & quoniam numerus QQ, est 5, proinde duci debet in 5; atq; adeo huius æquationis latus erit 10, diuidendum per 5.

Exemplum 9. Sit æquatio 5C + 17R = 74: diuisione instituta, fit

fit $1C + \frac{17R}{5} = \frac{74}{5}$: per Isomœriam ad hanc reuocabitur $1C + 85R = 1850$. Etenim R, distat à C, per Q; proinde ducatur 17, numerator in 25, quadratum ex 5, numero cuborum; & productus numerus 425, diuidatur, per 5, denominatorem: fit quotiens 85, & numerus radicum. Deinde quoniam numerus absolutus distat per C; ducatur numerus 74, in 125, cubum ex 5; & productum 9250, si diuidatur per 5, fit quotiens 1850, & numerus absolutus: quod eodem pacto declarari potest, quemadmodum superiùs dicebamus. Etenim 1R, pretium supponimus esse 2: erit huius ęquationis $1C + 85R = 185$, latus, numerus 10; emergens scilicet ex ductu 2, in 5, numerum elatioris potestatis: proinde cubus erit 1000; ad quem si addantur 85R, nimirum 850, fit summa 1850, veluti dictum est.

Sit æquatio $5Q + 12R = 185$: si instituatur diuisio, ad hanc reducetur $1Q + \frac{12R}{5} = \frac{185}{5}$: & per Isomœriam ad hanc $1Q + 12R = 925$, cuius latus est 25; quo diuiso per 5, numerum quadratorum fit quotiens 5, & 1R valor. Exemplum 5.

Sit æquatio $10Q - 4R = 230$. Si diuidantur omnia per 10, numerum quadratorum, fit æquatio $1Q - \frac{14R}{10} = \frac{230}{10}$: quæ per Isomœriam ad hanc reuocabitur $1Q - 4R = 2300$, cuius latus est 10; quo diuiso per 10, numerum quadratorum, fit quotiens, & 1R, pretium 5: hoc est 1R, pretium in æquatione illa superiori $10Q - 4R = 230$, erit 5. Exemplum 6.

Sit ęquatio $1C + \frac{2R}{3} = 25$: reducetur ad hanc $1C + 6R = 675$. Exemplum 7.

Item sit æquatio $1C + \frac{5R}{6} = 432$: reducetur ad hãc $1C + 30R = 93312$.

Est

Altera methodus perficiendæ Isomœriæ.

Est etiam Isomœriæ perficiendæ methodus altera. Reperiatur quiuis communis diuiduus numerus omnium denominatorum; & multiplicetur numerator cuiuscunq; fractionis, per numerum, qui communem diuiduum metitur, per denominatorem numeratoris multiplicandi: integri autem numeri multiplicandi sunt per communem diuiduum. Exempligratia, sit æquatio huiusmodi, $\frac{60}{2} + \frac{20}{5} = \frac{204}{6}$. Communis diuiduus esto 30, vel alius numerus quicunq; quem possint omnes denominatores metiri. Numerus 2, metitur 30, per 15; proinde multiplicatis 60, per 15, producentur 900. Mox etiam videatur numerus, per quem numerus 5, metitur 30; & reperiemus 6: per hunc autem numerum multiplicentur 20, vt producantur 120. Deniq; 6, metiuntur 30, per 5; ob id multiplicatis 204, per 5, producentur 1020. Igitur æquatio illa superiùs posita per Isomœriam reducetur ad hanc $900 + 120 = 1020$.

Exemplum 2.

Sit æquatio $1R + \frac{2}{3} = \frac{17}{3} + \frac{5R}{6}$. Communis diuiduus esto 12, numerus, quem quidem 3, denominator fractionis $\frac{2}{3}$, metitur per 4; ducto autem 2, numeratore eiusdem fractionis in 4, producitur numerus 8. Præterea multiplicatis 17, per 4, numerum per quem 3, denominator fractionis metitur 12; & fit, 68. At verò 6, denominator fractionis $\frac{5}{6}$ R, metitur 12, per 2: ducto autem 5, numeratore eiusdem fractionis, in 2, producuntur 10. Itaque superior æquatio, per Isomœriam ad hanc reducetur. $12R + 8 = 10R + 68$, & est 1 R valor 30.

Exemplum 3.

Sit æquatio supra iam allata $5Q + 12R = 185$: per diuisionem fit æquatio huiusmodi $1Q + \frac{12R}{5} = \frac{185}{5}$. Communis diuiduus esto numerus 10, quem denominator 5, metitur per 2; ducatur 1 Q, in 10, fiunt 10 Q: præterea ducantur 12 R, in 2, numerum per quem denominator 5, metitur 10; & producentur 24 R: ducantur 185, in 2, in 2, & producentur 370: itaq; per Isomœriam reducta erit æquatio illa ad hanc $10Q + 24R = 370$; cuius radix est 5, quemadmodum, & illius $5Q + 12R = 185$, est etiam 1 R, valor 5.

Sit æquatio superiùs posita $4C + 6Q - 10R = 700$: diuisione instituta, fiet æquatio hoc modo $1C + \frac{6Q}{4} + \frac{10R}{4} = \frac{700}{4}$. Communis diuiduus esto numerus 8, quem denominator 4, metitur per 2: multiplicemus 1 C, per 8, & producentur 8C: multiplicemus 6, numeratorem fractionis $\frac{6Q}{4}$ per 2, & fiunt 12: multiplicemus 10R, per 2, & fient 20R: deniq; si multiplicentur 700, per 2, fient 1400: ob id per Isomœriam reducta erit æquatio illa, ad hanc $8C + 12Q + 20R = 1400$. Huius autem æquationis radix est 5: nam 8C, valent 1000; & 12Q, valent 300, atq; demum 20R, valent 100: horum summa est 1400. *Exemplum 4.*

Isomœria fit etiam multiplicando singulos numeratores per denominatores aliarum fractionum. *Isomœria fit etiam multiplicando singulos numeratores per denominatores.*

Sit æquatio $\frac{6R + 20}{1R} = \frac{8R - 48}{4}$. reuocabitur ad hãc per Isomœriam, facta multiplicatione per crucem $24R + 80 = 8Q - 48R$: est autem 1R, pretium 10. Hoc autem quod diximus, resolutione in numeros absolutos facilè constabit: nam si 1 R, pretium est 10, ergo 6R, valebunt 60; igitur illa fractio $\frac{6R + 20}{1R}$, erit 8; Insuper 8 R, valor erit 80; ob id illius fractionis $\frac{8R - 48}{4}$, pretium erit 8. *Exemplum 1.*

Si sit æquatio $1C + \frac{3}{2}Q = \frac{325}{2}$: per Isomœriam reducetur ad hanc $1C + 3Q = 1300$. Nam Q, distat à C, per R; ideo ducatur 3, numerator fractionis quadratorum in 2, numerum cuborum, per quem instituta fuit diuisio, & fit 6, quo diuiso per 2, denominatorem fractionis, fit iterum *Exemplum 2.*

iterum 3, numerus quadratorum. Deinde quia numerus absolutus distat à C, per C; ob id cubicè multiplicetur numerus cuborum, per quem diuisio fuit instituta, & fiet 2600; quo diuiso per 2, denominatorem fractionis, fiet 1300; ob id erit $1C + 3Q = 1300$.

Exemplum 3.

Si daretur $1C + \frac{20Q}{5} = \frac{1800}{5}$, reduceretur ad hanc $1C + 20Q = 4500$. Huius æquationis radix est 30; quo numero diuiso per 5, denominatorem fractionis, fit radix alterius illius æquationis 5: & ita est, quemadmodum cuiq; perspicuum esse potest.

Explicantur magis, quæ hactenus dicta sunt.

Sed quæ hactenus diximus, vt magis explicemus, sumamus communem diuiduum, quem nimirum denominatores omnes fractionum diuidere possunt sine vlla fractione: modo multiplicetur per hunc numerum, numerus primi gradus, idest proximi infra potestatem; & per quadratum illius multiplicetur numerus sequentis gradus; per cubum eiusdem numerus tertij gradus; & ita deinceps, vsq; ad comparationis homogeneum: cum autem his multiplicationibus valor radicis propositæ æquationis augetur; proinde numerus inuentus pro radicis valore, nouæ scilicet æquationis, diuisus per illum inuentum numerum, dabit radicem quæsitam propositæ ab initio æquationis.

Exemplum ad idem.

Supponatur æquatio $1C + 5\frac{1}{2}Q - 12\frac{2}{3}R = 326$, cõmunis diuiduus erit 6, quem scilicet denominatores 2, & 3, diuidũt: modò fiant proportionales numeri; qui quidem subscribãtur partibus æquationis; per quos, si superiores multiplicentur, fient 33, 528, 70416; atq; adeo fiet æquatio $1C + 33Q - 528R = 70416$. Huius autem æquationis radix est 36; qui quidem numerus diuisus per 6, communem diuiduum, dabit 6, pro radice illius æquationis.

$$\begin{array}{cccc} 1C + & 5\frac{1}{2}Q - & 14\frac{2}{3}R = & 326 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ \hline & 33 & 528 & 70416 \end{array}$$

De explicatione Æquationum Simplicium, siue Purarum.

CAPVT XI.

Memoria debet Analysta complecti superiùs à nobis explicata, vt ad ea, quæ sequuntur progredi valeat. Diximus autem simplices æquationes eas esse, in quibus vnus terminus vni termino æquatur. Cumq; longè faciliores hæ sint; operæ pretium erit ab his quidem exordiri. *Simplex æquatio qd sit in memoriam reuocatur.*

Methodus explicandi æquationum inter R, & N.

Qvando reperitur æquatio inter R, & N, hoc est inter Radicem, & Numerum absolutum, diuiso numero absoluto per numerum characteris R, & procreabitur in quotiente 1R, pretium quæsitum. *Quid agendum quando sit æquatio inter R, & N.*

Sit æquatio 6R ⊏ 60. Diuiso numero 60, per 6, fit quotiens 10, & 1R, pretium. Itaq; sic proponetur resoluendum Problema. *Exemplũ.*

Numerum reperire, qui si ducatur in 6, producat 60. *Problema.*

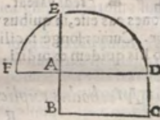
Quæsitus numerus esto 1R, quæ si ducatur in 6, fiunt 6R, & erit æquatio, vt supra, & 1R, pretium erit 10. Numerus enim hic satisfacit quæstioni, cum ductus in 6, producat 60.

Aduertendum autem diuisionem faciendam esse, non secus ac si forent numeri absoluti, nulla habita ratione characterum, vt videbimus infra. *Admonitio.*

Demonstratio hæc est. Si sit æquatio inter numerum radicum, & N; id quod ignoratur est numerus, qui ductus in numerum radicum producit numerũ absolutum: quòd si *Demõstratio.*

diuidatur numerus absolutus per numerum R, quotiens erit numerus satisfaciens. Nam cum ea sit proportio diuisoris ad vnitatem, quæ diuisi ad quotientem, ideo æqualitas erit inter factum sub medijs, & sub extremis.

Geometricè sic. Radicum numerus sit A F: & planum comparationis homogeneum sit quadratum, cuius latus AE; quod fiat perpendiculare ad FA: quæ protrahatur ad partes A. Intelligatur recta ducta ab F, ad E, quæ bifariam secta sit: & à puncto sectionis, ducta sit recta ad rectos angulos, versus protractam FA; occurret illi, vt patet ex Elem. Hoc autem puncto occursus facto centro, ac interuallo vsq; ad F, describatur semicirculus; qui necessariò trãsibit per E, vt etiam



constat ex Elementis: secet autem in D, rectam FA, protractam: factumq; sit rectangulum AC; cuius latus AB, sit æquale ipsi FA. Erit rectangulum AC, seu FAD, æquale quadrato ex AE; ergo AD, erit lateris valor. Nam Radicis pretium est id, quod ductum in numerum radicum, facit productum æquale comparationis homogeneo: sed AD, huiusmodi est; nam ducta in AB, seu in AF, illi æqualem, facit AC, quod est æquale quadrato ex AE, comparationis homogeneo; & eadem oritur ex applicatione quadrati rectæ AE, ad FA, radicum numerum, &c. Rectè igitur Regula iubet, vt fiat diuisio, eo modo, vt dictum est.

Methodus explicandi æquationem inter Q, & R.

Declaratur hæc methodus.

QVando reperitur æquatio inter Q, & R; diuiso numero radicum per numerum quadratorum, procreabitur in quotiente 1R valor.

Sit

Sit æquatio 6 Q $\sqsubset$ 60 R: diuiso numero 60, per numerum 6, fit quotiens 10, & 1 R valor; sunt enim numeri denominati Collaterales, *Quorum exponentes vnitate se superant*. Itaque sic proponetur Problema. Exemplũ.

Numerum reperire, qui ductus in 60, producat numerum æqualem illi, qui fit, ducto quadrato numeri quæsiti in 6. Problema ad hanc methodum illustrandam.

Hæc autem æquatio reducitur per Hypobibasmum, ad æquationem inter R, & N: & eadem est demonstratio.

Methodus explicandi æquationem inter Q, & N.

QVando reperitur æquatio inter Q, & N: diuiso numero absoluto per numerum quadratorum, emergit in quotiente vnius quadrati valor. Ipsius igitur quadrati latus, 1 R pretium exhibebit. Huius methodi præcepta.

Sit æquatio 8 Q $\sqsubset$ 128. Instituta diuisione, fiet quotiens 16, & 1 Q, pretium: cuius latus quadratum 4, vnius radicis valorem repræsentabit. Itaque sic proponetur Problema. *Numerum reperire, cuius quadratum ductum in 8, producat 128.* Exemplũ. Problema.

Demonstratur facilè, quandoquidem per diuisionem reuocatur æquatio ad æqualitatem, inter Q, & N, non enim communi diuisione immutatur æqualitas. Cum autem æquatio reducta fuerit inter Q, & N; patet latus quadratum numeri fore vnius radicis pretium: vt enim æqualia sunt quadrata, ita & latera. Quadrata æqualia habent latera æqualia.

Oportet autem ipsius puri quadrati analysin explicare, quod assequemur iuxta methodum Vietæam hic à nobis afferendam. Methodus explicandi analysin puri quadrati.

Primò quidem animaduertendum est potestatem puram in quocunq; gradu magnitudinum proportionaliter ascendentium, à tot singularibus lateribus componi, quot figuris numeralibus pro singularium valore distribuendis, & exprimendis, radix ipsa vniuersalis in genesi constat: Explicatio methodi propositæ.

siuè hæc pura potestas sit purum Quadratum; siuè purus Cubus, siuè purum Quadrato-quadratum, &c.

Quando Radix vna figura constat.

Quapropter si radix vnica tantùm figura constet, vt 5, ab eaq; sit propaganda potestas; ducta figura in se, vel in sui gradum, qualem potestatis genus exposcit, habetur ipsa potestas.

Quando duabus.

Quod si duabus figuris radix ipsa constet, vt 15; iam potestas creabitur ex 10, & 5, tanquam ex lateribus singularibus: ex 10, in 10, fit 100; ex 10, in 5, fit 50; rursus ex 10, in 5, fit 50; & ex 5, in 5, fit 25, horum summa 225: si loquamur de quadrato habetur potestas, vt patet. Si verò Cubus desideretur, tunc operatio iuxta istius gradus naturam perficienda est.

Quando tribus.

At verò si Radix tribus constaret figuris, vt 125; creaetur potestas abs 100, 20, & 5.

Quando quatuor.

Si radix quatuor figuris constaret, vt 1225; creabitur potestas, ab 1000, 200, 20, & 5. Sic etiam si pluribus figuris radix ipsa constaret: etiam potestas à pluribus singularibus lateribus; à tot scilicet, quot ipsamet radix vniuersalis constat, numeralibus figuris in genesi componitur.

Analysis potestatis, quid.

Potestatis itaq; resolutio, quam Græci Analysin appellãt, in tot singularia latera quidem distribuitur, quot radix vniuersalis figuris numeralibus in genesi constat: ipsaq; pro singularium valore distribuenda, & exprimenda.

Primũ obseruandum ad analyseos institutionem.

Primum autem, obseruatione dignum videtur: vt extrema potestatis resoluendæ figura (quæ tamen prima est pergendo à dextra ad lęuam) sedes constituatur vnitatum, quæ metiuntur potestatem lateris ex singularibus extremi, & minimi; punctoq; subtus notetur: est enim extremum latus à dextris, illudq; minimum.

Secundum.

At verò figura succedens pergendo à dextra ad læuam sedes est primi gradus ad potestatem ipsam parodici, &c.

Nota primi gradus parodici ad potestatem est R.

(dictum est autem superiùs, quid sit gradus parodicus ad potestatem;) notariq; debet congruenti nota, scilicet R: quandoquidem nos hanc notam adhibemus pro primo gradu parodico ad potestatem.

Suc-

Succedens deinceps figura notari debet secundo gradu parodico, suaq; congruenti nota, qualis est Q: & ea quidem serie deinceps procedendũ erit in parodicis gradibus, notisq; congruẽtibus, donec ad potestatẽ ipsam perueniatur. *Tertium.*

At verò cum ad potestatem deuẽtum fuerit, rursus punctum est apponendum, symbolum vnitatum, quæ potestatem ipsam lateris penultimi metiuntur. Rursus post huiusmodi punctum progrediendum est in anteriora, suoq; sunt ordine collocandæ notæ, graduum videlicet parodicorum, atq; descripto iam à nobis modo, constanti quodam ordine procedendum est, donec ad lateris potestatem ex singularibus primi, maximiq; perueniatur. *Quartum.*

Quamobrem tot numeralibus figuris radix ipsa constabit, quot punctis singularium potestatum constat resoluendi numeri potestas: deinde procedendum iuxta leges analyseos, quæ nimirum illi congruit potestati. *Quintum*

Reperiatur latus primum singulare, ipsius singularis potestatis primæ; hoc autem ex singularibus lateribus maximum est. *Sextum.*

Deinde singularis primi lateris gradus parodici, secundum potestatis cõditionem multiplicari, & singuli sua collocari sede, subijciq; resoluendæ magnitudini debent: post quam ea prima singularis potestas adempta fuerit. Quod autem ex huiusmodi applicatione oritur, latus secundum statuendum est. Hæc autem applicatio non omnino est accurata: quandoquidem ad ipsum quoq; latus subaudiendum est fieri applicationem, ea tamen lege; vt homogenea, quæ fiunt ex singulari illo secundo latere, suisq; parodicis gradibus, in primum latus, primiq; lateris reciprocos gradus, resoluendæ magnitudini æquentur, vel ei demum cedant. Si verò æquent, opus iam solutum est: si verò cedant, & punctum aliquod supersit potestati addictum; duo iam elicita latera, vnius munere funguntur, scilicet maioris. Atq; non dissimili arte ad sequentis lateris inuentionem, & quidem minoris, procedendum est. *Septimum.* *Obseruandum.*

At verò si dum cedunt, non supersit aliquod punctum

ipsi

ipsi additum potestati; signum euidens latus irrationale esse. Tunc autem collecto lateri fragmentum adiungendum est, repertum quidem ea arte, quam Arithmetici, de Radicum extractione tractantes explicare solent.

Problema. *E dato in numeris quadrato puro latus analyticè elicere.*

Proposita sit æquatio 1 Q ⊐ 4096: & oporteat eam explicare, Radicis pretium exhibendo. Propositum itaq; quadratum resoluendum, à tot singularibus lateribus cõponitur, quot figuris radix vniuersalis quæsita, in genesi eiusdem quadrati constabat. Vt autem figurarum numerum ex quibus vniuersum latus constat assequi valeamus; propositi numero quadrati extrema figura, à sinistris ad dextram procedendo, puncto notari debet: & sic alternæ, in anteriora progrediendo, sunt notandæ, alternæ sunt omittendæ; cum vno scansili gradu ad hanc Potestatem, nempè quadratum perueniatur. Itaq; duo erunt puncta in suprapositio numero; si nimirum signatio, per puncta ad modum superiùs explicatum instituatur: quamobrem totum ipsum quadratum, tot singularibus quadratis; & totum latus, tot singularibus lateribus constare, pronunciandum erit.

Quando verò quadratum componitur à duobus singularibus lateribus; quadratum lateris primi, plus plano facto à duplo lateris primi in secundum, plus quadrato lateris secundi, æquale est composito quadrato.

Theorema Synthetic. *Q, lateris primi,*
✢ plano facto à duplo lateris primi in secundum,
✢ Q, lateris secundi; æquale est composito Quadrato.

Illud autem animaduertendum est, figuram primo puncto ad lęuam signatam, non immeritò dici sedem vnitatum metientium quadratum primi lateris, eiusdemque maioris; succedentem autem sedem esse plani sub R; & deniq; extremam sedem esse vnitatum metientium quadratum secundi lateris.

Si verò plura superfuissent puncta; quadratum ab initio intelligitur componi tantùm à duobus illis lateribus, quæ quidem elicita iam funguntur vnius lateris munere; postea

ſtea verò intelligeretur componi quadratum ipſum ex illo aggregato, tanquam ex primo latere, & ex ſequente tanquam ex latere ſecundo.

Sit itaq; iniunctum, è dato numero quadrato 4096, analyticè elicere latus. Primi quadrati latus [illegible]ur ex 40: quamuis autem 40, non ſit numerus quadratus, ſed maior eſt 36, numero proximè quadrato minori; ob id dicetur latus primum eſſe 6: ſi tamen cætera conſentiant, quod ex operis euentu cognoſcetur. At verò 6, eſt latus primum vnica figura expreſſum: quam ſequi tot numerales circulos ſubintelligendum eſt, quot ſupererunt puncta quadratica; nempè vnus in hoc numero. Modò ex 40, auferantur 36, remanebunt 4, vt fiat numerus reſiduus 496: qui quidem conſtat, tum ex plano ſub 12, duplo lateris primi, & latere ſecundo indagando, tum etiam ex quadrato eiuſdem lateris ſecundi.

Sumatur itaq; 12, duplum lateris primi quadrati; illudq; diuiſor ſtatuatur ſub figura plani ſub R: dum tamen ponas in anteriora dextrorſum, ſi qua duplicatio adiecerit. Si itaq; ad 12, applicemus 49, fiet quotiens 4, ſeu latitudo.

Illud hic obſerua, ſi latitudinem non feciſſet intra 10, fuiſſe inditium, primum elicitum latus 6, minus eſſe æquo; atq; adeo maius accipi debuiſſe.

Si verò ducantur 4, in 12, fiet 48, duplum planum ſub primo, ſecundoq; lateribus. Quadratum autem à ſecundo latere 4, eſt 16, quod collocandum eſt, vt vides in adiuncto paradigmate, nempe ſub puncto ei addicto. Quod ſi hoc quadratum ſub ſede quadrati ſecundi, & planum proximè deſcriptũ ſub ſede plani radicum, ſimul addantur; faciunt 496, numerũ æqualem reſiduo propoſito quadrato: atq; adeo concludendum erit, quæſitum latus eſſe 64.

Quod ſi planorũ ſumma non fuiſſet æqualis reſiduo, ſed eo minor; argumentũ eſſet, quod quadrati latus eſſet aſymmetrũ: ob id non explicabitur, ſed aſymmetriæ notam adhibendo, abſoluetur operatio. Vt ſi foret 1 Q = 5, dicemus

mus 1 R, valorem esse ℞ 5: Radix autem proxima elicitur ad eum modum, quem Arithmetici tradunt.

Paradigma analyseos Quadrati puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Quadratum resoluendum.	4 0 . Q 1	9 6 . ℞ . Q 11
Planum ablatitium	3 6	
Reliquum resoluendi Quadrati.	4	9 6

Sedes singularium quadratorum, planorumq; sub lateribus.

o	•
℞ 6	4
Q 36:	16

Tot numerales circuli, quot puncta quadratica, lateraque singularia.

II. Eductio lateris singularis secundi

Reliquum resoluendi Quadrati.	4	9 6	
Diuisor duplum lateris primi.	1	2	
Plana ablatitia.	4	8	A latere secundo in duplum latus primum.
		1 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum equalis residuo resoluendo quadrato.	4	9 6	

Para-

Paradigma secundum analyseos Quadrati puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Quadratum resoluendum.	7 . Q 1	6 1 R. Q 11	7 6 R. Q 111	Sedes singularium quadratorum, planorumq; sub lateribus.	0 0 0 R: 2 7 6 Q 72 9: 36	Tot numerantur circuli, quot puncta quadratica, laterauè singularia.
Planum ablatitium.	4			Quadratum lateris primi.		
Reliquum resoluendi Quadrati.	3	6 1	7 6			

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi quadrati.	3	6 1	7 6	
Diuisor, duplum lateris primi.		4		
Plana ablatitia.	2	8 4 9		Ad latere secundo in duplum latus primum. Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	3	2 9		
Reliquum resoluendi quadrati.		3 2	7 6	

III. Eductio lateris singularis tertij.

Reliquum resoluendi quadrati.	3 2	7 6	
Diuisor duplum lateris primi.	5	4	
Plana ablatitia.	3 2	4 3 6	A latere secundo in duplum latus primum. Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorū æqualis residuo resoluendo quadrato.	3 2	7 6	

Paradigma tertium analyseos Quadrati puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Quadratum resoluendum.	1 0	5 6 R.	2 5 R.
	Q 1	Q 1 2	Q 3 2 5
Planum ablatitium.	9		
Reliquum resoluendi quadrati.	1	5 6	2 5

Sedes singularium quadratorum, planorumque, sub lateribus.

0	0	0
3	2	5

Q 1024 : 25

Tot numerales circuli &c.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi Quadrati.	1	5 6	2 5	
Diuisor, duplum lateris primi.		6		
Plana ablatitia.	1	2		A latere secundo in duplum latus primum.
		4		Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	1	2 4		
Reliquum resoluendi Quadrati.		3 2	2 5	

III. Eductio lateris singularis tertij.

Reliquum resoluendi quadrati.	3 2	2 5	
Diuisor duplum lateris primi.	6	4	
Plana ablatitia.	3 2	0	A latere secundo in duplum latus primum.
		2 5	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum æqualis residuo resoluendo quadrato.	3 2	2 5	

E dato in numeris Cubo puro, latus Analyticè elicere.

Si data sit æquatio 1 C ⚌ 592704, & oporteat eam explicare, pretium Radicis exhibendo. Hic numerus autem intelligitur componi à tot singularibus lateribus, quot figuris latus vniuersum, de quo quæritur, in genesi, seu effformatione cubi constabat.

Vt autem figurarum numerum assequamur, debent figuræ ipsius numeri punctis designari, itaut à læua ad dextram pergendo, extrema propositi numeri Cubi figura puncto signetur, reliquarum verò in anteriora pergendo, tertia quæque figura signari debet, hoc est duabus intermedijs relictis; quoniam duo sunt gradus scansiles, quibus ad cubum peruenitur, nempe R, Q. Cum itaq; duo sint puncta, pronunciandum erit totum cubum constare, tot singularibus cubis, atq; etiam latus tot nempe duobus singularibus lateribus. *Figura quomodo signari debeant.*

Quando autem componitur cubus à duobus lateribus singularibus, cubus lateris primi, plus solido à triplo lateris primi in quadratum secundi, plus solido à triplo quadrato lateris primi in secundum latus, plus cubo lateris secundi æquatur composito cubo.

C, lateris primi. *Theorem Syntheticũ.*

✠ *solido à triplo lateris primi in Q, secundi.*

✠ *solido à triplo Q, lateris primi in secundum latus.*

✠ *C, lateris secundi, æquatur composito Cubo.*

Prima, quæ ad læuam occurrit, puncto signata figura sedes erit vnitatum metientium Cubum lateris primi, & maioris.

At verò figura sequens sedes erit tripli solidi sub quadrato eiusdem. Figura autem succedens erit sedes tripli solidi sub ipso latere. Demum extrema figura sedes est vnitatum metientium cubum lateris secundi.

Si verò plura puncta superfuerint intelligetur cubus ab initio componi tantùm ab illis duobus lateribus, quę quidem cum elicita forent, vnius vice fungerentur; postea verò intelligeretur componi ex illo aggregato, tanquam primo *Quando plura fuerint puncta.*

 mo

mo latere, & sequente, vt secundo; & ita deinceps ordine costanti, ex adiuncto autem Paradigmate, omnia sine vlla alia explicatione comprehendere licebit.

Methodus. Primò igitur eliciatur latus cubicum ex numero, ad primum vsq; punctum ad læuam 592, cuius latus cubicum est 8. Dicimus itaq; 8, esse latus primum, si cætera consentiant, quod operis euentus indicabit, quemadmodum inferiùs constabit. Hoc autem primum latus vnica exprimitur figura, ad quam intelligendum est sequi tot numerales circulos, quot supererunt puncta cubica. Cubus autem ex 8, est 512, quo subtracto ex 592, remanet 80; adeo vt totus residuus numerus fiat 80704, constans solido sub lateris secundi quadrato, & triplo primi, plus solido sub triplo quadrati primi, & latere secundo inueniendo, plus cubo secundi.

Methodus indagandi secundam figuram. Hoc autem aduertendum, vt 192, triplum quadratum lateris primi collocetur sub sede gradui secundo addicta, hoc est proxima à puncto primi cubi, nempe sub 7. At verò 24, triplum latus primum collocari debet sub succedente gradui primo addicta, hoc est in apposito exemplo sub 0, succedente ad 7, hi verò numeri sic sunt constituendi tanquam diuisores in anteriora prorupturi vrgente necessitate.

Hic porrò numerus ritè dispositus 192, est ille, ad quem applicari debet numerus 807, vt fiat latitudo 4. pro secundo latere quæsito; ac proinde 4. erit secundum latus quæsitum, cæteris diuisoribus consentientibus, quod ex operis euentu dignoscere licebit. At verò si ex illa applicatione non prouenisset numerus intra 10, contentus, argumento fuisset latus illud primum 8, (hoc idem superiùs innuimus) minus æquo fuisse, atq; opus denuo inchoandum, atq; cubi proximè maioris latus eligendum, & ita deinceps. Si verò 4, ducantur in 192, fit 768, triplum solidum sub quadrato lateris primi, & secundo. At verò 16, quadratum è 4, si ducatur in 24, triplum lateris primi facit 384, triplum solidum sub quadrato lateris secundi, & primo. Deniq; 64, est cubus è 4. Hi

Hi verò numeri hac lege disponuntur, vt 64, cubus lateris secundi, sub puncto ci addicto collocetur; solidum autem triplum sub quadrato lateris secundi, & latere primo, sub nota primi gradus, puta R; solidum deinde triplum sub latere secundo, & quadrato lateris primi, sub nota gradus secundi, nimirum Q, quoniam ad primum latus intelligitur comitari circulus numeralis. *Numerorũ dispositio.*

Si summa solidorum non fuisset æqualis residuo, sed eo minor, argumentum esset cubi latere asymmetri; ob id non explicabitur, sed asymmetriæ notam exhibendo, v.g. si sit 1 C ⊏ 4, dicetur 1 R, valor ℞ C 4. *Quãdo solidorũ summa non est æqualis residuo.*

Quod si proxima radix quæratur, proxima inquam veræ, procedendum ad eum modum, quo suo loco Arithmetici docent, & nos alibi explicuimus. *Proxima radix quomodo inuenienda.*

Paradigma analyseos Cubi.

I. Eductio lateris singularis primi.

Cubus resoluendus.	592	704
	.	QR
	C 1	C 11
Solidum ablatitium.	512	
Reliquum resoluendi Cubi.	80	704

Sedes singularium Cuborum, & solidorum sub gradibus.	8	0
	R 8	4
	Q 64	16
	C 512	64

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi Cubi.	8 0	7 0 4
Diuisores { Triplum quadratum lateris primi.	1 9	2
Diuisores { Triplum latus primum.		2 4
Summa diuisorum.	1 9	4 4
Solida ablatitia. {	7 6	8 Solidum à latere secundo in triplum Quadratum lateris primi.
	3	8 4 Solidum à quadrato lateris secundi in triplũ latus primum.
		6 4 Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum solidorum æqualis residuo resoluendo Cubo.	8 0	7 0 4

Paradigma aliud analyseos Cubi.

I. Eductio lateris singularis primi.

Cubus resoluendus.	1	9 0 6	6 2 4
	.	.	Q R.
	C 1	C 1 2	C 1 2 1
Solidum ablatitium.	1		
Reliquum resoluendi Cubi.		9 0 6	6 2 4

Sedes singularium Cuborum, & solidorum sub gradibus.

	0	0	0
R.	1	2	4
Q.	1	4 4:	1 6
C.	1	7 2 8:	6 4

II. Edu-

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Reliquum resoluendi Cubi.		906	624	
Diuisores	Triplum quadratum lateris primi.	3		
	Triplum latus primum.	3		
Summa diuisorum		33		
Sola ablatitia.		6		Solidum à latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
		12		Solidum à quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		8		Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum solidorum.		728		
Reliquum resoluendi Cubi.		178	624	

III. *Eductio Lateris singularis tertij.*

Reliquum resoluendi Cubi.		178	624	
Diuisores	Triplum lateris primi.	43	2	
	Triplum latus primum.		36	
Summa diuisorum.		43	56	
Solida ablatitia.		172	8	Solidum à latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
		5	76	Solidum à quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			64	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum equalis residuo.		178	624	

E dato

E dato in numeris Quadrato-quadrato puro, latus analyticè elicere.

Extractio radicis ex æquatione in qua 1 QQ = N.

Sit proposita æquatio huiusmodi 1 QQ = 456976, & oporteat inuenire, quanta sit ℞, propositi Quadrato-quadrati. Id autem vt assequamur, oportet aduertere Quadrato-quadratum intelligi componi à tot singularibus lateribus, quot figuris latus quæsitum constabat in genesi, siue efformatione ipsius Quadrato-quadrati. Vt autem, figurarum numerum præfinire possimus, à dextra quidem ad læuam procedendo figuram extremam puncto notare debemus; reliquarum autem in anteriora progrediendo, quartas quasque figuras, tribus nimirum intermedijs prætermissis; eam scilicet ob causam, quia ad Quadrato-quadratum tribus scansilibus gradibus peruenitur, nempè R, Q, C.

Si duo puncta extiterint.

Si itaq; duo extiterint puncta, tot etiam Quadrato-quadratum vniuersale, singularibus Quadrato-quadratis constare pronunciandum est; atq; adeo, & latus etiam ipsum vniuersale, tot singularibus lateribus.

Quando verò Quadrato quadratum componitur à duobus singularibus lateribus, tunc

Theorem Syntheticũ.

QQ lateris primi.
✠ *latere secundo in C, quadruplum lateris primi.*
✠ *lateris secundi Q, in sexcuplum quadrati lateris primi.*
✠ *lateris secundi C, in latus quadruplum primi.*
✠ *lateris secundi QQ, æquale est Quadrato quadrato aggregati laterum.*

Animaduersio.

Insuper illud etiam animaduertendum, figuram signatam puncto primùm ad læuam occurrente, dici sedem vnitatum metientium quadrato-quadratum lateris primi, & maioris: figuram autem sequentem, sedem planoplani sub cubo eiusdem lateris primi quadruplando: succedentem, sedem planoplani, sub quadrato eiusdem lateris primi sextuplando: rursus succedentem, sedem esse planoplani sub ipso primo latere quadruplando: demum extremam sedem esse vnitatum metientium Quadrato-quadratum lateris secundi.

Ita

Ita quoq; si plura puncta extarent. Siquidem QQ, intelligeretur ab initio componi tantùm à duobus illis lateribus, quæ dum elicita essent, vnius quidem vice fungerentur; postea verò intelligeretur componi ex aggregato illo, veluti ex latere primo, & ex sequente, tanquam ex secundo, &c. *Cum plura puncta exstiterint,*

Paradigma analyseos Quadrato-quadrati puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Quadrato-quadratum resoluendum.	4 5	6 9 7 6	Sedes singulatium Quadrata quadratorum, & planoplanorum sub gradibus.	0	0	Tot numerales circuli, quot puncta quadrato quadratica, lateraue singularia.
	.	CQR.		R 2	6	
				Q 4	3 6	
	QQ1	QQ11		C 8	2 1 6	
				QQ16	1 2 9 6	
Planoplanum ablatitium.	1 6		Quadrato-quadratum lateris primi.			
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.	2 9	6976				

II. Eductio lateris singularis secundi.

	2 9	6976	
Diuisores: Quadruplus cubus lateris primi.	3	2	
Diuisores: Sextuplū quadratum eiusdem.		2 4	
Diuisores: Quadruplū idē latus.		8	
Summa diuisorum.	3	448	
Plano-plana ablatitia	19	2	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
	8	6 4	A quadrato secundi in sextuplum quadratum primi
	1	7 2 8	A cubo secundi in quadruplum lateris primi
		1 2 9 6	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum æqualis residuo resoluendi Quadrato-quadrati.	2 9	6 9 7 6	

Quãdo residuum nõ foret æquale summæ plano planorum.

Quod si residuum non fuisset æqualis summæ planoplanorum, &c. latus elicietur proximè vero, vt Arithmetici docent, nimirum adiectis quaternis numeralibus circulis in infinitum, & ex hoc extenso elicietur latus Quadrato-quadratum, & procedetur vt supra.

E dato in numeris Quadrato-cubo puro latus analyticè elicere.

Numerus Quadrato cubus componi quidem intelligitur à tot singularibus lateribus, quot figuris latus vniuersale quæsitum constat, in genesi Quadrato-cubi. Vt autem hunc figurarum numerum assequamur, fieri debet designatio per puncta hunc in modum. Extrema numeralis figura Quadrato-cubi initio ducto à sinistris ad dextram procedendo, signanda est puncto; è reliquis verò in anteriora progrediendo, quintæ quæque figuræ signari debent, quatuor intermedijs relictis; cum nimirum quinque gradibus scansilibus ad quadrato-cubum perueniatur, videlicet R, Q, C, QQ. Cum igitur duo sint puncta, tot etiam constare quadrato cubus vniuersalis, singularibus quadrato-cubis, atq; etiam latus vniuersale, tot lateribus singularibus, pronunciabitur.

Signatio per puncta in hac æquatione quo pacto fieri debeat.

Cum autem quadrato-cubus componitur à duobus singularibus lateribus.

Theorema syntheticũ.

Q C, lateris primi.
✠ latere secundo in Q Q, quintuplum lateris primi.
✠ lateris secundi C in Q, decuplum lateris primi.
✠ lateris secundi Q in C, decuplum lateris primi.
✠ lateris secundi Q Q, in latus primum quintuplum.
✠ Q C lateris secundi.
Aequale est Quadrato-cubo aggregati laterum.

Para-

Paradigma analyseos Quadratocubi puri.

I. Eductio lateris singularis primi.

Quadratocubus resoluendus.	1 18	81376	Sedes singularium quadrato cuborum, & plano solidorum sub gradibus.	0 0 / 2 6	Tot numerales circuli, quot puncta quadrata-cubica, lateraue singularia.
·		QQCQR.			
	QC 1	QCu			
Plano-solidum ablatitium	3 2		Quadrato-cubus lateris primi.		
Reliquum resoluendi quadrato-cubi.	8 6	81376			

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi quadrato-cubi.	8 6	8 1 3 7 6	
Diuisores: Quintuplū Q Q lateris primi.	8	0	
Diuisores: Decuplus cubus eiusdem.		8 0	
Diuisores: Decuplum quadratū eiusdem.		4 0	
Diuisores: Quintuplum latus primum.		1 0	
Summa diuisorum.	8	8 4 1 0	
Plano solida ablatitia.	4 8	0	A latere secundo in quantuplum QQ lateris primi.
	2 8	8 0	A Q, lateris secundi in decuplum cubum primi.
	8	6 4 0	A Cubo lateris secundi in decuplum quadratum primi.
	1	2 9 6 0	A quadr.quad. secundi in quintuplum latus primum.
		7 7 7 6	Quadr. Cubus lateris secundi.
Summa plano-solidorum æqualis residuo resoluendo quadrato cubo.	8 6	81376	

E dato in numeris Cubo puro latus analyticè elicere:

Proposita sit æquatio huiusmodi 1 CC = 191102976, quæratur Radix.

Fiat designatio per puncta, vt collocetur punctum sub extrema figura 6; hoc enim punctum designat vnitates metientes extremum Cubo-cubum. At verò cum ab vnitatibus ad Cubo cubum sint quinq; gradus R, Q, C, QQ, QC; ob id quinq; intermediæ figuræ sunt ommittendæ; his autem quinq; intermissis 79201, quæ rursus occurrit 1, signanda puncto. Genesis autem Cubo-cubi sic se habet.

CC lateris primi.

Theorema Syntheticum.

✠ latere secundo in QC, primi sextuplum.
✠ lateris secundi Q, in QQ, primi decuquintuplum.
✠ lateris secundi C, in C, primi vigecuplum.
✠ lateris secundi QQ, in Q, primi decuquintuplum.
✠ lateris secundi QC, in latus primum sextuplum.
✠ lateris secundi CC.
Aequatur Cubo-cubo aggregati laterum.

His autem animaduersis analysis non latebit, & instituetur ad eum modum, quo hic conspicitur.

Paradigma analyseos Cubocubici puri.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Cubocubus resoluendus.	191	1 0 2 9 7 6	Sedes singularium cubocuborū, & solidosolidorū sub gradibus.	0	0	Tot numerales circuli quot puncta cubocubica lateraue singularia.
	.	QC, QQ, C, Q, R.		R: 2	4	
				Q 4:	16	
	CC1	CC11		C 8:	64	
				QQ 16:	256	
				QC 32:	1024	
				CC 64:	4096	
Solido-solidum ablatitium.	64		Cubocubus lateris primi.			
Reliquum resoluendi cubocubici,	127	102976				

II. Eductio lateris singularis secundi.

Reliquum resoluendi Cubocubi		127	102976	
Diuisores	Sex upla Quadratocubi lateris primi.	192		
	Decuquintuplũ quadrato quadrati eiusdem.	24	0	
	Vigecuplus cubus eiusdem.		160	
	Decuquintuplũ quadrati eiusdem.		60	
	Sextuplum latus primum.		12	
Summa diuisorum.		21	76612	
Solido solida ablatitia.		76	8	A latere secundo in sextuplum QC lateris primi.
		38	40	A Q, secundi in decuquintuplum QQ. primi.
		10	240	A C, secundi in vigecuplum cubum primi.
		1	5360	A QQ secundi in decuquintuplum, Q primi.
			12288	A QC, secundi in sextuplum latus primum.
			4096	Cubocubus secundi.
Summa solido solidorum aequalis resoluendo CC.		127	102976	

S C H O L I O N.

Modos attulimus, quibus iuxta Vietam sunt eliciendae Radices, & quidem ℞ Q, ℞ C, ℞ QQ, ℞ QC; Possunt attamen, supradictae, & ceterae etiam Radices extrahi, methodo quidem antiqua non minus faeliciter; vt cuicunq; etiamsi leuiter in hoc puluere versato, perspicuum esse potest. Perinde si quidem est huius aequationis 1 Q ⊏ 4096. Radicem quadratam extrahere, ac est ex numero 4096, Radicem eruere quadratam; quemadmodum huius aequationis 1 C ⊏ 592704. Radicem exhibere nil aliud est, quàm ex numero 592704, latus cubicum eruere, & ita de alys Radicum generibus intelligendum; quo verò modo huiusmodi Radices extrahantur, in Arithmetica practica pertractatur.

Supradictae aequationes explicari possunt extractione radicum, quadmodũ antiqui docuerunt.

De

De explicatione Æquationum compositarum, siue affectarum, & primò de explicandis Æquationibus Quadraticis affectis sub latere.

CAPVT XII.

Quid sit aquati. composita, siue affecta, vide supra.

Reliquum est, vt de affectis æquationibus sermonem habeamus, dictum est autem superiùs, quid ipsa sit æquatio composita, seu affecta. Et quidem ad ipsas explicandas, non vna est methodus, sed variæ, atq; diuersæ; plures itaq; in medium afferemus, vt quisq; eam eligere possit, ex ipsis, quæ sibi magis opportuna videbitur. Ducemus autem exordium ab ijs, quæ sunt natura priores; nimirum quadraticis, progressuri deinceps, ad vlteriores, idq; omni claritate, ac breuitate præstabimus.

Tres sunt æquationes species.

Superiùs ostendimus tres esse huius æquationis compositæ, siue affectæ species. Primam Q + R = N Secundam Q — R = N. Tertiam R — Q = N. Plures autem modos, ac methodos ad ipsas explicandas afferemus.

Variæ, ac diuersæ Methodi explicandi æquationem inter Q + R, & N.

Methodus Diophanti.

Explicatur method. Diophanti.

Producto ex numero quadratorum in numerum absolutum, addatur quadratum ex dimidio numeri radicum; & ab aggregati latere, auferatur dimidium numeri radicum; residuum verò diuidatur per numerum quadratorum: etenim quotiens exhibebit lateris, seu radicis pretium.

EXEM-

EXEMPLVM.

5 ♃ ✠ 10 R ⚌ 175.

5 *Numerus Quadratorum* }
175 *Numerus absolutus* } *Multiplica.*

Illustratur exẽplis superior doctrina.

875 *Productum* }
25 *Quadratum dimidij numeri Radicum* } *Adde.*

900 *Aggregatum.*

30 ℞ ♃ *Aggregati* }
5 *Dimidium numeri Radicum* } *Subtrahe.*

25 *Residuum diuidendum.*
5 *Numerus quadratorum, & diuisor.*
5 *Quotiens, & vnius Radicis pretium.*

Non dissimili modo procedendum erit, cum irrationales numeri intercesserint.

EXEMPLVM.

2 ♃ ✠ 4 R ⚌ 20.

2 *Numerus Quadratorum* }
20 *Numerus absolutus* } *Multiplica.*

Eadem est obseruanda methodus intercedentibus numeris irrationalibus,

40 *Productum* }
4 *Quadratum dimidij numeri Radicum* } *Adde.*

44 *Aggregatum.*
℞ ♃ 44 ℞ ♃ *Aggregati* }
2 *Dimidium numeri Radicum* } *Subtrahe.*

℞ ♃ 44 — 2 *Residuum diuidendum.*
2 *Numerus quadratorum, & diuisor.*
℞ ♃ 11 — 1 *Quotiens, & 1 R, pretium.*

Ea-

Eademq; methodus obſeruanda eſt, quomodocunq; irrationales numeri occurrant.

Methodus Communis Antiquorum.

Communis antiquorũ methodus explicatur.

QVadrato dimidij numeri radicum addatur numerus abſolutus, ex huius aggregati latere ſubtrahatur dimidium numeri radicum, etenim reſiduum erit lateris, ſeu radicis pretium.

EXEMPLVM.

1 Q + 10 R = 96.

5 *Dimidium numeri Radicum.*

25 *Eius quadratum* } *Adde.*
96 *Numerus abſolutus* }

121 *Aggregatum.*

11 ℞ Q *aggregati* } *Subtrahe.*
5 *Dimidium numeri Radicum* }

6 *Lateris valor, ſeu vnius Radicis pretium.*

Quãdo occurrunt numeri irrationales.

Eodem modo, cum occurrerint numeri irrationales.

EXEMPLVM.

1 Q + 2 R = 10.

1 *Dimidium numeri Radicum.*

1 *Eius quadratum* } *Adde.*
10 *Numerus abſolutus* }

11 *Aggregatum.*

℞ Q 11 ℞ Q *Aggregati* } *Subtrahe.*
1 *Dimidium numeri Radicum* }

℞ Q 11 — 1 *Lateris valor, ſeu 1 R, pretium.*

SCHO-

SCHOLION.

Ex hactenus explicatis, etiam perspicuè liquet, quo pacto sit eruenda radix, dum æquatio habuerit pro comparationis homogeneo, aliquem numerum compositum, siue binomium, siue residuum. Sit igitur æquatio iuxta methodum Diophantæam explicanda. *Quando comparationis homogeneum fuerit numerus compositus, &c.*

5 𝒬 ✚ 4 R ⊏ 15 ✚ ℞ 𝒬 48.

5 *Numerus quadratorum.*
15 ✚ ℞ 48 *Numerus comparationis homogeneum.*

75 ✚ ℞ 1200 *Productum*
4 *Quadratum dimidij numeri radicū* } *Adde.*

79 ✚ ℞ 1200 *Aggregatum.*
2 ✚ ℞ 75 ℞ 𝒬 *Aggregati*
2 *Dimidium numeri radicum* } *Subtrahe.*

℞ 75 *Residuum diuidendum*
5 *Numerus quadratorum, & diuisor.*

℞ 3 *Quotiens, & 1 R, pretium.*

Iuxta methodum communem antiquorum, sit æquatio huiusmodi

1 𝒬 ✚ 30 R ⊏ 3 ✚ ℞ 2700.

15 *Dimidium numeri Radicum.*

225 *Eius quadratum*
3 ✚ ℞ 2700 *Comparationis homogeneum* } *Adde.*

228 ✚ ℞ 2700 *Aggregatum.*
15 ✚ ℞ 3 ℞ 𝒬 *Aggregati.*
15 *Dimidium numeri Radicum* } *Subtrahe.*

℞ 3 *Lateris valor, seu 1 R, pretium.*

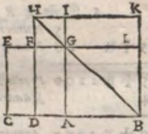
Non dissimili artificio in omnibus alijs aequationibus huius generis procedendum.

Et ita in consimilibus aequationibus procedendum erit; bis&c quandoquidem methodis optata consequeris, dummodo memoria teneas illa praecepta, quae de numeris irrationalibus traduntur.

DEMONSTRATIO.

Superior doctrina demonstratur.

HVius autem methodi demonstratio sic se habet. Sit AB, latus ignotum, & AC, radicum numerus; diuidatur AC, bifariam in D, super BD, constituatur quadratum DBKH, ducta diametro BH, ducatur ad DH, parallela AI, secans BH, in G, agatur LE, per G, parallela ipsi BC, occurrens ipsi CE, in E, quae ducta intelligatur parallela rectae DH. Quoniam AL, FI, sunt [a] quadrata; continebitur rectangulum CG, sub CA, numero radicum, & AG, radicis, seu lateris pretio quaesito: itaut CG, sit radicum pretium (Numerus enim radicum ductus in Radicis pretium, facit radicum valorem) ob id DG, erit dimidium, cum DG, DE, sint [b] aequalia; at verò DG, GK, sunt [c] aequalia; ergo erunt CG, pretio radicum, aequalia complementa DG, GK, simul. Cum autem AL, vna cum pretio radicum CG, quorum numerus natus est CA, aequale sit cuidam numero absoluto (est enim aequatio inter Q + R, & N,) vt supponimus; erit ob id gnomon FGI, equalis numero illi absoluto. Si verò gnomon FGI, addatur ad quadratum FI, quod est quadratum segmenti DA, dimidij numeri radicum; fit quadratum notum DK: à cuius latere DB, dempto DA, remanet AB, notum, nempè radicis pretium.



a Corol. 4. secundi.

b 36. primi.

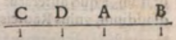
d 43. primi.

Aliter verò sic eisdem positis, nempè CA, numero radicum, & AB, lateris pretio; diuisaq; sit CA, bifariam in D: cum CA, sit bifariam secta in D, & ei addita AB; erit [a] rectangulum CBA, vna cum quadrato segmenti DA, aequale quadrato rectae DB, sed quadratum ipsius DB,

a 6. secundi.

aequa-

æquale est b quadrato segmenti A B, vna cum duplo re- b 4. secũdi.
ctangulo DAB, hoc est CA, AB, radicum omnium pretio (numerus si quidem radicum, ductus, in pretium radicis, facit omnium radicum pretium) vna cum quadrato segmenti D A: ergo rectangulum C B A, vna cum quadrato segmenti DA, æquale erit quadratis segmentorum A B, D A, vna cum duplo rectangulo DA B, seu C A B, simplo. Vtrinq; ablato quadrato segmenti D A, remanebit rectangulum CBA, æquale quadrato segmenti AB, vna cum duplo rectangulo DAB, siue CAB, simplo nempe radicum pretio, æquale cuidam numero absoluto, seu comparationis homogeneo (est enim æquatio Q + R = N,) ergo illi numero absoluto æquale erit rectangulum C B A, sed hoc vna cum quadrato segmenti D A, dimidij numeri noti radicum, æquale est quadrato segmenti D B. Itaq; ad quadratum segmenti DA, addito noto numero absoluto, fiet notum quadratum illud, cuius nimirum latus est DB; si verò abs DB, auferatur DA, remanebit AB, radicis pretium, vtpote illud cuius quadratum, vna cum rectangulo comprehenso sub se, & numero radicum C A, æquale est numero absoluto, &c. quod ostendendum erat.



SCHOLION.

Non desunt aliæ demonstrationes hanc methodum confirmantes, verùm illas non immeritò prætermittimus. Tùm quia per breuitati consulimus; Tùm quia libet eas in speciosam Algebram differre, itaq; ne bis eadem repetantur, consultò hìc eas placuit silentio præterire; Aduerte autem cum inter demonstrandum mentionem fecimus numeri absoluti, per hunc intelligendum volumus comparationis homogeneum, vt etiam aliàs innuimus.

Prætermittuntur aliæ demonstrationes ad hanc methodũ confirmãdam.

Methodus Petri Nonij.

Methodus Petri Nonij explicatur.

QVadrato numeri radicum addatur quadruplum numeri absoluti, & ex aggregato sumatur latus quadratum, à quo auferatur numerus radicum; namq; residui dimidium, vnius Radicis pretium repræsentabit.

EXEMPLVM.

1 Q + 20 R = 125.

400	*Quadratum numeri Radicum.*
500	*Quadruplum numeri absoluti.*
900	*Aggregatum.*
30	*Aggregati latus* } *Subtrahe.*
20	*Numerus radicum* }
10	*Residuum.*
5	*Residui dimidium, & 1 R, valor.*

Quando intercedant numeri irrationales.

Eadem arte hoc totum expediri poterit per numeros irrationales, si ij quidem intercesserint, vt sit æquatio.

EXEMPLVM.

1 Q + 10 R = 100.

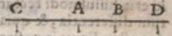
100	*Quadratum numeri Radicum.*
400	*Quadruplum numeri absoluti.*
500	*Aggregatum.*
℞ Q 500	*Aggregati latus* } *Subtrahe.*
10	*Numerus radicum* }
℞ Q 500 — 10	*Residuum.*
℞ Q 125 — 5	*Residui dimidium, & 1 R, valor.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Demonstratio supradictorum.

SIt A B, radix quæsita, & A C, radicum numerus; ipsi verò AB, sit æqualis BD. Quoniam ergo AC, est radicum numerus, & AB, latus ignotum; rectangulum (AB, contentum sub CA, radicum numero, & AB, radicis pretio, erit omnium radicum valor (vt supra dictum est) & quia quadratum ex AB, vna cum rectangulo C A B, radicum pretio, ponitur æquale numero cuidã absoluto (est enim æquatio Q + R = N) ob id erit rectangulum C B A, numerus absolutus, cum ipsi sit æquale quadratum ex A B, vna cum rectangulo CAB: sed quia CB secta est vtcunq; in A;



erit[a] rectangulum quater comprehensum sub CB, BA, seu BD, vna cum quadrato segmenti CA, æquale quadrato ipsius CD. Dicebamus autem rectangulum CBA, esse numero absoluto æquale: ergo quadruplum numeri absoluti, vna cum quadrato ex C A, numero radicum æquale erit quadrato totius C D; seu quod idem est, addito quadruplo numero absoluto ad quadratum ex C A, numero radicum, fiet notum quadratum rectæ C D. At verò si ex cognita C D, auferatur C A, nota, remanebit recta A D, dupla lateris A B: ergo si ad quadratum numeri radicum addatur quadruplum numeri absoluti, & ex aggregato sumatur latus, à quo dematur numerus radicum, remanebit duplum radicis quæsitæ. Quod oportebat ostendere.

a 2. secũdi.

Methodus peculiaris Vietæ.

Peculiaris Vietæ methodus explicatur.

SVmatur numerus cuius quadratum æquale sit numero absoluto, & hic tanquam numerus medius trium proportionalium numerorum statuatur; seu tanquam latus medium proportionalium laterum colligetur; extremorumq; differentia sit numerus radicum. Reperiantur extremi

tremi numeri, seu extrema latera; minor etenim numerus, seu minus latus, ex ipsis quæsitam radicem exhibebit.

EXEMPLVM.

Sit æquatio 1Q + 30R = 400.

Explicatur superiora præcepta.

Numerus absolutus, seu comparationis homogeneum sit 400; cuius ℞ Q est 20, & radicum numerus sit 30, fiat hic numerus differentia extremorum. Quoniam quadratum medij æquale est rectangulo sub extremis; notum ob id erit huiusmodi rectangulum, & numerorum extremorum differentia, & quia quadratum differentiæ laterum (vt ostendimus in nostrorum Problematum analysi) additum quadruplo rectangulo sub lateribus, æquatur quadrato aggregati laterum; proinde 400, ducantur in 4, & fient 1600, his addatur 900, quadratum 30, differentiæ laterum, fit summa 2500, & huic æquatur 1Q, quadratum scilicet aggregati laterum, seu extremorum ex tribus proportionalibus, &c. si nimirum illud ponamus esse 1R, quare ℞Q, numeri 2500, nempe 50, erit extremorum summa. Habita verò summa, & differentia extremorum habentur extrema, vt alibi diximus; eruntq; 40, & 10: itaq; lateris valor in æquatione composita superiùs posita erit 10.

DEMONSTRATIO.

Huius methodi demonstratio in speciosam Algebram differtur.

HVius autem methodi demonstrationem in Algebra speciosa nos afferemus: vbi etiam, quod dicebamus, nempe quadratum differentiæ laterum, vna cum quadruplo rectangulo sub lateribus æquari quadrato ex aggregato laterum ostendemus.

Methodus Steuini.

Methodus Steuini explicatur.

METhodus hæc cum sequentibus nedum idonea est ad has æquationes explicandas, verùm etiam

ad

ad alias, quarum analysin antiquos ignoraſſe dicebamus.

Sumantur numeri quicunq; ad libitum, qui quidem opportuni credantur; & de his iterum, atq; iterum periculum fiat, donec quæſitus reperiatur numerus Problemati ſatisfaciens. Hoc verò vt methodicè fiat, reperiatur primò numerus notarum Arithmeticarum, ex quibus conſtat latus quæſitum; mox inueſtigetur prima, quam neceſſe eſt eſſe vnam ex his 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, & eadem arte inueſtigetur ſecunda, & aliæ ſi adſint, pacto eodem.

EXEMPLVM.

1 Q ✣ 10 R ⩵ 75.

Primò examinandum eſt, num hoc latus conſtet ex pluribus notis, an ex vna tantùm. Fingo 1R, pretium eſſe 1, ergo 10R, valebunt 10, addito quadrato ex 1, nempe 1, fit ſumma 11, & erit æquatio inter 11, & 75, quod falſum eſt. Concludo ob id latus maius eſſe quàm 1, fingo eſſe 2, ergo 10, valebunt 20, addito 4, quadrato ex 2, fit ſumma 24, & erit 24 ⩵ 75, quod falſum eſt. Concludo proinde quæſitum latus maius eſſe quàm 2, fingo eſſe 7, ergo 10R, valebunt 70, addito 49, quadrato ex 7, fit ſumma 119, & erit 119 ⩵ 75. Concludo ergo latus minus eſſe quàm 7, atq; demum concludo latus non conſtare ex pluribus notis, ſed ex vnica, & ita reperiam minus eſſe quàm 6, neq; vnquam ſatisfacere, niſi ſtatuatur numerus 5, nàm 10R, valebunt 50, addito 25, quadrato ex 5, fit ſumma 75, & eſt æquatio 75 ⩵ 75. Quod verum eſt, eodem modo procedendum erit, ſi quæſitum latus ex pluribus conſtet notis; cum enim periculum fecerimus ad indagandam priorem notam, ducendo initium ab 1, ita ad indagandam ſecundam duci debet initium ab 0. *Ex ſplo ſuperior methodus illuſtratur.*

Sit æquatio 1 Q ✣ 14 R ⩵ 312. Fingo figuram eſſe 1, ergo 14R, valebunt 14, his additis ad 1, quadratum ex 1, fit ſumma 15, & erit æquatio 15 ⩵ 312, quod factum eſt. Fingo latus eſſe 9, ergo 14R, valebunt 125, quibus additis

tis

tis ad 81, quadratum ex 9, fit summa 207, & erit 207, ═ 312, quod est falsum. Concludo proinde latus constare ex pluribus notis, quàm vna; fingo ob id latus esse 10, fit summa 240, & erit æquatio 240 ═ 312, quod est falsum; propterea concludo latus maius esse, quàm 10, atq; adeo secundam notam maiorem esse, quàm 0; & ita procedendo deinceps, reperiam latus non constare ex pluribus, quàm ex duabus figuris, & secundam non esse maiorem, quàm 2, & quæsitam radicem esse 12.

Methodus Coigneti.

Huius methodi præcepta. EXponantur partes aliquotæ numeri absoluti, & in singulis periculum fiat, donec reperiatur illa, quæ Problemati satisfacit. Cum enim radicis pretium sit perpetuò aliquota pars numeri absoluti, perquirendo partes aliquotas, facilè erit quæsitam reperire.

EXEMPLVM.

Exempla. Sit æquatio 1 Q ✠ 10 R ═ 75. Sumantur partes aliquotæ, numeri 75, quæ sunt 1, 3, 5, 15, 25, 75. In his iterum, atq; iterum periculum fiat, donec vna ex ipsis reperiatur Problemati satisfaciens, & ita comperietur 1 R, pretium, reperiemus enim 5, esse partem quæsitam, &c.

Sit æquatio 1 Q ✠ 10 R ═ 375. exponantur partes aliquotæ 1, 3, 5, 15, 25, 75, 125, ex ipsis reperiemus quæstioni satisfacere 15, partes autem aliquotæ cuiuscunq; numeri, facilè deprehenduntur, vt facilè diximus.

Methodus Girardi.

Methodus Girardi traditur. SVmantur partes aliquotæ numeri absoluti, & ita ordinentur; vt binæ contra se positæ per multiplicationem, efficiant prælatum numerum absolutum, quę quidem partes efficientes appellantur. Mox vtraq; ęquationis pars

 diui-

diuidatur per 1 R, vt æquatio deprimatur ad proximum gradum inferiorem, cuius æquationis sensus erit, vt si numerus radicum subtrahatur ab aliqua ex partibus aliquotes, relinquatur 1 R, valor.

EXEMPLVM.

Sit æquatio 1 Q ⚌ 1 0 R ✢ 7 5.

1 —— 7 5)
3 —— 2 5 (Efficientes numeri 75.
5 —— 1 5)

Exemplis illustratur.

Partes aliquotæ numeri 75, sunt 1, 3, 5, 15, 25, & 75.

Sunt autem ita dispositæ, vt binæ contra se positæ efficiant numerum ipsum 75, vt vides, diuidatur vtraq; pars æquationis per 1 R, & fiet æquatio huiusmodi 1 R ⚌ — 1 0 ✢ $\frac{75}{1R}$. Hoc est 10, si subtrahatur ab aliqua parte aliquota numeri absoluti 75, relinquetur pars altera coefficiens correlata, & valor lateris; ea est autem eligenda pars, à qua si auferantur 10, fiat, & remaneat altera pars coefficiens correlata. Pars autem ista erit 15, etenim si à 15, subtrahantur 10, remanet 5, pars altera coefficiens correlata; secus si subtraherentur à 25, exempli gratia; propterea quod remanerent 15, hic autem numerus non est pars coefficiens correlata, cum ipsa sit 3, respectu 15, ipsius radicis pretium ergo erit 5.

Methodus generalis Vietæ.

Generalem hanc methodum priùs afferemus iuxta formam Vietæam; postea secundum alium processum compendiosiorem. Primò quidem si proponatur æquatio huiusmodi 1 Q ✢ 1 2 R ⚌ 5 8 5 2 8, Analysis hoc sequenti modo ordinabitur.

Generalis methodus Vietæ explicatur.

Paradigma analyseos Quadrati affecti sub latere affirmatè.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo		1 2		
		·	· ·	
	5	8 5	2 8	
	·	R ·	R ·	
	Q I	Q II	Q III	
Plana ablatitia	4			Quadratum lateris primi.
		2 4		Planum à latere primo in coefficientem.
Summa planorum ablatitiorum.	4	2 4		
Reliquum resoluendi quadrati affecti.	1	6 1	2 8	

Sublateralis 0 0 0

Tot puncta lateralia, quot quadratica. R 2 3 6 Q 529: 36.

Tot numerales circuli, quot producta quadratica, lateraue singularia.

II. Eductio lateris singularis secundi.

		1	2	
Reliquū resoluendi quadrati affecti.	1	6 1	2 8	
		·	·	
Diuisorum pars inferior. Duplum lateris primi.		4		
Summa diuisorum		4 1	2	
Plana ablatitia.	1	2		A latere secundo in duplum primi.
		9		Quadratum lateris secundi.
		3	6	A latere secundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda.	1	3 2	6	
Reliquum resoluendi affecti quadrati.		2 8	6	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius, seu primi & fit.

III. Edu-

III. *Eductio lateris singularis tertij, tanquam secundi.*

Diuisorum pars superior { Coefficiens longitudo.		1 2	
Reliquum resoluendi affecti quadrati.	2 8	6 8	
Duplum lateris eliciti.	4	6	
Summa diuisorum.	4	7 2	
Plana ablatitia.	2 7	6	A latere secundo in duplum lateris primi.
		3 6	Quadratum lateris secundi.
		7 2	A latere secundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda æqualis reliquo resoluendi quadrati affecti.	2 8	6 8	

Aequatio, quam attulimus est in qua quadratum afficitur adiunctione plani sub latere, & data coefficiente longitudine; & è quadrato sic affecto propositum nobis est latus analyticè elicere. In huiusmodi æquatione coefficiens longitudo est 12, numerus autem 58528, non est quadratum purum, sed affectum sub latere, & data longitudine 12. Inter genesim autem quadrati affirmatè affecti, & genesim puri quadrati hoc tantum interest, vt ordinata genesis quadrati affecti affirmati hoc amplius exposcat, vt latus singulare, quod primùm elicitur, ducatur in coefficientem longitudinem; hoc enim est, quod ordinata genesis huius quadrati affecti addit genesi quadrati puri; fit igitur signatio per puncta ad eum modum, quo supra notauimus, atq; etiam quot numerantur sedes quadratorum, atq; puncta, tot laterum sedes punctis superiùs positis designabuntur, atq; constituentur per figuras singulas à dex-

Præcepta ad hanc æquationẽ explicãdã.

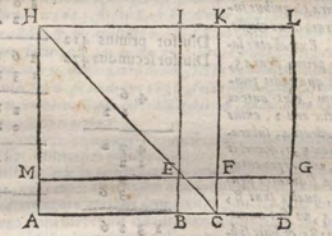
tra ad læuam procedendo. Atq; in vltima laterum ſede, quæ prima ſit à læua, ad dextràm conſtituetur coefficiens longitudo. Porrò numerus hic, qui coefficiens longitudo dicitur, ſi pluribus, quàm vna figura conſtet; reliquæ figuræ prorumpunt in anteriora verſus ſiniſtram. His autem peractis non ſecus elicienda ſunt latera ſingularia, ac factum fuit in analyſi quadrati puri. Hic enim hoc vnum amplius eſt obſeruandum, quòd coefficiens longitudo inter diuiſores recenſetur; latera verò ſingularia elicita ducuntur in coefficiẽtem longitudinem; planum autem quod inde fit, ſubijciendum, vt deſinat ſub ſede coefficientis, & auferendum eſt ab ipſo quadrato affecto. Deniq; ipſamet longitudo coefficiens, in loca ſuccedentia ordine ſubijcitur, vt etiam ſubtus diuiſores reliqui mouebuntur. Hæc autem præcepta in ſuperiori paradigmate quidem obſeruata cernis.

Facilius abſoluitur quæ ſuperius dicta ſunt. Superior methodus facili negotio demonſtrari poteſt. Sit enim æquatio 1Q + 12R = 864. Methodus præcipit, vt reperiamus latus quadratum ex primo numero; nimirum ad primum punctum, ſcilicet ex 8, cuius latus quadratum eſt 2, huius quadratum eſt 4, quo ſubſcripto vt vides, debemus ducere 12, coefficientem longitudinem in 2, primum ſingulare latus, vt fiat 24; at verò 4, in eo ſitu ſignificat 400, & 24, ſignificat 240; itaut dum colligimus in vnam ſummam 4, & 24, vt fiat 64, intelligatur fieri 640; hoc autem ſubtracto ex 864, relinquitur 224.

1	2	R	2 4
8	6 4	Q	4 16
4			
2	4		
6	4		
2	2 4		
	1 2		
2	2 4		
	4		
	5 2		
1	6		
	1 6		
	4 8		
2	2 4		

Hoc

Hoc autem cernere licet in adiuncto ſchemate, nam quadratum ex 2, hoc eſt ex 20, eſt 400, MEIH, rectangulum ſub 2, hoc eſt ſub 20, nimirum FK, & 12, coefficiente longitudine, ſcilicet CD, ſeu FG, eſt 240, KFGL; Itaq; dum ex toto HD, comparationis homogeneo 864, auferimus HE, & KG, remanebit MB, EK, EC, FD, nempe 224. Vt habeatur autem BC (hucuſq; enim habuimus AB) & quod quæritur eſt AC; ſi nos quod remanebat 224, ſcilicet AB, EK, EC, FD, applicemus ad longitudinem conflatam ex AB, ſeu ME, & EI, ſeu FK, hoc eſt ex dupla AB, *Superioris generalis methodi demonſtratio.*



nempe ex duplo primi lateris, & CD, coefficiente proſiliet in quotiente EB, ſeu BC, (eſt enim EC, quadratum, ſi quidem AK, quadratum eſt, 2) proſiliet inquam, ſi quotiens *24. ſecũdi.* tali cautela eliciatur, vt ſi quotiens ducatur in duplum illud AB, producat planum, quo ſubtracto ex illo, diuiſo, & ex reſiduo ſubtracto quadrato eiuſdem quotientis, vna cum plano facto ex quotiente, & coefficiente CD, nihil remaneat. Vel breuiùs, vt ex applicatione remaneat aliquid, illudq; ſi quadratum ipſius quotientis. Vt in hoc caſu ſi 224, applicemus ad 52, fiet quotiens 5, ſed ſupereſt

14,

14, tantùm, qui non est quadratum ipsius 25, at si quotiens fuerit 4, superest 16, quadratum eiusdem 4.

S C H O L I O N.

Breuiori methodo, quæ dicta sunt explicantur.

Facta per puncta designatione figurarum iuxta quadratæ radicis exigentiam, poterit etiam hunc in modum analysis institui. Quoniam in superiori exemplo tria sunt puncta, tres etiam erũt figuræ, ex quibus integrum latus constabit. Extrahatur latus primæ figuræ 5, sub qua cadit punctum, eius autem radix erit 2, cuius quadrato 4, subtracto ex 5, remanebit 1, cui apponantur duæ sequentes figuræ, quales sunt 8, & 5, vt fiat numerus 185, & huic subijciatur numer⁹ 24, ita tamen, vt 2, cadat sub 8, & 4, sub 5, numerus inquam 24, productus ex 2, prima figura in 12, numerum radicum, & remanebit 161, cui apponatur 2, figura sequens in numero, &c. vt fiat

```
1Q + 12R = 2 3 6
           5 8 5 2 8
           .   .   .
           1 8 5
             2 4
           -------
Diuisor primus 412       1 6 1 2
Diuisor secundus 472     1 3 2 6
                         -------
     4 6                 2 8 6 8
       1 2               2 8 3 2
     -----               -------
     4 7 2                   3 6
     1 2                     3 6
       9                 -------
     3 6                     0 0
   -------
   1 3 2 6
     4 6
       6
   -------
   2 7 6
     7 2
   -------
   2 8 3 2
     3 6
   -------
   2 8 6 8
```

1612.

1612. *Ad habendam secundam figuram, sumatur 4, duplum primæ figuræ, cui apponatur 12, numerus radicum, vt fiat numerus 412, & per hunc diuidere oportet 16128, diuisione instituta fiet quotiens 3, vt subtrahi possint ea, quæ sunt subtrahenda, erit igitur 3, secunda figura. Modo sumatur 4, duplum primæ figuræ 2, in hunc autem numerum ducatur 3, secunda figura, vt fiat 12, cui addi debet 9, quadratum secundæ figuræ. Sed debet fieri additio, vt vides. Mox addatur 36, productum ex 12, numero radicum in 3, secundam figuram, & fiet 1326, facta subtractione vt vides à 58527, remanebit numerus 2868. Ad inuestigandam tertiam figuram sumatur duplum numeri 23, se habentis veluti prima figuræ, & est 46, huic addatur 12, numerus radicum, ita vt 1, sit sub 8, & fiet diuisor 472, per quem diuidatur 2868, & fiet quotiens 6, qui ductus in 46, duplum primæ figuræ, facit 276, cui addito 72, numero producto ex secunda figura in 12, numerum radicum, facta tamen additione, vt 7, cadat sub 6, fit numerus 2832, facta subtractione, remanebit 36, numerus à quo subtrahi debet 36, quadratum ex 6, tertia figura, vt remaneat 0.*

Quamobrem æquationis propositæ in numero absoluto tali fiat ordine per puncta figurarum signatio. Notentur omnes figuræ in imparibus locis initio facto à dextris ea lege, vt semper alternatim vna intermittatur inter designandum figura; deinde super notas punctis designatis, numerus ponatur, cuius quadratum subtractum ab ipso numero absoluto numerum relinquat, æqualem numero facto ex multiplicatione numeri radicum in numerum inuentum. *Explicatur præcepta superius tradita.*

Sit æquatio 1 Q ✠ 10 R ⚌ 75. In numero 75, fiat signatio per puncta, vt dictum est, & vnica erit figura notanda, vt patet, nempe 5: deinde reperiatur numerus illius conditionis, vt supra. Numerus quæsitus esto 5, ponatur supra 5, secũdam figuram numeri 75, eius quadratum 25, subtrahatur ex 75, & re-

	5
1 Q ✠ 10 R ⚌	75
	25
	50
	50
	00

mane-

manebunt 50: ducatur numerus 5, in 10, numerum radicum, & productus numerus 50, subtrahatur à 50, nihil remanebit; proinde concludendum erit 5, esse 1 R pretium.

Non dissimili modo si foret equatio 1 Q ✠ 12 R ⊐ 160. — 8

1Q✠12R⊐160

64

96
96

00

Proponitur altera æquatio explicanda. Si verò proponeretur 1 Q ✠ 12 R ⊐ 405, procedendum quoq; vt supra dicebamus; notatis enim figuris numeri 405, vt superiùs fuit explicatum, deinde supra primam figuram 4, ponatur prima lateris figura, quam esse dicemus 1, non enim potest esse 2; siquidem quadratum eius 4, subtractum ex 4, relinqueret o, & hinc deinde non potest fieri subtractio, vt opus est, erit itaq; 1, eius quadratum, subtrahatur ex 4, residuum erit 3, scribatur sub 4, & apponatur ei secunda figura superior o, itaut fiat numerus 30, ab hoc subtrahatur productum ex 12, numero radicum in 1, primam figuram, & residuum erit 18, cui apponatur superior figura 5. postrema in numero 405, vt fiat numerus 185 hic diuidendus est, vt quotiens exhibeat secundam figuram.

15
1Q✠12R⊐405

30
12

2
12 — 185
10
32 Diuisor.

85
60

25
25

00

Diuisor qua arte indagetur. Diuisor autem sic inuestigatur, duplicetur prima figura 1, & duplo 2, addatur 12, numerus radicum (quod fieri debet sic, vt numerum 2, numerus 12, vnica nota antecedat versus dextram, itaut 1, cadat sub 2,) quo facto

facto prouenit numerus 32, & per hunc diuidatur numerus 185, & fiet quotiens 5, & ponatur supra 5, postremam notam numeri 405, postea verò duplicetur 1, prima figura, cuius duplum 2, ducatur in 5, secundam figuram inuentam, & fiet productum 10, quo subtracto à 185, ordine contrario, incipiendo nimirum à leua versus dextram, & remanebit numerus 85, à quo subtrahatur numerus 60, & productus ex 5, secunda figura in 12, numerum radicum, fiet residuum 25, à quo si subtrahatur 25, quadratum secundæ figuræ nihil remanebit, ergo 1 R, pretium dicemus esse 15.

Placet aliud exemplum afferre, in quo quadratum affirmatè afficitur adiunctione plani sub latere, & data coefficiente longitudine.

Paradigma aliud.

Coefficiens longitudo.		1 0		Sublateralis.
		.	. .	Tot puncta lateralia, quot quadratica.
	1 1	0 8	6 4	
	.	R. .	R.	Puncta quadratica.
	Q I	Q II	Q III	
Plana ablatitia	9			Quadratum lateris primi.
		3 0		Planum à latere primo in coefficientem.
Summa planorum ablatitiorum.	9	3 0		
Reliquum resoluendi quadrati affecti.	1	7 8	8	

o o o

R 3 2 8

Q 1 0 2 4 : 6 4

Tot numeralia circuli, quot puncta quadratica, lateraue singularia.

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior { Coefficiens longitudo.		1	0	
Reliquum resoluendi quadrati affecti.	1	7 8	6 4	
Diuisorũ pars inferior. { Duplum lateris primi.		6		
Summa diuisorum.		6 1	0	
Plana ablatitia	1	2		A latere secundo in duplum primi.
		4		Quadratum lateris secundi.
		2	0	A latere secundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda.	1	2 6	0	
Reliquum resoluendi affecti quadrati.		5 2	6 4	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius seu primi, & fit.

III. *Eductio lateris singularis tertij tanquam secundi.*

Coefficiens longitudo.		1 0	Sublateralis.
Reliquum resoluendi quadrati,	5 2	6 4	
Duplum lateris primi.	6	4	
Summa diuisorum	6	5 0	
Plana ablatitia	5 1	2	A latere secundo in duplum primi.
		6 4	Quadratum lateris secundi.
		8 0	A latere secundo in coefficientem.
Summa planorum auferenda æqualis reliquo resoluendi quadrati.	5 2	6 4	

Con-

Contingit non rarò figuras non esse tot, quot puncta; sint vno amplius, fit proinde tunc Deuolutio vt si foret æquatio huiusmodi $1Q + 436R = 11040$. Deuolutio fieri debet, nempe parui facto primo puncto ad reliqua procedendum est, quemadmodum in adiuncto Paradigmate. *Quando figura non sunt tot quot puncta.*

Paradigma dum planum affectionis maius est quadrato.

I. Eductio lateris primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens longitudo	4	3 6		Sublateralis.
		4	. .	Tot puncta lateralia quot quadratica.
	1	1 0	4 0	
	.	.	R.	Puncta quadratica.
	Q I	Q II	Q III	

Quoniam autem 4, maior est vnitate, ideo fit deuolutio.

II. Eductio lateris primi post deuolutionem.

Coefficiens longitudo	4 3	6	
		. .	
	1 1 0	4 0	
	.	R.	Puncta quadratica.
	Q I	Q I	
Plana auferenda	8 7	2	A latere primo in coefficientem longitudinem.
		4	Quadratum lateris primi.
Summa planorum ablatitiorum.	9 1	2	
Reliquum resoluendi affectionis quadrati.	3 9	2 0	

0	0	Tot numerales circuli, quot puncta quadratica, lateraue singularia.
R 2	4	
Q 4:	16	

Diuiforum pars inferior. { Coefficiens longitudo.	4	3 6	
Reliquum refoluendi afficientis Quadrati.	1 9	2 0	
Diuiforum pars inferior. { Duplum lateris primi.		4	
Summa diuiforum.	4	7 6	
Plana ablatitia	1 7	4 4	A latere fecundo in coefficientem.
	1	6	A latere fecundo in duplum primi.
		1 6	Quadratum lateris fecundi.
Summa planorum auferenda æqualis reliquo refoluendi afficientis quadrati.	1 9	2 0	

Demonftrari poteft, vt fupra.

S C H O L I O N.

Nota quid maximè obferuãdum.

ADuertendum eft itaq; aliquando contingere, ex vnica figura quæfitam radicem conftare, etfi numeri duæ notæ punctis defignentur; vt fi fit æquatio 1 Q + 1 6 R = 2 2 5. *Latus vnica conftabit figura.*

Si namq; primam figuram diceremus effe 1, *eius quadrato fubtracto ex* 2, *remaneret* 1, *non poffet autem à reliquo numero fieri fubtractio, vt opus eft.*

Sit æquatio 1 Q + 16 R = 225. Dicemus faciendam esse deuolutionem, de qua sermo quoq; redibit. Propterea pauci facto primo puncto, per deuolutionem ad secundum proceditur; Dicamus ergo latus esse 9, eius quadratum 81, si subtrahatur à 225, vt vides, remanet numerus 144, à quo subtracto 144, producto ex 9, latere in 16, numerum radicum, nihil remanet, erit ob id 1 R, pretium 9.

	9	
1 Q + 16 R =	2 2 5	1 6
	. .	9
	8 1	———
	———	1 4 4
	1 4 4	
	1 4 4	
	———	
	0 0 0	

Insuper illud etiam animaduertendum est methodos istas recentiorum, quæ nimirum generales sunt, non esse generales adeo, vt quacunq; proposita æquatione, reperiatur radicis valor, quocunq; modo numerus contingat, siue nimirum radicis pretium sit numerus integer, vel fractus, rationalis, vel irrationalis, & numeri quibus æquatio explicatur sint integri, vel fracti, symmetri, vel asymmetri; pro his enim adhuc ars latet; aduersus autem asymmetriam, remedium aliquod extat, vt ex aduersus fractionis vitium, quemadmodum, tractantes de æquationum emendatione demonstrabimus. *Aduertendum circa recentiorũ methodum.*

COROLLARIVM.

Ex superiùs dictis colligitur per hanc primam æquationem explicatam, nil aliud fieri, quàm inuestigare numerum, ad cuius quadratum si addatur productum ex quæsito numero in datum quempiam numerum, summa sit æqualis cuidam proposito numero, vt si proponatur quæstio. *Quid in hac prima æquatione composita fiat.*

Numerum reperire, cuius quadratum, vna cum producto ex quæsito numero 10, æqualis sit numero 504.

Quæsitus numerus esto 1R, cuius quadratum est 1Q, cui addito 10R, producto ex dato numero 10, in numerum ignotum fit summa 1 Q + 10 R, & erit æquatio 1 Q + 10 R = 504. Cuius latus arte superiùs explicata reperies esse 18.

SCHO-

SCHOLION.

Modus reuocandi c̄positā æquationē hanc ad simplicem.

Non erit abs re cum Bombellio aduertere modum reuocandi æquationem inter Q + R, & N, ad puram æquationem inter R, & N, fit autem hoc modo.

Sumatur latus quadrati, & ei addatur dimidium numeri radicum; & hoc quadratum erit æquale quadrato plus numero absoluto, plus quadrato dimidij numeri radicum.

Exempli gratia sit æquatio 1 Q + 10 R = 96, latus quadrati est 1 R, huic addatur 5, dimidium numeri radicum, & fit 1 R + 5, cuius quadratum est 1 Q + 10 R + 25, sed hoc esse debebat 1 Q + 10 R; proinde addantur 25, vtrobiq; & fit æquatio 1 Q + 10 R + 25 = 121 ergo & eorum latera æqualia erunt 1 R + 5 = 11, vtrinq; ablatis 5, remanebit æquatio 1 R = 6, & 6, erit 1 R valor.

Sit æquatio 1 Q + 8 R = 240, latus quadrati est 1 R, huic addito 4, dimidio numeri radicum fit 1 R + 4, cuius quadratum est 1 Q + 8 R + 16. Sed esse debebat 1 Q + 8 R, vtrobiq; addantur 16, fiet 1 Q + 8 R + 16 = 256: ergo, & horum latera æqualia erunt, scilicet 1 R + 4 = 16, vtrinq; ablatis 4, remanet 1 R = 12, & 12, est 1 R pretium.

Sit æquatio 1 Q + 4 R = 725, latus quadrati est 1 R, huic addito 2, dimidio numeri radicum fit 1 R + 2, cuius quadratum est 1 Q + 4 R + 4. Sed esse debebat 1 Q + 4 R; proinde vtrinq; additis 4, fiat æquatio 1 Q + 4 R + 4 = 729: ergo, & latera sunt æqualia 1 R + 2 = 27, vtrinq; ablatis 2, remanebit æquatio 1 R = 25, & 25 est 1 R pretium.

Cæterum huius æquationis reductio, ad puram fieri potest secundum artem Vietæ tractatu de emendatione æquationũ Cap. 1. qua de re latè in Algebra speciosa loquemur.

Va-

Variæ, ac diuersæ Methodi explicandi æquationem inter Q — R, & N.

Methodus Diophanti.

PRoducto ex numero quadratorum in numerum absolutum, addatur quadratum dimidij numeri radicum; & ab aggregato sumatur latus, cui si dimidium numeri radicum addatur, & summa diuidatur per numerum quadratorum: quotiens repræsentabit 1 R pretium, seu lateris quæsiti valorem. *Diophātea methodi explicatio.*

EXEMPLVM.

4 Q — 16 R = 660.

4 *Numerus Quadratorum* } *Multiplica.*
660 *Numerus absolutus* }

2640 *Productum* } *Adde.*
64 *Quadratum dimidij numeri Radicum* }

2704 *Aggregatum.*

52 *Aggregati latus* } *Adde.*
8 *Dimidium numeri Radicum* }

60 *Summa.*
4 *Diuisor.*

15 *Valor lateris, seu 1 R pretium.*

Et hæc præcepta intelligi possunt, etiam de numeris surdis, seu irrationalibus, quando nimirum occurrunt in extractione radicis. Sit æquatio *Quādo occurrūt numeri irrationales.*

4 Q — 12 R = 600.

4	*Numerus Quadratorum*	} *Multiplica.*
600	*Numerus absolutus*	
2400	*Productum*	} *Adde.*
36	*Quadratum dimidij numeri Radicum*	
2436	*Aggregatum.*	
℞ 2436	*Aggregati latus*	} *Adde.*
6	*Dimidium numeri Radicum*	
℞ 2436 ✠ 6	*Summa.*	
4	*Diuisor.*	
℞ 152 ✠ 1	*Radicis valor.*	

Eodem modo procedendum in omnibus æquationibus, in quibus numeri irrationales occurrunt.

Methodus Communis Antiquorum.

Huius methodi præcepta. QVadrato dimidij numeri radicum addatur numerus absolutus, nam si aggregati lateri addatur dimidium numeri radicum, summa lateris valorem exhibebit.

EXEMPLVM.

1 Q — 4 R = 165.

2	*Dimidium numeri Radicum.*	
4	*Eius quadratum*	} *Adde.*
165	*Numerus absolutus*	
169	*Aggregatum.*	
13	*Aggregati latus*	} *Adde.*
2	*Numeri radicum dimidium*	
15	*Lateris valor, seu 1 R pretium.*	

EXEM-

EXEMPLVM.

1 $\mathcal{Q}$ — 3 R = 150.

$1\frac{1}{2}$	*Dimidium numeri Radicum.*
$2\frac{1}{4}$	*Eius quadratum* } *Adde.*
150	*Numerus absolutus* }
$152\frac{1}{4}$	*Aggregatum.*
℞ $152\frac{1}{4}$	*Aggregati latus* } *Adde.*
$1\frac{1}{2}$	*Dimidium numeri Radicum* }
℞ $152\frac{1}{4}$ + $1\frac{1}{2}$	*Lateris valor, seu 1 R pretium.*

Nec dissimili modo in alijs casibus procedendum.

SCHOLION.

Si verò comparationis homogeneum foret aliquod Binomium, vel residuum, vt si sit.

EXEMPLVM.

4 $\mathcal{Q}$ — 24 R = 2512 — ℞ 361728.

4	*Numerus quadratorum* } *Multiplica.*
2512 — ℞ 361728	*Numerus absolutus* }
10048 — ℞ 2170368	*Productum* } *Adde.*
144	*Quadratū dimidij numeri radicū* }
10192 — ℞ 2170368	*Aggregatum.*
℞ 10048 — 12	*Aggregati latus* } *Adde.*
12	*Dimidium numeri radicum* }
℞ 10048	*Summa.*
4	*Diuisor numerus quadratorum.*
℞ 628	*Quotiens, & 1 R valor.*

Iuxta methodum communem antiquorum.

EXEMPLVM.

$1\,Q - 6\,R = 628 - \text{℞}\,22608.$

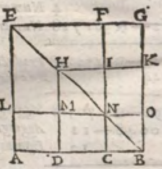
3	*Dimidium numeri Radicum.*	
9	*Eius quadratum*	} *Adde.*
628 — ℞ 22608	*Comparationis homogeneum*	
637 — ℞ 22608	*Aggregatum.*	
℞ 628 — 3	*Aggregati latus*	} *Adde.*
3	*Dimidium numeri Radicum*	
℞ 628	*Lateris valor.*	

Et sic in omnibus casibus consimilibus procedendum erit.

DEMONSTRATIO.

Demonstratio superioris methodi.

ESto AB, pretium lateris quæsiti & sit AC, numerus radicum (erit enim minor, quàm AB, cum æquatio sit inter Q—R, & N.) Describatur supra AB, quadratum ABGE, secetur AC, in D, bifariam; agatur diameter BE, ducaturq; recta DH, parallela ipsi AE, secans BE, in puncto H, per quod agatur HK, parallela ipsi BG, secans BE, in N, & HK in I; deinde per punctum N, ducatur OL, parallela ipsi AB, secās DH, in M, erunt [a] DK, MI, CO, quadrata. Cum autem rectangulum AF, comprehendatur sub AE, radicis pretio, seu latere quæsito (sunt enim AE, AB, latera æqualia) & AC, radicum numero, erit AF, radicum omnium pretium. Sed quia quadratum ABGE, hoc



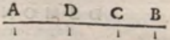
[a] *2 Corol. prop. 4. lib. 2.*

hoc eſt, quadratum ignotum, minus radicum pretio, ęquale eſt numero cuidam abſoluto (eſt enim æquatio 1 Q — R ⊐ N,) & quadratum idem ABGE, æquale eſt rectangulis AF, CG, ſeu quadratum ipſum minus rectangulo AF, radicum pretio æquale eſt rectangulo CG, erit rectangulum CG, numero abſoluto, ſeu comparationis homogeneo æquale. Cum autem AM, DN, ſint [b] ęqualia quemadmodum ſunt [d] DN, NK, erunt etiam æqualia duo AM, NK; addatur commune DO, fiet rectangulum AO, ęquale gnomoni MBI, ergo, & eidem gnomoni æqualis erit numerus abſolutus; cum CG, numerus abſolutus, & AO, cui æquatur gnomon MBI, ſint æqualia (nam AN, NG, ſunt æqualia, quare addito, communi CO, erunt æqualia AO, CG,) ſi verò gnomon, ſeu numerus abſolutus, addatur MI, quadrato dimidij numeri radicum, nempe ſegmenti DC, notum erit quadratum DK; atq; adeo latus eius DB, huic verò addito AD, dimidio numeri radicum fit notum AB, latus quæſitum, ſeu radicis valor; Rectè ergo regula iubet, quadrato dimidij numeri radicum, vt addatur, numerus abſolutus, &c.

b 36. primi.
d 43. eiuſdem.

Demõſtratio alia eiuſdem methodi.

Aliter ijſdem poſitis. Quoniam AC, eſt numerus radicum, & AB, radix quæſita, erit rectangulum BAC, eſtimatio omnium radicum (vt ſæpè dictum eſt) at verò quadratum totius AB, minùs rectangulo BAC, omnium radicum pretio, æquale ponitur cuidam numero abſoluto (eſt enim æquatio 1 Q — R ⊐ N,) ergo rectangulum ABC, erit ęquale numero abſoluto, ſiquidem quadratum, ex AB, minus rectangulo BAC, æquale eſt rectangulo ABC; ſed quia AC, ſecta eſt bifariam in D, & in directum ei addita CB, rectangulum ABC, vna cum quadrato DC, dimidij numeri radicum ęquale erit [a] quadrato ex DB; itaut rectangulo ABC, nempe numero abſoluto addito ad quadratum dimidij numeri radicum fiat notum quadratum ex DB; at huic ſi addatur AD, dimidium numeri radicum, fit nota AB, radix



a 6. ſecũdi.

dix quæsita: ergo si ad quadratum dimidij numeri radicum addatur numerus absolutus fit quadratum ad cuius latus, addito dimidio numeri radicum, habetur radicis pretium, quod oportebat ostendere.

Methodus Petri Nonij.

Huius methodi præcepta.

QVadrato numeri radicum addatur quadruplum numeri absoluti, & aggregati lateri addatur numerus radicum; summæ enim dimidium quæsiti lateris valorem repræsentabit.

EXEMPLVM.

1 Q — 4 R = 165.

1 6 *Quadratum numeri Radicum.* } *Adde.*
6 6 0 *Quadruplum numeri absoluti.* }

6 7 6 *Aggregatum.*
2 6 *Aggregati latus* } *Adde.*
4 *Radicum numerus* }

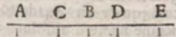
3 0 *Summa.*
1 5 *Dimidium summæ, & lateris valor.*

Et eadem præcepta applicari possunt numeris irrationalibus.

DEMONSTRATIO.

Superioris methodi demonstratio.

ESto AB, latus ignotum, & AC, radicum numerus; atque AB, intelligatur producta vsque ad E, ita tamen, vt BD, sit æqualis ipsi CB, & DE, ipsi AC, quoniam AB, secta est vtcunque in C, erit [a] quadratum ex AB, descriptum æquale rectangulis BAC, ABC, seu quadratum idem, minus rectangu-



a 2. secundi.

lo

lo BAC, æquale erit rectangulo ABC, sed rectangulum BAC, quod comprehenditur sub AB, radicis pretio, & AC, radicum numero, est radicum omnium pretium (numerus enim radicum ductus in radicis pretium facit omnium radicum valorem) & quia quadratum ex AB minus rectangulo BAC, radicum pretio ponitur æquale cuidam numero absoluto noto, cum sit Q — R ⊏ N: ergo rectangulum ABC, erit numero absoluto æquale; si quidem quadratum ipsius AB, minus rectangulo BAC, æquale est rectangulo ABC; cum autem adiecta sit BD, æqualis ipsi CB, erit [b] quadratum ex AD, descriptum æquale quadruplo rectangulo ABC, vna cum quadrato segmenti AC, numeri radicum; itaut ad quadratum ipsius AC, numeri radicum, addito quadruplo numeri absoluti, nempe rectanguli ABC, fiat quadratum notum, cuius latus est AD; at huic si addatur segmentum DE; quod fecimus æquale noto segmento AC, nempe numero radicum, fiet nota tota recta AE, cuius dimidium est AB, latus quæsitum. Rectè igitur regula iubet, vt ad quadratum numeri radicum addatur numeri absoluti quadruplum, &c. Quod oportebat ostendere, &c. b 8. secũdi.

Methodus peculiaris Vietæ.

SVmatur numerus, cuius quadratum æquale sit numero absoluto, & ille statuatur medium latus ex tribus proportionalibus; extremorum differentia sit radicum numerus, his positis reperiantur extrema latera, maius enim ex ipsis radicis quæsitæ pretium repræsentabit. *Peculiaris methodus explicatur.*

Sit æquatio vt supra.

1 Q — 4 R ⊏ 165.

Latus quadratum numeri 165, est ℞ 165, & hoc sit medium ex tribus proportionalibus lateribus, & extremorum differentia sit 4, numerus radicum. Quoniam autem extrema latera, sunt quemadmodum latera rectanguli, & medij quadratum est ipsum rectangulum sub lateribus; *Exemplo declarãtur præcepta iã tradita.*

debe-

debemus dato rectangulo sub lateribus, & differentia laterum reperire latera; sed quadratum differentiæ laterum additum quadruplo rectangulo sub lateribus æquale est quadrato aggregati laterum: vt ostendimus in nostrorum Problematum resolutionibus; proinde sit laterum aggregatum 1 R; ergo erit æquatio 1 Q ⊐ 676: ergo 1 R ⊐ 26, erit ergo laterum aggregatum 26, data autem differentia, & aggregato laterum reperiuntur latera, facili negotio, vt ibidem ostendimus. Nempe ad dimidium aggregati addatur dimidium differentiæ, & erit radicis quæsitæ valor 15, vt supra.

DEMONSTRATIO.

Demõstratio in speciosa Algebram differtur.

QVoniam methodus hæc repetenda est in Algebra speciosa; proinde eo recurrendum est, vt eius demonstratio habeatur.

Methodus Steuini.

Methodus Steuini traditur.

SVmantur numeri quicunq; qui quidem opportuni credantur;& in his iterum,atq; iterum periculum fiat, donec quæsitus numerus reperiatur.

EXEMPLVM.

1 Q — 4 R ⊐ 165.

Exemplo declaratur superior doctrina.

Fingo nūmerum quæsitum esse exempli gratia 10, ergo 4 R, valebunt 40, & 1 Q, valebit 100, ablatis 4, à 100, remanebit numerus 60; & erit æquatio 60 ⊐ 165, quod est falsum, vt patet, & ita conclusum cum sit latus, maius esse,quam 10, in reliquis maioribus numeris procedēdum est, donec numerus quæsitus occurrat, nempe 15.

Ne-

Methodus Coigneti.

REperiantur partes aliquotæ numeri absoluti, & in his iterum atq; iterum periculum fiat, donec occurrat pars quæsita Problemati satisfaciens. *Declaratur methodus Coigneti.*

EXEMPLVM.

$$1\,Q - 4\,R = 165.$$

Partes aliquotæ sunt 1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165, procedatur autem vt supra, &c.

Methodus Girardi.

SVmantur partes aliquotæ numeri absoluti, & sic ipsæ ordinentur, ac disponantur, vt binæ contra se positæ per multiplicationem efficiāt numerum ipsum absolutum; postea diuidatur vtraq; pars æquationis per 1 R, vt æquatio deprimatur ad proximum inferiorem gradum, cuius æquationis sensus erit. Si numerus radicum addatur vni ex partibus aliquotis numeri absoluti, constituetur valor radicis quæsitæ. Ea verò pars eligi debet aliquota, cui si addatur radicum numerus, fiat altera coefficiēs correlata. *Girardi methodus explicatur.*

EXEMPLVM.

$$1\,Q = 4\,R + 165.$$

Hæc æquatio ad hanc reuocabitur $1\,R = 4 + \frac{156}{1\,R}$ *Exemplum ad superiorem methodum illustrandam.*

si nimirum omnia diuidantur per 1 R, ex partibus aliquotis autem eligatur illa, cui additis 4, fiat altera coefficiens correlata, & reperietur eam esse 11, nam additis 4, fit summa 15, nempe altera pars coefficiens correlata; proinde 15, dicebamus esse 1R, pretium.

1	—	165
3	—	55
5	—	33
11	—	15

Me-

Methodus generalis Vietæ.

Generalis methodus Vietæa traditur.

E Dato in numeris quadrato affecto multa plani sub latere, & data coefficiente longitudine latus analyticè elicere.

Proponatur 1 Q — 8 R = 58548. Quæritur quanta sit magnitudo 1R; vt igitur latus eruatur ex 58548, negatè affecto, idem obseruandus erit processus, qui in analysi quadrati affirmatè affecti; hoc vno addito, vt in diuisionibus attendatur ipsius coefficientis, & regularium in puro quadrato diuisorũ differentia; sicut in affecto quadrato affirmatè attendebatur summa: excessus autem est penes diuisores inferiores, vt ex adiuncto Paradigmate constabit.

Cum autem elicita singularia latera ducentur in coefficientem; planum, quod inde fit, desinens sub sede coefficientis, quod alioquin subtrahendum erat, addetur proposito negatè affecto quadrato.

Paradigma analyseos Quadrati affecti sub latere negatè.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.		8		Sublateralis.
		·	· ·	Tot lateralia puncta quot quadratica. o o o R 2 4 6 Q 5 76 36. Tot numerales circuli quot puncta quadratica, lateraue singularia.
Quadratum affectum resoluendum.	5	8 5	4 8	
		·	·	
	Q I	Q II	Q III	
Plana Ablatitium	4			Quadratum lateris primi.
Plana Addititium		1 6		A latere primo in Coefficientem.
	3	8 4		
	2	0 1	4 8	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorũ pars superior. Coefficiens longitudo.			8	
Reliquum resoluendi quadrati.	2	0 1	4 8	
Diuisorũ pars inferior. Duplum lateris primi.		4		
Excessus diuisorum inferiorum.		1 9	2	
Plana ablatitia	1	6		A latere secundo in duplum primi.
		1 6		Quadratum lateris secundi.
Excessus planorum.		2 5	4	
Planum addititium.		3	2	A latere secundo in coefficientem.
Reliquũ resoluendi quadrati		2 8	6 8	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius, seu primi, & fit.

III. Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.

Diuisorum pars superior. Coefficiens longitudo.		8	
Reliquum resoluendi quadrati.	2 8	6 8	
Diuisorum pars inferior. Duplum lateris primi.	4	8	
Excessus diuisorum.	4	7 2	
	2 8	8	A latere secundo in duplum primi.
		1 6	Quadratum lateris secundi.
	2 9	1 6	
Planum ablatitium.		4 8	A latere secundo in coefficientem.
Summa planorum ablatitiorum æqualis reliquo resoluendo quadrato.	2 8	6 8	

Breuiori modo explicatur aquatio.

Hæc eadem æquatio breuiùs explicari poteſt methodo ſuperiùs inſinuata. Signatione facta per puncta iuxta leges numeri quadrati, &c. extrahatur latus quadratum numeri, vſq; ad primum punctum à ſiniſtris, cumq; numerus

```
          2   4   6
1Q—8R = 5 8 5 4 8      4 0 0
        .   .   .          8
        4              -------
        -------        5 9 2  Diuiſor primus.
        1 8 5
          1 6          4 8 0
        -------            8
        2 0 1 4        -------
            3 2        4 7 2  Diuiſor ſecundus.
        -------
        2 0 4 6
        1 6
        -------
          4 4 6
            6
        -------
          2 8 6 8
              4 8
        -------
          2 9 1 6
          2 8 8
        -------
              3 6
              3 6
        -------
              0 0
```

modo occurrens, ad primum illud punctum ſit 5, eius latus quadratum ſit 2, ſcribatur 2, numerus ſupra 5, eius autem quadratum 4, poſitum ſub 5, auferatur ex 5, remanet 1, cui

cui annectantur duæ sequentes figuræ 8, & 5, vt fiat 185, scribatur sub 185, numerus 16, factus ex multiplicatione 8, numeri radicum per 2, primum latus, fiet summa 201, cui annectatur sequens figura 4, vt fiat 2014.

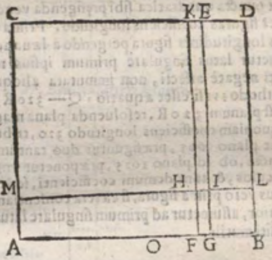
Ad indagandam secundam figuram, siue secundum latus singulare, parandus est diuisor hoc modo. Sumatur 4, duplum primi lateris, cui intelligantur annexæ duæ cifræ 00, subtrahatur 8, numerus radicum, vt remaneat 392, per quem diuiso 2014, fiat quotiens 4, & secundum latus, quod ductum in 8, numerum radicum, producit numerum 32, qui additus numero 2014, facit 2046, sub hoc numero scribatur 16, productum à 4, latere secundo in 4, duplum lateris primi; scribi tamen debet, vt in supraposito diagrammate vides; & remanebit 446, subscribatur 16, quadratum lateris secundi, vt vides, facta subtractione, remanet numerus 28, cui intelligantur annexæ, sequentes duæ figuræ 6, & 8, vt fiat numerus 2868, sub hoc autem scribatur 48, productum à 6, tertia figura in 8, numerum radicum; & facta additione habetur 2916. Paretur modo diuisor ad indagandam tertiam figuram, quemadmodum vides; nempe intelligatur addi 0, duplo primi lateris 24, nempe ipsi 48, vt fiat 480, à quo subtrahi intelligatur 8, numerus radicum, vt remaneat 472, fit quotiens instituta diuisione 6, modo ducatur 6, in 48; duplum lateris primi, & fit 288, numerus, qui subductus ex 2916, ad eum tamen modum, quo factum vides, & remanebit 36; à quo subtracto 36, quadrato ipsius 6, secundæ figuræ, & remanet 0, &c. Secunda figura indagatio.

Vt autem hanc methodum Geometricè demonstremus; placet facilitatis gratia, huius æquationis analysin instituere; nempè sit 1 Q — 8 R ⊥ 468; cuius radix duabus tantummodo figuris constat. Sumatur latus quadratum ex 4, figura notata primo puncto, & est 2, cuius quadratum est 4; Sumatur planum factum ab 8, numero radicum in 2, primam figuram, & est 16; cum autem 2, prima figura significet 20, (est enim numerus modo denariorum) erit igitur 16, significans 160, quamobrem non immeritò scribitur in eo situ, vt vides; additus autem 160, ad 468, facit 628, à quo subtracto 400, quadrato ex 20, remanet 228; vel quod idem est subtracto 160, ex 400, remanet 240, quo subducto ex 468, remanet 228, modo ad habendam secũdam figuram, sumatur duplum primæ 2, nempe 4, & scribatur in eo situ, vt significet 40, quoniam 2, dicebat 20, & ideo non casu ponitur sub penultima figura, vt in Paradigmate vides; modo ex 40, dupla primi lateris 20, auferatur 8, numerus radicum, & remanet 32, per quem oportet diuidere 228, fitq; quotiens 6, ex 228, subtrahamus planum à latere secundo, in duplum primi, vna cum quadrato lateris secundi 6, nempe 36, & nihil remanet.

Coefficiens		8
		. .
1Q — 8R ⊐	4	6 8
	4	
	1	6
	2	4 0
	2	2 8
		8
		.
	2	2 8
		.
		4
		3 2
	{ 2	4
		3 6
	2	7 6
		4 8
	2	2 8

Superioris methodi demonstratio. Demonstratio sic se habet. Sit radix quæsita AB, nempe 26, sitq; eius quadratum ACDB, sit autem AG, 20, & GB, sit 6, perficiatur figura, vt vides; sit autem FB, vel KD, coefficiens longitudo, itaut KB, sit planum sub coefficiente, & quæsita radice; quamobrem AK, erit homogeneum comparationis; est enim æquatio Q — R ⊐ N. Ad hoc autem si addatur KL, planum sub coefficiente, & primo late-

latere singulari, fiet planum FAC, DLHF, à quo dempto ME, quadrato ex primo latere, remanebit MF, & ID, sunt autem hæc plana eiusdem altitudinis; longitudo autem vnius est primi lateris DL, alterius est vniuersalis lateris AB, minus coefficiente longitudine FB, ac proinde est AF, si hæc duo rectangula in directum constituantur, rectangulum fiet, cuius longitudo erit DL, plus AF, altitudo verò erit secundum latus quæsitum, seu quod idem est; longitudo erit duplum ipsius DL, vel AG, minus FB, coefficiente plus GB, latere secundo quæsito; adeo vt constet ex



DL, & AO, plus OF; pono enim OG, æqualem FB, atq; adeo OF, æqualis erit GB; Itaq; rectangulum hoc cum contineatur sub DL, plus AO. plus OF, nempe sub duplo primi lateris, minus data coefficiente plus secundo latere quæsito, & ipso latere secundo quæsito GB, si planum æquale illis duobus AH, ID, applicemus ad magnitudinem æqualem duplo primi lateris, minus coefficiente longitudine, hoc est DL, plus AD, orietur secundum latus quæsitum OF, seu GB, si pro quotiente sumatur id quod satisfacit quæ-

quæstioni; nempe vt sui quadratum sit æquale ei, quod superest ex applicatione, vt methodus præcipit analyseos exigente id natura. Sæpesæpiùs autem contingit, vt coefficiens longitudo, pluribus abundet singulis figuris, quàm quadratum negatè affectum binis, puncta enim conditionaria in hac æquatione cadunt in singulis figuris. Hoc autem argumentum est planum coefficiens maius esse resoluendo affecto negatè quadrato. Huiusmodi verò quadratum Acephalum appellatur. Vt igitur sit locus diuisioni, siue vt possit diuisio institui præponetur mutilo proposito quadrato ea numeralium circulorum multitudo, vt illud tot puncta quadratica sibi præfigenda vendicet, quot simplices figuras coefficiens longitudo. Prima verò coefficientis longitudinis figura pergendo à læua ad dextram constituetur latus singulare primum ipsius resoluendi quadrati negatè affecti, non immutata alioquin explicata methodo; vt si esset æquatio 1 Q — 320 R = 1625; maius est planum 320 R, resoluenda plana magnitudine 1625; quoniam coefficiens longitudo 320, tribus constat figuris at plano 1625, præfiguntur duo tantum quadratica puncta, ob id plano 1625, præponetur vnus numeralis circulus, & tunc demum coefficienti, sedes adijcietur, ipsius verò prima figura, si cætera consentiant, vel proximè maior, assumetur ad primum singulare latus quadrati propositi mutili.

Para-

Paradigma analyseos acephali Quadrati

I. Eductio lateris primi.

Coefficiens longitudo	3	20		Sublateralis.
		·	··	0 / R 3 . 2 / Q 9 .
Quadratum resoluendum acephalum	0	16	25	
	·	R.	R.	
Plana prosthaphaeretica. Ablatitium	9			Quadratum lateris primi.
Plana prosthaphaeretica. Addititium	9	60		A latere primo in coefficientem longitudinem.
Excessus addititij.		60		
Reliquum restituti mutili quadrati.		76	25	

II. Eductio lateris secundi.

Diuisorum pars superior. Coefficiens		32	0	
			··	
Reliquum restituti resoluendi mutili quadrati.		76	25	
		·	·	
Diuisorum pars inferior. Duplum lateris primi.		6		
Excessus diuisorum inferiorum.		28		
Plana ablatitia.	2	2		A latere secundo in duplum primi.
		4		Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	1	24		
Planum addititium		64	0	A latere secundo in coefficientem longitudinem.
Excessus ablatitiorum.		60		
		16	25	

Iam duo prima latera funguntur vice vnius primi, & fit.

III. Edu-

III. *Eductio lateris singularis tertij.*

0 0 0

R: 3 2 5
Q1924: 25

Diuisorũ pars superior.	Coefficiens	3	2 0	
Reliquum resoluendi affecti quadrati.		1 6	2 5	
Diuisorũ pars inferior.	Duplum lateris primi.	6	0	
Excessus diuisorum inferiorum.		3	2 0	
Plana ablatitia		3 2	0	A latere secundo in duplum primi.
			2 5	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.		3 2	2 5	
Planum addititium		1 6	0 0	A latere secundo in coefficientem.
Excessus addititij æqualis reliquo resoluendo quadrato.		1 6	2 5	

Propositæ æquationis figuræ signẽtur, modo, & ordine superius præscripto, &c. Deinde supra notas designatas punctis ponendus est numerus, cuius quadratum sit æquale numero, qui fit ex ductu numeri positi, in numerum radicum, &c. melius res ipsa exemplis intelligetur.

EXEM-

EXEMPLVM.

$$\text{Sit æquatio } 1Q - 6R = \begin{array}{r} 9 \\ 27 \\ 54 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 00 \end{array}$$

Quæſitus numerus eſto 9: ducatur in 6, numerum radicum, & producentur 54; quibus additis ad 27, fit ſumma 81: ſi modo auferamus hanc ſummam ab 81, quadrato quæſiti numeri, & radicis, nihil remanebit: ergo 1R, pretium erit 9.

$$1Q - 8R = \begin{array}{rrr} 2 & & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 4 & & \\ \hline 0 & 2 & \\ 1 & 6 & \\ \hline 1 & 8 & 5 \\ & 4 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & \\ \hline & 2 & 5 \\ & 2 & 5 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}$$

Quãdo latus duabus figuris conſtat.

At verò ſi latus duabus figuris cõſtaret, longiorem praxim requireret. Sit æquatio 1 Q — 8 R = 425. Latus quadrati primæ figuræ ad ſiniſtram puncto notatæ eſt 2; cuius quadratum 4, ſi abs 4, auferatur, remanebit 0: ſub 4, prima figura puncto notata ſcribatur numerus 4, quem dicebamus eſſe quadratum ſubtractum, &c. prope 0, notetur 2, figura poſt 4, numeri 425; & exempli formula ſtabit hoc modo 02. huic addatur numerus productus ex ductu primæ figuræ inuẽtę 2, in numerum radicũ 8; addatur inquam eo quòd numero radicum præfigitur ſignum —: numerus itaq; addendus erit 16; nam 8, in 2, faciunt 16: factaq; additione, erit aggregatum

tum 18: apponatur ei postrema figura numeri 425, nempè 5, (dico postremam, quoniam pro prima nunc vsurpatur ea, quæ est primo loco ad sinistram) & fiet numerus 185.

Vt autem secundam figuram habeamus, duplicare debemus 2, primam figuram, cuius duplum est 4: nunc a b s 4, subtrahere debemus 8, numerum radicum; hoc tamen pacto, vt 8, figura scribatur sub 4, non ad vnguem, sed ante, ac loco vnius figuræ versus dextram, itaut cadat adamussim sub o (si hæc nota intelligatur, vt intelligi debet annexi ipsi figuræ 4) & facta subtractione fit residuum 32; & hac arte reperietur diuisor, cuius beneficio, secunda inquiritur lateris figura. Itaq; 23, erit secunda figura; numerus verò diuidendus est ille superiùs seruatus, nempè 185: factaq; diuisione, prosilit in quotiente 5, secunda figura scribenda supra 5, notam postremam numeri 425: ducatur 8, numerus radicum in 5, secundam figuram inuentam; & numerus, qui producitur nempe 14, addatur ipsi numero 185, & fiet summa 225: à qua subtrahatur productum ex 4, duplo primæ figuræ 2, in 5, secundam figuram, nempe 20; factaq; subtractione initio ducto à sinistris, vt vides, remanent 2: quibus annectatur postrema nota 5, & fiet numerus 25; à quo subtrahi debet idem 25, nempe quadratum numeri 5, secundæ figuræ: ergo 1 R pretium erit 25, &c.

Quando quadratū affectū tot binis figuris constat, quot coefficiens longitudo singulis.

Quod si negatè affectum quadratum, de cuius resolutione agitur, tot binis figuris constet, quot coefficiens longitudo singulis: aliquando eò prorumpit coefficiens; vt nisi Analysta cautè procedat, eiusq; rationem habeat, deludatur non rarò in exquirenda radice. Præstat ob id tali casu intelligere propositū negatè affectum quadratum, adauctum quadrato ipsius coefficientis longitudinis; ex eo verò sic adaucto latus eliciatur, quod erit, vel consentaneum, vel consentaneo proximè minus: vt si

$$
\begin{array}{r}
1Q - 60R = 1600 \\
3600 \\
\hline
5200
\end{array}
$$

pro-

proposita foret æquatio $1Q - 60R = 1600$, ordinatis figuris, staret æquatio hunc in modum. Quoniam quadratum autem ex 60, adiunctum numero 1600, facit 5200, & latere numeri 52, proximè maius est 8; ob id latus 8, assumetur pro primo latere quæsitæ radicis, radix enim ipsa erit 80.

COROLLARIVM.

EX hactenus explicatis, colligitur per hanc æquationem nil aliud quæri, quàm numerum, à cuius quadrato, si subtrahatur productum ex numero quæsito in datum aliquem numerum, remaneat alter, statutus itidem numerus: vt si proponatur,

Numerum reperire, à cuius quadrato, si auferatur numerus, qui producitur ex multiplicatione 8, in quæsitum numerum, remaneat numerus 425.

Quæsitus numerus esto 1R, cuius quadratum erit 1Q, à quo detractis 8R, fit residuum $1Q - 8R$, & erit æquatio $1Q - 8R = 425$.

SCHOLION.

PRætereundum non est, quod aduertit Bombellus; nimirum hanc æquationem inter Q — R, & N, ad simplicem æquationem reduci posse inter R, & N, hoc modo. Sumatur radix ipsius quadrati, nempe 1 R, & ex hoc auferatur dimidium numeri radicum, & in nostro exemplo erit dimidium 4, & fiet summa $1R - 4$; huius residui quadratum est $1Q - 8R + 16$. Sed esse debebat summa $1Q - 8R$; proinde, vtrobiq; additis 16, fit $1Q - 8R + 16 = 441$: ergo eorum latera æqualia erunt, nempe $1Q - 4 = 21$. Vtrinq; additis 4, fit æquatio $1R = 25$, & erit Radicis quæsitæ valor numerus 25, vt priùs.

Aequationis compositæ iam explicatæ ad simplicem reuocatio.

Variæ, ac diuersæ Methodi explicandi æquationem inter R — Q, & N.

Methodus Diophanti.

Diophanti methodus explicatur. A Quadrato dimidij numeri radicum subtrahatur productum ex numero quadratorum in numerum absolutum, & à residuo sumatur radix: hæc enim si addatur dimidio numeri radicum, vel ab eodem subtrahatur, atq; summa, vel residuum diuidatur per numerum quadratorum; quotiens radicis quæsitæ pretium exhibebit.

EXEMPLVM.

5 6 R — 4 Q ⊏ 1 9 2.

7 8 4 *Quadratum dimidij numeri radicum*
7 6 8 *Productum ex numero quadratorum in numerum absolutum* } *Subtrahe.*

1 6 *Residuum.*
4 *Residui latus*
2 8 *Dimidium numeri radicum* } *Adde.*

3 2 *Summa diuidenda.*
4 *Diuisor.*

8 *Quotiens, & valor lateris; nimirum lateris maioris.*

2 8 *Dimidium numeri radicum*
4 *Latus residui* } *Subtrahe.*

2 4 *Residuum diuidendum.*
4 *Diuisor.*
6 *Quotiens, & lateris valor, nempe lateris minoris.*

Hæc

Hæc autem æquatio duplicem radicem habet, vt vidimus. Verùm quandoq; vtraq; quæstionem soluit; aliquando altera tantùm. Cæterum secundum hanc Diophanti methodum, quando numerus productus ex numero quadratorum in numerum absolutum, æqualis fuerit quadrato dimidij numeri radicum, vnicum est latus, videlicet, dimidium numeri radicum, &c. Si numerus autem absolutus fuerit maior quadrato dimidij numeri radicum, Problema, nonnisi sophisticè soluitur; non enim debet esse maior numerus absolutus quadrato dimidij numeri radicum. Non dissimili modo procedendum erit, cum intercesserint numeri irrationales, in æquationis analysi.

Hæc æquatio duplicē habet radicem.

Quādo numerus absolutus maior quadrato dimidij numeri radicum Problema, nonnisi sophisticè solui potest.

EXEMPLVM.

56 R — 4 Q = 164.

784 *Quadratum dimidij numeri radicū*
656 *Productum ex numero quadratorū in numerum absolutum* } *Subtrahe.*

---

128 *Residuum.*
℞ 128 *Residui latus*
28 *Dimidium numeri radicum* } *Adde.*

℞ 128 ✠ 28 *Summa.*
4 *Diuisor.*

℞ 8 ✠ 7 *Valor lateris, nimirum maioris.*

---

28 *Dimidium numeri radicum*
℞ 128 *Latus residui* } *Subtrahe.*

---

28 — ℞ 128 *Residuum.*
4 *Diuisor.*

---

7 — ℞ 8 *Lateris valor, nempe minoris.*

Me-

Methodus communis antiquorum.

Communis antiquorũ methodus declaratur.

A Quadrato dimidij numeri radicum auferatur numerus absolutus: etenim si radix quadrata residui addatur dimidio numeri radicum; vel ex hoc dimidio subtrahatur radix ipsa; duplex se afferre latus comperiemus.

EXEMPLVM PRIMVM.

Exemplum ad superiorem doctrinam explicandam.

$14 R - 1 Q = 48.$

7 *Dimidium numeri radicum.*

---

4 9 *Eius quadratum*
4 8 *Numerus absolutus* } *Subtrahe.*

---

1 *Residuum.*
1 *Latus residui*
7 *Dimidium numeri radicum* } *Adde.*

---

8 *Latus vnum, nempe latus maius.*

---

7 *Dimidium numeri radicum*
1 *Latus residui* } *Subtrahe.*

---

6 *Latus alterum, nempè latus minus.*

EXEMPLVM SECVNDVM.

20 R — 1 Q = 96.

10	*Dimidium numeri radicum.*
100	*Quadratum dimidij numeri radicum* } *Subtrahe.*
96	*Numerus absolutus*
4	*Residuum.*
2	*Latus residui* } *Adde.*
10	*Dimidium numeri radicum*
12	*Latus vnum, nempe latus maius.*
10	*Dimidium numeri radicum* } *Subtrahe.*
2	*Latus residui*
8	*Latus alterum, nempe latus minus.*

Animaduertendum verò, quando numerus absolutus, fuerit æqualis quadrato dimidij numeri radicum, tunc vnicum fore latus; nempe dimidium ipsum numeri radicũ. *Nota.*

DEMONSTRATIO.

Radicum numerus esto AB, quæ secetur [a] bifariam in C, & non bifariam in D: super partem maiorem AD describatur [b] quadratum ADHI; perficiaturq; rectangulum AG: postea supra BC, radicum numeri dimidio, describatur [b] quadratum BCOF; cuius ducta diameter BO, secet DH, in N, puncto; per quod agatur [c] LE, linea parallela ipsi AB, secans CO, in M; & producta FO, secet AI, in K, & DH, in P: erunt [d] DE, MP, quadrata; rectangulum verò AO, æquale erit [e] quadrato CF: siue quęsitum quadratum, quod datur, sit AH, siue DE, siue CF. Ostendam

a 10. primi.
b 46. primi.
b 46. primi.
c 31 primi.
d coroll. 4. secundi.
e 36. primi.

dam perpetuò, veram esse æquationem, nempe radices, minus quadrato æquari numero absoluto, &c. Datum sit

Primus casus.

quadratum quod quæritur AH; ergo rectangulum AG, comprehensum sub AI, latere quadrati, & numero radicum AB, omnium radicum valor, siue pretium erit. Dictum est enim supra ex ductu lateris, seu radicis in radicum numerum, fieri omnium radicum pretium. Cum autem pretium radicum AG, minus quadrato, nempe AH, æquale sit numero absoluto (est enim æquatio R — Q = N,) erit proinde DG, rectangulum æquale numero absoluto; sunt autem duo rectangula AN, DG, æqualia, cum sub æqualibus lateribus contineantur; rectangulum autem AN, æquale est gnomoni MBP; (siquidem complementa CN, NF, sunt æqualia; commune si addatur DE, erit CE, ipsi DF, æquale: sed CE, AM, sunt [1] æqualia; ob id DF, erit æquale ipsi AM; commune addatur CN, fiet AN, æquale gnomoni PBM:) ergo DG, nempe numerus absolutus, erit æqualis gnomoni PBM: at si ex CF, quadrato dimidij numeri radicum auferatur gnomon PBM; remanebit notum quadratum MP; cuius latus est MN, seu CD: addito autem CD, ipsi AC, dimidio numeri radicum fit notum AD, latus quadrati AH, quæsiti. Si itaq; ex quadrato dimidij numeri radicum auferatur numerus absolutus, & residui latus quadratum, addatur dimidio numeri radicum; fit notum latus quæsitum, quod oportebat ostendere.

[1] 36. primi.

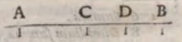
Secundus casus.

Secundo datum sit quadratum DE; ijsdem positis, &c. erit rectangulum AE, contentum sub numero radicum AB, & latere quadrati BE, omnium radicum æstimatio; cum autem radicum valor AE, minus quadrato DE, æquale sit cuidam numero absoluto (est enim æquatio R — Q = N,)

⊏ N,) & rectangulum AE, minus quadrato DE, æquale est rectangulo AN: erit ergo AN, rectangulum numero absoluto æquale; sed rectangulum AN, est æquale gnomoni PBM, vt supra ostendimus; proinde numerus absolutus, erit ipsi gnomoni PBM, æqualis; hoc autem ablato ex CF, quadrato dimidij numeri radicum, remanet notum MP, quadratum, cuius latus est CD, quo sublato, ex CB, dimidio numeri radicum, remanebit notum DB, latus quadrati quæsiti, quod erat ostendendum.

Tertiò sit datum quadratum CF, ergo rectangulum AF, contentum sub numero radicum AB, & latere BF, erit radicum omnium æstimatio; cum autem radicum valor, nempe AF, minus quadrato, nempe CF, æquale sit cuidam numero absoluto (est enim æquatio R — Q ⊏ N,) & rectangulum AF, minus quadrato CF, æquale est rectangulo AO; erit ob id AO, æquale numero absoluto, ablato autem AO, ex CF, quadrato dimidij numeri radicum, nihil remanet; siquidem AO, CF, rectangula sunt æqualia; proinde nihil erit addendum dimidio numeri radicum; neq; subtrahendum, vt habeatur latus quæsitum: sed ipsum dimidium numeri radicum erit latus quæsitum, &c. Quod oportebat ostendere. *Tertius casus.*

Aliter breuiùs. Sit radicum numerus, vt priùs AB, cuius dimidium AC, vel CB, latus quæsitum AD; erit ergo rectangulum BAD, æquale pretio omnium radicum; cum numerus radicum ductus in radicis pretium, producat omnium radicum valorem; & quia rectangulum BAD, radicū valor, minus quadrato AD, æquale est numero absoluto (est .n. æquatio R — Q ⊏ N,) & rectangulum BAD, minus



quadrato AD, æquale est rectangulo ADB; proinde rectangulum ADB, erit numero absoluto æquale. Sed quadratum, ex CB, dimidio numeri radicum æquale est [a], rectangulo BDA, vna cum quadrato ex CD; si subtrahatur ergo à quadrato ex CB, dimidio numeri radicum, rectan- *a 5. secūdi.*

gulum ADB, ſcilicet numerus abſolutus, remanebit notum quadratum, cuius latus eſt CD; quo addito ad dimidium AC, numeri radicum, fit notum latus quæſitum AD; & non diſſimili modo procedetur in demonſtrando, quando latus fuerit DB, vel demum CB, &c.

COROLLARIVM.

Quid ex hactenus explicatis colligendum ſit.

EX demonſtratis colligitur in præſenti æquatione; ſi radix numeri, qui relinquitur ex numeri abſoluti ſubtractione, à quadrato dimidij numeri radicum, addatur dimidio numero radicum, reperietur maior radix propoſitæ æquationi faciens ſatis.

Si verò eodem ex dimidio numeri radicum ſubtrahatur, emerget radix minor.

Demum patet ſi numerus abſolutus fuerit æqualis quadrato dimidij numeri radicum, dimidium ipſum quæſitam exhibere radicem, &c.

Methodus Petri Nonij.

Explicatur methodus Petri Nonij.

A Quadrato numeri radicum, ſubtrahatur quadruplum numeri abſoluti, & à reſiduo ſumatur latus; quod quidem ſi addatur numero radicum, vel ab eodem ſubtrahatur, aggregati, vel reſidui dimidium, lateris valorem dabit.

EXEMPLVM.

$14 R - 1 Q = 48.$

196 *Quadratum numeri radicum* } *Subtrahe.*
192 *Quadruplum numeri abſolutum* }

4 *Reſiduum.*
2 *Latus reſidui* } *Adde.*
14 *Numerus radicum* }

16 *Summa.*
8 *Dimidium ſummæ, & latus maius.*

14 *Numerus radicum* } *Subtrahe.*
2 *Latus reſidui* }

12 *Reſiduum.*
6 *Dimidium reſidui, & latus minus.*

Cæte-

Cæterum quando numeri absoluti quadruplum fuerit æquale quadrato dimidij numeri radicum, vnicum erit latus, nempe ipsum dimidium numeri radicum.

Quando quadruplũ numeri absoluti æquale fuerit quadrato dimidij numeri radicum vnicũ est latus. Methodus superiùs assignata demõstratur.

DEMONSTRATIO.

RAdicum numerus esto AD, & quæsitum quadrati latus sit AB; sitq; primò maius dimidio numeri radicum; ergo rectangulum DAB, contentum sub latere quæsito, & numero radicum, erit radicum omnium pretium, ob rationem sæpè allatam; Cum autem sit æquatio R — Q ⊏ N. Si à rectangulo DAB radicum pretio, auferatur quadratum ex AB, residuum erit numerus absolutus; nimirum rectangulum ABC, seu ABD: sed quadratum ex AD, æquale est [a] quadruplo rectangulo ABC, vna cum quadrato ex AC; proinde & quadruplo numero absoluto, vna cum quadrato ex AC: itaq; si à noto quadrato ex AD, auferatur quadruplum rectanguli ABC; hoc est quadruplum numeri absoluti, remanebit quadratum notum, cuius latus est AC: huic, autem, vel illi æquali DE, si addatur AD, numerus radicum, fiet nota tota AE, quæ dupla est ipsius AB, lateris quæsiti.

A C B D E

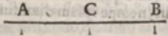
a 6. secũdi.

Si verò latus quadrati BD, dimidio numeri radicum minus erit; proinde rectangulum contentum sub AD, DB, radicum erit omnium pretium. Si verò ex ADB, rectangulo dematur quadratum BD, remanebit rectangulum ABD, æquale numero absoluto (est enim æquatio R—Q ⊏ N.) At verò quadratum ipsius AD, est æquale quadruplo rectangulo ABD, vna cum quadrato AC; quarè si à quadrato noto ipsius AD, auferatur notum quadruplum rectangulum ABD, hoc est quadruplum numeri absoluti, remanebit notum quadratum, cuius latus est AC: hoc autem si dematur ex AD, numero radicum, remanet CD, quæ dupla est lateris BD, &c. quod oportebat ostendere.

Secundus casus.

Tertius casus.

Demum si quadruplum numeri absoluti fuerit æquale quadrato numeri radicũ; ostendemus dimidium numeri radicum æquale esse lateri quęsito. Itaq; dico si quadruplum numeri absoluti, æquale fuerit quadrato numeri radicum, dimidium numeri radicum fore latus quadrati quæsiti.



Demõstratur quãdo numeri absoluti quadruplum æquale fuerit quadrato numeri radicũ dimidiũ numeri radicum fore latus.

Sit AC, latus quadrati, & AB, dupla ipsius AC, sit numerus radicum, rectangulum ABC, comprehensum sub numero radicum, & radicis pretio, erit omnium radicum valor, ob rationem sæpè dictam; & quoniam est æquatio inter R — Q, & N; erit proinde rectangulum ABC, minus quadrato ex AC, seu CB, æquale numero absoluto; sed rectangulum ABC, minus quadrato ex AC, vel CB, est alterutrum quadratorum ex AC, & CB; cum AC, CB, sint æquales: ergo alterutrum de quadratis ex AC, CB, erit æquale numero absoluto; & quia quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati AC, vel CB; ob id quadratum ex AB, erit quadruplum numeri absoluti; Subtracto autem quadrato ex AB, nempe quadruplo numeri absoluti, à quadrato AB; quadrato .f. numeri radicum, remanebit nihil: hoc autem addito ad AB, numerum radicum, vel subtracto ab eodem; nota remanet recta AB, radicum numerus, & est dupla lateris AC, quæsiti. Rectè igitur regula iubet, &c.

Methodus peculiaris Vietæ.

Peculiaris methodus Vietæ.

SVmatur numerus, cuius quadratum æquale sit numero absoluto, & numerus hic intelligatur medius inter extremos; & numerus radicum sit extremorum summa: ex medio autem, & extremorum summa, quærantur numeri extremi, & ita reperietur valor, vtriusq; radicis quæsitæ, &c.

EXEM-

EXEMPLVM.

Sit æquatio $14\,R - 1\,Q = 48$.

Hoc nihil est aliud, quàm dato rectangulo sub lateribus, & aggregato laterum, reperire latera: rectangulum autem erit 48; siquidem ℞ 48, est latus medium ex tribus proportionalibus, &c. Summa laterum erit 14; cum autem quadratum aggregati laterum, minus quadruplo rectangulo sub lateribus, æquale sit quadrato differentiæ laterum; vt in nostrorum Problematum analysi ostendimus. Proinde differentia laterum esto 1 R, cuius quadratum 1 Q, erit æquale quadrato summæ laterum, nimirum 196; minus tamen quadruplo rectangulo, hoc est minus quadruplo numeri 48. Itaq; $1\,Q = 4$, ergo $1\,R = 2$. Proinde differentia laterum erit 2, qua habita, & etiam laterum summa, cognita, habentur latera; & ita reperiemus latera esse 8, & 6, & vtrumq; quæstioni satisfacit De his autem latius in Speciosa Logist. loquemur tractantes de æquationum constitutione.

Quid sit hæc æquatio, explicatur superior doctrina.

DEMONSTRATIO.

HVius methodi demonstrationem in speciosam Logisticen differimus, &c.

Huius methodi demonstrationem, vide in Algebra Speciosa.

Methodus Steuini.

SVmantur numeri quicunq; ad libitum, qui quidem oportuni credantur, & in his iterum, atq; iterum periculum fiat, donec occurrat numerus quæsitus, &c.

EXEMPLVM.

$14\,R - 1\,Q = 48$.

Procedatur non dissimili modo, ac superiùs dictum fuit; peri-

periculo nimirum facto in varijs numeris, qui idonei credantur, & reperiemus latera esse 8, & 6.

Methodus Coigneti.

Coigneti methodus declaratur.

SVmantur partes aliquotæ numeri absoluti, propositæ æquationis; & in his iterum, ac iterum periculum fiat, donec reperiatur numerus Problemati satisfaciens.

EXEMPLVM.

$$1\,4\,R - 1\,Q = 4\,8.$$

Partes aliquotæ numeri 48, sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48; facto verò periculo in ijs, reperiemus, vt supra 8, & 6, quæstioni satisfacientes.

Methodus Girardi.

EXponantur partes aliquotæ numeri absoluti, tali ordine, vt binæ contra se positæ per multiplicationem efficiant numerum absolutum; posteà verò vtraq; æquationis pars diuidatur per 1 R, vt æquatio deprimatur ad proximum inferiorem gradum; deinde pars ea aliquota est eligenda, quæ si auferatur à numero radicum, remaneat altera pars coefficiens correlata.

EXEMPLVM.

$$1\,Q = 1\,4\,R - 4\,8.$$

Diuisa vtraq; æquationis parte per 1 R, fiet $1R = 14 - \frac{48}{1R}$ hoc est, si subtrahatur à 14, aliqua pars aliquota ipsius numeri 48, remanebit pars altera coefficiens correlata. Si auferatur 4, remanet 10; non est autem hic numerus, altera pars coeffi-

1	48
2	24
3	16
4	12
6	8

ciens

ciens correlata; si quidem ei respondet numerus 12; & ita de alijs; demum ablata parte 6, remanet 8, coefficiens correlata, & erit latus maius. Deinde auferatur abs 14, numerus 8, & remanet 6, coefficiens correlata: dicemus itaq; 6, esse partem minorem.

Generalis methodus Vietæ.

E Dato in numeris plano sub latere, & data coefficiente longitudine affecto multa quadrati, latus analyticè elicere. Quoniam in hac æquatione potestas est auulsa, si quidem planum sub latere, & data coefficiente longitudine efficitur multa quadrati, latus est anceps. Potestas enim negatur de homogeneo sub gradu, ac proinde latus anceps esse superiùs dicebamus, atq; adeo æqualitas de duobus lateribus explicabilis est. Huius autem æquationis præcepta longè facilius intelligentur, si vna cum exẽplis tradantur.

Quamobrem si proponatur æquatio 80R—1Q = 1344: obseruatis generalibus præceptis in qualibet æquatione ab arte præscriptis, &c. Latus maius, sub puncto sibi addicto collocandum, dico esse 2, cuius quadratum est 4, quo addito ad 1344; eo quo vis modo in adiuncto paradigmate fit planum restitutum 1744; cum restituens planum esset 4, quadratum primi lateris; ab hoc autem plano restituto auferatur 160; planum à latere primo in coefficiẽtem, & remanet 144, pro latere secundo indagando. Inuento diuisore, vt vides, & reperto quotiente quem Diophantus parabolam appellat, summa planorum, quorum vnum est à latere secundo in duplum primi, alterum quadratum lateris secundi, ita tamen, vt hoc vnius figuræ spatio antecedat, subtrahitur à plano facto ex latere secundo, in coefficientem longitudinem; excessus autem, si subducatur à reliquo resoluendi quadrati auulsi 144, nihil remanet.

Paradigma primum analyſeos Quadrati auulſi ad inueniendum radicem minorem.

I. *Eductio lateris ſingularis primi.*

Coefficiens longitudo	8	0	Sublateralis. 0 0 / R 2 4 / Q 4 : 16
Planum ſub latere multatum lateris reſoluendi quadrato.	13	44	
	.	R .	
	Q 1	Q 13	
Planum reſtituens.	4		Quadratum lateris primi.
Planum reſtitutum.	17	44	
Planum principale minuens.	16	0	A latere primo in coefficientem longitudinem.
	1	44	

II. *Eductio lateris ſingularis ſecundi.*

Diuiſorum pars ſuperior. { Coefficiens longitudo.		8 0	
Reliquum reſoluendi quadrati auulſi.	1	44	
Diuiſorum pars inferior { Duplum lateris primi.		4	
Exceſſus diuiſorum.		4 0	
Plana additiua {	1	6	A latere ſecundo in duplum primi.
		1 6	Quadratum lateris ſecundi.
Summa planorum additiorum.	1	76	
Planum.	3	20	A latere ſecundo in coefficientem longitudinem.
Exceſſus plani ablatitij æqualis reſiduo reſoluendo auulſo quadrato.	1	44	

Itaq; latus minus eſt 24. dum eſt æquatio 80R – 1Q = 1344

Para-

Paradigma alterum ad indagandam radicem maiorem.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Coefficiens longitudo	8	0	Sublateralis.
		.	
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	1 3	4 4	
	.	R. .	
	Q 5	Q 25	
Planum restituens.	2 5		Quadratum lateris maioris.
Planum restitutum.	3 8	4 4	
Planum principale minuendum	4 0	0	A latere primo in coefficicientem longitudinem.
Excessus plani principalis reliquumue resoluendi quadrati auulsi.	1	5 9	

	0	0
R:	5	6
Q	25:	36

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior. { Coefficiens.	8	0	
		.	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	1	5 6	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	1	0	
Excessus diuisorum superiorum.		2 0	
Plana ablatitia.	6	0	A latere secundo in duplum primi.
		3 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planum ablatitiorum.	6	5 6	
Planum additium.	4	8 0	A latere secundo in coefficientem.
Excessus additiorum æqualis residuo resoluendo quadrato auulso.	1	5 6	

Latus itaq; maius erit 56. dum est item æquatio vt supra 80R − 1Q = 1344

Paradigma secundum analyseos quadrati auulsi ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	8	0	Subiateralis 0 0 / R 2 6 / Q 4: 36
		. .	
Planum sub latere multatum lateris resoluendi quadrato.	14	04	
	.	R .	
	Q 1	Q 1 1	
Planum restituens	4		Quadratum lateris primi.
Planum restitutum	18	04	
Planum principale minuens.	16	0	A latere primo in coefficientem longitudinem.
Excessus plani restituti, reliquumue resoluendi auulsi quadrati.	2	04	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens		80	
		.	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	2	04	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.		4	
Excessus diuisorum superiorum.		40	
Plana additiтia {	2	4	A latere secunda in duplum primi.
		36	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum addititiorum.	2	76	
Planum ablatitium.	4	80	A latere secundo in coefficientem longitudinem.
Excessus plani ablatitij, æqualis residuo resoluendo auulso quadrato.	2	04	

Latus itaq; minus est 36. dum est æquatio 80R − 1 Q ⩶ 1404

Para-

Paradigma alterum ad indagandam radicem maiorem.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Sublateralis.	0	0
	R · 5	4
	Q 25 ·	16

Coefficiens longitudo	8	0	
		· 1	
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	14	04	
	·	R. ·	
	Q 1	Q 1	
Planum restituens.	2 5		Quadratum lateris primi.
Planum restitutum.	39	04	
Planum principale minuendum.	40	0	A latere primo in coefficientem.
Excessus plani principalis, reliquumue resoluendi quadrati auulsi.		96	

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior. { Coefficiens	·	80	
		·	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.		96	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	1	0	
Excessus diuisorum inferior.		10	
Plana ablatitia {	4	0	A latere secundo in duplum primi.
		16	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum	4	16	
Planum addititium.	3	2	A latere secundo in coefficientem.
Excessus additiorũ æqualis residuo resoluendo quadrato auulso.		96	

Latus igitur maius erit 54; dum est itidem ęquatio, vt supra

$$80R - 1Q = 1404$$

Paradigma tertium analyseos quadrati auulsi ad inueniendam radicem minorem.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Coefficiens longitudo.	2 1	6	Sublateralis.
		. .	
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	7 3	0 8	
	.	R.	
	Q 1 1	Q 1 1	
Planum restituens.	1 6		Quadratum lateris primi.
Planum restitutum.	8 9	0 8	
Planum principale minuendum.	8 6	4	A latere primo in coefficiente m.
Excessus plani principalis reliquumue resoluendi quadrati.	2	6 8	

	0	0
R.	4	2
Q.	16	4

II. *Eductio lateris singularis secundi*

Diuisorum pars superior. { Coefficiens.	2	1 6	
		.	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	2	6 8	
		.	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.		8 0	
Excessus diuisorum superiorum.	1	3 6	
Plana addititia {	1	6	A latere secundo in duplum primi quadratum lateris secundi.
		4	
Summa planorum addititiorum.	1	6 4	
Planum ablatitium.	4	3 2	A latere secundo in coefficiente longitudinem.
Excessus plani ablatitij aequalis residuo auulso quadrato.	2	8 6	

Latus itaq; minus est 42. dum est aequatio $216R - 1Q = 7308$.

Para-

Paradigma alterum ad indagandam radicem maiorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo	2	16		Sublateralis. 0 0 0
		.	. .	R 1 7
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	0	73	08	Q 1, 49
	.	R. .	R.	
	QF	Q11	Q111	
Planum restituens.	1			Quadratum lateris primi.
Planum principale minuendum.	1	73	08	
Excessus plani principalis, reliquumue resoluendi quadrati.	2	16		A latere primo in coefficientem.
		42	92	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens longitudo.	21	6	
		. .	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	42	92	
		.	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	2		
Excessus diuisorum inferiorum.	1	6	
Plana ablatitia {	14		A latere secundo in duplum latus primum.
	49		Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	189		
Planum addititium.	151	2 .	A latere secundo in coefficientem.
Excessus ablatitiorum.	37	8	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	5	12.	

Iam duo elicita latera vnius munere funguntur.

III. Edu-

III. *Eductio lateris singularis tertij tanquam secundi.*

Diuisorum pars superior. { Coefficiens	2	1 6	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	5	1 2	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	3	4	
Excessus diuisorum superiorum.	1	2 4	
Plana ablatitia. {	1 3	6	A latere secundo in duplum primi.
		1 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatorum.	1 3	7 6	
Planum adscititium.	8	6 4	A latere secundo in coefficientem.
Excessus adscititiorum, æqualis residuo resoluendo quadrato auulso.	5	1 2	

	0	0	0
R	1	7	4
Q	1	49	16

Quamobrem fit Radix maior, numerus 174, dum est æquatio vt supra 216 R — 1 Q $=$ 7308. Cæterum hoc planum sub latere maiori multatum lateris quadrato acephalum est: idq; deprehenditur exeo quia quæsita radix maior est 108, dimidio coefficientis; quamobrem oportet eam pluribus, quam duabus figuris exprimere: cumq; puncta quadratica duo tantum in proposito numero notari queant, necesse est illi, præfigere 0; sic enim tribus quadraticis punctis designatis, tres figuræ pro congruenti radice correspondebunt.

Para-

Paradigma quartum analyseos quadrati auulsi ad indagandam radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Sublateralis,	0		0
	R 3		6
	Q 9		36

Coefficiens longitudo	1 0	4	
Planum sub latere multatum lateris resoluendi quadrato.	2 4	4 8	
		R.	
	Q 1	Q 2	
Planum restituens.	9		Quadratum lateris primi.
Planum restitutum	3 3	4 8	
Planum principale minuens.	3 1	2	A latere primo in coefficientem longitudinem.
Excessus plani restituti, reliquumue resoluendi auulsi quadrati.	2	2 8	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Duplum lateris	1	0 4	
Reliquum resoluendi quadrati auulsi.	2	2 8	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris		6 0	
Excessus diuisorum superiorum.		4 4	
Plana additita	3	6	A latere secundo in duplum primi.
		3 6	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum addititiorum.	3	9 6	
Planum ablatitium.	6	2 4	A latere secundo in coefficientem longitudinem,
Excessus plani ablatitij æqualis residuo resoluendo auulso quadrato.	2	2 8	

Latus itaq; minus est 36. dum est æquatio 104R − 1Q = 2448.

Para-

Paradigma alterum ad indagandam radicem maiorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	1 0	4	Sublateralis. 0 0 — R 6, 8 — Q 36: 64
Planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato.	2 4	4 8	
	Q 1	Q 1	
Planum restituens.	3 6		Quadratum lateris primi.
Planum restitutum.	6 0	4 8	
Planum principale minuendum.	6 2	4 0	A latere primo in coefficientem.
Excessus plani principalis, reliquumue resoluendi quadrati.	1	9 2	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. { Coefficiens	1	0 4	
Reliquum resoluendi quadrati.	1	9 2	
Diuisorum pars inferior. { Duplum lateris primi.	1	2 0	
Excessus diuisorum inferiorum.		1 6	
Plana ablatitia {	9	6	A latere secundo in duplum primi
		6 4	Quadratum lateris secundi.
Summa planorum ablatitiorum.	1 0	2 4	
Planum addititium.	8	3 2	A latere secundo in coefficientem.
Excessus addititiorum æqualis residuo quadrato auulso.	1	9 2	

Latus igitur maius erit 68. dum est æquatio, vt supra 104R − 1 Q = 2448.

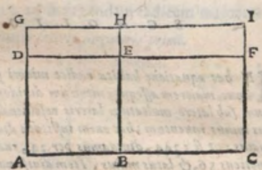
SCHOLION.

IN *hac æquatione habita radice minori facili negotio possumus maiorem assequi; nimirum diuidendo propositum planum sub latere multatum lateris resoluendo quadrato, per latus minus inuentum; hac enim instituta diuisione latus orietur maius: vt si 1344, diuidamus per 24, radicem minorem, fiet quotiens 56, & latus maius. Item diuiso numero 1404 per 26, latus minus, orietur quotiens 54, & latus maius. Præterea diuiso 7308, per 42, minorem radicem, orietur 174. Demum diuiso numero 2448, per 36, radicem minorem, fit quotiens, & radix numerus 68, & quidem radix maior.*

Eandem radicem maiorem assequemur quoque, si inuentam radicem minorem, subtraxerimus à coefficienti: itaq; in priori exemplo, cum esset æquatio 80 R — 1 Q = 1344, inuenta minor radix 24, si subtrahatur ex 80, remanet 56, pro radice maiori. Et in secundo exemplo, cum esset æquatio 80 R — 1 Q = 1404, inuenta minor radix 26, si subtrahatur ex 80, relinquitur 54, pro radice maiori. Insuper in tertio exemplo, cum esset æquatio 216 — 1 Q = 7308, fit radix minor 42, quæ subtracta de 216, relinquit 174; pro radice maiori. Demum cum esset æquatio 104 R — 1 Q = 2448, erat minor radix 36, quæ subducta à coefficienti 104, relinquit 68, pro radice maiori. Id quod de reliquis intelligendum.

Hæc autem Geometricè, facilè ostendi possunt: sit enim coefficiens AC, latus minus AB, sitq; constructa figura, vt vides. Cum AE, sit quadratum lateris minoris AB, & AF, sit planum sub latere, & data coefficiente, erit BF, comparationis homogeneum; hoc autem applicato ad BE, seu AB, fit BC, latus maius; nàm BI, quadratum ex BC (ita enim figuram suppono descriptam) si subtrahatur ex AI, quod erit planum sub latere maiori, & coefficienti, *Quæ hactenus dicta sũt Geometricè ostenduntur.*

relinquit A H, quod est æquale ipsi BF; quandoquidem comprehenditur sub lateribus AB, AG, quæ ęqualia sunt lateribus BE, BC, sub quibus BF, continetur. Hinc etiam patet, quod secundo loco dicebamus, nempe si ab ipsa coefficiente subtrahatur latus minus, remanere latus maius, &c.



Compendiosiùs hoc modo. Sumendus est numerus cuius quadratum, si subtrahatur à numero producto ex multiplicatione quæsiti numeri in numerum datum, remaneat numerus, à quo si subtrahatur productum ex dato numero in numerum quæsitum, nihil remaneat.

EXEMPLA.

$$\begin{array}{rr} & 4 \\ 14R - 1Q = & 48 \\ & 36 \\ \hline & 84 \\ & 84 \\ \hline & 00 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 8 \\ 14R - 1Q = & 48 \\ & 64 \\ \hline & 112 \\ & 112 \\ \hline & 00 \end{array}$$

```
                1  2
                .  .
5 0R—1Q = 4 5 6
  2             1
——— 50      ———
1 0 0 20     5 5 6
  4   —       5 0
  4  30 Diui- ———
———     for.   5 6
5 6            5 6
              ———
               0 0
```

```
                      3  0
                      .  .
5 0R—1Q = 4 5 6
   3                 9
———           ————
1 5 0  5 0    1 3 5 6
          8   1 5 0
      ———    ————
      4 0 0   1 4 4
      4 8     1 4 4
        6 4   ————
      ———     0    0
      5 4 4
      4 0 0
      ———
      1 4 4
```

```
                   6
                   .
3 0R—1Q = 1 4 4
  6              3 6
———           ———
1 8 0          1 8 0
               1 8 0
              ———
               0   0
```

```
                        2  4
                        .  .
3 0R—1Q = 1 4 4
                   4
          ———  ———
1 6    40       5 4 4
  1 6  30       6 0 0
———  ——    ———
1 7 6  10 Diui-   5 6
1 2 0      for.   5 6
———            ———
  5 6             0 0
```

1 6
4 0 R — 1 Q = 3 8 4
6 1
2 4 0 4 8 4
4 0 4 0
2 0 8 4
2 0 Diuisor. 8 4
0 0

2 4
4 0 R — 1 Q = 3 8 4
4 0 4
0 7 8 4
8 0 0
1 6
1 6
0 0

4 2
1 0 0 R — 1 Q = 2 4 3 6
4 1 6
4 0 0 4 0 3 6
4 0 0
1 0 0
8 0
3 6
2 0 Diuisor. 1 6 2 0 0 3 6
4 1 6 4
1 6 4 3 6 0

5 8
1 0 0 R — 1 Q = 2 4 3 6
2 5
8 0 4 9 3 6
6 4 5 0 0
8 6 4 1 1 6 6 4
8 0 0 1 0 0 6 4
6 4 1 6 Diuisor. 0 0

4 4

44
. .
256R—1Q = 9328
4
———
1024
32
1024 16
336 ———
——— 336
688
256
80

Diuisor 176

9328
16
———
10928
1024
———
688
688
———
0 0

212
. . .
256R—1Q = 09328
2
———
512
41
256
———
154
———
1872
154
———
332

84
4
———
844
512
———
332
———
400
256
———
144 Diuisor primus.

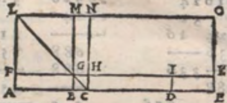
420
256
———
164 Diuisor secundus.

09328
. . .
4
———
49328
512
———
1872
154
———
332
332
———
0 0

DE-

DEMONSTRATIO.

SIt AE, coefficiens longitudo; & AC, ſit radicis valor; conſtituatur ſuper AC, quadratum ALNC, & compleatur rectangulum ALOE; deinde ſit A B, latus ſingulare primũ, illudq; maius; & ſit BC, latus ſingulare ſecũdum; ducatur BM, parallela alterutri



rectorum AL, CN, item, ducta diametro CL, per punctum interſectionis cum BM, in G, ducatur FK, tranſiens per G, erit enim BH, quadratum, quemadmodum FM; at verò quoniam AL, eſt lateris valor, & AE, coefficiens; erit AO, planum ſub latere, & coefficiente: & quia eſt R—Q ⊏ N; ob id ex AO, ſubtracto AN, remanebit CO, pro comparationis homogeneo; præcipit autem methodus, vt FM, quadratum lateris primi addatur CO, comparationis homogeneo, vt habeatur planum reſtitutum, cum quadratum lateris primi diceretur planum reſtituens; itaq; habebimus duo plana FM, CO, à quibus, vt methodus iubet, auferri debet FO, planum ſub latere primo, & coefficiente longitudine, remanebitq; planum applicandum, &c. ſed idem eſt planum FO, ſubtrahere ex planis FM, NE; ac eſt planum GN, ſubducere ex CK, ſunt enim FM, HO, communia; at cum GN, CK, ſint eiuſdem altitudinis, commodiſſimè inſtituetur ſubtractio, ſubducendo, GM, ex CE: ſit igitur DE, æqualis GM, & facta ſubtractione remaneat CD, ducta DI, ad rectos angulos, ſeu parallela rectæ EO, vel CN; erit CI, reſiduum applicandum ad differentiam inter coefficientem, & duplum primi lateris: eſt autem coefficiens AE; lateris primi duplex eſt AB, plus DE; quamomobrem differentia erit BD, ad quam oportet applicare residuum CI: facta applicatione, fit quotiens CH, seu BC, latus secundum; si ea cautela seruetur in eligendo latere; vt nimirum quadratum ipsius cum rectangulo quod sub ipso, & duplo latere primo, si subtrahatur à plano sub coefficiente, & latere ipso, remaneat planum sub eodem latere, & differentia, qua coefficiens superat duplex latus minus iam ex illa subtractione residuum, & sic innotescit radix.

Sit radix AC, coefficiens autem AD; erigatur AN, ad rectos angulos, & æqualis ipsi AC, compleatur rectangulum ANQD; sit autem AB, latus singulare primum, illudq; maius BC, erit minus, & secundum: compleatur figura, ducta BO, parallela alterutri ipsarum AN, CP; & ducta GL, parallela alterutri AD, vel NQ, itaut transeat per H, pūctum intersectionis diametricū BO; erit GO. quadratum ipsius AB, vt BI, ipsius BC: fiat autem CF, æqualis ipsi AB, lateri primo, & secetur in E, vt EF, sit æqualis BC; compleatur rectāgulum AGMF. Quoniam AD, est coefficiens, AN, est radix; erit planum ANQD, comprehensum sub latere, & coefficiente: cui si subtrahatur quadratum AP, remanebit CQ; cui addito GO, quadrato primi lateris, vt methodus præcipit, fit planum restitutum, à quo subtrahendum GQ, planum sub latere primo, & coefficiente: hoc autem nil aliud est quàm subtrahere CK, ex HP; sunt enim GO, IQ, communia, & quia CK, HP, sunt eiusdem altitudinis, commodissimè poterit subtractio institui auferendo CD, ex HO, seu ex CF, quæ illi facta est æqualis, vt remaneat differentia DE: quamobrem residuum planum erit DM, applican-

Demōstratio pro radice maiori.

candum ad differentiam, qua duplex latus primum, superat coefficientem; sic enim methodus præscribit: est autem coefficiens AD, & est AB, latus singulare primum, cui facta est æqualis CF, cumq; EF, facta sit æqualis BC, erit BE, ęqualis CF, itaq; AE, erit duplex latus primum, excedens AD, coefficientem, excessu DE: ad huiusmodi verò excessum si applicetur DM, ea lege, vt methodus pręscribit, scilicet vt

eius quadrato addito illi rectangulo, quod sub ipso, & duplo latere primo continetur, faciat planum, à quo subtracto plano sub ipso latere secundo, & coefficiente, remaneat planum sub eodem, & ipsa differentia; erit latus secundum FM, seu BC, sic innotescit radix.

S C H O L I O N.

Aduerte nonnulla.

Haec autem explicari possunt numeris, desumptis ex paradigmate quarto; si nimirum pro demonstratione radicis minoris supponamus æquationem 104 *R* — 1 *Q* = 2448; *cuius radicem adinuenimus* 36; *& pro radice maiori supponamus æquationem* 104 *R* — 1 *Q* = 2448, *cuius radicem dicebamus esse* 68: *applicatione itaq; istorum numerorum demonstrationes illustrari, vel numeris consimilium æquationum ipsæ quidem enucleari possunt, vt cuicunq; perspicuum esse potest.*

CO-

COROLLARIVM.

Constat ex dictis per hanc æquationem nihil aliud inquiri, quàm numerum, qui si ducatur in numerum datum, & à producto subtrahatur quadratum numeri quæsiti, remaneat numerus alter datus: vt si proponeretur, *Quid colligendum ex dictis.*

Numerum reperire, qui si ducatur in 20, producat numerum, à quo si dematur, quadratum numeri quæsiti, remaneat numerus 75. *Problema.*

Quæsitus numerus sit 1R, quæ si ducatur in 20, facit numerum 20R, à quo si subtrahatur 1Q, nimirum Q, vnius radicis, fit residuum 20R — 1Q, & erit æquatio 20R — 1Q = 75. *Eiusdem enodatio.*

SCHOLION.

Hic etiam aduertere nos operæ pretium duximus artem reuocandi huiusmodi æquationem, ad æquationem simplicem inter R, & N; fitq; hoc pacto. Sit æquatio vt supra; sed hoc modo 1 Q + 75 = 20 R. Auferantur 20 R, vtrinq; & erit æquatio 1 Q — 20 R + 75 = 0. Sumatur — 10, dimidium numeri radicum, & huic addito latere quadrati; nempe 1 R, fit summa 1 R — 10, cuius quadratum est 1 Q — 20 R + 100, sed esse debebat 1 Q — 20 R + 75. Proinde vtrinq; oportet addere 25, & erit æquatio 1 Q — 20 R + 100 = 25, ergo, & eorum latera æqualia erunt 1 R — 10 = 5. Vtrobiq; additis 10, fit æquatio 1 R = 15, &c. *Nonnulla aduertenda.*

De explicandis æquationibus cæteris, in quibus terminorum exponentes seruant Arithmeticam proportionem.

CAPVT XIII.

Qvando exponentes seruant Arithmeticam proportionem præter eas, quas diximus, adsunt aliæ æquationes, quæ certa via possunt explicari; vt QQ + Q = N. Insuper CC + C = N. *Quando in æquationibus, terminorum exponentes, nō* *seruāt Arithmeticam proportionē, quæ arte præcedendū fit declaratur.*

Ex dictis autem facilè colligi potest, quid agendum in huiusmodi æquationum explicationibus; Radix enim eius generis est eruenda, quæ ab altiori dignitate significatur; vt si foret æquatio QQ + Q = N; eruenda esset radix, vt loquuntur Zensizensica, seu Quadrato-quadratica, &c. à maiori namq; potestate Radix appellationem mutuatur, obseruatis præceptis superiùs traditis.

EXEMPLVM.

1 QQ + 8 Q = 825.

4 *Dimidium numeri Quadratorum.*

16 *Eius quadratum* } *Adde.*
825 *Numerus absolutus*

841 *Aggregatum.*
29 *Aggregati latus* } *Subtrahe.*
4 *Dimidium numeri quadratorum*

25 *Residuum.*
5 *Residui latus.*

Proposita sit æquatio vt supra. Dimidium numeri quadratorum est 4, cuius quadratum est 16; additum numero 825, facit 841, cuius latus quadratum est 29; à quo subtracto 4, dimidio numeri quadratorum, remanet numerus 25, cuius latus quadratum est 5, & est 1 R, pretium.

Hæc æquatio non indiget particulari explicatione.

Hæc autem æquatio, vt patet, non indiget particulari explicatione; nam si 1 QQ + 8 Q = 825: ergo 1 Q + 8 R = 825, & 1 R intelligetur quadratum lateris de quo primum quærebatur. Et in hisce æquationibus explicandis obseruanda sunt præcepta superiùs tradita, ad enodandas equationes quadrati affecti adiunctione plani sub latere, & data coefficiente longitudine. Item affecti multa plani sub latere, & data coefficiente longitudine. Demum

mum plani sub latere, & data coefficiente longitudine affecti multa quadrati.

EXEMPLVM.

1 Q — 8 R = 4 2 5.

4	*Dimidium numeri Quadratorum.*	
1 6	*Eius quadratum*	Adde.
4 2 5	*Numerus absolutus*	
4 4 1	*Aggregatum.*	
2 1	*Aggregati latus*	Adde.
4	*Dimidium numeri quadratorum*	
2 5	*Aggregatum.*	
5	*Aggregati latus.*	

EXEMPLVM SECVNDVM.

1 5	*Dimidium numeri Quadratorum.*	
2 2 5	*Eiusdem dimidij Quadratum*	Subtrahe.
1 2 5	*Numerus absolutus*	
1 0 0	*Residuum.*	
1 0	*Residui latus*	Adde.
1 5	*Dimidium numeri quadratorum*	
2 5	*Aggregatum.*	
5	*Aggregati latus quadratum, & latus minus quaesitum.*	
1 5	*Dimidium numeri quadratorum*	Subtrahe.
1 0	*Residui latus*	
℞ 5	*Differentia latus quadratum, & latus minus quaesitum.*	

Et hæ quidem æquationes explicari possent per omnes alios modos, quos superiùs attulimus.

Sit æquatio 1 CC + 8 C = 945, hac eadem arte poterit enodari; vt in æquatione inter Q + R, & N.

EXEMPLVM.

1 CC + 8 C = 945.

4	*Dimidium numeri cuborum.*
16	*Eius quadratum* } *Adde.*
945	*Numerus absolutus* }
961	*Aggregatum.*
31	*Aggregati latus* } *Subtrahe.*
4	*Dimidium numeri Cuborum* }
27	*Residuum.*
3	*Residui latus cubicum.*

Operationis examen. Dimidium numeri cuborum est 4, cuius quadratum 16, additum numero 945, facit 961; cuius latus quadratum est 31, à quo dempto 4, dimidio numeri cuborum, remanet 27, cuius latus cubicum est 3; Dicemus itaq; latus cubo-cubicum quæsitum esse 3, & ita suo modo de reliquis, &c.

De explicandis æquationibus, in quibus terminorum exponentes non seruant Arithmeticam proportionem, & primò de æquationibus Cubicis.

CAPVT XIV.

NOn est cur hic immoremur in recitando Steuini, & Coigneti modos, quibus has explicant æquationes; etenim ex dictis de æquationibus quadratis, comprehendi facilè potest: qua arte praxis in explicatione harum æquationum institui debeat. *Auctor se abstinet à recensendis quibusdam methodis.*

Methodi explicandi æquationem inter C ✠ R, & N.

Methodus Girardi.

MEthodus ista noua non indiget explicatione, præter superiùs allatam; proinde statim ad exemplum accedam. *Gherardi methodus explicatur.*

EXEMPLVM.

1 C == — 8 R ✠ 264.

1 ——	264	6 ——	44
2 ——	132	8 ——	33
3 ——	88	12 ——	22
4 ——	66		

Partes aliquotæ numeri 264 sunt hæ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 22, 33, 44, 66, 88, 132, 264; quibus ordinatis sic, vt binæ

binæ inter se ductæ faciant 264, vt vides; diuidatur vtraq; pars æquationis per 1 R, & fiet depressio ad proximum inferiorem gradum hoc modo 1 Q $=$ $-8 + \frac{264}{1R}$, & fit 6, 1 R pretium.

Explicatur superior doctrina. Hoc est si numerus 8, subtrahatur alicui ex partibus aliquotis numeri absoluti 264, remanet quadratum quæsitæ radicis, ea tamen est eligenda pars aliquota, cui si auferatur numerus 8, remaneat quadratum alterius partis coefficientis correlatæ. Vt in hoc nostro exemplo cuilibet cernere licet: si namq; subtraheremus 8, à 264, remaneret numerus 256, quem haud esse quadratum, ipsius 1, partis nimirum alterius coefficientis correlatæ manifestum est. Idem continget si subducatur idem numerus 8; reliquis partibus 132, 88, 66; At secus si subducatur a 44; etenim facta subtractione, remanebit numerus 36, qui quidem est quadratum numeri 6; nempè alterius partis coefficientis correlatæ.

Generalis Methodus Vietæ.

Vietæ methodus generalis explicatur. *E Dato in numeris Cubo affecto adiunctione solidi sub latere, & dato coefficiente plano, latus analyticè elicere.*

Sit iniunctum, latus cubicum extrahere ex hac æquatione; in qua nimirum est 1 C + 34 R $=$ 14714455. Cubus est affectus, quæritur numerus, qui ductus in sui quadratum, & in 34, faciat 14714455. Numerus autem 14714455, non est purus cubus; sed affectus adiunctione solidi, sub latere, & dato plano 34. Genesis affecti cubi, hoc tantùm addit genesi cubi puri, vt singulare latus, quod primùm elicitur ducatur in planum coefficiens. Deinde in idem etiam ducatur secundum latus.

Genesis affecti cubi, quid addat genesi cubi puri.

Latera cubi affecti, quomodo eliciantur. Ad elicienda verò latera ex affecto huiusmodi cubo, fieri debet per puncta figurarum signatio, quemadmodum in analysi puri Cubi nos adnotauimus; idest sedes vnitatum cubos singulares metientium per ternas alternas figuras

guras

guras distinguentur punctis subtus à dextra ad læuam adnotatis; hoc est vna signata figura, duæ prætermittantur. His autem peractis, quot sunt cuborum sedes, punctaue; tot sedes simplicium laterum (cum planum coefficiens sublaterale sit) supra singulas figuras constituentur; punctisq; positis distinguentur. Aduertendum autem in vltima simplicium sede, quæ prima est à læua ad dextram procedendo, consistere planum coefficiens; quòd si pluribus, quàm vna figura constaret, reliquæ figuræ in anteriora prorumpent. His autem absolutis, eliciantur latera, quemadmodum agentes de analysi puri cubi docuimus; hoc addito, quod ipsum planum coefficiens in numerum diuisorum adscribendum est. In illud autem ducenda sunt singularia latera, atq; solidum, quod inde fit, sub sede ipsius coefficientis desinere debet; illudq; auferendum est, ex affecto cubo proposito. Coefficiens autem in loca succedentia ordinatim subijciatur, diuisoresq; subtus etiam moueantur; quemadmodum ex adiuncto paradigmate colligere licet.

Quo modo sit figurarũ instituenda signatio.

Aduerte.

Quando coefficiens pluribus figuris cõstet prorũpit ad læuã; quod inferiùs magis explicabitur.

Vbi desinat solidũ factũ ex coefficiẽte in latus secundum.

Coefficiens in succedẽtia loca subijciatur.

Dum est æquatio $1C + 34R = 14714455$, subtus adnotatis punctis, vt vides, per ternas alternas figuras, sedes vnitatum metientium singulares cubos distinguuntur, quot autem sunt hæc puncta subtus adnotata, nempe tria, tot supra etiam adnotanda sunt per singulas figuras; ex illis autem primum cadit sub 5, prima figura ad dextram; deinde duobus prætermissis, aliud sub 4, quinta figura; deniq; aliud eadem lege sub 4, octaua figura. Supra puncta verò, cadunt in 5, 5, 4, continuatim, vt vides. At verò 34, est coefficiens planum, quod consistit in vltimo puncto pergendo à dextra ad læuam. Tria illa puncta superiùs posita, dicuntur puncta simplicium laterum; quoniam coefficiens est planum sublaterale. Si planum illud pluribus figuris constet, quàm vna; reliquæ figuræ prorumpere debent in anteriora, vt hic vides ad læuam prorumpentem figuram 3, numeri 34; constantis duabus figuris 3, & 4; latera verò elicientur, vt in analysi puri

Proponitur æquatio explicãda.

Quot puncta subtus notãtur, totidẽ supra, illa cubicè, hæc autem continuata serie.

Illa tria pũcta superiùs posita dicũtur pũcta simplicium laterũ, & quare.

Plani coefficiẽte pluribus cõstãte figuris, reliqua f.

cubi;

gure debēt in anteriora sinistrorsum prorūpere.

Lateris extractio, instar cubi puri.

cubi; prius enim elicitur latus cubicum 2, ex 14, numero signato per punctum inferius; huius cubus est 8, qui notari debet sub eodem puncto; adeo vt si pluribus, quàm vnica figura constaret, prorumpat in anteriora; debet enim desinere sub ipso puncto; deinde hoc primum latus 2, ducatur in coefficiens planum 34, vt fiat 68; & solidum hoc factum notetur subtus desinens sub coefficiente, vt subtractione instituta ex 8, cum quinque cifris annexis, vt ex 800000, remaneat 80068; hoc autem numero subducto ex numero 147144, remanet 67076; huic annexis duabus postrem s figuris 55, fit numerus 6707655. Modo fit transitus ad succedentia puncta, moto coefficiente plano in succedens punctum. Instituitur autem eductio secundi lateris, ad quod indagandum paratur diuisor, sumendo triplum quadratum lateris primi 2, nempe 12; vt diximus in generalibus præceptis; notaturq; sic, vt desinat sub sede Quadrati notata per Q: sumatur triplum eiusdem lateris; scribaturq; sic, vt desinat sub sede lateris notata per R; numerus, autem 34, coefficiens planum è diuisoribus esto; noteturq; sua sede, vt vides, adeo vt desinat sub puncto simplicium laterum, in quo coefficiens planum consistit; & fit summa diuisorum 126034, atq; diuisor ipse; per quem diuiso numero 6707655, fit quotiens 4. Solida verò notantur seruato ordine, vt vides, & subtrahũtur, remanetq; 882295. Modo instituenda est eductio lateris tertij, non secus ac factum fuit ad indagandum secundum; siquidem duo illa latera elicita, vnius vice, munereq; funguntur. Paratur diuisor non dissimili artificio, moto coefficiente in succedens punctum. Mouentur, & alij diuisores identidem, atq; notantur, seruata debita lege; diuisore parato, atq; reperto quotiente, solida notantur, & auferuntur, vt vides.

Secundi lateris indagatio.

Tertij lateris eductio.

Paratur diuisor ad indagandum tertium latus non secus, ac ad inuestigandum secundum.

Para-

Paradigma analyseos Cubi affecti adiunctione solidi sub coefficiente plano, & latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.		3	4	
			. . .	
Cubus affectus resoluendus	1 4	7 1 4	4 5 5	
		QR.	QR.	Puncta cubica
	C 1	C 1 1	C 1 1	
Solida in primis auferenda.	8			Cubus lateris primi.
		6	8	A latere primo in coefficiens planum.
Summa solidorum ablatitiorũ	8	0 06	8	
Reliquum resoluendi cubi affecti.	6	7 07	6 5 5	

Sublaterale ○ ○ ●

Tot puncta laterum simplicium, quot cubica, sedesue cuborum.

R 2 4
Q 4 1 6
C 8, 6 4

Tot numerales circuli, quot puncta cubica, lateraue singularia.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. Coefficiens planum.			3 4	
			. .	
Reliquum resoluendi Cubi affecti.	6	7 0 7	6 5 5	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratum lateris primi.	1	2		
Triplum latus primum.		6		
Summa diuisorum.	1	2 6 0	3 4	
Solida ablatitia.	4	8		A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
		9 6		A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		6 4		Cubus lateris secundi.
		1	3 6	A latere secundo in coefficiens planũ.
Summa solidorum auferenda.	5	1 8 5	3 6	
Reliquum resoluendi cubi.		5 8 2	2 6	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius.

III. *Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.*

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.		34	
Reliquum resoluendi cubi.		881	295	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	172	8	
	Triplum latus primum.		27	
Summa diuisorum.		173	554	
Solida ablatitia		864	0	A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
		18	00	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			125	Cubus lateris secundi.
			170	A latere secundo in coefficiens planum.
Summa solidorum auferēda æqualis residuo resoluendo cubo affecto.		882	295	

R: 2 4 5
Q 5 76 25
C 13824: 125

Examinatur radix extracta & reperitur quæstioni satisfacere. Vides igitur propositæ æquationis radicem esse 245, quæ satisfacit quæstioni: quandoquidem cubus ipsius est 14706125, huic si addatur numerus 8330, factus per multiplicationem eiusdem radicis, in planum coefficiens 34, fit 14714455. Et ita numerus inuentus est, qui ductus in sui quadratum, & in 34. facit 14714455, vt quæritur.

Quæ hactenus tradita sunt facilius absoluuntur. Proponitur explicanda æquatio. Hæc æquatio duplici Clariùs autem instituetur hunc in modum analysis. Supponamus hanc dari æquationem, nimirum 1C + 12R $=$ 12443. In numero 12443, fiat signatio per puncta quemadmodum cubica radix exposcit; nempè signentur figuræ sic initio facto à dextris, vt semper duæ ommittantur, hoc est vna signetur duabus intermissis. Cum autem numerus 12443, hac lege designatus duas habeat notas pun-

punctis indicatas; proinde duplici nota, seu figura huius æquationis radix constabit.

figura constant in radicem habet.

Primò ex primo puncto 12, subtraho cubum 8; & latus 2, supra noto vt vides: facta verò subtractione, remanet numerus 4, notandus sub linea ducta; & ei annecti debet numerus 44, qui sequitur post 12: modo 2 prima figura inuenta, ducatur in 12, numerum radicum, & fiunt 24; quibus ablatis à 444, remanet numerus 420; huic addatur postrema figura 3, existens in numero 12443; & fit numerus 4203.

Secunda figura indagatur.

Ad indagandam secundam figuram paratur diuisor hoc modo Sumatur triplum quadrati primæ figuræ, nempe 12; deinde triplum ipsius numeri 2, primæ figuræ, nempe 6; & scribatur hic numerus 6, sub 12; hac tamen cautela, vt anteceat vnius figuræ loco dextrorsum, itaut fiat numerus 126; cui addito 12, numero radicum, eodem pacto nimirũ, vt anteceat vnius figuræ spatio versus dextrã, & fiet numerus 1272; & hic est diuisor per quem diuidẽdus est numerus 4203: factaq; diuisione, emerget quotiens numerus 3; & hic est scribendus pro secunda figura quæsita. Nunc verò à numero 4203, subtrahatur numerus, qui prouenit ex multiplicatione quadrati primæ figuræ 2, nempe 12, in secundam figuram, nimirum 3; prouenit autem 36, vt patet; quo ablato ab ipso 4203, posito tamen sub 42, vt vides, & re-

	2 3
1C + 12R =	12443
	. .
	8
	———
12	444
6	24
———	———
126	420
12	36
———	———
1272	60
	54
	———
	63
	27
	———
	36
	36
	———
	00

manet 6; cui annectatur o, sequens nota in numero 420, vt fiat numerus 60; ab hoc autem detrahere debemus 6, triplum primæ figuræ 2, multiplicatum per 9, quadratum secundæ figuræ, hoc est numerum 54; factaq; detractione remanet 6; cui addita postrema nota 3, fit numerus 63: à quo primò subtrahatur 27, cubus secundæ figuræ 3, & remanet numerus 36; factaq; subtractione, remanet o; reperiemus itaq; quæsitam radicem esse 23, quod faciendum erat.

Aliud æquationis exemplum.

Non dissimili arte poterit Analysis institui, cum æquatio proponitur 1 C + 34 R = 147 1 4 4 5 5, superiùs allata, methodoq; Vietæa resoluta.

Non dissimili artificio fit satis propositæ æquationi. Prima figuræ inuentio.

Facta signatione per puncta, vt huius analysis natura exigit: sumatur latus cubicum primi numeri 14, & est 2; cuius cubo subtracto ex 14, remanet 6, numerus, cui annectantur sequentes figuræ 7144, vt fiat 67144; & ex hoc numero subducatur 68, numerus productus ex multiplicatione plani coefficientis 34, in 2, primum latus singulare: facta subtractione, remanet 67076; cui annectatur sequens figura 5, vt fiat numerus 670765.

Secunda figura qua arte reperiatur.

Ad indagandam secundam figuram paro diuisorem hac arte. Sumo 12, triplum quadrati primæ figuræ 2; & sumo 6, triplum latus primum: hos autem numeros ita dispono, vt scribendo 6, sub 12, ea lege, vt antecedat vnius figuræ spatio, fiat 126; huic autem numero annecto coefficiens planum scilicet 34, vt præcedat duarum figurarum spatio, & fiat 126034: per quem diuidatur numerus 6707655, fiet quotiens 4; licet enim 126034, numerus ingrediatur pluries in numero 6707655, quàm quater, tamen quotiens est 4, quia non possent subtrahi deinde solida subtrahenda; cum tali siquidem cautela, quotiens elici debet. Ex 6707655, aufero 48, solidum à latere secundo in quadratum lateris primi, ad eum modum, vt in paradigmate vides, & remanet 190765; à quo ablato 96, solido facto à quadrato lateris secundi in triplum lateris primi, & remanebit 94765; à quo subtracto 64, cubo lateris secundi, remanet

```
                 2    4    5
1C+34R ⊐ 1 4 7 1 4 4 5 5
             .     .     .
           8
           6 7 1 4 4
                 6 8
           6 7 0 7 6 5
           4 8
           1 9 0 7 6 5
             9 6
             9 4 7 6 5
               6 4
               8 8 3 6 5
                   1 3 6
           8 8 2 2 9 5
           8 6 4 0
             1 8 2 9 5
             1 8 0 0
                   2 9 5
                   1 2 5
                   1 7 0
                   1 7 0
                   0 0 0
```

manet 88365, à quo detracto solido facto à latere secundo 4, in coefficiẽs planum, remanet 882295.

Ad indagãdam tertiam figuram, paro diuisorem non dissimili modo. Sumo triplum quadratum lateris primi, latus autem primum, modo est 24, eius quadratum est 576, cuius triplum est 1728, deinde addo 72, triplum latus primum, ita tamen, vt antecedat vnius figuræ loco, & fit 17352; cui addito 34, coefficiente plano, fit 173554, numerus, per quem diuisis 882295, fit quotiens 5, tertia figura: modo ab hoc numero 882295, subtrahatũ 8640, solidum à latere secundo, hoc est tertia figura, in quadratum triplum lateris primi, & remanebit 18295; à quo subtrahatur 1800, solidum à quadrato lateris secundi, seu tertiæ figuræ in triplum lateris primi, & remanet 295; à quo dempto 125, cubo lateris secundi, seu tertiæ figuræ, & remanet 170; à quo dempto solido à latere secundo, seu tertia figurã in coefficiens planum, nihil remanet.

Pa-

Paradigma aliud analyseos cubi affecti adiunctione solidi sub coefficiente plano, & latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

				0 0
Coefficiens planum.			20	
			. .	R 3 7
Cubus affectus resoluendus.		51	393	Q 9. 49
				C 27. 343
Solida in primis auferenda.		27		Cubus lateris primi.
			60	A latere primo in coefficiens planum
Summa solidorum ablatitiorum		27	60	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		23	793	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.		20	
			.	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		2	3793	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.		27	
	Triplum latus primum.		9	
Summa diuisorum.			2810	
Solida ablatitia		1	89	A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
			441	A quadrato lateris secundi in triplum lateris primi.
			343	Cubus lateris secundi.
			140	A latere secundo in coefficiens planum.
Summa solidorum.		2	3793	

Si

Si itaq; propoſita ſit æquatio 1 C + 20 R = 51393, ſit radix quæſita 37, quæ ſatiſfacit quæſtioni; ſiquidem hæc ducta in ſui quadratum, & in 20, facit 51393.

	37
	37
	259
	111
37	1369
20	36
740	9583
	4107
	50653
	740
	51393

Paradigma item aliud, analyſeos cubi affecti adiunctione ſolidi ſub coefficiente plano, & latere.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens planum.		3	8.	Sublaterale
			...	Tot puncta laterũ ſimplicium, quot cubica, ſedeſue cuborum. 0 0 0 — — R 4 5, Q 16 9, C 64: 27. Tot numerales circuli quot&c.
	8 2	5 9 8	4 2 4	
	.	Q R.	Q R.	
	C 1	C 11	Q 123	
Solida auferenda	6 4			Cubus lateris primi.
		1 5	2	A latere primo in coefficiens planũ.
Summa ſolidorum ablatitiorum.	6 4	0 1 5	2	
	1 8	5 7 2	2	

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.			3 8	
				. .	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		1 8	8 8 3	2 2 4	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	4	8		
	Triplum latus primum.		1 2		
Summa diuisorum.		4	9 2 0	3 8	
Solida ablatitia.		1 4	4		A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
		1	0 8		A quadrato lateris secundi in triplum lateris primi.
			27		Cubus lateris secundi.
			1	1 4	A latere secundo in coefficiens planum.
Summa solidorum auferenda.		1 5	5 0 8	1 4	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		3	3 7 5	0 8 4	

Iam duo elicita latera vnius vice funguntur.

III. Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum cubi affecti			3 8	
				.	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		3	3 7 5	0 8 4	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadrati lateris primi.		5 5 4	7	
	Triplum lateris primi.		1	2 9	
Summa diuisorum.			5 5 6	2 8	
Solida ablatitia.		5	5 2 8	2	A latere secundo in quadratum triplum lateris primi.
			4 6	4 4	A quadrato lateris secundi in triplum lateris primi.
				2 1 6	Cubus lateris secundi.
				2 2 8	A latere secundo in coefficiens planum.
Summa solidorum auferenda æqualis residuo resoluendo cubo.		3	3 75	0 4 8	

	∘	∘	•
R	4	3	36
Q	1 8 4 9		36
C	7 9 5 0 7		216

Si

Si itaq; fuerit 1C + 38R = 82898424, fit 1R, valor 436, & satisfacit quæstioni; siquidem numerus hic ductus in sui quadratum, & in 38, facit numerum hunc 82898424.

SCHOLION.

Extat, & alter etiam explicandi modus, qui requirit praxim extrahendi radicem cubicam ex aliquo Binomio; breuiter igitur nonnulla de his in medium afferemus. *Modus alter hæc eãdem æquationem explicandi.*

Primò supponendum est ex Binomijs, quædam habere latus cubicum, quædam verò non. Hoc autem tali arte cognoscitur. Aduertendum est, num si quadrentur nomina differentia quadratorum, sit numerus cubus, etenim cum fuerit cubus, etiam binomium cubicum erit; si verò non, Binomium non erit cubicum, hoc animaduerso. *Quod primò supponendum.*

Propositi Binomij hac arte exhibetur latus cubicum. Primò quadrentur nomina, & ex illorum differentia sumatur latus cubicum. Secundò, oportet duos numeros reperire, quorum vnus sit irrationalis, seu surdus, alter verò non, quorum quadrata differant per latus cubicum differentiæ quadratorum; & vt productum triplum ex numero non surdo, in quadratum numeri irrationalis, additum cubo numeri non surdi, & simplicis faciat numerum absolutum, ac simplicem ipsius Binomij. *Propositi binomij, qua arte extrahatur latus cubicũ.*

His consideratis. Si proponatur æquatio, vt supra sumatur cubus tertiæ partis numeri radicum, & addatur quadrato dimidij numeri absoluti; nàm aggregati lateri additum, vel subtractum dimidium numeri absoluti gignit Binomium, & Apotomen, seu residuum. Si latus cubicum Apotomes, siue residui subtrahatur à latere cubico Binomij, residuum quæsitæ radicis valorem repræsentabit.

Insuper animaduertendum est plerumq; contingere (loquor de methodo Vietæ superius declarata) vt numerus absolutus æquationis plura habeat puncta, quàm figuras eius latus; Itaut sæpe sæpius in numero per tria puncta signatio reperiatur, & radix duabus constet figuris, quod tunc accidit, quando radicum nume- *Quando numerus absolutus æquationis plura habet puncta, quàm figuras eius latus.*

nume-

numerus adeo magnus est, vt subtrahi nequeat, eo quo opus est modo, tunc praetermisso primo puncto, fit deuolutio, & proceditur ad punctum vlterius.

Sit aequatio 1 C + 98600 R = 3187968. In hac aequatione cubus minor est afficiente solido; proinde cubus non tàm afficitur, quàm potius afficit. Dum igitur contingit coefficientem sub gradualem magnitudinem in anteriora produci, vltra ipsum affectum cubum, vel eo saltem loci, vt ab eo nequeat auferri; quod est argumentum, non tàm cubum affici, quàm afficere, cum cubus sit minor afficiente solido: Coefficiens ad succedentes sedes ordine reuocanda est, donec diuisio institui possit, à qua praestat initium operis sumere; quot autem figuris retrocedet, tot puncta, vel cuborum loca subtus delebuntur, à quibus erat alioquin sumendum initium.

Proponitur aequatio explicanda.

Paradigma cum solidum affectionis sub latere maius est cubo.

I. *Eductio lateris singularis primi inanis ante deuolutionem.*

Coefficiens planum.	9	860	0	Sublatere.
			. . .	Tot puncta simplicium laterum, quot cubica, sedesue cuborum.
Cubus afficiens resoluendus	3	187	968	
	.	.	.	Puncta cubica.
		QR	QR	
	C1	C11	C111	

Quoniam 9, maior est, quàm 3, fit Deuolutio.

II. Edu

II. Eductio lateris singularis primi post Deuolutionem.

Coefficiens planum principalium diuidens.	686	00	
		. .	
Cubus afficiens resoluendus.	3187	968	
	C1	Q R.	
		C1	
Solida ablatitia.	2058	00	A latere primo in coefficiens planum.
	27		Cubus lateris primi.
Summa solidorum ablatitiorum.	2085	00	
Reliquum cubi affecti resoluendi.	102	968	

0	0
R 3	2
Q 9	4
C 27	8

III. Eductio lateris singularis secundi ⁝

Diuisorum pars superior. { Coefficiens planum.	98	600	
Cubi affecti resoluendi reliquum.	102	968	
Diuisorum pars inferior. { Triplum quadratū lateris primi.	2	7	
Diuisorum pars inferior. { Triplum latus primum.		9	
Summa diuisorum.	101	300	
Solida ablatitia.	197	200	A latere secundo in coefficiens planum.
	5	4	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		36	A lateris secundi quadrato in triplum latus primum.
		8	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum æqualis residuo afficiente cubo.	102	968	

Expeditur superior methodus.

Si itaq; proposita fuisset æquatio 1 C + 98600 R = 3187968, fit 1 R, valor 32; numerus quæstioni satisfaciens; nam ductus in sui quadratum 1024, & in 98600, facit 3187968, vt præcipitur. Si enim 32, ducatur in 1024, fit 32768, cubus scilicet ipsius 32, si verò 98600, multiplicentur per 32, fit numerus 3151200, huic enim si addatur 32768, fiet numerus 3187968. Ceterũ 3187968, est cubus adiunctus solido sub latere, & dato plano 98600, est autem maius solidum cubo, quemadmodum indicat coefficientis situs eo loci; nam coefficiens vnus ex diuisoribus, à diuidendo tolli non potest; ob id in proximè succedentem locum deuolutio est facta, deleto, quoque puncto cubico ad læuam primùm occurrente subtus posito, & à diuisione potius sumendum initium, quàm à radicis extractione, cum coefficiens principaliùs diuidat, quàm ipsius lateris cubus, vel lateris quadratum.

Paradigma aliud cum solidum affectionis maius est cubo.

I. Eductio lateris primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens planum	9	5 68	8	Sublaterale.
			· · ·	
Cubus affectus resoluendus.	3	1 4 9	8 8 8	
	·	·		
		Q R	Q R	
	C I	C II	C III	

	0	0
R	1	2
Q	1,	4
C	1,	8

Quoniam 9. maior est, quam 1, fit Deuolutio.

II. *Eductio lateris singularis primi post Deuolutionem.*

Coefficiens planum principalius diuidens.	956	80	
		..	
Cubus afficiens resoluendus.	1148	888	
	C1	C11	
Solida ablatitia.	956	80	A latere primo in coefficiens planum;
	1		Cubus lateris primi.
Summa solidorum ablatitiorum	957	80	
Cubi affecti resoluendi reliquum.	191	088	

III. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.	95	680	
Cubi affecti resoluendi reliquum,		191	088	
			..	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadrati lateris primi.		3	
	Triplum latus primum.		3	
Summa diuisorum.		96	010	
Solida ablatitia.		191	360	A latere secundo in coefficiens planum;
			6	A latere secundo in triplum quadratum primi.
			12	A lateris secundi quadrato in triplum latus primum.
			8	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum auferenda equalis residuo resoluendo afficiente cubo.		191	088	

Itaq;

Itaq; 1149888, est cubus adiunctus solido sub latere, & 95680, dato plano; est autem maius solidum cubo, vt indicat situs coefficientis eo loci; vt cum ipsa è diuisoribus sit, à sui diuidendo tolli non potest. Ac proinde in proximè succedentem locum facta est deuolutio; debeturq; est quoq; punctum cubicum, quod ad læuam primùm occurrebat. Cæterum à diuisione potius initium deductum fuit; quàm à radicis eductione, cum coefficiens principaliùs diuidat, quàm ipsius lateris cubus, vel lateris quadratum.

Compendiosius, quæ tradita sũt absolui posse declaratur.

Compendiosiùs autem hoc modo, sit æquatio altera.

$$1C + 95680R = 1149888$$

			1			2
1	1	4	9	8	8	8
·			·			·
			1			
1	1	4	8	8	8	
	9	5	6	8	0	
	1	9	2	0	8	8
				6		
	1	9	1	4	8	
				1	2	
	1	9	1	3	6	8
						8
	1	9	1	3	6	0
	1	9	1	3	6	0
	0					0

Prætermisso primo puncto, subtraho cubum ipsius 1, abs 1149; etenim primam lateris figuram dico esse 1, facta subtractione, remanet numerus 1148, iuxta quam ad dextram scribo sequentem numerum 88; vt fiat numerus 11488; ab hoc subtraho numerum productum ex multiplicatione 1, primæ figuræ in ipsum numerum radicum, nimirum 95680, remanetq; numerus 19208; cui appono postremam figuram 8, vt fiat numerus 192088.

Inuentio secundæ figuræ.

Ad indagandam secundam figuram, parò diuisorem hac arte; Sumo 3, nempe triplum quadrati primæ figuræ; deinde sumo 3, triplum eiusdem 1, primæ figuræ, & addo 3, triplum eiusdem 1, ad 3, triplum quadrati ipsius 1; hac tamen conditione, vt triplum ipsius primæ figuræ, col-

collocetur sic, vt anteeat versus dextram vnius figuræ loco; itaut fiat numerus 33; cui obseruata eadem cautela antecessionis addo 95680, numerum radicū, vt fiat 96010, & hic numerus erit diuisor quæsitus, per quem nimirum diuidendus est numerus 192088, facta diuisione fit quotiens 2, & est secunda figura quæsita. Modo sumatur 3, triplum quadrati primæ figuræ 1, & ducatur in 2, secundam figuram fit 6, & subducatur à 192088, hac lege, vt collocetur sub antepenultima, nempe 0, & remanebit numerus 1914; iuxta quem scribatur sequens figura 8; vt fiat 19148; Sumatur autem 3, triplum primæ figuræ, & ducatur in 4; quadratum secundæ figuræ, & fiet numerus 12, quo subtracto à 19148, remanet 19136; huic apponatur postrema figura 8, vt fiat numerus 191368, de quo detrahatur 8, cubus secundæ figuræ, & remanebit 191360; nunc autem ducatur numerus 95680, in 2, secundam figuram, & fiet numerus 191360; quo detracto de ipso 191360, superiùs seruato, remanet 0.

Methodi explicandi æquationem inter C — R, & N.

Methodus Girardi.

PRoponatur æquatio $1C \sqsubset 8R + 10472$. Partes aliquotæ numeri absoluti disponantur, vt vides; nempe, vt binæ contrapositæ si inter se ducantur, efficiant 10472. *Girardi methodus explicatur.*

1 —	10472	14 —	748
2 —	5236	17 —	616
4 —	2618	22 —	476
7 —	1496	34 —	308
8 —	1309	44 —	238

De-

Deinde vtraq; æquationis pars diuidatur per 1R, & fiet æquatio 1 Q $=$ 8 $+ \frac{10472}{1R}$. Hoc est 8, additus vni ex partibus aliquotis ipsius numeri 10472; constituit quadratum lateris, seu 1R; ea verò est eligenda pars aliquota, cui additus 8; facit quadratum alterius partis coefficientis correlatæ, vt in nostro exemplo reperiemus partem ipsam esse 476, & 1R, pretium erit 22.

Generalis Methodus Vietæ.

Vieta methodus proponitur.

E *Dato in numeris cubo affecto mulcta solidi sub latere, & dato coefficiente plano, latus analyticè elicere.*

Si proponatur cubus negatè affectus, vt exempli gratia 1 C — 16 R $=$ 46080; non dissimili modo procedendum erit, ac in analysi cubi affirmatè affecti solùm inter se differunt æquationes, quòd in istarum analysi dum diuisio instituitur; coefficientis plani, & regularium in cubo puro diuisorum differentia attendi debet; Secus autem in illarum æquationum analysi, in quibus, dum cubus affirmatè afficitur, summa debet attendi. Præterea solidum factum, dum singularia latera ducuntur in idem coefficiens planum desinens sub sede ipsius coefficientis, addendum est negatè affecto cubo, vel auferri debet (in idem enim recidit) à solidis ablatitijs; cum tamen in cubo affirmatè affecto opposito modo procedendum esset, siquidem subducebatur cubo affirmatè affecto, vel addebatur solidis ablatitijs. Hæc autem omnia in sequenti paradigmate intueri licebit. Vt in eductione primi lateris, idem est addere 48, solidum à latere primo, in coefficiens planum, addere inquam ad 46080; ita tamen, vt desinat quemadmodum vides sub puncto, vbi coefficiens consistit; & ex aggregato subducere 27, cubum lateris primi; idem est, ac 48, subducere ex 27, assumente duas cifras: sic etiam in extractione secundi lateris; nam si 96, solidum à latere secundo in coefficiens planum, subduxeris ex

19656,

19656, remanet 19560, quo subtracto ex 19560, nihil remanet; si idem numerus 96, addideris cubi affecti resoluendi reliquo, fiet 19656; à quo si subtraxeris 19656 summam ablatitiorum, nihil pariter remanebit; hoc ex adiuncto paradigmate conspicitur; quod etiam in alio subsequenti, analyseos cubi acephali licebit obseruare. Erat autem oppositus processus in æquatione, in qua cubus afficiebatur adiunctione solidi sub coefficiente plano, & latere; cum enim proponeretur 1 C + 34 R = 14714455: erat cubus lateris primi 8; & 68, erat solidum à latere primo in coefficiens planum; hoc autem, vel addebatur 8, assumenti quatuor cifras, & summa 80068, auferebatur à 14714455, desinente tamen numero 80068, sub puncto, vbi coefficiens consistit; vel subtrahebatur, eadem seruata lege, à numero 14714455, cubo affecto resoluendo; vtrouis enim modo opereris, habebis 6707655, pro reliquo resoluendi cubi affecti: quod autem de primo latere diximus, illud quoq; de secundo omnino est intelligendum, &c.

Paradigma analyseos cubi affecti multa solidi sub coefficiente plano, & latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.			16	Sublaterale.
			. .	Tot puncta laterum simplicium, quot cuborum
		46	080	
		.	.	Puncta cubica.
Solida prosthaphæretica.	Ablatitium.	27		Cubus lateris primi.
	Addititium.		48	
Excessus solidi ablatitij.		19	52	
Reliquum cubi affecti resoluendi.		19	56	

	.	.
R.	3	6
Q.	9	36

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.		16	
			..	
Reliquum cubi affecti resoluendi.		19	560	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	2	7	
	Triplum lateris primum.		9	
Differentia diuisorum.		2	774	
Solida ablatitia.		16	2	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		3	24	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			216	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.		19	656	
Solidum addititium.			96	A latere secundo in coefficiens planum.
Excessus ablatitiorum æqualis reliquo resoluendi cubi affecti.		19	560	

Qua arte id compendiosiùs assequi valeamus.

Compendiosiùs elicitur radix propositæ æquationis non dissimili modo, ac superiùs fecimus agentes de analysi æquationis, in qua cubus affirmatè afficitur; solùm illud interest, quod iam adnotauimus, vt differentia attendatur in diuisione instituenda; differentia inquam coefficientis plani, & regularium in cubo puro diuisorum; cum in æquatione cubi affirmatè affecti, summa esset attendenda; cætera verò sunt obseruanda, quæ iam explicuimus agentes de methodo Vietæa.

Eadem equatio cōcendiosiùs explicatur.

Dico igitur latus cubicum numeri 46; esse 3, huius cubus est 27, quo subtracto ex 46, remanet 19; huic annectantur duæ sequentes figuræ 08, vt fiat 1908, huic addatur 48, numerus factus ex 3, prima figura in 16; numerum

ra-

radicum, & fiet 1956; huic annectatur o, vt fiat 19560; modo ad indagandam secundam figuram, paro diuisorem hoc arte; sumo triplum quadrati primæ figuræ, & est 27; deinde sumo triplum eiusdem primæ figuræ, scilicet 9; annecto hanc figuram illis, vt fiat 279, additionem enim instituo adhibita cautela, vt antecedat vnius figuræ spatio; ex 279; subducto 16, numero radicum, facta subtractione ea lege, vt vides (si cubus esset affirmatè affectus institueretur additio) fit 2774, diuisor; per quem si diuidatur 19560, fit quotiens 6; & secunda figura: modo duco 6, in 16, numerum radicum, & fit 96, numerus; qui additus ad 19560, (si cubus esset affirmatè affectus, auferretur) & fit 19656; à quo subducto 162, solido à latere secundo, siue secunda figura, in triplum quadratum lateris primi, & remanet 3456; à quo subtracto 324, numero producto à quadrato lateris secundi, in triplum latus primum, remanet 216; à quo subtracto 216, cubo ex 6, nihil remanet, &c.

Indagatur secunda figura.

	3 6
1C—16R ⫫ 46080	
	27
	1908
27	48
9	19560
279	96
16	19656
Diuisor 2774	162
	3456
	324
	216
	216
	0 0

Paradigma analyseos cubi acephali sub latere affecti.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	1 1	6 6 2	•	
			. . .	
Cubus resoluendus mutilus.	0	3 5 2	9 4 7	
	.	QR.	QR.	
	C I	C II	C III	
Solida prosthaphæretica. Addititium.	3 4	9 8 6	0	A latere primo in coefficiens planum.
Solida prosthaphæretica. Ablatitium.	2 7			Cubus lateris primi.
	7	9 8 6	0	
Reliquum restituti resoluendi mutili cubi.	8	3 3 8	9 4 7	

R	3 . 4
Q	9 . 16
C	27 . 64

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. Coefficiens planum.	1	1 6 6	2 0	
			. .	
Reliquum resoluendi cubi affecti	8	3 3 8	9 4 7	
		.	.	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratum lateris primi.	2	7		
Diuisorum pars inferior. Triplum latus primum.		9		
Excessus diuisorum inferiorum.	1	6 1 5	8 0	
Solida ablatitia.	1 0	8		A latere secundo in triplum quadratum primi.
	1	4 4		A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		6 4		Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.	1 2	3 0 4		
Solidum addititium.	4	6 6 4	8 0	A latere secundo in coefficiens planũ.
Excessus ablatitiorum.	7	6 3 9	2 0	
Reliquum resoluendi cubi affecti.	6	9 9	7 4 7	

Iam duo elicita latera vnius vice funguntur, & fit.

III. Edu-

III. Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.

Diuisorum pars superior. Coefficiens planum.	116	620	
Reliquum resoluendi cubi affecti	699	747	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratum lateris primi.	346	8	
Diuisorum pars inferior. Triplum latus primum	1	02	
Excessus diuisorum inferiorum.	231	200	
Soli da ablatitia.	1040	4	A latere secundo in triplum quadratum primi.
	9	18	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		27	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.	1049	607	
Solidum adsititium.	349	860	A latere secundo in coefficiens planum.
Excessus ablatitius æqualis reliquo resoluendo cubo.	699	747	

	c	o	o
R	3	4	3
Q	1156		9
C	393041		27

Quoniam igitur aliquando contingit, vt coefficiens planum pluribus abundet binis figuris, quàm cubus negatè affectus sub latere ternis, quod est argumentum solidum afficiens maius esse resoluendo affecto negatè cubo. Hic cubus acephalus dicendus est; quasi capitis expers, postulat autem peculiarem analysim; quam vt instituamus oportet præponere mutilo proposito cubo, eam numeralium circulorum multitudinem; vt tot puncta cubica possint ei præfigi, quot quadratica plano coefficienti. Radix autem educta è plano coefficiente, tanquam quadrato,

Quando coefficiens planũ pluribus abundat binis figuris, quã cubus negatè affectus sub latere ternis.

drato, si cætera consentiant, sin minùs, proximè maior, constitui debet latus singulare primum ipsius resoluendi cubi negatè affecti; non immutata methodo quantum ad reliqua.

Ita planè in superiori Paradigmate, in quo 352947, cubus est multatus solido sub latere, & plano 116,620; est autem maius solidum 116620R, solido resoluendo 35294; quoniam coefficienti plano 116620, præfigi possunt tria puncta quadratica, solido verò 352947, duo tantùm puncta cubica: ob id solido 352947, resoluendo præpositus est numeralis circulus, & coefficienti sua sedes adijcitur. Initium autem operis desumitur, ab extractione radicis quadratæ, quæ lateri cubi resoluendi consentiat, vt etiam constat, in adiuncto Paradigmate.

Paradigma analyseos Cubi acephali sub latere affecti.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	15	452	0	
			. . .	
Cubus affectus resoluendus mutilus.	0	673	475	
	.	QR.	QR.	
	C1	C11	C111	
Solida prostaphæretica.	46	296	0	A latere primo in coefficiens planum.
	27			Cubus lateris primi.
Excessus addititij.	19	296		
Reliquum restituti resoluendi mutili cubi.	19	969		

0	0	0
R: 3	9	
Q 9:	81	
C 27:	729	

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Coefficiens planum.	1	543	20	
			...	
Reliquum resoluendi cubi affecti	19	969	475	
		.	.	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratũ lateris primi.	2	7		
Diuisorum pars inferior. Triplum latus primum.		9		
Excessus diuisorum inferiorum	1	246	80	
Solida ablatitia.	24	1		A latere secundo in triplum quadratum primi.
	7	29		A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		729		Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum	32	319		
Solidum additium.	13	888	80	A latere secundo in coefficiens planũ
Excessus ablatitiorum.	18	430	20	
Reliquum resoluendi cubi affecti.	1	539	275	

Iam duo elicita latera funguntur vice vnius, & fit.

III. Eductio lateris singularis tertij.

Diuisorum pars superior. Coefficiens planum.	154	320	
		.	
Reliquum resoluendi cubi affecti	1539	275	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratum lateris primi	456	3	
Diuisorum pars inferior. Triplum latus primum.	1	17	
Excessus diuisorum inferiorum.	103	150	
Solida ablatitia.	2281	5	A latere secundo in triplum quadratum primi.
	29	25	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		125	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.	2310	875	
Solidum additium.	771	700	
Excessus ablatitius æqualis reliquo resoluendo cubo.	1539	275	

	0	0	0
R	3	9	5
Q	1521		25
C	59319		125

Et

Explicantur hactenus dicta. Et ita dum proponitur æquatio 1 C — 1 5 4 3 2 0 R = 1 5 3 9 2 7 5, fit 1 R, valor 395, numerus planè quæstioni satisfaciens; ab huius enim cubo 1 2 1 2 8 3 7 5, si auferatur 6 0 9 5 6 4 0 0, numerus factus per multiplicationem numeri 1 5 4 3 2 0, in 3 9 5, remanebit 1 5 3 9 2 7 5: satisfacit igitur quæstioni, per quam proponebatur, numerum inuenire, qui ductus in sui quadratum diminutũ 154320, facit 1539275; hoc est, numerum inuenire, quo ducto in sui quadratum, & à producto ablato producto ex eodem in 154320, remaneat 673475. Quod si negatè affectus cubus, tot constet ternis figuris, quot planum coefficiens binis; interdum eo loci prorumpit, vt nisi Analysta rationem eius habuerit, non rarò in ipsa extractione radicis eludetur. Præstat eo casu, vt ab ipso plano coefficiente tanquam quadrato, eruatur sub congruente puncto radix; cuius cubus subintelligatur adiungi proposito cubo affecto, atq; adeo ex eo ita adaucto latus eliciatur. Illud enim erit, vel consentaneum, vel consentaneo proximè minus. Vt si proposita foret æquatio 1 C — 6400 R = 153000, ordinatis ad opus figuris iuxta Artis præcepta. Quoniam igitur radix quadrata numeri 64, est 8, cuius cubus est 512; qui additus ad 153, facit 665; at latere cubi 665, proximè maius est 9; sumetur latus 9, pro quæsita radice.

		6	4	0	0
				.	.
1	5	3	0	0	0

Methodi explicandi æquationem inter R — C, & N.

Methodus Girardi.

Girardi methodus explicatur. Proposita sit æquatio 1 C = 1 2 4 R — 2 4 0. Disponantur partes aliquotæ, vt supra, &c. diuidatur vtraq; æquationis pars per 1 R; fit 1 Q = 1 2 4 — $\frac{240}{1 R}$:

hoc

hoc est, si à 124, numero R, auferatur pars aliqua aliquota numeri absoluti 240, nempe 24, remanet quadratum numeri 10, videlicet 100, cuius ℞ est 10; & altera pars coefficiens, correlata; itaq; 10, erit 1R pretium, & est maius latus: si verò à numero 124, subtrahamus 120, remanet 4, quadratum alterius partis, nempe 2; & 2, erit latus minus.

Generalis Methodus Vietæ.

E *Dato in numeris solido sub latere, & data coefficiente plana magnitudine, affecto multa cubi, latus analyticè elicere.*

Quando potestas negatur de homogenea sub gradu, latus est anceps; quamobrem æquatio adinuenta de duobus lateribus explicabilis est, atq; adeo Problemati duplex latus satisfacit; quorum vnius quadratum minus est triente datæ coefficientis planæ magnitudinis, alterum maius; ita vt si triplum solidum, quod est homogeneum comparationis, applicetur ad duplum plani coefficientis datæ magnitudinis, orietur longitudo maior radice minori, & minor radice maiori. *Vieta methodus generalis declaratur.*

Paradigma primum analyseos cubi auulsi à solido sub latere ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficient planum.	6 4	6 8	Sublaterale.	0	0
		. .		R: 3	6
Solidum sublatere mulctatum lateris resoluendo cubo.	1 8 6	1 9 2		Q 9:	36
	.	Q R.		C 27:	216
	C 1	C 11			
Solidum restituens.	2 7		Cubus lateris primi.		
Solidum restitutum.	2 1 3	1 9 2			
	1 9 4	0 4	A latere primo in coefficient planum.		
Excessus solidi restituti, reliquumue resoluendi cubi auulsi.	1 9	1 5 2			

II. Edu-

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior	Coefficiens planum.	6	468	
			.	
Reliquum resoluendi cubi auulsi.		19	152	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	2	7	
	Triplum latus primum.		9	
Excessus diuisorum superiorum.		3	678	
Solida additítia		16	2	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		3	24	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			216	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum additítiorum.		19	656	
Solidum ablatitium.		38	880	
Excessus solidi ablatitij, æqualis residuo resoluendo cubo auulso.		19	252	

Ad inda-gandam radicem maiorem.

Latus igitur vnum è duobus, de quibus æqualitas explicari potest, ipsumq; minus erit 36, si fuerit æquatio huiusmodi 6468 R — 1 C $=$ 186192. Si velimus autem radicem maiorem, applicemus 186192, solidum ad 36, & oriens planum 5172, compositum erit ex quadrato maioris, & rectangulo sub maiore, & minore. Idem etiam planum relinquitur, si ab 6468, auferatur 1296, quadratum ex 36.

Dico

Dico igitur maiorem radicem esse 1 R, eius quadratum est 1Q, ducatur 1R in 36, & fit 36R, addantur, & fit summa 1 Q + 36 R = 5172 *Aequationis indagatio, ad inquirendam radicē maiorem.*

18	324
18	5496
144	℞ 5496
18	18
324	℞ 5496 — 18 latus maius.
	℞ 5496 — 18

— ℞ 1780704 + 324

5496 — ℞ 1780704

5820 — ℞ 7122816

7 ℞ 122816 — 648 Productum ex numero radicū, seu coefficiente, in Radicis pretium.

5172

Paradigma primum analyseos cubi auulsi à solido sub latere ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	131	04	Sublaterale.
		..	
Solidum sublaterale multatum lateris resoluendo cubo.	155	520	
	.	QR.	
Solidum restituens.	C1	C11	Cubus lateris primi.
Solidum restitutum.	156	520	
	131	04	
Excessus solidi restituti reliquumue resoluendi cubi auulsi.	25	480	

	0	0
R	1	2
Q	1	4
C	1	8

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.	1 3 | 1 0 4	
Reliquum resoluendi cubi auulsi		2 5 | 4 8 0	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	| 3	
	Triplum latus primum.	| 3	
Excessus diuisorum superiorum.		1 2 | 7 7 4	
Solida ablatitia.		| 6	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		| 1 2	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		| 8	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum additiciorum.		| 7 2 8	
Solidum ablatitium.		2 6 | 2 0 8	A latere secundo in coefficiens planum.
Excessus solidi ablatitij æqualis residuo resoluendo cubo auulso.		2 5 | 4 8 0	

Dum itaq; proponitur æquatio $13104 R - 1 C = 155520$ fit $1 R$, pretium 12, & satisfacit quæstioni.

Paradigma secundum cubi auulsi à solido sub latere, admuenienđum radicem maiorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	1	3 1 0	4	Sublaterale. 0
			. . .	R 1, Q 1, C 1
Solidum sub latere mulctatum lateris cubo acephalum.	0	1 5 5	5 2 0	
Solidum restituens.	1			Cubus lateris primi.
Solidum restitutum.	1	1 5 5	5 2 0	
Solidum principale minuendum.	1	3 1 0	4	A latere primo in coefficiens planum.
Excessus solidi principalis, reliquumue resoluendi cubi.		2 5	4 8 0	

II. Edu.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.	131	04
Reliquum resoluendi cubi auulsi.		154	880
Diuisorũ pars superior.	Triplum quadratum lateris primi.	3	
	Triplum latus primum.	3	
Excessus diuisorum inferiorum.		198	960

III. Eductio lateris singularis tertij, vt secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens planum.	13	104	
Reliquum resoluendi cubi auulsi.		154	880	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	30	0	
	Triplum latus primum.		30	
Excessus diuisorum inferiorum.		17	196	
Solida ablatitia.		240	0	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		19	20	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			512	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum ablatitiorum.		25	712	
Solidum addititium.		104	832	A latere secundo in coefficiens planum.
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendo cubo.		154	880	

	0	0	0
R	1	0	8
Q	100:		64
C	100:		512

Ex

Ex Vieta hoc exemplum desumpsimus, in quo æquatio explicabilis est, de duplici latere, quorum vtrumq; in numeris exhibetur rationalibus; minor ue radix est 12, maior autem est 108; quemadmodum in superiori Paradigmate cernere licet.

Expeditiùs sic. Sit ęquatio 13104R—1C = 155520

Sumo latus cubicum numeri vsq; ad primum punctum scilicet 155; illudq; dico esse 1, cuius cubus est 1, quem scribo sub puncto, & latus 1, noto superiùs; ducta linea addo 1, cubum primi lateris ad 155, vt fiat 156; cui annecto 52, sequentes figuras, vt fiat numerus 15652, à quo subtraho 13104, numerum factum ex multiplicatione numeri 13104, in 1, primam figuram, & remanet 2548; huic annecto 0, postremam notam propositi numeri resoluendi, & fit 25480.

```
        1 2
     155520
        . .
        1
     ------
     15652
     13104
     ------
     25480
       6
     ------
     26080
        12
     ------
     26200
         8
     ------
     26208
     26208
     ------
     0    0
```

Secunda figura indagatur. Ad indagandam autem secundam figuram, siue secundum singulare latus, scribatur numerus radicum 13104; sumatur triplum quadrati primæ figuræ, & est 3, noteturq; sub ante penultima figura; deinde sumatur triplum eiusdem 1, constituaturq; sub penultima: fiat subtractio, remanet 127774. Hæc autem constitutio figurarum, non est casu facta, vt tyronibus videtur, sed ratione, vt patet, ex ijs, quæ superiùs demonstrauimus: est autem 12774, diuisor

```
13104
  33
-----
12774  Diuisor.
```

uiſor, per quem diuidendus eſt numerus 25480; fit autem quotiens 2; eſtq; ſecunda figura quæſita. Sumatur triplum quadrati 1, primæ figuræ, & eſt 3, ducatur in 2, ſecundam figuram, & fit 6, ſcribatur ſub 4, antepenultima figura, & fit 260, huic ſi adiungatur 8, penultima figura, fit 2608, huic autem additur 12, productum à 3, triplo 1, primæ figuræ, in 4, quadratum 2, ſecundæ figuræ, & fit 2620, cui annectatur 0, poſtrema figura, vt fiat 26200; cui addatur 8, cubus ſecundæ figuræ, vt fiat 26208: ab hac autem ſumma oportet ſubtrahere 26208, numerum productum à 13104, numero radicum, in 2, ſecundam figuram, & remanet 0: erit 1R, valor 12.

Vt autem indagemus radicem maiorem, diuidatur 155520, per 12, latus minus, & proſilit in quotiente 12960; numerus etiam, qui reperitur, ſubducto 144, quadrato ipſius 12, remanet enim 12960; hic autem numerus æqualis eſt quadrato lateris maioris, plus producto maioris in minus: Itaq; ſi dicamus maius eſſe 1R, eius quadratum eſt 1Q; ſi verò ducamus 1R, in 12, fit 12R; erit igitur 1Q + 12R = 12960; huius autem æquationis radicem comperiemus eſſe 108.

Si propoſita fuiſſet æquatio 13104R — 1C = 155520: Inſtituitur etiam analyſis ad radicem indagandam; quemadmodum cernere licet in adiuncto paradigmate; eſt autem cubus acephalus, præpoſita verò nota 0155520; factaq; ſignatione per puncta inſtituetur analyſis.

Fiat ſignatio per puncta, vt vides conſtituatur latus ſingulare primum 1, cuius cubo 1, addito ad numerum reſoluendum fit ſumma 155520; cui ſubſcripto 13104, numero facto ex 13104, in 1, primum ſingulare latus, & facta ſubtractione illius ab hoc, remanet 154880. *Huius æquationis analyſis inſtituitur compendioſius.*

Ad indagandam ſecundam figuram, ſumatur triplum primæ, & eſt 3; deinde ſumatur triplum eiuſdem 1, & collocetur, vt vides, fit 33; ſubſcribatur 13104, coeſſiciens, & ſubtracto 13104, ab 33, adiunctis numeralibus circulis 000, remanet 19896; per quem diuiſis 1548, fit quotiens

tiens o, & o, est secunda figura, noteturq; in radice 1000 sibi consentaneo, supra punctum secundum sibi addictum.

```
                              1     0     8
13104 R — 1 C ⊐ 0 1 5 5 5 2 0

300          30        1
  8          64
-----        -----     1 1 5 5 5 2 0
2400         1920      1 3 1 0 4

3                      1 5 4 8 8 0
 3                     1 0 4 8 3 2
-----                  -----------        8
13104                  2 5 9 7 1 2        8
                       2 4 0 0            ---
19896 primus di-       -----------        64
      uisor.             1 9 7 1          8
300                      1 9 2 0          ---
  30                     -------          512
-----                        5 1 2        -----
13104                        5 1 2        13104
-----                        -----        8
17196 secundus di-               0        -----
      uisor.                              104832
```

Modo indagetur tertia figura non dissimili artificio parando nimirum primo diuisorem; scilicet sumpto quadrato triplo primi lateris, & triplo primo latere, notatisq; vt fiat 30300, ab hoc ablato 13104, remanet 17196, numerus diuisor, per quem diuiso 154880, fit quotiens 8, &c.

Sit proposita æquatio 264 R — 1 C ⊐ 1600 etsi prima facie radix duabus constare figuris videatur; vnica tamen figura constat: est igitur 8, huius cubus est 512, quo addito ad 1600, fit 2112; à quo subtracto 2112,

```
1 6 0 0
  5 1 2
-------
2 1 1 2
2 1 1 2
```

nume-

numero facto ex 264, in 8, nihil remanet; erit autem 8, latus minus: habebitur maius methodo superius explicata.

Proposita sit æquatio 4 3 8 R — 1 C ⊐ 3 2 1 3 & non dissimili modo reperiemus latus minus esse 9, maius reperietur vt supra.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 3\,2\,1\,3 \\ 7\,2\,9 \\ \hline 3\,9\,4\,2 \\ 3\,9\,4\,2 \\ \hline \end{array}$$

Hoc modo dicebamus in nostro opere Algebrico, quod elapsis annis Typis mandauimus, si sit æquatio 4 8 R — 1 C ⊐ 7 2, latus quæsitum esse 6, cuius cubum 216; addo numero absoluto 72, vt fiat 288, de quibus detraho 288, productum ex 6, latere inuento in 48, numerum radicum, & remanet o, quoniam autem est æquatio amphibola, proinde duplicem habet radicem. Alteram autem sic inuenio; à numero radicum, puta 48, aufero 36, quadratum inuentæ radicis 6; & remanet 12; aut numerum 72, diuido per 6, radicem inuentam, & fit, quotiens 12, vt supra, quo facto sic procedo: quæsita ℞ sit 1 R, cuius quadrato, nempè 1 Q, addo 6 R, numerum productum ex 1 R, in 6, prius inuentam radicem, & fit summa 1 Q ✠ 6 R. Quoniam autem numerus prius inuentus, & seruatus nempe 12, componitur ex quadrato secundæ radicis quæsitæ, & numero producto ex eadem radice, in primam radicem inuentam multiplicato; ob id erit 1 Q ✠ 6 R ⊐ 12: cuius æquationis explicatæ reperitur radix ℞ 21 — 3, & secunda radix quæsita.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 48R - 1C ⊐ \;\; 7\,2 \\ 2\,1\,6 \\ \hline 2\,8\,8 \\ 2\,8\,8 \\ \hline 0\;\;\;0 \end{array}$$

SCHOLION.

IN hac æquatione contingit non raro opus esse deuolutione, de qua supra egimus; & sæpè intelligendam esse præpositam numero notam o: sed de Aequatione Amphibola, plura in Algebra Speciosa. Cæterum per modum alterum, &c. Numerus absolutus obiecto signo — assumat +, vt transmutetur æquatio in hanc C — R = N. Secundo à quadrato lateris per transmutatam æquationem inuenti subtrahatur numerus Radicum, & residuum seruetur. Tertiò à quadrato dimidij lateris inuenti per æquationem transmutatam subducatur residuum seruatum, vel ablatum, à dimidio lateris inuenti per æquationem transmutatam summa, vel residuum dabit radicis valorem.

Methodus explicandi æquationem inter C + Q, & N.

E Dato in numeris cubo affecto adiunctione solidi sub lateris quadrato, & data coefficiente longitudine, latus analyticè elicere.

Huius methodi explicatio. Inter genesim cubi puri, & huius affecti cubi, hoc interest, quòd in hac quadratum lateris singularis primi ducendum est in coefficientem longitudinem: deinde verò latus secundum in duplum rectangulum sub latere primo, & coefficiente longitudine: atq; demum eiusdem secundi lateris quadratum per ipsam quoq; coefficientem longitudinem multiplicandum est. Hæc enim huius affecti cubi genesis ordinata, addit genesi cubi puri, superiùs explicatæ.

Quid intersit inter genesim cubi puri, & affecti per adiunctionem solidi sub lateris quadrato, &c.

Quo pacto procedendū in hoc analysi. Vt autem ex huiusmodi cubo affecto eruantur latera; non secus, ac in præcedentibus adnotauimus, sedes vnitatum singulares cubos metientium constituendæ sunt, atq; designandæ sunt punctis subtus collocatis; & quot fuerint sedes cuborum, punctaue; tot etiam quadratorum sedes, per binas nimirum alternas figuras (siquidem coefficiens est subquadratica) debent desuper collocari. In vltima verò sede quadratorum, prima tamen à læua ad dextram procedendo ipsa coefficiens consistet, ac proinde si pluribus figuris, quàm vna constet, reliquæ in anteriora prorumpent, quemadmodum in sequenti paradigmate videbimus. Vt autem in analysi puri cubi; ita in hoc eliciuntur latera: hoc animaduerso tantùm, quod ipsa coefficiens est è numero diuisorum, seu inter diuisores recensetur; præterea post eductionem lateris singularis primi, planum sub coefficiente, & duplo singularis lateris primi, eam est sedem occupaturum, quæ in anteriora proxima est à puncto, in quo coefficiens ipsa consistit. Hoc autem planum expletionis nuncupatur.

Coefficiens inter diuisores recensetur.

Planum expletionis quid.

Quadrata verò laterum elicitorum in coefficientem ipsam, & latera in expletionis planum ducuntur; desinere verò debent solida facta sub congrua sede, qualem videlicet multiplicationis ratio postulat, & hæc debent auferri cum reliquis solidis ex affecto cubo.

Quadrata elicitorum latera in coefficientem ducuntur, & latera in planum expletionis.

Cæterum coefficiens in succedentia loca quadratorum, præeunte semper suo expletionis plano subijcitur ordinatim, & diuisores etiam subtus reliqui moueri debent, non dissimili modo: sed hæc omnia faciliùs deprehendentur ex infra posito paradigmate, in quo cernes obseruata præcepta iam tradita; fit enim figurarũ signatio, quemadmodum in analysi puri cubi dictum est; adnotantur etiam desuper quadratorum sedes per puncta illa, quę quadratica dicuntur; extrahitur latus cubicum, vsque ad primum punctum ad læuam, & ad cubum extracti lateris, puta ad 216, additur 432, solidum à quadrato lateris primi, in coefficientem; summa verò subducitur numero resoluendo 311296, vt remaneat 52096: fit autem expletionis planum 144, à coefficiente 12, in 12, duplum lateris primi; & cætera fiunt, quæ facilè ex paradigmate discerni possunt.

Paradigma analyſeos cubi affecti adiunctione ſolidi, ſub coefficiente longitudine, & lateris quadrato.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.	12		Subquadratica
	.	.	
Cubus affectus reſoluendus	311	296	
	.	QR.	Puncta cubica.
	C 3	C 11	
Solida ablatitia	216		Cubus lateris primi.
	43	2	Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.
Summa ſolidorum ablatitiorũ.	259	2	
Reliquum reſoluendi cubi affecti.	52	099	

Tot ſedes punctaque quadratorum, quot cuborũ: 0 0; R 6 4; Q 36, 16; C 216, 64. Tot numerales circuli, quot puncta cubica.

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior.	Planum expletionis à coefficiẽte in duplum lateris primi.	1	44	
	Coefficiens longitudo.		12	
Cubi affecti reſoluendi reliquum.		52	096	
Diuiſorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	10	8	
	Triplum latus primum.		18	
Summa diuiſorum.		12	432	
Solida ablatitia facta diuiſoribus.	Inferioribus, & præcipuis	43	2	A latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.
		2	88	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
			64	Cubus lateris ſecundi.
	Superioribus.	5	76	A latere ſecundo in planum expletionis.
		1	92	A quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudine.
Summa ſolidorum auferenda, æqualis reliquo reſoluendi Cubi.		52	096	

Sic

Sit æquatio 1 C + 12 Q = 311296 (6 4)

```
            311296
            216
            ------
             952
             432
            ------
             52096
   108       432
    18      ------
   144        889
    12        288
  ------     ------
Diuisor 12432  6016
                 64
              ------
               5952
               576
              ------
                192
                192
              ------
                0  0
```

Compendiosiùs hoc modo. Dico latus cubicum numeri 311, esse 6, cuius cubus est 216, subtractus à 311, relinquit 95; cui annexa sequente figura 2, fit 952.

Ad indagandam secundam figuram paro diuisorē hac arte. Scribo 108, triplum quadrati ex primo latere 6, & ei addo 18, triplum eiusdem lateris ea lege, vt antecedat vnius figuræ spatio, & fit 1098; huic addo 144, planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi, & fiet 1224; huic addo coefficientem longitudinem, antecedentem vnius figuræ spatio, & fit 12432; per quem si diuidatur 52096, fit quotiens 4: modo subduco à 520, solidum à latere secundo 4, in triplum quadratum lateris primi 6, nempe 432, & remanet 88; huic annectatur 9, sequens figura, vt fiat 889; à quo subtrahatur 288, solidum à quadrato lateris secundi in triplum latus primum, & remanet 601; huic annectatur sequens figura 6, & fit 6016; à quo subducto 64, numero cubo secundæ figuræ, & remanet 5952; à quo subtrahatur 576, soli-

solidum à latere secundo in planum expletionis, & remanet 192; à quo subtrahatur 192, solidum à quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem, & nihil remanet. Dicemus itaq; radicem quæsitam esse 64.

Quando cubus potius afficit, quam afficitur.

In sequenti secundo paradigmate cernere licet æquationem etiam inter Q, C, & N. Verùm in hac æquatione solidum maius est cubo; quamobrem cubus potius afficit, quàm afficiatur; quam ob causam supra pagina 195, dicebamus quadratum potius afficere quàm affici. Deuolutione tamen opus est ad hanc æquationem explicandam, propterea quod à numero solidorum subtractio fieri non potest.

Paradigma aliud.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	8	4	Subquadratica.
		.	Tot sedes, punctaue quadratorum, quot cuborum.
Cubus affectus resoluendus.	6 2	1 0 8	
	.	QR.	
	C 1	C 8	
Solida ablatitia.	8		Cubus lateris primi.
	3 3	6	Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.
Summa solidorum.	4 1	6	
Reliquum resoluendi affecti cubi.	2 0	6 0 8	

	0	0
N	2	4
Q	4	16
C	8	64

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.	3	36	
			84	
			.	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		20	608	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi	1	2	
	Triplum latus primum.		6	
Summa diuisorum.		4	604	
Solida ablatitia facta à diuisoribus.	Superioribus	1 3	44	A latere secundo in planum expletionis.
		1	344	A quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem.
			64	Cubus lateris secundi.
	Inferioribus		96	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
		4	8	A latere secundo in triplum quadratum primi.
Summa solidorum auferenda æqualis reliquo resoluendi cubi affecti.		20	608	

Sæpè sæpiùs contingit, vt coefficiens sub gradu magnitudo in anteriora producatur vltra nimirum ipsum cubum affectum, vel eo loci saltem, vt cum ipsa sit è diuisoribus, ab affecto cubo auferri non possit. Hoc autem arguit cubum non tàm affici, quàm afficere; quoniam est minor afficiente solido. Coefficiens proinde ad succedentia quadratorum loca, seu puncta quadratica, desuper adnotata ordine reuocari debet, donec sit diuisioni locus; ab hoc autem præstat operis initium desumere obseruata Nota.

Quando cubus nec tam afficitur, quam potius afficit. & quare.

homo-

homogeneorum lege, vt inferiùs dicam. Quot autem subgradualibus punctis coefficiens retrocedet, tot puncta cubica subtus delebuntur, à quibus alioquin operis initium desumendum fuisset, nisi videlicet fuisset opus deuolutionem facere. Ita si sit æquatio 12320Q + 1C = 7110144. Numerus 7110144, est cubus adiunctus solido sub lateris quadrato, dataq; longitudine 12320; est autem solidum cubo maius, vt situs coefficientis indicat, quæ in anteriora prorumpit; quamobrem deuolui debet in proximum punctum quadraticum sequens, deleto puncto cubico ad læuam primùm occurrente, operis initio desumpto potius à diuisione, quàm à radicis extractione; itaut solidum per longitudinem cum diuidatur, quotiens, seu quod ex diuisione prouenit, non intelligatur radix, sed quadratum, quod est homogeneorum legem obseruare, quod ex adiuncto paradigmate quisq; conijciet; in quo numerus affectus resoluēdus est 7110144; At verò suprapositus numerus est coefficiens longitudo, estq; 12320; constitutis autem desuper sedibus quadraticis, vides coefficientem iam dictam subquadraticam produci vltra ipsum numerum cubum; quamobrem deleto puncto cubico primùm ad læuam occurrente, fit retrocessio coefficientis ad sequens punctum quadraticum; his autem ita dispositis, & reperto latere primo, quadratum eius ducitur in coefficientem magnitudinem; productum autem 49280, notatur, vt desinat sub puncto, vbi coefficiens per retrocessionem deuenit, atq; consistit; illiq; subijcitur 8, cubus eiusdem lateris; sub puncto tamen quod cubi est sedes, facta additione, summa 49360, subtrahatur à numero resoluendo, vt remaneat numerus 2174144; deinde proceditur ad indagandam secundam figuram ad eum modum, quo ex adiuncto cernitur paradigmate.

Exemplo res declaratur.

Solidū cum diuiditur per longitudinem coefficientis hic intelligitur oriri quadratū, non radix. Hoc autem est legē homogeneorū obseruare prout ad præsens attinet.

Para-

Paradigma, cum solidum affectionis sub quadrato maius est Cubo.

I. Eductio lateris singularis primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens longitudo.	123	2 0		Subquadratica.
		. .	.	Puncta quadratica.
Cubus resoluendus.	7	1 1 0	1 4 4	
	.	QR.	QR.	Puncta cubica.
	C 1	C 1 1	C 11	

Quoniam autem coefficiens sub quadratica longitudo extra figuras afficientis cubi producitur; ideo fit deuolutio in sequens punctum quadraticum, deleto quoq; puncto cubico primum ad læuam occurrente.

II. Eductio lateris singularis primi post deuolutionem.

Coefficiens longitudo.	1230	0
	.	.
Cubus afficiens resoluendus.	7110	144
	.	QR.
	C 1	C 11

	0	0
R	2	4
Q	4	16
C	8	64

Solida ablatitia.	4928	0	A quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.
	8		Cubo lateris primi.
Summa solidorum ablatitiorum.	4936	0	
Reliquum resoluendi afficientis Cubi.	2174	144	

III. Edu-

III. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior, eaq; præcipua.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.		492	80	
	Coefficiens longitudo.		12	320	
Cubi afficientis resoluendi reliquum.		2	174	144	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.		1	2	
	Triplum latus primum.			6	
Summa diuisorum.			506	380	
Solida ablatitia facta à diuisoribus.	Superioribus.	2	971	28	A latere secundo in planum expletionis.
			197	120	A quadrato lateris secundi in coefficientem.
	Inferioribus.		4	8	A latere secundo in triplum quadratum primi.
				96	A quadrato lateris secundi in triplũ latus primum.
				64	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum auferenda equalis reliquo resoluendi afficientis cubi.		2	174	144	

Sit proposita superior equatio $12320Q + 1C = 7110144$. Vide in adiuncto paradigmate, quo pacto radix extrahatur; congruit enim hæc extractionis ratio superiori Vietææ; solùm ab ea differt, quòd compendiosiùs, & clariùs rem ipsam absoluit.

$$12320Q + 1C = 7110144$$

Diuisor ad indagandam secundam figuram paratur non dissimili modo, ac in superioris methodo; breuitatis causa nos hic explicationem lubet prætermittere; cum omnia ex se liquido constare ex supra dictis videantur.

```
     2   4
7110144
    .   .
49280
   8
-------
49360
2174144
-------
197120
197120
  48
   96
   64
-------
2174144
-------
7110144
   .
   8
-------
71021
49280
-------
21741 4
197120
-------
202944
197120
-------
 05824
 48
-------
  1024
  96
-------
   064
    64
-------
    00
```

Methodus explicandi æquationem inter C — Q, & N.

Dato in numeris cubo affecto multa solidi sub latere, & dato coefficiente plano, latus analyticè elicere.

Eadem est ratio procedendi ad indagandam radicem cubi negatè affecti.

Est eadem procedendi ratio ad indagandam radicem cubi negatè affecti sub quadrato, ac est in eruenda radice ex cubo affecto affirmatè. Solùm id quidem discriminis intercedit, quòd hìc in diuisionibus attenditur ipsius coefficientis longitudinis, ac regularium in cubo puro diuisorum differentia; at in cubo affecto affirmatè, debebat eorundem summa attendi; vt igitur in cubo per affirmationem affecto ad summam diuisorum debebat applicatio fieri; hic ad eorundem differentiam fieri debet; Hoc insuper intercedit discriminis, quòd cum elicita singularia latera, in idem coefficiens planum ducuntur, ipsa verò latera in expletionis planum (est autem planum expletionis, quod fit à coefficiente in duplum lateris primi, quemadmodum supra dictum est) solida inde facta, sub congrua sede desinentia, qualem nimirum exposcit multiplicationis ratio, addi debent proposito negatè affecto cubo, cum alioquin affirmatè affecto subducerentur, vel (quod idem est) auferuntur ablatitijs solidis, quemadmodum cernere licet in adiuncto paradigmate, in quo numerus 5760, est cubus affectus resoluendus, coefficiens est 14, vides autem solida prostaphæretica; & quidem solidum à lateris primo quadrato in coefficientem, puta 56, subtrahendum est ex cubo lateris primi, & differentia 24, subtrahenda ex 5760; deinde in eductione secundi lateris, diuisorum superiorum, & inferiorum differentia 686, numerus est, ad quem intelligendus est applicatus 3360, vt habeatur secundum singulare latus 4; ob id cum fuerit 1 C — 14 Q = 5760, fit 1 R valor 24.

Discrimen.

Discrimen aliud.

Paradigma analyseos cubi affecti sub quadrato negatè.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	1	4	Subquadratica
		. .	Tot pũcta quadratica, quot cubica.
Cubus affectus resoluendus	5	760	
	.	QR.	Puncta cubica.
	C 1	C 11	
Solida prosthaphæretica. Ablatitium.	8		Cubus lateris primi.
Solida prosthaphæretica. Additium.	5	6	A lateris primi quadrato in coefficientem.
Excessus solidorum ablatitiorum.	2	4	
Reliquum resoluendi affecti cubi.	3	360	

0	0	Tot numerales circuli quot puncta cubica lateraue singularia.
R 2	4	
Q 4	16	
C 8	64	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. Planum expletionis à coefficiẽte in duplum lateris primi.		56	
		.	
Diuisorum pars superior. Coefficiens longitudo.		14	
		.	
Reliquum resoluendi affecti cubi.	3	360	
Diuisorum pars inferior. Triplum quadratum lateris primi.	1	2	
Diuisorum pars inferior. Triplum latus primum.		6	
Excessus diuisorum inferiorum.		686	
Solida ablatitia	4	8	A latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
Solida ablatitia		96	A lateris secundi quadrato in triplum latus primum.
Solida ablatitia		64	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.	5	824	
Solida additia.	2	24	A latere secundo in planum expletionis.
Solida additia.		224	A quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem.
Summa additiorum.	2	464	
Excessus ablatitiorum æqualis reliquo resoluendo affecto cubo.	3	360	

Para-

Paradigma aliud analyseos cubi affecti sub quadrato negatè.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Coefficiens longitudo.		12		Subquadratica.
		.	. .	
Cubus affectus resolvendus.	1	765	625	
	.	QR.	QR.	Puncta cubica.
	C I	C II	C III	
Solida prostaphaeretica. Ablatitium.	1			Cubus lateris primi.
Solida prostaphaeretica. Addititium.		12		A lateris primi quadrato in coefficientem.
Reliquum resolvendi cubi.		885	625	

Tot puncta quadratica quot cubica. Tot numerales circuli quot puncta cubica.

	0	0	0
R	1	2	
Q	1	4	
C	1	8	

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Divisorum pars superior. Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.	24		
Divisorum pars superior. Coefficiens.	1	2	
Cubus resolvendus.	885	625	
Divisorum pars inferior. Triplum quadratũ lateris primi.	3		
Divisorum pars inferior. Triplum latus primum.	3		
Excessus divisorum inferiorum.	304	8	
Solida ablatitia.	6		A latere secundo in triplum quadratum primi.
	12		A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
	8		Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.	728	728	
Solida addititia.	48		A latere secundo in planum expletionis.
	4	8	A quadrato lateris secundi in coefficientem.
Summa addititiorum.	52	8	
Residuum auferendum.	675	2	
Reliquum resolvendi cubi.	210	425	

III. Edu-

III. Eductio lateris singularis tertij.

		•	•	•	
R	1		2	5	
Q	1	4	4	25	
C	1	7	28	125	

Diuisorum pars superior	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.	2	88 .	
	Coefficiens longitudo.		12 .	
Cubi resoluendi reliquum.		210	425	
Diuisorum pars inferior	Triplum quadratum lateris primi.	43	2	
	Triplum latus primum.		36	
Excessus diuisorum inferiorum.		4	068	
Solida ablatitia.		21	0	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		9	00	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			15	Cubus lateris secundi.
Summa ablatitiorum.		22	15	
Solida addititia.		14	40	A latere secundo in planum expletionis.
			300	A lateris secundi quadrato in coefficientem.
Summa additiiorum.		14	705	
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendi cubi affecti.		210	425	

Dum itaq; proponitur 1 C — 12 Q $=$ 1765625: fit 1 R valor 125; vti perspicuum est.

Ple-

Sæpe sæpius accidit coefficientem longitudinẽ pluribus abundare simplicibus figuris, quã cubum negatè affectum sub quadrato ternis. Cubus acephalus quid.

Plerunq; contingit, vt coefficiens longitudo pluribus abundet simplicibus figuris, quàm cubus negatè affectus sub quadrato ternis. Id autem arguit solidum afficiens maius esse resoluendo cubo negatè affecto. Cubus autem acephalus hic appellatur. Vt autem analysis institui possit mutilo cubo præponetur ea numeralium circulorum multitudo; vt tot puncta cubica possint ei præfigi; quot simplices figuræ longitudini coefficienti. Prima verò longitudinis figura pergendo à læua ad dextram constituetur latus singulare primum, si cætera tamen consentiant; sin minùs figura proximè maior constitui potest, seruata eadem methodo quantum ad reliqua. Vt si proponeretur 1 C — 10 Q = 780; est quidem 780, cubus multatus solido sub quadrato, & coefficiente longitudine 10; est verò solidum 10 Q, maius solido 780; quoniam coefficiens longitudo constat simplicibus figuris duabus; solidum verò 780, vnico puncto cubico signatur; quamobrem solido 780, resoluendo præponetur numeralis circulus, & tunc demum sua sedes adijcietur coefficienti, cuius prima figura assumetur pro latere primo mutili cubi, &c.

Paradigma cum solidum maius est Cubo.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	1	0	Subquadratica.
		. .	Puncta tot quadratica, quot cubica.
Cubus resoluendus acephalus;	0	784	
	.	QR.	Puncta cubica.
	C 1	C 1 1	
Solida prosthaphæretica. Ablatitium.	1		
Solida prosthaphæretica. Additium.	1	0	
Reliquum restituti mutili cubi.	0	0	
		784	

	0	0
R	1	4
Q	1	16
C	1	64

II. Edu.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.		20	
	Coefficiens longitudo.		10	
Reliquum restituti mutili cubi.			784	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.		3	
	Triplum latus primum.		3	
Excessus diuisorum Inferiorum.			120	
Solida ablatitia.		1	2	A latere secundo in triplum quadratum lateris primi.
			48	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			64	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum ablatitiorum.		1	744	
Solida addititia.			80	A latere secundo in planum expletionis.
			16	A lateris secundi quadrato in coefficientem longitudinem.
Summa solidorum additiriorum.			960	
Excessus ablatitiorum æqualis proposito resoluendo cubo affecto			784	

Paradihma aliud cum solidum maius est cubo.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.		1	2	Puncta cubica.
			. .	Tot pũcta quadratica, quot cubica.
Cubus resoluendus acephalus.		0	592	
		.	QR. .	Puncta cubica.
		C1	Car	
Solida prostaphæretica.	Ablatitium.	1		Cubus lateris primi.
	Addititium.	1	2	A lateris primo quadrato in coefficientem longitudinem.
Reliquum irresoluendi mutili cubi.			592	

	0	0	Tot numerales circuli, quot puncta cubica lateraue singularia.
R	1	4	
Q	1	16	
C	1	64	

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior.	Planum cxp eticnis à coefficiente in duplum lateris primi.		2 4	
	Coefficiens longitudo.		1 2	
Reliquum reſt tuti inutili cubi.			5 9 2	
Diuiſorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.		3	
	Triplum latus primum.		3	
Exceſſus diuiſorum inferiorum.			7 8	
Solida ablatitia.		1	2	A latere ſecundo in triplum quadratum lateris primi.
			4 8	A quadrato lateris ſecundi in triplum latus primum.
			6 4	Cubus lateris ſecundi.
Summa ſolidorum ablatitiorum.		1	7 4 4	
Solida addititia.			9 6	A latere ſecundo in planum expletionis.
			1 9 2	A lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem.
Summa ſolidorum additiorum.		1	1 5 2	
Exceſſus ablatitiorum æqualis propoſito reſoluendo cubo.			5 9 2	

Quòd ſi affectus negatè cubus, de cuius reſolutione agitur, tot conſtet ternis figuris, quot longitudo coefficiens ſingulis; accidit tamen aliquando eo prorumpere coeſficientem, vt niſi quis cautè eius rationem habeat, & aduertat, non raro deludatur in ipſamet exquirenda radice. Pręſtat tunc ipſius coefficientis longitudinis cubo, vt intelligatur affectus propoſitus cubus augeri; & ex ita adaucto latus eruatur: propterea quod aut illud conſentaneum erit, aut conſentaneo proximè minus. Si verò latus

Quando coefficiens prorumpit, & deludat Analyſtã.

tus

tus sic sumptum duabus figuris constet; argumento est, cubi acephali: fitq; deuolutio in antecedentia ad leuam.

Proposita sit æquatio $1 C - 9 Q = 970$. Quoniam igitur solidum 970, adiunctum cubo ex 9, facit solidum 1709; cuius latus, vt cubi, maius est, quam 9, constans nimirum pluribus figuris, quàm vna; proinde fit deuolutio in antecedentia; & est cubus acephalus; eius autem analysis instituitur, quemadmodum cernere licet in adiuncto paradigmate. Perspicuum enim est radicem huius æquationis esse 14.

Paradigma item analyseos cubi acephali sub quadrato affecti.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo	9	Subquadratica.			
	. .		o	o	Tot numerales circuli, quot puncta cubica.
		R	1	4	
Cubus acephalus resoluendus.	9 8 0	Q	1	16	
		C	1	64	

Coefficiens longitudo		9	
Cubus acephalus resoluendus.	0	9 8 0	
	.	.	Puncta cubica.
Ablatitium.	1		Cubus lateris primi.
Addititium.		9	A lateris primi quadrato in coëfficientem
Reliquum resoluendi cubi.		8 8 0	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.	1	8	
	Coefficiens longitudo.		9	
Reliquum resoluendi cubi affecti.		8	8 0	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	3		
	Triplum latus primum.		3	
Excessus diuisorum inferiorum.		1	4 1	
Solida ablatitia,		1 2		A latere secundo in triplum quadratum primi.
		4	8	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			6 4	Cubus lateris secundi.
Summa ablatiorum.		1 7	4 4	
Solida addititia.		7	2	A latere secundo in planum expletionis,
		1	4 4	A lateris secundi quadrato in coefficientem.
Summa addititiorum.		8	6 4	
Excessus ablatitiorum æqualis reliquo resoluendi cubi affecti.		8	8 0	

Si igitur proposita foret æquatio 1 C — 9 Q ═ 980, fieret 1 R, valor 14, numerus quæstioni satisfaciens. Si verò esset 1 C — 9 Q ═ 720, fieret 1 R, valor 12. Hoc eodem artificio vti licet in explicandis æquationibus affirmatè affectis; vt si esset 1 C + 6 Q ═ 432; quoniam cubus ex 6, est 216, qui subtractus de 432, relinquit 216; proinde dicemus 6, esse radicem quæsitam.

Para-

Paradigma item analyſeos acephali cubi.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.		800		Subquadratica.
		.	. .	Tot puncta quadratica quot cubica.
	0	703	125	
	.	QR.	QR.	
	C I	C II	C III	
Solida proſthaphæretica. Ablatitium.	1			Cubus lateris primi.
Solida proſthaphæretica. Additium.		8 0		A lateris primi quadrato in coefficientem.
Reliquum reſoluend. cubi.		503	125	

	5	0	0
R:	1	2	
Q	1	4	
C	1	8	

II. Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diuiſorum pars ſuperior. Planum expletionis à coefficiẽte in duplum lateris primi	1ʹ60	
Diuiſorum pars ſuperior. Coefficiens lõgitudo.	8	0
Reliquum reſoluendi cubi.	503	125
Diuiſorum pars ſuperior. Triplum quadratum lateris primi.	3	
Diuiſorum pars ſuperior. Triplũ latus primum.	3	
Exceſſus diuiſorum inferiorum.	162	0
Solida ablatitia	6	
	12	
	8	
Summa ablatitiorum.	728	
Solida additia	320	
	32	0
Summa additiorum.	352	
Exceſſus.	376	
Reliquum reſoluendi cubi.	127	125

III. Edu-

III. Eductio lateris singularis tertij.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à coefficiente in duplum lateris primi.	19	20	
	Coefficiens longitudo.		80	
Reliquum resoluendi cubi.		127	125	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	43	2	
	Triplum latus primum.		36	
Excessus diuisorum inferiorum.		24	280	
Solida ablatitia.		216	0	A latere secundo in triplum quadratum primi
		9	00	A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.
			125	Cubus lateris secundi.
Summa ablatiorum.		225	125	
Solida addititia.		96	00	A latere secundo in planum expletionis.
		2		A lateris secundi quadrato in coefficientem.
Summa additiorum.		98		
Excessus ablatitiorum æqualis reliquo resoluendi cubi affecti.		127	125	

	0	0	0
R.	1	2	5
Q	144,		25
C	1728,		125

Dum est æquatio 1 C — 12 Q = 7031253, fit 1 R pretium 125.

Metho-

Methodus explicandi æquationem inter Q—C, & N.

E Dato in numeris solido sub quadrato, & data coefficiente longitudine, affecto multa cubi, latus analyticè elicere.

In hac æquatione solidum sub quadrato afficitur multa Cubi. Quando verò potestas negatur de homogenea sub gradu, latus est anceps; atq; adeo æquatio huiusmodi de duobus lateribus explicabilis est; quorum vnum minus est; duabus tertijs partibus ipsius coefficientis, alterum verò est maius; quemadmodum dum erat æquatio R—Q ⊐ N, duplex erat latus satisfaciens, vnum quidem maius dimidio coefficientis, alterum verò minus. Exemplis autem omnia dilucida reddemus potiùs, quàm verbis. *Quando solidum sub quadrato afficitur multa cubi.*

Proposita igitur sit æquatio 54Q—C ⊐ 13600: numerus 13600, est solidum sub quadrato affectum multa cubi. Cum autem negetur potestas de homogenea sub gradu, latus est anceps; & hæc ipsa æquatio erit de duobus lateribus explicabilis, quorum vtrumq; Problemati satisfacit: vnum eorum minus est duobus tertijs partibus numeri 54, alterum autem maius. *Exemplis declaratur methodus ista.*

Paradigma primum analyseos cubi auulsi à solido sub quadrato, ad inueniendam radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	5	4	*Subquadratica.*
		. .	
Cubus auulsus resoldendus.	1 3	600	
	.	QR.	
	6 1	C11	
Solidum restituens.	8		Cubus lateris primi.
Solidum restitutum.	2 1	600	
Solidum principale minuens.	2 1	6	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.
Excessus restituti.	0		

Est igitur huius æquationis latus 20, illudq; minus è duobus, de quibus ęqualitas potest explicari; huius autem quadratum est 400: ad quod dum applicatur solidum 13600, oritur latudo 34; quantum etiam remanet, subtractis 20, ex 54. Modo tres proportionales longitudines intelliguntur: quarum tertia est 34; composita verò ex secunda, & prima erit 20; latus autem alterum, de quo proposita anceps æquatio explicabilis est, componetur ex secunda, & tertia. Itaq; sit latus alterum quęsitum 1R; ergo 1Q — 34R ⩵ 680: & eruetur latus quæsitum maius; nequit autem numeris rationalibus explicari.

$$1Q - 34R \;=\; 680$$
$$289$$
$$\overline{969}$$

Latus maius ℞ 969 + 17

Para-

Paradigma ſecundum analyſeos cubi auulſi à ſolido ſub quadrato, ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris ſingularis primi.

Coefficiens longitudo.	5	7	Subquadratica.
		. .	Tot puncta quadratica, quot cubica.
Cubus auulſus reſoluendus.	2 4	3 0 0	
	.	QR.	Puncta cubica.
	C 1	C 1 1	
Solidum reſtituens.	2 7		Cubus lateris primi.
Solidum reſtitutum.	5 1	3 0 0	
Solidum principale minuens.	5 1	3	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.
Exceſſus reſtituti.	0		

9	0	Tot numerales circuli, quot puncta cubica.
R 3	0	
Q 9.	0	
C 27.	0	

Paradigma tertium analyſeos cubi auulſi à ſolido ſub quadrato, ad inueniendum radicem maiorem.

Coefficiens longitudo.	5	7	Subquadratica.
		. .	Tot pũcta quadratica, quot cubica.
Solidum ſub quadrato multatum lateris cubo.	2 4	3 0 0	
	.	QR.	Puncta cubica.
	C 1	C 1 1	
Solidum reſtituens.	6 4		Cubus lateris primi.
Solidum reſtitutum.	8 8	3 0 0	
Solidum principale minuendum.	9 1	2	A lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem.
Reliquum reſoluendi cubi.	2	9 0 0	

0	0	Tot numerales circuli quot puncta cubica lateraue ſingularia.
R 4	6	
Q 16.	25	
C 64.	125	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Planum expletionis à duplo lateris primi in coefficientem.	4	5 6	
	Coefficiens.		5 7	
Reliquum resoluendi cubi.		2	9 0 0	
Diuisorum pars inferior.	Triplum quadratum lateris primi.	4	8	
	Triplum latus primum.		1 2	
Differentia diuisorum.			3 0 3	
Solida ablatitia		2 4	0	A latere secundo in triplum quadratum primi.
		3	0 0	A quadrato secundi in triplum latus primum.
			1 2 5	Cubus lateris secundi.
Summa solidorum ablatitiorum.		2 7	1 2 5	
Solida addititia		2 2	8 0	A latere secundo in planum expletionis.
		1	4 2 5	A quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem.
Summa solidorum addititiorum.		2 4	2 2 5	
Excessus ablatitiorum æqualis reliquo resoluendo cubo.		2	9 0 0	

Habito latere minori, maius etiam haberi potuiſſet hoc modo. Latus minus erat 30, eius quadratum eſt 900, ad quod applicetur ſolidum 24300; fit quotiens 27, numerus, qui etiam habetur ſubtracto numero 30, ex numero 57. Intelligantur autem tres proportionales longitudines, quarum tertia ſit 27, compoſita verò è ſecunda, & prima 30: latus igitur alterum, de quo æqualitas explicari poteſt, componitur ex ſecunda, & tertia. Latus igitur maius, vt indagetur ſupponendum eſt, ſi fuerint tres quantitates proportionales, quadratũ aggregati ex ſecunda, & tertia, minus rectangulo comprehenſo ſub eodem aggregato, & tertia, æquale eſſe rectãgulo comprehenſo ſub aggregato primæ, & ſecundæ, & ſub tertio. Vt ſint 6, 18, 54: aggregatum ex 18, & 54, eſt 75; cuius quadratum eſt 5184; à quo

Ex latere minori eruitur latus maius.

Ad indagãdam radicem maiorem.

$$1\,Q - 27\,R \;=\; 810$$

$13\frac{1}{2}$	810
$13\frac{1}{2}$	4
$182\frac{1}{4}$	3240
729	729
4	3969
	63

$31\frac{1}{2}$
$13\frac{1}{2}$
45

ſi dematur 3888, rectangulum comprehenſum ſub 72, & 54, remanet 1296; quantum fit ex 54, in 24, aggregatum ex prima, & ſecunda. Summa igitur, ex ſecunda, & tertia eſto 1 R, cuius quadratum eſt 1 Q; ſubtrahamus autem 27 R, productum à 27, tertio termino in 1 R, aggregatum ex ſecundo, & tertio; fiet reſiduum 1 Q — 27 R; & æqua-

bitur

bitur 810, producto ex 30, composito à primo, & secundo in 27, tertium terminum. Si verò huius æquationis radix eruatur, comperietur esse 45, vt ex hoc retroscripto paradigmate colligitur. Eam autem esse trium quantitatum proportionalium naturam facillimè quidem ostenditur.

Aliter etiã eadem maior radix inuenitur. Possumus eandem radicem maiorem hunc in modum consequi. Dicebamus radicem esse summam ex secunda, & tertia magnitudine ex tribus proportionalibus. Reperiamus tres ipsas proportionales; minor enim inuenta 30, est summa ex prima, & secunda. Dico primum terminum esse 1 R, secundus erit 30 — 1 R, tertius est 27; productum ex primo in tertium, scilicet 27 R, æquatur quadrato medij, nempe 900 — 60 R + 1 Q; per antithesin autem fit

87 R — 1 Q = 900

$43\frac{1}{2}$		900
$43\frac{1}{2}$	7569	4
$1892\frac{1}{4}$	4	3600
		4
	63	
	3969	63
		2

$43\frac{1}{2}$
$31\frac{1}{2}$

1 R valor 12

æquatio, vt vides; & ita reperiemus 1 R, valorem esse 12. Si verò 12, subtrahatur ex 30, remanebit 18, pro secundo: erunt ergo 12, 18, 27, termini quæsiti: ac proinde summa ex secundo, & tertio nota erit 45.

Potuisset etiam inueniri secundus: ille siquidem esto 1 R; primus erit 30 — 1 R; tertius est 27: productum autem primi in tertium, puta 30 — 1 R, in 27, fit 810 — 27 R

27R ⫦ 1Q; est enim rectangulum sub primo, & tertio, æquale quadrato secundi, seu medij: est igitur æquatio 1Q + 27R ⫦ 810, & huius radix 18; est itaq; medius terminus numerus 18.

Si verò prius habeatur latus maius, puta 45, habebitur minus hac arte. Quadratum enim ex 45, puta 2025, si constituatur diuisor, ad quem nimirum applicetur 24300, orietur 12 latus, quod etiã habetur subductis 45, ex 57. Intelligantur autem tres proportionales longitudines, quarum prima sit 12, composita ex secunda, & tertia 45; latus autem alterum, de quo proposita æqualitas est explicabilis, componitur ex prima, & secunda: erit igitur æquatio 1Q — 12R ⫦ 540, & fit 1R, numerus 30, & est latus minus superius positæ æquationis.

$$1Q + 27R \sqsupset 810$$

$$13\tfrac{1}{2}$$
$$13\tfrac{1}{2}$$
$$182\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{729}{4} \qquad \frac{3240}{4}$$

$$3240$$
$$729$$
$$3969$$
$$63 \qquad 31\tfrac{1}{2}$$
$$2 \qquad 13\tfrac{1}{2}$$
$$18$$

Sit proposita æquatio 120Q — 1C ⫦ 55296: facta designatione punctorum, & ordinatis ijs, quæ in generalibus præceptis tradita sunt. Primum latus esto 2, latus nimirum cubicum numeri 55; cubus ipsius est 8, quo addito ad 55, fit 63; huic autem annexis reliquis figuris fit 63296; modo sumatur 4, duplum primi lateris, ducatur in 120, coefficientem, & fit 480; subtrahatur à 632, vt remaneat 152, cui annexis figuris 96, fit 15296; ducatur autem 4, duplum primæ figuræ in 120, coefficientem, & fit 480, planum expletionis; mox verò 120, coefficiens ei *Explicatur æquatio proposita.*

sub-

subscribatur, vt vnius figuræ loco illud antecedat, subscribatur numerus 15296, vt vides. Igitur ad indagandam secundam figuram, sumo 12, triplum quadratum primæ; sumo 6, triplum eiusdem primæ figuræ: noto hos numeros, vt in Paradigmate vides; subtraho diuisores istos inferiores 126, à superioribus, nimirum plano expletionis, & coefficiente simul sumptis, seruata antecessionis iam dictæ cautela: subtraho igitur 126, à 4920; remanet 3660, pro diuisore; ad quem facta applicatione numeri 15296, fit quotiens 4, seruata cautela, vt si sumatur pro quotiente numero, solida facta per congruas multiplicationes subtrahi possint. Scribo itaq; 48, solidum factum à latere secundo in triplum quadratum primi; item scribo 96, solidum factum à quadrato secundi in triplum latus primum; demum scribo 64, cubum lateris secundi: horum solidorum summa est 5824. Modo duco 4, latus secundum in 480, planum expletionis; fit 1920: deinde duco 16, quadratum secundi lateris in coefficientem; fit quoq; 1920. Scribo hos numeros, vt vides, iuxta leges analyseos à synthesi desumtæ; & fit summa 21120: ab hoc autem numero subtraho 5824; & remanet 15296, numerus æqualis reliquo numero resoluendo, &c. Non dissimili modo si proponeretur æquatio 240Q—1C $\sqsubset\!\!\sqsupset$ 947264; poterit explicari. Item si sit æquatio 140Q—1C $\sqsubset\!\!\sqsupset$ 397375; præterea 100Q—1C $\sqsubset\!\!\sqsupset$ 108375, non dissimili artificio poterunt explicari.

Coef-

Coefficiens.	12	0
		. .
Solidum subquadrato multatum lateris cubo.	55	296
	.	.
	8	
	63	296
	48	0
Reliquum resolvendi cubi.	15	296
		480
		120
Reliquum resolvendi cubi.	15	296
		.
	7	2
		6
	3	660
	4	8
		96
		64
	5	8 . 4
	19	20
	1	920
	21	120
	15	296

0	0
R 2	4
Q 4	16
C 8	64

Coefficiens.	240	
		. .
Solidum subquadrato multatum lateris cubo.	947	264
	.	.
	343	
	1890	
	1176	0
Reliquum resolvendi cubi	114	264
	33	60
		240
Reliquum resolvendi.	114	264
		.
	14	7
		23
	18	930
	88	2
	7	56
		216
	95	976
	201	60
	8	640
	210	240
	314	264

0	0
7	6
Q 49	36
C 343	256

Coefficiens.	140		0	0
		. .	R 8	5
Solidum subquadrato multatum lateris cubo.	397	375	Q 64	25
	.	.	C 512	125
	512			
	909	375		
	896	0		
Reliquum resoluendi cubi.	13	375		
	2240			
		140		
Reliquum resolvendi cubi.	15	375		
	19	2		
		24		
	2	100		
	96	0		
	6	00		
		125		
	102	125		
	112	00		
	3	500		
	115	500		
	13	375		

Coefficiens.	100			
		. .	0	0
Solidum sub. quadrato multatum lateris cubo.	108	375	8	5
			Q 64	25
	. .	,	C 512	125
	512			
	620	375		
	640	0		
Reliquum resoluendi cubi	19	625		
	16	00		
		100		
Reliquum resoluendi &c.	19	625		
	19	2		
		2,4		
	3	40		
	96	0		
	6	00		
		125		
	121	125		
	80	00		
	2	500		
	82	500		
	19	625		

Metho-

Methodus explicandi æquationem inter QQ ✠ R, & N.

Quid curæ tam facere operationes, & quæ uterque quæram patri.

E *Dato in numeris quadrato-quadrato affecto adiunctione plano-plani sub latere, & dato coefficiente solido, latus analyticè elicere.*

Si proponeretur 1 QQ ✠ 40 R ⟌ 332736, & quæratur radix huius æquationis, cuius est sensus; *vt reperiatur numerus, qui ductus in sui cubum, & in 40, faciat* 332736; numerus hic 332736, est quadrato-quadratum affectum, non autem purum, est autem affectum adiunctione plano-plani sub latere quadrato-quadrati, & dato solido 40.

Huius autem quadrato-quadrati affecti genesis hoc solùm addit genesi quadrato-quadrati puri, vt latus singulare quod primùm elicitur ducatur in solidum coefficiens; deinde latus secundum in idem ducatur. At verò ex affecto huiusmodi quadrato quadrato eliciuntur latera. Sedes igitur vnitatum quadrato-quadrata metientium, per quaternas figuras distinguuntur, punctis à dextra ad læuam subtus adnotatis; quemadmodum diximus tractantes de analysi puri quadrato-quadrati. Quot autem sedes quadrato-quadratorum, vel puncta numerantur; tot sedes laterum simplicium constitui debent; cum coefficiens solidum sit sublaterale: constitui autem debent per singulas figuras desuper, punctorum beneficio, vt in paradigmate videre licet; in vltima verò eorum sede, quæ prima fit à læua ad dextram, coefficiens ipsum solidum consistat. Quamobrem dum coefficiens pluribus, quàm vna figura constet, in anteriora reliqua prorumpent ad læuam.

Explicatur methodus extrahendi radicem æquationis, in qua QQ ✝ R, æquatur N.

Sedes simplicium laterum quomodo constituantur.

Præterea latera quidem eliciuntur, vt fit in analysi quadrato-quadrati puri. Hic solùm addendum, vt coefficiens solidum, in diuisorum numerum adscribatur. Elicita

Quid interfit inter hanc æquationem, & æquationē quadrati-quadrati puri.

cita singularia latera in ipsum ducuntur; & plano-planum, quod inde fit, debet desinere sub sede coefficientis solidi, & auferendum est, ex affecto proposito quadrato-quadrato. Deniq; coefficiens in succedentia loca ordine subjcitur, & ipsi diuisores quoq; reliqui subtus mouebuntur: hęc enim huius æquationis analysis exposcit.

Paradigma analyseos Quadrato-quadrati affecti sub latere.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Coefficiens solidum.		4 0	Sublaterale.
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	3 3 · ·	2736 · ·	Tot pũcta simplicium laterum, quot sedes punctaue quadrato-quadratorum.
	·	CQR.	Puncta quadrato-quadratica.
	QQ1	QQ11	
Plano plana ablatitia.	1 6		Quadrato-quadratum lateris primi.
	8	0	A latere primo in coefficiens solidum.
Summa plano-planorum ablatitiorum.	1 6	0 8	
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.	1 7	19 36	

	0	·	Tot numerales circuli, quot pũcta quadrato-quadratica.
R 2	4		
Q 4	16		
C 8	64		
QQ16	256		

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens solidum.		4 0	
Quadrato-quadrati affecti resoluendi reliquum.		1 7	1936	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2	
	Sextuplum quadratum eiusdē.		2 4	
	Quadruplum latus primum.		8	
Summa diuisorum.		3	1520	
Plano plana ablatitia.		2 2	8	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
		3	8 4	A lateris secundi quadrato in sexcuplum quadratum primi.
			5 1 2	A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum.
			2 5 6	Quadrato-quadratum lateris secundi.
			1 6 0	A latere secundo in coefficiens solidum.
Summa plano planorum auferenda, æqualis reliquo resoluendi affecti quadrato quadrati.		1 7	1936	

Si itaq; proposita foret æquatio 1QQ ✠ 40 R ⫧ 332736, & fit 1 R valor 24.

SCHOLION.

Breuiùs hoc modo. *Primò ex 33, subtrahatur 16, quadrato-quadratum primi lateris singularis; mox à residuo 17 736,* *subtrahatur 80, solidum à latere primo in coefficiens solidum, & remanet 171936. Ad indagandum latus secundum paro diuisorem hoc modo. Sume 32, duplum cubum lateris primi, deinde 24, triplum quadratũ eiusdem, mox autem 8, cubum eiusdem, deniq; 40, coefficiens solidum: omnes hi numeri dispositi, vt in paradigmate vides, colligantur in vnã summam, fitq; 54520, diuisor; per quẽ diuisis 171936, fit quotiens 4. Modo subtrahatur 128, nempe numerus factus à latere secundo in quadruplum cubum lateris primi; remanet 43; cui annexis 936, sequentibus figuris, fit 43936; subducatur 384, numerus factus à lateris secundi quadrato in sexcuplum quadratum primi, & remanet 5536; ab hoc subtrahatur 512, numerus à cubo lateris secundi, in quadruplum latus primum; à residuo 416, subtrahatur 256, quadrato-quadratum lateris secundi; deniq; à residuo 160, subtrahatur 160, numerus productus à latere secundo in coefficiens solidum, & nihil remanet.*

		2 4
1QQ + 40R =		3 3 2 7 3 6
		1 6
3 2		
2 4		1 7 2 7 3 6
8		8 0
4 0		
5 4 5 2 0	Diuisor.	1 7 1 9 3 6
		1 2 8
		4 3 9 3 6
		3 8 4
		5 5 3 6
		5 1 2
		4 1 6
		2 5 6
		1 6 0
		1 6 0
		0 0

Para-

Paradigma aliud, analyseos quadrato-quadrati affecti sub latere affirmatè.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.	1	0 0 0	Sublaterale.		
		. .	Tot puncta simplicium laterũ.	0	0
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	3 5	5 7 7 6		R. 2	4
	.	CQ·R.	Puncta quadratica.	Q 4	16
	QQ I	QQ II		C 8	64
				QQ 16	256
Plana ablatitia {	1 6		Quadrato-quadratum lateris primi.		
	2	0 0 0			
Summa plano-planorum ablatitiorum.	1 8	0 0 0			
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati affecti.	1 7	5 7 7 6			

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior {	Coefficiens solidum.		1000	
Quadrato-quadrati affecti resoluendi reliquum.		1 7	5776	
Diuisorum pars inferior. {	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2	
	Sexcuplũ quadratum eiusdem.		2 4	
	Quadruplum latus primum		8	
Summa diuisorum.		3	5480	
Plano plana ablatitia. {		1 2	8	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi
		3	8 4	A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi
			5 1 2	A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum
			2 5 6	Quadrato-quadratum lateris secundi.
			4000	A latere secundo in coefficiens solidum.
Summa plano-planorum auferenda æqualis reliquo resoluendi affecti quadrato quadrati.		1 7	5776	

Si igitur proponeretur ęquatio 1QQ + 1000R = 315776, fieret vnius radicis pretium 24.

Para-

Paradigma tertium analyseos quadrato-quadrati affecti sub latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

				0	0
Coefficiens solidum.		8 0	Sublaterale		
		. .	Tot puncta simplicium laterum, quot sedes punctaue quadrato-quadratorum.	N 3	5
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	1 5 0	3 4 2 5		Q 9	25
				C 27	125
	.	CQR.		QQ 81	625
			Puncta quadrato-quadratica.		
	QQ1	QQ1			
Plano plana ablatitia.	8 1		Quadrato-quadratum lateris primi.		
		2 4 0	A latere secundo in coefficiens solidū.		
Summa plano-planorum ablatitiorum.	8 1	2 4 0			
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati affecti.	6 9	1 0 2 5			

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens solidum.		8 0	
			.	
Quadrato-quadrati affecti resoluendi reliquum.		6 9	1025	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	1 0	8	
	Sextuplum quadratum eiusdē		5 4	
	Quadruplum latus primum.		1 2	
Summa diuisorum.		1 1	1600	
Plana ablatitia.		5 4	0	A latere secundo in quadruplum cubum, lateris primi.
		1 3	5 0	A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi.
		1	500	A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum.
			625	Quadrato quadratum lateris secundi.
			400	A latere secundo in coefficiens solidum.
Summa plano-planorum auferenda æqualis reliquo resoluēdi affecti quadrato-quadrati.		6 9	1025	

Dum itaq; fuerit æquatio 1QQ + 80R = 1503425 fit radix 35. &c.

SCHO-

SCHOLION.

SI placet ad breuiorem formam superiorem analysin redigere, facta punctorum designatione, &c. latus primum esto 3, *cuius quadrato-quadratum, puta* 81, *si subtrahatur ex* 150, *remanebit* 69, *huic annectatur sequentes figuræ* 3425, *à quo subtrahatur* 240, *numerus factus à latere primo in coefficiens solidum facta subtractione, vt vides, remanet* 691025. *Ad indagandam secundam figuram paro diuisorem hoc modo, sumo* 108; *quadruplũ cubum lateris primi, praterea* 54, *sextuplũ quadratũ eiusdem, praterea* 12, *quadruplum latus primum, insuper* 80, *coefficientem; colligo hos numeros ordinatos ad eandem formam, vt vides; & per* 113600, *numerum collectum, diuido* 691025, *fit quotiens* 5: *sublatis autem plano-planis auferendis ab ipso* 691025, *nihil remanebit; erit igitur* 1 *R valor* 35.

```
                                 3   5
1QQ+80R = 1 5 0 3 4 2 5
              8 1
              ---------
              6 9 3 4 2 5
                  2 4 0
 1 0 8        ---------
     5 4      6 9 1 0 2 5
       1 2
         8 0  5 4 0
 ----------   ---------
Diuisor 113600  1 5 1 0 2 5
              1 3 5 0
              ---------
                1 6 0 2 5
                1 5 0 0
                ---------
                  1 0 2 5
                    6 2 5
                  -------
                    4 0 0
                    4 0 0
                  -------
                      0 0
```

Indagatio secunda figura.

Quando subgradualis magnitudo protrahitur vltra quadrato quadratum affectum.

Plerumq; contingit subgradualem coefficientem magnitudinem in anteriora produci vltra quadrato-quadratum affectum, vel eo saltem loci, vt ab ipso coefficiens auferri nequeat. Hoc autem arguit quadrato-quadratum, non tàm affici, quàm afficere, quoniam minus est afficiente plano-plano. Est propterea coefficiens ad succedentes sedes ordine reuocanda, donec diuisioni sit locus, seu diuisio possit institui. Præstat in huiusmodi casu initium ducere à diuisione: animaduertendum verò quot punctis coefficiens retrocedet; tot etiam loca, siue puncta quadrato quadratorum subtus adnotata, delenda esse, ea nimirum à quibus alioquin operis initium desumendum fuisset.

Quod si vltra potestatem affectam coefficiens non producatur, coefficiens inquam subgradualis longitudo; quod tamen oritur ex applicatione ad coefficientem ipsam, minus est potestate lateris, quod primùm eruitur: homogeneum affectionis est potestate maius, præcipuusq; diuisor est ipsa subgradualis coefficiens. Quamobrem si fuerit æquatio, in qua coefficiens magnitudo subgradualis in anteriora prorumpat; procedendum vti diximus: si verò non producatur vltra potestatem affectam, quod verò oritur ex applicatione minus fuerit potestate lateris illius, quod primum elicitur; tunc homogeneum affectionis erit potestate maius, & ipsa subgradualis coefficiens magnitudo, tanquam præcipuus diuisor assumitur. Hæc autem conspicere licet ex infra scriptis exemplis, vt quisq; poterit aduertere: quod enim oritur ex diuisione numeri 3345264, minus est potestate lateris, quod primum eruitur ex numero 334; hoc enim est 4, cuius QQ est 256, at quotiens ex diuisione est 26.

Para-

Paradigma cum plano-planum maius est quadrato-quadrato.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.	125	562	Sublaterale.	
Quadrato-quadratum afficiens resoluendum.	334	5264		
	.	CQR.		
	QQ1	QQ1		
Plano-plana ablatitia.	251	124	A latere primo in coefficiens solidum.	
	16		Quadrato-quadratum lateris primi.	
Summa plano-planorum ablatitiorum.	267	124		
Reliquum resoluendi afficientis quadrato-quadrati.	67	4024		

	0	0
R	2	4
Q	4	16
C	8.	64
QQ	16.	256

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens solidum.	12	5562	
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.		67	4024	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2	
	Sextuplum quadratum eiusdē		24	
	Quadruplum latus primum.		8	
Summa diuisorum.		16	0042	
Plano-plana ablatitia.		50	2248	A latere secundo in coefficiens solidum.
		32	8	A latere secundo in quadruplum cubum primi.
		3	84	A quadrato secundi in sextuplum quadratum primi.
			512	A cubo lateris secundi in cubum primi.
			256	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum auferenda, æqualis reliquo resoluēdi afficientis quadrato-quadrati.		67	4024	

Paradigma secundum cum plano-planum maius est quadrato-quadrato.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Coefficiens solidum.	7 5	6 4 2	Sublaterale.
		. .	Tot puncta simplicium laterū, quot quadrato-quadratorum.
Quadrato-quadratum afficiens resoluendum.	3 4 6	9 1 2 0	
	.	CQ R.	
	QQ 1	QQ 11	Puncta quadrato-quadratica.
Plano-plana ablatitia.	2 2 6	9 2 6	A latere primo in coefficiens solidum.
	8 1		Quadrato-quadratum lateris primi.
Summa plano-planorum ablatitiorum.	3 0 7	9 2 6	
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati afficientis.	3 8	9 8 6 0	

	o	o
R	3	2
Q	9	4
C	27	8
QQ	81	16

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior. Coefficiens solidum.	7 5	642	
	.	.	
Quadrato-quadrati resoluendi reliquum.	3 8	9860	
Diuisorum pars inferior. Quadruplum cubus lateris primi.	1 0	8	
Sextuplum quadratum eiusdem.		5 4	
Quadruplum latus primum.		1 2	
Summa diuisorum.	1 8	9162	
Plano-plana ablatitia	1 5	1284	A latere secundo in coefficiens solidum.
	2 1	6	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
	2	1 6	A quadrato secundi in sextuplum quadratum lateris primi.
		9 6	A cubo lateris secundi in quadruplum primi.
		1 6	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum auferenda, æqualis reliquo resoluendi afficientis quadrato-quadrati.	3 8	9860	

Para-

Paradigma tertium, cum plano-planum maius est quadrato quadrato.

I. *Eductio lateris singularis primi.*

Coefficiens solidum.	121	260	Sublaterale.
		. .	Tot puncta simplicium laterum. &c.
Quadrato-quadratum resoluendum	1005	5416	
	.	CQR.	Puncta quadrato-quadratica.
	QQ1	QQ11	
Plano-plana ablatitia.	485	040	A latere primo in coefficiens solidum.
	256		Quadrato-quadratum lateris primi.
Summa plano-planorum ablatitiorum.	741	004	
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati afficientis.	264	5016	

	•	•
R	4	6
Q	16	36
C	64	216
QQ	256	1296

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior.	Coefficiens solidum.	12	1262	
Quadrato-quadrati resoluendi reliquum.		264	5016	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	5	6	
	Sextuplum quadratū eiusdem.		96	
	Quadruplum latus primum.		16	
Summa diuisorum.		38	7020	
Plano-plana ablatitia		72	7560	A latere secundo in coefficiens solidum.
		153	6	A latere secundo in quadruplum cubum primi.
		34	56	A quadrato secundi in sextuplum quadratum primi
		3	456	A cubo lateris secundi in quadruplum primi.
			1296	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum auferenda æqualis reliquo resoluendi afficientes quadrato-quadrati.		264	5016	

Paradig. analyseos quadrato-quadrati affecti adiunctione plano-plani sub coefficiente longitudine, & lateris cubo.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens longitudo.	1	4
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	5 2	5 3 1 2
	QQ 1	CQ 8. Q 1
Plano-plana in primis auferenda.	1 6	
	1 1	2
Summa plano-planorum ablatitiorum.	2 7	2
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.	2 5	3 3 1 2

Subcubica.

	o	o
Tot sedes, punctaue cuborum, quot quadrato-quadratica.	R 2	4
	Q 4	16
Puncta quadrato-quadratica.	C 8	64
	QQ 16	256

Quadrato-quadratum lateris primi.
Plano-planum à lateris primi cubo in coefficientem longitudinem.

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Solidum expletionis à coefficiente lõgitudine in triplum quadratum lateris primi.	1	6 8
	Planum expletionis à coefficiente longitudine in triplum latus primum.		8 4
	Coefficiens longitudo.		1 4
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.		2 5	3 3 1 2
Diuisorum pars superior, & præcipua.	Quadruplus cubus lateris primi.	3	2
	Sextuplum quadratum lateris primi.		2 4
	Quadruplum latus primum.		8
Summa diuisorum.		5	2 4 1 6

Plano-plana auferenda à diuisoribus.	Inferioribus.	1 2	8	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
		3	8 4	A quadrato in sextuplum quadratum primi.
			5 1 2	A cubo secundi in quadruplum latus primum.
			2 5 6	Quadrato-quadratum lateris secundi.
	Superioribus.	6	7 2	A latere secũdo in solidum expletionis.
		1	3 4 4	A quadrato secundi in planum expletionis.
			8 9 6	A cubo secundi in coefficientem longitudinem.
Summa plano-planorum auferenda, æqualis residuo resoluendo quadrato quadrato.		2 5	3 3 1 2	
		2	4	

Metho-

Methodus explicandi æquationem inter QQ — R, & N.

E Dato in numeris quadrato-quadrato affecto multa plano-plani sub latere, & dato coefficiente solido, latus analyticè elicere.

Si quis benè perceperit hactenus præcepta tradita de æquatione quadrato quadrati affecti adiunctione plano-plani sub latere, datoq; solido coefficiente, seruatis præceptis, vt scilicet loco subtractionis adhibeatur additio; haud difficile hanc etiam æquationem explicabit. Quapropter, si proponeretur æquatio huiusmodi 1QQ — 2000 ⊐ 404976, instituetur analysis, vt in sequenti paradigmate licet intueri.

Paradigma analyseos quadrato-quadrati, affecti negatè sub latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.	2	000	Sublaterale.	
		. .	Tot puncta simplitia, &c.	0 0
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	4 0	4976		R 2 6
				Q 4, 36
	.	CQR.	Puncta quadrato-quadratica.	C 8, 216
	Q1	QQM		QQ 16, 1296
Planoplana prostaphæretica.	16		Quadrato-quadratum lateris primi.	
Excessus planoplanorum, &c.	12	000	A latere primo in coefficientem.	
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.	23	4976		

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior. } Coefficiens.		2000
Reliquum resoluendi.	2 8	4976
Diuisorum pars inferior.	3	2
		2 4
		8
Excessus, siue differentia.	3	2480
Plano-plana ablatitia.	1 9	2
	8	6 4
	1	7 2 8
		1296
Summa plano-planorum.	2 9	6976
Plano-planum auferendum.	1	2000
Excessus æqualis reliquo resoluendi affecti quadrato-quadrati.	2 8	4976

Explanations printed beside the rows of the table:

- 1 9 | 2: A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
- 8 | 6 4: A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi.
- 1 | 7 2 8: A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum.
- 1296: Quadrato quadratum lateris primi.
- 1 | 2000: A latere secundo in coefficiens solidum.

Methodus explicandi æquationem inter R – QQ, & N.

E*Dato in numeris plano plano sub latere, & data coefficiente solida magnitudine, affecto multa quadrato-quadrati, latus analyticè elicere.*

Hæc æquatio de duobus lateribus explicabilis est, siquidem potestas negatur de homogenea sub gradu; ac pro-

proinde latus est anceps. Vt si proponeretur 27755 R — 1 QQ ⊏ 217944; duplex est huius æquationis radix; est enim 217944, plano-planum sub latere, & dato coefficiente solido, nempe 27755: cum itaq; potestas negetur de homogenea sub gradu, latus est anceps; de duobus igitur lateribus hæc est æquatio explicabilis. Cubus autem minoris è duobus lateribus minor est quarta parte numeri 27755: cubus verò maioris, est maior. Quo fit, vt ex applicatione quadrupli plano-plani 217944, ad solidum iam dictum 27755, prosiliat in quotiente numerus maior radice minore, & minor radice maiori.

Paradigma primum analyseos quadrato quadrati auulsi à plano plano sub latere, ad inueniendum radicem minorem.

I. Eductio lateris singularis primi inanis ante deuolutionem.

Coefficiens solidum.	27	755	Sublaterale.
		..	
Plano-planum sub latere multatum lateris quadrato-quadrato.	21	794	
	.	CQR.	
	QQ 1	QQ11	

Cum autem radix quæsita minor sit latere cubi solidi 6938, ob id prima figura nequit esse 2.

II. Educ-

II. Eductio lateris primi post deuolutionem.

Coefficiens solidum.	2	7755	Sublaterale.
Plano-planum sub latere æquatum lateris quadrato-quadrato.	21	7944	
Plano-planum restituens.		4096	Quadrato-quadratum lateris primi.
Plano-planum restitutum.	22	2040	
Plano-planum principale minuens æquale plano-plano restituto.	22	2040	A latere primo in coefficiens solidum.

Paradigma secundum analyseos quadrato-quadrati auulsi à plano-plano sub latere, ad inueniendam radicem maiorem.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens solidum.	27	755	
Plano-planum mulctatum resoluendum.	21	7944	
		CQR 1	
	QQ1	QQ1	
Plano-planum restituens.	16		Quadrato-quadratum lateris primi.
Plano-planum restitutum.	37	7944	
Plano-planum principale minuendum.	55	510	A latere primo in coefficiens solidum.
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.	17	7156	

II. Edu-

II. *Eductio lateris singularis secundi.*

Diuisorum pars superior. { Coefficiens solidum.	2 7	7 5 5	
Reliquum resoluendi quadrato-quadrati.	1 7	7 1 5 6	
Diuisorum pars inferior. { Quadrato cubus lateris primi.	3	1	
Sexuplū quadratū lateris primi.		2 4	
Quadruplum latus primum.		8	
Summa diuisorum inferiorum.	3	4 4 8	
Plano-plana ablatitia.	2 2	4	A latere secundo in quadruplum cubum lateris primi.
	1	7 6	A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi.
	2	7 4 4	A cubo lateris secundi in quadruplum latus primum.
		2 4 0 1	Quadrato-quadratum lateris secundi.
Summa plano-planorum ablatitiorū.	3 7	1 4 4 1	
Plano-planum addititium.	1 9	4 2 8 5	A latere secundo in coefficiens solidum.
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendo auulso quadrato-quadrato.	1 7	7 1 5 6	

Methodus explicandi æquationem inter $QC + S, \& N$.

EDato in numeris quadrato-cubo affecto adiunctione plano-solidi sub latere, & dato coefficiente plano-plani latus analyticè elicere.

Quadrato cubi affecti genesis ordinata, se habet ad eum modum, quo genesis puri quadrato-cubi. hoc solum illi addit, vt nimirum latus singulare, quòd primùm elici tur, in plano-planum coefficiens ducatur, deinde secundum latus per idem quoq; multiplicetur, *Quo pacto se habeat genes quadrato cubi ordinata.*

Collocatis igitur punctis subtus per alternas quinas figuras distinguentibus sedes quadrato-cuborum, quemadmodum in analysi quadrato-cubi puri dictum fuit, à dextra nimirum ad læuam, instruetur analysis. Quot autem sedes *Methodus huius æquationem explicandi declaratur.*

sedes quadrato-cuborum numerantur, siue puncta subtus notata, à quibus illæ sedes designantur; tot laterum etiam simplicium constituentur, per singulas figuras supernè suis punctis congruè collocatis; in vltima sede coefficiens consistet: per singulas autem figuras sedes constituuntur; quoniam coefficiens est sublaterale; quamobrem, cum in vltima sede consistet, dum pluribus, quàm vna figura constet, in anteriora prorumpent figuræ reliquæ.

Coefficiens plano-planum est e numero diuisorum.

Analysis autem procedit, vti dictum à nobis fuit superiùs de quadrato-cubo puro; hoc solùm addito, vt coefficiens plano planum sit è numero diuisorum; singularia verò latera elicita in illud ducantur; plano solidum autem inde factum desinens sub sede coefficientis, auferatur ex proposito quadrato-cubo. Demum coefficiens ordine in succedentia loca subijcitur, dum inferiùs quoq; reliqui diuisores in succedentia loca mouebuntur, quemadmodum analysis ipsa requirit.

Paradigma analyseos quadrato-cubi affecti sub latere.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens plano-planum.		4 2 6	Sublaterale.
		. .	Tot puncta simplicium laterum, quot quadrato-cubica.
Quadrato-cubus affectus resoluendus.	7 9	7 2 8 4 8	
	.	QQ CQ R.	Puncta quadrato-cubica
	QC1	QC11	
Plano solida ablatitia.	3 1		Quadrato-cubus lateris primi.
		0 8 5 2	A latere primo in coefficiens planum.
Summa plano solidorum ablatitiorum.	3 2	0 8 5 2	
	4	6 4 3 2 8	

II. Edu-

II. Eductio lateris singolaris secundi.

Diuisorum pars superior.	Coefficiens plano-planum.		4 2 6	
Quadrato-cubi affecti resoluendi reliquum.		4 7	6 4 3 2 8	
Diuisorum pars inferior, & precipua.	Quintuplum quadrato-quadratum lateris primi.	8	0	
	Decuplus cubus eiusdem.		8 0	
	Decuplũ quadratum eiusdem.		4	
	Quintuplũ latus primum.		1 0	
Summa diuisorum omnium.		8	8 4 5 2 6	
Plano-solida ablatitia facta à diuisoribus.	Inferioribus.	3 2	0	A latere secundo in quintuplũ quadrato quadratum lateris primi.
		3 2	8 0	A quadrato lateris secundi in decuplum cubum primi.
		2	5 6 0	A cubo lateris secundi in decuplum quadratum primi.
	Superioribus.		2 5 6 0	A quadrato-quadrato lateris secundi in quintuplum latus primum
			1 0 2 4	Quadrato-cubus lateris secundi.
			1 7 0 4	A latere secundo in coefficiens plano-planum.
Summa plano-solidorum auferenda, æqualis reliquo resoluendi quadrato cubi.		4 8	6 4 3 2 8	

	0	0
R	2	4
Q	4,	16
C	8	64
QQ	16,	256
QC	32,	1024

Tot numerales circuli, quot pũcta, &c.

Quamobrem si fuerit æquatio 1 C + 426 R = 7972848 fit 1 R pretium 24, &c.

 Si

Si itaq; fuerit æquatio 1QC + 426R = 797284 8 (2 ... 4)

1 6 0	7 9 7 2 8 4 8
8 0	3 2
4 0	4 7 7 2 8 4
1 0	8 5 2
4 2 6	4 7 6 4 3 2 8
Diuisor 2 4 4 5 2 6	3 2 0
	1 5 6 4 3 2 8
	1 2 8 0
	2 8 4 3 2 8
	2 5 6 0
	2 8 3 2 8
	2 5 6 0
	2 7 2 8
	1 0 2 4
	1 7 0 4
	1 7 0 4
	0 0

Vides in adiuncto paradigmate superiorem eandem analysin redactam in simpliciorem formam. Primò siquidem 32, quadrato-cubus nimirum numeri 2, subtrahitur de 79, & remanet 47; adiunctis autem sequentibus figuris 7284, fit 477284; subducto 852, numero producto ex multiplicatione coefficientis in primum latus, remanet 476432; cui intelligenda est annexa postrema figura 8. Modo superest vt indagemus secundam figuram per diuisorem inuentum, vt cernis; & ita dum fuerit secunda figura adinuenta 4, absoluetur operatio, quemadmodum ex apposito paradigmate cuicunq; colligere licet.

Para

Methodus explicandi æquationem inter QC — R, & N.

EX hactenus explicatis laboriosum non erit hanc etiam æquationem explicare. quamobrem, si detur æquatio 1 QC — 60 R ⊏ 248112, reperiemus radicem esse 12, & si fuerit 1 QC — 60 R ⊏ 3198800, reperiemus esse 20.

	60		0	0
	. .	R	1	2
3	48112	Q	1	4
.	QQCQR.	C	1	8
QC 1	QC 1	QQ	1	6
		QC	1	32
	60			
2	48712			
2				
1	48712			
	60			
1	48772			
	5			
	10			
	10			
	10			
	61160			
2	0			
	40			
	80			
	80			
	32			
1	48812			
	120			
2	4871			

			0	0
	60	R	2	0
	. .	Q	4	0
31	98800	C	8	0
.	QQCQR.	QQ	16	0
QC 1	QC 11	QC	32	0
	120			
32	00000			
22				
0				

Methodus explicandi æquationem inter R—QC, & N.

SI proponeretur æquatio 4000000R — 1QC = 47751168.
Reperietur huius æquationis radix 12.
Si proponetur æquatio 4000000R — 1QC = 76200000.
Reperietur Radix 20; analysis autem ex dictis facilè deduci potest.

Methodus explicandi æquationes multipliciter affectas.

Qua arte æquationes multipliciter affectæ possunt explicari.

GRadum facimus ad explicandas æquationes multipliciter affectas; nimirum qua arte explicetur æquatio quadrato quadrati affecti, tàm sub latere, quàm quadrato; & quidem per affirmationem vtriusq;. Insuper qua methodo explicari possit æquatio in qua quadrato quadratum afficitur sub latere per affirmationem, & cubo per negationem; Item quomodo possit æquatio illa euolui, in qua quadrato-quadratum afficitur sub cubo per affirmationem, & latere per negationem. Præterea qua via sit incedendum ad explicandam æquationem, in qua quadrato-quadratum afficitur sub cubo, quadrato, & latere per affirmationem; quæ facile ex adiunctis exemplis intelligi poterunt; hic multa dicenda forent, quæ breuitati consulentes omittimus.

Paradigma analyseos Quadrato-cubi affecti sub cubo.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.		4	Subcubicum. Tot puncta cubica quot quadrato-cubica.
Quadrato-cubus affectus resoluendus.	8 0	1 7 9 2 0	
	.	QQCQR.	Puncta quadrato-cubica.
	QCi	QCii	
Plano-solida ablatitia	3 2		Quadrato-cubus lateris primi.
		3 2	A cubo lateris primi in coefficiens planum.
Summa plano-solidorum ablatitiorum.	3 2	3 2	
Reliquum resoluendi quadrato-cubi.	4 7	8 5 9 2 0	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisor pars superior.	Plano-planũ expletionis à coefficiẽte plano in triplum quadratum lateris primi.		4 8
	Solidum expletionis à coefficiẽte plano-plano in triplum latus primum.		2 4
	Coefficiens planum.		4
Reliquum resoluendi quadrato-cubi.		4 7	8 5 9 2 0
Diuisorum pars inferior.	Quintuplũ quadratum lateris primi.	5	0
	Decuplus cubus eiusdẽ.		8 0
	Decuplum quadratum eiusdem.		4 0
	Quintuplum latus primum.		1 0
Summa diuisorum.		8	8 9 1 4 4

	0	0
R	2	4
Q	4	16
C	8	64
QQ	16	256
QC	32	1024

Plano solida ablatitia facta à diuisoribus.	Inferioribus.	3 2	0	A latere secun. in quadruplũ quadrato quadratum lateris primi.
		1 2	8 0	A lateris secundi quadrato in decuplum cubum primi.
		2	5 6 0	A cubo lateris secundi in decuplũ quadratum primi.
			2 5 6 0	A quadrato quadrato lateris secũdi in quintuplum primi.
			1 0 2 4	Quadrato cubus lateris secundi.
	Superioribus.		1 9 2	A latere secundo in planum expletionis.
			3 8 4	A quadrato secundi in solidum expletionis.
			2 5 6	A cubo secundi in coefficiens planum.
		4 7	8 5 9 2 0	

Me

Paradigma analyseos quadrato-quadrati affecti tam sub latere, quam quadrato.

I. Eductio lateris singularis primi.

Coefficiens planum.	2	40	Subquadraticum.
Coefficiens solidum.		2 2 4	Tot puncta quadratica quot quadratoquadratic, a. Sublaterale.
Quadratoquadratum affectũ resoluendum.	199	8 7 2 0	
	QQ:	Q C R. QQ:ii	Puncta quadrato-quadratica.
Plano-solida ablatitia.	81		Quadrato-quadratum lateris primi.
	21	60	A quadrato lateris primi in coefficiẽs planum.
		6 7 2	A latere primo in coefficiens solidum
Summa planorum ablatitiorum.	103	2 7 2	
Reliquum QQ, affecti resoluendi.	96	6 0 0 0	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorũ pars superior.	Solidum expletionis a coefficiẽte plano in duplum lateris primi.	1	4 4 0
	Coefficiens planum.		2 4 0
	Coefficiens solidum.		2 2 4
Reliquum quadrato-quadrati affecti resoluendi.		96	6 0 0 0
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	10	8
	Sextuplum quadratum eiusdem.		5 4
	Quadruplum latus primum.		1 2
Summa omnium diuisorum.		12	8 3 8 4

Plano-plana facta à diuisoribus	Inferioribus.	64	8	A latere secun. in quadruplũ cubum primi.
		19	4 4	A lateris secundi quadrato in quadratum sextuplum primi.
		2	5 9 2	A lateris secundi cubo in quadruplum latus primum.
			1 2 9 6	Quadrato-quadratum lateris secundi
	Superioribus.	8	6 4 0	A latere secundo in solidum expletionis.
			8 6 4 0	A quadrato lateris secundi in coefficiens planum.
			1 3 4 4	A latere secundo in coefficiens solidum.
Summa plano-planorum auferẽda æqualis reliquo resoluendi quadrato-quadrati affecti.		96	6 0 0 0	

Dũ igitur est æquatio 1 QQ + 240 Q + 224 R æquatur 1998720 fit 1 R valor 36 vt vides.

Paradig-

Paradigma analyseos Quadrato-quadrati dupliciter affecti, sub Latere per affirmationem, & Cubo per negationem,

I. *Eductio lateris singularis primi.*

− Coefficiens longitudo.	6	0	Subcubica.
		.	
+ Coefficiens solidum.	246	584	Sublaterale.
		. .	
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	998	0160	
	.	C Q R.	Puncta quadrato-quadratica.
	QQ 1	QQ 11	
Plano-plana ablatitia.	256		QQ lateris primi.
	986	336	A latere primo in coefficiens solidum,
Summa ablatitiorum.	1242	336	
Plano-planum addititium	384	0	A lateris primi cubo in coefficientem longitudinem,
Excessus ablatitiorum.	858	336	
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.	139	680	

	0	0	Tot numerales circuli quot puncta quadrato-quadratica.
R	4	6	
Q	16;	36	
C	64:	216	
QQ	256:	1296	

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	Solidum expletionis à coefficiente longitudine in triplum quadratum lateris primi.	28	80	
	Planum expletionis à coefficiente in triplum latus primum.		720	
	Coefficiens longitudo.		60	
✠ Coefficiens solidum.		24	6584	
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.		139	6800	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	25	6	
	Sextuplum quadratum eiusdem.		96	
	Quadruplum latus primum.		16	
Summa diuisorum affectionis affirmatæ.		51	2344	
Summa diuisorum affectionis negatæ.		29	5260	
Excessus diuisorum affectionis affirmatæ.		21	7084	
Plano-plana ablatitia à diuisoribus.	Inferioribus	153	6	A latere secundo in quadruplum cubum primi.
		34	56	A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratū primi.
		3	456	A lateris secundi cubo in quadruplum latus primum.
			1296	Quadrato quadratum lateris secundi.
	Superiore.	147	9504	A latere secundo in coefficiēs solidum.
Summa plano-planorum ablatitiorum.		339	6960	
Plano plana addititia.		172	80	A latere secundo in solidum expletionis.
		25	920	A quadrato lateris secundi in planum expletionis.
		1	2960	A cubo lateris secūdi in coefficientem.
Summa plano-planorum addititiorum.		200	0160	
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendi affecti quadrato-quadrati.		139	6800	

Dum itaq; est æquatio 1 QQ — 60 C ✠ 246584 R = 9980160 fit 1 R valor 46.

Para-

Paradigma analyseos Quadrato-quadrati dupliciter affecti, sub Cubo per affirmationem, & Latere per negationem.

I. Eductio lateris singularis primi

+ Coefficiens longitudo.	2	0	Subcubica.
		. .	
− Coefficiens solidum.		2 2 4	Sublaterale.
		. .	
Quadrato-quadratum affectum resoluendum.	6 4 1	3 8 7 2	
	.	C Q R.	
	QQ 1	QQ 11	
Plano-plana ablatitia.	2 5 6		Quadrato-quadratum lateris primi.
	1 2 8	0	A lateris primi cubo in coefficiens solidum.
Summa plano-planorum ablatitiorum.	3 8 4	0	
Plano-planum additium.		8 9 6	A latere primo in coefficiens solidum.
Excessus ablatitiorum.	3 8 3	1 0 4	
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.	2 5 8	2 8 2	

	0	0	Tot numerales circuli quot puncta quadrato-quadratica.
R	4	6	
Q	16:	36	
C	64:	216	
QQ	256:	1296	

II. Edu-

II. Eductio lateris singularis secundi.

Diuisorum pars superior.	✝ Solidum expletionis à coefficiente longitudine in triplum quadratū lateris primi.	9	60	
	✝ Planum expletionis à coefficiēte longitudine in triplum latus primum.		240	
	✝ Coefficiens longitudo.		20	
	— Coefficiens solidum.		224	
Reliquum resoluendi affecti quadrato-quadrati.		258	2832	
Diuisorum pars inferior.	Quadruplus cubus lateris primi.	25	6	
	Sextuplum quadratum eiusdem.		96	
	Quadruplum latus primum.		16	
Summa diuisorum affectionis affirmatæ.		36	4180	
Diuisor affectionis negatæ.			224	
Excessus diuisorum affectionis affirmatæ.		36	3956	
Plano-plana ablatitia à diuisoribus.	Inferioribus.	153	6	A latere secundo in quadruplū cubum lateris primi.
		34	56	A quadrato lateris secundi in sextuplum quadratum primi.
		3	456	A lateris secundi cubo in quadruplum latus primum.
			1296	Quadrato-quadratum lateris secundi.
	Superioribus.	57	60	A latere secundo in solidum expletionis.
		8	640	A lateris secundi quadrato in planum expletionis.
			4320	A lateris secundi cubo in coefficientem longitudinem.
Summa plano-planorum ablatitiorū.		258	4176	
Plano-planum additium.			1344	A latere secundo in coefficiens solidum.
Excessus ablatitiorum æqualis residuo resoluendo affecto QQ.		258	2832	

Si itaque fuerit æquatio 1QQ ✝ 20C — 224R = 6413872
1R valor erit 46.

Para

Paradigma analyſeos Quadrato-quadrati affecti per affirmationem Cubi, Quadrati, & Lateris.

	1 2
Propoſita ſit æquatio 1 QQ + 6 C + 4 Q + 10 R = 31800.	31800
A numero 31800 ſubtrahe Quadrato-quadratum primæ figuræ 1; & eſt 1;	1
A reſiduo.	21
Subtrahe 6, numerum factum à cubo primæ figuræ in numerum Cuborum	6
A reſiduo annexa ſequente figura.	158
Subtrahe 4, numerum factum à quadrato primæ figuræ in numerum Quadratorum.	4
A reſiduo annexa ſequente figura.	154
Subtrahe numerum factum à prima figura in numerum Radicum.	10
A reſiduo inuenta ſecunda figura.	1530
Subtrahe quadruplum cubum primæ ductum in ſecundam.	80
A reſiduo.	73
Subtrahe ſextuplum quadrati primæ figuræ ductum in quadratū ſecundę	24
A reſiduo.	490
Subtrahe Quadruplum primæ figuræ ductum in cubum ſecundæ,	32
A reſiduo.	4580
Subtrahe quadrato-quadratum ſecundæ figuræ.	16
A reſiduo.	4564
Subtrahe numerum factum à triplo quadrati primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & ſecunda figura.	36
A reſiduo.	964
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & à quadrato ſecundæ figuræ.	720
A reſiduo.	244
Subtrahe cubum ex ſecunda figura ductum in numerum cuborum.	48
A reſiduo.	196
Subtrahe numerum factum à producto dupli primæ & ſecundæ figuræ in numerum Quadratorum.	160
A reſiduo.	36
Subtrahe numerum factum à quadrato ſecundæ figuræ ducto in numerum Quadratorum.	16
A reſiduo.	20
Subtrahe numerum factum à ſecunda figura ducta in numerumRadicum; & nihil remanet.	20
	00

Ad indagandam ſecundam ipſam figuram paratur diuiſor modo infra poſito; Aduerte autem nomine primæ figuræ intelligi latus primum quod ſi radix conſtet pluribus figuris, quàm duabus; primæ duę ſumguntur munere vnius, at ſępe dictum eſt.

Quadruplus Cubus primæ figuræ.	4
Sextuplum quadrati primæ figuræ.	6
Quadruplum primæ figuræ.	4
Triplum quadrati primæ figuræ ductum in numerum Cuborum	18
Triplum primæ figuræ ductum in numerum Cuborum.	18
Numerus Cuborum.	6
Duplum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	8
Numerus Quadratorum.	4
Numerus Radicum.	10
Summa, & diuiſor.	6720

Para-

Paradigma item aliud analyseos Quadrato-quadrati affecti, per affirmationem Cubi, Quadtati, & Lateris.

	2 4
PRoposita sit æquatio 1QQ + 12C + 10Q + 16R =	5 0 3 8 0 8
A numero 5 0 3 8 0 8, subtrahatur QQ. primæ figuræ 2, & est 16.	1 6
A residuo.	3 4 3
Subtrahe 8. cubum primæ figuræ 2, ductum in 12, numerum Cuborum.	9 6
A residuo, annexa sequente figura.	2 4 7 8
Subtrahe 4 quadratum primę figuræ ductum in 10. numerum quadratorũ.	4 0
A residuo annexa sequente figura.	2 4 3 8 0
Subtrahe 2, primam figuram ductam in 16, numerum Radicum.	3 2
A residuo Inuenta secunda figura.	2 4 3 4 8 8
Subtrahe quadruplum cubum primæ ductum in secundam.	1 2 8
A residuo verò.	1 1 5 4 8
Subtrahe sextuplum quadrati primæ figuræ ductum in Q. secundæ.	3 8 4
A residuo autem.	7 7 0 8
Subtrahe quadruplum primæ figuræ ductum in cubum secundæ.	5 1 2
A residuo verò.	7 1 9 6 8
Subtrahe Quadrato-quadratum secundæ figuræ.	2 5 6
A residuo.	7 1 7 1 2
Subtrahe numerum factum à triplo quadrati primæ figurę ducto in numerum Cuborum, & secunda figura.	5 7 6
A residuo.	1 4 1 1 2
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & à Quadrato secundæ.	1 1 5 2
A residuo.	2 5 9 2
Subtrahe cubum ex secunda figura ductum in numerum Cuborum.	7 6 8
A residuo.	1 8 2 4
Subtrahe numerum factum à producto dupli primæ figuræ, & secundæ in numerum Quadratorum.	1 6 0
A residuo.	2 2 4
Subtrahe numerum factum à quadrato secundæ figuræ ducto in numerum Quadratorum.	1 6 0
A residuo.	6 4
Subtrahe numerum factum à secunda figura ducta in numerum Radicum.	6 4
	0 0

In præcedenti Paradigmate licet intuari methodum instituendi analysin æquationis in qua QQ afficitur adiunctione, cubi, quadrati, & lateris. Solùm superest adnotare modum indagandi secundam figuram; Aduerte diuisorem parari hac methodo.

Quadruplus Cubus primæ figuræ 2.	3 2
Sextuplum quadrati primæ figuræ.	2 4
Quadruplum primæ figuræ.	8
Triplum quadrati primæ figuræ ductum in numerum Cuborum	1 4 4
Triplum primæ figuræ ductum in numerum cuborum.	7 2
Numerus Cuborum.	1 2
Duplum primæ figuræ ductum in numerum Quadratum.	4 0
Numerus Quadratorum	1 0
Numerus Radicum,	1 6
Summa, & Diuisor, per quem	
Diuiso 243588, fit quotiens, secunda figura 4. satisfaciens, &c.	5 0 0 3 8

Si

Si itaq; fuerit proposita quædam æquatio, in qua 1QQ + 12C + 10Q + 16R = 503808. Rectè dicemus vnius radicis pretium esse 24; huius enim quadrato quadratum est 331776, & eiusdem cubus est 13824; quapropter 12C, valebunt 165888. Insuper 10Q (quoniam quadratum ipsius 24, est 576) est 5760; demum 16R, pretium erit 384. Porrò hi numeri si vnam summam colligantur, fiet numerus 50808, qui in æquatione munere comparationis homogenei fungitur. Hæc autem certe licet in adiuncto exemplo quamobrem de his hactenus

331776
165888
5760
384
50808

SCHOLION I.

Quoniam synthesis dictat analysin, haud erit difficile, quæ hactenus explicauimus iuxta methodum Vietæam, demonstrationibus confirmare, cuiuscunq; enim allatæ potestatis affectæ synthesin perpendendo licebit analysin cognoscere, & tandem rectè secundum præscriptam methodum ordinatam esse demonstrare. Nos quidem solùm in æquationibus quadraticis, demonstrationes attulimus, prætermittentes in reliquis, quandoquidem nimiùm opus excrescebat, eoq; libentiùs eas prætereundas silentio duximus, quod ex animaduersione syntheseos, quemadmodum dicebamus, ipsas conijcere extra difficultatem cuiuis licebit. Quod autem de potestatibus affectis asserimus, de puris quoq; & multò faciliùs intelligendum volumus: quamobrem operæ pretium duximus ibi Theoremata illa synthetica adnotare; quandoquidem iuxta illa fuit instituta analysis. Sed de his hactenus, quæ arte commemorata æquationes explicari possint intercedentibus numeris irrationalibus &c. (quemadmodum adnotauimus quoq; in Scholio ad paginam 197.) huc usq; deprehensum non est; licebit aliquando fauente Deo, methodum adeo sublimem adinuenire. Cæterum de reductione æquationum hic esset agendum: at quoniam hac de re iterum in Algebra speciosa redituri, erit sermo; proinde nos contemplationem hanc in præsentia prætermittemus, in præcitato loco de ipsa sermonem habituri. Ex æquationibus explicatis, cuicunq; licebit aduertere methodum procedendi in alijs æquationibus; plurimum autem conferet ad analysin rectè instituendam aduertere pretium figuræ ex hac enim obseruatione non erit operosum intelligere locum ipsi figuræ debitum; vnde ipsius resolutionis ordinatio dependet; Si igitur, prima figura sit 1. radix autem vniuersa duabus figuris constet, latus primum erit 10; quamobrem dum dicitur sumendum esse duplum lateris primi illudq; esse 2; intelligere oportet circularem comitantem figuram; quando quidem latus erat 10; ob id 2, valebit 20; quæ fit, vt figura 2; constitui debeat in ordinem denariorum, non vnitatum. Si foret prima figura 2; & vniuersum latus duabus figuris constaret significabit 20; quamobrem duplum ipsius erit 4, assumens 0; vnde fit 40; eius quadratum erit 4; hoc est 400; quæ fit, vt duplum illud lateris constitui debeat sic, vt nimirum 2; cadat in loco denariorum sicuti 0. in loco vnitatum ista quoq; dum accipitur 4; pro quadrato illius figuræ 2; constitui debeat in loco centenariorum; non denariorum; neq; vnitatum. Itaq; in superiori primo exemplo, cum diceretur e. g. sumatur quadruplus cubus primæ figuræ 1; quoniam radix est 12; duabus figuris constans; quadratum primæ est 1, assumens 00; hoc est 100; quapropter eius cubus erit 1000; atq; adeo quadruplus cubus erit 4000; quæ fit vt 4; ad indagandum secundum figuram, debeat constitui in ordine milliariorum &c. Quod animaduertisse iuuabat.

Cæterarum methodorum demonstrationes prætermittuntur, nec immeritò, cũ facilè eas ex animaduersione synthesees quisq; possit conijcere.

Nota

SCHO-

SCHOLION II.

Positionem in ænigmatibus enodandis plurimum negotij facescere Analystæ nemo ibit inficias: non erit igitur abs re, nonnulla hoc loco afferre, quę maximè ad positionem instituendam conducunt: hæc autem sunt, quæ deducuntur ex nonnullis quæstionibus Diophanti, è quibus nimirum Canones eliciuntur, vt factum fuit à Xilandro, Bombellio, & Bacheto: non attulimus Canones separatim ab exemplis; sed statim exempla aggressi, regulas explicamus breuitati studentes; eadem enim hic à nobis allata apud commemoratos scriptores videnda copiosiùs pertractata relinquimus.

I. Regula prima. Diuidere 1 R, in duas partes, vt vna superet alteram vnitatibus 16.

Subtrahantur 16, ex 1 R, & remanebit 1 R — 16, hoc autem residuum diuidatur bifariam; eius verò dimidium est $\frac{1}{2}$ *R — 8, hoc dimidium est minor pars. Vt autem maiorem ipsam assequamur; eidem* $\frac{1}{2}$ *R — 8, addantur 16, & fit* $\frac{1}{2}$ *R + 8, pars maior.*

II. Regula 2. Diuidere 16, in duas partes, vt maior superet minorem hoc excessu 1 R.

Subtrahatur 1 R, ex 16, vt remanet 16 — 1 R; hoc autem residuum diuidatur in duas partes æquales, fitq; dimidium 8 — $\frac{1}{2}$ *R, & est pars minor. Pars autem maior habetur, si ipsi 8 —* $\frac{1}{2}$ *R, addatur 1 R, & fit 8 +* $\frac{1}{2}$ *R.*

III. Regula 3. Reperire numerum, quo subtracto ex 1 R, remaneat 16.

Auferantur 16, ex 1 R, vt remaneat 1 R — 16, pro numero quæsito.

IV. Regula 4. Reperire numerum, qui ductus in 16, faciat 1 R.

Diui-

Diuidatur 1 *R per* 16, *vt fiat quotiens* $\frac{1\,R}{16}$, *pro numero quæsito; hic enim ductus in* 16, *facit* 1 *R: eodem modo si oporteret diuidere* 1 *Q*, 1 *C*, *&c.*

Regula 5. Numerum reperire, quo diuiso per 1 R, remaneat 16. V.

Ducatur 1 *R in* 16, *& fiet* 16 *R, & est numerus quæsitus.*

Regula 6. Duos numeros reperire in ratione, vt 2, ad 5, VI.
& vt eorum summa sit 1 R + 7.

Numeri propositi 2, *&* 5, *in vnam summam colligantur, vt fiat* 7; *per hunc autem numerum diuidatur* 1 *R* + 7, *vt proueniat* $\frac{1}{7}$ *R* + 1: *hæc autem summa ducatur in* 2, *&* 5, *fit* $\frac{2}{7}$ *R* + 2, *&* $\frac{5}{7}$ *R* + 5; *& hi numeri sunt quæsiti.*

Regula 7. Datis duobus terminis 5 + 1 R, & 2 R, alios VII.
duos reperire in eadem ratione, & vt eorum summa sit 6.

Ad 5 + 1 *R, addantur* 2 *R, vt fiat summa* 5 + 3 *R; per quam diuidatur* 6, *vt fiat* $\frac{6}{5+3R}$: *hæc autem fractio ducatur in* 5 + 1 *R, &* 2 *R, vt fiant* $\frac{30+6R}{5+3R}$, *&* $\frac{12\,R}{5+3R}$; *hi siquidem numeri sunt in proposita ratione, simulq; iuncti, conficiunt* 6.

Regula 8. Datis duobus terminis 5 + 1 R, & 2 R; alios VIII.
duos in eadem ratione reperire, ita vt eorum differentia sit 6.

Sumatur ipsorum terminorum differentia, per quam diuidatur datus numerus 6; *quotiens autem ducatur in datos terminos: sic enim orientur numeri, seu termini quæsiti.*

Regula 9. Duos numeros adinuenire, vt eorum exces- IX.
sus sit 16, subtractoq; minoris quadrato, à quadrato maioris remaneat 1 R.

Diuidatur 1 *R, per* 32, *duplum ipsius* 16, *& fit quotiens* $\frac{1}{32}$ *R, ab hoc subtrahatur* 8, *dimidium dati numeri* 16, *& remanebit* $\frac{1}{32}$ *R* — 8, *pro minori parte, maior autem erit* $\frac{1}{32}$ *R* + 8.

Regula 10. Diuidere 1 R + 6, in duas partes ea lege, X.
vt ab vna subtracto dimidio, & ab altera subtracta tertia parte, residua sint inter se æqualia.

Addantur ad inuicem $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, & fiet $\frac{5}{6}$, subductis de 2, remanet 1 $\frac{1}{6}$, & hoc seruetur. Sumatur dimidium ipsius 1 R + 66, vel tertia pars, & remanet $\frac{1}{2}$ R + 3, hoc diuidatur per 1 $\frac{1}{6}$, & proueniet $\frac{3}{7}$ R + 2 $\frac{4}{7}$, eritq; pars vna, altera verò erit $\frac{4}{7}$ R + 3 $\frac{3}{7}$.

XI. Regula 11. Diuidere 1 R, in duas partes, vt vna ducta in alteram faciat $\frac{1C}{120 + 1R}$.

Sumatur dimidium numeri radicum, nempe $\frac{1}{2}$ R, eius quadratum est $\frac{1}{4}$ Q. Ab hoc subtrahatur $\frac{1C}{120 + 2R}$ numerus, quem facere debent, & remanet $\frac{1}{4}$ Q — $\frac{1C}{120 + 2R}$, facta autem subtractione, remanet $\frac{120 Q - 2C}{480 + 8R}$.

XII. Regula 12. Diuidere 120 — 1 R, in duas partes, vt inter se ductæ faciant $\frac{1C}{120 + 1R}$.

Sumatur dimidium ipsius 120 — 1 R, & est 60 — $\frac{1}{2}$ R, cuius quadratum est 3600 — 60 R + $\frac{1}{4}$ Q; quo subtracto ex numero efficiendo $\frac{1C}{120 + 2R}$ remanet 432000 — 90 Q — $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1C}{120 + 2R}$, subtrahatur ex $\frac{3600 - 60 R + \frac{1}{4} Q}{1}$, remanet 432000 — 90 Q — $\frac{1}{2}$ C.

$$\frac{1C}{120 + 2R} \times \frac{3600 - 60R + \frac{1}{4}Q}{1}$$

$$7200R - 120Q + \tfrac{1}{2}C$$
$$432000 - 7200R + 30Q$$

$$432000 - 90Q + \tfrac{1}{2}C$$

Subtrahatur 1 C

Remanet $432000 - 90Q - \frac{1}{2}C$

Qua-

Quamobrem remanebit $\dfrac{432000 - 90\,\mathcal{Q} - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2\,R}$

Huius radix quadrata est ℞ $\mathcal{Q}\left(\dfrac{432000 - 90\,\mathcal{Q} - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2\,R}\right)$

Hoc verò addatur, & subtrahatur dimidio illi $60 - \frac{1}{2}R$, *& fit*

$60 - \frac{1}{2}R -$ ℞ $\mathcal{Q}\left(\dfrac{432000 - 90\,\mathcal{Q} - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2\,R}\right)$ *pars una; pars autem altera erit* $60 - \frac{1}{2}R +$ ℞ $\mathcal{Q}\left(\dfrac{432000 - 90\,\mathcal{Q} - \frac{1}{2}\,C}{120 + 2\,R}\right)$

Regula 13. Diuidere 16 + 1 R in duas partes, adeo vt inter se ductæ producant 40. XIII.

Sumatur dimidium quantitatis diuidendæ; & est $8 + \frac{1}{2}R$, *eius quadratum est* $64 + 8R + \frac{1}{4}\mathcal{Q}$, *ab hoc subtrahatur 40; fiet* $24 + 8R + \frac{1}{4}\mathcal{Q}$, *eruatur latus quadratum, & est* ℞ $\mathcal{Q}(24 + 8R + \frac{1}{4}\mathcal{Q})$ *cui adhatur* $8 + \frac{1}{2}R$, *dimidium quantitatis diuidendæ, & fit* ℞ $(24 + 8R + \frac{1}{4}\mathcal{Q}) + 8 + \frac{1}{2}R$, *altera verò pars erit, residuum vsq; ad* $16 + 1R$; *nempe* $8 + \frac{1}{2}R -$ ℞ $(24 + 8R + \frac{1}{4}\mathcal{Q})$.

$$\begin{array}{l} 8 + \frac{1}{2}R \\ 8 + \frac{1}{2}R \\ \hline 4R + \frac{1}{4}Q \\ 64 + 4R \\ \hline 64 + 8R + \frac{1}{4}Q \\ 40 \\ \hline 24 + 8R + \frac{1}{4}Q \\ \text{℞}\,Q(24 + 8R + \frac{1}{4}Q) + 8 + \frac{1}{2}R \\ 8 + \frac{1}{2}R - \text{℞}\,Q(24 + 8R + \frac{1}{4}Q) \end{array}$$

Regula 14. Diuidere 16 — 1 R in duas partes, vt earum quadrata, simul iuncta faciant 56. XIV.

Sumatur quadratum propositæ quantitatis 16 — 1 R, & est 256 — 32 R + 1 Q; à quo subductis 56, remanet 200 — 32 R + 1 Q; huius dimidium est 100 — 16 R + ½ Q; quo subtracto ex 64 — 8 R + ¼ Q, remanet 8 R — ¼ Q — 36; cuius latus est ℞ (8 R — ¼ Q — 36); quo addito ad 8 — ½ R, fit 8 — ½ R + ℞ (8 R — ¼ Q — 36) pars vna.

$$
\begin{array}{r}
8 - \frac{1}{2} R \\
8 - \frac{1}{2} R \\
\hline
- 4 R + \frac{1}{4} Q \\
64 - 4 R \qquad\quad \\
\hline
64 - 8 R + \frac{1}{4} Q \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
16 - 1 R \\
16 - 1 R \\
\hline
- 16 R + 1 Q \\
256 - 16 R \qquad \\
\hline
256 - 32 R + 1 Q \\
56 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
200 - 32 R + 1 Q \\
100 - 16 R + \frac{1}{2} Q \\
\hline
64 - 8 R + \frac{1}{4} Q \\
100 - 16 R + \frac{1}{2} Q \\
\hline
8 R - \frac{1}{4} Q - 36
\end{array}
$$

Altera pars erit ℞ (8 R — ¼ Q — 36)

Hæc nimirum 8 — ½ R — ℞ (8 R — ¼ Q — 36)

$$
\begin{array}{r}
8 R - \frac{1}{4} Q - 36 \\
64 - 8 R + \frac{1}{4} Q \\
\hline
\frac{8}{4} Q - \frac{1}{16} QQ - \frac{36}{4} Q \\
- 64 Q + \frac{8}{4} C + 288 R \qquad \\
512 R - 16 Q - 2304 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
800 R - 2304 - 89 Q + 4 C - \frac{1}{16} QQ
\end{array}
$$

8—

8 — ½R † ℞(8R — ¼Q — 36)
8 — ½R — ℞(8R — ¼Q — 36)

8 — ½R † ℞(8R — ¼Q — 36)
8 — ½R † ℞(8R — ¼Q — 36)

℞(800R — 2304 — 89Q † 4C — 1/16 QQ) † 8R — ¼Q — 36)
64 — 8R † ¼Q † ℞(800R — 2304 — 89Q † 4C — 1/16 QQ)

28

8 — ½R — ℞(8R — ¼Q — 36)
8 — ½R — ℞(8R — ¼Q — 36)

— ℞(800R — 2304 — 89Q † 4C — 1/16 QQ) † 8R — ¼Q — 36)
64 — 8R † ¼Q — ℞(300R — 2304 — 89Q † 4C — 1/16 QQ)

28

Vides igitur supradictas partes, quæstioni satisfacere.

Regula 15. Diuidere 16, in duas partes, ita vt earum XV.
quadrata, simul iuncta faciant 256 — 2R.
Sumantur 256 quadratum numeri diuidendi, & ab his sub-
trahantur 256 — 2R, remanent 2R; quibus diuisis per 2, fit
quotiens 1R; qua subtracta de 64, quadrato ex 8, dimidio nu-
meri 16, remanent 64 — 1R ℞C 64 — 1R); addatur ad 8,
vt fiat 8 † ℞C 64 — 1R), & hac est pars vna; altera erit 8 —
℞C 64 — 1R).
Regula 16. Diuidere 16 † 2R, in duas partes, ea lege, XVI.
vt vna in aliam ducta tantum faciat, quantum dictarum
partium differentia ducta in 18.
Sumatur 8 † 1R, dimidium propositæ quantitatis, adda-
turq; ad 18, & fit 26 † 1R: huius quadratum est 676 † 52
R † 1Q; ab hoc autem quadrato subtrahatur 288 † 36R,
pro-

productum ex 16 ✠ 2 *R in* 18, *& remanet* 388 † 16 R † 1 *Q. huius latus est* ℞ (388 † 16 R † 1 *Q*), *quod est subtrahen-*

											2	6	✠	1	R	
											2	6	✠	1	R	
										2	6	R	✠	1	Q	
					6	7	6	✠	2	6	R					
					6	7	6	✠	5	2	R	✠	1	Q		
					2	8	8	✠	3	6	R					
					3	8	8	✠	1	6	R	✠	1	Q		
				℞ (	3	8	8	✠	1	6	R	✠	1	Q)		
2 6 ✠ 1 R —			℞ (	3	8	8	✠	1	6	R	✠	1	Q)			
						1	6	✠	2	R						
							1	8								
					2	8	8	✠	3	6	R					

dum à 26 † 1 *R*, *& residuum* 26 † 1 *R* — ℞ (388 † 16 R † 1 *Q*) *est pars vna; qua subtracta ex* 16 † 2 R, *remanet* ℞ (388 † 16 R † 1 *Q*) † 1 R — 10, *pro altera parte*.

XVII. Regula 17. Diuidere 12, in duas partes, vt earum quadrata simul iuncta, tantum faciant, quantum faciunt inter se multiplicata, additis 3 R ad productum.

A 144, *quadrato propositi numeri* 12, *subtrahentur* 3 R, *vt fiat residuum* 144 — 3 R; *diuidatur per* 3, *& fit quotiens* 48 — 1 R; *hoc autem subtracto ex* 36, *quarta parte numeri* 144, *quadrati ex* 12, *remanet* 1 R — 12; *eius autem latus est* ℞ (1 R — 12), *quo subtracto ex* 6, *dimidio numeri* 12, *remanet* 6 — ℞ (1 R — 12), *& est pars vna; altera verò erit* 6 † ℞ (1 R — 12).

XVIII. Regula 18. Diuidere 16 † 2 R, secundum extremam, & mediam rationem.

Su-

Sumatur 256 — 64 R † 4 Q, quadratum propositæ quantitatis, & huic addatur 64 † 16 R † 1 Q, quadratum dimidij propositæ quantitatis, & fit 320 † 80 R † 5 Q; huius ℞ est

16 † 2 R
16 † 2 R

32 R † 4 Q
256 † 32 R

256 † 64 R † 4 Q
64 † 16 R † 1 Q

320 † 80 R † 5 Q

℞ 320 † ℞ 5
8 † 1 R

Pars vna ℞ 320 — 8 † ℞ 5 R — 1 R
16 † 2 R
℞ 320 — 8 † ℞ 5 3 — 1 R

Pars altera 24 — ℞ 320 † 1 R — ℞ 5 R

℞ 320 † ℞ 5 R, à qua subtracto 8 † 1 R, dimidio propositæ quantitatis remanebit ℞ 320 — 8 † ℞ 5 R — 1 R, pro vna parte; alia verò erit 24 — ℞ 320 † 1 R — ℞ 5 R.

Regula 19. Diuidere 16 † 2 R in tres partes continuè proportionales, ea lege, vt earum quadrata simul iuncta faciant 256. XIX.

Sumatur 256 † 64 R † 4 Q, quadratum ipsius 16 † 2 R; à quo subtracto 256, remanet 64 R † 4 Q; hoc autem residuum diuidatur per 32 † 4 R, duplum dati numeri diuidendi, & fit quotiens $\frac{64R \dagger 4Q}{32 \dagger 4R}$, *& est pars secunda. Partes reliquæ habentur, si iam inuenta subtrahatur 16 † 2 R, residuum verò* *diuidatur in duas partes, quæ inter se ducta faciant quadratum ex* $\frac{64 R \dagger 4 Q}{32 \dagger 4 R}$, *nempè sumatur residuum, & ab eius quadrato subtrahatur quadratum ex dimidio huius* $\frac{64 R \dagger 4 Q}{32 \dagger 4 R}$, *& ex residuo eruatur radix, quæ subtracta ipsimet dimidio relinquit primam, minoremq; partem ex tribus quæsitis, & addita exhibet tertiam, & maiorem.*

XX. Regula 20. Diuidere 1 ½ R ✠ 34 in duas partes, ea lege, vt si vni ipsarum addantur 92, fiat triplum alterius.

Adde ipsis 1 ½ R † 34, *numerum* 92, *& fit* 1 ½ R † 126, *quo diuiso per* 4, *fit quotiens* ⅜ R † 31 ½, *hic numerus si subtrahatur ipsi* 1 ½ R † 34, *remanebit* 1 ⅛ R † 2 ½, *huic enim additis* 92; *fit* 1 ⅛ R † 94 ½, *triplus illius* ⅜ R † 31 ½, *qui nimirum si ducatur in* 3, *fit* 1 ⅛ R † 94 ½.

XXI. Regula 21. Diuidere 14, in tres partes in ratione continua, vt secunda sit 1 R.

Auferatur 1 R, *à* 14, *& remanet* 14 — 1 R, *huius autem dimidium est* 7 — ½ R, *huius verò quadratum est* 49 — 7 R ✠ ¼ Q; *à quo si subtrahatur quadratum secundæ, nimirum* 1 Q, *remanet* 49 — 7 R — ¾ Q; *huius latus est* ℞ (49 — 7 R — ¾ Q) *quo subtracto à* 7 — ½ R, *remanet* 7 — ½ R — ℞ (49 — 7 R — ¾ Q) *& hæc est prima pars. Secunda porrò erit* 1 R. *Tertia demum erit residuum vsq; ad* 14; *nempe* 7 — ½ R ✠ ℞ (49 — 7 R — ¾ Q).

XXII. Regula 22. Tres quantitates reperire in ratione continua, vt prima, & secunda sint 10 — 1 R, tertia verò 1 R.

Ducatur 1 R *in* 10 — 1 R *& fit* 10 R — 1 Q, *hoc autem addatur quadrato dimidij,* 1 R, *nempe* ¼ Q, *& fit* 10 R — ¾ Q, *huius autem radix est* ℞ (10 R — ¾ Q *à qua subtrahatur* ½ R *dimidium tertiæ partis, & remanet* ℞ (10 R — ¾ Q) — ½ R, *& hæc est secunda pars; quæ subtracta à* 10 — 1 R, *remanet* 10 — ½ R — ℞ (10 R — ¾ Q) *& hæc est pars prima; quæ ducta in tertiam* 1 R, *facit* 10 R — ½ Q — ℞ (10 C — ¾ QQ) *& est æquale hoc productum quadrato secundæ; hoc enim est pariter* 10 R — ½ Q — ℞ (10 C — ¾ QQ).

Regu-

Regula 23. Diuidatur 20 + 1 R in tres partes continuè proportionales, vt prima ſit 1 R. XXIII.

Subtrahatur 1 R de 20 + 1 R, remanet 20; qui ductus in primam facit 20 R; cui addito $\frac{1}{4}$ Q, quarta parte quadrati ex prima fit 20 R + $\frac{1}{4}$ Q; huius latus eſt ℞(20 R + $\frac{1}{4}$ Q); à quo ſubtracto $\frac{1}{2}$ R, dimidio primæ, remanet, ℞(20 R + $\frac{1}{4}$ Q) — $\frac{1}{2}$ R, pro ſecunda parte. Tertia verò erit 20 + $\frac{1}{2}$ R — ℞(20 R + $\frac{1}{3}$ Q) reſiduum nimirum vſq; ad 20.

Regula 24. Diuidere 14, in tres partes, continuè proportionales; vt ſi multiplicetur prima per ſecundam, & productum per tertiam, fiat 1 C. XXIV.

Sumatur Radix ipſius C, & eſt 1 R: quamobrem 1 R, erit ſecunda pars, at verò prima, & tertia reperietur, vt ſupra regulæ antecedenti 23.

Regula 25. Duos numeros reperire, vt eorum exceſſus ſit 1 R, quadratorum autem ſumma ſit 20. XXV.

Accipe $\frac{1}{2}$ R; dimidium 1 R; huius quadratum eſt $\frac{1}{4}$ Q; quo ſubtracto ex 10, dimidio dati numeri 20, remanet 10 — $\frac{1}{4}$ Q; huius autem latus quadratum eſt ℞(10 — $\frac{1}{4}$ Q); à quo dematur $\frac{1}{2}$ R, & remanet ℞(10 — $\frac{1}{4}$ Q) — $\frac{1}{2}$ R, pro vno ex numeris quæſitis.

Has autem regulas tradidiſſe ſufficiat, & ſi plurima alia poſſent afferri non minus ad ipſam poſitionem inſtituendam conducentes. Poterit autem vnuſquiſq; non ſine iucunditate regulas enarratas numeris abſolutis applicare, & manifeſtiſſimè veritatem deprehendere.

CAPVT XV.

In quo varia exemplorum genera proponuntur ad Artem analyticam illustrandam.

In hoc præsenti capite placuit afferre sex exemplorum genera, in quibus ad praxim reuocata præcepta superiùs tradita conspiciuntur.

Primum exemplorum genus.

PRimum exemplorum genus illud esto Problematum, eorum nimirum, in quibus, vel diuisor est vnitas, vel nulla reductione est opus.

PROBLEMA PRIMVM.

NVmerum inuenire, cui si addantur 10, *& ab eodem auferantur* 20, *summa ad residuum habeat rationem, vt* 2, *ad* 1.

Positio. Numerus quæsitus esto 1 R; cui additis 10, fit 1 R + 10; si verò ex 1 R, auferantur 20, fit residuum 1 R — 20; vt autem est 2 ad 1, ita est 1 R + 10, ad 1 R — 20; proinde si 1 R — 20, multiplicemus per 2, fiet productum 2 R — 40 = 1 R + 10; additis vtrinque 40, fit æquatio 1 R + 50 = 2 R; & vtrinque sublata 1 R, fiet æquatio 1 R = 50; proinde numerus quæsitus erit 50.

$$1\,R + 10 \qquad 1\,R - 20$$
$$2$$
$$1\,R + 10 = 2\,R - 40$$
$$40$$
$$1\,R + 50 = 2\,R$$

Hic

Hic autem numerus quæstioni satisfacit: quandoquidem si numero 50, addantur 10, fiet numerus 60; si verò ab eodem auferantur 20, fiet numerus residuus 30: est autem 60, ad 30, vt 2, ad 1. *Comprobatur superior processus analyticus.*

PROBLEMA SECVNDVM.

Reperire numeros duos inæquales, quorum differentia sit 10, ea tamen lege, vt si minor ducatur in 2, & producto addantur 5, maior autem in 3, & producto addantur 6, fiat maior duplus minoris.

Minor numerus esto 1 R; ergo maior erit 1 R + 10: si minor ducatur in 2, & producto addantur 5, fiet 2 R + 5; si maior ducatur in 3, & producto addantur 6, fient 3 R + 36. Cum itaq; maior duplus sit minoris, si minor duplicetur, erunt 4 R + 10 = 3 R + 36. Si itaq; ab vtraq; parte tollantur 3 R, erunt 1 R + 10 = 36: & rursus ab vtraq; parte sublatis 10, remanebit 1 R = 26. Proinde minor numerus quæsitus erit 26; maior autem erit 36: qui habetur additis 10, ad 26; & hi duo numeri satisfaciunt quæstioni. *Positio.*

$$1\,R \times 2 = 2\,R; \quad 2\,R + 5$$

$$(1\,R + 10) \times 3 = 3\,R + 30; \quad 3\,R + 30 + 6 = 3\,R + 36$$

$$4\,R + 10 = 3\,R + 36$$

$$-\,3\,R$$

$$1\,R + 10 = 36$$

$$-\,10$$

$$1\,R = 26$$

PROBLEMA TERTIVM.

NVmerum reperire ex cuius $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, si tollantur 60, remaneant 80.

Positio. Quæsitus numerus esto 1 R; partes eius supradictæ sunt $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{3}$ R, $\frac{1}{6}$ R, quarum summa est 1 R: à qua si auferantur 60, remanebit 1 R — 60 $=$ 80: vtrique autem parti additis 60, fiet æquatio 1 R $=$ 140. Et 140, est numerus quæsitus Problemati satisfaciens: numeri enim 140, dimidium est 70, tertia pars est 46 $\frac{2}{3}$, sexta verò pars est

Comprobatur. 23 $\frac{1}{3}$; ab his autem partibus simul sumptis, quæ nimirum faciunt 140, si tollantur 60, remanent 80.

PROBLEMA QVARTVM.

NVmerum reperire, qui additus numero 60, faciat 130.

Positio. Quæsitus numerus esto 1 R: hæc addita numero 60, facit 1 R + 60; sed efficere debet 130: ergo 1 R + 60 $=$ 130; vtrinque ablatis 60, remanebit 1 R $=$ 70: erit igitur 1 R, valor 70, numerus Problemati satisfaciens.

PROBLEMA QVINTVM.

NVmerum inuenire ex cuius $\frac{1}{3}$, si subtrahantur 15, residuum ducatur in 3, proueniant 70.

Quæsitus numerus esto 1 R; ex cuius $\frac{1}{3}$, si tollantur 15, remanebit $\frac{1}{3}$ R — 15: his autem ductis in 3, proueniet 1 R — 45; & erit æquatio 1 R — 45 $=$ 70; vtriq; parti additis 45, fiet æquatio 1 R $=$ 115: erit igitur quæsitus numerus 115, Problemati satisfaciens.

PROBLEMA SEXTVM.

PRopositi sint duo numeri 30, & 40, sintq; reperiendi duo alij in ratione quadrupla, vt si maior addatur ad

30,

30, & minor ad 40, numeri conflati rationem habeant triplam.

Primus ex numeris quæsitis esto 1R: secundus erit 4R. *Positio.* Si prioribus addantur, vt præcipitur, fient 30 + 1R, & 40 + 4R. Hi autem numeri cum sint in ratione tripla, ducatur minor, nempe 30 + 1R in 3, & fiet æquatio 90 + 3R = 40 + 4R, vtrinq; ablatis 3R, erit 90 = 40 + 1R: vtrinq; ablatis 40, remanebit 50 = 1R. Quæsitus *Comparatur.* igitur numerus erit 50, huius quadruplum est 200. Si verò 50, addantur ad 30, fient 80, & si 200, addantur ad 40, fient 240, liquet autem esse 240, ad 80, vt 3 ad 1.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Numerum reperire, ex quo si tollantur 6, & residui $\frac{1}{3}$, addantur 10, summa verò hæc ducatur in 3, & rursus ex producto tollantur 24, remaneant 60.

Quæsitus numerus esto 1R: ex hac si tollantur 6, remanet 1R — 6; tertia pars est $\frac{1}{3}$R — 2; cui si addantur 10, *Positio.* fiet $\frac{1R + 24}{3}$: hæc autem ducta in 3, facit 1R + 24, ex hac si tollantur 24, remanet 1R, quæ æquabitur 60: & ita 60, est numerus Problemati satisfaciens.

PROBLEMA OCTAVVM.

Numerum reperire, cui si addantur 10, & ex eodem auferantur 14, & ex conflati, residuiq; summa tollatur ipse numerus, atq; residuo addantur 4, fiant 35.

Quæsitus numerus esto 1R: cui si addantur 10, fiet 1R *Positio.* + 10; si eidem radici auferantur 14, fiet 1R — 14; horum summa est 2R — 4; hinc si auferatur idem numerus, nimirum 1R, fiet 1R — 4; huic si addantur 4, fiet 1R = 35: igitur idem numerus 35, satisfacit.

PRO-

PROBLEMA NONVM.

Duos numeros reperire, quorum differentia sit 36, ea lege, vt si quartam partem summa illorum ducam in 2, ex producto verò tollam 18, remaneat 10.

Positio. Minor numerus quæsitus esto 1 R: maior igitur erit 1 R + 36. Vtriusque summa est 2 R + 36: quarta autem pars $\frac{1}{2}$ R + 9; quæ ducta in 2, facit 1 R + 18: vnde si subtrahamus 18, remanebit 1 R, æqualis 12: ob id numerus minor quæsitus erit 10, maior autem erit 46.

S C H O L I O N.

Innumera alia Problemata ad hoc primum genus spectantia potuissent afferri, nobis tamen breuitati consulentibus hactenus allata visa sunt sufficere.

Secundum exemplorum genus.

AD hoc genus exempla pertinent eorum Problematum, quibus per solam diuisionem fit satis; diuiso quando-quidem comparationis homogeneo per numerum digitatis, Radicis pretium inotescit.

PROBLEMA PRIMVM.

Ex Diophanto, 9. prima, libri primi. *PRopositum numerum in duas partes diuidere, quarum data sit differentia.*

Hypothesis. Propositus si numerus 100, diuidendus in duas partes, quæ differant dato numero 30. Pars minor esto 1 R; maior igitur erit 1 R + 30: harum summa est 2 R + 30; Positio. sed esse debet 100: ob id 2 R + 30, æquabuntur 100: vtrinq; ablatis 30, erit æquatio inter 2 R, & 70; diuisis autem 70, per 2, fit quotiens 35, & pars minor; pars autem

tem maior erit 65, & satisfaciunt quæstioni: propterea quod harum partium summa est 100, earum autem differentia est 30, vt patet.

PROBLEMA SECVNDVM.

PRopositum numerum in duas diuidere, vt quædam determinatæ partes maioris, æquales sint parti minori, assumpto aliquo determinato numero.

Iniunctum sit diuidere 100, in duas partes, vt $\frac{2}{3}$ maioris partis æquales sint minori plus 10. Maior pars esto 1 R; ergo minor erit 100 — 1 R; maioris autem $\frac{2}{3}$ sunt $\frac{2}{3}$ R, minor verò si assumat 10, erit 110 — 1 R: erit igitur æquatio huiusmodi $\frac{2}{3}$ R == 110 — 1 R: vtrinq; addita 1 R, fiet $1\frac{2}{3}$ R == 110. Diuisis igitur 110, per $1\frac{2}{3}$ R, fiet quotiens 66, & pars maior; minor autem erit 34: duæ autem tertiæ partes illius sunt 44; & si 34, parti minori addantur 10, fient 44. *Hypothesis.* *Positio.*

PROBLEMA TERTIVM.

PRopositum numerum in duos partiri in data ratione. *Ex Diophanto q. 2. lib. primi.*

Propositum sit diuidere 100, in duas partes, quæ sint inter se vt 7, ad 3. Pars vna esto 3 R, alia verò 7 R; ex his summa est 10 R: ergo erit æquatio 10 R == 100; diuisione instituta, fit quotiens, & 1 R valor 10: ob id pars posita 3 R, erit 30; altera, quæ ponebatur 7 R, erit 70, & satisfaciunt; namq; summa ipsarum est 100; & sunt inter se vt 7 ad 3. *Hypothesis.* *Positio.*

PROBLEMA QVARTVM.

NVmeros reperire, qui sint in proportione vt 5 ad 7, & si multiplicetur minor per 4, maior autem per 3, numeri producti simul additi faciant 123.

Mi-

Positio. Minor ex numeris quæsitis esto 5 R : alter erit 7 R. Modò ducantur 5 R, per 4, & fient 20 R: & multiplicatis 7 R, per 3, producentur 21 R. Harum summa est 41 R; quæ debent esse æquales numero 123. Diuisione autem instituta, fiet quotiens 3. numerus igitur quæsitus minor erit 15, cum ille poneretur 5 R: maior autem erit 21, cum poneretur 7 R; & satisfaciunt quæstioni.

PROBLEMA QVINTVM.

Ex Diophanto q.3. lib.1. *PRopositum numerum in duos partiri, in data ratione, dataq; differentia.*

Hypothesis. Sit iniunctum diuidere 100, in duos numeros, adeo vt maior minoris, sit quintuplus, & adhuc sex vnitates superaddat. *Positio.* Minor esto 1 R: maior igitur erit 5 R ✢ 6; hoc enim pacto maior minoris est quintuplus, & adhuc sex vnitates superaddit. Horum autem summa est 6 R ✢ 6; quæ æquabitur 100. Ablatis similibus à similibus, ob id 6 R $=$ 94. Diuisione institu a, fiet 1 R valor $15\frac{2}{3}$. Ad positiones minor erit $15\frac{2}{3}$ maior aute n habebitur si $15\frac{2}{3}$ multiplicentur per 5; & producto addantur 6, cum maior ipse poneretur 5 R ✢ 6, eritq; $84\frac{1}{3}$.

Aliter. Positio, Vel maior esto 1 R: à qua demptis 6, remanet 1 R — 6, minoris quintuplum; proinde minor erit $\frac{1}{5}$ R — $1\frac{1}{5}$: summa vtriusq; nempe $1\frac{1}{5}$ R — $1\frac{1}{5}$, æquabitur 100; vtrinq; addito $1\frac{1}{5}$, fiet æquatio $1\frac{1}{5}$ R $=$ $101\frac{1}{5}$. Diuisione instituta, fit 1 R, valor $84\frac{1}{3}$, & maior numerus quæsitus; minor autem erit $15\frac{2}{3}$. Cæterum ex operatione superiori loco posita talis elicitur

CANON.

Canon ex operatione deducitur. *SVme duos numeros in ratione data, & per illorum summam diuide datum numerum dato interuallo multatum, quotientem si ducas in minorem sumptorum, fiet minor ex numeris quæsitis.*

PROBLEMA SEXTVM.

DVos numeros reperire, qui & datam rationem, & datum seruent interuallum. *Ex Diophāto q. 4. lib. primi.*

Sit iniunctum maiorem minoris esse sextuplum, interuallum autem ipsorum esse 30. Minor esto 1 R, maior igitur erit 6 R, hoc enim pacto maior est sextuplus minoris; superest, vt horum interuallum sit æquale vnitatibus 30. Fiet igitur diuisione instituta 1 R, valor 6; minor igitur erit 6, maior autem 36, atq; adeo maiore existente sextuplo minoris, interuallum est 30. *Hypothesis. Positio prima.*

Secundò potest etiam operatio hoc modo institui. Maior esto 1 R, minor igitur erit $\frac{1}{6}$ R, horum interuallum est $\frac{5}{6}$ R, æquale 30. Diuisione instituta fit quotiens, & 1 R valor, & maior numerus quæsitus 36. *Aliter. Positio 2.*

Ex his autem duobus operationibus hic elicitur

CANON.

SVme duos numeros in ratione data, & per horum interuallum diuide datum interuallum; quotiens enim ductus in sumptos numeros, quæsitos numeros exhibebit. *Canon ex operatione deductus.*

Tertiò esto minor 1 R, maior igitur erit 1 R + 30, qui cum sit minoris sextuplus, erunt proinde 6 R = 1 R + 30, & ablatis similibus à similibus remanebit æquatio huiusmodi 5 R = 30. Diuisione instituta fit 1 R valor, & minor numerus quæsitus 6, maior proinde 36. *Aliter. Positio 3.*

Quartò maior esto 1 R, minor igitur erit 1 R — 30, hic cum sit sexta pars maioris, erit $\frac{1}{6}$ R = 1 R — 30, seu 1 R = 6 R — 180. Additis 180, vtrinq; fit æquatio 1 R + 180 = 6 R, vtrinq; ablata 1 R, fiet 5 R = 180, diuisione autem instituta fiet 1 R, valor, & maior numerus quæsitus 36, vt priùs, minor autem 6, & satisfaciunt quæstioni. *Aliter. Positio 4.*

PROBLEMA SEPTIMVM.

Ex Diophanto lib. 1. qu. 5.

PRopositum numerum in duos numeros diuidere, vt horum vtriusq; non tamen eadem data partes, si coniungantur datum numerum conficiant. Oportet autem talem hunc dari, qui sit in medio duorum numerorum qui fiunt, si numeri ab initio propositi præscriptæ partes accipiantur.

Hypothesis. Positio.

Sit iniunctum diuidere 160, in duos numeros, vt primi tertia pars, & secundi septima pars, si coniungantur efficiant 50. Secundi septima pars esto 1 R, igitur ipse secundus erit 7 R, quare primi tertia pars erit 50 — 1 R, hoc enim modo tertia pars primi cum septima parte secundi efficiunt 50, erit igitur ipse primus 150 — 3 R, si verò hi numeri coniungantur debent efficere 160, sed simul iuncti efficiunt 4 R + 150, ob id erit æquatio 4 R + 150 = 160. Vtrinq; auferantur 150, remanebit æquatio 4 R = 10. Diuisione instituta fiet quotiens 2 ½ ad positiones. Primus numerus positus 150 — 1 R, erit 142 ½. Secundus autem, qui ponebatur 7 R, erit 17 ½, horum summa est 160, & secundi septima pars est 2 ½, quæ cum 47 ½, tertia parte primi 142 ½, faciat 50.

Cur autem duas veluti conditiones Diophantus apposuerit, declarat elegantissimè Bachettus in suis Comentarijs: consule illum.

PROBLEMA OCTAVVM.

Ex Dioph. q. 6. lib. 1.

PRopositum numerum in duos numeros partiri, vt prioris data pars, posterioris datam partem, superet dato numero. Hunc autem minorem esse oportet eo, qui fit, si propositi ab initio numeri pars illa capiatur, quæ alteram excedat.

Hypothesis. Sit iniunctum 190, in duos numeros diuidere, vt prioris triens, posterioris quintantem 10, vnitatibus superet.

Positio. Quintans posterioris numeri quæsiti esto 1 R, ipse proinde erit 5 R. Triens autem prioris erit 1 R + 10, ipse ob id erit 3 R + 30, horum autem summa debet esse 190, sed est 8 R + 30, proinde erit æquatio 8 R + 30 = 190, ablatis similibus a similibus relinquetur æquatio huiusmodi 8 R = 160. Diuisione instituta fit quotiens, & 1 R valor 20, quamobrem numerus posterior, cuius quintans erat positus 1 R, erit 100, alter autem prior, cuius triens ponebatur 1 R + 10, erit 30, & satisfaciunt, nàm tertia pars numeri 90, est 30, quæ superat 20, quintam partem huius numeri 100, hoc excessu 10, &c.

Quinque alijs modis potest fieri satis propositę quęstioni, sed hæc videri possunt apud Xilandrum, & Bachettum. Sic enim secundò posset institui positio. Prioris triens esto 1R, ipse prior erit 3 R, quintans posterioris erit 1R — 10, ipseq; posterior 5 R — 50, horum summa 8 R — 50 = 190, ac demum 8 R = 240, diuisione instituta fit 1 R, valor 30. Ad positiones triens prioris erat 1 R, ergo 30; ergo totus numerus erit 90, at posterioris quintans erat 1 R — 10, proinde 20, liquet autem 30, trientem prioris, superare 20, quintantem posterioris excessu 10. *Positio 2.*

Tertiò. Prior numerus esto 1 R, ergo quintans secundi erit $\frac{1}{3}$ R — 10, hoc enim pacto triens prioris, superabit quintantem posterioris excessu 10, ipse igitur secundus erit 1$\frac{2}{3}$ R — 50, horum summa 2$\frac{2}{3}$ R — 50 = 190; ergo 2$\frac{2}{3}$ R = 240, proinde 1 R, valor erit 90, &c. *Positio 3.*

Quartus modus est huic respondens, si secundus ponatur 1 R, &c. *Positio 4.*

Quintò. Primus esto 1 R, ergo secundus erit 190 — 1 R, primi triens est $\frac{1}{3}$ R, secundi quintans est 38 — $\frac{1}{5}$ R, huic addito 10, fit 48 — $\frac{1}{5}$ R = $\frac{1}{3}$ R, & fiet 1 R, valor 90, vt priùs. *Positio 5.*

Sextò deniq; potest institui operatio huic respondens, si secundus ponatur 1 R, primus erit 190 — 1 R, secundi quintans est $\frac{1}{5}$ R, primi triens 63 $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{3}$ R, & erit $\frac{1}{5}$ R + 10 = 63 $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{3}$ R, atq; adeo $\frac{8}{15}$ R = 53 $\frac{1}{3}$. Fiet autem 1 R, valor 100, & secundus numerus quæsitus. Ex hisce duobus vltimis operationibus elicitur *Positio 6.*

CANON.

Canon ex operationibus deductus.

Propositi numeri sume partes similes postulatis, & minori adijce datum interuallum, aufer idem interuallum à maiori, summam, & residuum diuide seorsim per aggregatum fractionum exprimentium partes postulatas, & orientur numeri quæsiti.

PROBLEMA NONVM.

Ex Dioph. lib. 1. q. 7

Ab eodem numero duos datos numeros auferre, vt residui datam rationem seruent.

Hypothesis. Sit iniunctum ab eodem numero auferre 100, & 20, vt maius residuum, minoris sit triplum.

Positio. Numerus quæsitus esto 1 R, ab hoc autem subductus 100, residuum erit 1 R — 100, ab eodem subductis 20, relinquitur 1 R — 20, cum autem residuum maioris nempe 1 R — 20, triplum esse debeat minoris, ob id ter ipsum minus residuum maiori æquabitur; quamobrem 3 R — 300, æquabuntur 1 R — 20. Vtrinque addito communi defectu, fiet æquatio huiusmodi 3 R $=$ 1 R + 280, similibus subductis à similibus, fiet æquatio 2 R $=$ 280; diuisione instituta fiet 1 R, pretium 140. Cum ergo quæsitus numerus poneretur 1 R, ob id erit vnitatum 140, qui quidem numerus satisfacit; nàm si à 140, subtrahamus 100, remanet 40; si subtrahamus ab eodem 20, remanet 120; constat autem 120, ad 40, habere rationem, vt 3 ad 1. Hinc elicitur

CANON.

Canon ex operatione deductus.

Maior datorum numerorum ducatur in denominatorem rationis postulatæ, à producto autem auferatur minor. Residuum autem diuidatur per denominatorem rationis vnitate multatum, & orietur numerus quæsitus.

Poteſt etiam inſtitui Analyſis hoc modo. Defectus quo 100, deficit à quæſito numero eſto 1 R, igitur numerus quæſitus erit 1 R + 100, cum autem defectus, quo 20, deficit ab eodem quæſito numero triplus ſit defectus quo 100, ab eodem deficit; erit ipſius 20, defectus 3 R, ob id numerus quæſitus erit 3 R + 20. Proinde æquales erunt 1 R + 100, & 3 R + 120, reperiemus autem 1 R, valorem eſſe 40, Atq; adeo numerus quæſitus erit 140, & hinc etiam elicitur *Aliter;*

CANON.

Datorum numerorum interuallum diuidatur per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur enim defectus maioris numeri à numero quæſito, quo ei addito fiet quæſitus numerus. *Canon ex hac operatione deductus*

PROBLEMA DECIMVM.

Duobus datis numeris, eundem adijcere numerum, vt compoſiti ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem rationem datam minorem ea eſſe, quam habet maior datorum numerorum ad minorem. *Ex Dioph. q.1.lib.1.*

Sit iunctum ad 80, & ad 10, eundem adijcere numerum, vt maius compoſitum minoris ſit triplum. Numerus addendus eſto 1R, is ſi ad 80, addatur, fiet 1R + 80, ſi verò ad 10, fiet 1 R + 10, debet autem compoſitum maius eſſe triplum compoſiti minoris; ter igitur minus compoſitum æquabitur maiori. At verò ter minus compoſitum eſt 3 R + 30, hoc igitur æquabitur 1 R + 80, auferantur autem ſimilia à ſimilibus, & remanebit æquatio huiuſmodi 2 R = 50. Diuiſione inſtituta fit 1 R, pretium 25, & hic numerus ſatisfacit quæſtioni. *Hypotheſis Poſitio.*

Conditionis oppoſitæ rationem facile eſt aſſignare; nam *Si duobus æqualibus numeris, inæquales duo adijciantur, erit compoſitorum minor ratio, quàm auctorum*; conſule Bachetũ. *Canon ex operatione deductus.*

PRO-

PROBLEMA DECIMVMPRIMVM.

Ex Dioph. q.8. lib. secundi.

Propositum numerum quadratum in duos numeros quadratos diuidere.

Sit iniunctum diuidere 100, numerum quadratum in duos numeros quadratos. Primus numerus quadratus esto 1Q; alter erit 100 — 1 Q hoc enim pacto simul iuncti efficient 100, debent autem simul æquari numero quadrato, & quia non ad aliud restringitur quæstio, quam vt simul iuncti propositi numeri quadratum efficiant; satis erit concipere quadratum, cuius latus sit 10; latus eiusdem numeri dati diuidendi, Sed minus tot radicibus, quot libuerit esto igitur illud 10 — 3 R, eius quadratum est 100 — 60 R + 9 Q hoc autem æquabitur 100 — 1 Q, vt videlicet 100 — 1 Q, æquetur quadrato; & per antithesin erit 10 Q = 60 R, ac proinde 1 R, valor erit 6, ergo quadratum vnum erit 36, alterum erit 100 — 36, nempe 64.

Diuid re 36. numerũ in duos numeros quadratos.

Sit iniunctum diuidere 36, numerum quadratum in duos numeros quadratos. Primus numerus quadratus esto 1 Q alter erit 36 — 1 Q, hoc enim pacto simul sumpti conficient 36, debent autem simul æquari numero quadrato &c, quadratum illud sit tale, vt eius latus sit 6 — 3 R, huius quadratum est 36 — 36 R + 9 Q, & hoc æquabitur 36 — 1 Q, & per antithesin 10 Q = 36 R, atq; adeo, per hypobibasmum 10 R = 36, igitur 1 R valor erit $3\frac{3}{5}$ huius quadratum est $12\frac{24}{25}$ aliud quadratum erit $23\frac{1}{25}$ hic autem numerus est quadratus, cuius radix est $4\frac{4}{5}$. Hinc autem deducitur

CANON.

Canon ex operatione deductus.

Sumatur numerus ad libitum; ducaturq; in latus propositi quadrati; eius duplum diuidatur per quadratum illius plus vno; nam quadratum quotientis, erit vnum ex quæsitis quadratis; residuum autem vsque ad totum numerum diuidendum erit aliud quadratum.

PRO-

PROBLEMA DECIMVMSECVNDVM.

Dvos numeros quadratos reperire in dato interuallo. *Ex Dioph. q. 12. lib. 2*

Sit iniunctum reperire duos numeros quadratos, quorum interuallum sit 56, latus quadrati vnius ex quæsitis esto 1 R, aliud erit 1 R, plus numero quocunq; dummodo quadratum ipsius minus sit quam 56; sitq; numerus 4. Itaq; erit 1 R ✢ 4. illius quadratum est 1 Q, istius autem est 1 Q ✢ 8 R ✢ 16, horum differentia est 8 R ✢ 16, quæ æquabitur 56, ac demum erit æquatio 8 R ⊏ 40, si nimirum vtrinq; auferantur 16, diuisione instituta fit 1 R, valor 5. Proinde numerus positus 1 R, erit 5; alter autem 9, siquidem ponebatur 5 ✢ 4, horum quadrata 25, & 81; quorum differentia est 56, ex hac autem operatione talis elicitur *Hypothesis Positio.*

CANON.

Svmatur quicunque numerus quadratus minor dato interuallo, ipseq; subtrahatur à dato interuallo, residuum diuidatur per duplum lateris sumpti quadrati; orietur enim vnum latus ex quæsitis duobus. Si verò huic addatur latus sumpti quadrati, fiet latus alterum. *Canon elicitus ex superiori æquatione.*

Aliter etiam operatio potest institui, vide apud Bachetum in comentarijs supra Diophantum.

Tertium genus exemplorum.

Ad hoc genus ea Problemata pertinent, in quorum analysi composita æquatio occurrit, in eaq; requiritur radicis extractio. Horum problematum analysis magis operosa est, ob id longe præstantior. Nonnulla igitur Problemata lubet hic in medium afferre, vt nimirum præ-

cepta

cepta superiùs tradita ad praxim reuocata videantur; quemadmodum, factum fuit in exemplis simplicis æquationis.

PROBLEMA PRIMVM.

Datum numerum in duas partes diuidere, vt earum quadrata simul iuncta determinatum numerum efficiant.

Hypothesis. Positio. Propositum sit diuidere 12. in duos numeros, quorum quadrata efficiant simul iuncta 80. Pars vna esto 1 R altera erit 12 — 1R, horum quadrata sunt 1Q, & 144 — 24R + 1Q, horum summa est 144 — 24R + 2Q, quæ æquatur 80. Additis vtrinq; 24R, fit 144 + 2Q = 80 + 24R, sublatis vtrinque 80, fit æquatio 64 + 2Q = 24R, vtrinq; sublatis 2Q fit 24R — 2Q = 64; diuisione instituta per 2, numerum maioris characteris, fit 12R — 1Q = 32, huius autem radix est 8. Si quidem dimidium numeri radicum est 6, huius quadratum est 36, à quo subducto 32, remanet 4, cuius latus quadratum est 2, hoc si addatur 6, dimidio numeri radicum fit 8, pro 1 R valore, si verò 8, auferatur ex 12, remanebit 4, erunt igitur duo numeri 8, 4, horum quadrata sunt 64, 16, quorum summa est 80, vt Problema iubet.

PROBLEMA SECVNDVM.

Duos numeros reperire quorum quadrata dato interuallo differant, & inuicem multiplicata producant determinatum numerum.

Hypothesis. Positio. Iniunctum sit reperire duos numeros, quorū productum sit 160, & eorum quadrata differant per numerum 156. Numerus minor ex duobus quæsitis esto 1 R, maior igitur erit $\frac{160}{1R}$, hoc enim pacto vnus in alium ductus producit 160. Horum autem quadrata sunt 1Q, & $\frac{25600}{1Q}$: istorum au-

autem differentia est $\frac{25600}{1Q}$ — 1 Q, & hæc æqualis est dato numero 156: vtrinq; addito 1 Q, erit $\frac{25600}{1Q}$ ⊐ 156 ✛ 1 Q; tollatur fractio per multiplicationem in crucem quemadmodum ars præcipit, & erit 25600 ⊐ 156 Q ✛ 1 QQ. Dimidium numeri radicum est 78, cuius quadratum 6084, additum numero absoluto 25600, fit summa 31684; huius radix quadrata est 178, à qua subducto 78, dimidio numeri radicum, remanet 100: & quia erat æquatio inter QQ ✛ Q, & N, ideo iterum extrahatur radix quadrata ex 100, & est 10, ob id numerus positus 1 R, erit 10, alter positus $\frac{160}{1R}$, erit 16, nempe quotiens emergens ex diuisione numeri 160, per 10, Radicis pretium. Hi porro duo numeri Problemati satisfaciunt, quandoquidem vnus in alium ductus facit 160; eorumdem quadrata differunt hoc interuallo dato, puta 156.

PROBLEMA TERTIVM.

Dvos numeros reperire, quorum differentia sit data, & inse ductis faciant determinatum numerum.

Sit iniunctum reperire duos numeros, quorum differentia sit 6, & inuicem multiplicati faciant 352. Vnus ex numeris quæsitis esto 1 R, alter erit 1 R ✛ 6, si inuicem multiplicentur, producetur 1 Q ✛ 6 R ⊐ 352. Huius autem æquationis radix est 16, numerus igitur minor positus 1 R, erit 16, alter positus 1 R ✛ 6, erit 22, & satisfaciunt. *Hypothesis, Positio.*

PROBLEMA QVARTVM.

Propositum numerum in duas partes diuidere, ea lege, vt inter se ductæ progignant datum numerum.

 In-

Hypothesis. Positio. Iniunctum sit diuidere 20, in duas partes, quæ inter se ductæ faciant 75. Pars vna esto 1 R, altera erit 20 — 1 R, hæ inuicem multiplicatæ faciunt 20 R — 1 Q; hoc autem productum æquabitur 75. Huius æquationis radix sic habetur. Dimidium numeri radicum est 10, cuius quadratum est 100, à quo si subtrahatur 75, remanet 25. Cuius radix quadrata est 5, quæ ablata, & addita 10, dimidio numeri radicum, fiunt partes quæsitæ 5, & 15, quæstioni satisfacientes.

PROBLEMA QVINTVM.

NVmerum reperire, qui auctus dato quodam numero, & diminutus, seu multatus itidem alio quodam numero, aggregatum, & residuum inuicem multiplicata producant determinatum numerum.

Hypothesis. Positio. Propositum sit reperire numerum, qui auctus quodam alio puta 10, multatus autem alio, nempe 15, aggregatum, & residuum faciant 9350, si nimirum inuicem multiplicentur. Quæsitus numerus esto 1 R, ergo auctus 10, vnitatibus erit 1 R + 10, diminutus 15 vnitatibus, erit 1 R — 15. Hi autem numeri inter se ducti faciunt 1 Q — 5 R — 150, & hoc æquatur numero 9350, factaq; reductione, iuxta artis præcepta, erit æquatio 1 Q — 5 R = 9350. Huius autem radix sic habetur. Dimidium numeri radicum est $2\frac{1}{2}$, huius quadratum est $6\frac{1}{4}$, cui si addatur 9350, numerus absolutus, nempe comparationis homogeneum fit $9506\frac{1}{4}$, hoc est $\frac{38025}{4}$, huius autem radix quadrata est $\frac{195}{2}$, nempe $97\frac{1}{2}$, cui additio $2\frac{1}{2}$, dimidio numeri radicum fit 100, numerus quæsitus, qui auctus 10, vnitatibus fit 110, multatus 15, remanet 85: constat autem, si ducatur 110, in 85, fieri 9350, vt Problema præcipit.

$$\begin{array}{r} 1R + 10 \\ 1R - 15 \\ \hline -15R - 150 \\ 1Q + 10R \quad\quad \\ \hline 1Q - 5R - 150 = 9350 \\ 150 \\ \hline 1Q - 5R = 9500 \end{array}$$

$$2\tfrac{1}{2} \qquad 6\tfrac{1}{4}$$

$$2\tfrac{1}{2} \qquad 9506\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{4}{2} \qquad \frac{38025}{4}$$

$$6\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{195}{2} \quad 97\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 97\tfrac{1}{2} \\ 2\tfrac{1}{2} \\ \hline 100 \end{array}$$

PROBLEMA SEXTUM.

PRopositum numerum in duas partes diuidere, vt eorum quadrata adinuicem multiplicata, producant determinatum numerum.

Sit iniunctum diuidere 16, in duas partes, vt earum quadrata inuicem multiplicata producant 2304. Pars vna esto 8 + 1 R, altera erit 8 — 1 R. *Hypothesis. Positio.*

8 — 1 R   8 + 1 R
8 — 1 R   8 + 1 R

— 8 R + 1 Q   8 R + 1 Q
64 — 8 R   64 + 8 R

64 — 16 R + 1 Q   64 + 16 R + 1 Q
     64 — 16 R + 1 Q

64 Q + 16 C + 1 QQ
— 1024 R — 256 Q — 16 C
4096 + 1024 R + 64 Q

4096 — 128 Q + 1 QQ = 2304
128 Q   128 Q

4096 + 1 QQ = 2304 + 128 Q
2304   2304

1792 + 1 QQ = 128 Q
1 QQ   1 QQ

128 Q — 1 QQ = 1792

64	
64	64
	48
256	16
384	4 : 1 R valor.
4096	
1792	
2304	
4 8	

Si procedatur iuxta Artis præcepta, reperiemus partes quæsitas esse 12, & 4. Pars enim vna dum est 8 + 1 R, eius quadratum erit 64 + 16 R + 1 Q: altera dum ponitur 8 — 1 R, quadratum eius erit 64 — 16 R + 1 Q: hæc autem quadrata inuicem multiplicata producunt 4096 — 128 Q + 1 QQ, quæ æquabuntur 2304, & per antithesin fiet æquatio 128 Q — 1 QQ = 1792; huius autem æquationis radix est 4. Obseruandum autem, cum maior potestas sit 1 QQ, bis radicem quadratam extrahendam esse, atq; adeo ex numero 2304, extracta radice quadrata 48, & hac subtracta ex 64, dum remanet 16, rursus ex 16, extrahi debet radix quadrata.

Rursus diuidatur 12, in duas partes, vt dictum est, ea lege, vt earum quadrata inuicem multiplicata faciant 130. *Hypothesis secunda.*

Positio.

Pars vna esto 6 + 1 R, altera erit 6 — 1 R, illius quadratum est 36 + 12 R + 1 Q, istius verò est 36 — 12 R + 1 Q, quadrata istarum inter se ducta faciunt 1296 — 72 Q + 1 QQ, & hoc productum æquatur 130; fit autem per antithesin æquatio ista 72 Q — 1 QQ = 1166.

		6 +	1 R
		6 +	1 R
		6 R +	1 Q
	36 +	6 R	
	36 +	12 R +	1 Q
		6 —	1 R
		6 —	1 R
		— 6 R +	1 Q
	36 —	6 R	
	36 —	12 R +	1 Q
	36 +	12 R +	1 Q
	36 Q —	12 C +	1 QQ
432 R —	144 Q +	12 C	
1296 — 432 R +	36 Q		
1296 — 72 Q + 1 QQ = 130.			

$$72\,Q - 1\,QQ = 1166$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline 1296 \\ 1166 \\ \hline 130 \end{array}$$

$36 - ℞\,130$

$℞\,(36 - ℞\,130)$

$6 + ℞\,(36 - ℞\,130)$
$6 + ℞\,(36 - ℞\,130)$

$℞(1296 - ℞\,168480) + 36 - ℞\,130$
$36 + ℞(1296 - ℞\,168480)$

$72 - ℞\,130 + ℞(5184 - ℞\,2695680)$
$72 - ℞\,130 - ℞(5184 - ℞\,2695680)$

$- ℞\,673920 + 130 - 5184 - ℞\,2695680$
$5184 - ℞\,673920$
130

$5314 - ℞\,6795680$
$- 5184 - ℞\,6795680$

130

Itaq; instituta operatione, vt vides, fiet 1 R, prętium ℞ Q (36 — ℞ 130); quamobrem pars vna posita 6 + 1 R, erit 6 + ℞ (36 — ℞ 130) altera verò, quæ posita fuit 6 — 1 R, erit 6 — ℞ (36 — ℞ 130) & satisfaciunt Problemati; quandoquidem quadratum vnius ductum in quadratum alterius facit 130; & vna addita alteri facit 12, vti perspicuum est.

PRO-

PROBLEMA SEPTIMVM.

Repositum numerum in quatuor partes diuidere in ratione continua, vt quadrata singularum simul iuncta conficiant determinatum numerum.

Sit iniunctum diuidere 120, in quatuor partes in continua ratione, vt singula simul iuncta efficiant 7380. Supponendum est cubum ex secundo, & tertio, sumptis, diuisum per triplum eiusdem secundæ, & tertiæ additis primo, & quarto. Quotiens æquatur producto ex prima in quartam, & ex secunda in tertiam. *Hypothesis; Positio.*

Vt sint 2, 4, 8, 16, continuè proportionales, aggregatum ex secundo, & tertio est 12, huius cubus est 1728, quo diuiso per 36, triplum aggregati ex secundo, & tertio plus 2, & 16, primo nimirum, & quarto, nempe per 54, fit quotiens 32, quantum facit primus ductus in quartum, vel secundus in tertium. Hoc alibi demonstrauimus. Dico secundam, & tertiam simul vnitas esse 1 R, quarta, & prima simul erunt 120 — 1 R, cubus ex 1 R, est 1 C, & triplum, 1 R, est 3 R, huic addatur 120 — 1 R, & fit 120 + 2 R, per hoc autem diuidatur 1 C, & fit $\frac{1\,C}{120 + 2\,R}$ hoc autem æquatur producto, ex prima in quartam, vel ex secunda in tertiam. Modo diuidatur 1 R, aggregatum ex secunda, & tertia in duas partes tales, vt vna in aliam ducta faciat $\frac{1\,C}{120 + R}$. Sumatur dimidium numeri radicum, & est ½ R, eius quadratum est ¼ Q, ab hoc subtrahatur $\frac{1\,C}{120 + 2\,R}$ numero, quem facere debet, & remanet ¼ Q — $\frac{1\,C}{120 + 2\,R}$ *Vide Scholion Regularum supra cap. 16.*

Facta subtractione huius $\frac{1\,C}{120 + 2\,R}$ ab ¼ Q, remanet $\frac{120\,Q + 2\,C}{480 + 8\,R}$. Aduertendum autem dignitatem intelligi in

nume-

numeratore. Si verò illa fractio $\frac{120Q + 2C}{480 + 8R}$ reducatur ad minimos terminos, facta communi diuisione per 4, remanet $\frac{30Q\ \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$ ex hoc autem residuo sumatur latus quadratum, & est ℞ $\frac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$ hoc autem additur, & subtrahatur ipsi $\frac{1}{2}R$, & fit pro secunda parte $\frac{1}{2}R -$ ℞ $\frac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$. Tertia erit $\frac{1}{2}R +$ ℞ $\frac{(30Q + \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

$$\frac{1C}{120 + 2R} \quad \frac{1}{4}Q$$

$$120Q + 2C$$

$$4C$$

$$120Q - 2C$$

$$120Q - 2C$$

$$480 + 8R$$

Vide Scholium regularum supra cap. 16.

Ad indagandam primam, & quartam. Diuidatur 120 — 1 R, in duas partes ea lege, vt inter se ductæ faciant $\frac{1C}{120 + 1R}$. Sumatur dimidium ipsius 120 — 1 R, & est 60 — $\frac{1}{2}$ R, huius quadratum est 3600 — 60R + $\frac{1}{4}$Q, hoc autem subtrahatur ex numero efficiendo $\frac{\quad}{120 + 2R}$, & remanet 432000 — 90Q — $\frac{1}{2}$C.

$$\frac{1C}{120 + 2R} \text{ subtrahatur ex } \frac{3600 - 60R + \frac{1}{4}Q}{1}$$

$$7200R - 120Q + \frac{1}{2}C$$

$$432000 - 7200R + 30Q$$

$$432000 - 90Q + \frac{1}{2}C$$

subtrahatur 1 C

remanet $432000 - 90Q - \frac{1}{2}C$

Itaque

Itaque remanebit $\dfrac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$

Ex hoc ſumatur radix quadrata, & eſt ℞ $\dfrac{(432000 - 90Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Hoc autem addatur, & ſubtrahatur ipſi $60 - \frac{1}{2}R$.

Prima erit $60 - \frac{1}{2}R - \text{℞}\dfrac{(432000 - 90Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Quarta erit $60 - \frac{1}{2}R + \text{℞}\dfrac{(432000 - 90Q - \frac{1}{2}R)}{(120 + 2R)}$.

Erit ob id numerus 120, diuiſus in quatuor partes in continua proportione; quarum

Prima $60 - \frac{1}{2}R - \text{℞}\dfrac{(432000 - 90Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Secunda $\frac{1}{2}R - \text{℞}\dfrac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Tertia $\frac{1}{2}R + \text{℞}\dfrac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Quarta $60 - \frac{1}{2}R + \text{℞}\dfrac{(432000 - 90Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Horum ſumma eſt 120, ſi quidem +, & — auferuntur ſeu ſubtrahuntur, & remanet 0.

Reliquum eſt, vt videamus, num omnium quatuor partium quadrata ſimul iuncta efficiant 7380.

Prima eſt $60 - \frac{1}{2}R - \text{℞}\dfrac{(432000 - 90Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Huius quadratum eſt $3600 - 60R + \frac{1}{4}Q + \dfrac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$.

Secunda eſt $\frac{1}{2}R - \text{℞}\dfrac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Huius quadratum est $\frac{1}{4}$ Q $\frac{30Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$.

Tertia est $\frac{1}{2}$R + ℞ $\frac{(30Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Huius quadratum est $\frac{1}{4}$Q + $\frac{30Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$.

Quarta est 60 − $\frac{1}{2}$R + ℞ $\frac{(432000 - 90Q - \frac{1}{2}C)}{(120 + 2R)}$.

Hu'us quadratum 3600 − 60R + $\frac{1}{4}$Q 4 $\frac{432000 - 96Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$.

Horum summa est 7200 − 120R + 1Q + $\frac{864000 - 120Q - 2C}{120 + 2R}$

Reducantur ad fractiones.

$$\frac{14400R - 240Q + 2C}{864000 - 14400R + 120Q}$$

Huic autem 864000 − 120Q + 2C
Addatur 864000 − 120Q − 2C rumerator.

$\frac{172800 - 240Q}{120 + 2R}$ Quadratorum summa.

Hæc autem suma æquatur proposito numero 7380, & æquatio stabit hoc modo.

$$\frac{1728000 - 240Q}{120 + 2R} = \frac{7380}{1}$$

Proinde erit æquatio facta multiplicatione per crucem.
1728000 − 240Q = 885600 + 14760R per Anti-
885600

---

thesin 240Q = 842400 − 14760R.

Diui-

Diuisione instituta per 240 Q, fit
$1Q = 3510 - 61\frac{1}{2}R$, & per antithesin
fit $1Q + 61\frac{1}{2}R = 3510$.

$$\begin{array}{r} 30\frac{3}{4} \\ 30\frac{3}{4} \\ \hline 945\frac{9}{16} \\ 3510 \\ \hline 4455\frac{9}{16} \end{array}$$

Huius autem numeri $4455\frac{9}{16}$, radix est $66\frac{3}{4}$, ab hoc numero subtrahatur $30\frac{3}{4}$, dimidium numeri radicum, & remanet 36, 1 R pretium, itaq; aggregatum ex secunda, & tertia erit 36.

Quoniam autem aggregatum ex prima, & quarta ponebatur $120 - 1R$, si ex 120, subtrahatur 36, remanebit aggregatum ex prima, & quarta, nempe 84.

Ad distinguendas secũdam, & tertiam, sumatur 46656, cubus ex 36, summa ipsarum, sumaturq; 108, triplum ipsius 36, ipsi verò adiungatur 84, & fit 192, per quẽ diuidatur 46656, vt fiat quotiens 243. Itaq; secundum, & tertium assequamur facili negotio.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \\ 36 \\ \hline 7776 \\ 3888 \\ \hline 46656 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 46656 \\ \hline 192 \end{array} \quad 243$$

Per multiplicationem secundi in tertium debet fieri 243, esto secundus 1 R, tertius erit $36 - 1R$.

$$\begin{array}{r} 36 - 1R \\ 1R \\ \hline 36R - 1Q \end{array}$$

 Erit

Erit igitur 36 R — 1 Q ⊐ 243, & per antithesin 1 Q ⊐ 36 R — 246.

18 | 324
18 | 0243
324 | 81

Hoc autem numero 9, ſubtracto ex 18, dimidio numeri radicum remanet 9, pro ſecundo addito ad 18, fit 27, & eſt tertius numerus. | 9

Primus, & quartus habetur ſuppoſita eorum ſumma 84.

Primus eſto 1 R, quartus erit 84 — 1 R.

1 R

84 R — 1 Q

Ob id 84 R — 1 Q ⊐ 243, per antitheſin 84 R — 1 Q ⊐ 243.

42
42
1764
243
1521

42
39
3 remanet.

3 9

Itaq; 3 eſt primus, & 81 eſt quartus; erunt igitur

Primus	3, cuius Q eſt	9
Secundus	9, cuius Q eſt	81
Tertius	27, cuius Q eſt	729
Quartus	81, cuius Q eſt	6561
Summa	120	7380

Summa partium 120 — 7380 Summa quadratorum.

PROBLEMA OCTAVVM.

Datum numerum diuidere in duas partes, ea lege vt differentia quadratorum partium, habeat datam rationem ad rectangulum factum, ſeu comprehenſum ſub ipſis partibus.

Datus

Datus sit numerus 12, & proportio vt 4 ad 6. Pars ma- *Hyperbesis.*
ior esto 1 R, minor erit 12 — 1 R, quæ ducta in 1R, facit *Positio.*
12 R — 1 Q, & est rectangulum sub partibus compre-
hensum. Quadratum autem partis maioris est 1Q, mino-
ris autem est 144 — 24 R + 1 Q. Rectangulum autem
debet habere ad excessum quadratorum, quæ est 24 R —
144; rationem vt 4 ad 6, quamobrem excessus iste multi-
plicetur per 6, & fit 144 R — 864, & rectangulum mul-
tiplicetur per 4, & fit 48 R — 4 Q, & hæc erunt æquatio-
nis extrema. Proinde erit æquatio huiusmodi 144 R —
864 = 48 R — 4 Q, & per antithesin erit, & 4 Q =
864 — 96 R, omnibus autem applicatis ad 4, fiet 1 Q
= 216 — 24 R.

Aequatio huiusmodi 1 Q + 24 R = 216, cuius Ra-

12
12
144
216
360
℞ 360 — 12

dix quadrata est ℞ 360 — 12, quæ subtracta ex 12, re-
manet 24 — ℞ 360, pars minor, cum illa esset pars maior.

24 — ℞ 360
24 — ℞ 360
— ℞ 207360 + 360
576 — ℞ 207360
936 — ℞ 829440. Quadratorum ex minori.

℞ 360

```
                ℞ 3 6 0 — 1 2
                    2 4 — ℞ 3 6 0
                — 3 6 0 + ℞ 5 1 8 4 0
℞ 2 0 7 3 6 0 — 2 8 8
℞ 4 6 6 5 6 0 — 6 4 8 Rectangulum.
                        ℞ 3 6 0 — 1 2
                        ℞ 3 6 0 — 1 2
                  — ℞ 5 1 8 4 0 + 1 4 4
          3 6 0 — ℞ 5 1 8 4 0
          1 4 4
          5 0 4 — ℞ 2 0 7 3 6 0  Q ex maiori parte.
          9 3 6 — ℞ 8 2 9 4 4 0  Q ex minori.
Excessus. ℞ 2 0 7 3 6 0 — 4 3 2
```

Vt 4, ad 6; Ita ℞ 207360 — 432. ad ℞ 466560 — 648.

```
                    36     6              16     4
              ℞ 7464960 — 2592     ℞ 7464960 — 2592

207360          466560               207360
    36              16               829440
1244160         2799360             8294400
622080          466560             82944
                                  186624
7464960         7464960           41472
                                 165888
                                 171992678400
                                 . . . . . .
                                 4 1 4 7 2 0
```

Quadratum partis maioris est 504 — ℞ 207360.
Quadratum partis minoris est 936 — ℞ 829440.

Ho-

Horum differentia est ℞ 207360 — 432.	414720	207360
Rectangulũ sub partibus	2	829440
est ℞ 466560 — 648.	829440	1036800
Vt autem est 4, ad 6, ita est ℞ 207360 — 432, ad ℞ 466560 — 648.		829440
		207360
		℞ 207360

PROBLEMA NONVM.

Reperire numerum, cuius quadratum multiplicatum, per 3. productaq; additis 80, ex summa vero radix cubica extracta seruetur; huic si addatur sextuplum numeri inueniendi, faciat 80.

Quæsitus numerus esto 1 R, huius quadratum est 1Q, quod ducatur in 3, & fit 3 Q, huic autem addatur, & fit 3 Q ✠ 80, ex hac autem summa extrahatur radix cubica, & est ℞ C(3 Q ✠ 80) huic addatur 6 R, sextuplum numeri reperiendi, & fiet ℞ C(3 Q † 80) † 6 R, hoc autem æquabitur 80, & per antithesin ℞ C(3 Q † 80) 80 6 — R, summantur extremorum quadrata, quæ sunt 3Q † 80, & 51200 — 115200 R † 86406216 C, & sunt inter se æqualia.

Tota autẽ operatio in sequenti pagina conspicitur deuenitur enim ad hanc æquationem 512000 — 200 R ✠ 8640 Q — 216 C ⩶ 3 Q ✠ 80. Et per antithesin fit æquatio 511920 — 115200 R ✠ 8540 Q — 216 C ⩶ 3 Q, deinde 511920 — 115200 R — 21 C ⩶ 8637 Q. Deinde 216 C † 115200 C — 8637 Q ⩶ 511920, & peracta operatione, vt vides fit 1 C † 24883200 R — 8637 Q ⩶ 2388413952 0. Oportet autem radicem extrahere ex hac præsenti æquatio-tione. Cæterum ad illam æquationem hoc modo peruentum est: cum enim per antithesin æquatio haberetur 216 C † 115200R − 863Q = ; primò sumatur 10077696, per quem multiplicetur 511920, & fit 5158974136320, numerus diuidendus, per 216, numerum cuborum, & fit quotiens 23884139520; & hic est numerus absolutus in æquatione.

1 R	1 R
1 R	6
1 Q	6R

3

3 Q

80

3 Q † 80

℞ C (3 Q † 80)

6 R

℞ C (3 Q † 80) † 6R

80 − 6 R

80 − 6 R

− 80 R † 36Q

6400 − 80 R

6400 − 960 R † 36Q

80 − 6 R

− 38400 R † 5760 Q − 216 C

512000 − 76800 R † 2880 Q

512000 − 115200 R † 8640 Q − 216 C = 3 Q † 80.

51200

$51200 - 115200R + 8640Q - 216C = 3Q + 80$

$80 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 80$

$511920 - 115200R + 8640Q - 216C = 3Q$

$216C \qquad\qquad 216C$

$511920 - 115200R + 8640Q = 3Q + 216C$

$3\,3Q$

$511920 - 115200R + 8637Q = 216C$

$216C = 511920 - 115200R + 8637Q$

$216C + 115200R = 511520 + 8637Q$

$216C + 115200R - 8637Q = 511920$

$216 \qquad \overline{216} \qquad \overline{216} \qquad \overline{216}$

46656Q

256

10077696C multiplicetur

per 511920 numerum Radicum

23884139520 Productum diuidendum per 216, & fit quotiens.

hic numerus 23884139520

multiplica 8637, Num. Q.

per hunc 216, Num. C.

1865592. Productum diuidendum per 216, & fit quotiens 8637, idem numerus.

115200, numerus R.

46656Q. ex 216,

5374771200, Productum diuidendum per 216, & fit quotiens 24883200.

Deinde ducatur 8637, numerus quadratorũ in 216 numerum cuborum, & fit productum 1865592, diuidatur hic numerus per 216, fit quotiens 8637, idem numerus; & est numerus quadratorum.

```
                   2     5     9   2
1C ✢ 24883200R — 8637Q ═ 2 3 8 8 4 1 3 9 5 2 0
```

Deinde ducatur 115200, numerus radicum in 46656, quadratum ex 216, & fit 5374771200, quo diuiso, per 216, & prouenit 24883200, & est numerus radicum in æquatione: Est itaque æquatio 1C ✢ 24883200R — 8637Q ═ 238841395520. Huius autem æquationis radix extrahitur hoc modo. Facta signatione, per puncta subtus, vt vides, iuxta naturam radicis cubicæ; quęratur latus cubicum numeri 23, eritq; 2, cuius cubus est 8; scribatur sub 23; nempe sub puncto, & subtrahatur à 23, remanet 15, huic intelligantur associatæ 884, sequentes figuræ, vt fiat 15884, ducatur 8637, numerus quadratorum in 4, quadratum primę figuræ 2, & productũ 34548, addatur ipsi 15884, & fit 50432; huic intelligantur associatæ 139, figurę sequentes, vt fiat 50432139; à quo subtrahatur 49766400; numerus productus ex multiplicatione numeri 24883200, in primam figuram, & remanet 665739. Ad indagan-

```
  8
————————————
1 5 8 8 4
3 4 5 4 8
————————————
5 0 4 3 2 1 3 9
4 9 7 6 6 4 0 0
————————————
0 0 6 6 5 7 3 9
1 7 2 7 4 0
————————————
1 7 9 3 9 7 3
  2 1 5 9 2 5
————————————
2 0 0 9 8 9 8 9 5
1 2 4 4 1 6 0 0 0
————————————
  7 6 5 7 3 8 9 5
  6 0
————————————
  1 6 5
  1 5 0
————————————
    1 5 7
    1 2 5
————————————
      3 2 3 8 9
  3 8 8 6 6 5 0
————————————
  3 9 1 9 0 3 9 5
      6 9 9 5 9 7
————————————
  3 9 8 8 9 9 9 2
```

dam

dam ſecundam figuram ſumatur triplum quadrati primæ figuræ 2, & eſt 12, cui intelligatur aſſociatum triplum eiuſdem 2, & eſt 6, & fit 126, huic addatur 24883200, numerus Radicū; ea tamen cautela; vt trium figurarum ſpatijs antecedat, vt fiat 25009200; Deinde multiplicetur 8637, numerus quadratorum, in 4, duplum 2, primæ figuræ, & fit 34548, huic addatur 8637, numerus quadratorum, ea lege vt numerus quadratorum antecedat numerum 34548; vnius figuræ ſpatio, vt fiat 354117, huic intelligantur additæ duæ cifræ, vt fit 35411700, & ab hoc ſubtrahatur 24883200, & remanet 10528500, & hic eſt numerus per quem oportet diuidere 66573952, vt fiat quotiens 5, & ſecunda figura.

```
3 9 8 8 9 9 9 2
2 2 3 9 4 8 8 0 0
-----------------
1 7 4 9 5 1 1 2 2
1 6 8 7 5
-----------------
    6 2 0 1
    6 0 7 5
-----------------
      1 2 6 1
        7 2 9
-------------------
        6 3 2 2 2 0
    8 9 4 7 9 3 2
-------------------
    9 0 0 1 1 5 4 0
          3 4 5 4 8
-------------------
    9 0 0 4 6 0 8 8
    4 9 7 6 6 4 0 0
-------------------
    4 0 2 7 9 6 8 8
    4 0 2 4 8 6
-------------------
    0 0 0 3 1 0 8
          3 1 0 8
-------------------
    0           0
                8   Reliqua figura
                8   Cubus vltimæ
-----------------     figuræ.
                0
```

Modo ducatur 8 6 3 7; numerus quadratorum in 4. duplum primę figuræ 1, & fit 3 4 5 4 8; hic ducatur in 5, secundam figuram, & fit 1 7 2 7 4 0, qui addatur ad 665739, ita tamen vt 665739, duabus figuris dextrorsum præcedat, fit 1793973[9], modo sumatur 8637; numerus quadratorum, ducatur in 25, quadratum secundæ figuræ, & fit 215925, numerus quoq; addendus numero 1793973, vt fiat 2009898, huic intelligantur associatæ duæ sequentes figuræ 9 5, vt fiat 200989895; modo ducatur 24883200, numerus radicum in 5, secundā figuram, & fit 124416000 subtrahatur à 2 0 0 9 8 9 8 9 5, & remanet 7 6 5 7 3 8 9 5; sumatur triplum quadratum primę figurę 2, nempe 12; ducatur in 5; fit 60, subtrahatur à 7 6, remanet 1 6, cui annectatur 5, vt fiat 1 6 5, sumatur 6, triplum ipsius 3, primæ figuræ ducatur in 25, quadratum 5, secundæ fit 1 5 0, subtrahatur à 165, remanet 15, cui annectatur sequens figura 7, vt fiat 157, à quo subducto 125, cubo ex 5, remanet 3 2; huic associatæ intelligantur sequentes figuræ 389, vt fiat 3 2 3 8 9.

3 4 5 4 8	
5	
1 7 2 7 4 0	numerus addendus.
8 6 3 7	
2 5	
4 3 1 8 5	
1 7 2 7 4	
2 1 5 9 2 5	numerus addendus.

Modo paretur diuisor ad indagandam tertiam figuram non dissimili modo, atq; reperiatur ea 9, in hanc ducatur 4 3 1 8 5 0, numerus factus per multiplicationem 8 6 3 7, nume-

numeri quadratorum in 50, duplum ipsius 25, & fiat 3886650, addatur ad 32389; sed ea lege vt vides, & fiet 39190395, ducaturq; 8637, in 81, quadratum ex

24883200	
9	
223948800	
2592	Radix.
2592	
5184	
23328	
12960	
5184	
6718464	Quadratum.
2592	
13436928	
60466176	
33592320	
13436928	
17414258688	Cubus.
64497254400	
81911513088	
58027373568	
23884139520	

9, vt fiat 699597, addatur, vt fiat 39889922, ducatur 24883200; numeris radicum in 9, tertiam figuram fit 223948800, quo subtracto ex 39889922, rema-

remanet 1 7 4 9 5 1 1 2 2; Sumatur 6 2 5, quadratum ex 2 5, & prima figura eius triplum, & 1 8 7 5, ducatur in 9: tertiam figuram, quæ respectu duarum simul sumptarum habet rationem vnius, & fit 1 6 8 7 5, hic numerus subtrahatur de 1 7 9 9 5, & remanebit 6 2 0, cui intelligatur associata sequens figura 1, vt fiat 6 2 0 1, à quo subtrahatur 6 0 7 5, numerus productus à triplo numeri 2 5, in 8 1, quadratum ex 9, & remanet 1 2 6, cui intelligatur annexa sequens figura 1, vt fiat 1 2 6 1; à quo subtrahere oportet 7 2 9, cubum ex 9, & remanebit 6 3 2, huic intelligantur annexæ sequentes figuræ 2 2 0, vt fiat 6 3 2 2 2 0.

Paretur diuisor ad indagandam quartam figuram, quæ reperiatur 2. Duplum numeri 2 5 9, est 5 1 8, ducatur in hunc numerum, numerus 8 6 3 7; nempe numerus quadratorum fit 4 4 7 3 9 6 6; hic ducatur in 2, postremam figuram fit 8 9 4 7 9 3 2; addatur ad 6 3 2 2 2 0; sed ad eum modum, vt vides fit 9 0 0 1 1 5 4 0; ducaturq; 8 6 3 7, in 4, quadratum huius postremæ figuræ fit 3 4 5 4 8, addatur, vt vides, fit 9 0 0 4 6 0 8 8, ab hoc subtrahatur 49766400; numerus productus à multiplicatione numeri 24883200; nempe numeri radicum in hanc postremam figuram, & remanebit 4 0 2 7 9 6 8 8. Deinde quadratum ex 2 5 9, est 6 7 0 8 1; huius triplum est 2 0 1 2 4 3, ducatur in 2, postremam figuram, fit 4 0 2 4 8 6, subtrahatur de 4 0 2 7 9 6, remanet 3 1 0, annexæ intelligatur sequens figura 8 8, vt fiat 3 1 0 8, à quo subtrahatur 3 1 0 8, numerus factus à multiplicatione numeri 2 5 9 per 3, & producti 7 7 7, per 4, quadratum ex 2, postrema figura 2. Deniq; subtrahatur 8, cubus huius postremæ figuræ à reliqua figura 8, & nihil remanet.

Numerus autem 2 5 9 2, satisfacit quæstioni; propterea quod diuiso ipso per 2 1 6, vt par est secundum analyseos præcepta, vt notauimus de Isomœria tractantes, fit quotiens 1 2, cuius quadratum est 1 4 4 quod si ducatur in 5, fit productum 5 1 2, cuius latus cubicum est 8; si verò, idem numerus 1 2, multiplicetur per 6; sic enim quæstio præcipit

pit fit 7 2, qui quidem numerus additus numero 8, iam seruato, fit numerus 80, prout Problema requirebat.

PROBLEMA DECIMVM.

Quatuor numeros reperire in continua ratione, vt primus sit 8, secundus sit cum quarto 39, seu conficiat secundus iunctus quarto 39, quaeruntur singuli.

Primus cum tertio esto 1 R, huius cubus est 1 C, à quo subtrahatur 8 Q, productum ex 8, primo numero ex quatuor quæsitis, in 1 Q, remanet 1 C — 8 Q. Hoc autem ita esse ostenditur, ex eo quia, si summa ex primo, & tertio, ex quatuor numeris proportionalibus, cubicè multiplicetur, & ex cubo hoc numero subtrahatur, ille numerus qui prouenit, multiplicata summa primi in tertium in se ipsam deinde multiplicata per primum numerum ex quatuor quæsitis numerus proueniens æquabitur quadrato summæ ex secundo, & quarto; quadrato inquam ducto in primum numerum ex quatuor quæsitis. Vt exempli gratia supponamus quatuor istos numeros quæsitos esse 3, 6, 12, 24, erit 15, summa ex primo, & tertio, quæ si cubicè multiplicetur facit 3375, ab hoc autem numero si subtrahatur 675, numerus proueniens per multiplicationem 3, primi numeri in quadratum summæ ex primo, & tertio, nempè in 225, remanet 2700; hic autem numerus æquatur numero, qui prouenit ex multiplicatione 3, primi numeri in quadratum summæ ex secundo, & quarto numero. Itaq; dicamus summam ex primo, & tertio esse 1 R, huius cubus est 1 C, à quo si subtrahatur quadratum summæ ex primo, & tertio, nempe 1 Q ductum in 8, primum numerum, & est 8 Q, remanet 1 C — 8 Q, & erit 1 C — 8 Q = 12168, nam 12168, est numerus qui prouenit ex multiplicatione quadrati ex 39, summæ ex secundo, & quarto; nempe ex multiplicatione 1521, in 8; his enim inuicem ductis fit 12168. Reliquum est, vt radix extrahatur. Idq; vt exequamur, fiat signatio per puncta in numero 12168, vt exigit

git

git cubica radix, deinde eruatur radix cubica ex 12, primo numero signato per punctum, eritq; 2, huius cubus est 8, quo subtracto ex 12, remanet 4; notetur, vt vides in paradigmate, & ei annectatur 1, figura sequens; modo sumatur 4, quadratum ex 2, prima figura, ducaturq; in 8, numerum quadratorum fit 32, quo addito ad 41, fit 73, huic intelligatur associatæ duæ sequentes figuræ 6, 8, & fiet 7368, duplicetur 2, latus cubicum numeri 12, seu prima figura, & fit 4; hic ducatur in 8, numerum quadratorum, & fit 32, hic ducatur in 6, secundam figuram. Hæc autem sic inuenitur. Sumatur triplum quadrati primæ figuræ 2, & est 12; per quem diuidere oportet 73, antequam ei intelligantur associatæ duę illæ figuræ 6, 8, & fit quotiens 6; modo si 32, vt dicebamus factus per multiplicationem 8, numeri quadratorum in 4, quadratum primæ figuræ ducatur in 6, fit 192, quo addito ad 736, fit 928, cui intelligatur annexa sequens figura 8, vt fiat 9288. Deinde ducatur 36, quadratum ex secunda figura 6, in 8,

	2 . 6
1C—8Q ⊏	1 2 1 6 8
	8
	4 1
	3 2
	7 3 6 8
	1 9 2
	9 2 8 8
	2 8 8
	9 5 7 6
	7 2
	2 3 7 6
	2 1 6
	2 1 6
	2 1 6
	0 0

numerum quadratorum, & fit 288, quo addito ad 288, figuras existentes in numero 9288, fit 9576. Ab hoc autem primò oportet subtrahere triplum quadratum primæ figuræ, & est 12, quod ducendum in 6, secundam figuram, vt fiat 72, facta subtractione remanet 2376, ab hoc sub-

ſubtrahere opportet 108, triplum quadrati ſecundæ figuræ ductum in 2, primam figuram; nempe 216, factaq; ſubtractione remanet 216, à quo tandem ſubtrahatur 216, cubus numeri 6, ſecundæ figuræ; erit itaq; 26, numerus, & radix quæſita. Primus igitur numerus cum tertio faciunt 26, cum autem primus ſit datus 8, tertius erit 18, at verò ſunt in ratione continua numeri quæſiti, ſi igitur ſcimus primum, & tertium, ſcimus, ſummam ex ſecundo, & quarto, ſecundus, & quartus noti fient, ac proinde quęſiti numeri erunt 8, 12, 18, 27, &c.

PROBLEMA VNDECIMVM.

NVmerum reperire, cuius cubo, ducto in datum numerum, & à producto, ſubtracto eodem numero quæſito multiplicato itidem per datum aliquem numerum, remaneat determinatus numerus.

Sit iniunctum reperire numerum cuius cubo, ducto in 5, & à producto ſubtracto eodem numero multiplicato per 3, remaneat 87802. Quæſitus numerus eſto 1 R, eius cubus eſt 1 C, qui ductus in 5, facit 5 C, à quo ſi

$$\begin{array}{rccccccc} & 1 & & & 3 & & & 0 \\ 1\,C - 15\,R = & 2 & 1 & 9 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ & \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ & 1 & & & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 9 & 5 & 0 & 5 & \end{array}$$

ſubtrahatur 3 R, numerus productus à quæſito numero ducto in 3, remanet 5 C — 3 R, & hoc æquabitur 87802. Inſtituatur Paraboliſmus, & erit $1\,C - \frac{3\,R}{5} = \frac{87802}{5}$, reducantur omnia ad integra Iſomœriæ beneficio. Quoniam R, diſtat à C per 2, exponens quadrati, debet multiplicari 3, numerator $\frac{3}{5}$ R, per 25, quadratum ex 5, & fit 75, quo diuiſo per 5, fit 15, & erit 1 C — 15 R, debet autem 87802, multiplicari per 125, cubum ex 5, quoniam N, diſtat à C, per 3, exponentem cubi, & prouenit 10975250;

 quo

quo diuiso per 5, prouenit 2195050; erit igitur æquatio 1 C — 15 R = 2195050. Huius autem Radix est 130, quia verò per Isomœriam instituta fuit multiplicato per 5, ideo 130, diuidatur per 5, & prouenit 26, erit igitur quæsitus numerus 26.

PROBLEMA DVODECIMVM.

Propositum numerum in duas partes diuidere, vt quod ex multiplicatione partium fit, diuisum per partium differentiam reddat datum numerum.

Sit iniunctum diuidere 20, in duas partes, vt quod ex multiplicatione partium fit, diuisum per partium differentiam reddat $5\frac{1}{3}$. Pars vna esto 1 R; pars altera erit 20 — 1 R, hæ partes inuicem multiplicatæ producunt 20 R — 1 Q. Istarum autem partium 1 R, & 20 — 1 R, differentia est 2 R — 20, subtracto 20 — 1 R, de 1 R, remanet 2 R — 20, per hanc differentiã si diuidatur illud productũ 20 R — 1 Q. Fit quotiens $\frac{20R - 1Q}{2R - 20} = 5\frac{1}{3}$, & $\frac{20R - 1Q}{2R - 20}$ æquatur $5\frac{1}{3}$, & peracta operatione per antithesin fit æquatio 3 Q — 28 R = 320, instituto parabolismo reducitur

$$\begin{array}{r} 20 - 1R \\ 1R \\ \hline 20R - 1Q \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1R \\ 20 - 1R \\ \hline 2R - 20 \end{array}$$

$$\frac{20R - 1Q}{2R - 20} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{60R - 3Q}{6R - 60} = \frac{32R - 320}{6R - 60}$$

$$60R - 3Q = 32R - 320$$

$$60R = 32R - 320 + 3Q$$

$$60R + 320 = 32R + 3Q$$

$$\begin{array}{l} 32R \\ \hline 28R + 320 = 3Q \\ 3Q - 28R = 320 \\ 1Q - 9\frac{1}{3}R = 106\frac{2}{3} \end{array}$$

ad

ad hanc $1Q - 9\frac{1}{3}R = 106\frac{2}{3}$. Huius autem æquationis radix est 16, namq; dimidium numeri radicum est $\frac{14}{3}$ huius quadratum est $\frac{196}{9}$ hoc addito ad $106\frac{2}{3}$ seu $\frac{320}{3}$ fit $\frac{3468}{27}$ hęc fractio reducta ad minores terminos, nempe instituta communi diuisione per 3. euadit $\frac{1156}{9}$. Huius radix quadrata est $\frac{34}{3}$ nempe $11\frac{1}{3}$, ad hanc autem si addatur $4\frac{2}{3}$, dimidium numeri radicum fit 16, radicis pretium, & pars vna; alia erit 20, minus 16, nempe 4, & satisfaciunt Problemati.

$$1Q - 9\tfrac{1}{3}R = 106\tfrac{2}{3}$$

$$\frac{320}{3} \times \frac{196}{9}$$

$$\begin{array}{r} 2880 \\ 588 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{3468}{27} \text{ seu } \frac{1156}{9}$$

$$\begin{array}{r} 1156 \\ \cdot\ \ \cdot \\ \hline 3\ \ 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

Quartum exemplorum genus.

AD hoc exemplorum genus ea pertinent Problemata, in quorum resolutione secundæ Radices occurrunt; hunc enim ordinem huius Capitis initio polliciti sumus.

PROBLEMA PRIMVM.

TRes numeros reperire, quorum primus, cum 68. duplus sit secundi, & tertij. Secundus cum 92. triplus sit pri-

 mi,

mi, & tertij. Tertius autem cum 88; sit quadruplus primi, & secundi.

Primus esto 1 R, & quoniam primus, cum 68, duplus est secundi, & tertij; proinde $\frac{1}{2}$ R + 34; erunt secundus, & tertius. Itaq; primus erit 1 R; secundus, & tertius erit $\frac{1}{2}$ R + 34; qui simul conficiunt $1\frac{1}{2}$ R + 34; erunt omnes tres igitur simul $1\frac{1}{2}$ R + 34. Secundus autem dicatur esse 1 A, quo subtracto à $1\frac{1}{2}$ R + 34, remanebit primus, & tertius, $1\frac{1}{2}$ R + 34 — 1 A. Quoniam autem secundus cum 92 1 triplus est primi, & tertij; ob id 1 A + 93, debet esse triplus primi, & tertij, scilicet ipsius $1\frac{1}{2}$ R + 34 — 1 A, ob id $1\frac{1}{2}$ R + 34 — 1 A, ducatur in 3, & fiet $4\frac{1}{2}$ R + 102 — 3 A, & huic æquabitur 1 A + 92, si verò vtriq; parti addantur 3 A; erit æquatio $4\frac{1}{2}$ R + 102 = 4 A + 92. Vtrinq, ablatis 92; remanebit æquatio $4\frac{1}{2}$ R + 10 = 4 A. Quoniam igitur 4 A, æquantur $4\frac{1}{2}$ R + 10; proinde 1 A, æquabitur $1\frac{1}{8}$ R + $2\frac{1}{2}$. Et hic erit numerus secundus, nimirum $1\frac{1}{8}$ R + $2\frac{1}{2}$. Tertius autem ponatur 1 R, ergo primus, & secundus, erunt $1\frac{1}{2}$ R + 34 — B; Quoniam autem tertius cum 88; debet esse quadruplus primi, & secundi, erit 1 B + 88, æqualis 6 R +

Primus	1 R
Secundus	$1\frac{1}{8}$ R + $2\frac{1}{2}$
Tertius	$1\frac{3}{5}$ R + $9\frac{3}{5}$

$3\frac{23}{40}$ R + $12\frac{1}{10}$

$3\frac{23}{40}$ R + $12\frac{1}{10}$ = $1\frac{1}{2}$ R + 34

$12\frac{1}{10}$

$3\frac{23}{40}$ R = 1 R + $21\frac{9}{10}$

$1\frac{23}{40}$ R = $21\frac{9}{10}$

136 — 4 B, est enim 6 R + 136 — B 4, quadruplus primi, & secundi, qui fuerunt $1\frac{1}{2}$ R + 34 — 1 B, si vtriq, parti addantur 4 B, fiet æquatio 5 B + 88 = 6 R + 136, vtrinq;

vtrinq; autem ablatis 88, fit 5 B $=$ 6R $+$ 48, & fiet 1 B $=$ $1\frac{1}{5}$R $+$ $9\frac{3}{5}$, qui quidem erit numerus tertius. Cum itaq; numerus primus, positus sit 1R; secundus $1\frac{1}{8}$R$+$$2\frac{1}{2}$. Tertius $1\frac{1}{5}$R $+$ $9\frac{3}{5}$, omnes simul erunt quidem $3\frac{13}{40}$ R $+$ $12\frac{1}{10}$, & erit æquatio huiusmodi nimirum $3\frac{13}{40}$ R $+$ $12\frac{1}{10}$ $=$ $1\frac{1}{2}$ R $+$ 34, quando-quidem tres omnes erant $1\frac{1}{2}$R $+$ 34. Vtrinq; verò si auferantur $12\frac{1}{10}$, remanebit æquatio $3\frac{13}{40}$R $=$ $1\frac{1}{2}$R $+$ $21\frac{9}{10}$, & vtrinq; si auferatur $1\frac{1}{2}$ R, fiet æquatio $1\frac{33}{40}$ R $=$ $21\frac{9}{10}$. Diuisione autem instituta, fit 1 R, valor 12; quapropter numerus, qui erat $1\frac{1}{8}$R $+$ $2\frac{1}{2}$, erit 16; tertius autem positus $1\frac{1}{5}$ R $+$ $9\frac{3}{5}$ erit 24; Problemati satisfaciunt.

PROBLEMA SECVNDVM.

DVos numeros reperire, ita vt si primus sumpserit $\frac{1}{3}$, à secundo, fiant 220; Secundus si acceperit $\frac{1}{4}$, à primo, fiant 220.

Dico primum esse 1 R, secundum verò 1 A; si autem secundus dederit primo $\frac{1}{3}$ A; primus erit 1 R $+$ $\frac{1}{3}$ A, debebat autem esse 220; proinde 1 R $+$ $\frac{1}{3}$ A; æquabitur 220; reductione peracta secendum artem; erit æquatio huiusmodi $\frac{1}{3}$ A $=$ 220 — 1 R; quapropter 1 A; valebit 660 — 3 R; Secundus qui ponebatur 1 A, erit 660 — 3 R; cui si primus dederit $\frac{1}{4}$ R, secundus erit 660 — $2\frac{3}{4}$R, sed esse debebat 220; erit igitur æquatio 660 — $2\frac{3}{4}$ R $=$ 220; & facta reductione erit 440 $=$ $2\frac{3}{4}$ R; diuisione instituta, fit 1 R, prętium 160. Secundus, qui ponebatur 660 — 3 R, erit 180; & satisfaciunt Problemati, propterea; quod si primus accipit $\frac{1}{3}$ à secundo accipit 60; qui quidem numerus additus ad 160, facit 220; at verò secundus 180; accipiens quartam partem à primo, accipit 40; quibus additis ad 180, fit itidem 220. &c.

SCHO-

SCHOLION.

PRaecedentia duo Problemata resoluimus per secundas radices. Ignorandum tamen non est, ipsis posse satisfieri per primam radicem.

Ad primum quod attinet potuissemus dicere. Primus esto $1 R$, ergo secundus, & tertius $\frac{1}{2} R + 32$, quoniam primus cum 68, erat duplus secundi, & tertij; ob id secundus, & tertius, erunt $\frac{1}{2} R + 34$; his autem si addatur $1 R$, nempe primus, fient tres numeri $1\frac{1}{2} R + 34$, quibus additis 92; fiet $1\frac{1}{2} R + 126$, quibus diuisis per 4; fit quotiens $\frac{3}{8} R + 31\frac{1}{2}$, ducatur in 3; vt habeantur tres quartae partes; & fiet $1\frac{1}{8} R + 94\frac{1}{2}$, detractis autem 92; remanebit $1\frac{1}{8} R + 2\frac{1}{2}$, & est secundus. Vt habeatur tertius. Primus erat $1 R$, secundus est $1\frac{1}{8} R + 2\frac{1}{2}$, ergo simul erunt $2\frac{1}{8} R + 2\frac{1}{2}$. Vt habeatur igitur tertius; subtrahatur $2\frac{1}{8} R + 2\frac{1}{2}$ ab $1\frac{1}{2} R + 34$, summa trium; remanebit $31\frac{1}{2} - \frac{5}{8} R$, eritq; tertius numerus. Quamobrem tres numeri quaesiti sunt $1 R$; $1\frac{1}{8} R + 2\frac{1}{2}$, & $31\frac{1}{2} - \frac{5}{8} R$, huic tertio si addantur 88; debet fieri quadruplus numerus primi, & secundi; Ideo multiplicetur primus, & secundus per 4; nempe $2\frac{1}{8} R + 2\frac{1}{2}$, ducatur in 4; fit $8\frac{1}{2} R + 10$; & aequabitur $119\frac{1}{2} - \frac{5}{8} R$, scilicet tertio numero, plus 88, & ordinata aequatione, institutaq; diuisione fiet $1 R$, valor, 12.

Aduertendum autem, quod summa illa trium numerorum, puta $1\frac{1}{2} R + 34$, debet diuidi in duas tales partes, vt si vni ipsarum addantur 92. ipsa tripla fiat alterius; quod assequemur addendo 92, ad 34; vt fiat $1\frac{1}{2} R + 126$: his diuisis per 4; fiet quotiens $\frac{3}{8} R + 31\frac{1}{2}$ numerus qui si ducatur in 3; fiet $1\frac{1}{8} R + 94\frac{1}{2}$, & hic erit triplus alterius partis; si detrahantur autem 92; remanet $1\frac{1}{8} R + 2\frac{1}{2}$, pro secundo ex tribus; est enim pars vna illius numeri; pars in quam maior $\frac{3}{8} R + 31\frac{1}{2}$, altera erit $1\frac{1}{8} R + 2\frac{1}{2}$, haec tripla illius, si addideris 92: remanet enim $1\frac{1}{8} R + 2\frac{1}{2}$, cui si addas 92; fit numerus triplus illius; itaq; satisfaciunt; ordinata autem aequatione, & diuisione instituta, fit $1 R$, valor 12.

Sic

Sic etiam ſecundum reſolui poteſt ſine ſecundarum radicum auxilio.

PROBLEMA TERTIVM.

T*Res numeros reperire, vt primus accipiens* $\frac{1}{3}$ *à ſecundo faciat* 100; *Secundus accipiens* $\frac{1}{4}$ *à tertio faciat* 100; *Tertius deniq; accipiens* $\frac{1}{5}$ *à primo faciat itidem* 100, *Quarantur ſinguli.*

Dico primum eſſe 1 R, ſecundum verò 1 A; tertium 1 B, primus autem, quia habens $\frac{1}{3}$ ſecundi, haberet 100; ideo accipiat $\frac{1}{3}$ à ſecundo, vt habeat $1R + \frac{1}{3}B = 100$, & per antitheſin fiet $\frac{1}{3}A = 100 - 1R$; vt autem cognoſcamus valorem 1 A; omnia ducantur in 3; fiet enim $1A = 300 - 3R$; quamobrem ſecundus qui ponebatur 1 A, eſſet $300 - 3R$, itaq; primus erit 1 R; ſecundus $300 - 3R$; at verò ſecundus qui ponebatur $300 - 3R$, cum $\frac{1}{4}$ tertij dicebatur æqualis 100; proinde ſecundus $300 - 3R + \frac{1}{4}B$, æquabitur 100; erit igitur æquatio $300 - 3R + \frac{1}{4}B = 100$. Vtrinq; additis 3 R; fiet æquatio $300 + \frac{1}{4}B = 100 + 3R$, ſublatis vtrinq; 100; remanebit $200 + \frac{1}{4}B = 3R$; & rurſus per antitheſin fiet $\frac{1}{4}B = 3R - 300$, omnibus ductis in 4, fit $1B = 12R + 800$. Itaq; tertius, qui ponebatur 1 B, erit $12R - 800$; Primus ergo erit 1 R, Secundus $300 - 3R$, Tertius $12R - 800$; hic autem ſi haberet $\frac{1}{5}R$, nempe $\frac{1}{5}$ primi eſſet 100; proinde $\frac{61}{5}R - 800$, æquabitur 100; Vtrinq; additis 800, fiet $\frac{61}{5}R = 900$; ac proinde $61R = 4500$; diuiſione inſtituta, fit 1 R, pretium $73\frac{47}{61}$. Si igitur 1 R, pretium eſt $73\frac{47}{61}$; reperiemus ſingulos; vti perſpicuum eſt; quamobrem ex tribus numeris ille; qui ponebatur 1 R, erit $73\frac{47}{61}$, qui verò ponebatur $300 - 3R$, erit $78\frac{42}{61}$. Tertius qui ponebatur $12R - 800$, erit $85\frac{15}{61}$. Hi porrò numeri Problemati ſatisfaciunt; nam tertia pars numeri $78\frac{42}{61}$ eſt $26\frac{14}{61}$ quæ addita numero $73\frac{47}{61}$ facit 100, & ita de alijs. &c.

PRO-

PROBLEMA QVARTVM.

Tres numeros reperire Arithmeticè proportionales; ita vt primo ducto in 1, secundo in 2, tertio in 3; fiant 36; ipsorum autem quadrata simul addita faciant 93.

Tres numeri quæsiti sint 1 R, 1 A, 1 B. Quoniam autem sunt arithmeticè proportionales, extremorum 1 R; 1 B, summa 1 R + 1 B, dupla erit medij 1 A, quamobrem 1R + 1 B, æquabitur A; diuisa verò vtraq; æquationis parte per 2; fit 1 A $=$ $\frac{1R + 1B}{2}$. Numerus ergo positus 1 A; erit $\frac{1R + 1B}{2}$. At verò si primus ducatur in 1; secundus in 2, tertius in 3, fiunt 36; proinde ducatur 1 R, in in 1, fit 1 R; insuper ducatur $\frac{1R + 1B}{2}$ in 2, & fit 1R + 1 B. Demum ducatur 1 B, tn 3; fiunt 3 B; istorum autem productorum summa est 2 R + 4 B, quæ æqualis est 36; detractis autem 2 R, vtrinq; remanebit 4 B $=$ 36 — 2 R; diuisa verò vtraq; parte æquationis per 4; fit 1 B $=$ $\frac{18 - 1R}{2}$ cum autem secundum numerum superiùs inueniremus çqualem $\frac{1R + 1B}{2}$, ob id ipse secũdus erit $\frac{18 + 1R}{4}$.

Quaproter tres numeri erunt.

1 R. Primus.

$\frac{18 + 1R}{4}$ Secundus.

$\frac{18 - 1R}{2}$ Tertius.

Horum autem quadrata sunt.

1 Q. Quadratum primi.

$\frac{324 + 36R + 1Q}{16}$ Quadratum secundi.

$\frac{324 - 36R + 1Q}{4}$ Quadratum tertij.

Horum summa est $\frac{1620 - 108R + 21Q}{16}$ quæ æquabitur 93, omnibus ductis in 16, erit æquatio 1620 — 108 R ✛ 21Q ═ 1488, & per antithesin 1620 ✛ 21Q ═ 1488 ✛ 108R; & rursus fiet 132 ✛ 21 Q ═ 108 R, atq; adeo 108 R — 21 Q ═ 132, omnibus autem diuisis per 21; fit $\frac{108R}{21}$ — 1Q ═ $\frac{132}{21}$ quadratum dimidij numeri radicum est $\frac{2916}{441}$ à quo si dematur $\frac{132}{21}$ seu $\frac{2772}{441}$ remanet $\frac{144}{441}$ huius radix quadrata $\frac{12}{21}$ subtracta a $\frac{54}{21}$ dimidio numeri radicū relinquit $\frac{42}{21}$ hoc est 2; quamobrem numerus positus 1 R, erit 2; positus $\frac{18 + 1R}{4}$ erit 5; positus $\frac{18 - 1R}{2}$ erit 8; & satisfaciunt Problemati.

PROBLEMA QVINTVM.

Tres numeros reperire, ita vt quadratum primi additum plano sub primo in secundum efficiat 12, idem autem quadratum subtractum ex plano sub primo in tertium, relinquat 8; insuper quadratum primi, plus quadrato tertij ad quadratum secundi, rationem habeat vt 5. ad 2.

Primum numerum dico esse 1 R, secundum 1 A; tertium 1 B: primi quadratum est 1 Q; planum sub primo in secundum est, 1 R A; quamobrem 1 Q ✛ 1 R A, æquabitur 12; vtrinq; auferatur 1 Q; remanebit 1 R A ═ 12 — 1 Q; diuisa verò vtraq; æquationis parte per 1 R; fit 1 A ═ $\frac{12 - 1Q}{1R}$. Sic etiam planum sub primo in tertium erit 1 R B; quamobrem 1 R B — 1 Q, æquabitur 8, vtrinq;

 addi-

addito $1\,Q$, fit $1\,R\,B = 8 + 1\,Q$, vtraq; parte æquationis diuisa per $1\,R$, fit $1\,B = \frac{8 + 1\,Q}{1\,R}$.

Primus igitur erit $1\,R$

Secundus autem $\frac{12 - 1\,Q}{1\,R}$

Tertius demum $\frac{8 + 1\,Q}{1\,R}$ Horum autem quadrata sunt hæc $1\,Q$; $\frac{144 - 24\,Q + 1\,QQ}{1\,Q}$ & $\frac{64 + 16\,Q + 1\,QQ}{1\,Q}$. Ipsorum autem extremorũ quadrata simul addita faciunt $\frac{64 + 16\,Q + 2\,QQ}{1\,Q}$. Vt verò 5, ad 2; ita debet esse $\frac{64 + 16\,Q + 2\,QQ}{1\,Q}$ ad $\frac{144 - 24\,Q + 1\,QQ}{1\,Q}$, & ita $\frac{128 + 32\,Q + 4\,QQ}{1\,Q}$ æquabitur $\frac{720 - 120\,Q + 5\,QQ}{1\,Q}$

seu $128 + 32\,Q + 4\,QQ = 720 - 120\,Q + 5\,QQ$

$$120\,Q$$

$$128 + 152\,Q + 4\,QQ = 720 + 5\,QQ$$

$$128$$

$$152\,Q + 4\,QQ = 592 + 5\,QQ$$

$$4\,QQ$$

$$151\,Q = 592 + 1\,QQ$$

$$152\,Q - 1\,QQ = 592$$

Huius autem æquationis radix quadrato-quadrata est 2. Numerus igitur positus $1\,R$ erit 2; positus $\frac{12 - 1\,Q}{1\,R}$ erit 4; positus demum $\frac{8 + 1\,Q}{1\,R}$, erit 6, & satisfaciunt Ploblemati.

PRO-

PROBLEMA SEXTVM.

DVos numeros reperire, vt si vnus per alium diuidatur fiat quotiens 2 $\frac{1}{3}$.

Dico primum esse 1 R, secundum autem 1 A; & quia ambo debent facere 100; proinde 1 R + 1 A; æquabitur 100; vtrinq; verò sublata 1 R, fiet 1 A = 100 — 1 R. Itaq; primus est 1 R; Secundus 100 — 1 R horum summa est 100; diuidatur autem numerus secundus puta 100 — 1 R per 1 R, numerum primum, & fit $\frac{100 - 1 R}{1 R}$ hic autem quotiens æquabitur 2 $\frac{1}{3}$ siue $\frac{7}{3}$ reuocetur æquatio ad integra, decussatim facta multiplicatione; fiet æquatio 300 — 3 R = 7 R, Vtrinquè additis 3 R, fit æquatio 10 R = 300; diuisione instituta, fit 1 R pretium 30; proinde qui supponebatur 1 R, erit 30; qui verò 100 — 1 R, erit 70; diuisis autem 70, per 30; fit quotiens 2 $\frac{1}{3}$ vti perspicuum est.

SCHOLION.

PErspicuum est etiam sine secundis radicibus posse hoc Problema resolui.

PROBLEMA SEPTIMVM.

DVos numeros reperire, quorum quadrata simul addita faciant 100; ipsi verò numeri inter se ducti faciant $\frac{3}{4}$ quadrati maioris, quæruntur ipsi numeri.

Maior numerus sit 1 R, minor erit 1 A; quadrata sunt 1 Q & 1 A Q horum summa est 1 Q + 1 A Q; sed esse debet 100; ob id 1 Q + 1 A Q = 100; vtrinq; auferatur 1 A Q; erit igitur 1 Q = 100 — 1 A Q; & ita etiam 1 A Q = 100 — 1 Q; illi autem numeri 1 R, & 1 A; ducti inter se, faciunt 1 R A; & hoc æquabitur $\frac{3}{4}$ maioris quadrati nimirum 1 Q; Quoniam autem 1 R A; æquatur $\frac{3}{4}$ Q, ergo 1 QAQ, æquabitur $\frac{9}{16}$ QQ, reducta æquatione ad integra; fiet 16 QAQ $=$ 9 QQ, & per depressionem siue hypobibasmum, fiet æquatio 16 AQ $=$ 9 Q

Si igitur 9 Q, valent 16 A Q; certè 1 Q, valebit $\frac{16\,AQ}{9}$

9 16AQ 1? $\frac{16\,AQ}{9}$

At verò 1 AQ, æquabatur numero 100 — 1 Q, proinde 1 AQ æquabitur 100 — $\frac{16\,AQ}{9}$; etenim 1 Q, reperiebatur æquale $\frac{16\,AQ}{9}$ potest igitur eius loco substitui. Additis autem $\frac{16\,AQ}{9}$ ex vtraq; parte; fiet 1 AQ + $\frac{16\,AQ}{9}$ $=$ 100; est autem 1 AQ + $\frac{16\,AQ}{9}$ Idem quod $\frac{25}{9}$ AQ quamobrem $\frac{25}{9}$ AQ, æquabũtur 100; ac proinde 25 AQ $=$ 900; seu $\frac{5}{3}$ A æquabũtur 10; quamobrem 1 A, pretium erit 6, cuius quadratum est 36; quo subtracto ex 100, remanebit 64; pro pretio ipsius 100 — AQ & satisfaciunt problemati.

Quintum exemplorum genus.

AD hoc genus exemplorum, ea pertinere dicebamus Problemata, quæ rebus Geometricis sunt applicata.

PROBLEMA PRIMVM.

Est rectangulum quoddam, cuius latera sunt in proportione data; & data quoq; est proportio, quam habet summa quadratorum ex ijsdem lateribus, ad summam eorundem laterum. Oportet reperire rectangulum.

Data sit laterum proportio vt 4, ad 1; sitq; proportio summę quadratorum ad summam laterum, vt 34, ad 5, oportet reperire rectangulum. Latus vnum esto 1 R; aliud erit 4 R, horum quadrata sunt 1 Q; 16 Q, quorum summa est 17 Q, Sed hæc summa debet esse ad 5 R, summam laterum, vt 34, ad 5, ob id erunt proportionales 17 Q, 5 R, 34, 5, quamobrem fiet æquatio 85 Q ⚌ 170 R; & per hypobibasmum 85 R ⚌ 170, diuisione instituta fit 1 R, valor 2; & est latus minus; erit autem maius 8, vt patet &c.

PROBLEMA SECVNDVM.

Est rectangulum, cuius latus maius est duplum minoris minus quatuor vnitatibus; area verò est 96; quaruntur latera.

Latus minus esto 1 R; maius igitur erit 2 R — 4, rectangulum sub his est 2 Q — 4 R, & æquatio erit 2 Q — 4 R ⚌ 96, instituto parabolismo, fiet æquatio 1 Q — 2 R ⚌ 48; huius autem æquationis radix est 8; vt patet; quamobrem latus minus est 8; maius autem est 16, minus 4; nempe 12.

PROBLEMA TERTIVM.

Est rectangulum, cuius area est 48, diameter autem est 10.

Lateris vnius quadratum esto 1 R; & quoniam laterum quadrata æqualia sunt quadrato diametri; si nimirum simul

simul accipiantur; proinde latus alterum erit, cuius quadratum est 100 — 1 R, ergo latera ipsa erunt 1 R, & ℞ (100 — 1 R) quæ quidem latera si inuicem multiplicentur producunt 100 R — 1 Q, & erit æquatio huiusmodi 100 R — 1 Q ⊏ 2304; nimirum 100 R — 1 Q, productum quadratorum æquale erit quadrato aeris; huius autem æquationis radix est duplex eo quòd æquatio sit amphibola; atq; adeo 64, erit maior; minor autem erit 36, si verò hæc sunt laterum quadrata; latera ipsa erunt 8; 6, & satisfaciunt Problemati.

Cæterum quadrata laterum ad inuicem multiplicata, producere quadratum areę facile demonstrabitur.

Si namq; duo numeri inter se multiplicentur, producunt numerum medio loco proportionalem inter ipsorum quadrata.

Sint duo numeri A, & B; ex A in B, fiat C; ex A in se fiat quadratum D; ex B, in se quadratum E. Dico C, medium esse proportionalem inter D, & E hoc est E, C, D, esse continuè proportionales in proportione B, ad A;

A 3		B 4
D 9	C 12;	E 16

Quoniam enim A, multiplicans A, & B, facit C, & D, ergo vt B, ad A; ita erit C, ad D, & quia B. multiplicans B, & A; produxit E, & C, erit, vt B, ad A, ita E, ad C, sunt igitur E, C, D, in continua ratione, vt B, ad A, Hoc eodem modo demonstratur à Clauio.

Alia positio Posset etiam alijs modis institui positio. Dicamus latus vnum esse 1 R, eius quadratum est 1 Q, aliud autem latus erit 100 — 1 Q. Hæc autem si multiplicentur inter se fit productum 100 Q — 1 QQ, quod æquale est numero 2304, scilicet quadrato ex area eiusdem rectanguli, & fient latera, vt supra 6, & 8.

100 — 1 QQ ⊏ 2304

	2500
50 50	2304
14 14	196
36 64	. .
. .	14
6 8	

PRO-

PROBLEMA QVARTVM.

Est rectangulum cuius area est 60, & laterum aggregatum est 17, quæruntur latera.

Latus vnum esto 1 R, aliud erit 17 — 1 R, hæc autem inter se ducta, faciunt 17 R — 1 Q, & erit æquatio 17 R — 1 Q ⫫ 60, huius autem æquationis duplex est radix, scilicet 5, & 12.

PROBLEMA QVINTVM.

Est rectangulum cuius latus vnum est 9. productum autem ex altero latere in diametrum est 180. Quæritur latus alterum, diameter, ac area.

Latus ignotum esto 1 R, latus notum est 9, proinde laterum quadrata erunt 1 Q, & 81, at verò hæc quadrata simul iuncta sunt æqualia quadrato diametri, sed diametri est $\frac{180}{1\ R}$ nam productum ex altero latere scilicet 1 R, in diametrum est 180: si $\frac{180}{1\ R}$ ducatur in 1 R; fit 180; quamobrem erit æquatio 1 Q ✢ 81 ⫫ $\frac{32400}{1\ Q}$; est nimirum 1 Q ✢ 81; æquale quadrato diametri, & per multiplicationem in crucem fit æquatio huiusmodi 1 QQ ✢ 81 Q ⫫ 32400. Huius autem æquationis radix quadrato-quadrata est 12.

PROBLEMA SEXTVM.

Est rectangulum cuius area, cum diametro facit 58, & laterum differentia est 2; Quæruntur latera, diameter, & area.

Latus minus esto 1 R — 1 (est enim 1, dimidium differentiæ) maius latus autem erit 1 R ✢ 1, hac enim ratione

tione differunt dato interuallo 2; rectangulum sub his est 1 Q — 1; & est area, quam si dempseris à 5 8; conflato ex area, & diametro ipsius rectanguli, habebis 5 9 — 1 Q; pro diametro ipso cuius quadratum est 3 4 8 1 — 1 1 8 Q ✢ 1 Q Q; At verò quadrata laterum simul sunt 2 Q ✢ 2; erit igitur æquatio huiusmodi 3 4 8 1 — 1 1 8 Q ✢ 1 Q Q ═ 2 Q ✢ 2; & per antithesin 3 4 8 1 ✢ 1 Q Q ═ 1 2 0 Q ✢ 2, & rursus 3 4 7 9 ✢ 1 Q Q ═ 1 2 0 Q, & rursus 1 2 0 Q — 1 Q Q ═ 3 4 7 9. Huius autem radix est quidem 7; atq; adeo latus, quod ponebatur 1 R — 1, erit 6; quod autem positum fuit 1 R ✢ 1, erit 8.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Est quadratum cuius diameter cum latere facit 4, quæruntur latera.

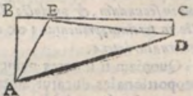
Latus illud esto 1 R; ergo diameter erit 4 — 1 R, huius quadratum est 1 6 — 8 R ✢ 1 Q, his æqualia erunt 2 Q; Itaq; 2 Q ═ 1 6 — 8 R ✢ 1 Q per antithesin autem 1 Q ✢ 8 R ═ 1 6. Semissis numeri radicum est 4; ad cuius quadratum 1 6; addito 1 6, numero absoluto fiet 3 2; cuius radix quadrata est ℞ 3 2, à qua si subtrahatur 4; dimidium numeri radicum remanebit ℞ 3 2 — 4, pro latere quæsiti quadrati; diameter autem erit 8 — ℞ 3 2.

PROBLEMA OCTAVVM.

Est figura A B C D, in qua scimus A B, esse 8, & B C, 2 0, item C D; 2, scimus etiam productum ex A B, in B E, æquale esse producto ex E C, in C D, sunt autem anguli ABC, B C D, recti quæritur B E, & E C; insuper A E, & E D.

Hoc nil aliud est, quam diuidere B C, in duas partes, vt productum sub vna, & A B, æquale sit producto sub alia, & C D. Pars vna pu a B E, sit 1 R, alia E C, erit 2 0 — 1 R; si ducatur 1 R, in 8, puta A B, fiunt 8 R, si verò multi-

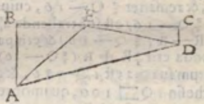
multiplicetur 20 — 1R, per 2, puta CD, fiet 40 — 2 R; erit igitur æquatio 8 R $\sqsupset$ 40 — 2 R, & per antithesin fiet 10 R $\sqsupset$ 40, quam obrem BE, erit 4, vt EC, erit 16, inotescent autem AE, ℞ 80, & ED, ℞ 260, per 47, primi.



PROBLEMA NONVM.

E*St figura ABCD, in qua nota est AB, 8, BC, 20, item CD 2, notum est etiam AE, æqualem esse ipsi ED; quæro quanta sit BE, quãta EC, quanta AE; demum quanta ED, suppositis angulis ABC, BCD, rectis. Oportet autem quadratum ex BC, plus altero è duobus quadratis, maius esse reliquo.*

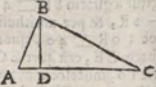
Dico BE, esse 1 R, reliqua EC, erit 20 — 1 R, quadratum ex 1 R, est 1 Q, quo addito ad 64, quadratum ex AB, 8, fit 1 Q ✠ 64, Deinde quadratum ex EC, est 400 — 40R ✠ 1 Q, quo addito ad 4, quadratum ex CD, 2, Fit 404 — 40R ✠ 1Q, hæc igitur æqualia debent esse inter se; nimirũ 1Q ✠ 64, & 400 — 40R1 ✠ 1Q; radices enim ipsorum supponuntur æquales nimirum ℞ (1Q ✠ 64) & ℞ (400 — 40R ✠ 1Q) quæ sunt AE, & ED; obseruatis autem præceptis artis, reperiemus 40 R $\sqsupset$ 340, quamobrem diuisione instituta inotescet 1 R, pretium; puta BE, nempe 8 $\frac{1}{2}$, reliqua EC, erit 11 $\frac{1}{2}$. &c.



PROBLEMA DECIMVM.

E*St triangulum ABC rectangulum in quo scimus quadrata ex AC, AB, AD, simul iuncta conficere 84, & si 40, diui-*

datur per singula, quotientibusq multiplicatis, nimirum ducto primo in secundum, & producto ducto in tertium, proueniat 1000, quaruntur latera.



Quoniam si sint tres numeri proportionales ducatur autem primus in secundum, productum ducatur in tertium, prouenit numerus, cuius latus cubicum est, numerus secundus ex tribus, ob id quia si primus ducatur in secundum, & productum in tertium fit 1000, ob id secundus erit 10, radix nimirum cubica numeri 1000, si igitur diuidatur 40, per 10, fit quotiens 4, pro secundo numero ex tribus quæsitis. Modo dicere oportet primum, & tertium ex quæsitis esse 1 R, & opus est diuidere 1 R, in duas partes, vt ex ductu vnius in aliam fiat 16, sumatur dimidium ipsius 1R, & est $\frac{1}{2}$ R, cuius quadratum est $\frac{1}{4}$ Q, à quo subtrahatur 16; quadratum illius secundi numeri 4, & remanet $\frac{1}{4}$ Q — 16, cuius radix quadrata puta ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16) est subtrahenda à dimidio 1 R, vt habeatur $\frac{1}{2}$ R — ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16) & erit pars prima, pars autem secunda erit $\frac{1}{2}$ R ✠ ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16). Istorum autem quadratorum summa est 1 Q — 16, & æquabitur 84, & per antithesin 1 Q $=$ 100, quamobrem 1 R, prætium erit 10. Itaq; pars posita $\frac{1}{2}$ R — ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16) erit 2, & erit A D, quantitas autem posita $\frac{1}{2}$ R ✠ ℞ ($\frac{1}{4}$ Q — 16) erit 8, nimirum A C, itaq; A D, erit 2, A B, erit 4, & A C, erit 8. &c.

PROBLEMA DECIMVMPRIMVM.

Est triangulum rectangulum, in quo notum est segmentum minus basis 5 $\frac{1}{3}$, itemq; nota est differentia qua basis superat latus conterminũ, cum illo segmento nempe 6, oportet reperire quantitatem basis. &c.

Latus illud circa rectum, & conterminum cum segmento minori, sit 1 R, erit igitur basis 1 R ✠ 6, quoniam au-

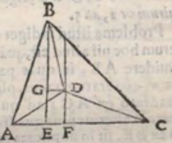
tem

tem segmentum minus est 5 $\frac{3}{7}$ ergo 5 $\frac{3}{7}$ R ✠ 32, $\frac{1}{7}$ æquabitur 1 Q, atq; adeo 1 Q — 5 $\frac{3}{7}$ R, æquabitur 32 $\frac{1}{7}$ sit autem explicata æquatione 1 R, pretium 9.

PROBLEMA DECIMVMSECVNDVM.

Est triangulum A B C, in quo nota sunt latera A C, 14, AB, 13; B C; 15, est autem punctum D, vel extra vel intra iniunctum sit cognoscere, quanta sit A D, quanta D B, quanta demum DC, Si ad quadratum ex AD, addatur 100, ad quadratum ex DB, addatur 36, ad quadratum ex DC, addatur 64, hac nimirum additione facta omnia sint inter se æqualia.

Primò diuidatur AC, 14, in duas partes, vt quadratum vnius plus 100, quadrato ex 10, æquale sit quadrato alterius plus 64, quadrato ex 8. Proinde pars vna esto 1 R, altera erit 14 — 1 R, quadratum illius est 1 Q, istius autem est 196 — 28 R ✠ 1 Q. si ad 1 Q, addatur 100, quadratum ex 10,



fit 100 ✠ 1 Q. si ad 196 — 28 R ✠ 1 Q, addatur 64, quadratum ex 8, fit 260 — 28 R ✠ 1 Q, erit igitur 100, ✠ 1 Q = 260 — 28 R ✠ 1 Q, & per antithesin fiet 100 ✠ 1 Q ✠ 28 R = 260 ✠ 1 Q, & rursus vtrinq, sublatis 100, & 1 Q fiet 28 R = 160, diuisione instituta, fit 1 R, pretium 5 $\frac{5}{7}$, & est AF, cum autem AE, sit 5; erit igitur EF, $\frac{5}{7}$, remanebit autem FC, 8 $\frac{2}{7}$.

Sit autem FD, 1 R, eius quadratum est 1 Q, quo addito ad 68 $\frac{32}{49}$, quadratum ex 8 $\frac{2}{7}$ fit 68 $\frac{32}{49}$ ✠ 1 Q ad quod addito 64, quadrato ex 8, fit 132 $\frac{32}{49}$ ✠ 1 Q, & quia BE, erat 12; ductaq; cũ sit DG ad rectos angulos, ad BE, & DF, ad AC, atq; adeo EG, sit 1 R, erit GB, 12 — 1 R, cuius quadratum est 144 — 24 R ✠ 1 Q, ad quod intelligatur addi

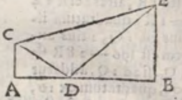
 $\frac{32}{49}$, qua-

$\frac{25}{49}$, quadratum ex GD, fiet 144 $\frac{25}{49}$ — 24 R ✠ 1 Q, ad quod si intelligatur addi 36, quadratum ex 6, fiet 180 $\frac{25}{49}$ — 24 R ✠ 1 Q; & erit æquatio 132 $\frac{33}{49}$ ✠ 1 Q ⊐ 180 $\frac{25}{49}$ — 24 R ✠ 1 Q, & per antithesin fiet 132 $\frac{33}{49}$ ✠ 24 R ✠ 1 Q ⊐ 180 $\frac{25}{49}$ ✠ 1 Q. & rursus 24 R ✠ 1 Q ⊐ 47 $\frac{48}{49}$ ✠ 1 Q, & deniq; 24 R ⊐ 47 $\frac{48}{49}$, diuisione autem instituta, fit 1 R, valor 1 $\frac{1162}{1176}$. Neq; dissimili artificio procedendum erit; cum punctũ ceciderit extra triangulum &c

PROBLEMA DECIMVM TERTIVM.

Est figura A B C E; in qua nota sunt, AB 26; AC 8; BE; 15, anguli C A B, A B E, sunt recti oportet cognoscere quanta sit C D; & D E, cognita ratione ipsius C D, ad D E, nimirum vt 2, ad 5.

Problema istud indiget determinatione, vt patet, cæterum hoc nil aliud est, quàm diuidere AB, in duas partes, vt quadratum vnius, plus quadrato ex AC; ad quadratum alterius plus quadrato ex BE, sit in duplicata ratione 2, ad 5, nempe, vt 2, ad 12 $\frac{1}{2}$.



Pars vna est 1 R; alia erit 26 — 1 R: quadratum illius est 1 Q; cui addito 64; quadrato ex AC 8; fit 64 ✠ 1 Q; deinde quadratum ex 26 — 1 R est 676 — 52 R ✠ 1 Q; cui addito 225; quadrato ex BE 15, fit 901 — 52 R ✠ 1 Q, ergo ℞ (64 ✠ 1 Q) ad ℞ (901 — 52 R ✠ 1 Q) debet esse vt 2; ad 5; seu 64 ✠ 1 Q, ad 901 — 52 R ✠ 1 Q, debet esse vt 2, ad 12 $\frac{1}{2}$, seu vt 4, ad 25; erit igitur 1600 ✠ 25 Q ⊐ 3604 — 208 R ✠ 4 Q, & per antithesin 1600 ✠ 25 Q ✠ 208 R ⊐ 3604 ✠ 4 Q, & rursus 1600 ✠ 21 Q ✠ 208 R ⊐ 3604, rursus fiet æquatio 21 Q ✠ 208 R ⊐ 2004, instituto parabolismo, fit 1 Q ✠ $\frac{208}{21}$ R ⊐ $\frac{2004}{21}$

Huius

Huius equationis radix est 6, nam dimidium numeri radicum est $\frac{104}{21}$ cuius quadratum $\frac{10816}{441}$ si addatur ad $\frac{2004}{21}$ seu quodidē est $\frac{42084}{441}$ fit numerus 52900; cuius latus quadratum est 230, & erit $\frac{230}{21}$, ab hoc autem subtracto $\frac{104}{21}$ dimidio numeri radicum remanet $\frac{126}{21}$, nimirum 6; quamobrē; pars vna erit 6; altera erit 20 &c.

$$\begin{array}{r} 2004 \\ 31 \\ \hline 2004 \\ 4008 \\ \hline 42084 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 104 \\ 104 \\ \hline 416 \\ \hline 000 \\ 104 \\ \hline 10816 \\ 32084 \\ \hline 52900 \\ 2\;3\;0 \\ \hline \end{array}$$

SCHOLION.

Rectè dicebamus id nil aliud esse quàm diuidere A B, in duas partes, vt summa quadraterum ex vna parte sit ad summā Quadratorum ex alia in duplicata ratione 2, ad 5 : si enim recta potens duo quadrata, ad rectam potentem alia duo est vt 2, ad 5 : quadratum, ad quadratum erit in ratione duplicata vt constat ex 20. prop. 6. Elementorum.

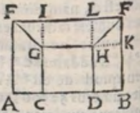
$$\frac{104}{21} \qquad \frac{230}{21} \qquad \begin{array}{r} 230 \\ 104 \\ \hline 126 \\ \hline 21 \end{array} \; 16$$

PROBLEMA DECIMVM QVARTVM.

Datum sit rectangulum A B F E; constet autem latus vnum ipsius nimirum maius, quale est E F, esse 10; *at verò F B, latus minus esse* 6; *in eoq; descriptum sit parallelogrammum rectangulum C G H D; quod sit quarta pars totius AEFB, adeo vt ACGE, GEFH, HFBD, & CGHD, sint aqualia; quorum vnumquodq; est quarta pars totius AEFB; quaritur quanta sit G H, & quanta H D.*

Producatur CG, ad I, & GH, ad K, quoniam igitur rectangulum CGHD, æquale est trapetio GEFH, ob id rectangulum GIFK, quod est illi trapetio æquale, erit æqua-

æquale rectãgulo CGHD, quamobrem erit a vt FI, ad GH, ita
a 17. Sexti DH, ad GI, est autem GH, differentia, qua FI, superat IE, diuidenda sunt igitur latera EF FB, in duobus punctis I K, ea lege, vt quemadmodum est FI, ad GH, seu IL, differentiam, &c. ita sit GI, seu FK, ad HD, seu KB.



Dico igitur GH, esse 2R, ob id IF. erit 5 ✛ 1 R, quemadmodum EI, erit 5—1R, harum autẽ partium summa est 10, Vt autem 5 ✛ 1 R, ad 2 R, ita debet esse BK, ad KF, quamobrem fiat, vt 5 ✛ 1 R, ad 2 R, ita vna pars, ad alteram, quarum summa sit 6, nimirum BF, Addatur 2 R, differentia, ad 5 ✛ 1 R, partem vnam, & fit 4 ✛ 3 R, per hanc diuidatur 6, fit quotiens $\frac{6}{5 \dagger 3 R}$ modò hic ducatur in illas partes 5 ✛ 1 R, & 2 R, fiunt numeri producti 30 ✛ 6R, & 12 R, diuidantur per communem diuisorem, & erunt $\frac{30 \dagger 6 R}{5 \dagger 1 R)}$ & $\frac{12 R}{5 \dagger 1 R}$ in ratione data, conficientes simul additę numerum 6, & erunt hi termini proportionales.

$$5 ✛ 1R \qquad 2R, \qquad \frac{30 \dagger 6 R}{5 \dagger 3 R} \qquad \frac{12 R}{5 \dagger 3 R}$$

Sumamus productum, vel ab extremis, vel à medijs; sunt enim vnum, & idem $\frac{60R \dagger 12Q}{5 \dagger 3Q}$, & erit ęquale quartæ parti totius rectanguli CB; quod est 60; ergo æquabitur numero 15, quartæ parte totius.

$$\frac{60R \dagger 12 Q}{5 \dagger 3R} = 15.$$

Tollatur fractio per communem multiplicationem, & erit æquatio 60R ✛ 12Q = 75 ✛ 45R; per antithesin verò 15R ✛ 12Q = 75, siue 12Q ✛ 15R = 75, omnibus autem applicatis ad 12; fiet æquatio 1 Q ✛ 1 $\frac{1}{4}$ R = 6 $\frac{1}{4}$.

$\frac{5}{4}$ Di-

$\frac{5}{8}$ *Dimidium numeri Radicum.*
$\frac{25}{64}$ *Quadratum dimidij numeri Radicum.* } *Adde*
6 *Numerus absolutus.*

$6\frac{41}{64}$ *Aggregatum.*
℞ $6\frac{41}{64}$ *Aggregati latus.* } *Subtrahe*
$\frac{5}{8}$ *Dimidium numeri radicum.*

Erit igitur 1 R, valor ℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$. Illius autem ęquationis eam esse radicem patet ex præceptis artis. Diuidatur ℞ $6\frac{41}{64} - \frac{5}{8}$ per 4; & fit quotiens, siue quarta pars radicis ℞ $\frac{425}{1024} - \frac{5}{32}$ hæc autem quarta pars radicis addita ad vnam Radicē (est enim in æquatione numerus radicum $1\frac{1}{4}$ R) facit ℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$ quandoquidem si ad $-\frac{5}{8}$ addamus $-\frac{5}{32}$ fit $-\frac{25}{32}$. Si verò ad ℞ $6\frac{41}{64}$ addatur ℞ $\frac{215}{1024}$ fit ℞ $10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32}$ sunt enim commensurabiles ℞ $\frac{425}{64}$ & ℞ $\frac{425}{1024}$. Siquidem quadratum vnius, in alterius quadratum facit $\frac{180625}{65536}$

$$
\begin{array}{l}
℞\,6\frac{41}{64} - \frac{5}{8} \\
℞\,6\frac{41}{64} - \frac{5}{8} \\
\hline
6\frac{41}{64} - ℞\,\frac{10625}{4096} + \frac{25}{64} \\
\qquad\;\; - ℞\,\frac{10625}{4096} \\
\hline
7\frac{1}{32} - ℞\,10\frac{1540}{4096} \quad \text{Radicis quadratum.} \\
℞\,10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32} \quad \text{Radicum pretium.} \\
\hline
6 \quad \text{Summa.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
℞\,\frac{425}{64} - \frac{5}{8} \quad \text{Radix.} \\
℞\,\frac{425}{1024} - \frac{5}{32} \quad \text{Quarta pars radicis.} \\
\hline
℞\,10\frac{1540}{4096} - \frac{25}{32} \quad \text{Summa, \& radicum numerus}
\end{array}
$$

seu

$$6\ \frac{41}{64}$$

$$3\ \frac{82}{256}$$

$$9$$

$$1\ \frac{1540}{4096}$$

$$\text{℞}\,10\ \frac{1540}{4096}$$

1024
64
4096
6144
65536

65536
. . .
256

256
64
1024
1536
16386

$$\frac{82}{256} \times \frac{41}{64}$$

82
64
328
492
5248

256
41
256
1024
10496
5248
15744

$$\frac{625}{1024} \times \frac{15744}{16384}$$ seu quod idem est $\frac{123}{128}$.

16384
1024
65336
32768
163840
16777016

15744
1024
62976
31488
15744
16121856
6963200
23085056

$$1\ \frac{6308040}{16777016}$$

Ipsius

Ipsius autem $\frac{180625}{65536}$ radix quadrata est $\frac{425}{256}$ cuius duplum est $\frac{850}{256}$ hoc est $3\frac{82}{256}$. Si verò ad 6, addatur 3, fit 9. Si $\frac{82}{256}$ addatur ad $\frac{41}{64}$ fit $\frac{123}{128}$; namq; si huius fractionis, scilicet, $\frac{41}{64}$ duplicemus numeratorem, & denominatorem fiet; $\frac{82}{128}$ si verò sumamus dimidium, tàm numeratoris, quàm denominatoris, illius fractionis $\frac{82}{256}$ fit $\frac{41}{128}$ modò fractiones sunt redactæ ad eandem denominationē. Si addantur numeratores, fiet fractio $\frac{123}{128}$ quæ quidem fractio, addita ad $\frac{425}{1024}$ facit summam $1\frac{49280}{131072}$ hoc est $1\frac{1540}{4096}$ quę addita ad 9. facit 10 $\frac{1540}{4096}$ ob id summa erit ℞ 10 $\frac{1540}{4096}$ at verò — ℞ 10 $\frac{1540}{4096}$ addita ad + ℞ 10 $\frac{1540}{4096}$ nihil remanet. Si verò ad 7 $\frac{1}{32}$ addatur — $\frac{25}{32}$ fit $6\frac{1}{4}$. Igitur si ad 7 $\frac{1}{32}$ — ℞ 10 $\frac{1540}{4096}$ quadratum radicis addatur ℞ 10 $\frac{1540}{4096}$ — $\frac{25}{32}$ radicum pretium, fit 6 $\frac{1}{4}$ vt oportebat.

$\frac{123}{128} \times \frac{425}{1024}$

425	1025
128	123
8192	3672
2048	2048
1024	1024
131072	125952
	54400
	180362

$\frac{49280}{\text{Diuisor } 32}$ | 1540 $\frac{180352}{131072}$ | $1\frac{48280}{131072}$

$\frac{131072}{\text{Diuisor } 32}$ | 4096 hoc est $1\frac{1540}{4096}$

$\frac{41}{64}$ $\frac{82}{256}$ $\frac{82}{128}$ $\frac{41}{128}$ $\quad \frac{82}{41} \;\; \frac{123}{128}$

Modo videndum, ex additione huius fractionis nimirum

rum $\frac{26\frac{1}{4} + \text{℞}\,239\frac{1}{16}}{3\frac{1}{4} + \text{℞}\,59\frac{13}{16}}$ ad hanc $\frac{\text{℞}\,956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4} + \text{℞}\,59\frac{13}{16}}$ fieri numerum 6.

$$\begin{array}{r} \text{℞}\,956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2} \\ 26\frac{1}{4} + \text{℞}\,239\frac{1}{16} \\ \hline 18\frac{3}{4} + \text{℞}\,2151\frac{9}{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7650 \\ 2 \\ \hline 15300 \\ \hline 16 \end{array}$$

In primis addantur numeratores; & ex $+\,26\frac{1}{4}$ ad $-\,7\frac{1}{2}$ fit $18\frac{3}{4}$, & fit $+$ ex ℞ $239\frac{1}{16}$ ad ℞ $956\frac{4}{16}$ fit ℞ $2151\frac{9}{16}$. Propterea quod ℞ $239\frac{1}{16}$ & ℞ $956\frac{4}{16}$ sunt commensurabiles; Si igitur $\frac{15300}{16}$ (hæc fractio idem est, quod $956\frac{4}{16}$) ducatur in $\frac{3825}{16}$ fit $\frac{58522500}{256}$ huius radix quadrata est $\frac{7650}{16}$ huius duplum est $\frac{15300}{16}$ quadrata illarum fractionum sunt $\frac{15300}{16}$ & $\frac{3825}{16}$ horum summa est $\frac{34425}{16}$ nempe $2151\frac{9}{16}$. Proinde si ℞ $239\frac{1}{16}$ addatur ad ℞ $956\frac{4}{16}$ fit summa ℞ $2151\frac{9}{16}$. Itaq; numerator

$$\begin{array}{r} 956 \\ 16 \\ \hline 5736 \\ 956 \\ \hline 15296 \\ 4 \\ \hline 15300 \\ \hline 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 239 \\ 16 \\ \hline 434 \\ 239 \\ \hline 4824 \\ 1 \\ \hline 3825 \\ \hline 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15300 \\ 3825 \\ \hline 76500 \\ 30600 \\ 22400 \\ 45900 \\ \hline 58522500 \end{array}$$

rator erit $18\frac{3}{4} + ℞\,2151\frac{9}{16}$, & denominator erit $3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}$, & ſtabit hoc modo.

$$\frac{18\frac{3}{4} + ℞\,2151\frac{9}{16}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$$

Eritq; ſumma quæſita. Conſtat autem hanc fractionem valere 6; namq; $3\frac{1}{8}$, in $18\frac{3}{4}$ continetur ſexies; ſeu metitur $18\frac{3}{4}$, per 6, & ℞ $59\frac{49}{64}$, metitur ℞ $2151\frac{9}{16}$, per 6, vt patet, ſi $3\frac{1}{8}$ multiplicemus per 6, fit $18\frac{3}{4}$. Si verò ℞ $59\frac{49}{64}$ multiplicemus per 6, fit ℞ $2151\frac{9}{16}$. Quod autem ſi ducatur ℞ $26\frac{9}{16} - 1\frac{1}{4}$ in $\frac{26\frac{1}{4} + ℞\,239\frac{1}{16}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ producatur 15; quarta pars totius rectanguli 60, facilè conſtabit.

$$\begin{array}{r}
3\frac{1}{8} \\
6 \\
\hline
18\frac{6}{8} \text{ ſeu } \frac{3}{4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
59\frac{49}{64} \\
36 \\
\hline
354 \\
177 \\
\hline
2124 \\
27\frac{36}{64} \\
\hline
2151\frac{9}{16}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
49 \\
36 \\
\hline
294 \\
147 \\
\hline
1764
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
26\frac{1}{4} + ℞\,239\frac{1}{16} \\
℞\,26\frac{9}{16} - 1\frac{1}{4} \\
\hline
- 32\frac{13}{16} - ℞\,\frac{76500}{256} \\
℞\,\frac{178500}{256} + ℞\,\frac{1625625}{156} \text{ hoc eſt } 79\frac{11}{16} \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{℞\,13447\frac{17}{64} + 46\frac{14}{16} \text{ ſeu } 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$$

Hæc autem fractio $\frac{℞\,13447\frac{17}{64} + 46\frac{14}{16} \text{ ſeu } \frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ valet 15; quandoquidem $3\frac{1}{8}$ metitur $46\frac{7}{8}$ per 15, & ℞ $59\frac{49}{64}$ metitur ℞ $13447\frac{17}{64}$ per 15. Itaq; ſi ducamus ℞ $26\frac{9}{16}$ —

$1\frac{1}{4}$ in $\dfrac{26\frac{1}{4} + ℞\,239\frac{1}{16}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ fit 15; vt oportet.

Quod autem ex multiplicatione quoq; ℞ $956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2}$ per $4\frac{3}{8} + ℞\,6\frac{41}{64}$ producatur idem numerus 15, patet; siquidem, dum multiplicamus $7\frac{1}{2}$ per $6\frac{41}{64}$ producitur ℞ $\frac{95625}{256}$ at $+$ in $-$ ductum facit $-$ deinde dum ducitur ℞

$$\begin{array}{c} ℞\,956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2} \\ 4\frac{3}{8} + ℞\,6\frac{41}{64} \\ \hline 79\frac{11}{16} - ℞\,\frac{95625}{256} \\ ℞\,18302\frac{11584}{16384} - 32\frac{13}{16} \\ \hline ℞\,13447\frac{17}{64} + 46\frac{7}{8} \\ \hline 3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64} \end{array}$$

$6\frac{41}{64}$ in ℞ $956\frac{1}{4}$ producitur ℞ $\frac{6502500}{1024}$ Radix quadrata numeratoris est 2550, denominatoris est 32. Itaq; productum erit $\frac{2550}{32}$ hoc est $79\frac{11}{16}$ at ductum $+$ in $+$ facit $+$. Deinde dum ducitur $4\frac{3}{8}$ in $7\frac{1}{2}$ fit $32\frac{13}{16}$ & $+$ in $-$ facit $-$. Deniq; si ducatur $4\frac{3}{8}$ in ℞ $956\frac{4}{16}$ fit ℞ $18302\frac{11584}{16384}$ Summa verò horum productorum & $\dfrac{℞\,13447\frac{17}{64} + 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + ℞\,59\frac{49}{64}}$.

$$\begin{array}{ccccccc|cccc} 6 & 5 & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 2 & & 5 & & 5 & & 0 & 3 & & & 2 \\ \hline & & 3 & 2 & & & & & & & \end{array}$$

Quandoquidem si $+\,79\frac{11}{16}$ & $-\,32\frac{13}{16}$ simul addantur, fit $+\,46\frac{7}{8}$. Si verò $+$ ℞ $18302\frac{11584}{16384}$ ad $-$ ℞ $\frac{95625}{256}$ adda-

addatur fit summa ℞ $13447\frac{17}{64}$. Itaq; erit productum ℞ $13447\frac{17}{64} + 46\frac{7}{8}$ cui subscribi debet idem denominator $3\frac{1}{8} +$ ℞ $59\frac{49}{64}$ vt fiat fractio ista ℞ $\frac{13447\frac{17}{64} + 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + ℞\, 59\frac{49}{64}}$ dum nimirum multiplicatur fractio illa supra posita ℞ $\frac{956\frac{4}{16} - 7\frac{1}{2}}{3\frac{1}{8} + ℞\, 59\frac{49}{64}}$ in alteram $\frac{4\frac{7}{8} - ℞\, 6\frac{21}{64}}{3\frac{1}{8} + ℞\, 59\frac{49}{64}}$

Quemadmodum explicuimus; At verò liquet fractionem illam productam ℞ $\frac{13447\frac{17}{64} + 46\frac{7}{8}}{3\frac{1}{8} + ℞\, 59\frac{49}{64}}$ valere 15; siquidem, & $3\frac{1}{8}$, metitur $46\frac{7}{8}$ per 15; & ℞ $59\frac{49}{64}$ metitur pariter ipsam ℞ $13447\frac{17}{64}$ per 15.

Prima igitur I F, posita $5 + 1$ R, erit $4\frac{7}{8} +$ ℞ $6\frac{21}{64}$.

Secunda G H, seu I L posita 2 R, erit ℞ $26\frac{9}{16} - 1\frac{1}{4}$.

Tertia H D, seu K B, posita $\frac{30 + 6\,R}{5 + 3\,R}$ erit $\frac{26\frac{3}{4} + ℞\, 239\frac{1}{16}}{3\frac{1}{8} + ℞\, 59\frac{49}{64}}$.

Quarta IG, seu FK, posita $\frac{12\,R}{5 + 3\,R}$ erit ℞ $\frac{956\frac{4}{16}\ \text{seu}\ \frac{1}{4} - 7\frac{1}{2}}{3\frac{1}{8} + ℞\, 59\frac{49}{64}}$

Aliter eidem Problemati satisfieri potest. Pars BK, esto $3 + 1$ R, reliqua KF, erit $3 - 1$ R; harum summa est 6; vt patet, quoniam $3 + 1$ R, pars maior numeri 6, si ducatur in differentiam partium numeri 10; debet producere 15, quemadmodum pars minor eiusdem numeri 6, ducta in partem maiorem numeri 10; debet efficere 15; sunt enim proportionales; ob id diuidatur 15, per $3 + 1$ R, & fiet $\frac{15}{3 + 1\,R}$ differentia partium lateris maioris 10; deinde

Secunda resolutio Problematis,

deinde diuidatur numerus 15, per $3 - 1R$, & fiet quotiens $\frac{15}{3 - 1R}$ pro parte maiori eiusdem 10; à quasi subtrahatur $\frac{15}{3 + 1R}$ remanebit $\frac{30R}{9 - 1Q}$ pro parte minori eiusdem 10; si igitur $\frac{30R}{9 - 1Q}$, addatur ad $\frac{15}{3 - 1R}$ fiet summa $\frac{45 + 45R}{9 - 1Q}$ æqualis 10; Atq; adeo $45 + 45R = 90 - 10Q$, & ordinata æquatione fiet $45 + 10Q + 45R = 90$, & vtrinq; sublatis 45; erit $10Q + 45R = 45$; diuisione verò instituta, fit æquatio $1Q + 4\frac{1}{2}R = 4\frac{1}{2}$. Huius autem æquationis radix reperietur, si sumatur $5\frac{1}{16}$ quadratum dimidij numeri radicum, & addatur numero absoluto; fiet enim $9\frac{9}{16}$, huius radix quadrata est ℞ $9\frac{9}{16}$; à qua subtrahi debet $2\frac{1}{4}$ dimidium numeri radicum, remanet ℞ $9\frac{9}{16} - 2\frac{1}{4}$ & est 1 R; valor; Itaq; pars, quæ ponebatur $3 + 1R$, erit ℞ $9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$. Idem est autem ℞ $9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$, ac est fractio $\frac{26\frac{1}{4} + ℞\,239\frac{1}{16}}{3\frac{3}{4} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ elicita in superiori methodo.

$$1Q + 4\frac{1}{2}R = 4\frac{1}{2}$$

$$
\begin{array}{c}
2\frac{1}{4} \\
2\frac{1}{4} \\
\hline
4 \\
1 \\
\hline
5\frac{1}{16} \\
4\frac{8}{16} \\
\hline
9\frac{9}{16} \\
℞\,9\frac{9}{16} - 2\frac{1}{4}
\end{array}
$$

Cæterę partes non latebunt, altera namque ipsius 6, erit $5\frac{1}{4} -$ ℞ $9\frac{9}{16}$, alias quoq; facile est reperire.

Quòd autem illa fractio $\frac{26\frac{1}{4} + ℞\,239\frac{1}{16}}{3\frac{3}{4} + ℞\,59\frac{49}{64}}$ æqualis sit huic numero ℞ $9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$, ostendemus hunc in modum; Quoniam enim $3\frac{3}{4} +$ ℞ $59\frac{49}{64}$, si ducatur in ℞ $9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$; debet producere $26\frac{1}{4} +$ ℞ $239\frac{1}{16}$, proinde; multiplicemus prædictos numeros inter se; si itaque ducamus $\frac{3}{4}$ in ℞ $59\frac{49}{64}$ fiet ℞ $\frac{34425}{1024}$ si verò multiplicemus $3\frac{3}{4}$ per $\frac{3}{4}$, pro-

duce-

$3\frac{1}{8}$ + ℞ $59\frac{49}{64}$

℞ $9\frac{9}{16}$ + $\frac{3}{4}$

$\frac{75}{32}$ + ℞ $\frac{34425}{1024}$

℞ $\frac{95625}{1024}$ + ℞ $\frac{585225}{1024}$

$26\frac{1}{4}$ + ℞ $239\frac{1}{16}$.

ducetur $\frac{75}{32}$; at verò multiplicata ℞ $9\frac{9}{16}$ per ℞ $59\frac{49}{64}$; fit ℞ $\frac{585225}{1024}$ habet autem radicē hic numerus factus $\frac{585225}{1024}$ & est $\frac{765}{32}$ hoc est $23\frac{29}{32}$. Preterea si ducatur ℞ $9\frac{9}{16}$ in $3\frac{1}{8}$. Fit ℞ $\frac{95625}{1024}$; at verò si $\frac{75}{32}$ addantur ad $23\frac{29}{32}$ fit summa $26\frac{1}{4}$; insuper quoniam ℞ $\frac{34425}{1024}$ & ℞ $\frac{95625}{1024}$ sunt cōmensurabiles; communis enim diuisor est ℞ 153; quæ diuidens ℞ 34525 facit quotientem ℞ 225; nempe 15; & diuidens ℞ 95625 facit quotientem ℞ 625; cuius radix quadrata est 25; at verò 40, est summa ex 15, & 25; quadratum eius est 1600, quo ducto in 153, quadratum communis

$$\frac{34425}{153} \Big| \frac{225}{15}$$

$$\frac{95625}{153} \Big| \frac{625}{25}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{25} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 1600 \\ \underline{153} \\ 4800 \\ 8000 \\ \underline{1600} \\ 244800 \end{array}$$

$$\frac{244800}{1024} \Big| 239\frac{1}{16}$$

diui-

diuiforis; fit 244800 atq; adeo erit $\frac{244800}{1024}$ huius latus quadratum est R 239 $\frac{1}{16}$ nam si 244800, diuidatur per 1024, fit 239 $\frac{1}{16}$, cuius radix quadrata est R 239 $\frac{1}{16}$.

Duobus modis hucusq; proposito Problemati satisfecimus; placet etiam alia via incidenter idem Problema enodare; Quamobrem satisfaciemus,

Aliter ijsdem suppositis; & latus maius esse 10, latus verò minus esse 6; sit rectangulum EFGD, quarta pars totius rectanguli; adeo vt si FH; secetur bifariam in I; rectangulum IC; sit quoq; quarta pars; atq; adeo eidem EG, æquale; adeo nimirum vt, AC, rectangulũ ad EG, vel ad IC, rationem habeat, vt 4, ad 1, quæritur FE, siue G D, Dico igitur eam esse 1R; rectãgulum AC; erit 60; & EG, erit $\frac{60}{4}$; hoc enim modo erit vt 4, ad 1 ita 60, ad $\frac{60}{4}$. Sed rectangulum F G, erit $\frac{60}{4R}$; at BH; erit $6 - 1R$, & BK; erit $10 - \frac{60}{4R}$. Rectangulum verò HK, erit illud, quod fit sub BH; $6 - 1R$, & BK; $10 - \frac{60}{4R}$ rectangulum autem est $60 - \frac{360}{4R} - 10R + \frac{60}{4}$, rectangulum verò FC, erit $\frac{360}{4R} - \frac{60}{4}$

$$10 - \frac{60}{4R}$$
$$6 - 1R$$
$$-10R + \frac{60}{4R}$$
$$60 - \frac{360}{4R}$$
$$60 - \frac{360}{4R} - 10R + \frac{60R}{4R} \text{ seu } \frac{60}{4}$$

Du-

Duplum verò rectangulum, IC, seu rectangulum duplum IK, plus duplo rectangulo FC, seu rectangulum HK; plus duplo rectangulo FC, est, $60 - \frac{360}{4R} - 10R + \frac{60}{4} + \frac{720}{4R} - \frac{120}{4}$ seu $60 - 10R - \frac{60}{4} + \frac{360}{4R}$. Duplum autem rectangulum EG, est $\frac{120}{4}$ $60 - \frac{360}{4R} - 10R + \frac{60}{4} + \frac{360}{4R} - \frac{120}{4}$. Vel $60 - 10R - \frac{60}{4} + \frac{360}{4R}$. Duplum autem rectangulum EG, est $\frac{120}{4}$. Sed ex hypotesi æqualia sunt IC, EG, ob id eorum dupla etiam erunt æqualia, $60 - 10R - \frac{60}{4} + \frac{360}{4R} = \frac{120}{4}$. Addita verò fractione $\frac{360}{4R}$ vtrinq; fiet æquatio $60 - 10R + \frac{360}{4R} = \frac{180}{4}$ Diuisis autem omnibus per 10 fit $6 - 1R + \frac{36}{4R} = \frac{18}{4}$. Atq; adeo $6 - 1R + \frac{9}{R} = 4\frac{1}{2}$. Ductis omnibus in 1 R; fit æquatio $6R - 1Q + 9 = 4\frac{1}{2}R$.

Proinde $6R + 9 = 4\frac{1}{2}R + 1Q$; Et rursus $1\frac{1}{2}R + 9 = 1Q$. Deniq; $1Q - 1\frac{1}{2}R = 9$. Huius autem æquationis radix ita eruetur. Dimidium numeri radicum est $\frac{3}{4}$ quadratum huius est $\frac{9}{16}$ quo addito ad 9, fit $9\frac{9}{16}$ cuius radix quadrata est ℞ $9\frac{9}{16}$ quæ si addatur ad $\frac{3}{4}$ dimidium numeri radicum, fiet ℞ $9\frac{9}{16} + \frac{3}{4}$ Partes autem reliquæ non latebunt.

SCHOLION.

Eandem etiam æquationem essemus consequuti, si nimirum à nobis positum fuisset $\frac{60R + 12Q}{5 + 3R} = 60$. *In pri-*

mo scilicet modo istarum resolutionum; quandoquidem fuisset aequatio $\frac{240R + 48Q}{5 + 3R} = 60$.

Atq; adeo $240R + 48Q = 300 + 48Q = 300$, *proinde* $48Q + 60R = 300$, *factoq; parabolismo; eadem aequatio, vt ibi* $1Q + 1\frac{1}{4}Q = 6$: *consurgeret; quod animaduertisse vsluimus.*

Qua arte duo proposita latera diuidant v. Nota.

Hinc autem perspicuum fit; qua arte duo latera proposita diuidere valeamus; & ne vtamur ijsdem numeris; *Sint* 20; *&* 12; *& oporteat diuidere vtrumq; in tales duas partes nimirum* 12; *in duas tales partes; &* 20; *in duas quoq; huiusmodi partes; quod minor pars numeri* 12; *ad maiorem sit vt differentia partium numeri* 20; *ad maiorem partem eiusdem numeri* 20; *multiplicata verò minori parte ipsius* 12; *in maiorem numeri* 20; *fiat* 60.

Pars maior numeri 12; *esto* $6 + 1R$, *minor erit* $6 - 1R$; *pars autem minor numeri* 12; *ducta in partem maiorem numeri* 20; *tantum facit, quantum differentia partium numeri* 20; *ducta in partem maiorem numeri* 12, *& vtrumq; productum debet efficere* 60; *ob id oportet diuidere* 60, *per* $6 + 1R$; *vt habeatur* $\frac{60}{6 + 1R}$ *pro differentia duarum partium ipsius* 20; *deinde diuidatur idem numerus* 60 *per* $6 - 1R$, *& habebimus* $\frac{60}{6 - 1R}$ *pro parte maiori ipsius* 20; *vt autem minorem partem indagemus, subtrahatur differentia partium numeri* 20; *nimirum* $\frac{60}{6 + 1R}$ *ab ipsa maiori parte* $\frac{68}{6 - 1R}$ *& remanebit* $\frac{120R}{36 - 1Q}$: *hoc autem residuum si addatur* $\frac{60}{6 - 1R}$ *maiori parti numeri* 20; *habebimus* $\frac{360 + 180R}{36 - 1Q}$; *hoc autem aequatur numero* 20; *& extracta radice secundum artem reperiemus* $1R$, *pretium* ℞ $38\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2}$; *atq; adeo partes non latebunt.*

A De

ADMONITIO.

Cæterum superiùs allatum Problema illud est ; quod mihi resoluendum propositum fuit ; Vnusquisq; videbit ex dictis me Quęstioni per modum Zeteseos propositæ satisfecisse; in Algebra verò Speciosa; seu potius in Tractatu de Resolutione, & Compositione Mathematica conspiciet, me idem Problema de parallelogrammo propositum analyticè explicasse, & ipsius analyseos vestigijs obseruatis composuisse ; atq; adeo Geometricè fæliciter illud enodasse. Verùm enim verò in libro, cui titulum fecimus Diuersorum Problematum collectio ; in quo quamplurima sumus Problemata explicaturi ; & similia huic, & longè difficiliora in Artis illustrationem enodabimus. Interim enim hoc, cum alijs, hisce attulimus vt statim Artis præcepta tradita, exemplis quoq; conspicerentur illustrata ; non enim dubium, quin præcepta ipsa longè faciliùs percipiantur, dum praxim reuocata conspiciuntur. Longè tamen iucundius erit Problemata, & numeris enodata, & beneficiò speciosæ Logisticæs resoluta ; repetitisq; ipsius analyseos vestigijs, composita (quando tamen Problematis natura id patitur) atq; Geometricè demonstrata conspicere, quod nos in præcitato loco præstabimus. Quinimo nostras quoq; partes esse putamus, non solum nouæ, vt dictum est, sed etiam veteris, seu numerosę logisticęs sic Problemata Geometrica enodare ; vt constet ea vti nos possemus ad affectionem Geometricam comparandam, relicta demonstrationis cura doctrinæ ex Elementis Euclidis excerptę ; Artem tamen ipsam huiusmodi logisticęs scilicet ad id consequendum in Tractatu de Resolutione, & compositione Mathematica explicabimus; & quidem copiosiùs, quam in nostro Opere hac de re pridem edito præstiterimus. *Nota.*

PROBLEMA DECIMVMQVINTVM.

Data base trianguli, datis etiam excessibus, quibus crura superant perpendicularem ipsius, oportet reperire trianguli latera, & perpendicularem.

Hoc Problema duplicem casum habet, Vel enim perpendicularis cadit intra triangulum ; quo casu oportet compositum ex excessibus minorem esse base, vel cadit extra, quo casu necesse est differentiam excessuum minorem esse basse.

PRIMVS CASVS.

Data sit basis 21, & excessus quo crus maius superat perpendicularem sit datus 8 ; excessus, quo crus minus superat eandem sit 1.

Supponendum differentiam excessuum idem esse, ac diffeferentiam laterum. Differentia ſegmentorum baſis ſit 1 R quamobrem $21 + 1R$, erit duplum ſegmentum maius quapropter ipſum ſegmentum maius erit $10\frac{1}{2} + \frac{1}{2}R$. At verò rectangulum comprehenſum ſub differentia laterum, & eorundē aggregato, æquale eſt illi, quod compræhenditur ſub differentia ſegmentorū baſis, & ipſa baſi; proinde erit, vt 7. differentia laterū ſiue differentia exceſſuū ad 1R, ita 21, aliud puta $\frac{21R}{7}$ adeo vt, aggregatum laterum ſit $\frac{21R}{7}$. huic ſubtrahatur exceſſus, quo latus minus ſuperat perpendicularem; vt fiat reliquum $\frac{21R}{7} - 1$ eſt autem rectangulum ſub exceſſu quo latus maius ſuperat perpendicularem, & ſub aggregato ex latere maiori, & perpendiculari, æquale quadrato ſegmenti maioris, quod eſt $10\frac{1}{2} + \frac{1}{2}R$. Proinde $\frac{168R}{7} - 8$, quod eſt rectangulum ſub $\frac{21R}{7} - 1$; nempe aggregato laterum minus differentia, qua latus minus ſuperat perpendicularem, atq; adeo aggregatum ex latere maiori, & perpendiculari ſub 8, exceſſu, quo latus maius ſuperat perpendicularem, æquabitur $\frac{441}{4} + \frac{1}{4}Q\ 10\frac{1}{2}R$, quadrato ſegmenti maioris; vt conſtat ex multiplicatione; omnibus ductis in 4; fiet $\frac{672R}{7} - 32 = 441 + 1Q + 42R$, & per antitheſin $\frac{672R}{7} - 42R - 1Q = 441 + 32$, hoc eſt 473, ſeu, quòd idem eſt, 96 R − 42 R; hoc eſt

$54R - 1Q = 473$

	473	27
	729	27
27	256	189
16	. .	54
11	16	729

Et

Et extracta radice ſecundum artem, fiet 1 R, valor 11; & eſt differentia ſegmentorum baſis. Si verò fiat vt 7, differentia laterum ad 11. differentia ſegmentorum baſis; ita 21; baſis ad aliud, nempe 33, inoteſcet aggregatum laterum, à quo dempta 7, differentia laterum, remanet 26, cuius dimidium eſt latus minus; nempe 13, maius autem erit 20, nempe 13, plus 7. ſic etiam inoteſcet perpendicularis 12.

Aliter perpendicularis eſto 1 R; latus maius erit 8 + 1 R; latus autem minus erit 1 + 1 R, iſtorum quadrata ſunt 1 + 2 R + 1 Q, & 64 + 16 R + 1 Q, vtrinq; ſublato 1 Q; nempe quadrato perpendicularis, remanebit 1 + 2 R, quadratum ſegmenti minoris, & 64 + 16 R; quadratum ſegmenti maioris; quamobrem ſegmenta ipſa erunt ℞ (1 + 2 R) & ℞ (64 + 16 R) ſi verò inuicem multiplicentur; & producti ſumatur duplum, fiet ℞ (256 + 576 R + 128 Q) addatur hoc ad 1 + 2 R; & 64 + 16 R, quadrata ſegmentorum, vt habeatur 65 + 18 R + ℞ (256 + 576 R + 128 Q) quod æquabitur 441, quadrato nimirum baſis; vtrinq; auferatur 65 + 18 R, fiet æquatio ℞ 256 + 576 R + 128 Q) = 376 — 18 R; ergo etiam quadrata erunt inter ſe æqualia 256 + 576 R + 128 Q = 141376 — 13536 R + 324 Q, & obſeruatis Artis præceptis; fiet 72 R — 1 Q = 720, cuius radix eſt 12. *Aliter idē Problema reſoluitur.*

S E C V N D V S   C A S V S.

Dati ſint exceſſus 3; & 8, data ſit baſis 7; compoſitum ex dupla intercepta, & baſi, dico eſſe 1 R, ergo 1 R + 7, erit duplum compoſiti ex baſe, & intercepta linea vſque ad perpendicularem; quamobrem ſimplum erit $\frac{1}{2}$ R + 3 $\frac{1}{2}$; quoniam autem rectangulum ſub differentia laterum, & compoſito ex lateribus æquale eſt rectangulo ſub baſi, & ſub aggregato ex baſi atq; ex dupla intercepta; proinde erit vt 8 — 3, ſeu, quod idem eſt, vt 5, differentia exceſſuum; atq; adeo differentia laterum; ad 7, baſim ita

1 R, ad

1 R, ad $\frac{7\,R}{4}$ cui si auferatur 3, excessus lateris minoris supra perpendicularem remanebit $\frac{7\,R}{5} - 3$, pro aggregato ex latere maiori, & perpendiculari; est autem rectangulum sub hoc aggregato, & excessu lateris maioris supra perpendicularem; puta 8; æquale quadrato aggregati ex base, & intercepta inter basim, & perpendicularem; proinde $\frac{7\,R}{5} - 3$, ducatur in 8; & fit $\frac{56\,R}{5} - 24$, quod æquale est $\frac{1}{4}$ Q ✠ $\frac{49}{4}$ ✠ $3\frac{1}{2}$ R, ductis omnibus in 4, ad integrandam potestatem, & erit $\frac{224\,R}{5} - 96 = 1\,Q + 49 + 14\,R$ atq; adeo $\frac{224\,R}{5} - 14\,R - 1\,Q = 49 + 96$ hoc est $44\frac{4}{5}\,R - 14\,R$, hoc est $30\frac{4}{5}\,R - 1\,Q = 145$; cuius æquationis radix est 25.

Alias via idem problema resoluitur.

Aliter iisdem positis; nempe 8; 3; pro differentijs sitq; basis 7; vt priùs. Perpendicularis esto 1 R, latus minus erit 3 ✠ 1 R, eius quadratum est 9 ✠ 6 R ✠ 1 Q, à quo dempto 1 Q; quadrato nimirum perpendicularis, remanebit 9 ✠ 6 R; cuius ℞ Q; nempe ℞ (9 ✠ 6 R) erit intercepta linea inter perpendicularem, & angulum trianguli, at verò quadratum ex latere maiori est 64 ✠ 16 R ✠ 1 Q, à quo dempto 1 Q, nempe quadrato perpendicularis, remanebit 64 ✠ 16 R; cuius ℞ Q, est ℞ (64 ✠ 16 R) habebitur aggregatum ex base, & ex recta illa intercepta; si ad ℞ (9 ✠ 6 R) addatur 7; fiet enim ℞ (9 ✠ 6 R) ✠ 7, quod æquabitur ℞ (64 ✠ 16 R) at verò

$$\begin{array}{r}
3 + 1\,R \\
3 + 1\,R \\
\hline
3\,R + 1\,Q \\
9 + 3\,R \\
\hline
9 + 6\,R + 1\,Q
\end{array}$$

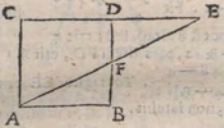
$$\begin{array}{r}
8 + 1\,R \\
8 + 1\,R \\
\hline
8\,R + 1\,Q \\
64 + 8\,R \\
\hline
64 + 16\,R + 1\,Q
\end{array}$$

verò quadratum ex ℞ (9 + 6R) + 7. est ℞ (1764 + 1176R) + 58 + 6R, quod æquabitur 64 + 16R; vtrinque sublatis 58 + 6R fiet æquatio ℞ (1764 † 1176R) = 6 + 10R, atq; adeo 1764 + 1176R = 36 † 120 R † 100Q, & consequenter 1728 † 1056R = 100Q; & fiet 1R, valor 12.

PROBLEMA DECIMVMSEXTVM.

Propositum sit quadratum ABCD, cuius latus sit 2; sitq; protractum latus CD; itaut si à puncto A, ducatur recta, quæ occurrat ipsi CD; in E, protracta; triangulum efformet FDE, æquale quadrato iam dicto. Quæritur quanta sit AE, quanta AF.

Dico BF, esse 1R; ergo DF, erit 2 — 1R; quoniam autem angulus ABF, in triangulo ABF, rectus est, atq; adeo æqualis angulo FDE; a 15 primi angulus autem AFB; æqualis [a] est ipsi DFE, 32. primi vtpotè ad verticem; reliquus [b] erit æqualis reliquo; sunt igitur triangula æquiangula, atq; adeo [c] habebunt latera proportionalia; quæ circum æquales angulos; quamobrem, vt 1R, ad 2; scilicet, vt FB; ad BA, ita erit FD nimirum 2 — 1R, ad DE, quare fiat, vt 1R, ad 2; ita 2 — 1R, ad aliud, illud erit $\frac{4 - 2R}{1R}$; & quia triangulum FDE; est dimidium quadrati, cuius latus est 2, quadratum est 4, ob id rectangulum c. 4. sexti



BF, 1R
AB, 2
FD, 2 — 1R
DE, 4 — 2R

1R

8 — 8R † 2Q = 8R
8 + 2Q = 16R
8 = 16R — 2Q
8R — 1Q = 4
4 — ℞ 12, 1R valor

sub

sub F D, & D E, erit æquale 8; proinde rectangulum sub 3 $-$ 1 R, & $\frac{4 - 2 R}{1 R}$ æquale debet esse 8, & facta ordinatione æquationis secundum artem; repetietur 1 R, valor 4 $-$ ℞ 12. Itaq; illi quatuor termini sunt.

4 $-$ ℞ 12, 2; ℞ 12 $-$ 2, $\frac{℞ 48 - 4}{5 - ℞ 12}$.

Rectangulum autem sub ℞ 12 $-$ 2, & $\frac{℞ 48 - 4}{4 - ℞ 12}$ debet esse æquale 8, & ita est; propterea quod, si ducamus $\frac{℞ 48 - 4}{4 - ℞ 12}$ in ℞ 12 $-$ 2. Fit $\frac{32 - ℞ 768}{4 - ℞ 12}$ hoc est 8; Itaq; F B; erit 4 $-$ ℞ 12, pars altera F D, erit ℞ 12 $-$ 2, at verò D E, erit $\frac{℞ 48 - 4}{4 - ℞ 12}$. Tota igitur C E, erit 2 † $\frac{℞ 48 - 4}{4 - ℞ 12}$ Vnde A E, non latebit.

℞ 48 $-$ 4
℞ 12 $-$ 2
$-$ ℞ 192 ✢ 8
24 $-$ ℞ 192
32 $-$ ℞ 768
4 $-$ R 12

PROBLEMA DECIMVMSEPTIMVM.

Est triangulum cuius anguli ad basim dupli sunt anguli ad verticem; eiusq; superficies est 10; quaeruntur latera.

Reperiamus triangulum aliquod prædictas habens conditiones, sitq; basis eius 2; reperiemus autem latus hoc modo, supponendo illud esse 1 R † 2, diuidendum extrema ac media ratione; ducatur nimirum 2 † 1 R, in 1 R: & oritur 2 R † 1 Q, æquabitur quadrato partis maioris 2; nimirum 4; si enim basis est 2; erit etiam pars maior illius lateris 2; huius autem æquationis radix est ℞ 5 † 1. Itaque pars minor erit ℞ 5 $-$ 1, totum latus ℞ 5 † 1, & pars maior 2, sumatur autem quadratum ex ℞ 5 ✢ 1, illud erit 6 † ℞ 20.

† ℞ 20, à quo si dematur 1, quadratum ex dimidio basis orietur 5 † ℞ 20, cuius ℞ Q est ℞ Q (5 † ℞ 20) hoc autem latus est quantitas perpendicularis istius trianguli. Nunc oportet indagemus Triangulum, cuius superficies est 10, dimidium basis istius debet esse ad suam perpẽdicularem, vt 1, dimidium basis iam inuenti trianguli, ad perpendicularem suam ℞ (5 † ℞ 20) si itaq. dicamus Vt est, 1, ad ℞ Q (5 † ℞ 20) ita sit vnum radicis, ad aliud; illud erit ℞ Q (5 † ℞ 20) Radicis, quæ si inuicem multiplicentur, producent ℞ Q (5 † ℞ 20) quadrati, quod est rectangulum factum sub dimidio basis, & sub perpendiculari, æquale quidem ipsi triangulo, nimirum 10, quamobrem eorum quadrata, scilicet 5 † ℞ 20 æquabitur 100. Diuisis 00, per 5 † ℞ 20, quod fit ducendo 5 † ℞ 20 in 5 — ℞ 20 residuum, & fit 5 diuisor, ducantur 100, in idem 5 — ℞ 20, & fit 500 — ℞ 2000000, quo diuiso per 5, fit ℞ QQ (100 — ℞ 8000) & est 1 R pretium, quo ducto in 2, fit ℞ QQ (1600 — ℞ 2048000) reperiemusque latus esse ℞ QQ (℞ 2 8800000 † 800 — ℞ 37888000) perpendicularis autem reperietur esse ℞ QQ (℞ 20000000 † 500 — ℞ 16200000.)

A C ; 2
A D ; 1
A B ℞ 5 † 1
A D ℞ (5 † ℞ 20)

℞ QQ (℞ 20000000 † 500 — ℞ 16200000)

℞ QQ (100 — ℞ 80000)

℞ 1600000000000 — ℞ 2000000000000 † 1296000000000

4 0 0 0 0 0   3 6 0 0 0 0

℞ 20000000000000 † 50000 — ℞ 1620000000000

Productum est 10.

Si fiat additio obseruatis preceptis signorũ † & —, reperiemus

riemus ℞ 1 6 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0; de medio tollendas esse; at verò si ad 3 6 0000, addantur 50000, fit summa 410000, à quo si demantur 4 00000, remanebit 10000, cuius radix quadrato-quadrata est 10. Habetur autem bis ℞ Q 1620-00000000; quoniam ex ductu ℞ Q 2 0000000, in ℞8000; fit productum ℞16200000000; & afficitur signo —; quoniam † in — facit —. At verò ex ductu ℞ 20000000, in 100, fit ℞ 2 00000000000, & afficitur nota ✠ si verò ducatur ℞ 8000, in 500; fit ℞ 2000000000, horum summa est ℞ 6200000000, nam communis diuisor est ℞ 2000-000000; quæ diuidens se facit quotientem ℞ 1, nempe 1; & diuidens ℞ 2 000000000, facit quotientem ℞ 100, nempe 1 0, à quo dempto 1, fit residuum 9, ducatur in ℞ 2000000000, quod assequemur reducendo 9, ad naturam radicis; nimirum quadratè multiplicando; & fit productum ℞ 162000000000, afficiturq; nota †, cum altera afficeretur nota —. Quamobrem fit illud productum, vti dicebamus 1 0.

S C H O L I O N.

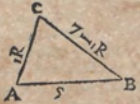
EX huius Problematis resolutione, multorum quoq; resolutio potest inotescere, vt suo loco manifestum fiet, scilicet in nostro opere, in quo quamplurima Problemata resoluenda suscepimus. Cæterum hoc problema resoluendum nobis propositum fuit, nec apud aliquem auctorem illud enodatum vidimus, id autem animaduertisse operæ pretium iudicamus, ne si fortè lector viderit ab aliquo illi satisfactum fuisse, ab eo nos hanc resolutionem emendicasse arbitretur. Quod autem de hypothesi superficiei 1 0, pronunciauimus, cuicumq; numero quidem aptari poterit.

PROBLEMA DECIMVM OCTAVVM.

DAta summa laterum alicuius trianguli, dataq; ratione summæ quadratorum à lateribus ad eiusdem trianguli superficiem reperire latera.

Da-

Datum sit triangulum ABC, cuius latera simul conficiant 12, ratio verò quadratorum simul sumptorum à lateribus ad superficiem trianguli sit, vt 25, ad 3. Latus A B, sit 5, summa reliquorum erit 7, dicamus vnum ex ipsis esse 1 R, puta A C, aliud, nempe B C, erit 7 — 1 R, sumatur dimidium aggregati ex lateribus, nempe 6, & ab hoc dimidio subtrahantur singula latera, nimirum 1 R, 5, 7 — 1 R fient residua hæc, puta 6 — 1 R, 1, 1 R — 1, ducatur 6 — 1 R, in 1, & fit 6 — 1 R, hoc productum ducatur in 1 R — 1, & fit 7 R — 6 — 1 Q, ducatur in idem dimidium 6, & fit 42 R — 36 — 6 Q, huius radix quadrata, videlicet ℞ (42 R — 36 — 6 Q) est trianguli superficies. Summa verò quadratorum ex lateribus est 74 — 14 R † 2 Q, cuius quadratum est 5476 — 2072 R † 492 Q — 56 C † 4 QQ, &



6	6	6
1 R	5	7 — 1R
6 — 1 R	1	1 R — 1

1
6 — 1 R

1 R — 1
— 6 ✠ 1 R
6R — 1 Q
7 R — 6 — 1 Q

quadratum ex ℞ (42 R — 36 — 6 Q) est 42 R — 36 — 6 Q; vt verò est 3, ad 25, ita debet esse ℞ (42 R — 36 — 6 Q) ad 74 — 14 R ✠ 2 Q. ergo vt est 9, ad 625, ita debet esse 42R — 36 — 6 Q, ad 5476 — 2072 R † 492 Q — 56 C † 4 QQ; quamobrem productum sub extremis, æquale est producto sub medijs; itaq; erit æquatio hoc modo 26250 R — 22500 — 3750 Q ⊏⊐ 49284 — 18648 R † 4428 Q — 504 C † 36 QQ, & per antithesin fiet hæc æquatio, puta 44898 R † 504 C ⊏⊐ 71784 † 8178 Q † 36 QQ, atq; demum 7483 R † 84 C — 1363 Q — 6 QQ ⊏⊐ 11964, factoq;

7 — 1 R
7 — 1 R

— 7 R † 1 Q
49 — 7 R

49 — 14 R † 1 Q
25

74 — 14 R † 1 Q
1 Q

74 — 14 R † 2 Q
74 — 14 R † 2 Q

148 Q — 28 C † 4 QQ
— 1036 R † 196 Q — 28 C
5476 — 1036 R † 148 Q

5476 — 2072 R † 492 Q — 56 C † 4 QQ

parabolismo fiet æquatio huiusmodi $\frac{7483\,R}{6}$ † $\frac{84\,C}{6}$ — $\frac{1363\,Q}{6}$ — 1 QQ ⊐ $\frac{11964}{6}$, & per Isomoeriam reducetur ex præceptis traditis suo loco, ad hanc æquationem, nimirum 269388 R † 84 C — 1 QQ ⊐ 2584224, cuius radix est 18, & quia (vt nos cap. de Parabolismo docuimus) hæc noua radix diuidi debet per communem illum diuisorem, siue per numerum elatioris potestatis, qui numerus cum sit 6, instituta diuisione, fiet quotiens 3, quâobrem Radix quæsita superioris æquationis 748R † 84C — 1363Q — 6QQ ⊐ 11964, erit 3, cæterum huius æquationis 298388R † 84C — 8178Q — 1 QQ ⊐ 2584224, reperitur 18, vti dicebam arte suo suo loco superiùs tradita,

&ad

&c ad eum modum, quem vnicuiq; licet hic intueri. Neglexímus autem methodum Vietæam, vt pote nimis longam, sed nostra hac usi sumus, quæ compendiosior est; eadem hæc autem adhiberi potest in omnibus huius generis Problematibus, in quorum scilicet explicationibus huiusmodi æquationes occurrunt; æquationes enim, in quibus dignitates ad altiores gradus ascendunt, non dissimili artificio, possunt explicari; quemadmodum à nobis planum fiet;

$$269388R + 84C - 8178Q - 1QQ = 2584224 \quad (1 \cdot 8)$$

Qvadrato quadratum primæ figuræ adde.	1
Ex Aggregato.	2594
Subtrahe cubum primæ figuræ ductum in numerum Cuborum.	84
A residuum.	25102
Adde quadratum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	8178
Ab aggregato annexa sequente figura.	332802
Subtrahe primam figuram ductam in numerum Radicum.	269388
Ad residuum Inuenta secunda figura.	63414
Adde quadruplum cubum primæ ductum in secundam.	32
Ad aggregatum.	66614
Adde sextuplum quadrati primæ figuræ ductum in secundam.	384
Ad aggregatum.	79454
Adde Quadruplum primæ figuræ ductum in cubum secundæ.	2048
Adde aggregatum.	725084
Adde quadrato-quadratum secundæ figuræ.	4096
Ab aggregato.	729130
Subtrahe numerum factum à triplo quadrati primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & secunda figura.	2016
A residuo.	527530
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ ducto in numerum Cuborum, & à quadrato secundæ figuræ.	161280
A residuo subtrahe cubum ex secunda figura ductum in numerum cuborum.	366240
	43008
Ad residuum.	323238
Adde numerum à producto dupli primæ & secundæ figuræ in numerum Quadratorum.	1308480
Ad aggregatum.	1631712
Adde numerum factum à quadrato secundæ figuræ ducto in numerum Quadratorum.	523392
	2155104
A residuo.	2155104
Subtrahe numerum factum à secunda figura ducta in numerum Radicum; & nihil remanebit.	0 0

Superius igitur positæ æquationis Radix quadrata est 18; cæterum secunda figura 8; reperietur parato diuisore ad eum modum, quò superius insinuauimus; diuisor enim debet esse talis, vt instituta diuisione fiat quotiens, adeo vt additis addendis & subtractis subtrahendis nihil remaneat; reperietur autem, vti dicebamus, diuisor, sine magno labore ob-

locum,

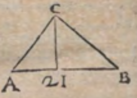
seruatis ijs, quæ nos superiùs explicimus.

Ex his autem quæ nos in medium attulimus perspicuum est istarum æquationum explicationem non inutilem esse, quasi nimium nullius momenti in ijs, quæ visu venire solent extremari debeant, quemadmodum nonnullos insulsè loquentes superpidis audiuimus; sed longè clarius earundem æquationum vtilitas constabit, vt opinor, cum nos Opus illud, in quo multissima Problemata resoluimus in studiosorum gratiam Typis committemus, quod breui, Deo fauente, Beatissimaq; Virgine opitulante futurum esse speramus.

PROBLEMA DECIMVMNONVM.

Data base trianguli, dataq; ratione summæ quadratorum à lateribus, ad superficiem trianguli reperire latera.

Daum sit triangulum ABC; cuius basis AB, sit 21; ratio verò quadratorum à lateribus ad superficiem trianguli, sit vt 569, ad 126.



Dico perpendicularem esse 1R, quæ si ducatur in 21, fit 21R, & erit 21R ⊏ 126. Itaq; superficies erit 126, & perpendicularis dimidium 6; atq; adeo ipsa perpẽdicularis in tota erit 12, modo. Dico vnum ex segmentis basis esse 1R; aliud erit 21—1R; quadratum illius est 1Q; cui addito 144; quadrato perpendicularis, fit 1Q✠144, cuius ℞Q, nempe ℞(1Q✠144) erit latus vnum; aliud erit ℞(585—42R✠2Q) nam quadratum ex 21—1R, est 585—42R✠1Q cui addito 144 quadrato perpendicularis, fit 585—42R✠1Q; cuius latus quadratum

21—1R
21—1R
—21R✠1Q
441—21R
441—42R✠1Q
144
585—42R✠1Q
℞(585—42R✠1Q)
℞(1Q✠144)
585—42R✠1Q
144
729—42R✠1Q
1Q

tum

tum est, vti dicebam ℞(585—42R+2Q); Summa quadratorum è lateribus erit 729—42 R+2Q; quę ęquabitur 569, & per antithesin fiet æquatio 729+2Q = 569+42R, & rursus 160+2Q = 42R; instituto parabolismo. Fit æquatio 21R1Q = 80; cuius radix quadrata est 5. Itaq; segmentum vnum erit 5; aliud erit 16; at verò si 144, quadratum perpendicularis addatur, ad 25; quadratum ex 5; fiet 169, cuius ℞ est 13; si idem 144, addatur ad 256, fit 400; cuius ℞ est 20; itaq; latus vnum erit 13; aliud verò 20.

729—42R+2Q = 569
42R
———————
729+2Q = 569+42R
569
———————
160+2Q = 42R

42R—2Q = 160
21R—1Q = 80
$10\frac{1}{2}$
$10\frac{1}{2}$
———
$110\frac{1}{4}$
80
———
$30\frac{1}{4}$
121
———
4 | $10\frac{1}{2}$
11 | $5\frac{1}{2}$
——— | ———
2 | 5. 1R valor.

PROBLEMA VIGESIMVM.

Cognitis lateribus alicuius trianguli, latus in eo inscriptibilis quadrati cognoscere.

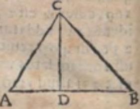
Datum sit triangulum, cuius latera sint 13, 20, 21. oporteat reperire &c. Reperiatur perpendicularis, quæ erit 12; & segmenta basis erunt 16, & 5, Excessus perpendicularis supra latus quadrati inscriptibilis esto 1R; ergo latus ipsum erit 12—1R, vt autem est 12, perpendicularis ad segmentum vnum basis, ita excessus ille, ad segmentum lateris quadrati, quod illi segmento basis homologum est; (si enim in triangulo describatur quadratum, certè perpendicularis secabit latera ipsius) ergo illud segmentum lateris

ris erit $\frac{16 R}{12}$ & vt eadem perpendicularis ad aliud segmentum basis; ita idem excessus ad segmentum alterum lateris quadrati; erit igitur $\frac{5 R}{12}$ quamobrem $\frac{16 R}{12} + \frac{5 R}{12}$ $=$ 12 — 1 R, & per antithesin erit demum æquatio 33 R $=$ 144: quapropter 1 R, pretium erit $4\frac{12}{33}$ itaque latus quadrati erit $7\frac{21}{33}$ siue $7\frac{7}{11}$ &c.

PROBLEMA VIGESIMVMPRIMVM.

Triangulum reperire æquale dato triangulo, eiusdem ambitus, siue perimetri, & eiusdem altitudinis, ita tamen vt perimetrum ad perimetrum habeat datam rationem.

Datum sit triangulum ABC, cuius latus A B, siue basis sit 21, latus AC, sit 13, latus autem BC, sit 20, perpendicularis CD, erit, 12, segmenta erunt AD, 5, & DB 16, superficies autem 126, ratio verò data sit vt 1, ad 4, nempe perimetri trianguli A B C, ad trianguli quæsiti perimetrum.



Sit basis quæsiti trianguli 21, Ambitus trianguli ABC, est 54, fiat vt 1, ad 4, ita 54, ad aliud puta ad 256, igitur perimetrum quæsiti trianguli erit 256, à quo subtracta basi 21, remanebit 195, Dicamus igitur latus vnum esse 1 R, latus alterum erit 195 — 1 R, dimidium ipsius perimetri erit 108, ab hoc autem dimidio subtrahatur 21, nempe basis remanebit 87, ducatur 108, in 87, & fit 9396, hoc autem multiplicetur per 108 — 1 R, nempe per dimidium summæ laterum minus latere illo quod ponebatur 1 R, & fiet productum 1832220R — 9396 Q — 882848 16 hoc autem æquabitur 15876, quadrato ex 126, nimirum ex superficie trianguli, quapropter per anti-

the-

thesin fiet æquatio 1832220R — 9396Q = 88300692. Instituto parabolismo fiet ęquatio 195R — 1Q = 9397 $\frac{180}{261}$ seu $\frac{20}{29}$ obseruatis autem artis præceptis, reperiemus latera esse 97 $\frac{1}{2}$ — ℞ 108 $\frac{65}{116}$, & 97 $\frac{1}{2}$ + ℞ 108 $\frac{65}{116}$.

S C H O L I O N.

ACcepimus veluti certissimum Si fuerit triangulum, cuius latera e. g. sint 10. & 17; basis autem 21; differentia inter 24; dimidium perimetri, & basim 21, hac inquam differentia est 3; dimidium perimetri est 24; multiplicetur 24; per 3; fit 72; quo ducto in 24; dimidium supradictum fit 1728, multiplicetur hic numerus per 3; differentiam supradictam fit 5184; huic addatur 7056, quadratum ex 84, superficie trianguli; & fit 12240, quo diuiso per 72; superius multiplicatione habitum &c. fit quotiens 170, numerus cui aequalis est ille, qui fit ex multiplicatione unius lateris in summam laterum minus quadrato lateris praedicti; Vt si latus 10; ducatur in 27. summam laterum, producitur 270; a quo si subtrahatur 100; quadratum eiusdem lateris, remanet 170; vel si latus est 17; ducatur in 27; fit 459; a quo si dematur 289; quadratum eiusdem lateris remanet 170. Id quod etiam declarari potest in hoc alio triangulo, cuius basis est 140, latera verò sunt 130; 150, perimetrum erit 420; superficies autem, (cum perpendicularis sit 120) erit 8400; differentia verò qua basis superatur a dimidio perimetri est 70, nam basis est 140; & perimetri dimidium est 210; facta subtractione illius ab isto remanet 70; ducatur 210, in 70. fit 14700; quo ducto in 210, Fit 3087000; quo multiplicato per 70, fit 216090000; cui addito 70560000, quadrato ex 8400, superficie trianguli fit 286650000; Si verò ducatur 130; latus unum trianguli in 280, summam laterum fit 36400; quadratum ex 130, est 16900; quo subtracto ex 36400; remanet 19500 si numerus ille 216090000, diuidatur per 14700; Fit quotiens 16900, quemadmodum si 9500 ducatur in 14700, producitur 286650000. &c. In idem coincidit iste processus, cum illo, quo superius usi sumus ad Problema 18. Dico igitur latus unum esse 1 R, aliud erit 195 — 1R, dimidium perimetri est 108, a quo subtrahatur 1R, remanet 108 — 1R, & ex 108, subtrahatur 21; remanet 87; subtrahatur 195; remanet R — 87, ducatur 108 — 1R in 87; fit 9396 — 87R; hoc autem productum multiplicetur per 1R — 87, & producitur 16965R — 817452 — 87Q, quod duci debet in 108, ut producatur 1832220R — 88284816 — 9396Q, cuius ℞ Q; nempe ℞ (1832220R — 88284816 — 9396 Q) aequauitur 126, superficies trianguli; quamobrem eorum quadrata aequalia erunt nimirum 1832220R — 88284816 — 9396Q = 15876; & per antithesim fiet 1832220R — 9396Q = 88300692, ut priùs dictum est.

L E M M A P R I M V M.

QVadratum aggregati cuborum aequale est quadrato differentiae eorundem, plus quadrupl o cubo rectanguli sub lateribus.

Sint latera 2, & 5; horum cubi sunt 8, & 125; quorum summa 133; cuius quadratum est 17689; at vero differentia eorundem cuborum est 117; cuius quadratum est 13689; sed differentia inter 17689, & 13689, est 4000; nempe quadruplus cubus a rectangulo sub lateribus.

Sint latera A, & B, quadratum ex AC † BC, est ACC † 2 AC, in BC † BCC; quadratum ex AC — BC, est ACC — 2 AC in BC † BCC; ergò differentia quadratorum ex AC † BC, & ex AC — BC erit AC in BC, quater. quod oportebat ostendere. &c.

LEMMA SECVNDVM.

CVbus aggregati laterum minus triplo solido sub aggregato laterum in rectangulum sub lateribus est æqualis aggregato cuborum à lateribus.

Hoc Lemma eadem facilitate, ac superiùs declarabitur, & demonstrabitur. Sint latera 2, & 5, horum aggregatum est 7, cuius cubus est 343, à quo si dematur 2 6, nimirum triplum solidi sub aggregato laterum in rectangulum sub lateribus remanebit 133. nempe aggregatum cuborum à lateribus.

Sint latera A, & B, cubus ab A † B; est AC † 3 AQ in B † 3 A in BQ † BC; est verò solidum sub rectangulo 3A in B, & A † B; idem quod 3 AQ in B † 3 A, in BQ, quamobrem. &c.

PROBLEMA VIGESIMVMSECVNDVM.

ESt notum rectangulum sub lateribus, & aggregatum cuborum; quæruntur latera.

Notum sit rectangulum sub lateribus 10; aggregatum autem cuborum à lateribus sit 133; oporteat reperire latera; Summa laterum esto 1 R, per secundum Lemma erit 1C — 30R ═ 133; at verò quadratum ex 133; est 17689; triplum rectangulum erat 30, rectangulum est 10; cuius cubus est 1000; quadruplus cubus est 4000; horum autem differentia est 13689, & per primum Lemma 13689; erit quadratum differentiæ cuborum à lateribus; at verò ℞ Q; numeri 13689, est 117; ob id 117; æquabitur differentiæ cuborum; quoniam autem 133, cum 117, faciunt 250, huius dimidium est 125; proinde 125, æquabitur cubo lateris maioris; ob id latus maius erit 5; & rursus quia 133, differt à 117, per 16, cuius dimidium est 8, erit 8, cubus lateris minoris, quo fit vt latus minus sit 2, & satisfaciunt. Problemati.

SCHO-

SCHOLION.

Accepimus autem superius, quòd euidentissimum est nempe si 133, addatur ad 117; fit 250; cuius dimidium est 125; cuius latus cubicum 5; erit latus maius. Nec immeritò; Sint namque duo numeri; & ad eorum aggregatum addatur eorundem differentia; aggregati vero summatur dimidium, illud erit æquale numero maiori Quamobrem si Sint duo numeri cubi 64, & 1728; horum aggregatum est 1792; eorundem differentia est 1664; qua illi addita fit 3456; cuius dimidium est 1728; numerus maior cubus è duobus. Et si differentia numerorum subtrahatur ab eorumrundem aggregato; residuum vero bifariam diuidatur, habetur numerus minor, quamobrem in superiori exemplo numeri cubi sunt 1728; & 64, horum aggregatum est 1792; à quo si auferatur 1664; differentia cuborum remanet 128; cuius dimidium 64, est numerus cubus minor; Hæc autem de quibuscunque verificantur.

Hoc autem ex eo deducitur, quia si sit recta quædam linea, vel aliquis numerus, in duas partes diuisus inæquales, tota linea, seu totus numerus, plus differentia partium: duplus est maioris partis. Et si differentia partium subtrahatur ab earundem aggregato, residuum est duplum partis minoris.

LEMMA.

Cubus differentia laterum plus triplo solido sub differentia laterum, in rectangulum sub lateribus est æqualis differentiæ cuborum à lateribus.

Sint latera vt supra; nempe 12, & 8, differentia ipsorum est 4; huius cubus
est 64; cui addito triplo solido sub eadem differentia in rectangulum sub late-
ribus, nempe addito 1152, fit 1216; nimirum differentia cuborum à lateribus.
Sint latera A, & B. Cubus ab A — B, est A C — 3 A Q, in B + 3 A in B Q — B
C, At solidum illud triplum sub differentia laterum in rectangulum sub late-
ribus est 3 A Q, in B — 3 A in B Q, proinde horum summa erit A C — B C.

PROBLEMA VIGESIMVMTERTIVM.

Dato rectangulo sub lateribus, eorumq; differentia reperire latera.

Datum sit idem rectangulum 10, dataq; sit cuborum differentia 117, oportet reperire latera. differentia laterum esto 1 R; & per secundum Lemma antecedenti Problemati præpositum erit 1C ꝑ 30R, ęquale 117, quadratum autem ex 117, est 13689; & rectangulum sub lateribus est 10; cuius triplum erat 30; cubus verò ex 10, est 1000; huius quadruplum est 4000; est verò 17689, summa ex 13689, & 4000, & eius ℞ Q, est 133; & 133, æquatur cubo lateris maioris plus cubo minoris sed 133, plus 117, siue summa ex 133, & 117, est 250, cuius dimidium est 125, hic erit cubus maior; atq; adeo 5, erit latus maius. Sed 133, mulctatus numero 117, est 16; æqualis, huius autem dimidium est 8, proinde 8; erit cubus minor atq; adeo minus latus erit 2.

PROBLEMA VIGESIMVM QVARTVM.

Est triangulum cuius basis est nota, & nota est summa laterum: est etiam nota proportio quadratorum à lateribus, quæruntur latera.

Trianguli basis sit 5; summa laterum nota est 7; proportio verò quadratorum à lateribus sit, vt 9, ad 16, Dico latus vnum esse 1 R; aliud erit 7 — 1 R, quadratum illius est 1 Q. istius verò est 49 — 14R ✠ 1Q, vt verò est 9, ad 16, ita debet esse 1Q, ad 49 — 14R ✠ 1Q; quamobrem fiet æquatio 16Q = 441 — 126 R ✠ 9Q; & per antithesin fiet 16Q ✠ 126R = 441 ✠ 9Q, & rursus 7Q ✠ 126R = 441. Facto verò parabolismo fiet æquatio 1Q ✠ 18 R = 63, huius autem æquationis radix est 3.

Sit basis 10; laterum summa sit 12; proposito quadrati lateris minoris, ad quadratum lateris maioris sit vt 1, ad 4, latus vnum esto 1 R; aliud erit 12 — 1R, quadratum illius est 1 Q, istius verò 144—24R ✠ 1Q vt autem est 1, ad 4, ita debet esse 1 Q, ad 144—24R ✠ 1Q, ob id erit æquatio 4Q = 144—24 R ✠ 1 Q, & per antithesin reiteratam

fiet

fiet 3Q + 24 R = 144; inſtituto paraboliſmo fiet æquatio 1Q + 8R = 48. huius autem æquationis radix eſt 4, itaq; latus poſitum 1 R, erit 4; poſitum 12—1R, erit 8.&c.

PROBLEMA VIGESIMVM QVINTVM.

Est triangulum, cuius perimetrum eſt notum; eſt etiam nota proportio, quam habet differentia quadratorum à cruribus, ad ſuperficiem trianguli, iniunctum ſit reperire latera.

Perimetrum notum ſit 12; & proportio, quam habet differentia quadratorum à cruribus ad ſuperficiem trianguli ſit vt 7; ad 6; quęruntur latera. Supponamus latus vnū, puta baſim eſſe 5, ex duobus autem reliquis vnum eſto 1 R, aliud erit 7—1R, quadratum illius eſt 1Q; iſtius autem eſt 49—14R + 1Q, horum differentia eſt 49—14R; At verò ſuperficies trianguli eſt ℞ (42R—36—6Q) vt igitur eſt 7, ad 6; ita debet eſſe 49—14R, ad ℞ (42R—36—Q) quamobrem etiam, vt 49, ad 63, ita debet eſſe 2401—1372R + 196Q; nimirum quadratum è 49—14R; ad 42R—36—6Qm, quadratu ſuperficiei. Proinde fiet æquatio 2058R—1764—294Q = 86436—49392R + 7056Q, nempe productum ſub extremis æquale erit producto ſub medijs; & per antitheſin fiet æquatio talis 51450R—7350Q = 88200; facto verò paraboliſmo; fiet æquatio huiuſmodi; nempè 7R—1Q = 21.

Huius autem æquationis radix eſt 3.

Rurſus ſit notum perimetrum 48; & proportio, vt 189, ad 84 ſupponamus baſim eſſe 21; Latus vnum eſto 1 R; aliud erit 27—1R, quadratum illius eſt 1Q; iſtius verò 729—54R + Q; horum differentia eſt 729—54R; eſt autem trianguli ſuperficies ℞ (1944R—5184—72Q) Proinde eorum quadrata etiam proportionalia erunt. 2.Hypoth.

Vt 35721, ad 7056; Ita 531441—78732R + 2196Q; ad 1944R—5184—72Q; quamobrem productum ſub extremis æquabitur producto ſub medijs; obſeruatis artis præceptis fiet 1 R, pretium 10.

PRO-

PROBLEMA VIGESIMVMSEXTVM.

EST *triangulum cuius perimetrum eſt notum, item nota eſt eſt proportio, quam habet rectangulum ſub cruribus, ad ſuperficiem trianguli, quęruntur latera; ſuppoſita notitia baſis.*

Datum ſit perimetrum 12; ratio verò data ſit, vt 2; ad 1; latus vnum eſto 1R, aliud erit 7—1R, (ſi baſim conſtituamus 5;) rectangulum ſub cruribus eſt 7R—1Q, quod ad ℞(42R—36—6Q) debet eſſe, vt 2, ad 1; proinde horum quadrata proportionalia erunt; nempe 4; 1; 49Q—14C+1QQ; & 42R—36—6Q, ergo productum ſub extremis æquabitur producto ſub medijs, itaq; 49Q—14C+1QQ = 168R—144—24Q, & per antitheſin repetitam fiet æquatio huiuſmodi 168R+14C—73Q—1QQ = 144; Huius porrò æquationis radix eſt 3.

Numero abſoluto.	144
Quadrato-quadratum radicis, puta numeri 3, adde.	81
Ad aggregatum.	225
Adde numerum factum à radice in numerum Quadratorum.	657
Ab aggregato.	882
Subtrahe numerum factum à cubo radicis in numerum Cuborum.	378
A reſiduo.	504
Subtrahe numerum factum à quadrato radicis in numerum Quadratorum.	504
Nihil remanet.	0 0

2. *Hypoth.* Sit notum perimetrum 48, & proportio rectanguli ſub cruribus, ad ſuperficiem trianguli vt 85, ad 42.

Sit baſis 21; dicamus autem vnum ex cruribus eſſe 1R; aliud erit 27—1R; Rectangulum ſub his eſt 27R—1Q, & vt 85, ad 42; ita eſſe debebit 27R—1Q, ad ℞(1944R—51.84—72Q) Quandoquidem huius trianguli ſuperficies eſt ℞(1944R—5184—72Q) Proinde quadrata erunt proportionalia; itaq; vt 7225, ad 1764; ita erit 729Q—54C+1QQ, ad 1944R—5184—72Q. Ob id productum ſub extremis æquabitur producto ſub medijs; proinde fiet ęquatio 1285956Q—95256C+1764QQ = 14045400R—37454400—520200Q, & per Antitheſin fiet æquatio hoc

modo

modo 1806156Q—95256C + 1764QQ = 1404540R—37454400, & rursus fiet 1806156Q + 1764QQ = 14045-40R—37454400 + 95256C, & rursus 1806156Q + 37454-400 + 1764QQ = 1404540R + 95256C, rursus fiet æquatio demum 14045400R + 95256C—1806156Q—1764QQ = 37454400. Instituto parabolismo; fiet

$$\frac{14045400R}{1764} + \frac{95256C}{1764} - \frac{1806156Q}{1764} - 1QQ = \frac{37454400}{1764}$$

, & per Isomoeriam habebitur æquatio integra; hoc modo. 437050140998400R + 95256C—3186059840Q—QQ = 205588 90552473600; Huius æquationis radix erit 17640; qua diuisa per 1764, numerum elatioris potestatis, fiet quotiens, & Radix superioris æquationis ante celebratam Isomoeriam 10, &c.

Cæterum æquationē illam per Isomoeriam ad hanc reduci patet; cum enim R, distet à QQ, per C; ob id cubicè multiplicetur 1764, & producetur 5489031744, hic autem numerus si ducatur in 14045400, numerum radicum, producitur 77095646457177600; quo diuiso per 1764; fit quotiens 43705014998400; & numerus radicum; quoniam autem C, distat à QQ, per R, ob id ducatur 95256, in 1764, & producto diuiso per 1764, remanet idem numerus 95256, deinde quia Q, distat à QQ, per quadratum ducatur 1764, in se quadraticè, vt fiat 3111696, qui ductus in 1806156, producit 5620208400576; quo diuiso per 1764, fit quotiens 3186059184, & est numerus quadratorum. Deinde quia numerus distat à QQ, per QQ, proinde multiplicetur 1764, quadrato-quadraticè, vt producatur 9682651996416, qui numerus ductus in 3745-4400, numerum absolutum, facit productum 362657920-934563430400, quo diuiso per 1764, fit quotiens 2055-88390552473600, pro numero absoluto.

PRO-

PROBLEMA VIGESIMVM SEPTIMVM.

Est triangulum rectangulum, cuius basis est nota; est etiam nota proportio, quam habet excessus quadratorum à cruribus supra quadrata segmentorum basis, ad differentiam quadratorum segmentorum eiusdem iniunctum sit reperire latera.

Basis nota sit 25, proportio verò vt 288, ad 175. Segmentum vnum basis est o 1R, aliud erit 25 — 1R, horum quadrata sunt 1Q, & 625—50R—1Q, differentia istorum quadratorum est 625—50R, excessus autem quadratorum à cruribus circa rectum, supra quadrata segmentorum basis est duplum rectangulum sub ipsis segmentis, proinde 50R—2Q, erit iste excessus, vt autem est 175, ad 288, ita 625—50R, ad 50R—2Q, productum igitur sub extremis æquabitur producto sub medijs, ob id 180000— 14400R, æquabitur 8750R—350Q, & per antithesin fiet 180000 = 23150R — 350Q, atque adeo fiet æquatio instituto parabolismo $\frac{23150R}{350} - 1Q = \frac{180000}{350}$ per Isomoeriam reducetur ad hanc 23150R—1Q = 63000000, huius autem æquationis radix est 3150; qua diuisa per 350, numerum altioris potestatis fit quotiens 9, & radix superioris æquationis, vt patet.

Dimidium numeri radicum est 11575, cuius quadratum est 133980625, à quo si dematur 63000000, remanet 70980625, huius autem latus quadratum est 8425, quod si dematur ex 11575, remanet 3150, pro 1R, pretio. Hic autem numerus Problemati satisfacit, quemadmodum vnusquisq; poterit experiri.

```
      11575
      11575
  ---------
      57875
     81025
    57875
   11575
  11575
  ---------
  133980625
   63000000
  ---------
   70980625
   .  .  . .
   8  4  2 5

      11575
       8425
      -----
       3150
```

PROBLEMA VIGESIMVMOCTAVVM.

Est triangulum, rectangulum, cuius basis est nota, est etiam nota proportio, quam habet productum ab excessu quadratorum è cruribus supra quadrata segmentorum basis ad differentiam quadratorum eorundem segmentorum, quæruntur latera.

Basis data sit 25; & proportio vt 2016, ad 7. Segmentum minus esto 1R, maius erit 25—1R; rectangulum sub his est 25R—1Q, cuius duplum est 50R—2Q, & hic est excessus, quo crurum quadrata superant quadrata segmentorum basis; at verò quadratorum differentia est 625—50R; vt igitur est 2016, ad 7; ita debet esse productum à 625—50R in 25R—1Q, ad 625—50R; huiusmodi verò productum est 31250R — 3750Q ✢ 100C; fiat igitur vt 2016, ad 7, ita 31250R — 3750Q ✢ 100C, ad 625—50R, productum sub extremis, nempe 218750R—26250Q ✢ 700C, æquabitur 1260000 — 100800R, & per antithesin, fiet 319550R—26250Q ✢ 700C ⊏ 1260000.

Instituto autem parabolismo fiet æquatio hoc modo
$$\frac{319550}{700}R-\frac{26250Q}{700}\text{✢}1C\;\sqsubset\;\frac{1260000}{700}$$
Et per Isomoeriam fiet æquatio huiusmodi 223685000R—26250Q ✢ 1C ⊏ 617400000000.

Huius autem æquationis radix est 6300, qua diuisa, per 700, fit quotiens 9, & radix superioris æquationis. Per Isomoeriam autem æquationem illam superiorem ad hanc reduci, patet, Quoniam R, distat à C, per Q, proinde 700, ducatur quadraticè, vt fiat 490000, quo ducto in 319550, numero radicum fit 156579500000; quo diuiso per 700, fit quotiens, & numerus radicum 223685000, deinde numerus quadratorum remanet idem 26250. At quia numerus absolutus distat à C, per C, proinde 700; ducatur in se cubicè, vt producatur 343000000, qui ductus in 1260000, numerum absolutum producit

43218000000000, quo diuiso per 700, fit quotiens 61740000000, & est numerus absolutus.

SCHOLION.

Non erit abs re, numerosam huius generis æquationum analysin obseruare, Sit igitur æquatio.

	2 4
A numero absoluto. 1 C + 10 Q + 200 R =	10144
Subtrahe cubum primæ figuræ, siue lateris primi.	8
A residuo.	22
Adde quadratum primæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	8
A residuo.	14
Subtrahe numerum factum à numero Radicum in primam figuram.	4
A residuo annexis sequentibus figuris.	1014
Subtrahe (inuenta secunda figura) numerum factum à triplo primæ figuræ, in quadratum secundæ figuræ, siue lateris secundi.	96
A residuo.	918
Subtrahe numerum factum à triplo quadrato primæ figuræ, in secundam figuram.	48
A residuo annexa postrema figura.	4384
Subtrahæ cubum secundæ figuræ.	4
A residuo.	4370
Subtrahe numerum factum à producto dupli primæ figuræ, & secundæ in numerum Quadratorum.	32
A residuo.	1110
Subtrahe quadratum primæ figuræ in numerum à secunda figura in Quadr.	320
A residuo	800
Subtrahe numerum factum à secunda figura in numerum Radicum.	800
	0 0

Secunda verò figura reperitur animaduersis ijs quæ supra docuimus; tum loquentes de Potestatibus puris, tum de affectis: Si enim è diuisoribus fiat triplum quadratum lateris primi, insuper triplum latus primum; deinde numerus Quadratorum ducatur in duplum lateris primi; insuper inter eosdem diuisores collocetur idem numerus, & præterea numerus radicum; omnibus tamen suis debitis locis collocatis, consurget diuisor. &c.

Si so-

$$1C + 200R - 20Q = 7104 \quad (\text{figuræ: } 2 \;\; 4)$$

SI foret æquatio	7104
Numero absoluto Adde numerum factum à quadrato primæ figuræ in numerum Quadratorum.	80
Ab aggregato.	15104
Subtrahe cubum primæ figuræ.	8
A residuo.	71
Subtrahe numerum factum à prima figura in numerum Radicum.	40
Ad residuum.	31
Adde numerum factum (inuenta secunda figura) à producto primæ figuræ & secundæ in numerum Quadratorum.	32
Adde aggregatum.	630
Adde quadratum secundæ figuræ ductum in numerum Quadratorum.	320
Ab aggregato.	662
Subtrahe numerum factum à triplo primæ figuræ in quadratum secundæ.	96
A residuo.	566
Subtrahe numerum factum à triplo quadrato primæ figuræ in secundam figuram.	48
A residuo annexa postrema figura.	864
Subtrahe cubum secundæ figuræ.	64
A residuo.	800
Subtrahe numerum factum à secunda figura in numerum Radicum.	800
	0 0

Paratur autem diuisor ad indagandam secundam figuram, quemadmodum dictum est, obseruatis tamen obseruandis, iuxta affectionis notas.

Cæterùm non dissimili artificio procedendum erit, in consimilibus æquationibus, quomodocunq; varientur notę †, & —.

PROBLEMA VIGESIMVMNONVM.

Est triangulum rectangulum, cuius basis est nota; item est nota proportio, quam habet rectangulum sub cruribus ad rectangulum sub segmentis basis; quæruntur latera.

Data sit basis 25, proportio iam dicta, vt 75, ad 36. Segmentum minus esto 1R, maius erit 25—1R, at verò crus quod conterminum est ipsi segmento minori medio loco proportionale est inter ipsum segmentum minus, & totam basim ob id illud erit ℞ (25R) reliquum verò crus erit ℞ (625—25R), rectangulum sub his est ℞ (15625 R—625Q) at rectangulum sub cruribus, debet esse ad rectangulum sub segmentis vt 75, ad 36; proinde vt 75, ad ad 36, ita erit ℞ (15625R—625Q) ad 25R—1Q, ob id etiam quadrata erunt proportionalia; vt igitur est 5625 ad 1296. Ita erit 15625R—625Q, ad 625Q—50C+1 QQ, atq; adeo productum sub extremis, æquabitur producto sub medijs, & obseruatis Artis præceptis, reperiemus 1 R, pretium esse 9.

PROBLEMA TRIGESIMVM.

Est rectangulum, cuius latera simul sumpta conficiunt 18; at verò, solida quæ continentur sub singulis lateribus, & rectangulo sub lateribus, sunt 64, & 512, quæruntur latera.

Suppositio. Supponendum est latera cubica ipsorum numerorum 512, & 64, puta 8, & 4, esse medio loco proportionalia inter latera quæsita, in ratione continua.

Dicamus vnum ex lateribus esse 1R, eius cubus est 1C, vt autem est 1 C, ad 512, ita 512, ad 64, proinde 64 C, æquabuntur 262144, quadrato ex 512, ob id 1C, æquabitur 4096, atque adeo si eruatur radix cubica ex numero 4096, habebitur 16, pro 1R, pretio, & est latus vnum latus alterum non latebit.

SCOLION.

Nota. *Ordo doctrinæ postulabat, vt hoc volumine, ea Problemata solueremus, quæ faciliora cum sint, à Tyronibus melius percipiuntur; at verò quæ sunt abstrusiora, quæq; maiorem difficultatem afferunt Analystæ in proprio volumine, fauente Deo nos afferemus, Non igitur nos carpat aliquis, quòd nonnulla problemata attulerimus, quæ sine magno labore soluuntur, & etiam quædam ab alijs soluta; propterea quod ordinem doctrinę sequuti sumus; à quo nimirum didicimus à facilioribus initium desumendum esse. Reliquum est, vt gradum faciamus ad sextum exemplorum genus, in quo non nulla Problemata exhibemus rebus contracta; hunc enim ordinem ad initium polliciti sumus; vt nimirum horum Problematum genus in hac tractatione postremas partes ageret.*

Sextum Problematum genus.

AD hoc genus ea reuocamus problemata, iuxta ordinem præscriptum, quę sunt rebus accomodata.

PROBLEMA PRIMUM.

DVo mercatores societatem inierunt, hac tamen cautione, vt quisq; lucretur iuxta positam à se pecuniæ quantitatem. Primus autem posuit nescio quid, & permansit in supradicta societate, per spatium 12, mensium; Secundus verò posuit aureos 30; & permansit in societate per spatium 17, mensium; reperterunt deniq; lucrum totum esse $18\frac{3}{4}$ aureos; primus verò pro lucro, & pecunia posita habuit 26, aureos. quaritur quantum posuerit primus.

Dico primum posuisse 1 R, lucrum igitur primi erit 26—1R, quandoquidem 26, lucrum est, & pecunia posita à primò, est itaq; 26—1R, lucrum primi in mensibus 12; modo dicendum, Si 1R. dat 26—1R, lucri mensibus 12, quantum nam dabit 30; pecunia posita à secundo, & reperiemus dare $\frac{780-30\,R}{1\,R}$ spatio quidem eodem scilicet mensium 12; At verò si tantum dant menses 12, quantum dabunt menses 17; & reperiemus daturos $\frac{13260-510R}{12R}$ pro lucro secundi, horum lucrorum summa est $26-1R + \frac{13260-510R}{12R} = 18\frac{3}{4}$ & ordinata æquatione, erit æquatio huiusmodi 129 + 423 R = 13260, Ac deniq; 1 Q + 35 R = 1105, huius autem æquationis radix est 20.

Itaq; primus posuit 20, aureos, Secundus 30, lucrum primi

primi erit **6**, secundi verò 12; quę quidem lucra simul sumpta faciunt 18; vt opus est.

SCHOLION.

Hoc problema anno 1653 Florentiæ publicè fuit expositum resoluendum ab Arithmetico doctissimo, & quidem proponebatur omnibus Matheseos professoribus; cum autem Auctor eius aduerteret per plures menses à nemine fuisse quæstioni satisfactum; affixit schedulam, in qua dicebat, cum à nemine suæ quæstioni factum fuisset satis atque adeo nemo esset, qui Florentiæ eam soluere sciret; se cuicumque methodum explicaturum cupienti, nimirum illam addiscere; cum autem nihil mihi fuisset ignotius, demum relatum fuit rem ita se habere, & nimirum longo temporis spatio quæstionem illam publicè in locis solitis expositam extitisse, atque demum schedulam supradictam affixam esse; rogatus à quodam magno michi necessitudinis vinculo coniuncto, animum appuli ad ipsam quæstionem enodandam, & solutionem quam paucis horis adinueni curaui, vt ad Auctorem perueniret; qui cum cognosceret in ea nihil desiderari posse, mihi gratias, reddidit immortales; seq. mea solutione magnopere gauisum esse demonstrauit; cum à me quotidie voluerit erudiri.

PROBLEMA SECVNDVM.

Tres sunt mercatores societatem ineuntes. Primus autem imponit 40, aureos amplius, quàm secundus. Secundus verò ac tertius simul imposuerunt 100, aureos; lucrati sunt autem omnes simul 80; aureos, ex ipsis verò tertius pro suo lucro, seu pro lucri parte habuit 20. Quæritur quantum quisq; imposuerit, & quantum quisq; lucratus fuerit.

Dico primum imposuisse 1R + 40, secundus autem necesse est, vt imposuerit 1 R; hoc enim pacto primus imposuit 40; aureos amplius, quam secundus, & quia secundus ac tertius simul imposuerunt 100, aureos, ob id tertius necesse est, vt imposuerit 100—1R. Sunt igitur ea, quæ fuerunt imposita 1R+40; nimirum à primo 1 R, à secundo 100—1R, à tertio lucrum primi esto 1 A, lucrum secundi sit 1B, lucrum tertij, iam natum est, nempe 20, fiat autem per regulam auream

$$\text{Vt } 140+1\text{R}, \text{ ad } 80 \left\{ \begin{array}{l} 1\text{R}+40 \\ 1\text{R} \\ 100-1\text{R} \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} 1\text{A} \\ 1\text{B} \\ 20 \end{array}$$

Itaq; productum ab extremis æquabitur producto sub me-

medijs, quamobrem 2800 + 20 R = 8000 − 80 R. Vtrinque additis 80 R, quòd nimirum signo − afficiatur, & fiet 2800 + 100 R = 8000. Vtrinq; ablatis 2800, fiet 100 R = 5200. Diuisione autem instituta, fit quotiens 52, Itaque primus, qui posuit 1 R + 40, necesse est, vt posuerit 92. secundus verò 52, tertius 48, summa illa 140 + 1 R erit 192.

140 + 1 R
20
2800 + 20 R
100 − 1 R
80
8000 − 80 R

		92	38	64 / 192
192	80	52	27	128 / 192
		48	20	

Itaq; lucrum primi erit 38 $\frac{64}{192}$, secundi 27 $\frac{128}{192}$. Tertij demum 20; & satisfaciunt. &c.

PROBLEMA TERTIVM.

Dvo sunt peregrini proficiscentes eadem die à duobus ciuitatibus inter quas 300, milliaria intercipiuntur, alter versus alterum. Notum est autem vnum conficere 30, milliaria quolibet die, alterum autem milliaria 20, quæritur quando sibi mutuò occurrent, atque conuenient.

Dico in 1 R, dierum sibi mutuo occurrere, & fiat, vt æquationem indagemus, quemadmodum 1; ad 30; ita 1 R; ad 30 R, & vt se habet 1, ad 20; ita 1 R; ad 20 R, Summa radicum esto 50 R; & prior quidem in 1 R, dierum, confecit 30 R, milliarium, secundus autem in 1 R, dierum ponfecit 20 R; milliariorum. Ita vt 50 R, milliariorum confecerint ambo; sed debebant conficere milliaria 300, proinde erit æquatio 50 R = 300. Diuisione autem instituta, fit 1 R valor 6; Itaq; die sexto peracto, sibi mutuo occurrent peregrini supradicti.

PRO-

PROBLEMA QVARTVM.

Est quidam mercator, qui vendidit 50 libras partem Zaccari, & partim Cinamomi, aureis 130, at verò Zaccari libram vendidit tribus denarijs, sed Cinamomi libram denarijs duobus. Quaeritur quot vendiderit libras Zaccari, & quot Cinamomi.

Dico mercatorem vendidisse 1 R, librarum Zaccari ob id necesse est; vendiderit 50—1R, librarum Cinamomi; instituatur autem Regula aurea hunc in modum.

denar. 3 R
den. 100— 2 R.

Zaccari lib. 1. den. 3. lib. 1. ? Cinamomi lib. 1. den. 2. lib. 50—1R. Summa verò denariorum erit 100 ✠ 2R, quae debet aequari 130, & per antithesin 1 R ⊏ 30, atq; adeo fit 1 R, pretium 30.

1.	3.	30?	90
1.	2.	20?	40
			130

PROBLEMA QVINTVM.

Decem mercatores cuidam creditori, hoc modo pecuniam debent.

Nouem excluso primo debent 545. *Deinde*
Nouem excluso secundo debent 540.
Nouem excluso tertio debent 535.
Nouem excluso quarto debent 595.
Nouem excluso quarto debent 571.
Nouem excluso sexto debent 560.
Nouem excluso septimo debent 589.
Nouem excluso octauo debent 625.
Nouem excluso nono debent 635.
Nouem excluso decimo debent 630.

Quaeritur totius debiti summa; & singulorum. Debitum primi dico esse 1 R; cum autem nouem ipsorum debeant

$545 + 1R$
$540 + 1A$
$535 + 1C$
$571 + 1D$
$560 + 1E$
$589 + 1F$
$625 + 1G$
$635 + 1H$
$630 + 1I$

debeant 545, ergo omnes decem debebunt $545 + 1R$. Quoniam excluditur debitum secundi; & eo excluso reliqui debent 540; propterea. Tota summa erit $540 + 1A$, erit enim A, debitum secundi, & ita $535 + 1B$; erit tota summa; item $595 + 1C$; item $571 + 1D$; item $560 + 1E$, item $589 + 1F$, item $615 + 1G$, preterea $639 + 1H$, demum $630 + 1I$ omnium radicum summa est $10R - 355 = 1R + 545$, & per antithesin fit $9R = 900$. Fitq; 1 R pretium 100.

$545 + 1R = 540 + 1A$
540
$5 + 1R = 1A$

$545 + 1R = 535 + 1C$
535
$10 + 1R = 1C$

$545 + 1R = 571 + 1D$
571
$1R - 26 = 1D$

$545 + 1R = 560 + 1E$
560
$1R - 15 = 1E$

$545 + 1R = 589 + 1F$
589
$1R - 44 = 1F$

$545 + 1R = 615 + 1G$
625
$1R - 80 = 1G$

$545 + 1R = 635 + 1H$
635
$1R - 70 = 1H$

$545 + 1R = 630 + 1I$
630
$1R - 85 = 1I$.

PROBLEMA SEXTVM.

QVidam moriens testamentum condit, & relinquit 5000; *aureos, distribuendos inter vxorem, filium, & tres filias has conditione; vt portio filij sit quadrupla portionis matris; & portio matris sit tripla portionis vnius filiæ. Quæritur quanta sit vniuscuiusq; portio.*

Portio vnius filiæ esto 1 R, erit autem portio matris 3 R; & portio filij erit 12 R, erunt ergo 18 R, æquales 90 00;

filiæ	1 R	Id est	500	aur.
filiæ	1 R		500	
filiæ	1 R		500	
Matris	3 R		1500	
filij	12 R		6000	
	18 R		9000	

Diuisis 9000, per 18, fiet quotiens 1 R, pretium 5 00, portio vnius filiæ, ob id portio matris erit 1 5 00, & filij erit 6000.

PROBLEMA SEPTIMVM.

PIntæ 30, *Vini Rubri vna cum* 5, *pintis Vini albi, constant Aureis* 100, *Atq; eodem pretio* 15. *Pintæ Vini rubrij cum* 5, *Pintis Vini albi constant aureis* 55, *quæritur pretium vnius Pintæ.*

Pretium vnius pintæ Vini Rubri esto 1 R, proinde 30, pintæ valebunt 30R, igitur quinque pintæ vini albi valebunt 100—30R, at verò pintæ 15, Vini rubri, valebunt 15R, quamobrem quinque pintæ Vini albi constabunt 55—15 R, proinde fiet æquatio huiusmodi 100—30 R ⚌ 55—15R, & per Antithesin erit 15 R ⚌ 45, atque adeo

adeo instituto parabolismo fit vnius Radicis pretium 3.

PROBLEMA OCTAVVM.

Est Mercator, qui in quattuor nundinis eamdem aureorum summam exponens Lucratus est in singulis $\frac{1}{10}$ suæ summæ, deinde ad alias se conferens nundinas Lucratus est $\frac{1}{7}$ eiusdem suæ summæ priori lucro auctæ, deprehendit autem habere aureos 1600, quæritur aureorum summa.

Summa aureorum esto 1R, quoniam autem in singulis nundinis Lucratus est $\frac{4}{10}$ R, ob id post quattuor illas nundinas habebit 1 $\frac{4}{10}$ R, hoc est $\frac{14}{10}$ R, cum autem lucratus sit deinde $\frac{1}{7}$ eiusdem summæ priori lucro auctæ, proinde diuidatur $\frac{14}{10}$, per 7, & fit $\frac{1}{5}$ R, addatur ad $\frac{14}{10}$ R, & fit $\frac{8}{5}$ R, & erit ęquatio $\frac{8}{5}$ R $=$ 1600, tollatur fractio, & fiet æquatio 8 R $=$ 8000, instituto parabolismo, fiet R, pretium 1 000, & hæc est aureorum summa quæsita.

PROBLEMA NONVM.

Tres sunt Mercatores qui summam aureorum ęqualiter diuidere volebant, interim contentione suborta ad manus ventum est tantum autem quisque rapuit quantum per eum potuit, contentione sedata singuli suas pecunias numerarunt, ac demum deprehenderunt, primum acceptis 15, à secundo habere numerum æqualem residuo ipsius secundi, at verò secundum acceptis 18, à tertio, habere numerum æqualem residuo tertij, tertium autem acceptis 22, à primo, habere numerum triplum illius qui superest primo, quæritur Summa.

Dicamus primum habuisse 1R, igitur acceptis 15, à secundo habebat 1R + 15, hic verò numerus æqualis est residuo secundi, quamobrem secundus antequam daret 15, primo, habebat 1R + 30, acceptis autem 18, à tertio, habebat 1R + 48, & hic æqualis est residuo tertij proinde tertius, antequam daret 18, secundo habebat 1R + 66, sed tertius acceptis 22, à primo, est 1R + 88, qui quidem numerus triplus est illius qui superest primo, nimirum 1 R — 22; ob id multiplicetur 1 R — 22 per 3, & fiet æquatio 1 R + 88 $=$ 3 R — 66, obseruatis artis preceptis fiet æquatio 2 R $=$ 154, instituto parabolismo fit vnius R, pretium 77. Itaq; primus habuit 77, secundus habuit 107, tertius denique 143, & hi numeri Quæstioni satisfaciunt vt perspicuum est.

PROBLEMA DECIMVM.

Est serici magnum pondus, cuius multæ libræ sunt serici Anglici, multæ aliæ Mediolanensis, multæ demum Neapolitani, sericum Anglicum est 5000, at verò multitudo librarum serici Mediolanensis est dimidium librarum serici Anglici, & Neapolitani item multitudo librarum serici Neapolitani est $\frac{1}{5}$ serici Anglici, & Mediolanensis, quæritur multitudo Librarum serici Mediolanensis, & Neapolitani, & quanta sit tota multitudo.

Supponamus multitudinem serici Mediolanensis esse 1 R, igitur multitudo librarum serici Anglici cum multitudine Librarum serici Neapolitani, erit 2 R, tota itaq; multiplitudo erit 3 R, sed quia multitudo librarum serici Neapolitani est $\frac{1}{5}$ serici Anglici, & Mediolanensis, & sericum Mediolanense cum Anglico est 1 R + 5000, proinde sericum Neapolitanum erit $\frac{1}{5}$ R + 1000, modo quia sericum Anglicum est Librarum 5000, Mediolanense 1 R, & Neapolitanum $\frac{1}{5}$ R + 1000, tota igitur summa erit 1 $\frac{1}{5}$ R + 6000, quę ęquabitur 3 R subtracto autem 1 $\frac{1}{5}$ R vtrinque fiet $\frac{4}{5}$ R $=$ 6000, instituto parabolismo fit 1 R, pretium 3333 $\frac{1}{3}$, itaq; sericum Anglicum erat 5000, Mediolanense verò 3333 $\frac{1}{3}$ Neapolitanum denique 1666 $\frac{2}{3}$.

PROBLEMA DECIMVMPRIMVM.

Qvidam emit numerum equorum, illud autem constat si seorsum emisset $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, & insuper 10, haberet æquos

400,

400; *quaritur aquorum numerus*.

Numerus hic esto 1 R, cuius $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ faciunt $\frac{13}{12}$ R, additis 10 fit $\frac{13}{12}$ R ✠ 10, & erit æquatio $\frac{13}{12}$ R ✠ 10 $=$ 400, vtrinque sublatis 10, remanet æquatio $\frac{13}{12}$ R $=$ 390, diuisione instituta fit quotiens 360, & est numerus quęsitus, nam eius dimidium est 180, tertia pars est 120, quarta verò pars est 90, horum summa est 390, cui additis 10, fit 400.

PROBLEMA DECIMVM SECVNDVM.

Est quidam, qui seruo promisit pro duodecim mensibus 20, aureos cum sex sestarÿs frumenti, & quatuor Vini cadis, transactis mensibus octo illi dedit duos aureos cum sestarÿs frumenti, & vini cadis, quæritur pretium, & Vini cognita proportione vnius ad alterum, nimirum pretÿ frumenti ad pretium Vini, & 3, ad 4.

Dico pretium vtriusque esse 1 R, igitur illi debebatur 1 R ✠ 20 aurei pro mensibus duodecim, modo instituatur regula aurea, si 12 menses poscunt 1 R ✠ 20, quid postulabit vnicus mensis, & reperietur $\frac{1R + 20}{12}$, deinde dicendum si 8, menses poscunt 1 R ✠ 2, quid requiret vnicus mēsis, & reperietur $\frac{1R + 2}{8}$ erit igitur æquatio $\frac{1R + 20}{12} = \frac{1R + 2}{8}$ instituatur multiplicatio per crucem, & fit æquatio 8 R ✠ 160 $=$ 12 R ✠ 24, & obseruatis artis pręceptis, reperietur vnius R, valor 34, & est pretium frumenti, & Vini simul, vt autem eorum pretia seorsum cognoscamus, cum notum sit pretium frumenti, ad pretium Vini esse vt 3, ad 4, fiat ob id diuisio, numeri 34 in duas partes hac seruata cautela. & reperiemus partes esse 14 $\frac{4}{7}$ 19, $\frac{3}{7}$. Itaq; pretium frumenti erit 14 $\frac{4}{7}$ Vini autem 19 $\frac{3}{7}$.

PROBLEMA DECIMVMTERTIVM.

QVidam habet duos æquos, & vnum mulum, cuius pretium est 200. *aur. hoc additum ad pretium primi equi facit pretium quadruplum pretij secundi equi. Idem autem muli pretium additum secũdo facit pretium æquale pretio primi equi. Quæritur pretium vtriusq; equi.*

Pretium primi equi esto 1 R, ergo 1 R + 200, sunt quadrupla pretij secundi equi; quamobrem eius æstimatio erit $\frac{1}{4}$ R + 50, aur. cui si accesserit muli pretium 200, aur. erit eius pretium $\frac{1}{4}$ R + 250, quod æquabit 1 R; nempe pretio primi equi; vtrinque sublata $\frac{1}{4}$ R fiet $\frac{3}{4}$ R = 250; diuisione instituta fit 1 R, pretium 333 $\frac{1}{3}$ & est pretium primi equi; Secundus equus, cuius pretium erat $\frac{1}{4}$ R + 50, erit 133 $\frac{1}{3}$, & satisfaciunt Quæstioni.

Quo pacto cognoscantur Problemata impossibilia.

CAPVT XVIII.

PRoblema quidem impossibile censetur, cum in eius analysi incidimus in æquationem impossibilem.

At verò æquatio impossibilis illa est, in qua totum proponitur æquari parti, & magnitudo maior ponitur minori æqualis, & contra.

Exemplum primum. *Exemplum primum. Reperire numerum, qui additus dato mero, faciat numerum, cuius quadratum æquale sit quadrato dati numeri.*

Datus sit numerus 12; & oporteat reperire numerum, qui additus ad 12; faciat numerum, cuius quadratum æquale sit quadrato ipsius 12.

Nume-

Numerus addendus esto 1R; ergo aggregatum erit 12+1R, cuius quadratum 144+24R+1Q, debet esse æquale 144; Hoc est Problema impossibile; si quidem plus est ex vna parte æquationis; quàm ex altera.

Exemplum secundum. *Numerum reperire, qui ductus in 6 R, idem verò ductus in 24, faciat 24R*, Quæsitus numerus esto 1R, qui ductus in 6 R; idem verò ductus in 24, facit 24R ergo erit æquatio 6R = 24R; quæ quidem æquatio est impossibilis; totum enim foret æquale parti. *Exemplum secundum.*

Exemplum tertium. *Numerum inuenire, cuius quadratum ductum in 3, & producto additis 15, fiat tantum quantum fit si eiusdem numeri quadratum ducatur, in 2, productoq; addantur 10.* *Exemplum tertium.*

Numerus quæsitus esto 1 R, eius quadratum est 1 Q, quod si ducatur in 3; fiunt 3 Q, quibus si addantur 15, fiunt 3Q+15, his autem deberet æquari 10+2Q, quod est impossibile.

Exemplum quartum. *Datum numerum in duas partes diuidere, vt ex ductu vnius in alterum gignatur quadratum totius.* *Exemplum quartum.*

Datus sit numerus 12, diuidendus. &c. Pars vna esto 1R alia erit 12—1R; productum à partibus est 12R—1Q quod deberet æquari 144; quadrato totius. Hoc Problema est impossibile ob impossibilitatem æquationis, est autem æquatio impossibilis; etenim quadratum dimidij numeri radicum est 36; à quo nequit subduci 144, numerus absolutus; Accedit etiam, quod 144, quadratum totius, maius est, quam rectangulum sub partibus, vt patet ex 2. Elementorum prop. 4.

Cæterùm autẽ proponenda sunt huius generis problemata ne quis credat impossibilitatem eorum ignorari à proponente, vt hìc elapsis annis contigit, nam cum à peritissimo viro huiusmodi problema erudiendi gratia data opera discipulo proponeretur, quidam impudens sicophanta ab eo impossibilitatem iguorari, constanter affirmabat. *Aduerte sicophãtarũ inscitiam.* *Segnius iudicium ferendum, & maturè.*

Qua

Qua arte cognoſcantur Problemata vana, & nugatoria.

CAPVT XIX.

Quid ſit Problema vanum, & nugatoriũ, Quid ſit inutilis æquatio.

P*Roblema vanum, & nugatorium eſt, in cuius reſolutione Analyſta incidit in æquationem inutilem. Inutilis ea porrò cenſetur æquatio, in qua duo numeri æquales, & eiuſdem denominationis comparantur.* Dum itaque contingit æquatio inter duos numeros æquales, & eiuſdẽ denominationis, cõparantur ęquatio illa cenſetur vana, & nugatoria. Ita quidẽ nugatoria foret ęquatio iſta 6Q ═ 6R, ex huiuſmodi enim æquationibus nulla noua cognitio erui poteſt.

Exemplum primum.

Exemplum primum. *Numerum diuidere in duas partes, vt illi qui fiunt ſub toto &, qualibet parte ſimul æquales ſint quadrato totius.*

Numerus datus ſit, 12, diuidendus &c. Pars vna eſto 1R, alia erit 12—R numeri facti ſub toto, & qualibet ex partibus erunt 12R, & 144—12R, horum ſumma eſt 144. numerus autem hic æqualis eſſe debet 144, quadrato totius.

Exemplum ſecundum.

Exemplum ſecundum. *Numerum reperire, qui ductus in 4, & numerus productus multiplicatus per 5 R, faciat numerum ęqualem illi, qui fit ex multiplicatione in ſe ipſum, & ex hoc in 20.*

Quæſitus numerus eſto 1 R, qui ductus in 4, facit 4 R, is autem ductus in 5 R, facit 20Q. Si verò 1 R; ducatur in ſe, fit 1Q, quod ſi multiplicetur per 20, fiunt 20Q, debet igitur eſſe æquatio inter 20Q & 20Q, quę quidem inutilis eſt; quandoquidem inde nulla eruitur noua cognitio.

Exemplum tertium.

Exemplum tertium. *Datum numerum in duas partes diuidere, vt quadruplus numerus factus ſub partibus vna cum quadrato differentiæ partium æqualis ſit quadrato totius.*

Datus

Datus sit numerus 12, diuidendus &c. pars vna sit 1 R, alia erit 12—1R, qui fit autem a partibus est 12R — 1Q, huius quadruplum est 48R—4Q, si huic autem addatur 144—48R+4Q, quadratum differentiæ partium fit 144, hoc autem debet æquari 144, quadrato totius.

Exemplum quartum. *Datum numerum diuidere in duas partes; vt ille qui fit à partibus vna cum quadrato à differentia partis maioris, & dimidij æqualis, sit quadrato ipsius dimidij.* *Exemplum quartum.*

Datus sit numerus 12, diuidendus &c. pars vna sit 1 R, alia erit 12—1R, qui fit numerus ab his partibus est 12 R—1Q, cui addito quadrato ex differentia 6—1R, quod est 36—12R, & fit 36, & hoc æquale esse debet quadrato ex dimidio; nempe ex 6, quod est 36. Inutilis autem hæc est æquatio, vt constat, ac proinde Problema vanum, & nugatorium, est.

S C H O L I O N.

HAEc dicta sint de Algebra Numerosa, pauca Problemata attulimus eaq; faciliora; quia plura, & abstrusiora in proprio volumine sumus allaturi.

Aduertendum autem, cum nos superius in Algorithmo numerorum Denominatorum, & præcipuè in Scholio ad paginam 84, diximus additionem, & subtractionem potestatum, quæ numerantur à numeris irrationalibus, instituendam esse, reperiendo communem diuisorem, & quotientes vel in vnum colligendos, si fuerit additio, vel vnum subtrahendum ex altero, si fuerit subtractio, & summam, vel differentiam multiplicandam iuxta radicis naturam, deinde productum ducendum in communem diuisorem, id est intelligendum iuxta leges numerorum irrationalium, adeo vt quando nos attulimus exempla; quorum primum erat; dum proponeretur ad ℞ Q 20 R addere ℞ Q 5 R; communem diuisorem istorum numerorum 20, & 5, diximus esse 5; qui diuidens 20; facit quotientem 4, diuidens 5, facit quotientem 1, horum latera quadrata sunt 2, & 1 horum summa est 3, quæ debet quadratè duci, vt fiant 9, hoc productum ducendum in 5, communem diuisorem, vt fiat 45, cuius ℞ Q est ℞ Q 45; & erit ℞ Q 45 R summa quæsita, hoc ita debet intelligi; vt nimirum numerorum propositorum ℞ 20, & ℞ 5; reperiatur communis diuisor, qui est ℞ 5; hic porrò diuidens ℞ 20; facit quotientem ℞ 4; nempe 2; diuidens ℞ 5; facit quotientem ℞ 1; nimirum 1. Verùm quia dum numerus irrationalis diuidi debet per irrationalem; instituitur diuisio; non secus ac si essent numeri absoluti, hoc est quadratum vnius diuiditur per quadratum alterius. & quotientis sumitur radix, & prosilit hoc modo quotiens quæsitus; ob id nos ibi, & alibi agentes de potestatibus numeratis à numeris breuitati studentes hoc modo loquuti sumus; erat enim dicendum; oportet reperire communem diuisorem istorum numerorum ℞ 20, & ℞ 5; communis diuisor est ℞ 5, qui diuidens ℞ 20 facit quotientem ℞ 4, hoc est 2, & diuidens ℞ 5, facit quotientem ℞ 1, hoc est 1, at quia diuisio instituitur diuidendo 20, per 5, & 5, per 5, ideo neglexìmus illum loquendi modum; sed de his tractantes de numeris surdis nos cumulatè egimus, &c. *Admonitio*

Illud

Illud insuper aduertendum si quandoq; in operationibus numerorum irrationalium hac loquendi formula vsi sumus; nempe si ad ℞ 20; *addere debeamus* ℞ 5; *communis diuisor est* 5; *qui diuidens* 20; *facit quotientem* 4; *cuius radix quadrata est* 2, *diuidens* 5, *facit quotientem* 1, *cuius radix quadrata est* 1 *&c. id fecimus breuitati studentes; namque communis diuisor est* ℞ 5, *quae diuidens* ℞ 20; *facit quotientem* ℞ 4, *hoc est* 2; *&* 2; *diuidens* ℞ 5, *facit quotientem* ℞ 1; *nempe* 1, *sed quoniam dum diuidi debet radix quadrata, per radicem quadratam instituitur diuisio inter quadrata; ita cum* ℞ C, *debet diuidi* ℞ C, *instituitur diuisio inter cubos, & ita de reliquis &c: ob id aliquando neglexímus tam accuratum loquendi modum, quod animaduertisse volumus.*

Praeterea quandoq; praetermisimus aliquam operationem facientem minus ad rem exempli gratia ad paginam 385; *cum diceremus primam partem esse* $60 - \frac{1}{2}R -$ ℞ $\left(\dfrac{432000 - 90\,Q\ \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ *cuius quadratum esse dicebamus*

$$3600 - 60R + \tfrac{1}{4}Q + \frac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}.$$

Aduertendum est $60 - \frac{1}{2}R -$ ℞ $\left(\dfrac{432000 - 90\,Q\ \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ *in se multiplicato; fieri ne dum* $3600 - 60R + \frac{1}{4}Q + \dfrac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$, *sed etiam aliquid aliud huic addendum; si quidem est* ℞ $\left(\dfrac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ *in se fit* $\dfrac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}$ *ex ipso verò* ℞ $\left(\dfrac{432000 - 90\,Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ *in* $60 - \frac{1}{2}R$, *fit quaedam radix ligata, affecta signo — ex* $60 - \frac{1}{2}R$, *in se fit* $3600 - 60R + \frac{1}{4}Q$; *at verò dum* $60 - \frac{1}{2}R +$

℞ (43-

℞ $\left(\dfrac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ ducitur in se fiunt illa producta, vt supra, cum hoc discrimine, quod dum multiplicatur vti dicebam ℞ $\left(\dfrac{432000 - 90Q - \frac{1}{2}C}{120 + 2R}\right)$ per 60 — $\frac{1}{2}$ R, fit radix ligata affecta signo + at verò quia in additione + & — fit subtractio, ob id prætermisimus illa producta, quia quantum ad hanc additionis operationem, perinde est ac si non adessent. Hoc autem placuit aduertere. Quantum enim ad additionem, quam in illa operatione intendebamus, non alij adhibentur numeri quàm supradicti, reliqui ob signa + & — de medio tolluntur.

Ad extremum Si Lector in Paradig. viderit numerorum notas minus benè dispositas aduertat pretium vnius cuiusq; nam inde facile poterit illarum ordinationem corrigere; Si nos interfuissemus, Typographus non ita frequenter lapsus esset.

Algebræ Numerosæ Finis.