NÉ MIEI DOLCI STVDI M'ACQVETO
EX LIBRIS
CAROLI VIGANÓ

FA 6 B 483-1

EVCLIDE RESTITVTO

OVERO

GLI ANTICHI ELEMENTI GEOMETRICI

Riſtaurati, e facilitati

DA

VITALE GIORDANO

DA BITONTO

Lettore delle Matematiche nella Reale Accademia ſtabilita dal [illegible] in Roma.

LIBRI XV.

Ne i quali principalmente ſi dimoſtra la compoſitione delle proportioni ſecondo la definitione datane dal ſuo antico Autore.



IN ROMA, Per Angelo Bernabò.

ALLA SACRA, E REAL MAESTA'
CHRISTIANISSIMA
DI
LODOVICO XIV.
RE' DI FRANCIA, E DI NAVARRA

SIRE.

QVELLA vaghezza, che trà le rouine delle paterne Scuole de' Pittagorici mi venne già di applicare alle Matematiche, ſpenta ſenz'alcun dubio da vna peruerſa fortuna in me ſtata ſarebbe, ſe la Maeſtà Voſtra, intenta ad arricchire colle buone arti il Mondo tutto, agio dato non mi haueſſe di mantenerla ſempre più viua á beneficio della giouentù Franceſe in que-

ſta

ſta ſua Reale Accademia. Nella quale perciò, dopo molte fatiche da me ſoſtenute, non ſolo per ageuolar le materie con chiaro metodo, e breue, all'intelligenza de' diſcepoli poco eſperti dell'Italiana fauella; ma per dar anche fuori qualche mia particolare inuentione, mi è non sò come riuſcito di comporre alcune Opere, che partitamente la Machina tutta di così alta ſcienza diſcuoprono. Contiene la Prima, in cui le fondamenta ſi gettano, gli Elementi di Euclide, da me nella primiera lor giacitura reſtituiti, e confermati con quelle pruoue, di che ſpecialmente i principij delle Parallele, e delle Proportioni hauer biſogno fin qui ſi è creduto, ancorche la pruoua dependeſſe dagli antecedenti, e noti principij, non sò in che modo da tanti celebrati Scrittori non mai auuertita, non ſenza qualche ſcherno di Euclide, che per queſto difetto in più forme, che il fauoloſo Proteo, ſi è laſciato vedere. Hora queſti Elementi, che primi nell'ordine ſono, e primi parti del mio debile ingegno, conſacro humilmente al Nome ſempre Inuitto di V.M. ed à i raggi del ſuo profondo intendimento gli eſpongo, ch'è quanto

to dire gli eſpongo alla publica luce, quando dal ſuo gradimento quello anche dipende dell' Vniuerſo. Con queſto così tenue tributo io non preſumo però di ſatisfare, ne pure in piccio-la parte all'infinito debito, in che mi veggio coſtituito dalla ſua Regia Beneficenza; ſapendo io bene, che appreſſo la M.V. la ſteſſa ſatisfatione, ſe fia gradita, riceue tanto di grazia, che ſi conuerte in debito, e che il debito ſteſſo è così prezioſo, che di qualunque ſatisfatione è maggiore. Ma poiche la preſente Opera quanto fà più apparire la ſua Verità per la mia poca induſtria, tanto può eſſer più eſpoſta all'odio altrui, ed all'inuidia, io ſolamente intendo di ſtabilirla ſotto il potentiſſimo Patrocinio della M.V. che coll'eccelſa prerogatiua di Primogenito della Chieſa, e di Promotor zelantiſſimo della Religione, quella ben giuſtamente vanta frà l'altre di perpetuo Difenſore della Verità. Difenderà ella nel tempo ſteſſo la Matematica tutta, la quale dalla Verità de' ſuoi principij appunto queſto nome à tutte l'altre diſcipline commune meritare hà potuto. E difenderà con merauiglia vniuerſale lo ſteſſo Euclide,

quasi dalle tombe di Megara risorto, non tanto forse per vendicar le proprie offese, quanto ambizioso di viuere anch'egli con tanti Eroi Letterati sotto gli auspicij di V. M. che il presente secolo hà reso già co'suoi fatti egregij sopr'ogn'altro memorabile à posteri, e gli angoli più remoti della terra, hà con gli applausi empiuto delle sue glorie immortali. Si degni dunque la M. V. di accoglier con lieto ciglio, questa ancorche lieue dimostrazione del mio riuerentissimo ossequio; giàche (se grata non le fia, come al commodo della guerra insieme, e della pace ordinata) il riflettere in mezzo alle sue più alte occupationi alle cose più humili, non è disdiceuole à quella fortezza, che vnicamente risplende nell' animo suo, e che sola per eccellenza, fù dagl' Antichi appellata Virtù. Ed à V. M. profondissimamente m'inchino.

DI VOSTRA MAESTA'.

Humilissimo, e diuotissimo Seruo.

Vitale Giordani.

SEBASTIANO MATTEI
AL LETTORE.

LA Matematica, che Platone annouerò frà le parti primarie della sua Philosofia, hebbe in ogni secolo quella prima veneratione, con la quale i Sacerdoti antichi dell'Egitto s'eleuarono alle supreme dignità della Republica, mentre nell'Oriente, e nell' Ostro s'apprezzaua la razionalità, ed erano tenuti, e reputati Sauij, Maghi, Bragmani, e Gimnosophisti quegli huomini, che dimostrauano le cose per le loro cause formali, come de' Matematici disse Auerroe; e però questa scienza appresso i Greci s'inalzò col nome di Dottrina, e Disciplina, quasi per Antonomasia, che altro non voglion significare le voci Matheſis, e Mathema. Essa lasciate le considerationi di buono, e male appartenenti alla morale, e gli estremi di materialità, ed astrattione proprij della Fisica, e Metafisica, si contentò della strada media per dedurre, e dimostrare le passioni più importanti del suo obietto, ch'è la quantità, non da primi generi, ne dall' vltime formalità, secondo Proclo, ma da mezzi così proportionati, che le dimostrazioni Matematiche non possono contradirsi per la loro euidenza; e fù forzato Platone à dire, che haueua questa Dottrina sortito vna ottima, e perfetta natura; ed Aristotele, emulo della setta Megarense, quando volle ridurre à perfettione la sua Filosofia rationale, altro non fece, che vna Matematica delle operazioni intellettiue, dirette, e refleſſe; e mentre procuraua sfuggire la materia, inciampò nella forma della scuola contraria, per verificarsi la dottissima censura di Filone, qui Mathematicam appellauit scientiam vniuersalem, quod hæc rerum intelligibilium imagines, verique vestigia tanquam in Polytissimo Speculo demonstret, mentemque purgatam paulatim abducat à sensu. *Quindi è, che gli Assirij colle figure Geometriche, e Pitagora co'i numeri, procurauano sciogliere i Fenomeni più difficili, e gli arcani della natura; e Platone scrisse in modo Matematico la sua Filosofia; anche la parte Morale, e Politica, & i libri della Republica.*

L'origine di questa scienza fù creduto nell'Egitto, ed è fama, che Talete Milesio la trasportasse in Grecia da quella celebre Prouincia,

doue

Auer. 1. phis. com. 1.

Lib. 1. cap. 1. sup. 1. Eucl.

Erasm. in Adag.

doue ò per la potenza della Monarchia, ò per l'inclinazione de' Prencipi, che fauoriuano i Matematici con honori, e ſtipendij, ò ſia per la neceſſità de' Popoli coſtretti à profeſſare la Geometria per l'inondationi del Nilo, fiorì più che in neſſuna altra parte del Mondo; però il Filoſofo di Stagira credeua, non ſenza improbabilità, che anco le ſcienze, come le più coſe dell'Vniuerſo, ſi riuolgeſſero col moto del primo mobile, e gli parue facile ſapere le loro vltime digreſſioni, e difficiliſſimo affermare coſa di certo nelle ſue prime progreſſioni, quantunque molti habbiano ſcritto degl'inuentori dell'arti, e delle ſcienze; quaſi nel ſuo ſenſo diceſſe, che hebbero principio, e col Mondo, e col moto. E fù ſentenza di Socrate, poiche tutte le Dottrine, principalmente le Matematiche riſiedono nella parte cogitatiua dell'anima, ſe è vera la Filoſofia Pitagorica, e Platonica, che il ſapere ſia ricordarſi l'huomo delle ſue ragioni, e così ſempre, ch'il Mondo fù popolato d'huomini, è credibile foſſe anche adornato, ed arrichito di ſcienze, le quali ſono, ſenza dubio, proportionate all'intelletto, perche la verità conſiſte in vna ſola conformità indiuiſibile dell'atto all'obietto, ancorche il modo ſia lungo, e diffuſo, comparato alla breuità della noſtra vita. Nè diſcorda queſta Dottrina dalle communi opinioni, mentre tutti i Dottori di Santa Chieſa, e più interpreti delle ſacre carti affermano, ch'il noſtro primo Padre fù dottiſſimo in qualunque ſcienza, dal quale ſi trasfuſe ne i ſucceſſori, tanto che i figlioli di Seth, nepoti di Adamo, laſciarono le figure Aſtronomiche auanti del diluuio impreſſe in due colonne, e rimaſero le veſtigie ſino à tempi di Gioſeppe Hebreo. Da quì è che i Chaldei, Meſopotamij, ed Aſſirij furono nelle Matematiche peritiſſimi in guiſa tale, che Ariſtotele altro non impoſe à Calliſtene ſuo familiare, il quale diede per compagno ad Aleſſandro mentre partiua per l'Aſia, ſe non che gli traſmetteſſe dagli Archiuij di Babilonia, quando foſſe eſpugnata quella Città, tutte le Aſtronomiche oſſeruazioni de' Caldei, che ſi trouarono fatte per lo ſpatio di trè mila nouecento, e trè anni. Gli Egitij finalmente nell'Africa ſi conobbero deuoti, ed in vn certo modo ſuperſtitioſi de' Matematici, ne contenti delle dimoſtrazioni de i Rè, inalzarono ne i tempij, ed altri luoghi publici, ò ſcolpito, ò dipinto l'animale Origè, ch'era figura del Matematico.

1. de Cel.

Soer. in Memnone.

Hypoc. ſec. 1. aph. 1.

Ioſep. lib. 1. antiq. Iud. cap. 3.

P. Ramus lib. 1. proem.

Pier. Valer. lib. 10. pag. mihi 90.

Ne pare improbabile, che dall'Aſia, e dall'Africa ſi transfondeſſe nell'Europa, doue ſimilmente queſta ſcienza fù venerata come Diuina, non che profeſſata, e ſeguita come humana; ed i Matematici ſtimati felici, e più che huomini, cantò Ouidio nel primo de' faſti.

Feli-

Felices animæ, quibus hæc cognoſcere primis,
Inque domos ſuperas ſcandere, cura fuit.
Credibile eſt, illos pariter vitijſque, iociſque
Altius humanis exſeruiſſe caput.

Ma che Talete Mileſio foſſe il primo Geometra frà gli Aſſirij mi pare difficiliſſimo, ed improbabile, perche Euforbo Frigio, e Palamede Greco, che fioriuano nel tempo della guerra Troiana, laſciarono in carte non poche opere piene di figure Geometriche; e Talete viſſe dopo centenaia d'anni intorno al 580. auanti la noſtra redentione; e ben vero che de i primi, ò per l'ingiuria de' tempi, ò per l'incuria de i Scrittori, non ſi legge, che haueſſero ſeguaci, come Talete, il quale fù imitato da Pitagora Samio, Anaſſagora, Clazomene, e ſucceſſiuamente da i migliori Filoſofi del Peloponeſſo ſino al ſecolo d'Euclide, che riduſſe la Matematica à tutta perfettione.

Di queſto Autore dubitano, ed anco ne fanno lunghe diſcuſſioni i Commentatori, ſe fù il Prencipe della Setta Megarenſe, ò altro Geometra celebre negli anni ſeguenti, perche del Megarenſe ſi sà, che nell'infantia d'Aleſandro occupò la Catedra ad Ariſtotele, quando paſſaua legato degli Atenieſi in Perſia, e del Matematico ſi legge, che fù familiare à Tolomeo primo Rè d'Egitto, ma in venticinque, ò trenta anni ſoli di differenza non sò per qual ragione non poſſa eſſere il medeſimo giouane nel tempo d'Aleſsandro, ed antiano in quel di Tolomeo; in qualunque modo, eſſo fù il Geometra più inſigne frà tutti quelli, de' quali rimane la memoria nella noſtra età. S'accorſe che Socrate Geometriam diſcendam eſſe aiebat, donec quis poſſit, & vſus ita ferat; che Platone non accettaua diſcepolo alcuno nell'Accademia auanti d'hauer inteſo i principij Geometrici, per li quali paſſauano tutti i Filoſofi della Grecia come per conſuetudine antica, e compreſa la neceſſità della Matematica, ò moſſo dal delettabile della parte ſpeculatiua, e dall'vtile della prattica, s'affaticò à cercare vn modo, che nè la rendeſſe oſcura per la breuità, ne improportionata per la diffuſione, e lo trouò tale, che domandato dal Rè Tolomeo ſe vi era altra ſtrada più breue, e più facile, riſpoſe, Nullam eſſe aliam viam regiam. Conobbe che l'Aritmetica, e la Geometria ſono le parti principali della Matematica, e che per meritar nome di Matematico è neceſſario eſſer buon Geometra, e dimoſtrare geometricamente tutte le coſe, che cadono nell'arte, e però ſenza ſparmiar fatica ſcielſe quelle dimoſtrazioni, che conduceuano al ſuo fine, con tale artificio, che ſe vna ſola ne mancaſſe, preci-

pita-

pitarebbe il bello, ed ammirabile di queſto Coloſſo, mentre ſi ſcorgono le ſuſſeguenti coſe concatenate con l'antecedenti, che mal potrebbe la terza ſenza la ſeconda, e queſta ſenza la prima dimoſtrarſi.

E ancorche quaſi tutti dopo d'Euclide ſtudiarono di trouare nuoui modi, ò inuertendo l'ordine de' libri, ò tralaſciando alcune propoſizioni, e reducendole à Corollarij, ò aggiungendone delle nuoue, non oſtante è certiſſimo, che queſti huomini inſigni hanno arricchito di belliſſimi penſieri le buone lettere, ma non sò ſe apportano vtile ſi grande agli ſtudioſi, come s'eſperimenta dagl'Elementi d'Euclide. Eſſi ritengono quella ammirabile diſpoſizione, che nota Proclo, le di cui parole ſono: Elementaris verò ipſius peritæ Geometricarum rerum contemplationis inſtitutio inuincibilem, perfectamque habet enarrationem, dalle definitioni, da i Poſtulati, e dagli Aſſiomi, che ſono quei ſempliciſſimi principij, ne i quali ſi fonda tutta la ſtruttura Matematica, procede alla proua di propoſizioni ſemplici, che chiama Elementi, e ſeruono come di mezzi termini per dimoſtrare le coſe più difficili, e più compoſte; e diuiſe tutta l'opera in quindici Elementi, nel primo de' quali tratta della generatione de i triangoli, e parallelogrammi, dell'vgualità degli angoli, de i lati, e loro ſuperficie; nel ſecondo dimoſtra le paſſioni, e proprietà, che accadono alla retta linea variamente diuiſa, ed aſſegna la differenza di quanto il quadrato d'vn lato del triangolo obliquangolo ſupera, ò manca da i quadrati degli altri due lati; nel terzo manifeſta le paſſioni delle rette tirate nel circolo, e degli angoli, ed archi, che contengono; nel quarto s'eſpongono l'inſcrittioni, e circoſcrittioni de' Poligoni regolari nel circolo; nel quinto compara le proportioni, che cadono frà le grandezze in genere; nel ſeſto dimoſtra le proportioni de i piani rettilinei, e loro lati, introduce la compoſitione delle proportioni, e dichiara la proportione degli archi, ed angoli ne i circoli vguali; nel ſettimo parla delle paſſioni, e proportioni de i numeri primi, e compoſti ſecondo i varij modi di miſurarſi; nell'ottauo proua varie paſſioni de' numeri proportionali, e ſimili, e de' loro lati; nel nono manifeſta le paſſioni de' numeri continui proportionali, pari, e diſpari; nel decimo le paſſioni delle quantità rationali, ed irrationali; nell'vndecimo ſpiega la generazione de' corpi ſolidi, loro ſimilitudine, e la proportionalità de i parallelepipedi; nel duodecimo fà la comparatione della proportione de' circoli à quella, che cade frà i quadrati de' loro diametri, de' ſimili Poligoni inſcritti in eſſi, e la proportionalita delle ſfere, Piramidi, Coni, e Cilindri; e nel decimoterzo aſſegna varie paſſioni, che accadono alla linea diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, fà la generazione di cinque corpi regolari, li comprende nella data ſfera, compara il diametro della ſfera à i lati de' corpi regolari iſcritti, e i medeſimi lati frà di loro. L'Elemento decimoquarto, col ſeguente, alcuni ò per la conſonanza della materia, ò per la ſimilitudine della forma, l'attribuiſcono ad Euclide, altri ad Ipſicle Aleſſandrino, di che ſi parla nel principio d'eſſo libro, e nel diſcorſo ſi legge la comparatione del Dodecaedro all'Icoſaedro tanto in ſolidità, quanto in ſuperficie; e finalmente nel decimoquinto ſi vede la ſcambieuole iſcrittione de i corpi regolari frà di loro.

Proc. ſup. 1. Eucl. cap. 5. lib. 2.

Sò che ſi potrebbe auanti ogn'altra coſa trattare delle proportionalità, cioè ſimilitudini delle proportioni nelle grandezze in genere facendone il primo Elemento, quaſi independente dagl'altri, ma ſe ſi conſidera bene la diſpoſitione data da Euclide à queſti Elementi, in niſſun altro luogo fuorche nel quinto poteuano meglio collocarſi, ſtante che la proportionalità è del genere de' relatiui, mentre riſulta dalla comparatione di due, ò più proportioni frà loro; onde prima di ſaperſi, che coſa è quantità, e che coſa è figura, e prima di concepirſi il modo della comparatione, e la relatione frà due ſole grandezze, mal potranno ſcorgerſi le proportionalità, che frà più di due quantità accadono; e perciò con grande artifitio Euclide, conoſcendo che l'intelletto humano procede da i noti à i men cogniti, da i principij alli principiati, da ſemplici à compoſti, e dagl'aſſoluti à i relatiui, prima d'ogn'altra coſa, ſpiega la generatione della quantità, e delle figure più ſemplici, e comparandone due per volta, come fà ne i primi quattro Elementi, con le voci d'vguale, duplo, triplo &c. inſinua il modo della comparatione, con che viene ad introdurre vna certa abilità à poterſi poi più facilmente concepire la natura delle altre relationi meno ſemplici, come ſono le comparationi delle proportioni frà loro ſpiegate nel quinto Elemento; e ritenendo ſempre il medeſimo ordine, nel ſeſto Elemento introduce la compoſitione delle proportioni, ed in queſta forma dalla comparatione frà due ſole quantità, che è la ſempliciſſima, paſſa alla comparatione delle proportioni frà loro, che è la meno ſemplice, e da queſta s'inoltra alla compoſitione delle proportioni, che è la compoſta. Del medeſimo modo il ſettimo Elemento, che pare ſi regga da per ſè, non poteua occupare altro luogo, ò perche regge i ſeguenti Ottauo, Nono, e Decimo, ò perche i numeri, che poſſon conſiderarſi come linea, ſuperficie, e corpo, ſono mezij di participatione frà piani, e ſolidi, e doueuano frà eſſi conſtituir-

ſtituirſi, e collocarſi; quindi è che l'Vndecimo, e Duodecimo; ancorche dipendano da i primi ſei, e non da i quattro intermedij, ſi ſerbarono all'vltimo, e riuſcì felicemente per la commodità di continuare il trattato de' ſolidi ne i libri conſecutiui.

E però il Signor Vitale Giordano, Autore di queſt'Opera, Geometra celebre frà i migliori della noſtra età, dopo lunghe fatiche fatte nello ſpatio di ventiquattr'anni, hauendo aggiuſtato vn Corſo Matematico, oue pienamente ſi tratta non ſolo la parte Teorica, però anche la prattica vtiliſſima alle indigenze della vita humana, gli parue in queſto primo Tomo degli Elementi ſeguitare il bell'ordine d'Euclide, col quale il Megarenſe ſi reſe ammirabile al Mondo, come diſſe Proclo:

Procl. ſup. 1. Eucl. lib. 2. cap. 5.

Præcipuè verò circa Geometricam elementorum inſtitutionem eum quiſpiam admirabitur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa diſtribuit theorematum, atque problematum; etenim non ea aſſumpſit omnia, quæ poterat dicere, ſed ea dumtaxat, quæ elementari tradere potuit ordine. E perche ne anche nel nome diſcrepaſſe dal ſuo Anteſignano, volle al volume dargli quello d'Euclide reſtituto, hauendolo reſtituito al ſuo priſtino ſplendore, e con tal chiarezza, e facilità ſpiegato, che ogni principiante potrà goderlo ſenza interpretatione di Maeſtro alcuno. Del Signor Vitale, ſenza adulazione può dirſi; Quod totam artem prudentiſſimè, ac planiſſimè tractatam, admirabili, ac penè diuina demonſtrandi facilitate complectatur. Vedonſi ſpeſſi luoghi appartenenti ad altre parti della Filoſofia addotti con ogni grauità, ornati d'eleganze, ſfugge ſempre la temeraria conſuetudine di biaſimare i Scrittori, anzi loda i celebri, e compatiſce i deboli, & adducendo le ſue ragioni, perſuade colla verità più toſto, che con artificio; non dice tutto quello, che poteua dire, ne tralaſcia tutto ciò, che altri hanno tralaſciato, ma ben sì adduce quel che appartiene alla materia d'Elementi. Rimuoue affatto tutti i principij, che non ſono per ſe noti, ò che non poſſono ſenza immenſa fatica dimoſtrarſi, come improprij dell'inſtituto Matematico; commuta la definitione delle parallele in altra atta à ſpiegare la loro propria natura; dimoſtra qual poſitione debbano hauere le rette, che diſteſe in vn medeſimo piano, e continuate in infinito mai ſcambieuolmente s'auuicinano, ne ſi ſcoſtano, e dopo la propoſizione 26. del primo Elemento, comparando la linea retta alla curua, e conoſcendo eſſer impoſſibile, che vna retta ſia parallela ad vna curua, ſenza turbare in coſa alcuna l'ordine d'Euclide, con quel ſolo principio dimoſtra tutti gli Elementi delle

parallele, proua il poſtulato, ch'è quinto in Proclo, Campano, e Commandino, cd aſſioma 13. nel commento di Clauio. Conuince le oppoſizioni fatte ad Euclide ſopra i principij della proporzione, e ſoſtenendo la 6. definizione del quinto Elemento, dimoſtra, che ſi danno quattro grandezze in natura, delle quali preſi gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicazione, e preſi gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, parimente ſecondo qualunque multiplicazione, ſempre gli vguali multiplici della prima, e terza, ò ſuperano, ò ſono vguali, ò minori degli vguali multiplici della ſeconda, e quarta; e riuoltoſi al principio, che riguarda la compoſizione delle proportioni, materia, ò non toccata ò infelicemente trattata dagli altri, dopo la decima ottaua propoſizione del ſeſto Elemento, dimoſtra, che di quante grandezze ſi vogliano la proportione della prima all'vltima è compoſta delle proportioni intermedie, e dopo facilmente conuince, che di quante grandezze ſi vogliano continue proportionali, la proportione della prima all'vltima è multiplice della proportione della prima alla ſeconda per vno meno il numero de i termini continui proportionali.

Alla publicazione di queſta vtiliſſima opera reſiſteua inuincibilmente la naturale modeſtia dell'Autore, ma non meno le di lui grauiſſime occupazioni cagionateli dalla quotidiana lettura priuata in ſua caſa, e publica nella Reale Accademia ſtabilita dal Rè Chriſtianiſſimo in Roma, le quali non laſciandolo vn momento di tempo reſpirare, non che à poterſi impiegare in altra coſa di rilieuo, giuſtificauano la ſua impoſſibilità di attender alla perfettione di queſt'opera neceſſaria, come eſſo diceua, per poter'vſcire alla ſtampa. Ma non ceſſando io di combattere colla mia importunità la di lui renitenza, l'induſſi alla fine à cedere al mio deſiderio, anzi al publico beneficio; l'ottenni però con vna condizione à me indeſpenſabilmente da lui preſcritta, di douermi io preciſamente prender la cura, ed il peſo di darle quell'vltima perfettione, la quale eſſo ſtimaua neceſſaria per la ſtampa, e per la quale ſi dichiaraua inhabilitato dalle predette ſue occupazioni. Conoſcendo però io eſſere queſt'opera già ridotta dall'Autore à ſegno, che poco, anzi nulla vi mancana per quella perfetta forma, che eſſo richiedeua, accettai di buon'animo l'incumbenza, la quale perciò da me facilmente adempiuta, ſtabilì in poco tempo la publicazione di queſt'opera; à queſta, ò Corteſe Lettore, per tuo maggior'vtile, e minor incommodo, volli aggiungere del mio la preſente prefazione per renderti con eſſa inſtruito (prima di obligarti à tutta la lettura del Volume) dell'ordine, e qualità

delle materie, ch'in essa si trattano, credendo io di poter ciò fare, se non più elegantemente, almeno più esattamente d'ogn'altro, sì per esser à quest'hora sopra venti anni, che come discepolo, & amico godo familiarmente della conuersazione de' suoi pensieri, e de' suoi studij, come ancora per il dett'obligo dall'Autore impostomi, e da me religiosamente adempito, di hauerla à riuedere attentamente più volte prima di consegnarla alla stampa; intorno alla quale, con l'aiuto di molti amici, ottenni ancora dall'Autore; per lo stesso fine di seruire alla maggior tua commodità, ed vtilità, che te la concedesse nel nostro volgare idioma Italiano, perche essendo questo copiosissimo, e bastante à spiegare in qualunque scienza con somma facilità, e felicità tutt'i concetti del nostro intelletto; già nell'auuenire non parrà necessità miserabile, ma più tosto consuetudine antica, ò assuefattione degli huomini quella di fraudare gli anni migliori della vita allo studio della Filosofia, per impiegarli nella grammatica delle lingue Greca, e Latina.

Io non saprò spiegare l'vtile grande, che apporterà quest'opera à tutti gli affettionati alla facoltà Matematica meglio, che con le parole di Dionisio Lambino, parlando di Cicerone à Carlo Rè Christianissimo: Quantum autem ex omnibus operibus fructum percepturi simus ex eo cognoscere licet, quod ex hoc volumine tantam ad litterarum studiosos vtilitatem peruenire videamus. *Da per sè medesimo dichiara questo primo Tomo il commodo grande, che denono apportare gli altri, quali sono già in ordine per seguire la stampa, se tù gradirai, e la buona intentione dell'Autore, e la mia passione di giouarti, e seruirti, la quale doucrà scusarmi, ò farmi compatire di qualunque eccettione, che per qualsiuoglia riguardo possa mai trouarsi in quest'opera, come prouenuta per mio solo difetto, sì come deuesi alla gloria dell'Autore tutto ciò, che vi trouerai di buono. Viui felice.*

Imprimatur,

Si videbitur Reuerendiss. Patri Magistro Sacri Palatij Apostolici.

I. de Ang. Archiep. Vrb. Vicesg.

Imprimatur,

Fr. Raimundus Capisuccus, Sacri Palatij Apost. Mag. Ord. Præd.

CHE

CHE COSA SIA MATEMATICA, E quali sieno le sue parti.

MATEMATICA chiamiamo tutta quella parte di Filosofia, che riguarda la quantità.

Due generi di quantità hà per oggetto la Matematica, cioè la quantità continua, e la quantità discreta.

Qualunque estensione si chiama quantità continua, ed ogni moltitudine si dice quantità discreta.

La quantità continua si diuide in trè generi d'estensioni. La prima è quell'estensione, che costituisce lo spazio. La seconda è la duratione, che volgarmente vien chiamata tempo; e la terza è il moto successiuo, che si dice moto perenne.

Quindi è, che la quantità continua cade sotto la nostra cognitione, alle volte come cosa mobile, ed altre volte come cosa immobile; cioè la consideriamo immobile quando ci forma lo spatio, e mobile, quando la consideriamo come tempo, ò moto successiuo. Li Matematici però, benche intendano per quantità continua l'estensione materiale, con tuttociò la considerano astratta, cioè disgiunta, da ogni materia.

La quantità discreta si considera, ò assoluta per se, ouero comparatiua ad altra cosa.

Assoluta per se s'intende, quando quella moltitudine ò è considerata in astratto, come se si proferisse cento, mille &c. senz' altra espressione; ouero è considerata in concreto, cioè applicata à qualche oggetto, come se dicessimo, trenta Naui, mille huomini &c.

Comparatiua ad altro s'intende, quando quella moltitudine è comparata al suono, ò voce &c. come succede nelle cose della musica.

Finalmente la quantità si diuide in quantità rationale, ed irrationale.

Rationale si dice quella quantità, della quale, rispetto à qualche misura, se ne possono esprimere le parti; e quella quantità, della quale, in riguardo à qualche misura, non se ne possono esprimere le parti, si chiama irrationale.

La Matematica si diuide in quattro generi di Dottrine, cioè Geometria, Aritmetica, Armonica, ed Astronomia.

La Geometria è scienza, la quale, col mezzo d'alcuni notissimi principij, dimostra tutte le passioni, ò proprietà, che accadono alla quantità continua immobile; onde insegna anco à misurare la grandezza della Terra, e di tutte l'altre cose materiali.

L'Aritmetica è scienza, che riguarda la quantità discreta, cioè la moltitudine assoluta per se, si riuolge intorno alle passioni numeriche, ed esplica l'arte di ben conteggiare.

L'Ar-

L'Armonica è ſcienza, che riguarda la quantità diſcreta, cioè la moltitudine comparatiua ad altro, conſidera, ed eſplica l'Armonia, ò concento ſonoro.

L'Aſtronomia è ſcienza, che conſidera le paſſioni della quantità continua mobile, eſplica, e dimoſtra l'apparenze, e moti de'Corpi Celeſti.

Annotatione.

PErche, come s'è detto, la quantità ſi diuide in quantità continua, e diſcreta, delle quali la continua ſi diſtingue in mobile, ed immobile, e la diſcreta in aſſoluta per sè, e comparatiua ad altro; hauendo gl'Antichi Matematici conſiderato nella quantità queſti quattro accidenti, vollero, che la Matematica ſi diuideſſe in quattro ſoli membri; cioè, in Geometria, che riguarda la quantità continua immobile; in Aritmetica, che riguarda la quantità diſcreta, ò moltitudine aſſoluta per se; in Armonica, ò Muſica, che riguarda la quantità diſcreta comparatiua ad altro; ed in Aſtronomia, che conſidera la quantità continua mobile: Queſti quattro membri, ò parti (ciaſcuna delle quali riceue altre ſubdiuiſioni, come à ſuo luogo ſi dirà) ſi diuidono in ſpeculatiua, e pratica.

La ſpeculatiua è quella, che riguarda ſolamente la dimoſtratione delle coſe; e la pratica è quella, che riguarda ſemplicemente l'operatiua.

La Dimoſtratione ò è Theorematica, ouero Problematica.

La Dimoſtratione Theorematica è quella, che ne certifica delle paſſioni, ò proprietà d'vna, ò più quantità in qualche modo eſpoſte, ò ſcambieuolmente adattate; laonde il Theorema non è altro, ſe non che la dimoſtratione da farſi in qualche coſa propoſta, ſecondo vna data Ipoteſi.

La Dimoſtratione Problematica è quella, che ci rende certi della poſſibilità di coſtruire qualche coſa propoſta, e perciò il Problema è quello, che c'inſegna à ſoluere, per alcune quantità date, qualche coſa propoſta.

Delli Theoremi, e Problemi, alcuni ſi dicono elementi, altri elementari, ed altri ve ne ſono ſeparati dalla forza, e ſignificato di queſti.

Elementi ſi dicono quei Theoremi, e Problemi, che ſeruono per la coſtruttione, e dimoſtratione dell'altre coſe, cioè che ſono come principij ordinati à dimoſtrare, e coſtruire altri Theoremi, e Problemi, e che, ſenza quelli, tutte le altre coſe non ſi potrebbero coſtruire, e dimoſtrare.

Quei Theoremi, e Problemi ſi dicono elementari, li quali ſeruono alla coſtruttione, e dimoſtratione di molte altre coſe, ma non ſeruono così vniuerſalmente per la coſtruttione di tutte l'altre coſe, come ſi diſſe degl'Elementi.

Quelli poi, che non ſeruono per la coſtruttione, e dimoſtrationedi più coſe, nè dimoſtrano qualche coſa di coſpicuo, ſono fuori di queſto nome elementari.

Doppo d'hauer definito, che coſa ſia Theorema, e Problema, parmi à propoſito, prima che ſi entri in altro, definire, che coſa ſia Lemma, Scolio, Corollario, Poriſma, Deduttione, Caſo, ed Iſtanza.

Il Lemma è vn premeſſo, che ſi fà in agiuto alla propoſitione ſeguente.

Quando, in agiuto di qualche propoſitione di materia particolare, fà biſogno premettere qualche Theorema, ò Problema, che tratti d'altra materia, quel premeſſo da Matematici vien chiamato Lemma.

Lo Scolio denota vna breue eſpoſitione, ò interpretatione, ed alle volte qualche aggiuntione all'antecedente propoſitione.

Il Corollario è vna certa conſeguenza, che ſi caua da quel che ſi è dimoſtrato nella propoſitione antecedente, diuerſa da quello, che ſi è concluſo in eſſa propoſitione.

Poriſmi, ſecondo gl'Antichi, ſono certe propoſitioni, che ſi poſſono eſporre in forma di Problemi, ed anco in forma di Theoremi; non ſono aſſolutamente Problemi, ne meno Theoremi, ma tengono miſto ſignificato, che poſſono denotare, e l'vno, e l'altro.

Secondo i Moderni poi, per Poriſma ſi prende qualche concluſione, che ſi caua dal problema riſoluto, la quale non hà niente di commune con quello, che s'è propoſto, e ſi prende come Theorema certo, e dimoſtrato.

La Deduttione, nel Problema, è il paſſaggio, che ſi fà dal propoſto ad vn altro Problema, il quale ſerue di mezzo per la ſolutione del Problema propoſto.

Il Caſo è la traſpoſitione della coſtruttione, ò dimoſtratione.

Nè i Problemi, e Theoremi, qualche volta vna coſa può accadere in varij modi, e perciò, ſecondo vn modo, ſi fà la coſtruttione, e dimoſtratione, che ſi richiede, come à ſuo luogo ſi dirà; e di nuouo, per ogn'altro modo, ſi fà parimente la coſtruttione, e dimoſtratione, che per lo più è differente dall'altra, e così verrà dimoſtrato quanto s'è propoſto, ſecondo tutti i varij modi, e queſti modi varij ſono quelli, che ſi chiamano caſi.

L'Iſtanza è quella, che impediſce tutt' il corſo dell'oratione, opponendoſi ò alla coſtruttione, ouero alla dimoſtratione, la quale non deue eſſere riceuuta per vera, ma biſogna rifiutarla, e dimoſtrare, che ſia falſa.

Premeſſa la cognitione di quanto s'è detto, parmi tempo di dare principio alla ſpiegatione degl'Elementi d'Euclide, per eſſer quelli la baſe di tutto queſto noſtro corſo di Matematica; e per procedere coll'ordine del medeſimo Euclide, ſpiegheremo prima tutti li principij neceſſarij per l'intiera cognitione di queſti Elementi, i quali ſi diuidono in trè generi, cioè, Definitioni, Poſtulati, & Aſſiomi.

Definitioni ſi chiamano, in Matematica, quei principij, che ſpiegano la natura delle coſe, e li vocaboli dell'Arte.

Quei principij, li quali ſono per sè tanto noti, e chiari, che non hanno biſogno d'alcuna dimoſtratione, ſi che ſono conceduti da tutti per veri ſenz'alcuna dubitatione, ſi dicono Poſtulati.

Gli aſſiomi, ò communi ſentenze, ſono certe cognitioni dell'animo, che non ſolo in Matematica, ma in tutte l'altre Dottrine, ſono talmente manifeſte, & euidenti, che, chiunque ne concepiſce rettamente i vocaboli, per niſſuna ragione può diſſentire, e non riceuerli come veri, e reali.

EVCLIDE RESTITVTO

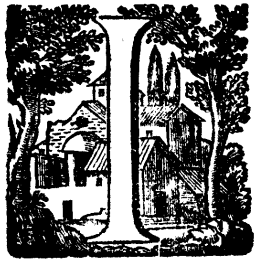
DA

VITALE GIORDANI

ELEMENTO PRIMO.

DEFINITIONI.

I.



IL PVNTO è quello, che non hà parte alcuna, *cioè, che non occupa ſpatio alcuno.*

II.

La linea è vna lunghezza ſenza larghezza.

III.

Gli eſtremi della linea ſono punti, *cioè, la linea terminata comincia dal punto, e finiſce nel punto.*

IV.

Di tutte le linee, che ſi poſſono ſtendere da punto à punto, la breuiſſima ſi chiama linea retta.

Quella poi, che non è la breuiſſima, ſi chiama linea curua.

V.

Superficie ſi chiama quella, che hà ſolamente lunghezza, e larghezza, *ouero il fluſſo laterale della linea ſi chiama ſuperficie.*

VI.

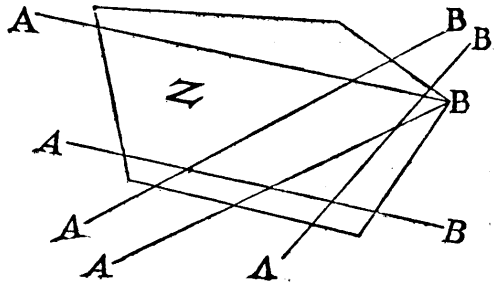
Gli eſtremi della ſuperficie ſono linee.

Perche la ſuperficie è il fluſſo laterale, ò tranſuerſale della linea, perciò la ſuperficie comincia dalla linea, e finiſce nella linea; onde gli eſtremi della ſuperficie ſono linee.

VII.

Quando vna retta linea è diſteſa, ſecondo tutte le poſiture, ſopra d'vna ſuperficie, ed in ogni poſitura giace con tutte le ſue parti in eſſa ſuperficie, quella ſuperficie, ſecondo Herone, la chiameremo ſuperficie piana.

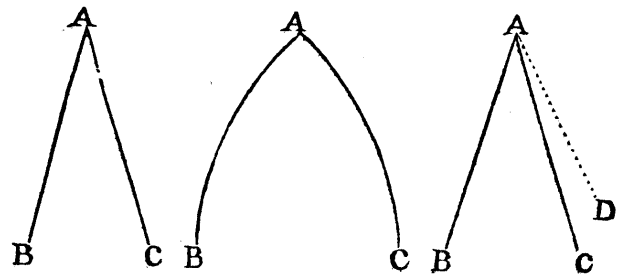
S'intenda qualsiuoglia retta linea A B, distesa sopra la superficie Z, secondo qualunque positura; se tutte le parti della retta A B, sempre, ed in ogni positura, saranno nella superficie Z, all' hora la superficie Z la chiameremo superficie piana.



VIII.

La scambieuole inclinatione di due linee, poste in vn medesimo piano, e concorrenti frà di loro in modo, che nõ siano nella medesima dirittura, si chiama angolo piano.

Si concepiscano le due linee B A, C A, poste in vn medesimo piano, e concorrenti in qualche punto A in modo, che non facciano vna sola linea, ma l'vna sia inclinata all'altra: Hor quella scambieuole inclinatione, cioè quell'apertura, che le linee B A, C A costituiscono nel punto A, si chiama angolo piano.



Quindi è, che la quantità dell'angolo non consiste nella lunghezza delle linee B A, C A, mà nella scambieuole inclinatione, ò apertura, che costituiscono nel concorso A. Et è d'auuertirsi, che qualunque angolo piano si nota con tre lettere, come si vede nella figura, e quando si nomina, si fà col mezzo di quelle tre lettere, ponendo nel secondo luogo quella lettera, doue le linee fanno il concorso, cioè doue stà l'angolo, e così, volendo nominare vno delli notati angoli, si dirà l'angolo B A C, ò vero l'angolo C A B.

E anco da notarsi, che l'angolo non è lunghezza, ne superficie, ne meno corpo, mà è solamente il modo, col quale due linee sono scambieuolmente inclinate; e l'angolo piano si dice essere maggiore, ò minore, secondo che l'inclinatione, ò apertura di quelle linee, che lo contengono, è maggiore, ò minore; e così diremo, che quanto la linea A C è più inclinata alla linea A B, tanto l'angolo si dirà essere minore; e, quanto sarà meno inclinata, tanto l'angolo B A C si dirà essere maggiore.

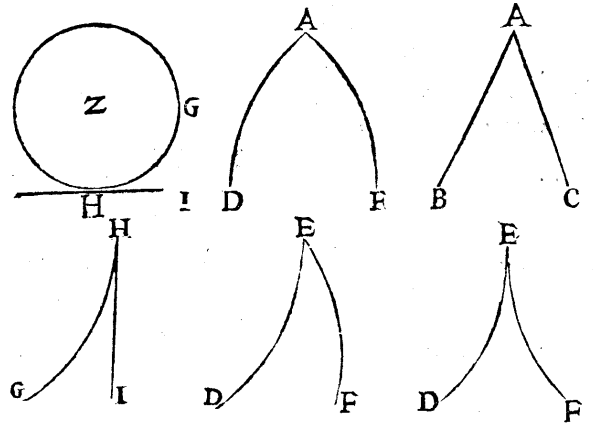
Oltre à ciò intendasi tirata la retta A D in modo, che faccia qualche angolo con la retta A C, la medesima retta A D farà angolo con la retta A B, donde è manifesto, che la retta A C, diuide l'angolo D A B nelli due angoli B A C, C A D, e perciò l'angolo di natura sua è diuisibile; hor se l'angolo è diuisibile per necessaria conseguenza sarà ancora quantità, e stimo tanto difficile à potersi concepire, che il diuisibile non sia quantità, per quanto è difficile ad intendere, che l'indiuisibile sia quantità: conchiudiamo dunque, che l'angolo benche non sia lunghezza, non superficie, ne corpo; contuttociò essendo cosa diuisibile non può lasciare di non essere quantità.

IX.

Quell'Angolo, ch'è contenuto da linee rette, si chiama angolo rettilineo.

Quello ch'è contenuto da linee curue, si dice angolo curuilineo; e quello, ch'è contenuto da vna retta, e da vna curua, si chiama angolo mistilineo.

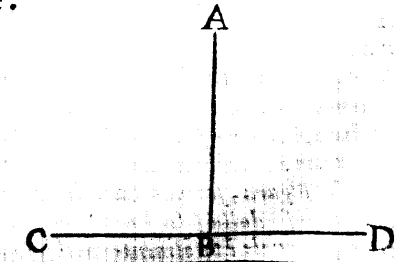
Nella figura seguente, l'angolo B A C, contenuto dalle rette B A, C A, si chiama angolo rettilineo, l'angolo D E F, contenuto dalle curue D E, F E, ouero D A, F A, si dice angolo curuilineo; e l'angolo G H I, contenuto dalla retta H I, e dalla curua G H, si chiama angolo mistilineo. Oltre à ciò, quando l'angolo è contenuto da vna linea curua, e da vna linea retta, e la retta continuata non sega in modo alcuno la linea curua, quell'angolo si dice angolo del contatto, come l'angolo G H I della figura Z, ed il punto H si chiama punto del contatto.



X.

Se vna retta linea cade sopra d'vn altra linea retta, e gli angoli, che fà dall'vna, e l'altra parte, sono frà di loro vguali, quelli si chiamano angoli retti; e la linea, che cade, si dice essere perpendicolare à quella, sopra la quale cade.

Cada la retta A B sopra la retta C D, e faccia l'angolo A B D vguale all'angolo A B C, in tal caso gli angoli A B D, A B C, si chiameranno angoli retti, e la linea retta A B, si dirà essere perpendicolare alla retta C D.

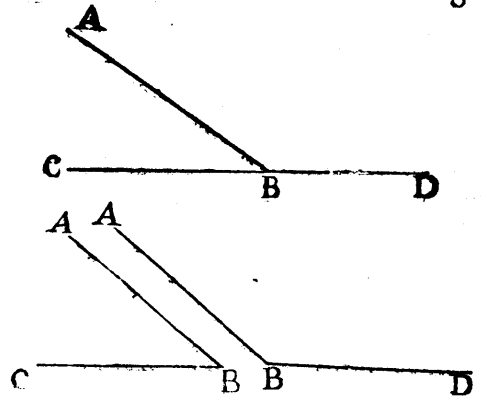


X I.

Angolo ottuſo ſi chiama quello, ch' è maggiore del retto.

X I I.

Quell' angolo, ch'è minore del retto, ſi chiamerà angolo acuto.



Cada la retta A B ſopra la retta C D, e faccia gli angoli A B D, A B C, frà di loro ineguali, cioè l'angolo A B D maggiore dell'angolo A B C; ſe l'angolo A B D ſarà maggiore d'vn' angolo retto, lo chiameremo angolo ottuſo; e ſe l'angolo A B C è minore d'vn' angolo retto, quello ſi chiamerà angolo acuto.

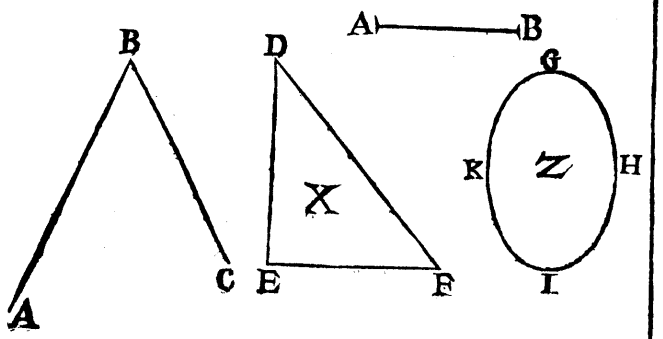
X I I I.

Termine è quello, ch'è eſtremo di qualche coſa.

Il punto, ch'è eſtremo della linea, ſi dice eſſer termine della linea; la linea, che è eſtremo della ſuperficie, ſi dice eſſer termine della ſuperficie: ed il medeſimo s'intende d'ogn'altra coſa.

X I V.

Figura ſi chiama quella, ch'è contenuta da vno, ò più termini.

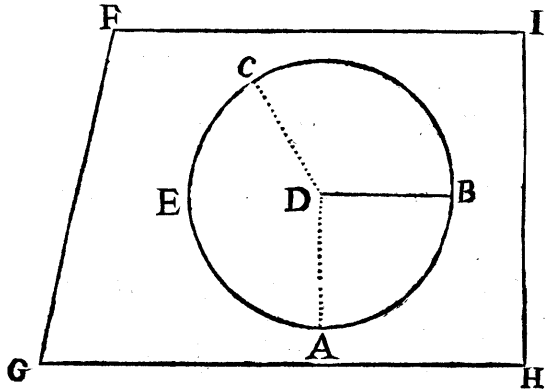


Non tutte le coſe, che hanno termini, ſi chiamano figure, ma ſolo quelle, che ſono circondate, e totalmente racchiuſe dentro à i ſuoi termini. v. g. la linea A B, è terminata dalli punti A, & B; e perche queſti non hanno eſtenſione alcuna, perciò non poſſono circondare, e racchiudere la linea A B; e, ſecondo il ſenſo della definitione, la linea A B non è figura. Similmente, la ſuperficie A B C non è figura, ſtante che non è racchiuſa tutta dentro alli ſuoi termini, ma è indeterminata verſo A C. Figura, ſecondo Euclide, ſi chiama la notata Z, la quale è totalmente racchiuſa dalla ſola linea G H I K; come anco ſi chiama figura la notata X, la quale è totalmente racchiuſa dentro i termini D E, E F, F D.

X V.

Il circolo è vna figura piana, contenuta da vna ſola linea, che ſi chiama circonferenza, alla quale tutte le rette linee, che dal punto di mezzo vi cadono, ſono frà di loro vguali.

In queſta definitione Euclide c'inſegna, che coſa dobbiamo intendere per circolo, e dice; ch'ogni qual volta s'haverà vna figura piana, contenuta da vna ſola linea, che chiameremo circonferenza, e tutte le rette linee, tirate dal punto di mezzo alla circonferenza, ſaranno frà di loro vguali, quella figura ſi chiamerà circolo: laonde, acciòche quella figura ſia circolo, è neceſſario che habbia tre conditioni, cioè; la prima, che ſia figura piana; la ſeconda, che ſia contenuta da vna ſola linea, come la notata A B C, la quale ſi chiama circonferenza; e la terza, che tutte le rette linee, come D A, D B, D C, tirate dal punto di mezzo D, alla circonferenza, ſiano frà di loro vguali. Quando ſi trouerà dunque vna figura, che habbia le tre antedette conditioni, quella ſi chiamerà circolo.



Il Signor Gio: Alfonſo Borelli, imitando Euclide nella definitione della Sfera, pone la definitione del Circolo nel ſeguente modo.

La figura piana deſcritta dalla reuolutione d'vna terminata retta linea, intorno ad vno delli ſuoi eſtremi fiſſo immobile, ſin che ritorna nel luogo d'onde partì, ſi chiamerà circolo, e la linea deſcritta dall'eſtremo mobile di quella retta linea, ſi chiamerà circonferenza di circolo.

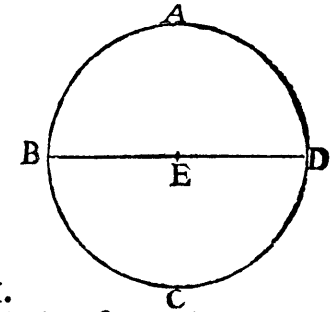
Cioè, ſe concepiremo immobile vno degli eſtremi di qualunque retta D C, come l eſtremo D, intorno al quale, nel piano F G H I, ſia reuoluta la retta D C, ſin che ritorna nel luogo, d'onde partì, ſarà deſcritta la figura piana A B C E, la quale hà le tre conditioni antedette, cioè; ſarà figura piana, ſtante che la reuolutione è fatta nel piano F G H I, ſarà contenuta dalla ſola linea A B C E, diſegnata dall'eſtremo C, che ſi chiama circonferenza, e tutte le rette D C, D A, D B &c. ſono frà di loro vguali, poiche rappreſentano la longhezza della retta D C in tutti i ſiti del piano F G H I, mentre nella ſua reuolutione deſcriſſe il circolo A B C.

X V I.

Quel punto, intorno al quale ſi riuolſe quella retta linea, che deſcriſſe il circolo, ſi chiama centro del medeſimo circolo, che, nella figura antecedente, *ſarà il punto D.*

XVII.

Ogni retta linea, che passa per il centro del Circolo, e termina con ambi gli estremi nella circonferenza del medesimo circolo, si chiama diametro del Circolo.



Per il centro E, del circolo A B C D, passi qualunque retta B E D, e concorra con la circonferenza del circolo da ambe le parti in B, & D, sarà la retta B D quella, che chiamaremo diametro d'esso circolo.

XVIII.

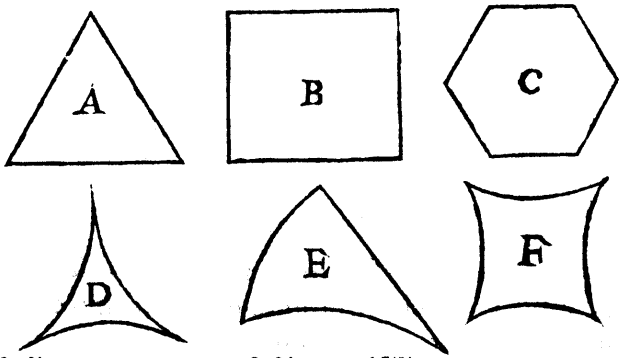
Il mezzo circolo ouero semicircolo è la figura piana, contenuta dal diametro, e da quella parte di circonferenza, detratta dal diametro.

Nella figura sopra notata, la figura piana contenuta dal diametro B D, e dalla linea B A D, ch'è parte della circonferenza, ouero quella, ch'è contenuta dal diametro B D, e dalla linea B C D, si chiama mezzo circolo.

In questa definitione tacitamente si suppone, ch' il diametro B D diuida il circolo A B C D in due parti vguali, il che facilmente si potrebbe dimostrare in questo luogo, mà non essendosi per anco parlato della dimostratione, per non turbare l'ordine d'Euclide, nell'esporne quì la definitione, che sopra s'è spiegata, se ne trasporta la dimostratione dopo la terza propositione del primo libro.

XIX.

Le figure, che sono contenute da linee rette, si dicono rettilinee; quelle, che sono contenute da linee curue, curuilinee; e quelle, che sono contenute da linee rette, e da linee curue, si dicono mistilinee.



Nella figura seguente, le notate A, B, & C, che sono contenute da linee rette, si dicono rettilinee; le notate F, & D, curuilinee; e la notata E, ch'è contenuta da linee curue, e rette, si chiama mistilinea.

XX.

Delle figure piane quella, ch'è contenuta da tre sole linee, si dice trilatero, ouero triangolo; *come le notate A, D, E.*

XXI.

Quella, ch'è contenuta da quattro linee, si chiama quadrilatero, ò quadrangolo; *come le notate B, F.*

XXII.

E se sarà contenuta da più di quattro linee, si chiamerà moltilatero; *come la notata C.*

XXIII.

Delle figure trilatere quella, che hà tre lati vguali, si chiama triangolo equilatere, *come la notata A. della figura seguente.*

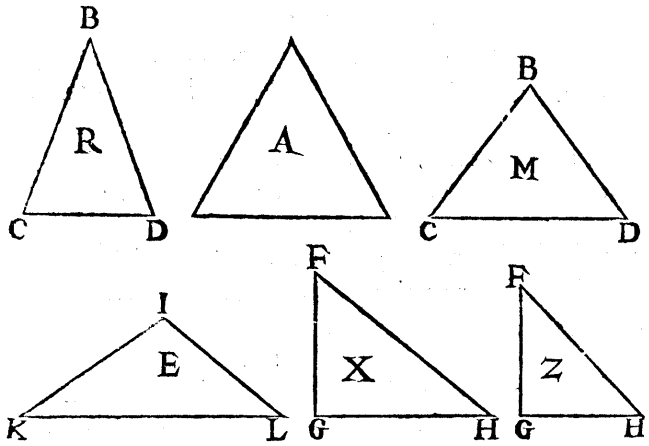
XXIV.

Quella che hà due lati vguali, si chiama isoscele, *come le notate R M Z.*

XXV.

E quella, che hà tutti tre i lati ineguali, si chiama scaleno, *come le notate X, ed E.*

Sin quì Euclide hà definito i triangoli per la comparatione de'i lati, e conseguentemente li definisce per la comparatione degl'angoli.



XXVI.

Ogni triangolo, che haurà vn'angolo retto, si chiama triangolo rettangolo, *come li notati X, Z.*

XXVII.

Se haurà vn'angolo ottuso, si dirà ambligonio, *come il notato E.*

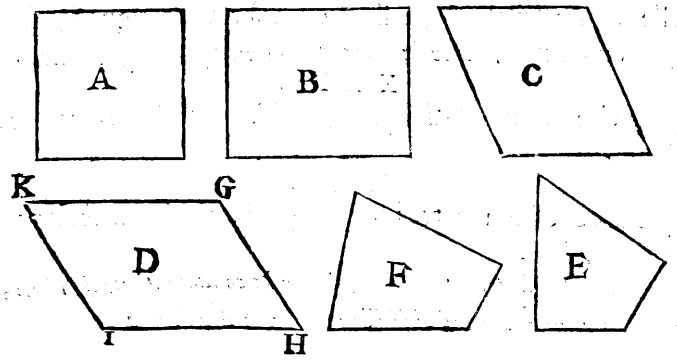
XXVIII.

E se tutti tre gli angoli saranno acuti, si chiamerà triangolo ossigonio, *come li notati A, R, M.*

D'onde è manifesto, ch'il triangolo scaleno può essere rettangolo, ed ambligonio; il triangolo isoscele può essere ambligonio, ed ossigonio.

XXIX.

Delle figure quadrilatere quella, che hà i quattro lati vguali, e tutti gli angoli retti, si chiama quadrato, *come la notata A.*



XXX.

Chiamasi quadrilungo quel quadrilatero, che hà gli angoli retti, e non tutti quattro i lati sono frà di loro vguali, *come la notata B.*

XXXI.

La figura quadrilatera, che hà tutti quattro i lati vguali, e non hà gli angoli retti, si chiama Rombo, *come la notata C.*

XXXII.

Romboide si chiama la figura quadrilatera, che hà i lati opposti vguali, e gli angoli opposti vguali, non è equilatera, ne meno hà gli angoli retti, *come la notata D.*

XXXIII.

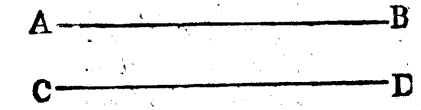
Tutte l'altre figure quadrilatere, che non hanno le conditioni delle quattro antecedenti, si chiamano trapetij, *come le notate E, F.*

XXXIV.

Due rette linee, che sono in vn medesimo piano, e continuate dall'vna, e l'altra parte in infinito, in luogo alcuno mai scambieuolmente s'auuicinano, ò allontano, le chiameremo Rette linee parallele.

Spiega Euclide la natura delle rette parellele, per la negatiua del loro scambieuole concorso, come è manifesto da quel, che definisce con le seguenti parole.

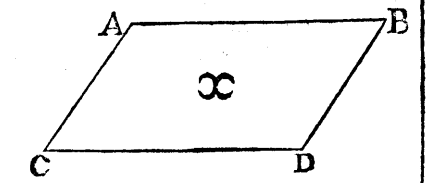
Due rette linee, che distese in vn medesimo piano, e continuate in infinito dall'vna, e l'altra parte non concorrono, si chiameranno rette linee parallele. *Mà perche si trouano alcune linee, le quali distese in vn medesimo piano, e, continuate in infinito, sempre scambieuolmente s'auuicinano, e mai concorrono, benche queste ò sono due linee curue, ouero vna linea retta, ed vna curua, come à suo luogo si dimostrerà, e le linee delle quali parla Euclide, sono linee rette; con tutto ciò, dandosi in Natura due linee in vn medesimo piano, le quali, continuate in infinito, sempre s'auuicinano, e mai concorrono, cade in dubio, se due rette linee distese in vn medesimo piano, e continuate mai concorrono, habbiano questa passione d'auuicinarsi, ò discostarsi scambieuolmente nella loro infinita estensione, il che succedendo bisognarebbe fare concetto diuerso da quello, che habbiamo delle rette parellele: hor, acciòche la definitione delle rette parallele non sia mancante, è necessario spiegarui la loro propria natura, che è di non auuicinarsi, ne scostarsi in nissun luogo della lor'estensione, e, secondo tal difinitione, diriggere il metodo alle dimostrationi, attinenti agl'elementi di esse parallele; ed à quest'effetto, seguendo la sentenza di Possidonio, Gemini, e Proclo, hò stimato necessario mutare la definitione d'Euclide, ed, in suo luogo, porui la seguente. Due rette linee, che sono in vn medesimo piano, e, continuate dall'vna, e l'altra parte in infinito, in luogo alcuno mai scambieuolmente s'auuicinano, ò allontanano, le chiamaremo rette linee parallele; se poi sia possibile, che si diano in Natura due rette linee come A B, C D le quali poste in vn medesimo piano, e continuate in infinito, in luogo alcuno della loro infinita estensione scambieuolmente s'auuicinino, ne s'allontanino, lo dimostraremo à suo luogo.*



XXXV.

Ogni quadrilatero, che hauerà i lati opposti paralleli, si chiamerà Parallelogrammo.

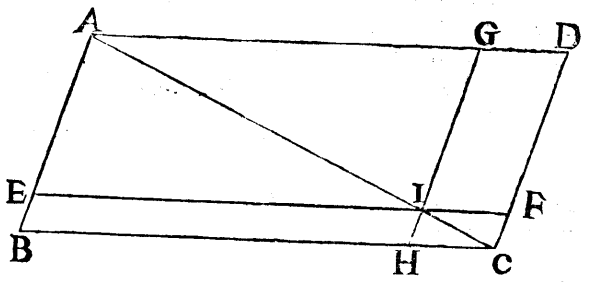
Nel quadrilatero X, se i due lati opposti A B, C D, sono frà di loro paralleli, ed ancora gli altri due lati opposti A C, B D, sono frà di loro paralleli, il quadrilatero X, si chiamerà parallelogrammo.



XXXVI.

Quando in vn parallelogrammo è tirato il diametro, ò diagonale, e due rette linee, parallele à due lati di esso parallelogrammo, si segano scambieuolmente in vn sol punto col diametro, in modo che sia diuiso il detto parallelogrammo in quattro parallelogrammi, de'quali i due, che sono segati dal diametro, si dicono stare intorno al diametro, e gli altri due, per li quali non passa il diametro, si chiamano complementi.

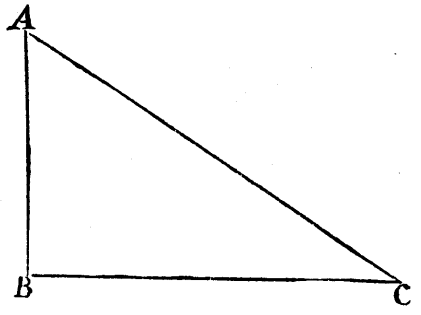
In ogni quadrilatere, la retta tirata da vn angolo all'angolo oppoſto, ſi chiama diametro, ouero diagonale, e conſiderando il parallelogrammo ABCD, il di cui diametro



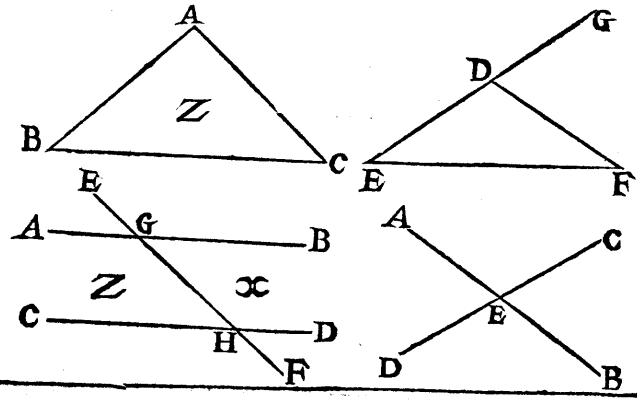
A C, nel quale ſi concepiſcano tirate le rette E F, G H, cioè E F parallela al lato B C, e la retta H G, parallela al lato C D, le quali ſi ſeghino ſcambieuolmente coi diametro A C nel ſolo punto I in modo, che tutto il parallelogrammo A B C D ſia diſtribuito in quattro parallelogrammi AEIG, IHCF, EBHI, GIFD, li due AEIG, IHCF, che ſono ſegati dal diametro A C, ſi diranno ſtare intorno al diametro A C, e gli altri due E B H I, G I F D, i quali non ſono ſegati dal diametro A C, ſi chiameranno complementi.

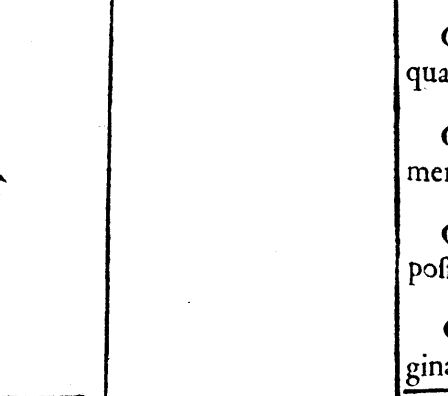
ANNOTATIONE.

1. *Ogni lato di qualunque triangolo ſi può chiamare baſe di quel triangolo: ſi che, ſe le rette A B, B C, ſi chiameranno lati, la retta A C ſi chiamerà baſe; ſe i lati A C, C B, ſi chiameranno lati, la retta A B, ſarà la baſe &c.*



2. *In qualunque triangolo, l'angolo oppoſto alla baſe ſi chiama angolo verticale; cioè, ſe la retta B C, la chiameremo baſe, l'angolo verticale ſarà il notato A; e ſe la retta A B verrà chiamata baſe, ſarà C l'angolo verticale.*





Prolun-

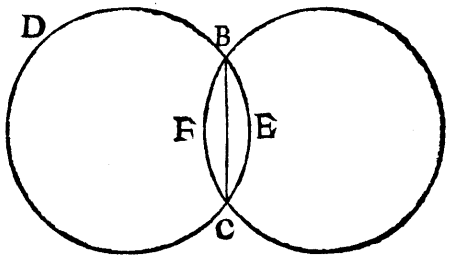
3. *Prolungato vn lato di qualunque triangolo D E F, come il lato E D, verſo G, l'angolo G D F ſi chiamerà angolo eſterno, e li due angoli D E F, D F E, ſi diranno angoli interni, ed oppoſti, riſpetto all' angolo eſterno G D F.*

4. *Se due rette linee, come A B, C D, ſono ſegate in qualunque modo da vn'altra retta E F, tutto quello, che ſi vede dalla retta E F verſo X, ſi dice eſſere da vna medeſima parte; e tutto quello, ch'è dalla retta E F verſo Z, ſimilmente ſi dice eſſere da vna medeſima parte.*

Oltre à ciò, gli angoli C H G, B G H ſi dicono eſſere alterni: e ſimilmente gli angoli A G H, D H G ſi dicono angoli alterni: l'angolo poi E G B, ſi chiama angolo eſterno; e l'angolo G H D, interno, ed oppoſto, riſpetto all'eſterno E G B; come anco gli angoli F H D, F H C ſono eſterni; e gli angoli H G B, H G A ſi dicono interni, ed oppoſti. Finalmente gli angoli B G H, D H G, ſi dicono interni, e dalla medeſima parte X: come anco gli angoli A G H, C H G, ſono interni, e dalla medeſima parte Z.

5. *Quando due linee rette, come A B, C D, ſi ſegano ſcambieuolmente in qualche punto E, gli angoli A E C, D E B, ſi dicono al vertice; e ſimilmente gli angoli A E D, C E B ſi chiamano angoli al vertice.*

6. *I circoli, e circonferenze de'circoli, ſi dicono ſegarſi ſcambieuolmente, quando qualche parte dell'vno cade dentro dell'altro in modo, che habbiano vna commune parte.*



Si concepiſcano i circoli B F C, D B E C, talmente collocati in vn medeſimo piano, che qualche parte B E C F del circolo D B E C, cada dentro del circolo B F C in modo, che la portione B F C E ſia parte commune; in tal caſo i circoli, e loro circonferenze B F C, D B E C, ſi diranno ſegarſi ſcambieuolmente.

POSTVLATI.

I.

Ci ſi conceda poter tirare vna retta linea da qualunque punto à qualſiuoglia altro punto.

II.

Che vna retta linea terminata ſi poſſa continuamente, e direttamente prolongare.

III.

Che intorno à qualſiuoglia centro, e con qualunque interuallo, ſi poſſa deſcriuere vn circolo.

IV.

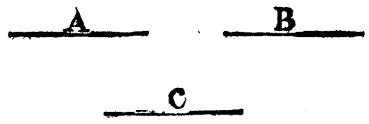
Che di qualunque quantità propoſta ſia poſſibile poterne immaginare, ò prendere vn'altra maggiore, ò minore.

ASSIO-

ASSIOMI.

I.

Quelle cose, che sono vguali ad vna terza, sono ancora frà di loro vguali; e se vna delle vguali è maggiore, ò minore d'vna terza, l'altra delle vguali sarà maggiore, ò minore di quella medesima terza.



Siano esposte le quantità A, B, C; se A sarà vguale à C, e la quantità B sarà vguale alla medesima C, sarà manifesto, che le quantità A, & B, sono fra di loro vguali. In oltre, se le quantità A, & B, sono fra di loro vguali, ogni qual volta la quantità A sia maggiore di C, ancora B sarà maggiore di C; e se A sarà minore di C, ancora B sarà minore di C.

II.

Se à cose vguali s'aggiunghino cose vguali, ouero vna medesima cosa, gli aggregati, che ne vengono, sono frà di loro vguali.

III.

Se da cose vguali se ne detraggono cose vguali, i rimanenti sono frà di loro vguali.

IV.

Se à cose ineguali s'aggiungono cose vguali, gli aggregati sono ineguali.

V.

Se da cose ineguali se ne detraggono cose vguali, i rimanenti sono ineguali.

VI.

Le cose, che sono il doppio d'vna medesima cosa, sono frà di loro vguali.

VII.

Quelle cose, che ogn'vna da per se è la metà d'vn altra cosa, sono fra di loro vguali.

VIII.

Le cose, che scambieuolmente congruono insieme, sono frà di loro vguali.

IX.

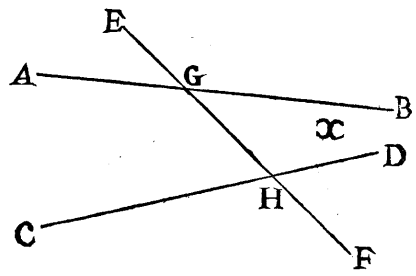
Il tutto è maggiore della sua parte.

X.

Tutti gli angoli retti sono frà di loro vguali.

XI.

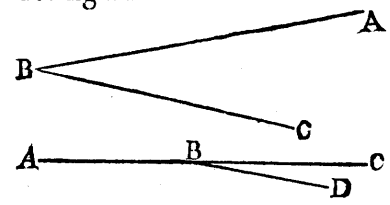
Se due rette linee sono segate da vn altra retta linea, e gli angoli interni da vna medesima parte sono minori di due angoli retti, quelle continuate concorreranno da quella parte, doue sono gli angoli minori di due retti.



Nella figura seguente, siano le rette A B, C D, segate dalla retta E F, e li due angoli B G H, D H G, insieme giunti, siano minori di due angoli retti, vuole Euclide per concesso, che le rette A B, C D, continuate vadano à concorrere verso X. E benche questo assioma habbia di bisogno d'esser dimostrato, con tuttociò l'hò posto in questo luogo, per non turbare l'ordine d'Euclide, e la dimostratione si può vedere dopo la propositione 31. di questo Libro.

XII.

Due rette linee non possono chiuder figura.



Le due rette A B, C B concorrenti in B non possono chiudere figura verso le note A, & C, senza distruggere il concetto delle rette linee: e benche questo assioma sia assai chiaro, con tutto ciò, per leuare ogni dubio, se ne pone la dimostratione dopo la terza propositione di questo.

XIII.

Vna medesima retta linea non può essere parte commune di due rette linee, che scambieuolmente concorrono, e non sono nella medesima dirittura.

S'intendano le rette C B, D B, non nella medesima dirittura, le quali concorrino scambieuolmente in qualche punto B; se saranno continuate verso B, le loro continuationi non costituiranno la sola retta A B, in modo che A B sia parte di A C, e sia ancora parte della retta A B D; il che tutto si dimostrerà dopo la terza propositione di questo primo Libro.

Delle Parti, che compongono il Theorema, e Problema.

TVtti questi Elementi d'Euclide sono diuisi in Theoremi, e Problemi, de' quali i Theoremi riguardano la sola dimostratione delle cose, ed i Problemi l'operatiua, e dimostratione dell'operato, come à suo luogo fù definito.

Hor acciò che il Theorema, e Problema sia perfetto, deue costare di cinque parti; cioè Propositione, Espositione, Costruttione, Dimostratione, e Conclusione.

Nella propositione si propone in genere quello, che si vuol fare, e dimostrare.

Nell'Espositione s'espone in specie quello, che in genere fù proposto nella propositione.

La costruttione, nel Problema, è l'operatione, ò descrittione di quella figura, che solue il proposto, e lo prepara alla dimostratione da farsi; e, nel Theorema, è l'aggiuntione di quelle quantità, che bisognano per la dimostratione di quello, che si è proposto.

La dimostratione è vn ordinato discorso, col quale, mediante li primi, ed infallibili principij, ò altre cose già dimostrate, per continuati sillogismi, si peruiene alla verità di quello, che si è proposto fare, e dimostrare.

Conclusione è l'artificioso ritorno, che si fà alla propositione, col quale si conferma tutto quello, che si è fatto, e dimostrato.

Succede solamente nel Problema, che qualche volta, oltre le cinque sopranotate parti, sia necessaria la determinatione, la quale dichiara quando, e per qual ragione, come anco in quanti modi si può soluere il Problema, e di questa se ne parlerà à suo luogo.

Nota, che non sempre in ogni Theorema, ò Problema, si trouano queste sei parti; poiche alle volte può mancare l'espositione, e determinatione, ed altre volte la costruttione; è ben vero però, che pochissimi sono quei Problemi, à i quali manchi totalmente l'espositione, e determinatione; e pochissimi ancora sono quei Theoremi, à quali manchi la costruttione: è necessario però, che in tutti sempre si troui la propositione, la dimostratione, e la conclusione, stante che in tutti li Theoremi, e Problemi, è necessario prima conoscere quello, che si cerca; secondo dimostrare il medesimo, mediante li primi principij, ò altre cose dimostrate; e finalmente concludere quello, che si è fatto, e dimostrato.

La Dimostratione poi, ò è affirmatiua, ouero negatiua.

La Dimostratione affirmatiua è quella, con la quale, mediante li primi principij, ò altre propositioni dimostrate, si peruiene direttamente alla conclusione di quello, che fù proposto fare, e dimostrare.

La Dimostratione negatiua (che si dice procedere per impossibile) è quando si prende il contrario di quello, che si vuole dimostrare per vero, e secondo tal' Ipotesi, procedendo per le cose concesse, si peruiene à qualche impossibilità, mediante la quale conosciamo quell' Ipotesi presa per vera essere falsa. E perche la verità, nelle dimostrationi Geometriche, ò stà nella cosa, che si propone, ouero nel contrario della cosa proposta, ritrouato che il contrario della cosa proposta sia falso, si conclude, che la cosa proposta necessariamente sia vera.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

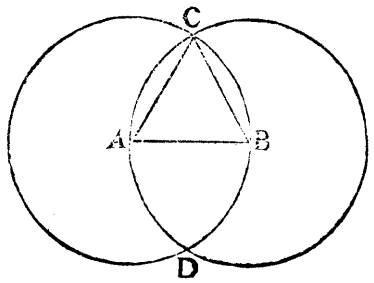
Propositione.

Sopra di qualunque data retta linea terminata, descriuere vn triangolo equilatere.

Espositione

Sia data qualsiuoglia retta linea terminata A B, sopra la quale si voglia descriuere vn triangolo equilatere.

Costruttione.



Si faccia centro in vno degli estremi della retta data A B, come in A, e coll'interuallo A B, per il terzo postulato, si descriua il circolo C B D: di nuouo si faccia centro nell'estremo B, e col medesimo interuallo B A, per il terzo postulato, si descriua il circolo C A D. Perche A B è semidiametro del circolo C B D, ed ancora del circolo C A D, perciò cade dentro dell'vno, e l'altro circolo; per la qual cosa parte d'vn circolo cade dentro dell'altro, e per l'annotatione dopo la *36.* definitione, i circoli, e loro circonferenze si segano scambieuolmente. Sia dunque la loro intersegatione doue si voglia, come in C, & D, dal punto C alli centri A, & B, per il primo postulato, si tirino le rette C A, C B. Dico che il trilatere A B C è triangolo equilatere.

Dimostratione.

Perche nell'antecedente costruttione, intorno al centro A, s'è descritto il circolo C B D, e le rette linee A B, A C, sono tirate dal medesimo centro A alla medesima circonferenza C B D, per la decimaquinta definitione, la retta A C è vguale alla retta A B. Similmente, perche il punto B, nella costruttione, è fatto centro del circolo C A D, e le rette linee B A, B C sono tirate dal medesimo centro B alla medesima circonferenza C A D, per la decimaquinta definitione, sarà la retta C B, vguale alla retta A B; mà fù dimostrata la retta A C vguale alla medesima A B, sarà, per il primo affioma, A C vguale alla retta C B; e tutti trè i lati A B, B C, C A sono frà di loro vguali. Quel triangolo, che hà trè lati vguali, per la vigesimaterza definitione, è triangolo equilatere; mà il triangolo A B C, per quel, che s'è dimostrato, hà trè lati vguali; il triangolo dunque A B C è triangolo equilatere.

Conclusione.

Per la qual cosa, sopra qualunque data retta linea terminata, si può descriuere vn triangolo equilatere, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

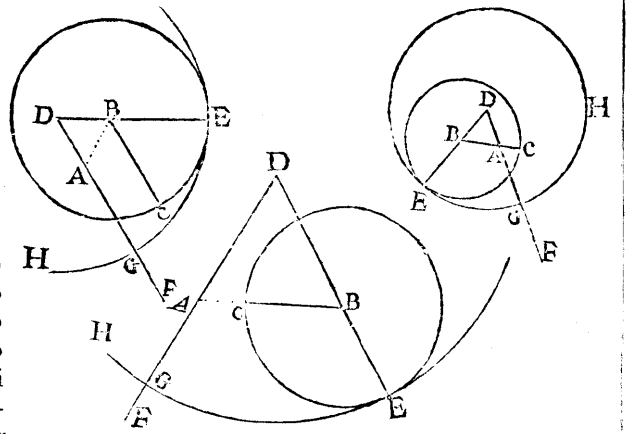
Propositione.

Dato vn punto, e data vna retta linea terminata, si può dal dato punto tirare vna retta linea vguale alla retta data.

Espositione

Sia dato il punto A, e la retta linea terminata B C, si vuole dal dato punto A tirare vna retta linea vguale alla retta data B C.

Costruttione.



Si faccia centro in vno degli estremi della retta data B C, come nel punto B, e coll'interuallo B C, per il terzo postulato, si descriua il circolo E C; dal centro B, al dato punto A, per il primo postulato, si tiri la retta B A, sopra la quale, per l'antecedente propositione, si descriua il triangolo equilatere D A B; si prolunghino, per il secondo postulato, i lati D B, D A, cioè D B, che passa per il centro B, fino alla circonferenza in E, ed il lato D A, che passa per il punto dato, si prolunghi indeterminatamente, verso F; e, fatto centro in D, coll'interuallo D E, per il terzo postulato, si descriua il circolo E G H, la di cui circonferenza segarà la retta indeterminata in qualche punto G. Dico che la retta A G è vguale alla data retta B C.

Dimostrane.

Essendo per costruttione, il punto D centro del circolo E G H, e le rette linee D E, D G, sono tirate dal centro D alla medesima circonferenza E G H, per la decimaquinta definitione, la retta D E sarà vguale alla retta D G. In oltre, perche i lati D B, D A sono vguali (stante che sono lati del triangolo equilatere) detratto dalle vguali rette D E, D G, le vguali D B, D A, resta, per il terzo affioma, la retta A G, vguale alla retta B E. Finalmente, perche il punto B, per costruttione, è centro del circolo E C, e le rette B E, B C, sono tirate dal centro B, alla medesima circonferenza E C, per la decimaquinta definitione, la retta B C sarà vguale alla retta B E; ma fù mostrata la retta A G vguale alla medesima retta B E, per il primo affioma, la retta A G sarà vguale alla retta B C.

Conclusione.

Per la qual cosa, dal dato punto A si è tirata la retta A G vguale alla data retta B C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

Propositione.

Date due rette linee ineguali, dalla maggiore tagliarne vna parte vguale alla minore.

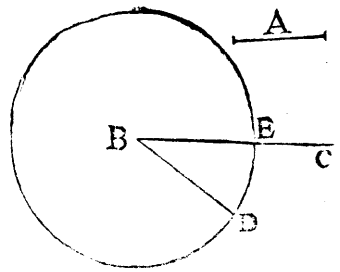
Espositione

Sia la minore delle rette date A, e la maggiore B C; Dico esser possibile dalla maggiore B C tagliarne vna parte vguale alla minore A.

Costruttione.

Da vno delli estremi della maggiore data B C, come dal punto B, possiamo, per l'antecedente propositione, tirare vna retta linea, vguale

alla data minore A; se dunque in questo luogo concepiremo fatto quanto s'è detto nell'antecedente propositione, e la retta tirata dal punto B, vguale alla minore A, sia B D, fatto centro in B, coll'interuallo B D, si descriua il circolo D E, il quale segarà la maggiore B C in qualche punto E. Dico, che la retta B E sarà vguale alla data minore A.



Dimostrane.

Per la definitione del circolo, la retta B E è vguale alla retta B D, ma, per costruttione, la retta A è vguale alla medesima B D, sarà, per il primo affioma, la parte B E vguale alla minore A.

Conclusione.

Per la qual cosa dalla maggior retta B C, si è tagliata la parte B E, vguale alla minore A, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

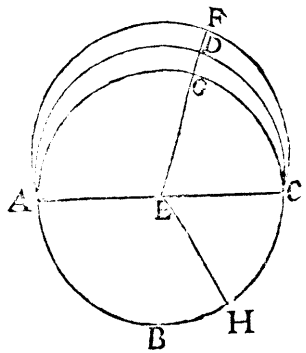
ANNOTATIONE.

Per non lasciare indietro cos'alcuna, che non sia esattamente dimostrata, come ancora per facilitare la quarta propositione, premetto le seguenti dimostrationi.

I.

Questa dimostratione è di Talete Milesio, e prouasi quel, che si suppone nella decima ottaua definitione.

Ogni diametro sega il circolo, è circonferenza di quello, in due parti vguali.



Sia qualunque circolo A B C D, il di cui centro E, ed il diametro A C. Dico che il Diametro AC diuide il circolo, e la circonferenza ABCD in due parti vguali.

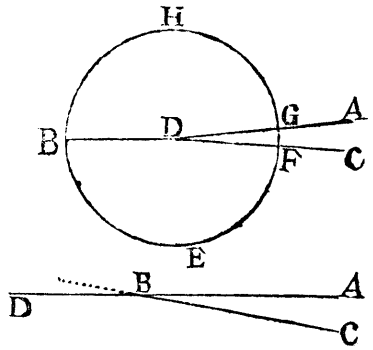
Intorno al Diametro AC s'intenda riuoluta la parte ABCE in modo che cada sopra del rimanente ADCE: ò il piano ABCE cade dentro alla figura ADCE, come fà la notata AGC, ouero cade fuori, come la notata AFC, ò pure congrue con la figura A D C. Supposto prima, che cada fuori; si prenda nell'arco A F C qualunque punto F, e nell'arco ABC qualunque punto H, e dal centro E alli punti F, H, per il primo postulato, si tirino le rette E H, E F; la retta E F, segarà la circonferenza ADC in qualche punto D, e per la decima quinta definitione, le rette E D, E H, che sono tirate dal centro E alla circonferenza BCD, sono frà di loro vguali; e perche tutte le rette, tirate dal centro E alla circonferenza ABC, per la decimaquinta definitione, sono frà di loro vguali, e la figura ABC riuolta occupa il sito AFC, in conseguenza le rette E F, E H sono frà di loro vguali; ma la retta E D è dimostrata vguale alla medesima retta EH, per il primo affioma, la retta E D sarà vguale alla retta E

F, la parte sarebbe vguale al tutto, che per il nono assioma è impossibile; non dunque cade fuori. Supposto di nuouo, che cada di dentro come la notata AGCE: sarà EG vguale ad EH; mà la retta ED è stata dimostrata vguale ad EH; sarà, per il primo assioma, la retta EG vguale ad ED, la parte vguale al tutto, che per il nono assioma, è impossibile; non dunque cade di dentro, per la qual cosa riuoluta la figura ABCE, intorno al diametro AC, congruerà con la figura ADCE, dal che l'arco ABC congruerà con l'arco ADC; mà quelle cose, che congruono insieme, per l'ottauo assioma, sono frà di loro vguali, sarà il piano ABCE vguale al piano ADCE, e l'arco ABC vguale all'arco ADC: Per la qual cosa il diametro AC diuide il circolo ABCD, e sua circonferenza, in due parti vguali, ch'era da dimostrarsi.

I I.

Si dimostra il decimoterzo assioma.

Vna medesima retta linea non può essere parte commune di due rette linee, che scambieuolmente concorrono, e non sono nella medesima dirittura. Di Proclo.



Concorrano le rette AD, CD, in qualche punto D, e continuate ambedue verso B, la loro continuatione, s'è possibile, sia la medesima retta BD, in modo che DB sia parte di AB, e sia ancora parte della retta BDC.

Si faccia centro nel concorso D, ed all'interuallo BD, per il terzo postulato, si descriua il circolo BEG, segarà le rette BA, BC, come in G, ed F, e, se non le sega, si prolunghino sinche concorrano con la circonferenza in G, & F.

Perche la retta BDA passa per il centro D, e concorre con la circonferenza in B, & G, per la decimasettima definitione la retta BG sarà diametro del circolo BEGH, e, per l'antecedente dimostratione, diuide il circolo BEGH in due parti vguali, dal che la figura BEGD sarà la metà del circolo BEGH. Similmente, perche la retta BDF passa per il centro D, e concorre con la circonferenza in B, ed F, per la decimasettima definitione, la retta BDF è diametro del circolo BEFH, e per l'antecedente dimostratione, diuide il circolo in due parti vguali; per la qual cosa la figura BEFD sarà la metà del circolo BEFH: ma si disse, che la figura BEGD è metà del medesimo circolo, sarà per il settimo assioma, la figura BEFD vguale alla figura BEGD, la parte sarebbe vguale al tutto, che per il nono assioma, è impossibile; non dunque la retta BD è parte commune delle rette BG, BDF, ed in conseguenza due rette, che concorrono, e non sono nella medesima dirittura, non è possibile, che habbiano vna parte commune, come fu proposto dimostrare.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto, è manifesto, che due rette linee, le quali scambieuolmente concorrono, e non sono nella medesima dirittura, continuate si segaranno nel punto del concorso.

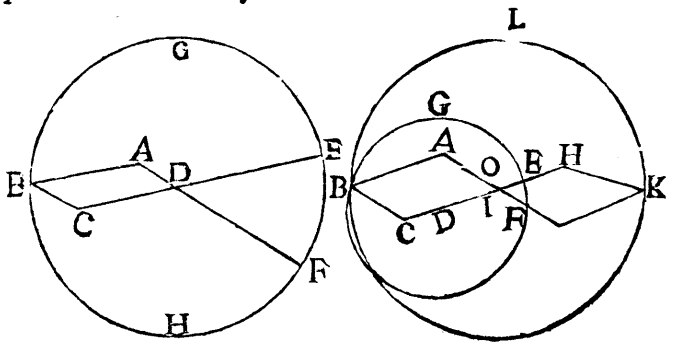
Per-

Perche se le rette AB, CB, concorrenti in B, continuate non si segassero in B, la loro continuatione sarebbe vna sola retta, come BD, ed all'hora la retta DB sarebbe parte di DA, ed anco della retta DBC, ch'è contro l'antecedente dimostratione.

I I I.

Due rette linee, che scambieuolmente concorrono, è impossibile, che possano chiudere figura. Di Proclo.

Concorrano le rette linee AB, CB, in qualche punto B, Dico, che non possono chiudere figura verso A, & C, cioè, che continuate le rette AB, CB, verso A, & C, quelle non concorrono insieme.



Concorrano s'è possibile, in qualche punto D, e, fatto centro in D, coll'interuallo DB, per il terzo postulato, si descriua il circolo BGF, si prolunghino, per il secondo postulato, le rette BAD, BCD, sino alla circonferenza in E, ed F.

Perche la retta BADF passa per il centro D, per la decimasettima definitione, sarà diametro del circolo BFE, e, per la prima delle antecedenti dimostrationi, diuide la circonferenza del circolo in due parti vguali, dal che l'arco BGEF sarà la metà di tutta la circonferenza: Similmente, perche la retta BCDE passa per il centro D, e concorre con la circonferenza in B, ed E, per la decimasettima definitione, la retta BCDE sarà diametro del medesimo circolo, e per la prima delle antecedenti dimostrationi, diuide la circonferenza del circolo BGEF in due parti vguali; per la qual cosa l'arco BGE sarà la metà di tutta la circonferenza del circolo BFEG, ma l'arco BGEF, per quel, che s'è dimostrato, è la metà della medesima circonferenza, per il settimo assioma, sarà l'arco BGE vguale all'arco BGEF, la parte vguale al tutto, che per il nono assioma, è impossibile: non dunque due rette linee possono chiudere figura, ch'era da dimostrarsi.

Il P. Clauio rigetta vna nuoua istanza, ed è, che le rette BAO, BCO, continuate possino andare ad vnirsi in qualche punto K, nella circonferenza del circolo BLK, ed il modo da rigettarle è il seguente.

Si prenda nella retta BCO qualunque punto D; essendo la retta BCO, per la decimaquinta definitione, vguale alla retta OHK, sarà BD minore di DHK; si che, fatto centro in D, e coll'interuallo DB, si descriua il circolo BGF, segarà le rette AOI, COH, nelli punti, come E, ed F, ripetendo le medesime parole dell'antecedente dimostratione, si dimostrerà, che le rette

BA,

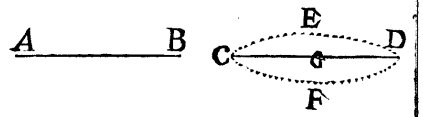
BA, BC, continuate non concorrono verſo O, per la qual coſa non poſſono racchiudere figura, ch'era da dimoſtrarſi.

I V.

Se di due rette linee, vna ſia ſoprapoſta all'altra, e gl'eſtremi dell' vna cadono ſopra gl'eſtremi dell'altra, quelle due rette linee congrueranno inſieme.

Siano le due rette linea AB, CD, e ſia la retta A B ſoprapoſta alla retta C D, e ſuppoſto che l'eſtremo A cada ſopra l'eſtremo C, e l'eſtremo B cada ſopra l'eſtremo D. Dico che la retta AB congrue con la retta CD.

Se la retta AB non congrue con la retta CD, ò quella paſſerà ſopra verſo E, ouero paſſerà di ſotto verſo F: paſſi prima di ſopra, come fà la linea CED; perche la linea CED ſtà in luogo della linea AB, cioè rappreſenta la linea AB, e la linea AB, è ſuppoſta linea retta, ſarà la linea CED linea retta; ma, per ipoteſi, i ſuoi eſtremi congruono con gli eſtremi CD, della retta CD, in conſeguenza, le due rette linee CED, C G D chiudono figura, ch'è contro all'antecedente dimoſtratione; non dunque la retta AB ſoprapoſta, come ſi diſſe, alla retta CD, paſſa di ſopra. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che non paſſa di ſotto, e perciò congrue con la retta CD, ch'era da dimoſtrarſi.



COROLLARIO.

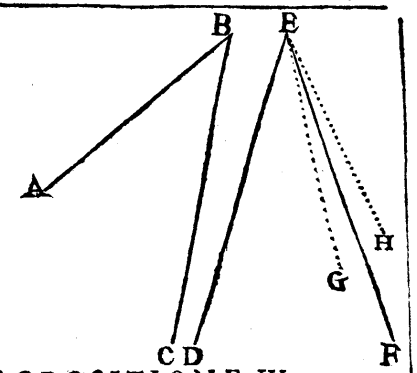
Da quel, che s'è dimoſtrato, è manifeſto, che ſe le rette AB, CD ſono frà di loro vguali, ſoprapoſta l'vna all'altra in modo, che il punto A cada nel punto C, ed il punto B nel punto D, la retta A B congruerà con la retta C D.

V.

Se di due vguali angoli rettilinei ABC, DEF, vno ſarà ſoprapoſto all'altro, come l'angolo ABC ſopra l'angolo DEF, in modo che la retta BA cada ſopra la retta E D, ed il punto B nel punto E. Dico che la retta BC cade ſopra la retta EF, e l'angolo A B C congrue coll'angolo D E F.

Se la retta BC non cade ſopra la retta EF, ò caderà dentro all'angolo DEF, ouero fuori. Cada prima fuori, come fà la retta EH, per quel, che ſi diſſe nel fine dell'ottaua definitione, l'angolo DEF ſarà minore dell'angolo DEH, mà l'angolo DEH rappreſenta l'angolo ABC, ſarà l'angolo DEF minore dell'angolo

golo ABC, ch'è contro all'ipoteſi, mentre fù ſuppoſto l'angolo DEF vguale all'angolo ABC: non dunque la retta BC cade fuori dell'angolo DEF. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che non cade dentro, come fà la retta EG, e perciò la retta BC cade ſopra la retta EF. Per la qual coſa gli angoli ABC, DEF, ſoprapoſti l'vno all'altro, congrueranno inſieme, ch'era da dimoſtrarſi.

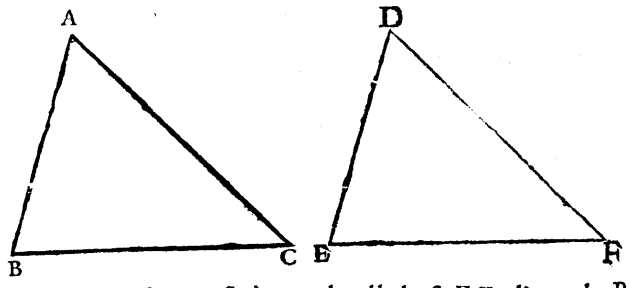


THEOREMA I. PROPOSITIONE IV.

Propoſitione.

Se due lati d'vn triangolo rettilineo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo rettilineo, ogn'vno al ſuo relatiuo, e l'angolo contenuto dalli due lati dell'vno, ſia vguale all'angolo contenuto dalli due lati dell'altro; ſarà la baſe dell'vno vguale alla baſe dell'altro, li rimanenti due angoli dell'vno ſaranno vguali alli rimanenti due angoli dell'altro; cioè quelli angoli ſaranno frà di loro vguali, che ſono oppoſti à i lati vguali; ed il triangolo ſarà vguale al triangolo.

Eſpoſitione



Siano li triangoli rettilinei ABC, DEF, e ſia il lato A B vguale al lato D E, il lato A C, vguale al lato DF, l'angolo A, vguale all'angolo D. Dico, che la baſe BC ſarà vguale alla baſe E F, l'angolo B vguale all'angolo E, (che ſono oppoſti alli vguali lati AC, DF) l'angolo C vguale all'angolo F (che ſono oppoſti alli vguali lati AB, DE) e che il triangolo ABC è vguale al triangolo DEF.

Coſtruttione. Dimoſtratione.

Si concepiſca ſoprapoſto il triangolo ABC al triangolo DEF in modo che il lato AB cada ſopra del lato DE; perche l'interuallo delli eſtremi A B, ſi ſuppone vguale all'interuallo delli eſtremi D, E, poſto il punto A nel punto D, e l'eſtremo B nell'eſtremo E, la retta AB, per il numero 4. dell'antecedente annotatione, congruerà col lato DE; ed eſſendo l'angolo A vguale all'angolo D, per il numero 5. della citata annotatione, la retta AC caderà ſopra la retta DF, e l'angolo A congruerà coll'angolo D: e perche la retta AC è poſta vguale alla retta DF, il punto C caderà

derà nel punto F. Hor perche il punto B cade nel punto E, ed il punto C cade nel punto F, per il numero 4. dell'antecedente annotatione, la baſe BC congruerà con la baſe EF, e per l'ottauo Aſſioma, la baſe BC ſarà vguale alla baſe EF; e perche tutti trè i lati AB, BC, CA, che ſono eſtremi del triangolo ABC, congruono con i trè lati DE, EF, FD, che ſono eſtremi del triangolo DEF, tutto il triangolo ABC congruerà col triangolo DEF; l'angolo B congruerà coll'angolo E, e l'angolo C coll'angolo F; ma quelle coſe che congruono inſieme, per l'ottauo Aſſioma, ſono frà di loro vguali, ſarà l'angolo B vguale all'angolo E, l'angolo C vguale all'angolo F, ed il triangolo A B C vguale al triangolo DEF.

Concluſione. Per la qual coſa, quando due lati d'vn triangolo rettilineo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo rettilineo, e l'angolo contenuto &c. ch'era da dimoſtrarſi.

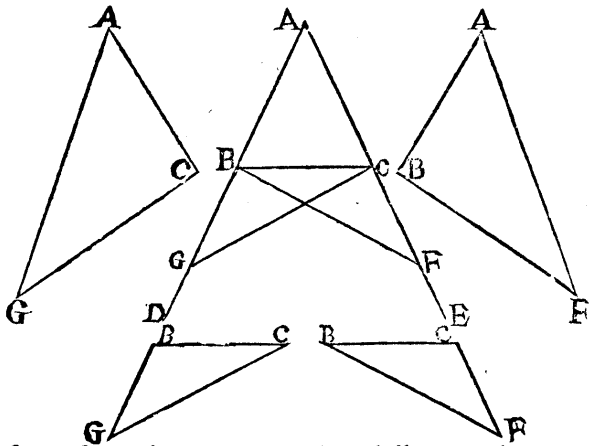
ANNOTATIONE.

Nelle coſe ſeguenti ſempre che ſi nominerà il triangolo, ſenz'altra conditione, ſi deue intendere triangolo rettilineo.

THEOREMA II. PROPOSITIONE V.

Propoſitione. **Delli triangoli iſoſceli, gl'angoli ſopra la baſe ſono frà di loro vguali, e continuati i lati vguali verſo la baſe, gli angoli ſotto la baſe ſono frà di loro vguali.**

Eſpoſitione Sia il triangolo iſoſcele ABC, cioè che il lato A B ſia vguale al lato AC. Dico che gli angoli ABC, ACB, ſopra la baſe BC, ſono frà di loro vguali. E continuati i lati vguali A B, AC verſo E, & D, li angoli D B C, E C B ſotto la baſe ſono frà di loro vguali.



Coſtruttione. Nella retta CE ſia preſo qualunque punto F, e dalla retta AD, per la terza propoſitione, ſi tagli la parte AG, vguale alla retta AF, ſi tirino le rette GC, BF.

Dimoſtratione. Si conſiderino i triangoli ABF, ACG; perche il lato A G è fatto vguale al lato AF, ed il lato AC è ſuppoſto vguale al lato AB, li due lati

ti FA, AB, del triangolo A B F, ſono vguali alli due lati G A, A C del triangolo AGC, l'angolo A dell'vno è vguale all'angolo A dell'altro, ſtante che è commune à tutti due li triangoli, e, per la quarta propoſitione, la baſe GC, del triangolo GAC ſarà vguale alla baſe BF, del triangolo ABF, ed i rimanenti due angoli dell'vno ſaranno vguali alli rimanenti due angoli dell'altro, cioè quelli, che ſono oppoſti à i lati vguali; e perciò l'angolo ABF ſarà vguale all'angolo ACG, ſtante che ſono oppoſti alli vguali lati AG, AF; e l'angolo A G C ſarà vguale all'angolo AFB, che ſimilmente ſono oppoſti alli vguali lati AB, AC. Hor ſe dalli vguali lati AG, AF, ſe ne leuano gli vguali lati AB, AC, reſta il lato B G vguale al lato CF. In oltre ſi conſiderino li due triangoli BGC, FCB: perche il lato BG è ſtato moſtrato vguale al lato C F, ed il lato G C vguale al lato BF, i due lati B G, G C, del triangolo B G C, ſono vguali alli due lati CF, FB del triangolo FCB, l'angolo BGC fù dimoſtrato vguale all'angolo CFB, e, per la quarta propoſitione, la baſe B C dell'vno ſarà vguale alla baſe CB dell'altro, cioè ſarà baſe commune, e li rimanenti due angoli dell'vno ſaranno vguali alli rimanenti due angoli dell'altro, cioè quelli ſono vguali, che ſono oppoſti à i lati vguali, e così gli angoli GBC, FCB ſaranno frà di loro vguali, ſtante che ſono oppoſti alli vguali lati GC, FB; e ſimilmente gl'angoli FBC, GCB ſono frà loro vguali, che ſono oppoſti alli vguali lati BG, CF. Hor perche gli angoli ABF, ACG furono dimoſtrati frà loro vguali, ſe da queſti ſe ne leuano gli vguali angoli GCB, FBC, reſtano gli angoli ABC, ACB, ſopra la baſe, frà di loro vguali, e perche gli angoli GBC, FCB furono dimoſtrati vguali, e queſti ſono angoli ſotto la baſe BC, in conſequenza gli angoli ſotto la baſe ſono frà di loro vguali.

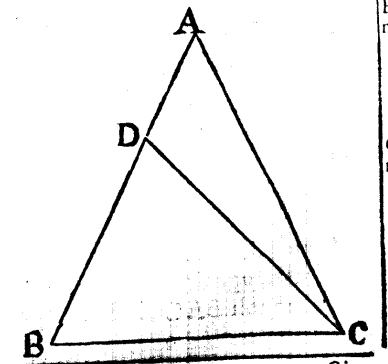
Concluſione. Per la qual coſa delli triangoli Iſoſceli gl'angoli ſopra la baſe ſono frà di loro vguali, e, continuati i lati vguali ſotto la baſe, gl'angoli ſotto la baſe ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA III. PROPOSITIONE VI.

Propoſitione. **Se due angoli d'vn triangolo ſono frà di loro vguali, i lati oppoſti à gl'angoli vguali ſono frà di loro vguali.**

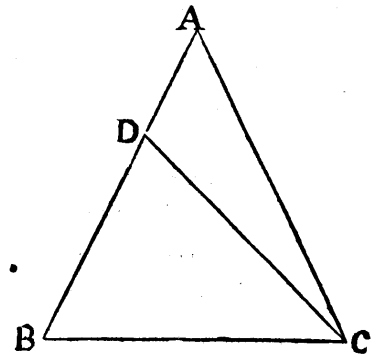
Eſpoſitione. Sia il triangolo A B C, del quale l'angolo A B C ſia vguale all'angolo ACB. Dico che il lato AC è vguale al lato AB.

Coſtruttione. Se il lato AB non è vguale al lato AC, vno delli due ſarà maggiore; ſuppoſto che il lato AB ſia maggiore del lato A C, ſi può per la terza propoſitione, dal maggior lato A B tagliarne vna parte vguale al minor lato AC, ſia dunque fatto, e ſia DB vguale ad AC, ſi tiri la retta D C.



Dimoſtratione.

Si conſiderino li due triangoli A B C, DCB; perche il lato DB, per coſtruttione, è vguale al lato AC, ed il lato B C è lato commune di tutti due li triangoli, perciò li due lati D B, BC, del triangolo DCB, ſono vguali alli due lati AC,CB del triangolo ABC, l'angolo DBC, per ipoteſi, è vguale all'angolo A C B, e, per la quarta propoſitione, il triangolo D C B ſarà vguale al triangolo ABC, la parte vguale al tutto, che, per il nono aſſioma, è impoſſibile, non dunque il lato AB è maggiore del lato AC, ed in conſeguenza i lati AB, AC ſono frà di loro vguali.



Concluſione.

Per la qual coſa, quando due angoli d'vn triangolo ſono frà di loro vguali, i lati oppoſti alli angoli vguali ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VII.

Quando dalli eſtremi d'vna retta linea eſcono due rette, e concorrono in qualche punto, ſe dalli medeſimi eſtremi eſcono due altre rette linee vguali alle prime in modo, che quelle ch'eſcono dal medeſimo punto ſiano frà di loro vguali, e tutte ſiano diſteſe dalla medeſima parte, le ſeconde paſſaranno ſopra le prime, e concorreranno nel medeſimo punto:

Queſta propoſitione ſi laſcia per non eſſer neceſſaria.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VIII.

Propoſitione.

Se due lati d'vn triangolo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo, cioè ognuno vguale al ſuo corriſpondente, e la baſe dell'vno è vguale alla baſe dell'altro, gli angoli, oppoſti alle baſi vguali, ſono frà di loro vguali.

De i Familiari di Filone.

Eſpoſitione

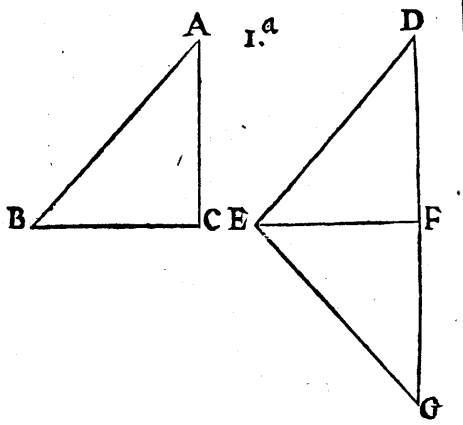
Siano i due triangoli ABC, DEF, e ſia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC vguale al lato DF, e la baſe BC vguale alla baſe EF. Dico, che gl'angoli BAC, E D F oppoſti alle vguali baſi B C, E F ſono frà di loro vguali.

Coſtruttione.

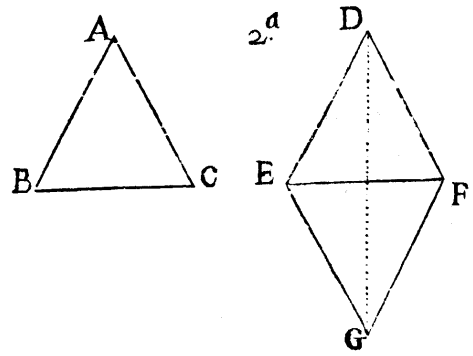
Si concepiſca traſportato il triangolo ABC nel modo, che ſi vede notato per le lettere G F E talmente, che la baſe BC cada ſopra la baſe EF in modo, che il punto B cada nel punto E, il punto C cada nel punto F, e l'angolo A cada come in G. Perche le baſi B C, E F ſono ſuppoſte vguali, per il Corollario al numero 4. della paſsata Annotatione, congrueranno inſieme.

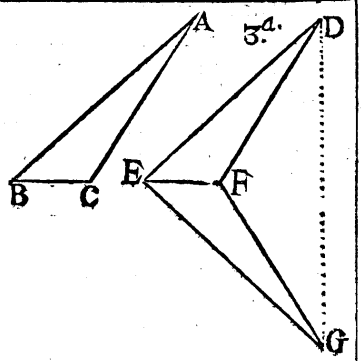
Dimoſtratione.

O i lati D F, F G, coſtituiſcono vna ſola retta linea, come nella prima figura, ò inclinano fuori, come nella ſeconda figura, ouero inclinano dentro, come nella terza figura. Suppoſto prima, che facciano vna ſola retta linea, come nella prima figura. Perche il lato EG rappreſenta il lato AB, ed il lato DE, per ipoteſi, è vguale al medeſimo lato A B, per il primo aſſioma, il lato DE ſarà vguale al lato E G, ed il triangolo D E G ſarà iſoſcele, e, per la quinta propoſitione, gli angoli EDG, EGD, ſopra la baſe DG, ſono frà di loro vguali; ma l'angolo G rappreſenta l'angolo A, ſarà l'angolo A vguale all'angolo D, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



Inclinino i lati D F, FG di fuori, come nella ſeconda figura, ſi tiri la retta D G. Perche il lato EG rappreſenta il lato AB, ed il lato DE è poſto vguale al lato AB, ſarà per il primo aſſioma, il lato DE vguale al lato EG, il triangolo E GD ſarà iſoſcele, e, per la quinta propoſitione, gli angoli EGD, EDG, ſopra la baſe D G, ſono frà di loro vguali. Similmente, perche il lato FG rappreſenta il lato AC, ed il lato F D, per ipoteſi, è vguale al lato AC, ſarà il lato DF vguale al lato FG, e, per la quinta propoſitione, gli angoli FDG, FGD, ſopra la baſe DG, ſono frà di loro vguali; à queſti s'aggiungano gli vguali angoli EDG, EGD, cioè ad ogni vno il ſuo contiguo, ne viene, per il ſecondo aſſioma, l'angolo EDF vguale all'angolo EGF: ma l'angolo EGF rappreſenta l'angolo A, ſarà l'angolo A vguale all'angolo EDF, ch'era da dimoſtrarſi nel 2. luogo.





Finalmente inclinino i lati DF, FG di dentro, come nella terza figura, si tiri la retta DG. Perche il lato GE rappresenta il lato AB, ed il lato DE è posto vguale ad AB, sarà DE vguale ad EG, il triangolo EGD sarà isoscele, e, per la quinta propositione, gli angoli EGD, EDG, sopra la base DG, sono frà di loro vguali. Similmente, perche il lato FG rappresenta il lato AC, ed il lato FD è posto vguale ad AC, sarà il lato FD vguale al lato FG, e, per la quinta propositione, gli angoli FDG, FGD, sopra la base DG sono frà di loro vguali; se dalli vguali angoli EGD, EDG se ne detraggono gli vguali angoli FGD, FDG, restano gl'angoli EGF, EDF frà di loro vguali, mà l'angolo EGF rappresenta l'angolo A, sarà l'angolo A vguale all'angolo EDF, ch'era da dimostrarsi.

ANNOTATIONE.

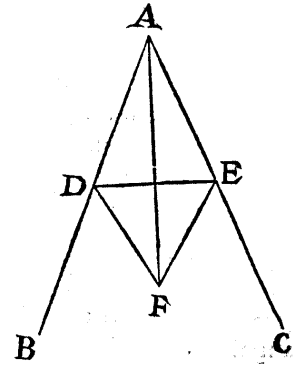
Nelle propositioni seguenti le citationi non si porranno in corpo alle propositioni, come s'è fatto sin quì, mà si porranno nel margine, con le letterine in testa, che corrisponderanno a quelle, poste nel corpo della propositione, è dinoteranno, che iui deue esser considerata tale citatione; oltre à ciò non si porrà più nel margine quale sia la propositione, e quale l'espositione, e costruttione, perche stimo esser sufficiente hauerle poste nelle propositioni antecedenti.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE IX.

Dato vn angolo rettilineo, diuiderlo in due parti vguali.

Sia dato l'angolo rettilineo, BAC, da diuidersi in due parti vguali.

Si prenda nella retta AB qualunque punto D, dalla retta AC, [a] si tagli la parte AE vguale ad AD, e si tiri [b] la retta DE; sopra la retta DE [c] si descriua il triangolo equilatere DFE, dal punto F al punto A [d] si tiri la retta FA. Dico che la retta FA diuide l'angolo BAC in due parti vguali.



Si considerino i due triangoli ADF, FEA: perche il lato AE è fatto vguale al lato AD, ed il lato AF è lato commune di ambidue i triangoli, perciò i due lati DA, AF, del triangolo ADF, [e] sono vguali alli due lati EA, AF del triangolo AEF; la base DF, per costruttione, è vguale alla base EF (stante che sono lati del triangolo equilatere) sarà l'angolo DAF, [f] ch'è opposto alla base DF, vguale all'angolo EAF, ch'è opposto alla base FE: per la qual cosa l'angolo BAC è diuiso dalla retta AF in due parti vguali, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

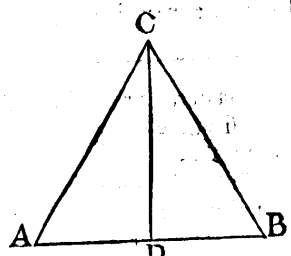
a 3. Propositione.
b 1. Postul.
c 1. Propositione.
d 1. Postul.
e 2. Assioma
f 8. Propositione.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE X.

Data vna retta linea terminata, diuiderla in due parti vguali.

Sia la data retta linea terminata AB, la quale si voglia diuidere in due parti vguali.

Sopra la retta AB, [a] si descriua il triangolo equilatere ABC; poi si diuida l'angolo ACB [b] in due parti vguali con la retta CD. Dico che la retta CD continuata, sega la retta AB in due parti vguali, come in D.



Si considerino i due triangoli CDB, CDA: perche il lato CA è vguale al lato CB (per esser lati del triangolo equilatere) ed il lato CD è lato commune d'ambidue i triangoli, saranno li due lati AC, CD, del triangolo ACD, [c] vguali alli due lati BC, CD, del triangolo CDB, l'angolo ACD, per costruttione, è vguale all'angolo BCD, sarà la base AD [d] vguale alla base DB. Per la qual cosa la retta AB è diuisa in due parti vguali in D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

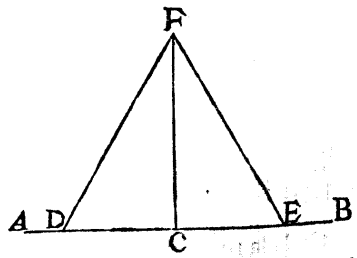
a 1. Propositione.
b 9. Propositione.
c 1. assioma
d 4. Propositione.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XI.

Data vna retta linea, ed vn punto in essa, erigere in quel punto vna retta perpendicolare alla data.

Sia data la retta linea AB, ed il punto in essa C, si vuole nel punto C erigere vna retta linea perpendicolare alla data AB.

Si prenda in AC qualunque punto D, dalla retta CB [a] se ne tagli la parte CE vguale alla retta CD; sopra la retta DE [b] si descriua il triangolo equilatero FDE, dal punto F al punto C [c] si tiri la retta FC. Dico che la retta FC è perpendicolare ad AB.



Si considerino li triangoli FCE, FCD: perche il lato CE, per costruttione, è vguale al lato CD, ed il lato FC è commune ad ambidue li triangoli, i due lati EC, CF, del triangolo ECF [d] sono vguali alli due lati

a 3. Propositione.
b 1. Propositione.
c 1. Postulatō.
d 2. assioma.

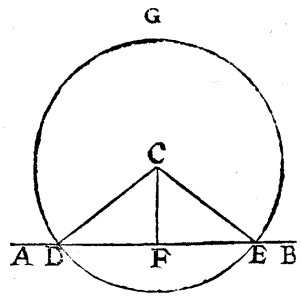
lati DC, CF del triangolo DCF, la baſe FE è vguale alla baſe FD (ſtante che ſono lati del triangolo equilatere FDE), perciò l'angolo FCE, *e* oppoſto alla baſe FE, ſarà vguale all'angolo FCD, oppoſto alla baſe FD: ma, per la decima definitione, quando vna retta linea cade ſopra d'vn'altra, e fà gli angoli dall'vna, e l'altra parte vguali, quelli gli habbiamo chiamati angoli retti, e la retta linea, che cade, perpendicolare à quella ſopra la quale cade; eſſendoſi dimoſtrato, che gli angoli FCD, FCE ſono vguali, in conſequenza ſono angoli retti, e la retta linea FC ſarà perpendicolare alla retta AB, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

e 8. Propoſitione.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XII.

Data vna retta linea indeterminata, ed vn punto fuori di eſſa, far cadere da quel punto vna retta linea perpendicolare alla data.

Sia data la retta linea AB indeterminata, ed il punto fuori di eſſa ſia C, ſi vuole dal punto dato C far cadere vna retta perpendicolare alla data AB.



Si faccia centro nel dato punto C, ed à qualunque interuallo, purche ſeghi la retta AB, *a* ſi deſcriua il circolo DEG, il quale ſegarà la retta AB nelli punti come D, ed E: ſi diuida la retta DE *b* in due parti vguali in F, dal dato punto C al punto F *c* ſi tiri la retta CF. Dico che la retta CF è perpendicolare alla data retta AB.

a 3. Poſtulato.
b 10. Propoſitione.
c 1. Poſtulato.

Per dimoſtrar queſto dal punto C alli pũti D, E *d* ſi tirino le rette CD, CE,

d 1. Poſtul.

Si conſiderino li due triangoli CFD, CFE, de' quali il lato DF, per coſtruttione, è vguale al lato FE, il lato CF è commune ad ambidue; li due lati dunque CF, FD, del triangolo CFD, *e* ſono vguali alli due lati CF, FE, del triangolo CFE, la baſe CD, per la definitione del circolo, è vguale alla baſe CE, ſarà l'angolo CFD, *f* oppoſto alla baſe CD, vguale all'angolo CFE, oppoſto alla baſe CE, e, per la decima definitione, gli angoli CFD, CFE ſono retti, e la retta CF è perpendicolare alla retta AB, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

e 2. Aſſioma
f 8. Propoſitione.

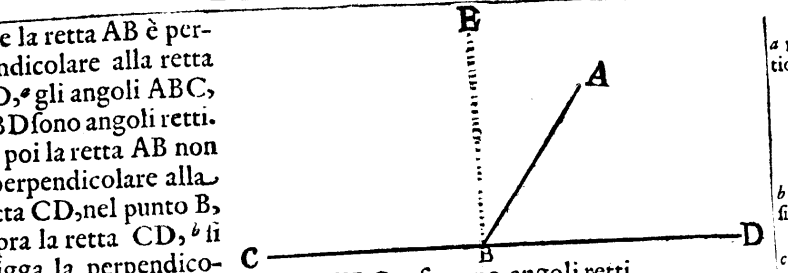
THEOREMA VI. PROPOSITIONE XIII.

Se vna retta linea cade ſopra d'vn'altra linea retta, gli angoli, che fa dall'vna, e l'altra parte, ò ſono angoli retti, ouero inſieme giunti ſono vguali à due angoli retti.

Cada la retta AB ſopra la retta CD, e faccia li due angoli ABC, ABD. Dico che queſti due angoli, ò ſono angoli retti, ouero preſi inſieme ſono vguali à due angoli retti.

Se

Se la retta AB è perpendicolare alla retta CD, *a* gli angoli ABC, ABD ſono angoli retti. Se poi la retta AB non è perpendicolare alla retta CD, nel punto B, ſopra la retta CD, *b* ſi erigga la perpendicolare BE, laonde gli angoli EBD, EBC, *c* ſaranno angoli retti.



a 10. definitione.
b 11. propoſitione.
c 10. definitione.

Perche gli angoli EBA, ABD, inſieme giunti, ſono vguali à tutto l'angolo EBD, che lo compongono, e l'angolo EBD, è retto, in conſeguenza gli angoli EBA, ABD, giunti inſieme, ſono vguali ad vn'angolo retto; ſe gli aggiũghi l'angolo retto EBC, li tre angoli EBC, EBA, ABD, *d* inſieme giunti, ſaranno vguali à due angoli retti.

d 2. aſſioma.

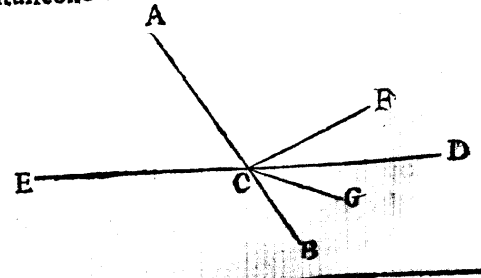
Di nuouo, perche li due angoli ABE, EBC, giunti inſieme ſono vguali all'angolo ABC, che lo compongono, tanto all'angolo ABC, quãto alli angoli ABE, EBC, giunti inſieme, s'aggiunghi l'angolo ABD, ne verranno li due angoli ABC, ABD *e* vguali alli tre angoli CBE, EBA, ABD: mà li tre angoli CBE, EBA, ABD, furono dimoſtrati vguali à due angoli retti; li due angoli dunque ABC, ABD, *f* giunti inſieme ſono vguali à due angoli retti, ch'era da dimoſtrarſi.

e 2. aſſiom.
f 1. aſſioma.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE XIV.

Se da vn punto, preſo in qualche retta linea, ſono tirate due rette linee, vna da vna parte, e l'altra dall'altra parte, le quali facciano con la prima retta, due angoli vguali à due angoli retti; quelle due rette linee ſaranno poſte in vna medeſima drittura e conſtituiranno vna ſola retta linea.

Sia qualunque retta linea AB nella quale ſia preſo qualche punto C, e dal punto C ſi concepiſchino tirate due rette linee come CE, CD, cioè la retta CE tirata da vna parte, e la retta CD dall'altra in modo, che gli angoli ACE, ACD, inſieme giunti, ſiano vguali à due angoli retti. Dico che le rette CE, CD coſtituiſcono vna ſola retta linea.

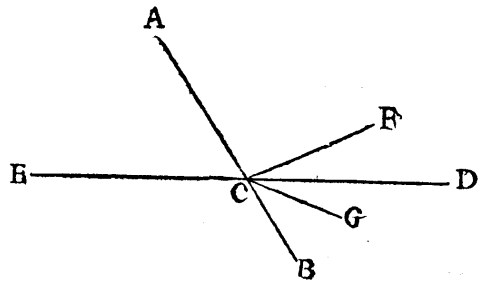


Se le rette CE, CD non coſtituiſcono vna ſola retta linea, continuata la retta EC, *a* la continuatione ò paſſarà ſopra la retta CD, come la notata CF, ouero paſſerà ſotto, come la notata CG: paſſi prima di ſopra come fà la retta CF.

a 2. poſtulato.

Perche la linea ECF rap-

presenta vna sola retta linea, sopra la quale cade la retta A C gli due angoli ACE, A C F [b] sono vguali à due angoli retti, mà per ipotesi li due angoli ACE, ACD sono ancora vguali à due angoli retti, li due angoli dũque ACE, ACF [c] sono vguali alli due angoli A C E, A C D; Se ne leui il comune angolo ACE, resta l'angolo ACF [d] vguale all'angolo ACD, la parte vguale al tutto, [e] ch'è impossibile; non dunque la continuatione CF passa sopra della retta CD. Nell'istesso modo si dimostrerà, che non passa di sotto, come fa la retta CG, in consequenza, continuata la retta EC, quella passerà per la dirittura CD. Per la qual cosa le rette EC, CD costituiscono la sola retta ECD, ch'era da dimostrarsi.



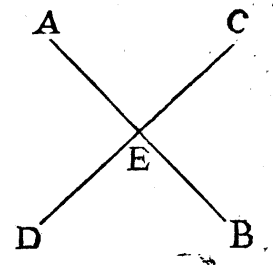
[b] 13. propositione.
[c] 10. assioma.
[d] 3. assioma.
[e] 9. assioma.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE XV.

Se due rette linee scambieuolmente si segano, gli angoli al vertice sono frà di loro vguali.

Si seghino le rette AB, CD, in qualche punto E. Dico che gli angoli AEC, DEB, al vertice E, sono frà di loro vguali, e che gli angoli AED CEB al vertice, sono frà di loro vguali.

Cade la retta AE sopra la retta CD, e fà gl'angoli AED, AEC [a] vguali à due angoli retti. Similmente cade la retta CE sopra la retta AB e fà gli angoli AEC, CEB [g] vguali à due angoli retti: dal che li due angoli AED, AEC [b] saranno vguali alli due angoli AEC, CEB; Se ne leui vgualmente il cõmune angolo AEC resta l'angolo AED [c] vguale all'angolo CEB, al vertice. In oltre, cada la retta BE sopra la retta CD, e fà li due angoli DEB, BEC [d] vgua li à due angoli retti, mà li due angoli AEC, CEB, si disse essere vguali à due angoli retti; li due angoli dunque DEB, BEC, [e] sono vguali alli due angoli AEC, BEC; se ne leui vgualmente il commune angolo BEC, resta l'angolo AEC [f] vguale all'angolo DEB al vertice, ch'era da dimostrarsi.



[a] 13. propositione.
[g] 13. propositione.
[b] 10. assioma.
[c] 3. assioma.
[d] 13. propositione.
[e] 10. assioma.
[f] 3. assioma.

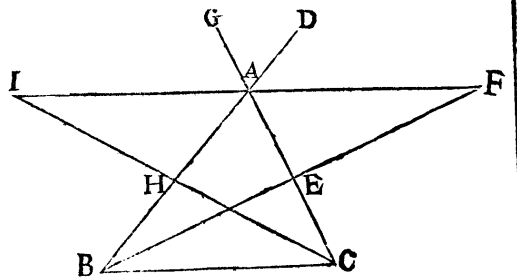
THEOREMA IX. PROPOSITIONE XVI.

Continuato vn lato di qualunque triangolo rettilineo, l'angolo esterno è maggiore di ciascheduno delli angoli interni ed opposti.

Sia

Sia il triangolo rettilineo ABC, e di quello sia continuato qualunque lato BA verso D. Dico che l'angolo esterno DAC è maggiore dell'angolo ACB interno, ed opposto, & è anco maggiore dell' altro angolo interno, ed opposto A B C.

Si diuida il lato AC [a] in due parti vguali in E, dal punto B al punto E [b] si tiri la retta BE, la quale si prolunghi [c] verso F, si faccia EF [d] vguale alla retta EB, e si tiri [e] la retta AF.



[a] 10. propos.
[b] 1. post.
[c] 2. post.
[d] 3. propos.
[e] 3. post.

Si considerino li due triangoli AEF, EBC; perche il lato AE, per costruttione, è vguale al lato EC, ed il lato EF è fatto vguale al lato EB; li due lati AE, EF, del triangolo AEF, [f] saranno vguali alli due lati CE, EB, del triangolo EBC, gli angoli al vertice AEF, CEB [g] sono frà di loro vguali, e per la quarta propositione, la base AF sarà vguale alla base BC, e l'angolo FAE sarà vguale all'angolo ECB, per essere opposti alli vguali lati FE, EB. Hor perche l'angolo DAC [b] è maggiore dell'angolo FAE, che lo contiene, e l'angolo FAE, è dimostrato vguale all'angolo ECB, sarà l'angolo esterno DAC; maggiore dell'angolo ECB, cioè dell'angolo ACB interno, ed opposto. Di nuouo s'intenda continuato il lato AC verso G, e si proui, come prima s'è fatto, che l'angolo esterno GAB, è maggiore dell'angolo ABC; cioè si diuida AB [K] in due parti vguali in H, si tiri [l] la retta CH, la quale si prolunghi [m] verso I, e si faccia IH [n] vguale ad HC, si tiri [o] la retta AI, ed haueremo due triangoli AHI, HBC, de' quali li due lati AH, HI, sono, per costruttione, vguali à i due lati BH HC, gli angoli AHI, BHC, [p] al vertice, sono frà di loro vguali; dal che la base AI [q] sarà vguale alla base BC, e l'angolo IAH vguale all'angolo HBC; mà l'angolo GAB è maggiore dell'angolo IAH, perche lo contiene, sarà l'angolo GAB [r] esterno, maggiore dell'angolo ABC interno, ed oppostо. Finalmente perche le rette DB, GC si segano scambieuolmente in A, gli angoli al vertice GAB, DAC, [s] sono frà di loro vguali; mà l'angolo GAB è dimostrato maggiore dell'angolo ABC, l'angolo dunque DAC [t] sarà maggiore dell'angolo ABC; per la qual cosa l'angolo esterno DAC è maggiore dell'angolo interno ed opposto ACB, ed ancora dell'angolo ABC, ch'era da dimostrarsi.

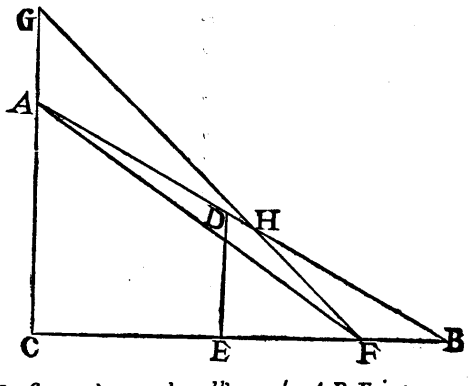
[f] 2. assiom.
[g] 15. propos.
[b] 9. assiom.
[i] 8. assiom.
[K] 10. prop.
[l] 1. post.
[m] 2. post.
[n] 3. propos.
[o] 2. post.
[p] 15. propos.
[q] 4. propos.
[r] 1. assiom.
[s] 15. propos.
[t] 1. assiom.

SCOLIO.

Coll'antecedente propositione si può dimostrare il seguente Theorema.

Se sarà qualche angolo acuto A B C, e da varij punti A, & D, presi nella retta A B, cadano sopra la retta CB quante si voglia perpendicolari A C, D E; Dico che la più

vicina all'angolo B sarà minore, cioè se il punto E, ouero D sarà più vicino al punto B, la perpendicolare DE sarà minore la perpendicolare AC.



Se AC non è maggiore di DE, ò sarà vguale, ouero minore. Supposto prima, che AC sia vguale ad ED, si faccia CF vguale ad EB, e si tiri la retta AF; si considerino li due triangoli ACF, DEB. Perche i due lati AC, CF, sono vguali alli due lati DE, EB, e l'angolo ACF è vguale all'angolo DEB, sarà la base AF vguale alla base AB, e l'angolo AFC vguale all'angolo DBE: si che nel triangolo ABF, l'angolo AFC esterno è vguale all'angolo ABF interno, ed opposto, ch'è contro all'antecedente propositione; non dunque AC è vguale alla retta DE.

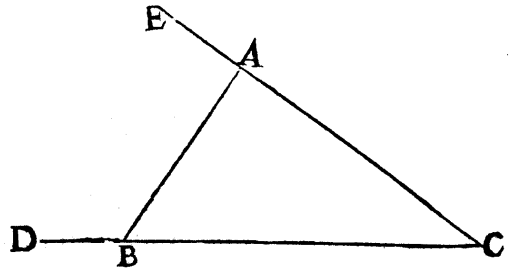
Di nuouo supposto, che AC sia minore di DE; si prolunghi CA verso G, e si faccia CG vguale ad ED, si tiri la retta GF, la quale segarà la retta AB in qualche punto H, e considerando i triangoli GCF, DEB, si prouerà come prima, che l'angolo GFC è vguale all'angolo DBE, si che nel triangolo HBF l'angolo esterno HFC è vguale all'interno, ed opposto HBF, ch'è contro all'antecedente propositione. Non dunque la retta AC è minore di DC, non è vguale, per quel che s'è dimostrato, e perciò sarà maggiore, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XVII.

Due angoli di qualunque triangolo rettilineo presi, come si voglia sono minori di due angoli retti.

Sia qualunque triangolo rettilineo ABC. Dico che li due angoli ABC ACB, presi insieme, sono minori di due angoli retti; che li due angoli CAB, CBA sono minori di due retti; e che li due angoli BAC, BCA sono minori di due retti.

Si continui il lato CB [a] verso D, l'angolo DBA [b] è maggiore dell' angolo BCA interno, ed opposto, tanto al maggior angolo DBA, quanto al minor angolo C, s'aggiunga l'angolo ABC; li due angoli ABC, ACB insieme [c] saranno minori delli



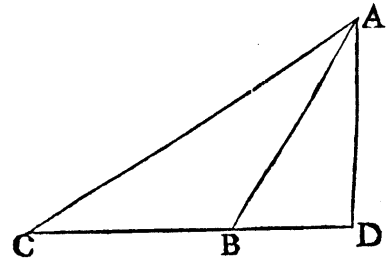
[a] 2. post.
[b] 16. propos.
[c] 4. assiom.

due

due angoli ABD, ABC, ma li due angoli ABD, ABC, [d] sono vguali à due angoli retti, perciò i due angoli ABC, ACB [e] sono minori di due angoli retti. Similmente, perche l'angolo DBA esterno [f] e maggiore dell'angolo CAB interno, ed opposto; all'vno, ed all'altro s'aggiunga l'angolo CBA, i due angoli CAB, CBA, [g] saranno minori de i due angoli DBA, CBA; ma li due angoli DBA, CBA [h] sono vguali à due angoli retti: li due angoli dunque CAB, CBA sono minori di due angoli retti: Nell'istesso modo, continuando il lato CA verso E, si proverà, che li due angoli BAC, BCA sono minori di due angoli retti, come fù proposto dimostrare.

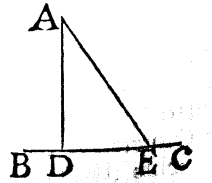
[d] 13. propos.
[e] 1. assiom.
[f] 16. propos.
[g] 4. assiom.
[h] 13. propos.

COROLLARIO I.



Dall'antecedente propositione si caua, che se vna retta linea, come AB, sega qualche altra retta linea, CD, ad angoli obliqui, cioè che l'vno come ABC sia ottuso, e l'altro ABD acuto, se dal punto A cade vna retta perpendicolare alla retta CD, quella caderà dalla parte dell'angolo acuto, come fà la retta AD; perche, se non cade dalla parte dell'angolo acuto, cada, s'è possibile, dalla parte dell'angolo ottuso, come fà la retta AC; perche l'angolo ACB è retto, e l'angolo ABC è ottuso, i due angoli ABC, ACB, del triangolo ACB; non sono minori di due angoli retti, ch'è contro all'antecedente propositione; non dunque la perpendicolare cade dalla parte dell'angolo ottuso, ma cade dalla parte dell'angolo acuto, come fà la retta AD.

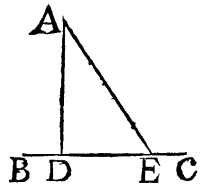
COROLLARIO II.



Da quelche s'è detto, si caua ancora, che se da qual che pũto cade vna retta perpendicolare ad vn'altra retta, quella è la minima di tutte l'altre tirate dal medesimo punto à

quel-

quella retta . Per esempio, se dal punto A cade la retta A D perpendicolare alla retta B C, sarà A D la minima di tutte quelle rette, che dal punto A possono esser tirate alla retta B C. Si prenda in B C, fuori del punto D, qualunque punto E, e si tiri la retta A E; li due angoli A D E, A E D, per l'antecedente propositione, sono minori di due angoli retti, ma l'angolo A D E è retto, sarà l'angolo A E D minore del retto, e perciò l'angolo A D E sarà maggiore dell'angolo A E D, e, per la 19. propositione, il lato A E sarà maggiore di A D; e perche il punto E è preso ad arbitrio, perciò tutte le rette tirate dal punto A alla retta B C sono maggiori di A D, ed in conseguenza A D sarà la minima.



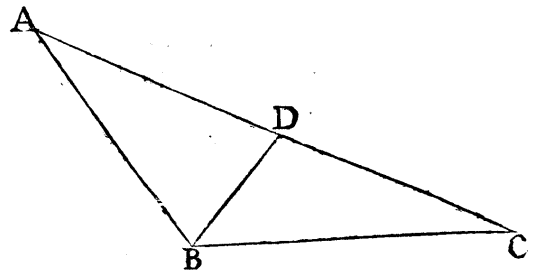
THEOREMA XI. PROPOSITIONE XVIII.

L'angolo opposto al maggior lato di qualunque triangolo rettilineo, è maggiore dell'angolo opposto al minor lato.

Nel triangolo rettilineo A B C, sia il lato A C maggiore del lato A B. Dico che l'angolo A B C, opposto al maggior lato A C, è maggiore dell'angolo A C B, opposto al minor lato A B.

Dal maggior lato A C [a] se ne tagli la parte A D vguale al minor lato A B, e si tiri [b] la retta B D.

Perche il lato A D è fatto vguale al lato A B, il triangolo A B D [c] sarà isoscele, e gli angoli A B D, A D B, sopra la base D B [d], sono frà di loro vguali; e perche, nel triangolo D B C, è continuato il lato D C in A, l'angolo A D B esterno [e] è maggiore dell'angolo C interno, ed opposto, mà l'angolo A D B, è mostrato vguale all'angolo A B D, sarà l'angolo A B D [f] maggiore dell'angolo C. Per la qual cosa l'angolo A B C, [g] opposto al maggior lato A C, è mag-



[a] 3. propos.
[b] 1. postulat.
[c] 24. defin.
[d] 5. propos.
[e] 16. propos.
[f] 1. assiom.
[g] 9. assiom.

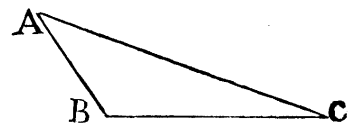
è maggiore dell'angolo C, opposto al minor lato A B; ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIX.

Il lato opposto al maggior'angolo di qualunque triangolo rettilineo, è maggiore del lato opposto al minor'angolo.

Nel triangolo A B C sia l'angolo B maggiore dell'angolo C. Dico che il lato A C opposto al maggior angolo B, è maggiore del lato A B opposto al minor angolo C.

Se il lato A C non è maggiore del lato A B, ò sarà minore, ouero vguale. Supposto prima, che il lato A C sia vguale al lato A B, in tal caso il triangolo A B C [a] sarà isoscele, e gli angoli A B C, A C B [b] sopra la base B C, saranno frà di loro vguali, ch'è contro al nostro supposto; non dunque il lato A C è vguale al lato A B. Di nuouo supposto che il lato A C sia minore del lato A B, all'hora l'angolo B, opposto al minor lato A C [c] sarà minore dell'angolo C, opposto al maggior lato A B; mà si è supposto l'angolo B maggiore dell'angolo C, sarebbe l'angolo B maggiore, e minore dell'angolo C, ch'è impossibile; non dunque il lato A C è minore del lato A B, non è vguale, per quel che s'è dimostrato; in conseguenza il lato A C sarà maggiore del lato A B, come fù proposto dimostrare.



[a] 24. defin.
[b] 5. propos.
[c] 18. propos.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XX.

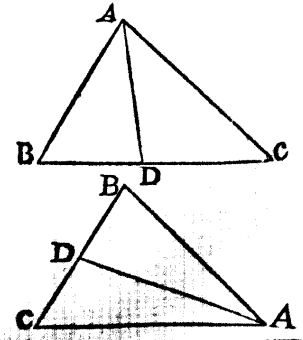
Due lati di qualunque triangolo rettilineo, presi come si voglia, sono maggiori del terzo lato.

Di Proclo.

Sia il triangolo A B C. Dico che li due lati A B, B C, insieme giunti, sono maggiori del terzo lato A C; che li due B C, C A, sono maggiori del terzo A B, e che li due B A, A C sono maggiori di B C.

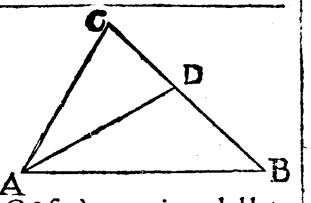
Si diuida l'angolo B A C [a] in due parti vguali con la retta A D, la quale continuata [b] concorra col lato B C in qualche punto D.

Si consideri il triangolo A D C, nel quale è continuato il lato C D, verso B, sarà l'angolo B D A esterno [c] maggiore dell'angolo D A C interno, ed opposto: mà l'angolo D A C, per costruttione, è vguale all'angolo D A B, sarà l'angolo B D A [d] maggiore dell'angolo B A D, e, per l'antecedente propositione, il lato A B, opposto al maggior angolo B D A, sarà maggiore del lato B D, opposto al minor angolo B A D.



[a] 9. propos.
[b] 2. postulat.
[c] 16. propos.
[d] 1. assioma.

Simil-

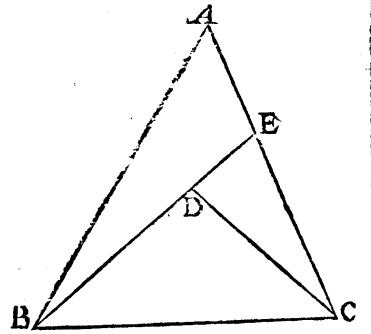


Similmente si consideri il triangolo BDA del quale è continuato il lato BD verso C, sarà l'angolo esterno CDA [e] maggiore dell' angolo DAB interno, ed opposto : ma l'angolo DAB, per costruttione è vguale all'angolo DAC, sarà l'angolo CDA [f] maggiore dell'angolo CAD, ed in consequenza il lato AC [g] sarà maggiore del lato CD · fù dimostrato il lato AB maggiore del lato BD, li due lati, dunque BA, AC, giunti insieme, sono maggiori del lato BC, ch'era da dimostrarsi.

e 16.propos.
f 1. assioma.
g 19.propos.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XXI.

Se dalli estremi d'vn lato d'vn triangolo escono due rette linee, e concorrono dentro del medesimo triangolo, quelle prese insieme, sono minori degl'altri due lati del triangolo, e contengono angolo maggiore.



Sia il triangolo ABC, e dalli estremi B, & C, del lato BC, escano le rette BD, CD, e concorrino dentro del triangolo in qualche punto D. Dico che le due BD, CD, insieme giunte, sono minori de' i due lati BA, AC, presi insieme, e che l'angolo BDC è maggiore dell'angolo BAC.

Si continui la retta BD [a] fino, che cõcorre col lato AC in qualche punto E.

Nel triangolo ABE i due lati BA, AE, giunti insieme, [b] sono maggiori del terzo lato BE; tanto à i due lati BA, AE, giunt'insieme, quanto al lato BE, si aggiunghi la retta EC, ne verranno i due lati BA, AC [c] maggiori delli due lati BE, EC. Di nuouo, nel triangolo CED, i due lati CE, ED, presi insieme, [d] sono maggiori del terzo lato CD; tanto à i due lati CE, ED, giunti insieme, quanto al lato CD s'aggiunga la retta DB, ne verranno i due lati CE, EB [e] maggiori delli due CD, DB. Hor essendosi dimostrato li due lati BA, AC, maggiori de i due lati BE, EC, e li due BE, EC maggiori delli due BD, DC, i due lati dunque BA, AC presi insieme, sono maggiori delli due BD, DC insieme giunti, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.

Nel triangolo DEC è continuato il lato ED verso B, sarà l'angolo BDC esterno, [f] maggiore dell'angolo DEC interno, ed opposto. Similmente nel triangolo EAB è continuato il lato AE verso C, sarà l'angolo CED [g] maggiore dell'angolo CAB, mà fù mostrato l'angolo CDB maggiore dell'angolo CED, in consequenza l'angolo CDB sarà molto maggiore dell'angolo CAB, come fù proposto dimostrare.

a 2.postulat.
b 20.prop.
c 4. assioma
d 20.prop.
e 4. assioma
f 16.propos.
g 16. propos.

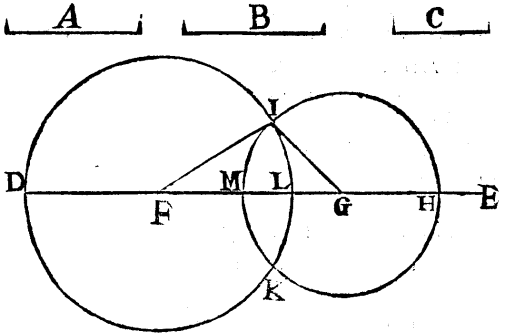
PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXII.

Date tre rette linee, costruire vn triangolo, che habbia i tre lati vguali alle trè rette linee date.

Determinatione.

E necessario però, che le tre rette date habbiano questa determinatione, che due, in qualunque modo prese, siano maggiori della terza, stante che s'è dimostrato nella vigesima propositione, che due lati d'vn triangolo sono maggiori del terzo lato.

Siano date le tre rette linee A, B, C, in modo che le due A, & B, insieme giunte, siano maggiori della terza C; le due B, & C, siano maggiori della terza A; e le due A, & C, siano maggiori della terza B. Dico esser possibile costruire vn triangolo, che habbia i tre lati vguali alle tre rette date.



S'esponga la retta DE indeterminata verso E, dalla quale [a] se ne tagli la parte DF vguale alla retta A; similmente si tagli FG [a] vguale alla retta B; e si tagli GH [a] vguale alla retta C: poi, centro in F, coll'interuallo FD, [b] si descriua il circolo DIK; e di nuouo, fatto centro in G, coll'interuallo GH [b] si descriua il circolo HIK.

Perche la retta A, per costruttione, è vguale ad FD, e la retta FL [c] è vguale alla medesima FD, sarà la retta A [d] vguale alla retta FL. Similmente essendo la retta C, per costruttione, vguale alla retta GH, e la retta GM [e] è vguale alla medesima GH, sarà la retta C [f] vguale alla retta GH; e così le due rette A, & C [g] saranno vguali alle due FL, GM; mà per ipotesi, le due A, & C, insieme giunte, sono maggiori della retta B, le due dunque FL, GM, [h] sono maggiori della retta B; fù fatta FG, per costruttione, vguale alla retta B, le due rette dunque FL, GM sono maggiori della retta FG. Se dunque da FG se ne detrae FL resta GL [i] minore di GM; dal che il punto M cade dentro del circolo ILK, ed il punto L dentro del circolo IMK, per la qual cosa vn circolo cade dentro l'altro, e, per l'annotatione dopo la 26. definitione, i circoli IMK, ILK, scambieuolmente si segano. Siano le loro intersegationi come in I, & K, dal punto I alli centri F, & G [K] si tirino le rette IF, IG. Dico che il triangolo IFG, ha li tre lati vguali alle tre rette date A, B, C.

Per la definitione del circolo la retta FI, è vguale alla retta FD, mà, per costruttione, la retta A è vguale alla medesima retta FD, sarà la retta FI [l] vguale alla retta A. Similmente la retta GI, per la definitione del circolo, è vguale alla retta GH, mà la retta C, per costruttione, è vgua-

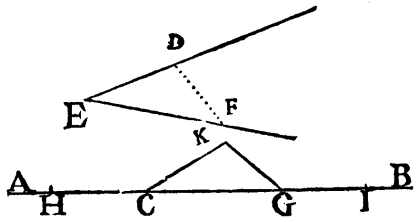
a 3. propos.
a 3.propos.
a 3.prop.
b 3.postulat
b 3.postul.
c 15. defin.
d 1.assioma
e 15.defin.
f 1. assioma
g 2 .assioma
h 1. assio ma
i 5.assioma
K 1-postul.
l 1.assioma

l 1. assiom. m 2. assiom.

le alla retta GH, sarà la retta C l vguale alla retta GI; dalche le due A, & C m sono vguali alli due lati FI, IG, la retta FG, per costruttione, è vguale alla retta B, in conseguenza li tre lati FI, IG, FG sono vguali alle tre rette date, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXIII.

Data vna retta linea, ed vn punto in essa, e dato vn'angolo rettilineo, è possibile nel dato punto sopra la retta data, costituire vn'angolo rettilineo vguale all'angolo dato.



Sia la data retta linea AB, ed il punto in essa C, e sia dato l'angolo rettilineo E; si vuole nel punto C, sopra la retta AB, costituire vn'angolo rettilineo, vguale all'angolo E.

Si prendano due qualunque punti nelle rette ED, EF, che siano i notati D, ed F, e si tiri a la retta DF; si faccia poi CG b vguale alla retta EF, si tagli CH vguale alla retta ED, e si tagli GI vguale alla retta FD, e per l'antecedente propositione, sopra la retta CG si descriua il triangolo CGK, talmente che il lato CK sia vguale ad HC, ouero ED, ed il lato GK sia vguale ad IG, ouero FD. Dico che l'angolo KCG è vguale all'angolo E.

a 1. post. b 3. propos.

Si considerino i due triangoli DEF, KCG: perche i due lati KC, CG sono vguali, per costruttione, à i due lati DE, EF, e la base KG è vguale alla base DF, l'angolo KCG sarà c vguale all'angolo E, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

c 8. propos.

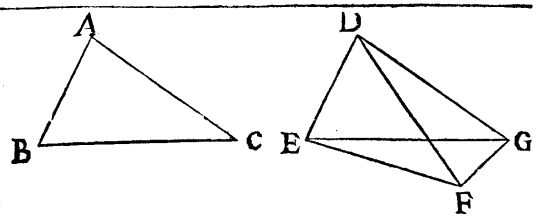
THEOREMA XV. PROPOSITIONE XXIV.

Se due lati d'vn triangolo sono vguali à due lati d'vn'altro triangolo, ogn'vno vguale al suo corrispondente, e l'angolo contenuto dà i due lati dell'vno sia maggiore dell'angolo contenuto dà i due lati dell'altro; la base dell'vno, ch'è opposta all'angolo maggiore, sarà maggiore della base dell'altro, ch'è opposta all'angolo minore.

Siano i due triangoli ABC, DEF, e sia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC vguale al lato DF, e l'angolo BAC maggiore dell'angolo EDF. Dico che la base BC sarà maggiore della base EF.

Nel

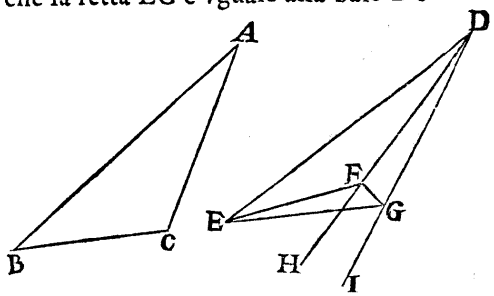
Nel punto D, sopra la retta DE, a si costituisca l'angolo EDG, vguale all'angolo A, e perche l'angolo A è posto maggiore dell'angolo EDF, sarà l'angolo E D G b maggiore dell'angolo E D F, per la qual cosa la retta D G cade fuori del triangolo D E F; si tagli DG c vguale al lato AC, e si tiri d la retta EG. O la retta EG passa sopra del punto F, come nella prima figura, ouero passa sotto al punto F, come nella seconda figura. Passi prima sopra, come nella prima figura, si tiri e la retta FG, e si considerino li triangoli ABC, DEG; perche il lato AB, per ipotesi, è vguale al lato DE, ed il lato DG è fatto vguale al lato AC, i due lati BA, AC saranno vguali alli due lati ED, DG, l'angolo EDG è fatto vguale all'angolo A, sarà la base EG f vguale alla base BC. In oltre perche DF, per ipotesi, è vguale al lato AC, ed il lato DG è fatto vguale al medesimo lato AC, sarà DG g vguale al lato DF, il triangolo DFG h sarà isoscele, e gli angoli DGF, DFG, i sopra la base FG, saranno frà di loro vguali; mà l'angolo DGF è maggiore dell'angolo EGF, perche lo contiene, sarà l'angolo DFG maggiore dell'angolo EGF, e tutto l'angolo EFG sarà molto maggiore dell'angolo EGF; per la qual cosa il lato EG, l opposto al maggior angolo EFG, sarà maggiore del lato EF, ch'è opposto all'angolo minore EGF; e perche il lato E G fù mostrato vguale al lato B C, sarà la base B C m maggiore della base EF, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



a 23. propos. b 1. assiom. c 3. propos. d 1. post. e 1. post. f 4. propos. g 1. assiom. h 24. defin. i 5. propos. K 1. assiom. l 19. propos. m 1. assiom.

Di nuouo passi la retta EG sotto al punto F, come nella seconda figura, si tiri n la retta F G, e considerando i due triangoli ABC, D E G si mostri, come prima si fece, che la retta EG è vguale alla base BC.

Perche il lato DF è posto vguale al lato AC, ed il lato DG è fatto vguale al medesimo lato AC, sarà il lato DF o vguale al lato DG, il triangolo DFG p sarà isoscele, e gli angoli sotto la base IGF, HFG q saranno frà di loro vguali; mà l'angolo IGF è maggiore dell'angolo EGF, perche lo contiene, sarà l'angolo HFG r maggiore dell'angolo EGF; per il che tutto l'angolo EFG: sarà molto maggiore dell'angolo EGF. Per la qual cosa nel triangolo EFG, il lato EG opposto al maggior' angolo EFG s sarà maggiore del lato EF, opposto all'angolo minore EGF; e perche la retta EG fù mostrata vguale alla base BC, sarà la base BC t maggiore della base EF ch'era da dimostrarsi.

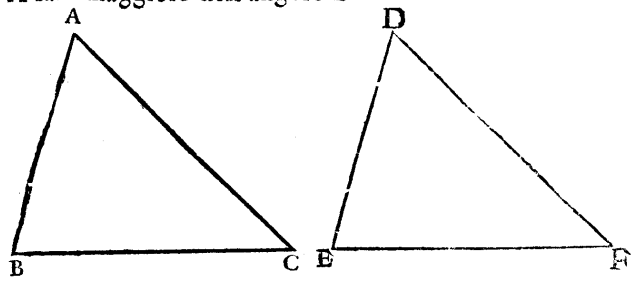


n 1. post. o 1. assiom. p 24. defin. q 5. propos. r 1. assiom. s 19. propos. t 1. assiom.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XXV.

Se due lati d'vn triangolo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo, ciaſcuno vguale al ſuo corriſpondente, e la baſe dell'vno è maggiore della baſe dell'altro, l'angolo oppoſto alla baſe maggiore ſarà maggiore dell'angolo oppoſto alla baſe minore.

Siano i due triangoli ABC, DEF, e ſia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC vguale al lato DF, la baſe BC maggiore della baſe EF. Dico che l'angolo A ſarà maggiore dell'angolo D.



Se l'angolo A non è maggiore dell'angolo D, ò ſarà minore, ouero vguale. Suppoſto prima, che l'angolo A ſia vguale all'angolo D; perche i due lati AB, AC, per ipoteſi, ſono vguali alli due lati DE, DF, e l'angolo A è poſto vguale all'angolo D, ſarà [a] la baſe BC vguale alla baſe EF, ch'è contro all'ipoteſi, mentre s'è ſuppoſto, che BC è maggiore di EF, non dunque l'angolo A è vguale all'angolo D. Di nuouo ſia l'angolo A minore dell'angolo D, perche i due lati DE, DF, per ipoteſi ſono vguali à i due lati AB, AC, e l'angolo D è maggiore dell'angolo A, ſarà, per l'antecedente propoſitione, la baſe EF maggiore della baſe BC; fù ſuppoſta la baſe BC maggiore di EF, ſarebbe BC maggiore, e minore di EF, ch'è impoſsibile; non dunque l'angolo A, è minore dell'angolo D; non è vguale, per quel che s'è dimoſtrato; per la qual coſa l'angolo A ſarà maggiore dell'angolo D, come fù propoſto dimoſtrare.

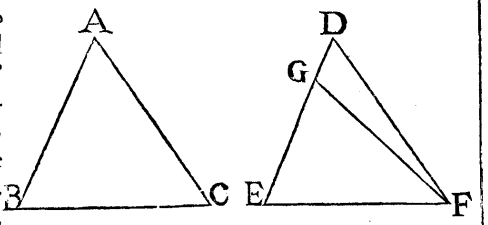
[a] 4. propoſ.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XXVI.

Se vn lato d'vn triangolo è vguale ad vn lato d'vn altro triangolo, e due qualunque angoli dell'vno ſiano vguali à due corriſpondenti angoli dell'altro, i rimanenti due lati dell'vno ſaranno vguali à i rimanenti due lati dell'altro, cioè ogn'vno vguale al lato corriſpondente, ed il reſtante angolo ſarà vguale al reſtante angolo.

Siano

Siano i due triangoli ABC, DEF, e ſia nel primo luogo il lato BC vguale al lato EF, l'angolo ABC vguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB vguale all'angolo DFE cioè che gli angoli vguali ſiano ſopra gli vguali lati BC, EF.



Dico che il lato AC ſarà vguale al lato DF, il lato AB vguale al lato DE, e che l'angolo A è vguale all'angolo D.

Se il lato AB non è vguale al lato DE, vno de' i due ſarà maggiore. Suppoſto che il lato DE ſia maggiore del lato AB, dal maggior lato DE ſe ne tagli la parte GE [a] vguale al minor lato AB, ſi tiri [b] la retta GF, e ſi conſiderino i due triangoli ABC, GEF; perche il lato GE è fatto vguale al lato AB, ed il lato EF è ſuppoſto vguale al lato BC, ſaranno i due lati GE, EF vguali à i due lati AB, BC, l'angolo GEF è ſuppoſto vguale all'angolo ABC, ſarà [c] la baſe GF vguale alla baſe AC, l'angolo BAC vguale all'angolo EGF, e l'angolo BCA vguale all'angolo EFG; mà l'angolo BCA è ſuppoſto vguale all'angolo EFD, l'angolo dunque EFG [d] ſarà vguale all'angolo EFD, la parte vguale al tutto, ch'è impoſsibile [e]: Non dunque il lato DE è maggiore del lato AB, mà ſono frà di loro vguali. In oltre perche il lato DE è dimoſtrato vguale al lato AB, ed il lato EF è ſuppoſto vguale al lato BC, i due lati DE, EF, del triangolo DEF, ſono vguali alli due lati AB, BC, del triangolo ABC, l'angolo E è ſuppoſto vguale all'angolo B, ſarà la baſe DF [f] vguale alla baſe AC, e l'angolo D vguale all'angolo A.

[a] 3. propoſ. [b] 1. poſt. [c] 4. propoſ. [d] 1. aſſiom. [e] 9. aſſiom. [f] 4. propoſ.

Suppoſto di nuouo, che il lato BC ſia vguale al lato EF, l'angolo B, vguale all'angolo E, e l'angolo A vguale all'angolo D. Dico ſimilmente, che il lato DE è vguale al lato AB, il lato DF vguale al lato AC, e l'angolo C vguale all'angolo DFE.

Si faccia la medeſima coſtruttione di prima, e ſi moſtri, come prima ſi fece, che l'angolo EGF è vguale all'angolo BAC; mà nel triangolo DGF l'angolo EGF eſterno [g] è maggiore dell'angolo D interno, ed oppoſto, ſarà l'angolo A maggiore dell'angolo D; fù ſuppoſto l'angolo A vguale all'angolo D, ſarebbe l'angolo A maggiore, ed vguale all'angolo D, ch'è impoſſibile; non dunque il lato DE è maggior del lato AB, ma ſono frà di loro vguali.

[g] 16. propoſ.

Finalmente perche i due lati AB, BC, del triangolo ABC, ſono vguali à i due lati DE, EF del triangolo DEF, l'angolo B, per ipoteſi, è vguale all'angolo E, ſarà la baſe AC [h] vguale alla baſe DF, e l'angolo C vguale all'angolo DFE, ch'era da dimoſtrarſi.

[h] 4. propoſ.

ANNOTATIONE.

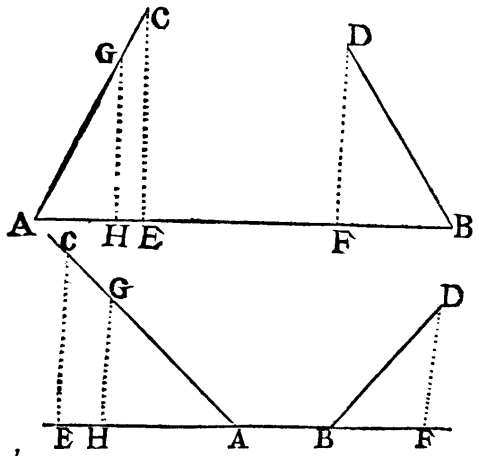
Per dimoſtrare gli Elementi delle parallele con metodo aſſai chiaro, e facile, premetto le ſeguenti dimoſtrationi.

I.

Se due rette linee, come CA, DB, ſono ſegate da qualche retta

AB,

AB, e gli angoli DBA, CAB sono frà di loro vguali: Dico che se la retta CA è vguale alla retta DB, le rette DF, CE, che da i punti D, & C, cadono perpendicolari alla retta AB, sono frà di loro vguali, e se la retta CA è maggiore della retta DB, la perpendicolare CE sarà maggiore della perpendicolare DF.



Supposto prima che la retta CA sia vguale alla retta BD: Dico che la perpendicolare CE è vguale alla perpendicolare DF. Perche gli angoli in E, ed F sono retti, e gli angoli DBF, CAE sono supposti vguali, i due angoli CEA, CAE del triangolo CAE, [a] *saranno vguali alli due angoli DFB, DBF, del triangolo DFB, il lato CA è supposto vguale al lato DB, sarà BF* [b] *vguale ad AE, e la perpendicolare DF* [c] *vguale alla perpendicolare EC ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

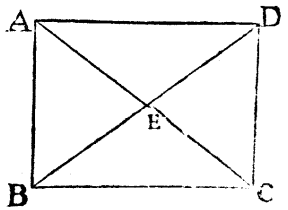
[a] 2. assioma
[b] 26. prop.
[c] 3. propos.

Di nuouo, supposto che la retta CA sia maggiore della retta DB. Dico che la perpendicolare CE è maggiore della perpendicolare DF. Si faccia GA vguale alla retta DB, dal punto G si faccia cadere la retta GH [d] *perpendicolare alla retta AB, ed operandosi come si fece prima, si mostrerà, che la retta GH è vguale alla retta DF, ma, per lo Scolio alla 16. propositione, la retta CE è maggiore di GH, sarà la perpendicolare CE maggiore della perpendicolare DF, ch'era da dimostrarsi.*

[c] 3. prop.
[d] 12. prop.

I I.

Se due lati opposti d'vn quadrilatero sono frà di loro vguali, e fanno angoli vguali con vno degl'altri due lati, i rimanenti due angoli sono frà di loro vguali.



Sia il quadrilatero ABCD, e siano i lati opposti AB, DC frà di loro vguali, come ancora siano frà di loro vguali gl'angoli DCB, ABC. Dico che li restanti due angoli A, & D, sono frà di loro vguali. si tirino [a] *le diagonali AC, DB, le quali si segaranno in qualche punto E; e si considerino i due triangoli DBC, ACB, de' quali il lato AB, per ipotesi è vguale al lato DC, il lato BC è commune, e perciò i due lati AB, BC sono vguali alli due lati DC, CB, gli angoli ABC, DCB, per ipotesi, sono frà di loro vguali, sarà la base AC* [b] *vguale alla base DB, l'angolo ACB vguale all'angolo DBC, e l'angolo BAC vguale all'angolo BDC. Inoltre perche gli angoli EBC, ECB sono stati mostrati vguali, sarà* [c] *EB vguale*

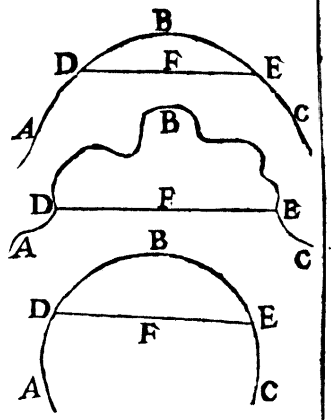
[a] 1. postul.
[b] 4. propos.
[c] 6. propos.

ad EC [c]*; dalle vguali rette AC, DB, se ne leuino le vguali rette EB, EC, resta EA* [d] *vguale ad ED; dal che gli angoli EAD, EDA* [e] *sono frà di loro vguali, se le aggiunghino gli vguali angoli BDC, BAC, ne viene tutto l'angolo BADS vguale all'angolo CDA, come fù proposto dimostrare.*

[c] 6. propos.
[d] 3. assiom.
[e] 5. propos.
[f] 2. assiom.

I I I.

La linea retta chiude figura con la curua, quando la retta termina nella curua con tutti due gli estremi.

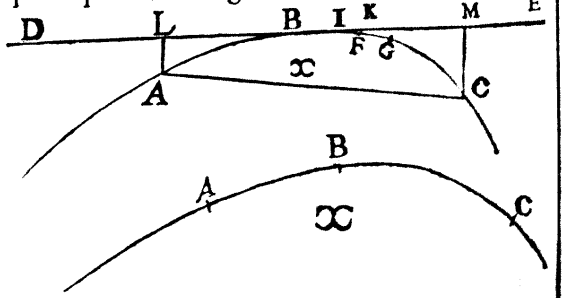


Concorra la retta linea DE con tutti due gli estremi D, ed E nella curua ABC. Dico che le linee DFE, DBE chiudono figura; cioè frà la linea curua DBE, e la retta DFE s'interpone spatio. Perche le linee DBE, DFE concorrono insieme negli estremi D, ed E, se frà di loro non si racchiude spatio, l'vna congruerà con l'altra, ma quelle cose, che congruono insieme [a] *sono fra di loro vguali, sarà la linea DFE vguale alla linea curua DBE; ma per la definitione 4. la linea curua DBE non è la breuissima di quelle, che si stendono fra i punti D, & E, la linea dunque DFE, ch'è vguale alla linea curua DBE, non sarà la breuissima di quelle, che si stendono dal punto D al punto E; e perciò non sarà linea retta, ch'è contro all'ipotesi, stante che la linea DFE è supposta linea retta; non dunque le linee DBE, DFE congruono, ma fra di loro s'interpone qualche spatio; cioè chiudono figura, ch'era da dimostrarsi.*

[a] 8. assiom.

I V.

Se frà due punti presi in qualche linea curua è tirata vna retta linea, quella passa da quella parte, che riguarda il cauo della curua.



Nella curua ABC, il di cui cauo sia verso X, siano presi due qualunque punti A, & C. Dico che la retta, tirata dal punto A al punto C, cade dalla parte X, che riguarda il cauo della curua.

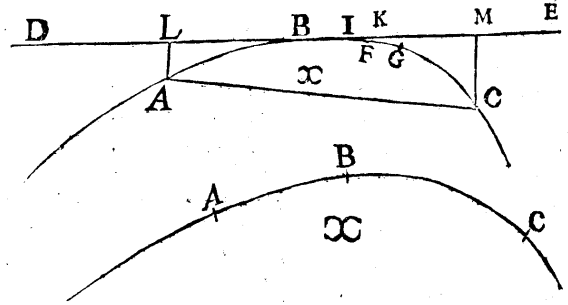
Si concepisca la retta linea DE indeterminata, dall'vna, e l'altra parte, si prenda nella curua ABC qualunque punto B, e si concepisca trasportata la curua ABC in modo, che col suo conuesso s'appoggi alla retta indeterminata DE nel luogo B, cioè che la curua ABC concorra col suo conuesso nella retta indeterminata DE, in modo che la curua ABC non segbi la retta DE, la linea curua ABC caderà fuori della retta linea DE; perche, se non cade fuori,

ò tutta passa sopra la retta DBE, ò ne passa parte; non passa tutta, perche la linea ABC [a] *sarebbe linea retta, ch'è contro all'ipotesi, se vna parte, come BF passa sopra la retta DE, la parte BF, della curua ABC, non sarebbe curua, ma linea retta, ed in tal caso la parte aggiunta, come FG vguale ò minore di FB sarebbe linea retta, presi nelle rette BF, FG due punti I, & K, vicini ad F, sarebbe IK per la medesima ragione linea retta, dal che tutta BG sarebbe vna sola retta linea; e col medesimo modo d'argumentare si dimostrerà, che tutta la linea ABC sarà linea retta, ch'è contro all'ipotesi, mentre la linea ABC è supposta curua: non dunque tutta, ne parte della linea curua ABC passa sopra la retta DE, ma cade tutta fuori; e perciò li punti A, & C cadono fuori della retta DE.*

a 4. defin.

Altra breue dimostratione.

Se tutta la curua, ò vna piccolissima parte di essa come BI, congruerà con la retta BI, l'vna non chiudera figura con l'altra ch'è contro alla 3. dimostratione, e perciò li punti A, & C, cadono fuori della retta DE.



Dalli punti A, & C alla retta DE si facciano cadere le rette AL, CM, perpendicolari ad ED, e si tiri la retta AC; perche i punti A, & C distano dalli punti L, M, per le quantità degl'interualli AL, CM, perciò la retta AC cade fuori della retta LM, ma per l'antecedente dimostratione, la retta AC comprende figura con la curua ABC, la retta dunque AC cade sotto la curua ABC; per la qual cosa passa dalla parte, che riguarda il concauo della curua ABC ch'era da dimostrarsi.

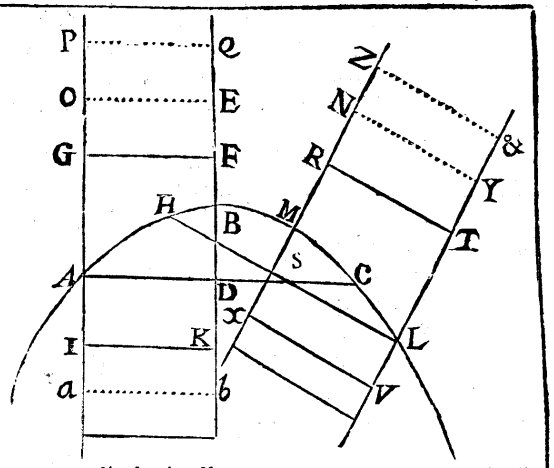
V.

Se frà due qualunque punti A, & C presi in qualunque linea curua ABC, il di cui concauo sia verso X, sia tirata la retta linea ADC, se dagl'infiniti punti immaginati nella curua ABC cadono rette linee perpendicolari à qualch'altra retta linea: Dico essere impossibile, che tutte quelle perpendicolari siano frà di loro vguali.

Si prenda nella curua ABC qualunque punto B, dal quale si faccia cadere la retta BD [a] *perpendicolare alla retta AC, e si continui la retta DB* [b] *verso E; nel punto A sopra la retta AC* [c] *s'erigga la perpendicolare AG, poi nella prolongatione BE si prenda qualunque punto F, e si faccia AG* [d] *vguale alla retta FD, si tiri* [e] *la retta GF. Nel quadrilatero GADF, i lati oppositi GA, FD, per costruttione, sono fra di loro vguali, gli angoli GAD, FDA sono vguali stante che sono retti, e per la seconda delle antecedenti dimostrationi, gli angoli*

a 11. prop.
b 2. postul.
c 11. propos.
d 3. propos.
e 1. postul.
f 10. assioma

goli AGF, DFG sono fra di loro vguali. In oltre perche la retta GA è fatta vguale ad FD, e la retta FD per costruttione è maggiore di FB, stante che la retta AC per l'antecedente dimostratione, cade nel concauo della curua ABC, sarà la retta GA maggiore della retta BF: se gli angoli AGF, BFG sono retti, le rette AG, BF, che cadono dalli punti A, & B saranno perpendicolari alla retta GF; ma AG è dimostrata maggiore di BF, non tutte le perpendicolari dunque, che cadono dalla curua ABC alla retta GF sono fra di loro vguali, ch'è il nostro proposito; se gli angoli AGF, BFG non sono retti, perche le rette AG, BF sono segate dalla retta GF, e gli angoli AGF, BFG, per quel, che s'è dimostrato, sono frà di loro vguali, per la prima delle antecedenti dimostrationi, essendo la retta AG maggiore di BF, la retta, che dal punto A cade perpendicolare alla retta GF, sarà maggiore della retta, che dal punto B cade perpendicolare alla medesima retta GF; non dunque tutte le rette, che dalla curua ABC cadono perpendicolari alla retta GF sono frà di loro vguali.



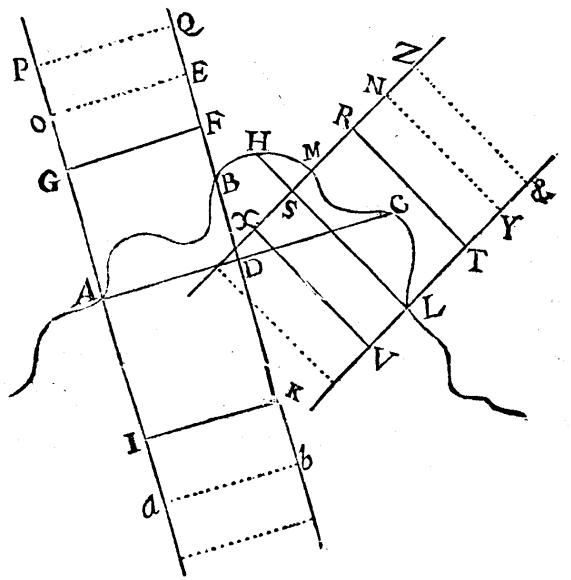
S'intendano continuate le rette DF, AG indeterminatamente verso P, Q, si facciano FE, GO frà di loro vguali, e si tiri la retta OE; sarà OA vguale ad ED, e procedendosi come prima, si dimostrerà, che non tutte le rette, che cadono perpendicolari dalli punti A, & B alla retta OE sono fra di loro vguali; e nell'istesso modo pigliandosi sempre parti vguali dall'vna, e l'altra parte, come EQ, OP, e con quest'ordine in infinito, e tirata la retta PQ, si dimostrerà, che non tutte le rette, che dalli punti A, & B, cadono perpendicolari alla retta PQ, sono fra di loro vguali.

Di nuouo si prendano due qualunque altri punti nella linea ABC, che siano H, ed L, tirata [g] *la retta linea HL quella, per l'antecedente dimostratione, passa per il concauo della curua HML; preso poi nella curua HML qualunque altro punto M, dal quale si faccia cadere la retta MS* [b] *perpendicolare ad HL; nel punto L,* [i] *s'erigga LT perpendicolare ad HL; si prenda in MN qualunque punto R, si faccia LT* [k] *vguale ad SR, e si tiri la retta RT; procedendosi come prima, si dimostrerà, che non tutte le rette, che dalla curua HML cadono perpendicolari alla retta RT, sono fra di loro vguali; In oltre continuate le rette SR, LT* [l] *indeterminatamente verso Z, &, si prendano dall'vna, e dall'altra parti vguali, come TY vguale ad RN, Y &, vguale ad NZ, e con quest'ordine in infinito, si tirino le rette NZ, &* [m]*, e si mostri come prima, che non tutte le rette, le quali cadono dalla*

g 1. Postul.
b 12. Prop.
i 11. Prop.
k 3. Prop.
l 2. Postul.
m 1. Postul.

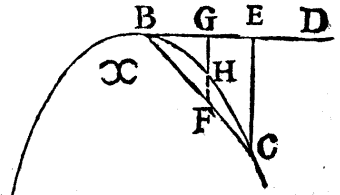
curua HML perpendicolari alle rette NT, Z,&,&c. Sono fra di loro vguali. E perche i punti H, M, L, sono presi ad arbitrio nella linea ABC, perciò qualunque positione habbiano le rette RT, NT, Z &, le linee rette, che dalla linea curua ABC cadono perpendicolari à quelle, mai saranno tutte frà di loro vguali.

n 2.postul. o 3. Prop. *Finalmente si prolunghino le rette FD, GA n indeterminatamẽte verso IK, si prenda in DK qualunque punto K, si faccia AI o vguale ad KD, e si tiri la retta IK; per la seconda delle antecedenti dimostrationi, gli angoli DKI, AIK sono fra di loro vguali, e perche BK per costruttione è maggiore di AI, per la prima delle antecedenti dimostrationi, la retta che dal punto B cade perpendicolare alla retta KI, è maggiore della retta, che dal punto A cade perpendicolare alla medesima retta KI; dal che non tutte le rette, che dalla curua ABC cadono perpendicolari alla retta KI sono fra di loro vguali; se poi si prendono le parti Kb, Ia vguali, tirata la retta a b, si dimostrerà come prima, che non tutte le rette, le quali cadono dalla curua ABC perpendicolari à KI, sono frà di loro vguali. Di più si continui MS p verso X, & LT verso V, si prenda in SX qualunque punto X, e si faccia LV q vguale ad XS, sarà MX maggiore di LV; si tiri r la retta XV, e si mostri come prima, che non tutte le rette, le quali cadono dalli punti ML, perpendicolari ad XV, sono frà di loro vguali; e perche i punti, K, M, L, furono presi ad arbitrio, in ogni positione, che sarà la linea XV, le rette, che dalla curua ABC cadono perpendicolari ad XV, mai saranno tutte frà di loro vguali, come fù proposto dimostrare.*



p 2. Postul. q 3.propos. r 1.Postul.

Se poi la retta linea, sopra la quale cadono le perpendicolari, continuata concorra con la curua BHC, come fà la retta BD, all'hora da qualunque punto C, preso nella curua BC, si faccia cadere la retta CE perpendicolare alla retta BD, si tiri la retta BC, la quale per l'antecedente dimostratione, cade dalla parte concaua X, si prenda nella retta BC qualunque punto F, e dal punto F si faccia cadere la retta FG perpendicolare alla



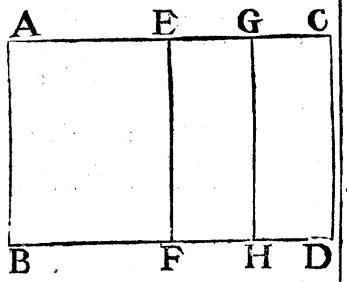
retta BD; perche il punto F è più vicino al punto B, che il punto C, per la prima delle antecedenti dimostrationi, la perpendicolare CE è maggiore della perpendicolare FG, e molto maggiore sarà di HG, ch'era da dimostrarsi.

VI.

Se due rette linee vguali, come AB, CD, sono in vn medesimo piano, e fanno angoli retti con qualch'altra linea retta BD, tirata la retta AC, se dalla retta AC cade qualche retta linea EF perpendicolare à BD, ed vguale ad AB, ouero CD. Dico che ogn'vna delle altre rette, che dalla linea AC cadono perpendicolari alla retta BD, sarà vguale ad AB, ouero CD.

Si prenda nella retta AC qualunque punto G, dal quale si faccia cadere la retta GH a perpendicolare alla retta BD. Dico che GH è vguale ad AB, ouero CD. a 12. Prop.

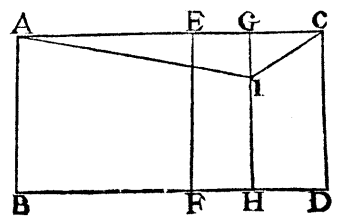
Perche le rette AB, CD sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con BD per la seconda delle antecedenti dimostrationi, gli angoli A & C sono frà di loro vguali: nel quadrilatero ABFE i lati opposti AB, EF sono, per ipotesi, frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta BD, per la citata seconda dimostratione, gli angoli FEA, BAE sono frà di loro vguali: similmente nel quadrilatero EFDC i lati opposti EF, CD sono, per ipotesi, frà di loro vguali, gli angoli in F, & D sono retti, e per la seconda dimostratione, gli angoli FEC, DCE sono frà di loro vguali; ma l'angolo C è dimostrato vguale all'angolo A, e l'angolo A vguale all'angolo FEA, sarà l'angolo FEA b vguale all'angolo FEC, dal che gli angoli in E sono retti; ma l'angolo FEC è dimostrato vguale all'angolo C, e l'angolo FEA è dimostrato vguale all'angolo A, gli angoli dunque A, & C sono retti.



b 1.Assiom.

Se la retta GH non è vguale ad AB, vna delle due sarà maggiore; supposto che la retta GH sia maggiore di AB, si faccia HI c vguale ad AB, si tirino le rette d AI, CI; essendo gli angoli DCA, BAC retti, sarà l'angolo BAI minore del retto, e l'angolo ancora DCI sarà minore d'vn angolo retto: nel quadrilatero ABHI i lati opposti AB, HI sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta BD, per la seconda dimostratione l'angolo BAI sarà vguale all'angolo HIA, ma l'angolo BAI è minore del retto, l'angolo dunque HIA sarà minore del retto, ed il supplemento AIG e sarà maggiore d'vn'angolo retto; similmente nel quadrilatero IHDC il lato IH, per costruttione è vguale al lato CD, gli angoli in H, & D sono retti, e per la seconda dimostratione, gli angoli DCI, HIC sono frà di loro vguali; ma l'angolo DCI è minore del retto,

c 3.Prop. d 1.Postul.



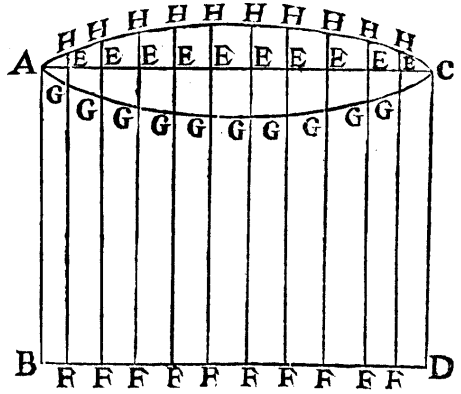
e 13.prop.

f 13. prop. *sarà l'angolo H I C minore del retto, ed il supplemento à due retti, cioè l'angolo GIC sarà maggiore d'vn'angolo retto: fù dimostrato l'angolo AIG maggiore d'vn retto, tutto l'angolo AIC sarà maggiore di due angoli retti. Nel triangolo AIC i due angoli AIC, ACI, giunti insieme, sono molto maggiori di due angoli retti, ch'è contro alla decimasettima propositione: non dunque la retta GH è maggiore di AB; e perciò le rette GH, AB sono frà di loro vguali; e perche il punto G è preso ad arbitrio, perciò ogn'vna dell'altre rette, che dal lato AC cade perpendicolare al lato BD, sarà vguale ad AB, ouero CD, ed in conseguenza saranno tutte frà di loro vguali, come fù proposto dimostrare.*

V I I.

Se due rette linee vguali, come AB, CD, sono in vn medesimo piano, e fanno angoli retti con qualch'altra linea retta B D, tirata la retta AC, dagl'infiniti punti E immaginati in A C, s'intendano cadere le innumerabili rette linee E F ad angoli retti sopra la retta BD. Dico che ogni retta linea EF è vguale alla retta AB, ouero CD.

Se ogni retta EF non è vguale alla retta AB, ouero CD, niuna di quelle sarà vguale ad AB, perche se qualched'vna fosse vguale ad AB, ouero C D per l'antecedente dimostratione, tutte sarebbero vguali ad AB, ouero CD, ed vguali frà di loro; hor se nissuna sarà vguale ad AB, ouero CD, ogn'vna di quelle ò sarà maggiore, ò pure sarà minore di AB, ouero CD.



a 3. prop. *Sia nel primo luogo ogni retta EF maggiore di AB, da ciascheduna delle rette EF, se ne tagli la parte FG a vguale alla retta AB, ouero CD, e per gl'infiniti punti G, notati nelle innumerabili rette EF, si concepisca passare la linea AGC, la quale ò sarà linea retta, ò linea curua. Supposto prima, che la linea AG C sia linea retta; perche i punti G cadono fuori della retta AC, le due rette linee AEC, AGC, chiuderanno figura, il che è impossibile, per quel che s'è dimostrato nell'annotatione doppo la quarta propositione al numero terzo, non dunque AGC, è linea retta. Sia di nuouo AGC linea curua; perche la notata AGC, e la retta AEC s'vniscono negl'estremi A, & C, perciò chiudono figura, e per la quinta delle antecedenti dimostrationi, non tutte le rette AB, GF, CD, che dalla notata AGC cadono perpendicolari alla retta BD, sono frà di loro vguali; mà per costruttione le perpendicolari AB, GF, CD sono tutte frà di loro vguali, sarebbero, e non sarebbero frà di loro vguali, ch'è impossibile, non dunque ciascuna retta EF è maggiore di AB, ouero CD.*

Di nuouo supposto, ch'ogni retta EF sia minore di AB, ouero CD, si prolunghino tutte le rette FE verso H, e si faccia FH vguale ad AB, ouero CD; si dimo-

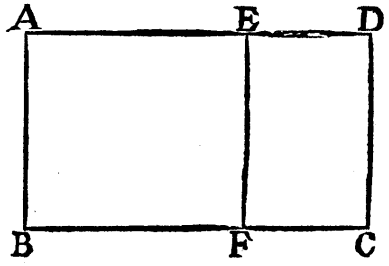
dimostri, come prima si fece, che AHC non è linea retta; mà ch'è linea curua, e per la quinta delle antecedenti dimostrationi, non tutte le rette AB, HF, CD, che dalla notata AHC cadono perpendicolari alla retta BD sono frà di loro vguali; mà per costruttione le perpendicolari AB, HF, CD, sono tutte frà di loro vguali, sarebbono e non sarebbero tutte frà di loro vguali, ch'è impossibile; non dunque ciascuna retta EF è minore di AB, ouero CD, ne meno, per quel che s'è dimostrato, è maggiore, ed in conseguenza tutte le rette AB, EF, CD sono frà di loro vguali, come fù proposto dimostrare.

V I I I.

Se due lati opposti d'vn quadrilatero sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con vno degl'altri lati, i due rimanenti angoli sono retti.

Sia il quadrilatero ABCD, del quale i due lati opposti AB, DC siano frà di loro vguali, e facciano angoli retti con la retta BC. Dico che gli angoli BA D, CDA sono angoli retti.

Perche nel quadrilatero ABCD i lati opposti AB, DC, sono frà di loro vguali, e fanno angoli vguali con la retta BC, per la seconda delle antecedenti dimostrationi gli angoli in A, & D sono frà di loro vguali.



a 12. prop. *Si prenda in A D qualunque pùto E, dal quale si faccia cadere la retta EF a perpendicolare a la retta BC, sarà EF, per l'antecedente dimostratione, vguale ad AB, ouero CD, e considerando il quadrilatero ABFE, i di cui lati opposti AB, EF sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta BC, per la seconda dimostratione, gli angoli FEA, BAE sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo, considerando il quadrilatere EFC D si dimostrerà, che l'angolo FED è vguale all'angolo CDE; è perche gli angoli in A, & D, furono dimostrati vguali, sarà l'angolo FEA vguale all'angolo FE D, e per la decima definitione, gli angoli FED, FEA sono retti; mà l'angolo FED è dimostrato vguale all'angolo CDE, e l'angolo FEA vguale all'angolo BAE, in conseguenza gli angoli in A, & D sono retti, come fù proposto dimostrare.*

I X.

Se due rette linee in vn medesimo piano sono segate da vn altra retta linea ad angoli retti, quelle continuate in infinito dall'vna, e l'altra parte mai s'auuicinano, ò s'allontanano scambieuolmente in luogo alcuno della loro estensione, e perciò mai concorreranno insieme, e queste sono quelle rette, che nella 34. definitione habbiamo chiamate, e per l'auuenire chiameremo rette linee parallele; ouero vgualmente distanti.

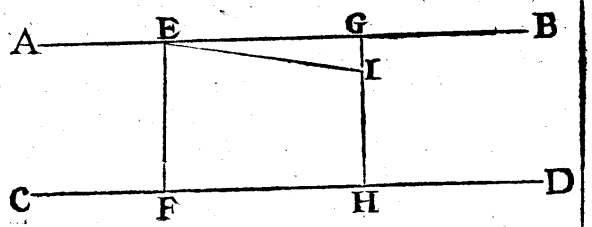
Siano

Siano le rette linee AB, CD in vn medesimo piano, segate dalla retta EF ad angoli retti, come in E, ed F. Dico che continuate le rette AB, CD dall'vna, e l'altra parte in infinito, mai in luogo alcuno della loro estensione s'auuicineranno, ò allontaneranno scambieuolmente.

Nella retta AB si prenda qualunque punto G, fuori del punto E, dal quale si faccia cadere la retta GH [a] *perpendicolare alla retta CD; se la retta GH non è vguale alla retta EF, ò sarà maggiore, ouero minore di EF; sia prima GH maggiore di EF, si faccia IH* [b] *vguale ad EF, e si tiri* [c] *la retta EI. Si consideri il quadrilatero EFHI, del quale i due lati opposti EF, IH sono per costruttione, frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta CD, e per l'antecedente dimostratione, gli angoli HIE, FEI sono retti, mà l'angolo FEG è supposto retto, sarà l'angolo FEI* [d] *vguale all'angolo FEG, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile, non dunque la retta GH è maggiore della retta EF.*

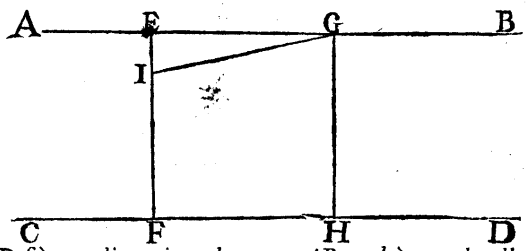
a 12. prop.
b 3. prop.
c 1. postul.
d 10. assioma

Di nuouo supposto, che la retta GH sia minore di EF, si faccia FI [e] *vguale ad HG, si tiri* [f] *la retta GI. Nel triangolo GEI l'angolo esterno FIG* [g] *è maggiore dell'angolo E interno, ed opposto; mà l'angolo FEG è supposto retto, sarà l'angolo FIG* [b] *maggiore d'vn angolo retto.*



e 3. prop.
f 1. postul.
g 16. prop.

Si consideri il quadrilatero IFHG del quale i due lati opposti IF, GH per costruttione sono frà loro vguali, e fanno angoli retti con la retta CD, per l'antecedente dimostratione li angoli HGI, FIG sono retti, ma l'angolo FIG fù dimostrato maggiore d'vn'angolo retto, sarebbe l'angolo FIG maggiore ed vguale ad vn'angolo retto ch'è impossibile, non dunque la retta GH è minore di EF, ne meno per quel, che s'è dimostrato è maggiore, e perciò le rette EF, GH sono frà di loro vguali: hor essendo le rette GH, EF frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta CD, per l'antecedente dimostratione l'angolo HGE sarà retto; e perche il punto G è preso ad arbitrio nella retta AB, perciò ogni retta linea, che da ciascuno degl'infiniti punti immaginati in AB cade perpendicolare alla retta CD fà angoli retti con la retta AB, ed è vguale alla retta EF, dal che tutte sono frà di loro vguali, e perciò continuate le rette AB, CD in infinito, in nissun luogo della loro estensione s'auuicinaranno, ne si scostaranno. Per la qual cosa le rette AB, CD segate dalla retta EF ad angoli retti continuate dall'vna, e l'altra parte in infinito in nissun luogo della loro estensione s'auuicinaranno ò scostaranno, che era da dimostrarsi. Si chiameranno le rette AB, CD come si disse nella 34. definitione rette; linee parallele, ouero vgualmente distanti.



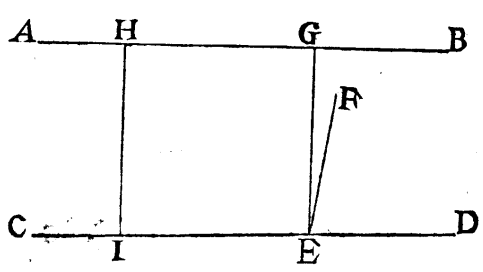
Se

X.

Se due rette linee sono frà di loro parallele, quella retta linea, che sega vna di quelle ad angoli retti, continuata segarà l'altra ad angoli retti.

Siano le rette linee AB, CD fra di loro parallele, ed in qualche punto E sopra la retta CD sia eleuata la retta EF ad angoli retti con la retta CD. Dico che continuata la retta EF segarà la retta AB ad angoli retti.

S'intendano segate le parallele AB, CD, ad angoli retti da qualche retta HI, si faccia HG [a] *vguale ad IE, e dal punto G, al punto E,* [b] *si tiri la retta GE; perche le rette GH, EI sono fra di loro vguali e fanno angoli retti con HI, per l'ottaua delle antecedenti dimostrationi, gli angoli IEG, HGE sono retti; se dunque la retta EF non passa per la retta EG, essendo l'angolo FEI retto, sarà l'angolo GEI vguale all'angolo FEI, la parte vguale al tutto ch'è impossibile; e perciò la retta EF passa per la retta EG, e concorre con AB nel punto G, ad angoli retti, come fù proposto dimostrare.*



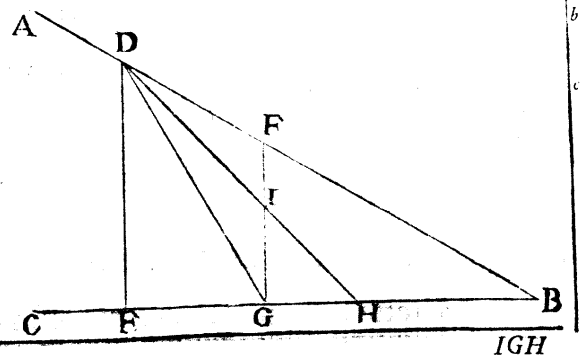
a 3. prop.
b 1. post.

XI.

Se sarà qualunque angolo acuto rettilineo ABC, e da gl'infiniti punti immaginati nella retta AB continuata verso A in infinito, cadano infinite perpendicolari alla retta CD. Dico che quanto il punto preso in AB sarà più lontano dal punto B, tanto la perpendicolare segarà la retta CB nel punto più remoto dal punto B.

Cadano da varij punti presi in AB le rette DE, FG [a] *perpendicolari alla retta CB, e sia il punto D più lontano dal punto B di quello, ch'è il punto F. Dico che il punto E sarà più lontano dal punto B, che il punto G; se il punto E non è più lontano dal punto B, che il punto G, ò la retta DE caderà nel punto G, come fà la retta DG, ouero caderà frà li punti GB, come fà la retta DH, la quale sega la retta FG in qualche punto I; se cade nel punto G, essendo gl'angoli DGE FGE retti, saranno* [b] *frà di loro vguali, dal che la parte* [c] *sarà vguale al tutto ch'è impossibile, non dunque la retta DE cade nel punto G. se cade frà i punti G, B, come in H, essendo gli angoli IHG, IGH retti, nel triangolo IGH*

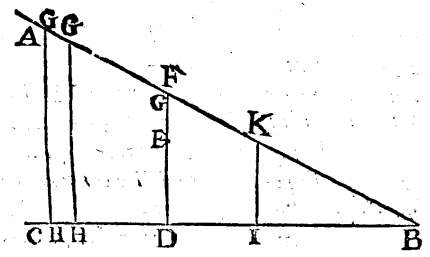
a 12. prop.
b 10. assiom.
c 9. assiom.



IGH i due angoli IHG, IGH nõ saranno minori di due angoli retti, ch'è contro alla decimasettima propositione, nõ dunque la retta DE cade frà li punti GB; fù dimostrato che ne meno cade nel punto G, in conseguenza caderà nella retta GC, dalche sarà EB maggiore di GB; se dunque concepiremo continuate le rette BA, BC in infinito verso A, & C; e da gl'infiniti pũti immaginati nella retta DA infinita verso A, si faranno cadere perpendicolari alla retta CE, nell'istesso modo si dimostrarà, che quella segarà la retta CE nel punto più lontano dal punto B, la quale caderà dal punto in AD più lontano da esso punto B, che era da dimostrarsi.

XII.

Se sarà qualunque angolo acuto A B C, ed in qualche punto D, preso nella retta CB, sia eleuata la retta DE ad angoli retti con CB. Dico che continuata la retta DE, quella concorrerà con AB in qualche punto F.



Si prenda in AB qualunque punto G, dal quale si faccia cadere la retta GH [a] *perpendicolare alla retta CD; se la retta GH cade nel punto D quella passerà per la retta DE; e perciò continuata DE passerà per il punto G, e segarà la retta AB.*

Se la retta GH cade fra li punti C, D, essendo le rette ED, GH perpendicolari alla retta CB, per la nona dimostratione, le rette DE, HG sono fra di loro parallele, dal che continuate, mai concorreranno scambieuolmente insieme, e perciò continuata la retta DE necessariamente segarà la retta GB.

Se la retta GH cade fra li punti D, B, come fà la retta KI, s'intendano le rette BA, BC [b] *continuate in infinito verso A, & C, e per l'antecedente dimostratione infinite rette linee possono cadere dalla retta AK perpendicolari alla retta CI, delle quali quella segarà CB in luogo più lontano dal punto B, la quale verrà da quel punto in AB, che sarà più lontano da esso punto B, e perche la retta DB è terminata, e le rette BA, BC s'intendono continuate in infinito verso A, & C; perciò da gl'infiniti punti G, imaginati nella indeterminata retta GA, possono cadere innumerabili rette GH perpendicolari alla retta CD, le quali seghino la retta CD in qualche punto H, più lontano dal punto B di quello, ch'è il punto D; sia dunque quella perpendicolare, che sega la retta CD, la notata GH; perche le rette GH, ED fanno angoli retti con la retta CD; per la nona dimostratione; le rette DE, HG sono fra di loro parallele, e perciò continuate mai concorreranno insieme, ma la retta HG concorre con AB nel punto G, necessariamente la retta DE continuata concorrerà con la retta GB in qualche punto F, come fù proposto dimostrare.*

[a] 12. propos.

[b] 2. post.

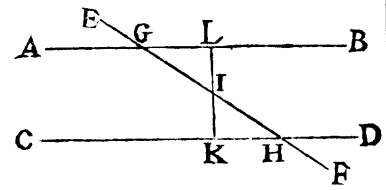
THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXVII.

Se due rette linee poste in vn medesimo piano sono se-

gate

gate da vn'altra linea retta, e gli angoli alterni sono frà di loro vguali, quelle rette linee sono frà di loro parallele.

Siano le rette linee AB, CD in vn medesimo piano, segate dalla retta EF, e gli angoli alterni BGH, CHG, siano frà di loro vguali: Dico che le rette AB, CD sono frà di loro parallele. Si diuida la retta GH [a] in due parti vguali nel pũto I, dal punto I si facciano cadere le rette IK, IL [b] che facciano angoli retti con le rette CD, AB, e si considerino i due triangoli IKH, IL G; perche l'angolo IHK, per ipotesi è vguale all'angolo IGL; e l'angolo IKH, per costruttione è vguale all'



[a] 10. propos.

[b] 12. propos.

angolo ILG, saranno i due angoli IHK, IKH vguali [c] alli due angoli IGL, ILG; il lato IH, per costruttione, è vguale al lato IG, saranno li rimanenti due lati HK, KI [d] vguali alli restanti due lati GL, LI, ed il rimanente angolo KIH vguale al rimanente angolo GIL; se le aggiunga vgualmente l'angolo HIL, i due angoli KIH, HIL [e] saranno vguali alli due angoli GIL, LIH; ma li due angoli GIL, LIH [f] sono vguali à due angoli retti, saranno li due angoli KIH, HIL vguali à due angoli retti; e perciò le due rette KI, IL [g] costituiscono vna sola retta linea; e perche gli angoli in K, ed L sono per costruttione retti, le due rette AB, CD saranno segate dalla retta KL ad angoli retti, e per la nona dimostratione le rette AB, CD sono frà di loro parallele, ch'era da dimostrarsi.

[c] 2. assiom.

[d] 26. prop.

[e] 2. assiom.

[f] 13. prop.

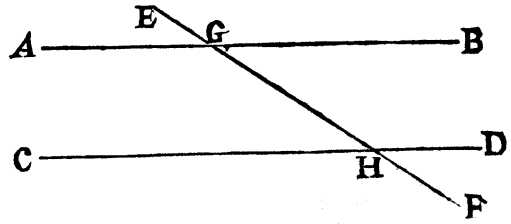
[g] 14. prop.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXVIII.

Se due rette linee poste in vn medesimo piano sono se-gate da vn'altra linea retta, e l'angolo esterno è vguale all'angolo interno, ed opposto dalla medesima parte; ouero li due angoli interni, e dalla medesima parte sono vguali à due angoli retti, quelle due rette linee sono frà di loro parallele.

Siano le due rette linee AB, CD in vn medesimo piano, segate dalla retta EF, come in G, ed H, e l'angolo EGB esterno, sia vguale all'angolo DHG interno, ed opposto dalla medesima parte B, & D; ouero li due angoli BGH, DHG interni, e dalla medesima parte BD, siano vguali à due angoli retti: Dico che le rette AB, CD sono frà di loro parallele.

Perche l'angolo AGH [a] è vguale all'angolo al vertice EGB, e l'angolo DHG per ipotesi è vguale al medesimo angolo EGB, sarà l'angolo AGH [b] vguale all'angolo alterno DHG,



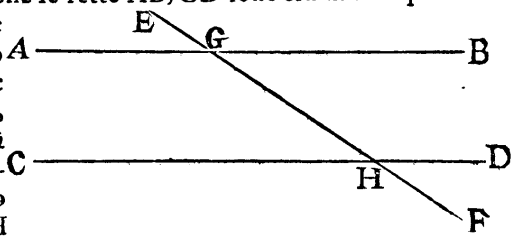
[a] 15. prop.

[b] 2. assiom.

H per

per l'antecedẽte propoſitione le rette AB, CD ſono frà di loro parallele.

Di nuouo perche li due angoli BGE, BGH [c] ſono vguali à due angoli retti, e li due angoli BGH, DHG, per ipoteſi ſono vguali à due angoli retti, li due angoli BGE, BGH [d] ſaranno vguali alli due angoli BGH DHG; ſe ne leui il commune angolo BGH, reſta l'angolo eſterno EGB [e] vguale all'angolo DHG interno, ed oppoſto dalla medeſima parte, e per quel che ſi è dimoſtrato, le rette linee AB, CD ſono frà di loro parallele, ch'era da dimoſtrarſi.



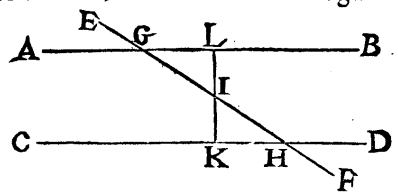
c 13.prop.
d 2.aſſioma
e 3.aſſioma.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXIX.

Se due rette linee parallele ſono ſegate da vn'altra linea retta, gli angoli alterni ſono frà di loro vguali; ogn'angolo eſterno è vguale al corriſpondente angolo interno, ed oppoſto dalla medeſima parte, e li due angoli interni, e dalla medeſima parte ſono vguali à due angoli retti.

Siano le due rette linee parallele AB, CD, ſegate dalla retta EF, come in G ed H: Dico prima, che gl'angoli alterni BGH, CHG ſono frà loro vguali

Si diuida la retta GH [a] in due parti vguali nel punto I, dal punto I ſi faccia cadere la retta IK [b] perpendicolare alla retta CD, ſi prolũghi la retta KI [c] verſo L, e per l'annotatione antecedente al numero decimo, la retta KI continuata ſegarà la retta AB ad angoli retti. Si conſiderino li due triangoli IKH, ILG: perche gli angoli IKH, ILG ſono retti, e gli angoli al vertice KIH, LIG [K] ſono frà di loro vguali, i due angoli HKI, HIK [d] ſono vguali alli due GLI, GIL, il lato IH per coſtruttione è vguale al lato GI, ſarà il rimanente angolo IHK [e] vguale al rimanente angolo IGL; dal che gli angoli alterni BGH, CHG ſono frà di loro vguali, ed i ſupplementi à due retti, cioè gli angoli alterni AGH, DHG ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



a 10. prop.
b 12. prop.
c 2. poſt.
K 15. prop.
d 2. aſſiom.
e 26. prop.

Dico nel ſecondo luogo, che l'angolo eſterno EGB è vguale all'angolo DHG interno, ed oppoſto dalla medeſima parte BD.

Perche l'angolo EGB [f] è vguale all'angolo al vertice AGH, e l'angolo DHG è dimoſtrato vguale al medeſimo angolo AGH, ſarà l'angolo EGB [g] eſterno vguale all'angolo GHD interno, ed oppoſto dalla medeſima parte, ed i ſuppleméti à due angoli retti, [b] cioè l'angolo eſterno EGA, ſarà vguale all'angolo CHG, interno ed oppoſto dalla medeſima parte AC Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà l'angolo eſterno CHF eſſere vguale all'angolo AGH interno, ed oppoſto, e che l'angolo FHD eſterno è vguale all'angolo BGH interno, ed oppoſto, il che era da dimoſtrarſi nel 2. luogo.

f 15. prop.
g 1. aſſiom.
b 13. prop.

Dico

Dico finalmente che li due angoli B G H, DHG interni, e dalla medeſima parte BD ſono vguali à due angoli retti.

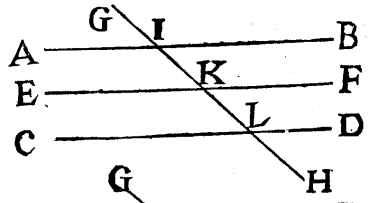
Perche l'angolo EGB è dimoſtrato vguale all'angolo D H G, vgualmente ſe gl'aggiunga l'angolo BGH, li due angoli B G E, B G H [K] ſaranno vguali alli due angoli DHG, BGH, ma li due angoli B G E, BG H [l] ſono vguali à due angoli retti, li due angoli dunque B G H, D H G ſono vguali à due angoli retti, e li ſupplementi à due retti, cioè li due angoli AGH, CHG, [m] interni, e dalla medeſima parte, ſono vguali à due angoli retti, come fù propoſto dimoſtrare.

K 2. aſſiom.
l 13. propoſ.
m 13. prop.

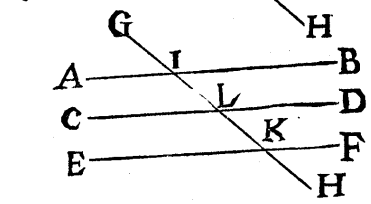
THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXX.

Quelle rette linee, che ſono parallele ad vna medeſima linea retta, ſe non coſtituiſcono vna ſola retta linea, ſono frà di loro parallele.

Sia la retta AB parallela alla retta EF, e la retta CD parallela alla medeſima EF, e le rette A B, C D non coſtituiſcano vna ſola retta linea. Dico che le rette AB, CD ſono frà di loro parallele.



Si concepiſcano ſegate tutte da qualche retta linea GH, nelli punti, per eſempio, I, L, K; perche la retta AB è ſuppoſta parallela ad EF, l'angolo GIB [a] eſterno, è vguale all'angolo IKF interno, ed oppoſto dalla medeſima parte. Similmẽte eſſendo, per ipoteſi, CD parallela alla retta EF, ſarà l'angolo IKF [d] vguale all'angolo ILD, mà l'angolo IKF fù dimoſtrato vguale all'angolo GIB, ſarà l'angolo GIB [b] vguale all'angolo ILD: hor perche le rette A B, C D ſono ſegate dalla retta G H, e l'angolo eſterno GIB è dimoſtrato vguale all'angolo ILD interno, ed oppoſto dalla medeſima parte, ſarà la retta AB [c] parallela alla retta CD, ch'era da dimoſtrarſi.



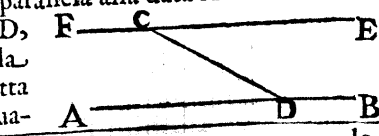
a 29. prop.
d 29. prop.
b 1. aſſiom.
c 28. prop.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXI.

Data vna retta linea infinita, ed vn punto fuori di eſſa, per il dato punto far paſſare vna retta linea parallela alla data.

Sia data la retta linea infinita A B, ed il punto fuori C, per il dato punto C ſi vuole far paſſare vna retta parallela alla data AB.

Si prenda in AB qualunque punto D, dal dato punto C al punto D [a] ſi tiri la retta C D, nel punto C, ſopra la retta CD, ſi coſtituiſca l'angolo ECD vgua-



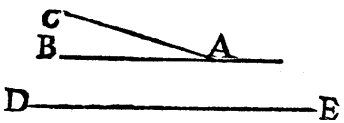
a 1. poſt.

H 2 le

b 23.prop. le b all'angolo A D C. Dico che la retta EC continuata se si vuole verso F, ed E, è parallela alla data retta AB.

Perche le rette FE, AB sono segate dalla retta CD, e gli angoli alterni ECD, ADC, per costruttione, sono frà di loro vguali, sarà la retta FE c parallela alla data retta AB; ch'era da farsi, e dimostrarsi. c 27.prop.

COROLLARIO.



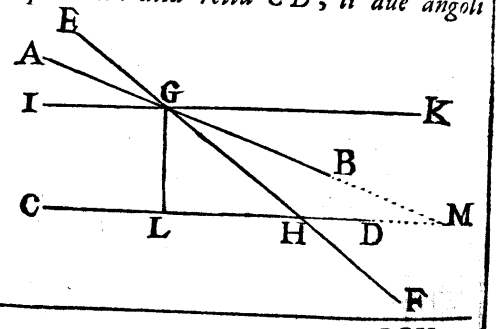
Da quel che s'è detto è manifesto, che per vn medesimo punto non possono passare due rette parallele ad vna medesima retta linea, perche se per qualche punto A passino le rette A B, A C parallele alla retta DE, le due A B, A C, per l'antecedente propositione sarebbero frà di loro parallele; dal che le due A B, A C, sarebbero frà di loro parallele, e concorrerebbero nel punto A, ch'è impossibile, non dunque per vn medesimo punto possono passare due rette linee parallele ad vn altra retta linea.

SCOLIO I.

Qui facilmente si può dimostrare l'vndecimo assioma d'Euclide nel modo seguente.

Se due linee rette in vn medesimo piano sono segate da vn'altra linea retta, e li due angoli interni dalla medesima parte sono minori di due angoli retti, quelle due rette linee prolongate concorreranno insieme da quella parte, doue sono li due angoli minori de' due angoli retti.

Siano le due rette linee AB, CD in vn medesimo piano segate dalla retta EF, come in G, ed H, e gli angoli BGH, D H G interni, dalla medesima parte BD, siano minori di due angoli retti: Dico che le rette AB, CD continuate concorreranno verso M; per l'antecedente propositione si faccia passare per il punto G la retta I G K parallela alla retta C D, li due angoli K G H, D H G a *saranno vguali à due angoli retti, ma li due angoli B G H D H G, per ipotesi sono minori di due angoli retti, perciò li due angoli KGH DHG sono maggiori de' i due angoli BGH DHG; se ne leui il commune angolo DHG, resta l'angolo KGH* b *maggiore dell'angolo* a 29. prop. b 5. assiom.



BGH, dal che la retta BG sega l'angolo KGH, e la retta AB sega la retta IK. Dal punto G c *si faccia cadere la retta GL perpendicolare alla retta CD, perche le rette IK, CD, per costruttione sono parallele, e la retta GL fà angoli retti con la retta CD, per il numero decimo all'annotatione antecedente, la retta L G fà angoli retti con la retta IK, dalche l'angolo LGB sarà acuto; finalmente essendo l'angolo BGL acuto, e la retta LD fà angoli retti con la retta GL, per il numero duodecimo dell'antecedente annotatione, la retta LD concorrerà con la retta GB in qualche punto M, come fù proposto dimostrare.* c 12.p rop.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che se vna retta sega vna di due rette parallele, quella continuata sega l'altra delle parallele: poiche essendo IK, CD frà di loro parallele, s'è dimostrato, che la retta AB, la quale sega la parallela IK continuata, concorre con l'altra parallela CD.

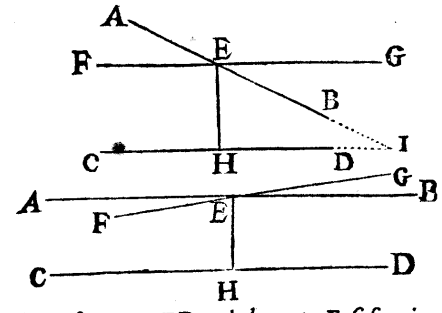
SCOLIO II.

Perche quest'opera non sia mancante in cosa alcuna m'è parso bene aggiungere la seguente dimostratione.

Se due rette linee in vn medesimo piano non sono frà di loro parallele, quelle continuate concorrono scambieuolmente in qualche punto: e se due rette linee in vn medesimo piano continuate non concorrono, quelle sono frà di loro parallele.

Siano le due rette linee A B, C D in vn medesimo piano, e supposto prima, che non siano frà di loro parallele: Dico che continuate concorrono scambieuolmente in qualche punto.

Nella retta AB sia preso qualunque punto E, per il quale si faccia passare la retta FG a *parallela alla retta CD, quella per l'annotatione dopo la quarta propositione, segarà la retta AB; perche se non la sega, passerà per la retta AB, ed in tal caso la retta AB, sarà parallela alla retta CD, ch'è contro all'ipotesi: si seghino dunque, e la parte EG cada sopra la retta EB, dal punto E si faccia cadere la retta EH* b *perpendicolare alla retta CD, per l'annotatione dopo la 26. propositione numero decimo, la retta EH farà angoli retti con la retta FG;* a 31. del. b 12. del.



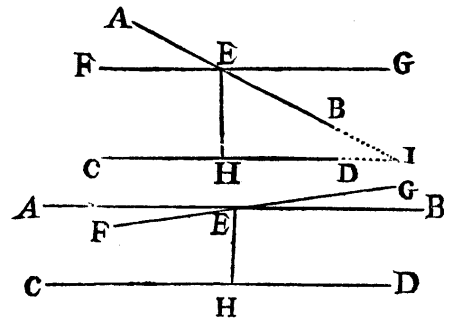
dal che l'angolo BEH sarà minore d'vn'angolo retto , l'angolo DHE per costruttione è retto , i due angoli dunque BEH , DHE sono minori di due angoli retti , e per lo Scolio antecedente , le rette AB , CD continuate concorrono in qualche punto I , ch'era da dimostrarsi nel primo luogo .

Dico di nuouo , che se le rette AB , CD , poste in vn medesimo piano , e continuate non concorrono , sono frà di loro parallele .

Se le rette AB , CD non sono fra di loro parallele , si prenda in AB qualunque punto E , per il quale si faccia passare la retta FG [c] *parallela alla retta CD ; se la retta FG passa per la retta AB , sarà la retta AB parallela , ma se non passa per la retta AB , quelle si segaranno scambieuolmente nel punto E ; cada dũque la parte EG sopra la retta AB , e la parte FE sotto: Dal punto E sopra la retta CD,* [d] *si faccia cadere la perpẽdicolare EH,e per l'annotatione dopò la 26. propositione numero decimo, la retta EH farà angoli retti con la parallela FG ; dal che l'angolo HEG sarà retto , ma l'angolo BEH è minore dell'angolo GEH , sarà l'angolo BEH minore del retto ; e perche l'angolo DHE , per costruttione, è retto , i due angoli BEH , DHE saranno minori di due angoli retti , e per l'antecedente Scolio le rette EB , HD continuate concorrono , che è contro all'ipotesi, mentre fù supposto , che non concorrono ; per la qual cosa le rette AB,CD sono fra di loro parallele,come fù proposto dimostrare.*

c 31.del.

d 12.del.



COROLLARIO.

Da quel che s'è dimostrato è manifesto , che se due rette linee sono in vn medesimo piano , le quali continuate non concorrono, quelle in nissun luogo della loro estensione s'auicinano , ò s'allontanano , stante che s'è dimostrato , che quando non concorrono sono frà di loro parallele .

SCOLIO III.

Con tutto ch'Euclide habbia disposto questi Elementi con ordine intieramente perfetto , non hà però dimostrato gli elementi delle parallele con metodo corrispondente alla perfettione dell'ordine ; il che osseruato da nostri Maggiori, per non lasciare mancante in questa parte vn opera di tanta importanza , cercarono con varij mezzi supplire à quello , ch'Euclide ò perche non auuertisse all'equiuoco , ò perche stimasse secondo il suo metodo il tutto ben dimostrato , non hebbe in molta consideratione ; e perche la mancanza non è nelle dimostrationi , ma bensì nella certezza de' principij hanno creduto alcuni , che i nostri Antichi prendessero nuoui principij , con i quali poi dimostrassero le passioni

delle

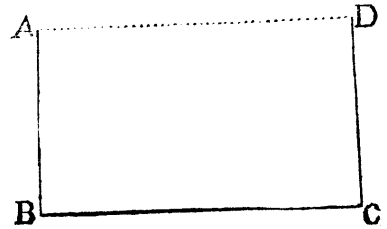
delle parallele , ma perche queste dimostrationi in modo alcuno non si trouano, cõgetturano,che forse queste non fossero più stabili di quelle,che porta Proclo nel suo commento , perche se fossero migliori esso Proclo non le hauerebbe trascurate , come hà fatto dell'altre , delle quali appresso si parlerà .

Di due principij si serue Euclide nel dimostrare le passioni delle parallele , il primo de' quali (ch'è la definitione delle rette parallele) è stimato mancante , per le ragioni da me addotte nella 34. definitione , cioè che chiamando Euclide rette linee parallele quelle , che poste in vn medesimo piano , e continuate in infinito mai scambieuolmente concorrono , e non essendosi dimostrato come due rette linee in vn medesimo piano non concorrendo , ne meno nella loro infinita estensione s'auuicinano , ne si scostano , mentre si trouano in natura varie linee , le quali poste in vn medesimo piano , e continuate non concorrono , e sempre scambieuolmente s'auuicinano ; perciò tal definitione è stimata mancante , ed insufficiente à spiegare la propria natura delle rette parallele : ond'io , seguendo la sentenza di Possidonio , e Gemini , hò definito le rette parallele , non per la negatiua del semplice loro scambieuole concorso , come fà Euclide , mà per la negatiua del scambieuole auuicinamento , e scostamento nella loro infinita estensione , il che tutto hò dimostrato nell'annotatione dopo la 26. propositione , e secondo tal definitione , senza turbare in cosa alcuna il bell'ordine dato da Euclide à questi elementi , dimostro tutte le passioni delle parallele , come ogn'vno da sè può vedere, senza auualermi d'altro principio, ma con le sole cose prima dimostrate .

Proclo lib.2 cap.11.

Conosciuta ancora da graui Autori de nostri tempi l'insufficienza dell'antedetta definitione d'Euclide , stimarono necessario abbracciare la sentenza di Possidonio , e Gemini , e dimostrare le passioni delle parallele con metodo diuerso da quello tenuto da Euclide, e perciò fare s'auualsero d'vn nuouo principio riceuuto dal P. Clauio nel suo Commento ad Euclide cioè che vna retta linea come AB , mouendosi transuersalmente sempre perpendicolare , cioè ad angoli retti , sopra la retta BC , con l'altro estremo A descriua la retta linea AD .

Dopo la 28. propos. del primo lib.



Con pace di così Illustri Autori non sò vedere qual certezza maggiore sia in questo principio, che in quello d'Euclide quando chiama rettelinee parallele quelle due,ch'essendo in vn medesimo piano,e cõtinuate in infinito mai concorrono : certo è che se faremo esatta riflessione all'vno , ed all'altro principio , senza dubio trouaremo , ò che la definitione d'Euclide è totalmente perfetta , ed in tal caso gl'Antichi sopranominati hanno errato , e con essi ancora noi , ò pure non è perfetta, e per vna simile ragione,per la quale quella è mancante , e anco imperfetto , è mancante l'antecedente principio . E per chiarezza di quanto s'è detto , mi si permetta , che io faccia vna breue repetitione circa à quello , che rende insufficiente la definitione d'Euclide , ed è , che trouandosi in natura due linee curue , come sono le Parabole congruenti , ò le hyperbole congruenti , le quali sono in vn medesimo piano , e continuate in infinito sempre s'auuicinano , e mai concorrono : similmente trouandosi in natura

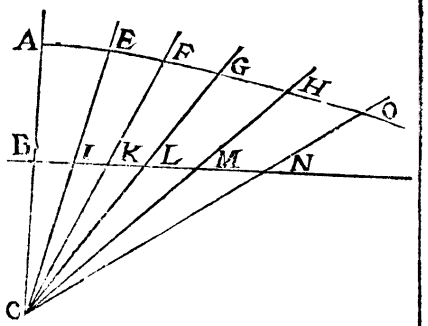
Viuiano de maximis & minimis lib.1.

due

Apoll. 14. propos. del lib. 2. che corrisponde alla . . . propos. degl'Elementi Conici posti nel fine di questo tomo

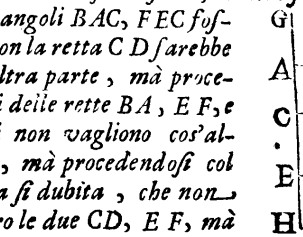
due altre linee, cioè vna curua, e l'altra retta, come è l'hyperbole, e l'Asyntote, ouero com'è la concoide di Nicomede, e la retta rispetto la quale si genera essa concoide, le quali sono in vn medesimo piano, e continuate in infinito sempre s'auuicinano, e mai concorrono: Benche Euclide nella sua definitione parli semplicemente di due linee rette, e non di due curue, ne d'vna retta, ed vna curua, con tutto ciò dandosi tal'auuicinamento in due linee curue, come anco in vna retta, ed vna curua, cade in dubio se questo auuicinamento si dia ancora in due linee rette; e perciò, non hauendo Euclide dimostrato come due rette continuate in vn medesimo piano, non concorrendo, ne meno scambieuolte s'auuicinino, tal difinitione è stimata insufficiente à spiegare la natura delle rette parallele, ed in conseguenza tutte le passioni delle parallele restano indimostrate. Supposto questo.

Veniamo alla generatione della Concoide di Nicomede. S'intenda la retta BN segata dalla retta CA ad angoli retti in qualche punto B, e preso nella retta AC qualunque punto C, dal quale s'intendano tirate infinite rette linee come CE, CF, CG, CH che seghino la retta B N come ne i punti I, K, L, M, &c. preso poi in AB qualunque punto A, si facciano le rette I E, K F, LG, MH ogn'vna vguale ad AB quelle saranno frà di loro vguali, e la linea curua, che passa per gl'infiniti punti A, E, F, G, H, &c. si chiama linea Concoide, la quale continuata in infinito, e continuata ancora la retta BN in infinito, queste due sempre s'auuicinano, e mai concorrono insieme come à suo luogo si dimostrerà: hor perche le infinite rette AB, EI, FK, GL, HM &c. sono frà di loro vguali, se concepiremo la retta linea AB muouersi transuersalmente sopra la retta B N con vna continuata diminutione d'angolo, quella con l'estremo A disegnarà la linea curua AEFGH, se dunque la retta AB muouendosi transuersalmente sopra la retta B N con vna continuata diminutione d'angolo con l'estremo A disegna la curua AEFGH, cade in dubio se la medesima, ò altra retta linea AB muouẽdosi transuersalmente sempre ad angoli retti sopra la retta BN se con l'estremo A possa descriuere qualch'



altra linea curua, la quale continuata s'auuicini alla retta B N, e perciò l'antecedente principio preso dal P. Clauio è tanto imperfetto per quanto è imperfetta la definitione d'Euclide. E se qualch'vno dicesse non poter concepire come la retta AB muouendosi transuersalmente sopra la retta BN sempre ad angoli retti possa con l'estremo A descriuere altro che vna linea retta, se gli risponde, che ne meno potrà concepire, quando le rette AB, CD, EF segate dalla retta GH ad angoli retti in A, C, E, come la retta BA può inclinarsi più verso D, che altroue, e la retta CD possa più inclinarsi verso B, che verso F, o pure inclinandosi le due AB, CD scambieuolmente in modo, che l'vna s'auuicini all'altra, ed inclinandosi le due CD, EF in modo, che l'vna s'auuicini all'altra, possa la retta CD nel medesimo

transito inclinarsi ad F, ed inclinarsi verso B, mentre solo tale auuicinamento si darebbe, quando li due angoli BAC, FEC fossero acuti, nel qual caso non la retta C D sarebbe inclinata all'vna, ed all'altra parte, mà procederebbe dalle inclinationi delle rette BA, E F, e pure tutte queste ragioni non vagliono cos'alcuna à fauore d'Euclide, mà procedendosi col solito rigore del Geometra si dubita, che non solo le due AB, CD, ouero le due CD, E F, mà



infinite altre perpendicolari alla retta G H continuate siano per auuicinarsi scambieuolmente, e perciò la detta definitione d'Euclide è stimata imperfetta si che fatta la comparatione anco il detto principio preso dal Clauio deue esser stimato imperfetto, ed in conseguenza tutte le passioni delle parallele appoggiate à questo principio si deuono riputare non dimostrate, ò pure se tal principio non è mancante, ne meno è mancante la definitione d'Euclide.

L'altro principio preso da Euclide, è l'vndecima notione nel testo greco, ouero la quinta petitione appresso Proclo, Campano, e Commandino, ed il decimoterzo assioma appresso il P. Clauio, cioè che quando due rette linee in vn medesimo piano sono segate da vn'altra retta linea, e gli angoli interni dalla medesima parte sono minori di due angoli retti, quelle due rette linee continuate concorreranno da quella parte, doue sono gli angoli minori di due retti; e perche questo principio non è niente diuerso dalla conuersa della 17. propositione, alcuni seguendo l'orme di Proclo, Gemini, Possidonio, e Tolomeo, la rimuouono dal numero de' principij, e la pongono frà i Theoremi da dimostrarsi. Procl. lib. 4.

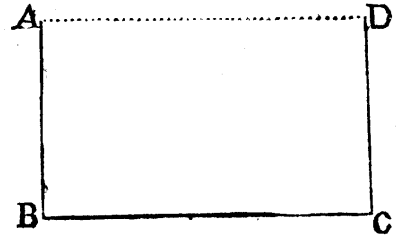
Riferisce Proclo, che Tolomeo ritenendo la definitione d'Euclide, e tutte l'altre cose, solamente rimosse da i principij l'antedetta vndecima notione, la quale prese come Theorema, ed in due modi dimostrò in vn suo libro intitolato, Le rette linee continuate dalle parti, doue gli angoli sono minori di due retti, concorrono; mà perche esso Proclo ne parla con qualche liuore, mentre dice, ch'il progresso tenuto da Tolomeo nell'vna, e l'altra dimostratione è peruerso, ed inganneuole, il che in modo alcuno non può addattarsi nella persona d'vn sì grand' huomo come Tolomeo, probabilmente si può credere, che tali dimostrationi possano essere apocrafe.

Controuerse da Proclo l'vna, e l'altra dimostratione, che dice essere di Tolomeo, si sforza egli in dimostrare la medesima notione vndecima d'Euclide, Procl. lib. 4. *con auualersi di quell'antico pronunciato riceuuto da Aristotile, cioè* che due rette linee, che fanno angolo in qualche punto, continuate da quella parte doue non fanno angolo, la loro distanza supera ogni finita grandezza. lib. primo de Cœlo. *Rigetta il P. Clauio nel suo commento ad Euclide la dimostratione fatta da Proclo, allegando che questo pronunciato d'Aristotele è tanto incerto, per quanto è incerta l'vndecima notione d'Euclide, e vi è chi dottissimamente rigetta la medesima dimostratione di Proclo ancora col concedergli il pronunciato del Peripatetico, dimostrando ch'esso Proclo nella sua dimostratione viene à supporre per vero quello, che deue dimostrarsi, cioè che due rette in vn medesimo piano segate da vn'altra retta ad angoli retti, quelle continuate in infinito in nissun luogo della loro estensione s'auuicinano, ò si scostano,* Scol. alla prop. 28. del lib. primo.

Scol. alla propos. 28. lib. primo.

mà da per tutto ritengono il medesimo interuallo.

Finalmente il P. Clauio, ritenendo la medesima definitione d'Euclide, cerca supplire alla mancanza di Proclo con dimostrare per altra via l'vndecima nottione d'Euclide, e perciò fare s'anuale del sopradetto principio, cioè, che muouendosi la retta AB transuersalmente, & ad angoli retti, sopra la retta BC, con l'estremo A disegna la retta linea AD, il che sopra fù riprouato, per essere questo principio tanto imperfetto per quanto è stimata imperfetta la definitione sopra nominata d'Euclide e perciò il P. Clauio ne meno potè conseguirne l'intento.

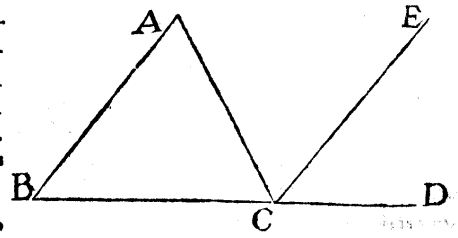


Hauendo io dunque osseruato, che per l'insufficienza de' principij presi, tanti huomini Illustri non hanno potuto conseguire l'intento di rendere ben dimostrate le passioni delle parallele, sopra le quali è fabricata poi tutta la machina composta di varie scienze, che si numerano nella Matematica, pensai rimuouere affatto dalla Geometria quei principij, che non erano per se noti, e ne meno si poteuano dimostrare, e ricorrendo alla comparatione della linea retta, e la curua, conobbi essere impossibile, che la retta linea possa esser parallela alla curua, cioè essere impossibile, che tutte le rette, le quali cadono dalla curua perpendicolari alla retta linea, siano frà di loro vguali; e benche questo sia noto dalla sola definitione della retta linea, e della curua, con tutto ciò mi parue bene farui sopra qualche picciola dimostratione, come si vede nel numero settimo dell' annotatione dopo la 26. propositione, e da quella feci il passaggio ad altre dimostrationi, mediante le quali facilmente potei dimostrare la 34. definitione: si che con questa, e con altre dimostrationi, che gli seguono, non hebbi difficoltà à dimostrare l'vndecima nottione d'Euclide, e successiuamente tutte l'altre passioni delle parallele, come si può vedere nelle propositioni seguenti.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXII.

Continuato qualunque lato d'vn triangolo rettilineo, l'angolo esterno è vguale alli due angoli interni, ed opposti, insieme giunti, e li trè angoli del triangolo sono vguali à due angoli retti.

Sia qualsiuoglia triangolo rettilineo ABC, del quale sia continuato qualunque lato B C verso D. Dico che l'angolo D C A esterno è vguale alli due angoli CAB, CBA interni, ed opposti.



Dal pũto C si tiri la retta CE [a] parallela al lato AB.

[a] 31.prop.

Perche le rette parallele AB, EC sono segate dalla retta B D

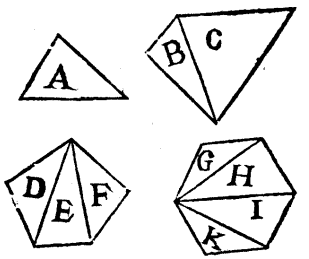
l'angolo esterno ECD [b] sarà vguale all'angolo ABC interno, ed opposto dalla medesima parte. Similmente perche le parallele AB, EC sono segate dalla retta AC, gli angoli ECA, BAC alterni, sono frà di loro vguali, dal che li due angoli DCE, ECA, cioè tutto l'angolo esterno DCA, [c] è vguale alli due angoli CAB, CBA, interni, ed opposti, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo. [b] 29.prop. [c] 2.assiom.

Di nuouo essendosi dimostrato l'angolo D C A vguale alli due angoli C A B, C B A, giunti insieme, all'vna, ed all'altra parte s'aggiunga vgualmente l'angolo ACB, li trè angoli CAB, CBA, A C B [c] saranno vguali alli due angoli DCA, ACB, mà li due angoli DCA, A C B, [d] sono vguali à due angoli retti; li tre angoli dunque CAB, CBA, ACB, del triangolo A B C, sono vguali à due angoli retti, ch'era da dimostrarsi. [c] 2.assioma [d] 13.prop.

SCOLIO

Da quel, che s'è detto, facilmente si viene in cognitione à quanti angoli retti siano vguali gli angoli d'ogni figura rettilinea.

Tutti gli angoli di qualunque figura rettilinea sono vguali à tanti angoli retti, per quanto è il duplo numero de' lati, che restano, detrattone due.



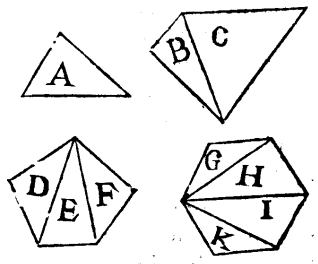
Per essempio, il triangolo A hà tre lati, detrattone due, resta vno, il di cui duplo sarà due, e così diremo, che trè angoli d'vn triangolo sono vguali à due retti, come s'è dimostrato nell'antecedente propositione.

Il quadrilatero B C si diuide nè i due triangoli B, & C; e perche li tre angoli d'vn triangolo [a] sono vguali à due retti, li sei angoli dunque delli due triangoli B, & C, sono vguali à quattro retti; mà li sei angoli dei triangoli B, & C sono vguali à i quattro angoli del quadrilatere BC, saranno i quattro angoli del quadrilatere BC, [b] vguali à quattro retti, cioè, leuato due dal numero de' lati, resta due, il di cui duplo è quattro, e così diremo, che i quattro angoli della figura quadrilatera sono vguali à quattro angoli retti. [a] 32.prop. [b] 1.assiom.

Similmente la figura di cinque lati DEF si diuide in trè triangoli, gli angoli d'ogni triangolo [c] sono vguali à due retti, saranno tutti gli angoli delli trè triangoli D, E, F vguali à sei angoli retti, ma tutti gli angoli delli trè triangoli D, E, F, sono vguali alli cinque angoli della figura di cinque lati, perciò tutti gli angoli della figura di cinque lati, [d] sono vguali à sei retti, cioè, leuato due dal numero de' lati della figura di cinque lati, resta trè, il di cui duplo è sei, e così diremo, che i cinque angoli della figura di cinque lati sono vguali à sei angoli retti. [c] 32.prop. [d] 1.assiom.

Di nuouo la figura di sei lati G H I K, si diuide ne i quattro triangoli

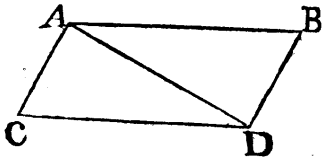
G, H, I, K; e perche trè angoli d'vn triangolo [e] *sono vguali à due retti, tutti gli angoli de'i quattro triangoli G, H, I, K, sono vguali ad otto angoli retti, mà tutti gli angoli delli quattro triangoli G, H, I, K sono vguali alli sei angoli della figura di sei lati GHIK, gli angoli dunque della figura di sei lati sono vguali ad otto angoli retti, cioè leuato due dal numero de' lati, che sono sei, resta quattro, il di cui duplo è otto, e così diremo, che gli angoli della figura di sei lati sono vguali ad otto angoli retti, e con quest'ordine si procederà in tutte le altre figure rettilinee.*



e 32.prop.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Se due rette linee sono vguali, e parallele, quelle, che che congiungono gl'estremi dalle medesime parti, sono frà di loro vguali, e parallele.



Siano le rette linee A B, C D, frà di loro vguali, e parallele; tirate le rette AC, BD, Dico che le rette AC, B D sono frà di loro vguali, e parallele. Si tiri [a] la retta AD.

a 1.postul.

Perche le rette AB, CD, per ipotesi, sono frà di loro parallele, segate dalla retta AD, gli angoli alterni BAD, CDA [b] sono frà di loro vguali. Si considerino i triangoli ADB, ADC, essendo il lato AB, per ipotesi vguale al lato CD, ed il lato A D è commune, i due lati BA, A D, [c] sono vguali alli due lati C D, D A, l'angolo BAD, è dimostrato vguale all'angolo CDA, sarà la base B D [d] vguale alla base AC, e l'angolo BDA vguale all'angolo CAD. Finalmente perche le rette AC, BD sono segate dalla retta AD, e gli angoli alterni BDA, CAD, sono frà di loro vguali, le rette AC, BD [e] saranno frà di loro parallele. Per la qual cosa le rette AC, BD, sono frà di loro vguali, e parallele, ch'era da dimostrarsi.

b 27. prop.
c 2.assiom.
d 4. prop.
e 27. prop.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXXIV.

In ogni parallelogrammo i lati opposti sono frà di loro vguali, gli angoli opposti sono frà di loro vguali, ed il diametro diuide il parallelogrammo in due parti vguali.

Sia qualunque parallelogrammo A B D C, il di cui diametro A D, come nella figura dellapropositione antecedente. Dico che il lato A B è vguale al lato opposto CD, il lato AC è vguale all'opposto BD, l'angolo B è vguale all'angolo opposto C, l'angolo B A C è vguale all'angolo opposto

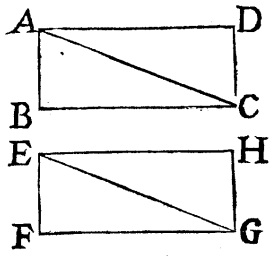
posto BDC, ed il diametro AD diuide il parallelogrammo ABDC in due parti vguali.

Perche il quadrilatero ABDC è supposto parallelogrammo, illato AB [a] sarà parallelo al lato D C, ed il lato A C sarà parallelo al opposto DB, ed essendo i lati AB, DC frà di loro paralleli segati dalla retta A D, gli angoli alterni BAD, CDA [b] sono frà di loro vguali. Similmẽte perche la retta AD sega le parallele AC, BD, gli angoli C A D, BDA alterni [b] sono frà di loro vguali. Si considerino i triangoli BAD, DCA, de' quali i due angoli B A D, B D A, dell'vno, sono vguali alli due angoli CAD, C D A, dell'altro, il lato AD è commune à tutti due, saranno i rimanenti due lati BD, BA [c] dell'vno, vguali à i rimanenti due lati AC, DC dell'altro, cioè il lato AB vguale al lato DC, ed il lato AC vguale al lato D B, ed il restante angolo B sarà vguale al restante angolo C; e perche l'angolo BAD è mostrato vguale all'angolo C D A, e l'angolo BDA vguale all'angolo CAD, sarà tutto l'angolo BAC [d] vguale all'opposto angolo B D C. Finalmente perche i due lati AB, B D, del triangolo BAD, sono mostrati vguali à i due lati A C, D C del triangolo A DC, e l'angolo B è mostrato vguale all'angolo C, sarà il triangolo A B D [e] vguale al triangolo ACD: per la qual cosa i lati opposti d'ogni parallelogrammo sono vguali, gli angoli opposti sono frà di loro vguali, ed il diametro diuide il parallelogrammo in due parti vguali, ch'era da dimostrarsi.

a 25.defin.
b 29.prop.
b 29.prop.
c 26.prop.
d 2.assiom.
e 4.prop.

SCOLIO.

Li rettangoli contenuti da linee rette vguali sono frà di loro vguali.

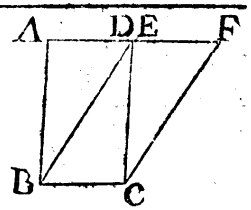


Siano li rettangoli BD, FH, e sia AB vguale ad EF, ed il lato BC vguale ad FG. Dico che li rettangoli BD, FH sono frà di loro vguali; si tirino li diametri AC, EG, perche li lati AB, BC sono vguali à i lati EF, FG, e li angoli in B ed F sono vguali, stante che sono retti, sarà il triangolo ABC [a] *vguale al triangolo EFG ed i loro dupli, cioè li rettangoli BD, FH* [b] *sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.*

a 4.prop.
b 34.prop.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXXV.

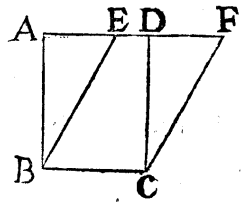
I Parallelogrammi costituiti sopra d'vna medesima base, e frà le medesime parallele, sono frà di loro vguali.



Siano i parallelogrammi ABCD, EBCF, sopra la medesima base BC, e collocati frà le medesime parallele AF, BC; dico che la superficie parallelogramma A B C D è vguale alla superficie parallelogramma EBCF.

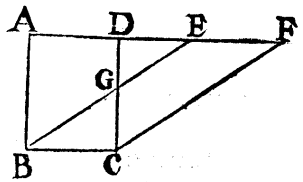
O' gli angoli ADC, FEB terminano in vn solo punto come apparisce nella prima figura, ò l'angolo FEB cade nel lato AD, come nella seconda figura; ò pure cade fuori del lato AD nella continuatione DF, come nella terza figura. Supposto prima che l'angolo FEB, termini nel punto D, perche nel parallelogrammo ABCD il lato A D [a] è vguale all'opposto lato BC, e nel parallelogrammo EBCF il lato E F, è vguale all'opposto lato B C, sarà il lato AD vguale al lato EF. Similmente nel parallelogrammo ABCD il lato AB è vguale all'opposto lato D C, e nel parallelogrammo EBCF il lato EB è vguale al lato opposto FC, però i due lati AB, BD del triãgolo ABD, [b] sono vguali à i due lati EC, CF del triangolo ECF; la base AD fù mostrata vguale alla base EF, sarà l'angolo ABD [c] vguale all'angolo ECF, ed il triangolo ABD [d] vguale al triangolo ECF, vgualmente se gl'aggiunga il commune triangolo EBC, ne verrà il parallelogrammo ABCD, [e] vguale al parallelogrammo EBCF, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 34. prop.
b 2. assiom.
c 8. prop.
d 4. prop.
e 2. assiom.



Cada il punto E frà i punti A, & D, come nella seconda figura. Perche nel parallelogrammo ABCD il lato A D [f] è vguale all'opposto BC, e nel parallelogrammo EBCF il lato EF è vguale all'opposto BC, sarà il lato A D [u] vguale al lato EF, se ne leui la commune parte E D, resta A E [g] vguale alla retta D F. In oltre perche nel parallelogrãmo ABCD il lato AB [b] è vguale all'opposto DC, e nel parallelogrammo EBCF il lato EB è vguale all'opposto FC, i due lati AB, BE, del triangolo ABE, saranno vguali a i due lati DC, CF del triangolo DCF, la base AE è dimostrata vguale alla base D F, sarà l'angolo A B E [i] vguale all'angolo D CF, ed il triangolo A B E [K] vguale al triangolo D C F; vgualmente se gl'aggiunga il trapetio EBCD, ne viene il parallelogrammo A B C D [l] vguale al parallelogrammo E B C F, ch'era da dimostrarsi nel secondo caso.

f 34. prop.
u 1. assiom.
g 3. assiom.
b 34. prop.
i 8. prop.
K 4. prop.
l 2. assiom.



Finalmente cada il punto E nella cõtinuatione D F, come nella terza figura. Perche il lato A D [m] è vguale all'opposto BC, ed il lato E F è vguale all'opposto BC, sarà il lato A D [n] vguale al lato EF; vgualmente se gli aggiunga la retta D E, ne viene la retta A E [o] vguale alla retta D F. Nel paralellogrammo B D il lato A B [p] è vguale all'opposto D C, e nel parallelogrammo E B C F il lato E B è vguale all'opposto F C; però i due lati AB, BE, del triangolo ABE, sono vguali à i due lati DC, CF, del trian-

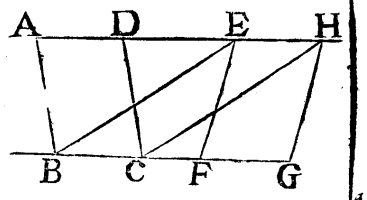
m 34. prop.
n 1. assiom.
o 2. assiom.
p 34. prop.

triangolo D C F; la base AE è mostrata vguale alla base DF, sarà l'angolo A B E [q] vguale all'angolo D C F, ed il triangolo A B E [r] vguale al triangolo DCF; da i quali se ne leui il commune triangolo D G E, resta il trapetio ABGD [s] vguale al trapetio GCFE, à i quali s'aggiunga vgualmente il triangolo GBC, ne viene il parallelogrammo A B C D [t] vguale al parallelogrammo EBCF. Per la qual cosa i parallelogrammi, che hanno vna medesima base, e sono frà le medesime parallele, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

q 8. propos.
r 4. propos.
s 3. assiom.
t 2. assiom.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXVI.

I Parallelogrammi, che hanno vguali basi, e sono collocati frà le medesime parallele, sono frà di loro vguali.



Siano li parallelogrammi A B C D, E F G H, i quali habbiano le basi B C, FG vguali, e siano collocati frà le medesime parallele A H, BG. Dico che sono frà di loro vguali.

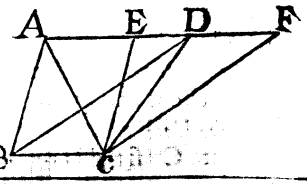
Per dimostrar questo dal punto B al punto E [a] si tiri la retta BE, e dal punto C al punto H si tiri la retta CH.

Perche la base B C è suppposta vguale alla base F G, ed il lato F G [b] è vguale all'opposto EH, sarà la retta BC [c] vguale alla retta EH; e perche la retta AH è parallela, per ipotesi, alla retta BG, saranno le rette EH, CB, frà di loro vguali è parallele, dal che le rette linee E B, H C, che congiungono gli estremi, [d] saranno vguali, e parallele; ed il quadrilatero EBCH [e] sarà parallelogrammo. Si considerino li due parallelogrammi ABCD, EBCH, i quali hanno la medesima base BC, e sono costituiti frà le medesime parallele AH, BG, e perciò saranno, [f] frà di loro vguali. Similmente i due parallelogrammi E B C H, EFGH, hanno la medesima base EH, e sono costituiti frà le medesime parallele A H, B G inconseguenza sono frà di loro vguali; ma il parallelogrammo A B C D fù mostrato vguale al parallelogrammo EBCH; il parallelogrammo dunque ABCD [g] sarà vguale al parallelogrammo E F G H, ch'era da dimostrarsi.

a 1. post.
b 34. prop.
c 1. assiom.
d 33. prop.
e 35. defin.
f 35. prop.
g 1. assiom.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXVII.

I triangoli, che hanno la medesima base, e sono collocati frà le medesime parallele, sono frà di loro vguali.



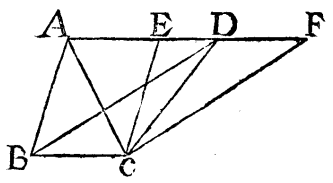
Siano i triangoli A B C, D B C, i quali habbiano la medesima base BC, e siano collocati frà le medesime parallele AF, BC. Dico che sono frà di loro vguali.

Dal punto C [a] si tiri la retta CE pa-

a 31. prop.

rallela alla retta A B, che concorra con E F in qualche punto E ; e dal medesimo punto C si tiri la retta CF parallela alla retta B D , la quale concorrerà con la retta AD continuata in qualche punto F .

Perche le rette AF, BC, per ipotesi, sono parallele , e la retta C E per costruttione è parallela ad A B , come anco la retta C F è parallela al lato B D ; i quadrilateri ABCE , D B C F , [b] saranno parallelogrammi , i quali , hauendo la medesima base BC, ed essendo collocati frà le medesime parallele AF, BC , [c] saranno frà di loro vguali; e perche il diametro AC [d] diuide il parallelogrammo ABCE in due parti vguali , ed il diametro DC , diuide il parallelogrammo DB CF in due parti vguali , essendo essi parallelogrammi frà di loro vguali , le loro metà saranno ancora frà di loro vguali : mà il triangolo A B C è la metà del parallelogrammo A B C E , ed il triangolo D B C è la metà del parallelogrammo DB CF, perciò il triangolo ABC sarà vguale al triangolo DBC , come fù proposto dimostrare .

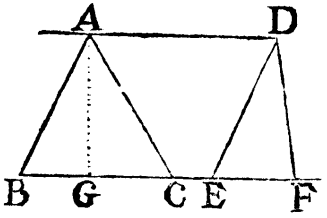


b 35. defin.
c 35. prop.
d 34. prop.

COROLLARIO.

Da qui è manifesto , che se li triangoli posti frà le medesime parallele hanno ineguali basi , quello sarà maggiore, che haurà la base maggiore .

Per essempio siano li triangoli ABC , D EF , frà le medesime parallele A D , BF , e sia la base B C maggiore della base E F . Dico che il triangolo ABC sarà maggiore del triangolo D E F . Si faccia CG vguale ad EF, e si tiri la retta GA, sarà BC maggiore di GC, ed il triangolo A B C maggiore del triangolo AGC , mà per l'antecedente propositione il triangolo A G C è vguale al triangolo D E F , sarà il triangolo ABC maggiore del triangolo DEF , come si disse .

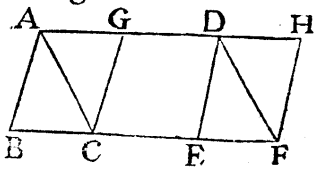


THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXVIII.

I triangoli , che hanno vguali basi , e sono collocati frà le medesime parallele , sono frà di loro vguali .

Siano i triangoli ABC , D E F , i quali habbiano le basi BC , EF vguali , e siano collocati frà le medesime parallele A H , BF . Dico che il triangolo ABC è vguale al triangolo DEF .

Dal punto C [a] si tiri la retta CG paral-



a 31. prop.

lela

lela alla retta BA , e dal punto F si tiri la retta FH parallela al lato E D ; essendo , per ipotesi , AH parallela à BF , i quadrilateri BG , EH [b] saranno parallelogrammi , i quali , hauendo le basi BC , EF vguali , ed essendo collocati frà le medesime parallele AH , B F , sono [c] frà di loro vguali ; e perche il diametro AC [d] diuide il parallelogrammo BG in due parti vguali , ed il diametro D F diuide il parallelogrammo E H in due parti vguali , essendo i parallelogrammi BG , EH vguali , le loro metà , cioè li triangoli ABC , DEF , [e] saranno frà di loro vguali , ch'era da dimostrarsi

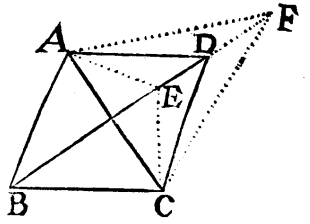
b 35. defin.
c 36. prop.
d 34. prop.
e 3. assiom.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXIX.

I triangoli vguali costituiti in vna medesima base, e collocati dalla medesima parte , sono frà le medesime parallele .

Siano gli vguali triangoli A B C, DBC , i quali habbiano la medesima base B C , e siano collocati dalla medesima parte AD . Dico che sono frà le medesime parallele , cioè che la retta AD è parallela alla retta B C .

Se la retta AD non è parallela alla retta B C , si può dal punto A [a] tirare vna retta linea parallela alla retta BC; ò quella passerà sotto , ò sopra la retta AD ; passi prima sotto la retta A D , e sia AE , la quale concorra col lato BD in qualche punto E , si tiri [b] la retta CE ; e si considerino i due triangoli ABC , EBC , che hanno la medesima base BC , e sono collocati frà le medesime parallele AE , BC, [c] sarà il triangolo EBC vguale al triangolo ABC , mà per ipotesi, il triangolo DBC è vguale al medesimo triangolo ABC, sarà il triangolo EBC [f] vguale al triangolo DBC , la parte vguale al tutto , ch'è [g] impossibile , non dunque la retta AE è parallela alla retta BC .



a 31. prop.
b 1. post.
c 37. prop.
f 1. assiom.
g 9. assiom.

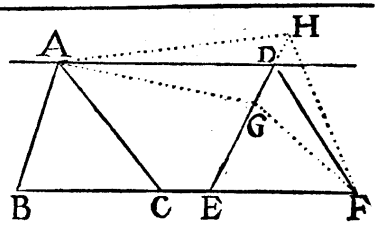
Di nuouo passi la tirata parallela sopra la retta AD, e sia la notata AF; si continui il lato BD [b] fino che concorra con AF in qualche punto F , si tiri [i] la retta CF . Hauremo i triangoli ABC, FBC costituiti sopra la medesima base BC, e frà le medesime parallele AF , BC, [K] dal che il triangolo FBC sarà vguale al triangolo ABC ; ma il triangolo DBC, per ipotesi , è vguale al triangolo ABC, sarà il triangolo DBC [l] vguale al triangolo FBC, la parte vguale al tutto, ch'è [m] impossibile, non dunque la retta AF è parallela alla retta BC ; fù dimostrato , che ne meno la retta AE è parallela alla retta BC , in conseguenza sarà la retta AD parallela alla retta BC , come fù proposto dimostrare .

b 2. post.
i 1. post.
K 37. prop.
l 1. assiom.
m 9. assiom.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XL.

I triangoli vguali , che hanno vguali basi poste nella medesima dirittura , e collocati dalla medesima parte , sono frà le medesime parallele .

Siano gli vguali triangoli A B C, D E F, e ſia la baſe BC vguale alla baſe EF, nella medeſima dirittura BF, ed i triangoli ſiano collocati dalla medeſima parte AD. Dico che ſono frà le medeſime parallele, cioè che la retta A D è parallela alla retta BF.



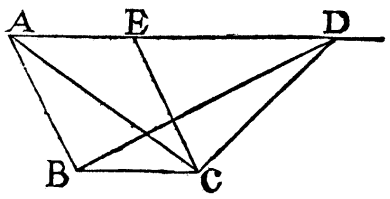
[a] 31. prop. Se la retta AD non è parallela alla retta BF, ſi tiri dal punto A [a] vna retta linea parallela alla retta B F, la quale ò paſſerà ſotto la retta A D, ouero ſopra. Paſſi prima, s'è poſsibile, ſotto la retta A D, quella [b] 1. poſt. concorrerà col lato ED in qualche punto G, ſi tiri [b] la retta GF; ed hauremo i due triangoli ABC, GEF, ſopra le vguali baſi BC, EF, e frà le [c] 38. prop. medeſime parallele A G, B F, [c] e perciò ſarà il triangolo G E F vguale al triangolo ABC, ma il triangolo D E F, per ipoteſi, è vguale al medeſimo triangolo ABC, ſarà il triangolo GEF [d] vguale al triangolo DEF, la [d] 1. aſſiom. parte vguale al tutto, [e] ch'è impoſsibile, non dunque la retta A G è pa- [e] 9. aſſiom. rallela alla retta BF.

Paſsi di nuouo la parallela ſopra la retta A D, che ſia la notata A H, la quale concorrerà col lato E D continuato in qualche punto H. Si tiri la retta HF, ed hauremo i triangoli ABC, HEF ſopra le vguali baſi BC, EF, e frà le medeſime parallele AH, BF, dal che il triangolo H E F [f] 38. prop. [f] ſarà vguale al triangolo ABC; ma il triangolo DEF è poſto vguale al [g] 1. aſſiom. medeſimo triangolo ABC, ſarà il triangolo DEF [g] vguale al triangolo HE [b] 9. aſſiom. F, la parte vguale al tutto, ch'è [b] impoſsibile; non dunque la retta AH è parallela alla retta BF; ma ſi diſſe, che la retta AG ne meno è parallela alla retta BF, in conſeguenza la retta AD ſarà parallela alla retta BC, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XLI.

Se vn triangolo, ed vn parallelogrammo, haueranno vna medeſima baſe, e ſaranno collocati frà le medeſime parallele il parallelogrammo ſarà il doppio del triangolo.

Sia il parallelogrammo A B C E, ed il triangolo D B C ſopra d'vna medeſima baſe BC, e frà le medeſime parallele AD, BC. Dico che il parallelogrammo ABCE è il doppio del triangolo DBC.



[a] 1. poſtula. Si tiri [a] la retta AC; ſarà il trian- [b] 34. prop. golo ABC [b] vguale al triangolo ACE, e perciò il parallelogrammo A B CE, ſarà il doppio del triangolo ABC. In oltre perche i triangoli ABC, DBC, hanno vna medeſima baſe BC, e ſono collocati frà le medeſime [c] 37. prop. parallele AD, BC, ſarà il triangolo DBC [c] vguale al triangolo A B C;

mà

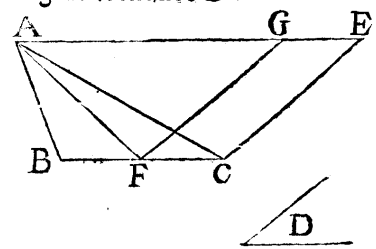
mà il parallelogrammo ABCE, per quel, che s'è moſtrato, è il doppio del triangolo ABC, ſarà il parallelogrammo ABCE il doppio del triangolo DBC, come fù propoſto dimoſtrare.

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XLII.

Dato vn triangolo, ed vn angolo rettilineo, deſcriuere vn parallelogrammo vguale al dato triangolo, e che habbia vn angolo vguale ad vn angolo dato.

Sia il dato triangolo rettilineo ABC, e l'angolo D. Dico eſſer poſsibile deſcriuere vn parallelogrammo vguale al dato triangolo A B C, e che habbia vn angolo vguale al dato angolo rettilineo D.

Per il vertice A, del triangolo ABC, [a] ſi faccia paſſare la retta A E parallela alla baſe BC: ſi diuida la baſe BC [b] in due parti vguali in F, e nel punto F ſi coſtituiſca l'angolo CFG [c] vguale all'angolo D, ſi continui la retta GF, [d] che coſtituiſce l'angolo, ſin che concorra con la retta AE in qualche punto G, dal punto C ſi tiri la retta CE [e] parallela alla retta FG, la quale concorrerà con la retta AE in qualche punto E. Eſſendo per coſtruttione, la retta AE parallela alla baſe BC, e la retta EC parallela ad FG, il quadrilatero GFCE [f] ſarà parallelogrammo. Dico che il parallellogrammo GFCE è vguale al triangolo ABC, ed hà l'angolo GFC vguale all'angolo D.



[a] 31. prop. [b] 10. prop. [c] 23. pröp. [d] 3. poſt. [e] 31. prop. [f] 25. defin.

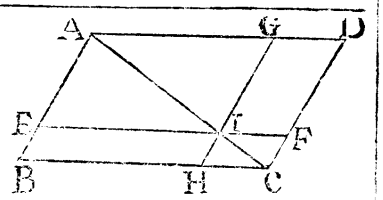
Si tiri [g] la retta FA, ed hauremo i due triangoli ABF, AFC, ſopra le vguali baſi BF, FC, e frà le medeſime parallele AE, BC, dalche i triangoli ABF, AFC [h] ſono frà di loro vguali, ed il triangolo ABC ſarà il doppio del triangolo AFC. In oltre il parallelogrammo GFCE, ed il triangolo AFC, hanno la medeſima baſe FC, e ſono frà le medeſime parallele AE, BC, ſarà il parallelogrammo GFCE [i] il doppio del triangolo AFC; ma il triangolo ABC fù moſtrato il doppio del medeſimo triangolo AFC, ſarà il parallelogrammo GFCE [K] vguale al triangolo ABC, e perche l'angolo GFC, per coſtruttione, è vguale all'angolo D, ſarà dunque coſtrutto il parallelogrammo GFCE vguale al dato triangolo ABC, ed haurà l'angolo GFC vguale all'angolo dato D, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

[g] 1. poſt. [h] 38. prop. [i] 41. prop. [K] 6. aſſiom.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XLIII.

Se vn parallelogrammo è diuiſo in quattro parallelogrammi, due de' quali ſiano intorno al diametro, i complementi ſono frà di loro vguali.

Sia il parallelogrammo ABCD, diuiſo ne'i quattro parallelogrammi AEIG, IHCF, EBHI, GIFD, e ſiano li due AEIG, IHCF intorno al diametro AC. Dico che li complementi EBHI, IFDG, ſono frà di loro vguali.



a 4.prop. Perche il diametro AC [a] diuide il parallelogrammo ABCD in due parti vguali, ſarà il triangolo ABC vguale al triangolo ACD: Similmente il diametro AI ſega il parallelogrammo AEIG in due parti vguali, ſarà il triangolo AEI vguale al triangolo AIG; finalmente il diametro IC diuide il parallelogrammo IHCF in due parti vguali, dalche il triangolo IHC è vguale al triangolo ICF: ſe dagl'vguali triangoli ABC ACD ſe ne leuano gli vguali triãgoli AEI,AIG, reſta il trapetio CIEB [b] vguale al trapetio CIGD, da i quali ſe ne leuino gli vguali triangoli IHC, ICF, reſtano i complementi EBHI, GIFD frà di loro vguali, che era da dimoſtrarſi.

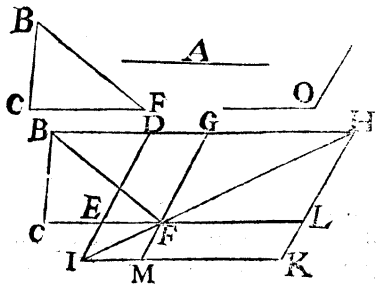
b 3. aſſiom.

PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XLIV.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo, vguale ad vn dato triangolo rettilineo, ſecondo vn angolo rettilineo dato.

Sia data la retta linea A, il triangolo BCF, e l'angolo rettilineo O. Dico eſſer poſſibile deſcriuere vn parallelogrammo, vguale al dato triangolo BCF, che habbia vn angolo vguale all'angolo rettilineo O, e che habbia vn lato vguale alla retta linea data A.

Per la 42. propoſitione ſi deſcriua il parallelogrammo DEFG vguale al triangolo BCF, che habbia l'angolo GFE vguale al dato angolo O, poi [a] ſi prolunghi il lato DG verſo H, e ſi faccia la retta GH [b] vguale alla data linea retta A; dal punto H al punto F [c] ſi tiri la retta HF, la quale ſi continui [d] ſin che concorra col lato DE, prolungato in qualche punto I; dal punto I ſi tiri la retta IK [e] parallela alla retta DH, e dal punto H ſi tiri la retta HK [e] parallela alla retta DI, la quale concorrerà con la retta IK in qualche punto K; ſi prolunghi il lato EF [f] ſin che concorra con HK in qualche punto L, e ſi prolunghi il lato GF, ſin che concorra col lato IK in qualche punto M. Dico che il parallelogrammo FMKL è vguale al triangolo BCF, che hà vn angolo vguale all'angolo O, ed hà vn lato vguale alla data retta linea A.



a 2. poſt.
b 3.prop.
c 1. poſt.
d 2. poſtul.
e 31.prop.
f 2. poſt.

Si

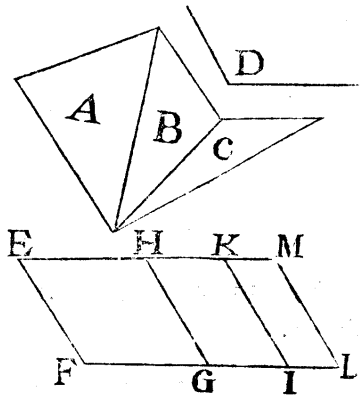
Si conſideri il parallelogrammo DIKH diuiſo ne i quattro parallelogrammi DEFG, EIMF, FMKL, GFLK, de'quali i due IEFM, GFLH ſono intorno al diametro IH, e per l'antecedente propoſitione, i complementi DEFG, FMKL ſono frà di loro vguali; ma il triangolo BCF per coſtruttione, è vguale al parallelogrammo DEFG, ſarà il parallelogrammo FMKL [g] vguale al triangolo BCF; e perche gli angoli al vertice LFM, GFE [b] ſono frà di loro vguali, e l'angolo O, per coſtruttione, è vguale all'angolo GFE, ſarà l'angolo MFL [i] vguale all'angolo O. Nel parallelogrammo GFLH, i lati oppoſti FL, GH, [k] ſono frà di loro vguali, ma la retta A, per coſtruttione, è vguale alla retta GH, ſara la retta FL [l] vguale alla retta A. Per la qual coſa ſi è coſtrutto il parallelogrammo FMKL vguale al triangolo BCF, hà l'angolo MFL vguale al dato angolo O, ed il lato FL vguale alla retta data A, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

g 1. aſſiom.
b 15. prop.
i 1. aſſiom.
k 34. prop.
l 1. aſſiom.

PROBLEMA XIII. PROPOSITONE XLV.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo vguale à qualunque data figura rettilinea, ſecondo vn angolo dato.

Sia la figura rettilinea data ABC, l'angolo rettilineo D, e la data linea retta FE. Dico eſſer poſſibile coſtruire vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo ABC, che habbia vn angolo vguale all'angolo D, ed vn lato vguale alla retta FE.



Da vn angolo del rettilineo A B C [a] ſi tirino linee rette à gli angoli oppoſti in modo, che ſia diſtribuito il dato rettilineo ne i triangoli A, B, C, poi alla retta EF, per l'antecedente propoſitione, s'applichi il parallelogrammo EFGH, vguale al triangolo A, che habbia l'angolo F, vguale al dato angolo D; ſimilmẽte al lato HG s'applichi il parallelogrãmo HGIK vguale al triangolo B, che habbia l'angolo H G I vguale all'angolo D; ed al lato KI s'applichi il parallelogrammo KILM vguale al triangolo C, che habbia l'angolo KIL vguale all'angolo D. Dico che la figura FELM è vn ſolo parallelogrammo, vguale al rettilineo ABC, che hà vn angolo vguale all'angolo D.

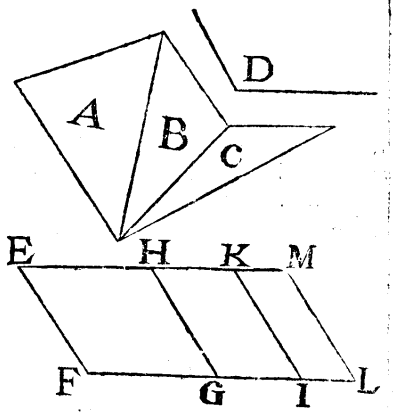
a 1. Poſtul.

Perche l'angolo F, per coſtruttione è vguale all'angolo D, e l'angolo H G I è fatto vguale all'angolo D, ſarà l'angolo F [b] vguale all'angolo HGI, vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo HGF, ne viene l'angolo F coll'angolo HGI, [c] vguale alli due angoli HGF, HGI,

b 1. aſſiom.
c 2. aſſiom.

mà

ma gli angoli F, & HGF [d] sono vguali à due angoli retti, gli angoli dunque HGF, HGI [e] sono vguali à due angoli retti, e per la 14. propositione, le rette G F, G I, costituiscono vna sola retta linea. Similmente perche l'angolo KIL è fatto vguale all' angolo D, sarà [e] anco vguale all'angolo HGI, vgualmente s'aggiunga l'angolo KIG, i due angoli H G I, KIG, [f] saranno vguali alli due angoli KIG, KIL; mà i due angoli HGI, KIG [g] sono vguali à due angoli retti; gli angoli dunque K I G, K I L saranno vguali à due angoli retti, e le rette GI, IL [b] costituiscono vna sola retta linea; dal che le tre rette F G, G I, I L, costituiscono la sola retta FL. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le tre rette E H, H K, K M, costituiscono la sola retta linea EM. Perche le rette E H, H K, K M sono parallele alle rette F G, G I, I L, stante che sono lati opposti de i parallelogrammi EG, HI, KL, perciò tutta la retta E M è parallela à tutta la retta FL. Di più, ne'i parallelogrammi E G, H I, K L i lati opposti EF, H G, K I, M L sono frà di loro paralleli; onde tutta la figura EFLM, [i] sarà vn solo parallelogrammo: mà il parallelogrammo E G è fatto vguale al triangolo A, il parallelogrammo H I vguale al triangolo B, ed il parallelogrammo KL vguale al triangolo C, sarà tutto il parallelogrammo EFLM [K] vguale al dato rettilineo ABC, & haurà l'angolo F, per costruttione, vguale all'angolo D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



d 29. prop. e 1. assioma. f 2. assioma. g 29. prop. b 14. prop. i 35. defin. K 2. assioma.

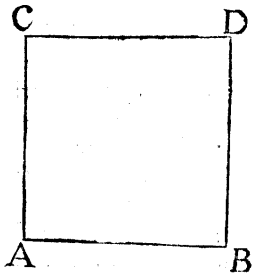
PROBLEMA XIV. PROPOSITIONE XLVI.

Sopra vna data retta linea terminata descriuere vn quadrato.

Sia data la retta linea terminata A B, sopra la quale è possibile descriuere vna figura quadrata.

Negli estremi A, & B [a] si erigano le rette A C, B D, perpendicolari alla retta A B, tanto A C [b] quanto D B si faccia vguale alla retta A B, si tiri [c] la retta C D. Dico che il quadrilatere ABDC è quadrato.

Perche gli angoli in A, & B sono retti, perciò le rette AC, BD [d] sono frà di loro parallele, mà per costruttione sono frà di loro vguali, perciò i lati A C, B D sono frà di loro vguali, e paralleli, e le rette CD, A B, che congiungono



a 11. prop. b 3. prop. c 1. postulat. d 28. prop.

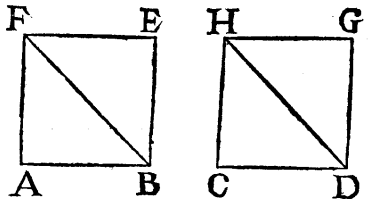
no gli estremi, [e] sono vguali, e parallele, ed il quadrilatero ABDC è parallelogrammo; mà il lato AB [f] è vguale, per costruttione al lato BD, ed al lato AC, perciò li quattro lati AB, BD, D C, C A [g] sono frà di loro vguali, e perche nelli parallelogrammi gli angoli opposti [b] sono frà di loro vguali, essendo gli angoli A, & B per costruttione retti, saranno gli angoli C, & D retti; ed il quadrilatero ABDC [i] sarà quadrato, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

e 33. prop. f 35. defin. g 1. assiom. b 34. prop. i 29. defin.

Di Proclo.

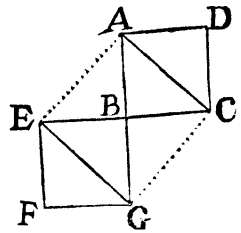
I quadrati delle rette linee vguali sono frà di loro vguali, ed i lati degli vguali quadrati sono frà di loro vguali.

Siano prima le rette A B, C D frà di loro vguali. Dico che li loro quadrati AE, CG sono frà di loro vguali. Si tirino li diametri FB, HD, per la definitione del quadrato sarà F A vguale ad A B, ed il lato HC vguale à CD, mà A B è posto vguale à C D, li due lati FA, AB [a] saranno vguali à i due lati HC, CD, li angoli in A & C sono retti, sarà la base FB [b] vguale alla base HD, ed il triangolo F A B, vguale al triangolo HCD, & i loro dupli, cioè li quadrati AE, CG [c] son frà di loro vguali ch'era da dimostrarsi.



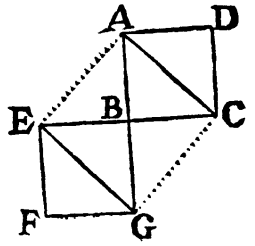
a 2. assiom. b 4. prop. c 34. prop.

Di nuouo siano li quadrati ABCD, EBGF frà di loro vguali. Dico che i lati AB, BG sono fra di loro vguali. Si congiungano li proposti quadrati in modo che i lati EB, BC costituischino la sola retta EC, essendo gli angoli ABC, EBG vguali, se l'aggiunghi il commune angolo ABE, fa li due angoli GBE, EBA, [d] vguali alli due angoli CBA, ABE, ma li due angoli CBA, ABE [e] sono vguali à due angoli retti, saranno li due angoli G B E, E B A vguali à due angoli retti, e le rette GB, BA [f] costituiranno vna sola retta linea. Si tirino i diametri AC, EG, e si tirino le rette AE, CG, perche i quadrati BD, BF sono fra di loro vguali, le loro metà, cioè li triangoli ABC, EBG sono fra di loro vguali, se l'aggiunga il commune triangolo BGC, li triangoli AGC, EGC [g] saranno fra di loro vguali, hanno la medesima base GC, e sono costituiti dalla medesima parte, e perciò [h] sono fra le medesime parallele EA, GC; in oltre perche i lati BC, CA sono vguali à i lati DC, CA, e la base AB è vguale alla base AD sarà l'angolo DCA, [K] vguale all'angolo BCA, ma l'angolo DCB è retto sarà ognuno degli angoli DCA, BCA, la metà d'vn angolo retto; nell'istesso modo si dimostrerà che ognuno degli angoli DAC, BAC è la metà d'vn angolo retto, e perciò il diametro del quadrato diuide gli angoli opposti in due parti vguali, dalche il diametro EG del quadrato FB diuide gli angoli FEB, FGB in due parti vguali, ma gli angoli FGB, DAB sono fra di loro vguali, stante che



d 2. assiom. e 13. prop. f 14. prop. g 2. assiom. h 39. prop. K 8. prop.

ſono retti, perciò le loro metà, cioè gli angoli EGB, CAB ſono fra di loro vguali. Hor eſſendo le rette AC, EG ſegate dalla retta AG, e gli angoli alterni EGB, CAB ſono fra di loro vguali, ſarà EG [l] *parallela ad AC, ed il quadrilatero AEGC* [m] *ſarà parallelogrammo, dalche AC* [n] *ſarà vguale ad EG. Finalmente perche il diametro diuide gli angoli del quadrato in due parti vguali, perciò li diuide in due mezzi retti, e così ognuno delli angoli BGE, BEG, BCA, BAC, ſarà la metà d'vn angolo retto, e perciò li due angoli BGE, BEG ſono vguali alli due angoli BCA, BAC, il lato AC è dimoſtrato vguale al lato EG ſaranno li rimanenti due lati GB, BE vguali alli rimanenti due lati AB, BC, per la qual coſa il lato AB è vguale al lato BG, ch'era da dimoſtrarſi.*



l 27. prop.
m 35. defin.
n 34. prop.

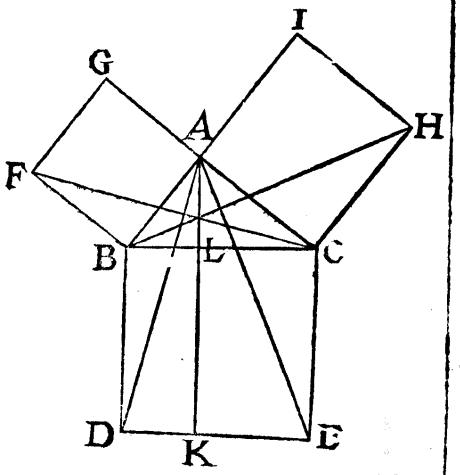
THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLVII.

Nelli triangoli rettangoli, il quadrato del lato oppoſto all'angolo retto, è vguale alli quadrati de'i lati, che contengono l'angolo retto.

Sia il triangolo ABC, del quale l'angolo BAC ſia retto, e ſopra i lati BC, CA, AB, [a] ſiano deſcritti li quadrati BDEC, ACHI, BAGF. Dico ch'il quadrato BDEC, deſcritto ſopra il lato BC, ch'è oppoſto all'angolo retto, è vguale alli quadrati ACHI, BAGF, giunti inſieme, che ſono deſcritti ſopra i lati CA, AB, che contengono l'angolo retto BAC.

Dal punto A [b] ſi tiri la retta AK parallela al lato BD, ouero CE, la quale concorrerà col lato DE in qualche punto K, ſi tirino le rette [c] AD, AE, CF, BH.

Perche l'angolo BAC, per ipoteſi, è retto, e l'angolo BAG (come angolo del quadrato) è retto, perciò i due angoli BAC, BAG, ſono vguali à due angoli retti, e le rette CA, AG [d] coſtituiſcono vna ſola retta linea; nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette BA, AI coſtituiſcono vna ſola retta linea: & eſſendo gli angoli in G, ed F retti, le due rette linee FB, GC [e] ſaranno frà di loro parallele, e nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che le due rette BI, HC ſono frà di loro parallele.



a 46. prop.
b 31. prop.
c 1. poſt.
d 14. prop.
e 28. propoſ.

Di nuouo l'angolo FBA è retto, perche è angolo del quadrato GB, e ſimilmente l'angolo DBC è retto per eſſer angolo del quadrato BE; vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo ABC, ne viene l'angolo FBC, [f] vguale all'angolo ABD; e perche, nel quadrato BG, il lato FB [g] è vguale al lato BA, e nel quadrato DC il lato DB è vguale al lato BC; al lato BC s'aggiunga il lato BF, ed al lato DB s'aggiunga il lato BA, i due lati FB, BC, del triangolo FBC, [h] ſaranno vguali alli due lati AB, BD del triangolo ABD, l'angolo FBC è dimoſtrato vguale all'angolo ABD, ſarà la baſe FC [i] vguale alla baſe AD, ed il triangolo ABD, vguale al triangolo FBC.

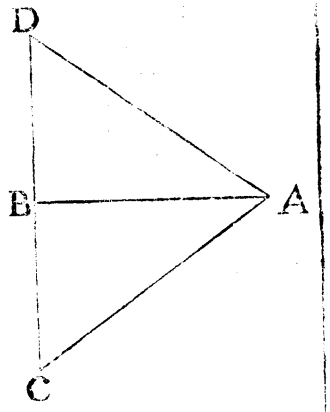
Si conſideri il parallelogrammo GB, ed il triangolo FBC, poſti ſopra la medeſima baſe FB, e frà le medeſime parallele GC, FB; il parallelogrammo GB [k] ſarà il doppio del triangolo FBC; ma il triangolo FBC è moſtrato vguale al triangolo ABD, ſarà il parallelogrammo GB [l] il doppio del triangolo ABD. Similmente il parallelogrammo LBDK, ed il triangolo ABD ſono ſopra la medeſima baſe BD, e frà le medeſime parallele AK, BD, il parallelogrammo LBDK [m] ſarà il doppio del triangolo ABD: ma il parallelogrammo GB, per quel che ſi è moſtrato, è il doppio del medeſimo triangolo ABD, ſarà il parallelogrammo GB, [n] vguale al parallelogrammo LBDK. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il parallelogrammo IC è vguale al parallelogrammo LKEC: perche eſſendo l'angolo HCA retto, e l'angolo ECB retto, vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo BCA, ne verrà l'angolo HCB [o] vguale all'angolo ACE: e perche HC [p] è vguale ad AC, ed il lato EC vguale al lato CB, i due lati HC, CB, [q] ſaranno vguali alli due lati EC, CA, l'angolo HCB è moſtrato vguale all'angolo ACE, ſarà il triangolo HCB [r] vguale al triangolo ACE. In oltre il parallelogrammo IC, ed il triangolo HCB, hanno la medeſima baſe CH, e ſono frà le medeſime parallele, il parallelogrammo IC [s] ſarà il doppio del triangolo HCB: mà il triangolo HCB è vguale al triangolo ACE, il parallelogrammo IC ſarà il doppio del triangolo ACE. Di più il parallelogrammo LKEC, ed il triangolo ACE hanno la medeſima baſe CE, e ſono frà le medeſime parallele AK, CE, il parallelogramo LKEC ſarà il doppio del triangolo ACE: ma il parallelogrammo IC è moſtrato il doppio del medeſimo triangolo HCB, ſarà il parallelogrammo IC [t] vguale al parallelogrammo LKEC, e perche il quadrato GB fù moſtrato vguale al parallelogrammo LBKD, tutto il quadrato BDEC [u] ſarà vguale alli due quadrati IC, GB giunti inſieme, che era da dimoſtrarſi.

f 2. aſſioma.
g 29. defin.
h 2. aſſioma.
i 4 prop.
K 41. prop.
l 7. aſſiom.
m 41. prop.
n 6. aſſiom.
o 2. aſſiom.
p 29. defin.
q 2. aſſiom.
r 4. prop.
s 41. prop.
t 6. aſſiom.
u 2. aſsiom.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XLVIII.

Se il quadrato d'vn lato d'vn triangolo è vguale alli quadrati de i due rimanenti lati, l'angolo contenuto da quei lati ſarà retto.

Sia il triangolo ABC, ed il quadrato del lato AC sia vguale alli quadrati degl' altri due lati AB, BC. Dico che l'angolo ABC sarà retto.



a 11. prop. Nel punto B sopra la retta AB [a] si erigga la perpendicolare DB, e si faccia DB [b] vguale alla retta BC, si tiri la retta AD.

b 3. prop. c 1. postul.

d 47. prop. Perche l'angolo ABD, per costruttione è retto, il quadrato del lato AD [d] sarà vguale alli quadrati de i lati AB, BD. In oltre essendo DB, per costruttione, vguale alla retta CB, sarà il quadrato di BD vguale al quadrato di CB; vgualmente se gli aggiunga il quadrato della retta AB, i quadrati de' i due lati DB, BA [e] saranno vguali alli quadrati delli due lati CB, BA; ma i quadrati de' i due lati DB, BA si disse, che sono vguali al quadrato del lato AD, il quadrato dunque del lato AD *f* sarà vguale alli quadrati delli due lati CB, BA, ma li quadrati delli lati CB, BA, per ipotesi, sono vguali al quadrato del lato AC, sarà il quadrato del lato AD *g* vguale al quadrato del lato AC, ed il lato AD vguale al lato AC. Finalmente perche i due lati DB, BA, sono vguali alli due lati CB, BA, e la base AD è mostrata vguale alla base AC, sarà l'angolo DBA [h] vguale all'angolo ABC, ma l'angolo DBA, per costruttione è retto, l'angolo dunque ABC sarà retto, come fù proposto dimostrare.

e 2. assioma. f 1. assioma. g 1. assioma. h 8. prop.

Fine del Primo Elemento.

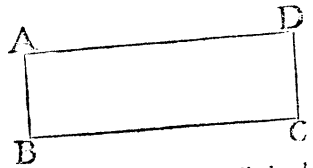
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO SECONDO.

DEFINITIONI.
I.

Ogni parallelogrammo rettangolo si dice esser contenuto da due rettelinee, che contengono l'angolo retto.



IL Parallelogrammo, che hà gli angoli retti, si chiama parallelogrammo rettangolo, e per l'auuenire si chiamerà semplicemente rettangolo. Hor, per spiegatione dell'antecedente definitione, deuesi auuertire, che ogni parallelogrammo rettangolo, benche sia racchiuso da quattro linee rette, con tutto ciò non si dice essere contenuto da tutte quattro, mà da due sole, cioè da due di quelle, che contengono l'angolo retto, le quali, prese in qualunque modo, sempre ci rappresentano la lunghezza, e larghezza di esso rettangolo, come, per essempio, il parallelogrammo ABCD, se hà tutti gli angoli retti, lo chiameremo semplicemente rettangolo, e diremo esser contenuto da i due lati AB, BC; ouero dalli due BC, CD; o pure dalli due CD, DA; ò dalli due BA, AD ch'è sempre la medesima cosa, stante che, per la 34. propositione del primo libro, i lati opposti sono frà di loro vguali.



Quando dunque diremo, ch'il rettangolo A B C D è contenuto dalli due lati AB, BC, non douremo concepir'altro, se non che il rettangolo ABCD, hà per lunghezza il lato BC, e per larghezza il lato AB; e se diremo esser contenuto dalle rette AD, DC, concepiremo esser contenuto dalla lunghezza AD, e dalla larghezza DC.

E da notarsi, che se saranno esposte due qualunque linee rette, come A, & B, e si dirà il rettangolo contenuto dalle rette A, & B, si douerà concepire vn parallelogrammo rettangolo, del quale la lunghezza sia vguale alla retta A, e la larghezza vguale alla retta B; ouero la larghezza vguale ad A, e la lunghezza vguale à B.

A
B

Di più quando qualche retta linea per essempio A C è diuisa come in B, e si dirà il



rettangolo contenuto dalle rette A B, B C, si concepirà vn parallelogrammo rettangolo, del quale vno de' lati, intorno all'angolo retto, è vguale ad AB, e l'altro vguale alla retta BC.

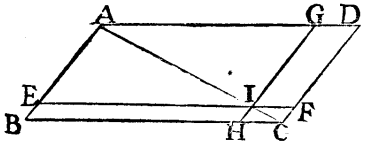
Quando poi si dirà, il rettangolo contenuto da tutta la retta AC, e dalla parte BC, concepiremo vn parallelogrammo rettangolo, del quale vno de'i lati intorno all'angolo retto è vguale à tutta la retta AC, e l'altro vguale alla parte BC.

Similmente se si dirà, il rettangolo contenuto dalle rette CA, AB, concepiremo vn parallelogrammo rettangolo, che habbia vno de' lati, intorno all' angolo retto, vguale à tutta la retta CA, e l'altro vguale alla parte AB.

II.

Se vn parallelogrammo è diuiso in quattro parallelogrammi, due de' quali siano intorno al diametro, i complementi con vno di quelli intorno al diametro si chiamerà Gnomone.

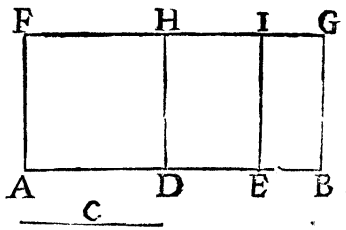
Sia il parallelogrammo A B C D, diuiso ne'i quattro parallelogrammi A E I G, I H C F, E B H I, G I F D, de' quali li due A E I G, I H C F siano intorno al diametro A C, i due complementi E B H I, I F D G, con vno di quelli intorno al diametro, come per essempio col parallelogrammo I H C F, cioè tutto il piano B C D G I E, si chiamerà Gnomone: e similmente, i due complementi B I, I D, col parallelogrammo E G, cioè tutto il piano B A D F I H, si chiamerà Gnomone.



THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se di due rette linee vna è diuisa in quante parti si vuole, e l'altra non diuisa, i rettangoli contenuti dalle parti della diuisa, e dalla non diuisa, giunti insieme, sono vguali al rettangolo contenuto da tutta la diuisa, e dalla non diuisa.

Sia la retta linea AB diuisa in quante parti si vuole, come in D, ed E, e sia la retta C non diuisa. Dico, che i rettangoli contenuti da AD, e dalla retta C, da DE, e della retta C, e da EB, e dalla retta C, insieme giunti, sono vguali al rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta C.



a 11. del 1. Negl'estremi A, & B [a] si eriggano le rette AF, BG, perpendicolari alla

retta

retta AB, tanto AF, quanto BG, [b] si faccia vguale alla retta C, si tiri la retta FG. Perche gli angoli in A, & B sono retti, le due AF, BG, [c] saranno frà di loro parallele; ma [d] sono fra di loro vguali (per essersi fatta ognuna vguale alla retta C) perciò sono frà di loro vguali, e parallele; e la retta FG [e] sarà vguale, è parallela ad AB, il quadrilatero ABGF sarà parallelogrammo, e gli angoli F, & G [f] saranno retti, e perciò sarà rettangolo. Dalli punti D, E si tirino le rette DH, EI [g] parallele al lato FA, ouero GB, gli angoli in D, ed E [h] saranno retti, ed il rettangolo AG, sarà diuiso ne'trè rettangoli FD, HE, IB, de'quali gli oppositi lati FA, HD, IE, GB, [K] sono frà di loro vguali; ma, per costruttione, il lato FA è vguale alla retta C, sarà la retta C [l] vguale ad ognuno de i lati HD, IE.

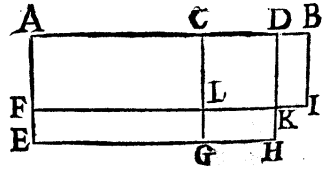
b 3. del 1.
c 28. del 1.
d 3. assioma.
e 33. del 1.
f 34. del 1.
g 31. del 1.
h 29. del 1.
K 34. del 1.
l 1. assioma.

Per la prima definitione di questo, il rettangolo FB è contenuto da i due lati FA, AB; ma, per costruttione, la retta FA è vguale alla retta C, sarà il rettangolo FB vguale al rettangolo contenuto dalla retta AB, e dalla retta C. Similmente il rettangolo FD è contenuto da FA, e dalla retta AD; ma FA è vguale alla retta C, sarà il rettangolo FD, vguale al rettangolo contenuto dalla retta AD, e dalla retta C. Oltre à ciò, il rettangolo HE è contenuto dalla retta HD, e dalla retta DE; fù mostrata la retta HD vguale alla retta C, sarà il rettangolo HE vguale al rettangolo contenuto dalla retta DE, e dalla retta C. Nell'istesso modo si dimostrerà, ch'il rettangolo IB è vguale à quello, ch'è contenuto dalla retta EB, e dalla retta C. Per il che li tre rettangoli FD, HE, IB, sono vguali à quelli contenuti dalle rette AD, DE, EB, e dalla retta C; ma i rettangoli FD, HE, IB compongono tutto il rettangolo FB; sarà tutto il rettangolo FB, vguale à i rettangoli contenuti dalle parti AD, DE, EB, e dalla retta C. Si disse ch'il rettangolo FB è vguale à quello, ch'è contenuto dalla retta AB, e dalla retta C; il rettangolo dunque contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta C, è vguale à i rettangoli contenuti dalle parti AD, DE, EB, e dalla retta C, ch'era da dimostrarsi.

SCOLIO.

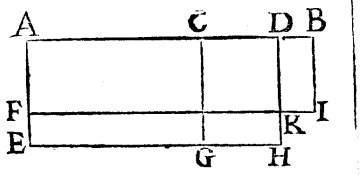
Qui si può aggiungere il seguente Theorema di Snellio nel suo Apollonio Batauo.

Se in qualche retta AB siano presi due qualunque punti C, & D; il rettangolo contenuto dalle due AD, CB è vguale à i due rettangoli vno contenuto dalle due AB, CD, l'altro contenuto dalle due AC, DB, giunt'insieme.



Nel

Nel punto A si erigga la retta A E [a] *perpendicolare ad A B; si faccia A E* [b] *vguale alla retta CB, e si tagli AF vguale à CD, sarà FE* [c] *vguale à DB; da i punti C, D, B si tirino le rette CG, DH, BI,* [d] *parallele ad AE, le quali* [e] *saranno frà di loro parallele; dalli punti F, ed E, si tirino le rette FI, EH* [f] *parallele ad AB, cioè FI si continui fin che concorre con BI in qualche punto I; e la retta EH fin che concorre con DH in qualche punto H; la retta FI segarà le rette CG, DH come in L, & K, e la retta EH segarà CG in qualche punto G. Tutti i quadrilateri, che sono in questa figura,* [g] *saranno parallelogrammi rettangoli, e sarà AE* [h] *vguale à CG, e la retta CL vguale ad AF; mà AE è vguale, per costruttione, à C B, e la retta A F vguale à CD, sarà CG* [k] *vguale à CB, ed LC vguale à DC; dal che il restante LG sarà vguale à DB. Nel rettangolo CLKD, sarà CL* [l] *vguale à DK, ed il lato CD vguale ad LK; mà CL è vguale à C D, sarà LK* [m] *vguale à KD, e tutti quattro i lati CL, LK, KD, DC sono frà di loro vguali: hor essendo LK vguale à DK, ed il lato KH vguale à DB, sarà il rettangolo GK* [n] *vguale al rettangolo KB; vgualmente s'aggiunga il rettangolo FD, ne viene il rettangolo FB* [o] *vguale al piano ADHGLF; vgualmente se gli aggiunga il rettangolo EL, ne viene il rettangolo ED* [p] *vguale al rettangolo FB, col rettangolo EL. Il rettangolo ED* [q] *è contenuto da i due lati AD, AE, mà il lato AE è vguale, per costruttione à CB, perciò il rettangolo ED sarà contenuto dalle due rette AD, CB, ed in conseguenza i due rettangoli FB, EL sono vguali à quello, ch'è contenuto dalle due AD, CB; e perche il rettangolo FB è contenuto dalle due BA, AF, cioè dalle due AB, CD, ed il rettangolo EL è contenuto dalle due FL, FE, cioè dalle due AC, DB, (stante che FL è vguale ad AC, ed il lato EF è vguale à DB) sarà il rettangolo contenuto dalle due AD, CB, vguale à i due rettangoli contenuti, cioè vno dalle due AB, CD, e l'altro dalle due AC, DB, ch'era da dimostrarsi.*

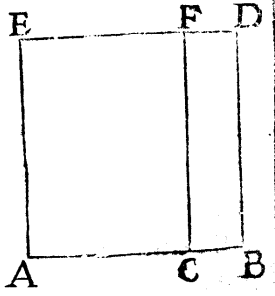


a 11 del 1. b 3. del 1. c 3. assiom. d 31. del 1. e 30. del 1. f 31. del 1. g 35. defin. del 1. h 34. del 1. K 1. assiom. l 34. del 1. m 1. assiom. n Scolio antecedente o 2. assiom. p 2. assiom. q 1. defin. del 2.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se vna retta linea è diuisa come si vuole, il quadrato di tutta la retta è vguale alli rettangoli contenuti da tutta la retta, e dalle parti della medesima.

Sia la retta linea AB, diuisa in quante si voglia parti, come, per esempio, nelle due AC, CB. Dico, che li due rettangoli, cioè vno contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte AC, l'altro contenuto dalla medesima retta AB, e dalla parte CB, giunt' insieme, sono vguali al quadrato di tutta la retta AB.



Sopra la retta AB [a] si descriua il quadrato AD, dal punto C si tiri la retta CF, [b] parallela ad AE, ouero DB; gli angoli in C, ed F [c] saranno retti, ed il quadrato AD sarà diuiso

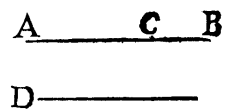
a 46. del 1. b 31. del 1. c 29. del 1.

ne

ne i due rettangoli EC, FB. Perche il rettangolo EC [d] è contenuto dalle rette EA, AC, ed il lato EA, come lato del quadrato, è vguale ad AB, sarà il rettangolo EC vguale à quello, ch'è contenuto dalle due rette BA, AC. Similmente perche il rettangolo FB [e] è contenuto da i lati DB, BC, ed il lato DB è vguale al lato AB, sarà il rettangolo FB vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BC. Ma i due rettangoli EC, FB, giunti insieme, compongono il quadrato AD, cioè il quadrato della retta AB; saranno i due rettangoli, cioè il rettangolo contenuto da tutta la retta BA, e dalla parte AC, ed il rettangolo contenuto dalla medesima AB, e dalla parte BC, giunti insieme, vguali al quadrato di tutta la retta AB, ch'era da dimostrarsi.

d 1. definit. del 2. e 1. definit.

In altro modo. S'esponga la retta D vguale alla retta AB. Perche la retta AB è diuisa nel punto C, e la retta D è indiuisa, sarà il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta D [f], vguale à i due rettangoli, cioè vno contenuto dalla retta D, e dalla parte AC; e l'altro contenuto dalla retta D, e dalla parte CB; ma la retta D è posta vguale ad AB, i due rettangoli dunque, cioè vno contenuto da tutta AB, e dalla parte AC, l'altro contenuto da AB, e dalla parte BC, insieme giunti, saranno vguali al rettangolo contenuto dalle due AB, & D, cioè vguale al quadrato della retta AB. Il medesimo si dimostrerà, se la retta AB sarà diuisa in più di due parti, il che era da dimostrarsi.

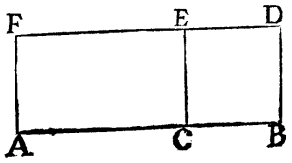


f 1. del 2.

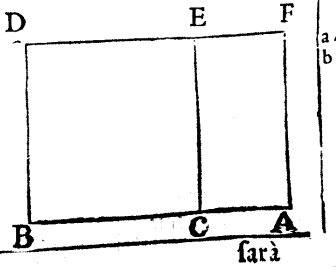
THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna retta linea è diuisa in due qualunque parti, il rettangolo contenuto dalle parti, col quadrato di vna delle parti, è vguale al rettangolo contenuto da tutta la retta, e da quella parte, sopra la quale si considera il quadrato.

Sia la retta AB, diuisa in due qualunque parti, come AC, CB. Dico, che il rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, col quadrato della parte CB, è vguale al rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte BC, sopra la quale si considera il quadrato.



Sopra la retta CB [a] si descriua il quadrato BE, dal punto A si tiri la retta AF [b] parallela al lato CE, la quale concorrerà col lato DE continuato in qualche punto F, e saranno costrutti i due rettãgoli AD, AE. Perche il rettãgolo AD è contenuto da i lati AB, BD, ed il lato BD, come lato del quadrato CD, è vguale alla retta CB,

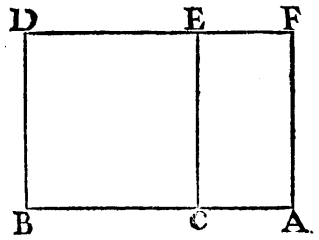


a 46. del 1. b 31. del 1.

sarà

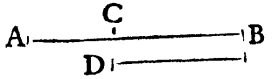
sarà il rettangolo AD vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AB, BC. Similmente il rettangolo AE, è contenuto dalle rette AC, CE; ma la retta EC, come lato del quadrato CD, è vguale alla retta CB, sarà il rettangolo AE, vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, vgualmente s'aggiunga il quadrato CD, cioè il quadrato della retta CB; ne viene il rettangolo AE, col quadrato CD, [c] cioè il rettangolo AD, vguale al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB col quadrato di CB. Ma si disse, che il rettangolo AD è contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte CB; il rettangolo dunque contenuto dalle parti AC, CB col quadrato della parte CB, è vguale al rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte CB, sopra la quale fù descritto il quadrato, come fù proposto dimostrare.

c 2. assiom.



In altro modo. S'esponga la retta D, vguale alla parte CB; sarà [a] il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta D vguale à i rettangoli contenuti dalle parti AC, CB, e dalla retta D; ma la retta D è posta vguale alla retta CB, sarà il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta D, cioè il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte BC, vguale al rettangolo contenuto dalla parte AC, e dalla retta D, cioè dalle parti AC, CB, col rettangolo contenuto dalla parte CB, e dalla retta D, cioè col quadrato della retta CB, ch'era da dimostrarsi.

a 1. del 2.



THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

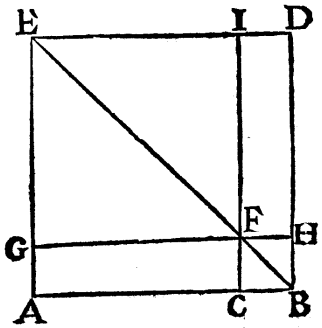
Se vna retta linea è diuisa in due qualunque parti, il quadrato di tutta è vguale à i quadrati delle parti, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti.

Sia la retta linea AB, diuisa in due parti come si vuole in C. Dico, che il quadrato di tutta la retta AB è vguale à i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti AC, CB.

Sopra la retta AB, [a] si descriua il quadrato AD, si tiri il diametro EB, dal pũto C si tiri la retta CI [b] parallela alla retta DB, ouero AE, la quale segarà il diametro EB in qualche punto F, e per il piano F si faccia passare la retta GH parallela al lato AB; sarà diuiso il qua-

a 46. del 1.

b 31. del 1.



quadrato AD in quattro parallelogrami, de'quali i due GI, CH, sono intorno al diametro EB. Perche il quadrilatero AD, per costruttione, è quadrato, sarà il lato AE vguale al lato AB, ed il triangolo ABE, sarà isoscele, dal che gli angoli ABE, AEB [c] sono frà di loro vguali; e perche li trè angoli d'ogni triangolo [d] sono vguali à due angoli retti, e l'angolo A, come angolo del quadrato, è retto, gli altri due angoli AEB, ABE, insieme giunti, saranno vguali ad vn angolo retto, ma gli habbiamo mostrati frà di loro vguali, perciò ognuno delli angoli AEB, ABE sarà la metà d'vn angolo retto. In oltre perche le rette GH, AB sono parallele, e sono segate dalla retta AE, l'angolo EGF [e] esterno sarà vguale all'angolo A interno ed opposto; ma l'angolo A è retto, sarà l'angolo EGF retto. Nel triangolo GFE, essendo l'angolo EGF retto, e l'angolo GEF la metà d'vn angolo retto, sarà il rimanente angolo GFE [f] la metà d'vn angolo retto, e perciò gli angoli GEF, GFE [g] sono frà di loro vguali, ed il lato GF [h] sarà vguale al lato GE. Di nuouo perche in ogni parallelogrammo [K] i lati opposti sono vguali, e gli angoli opposti sono fra di loro vguali, sarà nel parallelogrammo GI, il lato EG vguale all'opposto IF, ed il lato GF vguale all'opposto EI; ma s'è mostrato il lato GF vguale al lato GE, sarà il lato EI [l] vguale al lato IF, e tutti quattro i lati EG, GF, FI, IE, saranno fra di loro vguali. Oltre à ciò l'angolo EGF sarà vguale all'angolo EIF, e l'angolo GEI, vguale all'angolo GFI; ma gli angoli FGE, GEI, sono retti, gli angoli dunque EIF, IFG, saranno retti; per la qual cosa il parallelogrammo GI sarà quadrato. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il parallelogrammo CH è quadrato. Di più nel parallelogrammo AF i lati opposti GF, AC [m] sono fra di loro vguali; ma GI è il quadrato del lato GF, sarà il quadrato GI vguale al quadrato di AC. Nel parallelogrammo AF, essendo gli angoli in A, & C retti, saranno gli angoli opposti in G, ed F [m] retti, dalche il parallelogrammo AF è rettangolo, il quale [n] è contenuto da i due lati AC, CF; ma il lato CF è vguale al lato CB, per essere lato del quadrato CH, sarà il rettangolo AF, vguale al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB: e perche i rettangoli AF, FD, sono frà di loro vguali, i due rettangoli AF, FD saranno vguali al doppio rettangolo contenuto dalle parti AC, CB. S'aggiunga dall'vna, e l'altra parte il quadrato CH, cioè il quadrato di CB, ne viene lo gnomone ABDIFG [o] vguale al doppio rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, col quadrato di CB; à i quali s'aggiunga vgualmente il quadrato GI, cioè il quadrato di AC; ne viene tutto il quadrato AD, [o] cioè il quadrato della retta AB, vguale à i quadrati delle parti AC, CB col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti AC, CB, ch'era da dimostrarsi:

c 5. del 1.
d 32. del 1.
e 29. del 1.
f 32. del 1.
g 10. assiom.
h 6. del 1.
K 34. del 1.
l 1. assioma.
m 34. del 1.
n 1. defin. del 2.
o 2. assiom.

Più breue. Perche la retta AB è diuisa in C, il quadrato di AB [p] è vguale al rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AC, col rettangolo contenuto dalla medesima AB, e dalla parte BC; ma il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AC [q] è vguale al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB col quadrato di AC; ed il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte BC è vguale al rettangolo contenuto



p 2. del 2.

q 3. del 2.

tenuto dalle parti AC, CB, col quadrato di CB; sarà il quadrato di AB vguale à i quadrati delle parti AC, CB, & al doppio rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO I.

Da quel che s'è detto è manifesto, che quando vn quadrato è diuiso in quattro parallelogrammi, de'quali due siano intorno al diametro, i due intorno al diametro sono quadrati, ed i complementi sono rettangoli.

COROLLARIO II.

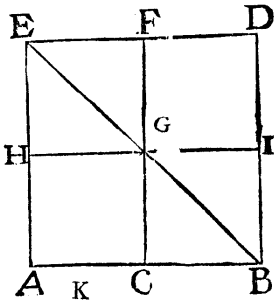
Prima figura dell' antecedente propos.

Quindi anco è manifesto, ch'ogni diametro del quadrato diuide gli angoli del medesimo quadrato in due parti vguali: poiche essendosi dimostrato ognuno degli angoli ABE, AEB, essere la metà d'vn angolo retto, se dagli angoli retti ABD, AED, se ne detraggano gli angoli ABE, AEB, ognuno de' i rimanenti angoli DEB, DBE sarà la metà d'vn angolo retto, e perciò gli angoli retti AED, ABD, sono diuisi dal diametro EB in due parti vguali.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Se la retta AB è il doppio della retta K, il quadrato di AB è il quadruplo del quadrato della retta K; e se il quadrato di AB è il quadruplo del quadrato di K, ancora la retta AB sarà il doppio della retta K.

a 10. del 1.



Si diuida AB [a] in due parti vguali in C, e si faccia la medesima costruttione dell'antecedente propositione, saranno i due HF, CI, per il primo Corollario, quadrati, cioè CI sarà il quadrato di CB, ed HF vguale al quadrato di AC: mà le rette CB, AC, per ipotesi, sono frà di loro vguali; saranno i quadrati HF, CI frà di loro vguali. Similmente essendo AC vguale à CB, sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CG, vguale al rettangolo contenuto dalle due GC, CB, cioè vguale al quadrato CI; mà il rettangolo AG è contenuto dalle due AC, CG: sarà il rettangolo AG

b 43. del 1.

vguale al quadrato CI. E perche i complementi AG, GD, [b] sono frà di loro vguali; i quattro rettangoli dunque AG, CI, GD, FH, sono frà di loro vguali; e tutto il quadrato AD, sarà il quadruplo del quadrato

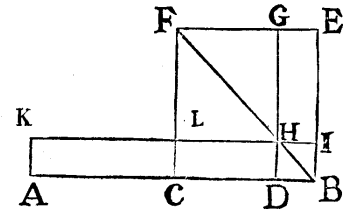
drato CI; cioè il quadrato di AB, sarà il quadruplo del quadrato di CB: ma la retta CB è vguale alla retta K, sarà il quadrato di AB il quadruplo del quadrato della retta K, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo se il quadrato di AB è il quadruplo del quadrato della retta K. Dico che la retta AB, è il duplo della retta K.

Si diuida AB in due parti vguali, e si faccia la costruttione, e dimostratione di prima; sarà il quadrato di AB il quadruplo del quadrato di CB; mà il quadrato di AB è suppostо il quadruplo del quadrato di K, sarà il quadrato di CB vguale al quadrato di K, e la retta CB vguale alla retta K: mà AB, per costruttione, è il doppio della retta CB; sarà AB il doppio della retta K; come fù proposto dimostrare.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, e la medesima è diuisa in due parti ineguali; il rettangolo contenuto dalle parti ineguali, col quadrato dell'intermedia portione, sarà vguale al quadrato della metà della linea.



Sia la retta linea AB diuisa in due parti vguali in C, e la medesima retta AB sia diuisa in due parti ineguali in D, e sia CD la portione intermedia frà l'vguale diuisione, e la diuisione ineguale. Dico che il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato della intermedia portione CD, è vguale al quadrato della metà CB.

Sopra la retta CB [a] si descriua il quadrato CE, si tiri il diametro FB; dal punto D si tiri la retta DG [b] parallela al lato EB, ouero FC, la quale segarà il diametro FB in qualche punto H; per il punto H si faccia passare la retta IK [b] parallela alla retta AB, che segarà il lato FC in qualche punto L; dal punto A si tiri la retta AK parallela ad FC, la quale concorrerà con la retta IL continuata in qualche punto K: sarà diuiso il quadrato CE in quattro parallelogrammi, de' quali i due LG, DI, intorno al diametro, per il primo Corollario alla quarta propositione, sono quadrati, ed i complementi CH, HE sono rettangoli: E perche i complementi CH, HE [c] sono frà di loro vguali, s'aggiunga all'vno, ed all'altro il quadrato DI, ne viene il rettangolo CI [d] vguale al rettangolo DE; mà il rettangolo AL [e] è vguale al rettangolo CI (stante, che sono sopra le vguali base AC, CB, e frà le medesime parallele KI, AB) sarà il rettangolo AL [f] vguale al rettangolo DE; vgualmente se gli aggiunga il rettangolo CH, ne viene il rettangolo AH [g] vguale allo gnomone CBEGHL: all'vno, ed all'altro s'aggiunga il quadrato LG, sarà il quadrato CE, vguale al rettangolo AH col quadrato LG: il rettangolo AH [h] è contenuto dalle due AD, DH, cioè dalle due AD, DB, per essere DH

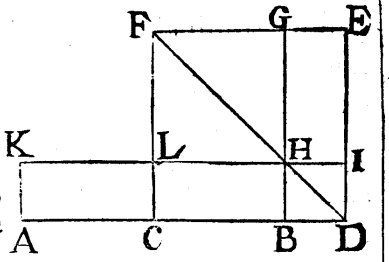
a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 43. del 1.
d 2. assiom
e 36 del 1.
f 1. assioma.
g 2. assioma
h 1. defin. del 2.

vguale al lato DB, sarà il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato LG, cioè [K] col quadrato di CD, vguale al quadrato CE, cioè al quadrato di CB; e così il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato dell'intermedia portione CD, sarà vguale al quadrato di CB, ch'è metà della linea AC, come fù proposto dimostrare.

K 34. del 1.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, ed à quella s'aggiunga vna retta ad arbitrio; il rettangolo contenuto dalla composta, e dall'aggiunta, col quadrato della metà della linea, è vguale al quadrato della retta composta della metà, e dell'aggiunta.



Sia la retta AB diuisa in due parti vguali in C, allaquale s'aggiunga nella medesima dirittura qualunque retta BD. Dico che il rettangolo contenuto da tutta la composta AD, e dall'aggiunta DB, col quadrato di CB, ch'è metà della linea AB, è vguale al quadrato della retta CD, composta della metà CB, e dell'aggiunta BD.

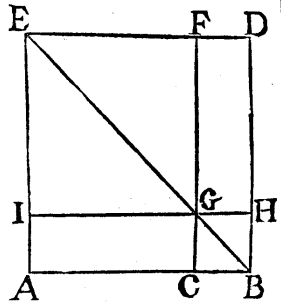
Sopra la retta, CD, [a] si descriua il quadrato CE, si tiri il diametro FD, dal punto B [b] si tiri la retta BG parallela alla retta ED, ouero FC, segarà il diametro FD in qualche punto H; per il punto H si faccia passare la retta IK parallela alla retta AD, la quale segarà FC in qualche punto L; dal punto A, si tiri la retta AK, parallela al lato FC, la quale concorrerà con IK continuata in qualche punto K, e sarà diuiso il quadrato CE in quattro parallelogrammi, de' quali i due LG, BI, che sono intorno al diametro FD, per il primo Corollario alla quarta propositione, sono quadrati, ed i complementi CH, HE sono rettangoli: e perche i complementi CH, HE [c] sono frà di loro vguali, ed il rettangolo AL [d] è vguale al rettangolo CH (stante che sono sopra le vguali basi AC, CB, e frà le medesime parallele KH, AB) sarà il rettangolo AL vguale al rettangolo HE; s'aggiunga all'vno, ed all'altro il rettangolo CI, ne viene il rettangolo AI [e] vguale allo gnomone CDEGHL; vgualmente s'aggiunga il quadrato LG, sarà il quadrato CE vguale al rettangolo AI col quadrato LG. Il rettangolo AI [f] è contenuto dalle due rette AD, DI, cioè dalle due AD, DB (stante che DI è vguale à DB) sarà il rettangolo contenuto dalle due AD, DB, col quadrato LG, cioè [g] col quadrato di CB, vguale al quadrato CE, cioè al quadrato di CD. Per la qual cosa il rettangolo contenuto da tutta la composta AD, e dall'aggiunta DB, col quadrato di CB, ch'è metà della linea AB, è vguale al quadrato della retta CD, ch'è composta della metà CB, e dell'aggiunta BD, come fù proposto dimostrare.

a 46. del 1. b 31. del 1. c 43. del 1. d 36. del 1. e 2. assiom. f 1. definit. del 2. g 34. del 1.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se vna retta linea è diuisa in due parti come si vuole; il quadrato di tutta, col quadrato d'vna delle parti, è vguale al doppio rettangolo contenuto da tutta, e da quella parte, doue è fatto il quadrato, col quadrato dell'altra parte.



Sia la retta linea AB diuisa in due parti, come si vuole in C. Dico che il quadrato di tutto la retta AB, col quadrato della parte AC, è vguale al doppio rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte AC, col quadrato dell'altra parte CB.

Sopra la retta AB [a] si descriua il quadrato AD, si tiri il diametro EB; dal punto C, si tiri la retta CF [b] parallela alla retta DB, ouero AE, la quale segarà il diametro in qualche punto G; dal punto G, si faccia passare la retta HI parallela al lato AB; sarà diuiso il quadrato AD in quattro parallelogrammi, de'quali i due IF, CH, che sono intorno al diametro EB, per il primo Corollario alla quarta propositione, sono quadrati, ed i complementi AG, GD sono rettangoli. E perche i complementi AG, GD [c] sono frà di loro vguali, all'vno, ed all'altro s'aggiunga il quadrato IF, ne viene il rettangolo AF [d] vguale al rettangolo ID. In oltre il rettangolo AF [e] è contenuto da i lati AE, AC; ma il lato AE è vguale ad AB, per essere lato del quadrato AD, sarà il rettangolo AF vguale al rettangolo contenuto dalle due BA, AC; e perciò i due rettangoli AF, ID, sono vguali al doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC; ma i due rettangoli AF, ID sono vguali allo gnomone CAEDHG col quadrato IF; sarà lo gnomone CAEDHG, col quadrato IF, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC; vgualmente s'aggiunga il quadrato CH, cioè il quadrato di CB, ne viene tutto il quadrato AD [f] col quadrato IF, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due AB, AC, col quadrato di CB: ma il quadrato IF è vguale al quadrato di AC (stante che [g] IG è vguale ad AC) sarà il quadrato AD, cioè il quadrato di AB col quadrato di AC, vguale al doppio rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AC, col quadrato del rimanente CB, ch'era da dimostrarsi.

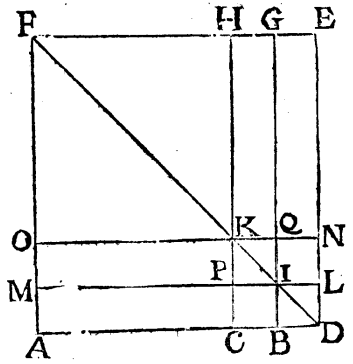
a 46. del 1. b 31. del 1. c 43. del 1. d 2. assiom. e 1. definit. del 2. f 2. assiom. g 34. del 1.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se vna retta linea è diuisa in due parti come si vuole, il quadruplo rettangolo contenuto da tutta, e da vna delle parti, col quadrato del restante, è vguale al quadrato della retta composta di tutta, e di quella parte.

Sia

Sia la retta linea AB diuisa come si vuole in C, alla quale s'aggiunga BD vguale alla parte CB. Dico che il quadruplo rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte CB, è vguale al quadrato della retta AD, composta di tutta AB, e dell'aggiunta BD.



Sopra la retta AD [a] si descriua il quadrato AE, si tiri il diametro FD; dalli punti C, & B, [b] si tirino le rette CH, BG parallele al lato DE, ouero AF, le quali segaranno il diametro ne i punti come in I, & K; per li punti I, & K si facciano passare le rette LM, NO, parallele al lato AD; sarà diuiso il quadrato AE in tanti parallelogrammi, de' quali quelli intorno al diametro FD, per il Corollario alla quarta propositione, sono quadrati, e così li notati OH, PQ, BL, MG, CN, sono quadrati; e perciò IB sarà vguale à BD, ouero BC. Similmente essendo CN quadrato, sarà ND vguale à CD, leuatone le vguali LD, BD, resta NL [c] vguale à CB; ma CB è vguale à BD, le quattro CB, BD, DL, NL [d] sono frà di loro vguali. E perche ne i parallelogrammi i lati opposti [e] sono frà di loro vguali, essendo DL vguale ad LN, sarà BI vguale ad IQ, e sarà CP vguale à PK. E similmente essendo CB vguale à BD, sarà PI vguale ad IL, & KQ vguale à QN. Di più perche i parallelogrammi CI, BL sono sopra le vguali basi CB, BD, e frà le medesime parallele PL, CD, perciò [f] sono frà di loro vguali, e per l'istessa ragione i parallelogrammi PQ, IN sono frà di loro vguali.

Si consideri il quadrato C N diuiso in quattro rettangoli, de' quali i complimenti CI, IN, [g] sono frà di loro vguali: fù mostrato CI vguale à BL, ed il rettangolo IN vguale à PQ; i quattro rettangoli C I, B L, PQ, IN [h] sono frà di loro vguali.

Si considerino i rettangoli KG, QE, sopra le vguali basi KQ, Q N, e frà le medesime parallele HE, KN, e perciò [k] frà di loro vguali. Similmente i rettangoli AP, MK sono sopra le vguali basi CP, PK, e frà le medesime parallele A O, C K, in conseguenza sono frà di loro vguali: e perche il quadrato MG è diuiso ne' i quattro parallelogrammi, de' quali i due O H, P Q sono intorno al diametro, saranno i complementi MK, K G [l] frà di loro vguali; mà il rettangolo KG fù mostrato vguale al rettangolo QE, ed il rettangolo KM vguale al rettangolo PA; i quattro rettangoli AP, MK, KG, QE [m] sono frà di loro vguali. Al rettangolo AP s'aggiunga il rettangolo C I; al rettangolo M K s'aggiunga P Q; al rettangolo G N s'aggiunga QL; ed al rettangolo HQ s'aggiunga BL; ne verranno i quattro rettangoli AI, MQ, IE, & HQ con LB, [n] frà di loro vguali; dal che tutti quattro sono il quadruplo d'vno, cioè il quadruplo del rettangolo AI: mà tutti quattro compongono lo gnomone ADEHKO, sarà il detto gnomone vguale al quadruplo rettangolo AI. Il rettangolo AI è contenuto

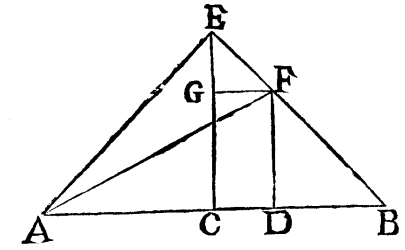
a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 3. assiom.
d 1. assiom.
e 34. del 1.
f 36. del 1.
g 43. del 1.
h 1. assiom.
K 36. del 1.
l. 43. del 1.
m 1. assiom.
n 2. assiom.

nuto da tutta AB, e da BI, cioè da BC, sarà il detto gnomone vguale al quadruplo rettangolo contenuto da tutta A B, e dalla parte BC: vgualmente se gli aggiunga il quadrato OH, cioè il quadrato di AC; ne viene tutto il quadrato AE, cioè il quadrato della composta A D, vguale al quadruplo rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte BC, col quadrato del restante AC, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, e la medesima è diuisa in due parti ineguali; li quadrati delle parti ineguali sono il doppio del quadrato della metà, col quadrato dell'intermedia portione.

Sia la retta AB diuisa in due parti vguali in C, e la medesima AB sia diuisa in due parti ineguali nel punto D, e sia C D l'intermedia portione frà l'vguale, ed ineguale diuisione. Dico che i quadrati delle parti ineguali AD, DB, sono il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato dell'intermedia portione CD.



Nel punto C s'erigga la retta C E [a] ad angoli retti con A B, si faccia CE [b] vguale ad AC, ouero C B, e si tirino le rette A E, E B; nel punto D, s'erigga la retta D F [c] perpendicolare ad A B, la quale continuata concorrerà col lato E B in qualche punto F, dal quale si tiri la retta F G [d] parallela ad A B, segarà la retta E C in qualche punto G, si tiri la retta FA.

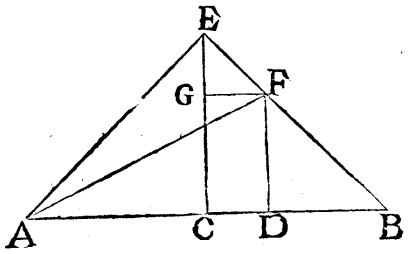
Perche la retta EC è fatta vguale ad A C sarà il triangolo A E C isoscele, e gli angoli CAE, CEA, [e] saranno frà di loro vguali; mà l'angolo in C è retto, ogn'vno de' i due angoli CAE, CEA [f] sarà la metà d'vn angolo retto. Considerando il triangolo C E B, nell'istesso modo si dimostrerà, ch'ogn'vno de' i due angoli CEB, CBE, è la metà d'vn angolo retto, dal che tutto l'angolo AEF sarà retto. Nel triangolo FDB, l'angolo in D, per costruttione è retto, l'angolo B è dimostrato essere la metà d'vn angolo retto, il rimanente angolo D F B [g] sarà la metà d'vn angolo retto; e perciò gli angoli DFB, DBF [h] sono frà di loro vguali, ed il lato DB [K] è vguale al lato D F. Essendo G F, per costruttione parallela ad AB, l'angolo esterno EGF [l] è vguale all'angolo ECB interno, ed opposto; mà l'angolo in C è retto, sarà l'angolo E G F retto. Nel triangolo EGF, l'angolo G è retto, l'angolo GEF è la metà d'vn retto, il rimanente angolo E F G [m] sarà la metà d'vn angolo retto; e perciò gli angoli GEF, GFE sono frà di loro vguali; ed il lato GE [n] sarà vguale al lato GF.

Di

a 11. del 1.
b 3. del 1.
c 11. del 1.
d 31. del 1.
e 5. del 1.
f 32. del 1.
g 32. del 1.
h 10. assiom.
K 6. del 1.
l 29. del 1.
m 32. del 1.
n 6. del 1.

o 47.del 1.

Di nuouo nel triangolo ECA, angolo retto in C, il quadrato di EA o è vguale à i quadrati de'i due lati EC, CA, ma EC, per costruttione è vguale ad AC, sarà il quadrato di AE il doppio del quadrato di AC. Nel triangolo EGF, angolo retto in G, il quadrato di EF o è vguale à i quadrati de'i due lati EG, GF; mà EG è dimostrato vguale à GF, sarà il quadrato di EF il doppio del quadrato di GF, cioè p il doppio del quadrato di CD: e così li quadrati delle due AE, EF, sono il doppio de'i quadrati delle due AC, CD. Nel triangolo AEF, angolo retto in E, il quadrato di AF q è vguale à i quadrati de'i due lati AE, EF, mà i quadrati de' lati AE, EF sono il doppio de'i quadrati delle due AC, CD; sarà il quadrato di AF il doppio de' quadrati delle due AC, CD. Si consideri il triangolo ADF, angolo retto in D; il quadrato di AF è vguale à i quadrati de' due lati AD, DF, mà il quadrato di AF è il doppio de' quadrati delle due AC, CD; i quadrati de'i due lati AD, DF saranno il doppio de' quadrati delle due AC, CD; mà DF è dimostrato vguale al lato DB, saranno i quadrati delle parti ineguali AD, DB il doppio de' quadrati delle due AC, CD, ch'era da dimostrarsi.



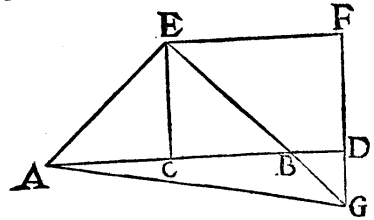
p 34. del 1.

q 47.del 1.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, e nella medesima dirittura se le aggiunga vna retta ad arbitrio; il quadrato di tutta la composta, col quadrato dell'aggiunta, è il doppio del quadrato della metà, col quadrato della retta composta della metà, e dell'aggiunta.

Sia la retta linea AB diuisa in due parti vguali in C, alla quale sia aggiunta qualunque retta BD nella medesima dirittura. Dico che il quadrato di tutta la composta AD, col quadrato dell'aggiunta BD, è il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato di CD, composta della metà CB, e dell'aggiunta BD.



Nel punto C a si erigga la retta CE perpendicolare alla retta AD, si faccia EC b vguale ad AC, ouero CB, e si tirino le rette AE, EB; dal punto E c si tiri la retta EF parallela alla retta AB, e per il punto D si faccia passare la retta FDG parallela ad EC, la quale concorrerà con EF in qualche punto F, e con EB continuata in qualche punto G; si tiri la retta AG.

a 11. del 1.

b 3.del 1.

c 31. del 1.

Perche

Perche il lato AC è vguale al lato CE, sarà il triangolo AEC isoscele, e gli angoli CAE, CEA, d saranno frà di loro vguali; mà l'angolo ACE, per costruttione è retto, ogn'vno de'i due angoli CAE, CEA e sarà la metà d'vn angolo retto. Nell'istesso modo, considerando il triangolo ECB, si dimostrerà, ch'ogn'vno degl'angoli CEB, CBE, è la metà d'vn angolo retto; dal che tutto l'angolo AEB sarà retto. In oltre perche le rette EF, CD, sono parallele, segate dalla retta EC, i due angoli FEC, DCE, f interni, e dalla medesima parte, sono vguali à due angoli retti; mà l'angolo DCE è retto, sarà l'angolo FEC retto. Nel parallelogrammo CF g gli angoli opposti, ed i lati opposti sono vguali; & essendo gli angoli FEC, DCE retti, saranno gli angoli opposti in F, & D retti; ed il lato CD sarà vguale al lato EF. Perche dunque l'angolo CEF è retto, leuatone l'angolo CEB, ch'è la metà d'vn angolo retto, l'angolo FEG, che resta, sarà la metà d'vn angolo retto. Nel triangolo FEG, l'angolo F è retto, l'angolo FEG è la metà d'vn retto, sarà il restante angolo FGE h la metà d'vn angolo retto; dal che i lati EF, FG, K sono frà di loro vguali. Similmente nel triangolo GDB, l'angolo D è retto, l'angolo DGB è la metà d'vn angolo retto; il rimanente angolo DBG l sarà la metà d'vn angolo retto, e perciò gli angoli DBG, DGB sono frà di loro vguali, ed il lato DG m sarà vguale al lato DB.

d 5.del 1.

e 32. del 1.

f 29. del 1.

g 34. del 1.

h 32. del 1.

K 6. del 1.

l 32. del 1.

m 6.del 1.

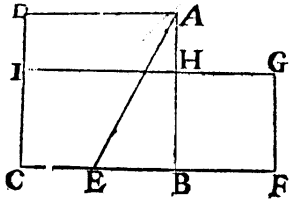
Di nuouo nel triangolo ECA, angolo retto in C, il quadrato di AE n è vguale à i quadrati de'i due lati AC, CE; mà EC è fatto vguale al lato CA, sarà il quadrato di AE il doppio del quadrato di AC. Similmente nel triangolo EFG, angolo retto in F, il quadrato di EG n è vguale à i quadrati de'i due lati EF, FG; mà EF è vguale ad FG, sarà il quadrato di EG il doppio del quadrato di EF, cioè il doppio del quadrato di CD; e così li quadrati de'i due lati AE, EG sono il doppio de i quadrati delle due rette AC, CD. Si consideri il triangolo AEG, angolo retto in E, il quadrato di AG n è vguale à i quadrati de'i due lati AE, EG; mà i quadrati de'i due AE, EG sono il doppio de i quadrati delle due AC, CD, sarà il quadrato di AG il doppio de'i quadrati delle due AC, CD. Nel triangolo ADG, angolo retto in D, il quadrato di AG è vguale à i quadrati de'i due lati AD, DG; mà il quadrato di AG è il doppio de' quadrati delle due AC, CD, i due quadrati de' lati AD, DG saranno il doppio de'i quadrati delle due AC, CD: fù dimostrata DG vguale à BD; sarà dunque il quadrato della composta AD, col quadrato dell'aggiunta DB, il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato della retta CD, composta della metà CB, e dell'aggiunta BD, ch'era da dimostrarsi.

n 47. del 1.

PROBLEMA I. PROPOSITONE XI.

Data vna retta linea, diuiderla talmente, che il rettangolo contenuto da tutta, e da vna delle parti, sia vguale al quadrato dell'altra parte.

Sia la retta linea AB, la quale s'habbia à diuidere come s'è detto.



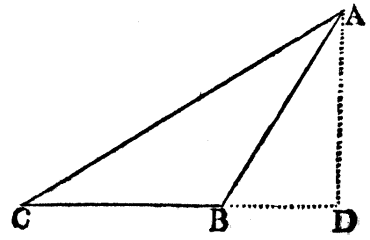
a 46. del 1. b 10. del 1. Sopra la retta AB [a] si descriua il quadrato DB, si diuida il lato CB [b] in due parti vguali in E, e si tiri la retta EA; poi si prolunghi CB verso F, e si faccia EF [c] vguale alla retta EA; sopra la retta BF [d] si descriua il quadrato BG, il di cui lato GH segarà il lato AB in qualche punto H. Dico ch'il rettangolo contenuto da tutta BA, e dalla parte AH, e vguale al quadrato di HB. Si prolunghi GH fino ad I. Perche la retta CB, per costruttione è diuisa in due parti vguali in E, e gli è aggiunta la parte BF, sarà il rettangolo contenuto dalla composta CF, e dall'aggiunta BF, col quadrato della metà, EB, [e] vguale al quadrato di EF: la retta EF è fatta vguale ad EA, sarà il rettangolo contenuto dalle due CF, FB, col quadrato di EB, vguale al quadrato di AE. Nel triangolo ABE, angolo retto in B, il quadrato di AE [f] è vguale à i quadrati de'i due lati AB, BE; mà il quadrato di AE è vguale al rettangolo contenuto dalle due CF, FB, col quadrato di EB; i quadrati dunque delle due AB, BE, [g] sono vguali al rettangolo contenuto dalle due CF, FB, col quadrato di EB: vgualmente se ne leui il quadrato di EB, resta il quadrato di AB, [h] cioè il quadrato DB, vguale al rettangolo contenuto dalle due CF, FB, cioè vguale al rettangolo CG, (stante, che BF è vguale ad FG) vgualmente se ne leui il commune rettangolo IB; resta il rettangolo DH vguale al quadrato HF. E perche il rettangolo DH [K] è contenuto dal lato DA, e da AH, ed il lato AD è vguale ad AB; sarà il rettangolo contenuto da BA, & AH vguale al quadrato BG, cioè vguale al quadrato di BH, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

c 3. del 1. d 46. del 1. e 6. del 2. f 47. del 1. g 1. assiom. h 3. assiom. K 1. definit. del 2.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XII.

Ne i triangoli ambligonij il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è tanto maggiore de'i quadrati de' lati, che contengono l'angolo ottuso, per quanto è il doppio rettangolo contenuto da vno de' lati intorno all'angolo ottuso, e dalla continuatione di quello, interposta frà l'angolo ottuso, e la perpendicolare, che cade dall'angolo opposto al lato continuato.

Sia il triangolo ambligonio ABC, angolo ottuso in B, e dall'angolo A [a] cada la retta AD perpendicolare al lato CB, continuato fino in D. Dico ch'il quadrato del lato AC opposto all'angolo ottuso ABC, è tanto maggiore de'i quadrati de'i lati AB, BC, che contengono l'angolo ottuso, per quanto è il doppio rettangolo conte-



a 12. del 1.

nuto

nuto dal lato CB, e dalla continuatione BD.

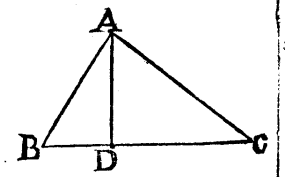
La retta CD è diuisa in B; sarà il quadrato di CD [b] vguale à i quadrati delle due CB, BD, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime due CB, BD: vgualmente s'aggiunga il quadrato di AD; i quadrati de'i due lati CD, DA [c] saranno vguali à i quadrati delle tre CB, BD, DA, col doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD: mà, per essere l'angolo D retto, il quadrato di AC [d] è vguale à i quadrati de'i due lati CD, DA; sarà il quadrato di CA vguale à i quadrati delle tre CB, BD, DA, col doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD. E perche il quadrato di AB [d] è vguale à i quadrati delle due AD, DB; sarà il quadrato di AC vguale à i quadrati de'i due lati CB, BA, col doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD. Hor se à i quadrati de'i due lati CB, BA, bisogna aggiungere il doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD, accioche siano vguali al quadrato di AC; il quadrato dunque del lato AC è tanto maggiore de'i quadrati de'i due lati CB, BA, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD, ch'era da dimostrarsi.

b 4. del 2. c 2. assiom. d 47. del 1.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIII.

In qualunque triangolo rettilineo, il quadrato del lato opposto all'angolo acuto, è tanto minore de'i quadrati de' lati, che contengono l'angolo acuto, per quanto è il doppio rettangolo contenuto da vno de' lati intorno all'angolo acuto, e la parte del medesimo lato interposta frà l'angolo acuto, e la perpendicolare.

Sia qualunque triangolo rettilineo ABC, angolo acuto in C, e cada dall'angolo A [a] la retta AD perpendicolare al lato BC. Dico che il quadrato del lato AB, opposto all'angolo acuto C, è tanto minore de'i quadrati de'i lati BC, CA, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dal lato BC, e dalla parte DC, interposta frà l'angolo acuto C, e la perpendicolare AD.

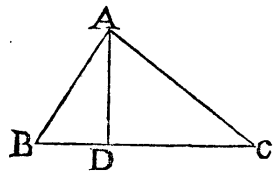


a 12. del 1.

Perche la retta BC è diuisa in D, [b] il quadrato di tutta BC, col quadrato della parte DC, è vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BC, CD, col quadrato del restante BD: dall'vna, e l'altra parte di questa vgualità, s'aggiunga il quadrato di AD; ne vengono i quadrati delle tre BC, CD, DA, [c] vguali al doppio rettangolo contenuto dalle due BC, CD, con i quadrati delle due BD, DA: e perche nel triangolo ADB, angolo retto in D, i quadrati de'i due lati BD, DA, [d] sono vguali al quadrato di AB, sarà il quadrato di AB, col doppio rettangolo contenuto dalle due BC, CD, vguale à i quadrati delle tre BC, CD, DA: mà nel triangolo rettangolo ADC, i quadrati de'i due lati AD, DC sono vguali al quadrato di AC; sarà il quadrato di AB, col doppio ret-

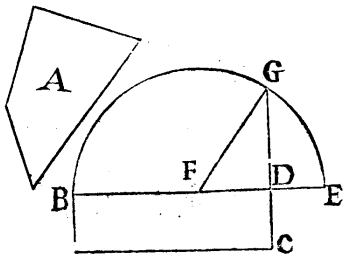
b 7. del 2. c 2. assiom. d 47. del 1.

rettangolo contenuto dalle due B C, C D, vguale à i quadrati de'i due lati B C, C A. Hor ſe al quadrato del lato A B biſogna aggiungere il doppio rettangolo contenuto dalle due B C, C D, accioche ſia vguale à i quadrati de'i due lati BC, CA; farà il quadrato del lato A B tanto minore de'i quadrati de' lati B C, C A, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle due B C, CD, come fù propoſto dimoſtrare.



PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIV.

Coſtruire vn quadrato vguale ad vn dato rettilineo.



Habbiaſi à deſcriuere vn quadrato vguale al dato rettilineo A. Si faccia il
a 45. del 1. parallelogrammo rettangolo B C [a] vguale al dato rettilineo A; ſi continui
b 3. del 1. il lato BD verſo E, e ſi faccia DE [b] vguale al lato DC; ſi diuida la retta BE
c 10. del 1. [c] in due parti vguali in F; fatto centro in F, coll'interuallo FB, ouero F E, ſi deſcriua il mezzo circolo BGE, ſi continui il lato C D ſino, che concorra con la circonferenza in qualche punto G. Dico che il quadrato, che ſi deſcriue ſopra alla retta DG, è vguale al rettilineo dato A. Dal centro F al punto G ſi tiri la retta FG. Nel triangolo FGD, angolo retto in D,
d 47. del 1. il quadrato del lato FG [d] è vguale à i quadrati de'i due lati FD, DG.
e 5. del 2. In oltre perche la retta BE è diuiſa in due parti vguali in F, e la medeſima è diuiſa in due parti ineguali in D, [e] il rettangolo contenuto dalle due BD, DE, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di EF, cioè vguale al quadrato di FG; mà il quadrato di FG è dimoſtrato vguale à i quadrati de'i due lati FD, DG, farà il rettangolo contenuto dalle rette BD, DE, col quadrato di FD, vguale à i quadrati de'i due lati F D, D G: ſe ne leui vgualmente il quadrato del lato FD, reſta il rettangolo contenuto dalle due BD, DE, f cioè il rettangolo BC, vguale al quadrato della retta D G; mà il rettangolo B C è fatto vguale al rettilineo A, farà il
f 3. aſſioma
g 1. aſſiom. quadrato deſcritto ſopra la retta GD [g] vguale al dato rettilineo A, ch' era da farſi, e dimoſtrarſi.

Fine del Secondo Elemento.

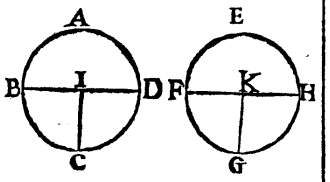
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO TERZO.

DEFINITIONI.

I.

Quei circoli ſono vguali, i di cui diametri, ò ſemidiametri ſono frà di loro vguali.

IO E' ſe il diametro BD, è vguale al diametro FH, ouero il ſemidiametro IC è vguale al ſemidiametro KG, il circolo ABCD, è vguale al circolo EFGH; perche generandoſi i circoli ABCD, EFGH, dalle reuolutioni de' loro ſemidiametri IC, KG, intorno à gli eſtremi I, & K,

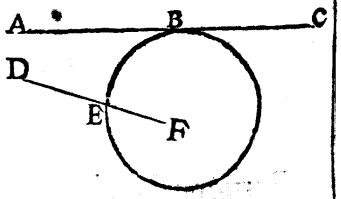


poſti immobili, ſe li ſemidiametri IC, KG ſono frà di loro vguali, paſſeranno ne i loro fluſſi ſpatij vguali, e così i circoli deſcritti ſaranno frà di loro vguali. Ed all' incontro quando i circoli ſono vguali i loro diametri, ò ſemidiametri ſonò frà di loro vguali.

I I.

La retta linea ſi dice toccare il circolo, quando concorrendo col circolo continuata non lo ſega.

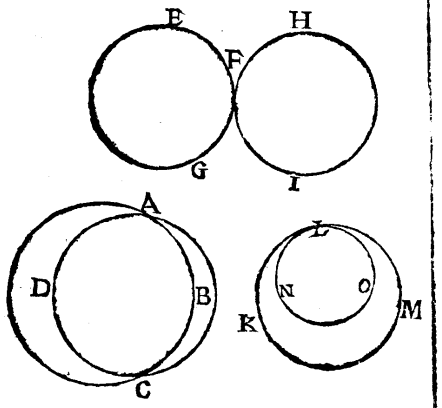
Nel circolo BE concorra la retta DE, e continuata paſſi dentro del circolo, come fà la parte EF, in tal caſo la retta DF non ſi dice toccare il circolo. Quando poi concorrendo qualche retta col circolo; come fà la retta AB, e continuata paſſi fuori di eſſo circolo, come appariſce per la retta AC, all' hora la retta AC ſi dirà toccare il circolo BE, ed il punto B, ſarà il punto del contatto.



III.

I Circoli si dicono toccarsi frà di loro, quando concorrendo insieme non si segano.

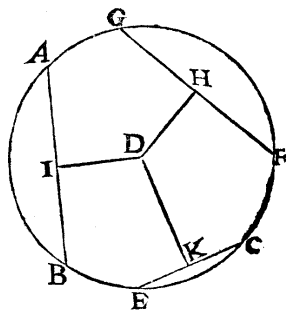
Per essempio i circoli ABC, ADC de' quali parte dell' vno cade dentro dell'altro, si dicono segarsi, ed i circoli EFG, HFI, li quali concorrono insieme nel punto F, e l'vno non sega l'altro, ma l'vno cade totalmente fuori dell' altro, si dicono toccarsi di fuori; ed i circoli KLM, NLO, le di cui circonferenze concorrono insieme nel punto L, e non si segano scambieuolmente, si dicono toccarsi di dentro.



IV.

Le rette linee nel circolo si dicono essere vgualmente distanti dal centro, quando le rette, che dal centro cadono ad angoli retti à quelle, sono frà di loro vguali; e quella si dice essere più lontana dal centro, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

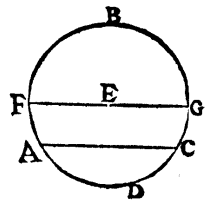
Nel circolo ABCF, siano tirate le rette AB, EC, GF, e dal centro D, s'intendano tirate le rette DH, DI, DK ad angoli retti con le rette AB, EC, GF; se la perpendicolare DH è vguale alla perpendicolare DI, le rette GF, AB si diranno essere vgualmente distanti dal centro D: e se la perpendicolare DK è maggiore della perpendicolare DI, la retta EC si dirà essere più distante dal centro D, che la retta AB, cioè se ID è minore di DK, la retta AB si dirà essere più vicina al centro D, che la retta EC.



V.

Portione del circolo è la figura contenuta dalla retta linea, e da vna parte della circonferenza di esso circolo.

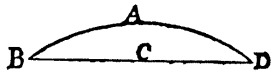
S'intenda il circolo ABCD, il di cui centro E, ed il diametro FG, e sia segato il circolo ABCD dalla retta AC; la figura contenuta dalla retta AC, & dalla circonferenza ABC, si chiama portione del circolo; che se il centro E cade in essa, in tal caso la portione ABC è maggiore del semicircolo FBG, e perciò si dice portione maggiore: e se il centro E cade fuori come nella notata ADC, la quale per essere minore del semicircolo FDG, si chiama portione minore: la linea ABC, ouero ADC, si chiama arco; e la retta AC si dice corda dell'arco ABC, ed anco dell'arco ADC.



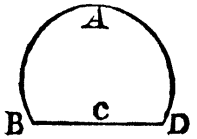
VI.

Angolo della portione è quello, ch' è contenuto dalla corda, e dall'arco.

L'angolo contenuto dall'arco AB; e dalla corda BCD, cioè l'angolo ABC, ouero ADC, si chiama angolo della portione.

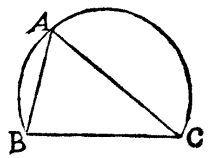


VII.



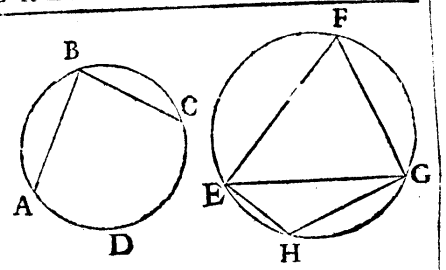
Angolo nella portione è quello, ch'è contenuto da due rette tirate dagl'estremi della corda ad vn punto preso nella circonferenza; e si chiama ancora angolo nella circonferenza.

Nella portione BAC dagli estremi B, & C, della corda BC, siano tirate due rette, come BA, CA, à qualche punto A, preso nella circonferenza BAC; l'angolo BAC, contenuto dalle rette BA, AC, si chiama angolo nella portione; cioè si dice essere nella portione BAC, e si chiama ancora angolo nella circonferenza, ouero alla circonferenza.



VIII.

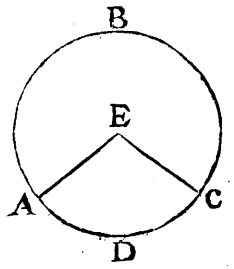
L'angolo alla circonferenza si dice insistere all'arco, che gli è opposto.



Nel circolo ABCD, da qualche punto A siano tirate alla circonferenza le rette AB, CB, talmente che l'angolo A B C sia opposto à qualche arco ADC, in tal caso l'angolo A B C si dirà insistere all'arco ADC, che gli è opposto. E nota che l'angolo alla circonferenza può essere angolo nella portione, ed ancora angolo insistente; come nella figura EFGH, l'angolo EFG, rispetto all'arco EFG, si dice essere nella portione EFG; e rispetto all'arco EHG, che gli è opposto, si dice insistente: e nell'istesso modo l'angolo EHG si dice essere nella portione EHG, e si dice insistere all'arco EFG, che gli è opposto.

I X.

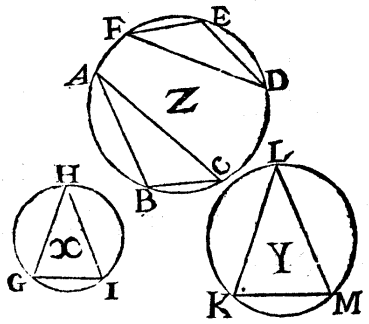
La figura contenuta da due semidiametri, che contengono qualche angolo nel centro del circolo, e dall'arco opposto à quell'angolo, si chiama settore del circolo.



Dal centro E, del circolo A B C D, s'intendano tirati alla circonferenza i due semidiametri AE, CE, i quali contenghino nel centro qualche angolo AEC, la figura AECD, contenuta dalle rette AE, EC, e dall'arco A D C, si chiama settore del circolo.

X.

Simili portioni di circoli sono quelle, delle quali gli angoli alla circonferenza sono vguali, cioè, che gli angoli in quelle portioni sono vguali frà di loro.



Nel circolo Z, se gli angoli F E D, A B C, sono frà di loro vguali, le portioni F E D, A B C, nelle quali sono posti i detti angoli, si dicono essere frà di loro simili. Parimente ne i circoli ineguali X, Y, se gli angoli G H I, K L M sono frà di loro vguali, le portioni G H I, K L M si dicono essere frà di loro simili.

PRO-

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

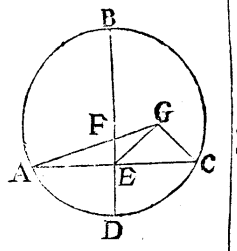
Dato vn circolo, ritrouargl' il centro.

Sia il dato circolo ABCD, al quale si voglia ritrouare il centro.

Si tiri qualunque retta AC, che seghi il circolo ABC; si diuida la retta A C [a] in due parti vguali in E, e sopra la retta A C, [b] nel punto E, si erigga la perpendicolare E B, la quale continuata concorrerà con la circonferenza come in B, & D; si diuida la retta BD [c] in due parti vguali in F. Dico ch'il punto F è il centro del dato circolo ABCD.

a 10. del 1.
b 11. del 1.
c 10. prop.

Se il punto F non è il centro del circolo A B C D, perche BF è vguale ad FD, necessariamente sarà qualche altro pũto fuori della retta BD, e sia quello, per esempio, il punto G; si tirino le rette G A, G E, G C. Perche il punto G è centro del circolo ABCD, le rette GA, GC [d] sono frà di loro vguali: si considerino i due triangoli GEC G E A, de' quali il lato EC, per costruttione, è vguale al lato AE, il lato EG è commune, perciò i due lati G E, E C sono vguali à i due lati GE, E A, la base G C è dimostrata vguale alla base G A, sarà l'angolo G E C vguale all'angolo G E A; dal che l'angolo G E A [e] sarà retto: mà per costruttione l'angolo BEA è retto; l'angolo dunque B E A sarà vguale all'angolo GEA, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile; non dunque il punto G è centro del circolo ABCD, mà sarà il punto F, ch'era da dimostrarsi.



d 15. defin. del 1.
e 10. defin. del 1.

COROLLARIO.

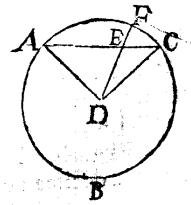
Da quel che s'è detto, è manifesto, che se vna retta linea sega vn altra retta tirata nel circolo in due parti vguali, & ad angoli retti, quella passa per il centro del circolo.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se nella circonferenza del circolo sono presi due qualunque punti, la retta, che congiunge quei punti, cade dentro del circolo.

Nella circonferenza del circolo A B C F, siano presi due qualunque punti A, & C, tirata la retta A C [a]. Dico che la retta A C cade dentro del circolo.

Si troui il centro del circolo, [b] che sia D, e si tirino le rette DA, DC, [c] e preso nella retta AC qualunque punto E, si tiri la retta DE, la quale si continui [d] indeterminatamente verso F, la retta D E F,

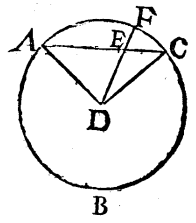


a 1. postul.
b 1. del 3.
c 1. postul.
d 2. postul.

inde-

indeterminata verſo F, ſegarà la circoferẽza del circolo in qualche punto F. Perche le rette DC, D A ſono tirate dal centro alla circonferenza, perciò [e] ſono frà di loro vguali, ed il triangolo D AC è iſoſcele, dal che gli angoli DCA, D A C, [f] ſono frà di loro vguali. Nel triangolo DEC, il lato CE è continuato verſo A, ſarà l'angolo eſterno D E A [h] maggiore dell'angolo D C A interno, ed oppoſto; mà l'angolo DCA, è moſtrato vguale all' angolo DAC, ſarà l'angolo DEA maggiore dell'angolo D A E, ed il lato D E, [K] ſarà minore del lato AD; mà il lato AD, per la definitione del circolo, è vguale ad FD, ſarà DE minore della retta DF, dal che il punto E cade dentro al circolo: e perche il punto E è preſo ad arbitrio nella retta AC, ogni punto dunque immaginato nella retta AC, cade dentro del circolo. Per la qual coſa la retta AC, che paſſa per quegl'infiniti punti, cade dentro del circolo, ch'era da dimoſtrarſi.

e 15. defin del 1.
f 25. defin. del 1.
g 5. del 1.
h 16. del 1.
K 19. del 1.



COROLLARIO.

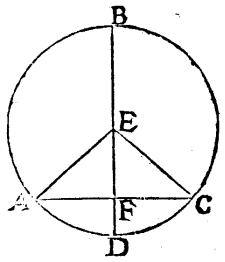
Da quel, che s'è detto, è manifeſto, che quando vna retta linea tocca vn circolo, quella tocca il circolo in vn ſol punto; perche ſe paſſaſſe per due qualunque punti preſi nella circonferenza, caderebbe dentro del circolo, ed all' hora lo ſegarebbe, e non lo toccarebbe.

THEOREMA II. PROPOSITIONE III.

La retta, che paſſa per il centro del circolo, e ſega vn altra retta tirata in eſſo circolo fuori del centro, ſe la ſega in due parti vguali, la ſegarà ad angoli retti; e, ſe la ſega ad angoli retti, la ſegarà in due parti vguali.

Sia il circolo ABCD, il di cui centro E, per il quale paſſi la retta BD, e ſeghi la retta A C, che non paſſa per il centro. Dico prima, che ſe la retta BD ſega la retta AC in due parti vguali, gli angoli BFC, B F A ſono retti. Dal centro E à i punti A, & C, [a] ſi tirino le rette EA, EC. Si conſiderino i due triangoli EFC, EFA: perche FC, per ipoteſi, è vguale ad FA, ed il lato FE è commune; i due lati EF, F C ſono vguali à i due lati EF, FA; la baſe EC, per la definitione del circolo, è vguale alla baſe EA, ſarà l'angolo EFC, [b] vguale all'angolo EFA, e per la decima definitione del primo libro, gli angoli EFC, EFA ſono retti.

a 46. poſt.
b 8. del 1.



Di nuouo, ſuppoſto che gli angoli in F ſiano retti. Dico che la retta AF è vguale alla retta FC. S'intenda fatta l'antecedente coſtruttione. Perche gli angoli EFC, EFA ſono retti, ſarà il quadrato del lato EC, [c] vguale à i quadrati de'i due lati EF, FC, ed il quadrato del lato EA, ſarà vguale à i quadrati de' due lati EF, FA; mà EC, per la definitione del circolo, è vguale ad EA; ſaranno i quadrati de' due lati EF, FC vguali à i quadrati de lati EF, FA; ſe ne leui il quadrato del commune lato EF, reſta il quadrato del lato F C [d] vguale al quadrato del lato FA, ed il lato FC vguale al lato FA, come fù propoſto dimoſtrare.

c 47. del 1.
d 3. poſt.

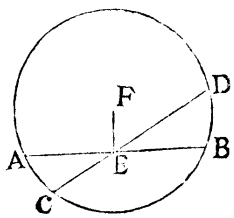
THEOREMA III. PROPOSITIONE IV.

Se nel circolo due rette linee ſi ſegano fuori del centro, ambedue non ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali.

Nel circolo ACBD, il di cui centro F, ſi ſeghino due qualunque rette AB, CD, fuori del centro F, in qualche punto E. Dico che tutte due non ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali.

Si ſeghino s'è poſſibile in due parti vguali nel punto E, dal centro F all'interſegatione E [a] ſi tiri la retta FE. Perche la retta FE paſſa per il centro F e ſega la retta A B fuori del centro in due parti vguali, gli angoli FEB, FEA [b] ſaranno retti. Similmente perche la retta F E paſſa per il centro F, e ſega la retta CD in due parti vguali, gli angoli FED, FEC ſaranno retti; dal che l'angolo F E D [c] ſarà vguale all'angolo FEB, la parte vguale al tutto, [d] ch'è impoſſibile; non dunque tutte due le rette A B, C D, ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

a 1. poſt.
b 3. del 1.
c 10. aſſiom.
d 9. aſſiom.

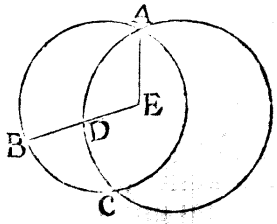


THEOREMA IV. PROPOSITIONE V.

Se due circoli ſi ſegano ſcambieuolmente, non è poſſibile, ch' habbiano vn medeſimo centro.

Si ſeghino i circoli ABC, A D C, come in A, & C. Dico che i circoli ABC, ADC non hanno il medeſimo centro. Habbiano, s'è poſſibile, il medeſimo centro E, dal quale all' interſegatione A [a] ſi tiri la retta A E; e dal medeſimo punto E ſi tiri qualunque retta EB, che ſeghi le circonferenze de circoli fuori delle interſegationi A, & C, come in B & D. Perche il punto E è centro del circolo ADC, ſarà [b] la retta ED vguale alla retta EA. Similmente perche

a 1. poſt.
b 15. definit. del 2.



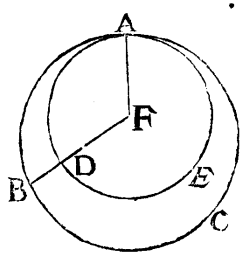
il punto E è centro del circolo ABC, la retta EB, [c] farà vguale alla retta EA: dal che le rette ED, EB sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, [d] ch'è impossibile; non dunque i circoli, che si segano hanno vn medesimo centro, ch'era da dimostrarsi.

c 15. defin. del. 1.

d 9. assiom.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VI.

Se due circoli si toccano di dentro, non è possibile, che habbiano il medesimo centro.



Si tocchino i circoli ABC, ADE, l'vno dentro l'altro in qualche punto A. Dico che non possono hauere il medesimo centro. Habbiano, s'è possibile, il medesimo centro F; dal centro F al al contatto A [a] si tiri la retta FA, e dal medesimo centro F, si tiri qualunque altra retta FB, che seghi le circonferenze de' circoli fuori del contatto A, come in B & D. Perche il punto F è centro del circolo ADE, sarà la retta DF [b] vguale alla retta FA. Similmente perche il punto F è centro del circolo ABC. La retta FB sarà vguale alla medesima retta FA; dal che le rette FD, FB [c] sono frà di loro vguali, la parte vguale al tutto, [d] ch'è impossibile; non dunque i circoli, che si toccano di dentro hanno vn medesimo centro, ch'era da dimostrarsi.

a 1. post.

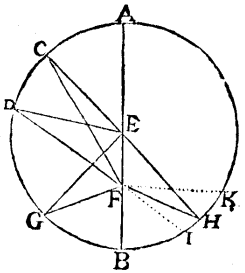
b 15. defin. del. 1.

c 1. assiom.

d 9. assiom.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VII.

Se nel diametro del circolo sia preso qualche punto fuori del centro, e da quello siano tirate quante si voglia rette linee alla circonferenza; quella, che passa per il centro, è la massima, il restante del diametro è la minima, e delle altre quella, ch'è più vicina alla massima, è sempre maggiore di quella, ch'è più lontana; e dal medesimo punto due sole rette linee vguali possono cadere nella circonferenza, vna da vna parte, e l'altra dall'altra parte della massima, ò minima.



Nel circolo ACDB, il di cui centro E, ed il diametro AB, nel quale, fuori del centro E, sia preso qualunque punto F, e dal punto F alla circonferenza siano tirate quante si voglia rette FC, FD, FG. Dico che di tutte le rette tirate dal punto F alla circonferenza ACDB, la massima è la retta FA, che passa per il centro E; la minima è il restante FB del diametro; e che la retta FC, più vicina alla massima, è maggiore di FD più lontana; ed FD, è maggiore di FG; e che dal punto F due sole rette linee vguali possono cadere alla circonferenza, cioè

cioè vna da vna parte, e l'altra dall'altra parte della minima FB, ò massima FA.

Dal centro E si tirino le rette EC, ED, EG. [a] Per la definitione del circolo la retta EA è vguale alla retta EC; vgualmente se gli aggiunga la parte EF, sarà [b] FA vguale alle due FE, EC: ma nel triangolo FEC, i due lati FE, EC [c] sono maggiori del terzo lato FC, sarà FA maggiore di FC. Nell'istesso modo si dimostrerà, che FA è maggiore di FD, come anco di FG, e di ogn'altra tirata dal punto F alla circonferenza ACDB. Per la qual cosa la retta FA è la massima.

a 1. post.

b 2. assiom.

c 20. del 1.

Nel triangolo EFG, i due lati EF, FG sono maggiori del [d] lato EG; ma il lato EG, per la definitione del circolo, è vguale ad EB, saranno i due lati EF, FG maggiori della retta EB; se ne leui la commune retta EF, resta FB [e] minore di FG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta FB è minore di FD, come anco di FC, e di ogn'altra tirata dal punto F alla circonferenza ACDB. Per la qual cosa la retta FB sarà la minima.

d 20. del 1.

e 3. assiom.

In oltre, perche la retta EC, per la definitione del circolo, è vguale ad ED, vgualmente se le aggiunga la retta EF: I due lati FE, EC [f] del triangolo F E C, sono vguali à i due lati F E, ED, del triangolo FED; l'angolo FEC è maggiore dell'angolo FED, stante che, per costruttione, lo contiene, sarà la base FC [g] maggiore della base FD. Nell'istesso modo, considerando i triangoli EDF, EGF, si dimostrerà, che la retta FD è maggiore di FG. Per la qual cosa quelle, che sono più vicine alla massima FA, sono maggiori di quelle, che più sono lontane.

f 2. assiom.

g 24. del 1.

Finalmente nel punto E si faccia l'angolo BEH [h] vguale all'angolo B E G, e si tiri [K] la retta FH. Perche i due lati F E, E G del triangolo F E G, sono vguali à i due lati F E, EH, del triangolo F E H; e l'angolo F E G, per costruttione, è vguale all'angolo F E H, sarà la base FG [l] vguale alla base F H: dal che le due F G, F H, tirate dall'vna, e l'altra parte della minima, ò massima, sono frà di loro vguali. Che poi dal punto F non se ne possano tirare più di due vguali dall'vna, e l'altra parte della minima, ò massima, è chiaro da quel, che s'è dimostrato: poiche se dal punto F sia tirata qualche altra retta alla circonferenza, quella caderà sotto, ò sopra alla retta FH; se cade sopra come fà la retta FK, per quel, che s'è dimostrato, sarà FK, maggiore di FH, e se cade sotto, come fà F I, sarà F I minore di F H, che era da dimostrarsi.

h 23. del 1.

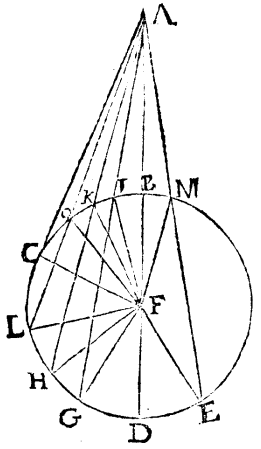
K 1. post.

l 4. del 1.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VIII.

Se da qualche punto preso fuori del circolo sono tirate rette linee, che seghino il circolo, delle quali vna passi per il centro: di tutte quelle, che cadono nel cauo della circonferenza, la massima è la retta, che passa per il centro; dell'altre la più vicina à quella, che passa per il centro è maggiore d'ogn'altra più lontana. Nella parte con-

uessa quella, ch'è diretta al centro, è la minima; dell'altre quella, ch'è più vicina alla minima è minore d'ogn'altra più lontana, e da quel punto due sole rette linee vguali cadono nel circolo dall'vna, e l'altra parte della minima, ò massima.



Da qualche punto A, preso fuori del circolo BCD, siano tirate le rette A D, A G, AH, AL, AC &c. che seghino il circolo BCD, e la retta AD passi per il centro F. Dico che la retta AD, che passa per il centro F, è la massima; dell'altre, AG, più vicina alla massima, è maggiore di AH più lontana; & AH è maggiore di AL; come anco AL maggiore di AC e nella parte conuessa, la retta AB, ch'è diretta al centro F, è la minima; la retta A I, più vicina alla minima, e minore di AK più lontana, & AK è minore di AO; e finalmente dall'vna, e l'altra parte della minima, ò massima, due sole rette vguali caderanno nel circolo.

a 1. post. Dal centro F [a] si tirino le rette FG, F H, F L, F C, F O, F K, F I. Perche la retta

b 15. defin. del 1. F D [b] è vguale ad F G, vgualmente s'aggiunga la retta F A; sarà la

c 2. assiom. retta A D [c] vguale alle due A F, F G: ma nel triangolo A F G i due

d 20. del 1. lati AF, FG, [d] sono maggiori del terzo lato AG; sarà la retta AD maggiore della retta AG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta A D è maggiore della retta AH, e d'ogn'altra AL, AC &c. Per la qual cosa la retta AD, che passa per il centro F è la massima.

e 15. defin. del. 1. Si considerino i due triangoli AFG, A F H, de'quali il lato F G [e] è vguale al lato F H; il lato A F è commune ad ambidue, perciò i due lati AF, FG, sono vguali à i due lati AF, FH; l'angolo AFG, è maggiore dell'angolo A F H, (stante che, per costruttione, lo contiene) sarà la

f 24. del 1. base AG [f] maggiore della base AH. Nell'istesso modo si dimostrerà, che AH è maggiore di AL, & AL è maggiore di AC. Per la qual cosa quella, ch'è più vicina alla massima è maggiore d'ogn'altra più lontana.

g 20. del 1. Nella parte conuessa si consideri il triangolo FIA, del quale i due lati AI, IF [g] sono maggiori del terzo lato AF: se ne leuino gli vguali FB,

h 3. assiom. F I, [h] resta A B minore di A I. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta AB è minore di AK, e d'ogn'altra AO, AC &c. per la qual cosa AB ch'è diretta al centro è la minima.

Si consideri il triangolo FKA. Perche dagl'estremi del lato F A sono tirate le rette FI, IA, concorrenti nel punto I, dentro di esso triangolo

21. del 1. KFA; i due lati AK, KF [K] sono maggiori de'i due AI, IF; leuatone gli

l 3. assiom. vguali FI, FK, resta AI [l] minore di AK. Nell'istesso modo si dimostrerà,

che A K è minore di A O, e la retta A O è minore di A C. Per la qual cosa la retta A I, più vicina alla minima, è minore d'ogn'altra più lontana.

m 23. del 1. Si faccia l'angolo AFE [m] vguale all'angolo AFG, e si tiri [n] la retta AE.

n 1. post. Perche i due lati AF, FE sono vguali à i due lati AF, FG, e l'angolo AFE

o 4. del 1. è vguale all'angolo AFG; la base AE [o] sarà vguale alla base AG; l'angolo AEF, sarà vguale all'angolo A G F, e l'angolo F A E vguale all'angolo FAG. Si tiri la retta F M; sarà l'angolo FME [p] vguale all'angolo F E M,

p 5. del. 1. cioè vguale all'angolo FGI: ma l'angolo FGI è vguale all'angolo FIG;

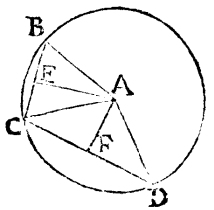
q 1. assiom. sarà l'angolo FIG [q] vguale all'angolo FME, ed i supplementi à due retti,

r 13. del 1. cioè gli angoli FMA, FIA [r], sono frà di loro vguali; ma gli angoli FAM, FAI sono stati mostrati frà di loro vguali, i rimanenti angoli AFM, AFI, sono frà di loro vguali. Finalmente perche i lati A F, FM sono vguali à i due AF, FI, e l'angolo AFM è vguale all'angolo A F I, sarà la base

s 4. del 1. A M [s] vguale alla base A I. Per la qual cosa le due AM, AI, dall'vna, e l'altra parte della minima, sono frà di loro vguali: come ancora le due A E, A G, dall'vna, e l'altra parte della massima per quel che si è dimostrato sono frà di loro vguali: ne possono essere più di due vguali, stante che nel concauo ogn'altra, che passa più vicina ad A D, è maggiore di A E, e se passa più lontana, è minore per quel che si è dimostrato; e nel conuesso, ogn'altra, che passa più vicina ad AB, è minore di A M; e se passa più lontana è maggiore, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE IX.

Se dentro d'vn circolo sia preso qualche punto, dal quale cadano alla circonferenza più di due rette linee vguali; quel punto preso sarà centro del circolo.

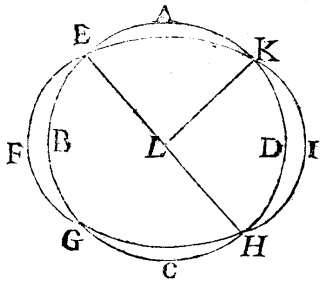


Dal punto A, preso dentro al circolo B C D, cadano alla circonferenza più di due rette vguali, come AB, AC, AD. Dico che il punto A è centro del circolo BCD. Si tirino le rette [a] BC, CD, e si diuidano [b] in due parti vguali in E, ed F; dal punto A à i punti E, F, si tirino le rette [c] AE, AF. Perche i lati A E, EB del triangolo AEB, sono vguali à i due AE, EC del triangolo AEC, e la base AB, per ipotesi è vguale alla base AC; gli angoli AEB, AEC [d] saranno frà di loro vguali, cioè [e] retti; e per il Corollario alla prima propos. di questo, la retta EA passa per il centro del circolo. Nell'istesso modo si dimostrerà che gli angoli ad F sono retti, e la retta FA passa per il centro del circolo. E perche le rette EA, FA si segano in vn sol punto, e per costruttione passano per il punto A, sarà il punto A il centro del circolo, ch'era da dimostrarsi.

a 1. post.
b 10. del 1.
c 1. post.
d 8. del 1.
e 10. defin. 3. del 1.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE X.

Due circoli, che si segano, non si possono segare più che in due punti.

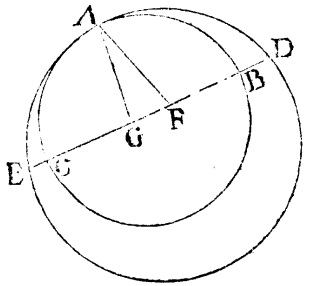


Si seghino i circoli ABCD, EFGHIK, in più di due punti, s'è possibile, come in E, K, H, si troui [a] il centro del circolo ABCD, che sia L, dal quale alle intersegationi E, K, H, [b] si tirino le rette LE, LK, LH, che, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali. In oltre perche dentro del circolo EFGHIK, è preso il punto L, dal quale cadono più di due rette linee vguali alla circonferenza EFGHIK, come sono le rette LE, LK, LH, per l'antecedente propos. il punto L sarà centro del circolo EFGHIK; mà il medesimo punto L è centro del circolo ABCD; sarà il punto L centro commune de'i due circoli ABCD, EFGHIK, che scambieuolmente si segano, il che è contro alla quinta propos. Non dunque i circoli si segano in più di due punti, ch'era da dimostrarsi.

a 1. del 3.
b 1. post.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XI.

Se due circoli l'vn dentro l'altro si toccano, la retta, che congiunge i loro centri, continuata passa per il punto del contatto.



Siano i circoli EAD, CAB, l'vn dentro l'altro, i quali si tocchino in qualche punto A; e sia G il centro del circolo EAD, ed F il centro del circolo CAB; si tiri la retta GF. Dico che continuata la retta GF, quella passerà per il contatto A. Se non passa per il contatto A, segarà le circonferenze fuori del contatto A, come in E, C, B, D; dal contatto A à i centri G, F, [a] si tirino le rette AG, AF. Nel triangolo AGF i due lati AF, FG, [b] sono maggiori del terzo lato AG; mà la retta GA, per la definitione del circolo, è vguale alla retta GD (stante che G è il centro del circolo EAD) i due lati GF, FA saranno maggiori della retta GD; se ne leui la commune GF, [c] resta FA maggiore di FD. In oltre perche il punto F è centro del circolo CAB, le rette FA, FB [d] sono frà di loro vguali; mà la retta FA è stata dimostrata maggiore di FD, sarà FB maggiore di FD; la parte maggiore

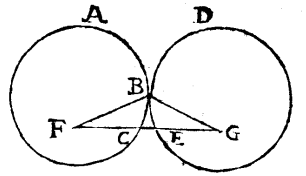
a 1. post.
b 20. del 1.
c 5. assiom.
d 15. defin. del 1.

giore del tutto, [e] ch'è impossibile; non dunque la retta, che passa per i centri sega le circonferenze de' circoli fuori del contatto, mà passa per il contatto A, ch'era da dimostrarsi.

e 9. assiom.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XII.

Se due circoli si toccano di fuori, la retta, che congi unge i loro centri, passa per il punto del contatto.



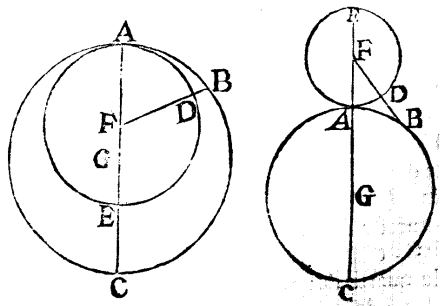
Si tocchino i circoli ABC, DBE nel loro conuesso in qualche punto B, e sia G il centro del circolo DBE, ed il punto F il centro del circolo ABC. Dico che tirata la retta FG, quella passarà per il contatto B.

Se non passa per il contatto B, seghi le circonferenze fuori del contatto, come in C ed E; dal contatto B à i centri F, & G [a] si tirino le rette BF, BG. Perche il punto F è centro del circolo ABC, le rette FC, FB [b] sono frà di loro vguali. Similmente perche il punto G è centro del circolo DBE, le rette GE, GB sono frà di loro vguali; dal che le rette FB, BG [c] sono vguali alle due FC, GE: mà nel triangolo FBG i due lati FB, BG [d] sono maggiori del terzo lato FG; le due rette dunque FC, GE sono maggiori della retta FG, la parte maggiore del tutto, [e] ch'è impossibile. Non dunque la retta, che passa per i centri sega le circonferenze fuori del contatto, mà passa per il contatto B, come fù proposto dimostrare.

a 1. postul.
b 15. defin. del 1.
c 2. assiom.
d 20. del 1.
e 9. assioma.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIII.

I circoli, ò si tocchino di dentro, ouero di fuori, non si possono toccare più ch'in vn punto.



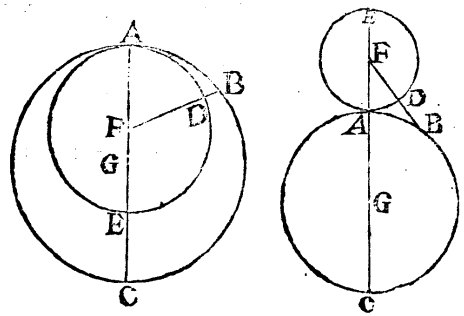
Si tocchino i circoli A B C, ADE, ò di dentro, ouero di fuori, in qualche punto A. Dico che non si toccano in altro punto, che nel punto A. Sia F il centro del circolo ADE, ed il punto G sia il centro del circolo A B C; per i centri F, & G [a] si faccia passare la retta FG, la quale continuata, [b] per le due prossime antecedenti propositioni, passarà per il contatto A. Nella circonferenza ABC si prenda qualunque punto B fuori del contatto A, dal quale al cen-

a 1. postul.
b 2. postul.

centro F si tiri la retta B F, che segarà la circonferenza ADE in qualche punto D. Perche i circoli ABC, A D E si toccano, perciò [c] non hanno vn medesimo centro; mà il punto F è suppoſto centro del circolo ADE, non sarà dunque il punto F centro del circolo ABC; dal che nel circolo ABC la retta F C, che passa per il centro G [d] sarà la massima di tutte l'altre rette tirate dal punto F alla circonferenza ABC; e la retta F A sarà la minima: per la qual cosa la retta F B è maggiore di F A; mà la retta FA, per la definitione del circolo, è vguale ad FD; sarà F D minore di FB; e perciò il punto B cade fuori del circolo A D E. E perche il punto B è preso ad arbitrio, ogni punto dunque preso nella circonferenza ABC, fuori del contatto A, caderà fuori del circolo ADE, per la qual cosa il circolo ADE non tocca il circolo in altro punto, che nel punto A, come fù proposto dimostrare.

c 6. del 3.

d 7. & 8. del 3.



THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIV.

Nel circolo, le vguali rette linee distano vgualmente dal centro, e quelle che sono vgualmente distanti dal centro sono frà di loro vguali.

Nel circolo ABCD, il dicui centro E, siano tirate l'vguali rette AB, CD. Dico prima, che l'vguali rette AB, CD, sono vgualmente distanti dal centro E. Dal centro E si tirino le rette EG, EF [a] ad angoli retti cõ le rette DC, AB, le quali diuideranno le rette AB, CD, [b] in due parti vguali in F, & G; dal che A F sarà vguale alla retta D G; si tirino [c] le rette E A, E D. Essendo gli angoli in F, & G retti, il quadrato del lato A E [d] sarà vguale à i quadrati de' due lati A F, F E; ed il quadrato di ED sarà vguale à i quadrati de'i due lati DG, GE: mà le rette EA, ED, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali; saranno i quadrati de'i due AF, FE, vguali à i quadrati de'i due lati DG, G E; se ne leuino i quadrati dell'vguali AF, DG, resta il quadrato di FE [e] vguale al quadrato di EG; e la perpendicolare EF, sarà vguale alla perpendicolare EG; e, per la quarta definitione di questo, le rette AB, C D, sono vgualmente distanti dal centro E, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

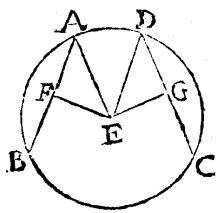
a 12. del 1.

b 3. del 3.

c 1. postul.

d 47. del 1.

e 3. assiom.



Di nuouo siano le rette A B, C D vgualmente distanti dal centro E, cioè sia E F vguale ad EG. Dico che AB è vguale alla retta D C. S'intenda

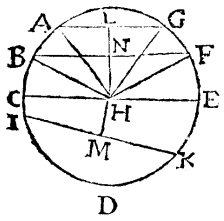
tenda fatta l'istessa costruttione, e si mostri, come prima, che i quadrati de'i due lati AF, FE sono vguali à i quadrati de'i due lati DG, GE; se ne leuino i quadrati dell'vguali FE, E G, resta il quadrato di FA [f] vguale quadrato di DG, e la retta FA, vguale alla retta D G; dalche il doppio di AF cioè AB, sarà vguale al doppio di DG cioè DC, ch'era da dimostrarsi.

f 3. assioma.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XV.

Delle rette tirate nel circolo, la massima è il diametro; e delle altre, quella, ch'è vicina al centro, è maggiore d'ogn'altra più lontana.

Sia il circolo A B C D, il dicui centro H, & il diametro C E. Siano tirate in esso quante si voglia rette, come IK, & A G, cioè I K più vicina al centro, ed A G più lontana. Dico che il diametro C E è la massima, e che I K è maggiore di AG.



Dal centro H [a] si facciano cadere le rette HM, HL, perpendicolari alle rette I K, A G. Perche IK è più vicina al centro H, sarà MH [b] minore di HL. Si faccia HN [c] vguale ad HM, e per il punto N [d] si faccia passare BF ad angoli retti con HL. Perche le rette HM, H N sono frà di loro vguali, sarà IK [e] vguale alla retta B F. Dal centro H [f] si tirino le rette HF, HB, H G, H A. Per la definitione del circolo le rette HE, HC, cioè la retta EC, è vguale alle due HF, H B; mà nel triangolo HFB, i due lati HF, HB [g] sono maggiori del terzo lato BF, sarà la retta C E maggiore della retta B F; mà fù mostrata BF vguale ad IK, sarà il diametro C E maggiore della retta I K per la qual cosa la retta CE, che passa per il centro H è la massima. Si considerino i due triangoli BHF, AHG; perche i due lati BH, HF, per la definitione del circolo, sono vguali à i due lati AH, HG, e l'angolo BHF è maggiore dell'angolo A H G, stante che per costruttione lo contiene; sarà la base B F, [h] maggiore della base A G; mà la retta B F è vguale alla retta I K; sarà la retta IK maggiore di AG, ch'era da dimostrarsi.

a 12. del 1.

b 14. del 3.

c 3. del 1.

d 11. del 1.

e 14. del 3.

f 1. postul.

g 20. del 1.

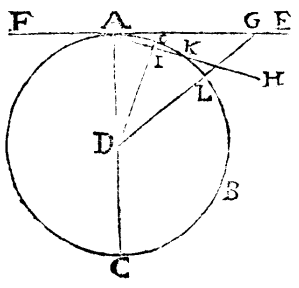
h 24. del 1.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVI.

Se nell'estremità del diametro di qualunque circolo sia eleuata vna retta linea, che faccia col diametro angoli retti, quella cade fuori del circolo; e nel luogo, ch'è frà quella retta linea, e la circonferenza del circolo, non è possibile che vi cada alcuna retta linea.

Nel circolo ABC, il dicui centro D, ed il diametro AC, nell'estremo A sia posta la retta FAE ad angoli retti col diametro AC. Dico prima, che la retta FE cade fuori del circolo ABC.

Nella retta FE, si prenda fuori del punto A qualunque punto G; dal centro D al punto G [a] si tiri la retta DG. Nel triangolo DAG, i due angoli DAG, DGA [b] sono minori di due angoli retti; mà l'angolo DAG è retto, sarà l'angolo D G A minore dell'angolo DAG, ed il lato DA [c] sarà minore del lato DG. E perche la retta DA, per la definitione del circolo, è vguale alla retta DL, sarà DL minore di D G: dalche il punto G cade fuori del circolo A B C. Hor essendo il punto G preso ad arbitrio, tutti i punti dunque immaginati in FE cadono fuori del circolo A B C; per la qual cosa la retta FE, che passa per quegl'infiniti punti, cade fuori del circolo A B C, ch' era da dimostrarsi nel primo luogo.



a 1.post.
b 17.del 1.
c 19. del 1.

Di nuouo dico, che nel luogo contenuto frà la retta EA, e l'arco L K A, non può cadere alcuna retta linea. Cada, s'è possibile, nel luogo contenuto dalla retta EA, e l'arco LOA, qualunque retta linea HA, la quale farà qualche angolo con la retta EA; e perche l'angolo EAD, per ipotesi, è retto, sarà l'angolo HAD minore del retto. Nel punto D si costituisca l'angolo IDA [d] vguale all'angolo IAD: i due angoli IDA, IAD, sono minori di due angoli retti, e per lo Scolio alla 31. propositione, le rette AI, DI, concorrono in qualche punto I. In oltre, perche l'angolo IDA, per costruttione, è vguale all'angolo HAE; vgualmente se gli aggiunga l'angolo IAD; i due angoli IDA, IAD [e] sono vguali à tutto l'angolo EAD; mà l'angolo EAD, per ipotesi è retto; i due angoli dunque IDA, IAD sono vguali ad vn angolo retto; ed il restante angolo DIA [f] sarà retto: dal che l'angolo DAI [g] è minore dell'angolo DIA, ed il lato ID [h] è minore del lato AD; mà il lato AD, per la definitione del circolo, è vguale alla retta D O, sarà D I minore della retta D O; dalche il punto I cade dentro del circolo, e la retta A H, che passa per il punto I, passa dentro del circolo. Per la qual cosa la retta AH non cade nel luogo contenuto frà la retta E A, e l'arco K O A; come fù proposto dimostrare.

d 23. del 1.
e 2.assiom.
f 32. del 1.
g 17. del 1.
h 19. del 1.

COROLLARIO.

Perche la retta FE, facendo angoli retti col diametro AC, cade fuori del circolo, per la seconda definitione di questo, la retta FE tocca il circolo nel punto A.

Se dunque per qualche punto A preso nella circonferenza d'vn circolo A B C si voglia far passare vna retta, che tocchi il circolo, dal centro D al punto A [k] si tiri il semidiametro DA, e nell'estremo A si ponga la retta FAE, [l] che faccia angoli retti con AD; la retta FE toccarà il circolo nel punto A. Dalche sarà manifesto il modo di far passare vna retta, che tocchi il circolo in qualunque punto preso nella circonferenza.

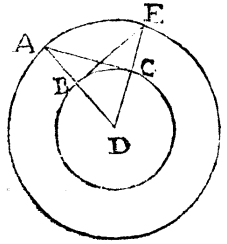
K 1.post:
l 11. del 1.

PROBLE-

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XVII.

Da vn dato punto fuori d'vn circolo, tirare vna retta linea, che tocchi il dato circolo.

Sia il dato circolo BC, ed il punto fuori A, e si voglia dal punto A tirare vna retta, che tocchi il dato circolo BC. Si troui il centro del circolo BC, [a] che sia D, si tiri [b] la retta DA, e fatto centro in D, coll'interuallo D A, [c] si descriua il circolo AE; nel punto B, sopra la retta AD, [d] si erigga la perpendicolare B E, la quale continuata concorra con la circonferenza AE in qualche punto E; si tiri la retta DE, la quale segarà l'arco BC in qualche punto C, si tiri la retta AC. Dico che la retta AC tocca il circolo BC nel punto C.



a 1.del 3.
b 1.post.
c 3.post.
d 11. del 1.

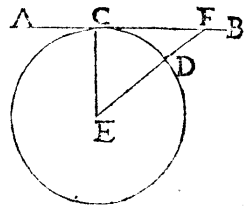
Per la definitione del circolo, la retta DA è vguale alla retta D E, e la retta DB è vguale alla retta D C; dalche i due lati A D, D C, del triangolo ADC, [e] sono vguali à i due lati ED, DB, del triangolo EDB, l'angolo D è cõmune, perciò la base AC [f] sarà vguale alla base EB, e l'angolo DCA vguale all'angolo DBE: ma l'angolo DBE è retto, sarà l'angolo DCA retto, e per l'antecedente Corollario, la retta AC tocca il circolo nel punto C, ch' era da farsi, e dimostrarsi.

e 2. assioma.
f 4. del 1.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Se vna retta linea tocca vn circolo, e dal centro sia tirata vna retta al contatto, quella sarà perpendicolare alla tangente.

Tocchi la retta A B il circolo C D in qualche punto C, e dal centro E al contatto C sia tirata la retta E C. Dico che la retta E C, è perpendicolare alla tangente AB. Se la retta E C non è perpendicolare alla tangente AB, dal centro E [a] si faccia cadere la retta EF perpendicolare alla retta AB. Perche i due angoli ECF, EFC [b] sono minori di due angoli retti, e l'angolo EFC, per costruttione è retto, sarà l'angolo ECF minore dell'angolo retto EFC; dalche il lato EC [c] sarà maggiore di EF; ma per la definitione del circolo, la retta EC è vguale ad ED, sarà ED maggiore di EF, la parte maggiore del tutto, [d] ch'è impossibile. Non dunque la retta EF è perpendicolare ad AB; ma la retta EC sarà perpendicolare alla tangente AB, ch'era da dimostrarsi.

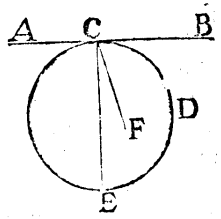


a 12. del 1.
b 17. del 1.
c 19. del 1.
d 9.assioma.

THEO-

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se vna retta linea tocca il circolo, e nel contatto si erigge vna retta perpendicolare alla tangente, quella passa per il centro del circolo.

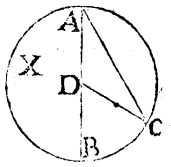


Tocchi la retta AB il circolo CDE in qualche punto C, e nel punto C si ponga la retta linea CE ad angoli retti con AB, e continuata concorra con la circonferenza in qualche punto E. Dico che il centro del circolo CDE è nella retta CE, se il centro del circolo non è nella retta CE, sarà necessariamente fuori della retta CE; sia dunque nel punto F, dal punto F al contatto C [a] si tiri la retta FC, sarà l'angolo FCB [b] retto; ma l'angolo ECB è supposto retto, l'angolo dunque FCB sarà vguale all'angolo ECB, la parte vguale al tutto [c] ch'è impossibile; non dunque il centro del circolo è fuori della retta EC, mà sarà nella retta EC, ch'era da dimostrarsi.

a 1. postul.
b 18. del 3.
c 9. assioma.

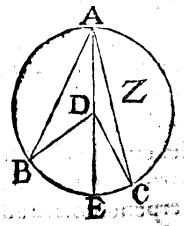
THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Nel circolo, l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza, quando hanno vn medesimo arco per base.



Nel circolo ABC siano gli angoli BDC al centro e BAC alla circonferenza, ed habbiano il medesimo arco BC per base. Dico che l'angolo BDC al centro è il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza. Cada nel primo luogo il centro D in vna delle rette che contiene l'angolo BAC alla circonferenza, come nella retta AB, della figura X. Perche le rette DA DC, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali, sarà l'angolo DAC [a] vguale all'angolo DCA. Nel triangolo DAC continuato il lato AD verso B, l'angolo BDC esterno [b] sarà vguale à i due angoli DAC, DCA interni, ed opposti; mà li due angoli DAC, DCA sono frà di loro vguali, sarà l'angolo B D C al centro il doppio di vno, cioè il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza.

a 5. del 1.
b 32. del 1.



Di nuouo cada il centro D, frà le due BA, AC, che contengono l'angolo alla circonferenza, come nella figura Z, si tiri [c] la retta AD, e si continui fino alla circonferenza in E. Haueremo l'angolo B D E al centro, e l'angolo BAE alla circonferenza, che hanno il medesimo arco BE per base, ed il centro D cade in vna delle rette, che contiene l'angolo alla circonferenza, per quel che s'è dimostrato, sarà l'angolo EDB al centro, il doppio dell'angolo EAB alla circonferenza. Per

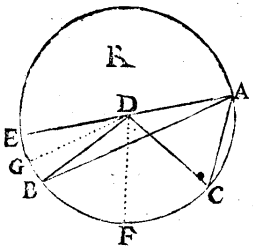
c 1. postul.

l'istessa ragione l'angolo EDC al centro è il doppio dell'angolo E A C alla circonferenza, dalche tutto l'angolo BDC al centro è il doppio di tutto l'angolo BAC alla circonferenza.

Finalmente sia l'angolo BDC al centro, e l'angolo BAC alla circonferenza, che habbiano il medesimo arco BC per base, e non cada il centro D in nissuna delle rette BA, AC, ne meno nello spatio interposto frà quelle, ma cada fuori come nella figura R. Dico similmente, che l'angolo BDC al centro è il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza.

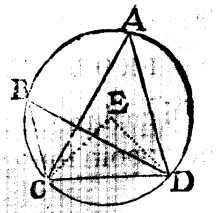
Si tiri la retta AD, e si prolunghi [d] fino che concorre con la circonferenza in qualche punto E. Haueremo l'angolo EDC al centro, e l'angolo EAC alla circonferenza, che hanno il medesimo arco EBC per base, ed il centro D cade nella retta ADE, per quel che si disse nella prima parte, sarà l'angolo EDC il doppio dell'angolo EAC. Similmente si consideri l'angolo EDB al centro, e l'angolo EAB alla circonferenza, che hanno il medesimo arco EB per base, ed il centro D cade nella retta A E, per la prima parte sarà l'angolo EDB al centro, il doppio dell'angolo EAB alla circonferenza. Si diuida l'angolo BDC in due parti vguali con la retta DF, e si diuida l'angolo EDB in due parti vguali con la retta DG; sarà l'angolo BDC il doppio dell'angolo BDF, e l'angolo EDB il doppio dell'angolo G D B; dalche tutto l'angolo E D C sarà il doppio dell'angolo GDF: ma l'angolo EDC è dimostrato il doppio dell'angolo E A C, sarà l'angolo GDF vguale all'angolo EAC. In oltre perche l'angolo EDB è il doppio dell'angolo GDB, ed il medesimo angolo EDB è dimostrato il doppio dell'angolo EAB, sarà l'angolo G D B vguale all'angolo E A B. Hor essendo l'angolo EAC, per quel che s'è dimostrato, vguale all'angolo GDF, e la parte EAB è vguale alla parte G D B, sarà il restante angolo BAC vguale al restante angolo BDF: ma l'angolo BDC è il doppio dell'angolo BDF, sarà il medesimo angolo BDC il doppio dell'angolo BAC, ch'era da dimostrarsi.

d 2. post.



THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Gli angoli nella medesima portione del circolo sono frà di loro vguali.

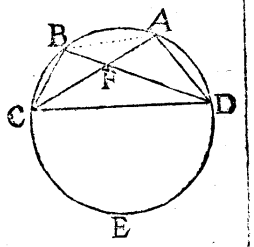


Nel circolo ABCD, il di cui centro E, siano nella medesima portione C B A D, gli angoli CBD, CAD. Dico che sono frà di loro vguali. Supposto prima, che C B A D sia portione maggiore, si tirino [a] le rette E C, E D. L'angolo CED al centro, per l'antecedente propositione, sarà il doppio dell'angolo CAD alla circonferenza, e sarà ancora il doppio dell'angolo CBD,

a 1. post.

alla circonferenza, e perciò gli angoli C A D, C B D [b] nella medesima maggior portione sono frà di loro vguali, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

b 7.assiom.



Di nuouo sia la portione CBAD, ò mezzo circolo, ouero portione minore. Dico similmente che gli angoli CBD, CAD, nella medesima portione, sono frà di loro vguali. Si tiri la retta AB, sarà ADECB portione maggiore, e per quel che s'è dimostrato, gli angoli ADB, ACB, nella medesima portione maggiore ADECB, sono frà di loro vguali. Si considerino i due triangoli FBC, FAD, de' quali l'angolo ADF è vguale all'angolo FCB, per quelche s'è dimostrato; gli angoli AFD, BFC al vertice [c] sono frà di loro vguali, saranno i due angoli ADF, AFD, del triangolo A F D, vguali à i due angoli BCF, BFC, del triangolo BCF, dal che il restante angolo FAD [d] sarà vguale al rimanente angolo FBC, cioè l'angolo CAD sarà vguale all'angolo CBD, ch'era da dimostrarsi.

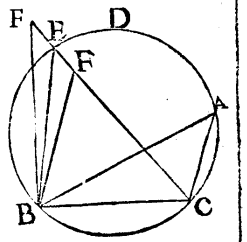
c 15. del 1.

d 32. del 1.

S C O L I O.

La conuersa di questa propositione si può fare facilmente nel seguente modo.

Di due angoli vguali sottesi dalla medesima retta linea, e costituiti dalla medesima parte, vno sia nella portione d'vn circolo, l'altro sarà nella medesima portione.



Siano gli angoli vguali BAC, BFC sottesi dalla medesima retta BC, e collocati dalla medesima parte FA, e sia l'angolo BAC nella portione del circolo BDC. Dico che l'angolo BFC sarà nella medesima portione BDC. Se nõ è nella circonferenza BDA, ò caderà dentro, ò fuori del circolo; se cade dentro, si continui CF [a] fino ad E, e si congiunga BE [b]. Gli angoli B E C, BAC, nella medesima portione, sono per l'antecedente propositione, frà di loro vguali: ma l'angolo BFC è posto vguale all'angolo BAC, sarà l'angolo BFC [c] vguale all'angolo B E C; l'esterno vguale all'angolo interno, ed opposto, ch'è contro alla decimaseста propositione; non dunque l'angolo BFC cade dentro, ne fuori della circonferenza BDC, ma è nella portione BDC, ch'era da dimostrarsi.

a 2.post.

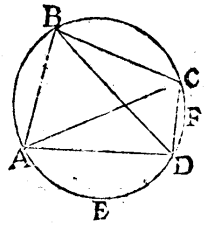
b 1.post.

c 1. assiom.

PROBLEMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Di qualunque quadrilatero descritto nel circolo, gli angoli opposti sono vguali à due angoli retti.

Nel circolo ABCD sia descritto qualunque quadrilatero A B C D. Dico che gli angoli opposti ABC, ADC sono vguali à due angoli retti; e che i due angoli opposti DCB, DAB sono vguali à due angoli retti. Si tirino le diagonali [a] AC, BD. La retta AD diuide il circolo in due portioni ABCD, AED; gli angoli ABD, ACD, [b] sono nella medesima portione ABCD, perciò sono frà di loro vguali. Similmente la retta DC sega il circolo in due portioni, cioè DEABC, & DFC; gli angoli D A C, D B C sono nella medesima portione DEABC, e perciò sono frà di loro vguali: all'angolo DCA s'aggiunga l'angolo DAC, ed all'angolo DBA s'aggiunga l'angolo DBC, ne viene tutto l'angolo ABC [c] vguale à i due angoli D A C, D C A insieme giunti: all'vna, e l'altra parte di questa vgualità s'aggiũga l'angolo ADC, i due angoli ABC, ADC, insieme giũti, saranno vguali à i trè angoli del triangolo ADC: ma i trè angoli del triãgolo ADC [d] sono vguali à due angoli retti, li due angoli dunque ABC, ADC sono vguali à due angoli retti. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i due angoli BAD, BCD sono vguali à due angoli retti, come fù proposto dimostrare.



a 1. postul.

b 21. del 3.

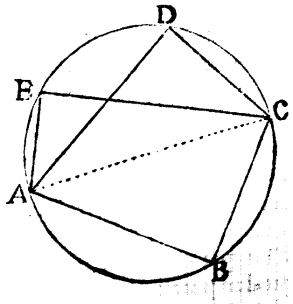
c 2. assiom.

d 32. del. 1.

S C O L I O I.

La conuersa dell'antecedente propos. facilmente si dimostra nel seguente modo.

Se due angoli opposti d'vn quadrilatero sono vguali à due angoli retti; la circonferenza di quel circolo, che passa per tre angoli di quel quadrilatero, passa ancora per il quarto angolo. Dal che intorno à quel quadrilatero si può descriuere vn circolo.



Sia il quadrilatero A B C D, del quale i due angoli opposti ADC, ABC, siano vguali à due angoli retti; e per li trè angoli A, B, C, passi la circonferenza del circolo A B C. Dico che passarà ancora per l'angolo D. Nel arco AEC si prenda qualunque punto E, e si tirino le rette E A, EC. Il quadrilatero AECB sarà descritto nel circolo, e per l'antecedente propositione gli angoli A E C, A B C sono vguali à due angoli retti: ma gli angoli ADC, ABC, per ipotesi sono vguali à due angoli retti, li due angoli dunque A E C, A B C [a] sono vguali à i due angoli ADC, ABC; leuatone il commune angolo ABC, resta l'angolo ADC [b] vgua-

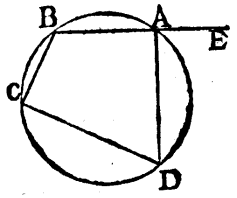
a 10.assiom.

b 3.assiom.

vguale all'angolo A E C: si tiri la retta AC. Perche gli angoli AEC, ADC sono fra di loro vguali, e sono sotteſi dalla medeſima retta AC, e l'angolo AEC è nella portione AEC, per lo Scolio alla propoſitione vigeſima prima, ſarà l'angolo ADC nella medeſima portione AEC, per la qual coſa l'arco AEC paſſa per il punto D, ch'era da dimoſtrarſi.

SCOLIO II. DEL CLAVIO.

L'angolo eſterno d'vn quadrilatero deſcritto nel circolo, è vguale all'angolo interno, ed oppoſto.



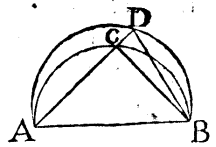
Nel circolo ABCD ſia deſcritto il quadrilatero BCDA, e ſia continuato il lato BA verſo E. Dico che l'angolo eſterno EAD è vguale all'angolo BCD interno, ed oppoſto.

Perche gli angoli DAB, DCB, per l'antecedente propoſitione, ſono vguali à due angoli retti, e gli angoli EAD, DAB [c] *ſono vguali à due angoli retti, li due angoli DAB, DCB* [a] *ſaranno vguali à i due angoli D A E, D A B; ſe ne leui il commune angolo DAB,* [b] *reſta l'angolo eſterno DAE vguale all'angolo DCB, interno, ed oppoſto, ch'era da dimoſtrarſi.*

c 13. del 1.
a 10. aſſiom.
b 3. aſſiom.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Sopra la medeſima retta linea non ſi poſſono coſtituire due portioni di circoli ſimili, ed ineguali.

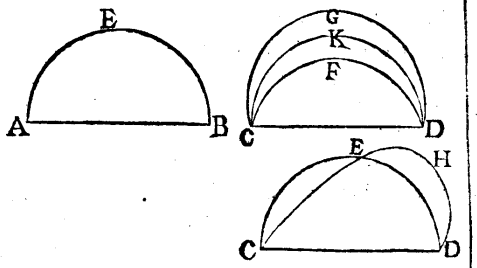


Siano coſtituite, s'è poſſibile, due portioni di circoli ACB, ADB, ſimili, ed ineguali, ſopra la medeſima retta AB, e dalla medeſima parte. Perche le portioni ADB, ACB ſono ineguali, l'vna caderà dentro dell'altra, altrimente due circoli ſi ſegarebbero in più di due punti, ch'è contro alla propoſitione decima di queſto. Cada dunque l'vna dentro l'altra, e dal punto A ſi tiri la retta AD, [a] che ſeghi le circonferenze in qualunque modo, come in C, & D, ſi tirino le rette CB, DB. Perche le portioni ADB, ACB ſono ſimili, gli angoli ACB, ADB, nelle portioni ACB, ADB, per la decima definitione di queſto, ſono frà di loro vguali. Nel triangolo D C B, continuato il lato DC verſo A, [b] l'angolo ACB eſterno è maggiore dell'angolo A D B interno, ed oppoſto; ma gli habbiamo dimoſtrati vguali, ſarebbe l'angolo ACB vguale, e maggiore dell'angolo ADB, [c] ch'è impoſſibile; non dunque due portioni di circoli ſimili, ed ineguali poſſono eſſere coſtituite ſopra d'vna medeſima retta linea, e dalla medeſima parte, ch'era da dimoſtrarſi.

a 1. poſtul.
b 16. del 1.
c 9. aſſiom.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Le ſimili portioni de'circoli ſopra rette linee vguali, ſono frà di loro vguali.



Sopra l'vguali rette A B, CD, ſiano coſtrutte le ſimili portioni de' circoli A E B, C K D. Dico che ſono frà di loro vguali.

Si concepiſca ſoprapoſta la portione A E B alla portione CKD in modo, che la retta AB cada ſopra la retta CD, cioè il punto A cada nel punto C, ed il punto B nel punto D. Perche le rette A B, C D ſono frà di loro vguali, per l'annotatione doppo la quarta propoſitione del primo, le rette AB, CD congruono inſieme. O la portione A E B cade fuori della portione CKD, come fà la notata CGD; ò cade dentro, come fà la notata CFD; ò inclina da vna parte, come la notata CHD; ouero congruono inſieme. Se cade dentro, ò fuori della portione CKD, ſaranno frà di loro ineguali; ed in tal caſo ſopra d'vna medeſima retta linea ſaranno coſtituite due portioni di circoli ſimili, ed ineguali, ch'è contro all'antecedente propoſitione. Non dunque cade dentro, come fà la portione CFD, ne cade fuori, come fà la portione CGD. Suppoſto dũque che inclini da vna parte, come fà la portione C H D: i due circoli CED, CHD, ſi ſegaranno inpiù di due punti, ch'è contro alla decima propoſitione di queſto; non dunque inclina da vna parte. Per la qual coſa la portione AEB congrue con la portione CKD; ma le coſe, che congruono inſieme, ſono frà di loro vguali; ſarà la portione AEB vguale alla portione CKD, ch'era da dimoſtrarſi.

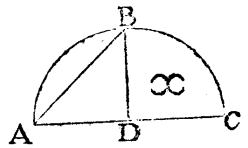
COROLLARIO.

Dall'antecedente propoſitione è manifeſto, che le ſimili portioni de'circoli poſte ſopra rette linee vguali, hanno gli archi vguali; poiche eſſendoſi dimoſtrato, che le portioni congruono inſieme, neceſſariamente gli archi, che ſono eſtremi delle portioni, congruono inſieme, e perciò ſono frà di loro vguali.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXV.

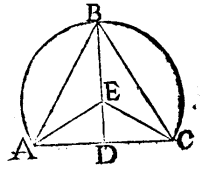
Data vna portione di circolo, deſcriuere il circolo, del quale quella è portione.

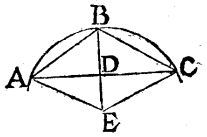
Sia data la portione ABC, alla quale s'habbia da ritrouare il centro per compire il circolo.



Si diuida la corda AC [a] in due parti vguali in D; nel punto D sopra la retta AC [b] si erigga la perpendicolare DB, concorrente con l'arco ABC in qualche punto B; si prolunghi, se bisogna, B D [c] verso E, per la prima propositione di questo, il centro del circolo sarà nella retta B E. Hor se la retta B D è vguale alla retta DA, le tre rette DA, DB, DC, [e] sono frà di loro vguali, ed il punto D sarà il centro del circolo ABC, come nella figura X.

Se BD è maggiore, ò minore di DA, si tiri [f] la retta BA, e nel punto A, sopra la retta B A, [g] si costituisca l'angolo B A E, vguale all'angolo A B D. Perche l'angolo BDA è retto, sarà l'angolo DBA [h] minore del retto, e li due angoli EBA, EAB saranno minori di due retti, e per lo Scolio alla trigesima prima propositione, continuata la retta BE, quella concorrerà con la retta A E continuata in qualche punto E. Dico che il punto E sarà il centro del circolo A B C: si tiri la retta E C. Perche gli angoli E B A, E A B, per costruttione sono frà di loro vguali, sarà la retta B E [K] vguale alla retta EA. Si considerino i triangoli E D A, EDC, de'quali il lato DA è vguale al lato DC, il lato DE è commune, saranno i due lati ED, DA vguali à i due ED, D C; gli angoli in D sono vguali, stante che sono retti, sarà la base EA [l] vguale alla base EC; ma la retta EA è dimostrata vguale alla retta E B, le trè rette dunque E A, E B, E C, [m] sono fra di loro vguali, ed il punto E [n] sarà il centro del circolo ABC, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

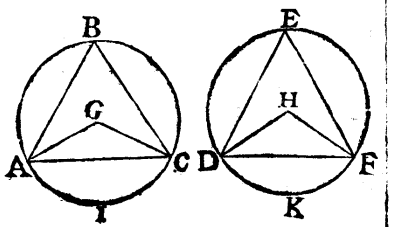




THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVI.

Ne i circoli vguali gl' angoli vguali, ò siano à i centri, ò alle circonferenze, sono opposti ad archi vguali.

Siano gli vguali circoli A B C, DEF, i di cui centri G, ed H, e siano gli angoli à i centri AGC, DHF frà di loro vguali; e gli angoli alle circonferenze ABC, DEF frà di loro vguali. Dico che gli archi opposti A I C, DKF à gl'angoli vguali sono frà di loro vguali.



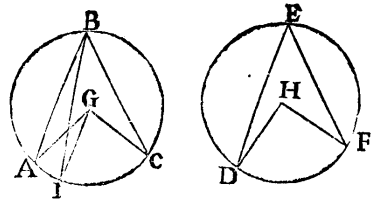
Perche i circoli sono frà di loro vguali i loro semidiametri [a] saranno frà di loro vguali; si che ne i triangoli GAC, HDF, i due lati AG, GC sono vguali alli due DH, HF; l'angolo G è supposto vguale all'angolo H, sarà la base AC [b] vguale alla base D F. In oltre, perche gli angoli

li AGC, DHF [c] sono dupli degl'angoli ABC, DEF, e gli angoli AGC, DHF sono frà di loro vguali, saranno gli angoli A B C, DEF [d] frà di loro vguali; dalche le portioni ABC, D E F [e] sono frà di loro simili; e perche sono poste sopra le rette linee vguali A C, DF, perciò sono [f] frà di loro vguali; dalli circoli vguali ABCI, D E F K se ne leuino le portioni vguali ABC, DEF, restano le portioni A I C, D K F [g] frà di loro vguali, e per il Corollario alla propositione vigesima quarta, gli archi AIC, DKF sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

c 20. del 3.
d 7. assiom.
e 10. defin. del 3.
f 24. del 3.
g 3. assiom.

COROLLARIO.

Da quì è manifesto, che se gli angoli al centro, ò alla circonferenza sono frà di loro ineguali, il maggiore sarà opposto al maggior arco.



Ne' i circoli vguali ABC, DEF, sia l'angolo al centro A G C maggiore dell'angolo al centro DHF, e l'angolo alla circonferenza ABC maggiore dell'angolo alla circonferenza DEF. Dico che l'arco A C è maggiore dell' arco D F. Nel punto G si faccia l'angolo C G I vguale all'angolo DHF. Perche l'angolo AGC è maggiore dell' angolo DHF, sarà l'angolo AGC maggiore dell'angolo IGC; dal che la retta G I sega l'angolo A G I, e sarà l'arco A C maggiore dell'arco I C. Hor essendo gli angoli IGC, DHF fra di loro vguali, per l'antecedente propositione, sarà l'arco IC vguale all'arco DF: ma l'arco AC è maggiore dell'arco IC, in conseguenza l'arco AC sarà maggiore dell'arco DF, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo. Si tiri la retta IB. Perche l'angolo IGC [a] è il doppio dell'angolo IBC, e l'angolo DHF è il doppio dell'angolo DEF; essendo gli angoli IGC, DHF fra di loro vguali, saranno gli angoli IBC, D E F fra di loro vguali: ma l'angolo ABC è posto maggiore dell' angolo D E F, sarà ancora maggiore dell'angolo IBC. Per la qual cosa l'arco AC, opposto all'angolo maggiore ABC, è maggiore dell'arco IC opposto all'angolo minore IBC: ma l'arco I C è vguale all' arco DF, sarà l'arco AC maggiore dell'arco DF, ch'era da dimostrarsi.

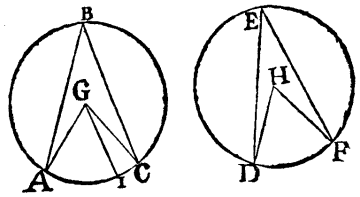
a 20. del 3.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVII.

Ne i circoli vguali, gli angoli, che sono opposti ad archi vguali, ò siano à i centri, ouero alle circonferenze, sono frà di loro vguali.

Siano gli vguali circoli ABC, D E F, i di cui centri G, ed H; e siano

gli archi AC, DF frà di loro vguali. Dico che gli angoli AGC, DHF à i centri, ſono frà di loro vguali; e parimente gli angoli ABC, DEF, alle circonferenze, ſono frà di loro vguali.

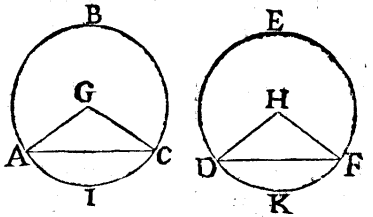


Se gli angoli AGC, DHF, à i centri, non ſono frà di loro vguali, vno de'i due ſarà maggiore: ſuppoſto che l'angolo AGC ſia maggiore dell'angolo DHF; ſi faccia l'angolo AGI [a] vguale all'angolo DHF; ſarà l'angolo AGC maggiore dell'angolo AGI, e la retta GI caderà frà li punti A, & C. In oltre perche ne'i circoli vguali ABC, DEF, gli angoli AGI, DHF, à i centri, ſono per coſtruttione vguali, per l'antecedente propoſitione, ſarà l'arco AI vguale all'arco DF; mà l'arco AC è ſuppoſto vguale all' medeſim'arco DF, ſarà l'arco AI vguale all'arco AC; la parte vguale al tutto, [b] ch'è impoſsibile: non dunque l'angolo AGC è maggiore dell'angolo DHF, e perciò ſono frà di loro vguali. E perche gli angoli AGC, DHF, à i centri [c] ſono dupli de' gli angoli ABC, DEF, alle circonferenze; eſſendo gli angoli AGC, DHF, à i centri frà di loro vguali, ſaranno gli angoli ABC, DEF, [d] alle circonferenze frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

a 23. del 1.
b 9. aſſiom.
c 20. del 3.
d 7. aſſiom.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVIII.

Ne i circoli vguali, l'vguali rette linee detraggono archi vguali, cioè il maggiore vguale al maggiore, ed il minore al minore.



Siano gli vguali circoli ABC, DEF, i di cui centri G, ed H, e ſiano le rette linee AC, DF frà di loro vguali. Dico che l'arco ABC è vguale all'arco DEF, e l'arco AIC, vguale all'arco DKF.

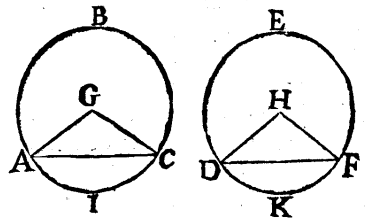
Perche i circoli ABC, DEF, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, i loro ſemidiametri [a] ſaranno frà di loro vguali; dal che i lati AG, GC, del triangolo GAC, ſono vguali à i due lati DH, HF del triangolo HDF, la baſe AC, per ipoteſi, è vguale alla baſe DF, ſarà l'angolo G [b] vguale all' angolo H. In oltre eſſendo i circoli ABC, DEF frà di loro vguali, e gli angoli AGC, DHF, à i centri ſono frà di loro vguali; ſarà l'arco AIC [c] vguale all'arco DKF: e perche i circoli ſono ſuppoſti vguali, le loro circonferenze ſaranno frà di loro vguali, dalle quali detrattone gli vguali archi AIC, DKF, reſta l'arco ABC [d] vguale all'arco DEF, ch'era da dimoſtrarſi.

a 1. definit. del 3.
b 8. del 1.
c 26. del 3.
d 3. aſſiom.

THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXIX.

Ne gli vguali circoli, l'vguali circonferenze ſono ſottese da vguali rette linee.



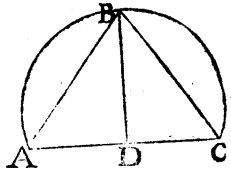
Siano gli vguali circoli ABC, DEF, i di cui centri G, ed H, e ſia l'arco AIC, vguale all'arco DKF, tirate le rette AC, DF. Dico che la retta AC è vguale alla retta DF. Da'i centri G, ed H, [a] ſi tirino le rette GA, GC, HD, HF. Perche i circoli, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, e gli archi AIC, DKF ſono ſuppoſti vguali, gli angoli AGC, DHF, [b] à i centri ſono frà di loro vguali. Similmente eſſendo i circoli ABC, DEF frà di loro vguali, i loro ſemidiametri [c] ſono frà di loro vguali. Dal che i due lati AG, GC, ſono vguali à i due DH, HF; l'angolo AGC è dimoſtrato vguale all'angolo DHF, ſarà la baſe AC [d] vguale alla baſe DF, ch'era da dimoſtrarſi.

a 1. poſt.
b 27. del 3.
c 1. defin. del 3.
d 4. del 1.

PROBLEMA IV. PROPOSITONE XXX.

Dato qualunque arco, diuiderlo in due parti vguali.

Sia dato l'arco ABC, da diuidere in due parti vguali. Si tiri [a] la retta AC, la quale ſi diuida [b] in due parti vguali in D, nel punto D ſi erigga la retta DB [c] perpendicolare alla retta AC, concorrerà coll'arco ABC in qualche punto B. Dico che l'arco AB è vguale all'arco BC.



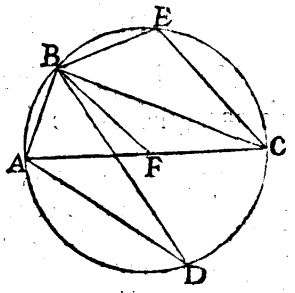
Si tirino le rette BA, BC; e ſi conſiderino i due triangoli BDC, BDA: de' quali il lato AD, per coſtruttione, è vguale al lato DC, il lato DB è commune, ſaranno i due lati BD, DA vguali à i due BD, DC; gli angoli in D ſono vguali, ſtante che ſono retti; ſarà la baſe BA [d] vguale alla baſe BC; mà le rette linee vguali ne gli vguali circoli detraggono archi vguali, [e] eſſendo la retta BA vguale alla retta BC, ſarà l'arco AB vguale all'arco BC: e così tutto l'arco ABC è diuiſo in due parti vguali nel punto B, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 1. poſtul.
b 10. del 1.
c 11. del 1.
d 4. del 1.
e 28. del 3.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXI.

In ogni Circolo, l'angolo nel mezzo circolo è retto; l'angolo nella portione maggiore è minore del retto: l'angolo nella portione minore è maggiore del retto.

Nel



Nel circolo ABCD, il dicui centro F, ed il diametro A C; sia prima l'angolo A B C nel mezzo circolo ABEC. Dico che l'angolo A B C è retto. Si tiri [a] la retta F B. Per la definitione del circolo, le rette FA, F B, C F sono frà di loro vguali. Nel triangolo isoscele FAB gli angoli FAB, F B A [b] sono frà di loro vguali, e similmente nel triangolo isoscele FBC, gli angoli FBC, FCB sono frà di loro vguali; se all'angolo F B A s'aggiunge l'angolo F B C, ed all'angolo F A B s'aggiunge l'angolo FCB; ne viene tutto l'angolo ABC [c] vguale à i due angoli BAC, BCA, dal che i tre angoli del triangolo ABC sono il doppio dell'angolo ABC: mà i tre angoli d'vn triangolo sono [d] vguali à due angoli retti; sarà dunque l'angolo A B C retto, e perciò l'angolo nel mezzo circolo è retto, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 1. post.
b 5. del 1.
c 2. assiom.
d 32. del 1.

Di nuouo sia l'angolo ADB nella portione maggiore BECDA. Dico che l'angolo ADB è minore del retto. Perche l'angolo ABC è dimostrato retto, sarà l'angolo BCA [e] minore del retto; mà gli angoli A D B, ACB, nella medesima portione A D C B, [f] sono frà di loro vguali, sarà l'angolo ADB minore del retto, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

e 17. del 1.
f 21. del 3.

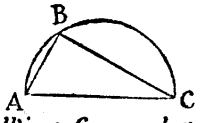
Finalmente sia la portione minore B E C; e nell'arco B E C sia preso qualunque punto E, si tirino le rette B E, C E. Dico che l'angolo BEC nella portione minore è maggiore del retto. Perche l'angolo ABC è dimostrato retto, sarà l'angolo BAC [g] minore d'vn angolo retto. Nel quadrilatero ABEC, i due angoli opposti BEC, BAC, [h] sono vguali à due angoli retti; mà l'angolo BAC è dimostrato minore del retto, sarà l'angolo BEC maggiore del retto, ch'era da dimostrarsi.

g 17. del 1.
h 22. del 3.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Qui facilmente si può dimostrare la conuersa nel seguente modo.

La portione intorno all'angolo retto è mezzo circolo; intorno all'angolo minore del retto è portione maggiore; ed intorno all'angolo maggiore del retto è portione minore.



Sia nel primo luogo l'angolo ABC retto. Dico che la portione ABC è mezzo circolo; se la portione ABC non è mezzo circolo, ò sarà portione maggiore, ò portione minore; se sarà portione maggiore, per l'antecedente propositione l'angolo ABC sarà minore del retto, ch'è contro all'ipotesi; non dunque è portione maggiore. Se sarà portione minore, l'angolo A B C sarà maggiore del retto, ch'è contro all'ipotesi; non dunque è portione minore, e perciò sarà mezzo circolo.

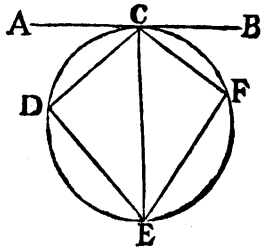
Sia nel secondo luogo l'angolo ABC minore del retto. Dico che la portione

ABC è portione maggiore. Se non è portione maggiore, ò sarà mezzo circolo, ouero portione minore. Supposto prima, che sia mezzo circolo: l'angolo ABC sarà retto, ch'è contro all'ipotesi; s'è portione minore, l'angolo ABC sarà ottuso, ch'è contro all'ipotesi; non dunqu'è portione minore, ne mezzo circolo, e perciò è portione maggiore.

Sia finalmente l'angolo ABC ottuso. Dico, che la portione ABC è portione minore; se non è portione minore, ò è mezzo circolo, ouero portione maggiore: s'è mezzo circolo, l'angolo ABC è retto, ch'è contro all'ipotesi; s'è portione maggiore, l'angolo ABC sarà acuto, ch'è contro all'ipotesi: non dunque è mezzo circolo, ne portione maggiore, mà sarà portione minore, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXII.

Se vna retta linea tocca qualche circolo, e dal contatto sia tirata vna retta linea, che lo seghi; gli angoli contenuti dalla tangente, e dalla segante, sono vguali à gli angoli costituiti nelle alterne portioni.



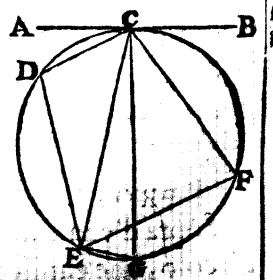
Tocchi la retta AB il circolo C D E F, in qualche punto C, e dal contatto C sia tirata la retta C E, che seghi il circolo. Dico, che l'angolo ACE, contenuto dalla tangente AB, e dalla segante C E, è vguale all'angolo nell'alterna portione CFE; e l'angolo BCE è vguale all'angolo nell'alterna portione EDC.

Supposto prima, che la retta CE passi per il centro del circolo, quella [a] farà angoli retti con la tangente A B; mà gli angoli ne'i mezzi circoli C F E, C D E [b] sono retti; sarà l'angolo ACE vguale all'angolo nell'alterna portione C F E; e l'angolo BCE sarà vguale all'angolo nell'alterna portione EDC.

a 19. del 3.
b 31. del 3.

Se la retta C E non passa per il centro del circolo, nel punto C sopra la retta AB, [c] s'erigga la perpendicolare CG; sarà il centro del circolo nella retta C G, dal che le portioni CDG, CFG sono mezzi circoli; si tiri la retta EG; sarà l'angolo CEG [d] retto, e gli altri due EGC, ECG, insieme giunti, [e] saranno vguali ad vn angolo retto, cioè saranno vguali all'angolo retto ACG: se ne leui il commune angolo ECG, resta l'angolo ACE [f] vguale all'angolo CGE; mà l'angolo CGE [g] è vguale all'angolo C F E, stante che sono nella medesima portione CFGE; l'angolo dunque AC E, contenuto dalla tangente A C, e dalla segante CE, è vguale all'angolo nell'alterna portione CFE.

c 11. del 1.
d 31. del 3.
e 32. del 1.
f 3. assioma.
g 21. del 3.



Nell'arco CDE si prenda qualunque punto D, e si tirino le rette DC, D E; si consideri il quadrilatero EFCD, descritto nel circolo, del

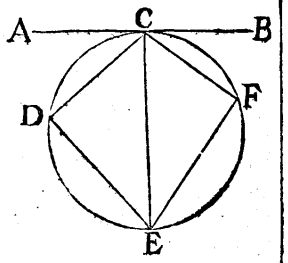
quale gli angoli oppoſti EDC, EFC [h] ſono vguali à due angoli retti; mà i due angoli E C A, E C B ſono vguali à due angoli retti; li due angoli dunque EDC, EFC ſono vguali à i due angoli ECA, ECB; mà l'angolo ECA è dimoſtrato vguale all'angolo E F C; ſarà l'angolo E C B, contenuto dalla ſegante E C, e dalla tangente C B, vguale all'angolo EDC nell'alterna portione CDE, ch'era da dimoſtrarſi.

h 22. del 3.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Segue la conuerſa dell'antecedente propoſitione.

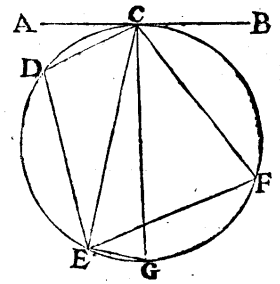
Se vna retta linea paſſa per l'eſtremità d'vn'altra retta, che ſega vn circolo, e gli angoli, che fà con la ſegante, ſiano vguali à gli angoli nelle alterne portioni; quella retta linea tocca il circolo.



Sia il circolo D C F, ſegato dalla retta C E, e per l'eſtremo C paſſi la retta AB, in modo, che l'angolo ACE ſia vguale all'angolo nell'alterna portione CFE; ò l'angolo ECB ſia vguale all'angolo nell'alterna portione EDC. Dico che la retta AB tocca il circolo nel punto C.

Suppoſto prima, che la retta C E paſſi per il centro del circolo; ſarà l'angolo CFE [a] retto; mà l'angolo CFE è poſto vguale all'angolo ACE; l'angolo dunque A C E ſarà retto; e per il Corollario alla 16. propoſitione di queſto, la retta AB tocca il circolo nel punto C.

a 31. del 3.



Non paſſi la retta CE per il centro del circolo; ſi troui il centro del circolo, [b] e dal punto C, per il trouato centro ſi faccia paſſare la retta C G, e ſi congiunga EG: ſarà l'angolo C F E [c] vguale all'angolo CGE; dal che l'angolo CGE ſarà vguale all'angolo A C E. In oltre, perche la retta C G è diametro del circolo, l'angolo CEG [d] ſarà retto, e li due ECG, EGC inſieme, [e] ſaranno vguali ad vn angolo retto. Hor perche l'angolo A C E è vguale all'angolo C G E; all'vno, ed all'altro s'aggiunga l'angolo E C G; tutto l'angolo A C G [f] ſarà vguale à i due angoli ECG, EGC: mà queſti due angoli furono moſtrati vguali ad vn retto; ſarà l'angolo ACG retto, e per il citato Corollario, la retta AB tocca il circolo nel punto C. Il medeſimo ſi prouarà ſe l'angolo E C B è vguale all'angolo EDC: il che era da dimoſtrarſi.

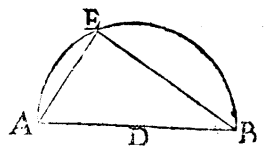
b 1. del 3.
c 21. del 3.
d 31. del 3.
e 32. del 1.
f 2. aſſioma.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXXIII.

Sopra d'vna data retta linea deſcriuere vna portione di circolo, che capiſca vn angolo vguale ad vn dato angolo.

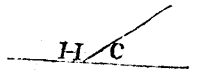
Sia

Sia data la retta linea A B, ed il dato angolo ſia C; ſi vuole ſopra la retta A B deſcriuere vna portione di circolo, che capiſca vn angolo vguale al dato angolo C.

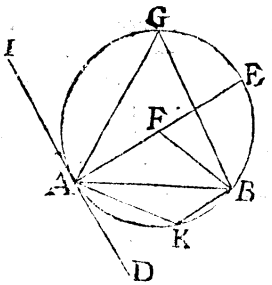


Se l'angolo dato ſarà retto; ſi diuida la retta A B [a] in due parti vguali in D, e fatto centro in D, coll'interuallo DA, ouero DB, [b] ſi deſcriua il mezzo circolo A E B. Perche l'angolo nel mezzo circolo [c] è retto, ſarà A E B la portione, che ſi cerca.

a 10. del 1.
b 3. poſt.
c 31. del 3.



Se l'angolo C ſarà acuto; nel punto A, ſopra la retta A B, [d] ſi coſtituiſca l'angolo BAD vguale all'angolo C; e nel punto A, ſi erigga la retta AE, [e] perpendicolare ad AD; ſarà l'angolo EAD retto; mà l'angolo B A D è ſuppoſto acuto, il reſtante angolo B A E ſarà acuto. Nel punto B, ſopra la retta AB, [f] ſi coſtituiſca l'angolo FBA, vguale all'angolo FAB; i due angoli FAB, FBA ſaranno minori di due retti; e per lo Scolio alla 31. propoſitione del primo, continuata la retta BF concorrerà con la retta A E in qualche punto F: e perche gli angoli FAB, F B A ſono frà di loro vguali, ſarà F A [g] vguale ad F B; ſi che, fatto centro in F, e coll'interuallo FA, ouero FB, [h] ſi deſcriua il circolo ABG, la circonferenza di quello paſſarà per il punto B. Dico che la portione BGA è quella che ſi cerca.



d 23. del 1.
e 11. del 1.
f 23. del 1.
g 6. del 1.
h 3. poſt.

Perche la retta AD fà angolo retto col diametro A E, per il Corollario alla 16. propoſitione di queſto, tocca il circolo ABG nel punto A; la retta AB lo ſega, perciò l'angolo DAB, [K] contenuto dalla tangente DA, e dalla ſegante AB, è vguale all'angolo nell'alterna portione B G A; mà l'angolo DAB, per coſtruttione è vguale all'angolo C, ſarà l'angolo nella portione B G A [l] vguale all'angolo C. Per la qual coſa s'è deſcritta la portione BGA ſopra la data retta AB, la quale contiene vn angolo vguale all'angolo dato C, ch'era da farſi nel primo luogo.

K 32. del 3.
l 1. aſſioma.

Finalmente ſia il dato angolo ottuſo, come il notato H. Sopra la retta AB, nel punto A, [m] ſi coſtituiſca l'angolo B A I vguale all'angolo H; ſopra la retta AI, nel punto I, [n] s'erigga la perpendicolare AE; ſarà l'angolo EAD retto, e perciò l'angolo EAB [o] ſarà acuto. Nel punto B, ſopra la retta AB, [p] ſi faccia l'angolo FBA vguale all'angolo FAB; i due angoli FAB, FBA, ſono minori di due retti, e le rette AF, BF concorrono in qualche punto F; e perche gli angoli FAB, FBA ſono frà di loro vguali, ſarà FA [q] vguale ad FB; ſi che, fatto centro in F, coll'interuallo FA, ouero FB, ſi deſcriua [r] il circolo ABG, quello paſſarà per il punto B. Dico che la portione AKB ſarà quella, che ſi cerca.

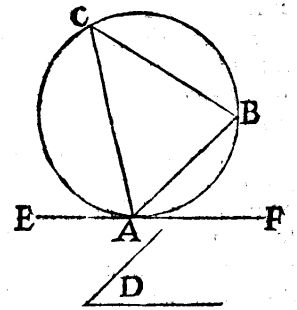
m 23. del 1.
n 11. del 1.
o 17. del 1.
p 23. del 1.
q 6. del 1.
r 3. poſtul.

Perche l'angolo IAF è retto, per il Corollario alla 16. propoſitione di queſto, la retta IA tocca il circolo nel punto A, la retta AB lo ſega;

f 32.del 3. t 1. assioma. sarà l'angolo I A B f vguale all'angolo nell'alterna portione A K B; mà l'angolo IAB è fatto vguale all'angolo H, sarà l'angolo H t vguale all'angolo AKB: dalche la portione A K B è quella, che si cerca, come fù proposto fare, e dimostrare.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XXXIV.

Da vn dato circolo tagliare vna portione, che capisca vn angolo vguale ad vn angolo dato.



Sia il dato circolo ABC, dal quale si vuole tagliare vna portione, che capisca vn angolo vguale all' angolo dato D. Si tiri la retta EF, a che tocchi il circolo AB C in qualche punto A; nel punto A, sopra la retta AF, si costituisca l'angolo F A B b vguale al dato angolo D. Dico che la portione ACB sarà quella, che si cerca.

a Corol. alla 16. del 3.

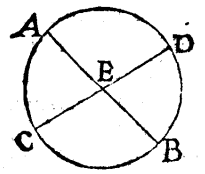
b 23. del 3.

Perche la retta FA tocca il circolo A B C nel punto A, e la retta AB lo sega; sarà l'angolo F A B c vguale all'angolo nell'alterna portione A C B; mà l'angolo F A B è fatto vguale all'angolo D, la portione dunque A C B capirà l'angolo vguale all'angolo D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

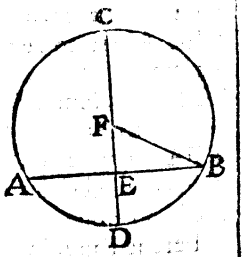
c 32. del 3.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXV.

Se nel circolo due rette linee si segano scambieuolmente, il rettangolo contenuto dalle parti dell'vna è vguale al rettangolo contenuto dalle parti dell'altra.



Nel circolo ACBD, si seghino le rette AB, C D in qualche punto E. Dico, che il rettangolo contenuto dalle parti A E, EB, è vguale al rettangolo contenuto dalle parti CE, ED. O le rette AB, CD, passano ambedue per il centro del circolo, ò passa vna di quelle per il centro, ò nissuna. Passino prima le due AB, CD per il centro E; saranno le rette EB, ED, EA, EC frà di loro vguali, e perciò il rettangolo contenuto dalle parti AE, EB è vguale al rettangolo contenuto dalle due CE, ED. ch'era da dimostrarsi per il primo caso.



Di nuouo supposto, ch'vna di quelle, come C D passi per il centro F, e diuida la retta A B fuori del centro in due parti vguali in E; saranno gli angoli in E a retti. Dico, ch'il rettangolo contenuto dalle due A E, E B è vguale al rettangolo contenuto dalle due C E, E D. Dal centro F al punto B b si tiri la retta F B. Perche la retta CD è diuisa in due parti vguali in F, e la medesima è diuisa in due parti ineguali in E, il rettangolo contenuto dalle

a 3. del 3.

b 1. postul.

dalle parti ineguali CE, ED, col quadrato dell'intermedia portione FE, c è vguale al quadrato di FD, cioè d al quadrato di F B: mà nel triangolo FEB, angolo retto in E, il quadrato del lato FB e è vguale à i quadrati de' lati BE, EF; sarà il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, col quadrato di EF, f vguale à i quadrati delle due BE, EF: dall'vna, e l'altra parte se ne leui il quadrato della commune E F; restarà il rettangolo contenuto dalle due C E, E D g vguale al quadrato di E B: mà il quadrato di EB è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, stante che AE è vguale ad EB; sarà il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, ch'era da dimostrarsi.

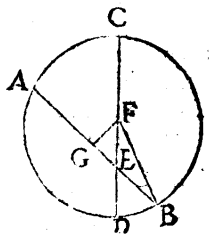
c 5. del 2. d 15. defin. del 1. e 47. del 1. f 1. assioma. g 3. assioma.

Passi similmente la retta CD per il centro F, e seghi la retta A B fuori del centro, non in due parti vguali, in qualche punto E. Dico ch'il rettangolo contenuto dalle due CE, ED è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB. Si diuida la retta A B h in due parti vguali in G, e si tiri la retta G F; gli angoli in G K saranno retti. Si tiri la retta F B: sarà il quadrato di FB l vguale à i quadrati de i due lati FG, GB, ed il quadrato di FE sarà vguale à i quadrati de due lati EG, GF.

h 10. del 1. K 3. del 3. l 47. del 1.

Perche la retta AB è diuisa in due parti vguali in G, ed in due ineguali in E, sarà il rettangolo contenuto dalle parti ineguali A E, E B, col quadrato dell'intermedia portione G E, m vguale al quadrato di G B, ch'è metà della linea; all'vna, ed all'altra parte di questa vgualità, s'aggiunga il quadrato di GF; ne viene il rettangolo contenuto dalle due AE, EB, con i quadrati delle due EG, GF, n vguale à i quadrati de i due lati BG, GF; mà i quadrati de i due lati BG, GF o sono vguali al quadrato di F B; sarà il quadrato di F B vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, con i quadrati delle due EG, GF; perche i quadrati de i due lati E G, G F sono vguali al quadrato di F E; sarà il quadrato di FB vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, col quadrato di FE.

m 5. del 2.



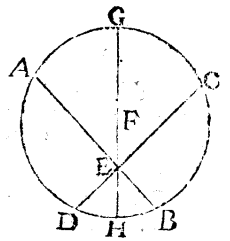
n 2. assioma. o 47. del 1.

La retta CD è diuisa in due parti vguali in F, ed in due ineguali in E; il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, col quadrato di FE, p è vguale al quadrato di FD, cioè vguale al quadrato di FB: ma il quadrato di FB fù mostrato vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, col quadrato di FE; sarà il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, col quadrato di FE, q vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, col medesimo quadrato di FE; se ne leui vgualmente il quadrato di FE, resta il rettangolo contenuto dalle due CE, ED r vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

p 5. del 2. q 1. assioma. r 3. assioma.

Finalmente, supposto, che niuna delle rette AB, CD passi per il centro F. Dico, similmente, che il rettangolo contenuto dalle parti CE, ED è vguale al rettangolo contenuto dalle parti AE, E B. Dal centro F al punto E si tiri la retta FE, la quale si continui fino alla circonferenza in G, ed H. Perche la retta GH passa per il centro del circolo, e sega la retta AB, fuori del centro, per quel che s'è dimostrato, il rettangolo

contenuto dalle rette G E, E H è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB. Similmente la retta G H passa per il centro F, e sega la retta A B fuori del centro nel punto E, per quel che s'è dimostrato, il rettangolo contenuto dalle rette CE, ED è vguale al rettangolo contenuto dalle due GE, E H; ma si disse, che il rettangolo contenuto dalle due AE, EB è vguale al medesimo rettangolo contenuto dalle rette G E, E H; sarà il rettangolo contenuto dalle parti CE, ED [t] vguale al rettangolo contenuto dalle parti AE, EB, come fù proposto dimostrare.

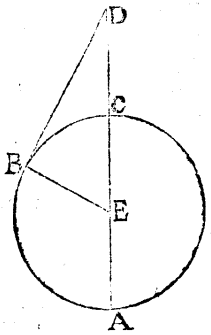


t 1. assioma.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXVI.

Se da qualche punto preso fuori d'vn circolo siano tirate due rette linee, vna che seghi il circolo, e l'altra, che lo tocchi; il rettangolo contenuto dalla segante, e dalla parte esterna, è vguale al quadrato della tangente.

Fuori del circolo A B C sia preso qualunque punto D, dal quale siano tirate le rette DA, DB, cioè D A, che seghi il circolo, come in A, & C, e la retta DB lo tocchi in qualche punto B. Dico che il rettangolo contenuto dalla segante A D, e dalla parte esterna D C, è vguale al quadrato della tangente D B. Supposto prima, che la segante D A passi per il centro E del circolo, dal contatto B al centro E [a] si tiri la retta BE; sarà l'angolo EBD [b] retto, ed il quadrato di DE [c] sarà vguale à i quadrati de i due lati DB, BE.

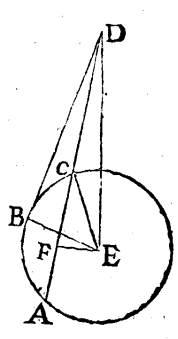


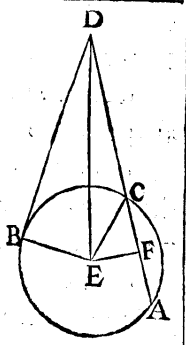
a 1. postul.
b 18. del 3.
c 47. del 1.

Perche la retta AC è diuisa in due parti vguali in E, e l'è aggiũta la retta CD; sarà il rettangolo contenuto dalla composta AD, e dall'aggiunta DC, col quadrato di CE, [d] vguale al quadrato della retta D E; ma il quadrato di DE è vguale à i quadrati de lati DB, BE; sarà il rettangolo contenuto dalle due AD, DC, col quadrato di EC, [e] vguale à i quadrati delle due DB, BE: se ne leuino vgualmente i quadrati delle rette EC, EB, [f] resta il rettangolo contenuto da tutta la segante AD, e dalla parte esterna DC, vguale al quadrato della tangente DB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

d 6. del 2.
e 1. assioma.
f 3. assioma.

Se la retta D A non passa per il centro E, ma sega la circonferenza, come in A, & C: Si diuida la retta AC [g] in due parti vguali in F, si tiri la retta FE: gli angoli in F [h] saranno retti; si tirino le rette EB, EC, ED. L'angolo E B D [K] sarà retto, ed il quadrato di E D [l] sarà vguale à i quadrati de i due lati EB, BD. Similmente perche gli angoli in F sono retti; il quadrato di E D è vguale à i quadrati de i due lati EF, FD; e nel triangolo EFC, il quadrato di EC è vguale à i quadrati de' due lati EF, FC.





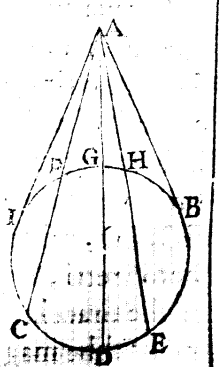
g 10. del 1.
h 3. del 3.
K 18. del 3.
l 47. del 1.

Perche la retta AC è diuisa in due parti vguali in F, e l'è aggiunta la retta CD; sarà il rettangolo contenuto dalla composta AD, e dall'aggiunta DC, col quadrato di CF, [m] vguale al quadrato della retta FD; all'vna, ed all'altra parte s'aggiunga il quadrato di EF; ne viene il rettangolo contenuto dalle due AD, DC, con i quadrati delle due CF, FE, [n] vguale à i quadrati delle due D F, FE; i quadrati de'i due lati DF, FE sono vguali al quadrato di DE; sarà il quadrato di DE vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, con i due quadrati di CF, FE; mà i quadrati delle due CF, FE sono vguali al quadrato di C E; sarà il quadrato di D E vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, col quadrato della retta C E: e perche il quadrato di D E è vguale à i quadrati de' due lati DB, BE; li quadrati dunque delle due DB, B E sono vguali al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, col quadrato di CE; se ne leuino i quadrati dell'vguali EB, EC, resta il rettangolo contenuto dalla segante AD, e dalla parte esterna DC, [o] vguale al quadrato della tangente DB, ch'era da dimostrarsi.

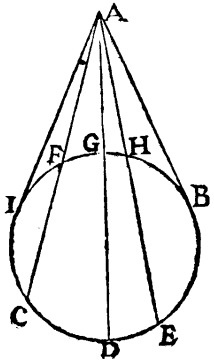
m 6. del 2.
n 2. assiom.
o 3. assiom.

COROLLARIO I.

Da quel che s'è detto si caua, che se da vn punto preso fuori d'vn circolo sono tirate quante si voglia rette linee, che seghino il circolo, i rettangoli contenuti dalle seganti, e dalle parti esterne sono frà di loro vguali. Perche se dal punto A fuori del circolo CDB siano tirate quante si voglia rette AC, AD, AE, che seghino il circolo, e sia ancora tirata la tangente AB, per quel che s'è dimostrato, il rettangolo contenuto dalle rette



EA, AH è vguale al quadrato della tangente AB. Similmente il rettangolo contenuto dalle rette DA,AG, è vguale al quadrato della medesima tangente AB, ed il rettangolo contenuto dalle due CA,AF, è vguale al quadrato di AB; per la qual cosa il rettangolo contenuto dalle due EA, AH, [p] è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA,AG; ouero al rettangolo contenuto dalle due CA, AF.



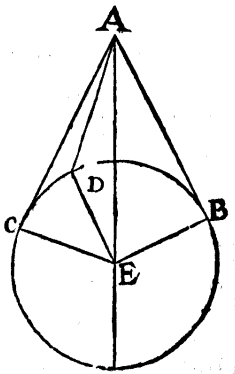
p 3. assiom.

COROLLARIO II.

Se dal punto A sia tirata la retta AI, che tocchi il circolo in qualche punto I, sarà il rettangolo contenuto dalle due DA, AG vguale al quadrato di AI; mà il rettangolo contenuto dalle due DA, AG è vguale al quadrato di AB, sarà il quadrato di AB vguale al quadrato di AI, e la retta AB vguale ad AI; d'onde è manifesto, che se da qualche punto A fuori d'vn circolo siano tirate due rette AB, AI, che tocchino il circolo, quelle due tangenti sono frà di loro vguali.

COROLLARIO III.

Si caua ancora da quel che s'è detto, che da vn punto fuori d'vn circolo non si possono tirare più di due rette, che tocchino il circolo; perche se dopo tirate le due tangenti AB, AC se ne potesse tirare vn altra, come AD, tirate le rette EC, ED, gli angoli EDA, ECA sarebbero [q] retti, e perciò frà di loro vguali; si che tirata la retta AE, l'angolo ADE nõ sarebbe maggiore dell'angolo ACE, ch'è contro alla 21. propositione del primo libro: non dunque

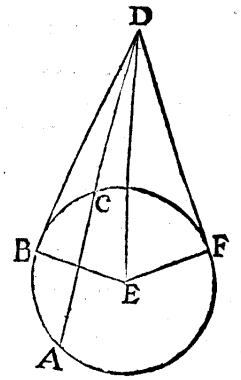


q 18. del 3.

que dal medesimo punto si possono tirare più di due rette, che tocchino il medesimo circolo.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXVII.

Se da qualche punto preso fuori d'vn circolo siano tirate due rette linee, delle quali vna seghi il circolo, e l'altra concorra con la circonferenza, ed il rettangolo contenuto dalla segante, e dalla parte esterna, sia vguale al quadrato della concorrente, la concorrente toccarà il circolo nel punto del concorso.



Sia preso qualche pũto D fuori del circolo ABC, dal quale siano tirate le rette DA, DB, cioè che la retta DA segh̃i il circolo come in A, & C, e la retta DB concorra con la circonferenza nel punto B in modo, ch'il rettangolo contenuto dalle rette AD, DC sia vguale al quadrato della concorrente DB. Dico, che la retta DB tocca il circolo nel punto B.

Dal punto D sia tirata la retta DF, [a] che tocchi il circolo in qualche punto F, dal centro E si tirino le rette EF, ED, EB; sarà l'angolo EFD [b] retto. Perche la retta DA sega il circolo, e la retta DF lo tocca, il rettangolo contenuto dalle due AD, DC, [c] sarà vguale al quadrato della retta DF; mà per ipotesi, il rettangolo contenuto dalle medesime due AD, DC, è vguale al quadrato della retta DB, sarà il quadrato della retta DF [d] vguale al quadrato della retta DB; e la retta DF sarà vguale alla retta DB. Si considerino i due triangoli DEF, DEB: perche i due lati DF, FE sono vguali à i due lati DB, BE, e la base DE è commune, sarà l'angolo DFE [e] vguale all'angolo DBE; mà l'angolo DFE è retto, sarà l'angolo DBE [f] retto; e per il Corollario alla 16. propositione di questo, la retta DB tocca il circolo nel punto B, che era da dimostrarsi.

a 17. del 3.

b 18. del 3.

c 36. del 3.

d 1. assiom.

e 8. del 1.

f 10. assiom.

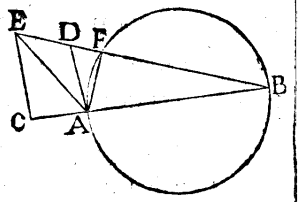
COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che quãdo da vn punto fuori d'vn circolo sono tirate due rette vguali, che concorrino con la circonferenza del medesimo circolo, ed vna di quelle tocca il circolo, ancora l'altra toccarà il medesimo circolo; poiche essendosi prima dimostrato, che le due DF, DB sono frà di loro vguali, e col supposto che la retta DF

tocchi il circolo, s'è poi dimostrato, che la retta DB ancora tocca il circolo.

SCOLIO.

Trattando qui Euclide delle passioni, che accadono alle rette, che segano il circolo, non sarà inutile porre in questo luogo il seguente Theorema.



Nel circolo, il di cui diametro AB sia continuato quanto si vuole verso C, e cadano le rette DA, EC perpendicolari alla retta CB, vna delle quali, come DA, cada nell' estremo A del diametro, e l'altra doue si vuole nella continuatione CA; dall'estremo B sia tirata la retta BE, la quale seghi le perpendicolari, come in D, ed E, e la circonferenza del circolo in qualche punto F. Dico, ch'il rettangolo contenuto dalle due DB, BF è vguale al quadrato del diametro AB; ch'il rettangolo contenuto dalle rette BF, FD è vguale al quadrato di FA, e ch'il rettangolo contenuto dalle rette BF, DE, è vguale al rettangolo contenuto dalle rette BA, AG.

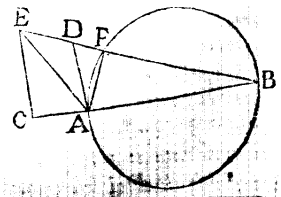
E prima dico, che il rettangolo contenuto dalle due DB, BF è vguale al quadrato del diametro AB. Perche l'angolo DAB è retto, la retta DA [a] *tocca il circolo in A, ed il rettangolo contenuto dalle due BD, DF, sarà vguale* [b] *al quadrato di DA. In oltre perche il rettangolo contenuto dalle due DB, BF, col rettãgolo cõtenuto dalle due BD, DF* [c] *è vguale al quadrato di DB cioè vguale à i quadrati* [d] *delle due DA, AB; ma il rettãgolo delle due BD, DF* [e] *è vguale al quadrato di DA; sarà il rettangolo contenuto dalle due DB, BF* [f] *vguale al quadrato del diametro AB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

Di nuouo dico, che il rettangolo contenuto dalle due BF, FD è vguale al quadrato di AF. Essendo l'angolo AFB nel mezzo circolo, retto, i quadrati de i due lati AF, FD [g] *saranno vguali al quadrato di AD; mà il quadrato di AD* [h] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due BD, DF; sarà il rettangolo contenuto dalle due BD, DF* [K] *vguale à i quadrati delle due DF, FA: e perche il rettangolo contenuto dalle due BD, DF* [l] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col quadrato di DF; sarà il rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col quadrato di DF,* [m] *vguale à i quadrati de' due lati AF, FD; se ne leui il commune quadrato di DF, resta il rettangolo contenuto dalle due BF, FD* [n] *vguale al quadrato di AF, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.*

Finalmente dico, ch'il rettangolo contenuto dalle due BF, DE è vguale al rettangolo contenuto dalle due BA, AC. Si tiri la retta AE, sarà l'angolo EAB ottuso, e perciò saranno i quadrati delle due EA, AB col doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, [o] *vguali al quadrato di EB; mà il quadrato di AE* [p] *è vguale à i quadrati delle due AF, FE, ed il quadrato di AB è vguale à i quadrati delle due AF, FB; sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col doppio quadrato di AF, e con i quadrati delle due BF, FE, vguali al quadrato di EB. E perche il quadrato di EB è vguale à i quadrati delle due BF, FE* [q] *col doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE; sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col doppio quadrato di AF, e con i quadrati delle due BF, FE, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE, con i quadrati delle medesime BF, FE. Dall'vna, e l'altra parte se ne leuino i quadrati delle due BF, FE, resta il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC,* [r] *col doppio quadrato di FA, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE. In oltre perche la retta FE è diuisa in D, e la retta BF è non diuisa, sarà il rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col rettangolo contenuto dalle due BF, DE,* [t] *vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE: mà il rettangolo contenuto dalle due BF, FD, per quel che s'è dimostrato, è vguale al quadrato di FA, sarà il quadrato di FA, col rettangolo contenuto dalle due BF, DE, vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE; e duplata l'vna, e l'altra parte dell' egualità, ne verrà il doppio quadrato di AF, col doppio rettangolo contenuto da BF, DE, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE. Si è dimostrato, ch'il doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE, è vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col doppio quadrato di AF; sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col doppio quadrato di FA,* [u] *vguale al doppio quadrato di FA, col doppio rettangolo contenuto dalle due BF, DE: se ne leui vgualmente il doppio quadrato di FA, resta il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC* [x] *vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, DE; e le loro metà, cioè il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, sarà vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, DE, ch'era da dimostrarsi.*

COROLLARIO.

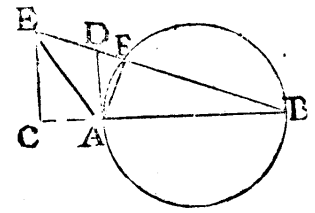
Da quel che s'è detto è manifesto, ch'il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di AF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE.



Perche essendo il rettangolo contenuto dalle due BF, FD vguale al quadrato di FA, ed il rettangolo contenuto dalle due BA, AC è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF DE; sarà il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di FA, vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col ret-

a Corol. alla 16. del 3.
b 36. del 3.
c 2. del 2.
d 47. del 1.
e 36. del 3.
f 3. affioma.
g 47. del 1.
h 36. del 3.
K 1. affiom.
l 3. del 2.
m 1. affiom.
n 3. affioma.
o 12. del 2.
p 47. del 1.
q 4. del 2.
r 3. affiom.
t 1. del 2.
u 1. affiom.
x 3. affiom.

tangolo contenuto dalle due B F, D E: mà il rettangolo contenuto dalle due B F, F D, col rettangolo contenuto dalle due B F, D E, è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, F E; sarà il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di FA, vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE, come si disse.



COROLLARIO.

Quindi è manifesto, che se sarà vn triangolo rettangolo, come E C B, angolo retto in C, e nel lato C B è preso qualche punto A, dal quale cada la retta A F, perpendicolare al lato EB, il rettangolo contenuto dalle parti BF, FE, sarà tanto maggiore del rettangolo contenuto dalle parti B A, A C, per quanto è il quadrato della perpendicolare A F.

Trattandosi delle passioni delle rette, che segano il circolo, stimo bene aggiungere qui il seguente Theorema.

Se da vn'estremo del diametro del circolo sono tirate quante si voglia rette linee, le quali seghino la circonferenza del circolo, e seghino ancora qualche retta linea perpendicolare al medesimo diametro; i rettangoli contenuti dalle rette interposte frà quell'estremo, e la circonferenza del circolo, e dalle rette interposte frà il detto estremo, e la perpendicolare al diametro, sono frà di loro vguali.

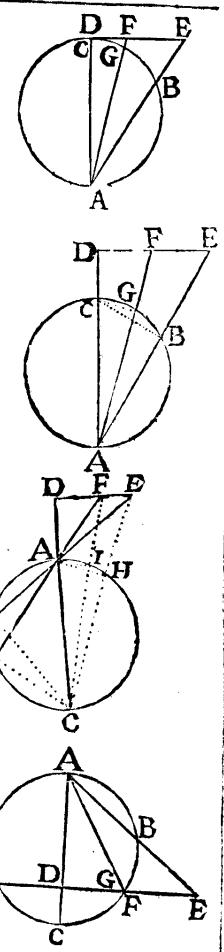
Sia il circolo ABC, il di cui diametro AC, e sia ED perpendicolare al diametro AC, e dall'estremo A del diametro siano tirate quante si voglia rette linee AE, AF, le quali seghino la perpendicolare, come in E, ed F, e la circonferenza del circolo come in B, & G. Dico ch'il rettangolo contenuto dalle due EA, AB è vguale alrettangolo contenuto dalle due FA, AG; ed anco è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AC.

Supposto prima, che la perpendicolare cada nell'estremo del diametro, quella [a] *toccarà il circolo nel punto D, e sarà il rettangolo contenuto dalle due AE, EB* [b] *vguale al quadrato di ED. In oltre essendo l'angolo EDA retto, il quadrato di A E* [c] *sarà vguale à i quadrati de i due lati A D, D E; mà il quadrato di A E è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB,* [d] *col rettan-*

a Corol. alla 16. del 3.
b 36. del 3.
c 47. del 1.
d 2. del 2.

rettangolo contenuto dalle due EA, AB; saranno questi due rettangoli [e] *vguali à i quadrati de' due lati ED, DA. Fù dimostrato il rettangolo contenuto dalle due AE, EB, essere vguale al quadrato di E D, sarà il rettangolo contenuto dalle due EA, AB, vguale al quadrato di AD; nell'istesso modo si dimostrerà, ch'il rettangolo contenuto dalle due FA, AG è vguale al medesimo quadrato di AD, e perciò il rettangolo contenuto dalle due EA, AB sarà vguale al rettangolo contenuto dalle due F A, AG, il che era da dimostrarsi nel primo luogo,*

Di nuouo cada la perpendicolare E D nella continuatione CD; si tirino le rette CB, CG: sarà l'angolo CBA [f] *nel mezzo circolo retto; si che nel triangolo A DE, angolo retto in D, dal punto C nel lato A D, cade la retta C B, perpendicolare ad AE; e per l'antecedente Corollario, il rettangolo contenuto dalle rette AC, CD, col quadrato di CB, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BE: vgualmente s'aggiunga il quadrato di A B, sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, C D,* [g] *con i quadrati delle due CB, BA, cioè* [h] *col quadrato di AC, vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BE, col quadrato di AB; cioè* [K] *vguale al rettangolo contenuto dalle due E A, A B. Mà il rettangolo contenuto dalle due AC, CD, col quadrato di A C,* [l] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AC; sarà il rettangolo contenuto dalle due DA, AC, vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, A B. Nell'istesso modo si dimostrerà, ch'il rettangolo contenuto dalle due F A, AG, è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AC. Per la qual cosa i rettangoli contenuti da EA, AB; da FA, AG; e da D A, AC, sono frà di loro vguali: ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.*



e 1. assiom.
f 31. del 3.
g 1. assioma.
h 47. del 1.
K 3. del 2.
l 3. del 2.

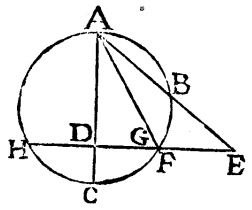
Nella terza figura si tirino le rette CB, CG, CE, CF, AH, AI. Gli angoli CBE, CGF, CHA, CIA, ne i mezzi circoli [m] *sono retti, e per l'antecedente Corollario, il rettangolo contenuto dalle due CA, AD, col quadrato di AH, è vguale al rettangolo contenuto dalle due CH, HE. Similmente il rettangolo contenuto dalle due BA, AE, col quadrato di AH, è vguale al medesimo rettangolo contenuto dalle due CH, H E; dal che il rettangolo contenuto dalle due C A, A D, col quadrato di A H, è vguale al rettangolo contenuto dalle due BA, A E, col quadrato di AH: se ne leui il commune quadrato di AH, resta il rettangolo contenuto dalle due CA, AD, vguale al rettangolo contenuto dalle due B A, A E. Nell'istesso modo si dimostrerà, ch'il rettangolo contenuto dalle due GA, AF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due CA, AD. Per la qual cosa i rettangoli contenuti da BA, AE; da GA, AF; e da*

m 31. del 3.

CA,

CA, AD, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi nel terzo luogo.

Finalmente nella quarta figura ſi prolunghi E D ſino ad H. Eſſendo l'angolo in D retto, ſarà FD n *vguale ad HD, ed il rettangolo contenuto dalle due EF, FD, è vguale al rettangolo contenuto dalle due EF, DH; dal che il doppio rettangolo contenuto dalle due EF; FD,* o *è vguale al rettangolo contennto dalle due EF, F H: vgualmente s'aggiunga il quadrato di E F; ne viene* p *il rettangolo contenuto dalle due HE, E F, cioè* q *quello contenuto dalle due AE, EB, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due E F, F D col quadrato di E F. In oltre, eſſendo l'angolo ADF retto, ſarà l'angolo eſterno AFE* r *ottuſo, e perciò il quadrato di A E* t *ſarà vguale à i quadrati de' due lati AF, FE, col doppio rettangolo contenuto dalle due E F, F D: mà il quadrato di AE è vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB,* u *col rettangolo contenuto dalle due AE, EB; ſarà il quadrato di AF, col quadrato di E F, ed il doppio rettangolo contenuto dalle due EF, FD, vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB, col rettangolo contenuto dalle due AE, EB; fù dimoſtrato il rettangolo contenuto dalle due AE, EB, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due E F, FD, col quadrato di FE, ſarà il rettangolo contenuto dalle due EA, AB vguale al quadrato di A F. Di più eſſendo H D vguale ad F D, ſarà il quadrato di F D vguale al rettangolo contenuto dalle due HD, DF: mà il rettangolo delle due HD, DF* x *è vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, D C; ſarà il rettangolo delle due AD, D C,* y *vguale al quadrato di F D: vgualmente s'aggiunga il quadrato di AD, ſarà il rettangolo contenuto dalle due CA, AD,* z *vguale à i quadrati delle due FD, DA, cioè* & *vguale al quadrato di FA: mà il rettangolo contenuto dalle due EA, A B fù dimoſtrato vguale al medeſimo quadrato di AF; ſarà il rettangolo contenuto dalle due C A, A D vguale al rettangolo contenuto dalle due E A, AB, come fù propoſto dimoſtrare.*



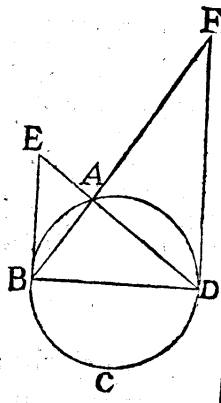
n 3. del 3.
o 1. del 2.
p 3. del 2.
q Corollario alla 36. del 3
r 16. del 1.
t 12. del 2.
u 2. del 2.
x 35. del 3.
y 1. aſſiom.
z 2. aſſiom.
& 47. del 1.

La prima parte del ſeguente Theorema la ſpiega Geronimo Cardano nel Libro 16. De ſubtilitate, però con differente dimoſtratione.

Se negli eſtremi d'vn diametro del circolo ſono eleuate rette perpendicolari à quel diametro; e dalli medeſimi eſtremi ſono tirate due rette, le quali ſcambieuolmente ſi ſeghino in vn iſteſſo punto con la circonferenza del circolo, e continuate concorrano con le perpendicolari; il rettangolo contenuto da ogn'vna delle ſeganti nella ſua parte interna è vguale al quadrato del diametro; e l'vno, e l'altro rettangolo, contenuto dalle parti delle ſeganti, interpo-

terpoſte frà la circonferenza, e le perpendicolari, giunti inſieme, ſono vguali al quadrato del diametro.

Sia il circolo ABCD, il di cui diametro BD, e negli eſtremi B, & D ſiano eleuate le rette BE, DF perpendicolari al diametro BD, e da qualche punto A preſo nella circonferenza BAD à gli eſtremi B, & D del diametro, ſiano tirate le rette BA, DA, le quali continuate concorrino con le perpendicolari, come in E, ed F. Dico, ch'il rettangolo contenuto dalle rette FB, BA; ouero il rettangolo contenuto dalle rette E D, DA, è vguale al quadrato del diametro BD, e che i due rettangoli contenuti, cioè vno dalle parti FA, AB, l'altro dalle parti EA, AD, giunti inſieme, ſono vguali al quadrato del diametro BD.



Perche l'angolo BAD a *nel mezzo circolo è retto, ſarà il quadrato di B D* b *vguale à i quadrati de i due lati BA, AD; in oltre eſſendo gli angoli F D B, EBD retti, le rette F D, E B* c *toccaranno il circolo ne i punti D, & B, e ſarà il quadrato di FB* d *vguale à i quadrati de due lati FD, DB, ed il quadrato di ED vguale à i quadrati de i due lati EB, BD; Hor perche i quadrati de i due lati FD, DB ſono vguali al quadrato di FB; ed il quadrato di F B* e *è vguale al rettangolo contenuto dalle due, BF, FA, col rettangolo contenuto dalle due FB, BA, i due quadrati de' lati FD, DB, ſaranno vguali al rettangolo contenuto dalle due BF, FA, col rettangolo contenuto dalle due FB, BA; ma il rettangolo contenuto dalle due BF, FA* f *è vguale al quadrato della tangente FD; ſarà il rettangolo contenuto dalle due FB, BA,* g *vguale al quadrato di B D. Similmente eſſendo i quadrati de i due lati EB, BD vguali al quadrato di ED, ed il quadrato di ED* h *è vguale à i rettangoli contenuti, cioè vno dalle due E D, D A, l'altro dalle due DE, EA; ſaranno i quadrati de i due lati EB, BD* K *vguali al rettangolo contenuto dalle due ED, DA, col rettangolo contenuto dalle due DE, EA; ma il rettangolo delle due DE, EA* l *è vguale al quadrato di EB; ſarà il rettangolo contenuto dalle due ED, DA* m *vguale al quadrato di B D, ch' era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

Dico di nuouo, che il rettangolo contenuto dalle due FA, AB, col rettangolo contenuto dalle due EA, AD, è vguale al quadrato di BD. Perche il rettangolo contenuto dalle due FA, AB, col quadrato di AB, n *è vguale al rettangolo contenuto dalle due FB, BA, cioè, per le coſe dimoſtrate, vguale al quadrato di BD, ed il quadrato di BD* o *è vguale à i quadrati de i due lati BA, AD, ſarà il rettangolo contenuto dalle due FA, AB,* p *col quadrato di AB, vguale à i quadrati de i due lati BA, AD. Se ne leui il commune quadrato di AB, reſta il rettangolo contenuto dalle due FA, AB* q *vguale al quadrato di AD.*

Finalmente perche il rettangolo contenuto dalle due EA, AD, col quadrato di AD, è vguale r *al rettangolo contenuto da tutta ED, e dalla parte DA; ed il rettangolo contenuto da ED, & DA, per quel che s'è dimoſtrato, è vguale*

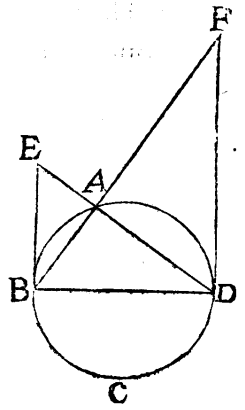
a 31. del 3.
b 47. del 1.
c Corollario alla 16. del 3
d 47. del 1.
e 2. del 2.
f 16. del 3.
g 3. aſſiom.
h 2. del 2.
K 1. aſſiom.
l 36. del 3.
m 3. aſſiom.
n 2. del. 3.
o 47. del 1.
p 1. aſſiom.
q 3. aſſiom.
r 3. del 2.

al

t 47. del 1.

al quadrato di BD, cioè [t] alli due quadrati di BA, AD; sarà il rettangolo contenuto dalle due EA, AD, col quadrato di AD, [u] vguale à i quadrati de i due lati BA, AD; se ne leui il cõmune quadrato di AD, resta il rettangolo contenuto dalle due EA, AD, [x] vguale al quadrato di AB; Mà fù dimostrato il rettangolo delle due FA, AB vguale al quadrato di AD; i due rettangoli dunque, vno contenuto dalle due EA, AD, l'altro contenuto dalle due FA, AB, giunti insieme, sono vguali à i quadrati de i due lati BA, AD, cioè vguale al quadrato del diametro BD, ch'era da dimostrarsi.

u 1. assiom.
x 3. assiom.



COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, appariſce, che i due rettangoli, vno contenuto dalle parti FA, AB, e l'altro contenuto dalle parti EA, AD, giunti inſieme, ſono vguali al rettangolo contenuto da tutta FB, e dalla parte BA, ouero al rettangolo contenuto da tutta ED, e dalla parte DA.

Il ſeguente Theorema è di Pappo Aleſsandrino nel Settimo Libro.

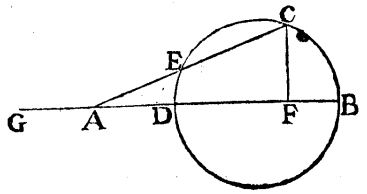
Se da qualche punto A, preſo fuori del circolo B C D, ſiano tirate due rette AB, AC, delle quali AB paſſi per il centro del circolo, ed AC lo ſeghi, come in E, & C, e dal punto C cada la retta CF perpendicolare al diametro B D. Dico, che il quadrato di AB ſupera il quadrato di AC, per quanto è il rettangolo contenuto dalla retta compoſta delle due AB, AD, e dalla parte BF.

a 3. del 1.

b 1. del 2.

c Corol. alla 14. del 2.

Si continui D A verſo G, e ſi faccia AG [a] vguale ad AD, ſi conſideri la retta A F diuiſa in D, e la retta FB non diuiſa; ſarà il rettangolo cõtenuto dalle due AF, FB [b] vguale à i rettangoli, cioè vno contenuto dalle due BF, FD, e l'altro dalle due BF, DA; ma il rettangolo contenuto dalle due DF, FB [c] è vguale al quadrato



drato di FC, sarà il rettangolo contenuto dalle due AF, FB, vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, BF, col quadrato di FC.

In oltre si cõsideri la retta GB diuiſa in A, e la retta FB come nõ diuiſa; sarà il rettangolo cõtenuto dalle due AB, BF, col rettangolo contenuto dalle due GA, BF, [d] vguale al rettangolo contenuto dalle due GB, BF: ma il rettangolo contenuto dalle due GA, BF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, BF (per essere DA vguale ad AG) sarà il rettangolo contenuto dalle due GB, BF, vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo delle due AD, BF.

d 1. del 2.

Di nuouo, perche la retta AB è diuiſa in F, il rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo contenuto dalle due BA, AF, [e] è vguale al quadrato di AB: ma il rettangolo contenuto dalle due BA, AF [f] è vguale al rettangolo delle due B F, F A, col quadrato di AF; sarà il rettangolo contenuto dalle due A B, B F, col rettangolo delle due BF, FA, e col quadrato di AF, vguale al quadrato di AB; ma il rettangolo delle due BF, FA, per il num. 1. è vguale al rettangolo delle due AD, FB, col quadrato di CF; sarà il rettangolo delle due AB, BF, col rettangolo delle due AD, BF, con i quadrati delle due AF, FC, vguali al quadrato di AB: e perche i quadrati delle due AF, FC [g] sono vguali al quadrato di AC; sarà il rettangolo delle due AB, BF, col rettangolo contenuto dalle due AD, BF, col quadrato di AC, vguale al quadrato di AB: ma per il num. 2. il rettangolo delle due GB, BF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo delle due AD, BF; sarà il rettangolo contenuto dalle due GB, BF, col quadrato di AC, vguale al quadrato di AB: e perche la retta GB è compoſta di AB, e d'vna parte vguale ad AD; sarà dunque il rettangolo contenuto dalla retta, ch'è compoſta di AB, AD, e dalla retta BF, col quadrato di AC, vguale al quadrato di AB. Per la qual coſa il quadrato di AB supera il quadrato di AC, per quanto è il rettangolo contenuto da quella retta, ch'è compoſta delle due BA, AD, e dalla retta BF, ch'era da dimoſtrarſi.

c 2. del 2.
f 3. del 2.
g 47. del 1.

Fine del Terzo Elemento.

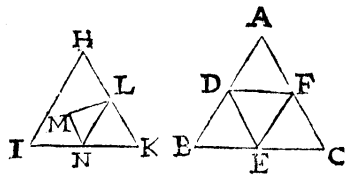
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO QVARTO.

DEFINITIONI.

I.

La figura rettilinea si dice essere iscritta dentro vn altra figura rettilinea, quando ciascun'angolo della figura iscritta tocca ciascun lato di quella, nella quale è iscritta.

La figura rettilinea, accioche sia iscritta dentro d'vn altra figura rettilinea, deue con tutti i suoi angoli toccare i lati della figura, nella quale è iscritta. Per esempio la figura rettilinea M N L, la quale tocca i lati H K, K I, con gli angoli L, ed N, ma non tocca il lato H I coll'angolo M, non si dice essere iscritta nella figura H I K; ma la figura D E F, che tocca i lati della figura A B C con tutti i suoi angoli, si dice essere iscritta nella figura ABC.



II.

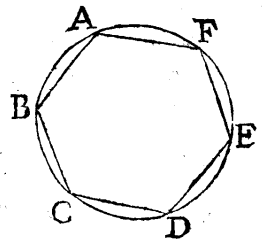
La figura rettilinea si dice essere circoscritta intorno alla figura rettilinea, quando tutti i lati della circoscritta toccano gli angoli della figura iscritta.

Per esempio la figura H I K, che tocca con due soli lati gli angoli della figura M N L, non si dice essere circoscritta, stante che tutti i lati della circoscritta deuono toccare gli angoli dell'iscritta, come appare nella figura ABC, che con tutti i suoi lati tocca gli angoli della figura DEF iscritta.

III.

La figura rettilinea si dice essere iscritta nel circolo, quando ogn'angolo della figura iscritta tocca la circonferenza del circolo, nel quale è iscritto.

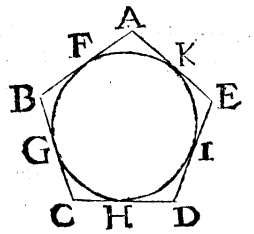
La figura rettilinea ABCDEF, che con tutti i suoi angoli tocca la circonferenza, si dice essere iscritta nel circolo ACE.



IV.

La figura rettilinea si dice essere circoscritta intorno al circolo, quand'ogni lato della figura circoscritta tocca il circolo.

La figura rettilinea ABCDE tocca il circolo con tutti i suoi lati ne i punti F, G, H, I, K, e questa si dice essere circoscritta al circolo: ma se vno, ò più lati non toccassero il circolo, benche lo toccassero gli altri, non si direbbe circoscritta al circolo.



V.

Il circolo si dice essere iscritto nella figura rettilinea, quando tocca tutti i lati della figura circoscritta.

Com'apparisce nel circolo F G H I K, che tocca tutti i lati della figura rettilinea ABCDE, che gli è circoscritta.

VI.

Il circolo si dice essere circoscritto intorno alla figura rettilinea, quando la circonferenza tocca tutti gli angoli della figura iscritta.

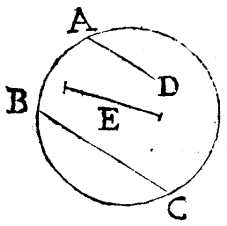
Cioè il circolo ABCDEF, che con la sua circonferenza tocca tutti gli angoli della figura interna, si dice essere circoscritto alla figura interna.

figura della 3. defin.

VII.

La linea retta si dice essere addattata nel circolo, quando concorre con tutti due gli estremi nella circonferenza del circolo, al quale è addattata.

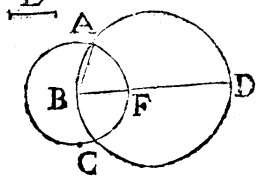
Nel circolo ABC la retta E, che con i suoi estremi in modo alcuno non concorre cõ la circonferẽza del circolo, e la retta AD, che concorre col solo estremo A, non si dice addattata nel circolo; mà la retta BC, che concorre con ambidue gli estremi B, & C con la circonferenza del circolo, si dice essere addattata nel circolo ABC.



PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Dato vn circolo, ed vna retta linea, che non sia maggiore del diametro, addattare nel dato circolo vna retta linea vguale alla retta data.

Sia il dato circolo A B C D, e la retta linea data sia E, si vuole nel circolo ABCD addattare vna retta linea vguale alla retta data E: è necessario però, che la data retta linea E non sia maggiore del diametro.



Nel circolo ABCD si troui il diametro B D [a]; se il diametro BD è vguale alla retta data, sarà BD la retta addattata, vguale alla retta E; Se il diametro BD è maggiore della retta E, dal diametro BD si tagli la parte BF [b] vguale alla retta E; fatto centro in B, coll'interuallo BF, [c] si descriua il circolo CFA, il quale segarà il primo, come in A, & C; dal pũto A al punto B [d] si tiri la retta AB. Dico che la retta AB è addattata nel circolo ABC, ed è vguale alla data retta E.

Perche il punto B è centro del circolo CFA, sarà BA [e] vguale alla retta BF; ma la retta E, per costruttione, è vguale alla medesima retta BF; sarà la retta BA [f] vguale alla retta E; e perche i punti A, & B sono nella circonferenza del circolo ABC; sarà la retta AB addattata al circolo ABC, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

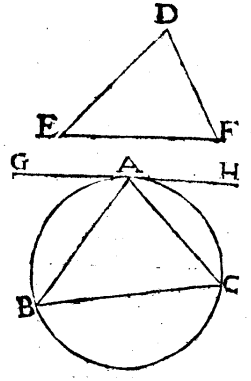
a 1. del 3.
b 3. del 1.
c 3. postul.
d 1. postul.
e 15. defin. del 1.
f 1. assioma.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

In vn dato circolo iscriuere vn triangolo equiangolo ad vn dato triangolo.

Sia

Sia dato il circolo A B C, ed il triangolo DEF; nel circolo ABC si vuole iscriuere vn triangolo equiangolo al triangolo DEF.



Si tiri la retta GH, [a] che tocchi il circolo ABC in qualche punto A; nel punto A, sopra la retta AG, [b] si costituisca l'angolo GAB vguale all'angolo F; e nel medesimo punto A, sopra la retta AH, si costituisca l'angolo H A C vguale all'angolo E. Perche gli angoli HAC, GAB, sono vguali à i due angoli E, ed F, e li due angoli E, ed F, [c] sono minori di due angoli retti; li due angoli HAC, G A B, sono minori di due angoli retti; mà i tre angoli HAC, CAB, BAG [d] sono vguali à due angoli retti: perciò i due angoli H A C, G A B, sono minori di due angoli retti, per quanto è l'angolo CAB, che s'interpone; e perciò la retta AC, non cade nello spatio GAB, ne la retta AB cade nello spatio C A H: si prolunghino dunque le rette AC, AB fino alla circonferenza, come in B, & C, e si tiri la retta BC. Dico, ch'il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF.

a 17. del 3.
b 23. del 1.
c 17. del 1.
d 32. del 1.

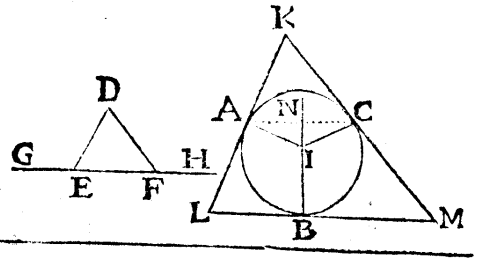
Perche la retta GA, per costruttione, tocca il circolo nel punto A, e la retta AB sega il medesimo circolo; l'angolo GAB, [e] contenuto dalla tangente GA, e dalla segante AB, è vguale all'angolo ACB nell'alterna portione; ma l'angolo GAB è vguale per costruttione all'angolo F, sarà l'angolo ACB [f] vguale all'angolo F. Similmente la retta HA tocca il circolo nel punto A, la retta AC lo sega; l'angolo dunque HAC [g] è vguale all'angolo ABC nell'alterna portione; ma l'angolo HAC è fatto vguale all'angolo E, sarà l'angolo ABC [h] vguale all'angolo E. Finalmente i triangoli DEF, ABC, i due angoli E, ed F, sono vguali à i due ABC, ACB, ed il rimanente angolo D [K] sarà vguale al rimanente angolo BAC. Per la qual cosa nel circolo A B C è iscritto il triangolo A B C; equiangolo al triangolo DEF, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

e 32. del 3.
f 1. assioma.
g 32. del 3.
h 1. assioma.
K 32. del 1.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

Intorno ad vn dato circolo circoscriuere vn triangolo equiangolo ad vn dato triangolo.

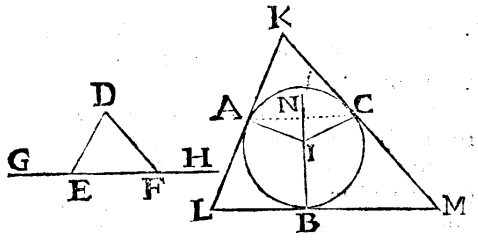
Sia dato il circolo ABC intorno al quale s'habbia à circoscriuere vn triangolo equiangolo al dato triangolo DEF: si continui il lato E F [a] verso G, & H; si troui il centro del circolo ABC, [b] che sia il punto I, dal quale si tiri



a 2. post.
b 1. del 3.

qua-

qualunque semidiametro A I ; nel punto I sopra la retta A I , c si costituisca l'angolo AIB vguale all'angolo esterno DEG ; e nel punto I , sopra la retta BI, d si ponga l'angolo BIC,vguale all'angolo esterno DFH; ne i punti A, B, C, sopra le rette AI, IB , IC , e si eriggano rette perpendicolari , cioè AK sopra la retta AI, la retta KC perpendicolare ad IC , e la retta BM, perpendicolare ad IB ; si prolunghino dall'vna , e l'altra parte , e si continui BI verso N . Perche i due angoli CIB , CIN f sono vguali à due angoli retti , e li due angoli DFH , DFE sono vguali à due angoli retti ; li due angoli CIB , CIN , saranno vguali g à i due DFH , DFE ; ma l'angolo BIC è vguale all'angolo DFH ; sarà l'angolo CIN vguale all'angolo D F E . Considerando i due angoli A I B, A I N , e li due D E G , D E F , si dimostrarà nell'istesso modo , che l'angolo DEF è vguale all'angolo A I N ; dalche li due angoli D F E , D E F sono vguali à i due A I N , C I N : ma i due angoli D E F , D F E sono h minori di due angoli retti , perciò i due A I N , C I N sono minori di due angoli retti ; dalche K le rette C I , I A , non costituiscono vna sola retta linea , ma contengono l'angolo CIA ; si tiri la retta AC, quella caderà frà i punti I, & K, e segarà gli angoli KCI,KAI. E perche gli angoli KCI, KAI sono retti , i due angoli KCA,KAC saranno minori di due angoli retti,e per lo Scolio dopo la 31.propositione del 1.le rette AK, CK continuate concorrono in qualche punto K. Nell'istesso modo si dimostrerà , che le rette KM, LM, concorrono in qualche punto M ; e che i lati M L , KL , concorrono in qualche punto L.



Nel quadrilatero LAIB , i due angoli LBI, LAI sono per costruttione retti,ma tutti li quattro angoli del quadrilatero,per lo Scolio alla 32.propositione del primo , sono vguali à quattro angoli retti , li due angoli AIB,ALB saranno vguali à due angoli retti; e perche li due angoli DEG, DEF l sono vguali à due angoli retti ; li due angoli DEG, DEF saranno vguali m à i due AIB, ALB ; se ne leuino gli vguali angoli AIB, DEG , resta l'angolo L , n vguale all'angolo DEF . Nel quadrilatero I B M C , gli angoli MCI, MBI sono per costruttione retti ; dalche i due C M B , CIB sono vguali à due angoli retti : E perche i due angoli DFH, DFE o sono vguali à due retti , i due angoli dunque BIC, BMC sono vguali à i due angoli DFH, DFE ; se ne leuino gli vguali angoli DFH , BIC resta l'angolo M p vguale all'angolo DFE . Ne i triangoli KLM, DEF , i due angoli DEF, DFE sono vguali à i due M, ed L , ed il rimanente angolo D q sarà vguale al restante angolo K ; per la qual cosa i triangoli DEF , KLM sono equiangoli . Finalmente perche le rette IC,IA, IB fanno,per costruttione,angoli retti con le rette MK, KL, LM, per il Corollario alla 16. propositione del 3.Libro, i lati KL, KM , LM toccano il circolo ne i punti A, B, C . Per la qual cosa intorno al circolo ABC s'è circoscritto il

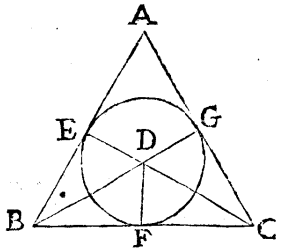
c 23. del 1.
d 25. del 1.
e 11. del 1.
f 13. del 1.
g 1. assiom.
h 17. del 1.
K 14. del 1.
l 13. del 1.
m 1. assiom.
n 3. assiom.
o 13. del 1.
p 3. assioma.
q 32. del 1.

il triangolo KLM, equiangolo al dato triangolo DEF , ch'era da farsi , e dimostrarsi .

PROBLEMA IV. PROPOSITONE IV.

Dentro d'vn dato triangolo iscriuere vn circolo.

Sia il dato triangolo A B C , dentro del quale s'habbia ad iscriuere vn circolo .



Si diuidano gli angoli B , & C a in due parti vguali con le rette BD , C D , le quali concorreranno in qualche punto D ; dal punto D à i lati del triangolo si facciano cadere b le perpendicolari DE, DF, DG ; fatto centro in D , coll'interuallo DE, ouero DF, ouero DG, c si descriua il circolo EFG . Dico che il Circolo EFG è iscritto dentro del triangolo ABC.

Perche gli angoli DGC, DFC sono retti,e gli angoli DCG, D C F, per costruttione , sono frà di loro vguali , saranno i due angoli D G C , DCG, del triangolo DGC,vguali à i due angoli DFC, DCF, del triangolo DFC ; il lato DC è commune , sarà il lato FC d vguale al lato CG, ed il lato DG vguale al lato DF . Similmente gli angoli DFB , DEB sono retti, gli angoli DBF, DBE sono frà di loro vguali ; saranno i due angoli DFB, DBF,del triangolo DFB vguali à i due angoli DEB,DBE,del triangolo DEB ; il lato B D è commune , sarà il lato BF e vguale al lato BE , ed il lato ED vguale al lato DF ; mà il lato DF fù dimostrato vguale al lato DG, le tre rette DE, D F, D G f sono frà di loro vguali , ed il punto D sarà il centro del circolo , che passa per i punti F , G , E . Inoltre , perche i semidiametri DF, DG , DE fanno , per costruttione angoli retti con i lati del triangolo ; perciò i lati AB , BC , C A , g toccano il circolo ne i punti E , F, G . Per la qual cosa dentro del triangolo A B C s'è iscritto il circolo EFG , ch'era da farsi , e dimostrarsi.

a 9. del 1.
b 12. del 1.
c 3. postul.
d 26. del 1.
e 26. del 1.
f 1. assioma.
g Corollario alla .6. del 1.

S C O L I O.

Accioche si sappia di quanto due lati d'vn triangolo superano il terzo, Gio: Battista Benedetti fece il seguente Theorema .

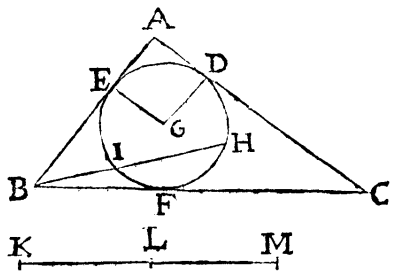
Se dentro à qualunque triangolo sia iscritto vn circolo , e da vn angolo del triangolo sia tirata vna retta fino al concauo della circonferenza ; i due lati , che contengono l'angolo , dal quale è stata tirata la retta , che sega il circolo , sono maggiori del terzo lato per vna retta , il di cui qua-

drato

drato è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalla retta, che sega il circolo, e dalla parte esterna.

Sia iscritto il circolo EFD dentro à qualunque triangolo ABC, e da vno de gli angoli, come B, sia tirata la retta BH, che seghi il circolo in qualsiuoglia modo, come in H, ed I. Dico che i lati AB, BC sono maggiori del lato AC, per vna retta, il di cui quadrato è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI.

Si faccia KL [a] *vguale ad EB, ed LM vguale ad FB; sarà tutta KM vguale alle due BE, BF. In oltre, perche le due BE, BF toccano il circolo in E, ed F, per il secondo Corollario alla 36. propositione del terzo, le rette BE, BF sono frà di loro vguali. Per l'istessa ragione EA è vguale ad AD, e la retta DC è vguale alla retta CF. Hor essendo BE vguale à BF, sarà KL vguale ad LM, ed il quadrato di KM sarà* [b] *il quadruplo del quadrato di LM; mà LM è vguale ad FB; il quadrato dunque di KM sarà il quadruplo del quadrato di BF. E perche il quadrato di BF* [c] *è vguale al rettangolo contenuto dalle rette HB, BI; sarà il quadrato di KM il quadruplo rettangolo cõtenuto dalle rette HB, BI; dal che il quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI sarà vguale al quadrato di KM; supposto questo. Perche CF è vguale à CD, ed AD vguale ad AE; se alla retta CF s'aggiunge la retta AE, ed alla retta CD s'aggiunge la retta AD, ne vengono le due CF, AE insieme,* [d] *vguali alla retta AC: per la qual cosa i lati AB, BC superano il lato AC per la quantità delle rette BF, BE, cioè per la quantità KM: mà il quadrato di KM è dimostrato vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI, i lati dunque AB, BC superano il lato AC per quanto è la retta KM, il di cui quadrato è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI, ch'era da dimostrarsi.*



a 3. del 1.

b Scolio alla 4. prop. del 2

c 36. del 3.

d 2. assioma.

COROLLARIO I.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che i lati AB, BC superano il lato AC, per la retta vguale alle due tangenti BE, BF, cioè vguale al doppio di BE, ouero di BF. E per l'istessa ragione i lati AB, AC superano il lato BC per il doppio di AE, ouero AD, ed i lati AC, CB superano il lato AB per il doppio della retta CD, ouero CF.

COROLLARIO II.

Appare da quel, che s'è detto, che se l'angolo BAC è retto, i lati AB, AC superano il lato CB per quanto è il diametro del circolo; stante che essendo gli angoli in D, ed A retti, i lati DG, AE saranno [c] paralleli: parimente essendo gli angoli in A, & E retti, i lati EG, AD saranno paralleli; e perciò il quadrilatero EGDA [f] sarà parallelogrammo, ed i lati opposti AD, EG, ouero AE, DG, [g] sono frà di loro vguali; si che i due lati EG, GD sono vguali à i due AD, AE; mà i due DG, GE sono vguali al diametro del circolo EDF; però i due AD, AE sono vguali al diametro del detto circolo.

c 28. del 1.

f 35. del 1.

g 34. del 1.

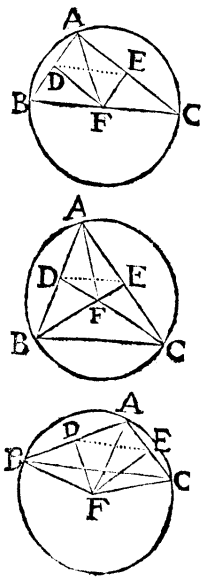
PROBLEMA V. PROPOSITIONE V.

Intorno ad vn dato triangolo circoscriuere vn circolo.

Sia dato il triangolo ABC, intorno al quale s'habbia da circoscriuere vn circolo.

Si diuidano due qualunque lati AB, AC [a] in due parti vguali in D, ed E; ne i punti D, ed E [b] si pongano le rette EF, DF ad angoli retti con i lati AC, AB; si tiri la retta DE. Perche gli angoli AEF, ADF sono retti, detrattone gli angoli AED, ADE; restano gli angoli FED, FDE minori di due angoli retti; e per lo Scolio alla 31. propositione del primo, le rette EF, DF continuate concorrono in qualche punto F; si tirino le rette FA, FC, FB; e fatto centro in F, [c] coll'interuallo FA, ouero FB, ouero FC, si descriua il circolo CAB. Dico ch'il circolo CAB è circoscritto al dato triangolo ABC.

Ne i triangoli FDA, FDB, i due lati AD, DF sono vguali à i due BD, DF; gli angoli in D sono retti, sarà la base FA [d] vguale alla base BF. Similmente ne i triangoli FEA, FEC, i due lati AE, EF sono vguali à i due lati CE, EF; gli angoli in E sono retti, sarà la base FC vguale alla base AF: mà AF fù dimostrata vguale ad FB, le tre rette FB, FA, FC e sono frà di loro vguali, ed il circolo descritto intorno al centro F passa per li punti B, A, C; dalche è circoscritto il circolo BAC intorno al dato triangolo, ch'era da farsi; e dimostrarsi.



a 10. del 1.

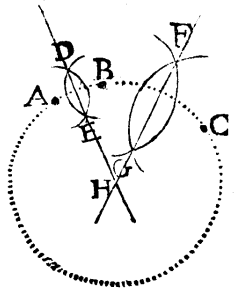
b 11. del 1.

c 3. postul.

d 4. del 1.

e 1. assiom.

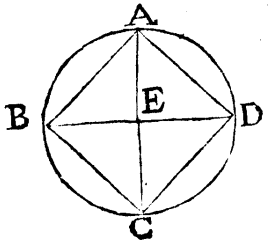
SCOLIO.



Dall'antecedente propoſitione ſi caua il modo, come ſi poſſa far paſſare vna circonferenza di circolo per tre punti dati, che non ſiano in vna medeſima retta linea. Per eſſempio: ſiano i dati punti A, B, C, che non ſiano in vna medeſima retta linea, per i quali ſi voglia far paſſare vna circonferenza di circolo. Si prendano i tre punti A, B, C come angoli del triangolo BAC, e per l'antecedente propoſitione, intorno al triangolo ABC ſi circoſcriua il circolo C B A: e per operare con breuità, ſi faccia centro in C, & B, e con qualunque interuallo ſi deſcriuano gli archi F G, i quali s'interſegaranno in F, & G. Di nuouo fatto centro in B, & A, e con qualunque interuallo, ſi deſcriuano gli archi D E, i quali ſi ſegaranno in D, ed E; per l'interſegationi D, E, ſi faccia paſſare la retta DE.; come anco per le interſegationi F, & G, ſi faccia paſſare la retta FGH; quelle concorreranno in qualche punto H. Si faccia centro in H, coll'interuallo HB, ouero HA, ouero HC, ſi deſcriua vn circolo, il quale, per la dimoſtratione antecedente, paſſarà per li tre punti A, B, C, come s'è detto.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE VI.

In vn dato circolo iſcriuere vn quadrato.



Sia dato il circolo ABCD, il di cui centro E, nel quale s' habbia da iſcriuere vn quadrato. Si tirino due diametri, come A C, B D, che ſi ſeghino ſcambieuolmente ad angoli retti nel centro E; e ſi congiunghino gli eſtremi [a] con le rette AB, BC, C D, D A. Dico ch'il quadrilatero ABCD è il quadrato iſcritto nel circolo ABCD. Perche gli angoli nel centro E ſono retti, perciò ſono frà di loro vguali, e gli archi oppoſti AB, B C, C D, D A [b] ſono frà di loro vguali: mà gli vguali archi ſono [c] ſotteſi da rette linee vguali; le rette linee dunque AB, BC, CD, DA ſono frà di loro vguali. Finalmente perche le rette AC; BD per coſtruttione ſono diametri del circolo, perciò ogn'vna delle portioni BCD, CDA, DAB, ABC, ſarà mezzo circolo; mà l'angolo [d] nel mezzo circolo è retto, ſaranno gli angoli ABC, BCD, CDA, D A B retti; ed il quadrilatero A B C D ſarà [e] quadrato. Per la qual coſa nel circolo ABCD s'è iſcritto il quadrato A B C D, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 1. poſtul.

b 2. del 1.

c 29. del 3.

d 31. del 3.

e 29. defin. del primo.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE VII.

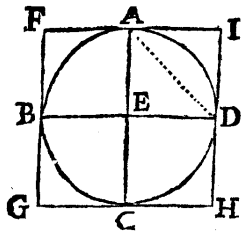
Intorno ad vn dato circolo circoſcriuere vn quadrato.

Sia

Sia dato il circolo ABCD, il di cui centro E, intorno al quale s'habbia da circoſcriuere vn quadrato.

Nel dato circolo ſi tirino due diametri, come AC, BD, i quali ſi ſeghino ad angoli retti nel centro E; per li punti A, B, C, D, ſi facciano paſſare le rette FG, GH, HI, IF, [a] che facciano angoli retti con i diametri AC, B D, ſi tiri la retta AD. Perche gli angoli EDI, IAE ſono retti, detrattone i due angoli EDA, EAD, reſtano i due angoli IDA, IAD, minori di due angoli retti, e per lo Scolio alla 31. propoſitione del primo, le rette HI, FI, continuate concorrono in qualche punto I. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che continuate l'altre rette, IH, GH, GF, concorreranno come in H, G, ed F. Dico ch'il quadrilatero FG HI è il quadrato circoſcritto al circolo ABCD.

a 11. del 1.



Perche gli angoli in B, & E, per coſtruttione ſono retti, ſaranno le rette FG, AC, [b] frà di loro parallele. Similmente eſſendo gli angoli in E, & D retti, la retta IH ſarà parallela ad AC, dal che le rette FG, IH ſono frà di loro parallele. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette FI, BD, GH ſono frà di loro parallele; e perciò il quadrilatero FGHI, [c] ſarà parallelogrammo, e ſarà FG [d] vguale ad HI, ed il lato FI vguale al lato GH. Inoltre perche FG è parallela ad AC, e la retta FA è parallela à GC, ſarà il quadrilatero FGCA [e] parallelogrammo, ed il lato FG [f] ſarà vguale ad AC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il quadrilatero BGHD è parallelogrammo, ed il lato GH è vguale à BD. Mà i diametri AC, BD ſono frà di loro vguali, i lati dunque FG, GH ſono frà di loro vguali: fù dimoſtrato il lato GH vguale ad FI; ed il lato FG vguale ad IH, i quattro lati FG, GH, HI, IF [g] ſaranno frà di loro vguali. Finalmente perche le rette FG, AC ſono frà di loro parallele, gli angoli CAF, GFA [h] ſono vguali à due angoli retti, e gli angoli FGC, ACG ſono vguali à due angoli retti: mà gli angoli FAC, GCA ſono retti; gli angoli dunque [K] in F, & G ſono ancora retti. Nel parallelogrammo FGHI l'angolo F è vguale all'angolo oppoſto H, e l'angolo G vguale all'oppoſto I; mà gli angoli in F, & G ſono retti, in conſeguenza gli angoli in H, & I ſaranno retti; e perciò il quadrilatero FGHI [l] ſarà quadrato. E perche i lati FG, GH, HI, IF fanno angoli retti con i diametri AC, BD, per il Corollario alla 16. propoſitione di queſto, tutti toccano il circolo, ed il quadrato FGHI è circoſcritto al circolo ABCD, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

b 28. del 1.

c 35. defin. del primo.

d 34. del 1.

e 35. defin. del primo.

f 34. del 1.

g 1. aſſiom.

h 29. del 1.

K 34. del 1.

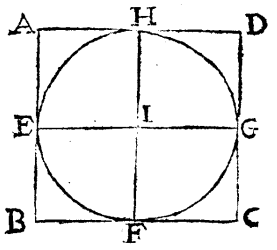
l 29. defin. del primo.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Dentro d'vn dato quadrato iſcriuere vn circolo.

Sia il dato quadrato ABCD, nel quale ſi voglia iſcriuere il circolo.

Si diuidano tutti quattro i lati del quadrato [a] in due parti vguali in H, E, F, G; si congiungano i punti oppoſti [b] con le rette EG, HF, le quali ſi ſegaranno in qualche punto I; fatto centro nell'punto I, coll'interuallo d'vna delle rette IE, IF, IG, IH, [c] ſi deſcriua il circolo HEFG. Perche i lati AB, DC ſono vguali, e paralleli, le loro metà, cioè EB, GC, ſono frà di loro vguali, e parallele; dal che le rette EG, BC [d] ſono frà di loro vguali, e parallele. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette AD, EG ſono vguali, e parallele: e ſimilmente che le rette AB, HF, come ancora DC, HF, ſono vguali, e parallele; e perciò i quadrilateri ID, IA, IB, IC, [e] ſono parallelogrammi, e ſarà IF [f] vguale ad EB, ed il lato IE vguale ad FB; come anco IG vguale ad HD, ed il lato HI vguale à GD. Mà le rette EB, BF, HD, DG ſono frà di loro vguali, ſtante che ſono metà de i lati del quadrato ABCD; ſaranno le rette IE, IF, IG, IH frà di loro vguali: dal che il circolo EFGH deſcritto intorno al centro I, paſſa per li punti F, G, H, I. Finalmente perche le rette AB, HF, ſono parallele, gli angoli HFB, ABF [g] ſono vguali à due angoli retti; mà l'angolo in B è retto, ſarà l'angolo in F retto. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che gli angoli in G, H, E ſono retti; e perciò i lati AB, BC, CD, DA, [h] toccano il circolo ne i punti E, F, G, H. Per la qual coſa il circolo HEFG è iſcritto nel quadrato ABCD, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



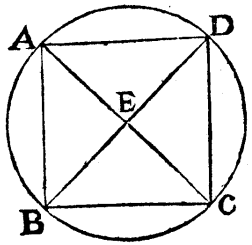
a 10. del 1.
b 1. poſtul.
c 3. poſt.
d 33. del 1.
e 35. defin del primo f 34. del 1.
g 29. del 1.
h Corollario alla 16. propoſitione del 3.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE IX.

Intorno ad vn dato quadrato circoſcriuere vn circolo.

Sia dato il quadrato ABCD, intorno al quale ſi vuole circoſcriuere vn circolo.

Si tirino i diametri AC, BD, i quali ſi ſegaranno in qualche punto E. Perche il quadrilatero ABCD è quadrato, perciò il lato AB [a] è vguale al lato AD, il triangolo ABD è iſoſcele, e gli angoli ABD, ADB [b] ſono frà di loro vguali; mà l'angolo BAD è retto, ogn'vno de'i due angoli dunque ABD, ADB è la metà d'vn'angolo retto, & ogn'vno de i rimanenti angoli CBD, CDB ſarà la metà d'vn' angolo retto. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ogn'vno de gli angoli BCA, BAC, ouero DCA, DAC, è la metà d'vn angolo retto; e perciò tutti ſono frà di loro vguali. Hor eſſendo gli angoli EDA, EAD frà di loro vguali, ſarà il lato EA [c] vguale al lato ED. Similmente perche gli angoli EDC, ECD ſono frà di



a 29. defin. del primo. b 5. del 1.
c 6. del 1.

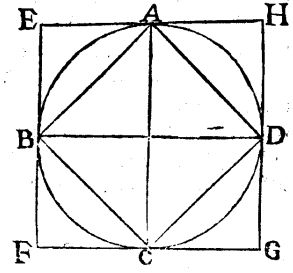
loro

di loro vguali, ſarà il lato E D vguale al lato E C. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il lato EB è vguale al lato EC, e perciò le quattro rette EB, EC, ED, EA ſono frà di loro vguali; Si che fatto centro nel punto E, e coll'interuallo EB ſi deſcriua il circolo A B C D; quello paſſarà per li punti A, B, C, D; e coſi ſarà circoſcritto il circolo ABCD intorno al dato quadrato, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Se nel circolo è iſcritto, e circoſcritto il quadrato; quello, ch'è circoſcritto, è il doppio dell'iſcritto.

Sia il quadrato iſcritto nel circolo, il notato ABCD, ſi tirino i diametri [a] *A C, BD, ed intorno al circolo ABCD ſia circoſcritto* [b] *il quadrato EFGH in modo, che tocchi il circolo ne i punti A, B, C, D, farà con i diametri AC, BD, angoli retti, e perciò A C* [c] *ſarà parallela ad EF, dal che il quadrilatero AEFC ſarà parallellogrammo, ed il lato AC* [d] *ſarà vguale ad EF. Nel triangolo CDA, angolo retto in D, il quadrato del lato AC* [e] *è vguale à i quadrati de i due lati CD, DA; mà CD, come lato del quadrato iſcritto, è vguale ad AD; ſarà il quadrato di AC il doppio del quadrato di CD, cioè del quadrato iſcritto A B C D. Fù dimoſtrato il lato AC vguale ad EF, ſarà il quadrato di EF, cioè il quadrato circoſcritto EFGH, il doppio del quadrato iſcritto ABCD, ch'era da dimoſtrarſi.*

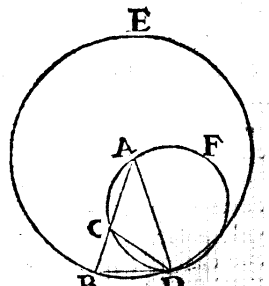


a 1. del. 3.
b 7. del 3.
c 28. del 1.
d 34. del 1.
e 47. del 1.

PROBLEMA X. PROPOSITIONE X.

Coſtruire vn triangolo iſoſcele, del quale ciaſcun angolo ſopra la baſe ſia il doppio dell'angolo verticale.

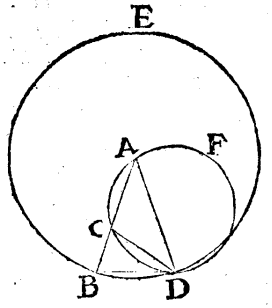
S'eſponga qualunque retta linea AB, la quale ſi diuida talmente in C, [a] che il rettangolo contenuto da tutta, e dalla parte BC, ſia vguale al quadrato del rimanente AC; poi fatto centro in A, [b] coll'interuallo AB, ſi deſcriua il circolo BDE, nel quale dal punto B s'addatti la retta BD [c] vguale alla retta AC, e ſi tiri la retta AD. Perche le rette AB, AD, per la definitione del circolo, ſono frà di loro vguali, il triangolo A B D ſarà iſoſcele, e gli angoli A B D, ADB [d] ſono frà di loro vguali. Dico, che ciaſcun'angolo A D B, ABD è il doppio dell'angolo BAD. Si tiri la retta CD, ed intorno al triangolo ACD [e] ſi



a 11. del 2.
b 3. poſtul.
c 1. del 4.
d 5. del 1.
e 5. del 4.

cir-

circoſcriua il circolo ACDF. Perche il rettangolo contenuto dalle rette AB, BC, per coſtruttione, è vguale al quadrato di AC, e la retta BD è poſta vguale ad AC; ſarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, vguale al quadrato della retta BD. Dal punto B, ch'è fuori del circolo CDF, ſono tirate le due rette BA, BD, delle quali la retta BD concorre col circolo CDF, la retta BA lo ſega, ed il rettangolo contenuto dalla ſegante AB, e dalla parte eſterna BC, per quel che s'è dimoſtrato, è vguale al quadrato della concorrente BD; la retta BD [f] tocca il circolo CDF nel punto D, la retta DC lo ſega, l'angolo dunque CDB, [g] contenuto dalla ſegante, e tangente, è vguale all'angolo BAD, nell'alterna portione: s'aggiunga all'vno, ed all'altro l'angolo CDA, tutto l'angolo BDA [h] ſarà vguale à i due angoli CDA, CAD. Nel triangolo CDA il lato AC è continuato verſo B, l'angolo BCD [K] eſterno è vguale à i due angoli CDA, CAD interni, ed oppoſti; ma queſti furono dimoſtrati vguali all'angolo ADB; ſarà l'angolo ADB vguale all'angolo BCD. Si diſſe l'angolo ADB eſſere vguale all'angolo ABD; gli angoli dunque DCB, DBC [l] ſono frà di loro vguali, ed il lato DC [m] ſarà vguale al lato DB: ma il lato AC, per coſtruttione, è vguale al medeſimo lato DB; perciò il lato AC [n] ſarà vguale al lato CD, e gli angoli CDA, CAD [o] ſaranno frà di loro vguali. E perche l'angolo BDC fù dimoſtrato vguale all'angolo BAD; ſarà tutto l'angolo ADB il doppio dell'angolo BAD; ma l'angolo ADB è vguale all'angolo ABD; ſarà l'angolo ABD il doppio dell'angolo A, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



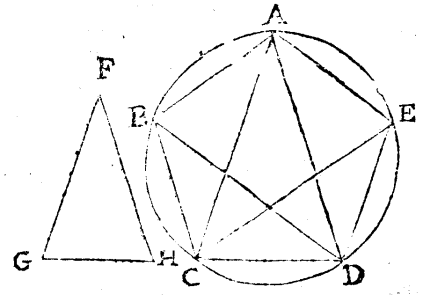
f 37. del 3.
g 32. del 3.
h 2. aſſiom.
K 32. del 1.
l 1. aſſiom.
m 6. del 1.
n 1. aſſiom.
o 5. del 1.

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XI.

In vn dato circolo iſcriuere vn pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato circolo ABCDE, nel quale ſi voglia iſcriuere vn pentagono equilatero, & equiangolo.

Si coſtituiſca, per l'antecedente propoſitione, il triangolo iſoſcele FGH, in modo, che ciaſcun'angolo FGH, FHG ſia il doppio dell'angolo F. Poi s'iſcriua nel dato circolo il triangolo ACD [a] equiangolo al triangolo FGH; ſarà ciaſcun'



a 2. del 4.

angolo

angolo ACD, ADC, il doppio dell'angolo CAD. Si diuidano gli angoli ACD, ADC [b] in due parti vguali con le rette DB, CE; i cinque angoli ACE, ECD, ADB, BDC, DAC ſaranno frà di loro vguali; dal che gli archi oppoſti DE, EA, AB, BC, CD [c] ſono fra di loro vguali; ma gli archi vguali [d] ſono ſotteſi da rette linee vguali, ſaranno le rette DE, EA, AB, BC, CD frà di loro vguali, ed il pentagono ABCDE ſarà equilatero. In oltre, perche l'arco AB è vguale all'arco CD, vgualmente s'aggiunga l'arco AED, ne viene l'arco BAED vguale all'arco CDEA; ma gli archi vguali ſono [e] oppoſti ad angoli vguali, quando ſono angoli alla circonferenza del medeſimo circolo, ſarà l'angolo ABC vguale all'angolo BCD. Similmente perche l'arco BC è vguale all'arco ED, vgualmente s'aggiunga l'arco BAE, ne viene l'arco BAED vguale all'arco CBAE; e perciò gli angoli BCD, CDE, che ſono oppoſti à quegli archi vguali, [f] ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che l'angolo EAB è vguale all'angolo ABC. Per la qual coſa nel circolo dato è iſcritto il pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

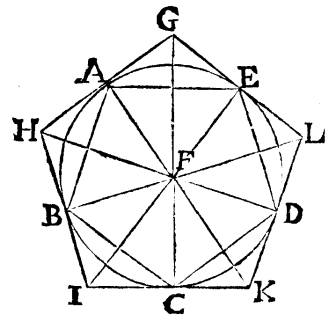
b 9. del 1.
c 26. del 3.
d 29. del 3.
e 27. del 3.
f 27. del 3.

PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XII.

Intorno ad vn dato circolo circoſcriuere vn pentagono equilatero, & equiangolo.

Sia il dato circolo ABCDE, il di cui centro F, intorno al quale ſi voglia circoſcriuere vn pentagono equilatero, ed equiangolo.

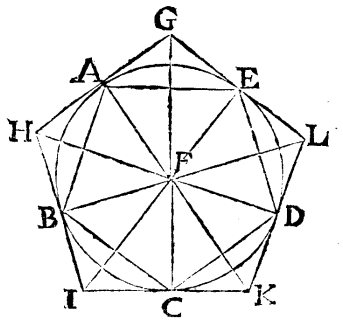
S'iſcriua nel circolo ABCDE [a] il pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, e dal centro F à i punti A, B, C, D, E, [b] ſi tirino le rette FA, FB, FC, FD, FE; per li punti A, B, C, D, E, ſi facciano paſſare le rette GH, HI, IK, KL, LG, [c] che facciano angoli retti con le rette tirate dal centro. Perche gli angoli FEG, FAG ſono retti, detrattone i due angoli FEA, FAE, reſtano i due angoli GEA, GAE minori di due angoli retti, e per lo Scolio alla 31. propoſitione, continuate le rette HG, LG concorreranno in qualche punto G. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le altre concorrono ne i punti H, I, K, L; ſi tirino le rette FG, FH, FI, FK, FL. Perche gli angoli in A, B, C, D, E, ſono retti, perciò i lati GH, HI, IK, KL, LE [d] toccano il circolo ne i punti A, B, C, D, E; e per il ſecondo Corollario alla 36. propoſitione del terzo, le tangenti HB, HA ſono frà di loro vguali. E per l'iſteſſa ragione la retta GA, è vguale ad EG; la retta LE è vguale ad LD; come ancora KD vguale alla retta KC, & IC, ad IB. Si conſiderino i triangoli HFA, HFB, de'quali il lato FA è vguale al lato FB, il lato FH è com-



a 11. del 4.
b 1. poſtul.
c 11. del 1.
d Corollario alla 16. del 3.

mune;

mune; saranno i due lati FH, FA vguali à i due FH, FB; la base HA è
c 8.del 1. vguale alla base HB, sarà l'angolo AFH [c] vguale all'angolo BFH; e l'angolo AHF vguale all'angolo BHF; dalche l'angolo BFA sarà il doppio dell'angolo HFA, e l'angolo BHA il doppio dell'angolo AHF. Nell'istesso modo si dimostrarà, che l'angolo AFE è il doppio dell'angolo AFG, e l'angolo AGE è il doppio dell'angolo AGF. In oltre perche i lati AE, AB sono fra di loro vguali, come lati del pentagono interno;
f 28. del 3. sarà l'arco AE [f] vguale all'arco AB, e
g 27. del 3. gli angoli EFA, AFB al centro [g] sono frà di loro vguali; dalche le loro metà, cioè gli angoli GFA, HFA sono fra di loro vguali. Ne i triangoli FAG, FAH, i due angoli GFA, GAF sono vguali à i due angoli HFA, HAF, il lato AF è commune;
h 26.del 1. sarà il lato FG [h] vguale allato FH; il lato GA vguale al lato AH; e l'angolo FGA vguale all'angolo FHA. Ma gli angoli BHA, EGA, per quel che s'è dimostrato, sono il doppio degli
K 6.assioma. angoli vguali FGH, FHG; gli angoli dunque BHA, EGA [K] sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli L, K, I, ognuno è vguale all'angolo G, ouero H; e perciò il pentagono GHIKL è equiangolo. In oltre, essendosi dimostrata la retta GA vguale ad AH, sarà GH il doppio di GA. E nell'istesso modo si dimostrerà IH essere il doppio di HB: ma la retta AH fù dimostrata vguale ad HB, sarà il lato GH vguale al lato IH. E nell'istesso modo si dimostrarà, che gli altri lati GL, LK, KI, ognuno è vguale ad HG, ouero HI: e perciò sono frà di loro vguali. Per la qual cosa intorno al circolo ABCDE, s'è circoscritto il pentagono GHIKL, equilatero, & equiangolo, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



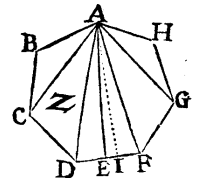
COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se dentro d'vn circolo sarà iscritta qualunque figura equilatera, & equiangola, e dal centro del circolo à gli angoli di questa saranno tirate rette linee, per gli estremi delle quali si facciano passare rette linee, che facciano angoli retti con le medesime tirate dal centro; quelle continuate concorreranno insieme; e sarà circoscritta intorno al circolo vna figura di tanti lati vguali, ed angoli vguali, per quanti ne hà la figura iscritta.

SCO-

SCOLIO DEL CLAVIO.

In ogni figura equilatera, & equiangola, se sarà di lati di numero imparo, la retta linea tirata da vno de gli angoli, diuidendo il lato opposto in due parti vguali, diuiderà l'angolo in due parti vguali, e sarà perpendicolare al lato opposto; e se diuide l'angolo in due parti vguali, diuiderà il lato opposto in due parti vguali, & ad angoli retti; e nella figura di lati di numero paro, la retta tirata da vn angolo all'angolo opposto, diuide quegli angoli in due parti vguali: e se la retta diuide vn angolo in due parti vguali, continuata segarà l'altr'angolo in due parti vguali.



Sia la figura di lati di numero imparo Z, e dall'angolo A sia tirata la retta AE, che diuida il lato opposto DF in due parti vguali; e la figura di lati di numero paro sia X, nella quale dall'angolo A all'angolo opposto E [a] sia tirata la retta AE, ed ambedue le figure siano equilatere, ed equiangole. Dico prima, che l'angolo A è diuiso dalla retta AE in due parti vguali, e che gli angoli AEF, AED sono fra di loro vguali. Dall'angolo A à gli altri angoli si tirino le rette AG, AF, AD, AC. Perche i due lati AH, HG sono vguali à i due lati AB, BC, e l'angolo AHG è vguale all'angolo ABC; sarà la base AG [b] vguale alla base AC, l'angolo HAG vguale all'angolo BAC, e l'angolo HGA vguale all'angolo BCA. E perche gli angoli HGF, BCD, per ipotesi sono vguali, detrattone gli vguali angoli HGA, BCA, resta l'angolo AGF [c] vguale all'angolo ACD. Ne i triangoli AFG, ADC, i due lati AG, GF sono vguali a i due lati AC, CD, l'angolo AGF è mostrato vguale all'angolo ACD; sarà la base AF [d] vguale alla base AD; l'angolo GAF vguale all'angolo CAD; e l'angolo GFA vguale all'angolo CDA; che detratti da gli vguali angoli GFD, CDF, resta l'angolo AFE [e] vguale all'angolo ADE. Similmente ne i triangoli AFE, ADE, i due lati AF, FE sono vguali à i due lati AD, DE, l'angolo AFE è vguale all'angolo ADE, la base AE è commune, sarà [f] l'angolo FAE vguale all'angolo DAE; e l'angolo FEA vguale all'angolo DEA, e tutto l'angolo EAH, [g] vguale à tutto l'angolo EAB. Per la qual cosa la retta EA, nella figura Z, diuide l'angolo BAH in due parti vguali, ed è perpendicolare [h] al lato DF, stante che gli angoli FEA, DEA sono vguali, cioè retti; e nella figura X la retta AE diuide gli angoli BAH, DEF in due parti vguali, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 1.post.

b 4. del 1.

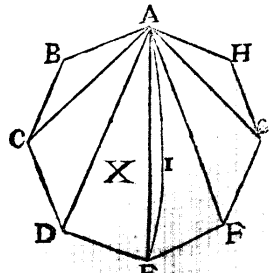
c 3.assiom.

d 4. del 1.

e 3.assioma.

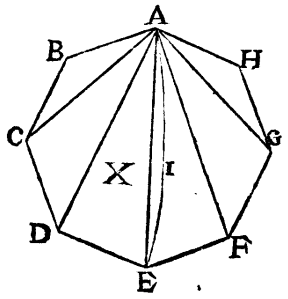
f 4. del 1.

g 2. assiom.



h 10. defin. del 1.

Di nuouo, ſuppoſto che la retta AE ſeghi l'angolo BAH in due parti vguali. Dico che nella figura Z diuide il lato oppoſto DF in due parti vguali, & ad angoli retti; e nella figura X diuide l'angolo DEF in due parti vguali. Se la retta AE non diuide il lato DF, ò l'angolo DEF in due parti vguali, ſi diuida il lato DF in due parti vguali, come in I, e ſi tiri la retta IA, e nella figura X ſi tiri la retta EIA. Per quel che s'è dimoſtrato, la retta IA diuide l'angolo BAH in due parti vguali, ch' è contro all' ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto, che la retta EA diuida l'angolo BAH in due parti vguali: non dunque nella figura Z la retta IA diuide il lato DF in due parti vguali in I, mà la retta AE lo diuide in due parti vguali in E. E nella figura X, la retta AEI non ſega gli angoli DEF, BAH in due parti vguali; mà la retta AE, che ſega l'angolo BAH in due parti vguali, ſegarà ancora l'angolo DEF in due parti vguali. Nella figura Z ſi dimoſtri, come prima ſi fece, che AD è vguale ad FA; e perche i lati AE, EF ſono vguali à i due AE, ED, e la baſe AF è vguale alla baſe AD, ſarà l'angolo AEF K *vguale all'angolo AED; e perciò la retta AE è perpendicolare al lato DF, ch'era da dimoſtrarſi.*



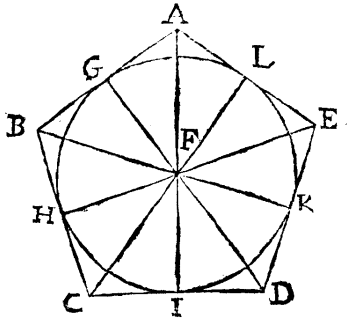
K 8. del 1.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

In vn dato pentagono equilatero, ed equiangolo, iſcriuere vn circolo.

Sia dato il pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, nel quale s' habbia ad iſcriuere vn circolo.

Si diuidano due angoli proſſimi, come i due CBA, BAE, [a] in due parti vguali con le rette AF, BF; per l'antecedente Scolio, le rette AF, BF continuate ſegano i lati oppoſti in due parti vguali, e perciò ſi ſegaranno ſcambieuolmente in qualche punto F; ſi tirino le rette FE, FD, FC, e ſi conſiderino i due triangoli ABF, AEF, de' quali i due lati EA, AF ſono vguali alli due lati BA, AF; l'angolo EAF è vguale, per coſtruttione all'angolo BAF; ſarà la baſe FB [b] vguale alla baſe FE, e l'angolo AEF vguale all'angolo ABF. Dagli vguali angoli AED, ABC ſe ne leuino gli vguali angoli AEF, ABF, reſta l'angolo DEF [c] vguale all'angolo CBF; mà l'angolo CBF, per coſtruttione, è la metà dell'angolo ABC; ſarà l'angolo DEF la metà dell'angolo DEA; dal che la retta FE diuide l'angolo DEA in due par-



a 9. del 1.

b 4. del 1.

c 3. aſſi. oma

parti vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette FD, FC diuidono gli angoli D, & C, in due parti vguali. Dal punto F à i lati del pentagono [d] ſi facciano cadere le perpendicolari FL, FG, FH, FI, FK. Ne i triangoli FLA, FGA, i due angoli FLA, FAL ſono vguali à i due angoli FGA, FAG, il lato AF è commune, ſarà AL [e] vguale ad AG, ed il lato FL vguale ad FG. Similmente ne i triangoli FGB, FHB, i due angoli FGB, FBG ſono vguali à i due FHB, FBH, il lato FB è commune, ſarà il lato FG vguale ad FH. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ogn'vna delle rette FI, FK è vguale ad FL, e perciò tutte le rette FL, FG, FH, FI, FK [f] ſono frà di loro vguali, ed il circolo deſcritto intorno al centro F paſſarà per li punti G, H, I, K, L. Finalmente perche i lati del pentagono fanno angoli retti con li ſemidiametri FL, FG, FH, FI, FK, per il Corollario alla 16. propoſ. del 3. toccano il circolo ne i punti G, H, I, K, L. Per la qual coſa il circolo GHIKL è iſcritto nel dato pentagono, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

d 12. del 1.

e 26. del 1.

f 1. aſſiom.

SCOLIO DEL CLAVIO.

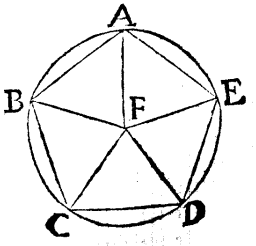
Nell'iſteſſo modo ſi può iſcriuere vn circolo in qualunque data figura equilatera, & equiangola; cioè ſempre ſi diuidono due angoli più proſſimi in due parti vguali, ed il concorſo delle rette, che diuidono i due angoli ſi fà dentro della figura; ſtante che, in quelle di lati di numero imparo, le rette, che diuidono gli angoli in due parti vguali, per lo Scolio alla 12. propoſitione, ſegano i lati oppoſti in due parti vguali, e perciò ſi ſegano ſcambieuolmente dentro della figura; ed in quelli di lati di numero paro, le rette, che diuidono i due angoli in due parti vguali, diuidono ancora gli angoli oppoſti in due parti vguali, e perciò ſi ſegano ſcambieuolmente dentro della figura. Poi dal punto del concorſo ſi facciano cadere [a] *rette linee perpendicolari à i lati della figura, fatto centro nel detto concorſo, coll'interuallo d'vna delle dette perpendicolari, ſi deſcriua il circolo, che ſarà quello iſcritto dentro della propoſta figura.*

a 12. del 1.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

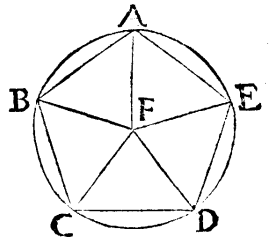
Intorno ad vn dato pentagono equilatero, & equiangolo, circoſcriuere vn circolo.

Sia il dato pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, intorno al quale s'habbia da circoſcriuere vn circolo. Si diuidano due angoli più proſſimi, come CBA, BAE, [a] in due parti vguali con le rette AF, BF, le quali continuate concorreranno dentro del pentagono ABCDE, ſtante che ogn'vna, ſe ſi continua, ſega il lato oppoſto in due patti vguali, come fù dimoſtrato nello Scolio alla 12. propoſ.; dal punto F ſi tirino le rette FE, FD, FC; e ſi conſiderino i due triangoli FAE, FAB, de'quali i due lati FA, AE ſono vguali à i due lati FA, AB; l'an-



a 9. del 1.

golo FAE, per costruttione, è vguale all'angolo FAB, sarà la base F E [b] vguale alla base FB, e l'angolo FEA vguale all'angolo FBA. E perche gli angoli CBA, DEA sono frà di loro vguali, e l'angolo FBA è la metà dell'angolo CBA; sarà l'angolo FEA la metà dell'angolo DEA, e perciò la retta F E diuide l'angolo DEA in due parti vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le rette FD, FC diuidono gli angoli BCD, CDE in due parti vguali. Si considerino i triangoli ABF, FBC, de'quali i due lati AB, BF sono vguali à i due lati CB, BF, l'angolo CBF è v-guale all'angolo ABF, sarà la base CF [c] vguale alla base FA. Finalmente, perche gli angoli del pentagono ABCDE sono frà di loro vguali, le loro metà [d] saranno frà di loro vguali; e perciò l'angolo FAB è vguale all'angolo FBA, ed il lato FA [e] è vguale al lato FB: mà il lato FB è dimostrato vguale ad FE, e la retta FA vguale ad FC; le rette FE, FA, FB, FC [f] sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà che la retta FD è vguale ad FE; si che fatto centro in F, coll'interuallo FA, ouero FB, [g] si descriua il circolo, quello passarà per li punti B, C, D, E, A, e sarà circoscritto il circolo ABCDE, intorno al dato pentagono equilatero, & equiangolo, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



b 4. del 1.
c 4. del 1.
d 7. assiom.
e 6. del 1.
f 1. assioma.
g 3. postul.

SCOLIO DEL CLAVIO.

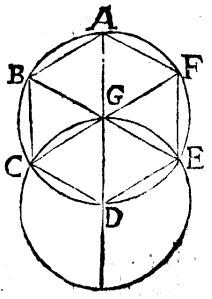
Nell'istesso modo si può circoscriuere il circolo intorno à qualunque figura equilatera, ed equiangola, cioè col diuidere due angoli più prossimi in due parti vguali, e facendo centro nel concorso di quelle rette, che diuidono gli angoli, coll'interuallo d'vna di esse, si descriua il circolo, che sarà circoscritto intorno alla data figura equilatera, ed equiangola.

PROBLEMA XV. PROPOSITIONE XV.

Dentro d'vn dato circolo iscriuere vn esagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato circolo ABCD, il di cui centro G, dentro al quale s' habbia ad iscriuere vn esagono equilatero, ed equiangolo.

Si tiri [a] il diametro A D, e fatto centro in D, coll' interuallo DG, [b] si descriua il circolo CGE; segarà il dato circolo come in C, & E; si tirino le rette EG, C G, [c] e si prolunghino [d] sino alla circonferenza in B, ed F; si tirino le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA, e sarà iscritto nel dato circolo l'esagono ABCDEF. Dico, che questo è equilatero, ed equiangolo.



a 1. del 3.
b 3. postul.
c 1. post.
d 2. post.

Per

Per la definitione del circolo le rette C G, G D, GE sono frà di loro vguali; e per l'istessa ragione le tre rette D C, D G, D E sono frà di loro vguali, per la qual cosa i due triangoli G C D, G D E [e] sono equilateri, e perciò [f] equiangoli; e perche tre angoli di qualsiuoglia triangolo sono vguali [g] à due angoli retti, sarà tanto l'angolo D G C, quanto l'angolo D G E, la terza parte di due angoli retti, e tutti due insieme, cioè l'angolo CGE, sarà le due terze parti di due angoli retti; mà i due angoli EGC, E G F [h] sono vguali à due angoli retti, sarà l'angolo EGF la terza parte di due angoli retti; dal che i trè angoli FGE, EGD, DGC sono frà di loro vguali; mà gli angoli al vertice [K] sono frà di loro vguali; li sei angoli dunque nel centro dell'esagono sono frà di loro vguali, e gli archi opposti [l] sono frà di loro vguali; mà gli archi vguali [m] sono sottesi da rette linee vguali; saranno i lati AB, BC, CD, DE, EF, FA, frà di loro vguali, e l'esagono iscritto sarà equilatero. Finalmente perche l'arco AB è vguale all'arco CD, vgualmente se gli aggiunga l'arco DEFA; tutto l'arco C D E F A [n] sarà vguale all'arco DEFAB; e gli angoli opposti nella circonferenza, cioè gli angoli DCB, CBA, [o] sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutti gli angoli dell'esagono ABCDEF, sono frà di loro vguali. Per la qual cosa l'esagono iscritto sarà equilatero, ed equiangolo, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

e 23. defin. del 1.
f 5. del 1.
g 32. del 1.
h 13. del 1.
K 15. del 1.
l 26. del 3.
m 29. del 3.
n 2. assioma.
o 27. del 3.

COROLLARIO.

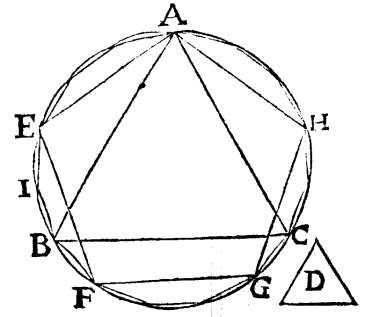
Perche D E, lato dell'esagono, è vguale alla retta DG semidiametro del circolo; sarà manifesto, ch'il lato dell' esagono è vguale al semidiametro del circolo, nel quale è iscritto.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIONE XVI.

Nel dato circolo iscriuere vn quindecagono equilatero ed equiangolo.

Sia il dato circolo ABC, nel quale s' habbia ad iscriuere vn quindecagono equilatero, ed equiangolo.

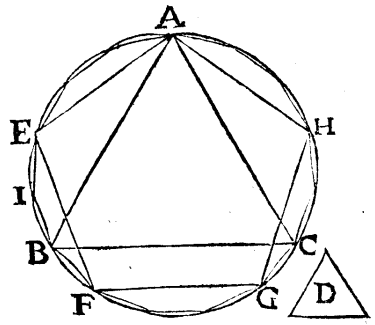
Si descriua [a] qualunque triangolo equilatero D, il quale per la quinta propositione del primo libro sarà equiangolo; s'iscriua nel circolo AB C [b] il triangolo ABC equiangolo al triangolo D, quello sarà [c] equilatero; e perche rette linee vguali [d] detraggono archi vguali, sarà l'arco sotteso dal lato AB, la terza parte di tutta la circonferenza del circolo, e perciò di quelle parti, delle quali tutta la circonferenza deue essere quindici, la retta A B ne sottenderà



a 1. del 1.
b 2. del 3.
c 6. del 1.
d 28. del 3.

cinque.

e 11. del 4. cinque. Di nuouo s'iſcriua nel circolo ABC e il pentagono equilatero, & equiangolo AEFGH in modo, che l'angolo A del pentagono termini nell'angolo A del triangolo A B C; eſſendo i cinque lati del pentagono frà di loro vguali, ſottenderanno f archi vguali, e perciò l'arco ſotteſo dal lato AE ſarà la quinta parte di tutta la circonferenza del circolo. Si che di quelle parti, delle quali tutta la circonferenza deue eſſere quindici, l'arco AE ne conterrà tre; mà ſi diſſe che l'arco AB, ne conteneua cinque, ſe dall'arco AB ſe ne detrae l'arco AE, reſta l'arco EB, il quale conterrà due di quelle parti: diuiſo l'arco EB g in due parti vguali in I, l'arco IB ſarà la decimaquinta parte di tutta la circonferenza del circolo; ſi tiri la retta IB, ſarà IB, il lato del quinto decagono; s'addattino h nel dato circolo altre quattordici rette linee vguali ad IB, che ſottenderanno K gli altri quattordici archi vguali all'arco IB; e ſarà iſcritto il quinto decagono che ſi cerca. Finalmente perche l'arco EB contiene due di quelle quindici parti, nelle quali è diuiſa tutta la circonferenza del circolo, il rimanente EACB ſarà tredici delle medeſime parti. Similmente perche IF contiene due di quelle quindici parti, il reſtante I A C F, ne conterrà tredici; e perciò l'arco EACB ſarà vguale all'arco I A C F; dalche gli angoli oppoſti FBI, BIE l ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutti gli altri angoli ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa nel dato circolo s'è iſcritto il quindecagono equilatero, ed equiangolo, ch'era da farſi, e dimoſtraſi.



h 1. del 4.

K 28. del 3

l 27. del 3.

Fine del Quarto Elemento.

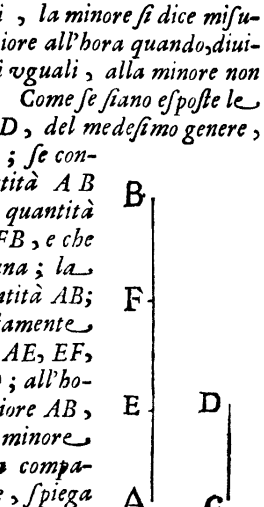
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO QVINTO.

DEFINITIONI.

I.

La quantità minore ſi dice eſſer parte della maggiore, quando la minore miſura giuſtamente la maggiore.

DELLE quantità ineguali, la minore ſi dice miſurare giuſtamente la maggiore all'hora quando, diuiſa la maggiore nelle parti vguali, alla minore non ſoprauanza cos'alcuna. Come ſe ſiano eſpoſte le quantità ineguali AB, CD, del medeſimo genere, e ſia AB maggiore di CD; ſe concepiremo diuiſa la quantità A B nelle parti vguali alla quantità CD, che ſiano AE, EF, FB, e che non ſoprauanzi cos' alcuna; la quantità CD ſi dirà miſurare giuſtamente la quantità AB; ed all'incontro la quantità AB ſi dirà eſſere giuſtamente miſurata dalla minore CD. Ma ſe, oltre le parti AE, EF, FB, ſoprauanzaſſe qualche quantità minore di CD; all'hora la minore CD, non miſura giuſtamente la maggiore AB, ne la maggiore AB è miſurata giuſtamente dalla minore CD. Hor douendoſi in queſto quinto Libro fare la comparatione delle quantità riſpetto alle loro grandezze, ſpiega Euclide che coſa douremo intendere, quando nelle comparationi da farſi lui eſprime queſta voce, Parte, e dice, ch'all'hora la quantità minore comparata alla maggiore, la chiama parte, quando miſura la maggiore giuſtamente; e così la minore CD ſi chiamerà parte della maggiore AB, quando miſurerà giuſtamente la maggiore AB. Ma ſe CD non miſura giuſtamente la maggiore AB, all'hora CD non ſi chiamerà parte della maggiore AB.



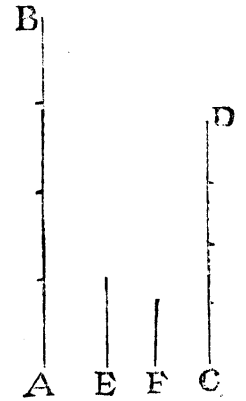
II.

La quantità maggiore si dice essere multiplice della quantità minore, quando la maggiore è misurata giustamente dalla minore.

Quando si fà la comparatione frà due quantità ineguali, ò si fà la comparatione dalla minore alla maggiore, ouero dalla maggiore alla minore: facendosi la comparatione dalla minore alla maggiore, se la minore misura giustamente la maggiore, la minore, per la definitione antecedente, si dice esser parte della maggiore. Ma facendosi la comparatione dalla maggiore alla minore, se la maggiore sarà misurata giustamente dalla minore, la maggiore si dirà esser multiplice della minore.

SCOLIO.

Le quantità, che sono misurate vgualmente da altretante quantità, si dicono essere vguali multiplici di quelle quantità, dalle quali sono vgualmente misurate.

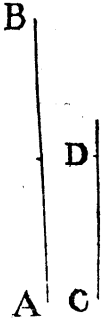


Come se le quantità AB, CD fossero misurate vgualmente dalle quantità E, ed F, cioè che la quantità E misuri tante volte AB, senza che soprauanzi cos'alcuna, per quante volte la quantità F misura CD, senza auanzo alcuno; in tal caso le quantità AB, CD, si dicono essere vguali multiplici delle quantità E, ed F,. Dond'è manifesto, che se saranno proposte due, ò più quantità, come E, F, e si vogliano ritrouare altretante quantità, che siano vgualmente multiplici delle proposte, basta à trouare altretante quantità, come AB, CD, che siano vgualmente misurate dalle proposte E, F; e per quel, che s'è detto, le quantità AB, CD, saranno vgualmente multiplici delle quantità E, F; ed il medesimo si farà, se le quantità proposte saranno più di due.

III.

Proportione è la scambieuole relatione frà due quantità del medesimo genere, rispetto alle loro grandezze.

Quando si fà la comparatione fra due terminate quantità del medesimo genere, come linea à linea, superficie à superficie, corpo à corpo, moto à moto, tempo à tempo, tono à tono &c. in riguardo à quello, che appartiene alle loro grandezze, cioè secondo quello, che vna quantità è maggiore, ò vguale, ò minore dell'altra, tal relatione si chiama proportione. Come facendosi la comparatione fra la quantità terminata AB, e la quantità terminata CD, del medesimo genere, e trouandosi, che AB sia misurata dalla quantità CD, verbi gratia, due volte, si dice ordinariamente la quantità AB essere il doppio della quantità CD; cioè AB rispetto alla quantità C D è il doppio. Hor in vece di dire la relatione, che hà la quantità AB rispetto alla quantità CD, diremo la proportione, che hà la quantità AB alla quantità CD, essere il doppio; di modo che quella voce proportione non esprime altro, se non che quella relatione, ò respettiuità, ch'è fra l'vna, e l'altra quantità, esprimendo come l'vna è maggiore, ò minore, ouero vguale all'altra.



Nota che le quantità, frà le quali si fa la comparatione, si chiamano termini della proportione; come se si farà la comparatione frà le quantità AB, CD, le medesime AB, CD si chiamano termini della proportione, e la quantità AB nominata nel primo luogo, si chiama primo termine, ouero antecedente; e la quantità CD, nominata nel secondo luogo, si chiama secondo termine, ouero conseguente. E così facendosi la comparatione della quantità CD alla quantità AB, sarà CD il primo termine, ò antecedente, & AB sarà il secondo termine, ò conseguente.

IV.

Analogia, ò proportionalità, è la similitudine delle proportioni.



Le proportioni si dicono essere simili fra di loro, quando sono fra di loro vguali, e si dicono ancora essere le medesime; cioè l'istesso è dire, la proportione, ch'è fra la quantità A, e la quantità B, è simile alla proportione, ch'è fra la quantità C alla quantità D; quanto è dire, la proportione della quantità A alla quantità B, è vguale alla proportione della quantità C alla quantità D; e l'istesso è dire, la proportione di A à B, è la medesima, che la proportione di C à D, ouero che A à B è come C à D. Supposto questo, chiaramente si vede, ch'Euclide in questa difinitione, non hà voluto intender altro, se non che dare il nome alle simili, ò vogliamo dire, vguali proportioni, comparate fra di loro; come se la proportione della quantità A alla quantità B fosse vguale alla proportione, ch'è fra la quantità C, e la quantità D. Questa vgualità, ò similitudine, e sarebbe fra la proportione di A à B, e la proportione di C à , si chiama Analogia, ouero Proportionalità.

V.

Quelle quantità si dicono hauere proportione frà di loro, le quali multiplicate si possono scambieuolmente superare.



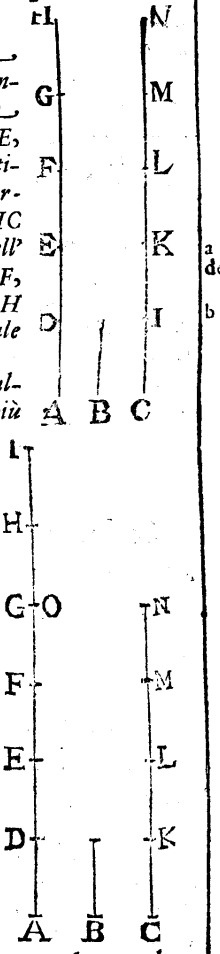
Il senso di questa definitione è, che di due quantità, multiplicandone vna secondo tutte le multiplicationi, se vno di quei multiplici supera l' altra quantità, diremo che quelle due quantità hanno scambieuolmente proportione, come se fossero proposte le quantità A, B, e si voglia vedere se hanno proportione; si prenda C multiplice di B, secondo qualunque multiplicatione; se la quantità C supera A, diremo che A, & B hanno scambieuolmente proportione. Se poi C non è maggiore di A; si prenda altro multiplice maggiore di C, come D, e se questo non fosse maggiore di A, bisogna concepirne vn altro maggiore di D, e con quest'ordine per tutte le multiplicationi. Se in tutte le multiplicationi si peruerrà à qualche multiplice, che sia maggiore di A, concluderemo, che le quantità A, B, hanno scambieuole proportione; ma se niuno degl'infiniti multiplici è maggiore di A, le quantità A, B, non hauranno scambieuole proportione: e questo sia detto per modo d'esempio; poiche questa definitione non è fatta per trouare, se fra due quantità proposte sia, ò non sia proportione, secondo il modo tenuto antecedentemente; perche essendo infiniti i multiplici, se fra due quantità non cadesse proportione alcuna mai si peruerrebbe alla notitia che fra quelle quantità non cade proportione alcuna; ma è fatta accioche si concepisca di qual natura siano le quantità, che hanno proportione, come sono le quantità terminate del medesimo genere; e di qual natura siano quelle, che non hanno proportione, come sono le quantità indeterminate comparate alle terminate, e le quantità di diuerso genere; poiche multiplicandosi vna quantità terminata per qualunque gran multiplice, mai produrrà quantità maggiore all'indeterminata; e perciò le quantità terminate non hanno proportione all' indeterminate; ne la linea multiplicata secondo qualunque gran multiplice, produrrà quantità, che si possa dire maggiore di qualunque picciola superficie, e così multiplicata ogni gran superficie per qualunque gran multiplice, cioè preso il multiplice d'vna superficie, secondo qualunque gran multiplicatione, mai produrrà quantità maggiore di qualunque picciolissimo corpo; e così fra le cose, che sono di diuerso genere non cade proportione alcuna. E di quì è manifesta la ragione, perche Euclide nella terza definitione dice, che la proportione è la scambieuole relatione fra due quantità del medesimo genere.

ANNOTATIONE.

Per render chiara, ed intelligibile la seguente definitione, stimata sin hora oscura, e cauata da principio remoto, premetto le seguenti dimostrationi.

PRIMA.

Se due quantità sono misurate giustamente da vn altra quantità; se sono misurate vgualmente, sono frà di loro vguali; e se non sono misurate vgualmente, quella, ch'è misurata più volte, sarà maggiore.



Siano le quantità A, & C misurate giustamente dalla quantità B, e supposto prima, che siano misurate vgualmente. Dico che A è vguale alla quantità C. Si diuidano le quantità A, & C nelle parti vguali à B, che siano AD, DE, EF, FG, GH, & CI, IK, KL, LM, MN; sarà la moltitudine delle parti in AH vguale alla moltitudine delle parti in CN. Hor essendo AD vguale alla quantità B, & IC vguale alla medesima B, sarà AD [a] vguale ad IC. Nell' istesso modo si dimostrerà, che DE è vguale ad IK, che EF, è vguale à KL, che FG è vguale ad LM, e similmente GH vguale ad MN. Per la qual cosa tutta AH [b] sarà vguale à CN, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 1. assioma del 1.

b 2. assioma.

Di nuouo nella figura seguente non siano A, & C vgualmente misurate dalla quantità B, mà A I sia misurata più volte da B di quello ch'è misurata CN. Dico che A I è maggiore di CN.

Si diuida A nelle parti vguali à B, e siano quelle AD, DE, EF, FG, GH, HI; e si diuida C nelle parti vguali à B, che siano CK, K L, L M, M N. Si prendano in AI tante parti quante ne sono in CN, che siano quelle notate in AO. Perche tante parti sono in A O per quante ne sono in C N, le due AO, C N saranno misurate vgualmente da B; e, per quel che s'è dimostrato, le quantità A O, C N, sono frà di loro vguali. E perche A I, per ipotesi, contiene maggior numero di parti di quelle che sono in C N, conterrà ancora maggior numero di parti di quelle, che sono in C O. Per la qual cosa A I sarà maggiore di A O; mà A O è vguale à CN, sarà AI maggiore di CN, come fù proposto dimostrare.

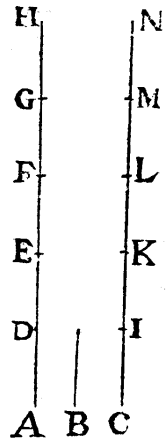
SECONDA.

Se due quantità sono misurate giustamente da vn altra quantità; se quelle due sono vguali, saranno misurate vgualmente; e se sono ineguali, la maggiore sarà misurata più volte, che la minore.

Siano le due quantità A, & C, le quali siano misurate giustamente dalla quantità B. Dico, che se sono frà di loro vguali, saranno misurate vgualmente

te da B; e se sono ineguali, la maggiore sarà misurata più volte da A, che la minore.

Supposto prima, che A sia vguale à C. Dico che tante volte A è misurata da B, per quante volte C è misurata dalla medesima B. Se A, & C non sono misurate vgualmente da B, vna di quelle sarà misurata più volte, che l'altra. Sia dunque A misurata più volte di quello, ch'è misurata C; per l'antecedente dimostratione A sarà maggiore di C, ch'è contro all'ipotesi; non dunque A è misurata più volte, mà le quantità A, & C, sono vgualmente misurate da B, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo sia A maggiore di C. Dico che A è misurata più volte da B di quello, ch'è misurata C. Se A non è misurata più volte da B di quello, ch'è misurata C, ò sarà misurata tante volte, per quante volte è misurata C; ouero sarà misurata minori volte. Se A è misurata tante volte, per quante volte è misurata C, per l'antecedente dimostratione, sarà A vguale à C, ch'è contro all'ipotesi; se poi A è misurata minori volte da B di quello, ch'è misurata C, per l'antecedente dimostratione, A sarà minore di C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A è vguale, ne minore di C, mà sarà maggiore, ch'era da dimostrarsi.

TERZA.

Se saranno due quantità A, B, vguali multiplici di due altre quantità C, D, secondo qualunque multiplicatione; e siano prese le quantità E, F, vguali multiplici delle medesime C, D, secondo qualunque multiplicatione. Dico, ch'in tutte l'infinite multiplicationi, se A è vguale ad E, ancora B sarà vguale ad F; se A è maggiore di E, ancora B sarà maggiore di F: e se A è minore di E, ancora B sarà minore di F.

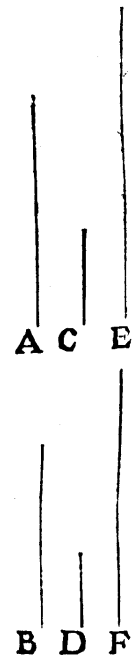
Supposto prima, che A sia vguale ad E. Dico che B sarà vguale ad F.

Perche A, & B, per ipotesi, sono vguali multiplici delle due C, D, tante volte A è misurata da C, per quante volte B è misurata da D. Similmente essendo le due E, F vguali multiplici delle due C, D, tante volte E sarà misurata da C, per quante volte F è misurata da D. In oltre perche A si suppone vguale ad E, per l'antecedente dimostratione, tante volte A sarà misurata da C, per quante volte E è misurata dalla medesima C; ma la quantità A è misurata da C tante volte, per quante volte B è misurata da D, sarà B misurata da D tante volte, per quante volte E è misurata da C; per ipotesi E è misurata da C tante volte, per quante volte F è misurata da D, sarà B misurata tante volte da D, per quante volte F è misurata da D; e per la pri-

prima dimostratione di questo libro, sarà B vguale ad F, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo, supposto che A sia maggiore di E. Dico che B sarà maggiore di F.

Perche A, ed E, per ipotesi, sono misurate giustamente da C: e si suppone A maggiore di E, per l'antecedente dimostratione sarà A misurata più volte da C di quello, ch'è misurata E dalla medesima C. Ma A, per ipotesi, è misurata tante volte da C, per quante volte B è misurata da D; sarà B misurata più volte da D di quello, che E è misurata da C. S'è mostrato E essere misurata tante volte da C, per quante volte F è misurata da D; perciò B sarà misurata più volte da D di quello, ch'è misurata F dalla medesima D; e per la prima dimostratione, B sarà maggiore di F.



Finalmente, supposto che A sia minore di E. Dico che B sarà minore di F.

Perche A è minore di E, per l'antecedente dimostratione, sarà A minori volte misurata da C di quello, che E è misurata da C; ma s'è dimostrato che A è misurata da C tante volte, per quante volte B è misurata da D; sarà B minori volte misurata da D, di quello che E è misurata da C. Fù similmẽte dimostrato essere tante volte E misurata da C, per quante volte F è misurata da D, sarà B misurata minori volte da D di quello, che F è misurata dalla medesima D; e per la prima dimostratione, B sarà minore di F, ch'era da dimostrarsi.

QVARTA.

Se saranno quattro quantità, e la prima è multiplice, ò parte della seconda, come la terza è multiplice, ò parte della quarta; preso gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione; come ancora preso gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione. Dico che sempre se il multiplice della prima è vguale al multiplice della seconda, ancora il multiplice della terza sarà vguale al multiplice della quarta: se il multiplice della prima è maggiore del multiplice della seconda, ancora il multiplice della terza sarà maggiore del multiplice della quarta; e se il multiplice della prima è minore del multiplice della seconda, ancora il

multiplice della terza sarà minore del multiplice della quarta.



Siano le quattro quantità A, B, C, D, delle quali la prima A, e la terza C, siano vgualmente multiplici, ò parti della seconda B, e quarta D, cioè che A sia multiplice, ò parte di B, come C è multiplice, ò parte di D; e preso gli vguali multiplici della prima A, e terza C, secondo qualunque multiplicatione, che siano F, & G: similmente siano presi gli vguali multiplici della seconda B, e quarta D, secondo qualunque multiplicatione, che siano H, ed I. Dico che se F è vguale ad H, ancora G sarà vguale ad I: se F è maggiore di H, ancora G sarà maggiore di I; e se F è minore di H, ancora G sarà minore di I. Supposto prima che A, & C, siano vguali multiplici di B, & D.

Perche F, & G sono vguali multiplici di A, & C, tante volte F sarà misurata da A, per quante volte G è misurata da C. Si diuida la quantità F nelle parti vguali ad A, e siano FK, KL, LM; e si diuida la quantità G nelle parti vguali à C, che siano GN, NO, OP. Perche FK e vguale ad A, per la seconda dimostratione, tante volte FK sarà misurata da B, per quante volte A è misurata dalla medesima B. Nell'istesso modo si prouerà, che tante volte GN è misurata da D, per quante volte C è misurata dalla medesima D. Mà la quantità A, per ipotesi, è misurata da B tante volte, per quante volte C e misurata da D; sarà FK misurata tante volte da B, per quante volte GN è misurata da D. In oltre perche KL, LM, ogn'vna è vguale ad FK; e le parti NO, OP ogn'vna è vguale à GN; tante volte KL sarà misurata da B per quante volte NO è misurata da D; e tante volte LM sarà misurata da B, per quante volte OP è misurata da D. Per la qual cosa tutta FM sarà tante volte misurata da B, per quante volte GP è misurata da D; e perciò FM, GP sono vguali multiplici delle due B, D. Mà, per ipotesi, le due H, I, sono vguali multiplici delle medesime B, D; per l'antecedente dimostratione, se F è vguale ad H, ancora G sarà vguale ad I; se F è maggiore di H, anco G sarà maggiore di I; e se F è minore di H, ancora G sarà minore di I, come fù proposto dimostrare.

Sia di nuouo A tal parte di B, quale C è parte di D; saranno le due B, & D vgualmente multiplici di A, & C; ed operandosi come sopra s'e fatto, si dimostrerà, che H, ed I, sono vguali multiplici di A, & C: mà, per ipotesi, F & G, sono vguali multiplici delle medesime A, & C: per l'antecedente dimo-

stratione

stratione se F è vguale ad H, ancora G sarà vguale ad I: se F è maggiore di H ancora G sarà maggiore di I; e se F è minore di H, ancora G sarà minore di I. E perche F, & G sono vguali multiplici di A, & C, secondo qualunque multiplicatione, ed anco H, ed I sono vguali multiplici di B, & D, secondo qualunque multiplicatione; in conseguenza in ogni multiplicatione sempre succederà, che se F è vguale ad H, ancora G sarà vguale ad I: se F è maggiore di H, ancora G sarà maggiore di I; e se F è minore di H, ancora G sarà minore di I, ch'era da dimostrarsi.

V I.

All' hora di quattro quantità la prima alla seconda si dirà hauere l'istessa proportione, quale hà la terza alla quarta, quando presi gli vguali multiplici della prima, e terza quantità, secondo qualunque multiplicatione; ed anco presi gli vguali multiplici, della seconda, e quarta quantità, secondo qualunque multiplicatione; il multiplice della prima, essendo maggiore del multiplice della seconda, anco il multiplice della terza sia maggiore del multiplice della quarta. Ouero se il multiplice della prima è minore, ò vguale al multiplice della seconda, anco il multiplice della terza sia minore, ò vguale al multiplice della quarta.

Dopo, che s'è dimostrato nell'annotatione, all'antecedente numero quarto, darsi in natura quattro quantità, delle quali presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione; e presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione; sempre, ed in ogni multiplicatione, gli vguali multiplici della prima, e terza, ò sono ambidue maggiori de gli vguali multiplici della seconda, e quarta: ò sono ambidue minori; ò ambidue vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta; cioè se il multiplice della prima è maggiore, ò minore, ò vguale al multiplice della seconda; anco il multiplice della terza sarà ò maggiore, ò minore, ò vguale al multiplice della quarta; non sarà più oscuro il concetto di questa sesta definitione, ne potrà dirsi, che sia cauata da principio remoto, per il che stimauano non dimostrate tutte le propositioni di questo quinto libro. E se si dicesse, che la dimostratione da me fatta milita, quando delle quattro quantità la prima, e terza sono vgualmente multiplici, ouero vgualmente parti della seconda, e quarta: gli rispondo hora per sempre, non esser necessario dimostrare quali siano tutte le quantità, che possono cadere sotto il medesimo simptoma, bastando à me hauer dimostrato, ch'in natura si danno quattro quantità, che cadono sotto tal simptoma; cioè che gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, ò sono vguali, ò sono minori, ò maggiori, come sopra s'è detto, de gli vguali mul-

ti-

tiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione; per poter poi definire, come fà Euclide, che quando nelle cose seguenti hauremo quattro quantità, ed in qualche modo si proverà, che gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, sono ambidue maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione: la proportione della prima alla seconda la chiameremo essere l'istessa, ò vguale, alla proportione, ch'è dalla terza alla quarta. Ed all'incontro, quando si dirà la prima alla seconda hauere l'istessa proportione, che la terza alla quarta, non si debba intendere altro, se non, che gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, cioè secondo tutte le multiplicationi, siano sempre ambidue ò maggiori, ò minori, ouero vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo tutte le multiplicationi. Come per essempio, siano esposte le quattro quantità A, B, C, D, e siano presi gli vguali multiplici della prima A, e terza C, secondo qualunque multiplicatione, che siano K, F. Similmente siano presi gli vguali multiplici della seconda B, e quarta D secondo qualunque multiplicatione che siano le due G, & H: e proueremo in qualche modo, che se K è vguale à G, ancora F è vguale ad H; e se K è maggiore, ò minore di G, ancora F è maggiore, ò minore di H; all'hora la proportione di A à B, la chiameremo essere la medesima qual'è la proportione di C à D. Ed all'incontro, se supporremo, che la prima A alla seconda B habbia l'istessa proportione, quale hà C à D, concepiremo questa proportionalità, ò Analogia essere di quella natura di proportione, che gli vguali multiplici K, F, presi secondo qualunque multiplicatione, ambidue sono vguali, ò minori, ò maggiori, de gli vguali multiplici G, H, presi parimente secondo qualunque multiplicatione; cioè che, se K è maggiore di G, ancora F è maggiore di H; e se K è vguale, ò minore di G, ancora F è vguale, ò minore di H.



Qui è d'auertirsi, che haurei potuto prouare l'antecedente quarta dimostratione, seruendomi della terza propositione di questo quinto libro, mà per non turbare in cos'alcuna l'ordine tenuto da Euclide col porre le definitioni frà le propositioni, mi sono contentato dimostrarlo con modo poco differente à quello, che tiene Euclide in essa terza propositione. E qui mi si porge occasione accennare l'artificio d'Euclide in questa gran compositione, il quale in tutti questi Elementi non s'è seruito d'alcun principio, che non fosse totalmente noto, ò pure fosse facile à dimostrarsi con altre propositioni dimostrate, mediante le propositioni poste prima di seruirsi di quel princi-

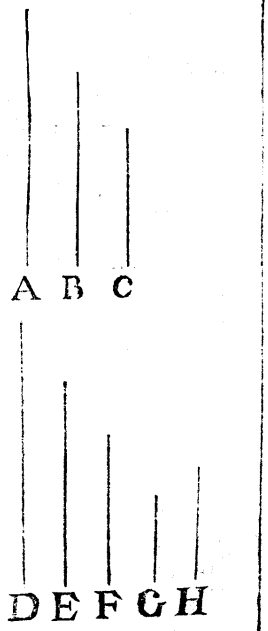
pio. E perche simili propositioni, che poteuano dimostrare tal principio, non sono state da lui stimate propriamente Elementi, non s'è curato connumerarle frà le propositioni di questi elementi, e sarebbe improprio fare giuditio diuerso d'vn tale Autore.

Deuesi notare, che l'antecedente sesta definitione non serue per conoscere quando sono date quattro quantità, se quelle siano nella medesima proportione; perche il modo di conoscere, se quattro date quantità habbiano l'istessa proportione, si hauerà nella 16. propos. del sesto libro, come à suo luogo si farà noto; e questa sesta definit. serue solo per spiegatione di quello, ch'intende Euclide, e che noi douemo intendere, quando nelle cose seguenti si dirà la proportione della prima alla seconda quantità è l'istessa, che la proportione della terza alla quarta quantità; e quando dalle cose seguenti haueremo cauato il modo da conoscere se di quattro quantità la prima alla seconda hà l'istessa proportione, che la terza alla quarta, douremo concepire essere di quella natura di medesima proportione, che cade sotto le conditioni poste da Euclide nella sesta definitione.

V I I.

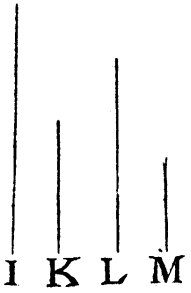
Quelle quantità, che hanno la medesima proportione, si chiamano quantità proportionali.

Dopo ch'Euclide hà definita l'vgualità delle proportioni, cioè hà spiegato quello, che douemo intendere, quando si dirà due proportioni essere le medesime, ò vguali, ouero simili; hà voluto anco dare il nome à quelle grandezze, frà le quali cadono queste vguali proportioni. Per essempio se saranno tre quantità come A, B, C, e la prima A alla seconda B, hauerà l'istessa proportione, quale hà la quantità B alla quantità C; le tre grandezze A, B, C si chiameranno quantità proportionali. Similmente se le quantità saranno più di trè, come D, E, F, G, H, e la prima D alla seconda E hà l'istessa proportione, quale hà la quantità E ad F; e la proportione di E ad F è l'istessa, che la proportione di F à G; & F à G hà l'istessa proportione, quale hà G ad H; le quantità D, E, F, G, H, si chiamano quantità proportionali. E perche le proportioni antedette continuamente sono le medesime, cioè sono vguali, tale anologia si chiama continua; e per l'auuenire le grandezze D, E, F, G, H si chiameranno quantità continue proportionali.



Nota che se le proportioni, che cadono frà quattro grandezze, non sono continuatamente vguali, purche la proportione, che cade frà due di quelle, sia vguale alla proportione, ch'è frà l'altre due, quelle quattro quantità si dicono ancora quantità proportionali.

Come per esempio nelle quattro quantità I, K, L, M, se la proportione, che hà la grandezza I alla grandezza K, sia la medesima, cioè vguale alla proportione, che hà L ad M; benche la proportione di K ad L, nõ sia vguale alla proportione, di I à K, ouero di L ad M: cõ tutto ciò le quattro grandezze I, K, L, M si chiamano quantità proportionali; e tale analogia si dice discontinua, stante che non è da per tutto la medesima. Nelle cose seguenti dunque quando diremo, che quattro quantità sono proportionali, concepiremo, che la prima alla seconda hà l'istessa proportione, che la terza alla quarta; e quando diremo che le quantità sono continue proportionali, concepiremo la prima alla seconda essere come la seconda alla terza; e la seconda alla terza, come la terza alla quarta; e cosi la quarta alla quinta, e con quest'ordine in infinito.



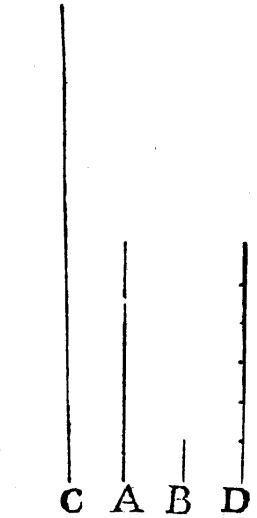
QVINTA.

E possibile darsi due quantità ineguali, delle quali preso il multiplice della maggiore, secondo qualunque multiplicatione; e preso il multiplice della minore, secondo qualche multiplicatione maggiore; il multiplice della minore sia minore del multiplice della maggiore.

Siano esposte le due quantità A, B, ineguali, delle quali A sia maggiore di B. Dico che preso C multiplice di A, secondo qualunque multiplicatione, e preso D multiplice di B, con maggior multiplicatione di quella, che C è multiplice di A, può essere che D sia minore di C.

Supposto prima, che A sia vguale à D. Perche C si suppone multiplice di A, benche nasca da multiplicatione quanto si voglia minore, rispetto à quella, con la quale D è multiplice di B; sarà sempre C misurata più d'vna volta da A; e perciò la quantità C sarà maggiore di A; mà, per ipotesi, A è vguale à D, sarà C maggiore di D.

Di nuouo, supposto che A sia maggiore di D; essendo C multiplice di A, benche la quantità C nasca da qualsiuoglia picciola multiplicatione, per quel, che s'è detto, sempre sarà maggiore di A; mà per ipotesi, A è maggiore di D, sarà C molto maggiore della quantità D, ch'era da dimostrarsi.

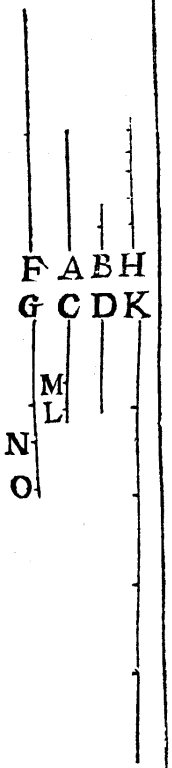


SESTA.

E possibile darsi quattro quantità, delle quali presi gli vguali multiplici della prima, e terza secondo qualunque multiplicatione; e presi gli vguali multiplici della seconda

da, e quarta con maggior multiplicatione di prima: se il multiplice della prima è maggiore del multiplice della seconda, il multiplice della terza non sia maggiore del multiplice della quarta.

Siano le quattro quantità A, B, CL, D, e sia la prima A maggiore della seconda B, e la terza CL non sia maggiore di D: siano presi gli vguali multiplici della prima A, e terza CL, secondo qualunque multiplicatione, che siano F, & GO; e di nuouo siano presi gli vguali multiplici della seconda B, e della quarta D, con maggior multiplicatione di quella, con la quale F, & GO sono vguali multiplici di A, & CL, in modo che H sia minore di F, il che è possibile per l'antecedente dimostratione. Dico ch'essendo F maggiore di H la quantità GO non sarà maggiore di K.



Supposto prima, che CL sia vguale à D. Perche le quantità F, GO sono vguali multiplici delle quantità A & CL; tante volte F sarà misurata da A, per quante volte GO è misurata da CL. Similmente essendo H multiplice di B, come K è multiplice di D; tante volte H sarà misurata da B, per quante volte K è misurata da D. In oltre perche H è multiplice di B, secondo maggior multiplicatione di quella, con la quale F è multiplice di A; sarà H misurata più volte da B di quello, che F è misurata da A. Mà si disse, che H è misurata da B tante volte per quante volte K è misurata da D; sarà K misurata più volte da D, di quello che F è misurata da A. Fù mostrato che F è misurata da A tante volte, per quante volte GO è misurata da CL; sarà K misurata più volte da D di quello, che GO è misurata da CL. Mà la quantità CL è supposta vguale à D, sarà K misurata più volte da D, di quello, che GO è misurata dalla medesima D; e per la prima dimostratione di questo libro, la quantità GO sarà minore di K.

Di nuouo, supposto che la terza quantità sia CM minore di D, e sia presa GN multiplice di CM, come F è multiplice di A. Si concepisca ingrandita la quantità CM fino ad L in modo, che sia vguale à D. E sia di nuouo GO multiplice di CL, come F è multiplice di A. Poi operandosi, come prima s'è fatto, si dimostrerà GO essere minore di K. Finalmente essendo F multiplice di A, come GO è multiplice di CL; e come GN è multiplice di CM: sarà GO multiplice di CL come GN è multiplice di CM: dal che GO sarà misurata tante volte da CL, per quante volte GN è misurata da CM. Mà CL è maggiore di CM; sarà GO maggiore di GN; si è mostrata GO minore di K, in conseguenza GN sarà molto minore della quantità K. Per la qual cosa le quantità A, B, CL, ouero CM, & D, sono le quattro quantità, delle quali presi gli vguali multiplici della prima A, e terza CL, ouero CM, secondo qualunque multiplicatione, che siano F, & GO, ouero GN; e presi gli

vguali multiplici della seconda B, e quarta D, con multiplicatione maggiore: Se F è maggiore di H, la quantità G non sarà maggiore di K, ch'era da dimostrarsi.

VIII.

Se saranno quattro quantità, delle quali siano presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione; e similmente siano presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione: se in tutte le multiplicationi non sempre gli vguali multiplici della prima, e terza sono tutti due (presi separatamente) maggiori de gli vguali multiplici della seconda, e quarta, ò tutti due minori, ò tutti due vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta; mà che in qualche multiplicatione, essendo il multiplice della prima maggiore del multiplice della seconda, il multiplice della terza non sia maggiore del multiplice della quarta: in tal caso la prima alla seconda si dirà hauere maggior proportione, che la terza alla quarta.

Dalla quarta, e sesta dimostratione si caua, che quando di quattro quantità sono presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione; e sono presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, con qualunque multiplicatione: due casi si possono dare, ò che in tutte le multiplicationi, sempre gli vguali multiplici della prima, e terza sono ambidue maggiori, ò ambidue minori, ò vero vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta: ò questo non succede sempre in tutte le multiplicationi, mà che alcune volte, essendo il multiplice della prima maggiore del multiplice della seconda, il multiplice della terza non sia maggiore del multiplice della quarta: quanto al primo caso, la prima si dirà hauere l'istessa proportione alla seconda, quale hà la terza alla quarta, come si disse nella sesta definitione: e nel secondo caso la prima alla seconda si dirà hauere maggior proportione, che la terza alla quarta quantità.

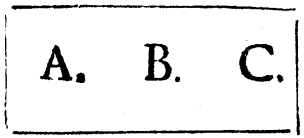
Da quel, che s'è detto, facilmente se ne caua la conuersa, cioè, che se saranno quattro quantità, e si supporrà la prima alla seconda hauere maggior proportione, che la terza alla quarta, secondo la natura della maggior proportione poco auanti definita; presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, e presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione: in queste infinite multiplicationi qualcheduna necessariamente ve ne sarà, la quale farà, ch'essendo il multiplice della prima maggiore del multiplice della seconda, il multiplice della terza non sarà maggiore del multiplice della quarta: perche se tal multi-

pli-

plice non vi fosse, ne seguirebbe, ch'in tutte le multiplicationi gli vguali multiplici della prima, e terza, ò tutti due sarebbero maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta: ed all' hora per la sesta definitione, la prima alla seconda si direbbe hauere l'istessa proportione, che la terza alla quarta; il che sarebbe contro all'ipotesi; mentre la suppositione è, che la prima alla seconda s'intenda hauere maggior proportione, che la terza alla quarta.

IX.

La proportionalità non si può costituire in meno di tre termini.



Perche la proportionalità, per la quarta difinitione, è la similitudine delle proportioni; ed ogni proportione si disse essere la scambieuole relatione di due termini; perciò la proportionalità, che consta di più d'vna proportione, è necessario, che si costituisca non in due termini, mà in più di due termini, mentre quella, che si costituisce frà due soli termini nella terza definitione, fù chiamata proportione, e non proportionalità. Hor costituendosi la proportionalità in più di due termini, non sarà difficile à concepire, che non si può costituire in meno di tre termini. Come se dicessimo, che la proportione di A à B è simile, ò è l'istessa, che quella di B à C; doue si vedono due proportioni simili costituite frà i tre termini A, B, C.

X.

La proportione si dice essere composta d'altre proportioni, quando è generata dalla multiplicatione di quelle proportioni, dalle quali si dice essere composta.

In nissun luogo hò stimato più corrotto il testo d'Euclide, quanto in questo, poiche quì dà la definitione della proportione duplicata, triplicata &c. che deriua dalla compositione delle proportioni, come appresso si dirà; e nel sesto Libro al num. 5. pone poi la definitione della compositione delle proportioni; le quali, perche tutte due conuengono alle proportioni vniuersali, ancora tutte due deuono esser poste in questo quinto Libro, doue tratta delle proportioni in genere. E perche si potrebbe dire, ch'Euclide definisce la compositione delle proportioni nel sesto Libro, stante che iui comincia à seruirsene; per l'istessa ragione doueua ancora porre nel sesto Libro la definitione della proportione duplicata, triplicata &c. mentre che in nissun altro luogo comincia à seruirsene, se non che nel sesto Libro. Potiamo dunque probabilmente credere, ch' il testo sia adulterato, non essendo verisimile, che quel grand'huomo che hà dato si bell'ordine à questi Elementi, hauesse equiuocato nel collocare vna sola definitione. Ond'io per non lasciare difettosa quest'opera per si picciola cosa, hò stimato bene leuare dal sesto Libro la quinta definitione, e restituirla quì,

co-

come proprio ſuo luogo, e così diciamo, che quando vna proportione naſce dalla multiplicatione di due, ò più proportioni, quella ſi dice eſſer compoſta dalle proportioni multiplicate.

X I.

Quando le grandezze ſono continue proportionali; la prima ſi dice hauere duplicata proportione alla terza di quella, che hà alla ſeconda. Oltre à ciò la prima alla quarta ſi dice hauere triplicata proportione di quella, che hà alla ſeconda; e con queſt'ordine ſempre la prima all'vltima ſi dice hauere proportione tante volte multiplicata di quella, che hà alla ſeconda, per quanto è vno meno la moltitudine delle grandezze proportionali.



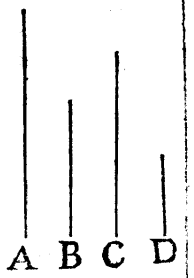
Quì è d'auuertirſi, ch'Euclide non dice, che quando trè grandezze ſono proportionali, la proportione della prima alla terza è duplicata di quella, che hà alla ſeconda; ne che la proportione della prima alla quarta, è triplicata della proportione della prima alla ſeconda; ma la proportione della prima alla terza la Chiama *duplicata di quella proportione, che hà la prima alla ſeconda; e la proportione della prima alla quarta la* Chiama *triplicata di quella proportione, che hà la prima alla ſeconda; volendo inferire, che quando dice la duplicata proportione della prima alla ſeconda, ſi debba intendere, come ſe diceſſe, la proportione della prima alla terza; e quando dice la proportione triplicata della prima alla ſeconda, vaglia l'iſteſſo, come ſe diceſſe, la proportione della prima alla quarta. Per eſſempio, ſiano le trè quantità proportionali C, D, E, che la proportione di C à D ſia l'iſteſſa, che la proportione di D ad E; e s'intendano due altre quantità, come A, & B. Hor quando Euclide dice, che la proportione della grandezza A alla grandezza B è duplicata della proportione, che hà C à D, non intende altro, ſe non che la proportione di A à B è l'iſteſſa, che la proportione della prima A alla terza E; ed in queſto ſenſo ſe ne ſerue da per tutto. E ben vero, che queſta definitione, benche ſia ſufficientiſſima à rendere dimoſtrate tutte le coſe, nelle quali ſe ne ſerue Euclide, con tutto ciò confonde aſſai l'intendimento di chi ſtudia, il che naſce dal non eſſerſi dimoſtrato, che la proportione della prima alla terza ſia veramente duplicata di quella, ch'è della prima alla ſeconda; e che la proportione della prima alla quarta ſia veramente triplicata di quella, ch'è della prima alla ſeconda. E pare che queſta definitione ſia appoggiata ad vna coſa incerta; perilche malamente gli ſtudioſi v'applicano l'animo à concepirne il*

vero

vero ſenſo. Hor per leuare ogni ambiguità, che poſſa rendere oſcuro il concetto di queſta definitione. Dico che quando trè quantità ſono proportionali, la proportione della prima alla terza non ſolamente la chiamiamo dupplicata, mà che realmente è duplicata di quella, ch'è della prima alla ſecõda; e che di quattro quantità continue proportionali la proportione della prima alla quarta è triplicata di quella, ch'è dalla prima alla ſeconda, e con queſt'ordine ſempre la prima all'vltima hà proportione tante volte multiplicata di quella, che hà alla ſeconda, per vn meno la moltitudine delle quantità proportionali. Il che tutto è dimoſtrato nell'annotatione dopo la 18. propoſitione del ſeſto Libro.

X I I.

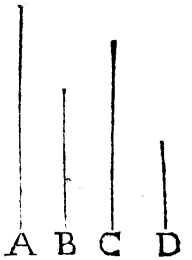
Delle quantità proportionali, gli antecedenti ſi dicono homologhi, cioè ſimili à gli antecedenti; ed i conſeguenti à i conſeguenti.



Due ſimilitudini ſi deuono concepire, quando conſideriamo le grandezze proportionali. La prima è la ſimilitudine delle proportioni, che cadono frà quelle grandezze proportionali, per la quale ſi dicono quantità proportionali; come ſe la proportione dell'antecedente A al conſeguente B, è vguale, ò l'iſteſſa, che la proportione dell'antecedente C al conſeguente D, queſte due proportioni ſi dicono ſimili frà di loro; poiche tanto è dire la proportione di A à B è l'iſteſſa, che la proportione di C à D; quanto è dire, che la proportione di A à B è ſimile alla proportione di C à D. L'altra ſimilitudine da conſiderarſi è nelle quantità frà le quali cadono le ſimili proportioni; come ſe la proportione dell'antecedente A al conſequente B è ſimile alla proportione dell'antecedente C al conſeguente D; li due antecedenti A, & C, ſi dicono eſſer ſimili frà di loro, e ſimili ancora ſi dicono i conſeguenti B, & D frà di loro; e per leuare la confuſione di queſte due ſimilitudini, in luogo di dire, che gli antecedenti A, & C ſono ſimili, diremo, che gli antecedenti A, & C ſono homologhi, che ſignifica l'iſteſſo: e coſi li conſeguenti B, & D li chiameremo ancora homologhi.

X I I I.

Proportione alterna, ouero permutata, è quando ſi fà la comparatione dell'antecedente all'antecedente, e del conſeguente al conſeguente.



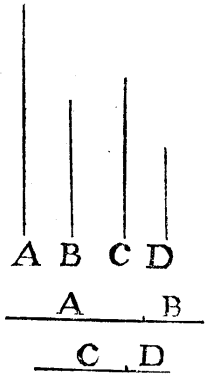
Quando s' haueranno quattro quantità, come A, B, C, D, ed eſſendoſi fatta la comparatione dell'antecedente A al conſeguente B, e dell' antecedente C all' conſeguente D; e ſi dirà permutando, queſta voce Permutando ſignifica, che ſi debba fare la comparatione dell'antecedente A all'antecedente C, e dell' conſeguente B al conſeguente D.

La

XIV.

La proportione inuersa non è altro, se non che fare la comparatione de i conseguenti à gli antecedenti, pigliando i conseguenti come antecedenti, e gli antecedenti come conseguenti.

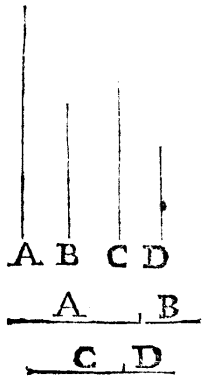
Se saranno quattro quantità, come A, B, C, D, ed essendosi fatta la comparatione dell'antecedente A al conseguente B, e dell'antecedente C al conseguente D, e si dirà Inuertendo; si dourà fare la comparatione del conseguente B all'antecedente A, e del conseguente D all'antecedente C.



XV.

La compositione della proportione è il fare la comparatione frà la composta dell'antecedente, e conseguente insieme, al conseguente.

Si considerino le quattro quantità A, B, C, D; se, essendosi fatta la comparatione dell'antecedente A al conseguente B, e dell'antecedente C al conseguente D, si dirà Componendo; all'hora si farà la comparatione delle due AB, prese insieme, al conseguente B, e delle due CD, prese insieme, al conseguente D.

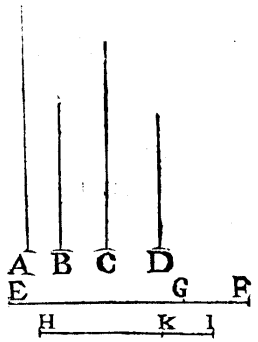


XVI.

La diuisione della proportione è il fare la comparatione della differenza, ch'è frà l'antecedente, e conseguente, all'istesso conseguente. **purche gl'antecedenti superino i conseguenti**

Cioè se sarà fatta la comparatione dell'antecedente A al conseguente B, e dell'antecedente C al conseguente D, e si dirà Diuidendo; si farà la comparatione della differenza che è frà l'antecedente A ed il conseguente B al conse-

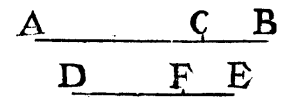
conseguente B, e della differenza, ch'è frà l'antecedente C, e conseguente D, al conseguente D. Similmente se sarà fatta la comparatione dell'antecedente EF al conseguente FG, e dell'antecedente HI al conseguente IK, diuidendo, si farà la comparatione della differenza EG al conseguente GF, e della differenza HK al conseguente KI: auuertendo, che EG è la differenza di quãto l'antecedente EF supera il conseguente FG; e che HK è la differenza di quanto l'antecedente HI supera il conseguente IK



XVII.

La conuersione della proportione è il fare la comparatione frà l'antecedente, e la differenza, ch'è frà l'antecedente, ed il conseguente, purche gl'antecedenti superino i conseguenti.

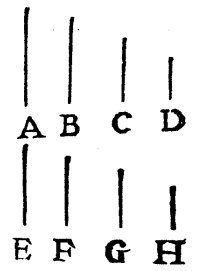
Sia l'antecedente AB, ed il conseguente BC, sarà AC la differenza di quanto l'antecedente AB supera il conseguente BC. Similmente sia DE antecedente, ed il conseguente sia EF, sarà DF la differenza frà l'antecedente DE, ed il conseguente EF: Hor se sarà fatta la comparatione dell'antecedente AB al conseguente BC, e dell'antecedente DE al conseguente EF, dicendosi, per la conuersione della proportione, si farà la comparatione dell'antecedente AB alla differenza AC, e dell'antecedente DE, alla differenza DF.



XVIII.

Per l'egualità è quando sono più di due quantità da vna parte, ed altretante quantità da vn altra; e tanto nelle prime, quanto nell'altre, si fà la simile comparatione della prima all'vltima.

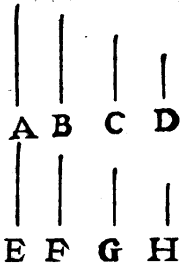
Come se siano le quantità A, B, C, D, da vna parte, & altretante quantità, come E, F, G, H, da vn altra parte; e fatta la comparatione di A à B, e di E ad F; e similmente fatta la comparatione di B à C, e di F à G; come ancora fatta la comparatione di C à D, e di G ad H, e con quest'ordine se vi saranno altre quantità: se si dirà, Per l'egualità, si farà la comparatione della prima A all'vltima D, e della prima E all'vltima H.



XIX.

Proportione ordinata si dice, quando sono più di due quantità da vna parte, & altretante quantità da vn altra parte; e la prima alla seconda, nelle prime, sia come la prima alla seconda, nell'altre; e similmente la seconda alla terza, nelle prime, sia come la seconda alla terza nell' altre; e la terza alla quarta, nelle prime, come la terza alla quarta, nell'altre; e con quest'ordine se vi saranno più quantità.

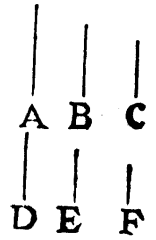
Per esempio, se A à B è come E ad F, e la proportione di B à C è come quella di F à G; come ancora C à D sia come G dd H; e con quest'ordine se le grandezze saranno di maggior moltitudine; secondo questa dispositione le dette quantità si dicono essere nella proportione ordinata.



XX.

La perturbata proportione è quando sono trè quantità da vna parte, e tre altre da vn altra parte; e la prima alla seconda, nelle prime, sia come la seconda alla terza nelle altre; e la seconda alla terza, nelle prime, è come la prima alla seconda, nelle altre.

S'intendano le tre quantità A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte; e la proportione della prima A alla seconda B, sia come quella della seconda E alla terza F; e similmente la proportione della seconda B alla terza C sia come quella della prima D alla seconda E; le dette quantità A, B, C, & D, E, F, si dicono essere nella perturbata proportione.



ANNOTATIONE.

Perche la varia interpretatione data da Graui Autori à queste definitioni del quinto libro, può apportare non picciola confusione à i studiosi di questa scienza, parmi assai vtile, prima di passare alle dimostrationi delle proportioni, che cadono frà le grandezze in genere, come sono le dimostrationi, che seguono in questo quinto libro; porre in chiaro tutte le difficoltà, ed insieme esaminare di quanto valore siano l'eccettioni date sin' hora à queste definitioni d'Euclide. E per procedere con ordine, spiegaremo il senso litterale d'Euclide à misura, che si esporranno l'eccettioni date.

In trè cose stimano, ch'Euclide habbia vacillato in questo quinto libro, cioè.

Nel definire la proportionalità in più modi; In hauer stabilita la sesta definitione sopra vna passione remota: Ed in hauer dimostrato in specie nel VII. Libro quello, che hà dimostrato in genere nel quinto Libro. E quanto al primo capo giudicano, che la quarta, e sesta definitione del quinto Libro, non siano due definitioni distinte, e separate, mà che tutte due costituiscano vna sola definitione. Il dubio consiste nel fatto, nè potremo cauare chiarezza maggiore, se non che dalle proprie parole d'Euclide. Definisce prima questo Autore, che cosa sia proportione, nel seguente modo. Ratio est, duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam secundum quantitatem habitudo. *Cioè, che la proportione è la scambieuole relatione frà due quantità del medesimo genere, rispetto alle loro grandezze; come fù spiegato nella terza definitione di questo. E qui è d'auuertirsi, che doue Euclide dice* Ratio, *noi, seguendo l'vso comune, diciamo Proportione; e doue dice* Proportio, *diciamo Proportionalità. Soggiunge poi nella quarta definitione.* Proportio verò, est rationum similitudo, *cioè chiama la similitudine delle proportioni, con questa voce, Proportionalità. E nella sesta definitione dice.* In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscumque sit hæc multiplicatio, vtrumque ab vtroque, vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent; *cioè. Quattro quantità si dicono hauere la medesima proportione, ouero simili proportioni, quando gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, sono tutti due ò maggiori, ò minori, ò vguali à gli eguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione: come fù pienamente spiegato nella sesta definitione di questo. Quindi appare, ch'Euclide nella terza definitione, assegna il nome alla scambieuole relatione, ch'è frà due quantità del medesimo genere, col chiamarla proportione; nella quarta definitione chiama proportionalità la similitudine ò vgualità delle proportioni; e nella sesta definitione, spiega quali conditioni deuono hauere quattro quantità, acciòche frà loro si dica caderui quella proportionalità spiegata nella quarta definitione. Donde è manifesto, che la quarta, e sesta definitione sono totalmente distinte, e non hanno vn medesimo significato, come vogliono i contradicenti, i quali soggiungono ancora, ch'Euclide non sodisfatto della sesta definitione posta nel quinto, replicò il medesimo in altro modo nella 20. definitione del settimo Libro. Qui desiderarei sapere, chi forzò Euclide à porre nel quinto Libro quella sesta definitione, della quale non era sodisfatto, per replicarne vna migliore nel settimo Libro (dico migliore, perche vno de gli Autori, che s'oppongono alla sesta definitione d'Euclide, si serue di questa 20. definitione del settimo nel luogo, doue lui dimostra le proportioni delle quantità in genere) Io per me non sono di quelli, che stimano di tanto poco intendimento Euclide, che non sapesse valersi nel quinto Libro di quella medesima 20. definitione, che lui medesimo pose nel settimo Libro; mentre altri, credendosi di far bene, non senza qualche industria l'hanno fatto. Temo però, che la cosa stia tutta altrimente di quello, che questi Autori s'imaginano. Mi si dica di gratia, che cosa hà la quantità continua di commune con la quantità discreta? Certo che se faremo esatta riflessione alla natura dell'vna, e dell'altra, trouare-*

mo, che non altro hanno di commune, se non che grandezza è l'vna, e grandezza è l'altra; del rimanente la quantità continua riguarda la sola estensione, e la discreta la semplice moltitudine. La quantità continua comincia dal punto, e la discreta comincia coll'vnità in modo, ch'il punto non è parte della quantità continua; e l'vnità è parte della quantità discreta. La quantità continua si può accrescere, e diminuire quanto si vuole; la discreta si può accrescere, mà non diminuire quanto si vuole, stante che l'vnità è sua minima parte. Sempre la quantità continua si può diuidere in due parti vguali; e la discreta non sempre. La quantità continua, ò è lunghezza, ò superficie, ouero corpo; e di queste la lunghezza non hà niente di commune con la superficie, ne col corpo; la superficie è totalmente diuersa dalla linea, e dal corpo; ed il corpo in nissun modo può essere considerato come superficie, ò come linea; e la quantità discreta può essere considerata come lunghezza, come piano, e come solido; cioè quel medesimo numero composto, che consideriamo come numero solido, lo possiamo considerare, come numero piano, ed ancora come lunghezza. Nella quantità continua à tutti i piani si può trouare vn quadrato vguale, ed à i solidi vn cubo vguale: perilche ad ogni piano si puo trouare il lato di quel quadrato, che gli è vguale, & ad ogni solido si può trouare il lato di quel cubo, che gli è vguale: mà non tutti i numeri possono essere numeri quadrati, ò numeri cubi; e perciò non tutti hanno lato, ò radice quadrata, ne lato, ò radice cuba. Alle grandezze, nella quantità continua, sempre se le può trouare la terza, ò quarta, e quante altre quantità si vogliano, proportionali; mà nella quantità discreta non à tutti i numeri se gli può trouare il terzo, quarto, ed altro numero nella medesima proportione. Nella quantità discreta si danno le grandezze minime in vna data proportione, il che non succede nella quantità continua. E finalmente le grandezze, nella quantità continua, non sempre sono commensurabili, e le grandezze, nella quantità discreta, sono sempre commensurabili. D'onde ne segue, ch'essendo tanta diuersità frà la quantità continua, e la discreta; le passioni, che accadono all'vna, non tutte possono conuenire all'altra. Per esempio nella quantità discreta, i numeri primi sono minimi nella loro proportione; mà nella quantità continua non si trouano grandezze, che siano minime nella loro proportione. Hor se le passioni, che accadono nella quantità continua non conuengono tutte con quelle della quantità discreta, fù ben necessitato Euclide ad assegnare principij proprij, ed atti à spiegare quelle passioni nella quantità discreta, che non conuengono alla quantità continua. E perche, come s'è detto, le grandezze nella quantità discreta, sono tutte commensurabili; le passioni di queste tutte riguardano i modi, come scambieuolmente si misurano; cioè come vna grandezza misura, ò non misura vn altra, ò più grandezze; e come più grandezze misurano, ò non misurano altre grandezze; da i quali ne nascono altre passioni, come appariſce nel settimo, ottauo, e nono Elemento. E per tal ragione, benche Euclide habbia dimostrato in genere in questo quinto Elemento tutte le passioni delle proportioni, per il che sono dimostrate ancora le proportioni de' numeri; con tutto ciò, hauendo riguardo alle particolari passioni, che doueua dimostrare nella quantità discreta, stabilì nuoua definitione alla proportione de' numeri, come si vede nella 24. definitione del settimo Elemento; la quale è solamente diretta à spiegare la natura delle proportioni

alle

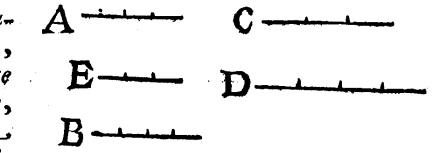
alle grandezze commensurabili, come sono i numeri. E perche la proportionalità è la similitudine delle proportioni, hauendo per le ragioni sopradette, stabilita la definitione delle proportioni numeriche, secondo che richiede la natura della commensurabilità, fù necessitato con nuoua definitione à spiegare quali conditioni deuono hauere i numeri, acciòche frà loro si dica caderui proportionalità; cioè quali conditioni deuono hauere i numeri, che lui chiama numeri proportionali. E questa è la 20. definitione del settimo Elemento, la quale douendo intieramente conuenire con la definitione delle proportioni numeriche, l'espose diuersamente dalla sesta definitione di questo quinto Elemento; ne potè fare altrimente, perche questa sesta definitione abbraccia il commensurabile, e l'incommensurabile; e l'altra riguarda solamente la commensurabilità de numeri. D'onde è manifesto, ch'Euclide non pose nel settimo Elemento la definitione delle quantità proportionali à causa, che non fosse sodisfatto di quello, che haueua definito nel quinto Elemento; mà fù necessitato à farlo per spiegare quelle passioni ne i numeri, che in nissun modo possono essere nella quantità continua. E questo sia detto per mostrare, che non è vn forte argumentare il dire, che hauendo Euclide spiegato in specie nel settimo Libro quello, che hà spiegato in genere nel quinto, ne segua poi, ch'il quinto Libro non sia dimostrato.

Discusso questo picciolo dubbio (che in modo alcuno non può apportare detrimento ad Euclide, mentre quand'anche la quarta definitione del quinto Libro fosse superflua, questo non fà che il quinto Libro non sia perfettissimamente dimostrato) veniamo à spianare le difficoltà maggiori, le quali tutte parmi, che si restringano alla sesta definitione, che dicono hauere l'origine da passione remota, com'è quella, che si diano quattro quantità in natura in modo, che gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, tutti due siano ò maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione. E perche questa difficoltà è già superata, come apparisce nella dimostratione, che antecede alla sesta definitione di questo, non resta più luogo da dubitare, che le passioni del quinto Libro non siano tutte ben dimostrate; benche Euclide stimasse che non fosse tanto necessario di farui particolare dimostratione: poiche se hauremo quattro quantità, e saranno presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione, e di più saranno presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione, due casi si possono dare in natura; cioè: O gli vguali multiplici della prima, e terza, in ogni multiplicatione, sono tutti due maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della seconda, e quarta; ò pure non succeda in ogni multiplicatione, mà che in alcune succeda, ed in altre nò. Se non succede in ogni multiplicatione, la proportione della prima alla seconda, e della terza alla quarta, le chiama proportioni ineguali: e se succede in ogni multiplicatione, le chiama simili, cioè vguali proportioni: e così non pare tanto oscuro questo principio, che assolutamente si potesse dire, che le passioni del quinto Libro fossero indimostrate. Haurei stimato assai più oscuro principio, quando di quattro quantità la prima fosse maggiore della seconda, e la terza non maggiore della quarta, ed Euclide hauesse supposto, che la prima alla seconda hauesse maggior proportione, che la terza alla quarta: all'hora con ragione si sarebbe potuto domandare ad

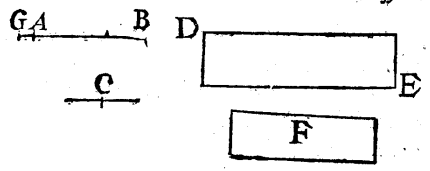
Eucli-

Euclide, per qual causa non hà ammesso per cosa nota, che le vguali quantità hanno l'istessa proportione ad vna terza del medesimo genere; e poi prenda per principio chiaro quello, che senza dubbio è vn fortissimo Theorema da dimostrarsi (come si può vedere nella 10.& 11. propositione del sesto Libro delle Collettioni Matematiche di Pappo Alessandrino) e non differente à questo si può stimare quel principio preso da graui Autori (che per altro sono degni di ogni gloria) i quali definiscono la maggior proportione nel seguente modo, Chiamo la proportione della prima alla seconda maggiore della proportione commensurabile, che hà la terza alla quarta, quando la prima auanza quella, la quale alla seconda, sia come la terza alla quarta.

Cioè se saranno quattro quantità come A, B, C, D, ò che le due A, B siano del medesimo genere, e le due C, D, d'vn altro genere; ò che tutte quattro siano del medesimo genere, e che C à D habbia qualsiuoglia proportione commensurabile: e qualch'altra quantità E sia minore di A, ed habbia alla seconda B l'istessa proportione commensurabile, quale hà C à D; la proportione della prima A alla seconda B si debba chiamare maggiore della proportione commensurabile, che hà C à D. Dunque accioche la proportione di A à B sia maggiore della proportione commensurabile, che hà C à D, sarà necessario, che si dia in natura vn altra quantità come la notata E, la quale sia minore di A, e che habbia l'istessa proportione commensurabile à B, quale hà C à D, e per maggiore chiarezza sogliono addurre vna simile spiegatione.

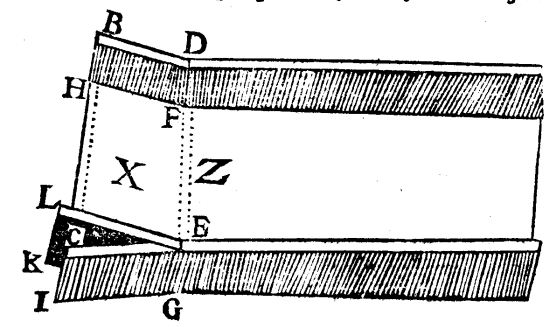


Siano le quattro quantità AB, C, DE, ed F; e sia AB, per essempio, nella proportione sesquialtera alla quantità C, e parimente DE sia nella sesquialtera proportione alla quantità F; e così la proportione di AB à C è l'istessa, che la proportione di DE ad F; il che se gli può dare per concesso, non stando quì tutta la difficoltà. Soggiungono poi, che aggiunta ad AB qualche particola GA in modo, che ne risulti tutta la quantità GB ò commensurabile, ò non commensurabile alla quantità C, sarà chiaro, che GB è maggiore di quel che fà di bisogno, accioche sia sesquialtera à C. E da questo conchiudono, che GB hà maggior proportione à C di quella, che hà DE alla quantità F. Se aggiunta la particola AG alla quantità AB ne risultasse la composta GB commensurabile alla quantità C, all'hora GB sarebbe parti di C di maggior multitudine di quello, che DE è parti di F; cioè GB sarebbe maggiore di quello che fà bisogno accioche sia parti di C, come DE è parti di F; e l'eccesso sarebbe parte, ò parti, ouero multiplice di C, ed in questo caso la definitione non sarebbe mancante, ne sarebbe necessario dimostrare, che le quantità vguali hanno l'istessa proportione ad vna terza; ne meno, che delle ineguali quantità la maggiore hà maggiore proportione ad vna terza, che la minore alla medesima terza; poiche il tutto dipenderebbe dalle difinitioni, come fà Euclide nel 7.



Ele-

Elemento. Ma la difficoltà stà, quando, aggiunta la particola AG ad AB, e ne risulti GB incommensurabile alla quantità C, nel qual caso non è AG parte, ò parti, ò moltiplice di C; e perciò non sappiamo se la proportione di GB, à C sia cresciuta, ò diminuita. E per spiegare con qualche similitudine il dubbio, si consideri l'alueo di qualche fiume, come il notato ZX, che da per tutto ritenga vguale decliuio, mà ineguale larghezza; cioè che la larghezza, nello spatio BXC sia maggiore della larghezza nello spatio DEZ; e corra l'acqua da Z verso X in modo, che nel sito DE faccia la settione DFGE, e nel sito BC faccia la settione BHIC. S'intenda in BC ristretto l'alueo in modo, che la larghezza BL sia vguale alla larghezza DE, per quel che si dimostra nel nostro Trattato delle Acque Correnti, la settione BHKL, che fà l'acqua nel sito BL, sarà vguale alla settione DFGE che fà nel sito DE; e la velocità dell' acqua nella settione BHKL è vguale alla velocità dell'acqua nella settione DFGE. Se si concepisce rimosso l'argine ELK, la settione dell'acqua sarà BHIC maggiore della settione BHKL, l'acqua nello spatio BIGED crescerà di mole à causa, che la velocità dell'acqua nella settione BHIC è fatta minore: se poi all'acqua in ZX sopraviene vn altra piena, la settione BHIL cresce d'altezza, e si fà più veloce, come il tutto si dimostra nel luogo citato, e la sensata esperienza lo fà manifesto, di modo, che la crescẽza della settione BHIC in vn modo cresce di velocità, ed in vn altro, come in latitudine diminuisce di velocità. Hor se la velocità è vna cosa diuersa dall'estensione superficiale, ò corporea, e si dà in natura, che accrescendosi l'estensione in vn modo, cresce la velocità, ed in vn altro modo si diminuisce; essendo la proportione vna cosa diuersa dall'estensione, cade in dubbio se accrescendo l'estensione al termine antecedente, possa in tutti gli accrescimenti produrre proportione maggiore di quella, che haueua al conseguente, prima dell'accrescimento. E benche le settioni più veloci in tempi vguali possano scaricare maggiori quantità d'acque di quelle, che scaricano le meno veloci, questa, ed altre passioni nell'acque correnti sono cognite à noi mediante le dimostrationi Geometriche; mà non trouo fino à questo luogo con quali dimostrationi Geometriche si possa spiegare alcuna passione delle proportioni, dalla quale se ne possa cauare la causa, perche accresciuta vna estensione in modo, che ne venga quantità incommensurabile ad vn altra, non possa hauer poi minor proportione à quell'altra, di quella, che haueua prima dell'accrescimento. E s'è passione ignota, che due quantità vguali habbiano vguali proportioni ad vna terza; e che le proportioni, le quali sono le medesime ad vna terza sono le medesime frà di loro; come poi non è passione ignota, che accresciuta vna quantità in modo, che ne risulti quantità incommensurabile, habbia maggior proportione ad vna terza di quella commensurabile proportione, che haueua

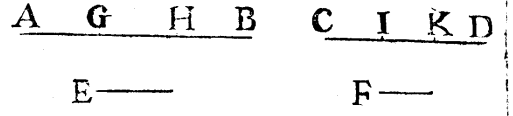


pro-

alla medesima , prima dell'accrescimento . Vn'altro esempio si può aggiungere , riflettendo alle cose , che discendono , ed à quelle , che galleggiano nell' acqua ; cioè . Vna pallina di piombo discende nell'acqua con vna tale qualsi-sia velocità ; se à questa s'accresce , come ogn'vno sà , vna massa di cera , la quale , benche sia leggiera rispetto al piombo , con tutto ciò per se stessa pesa qualche cosa , e pure permista quella pallina di piombo con quella massa di cera , non solo quel piombo non discende con la velocità di prima , mà puo essere tanta la cera accresciuta , che resti à galla . Donde se hauremo riguardo solamente à questi due graui aggiunti insieme , troueremo , ch'il peso della cera aggiunto al peso del piombo non hà prodotto accrescimento di velocità , mà bensì il tutto haurà minor velocità . Sò che le cause di quest'effetto sono cognite , mà habbiamo ancora la cognitione di molt'altre cose , che ce ne aprono la strada ; mà nelle quantità incomensurabili non habbiamo fin'à questo luogo cognitione alcuna delle loro passioni; anzi che non senza gran difficoltà se ne può formar concetto ; e perciò difficilissimo stimo à poter dimostrare , ch'vna quantità comensurabile ad'vn'altra accresciuta fin che diuenga incommensurabile , tale accrescimento non possa fare tal composto con la prima , che comparata ad'vna terza produca proportione minore di quella , che haueua à quella terza prima dell'accrescimento . E quanto questo Theorema è più difficile à dimostrarsi, tanto l'antedetta definitione è più oscura , è dipende da passione remotissima . Per il che tutta la machina delle passioni appoggiate à questa definitione, con quel che gli segue appresso , resta indimostrato . E benche si potrebbe dire , aderendo alla sentenza del P. Clauio , che le definitioni sono nomi posti ad arbitrio , e che basta à questi Autori hauer spiegato quello , che si deue concepire quando nel progresso delle sue dimostrationi dirà maggiore , ò minor proportione , cioè che quando dirà maggiore , ò minore proportione , si debba intendere di quella da loro definita , poco importando che sia più questa , che quella proportione : non intendo qui esaminare le ragioni del P. Clauio , mà dirò bene, che non altro intese Euclide nella sesta definitione di questo quinto Libro, quando disse; All' hora chiamaremo la prima alla seconda hauer l'istessa proportione, quale hà la terza alla quarta , quando gli vguali multiplici della prima , e terza , secondo qualunque multiplicatione , sono tutti due ò maggiori , ò minori , ouero vguali , à gli vguali multiplici della seconda , e quarta , presi secondo qualunque multiplicatione ; volendo inferire , che quando dirà la proportione della prima alla seconda essere la medesima , qual'è quella della terza alla quarta , si debba intendere , che questi quattro termini, frà quali si dice caderui proportionalità , ritenghino tal passione , che gli vguali multiplici del primo , e terzo termine , secondo qualunque multiplicatione, siano tutti due ò maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici del secondo , e quarto, secondo qualunque multiplicatione: pigliando le quantità in genere , senza fare alcuna distintione di commensurabile , ed incommensurabile , voci tutte introdotte da gl'interpreti , e che mai sono state ne meno sognate da Euclide , prima del suo decimo libro , doue ne dimostra le passioni ; conoscendo bene, che douendosi trattare delle proportioni, nelle quantità in genere , altra definitione non gli poteua conuenire , che quella esplicata da lui co' gli vguali multiplici , atteso che gli vguali multiplici si possono prendere d'ogni quantità .

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se quante grandezze si vogliano siano vgualmente multiplici d'altrettante grandezze , si come vna è multiplice di vna , così tutte sono multiplici di tutte .



Siano quante grandezze si vogliano AB , CD, vgualmente multiplici di altrettante grandezze , come E, ed F. Dico che le grandezze AB , CD insieme, sono multiplici delle grandezze E, & F insieme, come AB è multiplice di E ; ouero come CD è multiplice di F.

Perche AB è multiplice di E,come CD è multiplice di F , tante volte AB è misurata da E, [a] per quante volte CD è misurata da F . Si diuida AB nelle parti vguali ad E , che siano AG , GH , HB ; e si diuida C D nelle parti vguali ad F , che siano CI, IK, KD ; tante parti saranno in AB vguali ad E , per quante ne sono in C D vguali ad F . In oltre perche AG è vguale ad E , e la grandezza CI è vguale ad F, le due AG, CI insieme saranno vguali [b] alle due E , & F insieme . Similmente perche GH è vguale ad E , ed IK è vguale ad F , le due GH , & IK insieme saranno vguali alle due E, ed F insieme. Nell'istesso modo le due HB , KD insieme,sono vguali alle due E,ed F insieme ; e perciò tante volte le due AB, CD insieme , sono misurate dalle due E , ed F insieme, per quante volte AB è misurata da E, ouero CD, è misurata da F . Per la qual cosa le due AB, CD insieme, [c] sono multiplici delle due E, ed F insieme, come AB è multiplice di E , ouero CD è multiplice di F , ch'era da dimostrarsi .

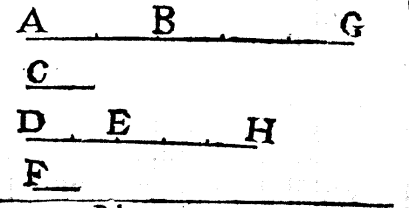
[a] Scol. alla 2. def. del 5.

[b] 2. assiom.

[c] Scol. alla 2. defin. di questo .

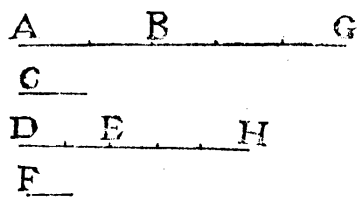
THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se la prima è multiplice della seconda , come la terza è multiplice della quarta ; e la quinta è multiplice della seconda , come la sesta è multiplice della quarta ; la composta della prima , e quinta sarà multiplice della seconda , come la composta della terza , è sesta , è multiplice della quarta .



Sia la prima AB multiplice della seconda C , come la terza DE è multiplice della quarta F ; e la quinta BG sia multiplice della seconda C, come la sesta EH è multiplice della quarta F . Dico , che AG,composta della prima,e quin-

ta, è multiplice della seconda C, come DH, composta della terza, e sesta, è multiplice della quarta F.



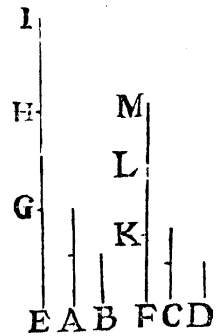
a Scol. alla 2. defin. di questo.

Perche A B è multiplice di C, come DE è multiplice di F, [a] tante volte A B sarà misurata da C, per quante volte D E è misurata da F. Similmente perche BG è multiplice di C, come E H è multiplice di F, tante volte BG sarà misurata da C, per quante volte E H è misurata da F: ma si disse che AB è tante volte misurata da C, per quante volte DE è misurata da F; sarà tutta AG misurata tante volte da C, per quante volte DH è misurata da F, e perciò AG è multiplice di C, [b] come DH è multiplice di F. Per la qual cosa AG composta della prima, e quinta, è multiplice della seconda C, come DH, composta della terza, e sesta, è multiplice della quarta F, ch'era da dimostrarsi.

b Scol. alla 2. defin. di questo.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se la prima è multiplice della seconda, come la terza, è multiplice della quarta; gli vguali multiplici della prima, e terza, sono ancora vguali multiplici della seconda, e quarta.



Sia la prima A multiplice della seconda B, come la terza C è multiplice della quarta D; e siano presi gli vguali multiplici della prima A, e della terza C, che siano E, ed F. Dico che E, ed F sono ancora vguali multiplici della seconda B, e della quarta D.

Perche le due E, ed F, per ipotesi, sono vguali multiplici delle due A, & C, tante volte la quantità E sarà misurata da A, [a] per quante volte la quantità F è misurata da C; si diuida la quantità E nelle parti vguali ad A, che siano EG, GH, HI, e si diuida la quantità F nelle parti vguali à C, che siano FK, KL, LM.

a Scol. alla 2. defin. di questo.

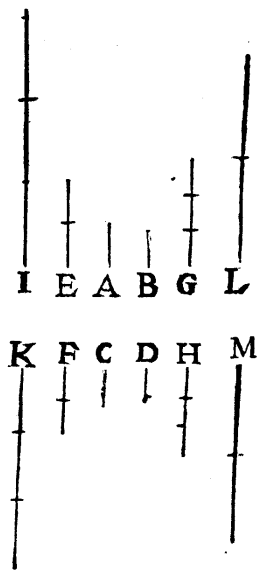
Perche le due EG, FK sono vguali alle due A, & C, e le due A, & C sono vguali multiplici delle due B, & D, le due EG, FK saranno vguali multiplici delle due B, & D. Per l'istessa ragione le due GH, KL sono vguali multiplici delle due B, & D; e le due HI, LM sono vguali multiplici delle due B, & D. Hor essendo la prima E G multiplice della seconda B, come la terza FK è multiplice della quarta D; e la quinta GH è multiplice della seconda B, come la sesta KL è multiplice della quarta D; sarà, per l'antecedente propositione, EH composta della prima, e quinta multiplice della seconda B, come FL composta della terza, e sesta, è

mul-

multiplice della quarta B. Di nuouo perche la prima EH è multiplice della seconda D, come la terza FL è multiplice della quarta D; e la quinta HI è multiplice della seconda B, come la sesta L M è multiplice della quarta D; sarà per l'antecedente propositione, EI composta della prima, e quinta, multiplice della seconda B, come F M composta della terza, e sesta, è multiplice della quarta D. Per la qual cosa le quantità E, ed F sono vguali multiplici delle due B, & D, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

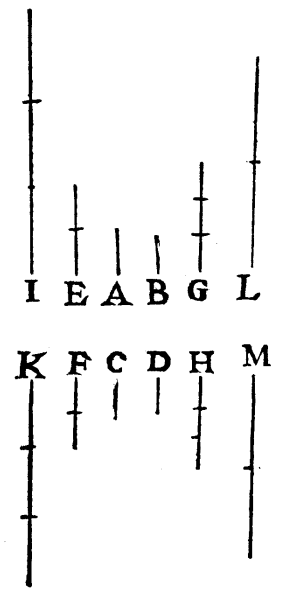
Se di quattro quantità habbia la prima alla seconda la medesima proportione, quale hà la terza alla quarta; e sono presi gli vguali multiplici della prima, e terza, secondo qualunque multiplicatione; e similmente sono presi gli vguali multiplici della seconda, e quarta, secondo qualunque multiplicatione: il multiplice della prima haurà la medesima proportione al multiplice della seconda, quale hà il multiplice della terza al multiplice della quarta.



Siano le quattro quantità A, B, C, D, ed habbia la prima A alla seconda B, l'istessa proportione, che hà la terza C, alla quarta D; e siano presi gli vguali multiplici della prima A, e terza C, secondo qualunque multiplicatione, che siano E, ed F; similmente siano presi gli vguali multiplici della seconda B, e quarta D, secondo qualunque multiplicatione, che siano G, ed H. Dico che la proportione di E à G è l'istessa, che la proportione di F, ad H.

Si prendano gli vguali multiplici delle due E, ed F, secondo qualunque multiplicatione, che siano I, & K; e si prendano gli vguali multiplici delle due G, ed H, secondo qualunque multiplicatione, che siano L, ed M, e si considerino quattro quantità, la prima E, la seconda A, la terza F, e la quarta C. Perche la prima E è multiplice della seconda A, come la terza F è multiplice della quarta C, e per costruttione I, & K sono vguali multiplici della prima E, e terza F, per l'antecedente propositione, le due I, & K sono ancora vguali multiplici di A, & C. Di nuouo, perche G, & H sono vguali multiplici di B, & D, e le due L, ed M sono per costruttione,

vguali multiplici di G, ed H; per l'antecedente propoſitione, le due L, ed M ſono vguali multiplici delle due B, & D. In oltre, perche la prima A alla ſeconda B, per ipoteſi è come la terza C alla quarta D, e le due I, & K ſono vguali multiplici della prima A, e terza C; come anco le due L, ed M ſono vguali multiplici della ſeconda B, e quarta D; per la conuerſa alla ſeſta definitione, ſe I è maggiore di L, ancora K ſarà maggiore di M, e ſe I è minore, ò vguale ad L, ancora K ſarà minore, ò vguale ad M, perche ſe queſto nõ fuſſe, non ſarebbe la proportione di A à B, come quella di C à D, ch'è contro all' ipoteſi.



Si conſiderino quattro altre quantità, cioè la prima E, la ſeconda G, la terza F, e la quarta H. Gli vguali multiplici della prima E, e terza F, per coſtruttione, ſono I, & K, e gli vguali multiplici della ſeconda G, e quarta H, ſono le due L, ed M. E perche I, ch'è multiplice della prima, eſſendo maggiore di L, multiplice della ſeconda, ancora K, ch'è multiplice della terza, per quel che s'è dimoſtrato, è maggiore di M, multiplice della quarta; e ſe I è minore, ò vguale ad L, ancora K è minore, ò vguale ad M; per la 6. definitione di queſto, la prima E alla ſeconda G, hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza F alla quarta H. Per la qual coſa il multiplice della prima al multiplice della ſeconda, è come il multiplice della terza al multiplice della quarta, come fù propoſto dimoſtrare.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto nell'antecedente dimoſtratione, facilmente ſi caua la dimoſtratione della proportione inuerſa, ſpiegata da Euclide nella 14. definitione; cioè ſe quattro quantità ſono proportionali, inuertendo ſono ancora proportionali.

Habbia l'antecedente A al conſeguente B l'iſteſſa proportione, quale hà l'antecedente C al conſeguente D. Dico che inuertendo, il conſeguente B all'antecedente A è come il conſeguente D all'antecedente C.

Si

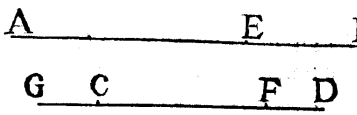
Si prendano gli vguali multiplici della prima A, e terza C, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano E, ed F; e ſi prendano gli vguali multiplici della ſeconda B & quarta D, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano G, ed H. Perche la proportione di A à B, per ipoteſi è come quella di C à D, per la cõuerſa della ſeſta definitione, ſe E è maggiore di G, ancora F ſarà maggiore di H; ſe E è minore, ò vguale à G, ancora F ſarà minore, ò vguale ad H; perche ſe altrimente foſſe, nõ ſarebbe la proportione di A à B come quella di C à D. Hor ſe E è maggiore di G, ed ancora F è maggiore di H, ſarà all'incontro G minore di E, ed ancora H minore di F; ſimilmente ſe E è minore di G, ed ancora F è minore di H, all'incõtro G ſarà maggiore di E, ed ancora H ſarà maggiore di F; e ſe E, & F ſono vguali alle due G, ed H, all'incontro G, & H ſaranno vguali ad E, & F. D'onde è manifeſto, che ſe G è maggiore di E, ancora H è maggiore di F; e ſe G è minore, ò vguale ad E ancora H ſarà minore, o vguale ad F. Si prenda B come prima quantità, la ſeconda ſia A, la terza D, e la quarta C; delle quali G, ed H, per coſtruttione, ſono vguali multiplici di B, & D, ch'è la prima, e terza; & E, ed F ſono vguali multiplici di A, & C, che ſono la ſeconda, e quarta. E perche G multiplice della prima B s'è maggiore di E multiplice della ſeconda A, ancora H, ch'è multiplice della terza D, è maggiore di F, ch'è multiplice della quarta C; e ſe G è minore, ò vguale ad E, ancora H è minore, ò vguale ad F; e per la ſeſta definitione di queſto, la prima B alla ſeconda A hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza D, alla quarta C. Per la qual coſa ſe A à B è come C à D, inuertendo, B ad A ſarà come D à C, ch'era da dimoſtrarſi.



THEOREMA V. PROPOSITONE V.

Se il tutto è multiplice del tutto, come la parte detratta è multiplice della parte detratta; il rimanente ſarà multiplice del rimanente, come il tutto è multiplice del tutto.

Sia il tutto A B multiplice del tutto C D, come la parte A E è multiplice della parte C F. Dico che l'auanzo E B è multiplice dell' auanzo F D, come il tutto A B è multiplice del tutto C D.

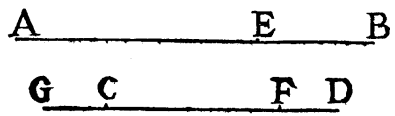


Si concepiſca la quantità GC talmente, che EB ſia multiplice di GC, come AE è multiplice di CF; ſarà tutta AB [a] multiplice di tutta GF, come AE è multiplice di CF. Mà per ipoteſi AE è multiplice di CF, come

[a] 1. del. 5.

tutta

tutta AB è multiplice di tutta CD, sarà AB multiplice di GF, come la medesima A B è multiplice di C D. Per la qual cosa G F [b] sarà vguale à C D. Se ne leui la commune C F, resta G C [c] vguale ad F D. Mà per costruttione EB è multiplice di GC, come A E è multiplice di C F, sarà l'auanzo E B multiplice dell'auanzo F D, come AE è multiplice di C F; cioè come il tutto A B è multiplice del tutto C D, ch'era da dimostrarsi.



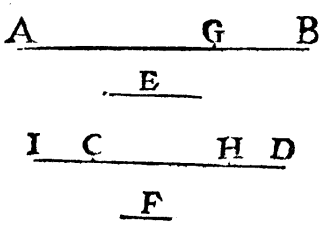
b 6. assiom.

c 3. assiom.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se due grandezze sono vgualmente multiplici di due altre quantità, e le parti detratte dalle due grandezze sono vgualmente multiplici di quelle quantità; i rimanenti ò sono vguali, ouero vgualmente multiplici di quelle due quantità.

Sia A B multiplice di E, come C D è multiplice di F; e la parte AG sia multiplice di E, come la parte CH è multiplice di F. Dico che se il restante G B è vguale ad E, ancora il restãte HD è vguale ad F; e se GB è multiplice di E, sarà HD vguale multiplice di F. Sia nel primo luogo G B vguale ad E. Dico che H D è vguale ad F. Si concepisca I C vguale ad F. Perche A G è multiplice di E, come C H è multiplice di F, tante volte A G è misurata da E, quante volte C H è misurata da F: Mà per ipotesi GB è vguale ad E, e per costruttione IC è vguale ad F; tante volte AB sarà misurata da E, per quante volte IH è misurata da F; e perciò AB [a] è multiplice di E, come IH è multiplice di F. Mà per ipotesi AB è multiplice di E, come C D è multiplice di F; sarà I H multiplice di F, come CD multiplice della medesima F; e perciò IH [b] sarà vguale à CD: se ne leui la commune C H, resta I C [c] vguale ad H D; ma I C è posta vguale ad F, sarà HD [d] vguale ad F, come GB è vguale ad E, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



a Scol. alla 2. defin. di questo.

b 6. assiom.

c 3. assiom.

d 1. assiom.

Di nuouo, supposto che GB sia multiplice di E. Dico che H D è vguale multiplice di F. Si concepisca la quantità CI in modo, che IC sia multiplice di F, come GB è multiplice di E. Perche la prima A G, per ipotesi, è multiplice della seconda E, come la terza C H è multiplice della quarta F; e la quinta GB, per costruttione, è multiplice della seconda E, come la festa IC è multiplice della quarta F; sarà AB, composta della prima, e quinta, multiplice della seconda E, [e] come I H, composta della terza, e festa, è multiplice della quarta F: Mà A B è multiplice

e 2. del 5.

plice di E, come C D è multiplice di F; sarà IH multiplice di F, come C D è multiplice della medesima F; e perciò I H, & C D [f] sono frà di loro vguali; detratta la commune CH, resta IC [g] vguale ad HD; ma IC è multiplice di F, come GB è multiplice di E; sarà HD multiplice di F, come GB è multiplice di E, ch'era da dimostrarsi.

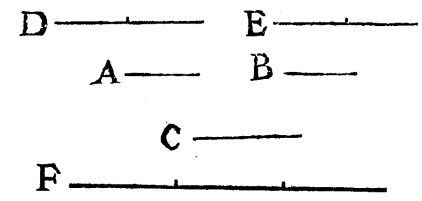
f 6. assiom.

g 3. assiom.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Le quantità vguali hanno l'istessa proportione ad vna medesima grandezza; e quella grandezza hà l'istessa proportione alle quantità vguali.

Siano le grandezze A, & B vguali frà di loro, e sia C qualunque terza quantità. Dico prima. che la proportione della grandezza A alla grandezza C, è l'istessa che la proportione di B alla medesima C. Si prendano gli vguali multiplici di A, & B, secondo qualunque multiplicatione, che siano D, ed E; e si prenda F multiplice di C, secondo qualunque multiplicatione. Perche le due A, & B, per ipotesi, sono frà di loro vguali, i loro vguali multiplici D, ed E, saranno [a] frà di loro vguali; dal che se D è vguale ad F, ancora E sarà vguale alla medesima F; se D è maggiore di F, ancora E sarà maggiore di F; e se D è minore di F, ancora E sarà minore di F. Si considerino quattro quantità, cioè A prima, C seconda, B terza, e la quarta sia C; di modo che C rappresenta la seconda, e la quarta. Le due D, & E sono gli vguali multiplici della prima A, e della terza B; e la quantità F, sarà l'vguale multiplice della seconda, e quarta C. E perche D, multiplice della prima, s'è maggiore di F, multiplice della seconda, ancora E multiplice della terza, è maggiore di F, multiplice della quarta; e se D è minore, ò vguale ad F; ancora E è minore, ò vguale ad F, per la festa definitione di questo, la proportione della prima A alla seconda C è come quella della terza B alla quarta C. Per la qual cosa le quantità vguali hanno l'istessa proportione ad vna terza quantità, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



a b assiom.

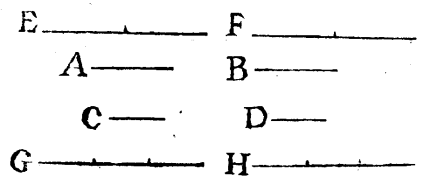
Di nuouo dico che C hà l'istessa proportione ad A, quale hà à B.

Essendosi dimostrato D vguale ad E, se F è maggiore di D, sarà ancora maggiore di E; e se F è minore, ò vguale à D, sarà ancora minore, ò vguale ad E. Si considerino quattro quantità, la prima C, la seconda A, la terza C, e la quarta B. Gli vguali multiplici della prima, e terza C, vengono ambidue rappresentati dalla medesima quantità F; e gli vguali multiplici della seconda A, e quarta B, sono D, ed E; e perche F multiplice della prima C, s'è maggiore di D, multiplice della seconda A, ancora F, multiplice della terza C, è maggiore di E, multiplice della quarta B; e se F è minore, ò vguale à D, la medesima F è ancora minore, ò vguale ad E; sarà, per la citata 6. definitione, la proportione della prima C alla se-

conda A, come quella della terza C alla quarta B. Per la qual cosa vna terza quantità hà l'istessa proportione alle quantità vguali, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO.

Dall'antecedente propositione si caua, che l'vguali quantità hanno la medesima proportione ad altre quantità vguali.

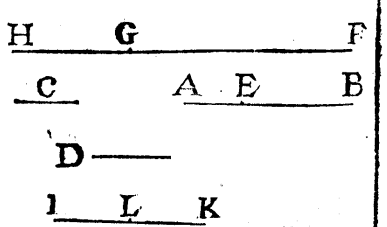


Come per essempio sia A vguale à B, e la quantità C vguale à D. Dico, che la proportione di A à C è come quella di B à D. Si prendano gli vguali multiplici di A, & B, secondo qualunque multiplicatione, che siano E, & F; sarà [a] *E vguale ad F. Similmente si prendano gli vguali multiplici di C, & D, secondo qualũque multiplicatione, che siano G, ed H; e sarà G vguale ad H. Hor perche le due E, F sono fra di loro vguali, e le due G, H sono frà di loro vguali; se E sarà vguale à G, ancora F sarà vguale ad H; se E è maggiore, ò minore di G, ancora F sarà maggiore, ò minore di H. Si considerino le quattro quantità, cioè A prima, C seconda, B terza, & D quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza B, sono E, ed F, e gli vguali multiplici della seconda C, e quarta D, sono G, ed H; E perche E, multiplice della prima, s'è maggiore di G, multiplice della seconda, ancora F, multiplice della terza, è maggiore di H, multiplice della quarta; e se la quantità E è minore, ò vguale à G, ancora F è minore, ò vguale ad H; per la sesta definitione di questo, la prima A alla seconda C, hà l'istessa proportione, quale hà la terza B alla quarta D. Per la qual cosa le quantità vguali hanno l'istessa proportione ad altre quantità vguali, come fù proposto.*

[a] 36. assiom.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Delle quantità ineguali, la maggiore hà maggior proportione ad vna terza, che la minore alla medesima terza; e la terza hà maggior proportione alla minore, che alla maggiore.



Siano le quantità ineguali, cioè AB maggiore, & C minore; e la terza sia qualunque quantità D, del medesimo genere. Dico prima che la proportione della maggiore AB alla terza D, è maggiore che la proportione della minore C alla medesima quantità D.

S'intenda detratta da AB la parte

AE vguale alla minore C; si prendano gli vguali multiplici delle due AE, EB, in modo, ch'il multiplice di EB sia maggiore di D, ed il multiplice di AE non sia minore della medesima D, ma ò sia vguale, ouero maggiore; e siano FG, GH, cioè che FG sia multiplice di BE, come HG è multiplice di AE; ed il multiplice sia preso di tanta grandezza, che FG sia maggiore di D, & HG, ò sia vguale, ò maggiore di D. Si prenda poi IK multiplice di D, che sia prossimo maggiore ad HG; si tagli da IK la parte KL vguale alla quantità D. Perche IK è multiplice di D, ed è prossimo maggiore di HG, detrattane la parte KL: ch'è vguale à D, resta IL non maggiore di HG, cioè HG non è minore di IL. In oltre perche FG, per costruttione, è maggiore di D, e la quantità D è vguale ad LK, sarà GF maggiore di LK. Ma HG non è minore di IL, sarà tutta HF maggiore di IK. Di più, perche FG è multiplice di EB, come HG è multiplice di AE, tutta HF [a] sarà multiplice di tutta AB, come HG è multiplice di AE; mà AE fù fatta vguale à C; sarà HF multiplice di AB, come HG è multiplice di C. Per la qual cosa le due HF, HG sono vguali multiplici delle due AB, & C. Si considerino quattro quantità AB prima, D seconda, C terza, e D quarta, di modo, che la quantità D serua per seconda, e per quarta quantità. Gli vguali multiplici della prima AB, e terza C sono HF, & HG; e gli vguali multiplici della seconda, e quarta D, vengono rappresentati dalla sola quantità IK. Hor perche HF, ch'è multiplice della prima AB, è maggiore di IK, ch'è multiplice della seconda D; ed HG, multiplice della terza C, per costruttione non è maggiore di IK multiplice della quarta D, per l'ottaua definitione di questo, la prima AB hauerà maggior proportione alla seconda D, che la terza C alla quarta D, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

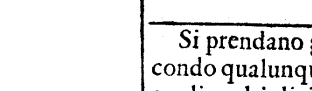
[a] 21. del 5.

Di nuouo dico, che la terza quantità D hà maggior proportione alla minore C, che alla maggiore AB. Si considerino quattro quantità, cioè D prima, C seconda, D terza, & AB quarta. Gli vguali multiplici della prima, e terza D, è la quantità KI; e gli vguali multiplici della seconda C, e quarta AB, sono HG, & HF. E perche IK, multiplice della prima D, per costruttione, è maggiore di HG multiplice della seconda C; & IK, multiplice della terza D, non è maggiore di HF, multiplice della quarta AB; per l'ottaua definitione di questo, la prima D alla seconda C, hà maggior proportione, che la terza D alla quarta AB. Per la qual cosa vna terza quantità hà maggior proportione alla minore, che alla maggior quantità, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Le grandezze, che hanno la medesima proportione ad vna terza quantità, sono frà di loro vguali; e quelle grandezze, alle quali vna terza quantità hà l'istessa proportione, sono frà di loro vguali.

Habbiano prima le due A, & B l' istessa proportione à qualunque terza C. Dico che sono frà di loro vguali.



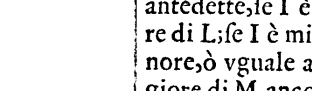
Se non sono vguali vna delle due sarà maggiore; e supposto che A sia
a 8. del 5. maggiore di B, haverà maggior proportione A alla terza C, [a] che B alla medesima C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque le quantità A, & B sono ineguali, ma sono frà di loro vguali.

Di nuouo se la grandezza C hà l'istessa proportione alle due A, & B. Dico che A è vguale à B. Se A, & B, non sono frà di loro vguali, vna
b 8. del 5. delle due sarà maggiore. Supposto che A sia minore di B, haverà C ad A [b] maggior proportione, che la medesima C à B, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A, & B sono ineguali, ma sono frà di loro vguali, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Delle quantità, che hanno proportione ad vna terza, quella, che hà maggior proportione, è maggiore; e quando la terza hà proportione ad altre quantità, quella, alla quale hà maggior proportione, è minore.

Habbia prima la grandezza A maggior proportione alla terza C di quella, che hà B alla medesima C. Dico che A è mag-



giore di B. Non sono A, & B frà di loro vguali, perche
a 7. del 5. [a] haverebbero la medesima proportione à C, ch'è contro all'ipotesi. Sia dunque A minore di B, in tal caso A à C haverà
b 8. del 5. [b] minor proportione, che B alla medesima C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A è minore, ne vguale, ma è maggiore di B.

Di nuouo habbia C maggior proportione à B, che la medesima C ad A. Dico che B è minore di A. Non può essere B vguale ad A, stante che
c 7. del 5. C [c] haverebbe l'istessa proportione alle due B, & A, ch'è contro all'ipotesi. Sia dunque B maggiore di A, haverà maggior proportione C ad
d 8. del 5. A, [d] che la medesima C à B; fù supposto C havere maggior proportione à B, haverebbe maggiore, e minor proportione à B, ch'è impossibile. Non dunque B è maggiore, ne vguale, ma è minore di A, come fù proposto dimostrare.

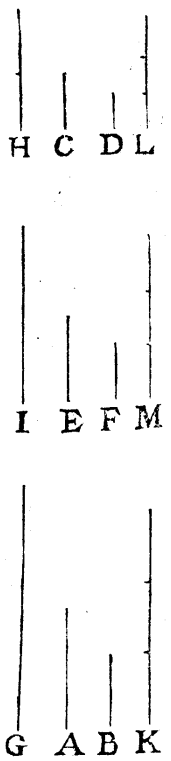
THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Le proportioni, che sono le medesime ad vna terza, sono le medesime frà di loro.

Siano le proportioni di A à B, e di C à D, le medesime, che la proportione di E ad F. Dico che la proportione di A à B è l'istessa, che la proportione di C à D.

Si prendano gli vguali multiplici di tutti gl'antecedenti A, E, C, secondo qualunque multiplicatione, che siano G, I, H; e si prendano gli vguali multiplici di tutti i conseguenti B, F, D, secondo qualunque multiplicatione, che siano K, M, L.

Si considerino quattro quantità, cioè A prima, B seconda, E terza, ed F quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza E, sono per costruttione G, ed I; e gli vguali multiplici della seconda B, e quarta F, sono K, ed M. E perche, per ipotesi, la proportione di A à B, è come quella di E ad F, per la natura della medesima proportione spiegata nella sesta definitione, se G è maggiore di K, ancora I sarà maggiore di M; se G è minore, ò vguale à K, ancora I sarà minore, ò vguale ad M; perche se fosse altrimẽte, non sarebbe la proportione di A à B come quella di E ad F, ch'è contro all'ipotesi. Di nuouo si considerino quattro altre quantità, cioè la prima E, la seconda F, la terza C, e la quarta D. Gli vguali multiplici della prima E, e terza C sono I, ed H; e gli vguali multiplici della seconda F, e quarta D sono M, ed L. E perche la prima E alla seconda F, per ipotesi, è come la terza C, alla quarta D; per le ragioni antedette, se I è maggiore di M, ancora H sarà maggiore di L; se I è minore, ò vguale ad M, ancora H sarà minore, ò vguale ad L. Mà fù dimostrato, ch'essẽdo I maggiore di M, ancora G, è maggiore di K; e se I è minore, ò vguale ad M, ancora G è minore, ò vguale à K; perciò se G è maggiore di K, ancora H sarà maggiore di L; e se G è minore, ò vguale à K, ancora H sarà minore, ò vguale ad L. Si considerino finalmente quattro altre quantità, cioè A prima, B seconda, C terza, e D quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza C, sono per costruttione, le due G, ed H. Similmente gli vguali multiplici della seconda B, e quarta D, sono K, ed L. E perche s'è dimostrato, che se G, multiplice della prima A, è maggiore di K, multiplice della seconda B, ancora H, multiplice della terza C, è maggiore di L, multiplice della quarta D; e se G è minore, ò vguale à K, ancora H è minore, ò vguale ad L; per la sesta definitione di questo, la proportione della prima A alla seconda B è l'istessa, che la proportione della terza C alla quarta D. Per la qual cosa quelle proportioni, che sono le medesime ad vna terza, sono frà di loro le medesime, ch'era dimostrarsi.



THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

Se saranno quante grandezze si vogliano proportionali, la proportione che hà vn'antecedente ad vn conseguente,

haueranno tutti gli antecedenti insieme à tutti i conseguenti insieme.

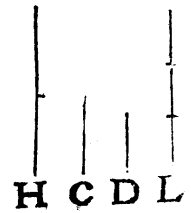
Siano quante grandezze si vogliano proportionali come A, B, C, D, E, F; cioè la proportione di A à B sia l'istessa, che quella di C à D; e la proportione di C à D sia come quella di E ad F. Dico che tutti gli antecedenti A, C, E insieme, à tutti i conseguenti B,D,F insieme, sono come vn antecedente ad vn conseguente, cioè come A à B.



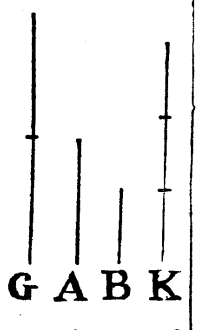
Si prendano gli vguali multiplici di tutti gli antecedenti A, C, E, secondo qualunque multiplicatione, che siano G, H, I; saranno le quantità C,H,I, insieme, multiplici delle tre A, C, E insieme, a come G è multiplice di A. Similmente si prendano gli vguali multiplici di tutti i conseguenti B, D, F, secondo qualunque multiplicatione, che siano K, L, M; saranno le quantità K,L,M insieme, multiplici de'i conseguenti B,D,F, insieme, b come K è multiplice di B.

a 1. del 5.

b 1. del 5.



In oltre perche la prima A alla seconda B, per ipotesi, è come la terza C alla quarta D; sono, per costruttione le due G, H vguali multiplici della prima A, e terza C; e le due K, L, sono vguali multiplici della seconda B, e quarta D, per la natura della medesima proportione spiegata nella sesta definitione, se G è maggiore di K, ancora H sarà maggiore di L; se G è minore, ò vguale à K, ancora H sarà minore, ò vguale ad L. E perche C à D, per ipotesi, è come E ad F, si proverà nell'istesso modo, che se H è maggiore di L, ancora I è maggiore di M; e se H è minore, ò vguale ad L, ancora I sarà minore, ò vguale ad M. Per la qual cosa se G, H, I, insieme, sono maggiori di K, L, M, insieme, ancora G sarà maggiore di K; e se G, H, I, insieme, sono minori, ò vguali à K, L, M insieme, ancora G sarà minore, ò vguale à K.



Si considerino quattro quantità, la prima delle quali siano tutti gli antecedenti A,C,E insieme; la seconda siano i conseguenti B,D,F insieme; la terza sia l'antecedente A; e la quarta il conseguente B. Gli vguali multiplici della prima A, C, E, e della terza A, per quel che si disse, sono G, H, I, & G; gli vguali multiplici della seconda B,D,F, è della quarta B sono K,L,M, & K. E perche se G, H, I, multiplice della prima A, C, E è maggiore di K,L,M, multiplice della seconda B,D,F; ancora G, multiplice della terza A, sarà maggiore di K, multiplice della quarta B; e se G,H, I è minore, ò vguale à K,L,M, ancora G sarà minore, ò vguale à K, per la 6. defin. di questo, la prima A, C, E, alla seconda B,D,F, sarà come la terza A alla quarta B. Per la qual cosa tutti gli antecedenti A,C,E, à tutti li conseguenti B, D, F, sono come vn antecedente, cioè A, ad vn conse-

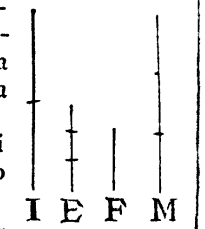
conseguente, cioè B, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

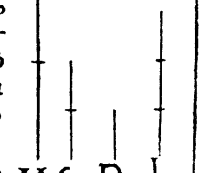
Se la prima alla seconda hà l'istessa proportione, che la terza alla quarta; e la terza alla quarta hà maggior proportione, che la quinta alla sesta; haverà la prima alla seconda maggior proportione, che la quinta alla sesta.

Habbia la prima A alla seconda B, l'istessa proportione, che la terza C alla quarta D; ed habbia la terza C alla quarta D, maggior proportione, che la quinta E alla sesta F. Dico, che la proportione della prima A alla seconda B è maggiore, che la proportione della quinta E alla sesta F.

Si prendano gli vguali multiplici de i conseguenti B,D,F, secondo qualunque multiplicatione, che siano K, L, M.



Perche, per ipotesi, la proportione di C à D, è maggiore della proportione di E, ad F, secondo la natura della maggior proportione, spiegata nell'ottaua definitione di questo, gli vguali multiplici della prima C, e terza E, secondo tutte le multiplicationi, non saranno sempre, ò tutti due maggiori, ò tutti due minori, ò tutti due vguali, à gli vguali multiplici della seconda D, e quarta F; perche se fossero sempre maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici di D, ed F, la proportione di C à D, per la sesta definitione di questo, sarebbe l'istessa, che la proportione di E ad F, ch'è contro all'ipotesi; e perciò nella moltitudine delle multiplicationi qualcheduna ve ne sarà, secondo la quale, pigliando gli vguali multiplici della prima C, e terza E, come H, ed I, se H è maggiore di L, la quantità I non sarà maggiore di M. Si prenda poi G multiplice di A, come H è multiplice di C, in modo, che le trè G, H, I siano vguali multiplici de i trè antecedenti A, C, E.



In oltre si considerino quattro quantità, delle quali C sia la prima, la seconda D, la terza A, e la quarta B. Perche, per ipotesi, la prima C alla seconda D è come la terza A alla quarta B; essendo H, & G vguali multiplici della prima C, e terza A, e le due, L, & K sono vguali multiplici della seconda D, e quarta B; per la natura della medesima proportione spiegata nella sesta definitione di questo, se H è maggiore di L, ancora G sarà maggiore di K; ma, per quelche s'è detto, la quãtità H è per costruttione maggiore di L, in cõseguenza G sarà ancora maggiore di K; ma si disse, ch'es-

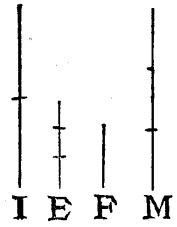


sen-

ſendo H maggiore di L, la quantità I non ſarà maggiore di M ; eſſendo dunque G maggiore di K, la quantità I non ſarà maggiore di M. Si conſiderino quattro altre quantità, cioè A prima, B ſeconda, E terza, ed F quarta. Per coſtruttione gli vguali multiplici della prima A, e terza E, ſono le due G, ed I ; e gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta F, ſono K, ed M ; e perche G, ch'è multiplice della prima, è maggiore di K, multiplice della ſeconda ; ed I multiplice della terza non è maggiore di M multiplice della quarta; per l'ottaua definitione di queſto, la prima A alla ſeconda B, hà maggior proportione, che la terza E alla quarta F, come fù propoſto dimoſtrare.

SCOLIO.

Se la prima E alla ſeconda F haueſſe maggior proportione, che la terza C alla quarta D ; e la proportione di C à D foſſe l'iſteſſa, che la proportione della quinta A alla ſeſta B ; tenendo il medeſimo ordine di prima, ſi dimoſtrerà, che la proportione di E ad F è maggiore della proportione di A à B. Perche hauendo E ad F maggior proportione, che C à D, ſi prouerà, che ſe I è maggiore di M [a] la quantità H non ſarà maggiore di L ; mà ſe H nõ è maggiore di L, ne meno G [b] è maggiore di K, e perciò ſe I è maggiore di M, la quantità G non ſarà maggiore di K ; e per l'ottaua definitione di queſto, E ad F haurà maggior proportione, che A à B.

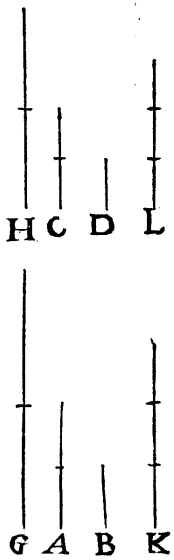


a 8. defin. del 5.
b 6. defin. del 5.

Dond'è manifeſto, che ſe A à B hà l'iſteſſa proportione, che C à D, & hà C à D minor proportione, che E ad F, haurà A à B minor proportione, che E ad F ; mentre tanto è dire, che E ad F hà maggior proportione, che A à B, quanto che A à B hà minor proportione, che E ad F.

Se poi A à B hà maggior proportione, che C à D, & hà C à D maggior proportione, che E ad F ; ſarà manifeſto, che A à B hà molto maggior proportione, che E ad F.

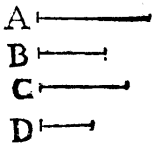
Eſe A à B hà minor proportione, che C à D ; & hà C à D minor proportione, che E ad F ; haurà A à B minor proportione, che E ad F. Il che tutto ſi dimoſtra ſecondo il modo tenuto prima.



THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

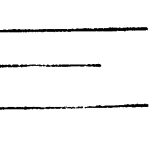
Se la prima alla ſeconda hà l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta, e la prima è maggiore della terza, la ſeconda ſarà maggiore della quarta ; ſe la prima è vguale alla terza, la ſeconda ſarà vguale alla quarta ; e ſe la prima è minore della terza, la ſeconda ſarà minore della quarta.

Habbia la prima A alla ſeconda B l'iſteſſa proportione, che la terza C alla quarta D. Dico prima, che ſe A è maggiore di C, ancora B ſarà maggiore di D. Perche A è maggiore di C, preſa B come terza quantità, haurà la maggiore A alla terza B [a] maggior proportione, che la minore C alla medeſima B. Ma la proportione di C à D è l'iſteſſa, che quella di A à B ; haurà C à D [b] maggior proportione di quella, che hà la medeſima C à B. Quãdo vna terza quantità hà proportione à due, [c] quella, alla quale hà maggior proportione, è minore ; hauendo C maggior proportione à D di quella, che hà à B, ſarà D minore di B ; cioè B maggiore di D, come A è maggiore di C, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



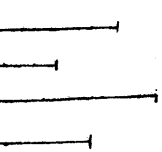
a 8. del 5.
b 13. del 7.
c 10. del 5.

Di nuouo, ſuppoſto che A ſia vguale à C. Dico che B è vguale à D. Perche A è vguale à C, preſa B come terza quantità, haurà A à B [d] l'iſteſſa proportione, che hà C alla medeſima B. Ma la proportione di C à D è l'iſteſſa, che quella di A à B ; haurà C à D [e] l'iſteſſa proportione, che la medeſima C à B. Per la qual coſa B [f] è vguale à D, come A è vguale à C, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.



d 7. del 5.
e 11. del 5.
f 9. del 5.

Finalmente, ſuppoſto che A ſia minore di C. Dico che B è minore di D. Perche A è minore di C, preſa B, come terza quantità, la proportione di A à B [g] ſarà minore della proportione di C à B. Ma la proportione di C à D è l'iſteſſa, che quella di A à B, haurà C à D [h] minor proportione di quella, che hà la medeſima C à B. Quando vna terza quantità hà minor proportione ad vna, che ad vn altra quantità, [K] quella, alla quale hà minor proportione, è maggiore ; ma s'è detto, che C hà minor proportione à D, che à B ; ſarà D maggiore di B, cioè B minore di D, come A è minore di C, ch'era da dimoſtrarſi.

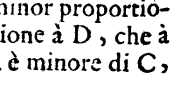


g 8. del 5.
h 13. del 5.
K 10. del 5.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

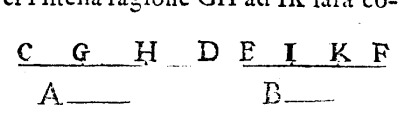
Le parti hanno la medeſima proportione, quale hanno i loro corriſpondenti vguali multiplici, quando ſono del medeſimo genere.

Sia A parte di C D, come B è parte di E F, cioè ſia C D multiplice di A, come E F è multiplice di B, e le due A, & B, ſiano del medeſimo genere. Dico che la proportione di C D, ad E F, è come quella di A à B. Perche C D è multiplice



di A,

di A, come EF è multiplice di B; sarà CD tante volte misurata da A, per quante volte EF è misurata da B. Si diuida CD nelle parti vguali ad A, che siano CG, GH, HD; e si diuida EF nelle parti vguali à B, che siano EI, IK, KF. Perche CG è vguale ad A, e la quantità EI è vguale à B; sarà CG ad EI [a] come A à B. Per l'istessa ragione GH ad IK sarà come A à B; ed ancora HD à KF, sarà come A à B. Hor se l'antecedente CG al conseguente EI, è come l'antecedente A al conseguente B; e gliantecedenti GH, HD, à i conseguenti IK, KF, presi separatamente, sono come l'antecedente A al conseguente B; saranno tutti gli antecedenti CG, GH, HD, insieme, à tutti i conseguenti EI, IK, KF insieme, come l'antecedente A al conseguente B. Per la qual cosa CD, ad EF, è come A à B, ch'era da dimostrarsi.



a Corol. alla 2. del 5.

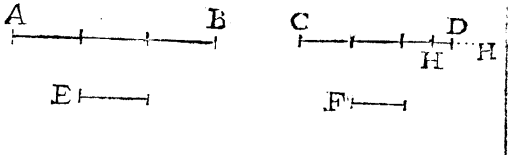
b 12. del 5.

SCOLIO.

La conuersa all'antecedente propositione la faremo nel seguente modo.

Se la prima alla seconda hà l'istessa proportione, che la terza alla quarta; e la prima è multiplice della terza, sarà la seconda vguale multiplice della quarta.

Habbia AB à CD l'istessa proportione, quale hà E ad F, e sia AB multiplice di E; Dico che CD è vguale multiplice di F. Se CD non è multiplice di F come AB è multiplice di E, si minuisca, ò s'accresca CD in H in modo, che CH sia multiplice di F, come AB è multiplice di E; e per l'antecedente propos. AB à CH sarà come E ad F; mà per ipotesi AB à CD, è come E ad F; sarà AB à CH come la medesima AB à CD. Dalche le quantità CH, CD sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque CH è multiplice di F, come AB è multiplice di E: mà sarà CD multiplice di F, come AB è multiplice di E, ch'era da dimostrarsi.



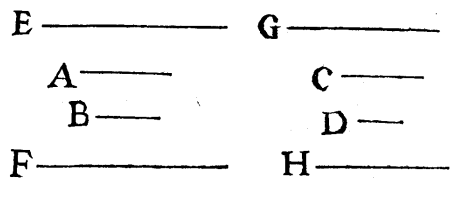
COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto è manifesto, che se AB à CD, è come E ad F, ed E è parte di AB, sarà tale parte F di CD, quale parte è la quantità E di AB; stante che CD è multiplice di F, come AB è multiplice di E.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVI.

Se quattro grandezze del medesimo genere sono proportionali, permutando saranno ancora proportionali.

Siano le quattro quantità A, B, C, D, del medesimo genere, & habbia l'antecedente A al conseguente B, l'istessa proportione, che hà l'antecedente C al conseguente D. Dico che, permutando, l'antecedente A all'antecedente C, hauerà l'istessa proportione, quale hà il conseguente B al conseguente D.



Si prendano gli vguali multiplici di A, & B, secondo qualunque multiplicatione, che siano E, ed F: e similmente si prendano gli vguali multiplici di C, & D, secondo qualunque multiplicatione, e siano G, ed H. Perche E, ed F sono vguali multiplici delle loro parti A, & B, per l'antecedente propos. hauerà E ad F l'istessa proportione di A à B. Per l'istessa ragione, essendo G, ed H vguali multiplici delle due C, & D, la proportione di G ad H sarà come quella di C à D. Ma si disse, che A à B hà l'istessa proportione, che hà C à D, hauerà A à B [a] l'istessa proportione, che hà G ad H; fù dimostrata la proportione di E, F come quella di A à B, hauerà E ad F [b] la medesima proportione, che hà G ad H. Dalche se la prima E è maggiore della terza G, [c] ancora la seconda F sarà maggiore della quarta H. E se la prima E sarà minore, ò vguale à G, ancora F sarà minore, ò vguale ad H. Si considerino quattro quantità, delle quali A sia la prima, C la seconda, B la terza, e D la quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza B, per costruttione, sono le due E, & F; e gli vguali multiplici della seconda C, e quarta D, sono G, ed H. E perche E s'è maggiore di G, per quel che s'è dimostrato, ancora F è maggiore di H; e se E fosse minore, ò vguale à G, ancora F sarebbe minore, ò vguale ad H; per la 6. defin. di questo, la prima A alla seconda C, hà l'istessa proportione, quale hà la terza B alla quarta D. Per la qual cosa quando A à B hà l'istessa proportione, che C à D, permutando, hauerà A à C l'istessa proportione, che hà B à D, come fù proposto dimostrare.

a 11. del 5.

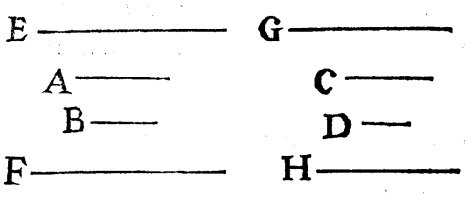
b 11. del 5.

c 14. del 5.

SCOLIO.

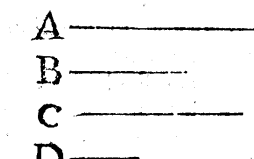
L'antecedente dimostratione hà solamente luogo quando le quattro quantità proportionali sono del medesimo genere. Perche essendo le due E, F, vguali multiplici delle due A, B; saranno le quattro E, F, A, B del medesimo genere; e per l'istessa ragione le quattro G, H, C, D, saranno del medesimo genere: siche se le due A, B, sono d'altro genere, che le due C, D; le due E, F,

non saranno del medesimo genere con le due G, H: e perciò sarebbe errore il dire, che la quantità E sia maggiore, ò minore, ò vguale alla quantità G; come ne meno si deue dire, che F sia maggiore, ò vguale, ò minore di H; e perciò in modo alcuno può hauerui luogo la sesta definitione, dalla quale dipende la natura della medesima proportione; ed in conseguenza quando le quattro quantità proportionali non sono del medesimo genere, ne meno si possono permutare.



Dimostrò Euclide nella 14. propositione, che se quattro quantità sono proportionali, e la prima è maggiore, ò minore, ò vguale alla terza, che ancora la seconda è maggiore, ò minore, ò vguale alla quarta; mà perche i Geometri costumano spesso, quando la prima è maggiore, ò minore, ò vguale alla seconda, conchiudere, che anco la terza è maggiore, ò minore, ò vguale alla quarta, per non lasciare cos'alcuna mancante, la proueremo come fà il Commandino, ed il Clauio nel seguente modo.

Habbia A à B l'istessa proportione che hà C à D. Dico che se A è maggiore di B, ancora C è maggiore di D; e se A è vguale, ò minore di B, sarà C vguale, ò minore di D.



Perche A à B è come C à D, permutando [a] *A à C sarà come B à D; si che presa A come prima quantità, C seconda, B terza, e D quarta; essendo la prima A alla seconda C, come la terza B alla quarta D, per la 14. propositione di questo, se la prima A è maggiore della terza B, anco la seconda C sarà maggiore della quarta D; e se A è minore, ò vguale à B, ancora C sarà minore, ò vguale à D, ch'era da dimostrarsi.*

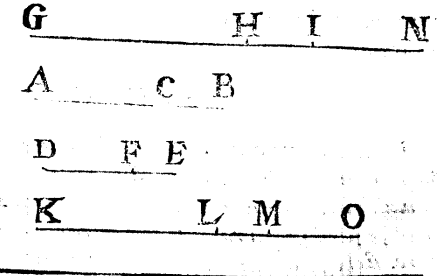
a 16. del 5.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XVII.

Se le quantità composte sono proportionali, le medesime diuise saranno proportionali.

Habbia AB à BC l'istessa proportione, quale hà DE ad EF. Dico che, diuidendo, AC à CB hauerà l'istessa proportione, quale hà DF ad FE.

Si prendano gli vguali multiplici delle quattro quantità AC, CB, DF, FE, che siano GH, HI, KL, LM; cioè GH sia multiplice di AC; la quantità HI multiplice di CB; la quantità KL, di DF; e la quantità LM multiplice di FE. Perche GH è multiplice di AC, come HI è multiplice di CB; sarà

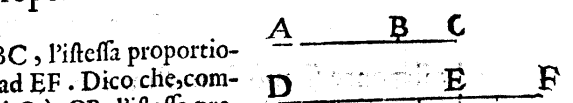


GI [a] multiplice di AB, come GH è multiplice di AC; e per l'istessa ragione KM sarà multiplice di ED, come KL è multiplice di DF. Ma per costruttione KL è multiplice di DF, come GH è multiplice di AC; sarà MK multiplice di ED, come GH è multiplice di AC. Fù dimostrato GH multiplice di AC, come IG è multiplice di AB; sarà MK multiplice di ED, come IG è multiplice di AB. Di nuouo si prendano due altri vguali multiplici delle due CB, FE, secondo qualunque multiplicatione; e sia IN multiplice di CB, come MO è multiplice di FE. E perche IH è multiplice di CB, come ML è multiplice di FE; sarà tutta NH [b] multiplice di CB, come LO è multiplice di FE. Si considerino quattro quantità, cioè AB prima, BC seconda, DE terza, ed EF quarta. Gli vguali multiplici della prima AB, e terza DE, sono, per quel che s'è dimostrato, GI, & KM; e gli vguali multiplici della seconda CB, e quarta FE, sono HN, ed LO. E perche la proportione della prima AB alla seconda BC, per ipotesi, è come la terza DE alla quarta EF; per la natura della medesima proportione spiegata nella 6. definitione, se GI, ch'è multiplice della prima, supera HN, ch'è multiplice della seconda, ancora KM, ch'è multiplice della terza, supera LO, ch'è multiplice della quarta; e se GI è minore, ò vguale ad HN, sarà ancora KM minore, ò vguale ad LO. Supposto prima, che GI sia maggiore di HN; leuatane la commune IH, [c] resta GH maggiore di IN; e per l'istessa ragione essendo KM maggiore di LO, leuatane la commune LM, [d] resta KL maggiore di MO. Similmente se GI è vguale ad HN, ed anco KM è vguale ad LO, leuatone le communi HI, LM, [e] resta GH vguale ad IN, e KL vguale ad MO; e parimente essendo GI minore di HN, ed anco KM minore di LO, leuatane le communi HI, LM, resta GH [f] minore di IN, e KL minore di MO. Si considerino quattro altre quantità, cioè la prima AC, la seconda CB, la terza DF, e la quarta FE. Gli vguali multiplici della prima AC, e terza DF, sono, per costruttione, GH, & KL; e gli vguali multiplici della seconda CB, e quarta FE, sono IN, ed MO. E perche s'è dimostrato, che se GH è maggiore di IN, ancora KL è maggiore di MO; e se GH è minore, ò vguale ad IN, ancora KL è minore, ò vguale ad MO; per la 6. definitione di questo, la prima AC alla seconda CB hauerà l'istessa proportione, quale hà la terza DF alla quarta FE. Per la qual cosa se AB à BC è come DE ad EF, sarà, diuidendo, AC à CB, come DF ad FE, ch'era da dimostrarsi.

a 1. del 5.
b 2. del 5.
c 5. assiom.
d 5. assioma.
e 3. assiom.
f 5. assiom.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XVIII.

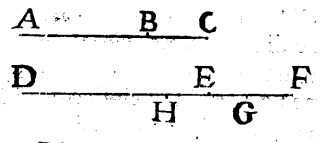
Se le quantità diuise sono proportionali, composte ancora saranno proportionali.



Habbia AB, à BC, l'istessa proportione, quale hà DE ad EF. Dico che, componendo, hauerà AC à CB, l'istessa proportione quale hà DF, ad FE.

Se AC non hà l'istessa proportione à CB, quale hà DF ad FE, hauerà

DF ad vn altra quantità maggiore, ò minore di FE, l'istessa proportione, che hà AC à CB. Sia prima quella quantità la notata FG minore di EF; sarà DE minore di DG. Perche AC à CB è come DF ad FG, diuidendo, AB à BC [a] hauerà l'istessa proportione, quale hà DG à GF: ma la proportione di AB à BC, per ipotesi, è come quella di DE ad EF; hauerà DG à GF [b] l'istessa proportione, quale hà DE ad EF. Hor perche la prima DG alla seconda GF è come la terza DE alla quarta EF; e la prima DG è maggiore della terza DE; la seconda FG [c] sarà maggiore della quarta EF; la parte maggiore del tutto, [d] ch'è impossibile; non dunque DF hà l'istessa proportione ad vna quantità minore di FE, quale hà AC à CB.



a 17. del 5.
b 11. del 5.
c 14. del 5.
d 9. assioma.

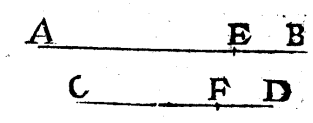
Di nuouo habbia DF ad vna quantità, come FH, maggiore di EF, l'istessa proportione, quale hà AC à CB; sarà DE maggiore di DH; e diuidendo DH ad HF [e] sarà come AB à BC; mà per ipotesi AB à BC è come DE ad EF; sarà DH ad HF [f] come DE ad EF; & essendo la prima DH alla seconda HF, come la terza DE alla quarta EF; e la prima DH è minore della terza DE; sarà la seconda HF [g] minore della quarta EF; il tutto minore della parte, [h] ch'è impossibile: non dunque DF ad vna maggiore di FE hà l'istessa proportione, quale hà AC à CB; ne meno, per quel che s'è dimostrato, ad vna minore, ma la proportione di DF ad FE è come quella di AC à CB, ch'era da dimostrarsi.

e 17. del 5.
f 11. del 5.
g 14. del 5
h 9. assioma.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XIX.

Se il tutto hà l'istessa proportione al tutto, quale hà la parte detratta alla parte detratta; hauerà il rimanente al rimanente l'istessa proportione, quale hà il tutto al tutto.

Habbia il tutto AB al tutto CD l'istessa proportione, quale hà la parte AE alla parte CF. Dico che il rimanente EB al rimanente FD, sarà come il tutto AB al tutto CD.



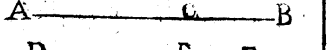
Perche AB à CD è come AE à CF, permutando, sarà AB ad AE [a] come CD à CF; e diuidendo, BE ad EA [b] sarà come DF ad FC; e permutando di nuouo, BE ad FD [c] sarà come AE à CF; ma AE à CF, per ipotesi, è come AB à CD; sarà EB ad FD, [d] come tutta AB à tutta CD, ch'era da dimostrarsi.

a 16. del 5.
b 17. del 5.
c 16. del 5.
d 11. del 5.

COROLLARIO.

Qui facilmente si può dimostrare la conuersione della proportione, come fù spiegato nella defin. 16.; cioè se AB à BC è come DE ad EF; sarà, per la conuersione della proportione,

portione, BA ad AC come ED, à DF. Perche AB à BC è come DE ad EF; diuidendo, AC à CB [a] sarà come DF ad FE; ed inuertendo, sarà BC à CA [b] come EF ad FD; si che, componendo, sarà BA ad AC [c] come ED à DF, ch'è il nostro proposto.

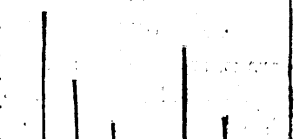


a 17. del 5.
b Corollario alla 4. del 5.
c 18. del 5.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XX.

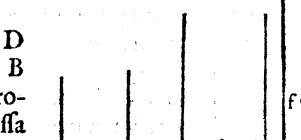
Se siano tre grandezze da vna parte, e tre altre da vn altra parte nella proportione ordinata, se la prima delle prime è maggiore della terza, per l'egualità, ancora la prima dell'altre sarà maggiore della terza; e se la prima delle prime è vguale, ò minore della terza, ancora la prima dell'altre sarà vguale, ò minore della terza.

Siano tre grandezze, come A, B, C, da vna parte, e tre altre, come D, E, F, da vn altra parte, le quali siano nell'ordinata proportione; cioè, che la proportione di A à B sia come quella di D ad E, e la proportione di B à C sia come quella di E ad F. Dico che, per l'egualità, se A è maggiore di C, ancora D sarà maggiore di F; e se A è vguale, ò minore di C, ancora D sarà vguale, ò minore di F. Perche B à C, per ipotesi, è come E à F, sarà, inuertendo, C à B [a] come F ad E. Supposto prima che A sia maggiore di C. Dico, che D è maggiore di F. Perche A è maggiore di C, presa B come terza quantità, la maggiore A [b] haurà maggior proportione alla terza B, di quella, che hà la minore C alla medesima B. Ma la proportione di D ad E, per ipotesi, è l'istessa che la proportione di A à B, haurà D ad E [c] maggior proportione di quella, che hà C à B; fù dimostrata C à B hauere l'istessa proportione, quale hà F ad E, haurà D ad E [d] maggior proportione di quella, che hà F alla medesima E. Ma, quando due quantità hanno proportione ad vna terza, quella, che hà maggior proportione, è maggiore; [e] hauendo D maggior proportione ad E di quella, che hà F ad E, sarà D maggiore di F, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



a Corollario alla 4. del 5.
b 8. del 5.
c 13. del 5.
d 13. del 5.
e 10. del 5.

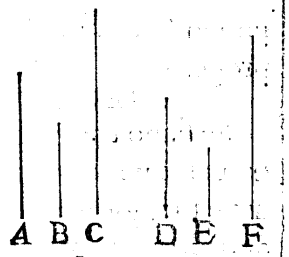
Di nuouo sia A vguale à C. Dico, che D è vguale ad F. Perche A è vguale à C, presa B come terza quantità, haurà A à B [f] l'istessa proportione, che hà C à B: Ma D ad E hà l'istessa proportione, che A à B, haurà D ad E [g] l'istessa proportione, quale hà C à B; fù mostrata la proportione di F ad E essere come quella di C à B; haurà D ad E [h] l'istessa proportione, quale



f 7. del 5.
g 11. del 5.
h 11. del 5.

hà F alla medesima E. Per la qual cosa D [K] è vguale ad F, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

Finalmente, supposto che A sia minore di C. Dico, che D è minore di F. Perche A è minore di C, presa B come terza quantità, la proportione di A à B [l] sarà minore di quella, che hà C alla medesima B; ma D ad E è come A à B, haverà D ad E [m] minor proportione di quella, che hà C à B; fù dimostrata la proportione di F ad E essere come quella di C à B; haverà D ad E [n] minor proportione di quella, che hà F alla medesima E. E perche, quando due quantità hanno proportione ad vna terza, quella, che hà minor proportione, [o] è minore; hauendo D minor proportione ad E, che F ad E, sarà D minore di F, come fù proposto dimostrare.

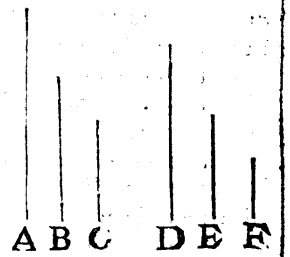


K 9. del 5.
l 18. del 5.
m 13. del 5.
n 13. del 5.
o 10. del 5.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXI.

Se saranno tre quantità da vna parte, e tre altre da vn'altra parte nella perturbata proportione, per l'egualità, se la prima delle prime è maggiore della terza, ancora la prima dell'altre sarà maggiore della terza; e se la prima delle prime è vguale, ò minore della terza, ancora la prima dell'altre sarà vguale, ò minore della terza.

Siano tre quantità, come A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte, nella perturbata proportione; cioè, che la proportione di A à B sia come quella di E ad F; e la proportione di B à C sia come quella di D ad E. Dico che, per l'egualità, se A è maggiore di C, ancora D sarà maggiore di F; e se A è vguale, ò minore di C, ancora D sarà vguale, ò minore di F. Perche B à C, per ipotesi, è come D ad E, inuertendo, [a] sarà C à B, come E à D.

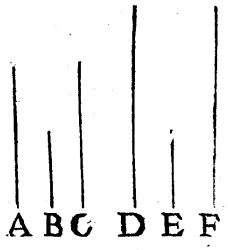


a Corol. alla 4. del 5.

Supposto prima che A sia maggiore di C. Dico che D è maggiore di F. Perche A è maggiore di C, presa B come terza quantità, haverà A à B [b] maggior proportione di quella, che hà C à B; ma la proportione di E ad F è come quella di A à B; haverà E ad F [c] maggior proportione di quella, che hà C à B. Fù dimostrata C à B hauere l'istessa proportione, che hà E à D; haverà E ad F [d] maggior proportione di quella, che hà la medesima E à D. Quando vna quantità hà proportione à due, [e] quella, alla quale hà maggior proportione, è minore; hauendo E maggior proportione ad F di quella, che hà à D, sarà F minore di D, cioè, sarà D maggiore di F, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

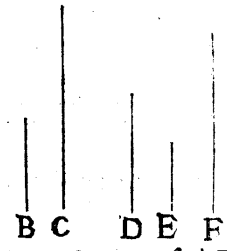
b 8. del 5.
c 13. del 5.
d 13. del 5.
e 10. del 5.

Di nuouo, supposto che A sia vguale à C. Dico che D è vguale ad F. Perche A è vguale à C, presa B come terza quantità, haverà A à B [f] l'istessa proportione, che hà C à B; ma la proportione di E ad F è come quella di A à B, haverà E ad F [g] l'istessa proportione, che hà C à B; fù dimostrata C à B hauere l'istessa proportione, quale hà E à D; haverà E ad F [h] l'istessa proportione, quale hà E à D; per il che D [K] è vguale ad F, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.



f 7. del 5.
g 11. del 5.
h 11. del 5.
K 9. del 5.

Finalmente supposto che A sia minore di C. Dico che D sarà minore di F. Perche A è minore di C, presa B come terza quantità, haverà A [l] minor proportione à B di quella, che hà C alla medesima B; ma la proportione di E ad F è come quella di A à B; haverà E ad F [m] minor proportione di quella, che hà C à B; fù dimostrato hauere C à B l'istessa proportione, quale hà E à D; haverà E ad F [n] minor proportione di quella, che hà la medesima E à D. Quando vna terza quantità hà proportione à due, [o] quella, alla quale hà minor proportione, è maggiore; essendosi dimostrato hauere E ad F minor proportione di quella, che hà E à D, in conseguenza sarà F maggiore di D, cioè D minore di F, ch'era da dimostrarsi.



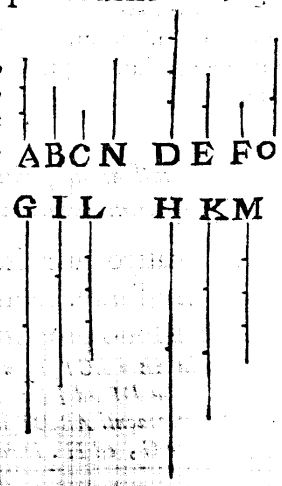
l 18. del 1.
m 13. del 5.
n 13. del 5.
o 10. del 5.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXII.

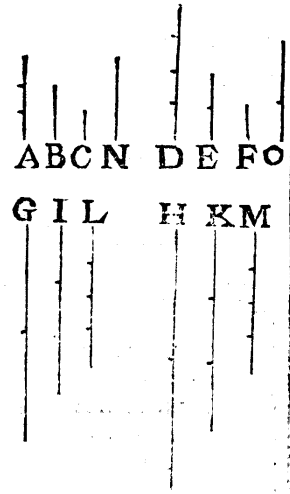
Se saranno quante grandezze si vogliano da vna parte, ed altretante da vn altra, nella proportione ordinata; per l'egualità, la proportione della prima delle prime all'vltima, sarà l'istessa, che la proportione della prima delle altre, all'vltima.

Siano prima tre quantità, come A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte nella proportione ordinata; cioè che la proportione di A à B sia come quella di D ad E, e la proportione di B à C sia come quella di E ad F. Dico che, per l'egualità, la proportione di A à C è come quella di D ad F. Si prendano gli vguali multiplici delle due prime A, & D, che siano G, ed H. Similmente si prendano gli vguali multiplici delle due seconde B, ed E, che siano I, & K; e si prendano gli vguali multiplici delle due terze C, ed F, che siano L, ed M.

Perche la prima A, alla seconda B, per ipotesi, è come la terza D, alla quarta E; sono G, ed H gli vguali multiplici della prima



A, e terza D, e le due I, & K ſono vguali multiplici della ſeconda B, e quarta E; ſarà la proportione di G ad I [a] come quella di H à K. Similmente, perche la prima B alla ſeconda C è come la terza E alla quarta F, e per coſtruttione le due I, & K ſono vguali multiplici della prima B, e terza E; come anco le due L, ed M ſono vguali multiplici della ſeconda C, e quarta F; ſarà la proportione di I ad L, [b] come quella di K ad M: dal che le quantità G, I, L, & H, K, M [c] ſono nella proportione ordinata; e perciò ſe G è maggiore di L, anco H [d] ſarà maggiore di M; e ſe G è vguale, ò minore di L, ancora H ſarà vguale, ò minore di M. Si conſiderino quattro quantità, cioè la prima A, la ſeconda C, la terza D, e la quarta F. Gli vguali multiplici della prima A, e terza D, per coſtruttione, ſono G, ed H; e gli vguali multiplici della ſeconda C, e quarta F, ſono L, ed M; e perche s'è dimoſtrato che ſe G è maggiore di L, anco H è maggiore di M; e ſe G è vguale, ò minore di L, ancora H è vguale, ò minore di M; la proportione della prima A alla ſeconda C [e] ſarà l'iſteſſa, che la proportione della terza D alla quarta F.



a 4. del 5.
b 4. del 5.
c 19. defin. del 5.
d 20. del 5.
e 6. defin. del 5.

Di nuouo ſiano più di tre quantità, come A, B, C, N, da vna parte, ed altrettante, come D, E, F, O, da vn altra, nella proportione ordinata. Dico che A ad N ſarà come D ad O.

Si conſiderino tre quantità da vna parte, come A, C, N, e tre altre da vn altra parte, come D, F, O: eſſendoſi dimoſtrata la proportione di A à C eſſere come quella di D ad F; e per ipoteſi, C ad N è come F ad O; faranno le tre A, C, N, [f] da vna parte, e l'altre tre D, F, O, da vn altra parte, nella proportione ordinata; e per quel, che s'è dimoſtrato, la proportione di A ad N ſarà l'iſteſſa, che quella di D ad O. Il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe ſaranno più di quattro per parte, come fù propoſto dimoſtrare.

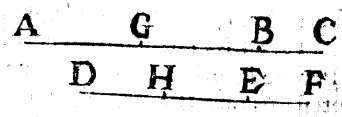
f 19. defin. del 5.

SCOLIO.

La dimoſtratione ſeguente la pongo in queſto luogo, douendo ſeruire ne gl'elementi conici, ed in altri luoghi.

Se quattro quantità ſono proportionali, detrattone le metà de gl'antecedenti, ò le metà de i conſeguenti; i rimanenti ſono proportionali.

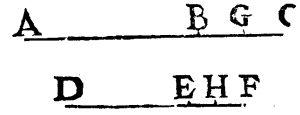
Habbia AB à BC l'iſteſſa proportione, quale hà DE ad EF: Diuiſi prima gli antecedenti AB, DE in due parti vguali in G, ed H. Dico che GB à



BC è come HE ad EF. Perche AG è vguale à GB, & DH è vguale ad HE; ſarà AG à GB [a] come DH ad HE, e componendo, AB à BG [b] ſarà come DE ad EH; ed inuertendo, BG à BA [c] ſarà come EH ad ED. Si conſiderino trè quantità BG prima, BA ſeconda, & BC terza da vna parte; e trè altre EH prima, ED ſeconda, & EF terza, da vn altra parte. Perche la prima BG alla ſeconda BA è dimoſtrata eſſere come la prima EH alla ſeconda ED; e la ſeconda AB alla terza BC, per ipoteſi, è come la ſeconda DE alla terza EF; per l'vgualità, la prima BG alla terza BC, [d] ſarà come la prima EH alla terza EF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a Corol. alla 7. del 5.
b 18. del 5.
c Corol. alla 4. del 5.
d 22. del 5.

Di nuouo ſiano diuiſi i conſeguenti BC, EF in due parti vguali in G, ed H. Dico che ſe AB à BC è come DE ad EF, ſarà ancora AB à BG, come DE ad EH. Perche BG è vguale à GC, & EH è vguale ad HF; ſarà CG à GB, [e] come FH, ad HE; e componendo, CB à BG [f] ſarà come FE ad EH. Perche AB à BC per ipoteſi, e come DE ad EF, componendo, ſarà AC à CB [g] come DF ad FE; mà CB à BG è come FE ad EH, ſarà per l'vgualità AB à BG [h] come DE ad EH, il che era da dimoſtrarſi.

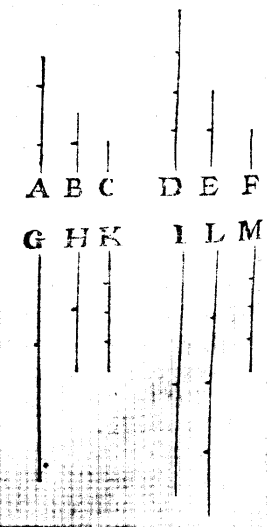


e Corol. alla 7. del 5.
f 18. del 5.
g 18. del 5.
h 22. del 5.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXIII.

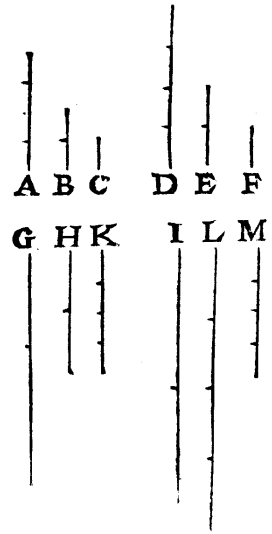
Se ſiano tre quantità da vna parte, e tre da vn altra, nella perturbata proportione; per l'egualità, la prima delle prime alla terza hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà la prima dell'altre alla terza.

Siano le tre quantità A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte nella perturbata proportione; cioè che la proportione di A à B ſia come quella di E ad F; ed habbia B à C l'iſteſſa proportione, che hà D ad E. Dico che per l'egualità, haverà A à C l'iſteſſa proportione, che hà D ad F. Si prendano gli vguali multiplici di A, B, D, che ſiano G, H, I; e ſi prendano gli vguali multiplici di C, E, F, che ſiano K, L, M. Perche G, ed H ſono vguali multiplici di A, & B, haverà G ad H l'iſteſſa proportione, che hà la quantità A alla quantità B. Similmente eſſendo L, ed M vguali multiplici di E, ed F; la proportione di L ad M [b] ſarà come quella di E ad F. Hor hauendo G ad H l'iſteſſa proportione di A à B; ed E ad F, per ipoteſi, è come A à B; haverà G ad H [c] l'iſteſſa proportione, che hà E ad F; fù dimoſtrata L ad M



a 15. del 5.
b 15. del 5.
c 11. del 5.

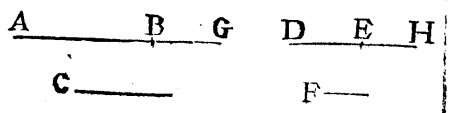
come E ad F; sarà G ad H [d] come L ad M. In oltre perche la prima B alla seconda C, per ipotesi, è come la terza D alla quarta E; sono per costruttione H, ed I, vguali multiplici della prima B, e terza D, e le due K, ed L sono vguali multiplici della seconda C, e quarta E; la proportione di H, ch'è multiplice della prima, à K, [e] multiplice della seconda, sarà l'istessa, che la proportione, che hà I, ch'è multiplice della terza, ad L multiplice della quarta. Hor essendo G ad H, come L ad M, & H à K come I ad L, le quantità G, H, K, & I, L, M, sono [f] nella perturbata proportione; e per l'vgualità, se G è maggiore di K, [g] ancora I sarà maggiore di M; e se G è vguale, ò minore di K, ancora I sarà vguale, ò minore di M. Si considerino quattro quantità, cioè A prima, C seconda, D terza, ed F quarta: gli vguali multiplici della prima A, e terza D, per costruttione, sono G, ed I; e gli vguali multiplici della seconda C, e quarta F, sono K, ed M; e perche G, multiplice della prima, s'è maggiore di K, multiplice della seconda, ancora I, multiplice della terza, è maggiore di M, multiplice della quarta; * sarà la proportione della prima A alla seconda C, [h] come quella della terza D alla quarta F, ch'era da dimostrarsi.



d 11. del 5.
e 4. del 5.
f 20. defin. del 5.
g 21. del 5.
h 6. defin. del 5.
* e se G è minore, ò vguale à K ancora I è minore ò, vguale ad M

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXIV.

Se la prima alla seconda hà l'istessa proportione, quale hà la terza alla quarta; e la quinta alla seconda hà l'istessa proportione, che la sesta alla quarta; la composta della prima, è quinta, hauerà l'istessa proportione alla seconda, quale hà la composta della terza, e sesta, alla quarta.



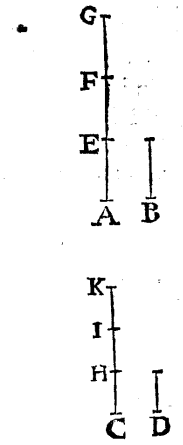
Habbia la prima AB alla seconda C, l'istessa proportione, quale hà la terza DE alla quarta F; e la quinta BG alla seconda C, habbia l'istessa proportione, che hà la sesta EH, alla quarta F. Dico che AG, composta della prima, e quinta, hauera l'istessa proportione alla seconda C, quale hà DH composta della terza, e sesta, alla quarta F. Perche BG à C è come EH ad F, inuertendo, C à BG [a] sarà come F ad EH.

a Coro. 1 all 4. del 5.

Si considerino tre quantità da vna parte, come AB, C, BG, è tre da vn altra, come DE, F, EH. Perche, per ipotesi, la proportione di AB à C è come quella di DE ad F, e la proportione di C à BG s'è dimostrata essere come quella di F ad EH; sarà, per l'vgualità, [b] AB à BG, come DE ad EH; e componendo, AG à GB [c] sarà come DH ad HE. Si considerino tre altre quantità come AG, GB, C da vna parte; e tre altre, come DH, HE, F, da vn altra parte. Essendosi dimostrato, che AG à GB è come DH ad HE, e per ipotesi, BG à C è come EH ad F; sarà per l'egualità [d] AG à C come DH ad F; per la qual cosa AG composta della prima, e quinta, hà l'istessa proportione à C seconda, quale hà DH composta della terza, e sesta alla quarta F, ch'era da dimostrarsi.

b 22. del 5.
c 18. del 5.
d 22. del 5.

COROLLARIO.



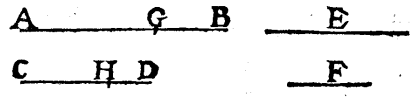
Dall'antecedente propositione si caua, che se A è multiplice di B, come C è multiplice di D, hauerà A à B l'istessa proportione, quale hà C à D. Perche essendo A multiplice di B, come C è multiplice di D, tante volte A è misurata da B, per quante volte C è misurata da D. Si diuida A nelle parti vguali à B, che siano AE, EF, FG; e si diuida CK nelle parti vguali à D, che siano CH, HI, IK. Essendo AE vguale à B, & CH vguale à D; sarà AE à B, come CH à D; e per l'istessa ragione, EF à B sarà come HI à D; ed ancora FG à B sarà come IK à D. Hor se la prima AE alla seconda B è come la terza CH alla quarta D; e la quinta EF alla seconda B è come la sesta HI alla quarta D; sarà AF, composta della prima, e quinta, alla seconda B, come CI, composta della terza, e sesta, alla quarta D. Similmente la prima AF alla seconda B è come la terza CI alla quarta D; e la quinta FG alla seconda B è come la sesta IK alla quarta D; sarà AG, composta della prima, e quinta, alla seconda B, come CK, composta della terza, e sesta, alla quarta D, come si disse.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXV.

Se quattro quantità sono proportionali; la massima, e

la minima, giunte insieme, sono maggiori delle altre due.

Habbia A B à C D, l'istessa proportione, quale hà E ad F, e sia AB la massima, ed F la minima. Dico che AB, ed F insieme, sono maggiori dell'altre due CD ed E insieme.



Si concepisca da AB detratta AG vguale ad E, e da CD, s'intenda detratta CH vguale ad F; sarà AG à CH [a] come E ad F, cioè [b] come AB à C D. Se dunque il tutto A B al tutto C D è come la parte A G alla parte CH; sarà il restãte GB [c] al restãte HD come tutta AB à tutta CD; ma tutta AB è maggiore di CD, stãte ch'è massima, sarà GB [d] maggiore di HD. In oltre perche AG è vguale ad E, e la quantità CH è vguale ad F, le due AG, ed F insieme, [e] sono vguali alle due CH, ed E, insieme. Hor alle due AG, ed F insieme, s'aggiunga la maggiore GB; ed alle due CH, ed E insieme, s'aggiunga la minore H D; le due A B, ed F insieme, [f] saranno maggiori delle due CD, ed E insieme, ch'era da dimostrarsi.

a Corol. alla 7. de 15.
b 11. del 5.
c 19. del 5.
d Scolio alla 16. del 5.
e 2. assioma.
f 4. assioma.

SCOLIO I.

Quando sono quattro quantità proportionali, e l'antecedente di vna proportione è la massima di tutte quelle quantità, necessariamente il conseguente dell'altra proportione è la minima.

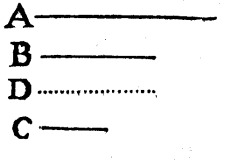
Per essempio se AB à CD è come E ad F, & AB è la massima; sarà F la minima; stante che essendo AB à CD come E ad F, & AB è maggiore di CD, per essere la massima, sarà E [a] maggiore di F. E similmente essendo AB, à CD come E ad F, e la prima AB è maggiore della terza E; sarà la seconda CD [b] maggiore della quarta F: dal che tanto C D, quanto E è maggiore di F, e perciò F sarà la minima. Il che Euclide hà preso come cosa nota, per esser cosa di poco momento à dimostrarsi.

a Scol. alla 16. del 5.
b 14. del 5.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che quando tre quantità sono proportionali, la massima, e la minima, giunte insieme, sono maggiori del doppio della rimanente.

Per essempio habbia A à B l'istessa proportione, che hà B à C, e sia A la massima, & C la minima, le due A, & C insieme, sono maggiori del doppio di B. Si concepisca la quantità D vguale à B, la proportione di A à B sarà l'istessa, che quella di D à C, e per quel, che s'è dimostrato, le due A, & C insie-



me,

me, sono maggiori delle due B, & D insieme, cioè sono maggiori del doppio di B, come si disse.

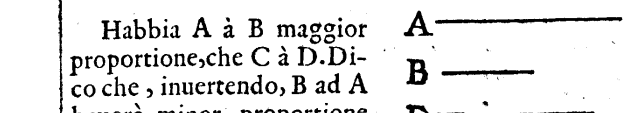
SCOLIO II.

Quì Euclide dà fine al quinto Libro; mà perche molte altre propositioni, delle quali si seruono Autori grauissimi, come Archimede, Apollonio Pergeo, ed altri, che ne i loro scritti le citano, quasi come cose d'Euclide, seguendo ancora io il metodo tenuto da varij Commentatori d'Euclide, e confrontando il tutto in Pappo Alessandrino, doue queste si trouano, le pongo successiuamente con quella maggior facilità, che mi sia possibile.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXVI.

Se la prima alla seconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; inuertendo, la seconda alla prima hauerà minor proportione, che la quarta alla terza.

Habbia A à B maggior proportione, che C à D. Dico che, inuertendo, B ad A hauerà minor proportione di quella, che hà D à C.



Si concepisca la quantità E in modo, che habbia tal proportione à B, quale hà C à D, ed inuertendo B ad E, [a] sarà come D à C.

Perche A à B hà maggior proportione di quella, che hà C à D, e C à D, per costruttione, è come E à B, hauerà A à B [b] maggior proportione di quella, che hà E alla medesima B. Quando due quantità hanno proportione ad vna terza, [c] quella, che hà maggior proportione, è maggiore; hauendo A maggior proportione à B di quella, che hà E à B, sarà A maggiore di E. In oltre perche A è maggiore di E, presa B, come terza quantità, hauerà B alla maggiore A [d] minor proportione di quella, che hà alla minore E; ma B ad E, per quel che s'è dimostrato, è come D à C, hauerà B ad A [e] minor proportione di quella, che hà D à C, ch'era da dimostrarsi.

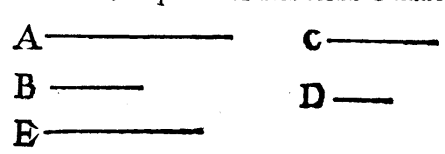
a Corol. alla 4. del 5.
b 13. del 5.
c 10. del 5.
d 8. del 5.
e 13. del 5.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXVII.

Se la prima alla seconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; permutando, la prima alla terza hauerà maggior proportione, che la seconda alla quarta.

Habbia

Habbia la prima A alla ſeconda B maggior proportione, che la terza C alla quarta D. Dico che permutando, la prima A alla terza C hauerà maggior proportione, che la ſeconda B alla quarta D. Si concepiſca la quantità E, che habbia l'iſteſſa proportione à B, quale hà C à D; e permutando, hauerà



a 16.del 5. E à C [a] l'iſteſſa proportione, che hà B à D. Perche A à B hà maggior proportione, che C à D, e la proportione di C à D è come quella di E à B, hauerà A à B [b] maggior proportione di quella, che hà E alla medeſima B: per la qual coſa A [c] ſarà maggiore di E. In oltre eſſendo A maggiore di E, preſa C come terza quantità, la maggiore A [d] hauerà maggior proportione alla terza C, che la minore E alla medeſima C. mà la proportione di A à C, per quel che s'è dimoſtrato, è come B à D, hauerà A à C [e] maggior proportione di quella, che hà B à D, come fù propoſto dimoſtrare.

b 13.del 5.
c 10.del 5.
d 8.del 5.
e 13.del 5.

SCOLIO.

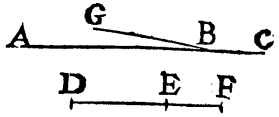
Nell'iſteſſo modo, col ſolo mutare la voce di maggiore in minore, ſi proverà, che ſe A à B hà minor proportione, che C à D, permutando A à C haverà minor proportione, che B à D. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione, e ſi dimoſtri, come prima, che E à C è come B à D. Perche A hà minor proportione à B, che C à D, e la proportione di C à D è come E à B, hauerà A à B [a] minor proportione, che E alla medeſima B; e perciò A [b] è minore di E. Preſa C come terza quantità, hauerà A minore alla terza C, [c] minor proportione, che E maggiore à C; mà E à C è come B à D, hauerà A à C [d] minor proportione, che B à D, ch'è il noſtro propoſto.

a 13.del 5.
b 10.del 5.
c 8.del 5.
d 13.del 5.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Se la prima alla ſeconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; componendo, la prima con la ſeconda hauerà maggior proportione alla ſeconda, che la terza con la quarta alla quarta.

Habbia A B à B C maggior proportione di quella, che hà D E ad E F. Dico che, componendo, AC à C B hauerà maggior proportione di quella, che hà DF ad FE. Si concepiſca la quantità GB in modo, che G B à B C



ſia come DE ad EF, è componendo, ſarà GC à CB [a] come DF ad FE. Perche AB à BC hà maggior proportione, che DE ad EF, e la proportione di DE ad EF è come GB à B C, hauerà A B à B C [b] maggior proportione di quella, che hà G B alla medeſima B C; e perciò A B [c] ſarà maggiore di GB; vgualmente s'aggiunga la parte B C, ſarà A C [d] maggiore

a 18.del 5.
b 13.del 5.
c 10.del 5.
d 4.aſſioma.

giore di tutta G C. Si prenda B C come terza quantità, hauerà la maggiore AC [e] maggior proportione à B C di quella, che hà G C alla medeſima CB; mà GC à CB, per quel che s'è dimoſtrato, è come DF ad FE, hauerà AC à CB [f] maggior proportione di quella, che hà DF ad FE, ch' era da dimoſtrarſi.

e 8.del 5.
f 13.del 5.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifeſto, che ſe A B à B C hà minor proportione, che DE ad E F; componendo, A C à CB hauerà minor proportione, che DF ad FE. Perche ſe AB à BC hà minor proportione, che DE ad EF, all'incontro DE ad EF hauerà maggior proportione, che AB à BC; e componendo, DF ad FE [g] hauerà maggior proportione di quella, che hà AC à C B. Hor ſe la proportione di D F ad FE è maggiore della proportione, che hà AC à C B; ſarà la proportione di A C à C B minore della proportione, che hà DF ad FE, come ſi diſſe.

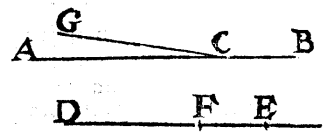
g 28.del 5.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXIX.

Se la prima alla ſeconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; diuidendo, la differenza frà la prima, e ſeconda, hà maggior proportione alla ſeconda, che la differenza frà la terza, e quarta alla quarta.

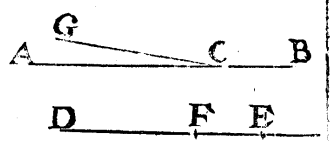
Siano le quattro quantità AB prima, BC ſeconda, e la differenza ſia AC; ſia la terza DE, la quarta EF, e la differenza DF. Hor habbia la prima AB alla ſeconda BC maggior proportione, che la terza DE alla quarta EF. Dico che diuidendo, la differenza AC alla ſeconda CB, hauerà maggior proportione, che la differenza DF alla quarta FE.

Si concepiſca GC in modo, che G B à BC ſia come DE ad EF; e diuidendo, ſarà G C [a] à CB come D F ad FE. Perche AB à B C hà maggior proportione, che DE ad EF, e la proportione di DE ad EF è come quella di GB à BC, hauerà AB à BC [b] maggior proportione di quella che hà GB alla medeſima BC; dal che AB [c] ſarà maggiore di GB; e detrattane la commune BC, reſta AC [d] maggiore di GC; e preſa CB come terza quantità, AC maggiore hauerà maggior proportione alla terza BC [e] di quella, che hà GC minore alla medeſima CB; ma GC à CB è come D F ad F E; hauerà A C à C B [f] maggior proportione, che DF ad FE, come fù propoſto dimoſtrare.



a 17.del 5.
b 13.del 5.
c 10.del 5.
d 5.aſſioma.
e 8.del 5.
f 13.del 5.

COROLLARIO.

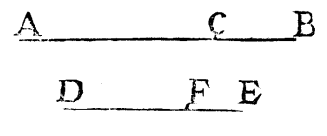


Da quel che s'è detto è manifesto, che se AB à BC hà minor proportione di quella, che hà DE ad EF, diuidendo, hauerà AC à CB, minor proportione di quella, che hà DF ad FE. Perche hauendo AB à BC minor proportione, che DE ad EF, hauerà DE ad EF maggior proportione, che AB à BG; e diuidendo DF ad FE [a] hauerà maggior proportione, che AC à CB. Hor se la proportione di DF ad F E è maggiore di quella, che hà AC à CB, sarà la proportione di AC à CB minore della proportione di DF ad FE, come si disse.

a 29. del 5.

THEOREMA XXX. PROPOSITONE XXX.

Se la prima alla seconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; per la conuersione della proportione, la prima alla differenza frà la prima, è seconda, hauerà minor proportione di quella, che hà la terza alla differenza frà la terza, e quarta.

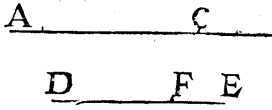


Siano le quattro quantità A B prima, BC seconda, DE terza, & F E quarta; e la differenza frà la prima AB, e la seconda B C sia A C; come anco la differenza frà la terza DE, e quarta FE, sia DF. Hor habbia AB prima à B C seconda maggior proportione, che la terza D E alla quarta FE. Dico che, per la cõuersione della proportione, la prima AB alla differenza AC, hà minor proportione, che la terza DE alla differenza DF. Perche AB à BC hà maggior proportione, che DE ad EF, diuidendo, AC à CB [a] hauerà maggior proportione, che DF ad FE; ed inuertendo, BC à CA [b] hauerà minor proportione di quella, che hà E F ad F D; e componendo, BA ad AC [c] hauerà minor proportione di quella, che hà ED à DF, ch'era da dimostrarsi.

a 29. del 5.
b 26. del 5.
c 28. del 5

COROLLARIO

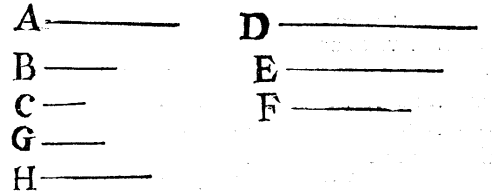
Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se AB à BC hà minor proportione, che DE ad EF, per la conuersione della proportione, hauerà BA ad AC maggior proportione di quella, che ha ED à DF; il che si dimostra come prima s'è fatto; cioè, hauendo A B à BC minor proportione, che DE ad EF; diuidendo, AC à CB [a] hauerà minor proportione, che DF ad FE; ed inuertendo, BC à CA [b] hauerà maggior proportione, che EF ad FD; e componendo, B A ad AC [c] hauerà maggior proportione di quella, che hà ED à DF, come si disse.



a 29. del 5.
b 26. del 5.
c 28. del 5.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXI.

Se siano tre quantità da vna parte, e tre da vn altra parte, e la prima delle prime habbia maggior proportione alla seconda, che la prima dell'altre alla seconda; e la seconda delle prime habbia maggior proportione alla terza, che la seconda dell'altre alla terza; per l'egualità, la prima delle prime alla terza hauerà maggior proportione, che la prima dell'altre alla terza.



Siano tre quantità A, B, C da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte; e la proportione di A à B sia maggiore della proportione di D ad E; ed habbia B à C maggior proportione che E ad F. Dico che per l'egualità, A à C hauerà maggior proportione di quella, che hà D ad F. Si concepiscano le due quantità G, & H in modo, che G à C habbia l'istessa proportione, quale hà E ad F; ed H à G habbia l'istessa proportione, quale hà D ad E: per l'egualità hauerà H à C [a] l'istessa proportione, quale hà D ad F. Perche B hà maggior proportione à C di quella, che hà E ad F; e la proportione di E ad F è l'istessa di quella, che hà G à C; hauerà B à C [b] maggior proportione di quella, che hà G alla medesima C; e perciò B [c] è maggiore di G. In oltre essendo B maggiore di G, presa A come terza quantità, la terza A hauerà maggior proportione alla minore G, [d] che alla maggiore B; ma la proportione di A à B, per ipotesi, è maggiore della proportione, che hà D ad E, la proportione dunque di A à G [e] sarà molto maggiore di quella, che hà D ad E, e perche D ad E è come H à G, hauerà A à G [f] maggior

a 22. del 5.
b 13. del 5.
c 10. del 5.
d 8. del 5.
e Scol. alla 13. del 5.
f 13. del 5.

propor-

proportione di quella, che hà H alla medesima G; per la qual cosa A g sarà maggiore di H. Presa C come terza quantità, haverà A à C h maggior proportione di quella, che hà H alla medesima C; ma H à C è come D ad F, haverà A à C K maggior proportione di quella, che hà D ad F, ch'era da dimostrarsi.

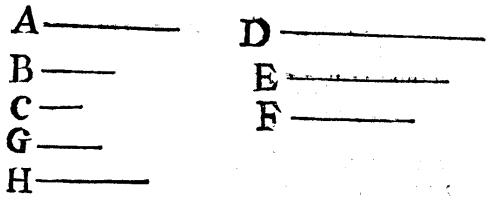
g 10.del 5.
h 8.del 5.
K 13.del 5.

SCOLIO.

Seguendo il medesimo ordine, e mutando solamente le voci di maggiore in minore; si dimostrerà, che se A à B hà minor proportione, che D ad E; e B à C habbia minor proportione, che E ad F; per l'vgualità, A à C haverà minor proportione, che D ad F.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXII.

Se siano tre quantità da vna parte, e tre da vna altra parte, e la prima delle prime habbia maggior proportione alla seconda, che la seconda dell'altre alla terza; e la seconda delle prime alla terza habbia maggior proportione, che la prima dell'altre alla seconda; per l'egualità, la prima delle prime alla terza haverà maggior proportione, che la prima dell'altre alla terza.



Siano tre quantità A, B, C da vna parte, e tre altre, come D, E, F, da vn altra parte, ed habbia A à B maggior proportione di quella, che hà E ad F, ed habbia B à C maggior proportione, che D ad E. Dico che A à C haverà maggior proportione di quella, che hà D ad F. Si concepiscano due quantità come H, & G in modo, che G à C sia come D ad E, ed H à G sia come E ad F; sarà, per l'egualità, H à C come D ad F. Perche B à C hà maggior proportione, che D ad E, e la proportione di D ad E è come G à C; haverà B à C b maggior proportione di quella, che hà G alla medesima C; e perciò B c è maggiore di G. In oltre essendo B maggiore di G, presa A come terza quantità, haverà A alla minore G d maggior proportione di quella, che hà alla maggiore B: ma la proportione di A à B, per ipotesi, è maggiore della proportione di E ad F; haverà A à G e molto maggior proportione di quella, che hà E ad F: ma E ad F è come H à G, haverà A à G f maggior proportione, che H alla medesima G, per la qual cosa A g sarà maggiore di H: presa C come terza quantità, haverà A à C h maggior proportione di

a 23.del 5.
b 13.del 5.
c 10.del 5.
d 8.del 5.
e Schol. alla 13.del 5.
f 13.del 5.
g 10.del 5.
h 8.del 5.

quella,

quella, che hà H à C; ma H à C è come D ad F, haverà A à C K maggior proportione di quella, che hà D ad F, che era da dimostrarsi.

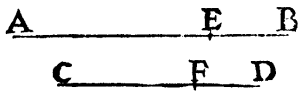
K 13.del 5.

SCOLIO.

Se la proportione di A à B sarà minore della proportione di E ad F; e la proportione di B à C è minore della proportione di D ad E, ripetendo le medesime cose dette, col solo mutare le voci di maggiore in minore, si dimostrerà, che per l'vgualità la proportione di A à C è minore della proportione di D ad F.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Se il tutto hà maggior proportione al tutto, che la parte tratta alla parte tratta; il rimanente haverà maggior proportione al rimanente, che il tutto al tutto.



Se il tutto AB hà maggior proportione al tutto CD, che la parte AE alla parte CF. Dico che il rimanente EB haverà maggior proportione al rimanente FD, ch'il tutto AB, al tutto CD. Perche AB hà maggior proportione à CD, che AE à CF, permutando, haverà AB a ad AE maggior proportione, che DC à CF; e per la conuersione della proportione, AB à BE b haverà minor proportione di quella, che hà CD à DF; e permutando, AB à CD c haverà minor proportione di quella, che hà EB ad FD. Hor se la proportione di AB à CD è minore della proportione di EB ad FD; sarà la proportione di EB ad FD maggiore della proportione che hà tutto AB al tutto CD, ch'era da dimostrarsi.

a 27.del 5.
b 30.del 5.
c 27.del 5.

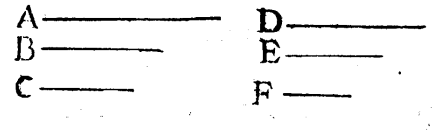
SCOLIO.

Similmente se il tutto hà minor proportione al tutto, che la parte tratta alla parte tratta, ritenendo l'ordine antecedente, col solo mutare le voci di maggiore in minore, si dimostrerà, che l'auanzo all'auanzo hà minor proportione, ch'il tutto al tutto.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXIV.

Se saranno quante grandezze si vogliano da vna parte, ed altr etante da vn altra parte; e la prima delle prime habbia maggior proportione alla prima delle altre, che la seconda

delle prime alla ſeconda delle altre, e la ſeconda alla ſeconda habbia maggior proportione, che la terza alla terza, e con queſt'ordine per le altre; tutte le prime inſieme à tutte le altre inſieme, haueranno maggior proportione, che tutte le prime, leuatane la prima, à tutte le altre, leuatane la prima. Di più la prima delle prime hauerà maggior proportione alla prima delle altre, che tutte le prime à tutte le altre; e che tutte le prime à tutte le altre haueranno maggior proportione, che l'vltima all'vltima.



Siano prima tre quantità A, B, C, da vna parte, e tre altre D, E, F, da vn altra parte, ed habbia A maggior proportione à D di quella, che hà B ad E; ed habbia B ad E maggior proportione, che C ad F. Dico, che le tre A,B,C, inſieme, alle tre D,E,F, inſieme, hanno maggior proportione, che le due B,C, alle due E,F; che A à D hà maggior proportione, che le tre A,B,C, alle tre D,E,F; e che le tre A,B,C, alle tre D,E,F, hanno maggior proportione, che l'vltima C all'vltima F.

Perche B ad E hà maggior proportione, che C ad F, permutando, B à C [a] hauerà maggior proportione, che E ad F; e componendo B,C,à C [b] hauerà maggior proportione, che E, F, ad F; e permutando di nuouo, B,C, ad E,F, [c] hauerà maggior proportione, che C ad F.

Perche il tutto B,C al tutto E,F hà maggior proportione, che la parte C alla parte F, il rimanente B al rimanente E [d] hauerà maggior proportione, che il tutto B,C, al tutto E,F. In oltre perche A à D hà maggior proportione, che B ad E, e ſi è dimoſtrato che B ad E ha maggior proportione, che B,C, ad E,F, per l'vgualità, hauerà A à D [e] maggior proportione, che le due B,C, alle due E, F; e permutando, A alle due B, C, [f] hauerà maggior proportione, che D alle due E,F; e componendo le tre A, B,C, alle due BC, [g] haueranno maggior proportione, che le tre D, E, F, alle due E,F; e permutando di nuouo, le tre A,B,C, alle tre D,E,F, [h] haueranno maggior proportione, che le due B,C alle due E,F, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

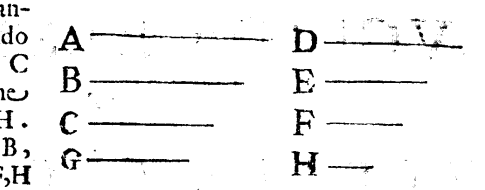
Perche il tutto A,B,C, al tutto D,E,F, hà maggior proportione, che la parte B,C, alla parte E,F, il rimanente A [K] al rimanente D hauerà maggior proportione, che il tutto A,B,C, al tutto D,E,F, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

Finalmente perche le tre A,B,C, alle tre D,E,F, hanno maggior proportione, che le due B,C, alle due E,F, e nel principio fù dimoſtrato, che le due B,C, alle due E,F, hanno maggior proportione, che C ad F, per l'vgualità, le tre A,B,C alle tre D,E,F [l] haueranno maggior proportione, che l'vltima C all'vltima F, ch'era da dimoſtrarſi.

a 27. del 5.
b 28. del 5.
c 27. del 5.
d 33. del 5.
e 31. del 5.
f 27. del 5.
g 28. del 5.
h 27. del 5.
K 33. del 5.
l 31. del 5.

Se

Se ſaranno quattro quantità per parte, e ritenendo la prima ipoteſi, habbia C ad F maggior proportione di quella, che hà G ad H. Dico che le quattro A, B, C, G, alle quattro D, E, F, H hanno maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H; che A à D hà maggior proportione, che le quattro A, B, C, G alle quattro D, E, F, H; e che le quattro A, B, C, G, alle quattro D, E, F, H, hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H.



Si conſiderino le tre B, C, G, da vna parte, e le altre tre E, F, H, da vn altra parte, e ſi dimoſtri come prima, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H hanno maggior proportione, che le due C, G, alle due F, H, ſimilmente che B ad E hà maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H; e che le tre B, C, G, alle tre E, F, H hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H. In oltre perche A à D hà maggior proportione, che B ad E; e per quel che s'è dimoſtrato B ad E hà maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H; per l'vgualità A à D [m] hauerà maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H; e permutando, A alle tre B, C, G, [n] hauerà maggior proportione, che D alle tre E, F, H; e componendo, le quattro A, B, C, G alle tre B, C, G, [o] haueranno maggior proportione, che le quattro D, E, F, H, alle tre E, F, H; e permutãdo di nuouo le quattro A, B, C, G, alle quattro D, E, F, H, [p] haueranno maggior proportione che le tre B, C, G, alle tre E, F, H, ch'era prima da dimoſtrarſi.

m 31. del 5.
n 27. del 5.
o 28. del 5.
p 27. del 5.

Di più perche il tutto A, B, C, G, al tutto D, E, F, H, hà maggior proportione, che la parte B, C, G, alla parte E, F, H; hauerà l'auanzo A all'auanzo D [q] maggior proportione, ch'il tutto A, B, C, G al tutto D, E, F, H, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

q 33. del 5.

Finalmente perche tutte A, B, C, G, à tutte D, E, F, H, hanno maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H, e le tre B, C, G, alle tre E, F, H, hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H; per l'vgualità, tutte A, B, C, G, [r] à tutte D, E, F, H, hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H. Il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe ſaranno più di quattro per parte, ch'è quanto fù propoſto dimoſtrare.

r 31. del 5.

Fine del Quinto Elemento.

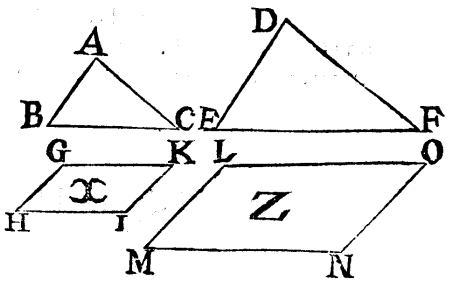
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO SESTO.

DEFINITIONI.

I.

Le figure rettilinee ſono ſimili, quando gli angoli dell' vna ſono vguali à i corriſpondenti angoli dell'altra, e i lati intorno à gli angoli vguali ſono proportionali.

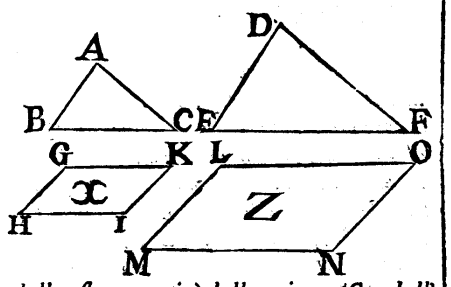
E i triangoli ABC, DEF, ſe l'angolo A ſarà vguale all'angolo D, l'angolo B vguale all'angolo E, l'angolo C vguale all'angolo F; e la proportione del lato AB al lato EC ſia come quella del lato DE al lato EF, (che ſono intorno à gli angoli vguali B & E.) e la proportione di BC à CA ſia come quella di EF ad FD; come ancora la proportione di B A ad A C ſia come quella di ED à DF; i triangoli ABC, DE F, ſi diranno eſſere ſimili frà di loro. Il medeſimo s'intende d'ogn'altra figura piana rettilinea, come le notate X, & Z; cioè, ſe l'angolo G ſarà vguale all'angolo L, l'angolo H vguale all'angolo M, l'angolo I vguale all'angolo N, l'angolo K vguale all'angolo O; e la proportione di GH ad H I ſia l'iſteſſa, che la proportione di LM ad MN; e ſia HI ad I K, come M N ad NO, &c. Le figure rettilinee X, & Z ſi diranno ſimili frà di loro.



II.

Figure reciproche ſono quelle, quando due lati intorno ad vn angolo di vna ſono eſtreme, e due lati intorno ad vn angolo dell'altra ſono medie di quattro quantità proportionali.

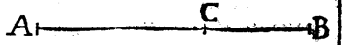
Per eſſempio ſiano prima i triangoli ABC, D E F; ſe la proportione del lato A C al lato E F è l'iſteſſa che la proportione del lato FD al lato B C, gli angoli C, & F ſaranno contenuti da quattro quantità proportionali, delle quali ſarà la prima AC, la ſeconda EF, la terza FD, e la quarta BC; di modo che l'angolo C ſarà contenuto dalle eſtreme, cioè dalla prima AC, e dall'vltima BC, e l'angolo F ſarà contenuto dalle due medie, cioè dalla ſeconda EF, e dalla terza FD; e ſecondo queſte conditioni i triangoli ABC, DEF ſono reciprochi. Similmente ne i parallelogrammi X, & Z, ſe NM ad IH ſarà come IK ad ML, i parallelogrammi X, & Z ſi diranno eſſere reciprochi.



III.

La retta linea ſi dice eſſer ſegata ſecondo l'eſtrema, e media proportione, quando tutta la linea alla maggior parte ſia, come la medeſima parte maggiore alla minor parte.

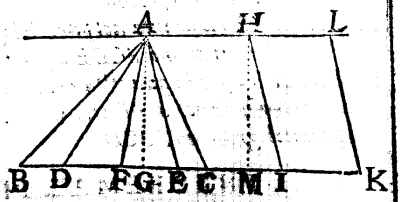
Si concepiſca qualunque retta linea AB, la quale ſe ſarà diuiſa nel punto C in modo, che la proportione di tutta A B alla maggior parte A C, ſia come la medeſima AC alla parte minore C B; la retta A B ſi dirà eſſer diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione.



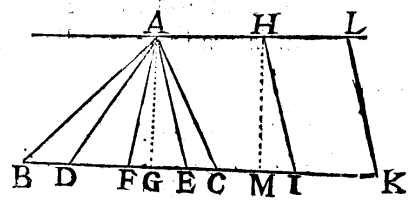
IV.

L'altezza di qualunque figura è la retta linea, che dalla ſommità cade perpendicolare alla baſe.

Nel triangolo A B C, dall'angolo verticale A cada la retta A G perpendicolare alla baſe BC, la retta A G, ſi chiamerà altezza del triangolo ABC. Similmente nel triangolo AB D, dall'angolo verticale A cada la retta AG perpendicolare alla baſe BD, continuata verſo C, la perpendicolare AG ſi chiamerà altezza del triangolo A B D. E nell'iſteſſo modo la



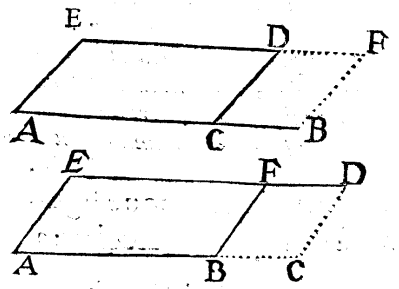
retta AG sarà l'altezza del triangolo ADF; e la medesima sarà l'altezza del triangolo ABF, come anco del triangolo AEC; e de i triãgoli AGE, AGC, AGF, AGB, AFE, ADC, &c. E da qui si raccoglie, che quando più triangoli hanno le basi in vna medesima retta linea come BC, e gli angoli verticali s'vniscono in vn medesimo punto A, quei triangoli sono sotto vna medesima altezza. Di più nel parallelogrammo HIKL dalla sommità HL cada la retta H M perpendicolare alla base KI, continuata, se bisogna, la perpendicolare HM si dirà essere l'altezza del parallelogrammo HIKL; ed il simile s'intende d'ogn'altra figura. Hor se le rette AL, B K saranno frà di loro parallele, essendo le rette AG, HM, perpendicolari alla retta BK, per le cose dimostrate auanti della 27. propositione del primo Libro, le rette AG, HM sono frà di loro vguali; e così tutte le figure, che sono poste frà le medesime parallele, haueranno la medesima, ò vguali altezze.



V.

Il parallelogrammo applicato ad vna retta linea, si dice mancare d'vn parallelogrammo della medesima altezza, quando non occupa tutta la retta linea, alla quale è applicato; e si dice superare d'vn parallelogrammo della medesima altezza, quando occupa maggior lunghezza della linea, alla quale è fatta l'applicatione.

Alla retta AB, s'intenda applicato il parallelogrammo A C D E in modo, che nella prima figura non occupi tutta la retta A B, mà che per compire la retta AB gli manchi il parallelogrammo D C B F; in questo caso il parallelogrammo ACDE si dice essere applicato secondo la retta AB mancante del parallelogrammo DCBF. E nella seconda figura, il parallelogrammo ACDE descritto sopra la retta AC in modo che superi la retta A B, per la quantità del parallelogrammo FBCD; si dice essere applicato secondo la retta AB eccedente la medesima retta A B, per la quantità del parallelogrammo FBCD.



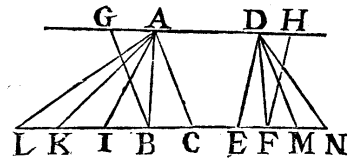
THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

I triangoli, e parallelogrammi, che hanno vna

mede-

medesima, ò vguali altezze, sono frà di loro come le basi.

Siano i due triangoli ABC, D E F, ed i parallelogrammi G B C A, DEFH, le di cui basi siano B C, E F; e s'intendano collocati fra le medesime parallele GH, LN; e per quel, che fù spiegato nella quarta definitione di questo, haueranno vna medesima altezza. Dico che la proportione del triangolo A B C al triangolo D E F, come ancora del parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, è l'istessa, che la proportione della base BC alla base EF. Si continui BF verso L, ed N, e si prendano in LB quante parti si vogliano come BI, IK, KL, ogn'vna vguale alla base BC. Similmente si prendano in FN quante parti si vogliano come F M, MN, ogn'vna vguale ad EF; si tirino le rette AI, AK, AL, DM, DN; i triangoli ABC, ABI AIK, AKL hanno le basi BC, BI, IK, KL, vguali, e sono frà le medesime parallele, e perciò [a] sono frà di loro vguali. E per l'istessa ragione i triangoli DEF, DFM, DMN sono frà di loro vguali. Tante volte la base CL sarà misurata dalla base BC, per quante volte il triangolo A L C è misurato dal triangolo ABC; dal che il triangolo ALC sarà multiplice del triangolo ABC, come la base LC è multiplice della base BC. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il triangolo DEN è multiplice del triangolo DEF, come la base EN è multiplice della base EF; se la base LC è vguale alla base EN, i triangoli ALC, DEN, che hanno le basi vguali LC, EN, e sono frà le medesime parallele, sono [b] frà di loro vguali: se la base LC è maggiore della base EN, il triangolo ALC [c] sarà maggiore del triangolo DEN; e se la base LC è minore della base EN, il triangolo ALC sarà minore del triangolo DEN. Si considerino quattro quantità; la prima sia il triangolo ABC, la seconda il triangolo DEF, la terza sia la base BC, e la quarta la base EF; gli vguali multiplici della prima ABC, e della terza BC, sono per quel, che s'è dimostrato, il triangolo ALC, e la base LC; e gli vguali multiplici della seconda DEF, e della quarta EF, sono il triangolo DEN, e la base EN. E perche se il triangolo ALC (ch'è multiplice della prima) supera il triangolo D E N (ch'è multiplice della seconda) ancora la base LC, ch'è multiplice della terza, supera la base EN, ch'è multiplice della quarta; e se il triangolo ALC è minore, ò vguale al triangolo DEN, ancora la base LC sarà minore, ò vguale alla base EN; per la sesta definitione del 5. libro, la proportione della prima ABC alla seconda DEF, è l'istessa, che la proportione della terza BC alla quarta EF: per la qual cosa il triangolo ABC al triangolo DEF è come la base BC alla base EF, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



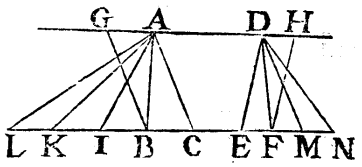
a 38. del 1.

b 38. del 1.

c Corol. alla 38. del 1.

Di nuouo perche il parallelogrammo GC [f] è il doppio del triangolo ABC, ed il parallelogrammo EH è il doppio del triangolo DEF, sarà il parallelogrammo GC multiplice del triangolo ABC, come il parallelo-

f 34. del 1.



grammo EH è multiplice del triangolo DEF; e perciò il parallelogrammo GC al parallelogrammo EH, d sarà come il triangolo ABC al triangolo DEF; ma il triangolo ABC al triangolo DEF, per quel che s'è dimostrato, è come la base BC alla base EF, sarà il parallelogrammo GC, al parallelogrammo EH e come la base BC alla base EF, ch'era da dimostrarsi.

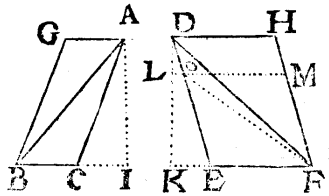
d 15. del 5.

e 11. del 5.

SCOLIO.

Il P. Clauio fà la conuersa dell'antecedente propositione nel seguente modo.

I triangoli, e parallelogrammi, che sono frà di loro come le basi, hanno la medesima, ò vguali altezze.



Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, le di cui basi BC, EF, e le altezze siano le due AI, DK; ed habbia il triangolo ABC al triangolo DEF, ouero il parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, l'istessa proportione, quale hà la base BC alla base EF. Dico che le altezze AI, DK sono frà di loro vguali. Se l'altezza DK non è vguale all'altezza AI, vna delle due sarà maggiore. Supposto che DK sia maggiore di AI, si faccia KL a vguale ad AI, e dal punto L si tiri la retta LM b parallela ad FK; segarà il lato DE in qualche punto O, si tiri la retta OF. Perche i triangoli ABC, OEF, hanno vguali altezze, perciò il triangolo ABC d al triangolo OEF è come la base BC alla base FF; mà per ipotesi, il triangolo ABC al triangolo DEF, è come la base BC alla base EF; sarà il triangolo ABC e al triangolo DEF, come il medesimo triangolo ABC al triangolo OEF; per la qual cosa il triangolo OEF f sarà vguale al triangolo DEF; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile; non dunque DK è maggiore di AI, mà sono frà di loro vguali.

a 3. del 1.

b 31. del 1.

d 1. del 6.

e 11. del 5.

f 9. del 5.

Supposta la medesima costruttione, si considerino i parallelogrammi GBCA OEFM, i quali hanno vna medesima altezza, e perciò sono g come le basi BC, EF: mà i parallelogrammi GBCA, DEFH, per ipotesi, sono come le basi BC, EF; sarà il parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, h come il medesimo parallelogrammo GBCA al parallelogrammo OEFM; dal che i parallelogrammi OEFM, DEFH sono K frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile: non dunque l'altezza DK è maggiore dell'altezza AI, mà sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

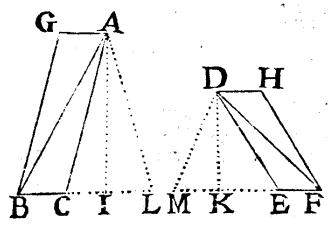
g 1. del 6.

h 11. del 5.

K 9. del 5.

Aggiunge in questo luogo il Commandino il seguente Theorema, che noi dimostriamo poco differente à quello, che fà il P. Clauio.

I triangoli, e parallelogrammi, che hanno le basi vguali, sono frà di loro come le altezze.



Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, che habbiano le basi BC, EF frà di loro vguali, e le loro altezze siano le perpendicolari AI, DK. Dico che il triangolo ABC al triangolo DEF, ed il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo DEFH, e come l'altezza AI all'altezza DK. Si prolunghino le rette BI verso L, & FK verso M; si faccia IL a vguale à BC, e si faccia MK vguale ad EF. Essendo, per ipotesi, BC vguale ad EF, sarà IL vguale ad MK. Perche i triangoli ABC, AIL hanno la medesima altezza AI, perciò sono b come le basi; mà la base BC è vguale ad IL, sarà il triangolo ABC c vguale al triangolo AIL. Nell'istesso modo si dimostrerà che il triangolo DEF è vguale al triangolo DMK; e perciò il triangolo ABC al triangolo DEF d è come il triangolo AIL al triangolo DMK. In oltre perche LI è perpendicolare ad AI, & MK è perpendicolare à DK, prese AI, & DK come basi de i triangoli AIL, DKM, sarà LI l'altezza del triangolo AIL, ed MK sarà l'altezza del triangolo DKM; mà LI è mostrata vguale ad MK, i triangoli AIL, DKM haueranno le altezze IL, MK vguali; dalche il triangolo AIL al triangolo DKM e è come la base AI alla base DK; mà il triangolo AIL al triangolo DKM è dimostrato come il triangolo ABC al triangolo DEF, sarà il triangolo ABC al triangolo DEF f come l'altezza AI all'altezza DK, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 3. del 1.

b 1. del 6.

c Scol. alla 16. del 5.

d Corol. alla 7. del 5.

e 1. del 6.

f 11. del 5.

Di nuouo perche il parallelogrammo GBCA è il doppio del triangolo ABC, ed il parallelogrammo DEFH è il doppio del triangolo DEF; sarà il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo DEFH, g come il triangolo ABC al triangolo DEF; mà il triangolo ABC al triangolo DEF, per quel che s'è dimostrato, è come l'altezza AI all'altezza DK; sarà il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo DEFH, h come l'altezza AI all'altezza DK, ch'era da dimostrarsi.

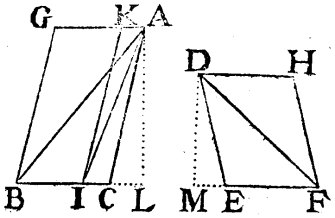
g 15. del 5.

h 11. del 5.

Il P. Clauio fà la conuersa dell'antecedente Theorema nel seguente modo.

I triangoli, e parallelogrammi, che sono come le loro altezze, haueranno vguali basi, ò la medesima.

Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, le di cui baſi BC, EF, e le altezze ſiano AL, D M; ed habbia il triangolo ABC al triangolo DEF, come ancora il parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, l'iſteſſa proportione, quale hà l'altezza A L all'altezza DM. Dico che le baſi BC, EF ſono frà di loro vguali. Se la baſe BC non è vguale alla baſe EF vna delle due ſarà maggiore; ſia dunque BC maggiore di EF, ſi



faccia BI K vguale ad EF, e ſi tiri la retta IA; i triangoli ABI, DEF haueranno le baſi BI, EF vguali, e per l'antecedente Theorema il triangolo ABI al triangolo D E F ſarà come l'altezza A L all'altezza D M; mà per ipoteſi l'altezza AL all'altezza DM è come il triangolo ABC al triangolo DEF, ſarà il triangolo ABC al triangolo D E F l come il triangolo A B I al medeſimo triangolo DEF, e perciò il triangolo ABI m è vguale al triangolo A B C: la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile; non dunque la baſe BC è maggiore della baſe EF, mà ſono frà di loro vguali.

Suppoſta la medeſima coſtruttione, dal punto I ſi tiri la retta I K n parallela à GB; i parallelogrammi GBIK, DEFH haueranno le baſi BI, E F frà di loro vguali, e per l'antecedente Theorema ſaranno frà di loro come le altezze AL, DM: mà i parallelogrammi GBCA, DEFH, per ipoteſi, ſono come le altezze AL, DM; ſarà il parallelogrammo GBIK al parallelogrammo DEFH, come il parallelogrammo GBCA o al medeſimo parallelogrammo DEFH; e perciò i parallelogrammi GBIK, GBCA p ſono frà di loro vguali: la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile; non dunque la baſe BC è maggiore della baſe EF, mà ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

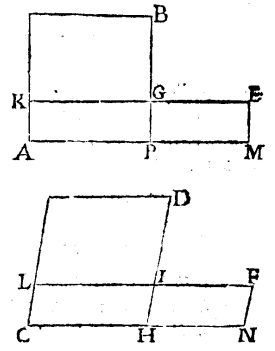
Aggiungo qui il Theorema ſeguente di Claudio Midorgi, per laſciare liberi gli elementi Conici da particolari Lemma.

Se vn quadrato ſia equilatero ad vn Rombo, e qualche rettangolo equilatero ad vn parallelogrammo, equiangolo al Rombo: il quadrato al rettangolo ſarà, come il Rombo al parallelogrammo, che gli è equiangolo.

Sia il quadrato A B equilatero al Rombo CD, ed il rettangolo AE equilatero al parallelogrammo CF; e ſia il parallelogrammo C F equiangolo al Rombo CD. Dico che il quadrato AB al rettangolo AE, ſarà come il Rombo C D al parallelogrammo C F. Si accomodi il quadrato A B, ed il rettangolo AE in modo, che l'angolo A ſia commumune ad ambidue; e ſimilmente s'adatti il Rombo C D, ed il parallelogrammo CF in modo, che habbiano l'angolo C commune; ſarà AK q vguale à PG, ed LC vguale ad I H: ed eſſendo C L, per ipoteſi, vguale ad AK, ſarà HI vguale à PG; dal che BP ad HD b ſarà come PG ad H I. Di più, eſſendo A P vguale à C H, & A M vguale à CN,

K 3. del 1.
l 11. del 5.
m 9. del 5.
n 31. del 1.
o 11. del 5.
p 9. del 5.
q 34. del 1.
b Corollario alla 7. del 5.

CN, ſarà AP ad AM come CH à CN. In oltre perche i rettangoli A B, A G hanno vna medeſima altezza, ſarà il quadrato AB al rettangolo AG, c come la baſe BP alla baſe PG, cioè d come DH ad HI: mà DH ad HI, è come il Rombo CD al parallelogrammo CI e (ſtante che hanno vna medeſima altezza); perciò il quadrato A B al rettangolo A G f ſarà come il Rombo CD al parallelogrāmo CI. Di nuouo eſſendo i rettangoli A G, AE, ſotto vna medeſima altezza, ſarà il rettangolo AG al rettangolo AE, g come la baſe A P alla baſe A M: ſù dimoſtrata A P ad A M, eſſere come C H à C N; ſarà il rettangolo A G al rettangolo A E, h come C H à C N: mà C H à C N K è come il parallelogrammo CI al parallelogrammo CF (ſtanteche i parallelogrammi C I, C F hanno vna medeſima altezza) ſarà il rettangolo AG al rettangolo AE l come il parallelogrammo C I al parallelogrammo C F. Finalmente perche il quadrato A B al rettangolo A G, per quel che s'è dimoſtrato, e come il Rombo CD al parallelogrammo C I; ed il rettangolo A G al rettangolo AE è come il parallelogrammo CI al parallelogrammo CF; per l'egualità, ſarà il quadrato AB al rettangolo AE, m come il Rombo CD al parallelogrammo CF, ch'era da dimoſtrarſi.



c 1. del 6.
d 11. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 1. del 6.
h 11. del 5.
K 1. del 6.
l 11. del 5.
m 22. del 5.

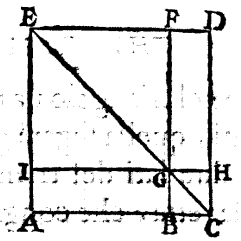
COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifeſto, che ſe ſaranno due qualunque rettangoli, e due parallelogrammi equilateri à i rettangoli, & equiangoli frà di loro; i rettangoli ſaranno frà di loro, come i parallelogrammi.

Per il medeſimo fine aggiungiamo il ſeguente Theorema.

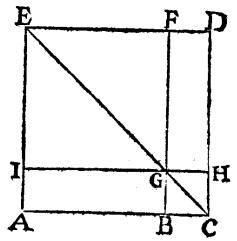
Se ſaranno due qualunque rette linee, il quadrato di vna al rettangolo contenuto dalle medeſime, e come l'iſteſſo rettangolo al quadrato dell'altra.

Siano qualunque due rette linee AB, BC. Dico che il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, BC, è come il medeſimo rettangolo al quadrato di B C. Si pongano le rette AB, BC, in modo che facciano la ſola retta A B C, e ſopra la retta AC a ſi deſcriua il quadrato AD; ſi tiri il diametro EC; dal punto B ſi tiri la retta BF b parallela ad AE, la quale ſegarà il diametro EC in qualche punto G, per il quale ſi faccia paſ-



a 46. del 1.
b 31. del 1.

sare la retta IH [c] *parallela ad AC; sarà diuiso il quadrato AD in quattro parallelogrammi, de' quali i due IF, BH, che sono intorno al diametro, per il Corollario alla 4. propositione del 2. Libro, sono quadrati, ed i complementi AG, GD sono rettangoli. In oltre perche i due IF, GD, hanno vna medesima altezza, sarà il quadrato IF al rettangolo GD* [d] *come la base IG alla base GH; similmente i due AG, BH hanno vna medesima altezza, e perciò il rettangolo AG al quadrato BH* [e] *è come la base IG alla base GH; ma IG à GH si disse essere come il quadrato IF al rettangolo GD: sarà il quadrato IF al rettangolo GD* [f] *come il rettangolo AG al quadrato BH; ma il rettangolo GD è vguale al rettangolo AG, sarà il quadrato IF al rettangolo AG, come il medesimo rettangolo AG al quadrato BH: e perche il rettangolo AG* [g] *è contenuto dalle due AB, BC (stante che BC è vguale à BG) sarà il quadrato IF, cioè il quadrato di AB, al rettangolo contenuto dalle due AB, BC, come il medesimo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, al quadrato BH, cioè al quadrato di BC, ch'era da dimostrarsi.*



c 31. del 1.
d 1. del 6.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 1. defin. del 2.

COROLLARIO I.

Da quel che si è dimostrato è manifesto, che se le rette saranno AC, CB, il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB sarà come il medesimo rettangolo contenuto dalle due AC, CB al quadrato di CB.

COROLLARIO II.

Sarà dunque manifesto, che il rettangolo contenuto dalle due AB, BC è medio proportionale frà i quadrati delle due AB, BC; ed il rettangolo contenuto dalle due AC, CB è medio proportionale frà i quadrati delle due AC, CB.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

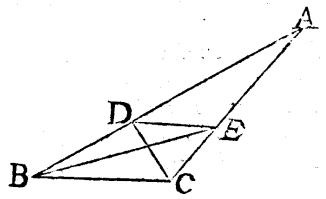
Se nel triangolo sia tirata vna linea retta parallela ad vno de' lati, quella segarà gli altri due lati proportionalmente; e se due lati del triangolo sono segati proportionalmente, la retta, che congiunge le diuisioni, è parallela al terzo lato.

Sia

Sia il triangolo ABC, nel quale sia prima tirata la retta DE parallela ad vno de' lati, come BC. Dico che i lati AB, AC sono segati dalla retta DE proportionalmente in D, ed E; cioè, che AD à DB, è come AE ad EC. Si tirino le rette BE, DC; e si considerino i due triangoli CED, BDE, i quali hanno la medesima base DE, e sono, per ipotesi, frà le medesime parallele DE, BC, e perciò [a] sono frà di loro vguali. Si prenda il triangolo ADE come terza quantità, hauerà il triangolo ADE al triangolo CED [b] l'istessa proportione, quale hà il medesimo triangolo ADE al triangolo BDE.

a 37. del 1.
b 7. del 5.

Si considerino i triangoli AED, DEB, i quali hanno le basi AD, DB, in vna medesima dirittura, e gli angoli verticali s'vniscono nel medesimo punto E, e per quel che si disse alla 4. defin. di questo, hanno vna medesima altezza. E per l'istessa ragione i triangoli ADE, EDC, le di cui basi AE, EC sono in vna medesima dirittura, e gli angoli verticali s'vniscono nel medesimo punto D, sono sotto d'vna medesima altezza. Perche dunque i triangoli AED, EDB hanno vna medesima altezza, sarà il triangolo AED al triangolo EDB, [c] come la base AD alla base DB; ma il triangolo AED al triangolo EDB, per quel che s'è dimostrato, è come il medesimo triangolo AED al triangolo EDC, sarà AD à DB [d] come il triangolo ADE al triangolo EDC. E perche il triangolo ADE al triangolo EDC è come la base AE alla base EC [e] (stante che sono sotto d'vna medesima altezza) sarà AD à DB, [f] come AE ad EC, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



c 1. del 6.
d 11. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.

Di nuouo supposto, che la proportione di AE ad EC sia come quella di AD à DB, tirata la retta DE. Dico ch'è parallela al lato BC. Sia fatta la medesima costruttione di prima. Essendo i triangoli AED, EDB, sotto d'vna medesima altezza, sarà il triangolo AED al triangolo EDB, [g] come la base AD alla base DB: ma per ipotesi AD à DB è come AE ad EC; sarà il triangolo AED al triangolo EDB, [h] come AE ad EC. In oltre, essendo i triangoli ADE, DCE sotto d'vna medesima altezza, il triangolo AED al triangolo DEC [k] sarà come la base AE alla base EC: ma AE ad EC, per quel che s'è dimostrato, è come il triangolo AED al triangolo EDB; sarà il triangolo ADE al triangolo EDC [l] come il medesimo triangolo ADE al triangolo EDB. Quando vna terza quantità hà l'istessa proportione à due, quelle [m] sono frà di loro vguali; saranno i triangoli DEB, EDC frà di loro vguali; hanno la medesima base DE, e sono collocati dalla medesima parte BC, e perciò [n] sono frà le medesime parallele BC, DE, ch'era da dimostrarsi.

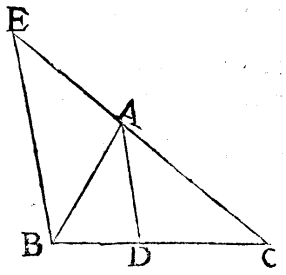
g 1. del 6.
h 11. del 5.
k 1. del 6.
l 11. del 5.
m 9. del 5.
n 39. del 1.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna retta linea diuide vn angolo del triangolo in due parti vguali, quella segarà il lato opposto proportional-

mente

mente à gli altri lati del triangolo; e ſe le parti della baſe ſono proportionali à gli altri due lati del triangolo, la retta tirata dall'angolo verticale al punto, che ſepara le parti della baſe, diuiderà l'angolo verticale in due parti vguali.



Nel triangolo A B C ſia prima diuiſo l'angolo B A C in due parti vguali dalla retta AD. Dico che la retta A D continuata ſegarà la baſe BC proportionalmente in qualche punto D; cioè che la proportione di CD à DB è come quella di CA ad AB. Si continui il lato CA verſo E, e ſi faccia AE [a] vguale ad AB; ſarà CA ad AE, [b] come la medeſima CA ad AB; ſi tiri la retta EB, il triangolo AEB ſarà iſoſcele, e gli angoli AEB, ABE ſopra la baſe ſono [c] frà di loro vguali. Nel triangolo EAB, continuato il lato EA verſo C, l'angolo eſterno BAC [d] è vguale alli due angoli ABE, AEB, interni, ed oppoſti; ma i due angoli ABE, AEB ſono frà di loro vguali, ſarà l'angolo BAC il doppio dell'angolo ABE, e la metà dell'angolo BAC, cioè l'angolo BAD, ſarà vguale all'angolo ABE. Hor eſſendo le rette AD, EB ſegate dalla retta AB; e gli angoli alterni DAB, ABE ſono frà di loro vguali, ſarà la retta AD [e] parallela alla retta EB. Nel triangolo CEB è tirata la retta AD parallela al lato EB, [f] ſarà la proportione di CD à DB, come quella di CA ad AE; ma CA ad AE è come la medeſima CA ad AB, ſarà CD à DB [g] come CA ad AB, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 3. del 1.
b 7. del 5.
c 5. del 1.
d 32. del 1.
e 27. del 1.
f 2. del 6.
g 11. del 5.

Di nuouo ſia diuiſa la baſe BC talmente in D, che CD à DB ſia come CA ad AB; tirata la retta DA. Dico che la retta D A diuide l'angolo BAC in due parti vguali. Si concepiſca fatta la medeſima coſtruttione di prima. Perche AB è vguale ad AE, gli angoli AEB, ABE [h] ſono frà di loro vguali; ed oltre à ciò la proportione di CA ad AE [K] ſarà come quella della medeſima CA ad AB; ma per ipoteſi, CA ad AB è come CD à DB, ſarà CD à DB [l] come CA ad AE; dal che AD [m] ſarà parallela ad EB. Hor eſſendo AD, EB frà di loro parallele, ſegate dalla retta AB, gli angoli alterni DAB, EBA [n] ſono frà di loro vguali. E ſimilmente le rette parallele AD, EB, eſſendo ſegate dalla retta EC, l'angolo CAD eſterno è vguale [o] all'angolo E interno, ed oppoſto; ma gli angoli AEB, ABE, ſono frà di loro vguali; ſaranno gli angoli DAB, DAC frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

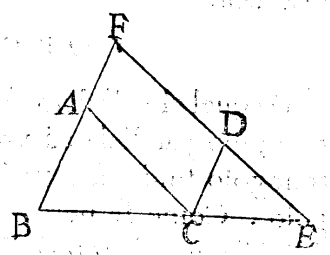
h 5. del 1. K 7. del 5.
l 11. del 5. m 2. del 6.
n 29. del 1.
o 29. del 1.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

I triangoli equiangoli hanno i lati intorno à gli angoli vguali

vguali proportionali; e quei lati ſono homologhi, che ſono oppoſti à gli angoli vguali.

Siano i triangoli equiangoli ABC, DCE, cioè che l'angolo ABC ſia vguale all'angolo DCE; l'angolo BAC vguale all'angolo CDE; e l'angolo ACB ſia vguale all'angolo DEC. Dico che la proportione di AB à BC è come quella di DC à CE; che BC à CA è come CE ad ED; e che BA ad AC è come CD à DE. Si concepiſcano collocati i triangoli ABC, DCE in modo, che ſi componghino ſecondo l'angolo ACD, e che i lati BC, CE coſtituiſchino vna ſola retta linea. Perche l'angolo ABC è ſuppoſto vguale all'angolo DCE, all'vno, ed all'altro s'aggiunga l'angolo DEC; i due angoli ABC, DEC ſono vguali à i due angoli DCE, DEC; ma i due angoli D C E, D E C [a] ſono minori di due angoli retti; li due angoli dunque ABC, DEC ſono minori di due angoli retti. Hor eſſendo le rette AB, DE ſegate dalla retta BE, e gli angoli interni ABC, DEC ſono minori di due angoli retti, per lo Scolio alla 31. propoſ. le rette BA, ED continuate concorreranno in qualche punto F. In oltre perche le rette DC, FB ſono ſegate dalla retta BE, e l'angolo eſterno DCE, per ipoteſi, è vguale all'angolo ABC interno, ed oppoſto; ſarà la retta DC [b] parallela alla retta FB. Similmente le rette AC, FE ſono ſegate dalla retta BE, e l'angolo eſterno ACB è ſuppoſto vguale all'angolo E interno, ed oppoſto; ſarà la retta AC [c] parallela ad FE, e perciò il quadrilatero FACD è parallelogrammo, dal che il lato FA [d] ſarà vguale al lato D C, ed il lato F D vguale al lato AC.

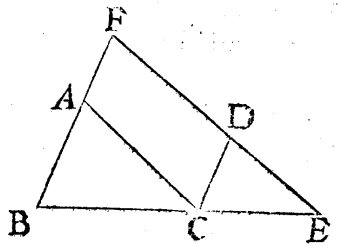


a 17. del 1.
b 28. del 1.
c 28. del 1.
d 34. del 1.

Si conſideri il triangolo FBE, ſegato dalla retta AC, parallela al lato FE; ſarà la proportione di BA ad AF, [e] come quella di BC à CE; ma FA è vguale alla retta CD; ſarà BA à CD [f] come B C à C E; e permutando, AB à BC [g] ſarà come DC à CE; dal che i lati intorno à gli angoli vguali ABC, DCE ſono proportionali; e gli antecedenti AB, DC, che ſi dicono [h] homologhi, ſono oppoſti à gli angoli vguali ACB, DEC; come ancora i conſeguenti BC, CE, che gli chiamiamo homologhi, ſono oppoſti à gli angoli vguali BAC, CDE. Di nuouo ſi conſideri il triangolo FBE, ſegato dalla retta DC, parallela al lato FB; ſarà EC à CB [K] come ED à DF; ma DF è vguale ad AC; ſarà EC à CB [l] come ED ad AC; e permutando, CE ad ED [m] ſarà come BC à CA; e coſi i lati intorno à gli angoli vguali BCA, CED, ſono proportionali; e gli homologhi, cioè gli antecedenti BC, CE, ſono oppoſti à gli angoli vguali BAC, CDE; come ancora gli homologhi, cioè i conſeguenti ED, CA, ſono oppoſti à gli angoli ABC, DCE vguali. Finalmente ſi conſiderino tre quantità da vna parte, come AB prima; BC ſeconda, & AC terza; e tre altre da vn altra parte, cioè la prima DC, la ſeconda CE, e la terza ED. Perche

e 2. del 6.
f 11. del 5.
g 16. del 5.
h 12. defin. del 5.
K 2. del 6.
l 11. del 5.
m 16. del 5.
n 22. del 5.

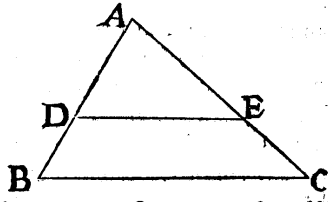
la prima AB alla seconda BC, per quel che s'è dimostrato, è come la prima DC alla seconda CE; e la seconda BC alla terza AC è come la seconda CE alla terza DE; per l'egualità, la prima AB alla terza AC, [n] sarà come la prima DC alla terza DE; per la qual cosa i lati intorno à gli angoli vguali sono proportionali, ch'era da dimostrarsi.



n 22. del 5.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che la retta linea nel triangolo parallela ad vn lato, detrae dal triangolo vn triangolo simile à tutto il triangolo. Come se nel triangolo ABC sia tirata la retta DE parallela al lato BC, il triangolo detratto ADE sarà simile à tutto il triangolo ABC. Perche, essendo DE parallela al lato BC, l'angolo AED [o] sarà vguale all'angolo C interno, ed opposto; e per l'istessa ragione l'angolo esterno ADE è vguale all'angolo B interno, ed opposto; ma l'angolo A è commune, i triangoli dunque ADE, ABC sono equiangoli; e per l'antecedente propositione, hanno i lati, intorno à gli angoli vguali, proportionali; e per la definitione prima di questo, i triangoli ADE, ABC sono frà di loro simili.



o 29. del 1.

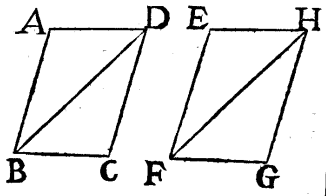
SCOLIO.

Per brevità delle cose à venire aggiungo il seguente Theorema.

Se di due parallelogrammi vn angolo dell'vno è vguale ad vn angolo dell'altro; e due lati intorno à qualunque angolo dell'vno siano vguali à due lati intorno à qualunque angolo dell'altro; quei parallelogrammi sono frà di loro simili, ed vguali.

Siano

Siano i parallelogrammi BD, FH, de' quali l'angolo C sia eguale all'angolo G; il lato AD vguale al lato EH; ed il lato DC vguale al lato HG. Dico che i parallelogrammi BD, FH sono frà di loro simili, ed vguali. Perche i lati AD, DC, si suppongono vguali à i lati EH, HG; ed in ogni parallelogrammo i lati opposti sono [a] frà di loro vguali; e gli angoli opposti sono frà di loro vguali; sarà l'angolo E vguale all'angolo A; il lato AB vguale al lato EF; ed il lato BC vguale al lato FG; per la qual cosa AD à DC [b] sarà come EH ad HG; il lato DA ad AB sarà come EH ad EF; il lato AB à BC sarà come EF ad FG; e sarà BC à CD come FG à GH. Si tirino le diagonali DB, HF. Essendo i lati DA, AB, vguali à i lati EH, EF, e l'angolo A vguale all'angolo E; sarà il triangolo ABD [c] vguale al triangolo EFH; l'angolo ABD sarà vguale all'angolo EFH, e l'angolo ADB vguale all'angolo EHF. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il triangolo FGH è vguale al triangolo DBC; che l'angolo GFH è vguale all'angolo CBD; e che l'angolo GHF è vguale all'angolo CDB: dal che tutto l'angolo ABC sarà vguale à tutto l'angolo EFG; e l'angolo ADC vguale all'angolo EHG; e tutto il parallelogrammo AC vguale à tutto il parallelogrammo EG; e perciò i parallelogrammi AC, EG sono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e per la prima definitione, sono simili; per la qual cosa i parallelogrammi AC, EG sono frà di loro simili, ed vguali, ch'era da dimostrarsi.



a 34. del 1.

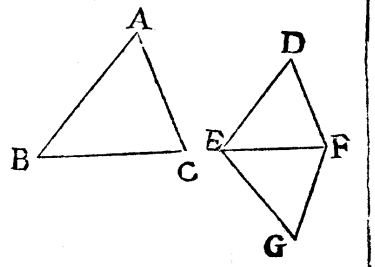
b Corol. alla 4. del 5.

c 4. del 1.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

I triangoli, che hanno i lati proportionali, sono equiangoli; e quelli angoli sono eguali, che sono opposti à i lati homologhi.

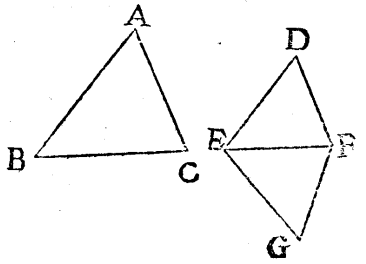
Siano i triangoli ABC, DEF, che habbiano i lati proportionali, cioè che AB à BC sia come DE ad EF; che BC à CA sia come EF ad FD; e che AB ad AC sia come ED à DF. Dico che gli angoli A, & D, che sono opposti à i lati homologhi BC, EF, sono frà di loro vguali. E similmente gli angoli ABC, DEF, che sono opposti à i lati homologhi AC, DF, sono fra di loro vguali; come ancora gli angoli ACB, DFE, opposti à i lati homologhi AB, DE, sono frà di loro vguali. Sopra la retta EF nel punto E si costituisca l'angolo FEG [a] vguale all'angolo B; e nel punto F, si faccia l'angolo EFG vguale all'angolo C. Perche gli angoli B, & C [b] sono minori di due angoli retti, i



a 23. del 1.

b 17. del 1.

due angoli GEF,GFE ſaràno minori di due angoli retti;e le rette EG,FG continuate [c] concorreranno in qualche punto G;ed oltre à ciò il triangolo G F E [a] ſarà equiangolo al triangolo ABC; dal che AB à BC [e] ſarà come GE ad EF: ma per ipoteſi, AB à BC è come DE ad EF; ſarà DE ad EF [f] come GE alla medeſima EF; per la qual coſa E D [g] ſarà vguale ad E G. In oltre perche i triangoli GEF,ABC ſono equiangoli, e l'angolo C è vguale all'angolo G F E; ſarà B C à C A [h] come E F ad F G. Ma, per ipoteſi, B C à C A è come E F ad FD; ſarà E F ad F G [K] come la medeſima EF ad FD, e perciò le due DF, FG [l] ſono frà di loro eguali. Ne i triangoli DEF, EGF, i due lati DE, DF, ſono eguali alli due lati EG, GF, la baſe EF è commune; ſarà l'angolo G [m] vguale all'angolo D, ed i rimanenti due angoli GFE, GEF [n] vguali alli rimanenti due angoli DFE, DEF; cioè l'angolo DFE ſarà vguale all'angolo GFE, e l'angolo DEF vguale all'angolo GEF; ma l'angolo GEF è fatto vguale all'angolo B, ſarà l'angolo DEF vguale all'angolo B. Similmente l'angolo GFE è fatto vguale all'angolo C; ſarà l'angolo DFE vguale all'angolo C; e perche i due angoli DEF, DFE ſono vguali à i due angoli ABC, ACB, il rimanente angolo D [o] ſarà vguale al rimanente angolo A, ch'era da dimoſtrarſi.



c Scol. alla 31 del 1.
d 32.del 1.
e 4.del 6.
f 11. del 5.
g 9. del 5.
h 4.del 6.
K 11.del 5.
l 9.del 5.
m 8.del 1.
n 4.del 1.
o 32. del 1.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vn angolo di vn triangolo è vguale ad vn angolo d'vn altro triangolo, ed i lati intorno à gli angoli vguali ſono proportionali; i triangoli ſono equiangoli; e quegli angoli ſono eguali, che ſono oppoſti à i lati homologhi.

Siano i triangoli ABC, DEF; e ſia l'angolo B eguale all'angolo DE F; e la proportione di AB à BC ſia come quella di DE ad E F. Dico che gli angoli ACB, DFE, oppoſti à i lati homologhi, cioè à gli antecedenti AB, D E, ſono frà di loro vguali; e che gli angoli A, & D, che ſono oppoſti à i lati homologhi,cioè à i conſeguenti BC, EF, ſono frà di loro vguali. Sopra la retta EF nel punto E [a] ſi faccia l'angolo FEG vguale all'angolo B,che ſarà vguale all'angolo D E F; e nel punto F ſi faccia l'angolo EFG vguale all'angolo C, le rette EG,FG, continuate [b] concorreranno in qualche punto G, ed i triangoli GFE, ABC ſaranno [c] equiangoli; ed eſſendo l'angolo GEF vguale all'angolo B; ſarà GE ad EF [d] come AB à BC: mà per ipoteſi AB à BC è come D E ad E F, ſarà D E ad EF [e] come G E alla medeſima EF; per la qual coſa i lati ED, E G [f] ſono frà di loro vguali. Si conſiderino i due triangoli DEF, GEF, de' quali il lato EG è vguale al lato E D, il lato EF è commune, e l'angolo GEF è vguale all'angolo DEF; ſarà la baſe GF [g] vguale alla baſe FD;e l'angolo

a 23.del 1.
b Scol alla 31.del 1.
c 32.del 1.
d 4.del 6.
e 11.del 5.
f 9. del 5.
g 4.del 1.

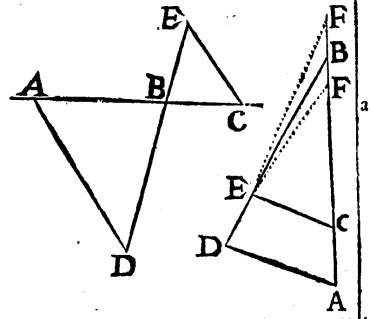
lo GFE vguale all'angolo DFE: mà l'angolo GFE è fatto vguale all'angolo C, ſarà l'angolo D F E vguale all'angolo C: per ipoteſi l'angolo DEF è vguale all'angolo B; il rimanente angolo D [h] ſarà vguale al rimanente angolo A, ch'era da dimoſtrarſi.

h 32. del 1.

SCOLIO.

Per le coſe, che biſogneranno ſtimo bene porre in queſto luogo il ſeguente Theorema.

Se da due qualunque punti A, C, preſi nella retta A B, continuata ſe biſogna, ſono tirate due rette parallele, come AD, C E; e ſia D A ad A B, come E C à C B; tirate le rette (nella prima figura) DB, BE; e nella ſeconda figura DE, EB. Dico che queſte fanno vna ſola retta linea.



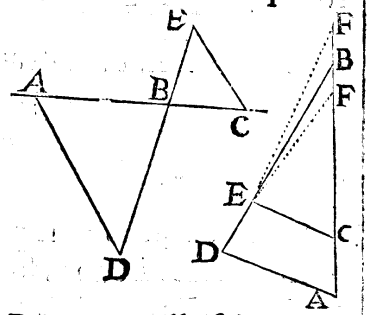
Nella prima figura. Perche le rette AD, EC ſono parallele, ſegate dalla retta AC, gli angoli alterni DAB, ECB [a] ſono frà di loro vguali: mà per ipoteſi, DA ad AB è come EC à CB, i triangolo DAB, ECB, per l'antecedente propoſitione, ſono equiangoli; ſarà l'angolo CEB vguale all'angolo ADB; e l'angolo EBC vguale all'angolo ABD: vgualmente s'aggiunga l'angolo DBC, i due angoli EBC, CBD ſaranno vguali à i due angoli CBD,DBA:mà i dueangoli CBD,DBA [b] ſono vguali à due angoli retti; i due angoli dunque EBC, CBD ſaranno vguali à due angoli retti; e le rette EB, BD [c] coſtituiranno vna ſola retta linea. Nella ſeconda figura, ſe le rette DE, EB non coſtituiſcono vna ſola retta linea,continuata la retta DE, quella ò paſſarà ſopra, ouero ſotto la retta EB, come fà la retta DEF. Hor perche la retta EC è parallela ad AD, l'angolo FEC [d] eſterno ſarà vguale all'angolo FDA interno, ed oppoſto; e ſimilmente l'angolo FCE ſarà eguale all'angolo FAD; ma l'angolo DFA è commune; ſaranno i triangoli DFA, EFC equiangoli; e la proportione di DA ad AF [e] ſarà come quella di EC à C F; e permutando, DA ad EC [f] ſarà come AF ad F C. In oltre, per ipoteſi, D A ad AB è come EC à CB; permutando, [g] DA ad EC ſarà come A B à B C; mà D A ad E C, per quel che s'è dimoſtrato, è come A F ad FC; ſarà A B à BC [h] come AF ad FC; e diuidendo, AC à CB [K] ſarà come la medeſima AC à CF; dal che CF [l] ſarà vguale ad CB; la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile: non dunque continuata DE paſſa ſopra, ne ſotto la retta EB; mà le due DE, EB coſtituiſcono vna ſola retta linea, ch'era da dimoſtrarſi.

a 29.del 1.
b 13.del 1.
c 14.del 1.
d 29.del 1.
e 4.del 6.
f 16.del 5.
g 16.del 5.
h 11.del 5.
K 17.del 5.
l 9.del 5.

COROLLARIO

Da quel che s'è detto è manifeſto, che ſe D A ad A B è

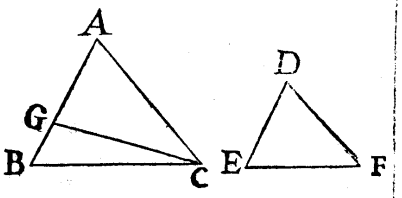
come E C à C B; tirata la retta B E, e continuata, quella concorre con A D nel punto D; ouero tirata la retta E D, quella continuata passa per il punto B; ouero tirata la retta D B, e continuata, se bisogna, quella passa per il punto E; stante che s'è dimostrato, che tirate le rette EB, BD come nella prima figura, ouero ED, E B, come nella seconda figura, quelle costituiscono vna sola retta linea.



THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se vn angolo d'vn triangolo è vguale ad vn angolo d'vn altro triangolo; ed i lati intorno ad vn altr'angolo sono proportionali; ed oltre à ciò i rimanenti due angoli sono della medesima specie; i triangoli sono equiangoli; e quegli angoli sono vguali, che sono opposti à i lati homologhi.

Ne i triangoli ABC, DEF, sia l'angolo A vguale all'angolo D; ed i lati intorno à due altri angoli, come C, ed F siano proportionali; cioè che AC à CB sia come DF ad FE; ed i rimanenti angoli E, & B siano della medesima specie; cioè che ognuno sia minore del retto, ouero non minore del retto. Dico che gli angoli ABC, DEF, opposti à i lati homologhi, cioè à gli antecedenti DF, AC, sono frà di loro vguali; e che gli angoli C, ed F sono frà di loro vguali. Suppostо prima, che gli angoli E, ed F siano acuti, cioè che ognuno sia minore del retto; se l'angolo DFE non è vguale all'angolo ACB, vno de i due sarà maggiore: e suppostо che l'angolo ACB sia maggiore dell'angolo DFE, si faccia l'angolo ACG [a] vguale all'angolo DFE; sarà l'angolo A C G minore dell'angolo ACB; e perciò la retta CG sega l'angolo ACB, e continuata concorre col lato AB in qualche punto G. Ne i triangoli AGC, DEF essendo l'angolo A, per ipotesi, vguale all'angolo D; e l'angolo ACG, per costruttione, vguale all'angolo F; il rimanente angolo AGC [b] sarà vguale al rimanente angolo E; ed i triangoli AGC, DEF sono equiangoli, e la proportione di AC à CG [c] sarà come quella di DF ad FE: ma DF



a 23. del 1.
b 32. del 1.
c 4. del 6.

ad FE, per ipotesi, è come AC a CB; sarà AC à CG [d] come la medesima AC à CB; dalche le rette CG, CB [e] sono frà di loro vguali, il triangolo CGB è isoscele, e gli angoli CBG, e CGB [f] sono fra di loro vguali: ma l'angolo CBG, per ipotesi, è minore d'vn angolo retto, sarà l'angolo CGB minore d'vn angolo retto; e perche gli angoli CGB, CGA [g] sono vguali à due retti, detrattone l'angolo CGB minore del retto, resta l'angolo CGA maggiore del retto; fù dimostrato l'angolo CGA vguale all'angolo E, sarà l'angolo E maggiore del retto, ch'è contro all'ipotesi, mentre l'angolo E fù suppostо minore del retto: quando dunque ognuno degli angoli E, & B è minore del retto, non sono gli angoli ACB, DFE frà di loro ineguali.

d 11. del 5.
e 9. del 5.
f 5. del 1.
g 13. del 1.

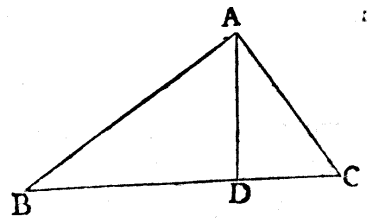
Di nuouo suppostо, che ognuno degli angoli E, & B, non sia minore d'vn angolo retto; si faccia la medesima costruttione, e dimostratione di prima, e si dimostri, che le rette CG, CB sono frà di loro vguali; sarà il triangolo CGB isoscele, e gli angoli CBG, CGB [h] sono frà di loro vguali: ma l'angolo B è suppostо non minore d'vn angolo retto, ne meno l'angolo CGB sarà minore d'vn angolo retto; e perciò i due angoli CBG, CGB, del triangolo CBG, non sono minori di due angoli retti, ch'è contro alla 17. propositione del primo Libro; non dunque l'angolo ACB è maggiore dell'angolo DFE, ma sono fra di loro vguali; e perche l'angolo A è suppostо vguale all'angolo D, sarà il rimanente angolo B [K] vguale all'angolo E, ch'era da dimostrarsi.

h 5. del 1.
K 32. del 1.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

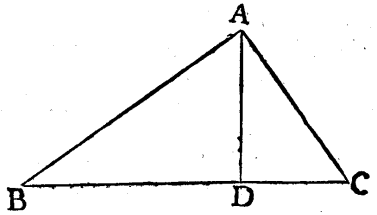
Se dall'angolo retto d'vn triangolo rettangolo cade vna retta perpendicolare al lato opposto, quella diuide il triangolo in due triangoli simili fra di loro; ed ognuno simile à tutto il triangolo.

Nel triangolo ABC, angolo retto in A, dal quale cada la retta AD, perpendicolare al lato opposto B C. Dico che i triangoli ADB, ADC sono frà di loro simili; ed ogn'vno è simile à tutto il triangolo ABC. Si considerino i triangoli ADC, BAC, de' quali gli angoli BAC. ADC sono retti; l'angolo C è commune ad ambidue i triangoli; e perciò il rimanente angolo DAC [a] sarà vguale al rimanente angolo B, ed i triangoli ABC, ADC sono equiangoli; dal che haueranno i lati intorno à gli angoli vguali [b] proportionali, e perciò [c] sono simili frà di loro; e sarà BA ad A C [d] come AD à DC. Di nuouo si considerino i due triangoli ADB, ABC, de quali gli angoli BAC, ADB sono retti; l'angolo B è commune ad ambidue i detti triangoli; sarà il rimanente angolo DAC, [e]



a 32. del 1.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.
d 4. del 6.
e 32. del 1.

vguale al rimanente angolo C, ed i triangoli ABC, A D B ſono equianli;e però i lati intorno à gli angoli vguali [f] ſono proportionali;ed in conſeguenza [g] ſono frà di loro ſimili; e ſarà BA ad A C [h] come B D à D A: mà, per quel che s'è dimoſtrato, BA ad AC è come A D à DC; ſarà BD à DA [K] come AD à DC. Ne i triangoli ADB, ADC, angoli retti in D, eſſendo i lati intorno à gli angoli vguali A D B, A D C proportionali, cioè B D à D A, come AD à DC; i triangoli A D B, A D C [l] ſono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali [m] proportionali, e perciò [n] ſono frà di loro ſimili. S'è dimoſtrato, che ogn'vno è ſimile à tutto il triangolo A B C; la retta dunque A D diuide il triangolo ABC in due triangoli ſimili frà di loro, ed'ognuno ſimile à tutto il triangolo ABC, ch'era da dimoſtrarſi.



g 1. defin. del 6.
h 4. del 6.
K 11. del 5.
l 6. del 6.
m 4. del 6.
n 1. defin. del 6.

COROLLARIO I.

Eſſendoſi dimoſtrata BD à DA eſſere come la medeſima DA à DC, ſarà manifeſto, che la retta AD, la quale cade dall'angolo retto A perpendicolare alla baſe B C, è media proportionale frà le parti BD, DC della baſe BC.

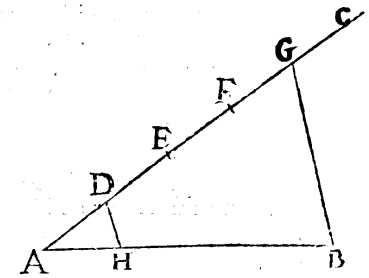
COROLLARIO II.

Perche i triangoli ABC, ADC ſono equiangoli, e l'angolo C è commune, ſarà BC à CA, come la medeſima AC à CD; dal che AC è media proportionale frà BC, CD. Similmente i triangoli ABC, ADB ſono equiangoli, e l'angolo B è commune; ſarà CB à B A come la medeſima A B alla parte B D, e perciò il lato A B è media proportionale frà il lato CB, e la parte BD. Donde è manifeſto, che nel triangolo rettangolo, ogn'vno de' lati intorno all'angolo retto è media proportionale frà le baſe, e la parte interpoſta frà la perpendicolare, che cade dall'angolo retto, e quel lato.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE IX.

Da vna data retta linea tagliarne vna parte propoſta.

Sia data la retta AB, dalla quale ſe ne voglia tagliare vna parte propoſta, e ſuppoſto che ſe ne voglia tagliare la quarta parte. Da vno degli eſtremi della retta AB, come dall'eſtremo A, ſi tiri la retta AC, che faccia qualunque angolo con la retta A B; ſi prenda in A C qualunque punto D, e ſi taglino le parti DE, EF, FG, [a] ogn'vna vguale ad AD; e le parti vguali in AG deuono eſſere tante, per quanto biſogna, acciòche AD ſia parte di AG, ſecondo la propoſta parte; e perche s'è propoſta la quarta parte, perciò le parti in AG ſaranno quattro. Si tiri la retta GB, e dal punto D ſi tiri la retta DH, [b] parallela alla retta GB, la quale ſegarà AB in qualche punto H. Dico che AH ſarà la quarta parte di AB. Nel triangolo AGB la retta DH è parallela al lato GB, e perciò GD à DA [c] ſarà come BH ad HA; e componendo, GA ad AD [d] ſarà come BA ad AH; ed inuertendo, AD ad AG [e] ſarà come AH ad AB: ma AD è la quarta parte di AG, ſarà dunque AH [f] la quarta parte di AB. L'iſteſſo ſi farà ſe ſarà propoſta altra parte, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

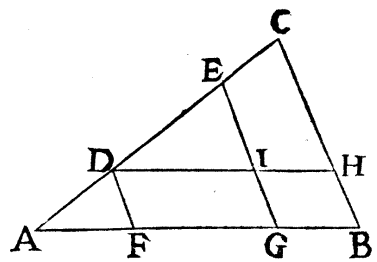


a 3. del 1.
b 31. del 1.
c 2. del 6.
d 18. del 5.
e Corol. alla 4. del 5.
f Coroll. alla 15. del 5.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE X.

Date due rette linee, delle quali vna ſia diuiſa in quante parti ſi vuole, e l'altra non diuiſa; ſegare la non diuiſa nelle parti della diuiſa.

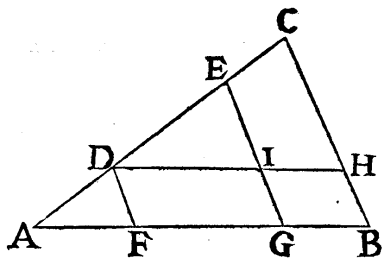
Sia la retta non diuiſa AB, da ſegarſi nelle parti della diuiſa A C; cioè che le parti di AB habbiano l'iſteſſa proportione, quale hanno le parti, che ſono in AC, la quale ſupponiamo diuiſa come in D, ed E. S'inclinino le rette AB, AC, che s'vniſcano nell'eſtremo A, ſecõdo qualũque angolo CAB; ſi tiri la retta C B; e da i punti D, ed E, ſi tirino le rette DF, EG [a] parallele alla retta C B, le quali ſegaranno la retta AB come in F, & G. Dico che AB ſarà diuiſa nelle parti di AC. Dal punto D ſi tiri la retta DH [b] parallela ad AB, la quale ſegarà le rette EG, CB, come in I, ed H. E perche le rette DF, IG, HB ſono parallele, i quadrilateri DFGI, IGBH ſono parallelogrammi; e ſarà DI [c] vguale ad FG, & IH vguale à GB; per la qual coſa DI ad IH [d] ſarà come FG à GB. Nel triangolo AGE la retta DF è parallela ad EG,



a 31. del 1.
b 31. del 1.
c 34. del 1.
d Corol. alla 7. del 5.

sarà AD à DE [e] come AF ad FG. Similmente nel triangolo DHC la retta E I è parallela ad H C, sarà DE ad EC [f] come D I ad I H; ma D I ad I H è come F G à G B, sarà DE ad EC come [g] FG à GB. Hor essendo AD à DE come AF ad FG; e D E ad E C come F G à GB, per l'egualità, A D ad EC [h] sarà come AF à GB; per la qual cosa le parti in A B hanno frà di loro l'istessa proportione, quale hanno le parti in AC frà di loro, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

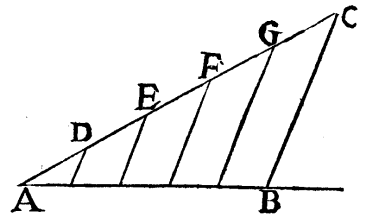
e 2. del 6.
f 2. del 6.
g 11. del 5.
h 22. del 5.



SCOLIO.

Da quel che s'è detto, sarà facile trouare il modo da diuidere vna retta in quante parti vguali si vuole.

Per essempio, habbiasi da diuidere la retta A B in quante parti vguali si vuole: dall'estremo A si tiri la retta AC, che faccia qualunque angolo con la retta AB; si prendano in AC tante parti vguali, per quante parti si vogliono in AB; cioè se si vuole diuidere AB in tredici parti vguali, si prenderanno in AC, tredici parti vguali: se AB si vuole diuidere in cinque parti vguali, si prenderanno in AC cinque parti vguali, e così per le altre di moltitudine maggiore, ò minore; poi si congiungano gli estremi C, & B con la retta CB, e da i punti D,E,F,G, &c. si tirino rette linee parallele alla retta CB, le quali continuate diuideranno AB in tante parti vguali, in quante è diuisa la retta AC, come sopra fù dimostrato.



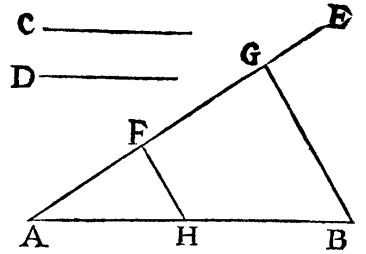
Non sarà inutile aggiungere quì vn Problema di Pappo nel settimo libro delle sue Collettioni Matematiche.

Diuidere vna data retta linea secondo vna data proportione.

Habbiasi da diuidere qualunque data retta AB, secondo la data proportione di C à D. Dall'estremo A si tiri la retta AE, che faccia qualunque angolo

angolo con A B; poi si faccia AF [a] vguale à C, e si tagli F G vguale à D; sarà A F ad FG [b] come C à D. Si tiri la retta GB, e dal punto F si tiri la retta FH [c] parallela alla retta G B, la quale segarà la retta A B in qualche punto H. Dico che A H ad H B è come C à D. Nel triangolo ABG, la retta F H è parallela al lato G B, sarà [d] A H ad H B come AF ad FG; ma AF ad FG è come C à D, sarà AH ad HB [e] come C à D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 3. del 1.
b Corol. alla 7. del 5.
c 3. del 1.
d 2. del 6.
e 11. del 5.



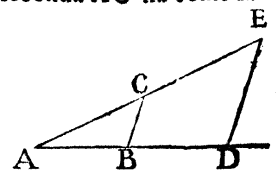
PROBLEMA III. PROPOSITIONE XI.

Date due rette linee, ritrouarle vna terza proportionale.

Siano date le due rette AB, AC, alle quali si vuole ritrouare vna terza proportionale; cioè che la prima AB alla seconda AC sia come la seconda AC ad vn altra terza quantità.

S'inclinino le due AB, AC, che concorrano insieme nell'estremo A, e facciano qualunque angolo CAB; si tiri la retta CB, poi si continui AB verso D, e si faccia B D [a] vguale ad A C; dal punto D si tiri la retta D E [b] parallela alla retta B C, la quale concorrerà con A C continuata in qualche punto E. Dico che la retta CE sarà la terza proportionale. Nel triangolo ADE la retta CB è parallela ad ED, sarà AB à BD [c] come AC à CE; ma BD è vguale ad AC, sarà AB ad AC come la medesima AC à CE; cioè la prima AB alla seconda AC come la seconda AC alla terza CE, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 3. del 1.
b 31. del 1.
c 2. del 2.

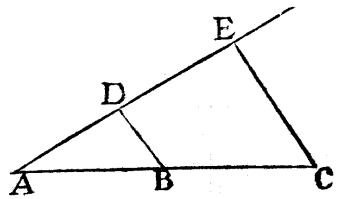


PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XII.

Date tre rette linee, ritrouarle la quarta proportionale.

Siano date le tre rette linee A B, BC, AD, alle quali si voglia ritrouare la quarta proportionale.

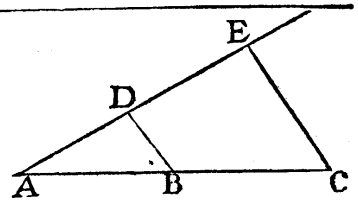
Si ponghino le prime due AB, BC in modo, che facciano la sola retta AC; e nell'estremo A s'inclini la terza A D à qualunque angolo con la



retta A B, si tiri la retta D B; e dal punto C si tiri la retta C E [a] parallela alla retta B D, la quale concorrerà con A D continuata in qualche punto E. Dico che D E sarà la quarta proportionale, che si cerca. Nel triangolo ACE la retta D B è parallela ad EC, sarà la prima AB alla seconda B C [b] come la terza A D alla quarta DE, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 31. del 1.

b 2. del 6.



SCOLIO.

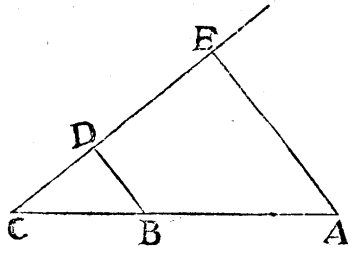
Il seguente problema di Pappo Alessandrino è simile all'antecedente.

Date le tre rette AB, BC, CD ritrouare vna retta, che habbia l'istessa proportione à DC, quale hà AB à BC.

Si pongano le due AB, BC in vna medesima dirittura; e nell'estremo C s'inclini D C à qualunque angolo con la retta C A; si tiri la retta D B; e dal punto A [c] si tiri la retta A E parallela alla retta DB, la quale concorrerà con CD, continuata in qualche punto E; sarà ED la retta, che si cerca. Perche essendo D B parallela ad AE, sarà A B à B C [d] come E D à DC, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

c 31. del 1

d 2. del 6.



PROBLEMA V. PROPOSITIONE XIII.

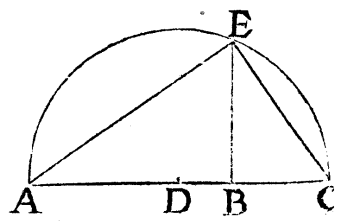
A due date rette linee ritrouare vna media proportionale.

Siano date le rette AB, BC, alle quali si voglia ritrouare vna media proportionale.

Si pongano le rette date AB, BC in modo, che costituiscano la sola retta A C, la quale [a] si diuida in due parti vguali in D, e fatto centro in D, coll' interuallo DA, ouero DC, si descriua il mezzo circolo AEC: nel punto B, sopra la retta AC, [b] s'erigga la perpendicolare BE, la quale concorrerà con la circonferenza AEC in qualche punto E. Dico che la retta EB è media proportionale frà le due AB, BC. Si tirino le rette EA, EC; sarà l'angolo

a 10. del 1.

b 11. del 1.



golo A E C [c] nel mezzo circolo retto. Nel triangolo rettangolo A E C dall'angolo retto E cade la retta EB perpendicolare alla base AC; la retta EB [d] diuide il triangolo EAC ne i due triangoli EBC, EBA frà di loro simili, e la proportione di AB à BE [e] sarà come quella di B E à B C; dal che di tre rette proportionali AB, BE, BC, quella di mezzo è la retta EB, che diciamo media, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

d 8. del 6.

e 1. defin. del 6.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se da qualunque punto preso nella circonferenza d'vn mezzo circolo, cade vna retta perpendicolare al diametro, quella sarà media proportionale frà le parti del diametro, e la dimostratione è la medesima fatta antecedentemente.

SCOLIO.

Gioua per le cose auuenire il seguente Problema.

Sia data la retta C non maggiore della metà di A B; diuidere la retta A B in modo, che la retta C sia media proportionale frà le parti di AB.

Si diuida A B [a] in due parti vguali in D; fatto centro in D, coll'interuallo D A, ouero D B, si descriua il mezzo circolo A F B; nel centro D si ponga D F [b] perpendicolare ad A B, la quale concorrerà con la circonferenza in qualche punto F. Se la retta C è vguale ad FD, essendo FD media proportionale frà le due A D, D B sarà la retta C media proportionale frà le medesime parti AD, DB; ma se la retta C è minore di F D, si faccia DH [c] vguale alla retta C, dal punto H si tiri la retta HE [d] parallela ad AB, la quale concorrerà con la circonferenza in qualche punto E, dal punto E si faccia cadere la retta E G [e] perpendicolare ad A B: per l'antecedente Corollario la retta E G sarà media proportionale frà le parti AG, GB; ma la retta EG [f] è vguale ad HD cioè vguale alla retta C (per essere HDGE parallelogrammo) sarà la retta C media proportionale frà le parti AG, GB; per la qual cosa la retta AB è diuisa in G in modo che la data C è media proportionale frà le parti A G, G B, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 10. del 1.

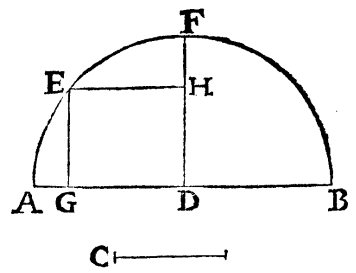
b 11. del 1.

c 3. del 1.

d 31. del 1.

e 12. del 1.

f 34. del 1.



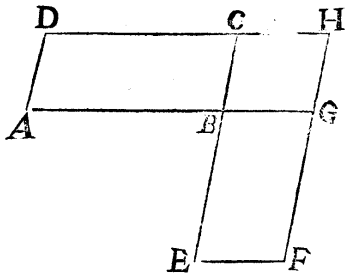
THEOREMA IX. PROPOSITIONE XIV.

Se i parallelogrammi, de'quali vn angolo dell'vno sia vguale ad vn angolo dell'altro, sono frà di loro vguali, i

lati

lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi; e ſe i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi, i parallelogrammi ſono frà di loro vguali.

Siano i due parallelogrammi ABCD, BEFG, de' quali l'angolo ABC dell'vno ſia vguale all'angolo EBG dell'altro; e ſuppoſto prima che il parallelogrammo ABCD ſia vguale al parallelogrammo B E F G. Dico che i lati intorno à gli angoli vguali, ABC, EBG ſono reciprochi; cioè che AB à BG è come EB à BC.



Si accommodino i propoſti parallelogrammi in modo, che i lati AB, BG facciano la ſola retta linea AG. Perche gli angoli ABC, EBG ſono vguali, s'aggiunga all'vno, ed all'altro, il commune angolo C B G; i due angoli ABC, CBG ſaranno vguali à i due angoli EBG, GBC: mà i due angoli ABC,CBG ſono [a] vguali à due angoli retti; i due angoli dunque EBG, GBC ſono vguali à due angoli retti; dal che le rette EB, BC [b] coſtituiſcono vna ſola retta linea. Si prolunghino i lati DC, FG ſin'che concorrono in qualche punto H. Perche i parallelogrammi DB, BF, per ipoteſi ſono frà di loro vguali, preſo il parallelogrammo CG come terza quantità, ſarà il parallelogrammo DB al parallelogrammo CG, [c] come il parallelogrammo BF al medeſimo parallelogrammo CG: mà il parallelogrammo D B al parallelogrammo C G [d] (per eſſere ſotto d'vna medeſima altezza) è come la baſe A B alla baſe B G; ſarà il parallelogrammo BF al parallelogrammo CG, [e] come AB à BG. Il parallelogrammo BF al paralellogrammo C G, [f] per eſſere ſotto d'vna medeſima altezza, è come le baſe EB alla baſe BC; ſarà AB à BG [g] come EB à B C; per la qual coſa i lati intorno à gli angoli vguali [h] ſono reciprochi, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

Di nuouo, ſuppoſto che AB à BG ſia come EB à BC. Dico che i parallelogrammi D B, B F ſono frà di loro vguali. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione di prima; perche i parallelogrammi DB, C G hanno vna medeſima altezza, ſarà il parallelogrammo DB al parallelogrammo CG [K] come la baſe AB alla baſe BG; mà AB à BG, per ipoteſi, è come EB à BC; ſarà il parallelogrammo DB al parallelogrammo CG [l] come EB à BC. Similmente, eſſendo i parallelogrammi BF, CG ſotto d'vna medeſima altezza, ſarà il parallelogrammo BF al parallelogrammo CG [m] come le baſe EB alla baſe BC: mà la baſe EB alla baſe BC è come il parallelogrammo D B al parallelogrammo C G; il parallelogrammo dunque DB al parallelogrammo C G [n] ſarà come il parallelogrammo B F al medeſimo parallelogrammo C G; per la qual coſa i parallelogrammi DB, BF [o] ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

a 13.del 1.
b 14.del 1.
c 7.del 5.
d 1.del 6.
e 11.del 5.
f 1.del 6.
g 11.del 5.
h 2. defin. del 6.
K 1.del 6.
l 11.del 5.
m 1.del 6.
n 11.del 5.
o 9.del 5.

CO-

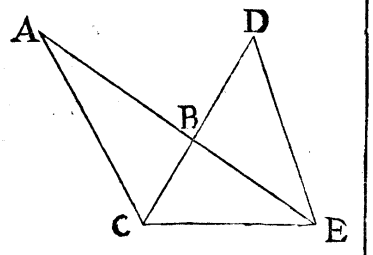
COROLLARIO.

Da quel,che s'è dimoſtrato nell'antecedente propoſitione,è manifeſto, che quando due angoli vguali,come EBG, ABC, ſono in modo collocati, che due delle rette,che gli contengono, come A B, B G, fanno vna ſola retta linea, le altre due rette EB,B C fanno ancora vna ſola retta linea.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XV.

Se due triangoli, de' quali vn angolo dell'vno è vguale ad vn angolo dell'altro, ſono frà di loro vguali, i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi; e ſe i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi, i triangoli ſono frà di loro vguali.

Siano i triangoli ABC, DBE, de' quali l'angolo ABC ſia vguale all'angolo D B E; e ſuppoſto prima che i triangoli ABC, DBE ſiano frà di loro vguali. Dico che i lati intorno à gli angoli vguali ABC, DBE ſono reciprochi; cioè, che la proportione di AB à BE è come quella di DB à BC.

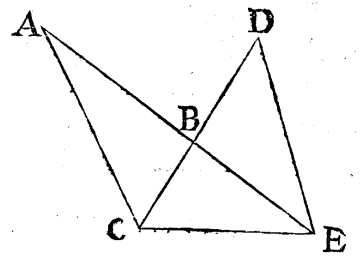


Si addattino i propoſti triangoli in modo, che ſi tocchino ſecondo l'angolo B, e che i lati AB, BE facciano vna ſola retta linea: eſſendo gli angoli ABC, D B E frà di loro vguali, per l'antecedente Corollario, le rette DB, BC coſtituiranno vna ſola retta linea; ſi tiri la retta C E. I triangoli DBE, EBC hanno le baſi DB, BC in vna medeſima retta linea, e gli angoli oppoſti s'vniſcono nel ſolo punto E, e per quel che ſi diſſe nella quarta definitione di queſto, hanno vna medeſima altezza; e la proportione del triangolo DEB al triangolo E B C [a] è come la baſe D B alla baſe BC. Per l'iſteſſa ragione i triangoli ACB, B C E hanno vna medeſima altezza, e ſarà il triangolo ABC al triangolo CBE come la baſe AB alla baſe BE. In oltre perche i triangoli ABC, DBE, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, preſo il triangolo CBE come terza quantità, ſarà il triangolo ABC al triangolo BCE, [b] come il triangolo D B E al medeſimo triangolo C B E; ſi è dimoſtrato il triangolo A B C al triangolo CBE eſſere come AB à BE; ſarà il triangolo D B E al triangolo C B E [c] come AB à BE: mà il triangolo DBE al triangolo CBE è come DB à BC; ſarà dunque AB à BE [d] come DB à BC, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 1.del 6.
b 7.del 5.
c 11.del 5.
d 11. del 5.

DI

Di nuouo, ſuppoſto che A B à B E ſia come D B à B C. Dico che i triangoli ABC, DBE ſono frà di loro vguali. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione di prima. Perche i triangoli DEB, EBC hanno vna medeſima altezza, il triangolo DBE al triangolo EBC [e] ſarà come le baſe D B alla baſe B C; mà per ipoteſi D B à B C è come AB à BE; ſarà il triangolo DBE al triangolo CBE [f] come AB à BE. Similmente eſſendo i triangoli ABC, CBE ſotto vna medeſima altezza, ſarà il triangolo A B C al triangolo C B E [g] come la baſe A B alla baſe BE; mà fù dimoſtrato il triangolo DBE al triangolo CBE eſſere come AB, à B E; ſarà il triangolo ABC al triangolo, CBE [h] come il triangolo DBE al medeſimo triangolo CBE: per la qual coſa i triangoli A B C, D B E [K] ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

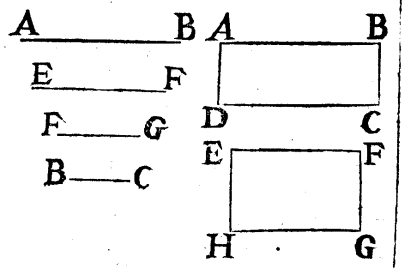


e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 1. del 6.
h 11. del 5.
K 9. del 5.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XVI.

Se quattro linee rette ſono proportionali, il rettangolo contenuto dalle eſtreme, è vguale al rettangolo contenuto dalle medie; e ſe il rettangolo contenuto dalle eſtreme è vguale al rettangolo contenuto dalle medie, le quattro rette linee ſono proportionali.

Siano le quattro rette linee AB, EF, FG, BC; e prima habbia AB ad EF l'iſteſſa proportione, quale hà F G à B C. Dico che il rettangolo contenuto dalle eſtreme AB, BC, è vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG. Con le due eſtreme AB, BC ſi faccia il parallelogrammo rettangolo ABCD; e con le due medie EF, FG ſi faccia il rettangolo EFGH.



Perche gli angoli in B, ed F ſono vguali, ſtante che ſono retti, ed il lato AB al lato EF, è come FG à BC: cioè i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi; ſarà il rettangolo AC [a] vguale al rettangolo EG: ma il rettangolo A C, per coſtruttione, è contenuto dalle eſtreme AB, BC; ed il rettangolo EG è contenuto dalle medie EF, FG; il rettangolo dunque contenuto dalle eſtreme AB, BC è vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 14. del 6.

Di nuouo ſuppoſto, che il rettangolo contenuto dalle eſtreme A B, BC, ſia vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG. Dico che

AB ad E F ſarà come FG à BC; s'intenda fatta l'iſteſſa coſtruttione di prima. Perche i rettangoli AC, EG ſi ſuppongono vguali, e gli angoli in B, ed F ſono vguali, i lati intorno à gli angoli vguali B ed F, [o] ſono reciprochi; e perciò il lato AB al lato EF ſarà come FG à BC; cioè le quattro rette AB, EF, FG, BC ſono proportionali, ch'era da dimoſtrarſi.

b 14. del 6.

COROLLARIO I.

Da quel che s'è detto, è manifeſto, che quando quattro linee rette ſono proportionali, ancora il parallelogrammo contenuto dalle eſtreme è vguale al parallelogrammo equiangolo contenuto dalle medie.

Poiche ſe i parallelogrammi AC, EG non ſono rettangoli, baſta che gli angoli in B, ed F ſiano vguali, ed i lati intorno à queſti angoli vguali ſiano reciprochi, accioche i parallelogrammi AC, EG ſiano frà di loro vguali. E parimente baſta, che i parallelogrammi AC, EG ſiano vguali, e gli angoli in B, ed F ſiano vguali, accioche i lati intorno à queſti angoli vguali ſiano reciprochi.

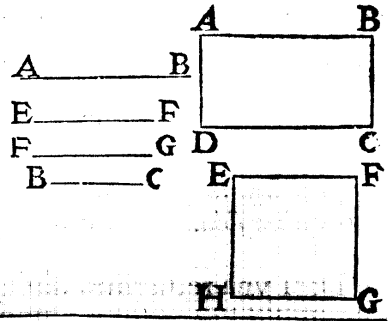
COROLLARIO II.

Dall'antecedente propoſitione ſi caua il modo da conoſcere ſe quattro date rette linee ſono proportionali.

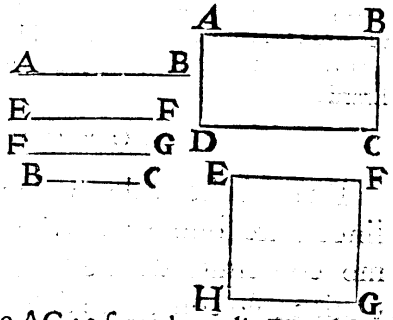
THEOREMA XII. PROPOSITIONE XVII.

Se tre linee rette ſono proportionali, il rettangolo contenuto dalle eſtreme, è vguale al quadrato della media; e ſe il rettangolo contenuto dalle eſtreme è vguale al quadrato della media, quelle tre rette linee ſono proportionali.

Siano le tre rette linee AB, EF, BC; e prima habbia AB ad EF l'iſteſſa proportione, quale hà la medeſima EF à BC. Dico che il rettangolo contenuto dalle eſtreme A B, BC, è vguale al quadrato della media EF; ſi faccia la retta FG vguale alla retta EF; ſarà il quadrato di EF vguale al rettangolo contenuto dalle due vguali EF, FG. In oltre perche A B ad EF, per ipoteſi, è come EF à



BC, e la retta FG è vguale ad EF; sarà AB ad EF, come FG à BC; e per l'antecedente propositione, il rettangolo contenuto dalle estreme AB, BC, sarà vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG; cioè vguale al quadrato della media EF, che era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo, supposto che il rettangolo contenuto dalle estreme AB, BC, sia vguale al quadrato della media EF. Dico, che la proportione di AB ad EF, sarà come quella di EF à BC. Con le estreme AB, BC si costituisca il rettangolo AC; e sopra la media EF [a] si faccia il quadrato EG, sarà EF vguale ad FG. Perche il parallelogrammo AC è posto vguale al parallelogrammo EG, e gli angoli in B, ed F sono vguali, stanteche sono retti; i parallelogrammi AC, EG [b] haueranno i lati intorno à gli angoli vguali reciprochi; e perciò AB ad EF sarà come FG à BC: ma FG è vguale ad EF; sarà AB ad EF, come la medesima EF à BC. Per la qual cosa le tre rette linee AB, EF, BC sono proportionali, ch'era da dimostrarsi.

a 46. del 1.

b 14. del 6.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se tre rette linee sono proportionali, il parallelogrammo contenuto dalle estreme, è vguale al rombo equiangolo descritto sopra la media; e se il parallelogrammo contenuto dall'estreme è vguale al rombo descritto sopra la media, le tre rette linee sono proportionali; stante che se EG sarà Rombo, & AC parallelogrammo, equiangolo al rombo, se hanno i lati reciprochi, sono frà di loro vguali; e se sono frà di loro vguali, hanno i lati reciprochi: e perciò le tre rette AB, EF, BC sono proportionali.

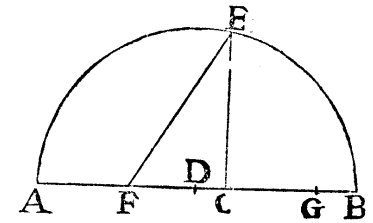
SCOLIO.

Aggiungo in questo luogo il seguente Problema del Peletario, però con altra solutione più breue.

Data vna retta linea diuisa in due parti come si vuole,

diui-

diuidere vna di quelle parti in modo, che le tre siano continue proportionali.



Sia la retta AB diuisa come si vuole in C, e si voglia diuidere la parte CB in modo, che le tre parti in AB siano continue proportionali. Si diuida AB [a] in due parti vguali in D, fatto centro in D, coll'interuallo AD, ouero DB, si descriua il mezzo circolo AEB; nel punto C si erigga CE [b] perpendicolare ad AB; sarà CE [c] media proportionale frà le due AC, CB; ed il rettangolo contenuto dalle due AC, CB [d] sarà vguale al quadrato di CE. Si diuida AC [e] in due parti vguali in F, si tiri la retta FE; poi si faccia FG [f] vguale ad FE. Dico che le tre AC, CG, GB sono continue proportionali.

a 10. del 1.

b 11. del 1.

c 13. del 6.

d 17. del 6.

e 10. del 1.

f 3. del 1.

Nel triangolo ECF, angolo retto in C, il quadrato di EF [g] è vguale à i quadrati de'i due lati EC, CF; fù fatta la retta FG vguale ad EF; sarà il quadrato di FG vguale à i quadrati delle due EC, CF: ma il quadrato di FG [h] è vguale à i quadrati delle parti FC, CG col doppio rettangolo contenuto dalle medesime FC, CG; i quadrati dunque delle parti FC, CG, col doppio rettangolo contenuto dalle rette FC, CG, sarà vguale à i quadrati de'lati EC, CF: se ne leui il commune quadrato di CF, resta il quadrato di EC vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due FC, CG, col quadrato di CG; ma il doppio rettangolo contenuto dalle due GC, CF [k] è vguale al rettangolo contenuto da GC, & CA (stante che CF, FA sono vguali) sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG, vguale al quadrato di CE. Fù dimostrato il quadrato di CE vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CB; sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CB vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG. Si consideri AC come non diuisa, e la retta CB diuisa in G; sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, [l] vguale à i due rettangoli contenuti da AC, & CG, e da AC, & GB: ma si disse, che il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG; i due rettangoli dunque contenuti da AC, & CG, e da AC, & GB insieme giunti, sono vguali al rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG. Se ne leui il commune rettangolo contenuto dalle due AC, CG; resta il quadrato di CG vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, GB; e per l'antecedente propos. AC à CG sarà come CG à GB; cioè le tre rette AC, CG, GB sono continue proportionali, che era da farsi, e dimostrarsi.

g 47. del 1.

h 4. del 2.

k 1. del 2.

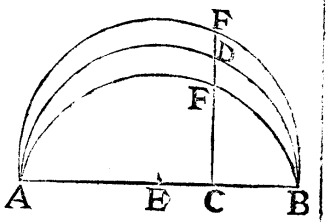
l 1. del 2.

Per le cose, che possono bisognare, non sarà inutile aggiungere il seguente Theorema.

Se qualche retta AB sia diuisa in qualunque modo in C;

e nel punto C ſi erigga la retta CD perpendicolare ad AB; in modo che il rettangolo contenuto dalle parti AC,CB ſia vguale al quadrato della perpẽdicolare CD; il punto D ſarà nella circonferenza di quel circolo, il di cui diametro è AB.

a 10. del 1. *Si diuida AB* [a] *in due parti vguali in E, e fatto centro in E, coll'interuallo EA, ouero EB, ſi deſcriua vn mezzo circolo. Se la circonferenza di quel mezzo circolo non paſſa per il punto D, ò paſſarà ſotto, ò ſopra al punto D, come fà la circonferenza AFB. Si continui C D ſino che concorra con la circonferenza AFB in qualche punto F; ſarà FC* [b] *media proportionale frà le due AC, CB;* ↵

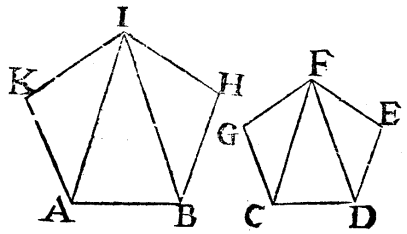


b 13. del 6. *per l'antecedente propoſitione, il rettangolo contenuto dalle eſtreme AC, CB, è vguale al quadrato della media F C: ma per ipoteſi il medeſimo rettangolo contenuto dalle parti AC, CB è vguale al quadrato di CD; ſarà il quadrato di CD vguale al quadrato di CF; e la retta CD ſarà vguale alla retta CF: la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile; non dunque la circonferenza paſſa ſopra, ne ſotto al punto D. Per la qual coſa il punto D è nella circonferenza di quel circolo, del quale AB è diametro, ch'era da dimoſtrarſi.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XVIII.

Deſcriuere ſopra vna data retta linea vn rettilineo ſimile, e ſimilmente poſto ad vn'altro rettilineo dato.

Sia data la retta AB, ed il rettilineo CDEFG, e ſi voglia ſopra la retta AB deſcriuere vn rettilineo ſimile, e ſimilmente poſto al dato rettilineo CDEFG. Da vno degli angoli del dato rettilineo, come dall'angolo F, ſi tirino rette linee à gli angoli oppoſti, che ſiano le rette FC, FD in modo, che il dato rettilineo reſti diuiſo in tanti triãgoli, come FGC, FCD, FDE; poi ſopra la retta AB, nel punto A, ſi faccia l'angolo BAI [a] vguale all'angolo DCF, e nel pũto B ſi põga l'ãgolo ABI vguale all'ãgolo CDF; perche gli angoli FCD, FDC [b] ſono minori di due angoli retti; perciò i due angoli IAB, IBA ſono minori di due angoli retti; ſi che continuate le rette AI, BI [c] concorreranno in qualche punto I; ed il rimanente angolo AIB [d] ſarà vguale al rimanente angolo CFD; dal che il triangolo ABI ſarà equiangolo al triangolo FCD. Di nuouo ſopra la retta AI, nel punto A, ſi coſtituiſca l'angolo I A K, [e] vguale all'angolo FCG; e nel punto I ſi ponga l'angolo AIK vguale all'angolo CFG: ſi dimoſtra-



a 23. del 1.
b 17. del 1.
c Scol. alla 31. del 1.
d 32. del 1.
e 23. del 1.

moſtrerà come prima, che le rette AK, IK concorrono in qualche punto K, e che l'angolo AKI è vguale all'angolo C G F. Similmente ſopra la retta IB, nel punto B, ſi faccia l'angolo IBH [f] vguale all'angolo FDE, e nel punto I ſi coſtituiſca l'angolo BIH vguale all'angolo DFE; e ſi dimoſtri come prima, che le rette B H, I H concorrono in qualche punto H, e che l'angolo IHB è vguale all'angolo FED. Col medeſimo ordine ſi procederà ſe nel rettilineo CDEFG vi foſſero più triangoli. Dico che il rettilineo ABHIK è ſimile, e ſimilmente poſto al rettilineo CDEFG. Perche gli angoli IAB, IAK ſono fatti vguali à gli angoli FCD, FCG, tutto l'angolo KAB ſarà vguale à tutto l'angolo GCD. Similmente gli angoli IBA, IBH, per coſtruttione, ſono vguali à gli angoli FDC, FDE, dal che tutto l'angolo ABH vguale à tutto l'angolo CDE; di più, perche i tre angoli KIA, AIB, BIH ſono fatti vguali alli trè angoli GFC, CFD, D F E; ſarà tutto l'angolo K I H è vguale à tutto l'angolo G F E: gli angoli K, ed H ſono moſtrati vguali à gli angoli G, ed E; ſarà il rettilineo ABHIK equiangolo al rettilineo CDEFG. Si conſiderino i triangoli equiangoli KAI, GCF, de'quali l'angolo KAI è vguale all'angolo GCF; ſarà KA ad AI [g] come GC à CF. Similmente eſſendo i triangoli IAB, FCD equiangoli, ſarà IA ad AB [h] come FC à CD; e per l'vgualità KA ad AB [K] ſarà come GC à CD; dalche i lati intorno à gli angoli vguali KAB, GCD ſono proportionali. In oltre eſſendo il triangolo IAB equiangolo al triangolo FCD, ed il triangolo IBH equiangolo al triangolo FDE; ſarà AB à BI [l] come CD à DF; ed IB à BH, come FD à DE; e per l'vgualità AB à BH [m] ſarà come CD à DE: ed eſſendo il triangolo DEF equiangolo al triangolo BHI, ed il triangolo CGF equiangolo al triangolo AKI, ſarà DE ad EF [n] come BH ad HI; e ſarà CG à GF, come AK à KI. Finalmente eſſendo i tre triangoli HIB, BIA, AIK equiangoli à i corriſpondenti tre triangoli D E F, DFC, CFG; ſarà HI ad IB, [o] come EF ad FD; e BI ad IA ſarà come DF, ad FC; e ſarà AI ad IK come CF ad FG; e per l'vgualità, HI ad IK [p] ſarà come EF ad FG. Per la qual coſa i rettilinei ABHIK, CDEFG ſono equiangoli, ed hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali; e perciò ſono [q] frà di loro ſimili, e ſono ancora ſimilmente poſti, ſtante che l'angoli vguali ſono ſopra i lati homologhi ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

f 23. del 1.
g 4. del 6.
h 4. del 6.
K 22. del 5.
l 4. del 6.
m 22. del 5.
n 4. del 6.
o 4. del 6.
p 22. del 5.
q 1. defin. del 6.

ANNOTATIONE.

Prima d'inoltrarmi nella compoſitione delle proportioni, dottrina tanto più difficile ad eſſere inteſa, quanto che naſce da principio non dimoſtrato ſin' ad hora, ne da Euclide, ne, che io ſappia, da alcun'altra perſona; parmi neceſſario ſpiegare alcune coſe, che poſſono facilitarci la ſtrada all'intiera cognitione di tal principio, e perciò fare premetto le ſeguenti notitie.

DEFINITIONE I.

Qualunque coſa, che ſi dice vna, ouero vno, generalmente ſi chia-

ma vnità; donde ne segue, che ogni linea retta può prendersi come vnità.

DEFINITIONE II.

Multiplicare due quantità frà di loro è il trouare vna terza quantità, la quale habbia tal proportione ad vna delle quantità da multiplicarsi, quale hà l'altra all'vnità; e la quantità trouata si chiama Prodotto.

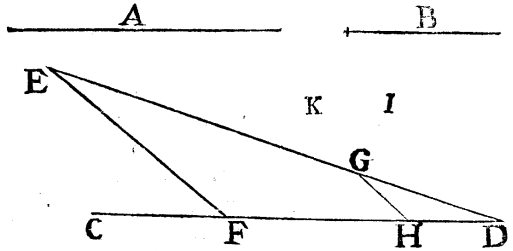
DEFINITIONE III.

Diuidere vna quantità per vn altra è il trouare vna terza quantità, che habbia tal proportione all'vnità, quale hà la quantità diuisa al diuisore, e la quantità trouata si chiama Quotiente.

LEMMA I.

Date due qualunque quantità è possibile multiplicare l'vna per l'altra.

Siano le quantità date A, & B, e si voglia multiplicare l'vna per l'altra.



S'intenda tirata la retta CD, alla quale sia inclinata la retta ED à qualunque angolo EDC. Se le quantità date sono linee rette, Si faccia DF [a] *vguale ad A; e si tagli DG vguale à B: si prenda in DF qualunque punto H, e presa DH come vnità, si tiri la retta HG; dal punto F* [b] *si tiri la retta FE parallela ad HG. Dico che ED sarà il prodotto di tal multiplicatione secondo l'vnità DH*

a 3. del 1.

b 31. del 1.

Nel triangolo EDF la retta GH, per costruttione, è parallela ad EF, dal che EG à GD [c] *sarà come FH ad HD; e componendo, ED à DG* [d] *sarà come FD à DH; e permutando, ED à DF* [e] *sarà come DG all'vnità DH: Per costruttione DF, DG sono vguali alle rette A, & B da multiplicarsi, e perciò la retta ED alla retta da multiplicarsi FD, ouero A, sarà come GD, cioè B (ch'è l'altra quantità da multiplicarsi) all'vnità HD; e per la seconda delle antecedenti definitioni, ED sarà il prodotto della multiplicatione di A nella quantità B, secondo l'vnità HD, ch'era da farsi nel primo luogo.*

c 1. del 6. d 18. del 5. e 16. del 5.

Se le quantità AB non sono linee rette, si prenda in CD qualunque parte FD, e si concepisca nella proportione di A à B essere FD ad vn'altra, che sia DG; inuertendo B ad A sarà [f] *come GD à DF. Nella retta FD si prenda qualunque altra parte DH; si tiri la retta HG; dal punto F sia tirata la retta FE* [g] *parallela ad HG, che continuata concorrerà con DE in qualche punto*

f Corollario alla 4. del 5.

g 31. del 1.

E: se concepiremo HD come vnità, sarà, per quel che s'è dimostrato, ED il prodotto della multiplicatione di FD in DG; si concepisca sicome FD à DE, così A ad vn'altra quantità del medesimo genere, che sia K; e sicome GD à DH si concepisca B ad'vn'altra quantità del medesimo genere, che sia I.

Perche FD à DG, per costruttione, è come A à B; e la proportione di GD à DH è come B ad I; per l'vgualità, [h] *sarà FD à DH come A ad I. Di nuouo, perche GD à DF è come B ad A; ed FD à DE è come A à K; per l'vgualità, GD à DE,* [K] *sarà come B à K; ed inuertendo, ED à DG sarà come K à B: mà ED à DG è come FD à DH; sarà K à B* [m] *come FD à DH. Fù dimostrata FD à DH come A ad I, sarà K à B,* [n] *come A ad I; e permutando, K ad A* [o] *sarà come B ad I; cioè la quantità K alla quantità A, da multiplicarsi, come l'altra quantità B, da multiplicarsi, all'vnità I; e per la seconda definitione, la quantità K sarà il prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità A nella quantità B, secondo l'vnità I, ch'era da farsi, e dimostrarsi.*

h 22. del 5.

K 22. del 5. 1 Coroll. alla 4. del 6.

m 11. del 5.

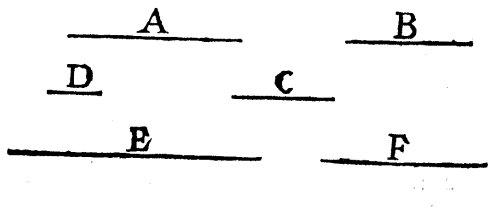
n 11. del 5.

o 16. del 5.

LEMMA II.

Se due quantità sono multiplicate per vna medesima quantità, secondo vn'istessa vnità, i prodotti sono frà di loro come le quantità multiplicate; e quei prodotti li chiameremo vguali multiplici delle quantità multiplicate.

Siano due qualunque quantità A, B, e secondo qualsiuoglia vnità D, sia multiplicata A da qualche quantità C, ed il prodotto sia E: e colla medesima vnità D sia multiplicata B, per l'istessa quantità C, ed il prodotto sia F. Dico che E ad F è come A à B. Perche la quantità E rappresenta il prodotto fatto dalla multiplicatione di A per C, secondo l'vnità D, per la seconda delle antecedenti difinitioni, sarà il prodotto E alla quantità A, come C all'vnità D. E per l'istessa ragione sarà il prodotto F alla quantità B come C à D: per la qual cosa E ad A [a] *sarà come F à B; e permutando il prodotto E al prodotto F* [b] *sarà come A à B, ch'era da dimostrarsi. I prodotti E, F li chiamaremo vguali multiplici delle quantità A, & B.*



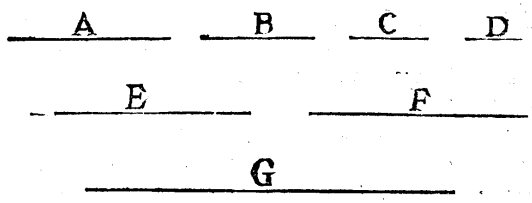
a 11. del 5.

b 16. del 5.

LEMMA III.

Se quattro quantità sono proportionali, il prodotto fatto dalla prima, e quarta, è vguale al prodotto fatto dalla seconda, e terza.

Siano le quattro quantità A, B, C, D, proportionali ; cioè che A à B ſia come C à D. Dico che il prodotto fatto dalla multiplicatione delle eſtreme A, & D, è vguale al prodotto fatto dalle medie B & C. Per il primo Lemma ſi multiplichino le eſtreme A, & D, ed il prodotto ſia F ; ſimilmente ſi multiplichino le medie B, & C, ed il prodotto ſia E ; e nell' iſteſſo modo ſi multiplichino le due A, & C, ed il prodotto ſia G ; il tutto ſi faccia con vna medeſima vnità.



Perche D, multiplicata per A, produce F ; e la quantità C, multiplicata per la medeſima A, produce G ; le due G, ed F, per l'antecedente Lemma, ſaranno vguali multiplici delle due C, & D ; dal che la proportione di G ad F [a] *ſarà come quella di C à D ; mà C à D, per ipoteſi, è come A à B, ſarà G ad F* [b] *come A à B.*

In oltre perche B multiplicata per C, per coſtruttione, produce E ; è la quantità A multiplicata per la medeſima C, produce G ; le due G, E [c] *ſaranno vguali multiplici delle due A, & B ; e perciò la proportione di G ad E* [d] *ſarà come quella di A à B ; mà fù dimoſtrata A à B eſſer come G ad F ; ſarà G ad E,* [e] *come la medeſima G ad F : per la qual coſa E, ed F* [f] *ſono frà di loro vguali : mà per coſtruttione la quantità E rappreſenta il prodotto fatto dalle eſtreme A, & D ; e la quantità F rappreſenta il prodotto fatto dalle medie B, & C ; ſarà dunque il prodotto delle eſtreme A, & D, vguale al prodotto delle medie B, & C, che era da dimoſtrarſi.*

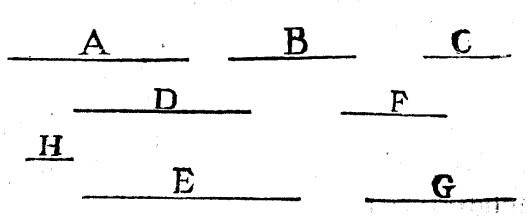
a Lem. antec.
b 11. del 5.
c Lem. 2.
d Lem. 2.
e 11. del 5.
f 9. del 5.

LEMMA IV.

Se ſaranno tre quantità, il prodotto fatto dalla multiplicatione della prima nel prodotto della ſeconda, e terza, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della terza, nel prodotto della prima, e ſeconda.

Siano eſpoſte le tre quantità A, B, C. Dico che il prodotto fatto dalla multiplicatione della prima A nel prodotto delle due B, C, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della terza C nel prodotto delle due A, B.

Si prenda qualunque quantità H del medeſimo genere alle quantità A, B, C, e ſi intenda H come vnità, con la quale, per il primo Lemma, ſi multiplichino le due A, B, ed il prodotto ſia D.



Di

Di nuouo con la medeſima vnità ſi multiplichino le due C, D, ed il prodotto ſia E ; e ſimilmente con l'vnità H ſi multiplichino le due B, C, ed il prodotto ſia F ; e ſi multiplichino le due A, F, ed il prodotto ſia G.

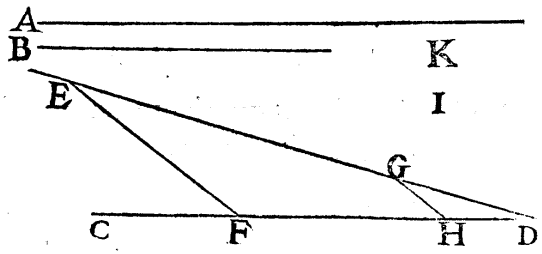
Perche dalla multiplicatione delle due A, & B, ſe ne produce D, ſarà per la ſeconda delle antecedenti definitioni, il prodotto D alla quantità A, come B all'vnità H. Similmente perche dalla multiplicatione delle due B, C ne viene il prodotto F, ſarà il prodotto F alla quantità C, come B all'vnità H ; mà ſi diſſe B ad H eſſere come D ad A ; ſarà D ad A [a] *come F à C ; e per l'antecedente Lemma, il prodotto delle eſtreme D, & C ſarà vguale al prodotto delle medie A, & F. E perche il prodotto delle medie A, ed F, per coſtruttione, è la quantità G ; ed il prodotto delle eſtreme D, & C è la quantità E ; in conſeguenza i prodotti E, & G ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa il prodotto fatto dalla prima A nel prodotto della ſeconda B, e terza C, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della terza C nel prodotto delle altre due A, & B, che era da dimoſtrarſi.*

a 11. del 5.

LEMMA V.

Date due qualunque quantità è poſſibile diuidere l'vna per l'altra.

Habbiaſi da diuidere la quantità A per la quãtità B. S'inclinino le rette ED, CD à qualunque angolo E D C ; ſe le quantità date ſono linee rette, ſi faccia D E [a] *vguale alla retta A, da diuiderſi ; e ſi faccia DF vguale al diuiſore B ; ſi tiri la retta FE : poi ſi prenda nella retta FD qualunque punto H, dal quale ſia tirata la retta HG* [b] *parallela ad EF. Dico che, preſa DH come vnità, ſarà DG il quotiente di tal diuiſione.*



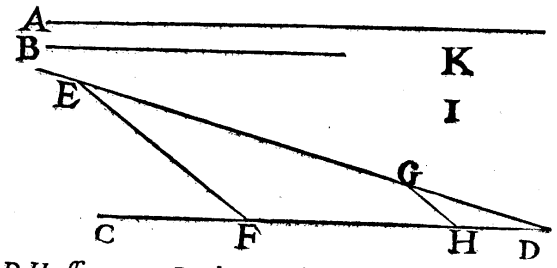
Eſſendo GH parallela ad EF, ſarà EG à GD [c] *come FH ad HD ; e componendo, ED à DG,* [d] *ſarà come FD à DH ; ed inuertendo, DG à DE* [e] *ſarà come DH à DF ; e permutando, GD à D H* [f] *ſarà come E D à D F, cioè come A à B : per la qual coſa la quantità A da diuiderſi al diuiſore B, è come il quotiente GD all'vnità H D ; e per la terza delle antecedenti definitioni, GD ſarà il quotiente di tal diuiſione, ſecondo l'vnità HD.*

Se le propoſte quantità A, B non ſono linee rette ; ſi prenda in CD qualunque parte DF, e ſi concepiſca ſicome la proportione di B ad A, coſi FD ad vn' altra, che ſia ED : ſarà, inuertendo, A à B [g] *come E D à D F. Si tiri la retta EF. Preſo poi in FD qualunque punto H, dal quale ſia tirata la retta H G* [h] *parallela ad E F, ſegarà E D in qualche punto G : ſe concepiremo H D come vnità, per quel che s'è dimoſtrato antecedentemente, G D ſarà il quotiente della diuiſione fatta di D E per F D. In oltre ſi concepiſca ſicome*

a 3. del 1.
b 31. del 1.
c 2. del 6.
d 18. del 5.
e Coroll. alla 4. del 5.
f 16. del 5.
g Coroll. alla 4. del 5.
h 31. del 1.

ED à DG, cosi A ad vn'altra quantità del medesimo genere K, e sicome FD à DH, così B ad vn altra quantità del medesimo genere I.

Perche GH è parallela ad EF, sarà EG à GD [k] *come FH ad HD; e componẽdo ED à DG* [l] *sarà come FD à DH; mà ED à DG è come A à K, hauerà A à K* [m] *l'istessa proportione, che hà FD à DH: si disse FD à DH essere come B ad I, sarà A à K* [n] *come B ad I; e permutando, A à B* [o] *sarà come K ad I. In oltre essendo A à B, per costruttione, come ED à DF, & A à B è come K ad I; sarà K ad I* [p] *come ED à DF; e la proportione di ED à DF e come GD à DH, sarà GD, à DH* [q] *come K ad I: ed inuertendo, HD à DG* [r] *sarà come I à K: mà HD è suppostà vnità rispetto à GD, sarà la quantità I vnità rispetto alla quantità K; e per quel, che s'è dimostrato, la quantità A, da diuiderfi, alla quantità B, diuisore, sarà come K all'vnità I; e per la terza delle antecedenti definitioni, sarà K il quotiente, che nasce dalla diuisione di A per B, come fù proposto fare, e dimostrare.*



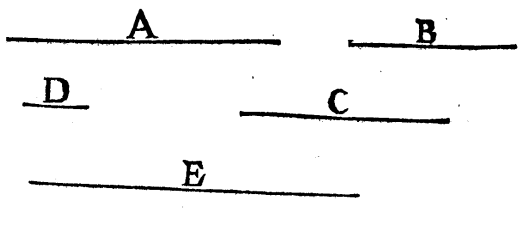
k 2. del 6.
l 18. del 5.
m 11. del 5.
n 11. del 5.
o 16. del 5.
p 11. del 5.
q 11. del 5.
r Corol. alla 4 del 5.

LEMMA VI.

Multiplicandosi il quotiente per il diuisore, il prodotto è vguale alla quantità diuisa.

Sia diuisa la quantità A per la quantità B, ed il quotiente sia la quantità C. Dico che il prodotto fatto dalla multiplicatione del quotiente C nel diuisore B, è vguale alla quantità diuisa A.

Sia D l'vnità, rispetto alla quale è fatta la diuisione di A per B; si faccia la multiplicatione di C per B, rispetto all'vnità D, ed il prodotto sia E; per la seconda delle antecedenti definitioni, sarà E à B come C all'vnità D. In oltre perche diuisa A per B, il quotiente, per ipotesi, è C; per la terza delle antecedenti definitioni, la quantità diuisa A al diuisore B è come il quotiente C all'vnità D: ma C à D, per quel che s'è dimostrato, è come E à B; sarà E à B [a] *come A alla medesima B; per la qual cosa A* [b] *è vguale ad E; ma E, per costruttione è il prodotto fatto dalla multiplicatione del quotiente C nel diuisore B; sarà il prodotto fatto dal quotiente C nel diuisore B, vguale alla quantità diuisa A, che era da dimostrarsi.*

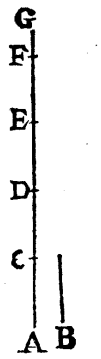


a 11. del 5.
b 9. del 5.

SCOLIO

SCOLIO.

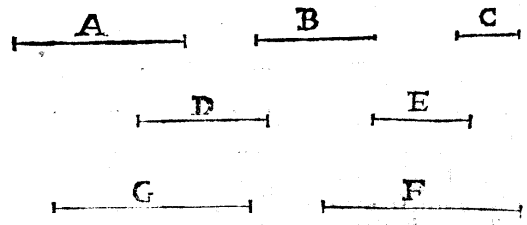
Quando si vuol vedere che proportione sia frà due quantità del medesimo genere, non s'intende far'altro, se non che conoscere di quanto l'antecedente è maggiore, ò minore del conseguente; ò pure conoscere se l'antecedente è vguale al conseguente; il che si fà col detrarre il conseguente dall'antecedente tante volte, che si può, e se vi resta auanzo, vedere che rispetto hà al conseguente. Come per essempio, habbiasi da trouare che proportione sia frà l'antecedente A, ed il conseguente B; se A è maggiore di B, dalla quantità A se ne detraggano le parti AC, CD, DE, EF, e quante altre se ne può, vguali al conseguente B; se non resta cosa alcuna, diremo, che l'antecedente A contiene tante volte il conseguente B, per quante sono le parti in AF; e se soprauanza qualche cosa minore di B, come FG, all'hora si dirà, che l'antecedente A contiene tante volte il conseguente B, per quante parti sono in AF, e che soprauanza la quantità FG, ch'è tante parti esprimibili, ò non esprimibili di B. E perche questa continua detrattione è l'istessa cosa, che diuidere la quantità A per la quantità B, stante che la diuisione è vna abbreuiatura di questa continua detrattione, perciò diuidendo l'antecedente A per il conseguente B, il quotiente indicarà il valore della proportione, che hà l'antecedente A al conseguente B. E per l'auuenire, quando si vorrà trouare il valore della proportione, che hà vn antecedente ad vn conseguente, si diuiderà l'antecedente per il conseguente, ed il quotiente si chiamerà denominatore della proportione.



LEMMA VII.

Se saranno quante si voglia quantità del medesimo genere, la proportione della prima all'vltima è composta dalle proportioni intermedie.

Siano esposte le quantità A, B, C. Dico che la proportione della prima A alla terza C è composta dalle proportioni di A à B, e di B à C. Per il quarto lemma si diuida la quantità A per la quantità B, [a] *ed il quotiente sia D; sarà D, per l'antecedente Scolio, la valuta della proportione, che hà la quantità A à B. Similmente si diuida B* [b] *per la quantità C, ed il quotiente sia E; sarà E la valuta della proportione, che hà B à C. Poi, per il primo lemma, si multiplichi D per la quantità E, ed il prodotto sia F; sarà F, per la decima definitione del 5. libro, la*

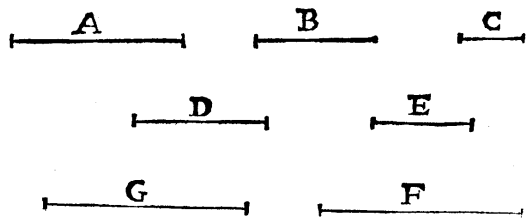


a Lemm. 5.
b Lemm. 5.

proportione composta dalle due proportioni di A à B, e di B à C. Oltre à ciò si diuida A [c] per C, ed il quotiente sia G; sarà G [d] il valore della proportione, che hà la quantità A alla quantità C.

c Lem. 5. d Scol. antec.

Perche diuisa la quantità A per B il quotiente è D, multiplicando il quotiente D per il diuisore B, il prodotto, per il lemma 6. sarà vguale alla quantità A. Similmente essendosi diuisa la quantità B per C, n'è venuto il quotiente E; multiplicando il quotiente E per il diuisore C, il prodotto sarà vguale alla quantità B: tanto il prodotto di E in C, quanto la quantità B, che gli è vguale, si multiplichi per la medesima quantità D; sarà il prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità D nel prodotto di E in C, vguale al prodotto di D in B: ma il prodotto di D in B è vguale ad A, sarà il prodotto, fatto dalla multiplicatione di D nel prodotto di E in C, vguale ad A. Fù dimostrato nel quarto lemma, che il prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità D nel prodotto di E in C, vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità C nel prodotto di E in D; sarà il prodotto, fatto dalla multiplicatione della quantità C nel prodotto di E in D, vguale ad A; ma il prodotto di E in D, per costruttione, è la quantità F; sarà il prodotto, fatto dalla multiplicatione di F in C, vguale ad A. Finalmente perche, diuisa la quantità A per C, il quotiente per costruttione è G, sarà per il Lem. 6. il prodotto, fatto dal quotiente G nel diuisore C, vguale ad A: si disse che il prodotto, fatto da F in C, è vguale alla medesima quantità A; sarà il prodotto fatto da F in C vguale al prodotto fatto da G in C; dal che G è vguale ad F: Ma G, per quel che s'è detto, è il valore della proportione di A à C, sarà F il valore della proportione di A à C: ma F è la proportione composta dalle proportioni D, ed E, sarà la proportione di A à C composta delle proportioni D, ed E. E perche la quantità D rappresenta la proportione di A à B; e la quantità E rappresenta la proportione di B à C, sarà dunque la proportione della prima A alla terza C, composta dalle proportioni intermedie, cioè della proportione di A à B, e dalla proportione di B à C, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



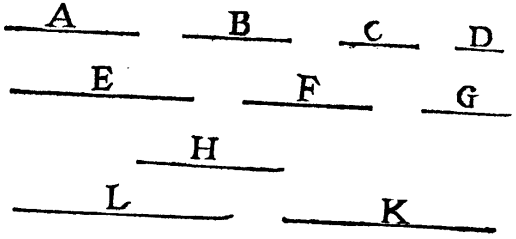
Se saranno più di trè quantità, come A, B, C, D. Dico similmente che la proportione della prima A all'vltima D, è composta dalle proportioni di A à B, di B à C, & di C à D.

Per il lemma 5. si diuida A per B, ed il quotiente sia E, sarà E il valore della proportione di A à B. Similmente si diuida B per C, ed il quotiente sia F; sarà F la valuta della proportione di B à C: e si diuida C per D, il quotiente sia G, sarà G la valuta della proportione di C à D. In oltre si multiplichi, per il primo lemma, la quantità E nella quantità F, ed il prodotto sia H; poi si multiplichi H per G, ed il prodotto sia K, per la 10. defin. del 5. libro, la quantità K rappresentarà la proportione composta dalle tre proportioni E, F, G.

Si diuida finalmente A per D, ed il quotiente sia L, sarà L il valore della proportione di A à D, ed il prodotto fatto dalla multiplicatione di L in D, per il lemm. 6, sarà vguale ad A.

Perche E rappresenta la proportione di A à B, ed F rappresenta la proportione di B à C; essendo H il prodotto fatto dalla multiplicatione di E in F, sarà H, per la decima definitione del 5. la proportione composta dalle due E, ed F; cioè H rappresentarà la proportione composta dalle proportioni di A à B, e di B à C: ma, per quel che s'è dimostrato nella prima parte, la proportione di A à C è composta delle medesime due proportioni di A à B, e di B à C; in conseguenza la quantità H sarà vguale alla proportione di A à C. Per la qual cosa, diuisa A per C, il quotiente sarà H, ed il prodotto fatto dalla multiplicatione del quotiente H nel diuisore C, per il lemma 6. sarà vguale alla quantità A. In oltre perche diuisa la quantità C per la quantità D, il quotiente è G; il prodotto fatto dalla multiplicatione di G in D [a] è vguale alla quantità C; tanto il prodotto di G in D, quanto la quantità C, si multiplichi per H, il prodotto fatto da H, nel prodotto di G in D, sarà vguale al prodotto di H in C: Mà il prodotto di H in C è vguale ad A; sarà il prodotto fatto dalla multiplicatione di H nel prodotto di G in D, vguale ad A. E perche il prodotto fatto dalla multiplicatione di H nel prodotto di G in D, per in Lemma 4, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione di D, nel prodotto di G in H, vguale ad A: mà il prodotto di G in H, per costruttione è vguale à K, sarà il prodotto di D in K vguale ad A. Si disse che il prodotto di L in D è vguale ad A; sarà il prodotto di K in D vguale al prodotto di L nella medesima D; e perciò le quantità L, & K sono frà di loro vguali. E perche la quantità L si disse essere il valore della proportione di A à D, sarà K il valore della proportione di A à D: mà K è la proportione composta delle tre proportioni E, F, G; sarà la proportione di A à D composta delle tre proportioni E, F, G; si disse nel principio, che la notata E rappresenta il valore della proportione di A à B; e la notata F rappresenta il valore della proportione di B à C; come anco G rappresenta il valore della proportione di C à D; sarà la proportione di A à D composta dalle proportioni intermedie di A à B, di B à C, e di C à D, che era da dimostrarsi.

a Lem. 6.



Nell'istesso modo se saranno più di quattro quantità si dimostrerà, che la proportione della prima all'vltima è composta dalle proportioni intermedie.

LEMMA VIII.

Se saranno quante si voglia quantità continue proportionali, la proportione della prima all'vltima è multiplice

della proportione della prima alla ſeconda, per quanto è la moltitudine delle proportioni intermedie.

Vltimo eſſempio.

Siano quante ſi voglia quantità A, B, C, D, E, F, continue proportionali; cioè che A à B ſia come B à C; che B à C ſia come C à D; che C à D ſia come D ad E; e che D ad E ſia come E ad F. Dico che la proportione della prima A all'vltima F è multiplice della proportione della prima A alla ſeconda B, per quanta è la moltitudine delle proportioni intermedie; cioè che la prima A alla terza C hà duplicata proportione di quella, che hà la prima A alla ſeconda B; che la prima A alla quarta D hà triplicata proportione di quella, che hà la prima A alla ſeconda B; che la prima A alla quinta E hà quadruplicata proportione di A à B; che la prima A alla ſeſta F hà quintuplicata proportione, che A à B; e con queſt'ordine per tutte le altre.

Si conſiderino prima le ſole tre quantità A, B, C continue proportionali. Eſſendo la proportione di A à B come quella di B à C, ſarà la proportione di A à B vguale alla proportione di B à C; dal che le due proportioni di A à B, e di B à C, compoſte inſieme, producono il duplicato della proportione di A à B; mà la proportione di A à C, per l'antecedente Lemma, è compoſta delle medeſime due proportioni di A à B, & di B à C; ſarà la proportione di A à C duplicata della proportione di A à B, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

A, B, C,

Di nuouo ſi conſiderino la quattro quantità A, B, C, D continue proportionali. Dico che la prima A alla quarta D hà triplicata proportione di quella, che hà A à B. Perche le quantità A, B, C, D ſi ſuppongono continue proportionali, ſarà A à B come B à C, e ſarà B à C come C à D; e perciò le tre proportioni di A à B di B à C, e di C à D, ſono frà di loro vguali; le quali, compoſte inſieme, producono il triplicato di vna; cioè il triplicato della proportione di A à B: ma la proportione di A à D, per l'antecedente lemma, è compoſta delle medeſime tre proportioni di A à B, di B à C, e di C à D; ſarà la proportione di A à D triplicata di quella, che hà la prima A alla ſeconda B, che era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

A, B, C, D

Similmente ſi conſiderino le cinque quantità A, B, C, D, E continue proportionali. Dico che la prima A alla quinta E hà quadruplicata proportione di quella, che hà la prima A alla ſeconda B.

Perche le propoſte quantità ſono continue proportionali, le quattro proportioni, cioè di A à B, di B à C, di C à D, e di D ad E, ſono frà di loro vguali; le quali, compoſte inſieme, ſono il quadruplicato d'vna, cioè il quadruplicato della proportione di A à B: ma, per l'antecedente lemma, la proportione di A ad E è compoſta delle medeſime quattro proportioni di A à B, di B à C, di C à D, e di D ad E; ſarà la proportione di A ad E quadruplicata di quella, che hà la prima A alla ſeconda B.

Finalmente ſi conſiderino le ſei quantità A, B, C, D, E, F continue proportionali. Dico che la prima A alla ſeſta F hà quintuplicata proportione di quella, che hà la prima A alla ſeconda B. Eſſendo, per ipoteſi, le quantità A, B, C, D, E, F continue proportionali, le cinque proportioni intermedie, cioè di A à B, di B à C, di C à D, di D ad E, e di E ad F, ſono frà di loro vguali;

A, B, C, D, E,

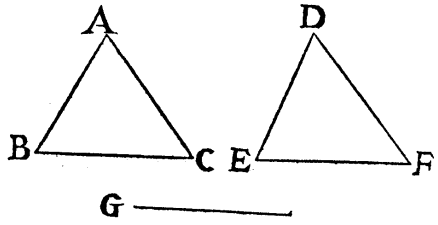
le

le quali, compoſte inſieme, producono il quintuplicato d'vna; cioè il quintuplicato di A à B; ma la proportione di A ad F, per il lemma antecedente, è compoſta dalle medeſime cinque proportioni; cioè di A à B di B à C, di C à D, di D ad E, e di E ad F; ſarà la proportione di A ad F quintuplicata della proportione, che hà la prima A alla ſeconda B. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà ſe le quantità continue proportionali ſaranno più di ſei, che la prima alla ſettima hà ſeſtuplicata proportione, che la prima alla ſeconda; che la prima all'ottaua hà ſettuplicata proportione di quella, che hà alla ſeconda, e così per le altre, il che era da dimoſtrarſi.

A, B, C, D, E, F,

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE IX.

I ſimili triangoli hanno ſcambieuolmente duplicata proportione, che i loro lati homologhi.

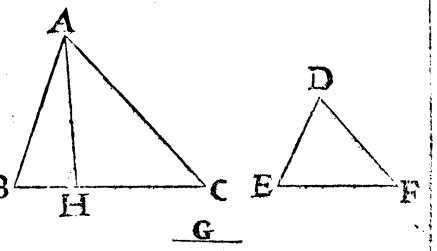


Siano i triangoli ſimili ABC, DEF, de'quali l'angolo B ſia vguale all'angolo E; l'angolo C all'angolo F; e l'angolo A vguale all'angolo D. Dico che il triangolo ABC al triangolo DEF hà duplicata proportione, che il lato BC all'homologo lato EF; ouero che il lato AB all'homologo DE, ouero AC à DF. Suppoſto prima, che i lati BC, EF ſiano frà di loro vguali. Perche i triangoli ſono ſimili, e gli angoli B, ed E ſono ſuppoſti vguali; ſarà CB à BA [a] come FE ad ED: ma la prima BC è poſta vguale alla terza EF; ſarà la ſeconda BA [b] vguale alla quarta DE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che A C è vguale ad FD; dalche i triangoli ABC, DEF [c] ſono frà di loro vguali; ſù ſuppoſto il lato BC vguale al lato EF; ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF, [d] come il lato BC al lato EF. Si faccia come BC ad EF, così EF [e] ad vn'altra, che ſia G; ſarà G terza proportionale; e perche BC ad EF è come EF à G; eſſendo B C vguale ad E F, [f] ſarà E F vguale à G; e preſa B C come terza quantità, hauerà BC ad EF [g] l'iſteſſa proportione, che hà la medeſima BC à G: mà BC ad EF, per quel che s'è dimoſtrato, e come il triangolo ABC al triangolo DEF; ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF [h] come BC à G: e perche la prima BC alla terza proportionale G, per il Lemma antecedente, hà duplicata proportione, che la prima BC alla ſeconda EF; hauerà il triangolo ABC al triangolo DEF duplicata proportione, che il lato BC all'homologo lato EF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 4. del 6.
b 14. del 5.
c 4. del 1.
d Corollar. alla 7. del 5
e 11. del 6.
f 14. del 5.
g 7. del 5.
h 11. del 5.

Di

Di nuouo non sia il lato BC vguale al lato E F, ma sia B C maggiore; presa B C come prima, & EF come seconda, [K] e si troui la terza proportionale G; sarà B C ad E F come E F à G: ma B C è maggiore di E F sarà EF [l] maggiore di G, ed il lato BC sarà molto maggiore di G. Si tagli BH [m] vguale à G; sarà BC ad EF, come EF à BH: si tiri la retta AH. Perche i triangoli ABC, DEF sono frà di loro simili, sarà AB à BC [n] come DE ad EF; e permutando, AB à DE [o] sarà come BC ad EF; ma BC ad EF è come la medesima EF à BH; sarà AB à DE [p] come EF à BH. Si considerino i due triangoli ABH, DEF, de'quali l'angolo ABH, per ipotesi, è vguale all'angolo DEF; ed i lati intorno à questi angoli vguali sono reciprochi; stante che s'è dimostrato, che AB à DE è come EF à BH; perciò i triangoli ABH, DEF [q] sono frà di loro vguali; preso il triangolo ABC, come terza quantità, sarà il triangolo ABC al triangolo ABH, [r] come il medesimo triangolo ABC al triangolo DEF. In oltre si considerino i triangoli ABC, ABH, i quali hanno vna medesima altezza, e sarà il triangolo ABC al triangolo A B H, [t] come la base B C alla base BH; ma il triangolo ABC al triangolo ABH, per quel che s'è dimostrato, e come il medesimo triangolo ABC al triangolo D E F; sarà il triangolo ABC al triangolo DEF [u] come BC à BH; cioè come BC alla retta G: ma la prima BC alla terza G, per l'antecedente Lemma, hà duplicata proportione, che la prima BC alla seconda EF; il triangolo ABC al triangolo DEF (ch'è come la prima BC alla terza G) haurà duplicata proportione, che il lato BC all'homologho lato EF. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il triangolo ABC al triangolo DEF hà duplicata proportione, che il lato AB al homologo lato DE; e che hà duplicata proportione, che il lato AC all'homologo lato DF, ch'era da dimostrarsi.



K 11. del 6.
l 14. del 6.
m 3. del 1.
n 1. defin. del 6.
o 16. del 5.
p 11. del 5.
q 15. del 6.
r 7. del 5.
t 1. del 6.
u 11. del 5.

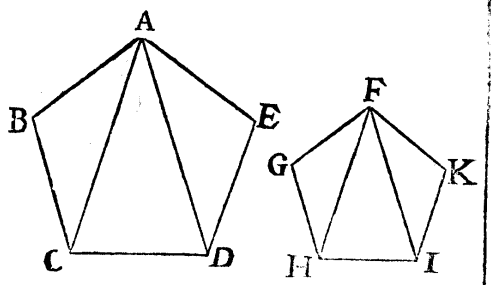
SCOLIO.

Da quel che s'è detto nell'antecedente Lemma, e dalla decima Definitione del quinto Libro, è manifesto, che quando si dice il triangolo ABC al triangolo DEF, hauere duplicata proportione di quella, che hà il lato BC al lato EF, vuol dire, che la proportione del triangolo ABC al triangolo DEF è composta dal prodotto fatto dalla multiplicatione della proportione di BC ad EF nella medesima proportione di BC ad EF; cioè multiplicandosi la proportione di BC ad EF, per la medesima proportione di BC ad EF, il prodotto sarà il valore della proportione del triangolo ABC al triangolo DEF.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XX.

I simili poligoni si diuidono in triangoli simili, di moltitudine vguali, ed homologhi ad essi poligoni: ed il poligono al poligono hà duplicata proportione, che il lato homologo al lato homologo.

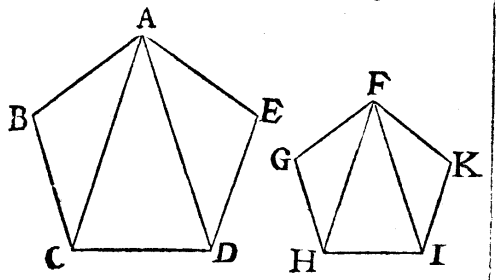
Siano i simili poligoni ABCDE, FGHIK, de' quali l'angolo B sia vguale all'angolo G, l'angolo BCD, vguale all'angolo G H I, l'angolo CDE vguale all'angolo HIK, l'angolo E vguale all'angolo K, e l'angolo F all'angolo A. Dico prima, che questi poligoni si diuidono in triangoli simili, e di moltitudine vguale. Da gli angoli A, & F à gli angoli opposti, si tirino le rette AC, AD, FH, FI. Perche i proposti poligoni sono simili, tanti lati sono in vno, quanti ne sono nell'altro; e perciò tante rette si tirano dall'angolo A à gli angoli opposti, per quante se ne tirano dall'angolo F à gli angoli opposti; dalche in tanta moltitudine di triangoli si diuide l'vno, per quanta moltitudine di triangoli si diuide l'altro. Si considerino i triangoli ABC, FGH, de'quali l'angolo B è supposto vguale all'angolo G. La proportione di A B à B C, per la similitudine de i poligoni, è come FG à GH; e perciò [a] i triangoli sono equiangoli, e sarà l'angolo BCA vguale all'angolo GHF, e l'angolo BAC vguale all'angolo GFH; i lati intorno à gli angoli vguali [b] sono proportionali, e però il triangolo BCA sarà simile [c] al triangolo FGH. Similmente perche l'angolo E è vguale all'angolo K, e la proportione di AE ad ED, per la similitudine de'poligoni, è come quella di FK à KI; i triangoli AED, FKI [d] sono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali [e] proportionali, e perciò [f] sono frà di loro simili; e sarà l'angolo EDA vguale all'angolo KIF; se da gli vguali angoli EDC, KIH, se ne leuano gli vguali angoli EDA, KIF, resta l'angolo ADC vguale all'angolo FIH. Similmente da gli vguali angoli BCD, GHI se ne leuino gli vguali angoli BCA, GHF, resta l'angolo ACD vguale all'angolo FHI; ne i triangoli ACD, FHI, i due angoli ACD, ADC sono vguali à i due angoli FHI, FIH; sarà il rimanente angolo CAD [g] vguale al rimanente angolo HFI, i triangoli ACD, FHI sono equiangoli, hanno [h] i lati intorno à gli angoli vguali proportionali; e perciò sono [K] simili. Il medesimo si prouarà se in essi poligoni vi fossero più triangoli.



Oltre à ciò dico, che questi triangoli sono homologhi à i poligoni intieri; cioè che tal proportione hà ciascun triangolo in vno de'poligoni à

a 6. del 6.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.
d 6. del 6.
e 4. del 6.
f 1. defin. del 6.
g 32. del 1.
h 4 del 6.
K 1. defin. del 6.

ciascuno de i corrispondenti triangoli nell'altro poligono, quale hà tutto vn poligono à tutto l'altro poligono. Perche i triangoli ABC, FGH sono frà di loro simili, il triangolo ABC al triangolo FGH, per l'antecedente propositione, hà duplicata proportione, che il lato homologo AC al lato homologo FH. Similmente essendo i triangoli ACD, FHI frà di loro simili, hauerà il triangolo ACD al triangolo FHI la medesima duplicata proportione, che hà il lato homologo AC al lato homologo FH; e perciò il triangolo ABC al triangolo FGH [l] è come il triangolo ACD al triangolo FHI. Per l'istessa ragione il triangolo ACD al triangolo FHI hà duplicata proportione, che il lato homologo AD al lato homologo FI; ma il triangolo AED al simile triangolo FKI hà la medesima duplicata proportione, che il lato homologo AD al lato homologo FI; sarà il triangolo ACD al triangolo FHI, [m] come il triangolo ADE al triangolo FIK; dal che l'antecedente ABC al conseguente FGH, è come l'antecedente ACD al conseguente FHI; e l'antecedente ACD al conseguente FHI è come l'antecedente ADE al conseguente FIK; saranno tutti gli antecedenti, cioè il poligono ABCDE, [n] à tutti i conseguenti, cioè al poligono FGHIK, come vno antecedente ad vn conseguente; cioè come il triangolo ABC, al triangolo FGH; ouero come il triangolo ACD al triangolo FHI; ò pure come il triangolo ADE al triangolo FIK.



l 11. del 5.

m 11. del 5.

n 12. del 5.

Finalmente dico che il poligono al poligono hà duplicata proportione, che il lato homologo al lato homologo. Perche il poligono ABCDE al poligono FGHIK è come il triangolo ABC al triangolo FGH; ed il triangolo ABC al simile triangolo FGH hà duplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo FG; per l'egualità hauerà il poligono ABCDE al poligono FGHIK [o] duplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo FG, ch'era da dimostrarsi.

o 22. del 5.

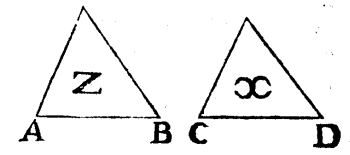
COROLLARIO.

Dall'antecedente propositione è manifesto, che i poligoni simili sono come i quadrati de i loro lati homologhi, stante che tutti i quadrati sono simili frà di loro; e cosi i quadrati de' lati CD, HI hanno duplicata proportione, che i loro lati homologhi CD, HI: mà i poligoni simili ABCDE, FGHIK hanno la medesima duplicata proportione de i loro lati homologhi CD, HI, sarà il poligono ABCDE al poligono FGHIK, come il quadrato di CD al quadrato di HI.

SCOLIO.

Si può qui facilmente prouare, che gli vguali poligoni simili hanno i lati homologhi vguali; e de i poligoni simili ineguali, il lato homologo del maggiore è maggiore del lato homologo del minore.

Siano prima i poligoni simili Z ed X frà di loro vguali, e sia l'angolo A vguale all'angolo C, e l'angolo B vguale all'angolo D; saranno i poligoni Z, ed X similmente posti à i lati AB, CD; dal che AB, CD sono i lati homologhi; e sarà il poligono Z al simile poligono X, per l'antecedente Corollario, come il quadrato del lato homologo AB al quadrato del lato homologo X; mà i poligoni Z, ed X sono supposti frà di loro vguali; saranno [a] i quadrati de' lati AB, CD frà di loro vguali, e perciò il lato AB [b] sarà vguale al lato CD.



a 14. del 5.

Di nuouo se il poligono Z sarà maggiore del poligono X, sarà il quadrato di AB [c] maggiore del quadrato di CD, e perciò il lato AB [d] sarà maggiore del lato CD, ch'era da dimostrarsi.

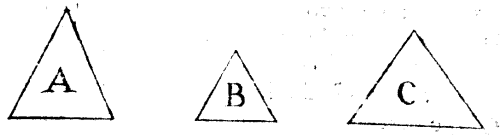
b Scol. alla 46. del 2.
c 14. del 5.
d Scol. alla 46. del 1.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XXI.

I retti linei che sono simili ad vn medesimo rettilineo, sono ancora simili frà di loro.

Sia il rettilineo A simile al rettilineo B, ed il rettilineo C simile al medesimo rettilineo B. Dico che i rettilinei A, & C sono frà di loro simili

Perche i rettilinei A, & B sono frà di loro simili, perciò sono equiangoli. Similmente essendo i rettilinei B, & C simili, saranno equiãgoli; ma il rettilineo A è equiangolo al rettilineo B; i rettilinei dunque A, & C sono equiangoli, per la qual cosa hanno [a] i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e per la prima definitione di questo, sono frà di loro simili, ch'era da dimostrarsi.

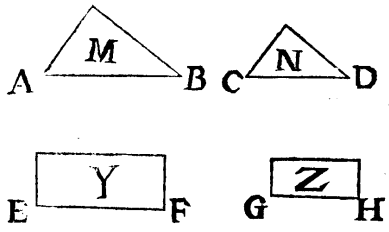


a 4. del 6.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XXII.

Se quattro linee rette sono proportionali, i rettilinei simili,

e ſimilmente deſcritti ſopra di eſſe, ſono proportionali: e ſe quattro rettilinei ſimili ſono proportionali, le linee rette, ſopra le quali ſono ſimilmente deſcritti, ſaranno proportionali.



Siano prima le quattro rette linee AB, CD, EF, GH, proportionali; cioè che AB à CD ſia come EF à GH; e ſopra le due AB, CD, ſiano deſcritti i rettilinei M, N ſimili, e ſimilmente poſti; come ancora ſopra le due EF, GH ſiano deſcritti due altri rettilinei Y, Z ſimili frà di loro, e ſimilmente poſti. Dico che il rettilineo M al ſimile rettilineo N hà l'iſteſſa proportione, quale hà il rettilineo Y al ſimile rettilineo Z.

Perche i rettilinei ſimili M, N ſono ſimilmente poſti ſopra le rette AB, CD; ſaranno le rette AB, CD lati homologhi di eſſi rettilinei: e per l'iſteſſa ragione le rette EF, GH ſono lati homologhi de'i ſimili rettilinei Y, Z. Hor eſſendo i rettilinei M, N frà di loro ſimili, il rettilineo M al ſimile rettilineo N [a] hà dupplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo CD; ma, per ipoteſi, AB à CD è come EF à GH; hauerà il rettilineo M al rettilineo N [b] duplicata proportione di quella, che hà EF à GH; ma il rettilineo Y al ſimile rettilineo Z hà la medeſima duplicata proportione, che hà EF à GH; hauerà il rettilineo M al ſimile rettilineo N, [c] l'iſteſſa proportione, che hà il rettilineo Y al rettilineo Z, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 20. del 6.
b 13. del 5.
c 11. del 5.

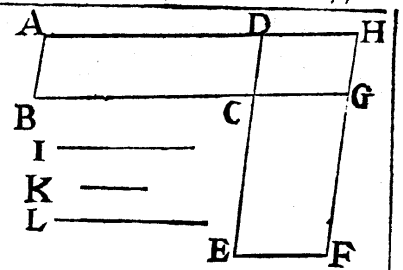
Di nuouo ſiano i rettilinei M, N frà di loro ſimili, e ſimilmente poſti ſopra le rette AB, CD, ed i rettilinei Y, Z ſiano frà di loro ſimili, e ſimilmente poſti alle rette EF, GH; ed habbia il rettilineo M al rettilineo N l'iſteſſa proportione, che hà il rettilineo Y al rettilineo Z. Dico che AB à CD ſarà come EF à GH. Perche i rettilinei M, ed N ſono frà di loro ſimili, il rettilineo M al rettilineo N [d] hà duplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo CD; ma per ipoteſi, il rettilineo M al rettilineo N è come il rettilineo Y al rettilineo Z; hauerà il rettilineo Y al rettilineo Z duplicata proportione di quella, che hà AB alla retta CD; e perche il rettilineo Y al ſimile rettilineo Z, hà duplicata proportione, che il lato homologo EF al lato homologo GH; ſarà AB à CD come EF à GH, ch'era da dimoſtrarſi.

d 20. del 6.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XXIII.

Se due parallelogrammi ſono equiangoli, haueranno la proportione compoſta delle proportioni de i lati, che ſono intorno à gli angoli vguali.

Siano



Siano i parallelogrammi equiangoli ABCD, CEFG; e ſia l'angolo B C D vguale all'angolo E C G. Dico che la proportione del parallelogrammo AC al parallelogrammo CF, è compoſta di due proportioni; cioè della proportione del lato B C al lato C G; e della proportione del lato D C al lato C E. Si adattino i propoſti parallelogrammi AC, CF, in modo che ſi tocchino ſecondo gli angoli vguali C; e che i lati BC, CG coſtituiſcano la ſola retta linea BCG; e per il Corollario alla 14. propoſ. di queſto, i lati EC, CD, coſtituiranno vna ſola retta linea: ſi prolunghino i lati A D, F G ſino che concorrono in qualche punto H. Poi ſi prenda qualunque retta linea I, e ſi faccia ſi come BC à CG, così I [a] ad vn altra, che ſia K: e ſimilmente ſi faccia ſi come D C à C E, così K [b] ad vn altra, che ſia L. Perche i parallelogrammi A C, DG hanno vna medeſima altezza, ſarà il parallelogrammo A C al parallelogrammo DG, [c] come la baſe BC alla baſe CG: ma per coſtruttione, BC à CG è come I à K; ſarà il parallelogrammo A C al parallelogrammo DG [d] come I à K. Similmente, eſſendo i parallelogrammi DG, CF ſotto d'vna medeſima altezza, il parallelogrammo D G al parallelogrammo CF [e] ſarà come la baſe DC alla baſe CE; ma per coſtruttione, DC à CE è come K ad L; ſarà il parallelogrammo DG al parallelogrammo CF, [f] come K ad L. Si conſiderino ſei quantità, tre da vna parte, cioè i parallelogrammi AC, DG, CF; e tre da vna altra parte, cioè le rette I, K, L. Perche la prima AC alla ſeconda DG, è come la prima I alla ſeconda K; e la ſeconda DG alla terza CF è come la ſeconda K alla terza L; ſarà, per l'egualità, la prima AC alla terza CF, [g] come la prima I alla terza L: ma la prima I alla terza L, per il lemma 7. doppo la 18. propoſ. di queſto, hà la proportione compoſta delle proportioni di I à K, e di K ad L; hauerà il parallelogrammo A C al parallelogrammo CF la proportione compoſta delle proportioni di I à K, e di K ad L: ma la proportione di I à K, è come quella di BC a CG; e la proportione di K ad L è come quella di DC à CE; hauerà il parallelogrammo A C al parallelogrammo CF la proportione compoſta delle proportioni di B C à CG, e di DC à CE, come ſi propoſto dimoſtrare.

a 12. del 6.
b 12. del 6.
c 1. del 6.
d 11. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 22 del

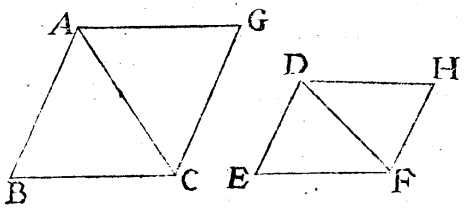
SCOLIO.

Il medeſimo ſi verifica in due triangoli, de'quali vn angolo dell'vno ſia vguale ad vn angolo dell'altro, come nel ſeguente Theorema.

I triangoli, de'quali vn angolo dell'vno è vguale ad vn

angolo

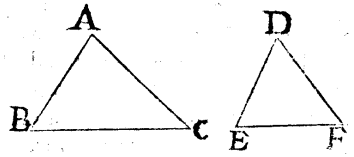
angolo dell'altro, hanno la proportione composta delle proportioni de'lati intorno à gli angoli vguali.



Siano i triangoli A B C, DEF, e sia l'angolo B vguale all'angolo E. Dico che la proportione del triangolo A BC, al triangolo DEF è cõposta delle proportioni, cioè di AB à DE, e di BC ad E F. Dal punto C si tiri la
a 31. del 1. *retta C G,* [a] *parallela ad A B; e dal punto A si tiri la retta AG parallela al lato BC, le quali concorreranno in qualche punto G: e sarà fatto il parallelo-*
b 34. del 1. *grammo B G, il quale* [b] *sarà il doppio del triangolo ABC; nell'istesso modo si compisca il parallelogrammo E H, che sarà il doppio del triangolo DEF; dal*
c 15. del 5. *che tutto il parallelogrammo BG à tutto il parallelogrammo EH,* [c] *sarà come la metà ABC alla metà DEF; mà per l'antecedente propositione la proportione del parallelogrammo BG al parallelogrammo equiangolo EH, è composta delle proportioni di AB à DE, e di BC ad EF; sarà la proportione del triangolo ABC al triangolo DEF composta delle proportioni di AB ad ED, e di BC ad EF, ch'era da dimostrarsi.*

Qui aggiunge il Commandino il seguente Theorema, che noi più breuemente dimostraremo col P. Clauio.

I triangoli, che hanno vn angolo vguale ad vn angolo, sono come i rettangoli contenuti da i lati intorno à gli angoli vguali.

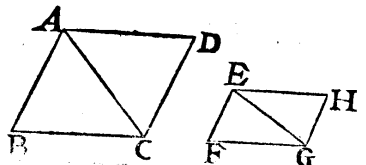


Siano i triangoli A B C, D E F, de' quali l'angolo B sia vguale all'angolo E. Dico che il triangolo ABC al triangolo DEF è come il rettangolo contenuto da i due lati AB, B C, al rettangolo contenuto da i lati DE, EF. Perche gli angoli in B, ed E sono frà di loro vguali, per l'antecedente Scolio, la proportione del triangolo A B C al triangolo D E F, è composta delle proportioni di AB à DE, e di BC ad EF; mà il rettangolo, contenuto dalle rette AB, BC, al rettangolo contenuto dalle rette DE, EF, per l'antecedente propositione, hà la proportione composta dalle medesime due proportioni, cioè di AB à D E, e di B C ad E F; hauerà dunque il triangolo A B C al triangolo DEF l'istessa proportione, quale hà il rettangolo contenuto da i lati AB, BC, al rettangolo contenuto da i lati DE, EF, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che i parallogrammi equian-

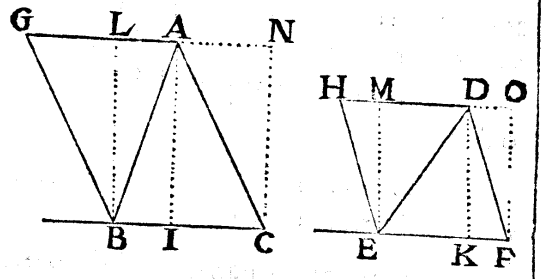
equiangoli hanno l'istessa proportione frà di loro, quale hanno i rettangoli contenuto da i lati intorno à gli angoli vguali.



Come ne i parallelogrammi BD, F H equiangoli, sia l'angolo B vguale all'angolo F, tirate le diagonali AC, EG, sarà il parallelogrãmo B D [a] *il doppio del triangolo A B C; ed*
a 41. del 1. *il parallelogrammo F H sarà il doppio del triangolo E F G; e perciò il parallelogrammo BD al parallelogrammo FH* [b] *sarà come il triangolo ABC al*
b 15. del 5. *triangolo EFG: mà, per quel che s'è dimostrato anteceaentemente, il triangolo ABC al triangolo EFG, è come il rettangolo contenuto da i lati A B, BC, al rettangolo contenuto da i lati E F, F G; sarà il parallelogrammo B D al parallelogrammo F H, come il rettangolo contenuto da i lati AB, BC, al rettangolo contenuto da i lati EF, FG, come si disse.*

Vn altro Teorema del Commandino, che quì dimostriamo con maggior breuità.

I triangoli, e parallelogrammi, hanno frà di loro la proportione composta delle proportioni delle loro basi, ed altezze.



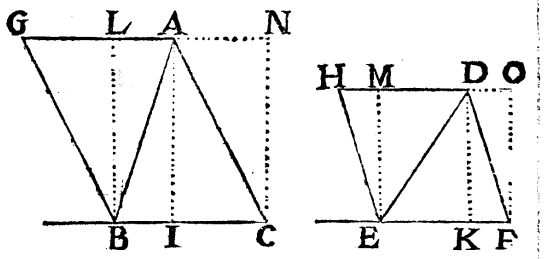
Siano i triangoli A BC, DEF, ed i parallelogrammi G B C A, HEFD; da gli angoli A, & D si facciano cadere le rette AI, DK, perpendicolari alle basi BC, E F. Dico che il triangolo A B C al triangolo DEF; ouero il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo HE F D, hà la proportione composta dalle proportioni della base BC alla base EF; e dell'altezza AI all'altezza DK. Da i punti B, C, E, F si facciano cadere le rette BL, CN, EM, FO, perpendicolari alle rette G A, H D, le quali sono parallele alle basi BC, EF; i quadrilateri LBCN, MEFO saranno parallelogrammi rettangoli; e perche gli angoli A I C, N C I sono retti, sarà A I parallela ad N C, & il quadrilatero A I C N sarà parallelogrammo rettangolo, e perciò A I [a] *sarà*
a 34. del 1. *vguale ad N C. Nell'istesso modo si dimostrerà, che D K è vguale ad QF. In oltre perche il rettangolo L B C N, ed il triangolo A B C, hanno vna medesima base, e sono frà le medesime parallele; sarà il rettangolo L B C N* [b] *il doppio del triangolo A B C. Nell'istesso modo si proue-*
b 41. del 1.

rà

rà, che il rettangolo MEFO è il doppio del triangolo DEF, e ſarà il rettangolo LBCN al rettangolo MEFO, [c] come il triangolo ABC al triangolo DEF; mà il rettangolo L B C N al rettangolo M E FO, hà la proportione compoſta [d] delle proportioni di BC ad EF, e di C N ad F O; hauerà il triangolo ABC al triangolo DEF, la proportione compoſta delle proportioni di BC ad EF, e di CN ad F O; mà CN è vguale ad AI, ed OF è vguale à DK; la proportione dunque del triangolo ABC al triangolo DEF ſarà compoſta delle proportioni della baſe BC alla baſe EF, e dell'altezza AI all'altezza DK. E perche la proportione del triangolo ABC al triãgolo DEF è come quella del parallelogrammo GBCA al parallelogrammo HEFD (ſtante che i parallelogrammi ſono il doppio de i detti triangoli); la proportione dunque del parallelogrammo GBCA al parallelogrammo HEFD, ſarà compoſta delle proportioni della baſe BC alla baſe EF, e dell'altezza AI all'altezza DK, ch'era da dimoſtrarſi.

c 25. del 5.

d 23. del 6.



COROLLARIO

Da quel che s'è detto è manifeſto, che il rettangolo contenuto dall'altezza del triangolo, e dalla baſe è il doppio del medeſimo triangolo; ſtante che NC è vguale all'altezza AI, ed il rettangolo LBCN è il doppio del triangolo ABC.

Il Theorema ſeguente non ſarà inutile per le coſe, che dimoſtraremo ne gli Elementi Conici.

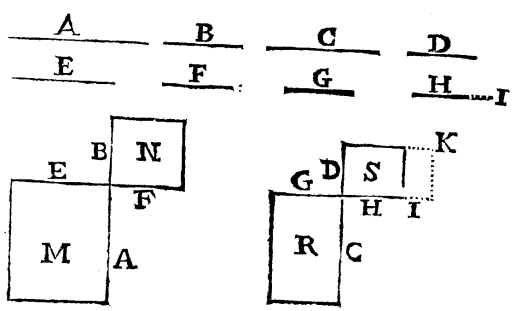
Se ſaranno otto quantità, cioè quattro da vna parte, e quattro da vn altra parte proportionali; il rettangolo contenuto dalle due prime al rettangolo contenuto dalle due ſeconde, ſarà come il rettangolo contenuto dalle due terze al rettangolo contenuto dalle due quarte: e ſe il rettangolo delle due prime al rettangolo delle due ſeconde è come il rettangolo delle due terze al rettangolo delle due quarte, e le prime quattro ſono proportionali; ancora le altre quattro ſaranno proportionali.

Siano le quattro quantità A, B, C, D, da vna parte, e le altre quattro E, F, G, H, da vn altra parte; ed habbia prima A à B l'iſteſſa proportione, quale hà C à D; e ſimilmente E ad F ſia come G ad H. Dico che il rettangolo contenuto dalle due prime A, ed E, al rettangolo contenuto dalle due ſeconde B, ed F, è come il rettangolo contenuto dalle due terze C, & G, al rettangolo contenuto dalle due quarte D, ed H.

Con le due A, ed E ſi faccia il rettangolo M; con le due B, ed F, ſi faccia il rettangolo N; con le due G, & C, ſi coſtruiſca il rettangolo R; e con le due D, ed H ſi faccia il rettangolo S. Perche la proportione del rettangolo M al rettangolo N, [a] è compoſta delle due proportioni, cioè di A à B, e di E ad F; e per ipoteſi, la proportione di A à B, è come quella di C à D; e la proportione di E ad F è come quella di G ad H; la proportione dell' rettangolo M al rettangolo N ſarà compoſta delle proportioni di C à D, & di G ad H: mà la proportione del rettangolo R al rettangolo S [b] è cõpoſta delle medeſime due proportioni di C à D, e di G ad H; la proportione dunque del rettangolo M al rettangolo N ſarà l'iſteſſa, che quella del rettangolo R al rettangolo S; cioè il rettangolo contenuto dalle due prime A, ed E, al rettangolo contenuto dalle due ſeconde B, ed F, ſarà come il rettangolo delle due terze C, & G, al rettangolo delle due quarte D, ed H, che era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 23. del 6.

b 23. del 6.



Di nuouo dico che, ſe il rettangolo contenuto dalle due A, ed E, al rettangolo delle due B, ed F, è come il rettangolo contenuto dalle due C, & G, al rettangolo contenuto dalle due D, ed H; e la proportione di A à B è come quella di C à D, ſarà ancora E ad F come G ad H; s'intenda fatta la medeſima coſtruttione di prima. Se la proportione di E ad F nõ è come quella di G ad H, ſarà E ad F come G ad vn altra, ò maggiore, ouero minore di H; ſia prima maggiore come la notata HI; ſi compiſca il rettangolo SKI. Perche il rettangolo M al rettangolo N [c] hà la proportione compoſta di A à B, e di E ad F, e la proportione di A à B, per ipoteſi, è come quella di C à D: ed ancora E ad F, per coſtruttione, è come G ad HI; la proportione del rettangolo M al rettangolo N ſarà compoſta delle proportioni di C à D, e di G ad HI: mà la proportione del rettangolo R al rettangolo SKI è compoſta delle medeſime proportioni di C à D, e di G ad HI; hauerà il rettãgolo M al rettangolo N l'iſteſſa proportione, che il rettangolo R al rettangolo SKI; mà, per ipoteſi, il rettangolo M al rettangolo N è come il rettangolo R al rettangolo S; ſarà il rettangolo R [d] al rettangolo S, come il medeſimo rettangolo R al rettangolo SKI; dal che i rettangoli S, & SKI ſono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile; non dunque E ad F è come G ad vna maggiore di H. Nell' iſteſſo modo ſi prouerà, che E

c 23. del 6.

d 11. del 5.

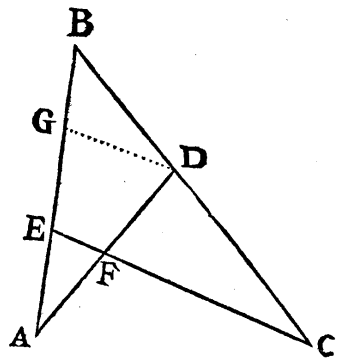
e 9. del 5.

ad F non è come G ad vna minore di H. Per la qual cosa E ad F sarà come G ad H, ch'era da dimostrarsi.

Sarà giouevole porre in questo luogo i due seguenti Theoremi dimostrati da Tolomeo nel primo Libro del suo Almagesto.

I.

Se due rette linee, come A B, C B, contengono qualche angolo A B C, e da gl'estremi A, & C sono inclinate due rette linee come A D, C E, le quali segandosi scambievolmente in qualche punto F, concorrino con le rette AB, CB, come in E, & D; la proportione di CB à BD sarà composta di due proportioni, cioè della proportione di CE ad EF, e della proportione di AF, ad AD.



a 31. del 1. *Dal punto D [a] si tiri la retta D G, parallela alla retta EC, e per il Corollario alla propositione quarta di questo, il triangolo B G D sarà simile al triangolo BEC; e la proportione di BC à C E [b] sarà come quella di BD à DG; e permutando, sarà CB à B D [c] come C E à G D. Similmente essendo E F parallela à G D il triangolo A E F, per il citato Corollario, sarà simile al triangolo A D G; e sarà AF ad FE [d] come A D à D G; e permutando, AF ad A D sarà come EF à GD. Si considerino tre quantità, cioè la prima CE, la seconda EF, e la terza G D; e per il settimo Lemma dopo la 18. propositione di questo, la proportione della prima CE alla terza GD è composta delle proportioni di C E ad EF, e di EF à GD; mà EF à G D, per quel che s'è dimostrato, è come AF ad AD; perciò la proportione di CB à BD sarà composta delle due proportioni cioè di CE ad EF, e di AF ad AD, che era da dimostrarsi. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la proportione di AB à BE è composta delle proportioni di AD à DF, e di CF à CE.*

b 4. del 6.

c 16. del 5.

d 4. del 6.

e 16. del 5.

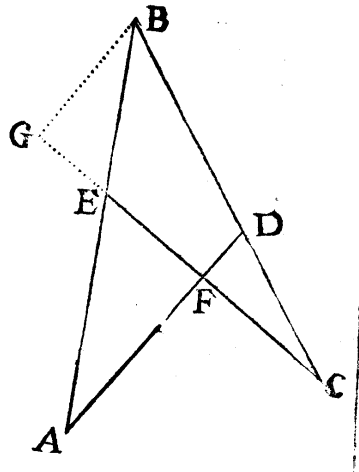
I I.

Supposto le medesime cose. Dico che la proportione di C D à D B è composta delle due proportioni cioè di C F ad FE, e di AE ad AB.

a 31. del 1. *Dal punto B [a] si tiri la retta BG parallela alla retta AD, la quale concorrerà con la retta CE continuata in qualche punto G. Perche le rette AD, BG sono frà di loro parallele, segate dalla retta GF, [b] gli angoli alterni A F E,*

b 29. del 1.

BGE, sono frà di loro vguali. Similmente, essendo le parallele BG, AD segate dalla retta AB, gli angoli alterni GBE, FAE sono frà di loro vguali: mà gli angoli al vertice A E F, GEB [c] sono frà di loro vguali; saranno i triangoli GEB, AEF frà di loro equiangoli; e la proportione di G E ad E B [d] sarà come quella di FE ad EA; e permutando GE ad EF [e] sarà come BE ad EA; e componendo GF ad F E [f] sarà come B A ad A E; ed inuertendo, FE ad FG [g] sarà come AE ad AB. In oltre essendo FD parallela à GB, sarà CD à DB [h] come CF ad FG: frà le due CF, FG si ponga per intermedia F E, per il Lemma settimo dopo la 18. di questo, la proportione della prima CF alla terza FG, sarà composta delle proportioni di C F ad FE, & di FE ad FG: mà FE ad FG, per quel che si è dimostrato, è come AE ad AB; la proportione dunque di CD à DB sarà composta delle proportioni di CF ad FE; e di AE ad A B, come fù proposto dimostrare. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la proportione di A E ad E B è composta delle proportioni di AF ad FD, e di CD à C B.



c 15. del 1.

d 4. del 6.

e 16. del 5.

f 18. del 5.

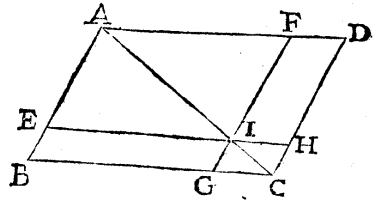
g Coroll. alla 4. del 5

h 2. del 6.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXIV.

In ogni parallelogrammo quei parallelogrammi, che sono intorno al diametro, sono simili frà di loro; ed ogn'vno è simile à tutto il parallelogrammo.

Sia il parallelogrammo ABCD, diuiso ne i parallelogrammi EF, BI, GH, ID, de'quali siano i due EF, GH intorno al diametro AC. Dico che i parallelogrammi EF, GH sono simili frà di loro, ed ogn'vno è simile à tutto il parallelogrammo ABCD. Perche la retta EH è parallela al lato BC, sarà l'angolo esterno AEI [a] vguale all'angolo B interno, ed opposto; e sarà l'angolo esterno AIE vguale all'angolo ACB interno, ed opposto. Similmente perche la retta F G è parallela al lato DC, sarà l'angolo esterno AFI [b] vguale all'angolo D interno, ed opposto; e l'angolo AIF esterno, vguale all'angolo ACD interno, ed opposto; e perciò tutto l'angolo EIF sarà vguale à tutto l'angolo BCD; l'angolo A è commune ad ambidue i parallelogrammi EF, BD; saranno i parallelogrammi EF, BD frà di loro equiangoli. Nell'istesso modo si pro-

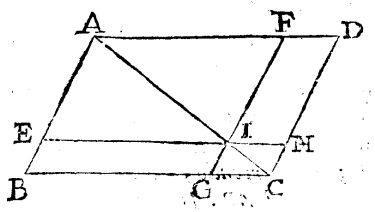


a 29. del 1.

b 29. del 1.

uerà che il parallelogrammo GH è equiangolo à tutto il parallelogrammo BD ; e perciò sarà ancora equiangolo al parallelogrammo EF .

In oltre perche la retta E I è parallela al lato BC, per il Corollario alla 4. propositione di questo , il triangolo AEI è simile al triangolo ABC : e similmente essendo FI parallela al lato CD, sarà il triangolo AIF simile al triangolo ACD; è sarà la proportione di EI ad IA [d] come quella di BC à CA;e la proportione di A I ad I F come quella di AC à CD;e per l'egualità,EI ad IF [e] sarà come BC à CD;e così i lati intorno à gli angoli vguali EIF, BCD sono proportionali.Come ancora sarà IF,ad FA come CD à DA ; ed IE ad EA come CB.à BA; e così i lati intorno à gli angoli vguali AEI,ABC, ouero AFI,ADC,sono proportionali. Di più sarà FA ad AI come DA, ad AC, & AI ad AE come CA ad AB,e per l'egualità, FA ad AE [f] sarà come DA ad AB;per la qual cosa i parallelogrammi EF, BD sono frà di loro simili . Nell'istesso modo si dimostrerà , che il parallelogrammo G H è simile à tutto il parallelogrammo BD ; e perciò i parallelogrammi EF, GH sono frà di loro simili , ed ognuno è simile à tutto il parallelogrammo B D , ch'era da dimostrarsi .



d 1. defin. del 6.

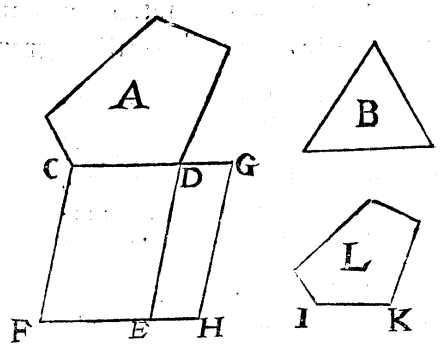
e 22. del 5.

f 22. del 5.

PLOBLEMA VII. PROPOSITIONE XXV.

Dati due rettilinei, costruirne vn terzo simile ad vno de i dati , ed vguale all'altro.

Siano dati i due rettilinei A, & B , e si voglia costruire vn altro rettilineo simile al rettilineo A,ed vguale al rettilineo B . Al lato C D [a] si applichi il parallelogrammo CDEF , secondo qualunque angolo; poi si applichi al lato D E [b] il parallelogrammo DH vguale al rettilineo B , e che habbia l'angolo E D G vguale all'angolo FCD ; frà le due rette CD,DG [c] si troui vna media proportionale , che sia IK ; sopra la retta IK [d] si descriua il rettilineo L simile , e similmente posto al rettilineo A . Dico che il rettilineo L è vguale al rettilineo B .



* vguale al rettilineo A

a 45. del 1.

b 45. del 1.

c 13. del 6.

d 18. del 6.

Perche l'angolo EDG , per costruttione è vguale all'angolo F C D ; vgualmente s'aggiunga l'angolo EDC ; i due angoli EDG, EDC saranno vguali à i due angoli EDC, FCD; ma i due angoli EDC,FCD [e] sono vguali

e 29. del 1.

vguali à due angoli retti ; perciò i due angoli EDG, EDC sono vguali à due angoli retti ; e le rette CD, DG [f] costituiscono vna sola retta linea ; per la qual cosa i parallelogrammi CE,DH sono sotto vna medesima altezza ; ed il parallelogrammo CE al parallelogrammo DH [g] sarà come la base CD alla base DG.In oltre perche IK,per costruttione,è media proportionale frà le due CD, DG,per il Lemma 8. dopo la 18.propositione di questo, la prima CD alla terza DG hà duplicata proportione di quella , che hà la prima CD alla seconda I K : ma il rettilineo A al simile rettilineo L hà la medesima duplicata proportione, che hà CD ad I K ; haurà il rettilineo A al rettilineo L [h] l'istessa proportione , che hà C D à DG ; fù dimostrata la proportione di C D à D G essere come il parallelogrammo CE al parallelogrammo DH ; sarà il rettilineo A al rettilineo L, [K] come il parallelogrammo CE al parallelogrammo D H ; ma il rettilineo A, per costruttione, è vguale al parallelogrammo CE ; sarà il rettilineo L [l] vguale al parallelogrammo DH : e perche il parallelogrammo DH è fatto vguale al rettilineo B ; sarà il rettilineo L vguale al rettilineo B , ch'era da farsi , e dimostrarsi .

f 14. del 1.

g 1. del 6.

h 11. del 5.

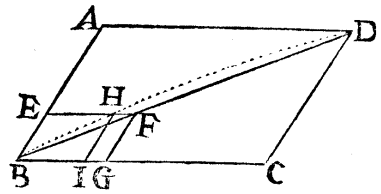
K 11. del 5.

l 14. del 5.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXVI.

Se da vn parallelogrammo sia detratto vn parallelogrammo simile , e similmente posto , che habbia vn angolo commune con tutto il parallelogrammo ; l'vno , e l'altro parallelogrammo sarà intorno al medesimo diametro .

Dal parallelogrammo ABCD , ne sia detratto vn parallelogrammo simile , e similmente posto , com'è il parallelogrammo EBGF , che habbiano l'angolo EBG commune.Dico che tirato il diametro BD quello passa per il punto F. Se il diametro BD non passa per l'angolo F , ò segarà il lato EF, ouero il lato FG ; seghi , s'è possibile , il lato EF in qualche punto H, e sia il diametro la linea DHB;dal punto H si tiri la retta HI, [a] parallela al lato AB , sarà il quadrilatero EBIH parallelogrammo, il quale, per quel che s'è detto , e intorno al diametro D H B ; e perciò il parallelogrammo EBIH [b] sarà simile à tutto il parallelogrammo AC; ma il parallelogrammo EBGF è supposto simile al medesimo parallelogrammo AC , i parallelogrammi dunque EBGF , EBIH [c] sono simili frà di loro, e la proportione di EB à BG , [d] sarà come quella della medesima E B à B I : per la qual cosa le rette BI , BG [e] sono frà di loro vguali , la parte è vguale al tutto , ch'è impossibile : non dunque il diametro DB sega il lato EF. Nell'istesso modo si dimostrarà , che non sega il lato F G ; e perciò passa per il punto F , ed i parallelogrammi EBGF , ABCD sono intorno al medesimo diametro DB , ch'era da dimostrarsi.



a 31. del 1.

b 24. del 6.

c 21. del 6.

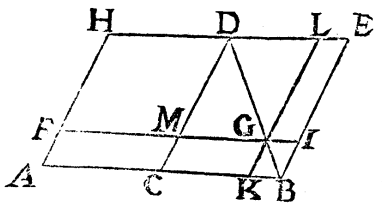
d 1. defin. del 6.

e 9. del 5.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXVII.

Di tutti i parallelogrammi applicati alla medesima retta linea, che mancano à compire quella retta linea d'vn parallelogrammo simile, e similmente posto à quello, ch'è descritto sopra la metà; il massimo è il parallelogrammo descritto sopra la metà.

Sia la retta linea A B, diuisa in due parti vguali in C, e sopra la retta AC sia descritto qualunque parallelogrammo AD; dal punto B si tiri la
a 31. del 1. retta B E [a] parallela ad A H, ouero C D, la quale concorrerà con H D continuata in qualche punto E. Perche la retta D C è parallela ad AH,
b 29. del 1. l'angolo EDC esterno [b] è vguale all'angolo DHA interno, ed opposto; e per l'istessa ragione l'angolo BCD sarà vguale all'angolo A. Simil-



c 29. del 1. mente essendo DC parallela ad EB, l'angolo HDC esterno [c] sarà vguale all'angolo E interno, ed opposto; e l'angolo ACD sarà vguale all'angolo CBE; dal che i parallelogrammi AD, CE sono equiangoli. E perche CB è vguale ad AC,
d Corol. alla 7. del 5. però DE sarà vguale ad HD; come ancora EB, DC, HA sono frà di loro vguali. Per la qual cosa CD à DE [d] sarà come A H ad H D, e così per
e 1. defin. del 6. tutti gli altri lati intorno à gli angoli vguali. Si che i parallelogrammi AD, CE [e] sono simili frà di loro, ed il parallelogrammo AD, descritto sopra la retta AC, ch'è metà della retta AB, sarà applicato alla retta AB, e gli manca per compire la retta AB, tutto il parallelogrammo DCBE simile, e similmente posto ad esso parallelogrammo AD. Dico che il parallelogrammo AD è il massimo di tutti gli altri parallelogrammi applicabili alla medesima retta AB, che ogn'vno manchi per compire la retta AB d'vn parallelogrammo simile ad AD.

Si tiri il diametro DB, nel quale sia preso qualunque punto G; e per il
f 31. del 1. punto G [f] si faccia passare la retta IF parallela ad AB, e per il medesimo punto G si faccia passare la retta LK parallela ad EB; e sarà diuiso il parallelogrammo CE in quattro parallelogrammi, de' quali i due KI, ML sono intorno al diametro DB; e perciò
g 24. del 6. [g] sono simili frà di loro, ed ogn'vno è simile al parallelogrammo C E; cioè simile al parallelogrammo A D, descritto sopra la retta AC, ch'è metà della retta AB: sarà dũque applicato alla retta AB il parallelogrammo AG, il quale manca, per compire la retta AB, per quanto è il parallelogrammo K I simile al parallelogrammo AD, descritto sopra di AC, metà di AB. Dico che il parallelogrammo AG è minore del parallelogrammo AD. Perche i complementi CG,
h 43. del 1. GE, [h] sono frà di loro vguali, se gli aggiunga il commune KI, ne viene il parallelogrammo C I vguale al parallelogrammo K E: ma il parallelo-

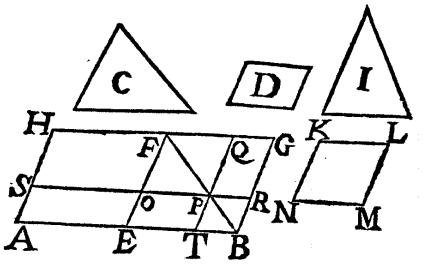
grammo

grammo CI K è vguale al parallelogrammo CF (stante che hanno vguali basi, e sono frà le medesime parallele) sarà il parallelogrammo CF vgua- K 31. del 6.
le al parallelogrammo KE; vgualmente se gli aggiunga il parallelogrammo CG, ne viene tutto il parallelogrammo AG vguale allo gnomone CBELGM; ma questo gnomone è minore del parallelogrammo CE, cioè minore del parallelogrammo AD; sarà il parallelogrammo AG minore del parallelogrammo AD. E perche il punto G è preso ad arbitrio, ouunque il punto G sarà preso in DB, sempre si dimostrerà il medesimo. Per la qual cosa di tutti i parallelogrammi applicabili ad AB, che ogn'vno manchi à compire la linea AB per vn parallelogrammo simile ad AD, il parallelogrammo AD sarà il massimo, ch'era da dimostrarsi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXVIII.

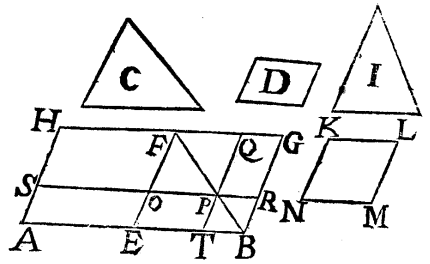
Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che manchi à compire la linea d'vn parallelogrammo simile ad vn dato parallelogrammo; è necessario però, che il dato rettilineo non sia maggiore del parallelogrammo descritto sopra la metà, simile al dato parallelogrammo.

Sia data la retta linea AB, il rettilineo C, ed il parallelogrammo D; e s'habbia d'applicare alla data retta A B vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo C, che manchi à compire la retta A B per vn parallelogrammo simile al dato parallelogrammo D. Diuisa AB [a] in due parti a 10. del 1.
vguali in E, sopra la metà A E [b] si descriua il parallelogrammo A F, si- b 18. del 6.
mile, e similmente posto al parallelogrammo D; e si compisca tutto il parallelogrammo AG. Si dimostri, come si fece nel principio dell'antecedente propositione, che il parallelogrammo EG è simile, e similmente posto al parallelogrammo AF, ouero D. Se il parallelogrammo AF sarà vguale al rettilineo C, haueremo applicato alla retta AB il parallelogrammo A F, che manca per compire la retta AB quanto è il parallelogrammo EG, simile, e similmente posto al parallelogrammo D, ch'era da farsi. Ma se il parallelogrammo AF non è vguale al rettilineo C, perche nell'antecedente propos. s'è dimostrato, che il parallelogrammo A F è il massimo di tutti gli applicabili ad A B, che habbiano la mancanza simile ad A F; perciò qualunque parallelogrammo applicato ad AB, secondo le dette conditioni, sarà minore di



AF, do-

AF; douendosi dunque applicare ad A B vn parallelogrammo vguale al rettilineo C, con le dette conditioni, non essendo C vguale ad AF è necessario, che sia minore, altrimente l'applicatione da farsi è impossibile. Supposto dunque, che il rettilineo C sia minore di AF per la quantità del rettilineo I; si descriua il parallelogrammo NL simile, e similmente posto al parallelogrammo D [c] ed vguale al rettilineo I; farà il parallelogrammo NL [d] simile, e similmente posto al parallelogrammo EG; dal che l'angolo EFG farà vguale all'angolo NKL. In oltre perche sottraendo dal parallelogrammo AF il rettilineo C, auanza il rettilineo I, cioè NL, perciò i due C, & NL, insieme giunti, sono vguali al parallelogrammo AF, ouero E G; per la qual cosa il parallelogrammo EG farà maggiore del parallelogrammo N L; e per lo Scolio alla 20. propositione, il lato FG è maggiore di K L, ed il lato FE farà maggiore di KN. Si tagli da FG [e] la parte F Q vguale ad LK; e da FE si tagli la parte F O vguale ad NK; dal punto Q si tiri la retta QT [f] parallela alla retta GB, e per il punto O si faccia passare la retta SR parallela ad AB. Perche i lati OF, FQ sono vguali à i lati NK, KL, e l'angolo OFQ è vguale all'angolo K; farà il parallelogrammo OQ [g] vguale, simile, e similmente posto al parallelogrammo NL; ma il parallelogrammo NL è simile, e similmente posto al parallelogrammo EG; saranno i parallelogrammi EG, OQ frà di loro simili, [h] e similmente posti; hanno l'angolo EFG commune; perciò tirato il diametro FB, [K] quello passa per il punto P; ed il parallelogrammo TR farà intorno al diametro F B; dal che [l] farà simile al parallelogrammo EG; cioè simile al parallelogrammo AF, ouero D. Si è dunque alla retta AB applicato il parallelogrammo AP, che manca à compire la retta AB, per quanto è il parallelogrammo T R simile al parallelogrammo dato D. Dico che il parallelogrammo AP è vguale al rettilineo C.



Perche i complementi EP, PG [m] sono frà di loro vguali, se gli aggiunga vgualmente il piano TR, ne viene il piano ER vguale al piano TG; ma il parallelogramo ER è vguale al parallelogrāmo E S [n] (stante che sono sopra vguali basi, e frà le medesime parallele) farà il piano ES vguale al piano TG; vgualmente s'aggiunga il piano E P, ne viene il parallelogrammo AP vguale allo gnomone EBGQPO. Finalmente perche i due rettilinei NL, & C, giunti insieme, sono vguali al parallelogrammo AF, cioè vguali al parallelogrammo EG; ed il parallelogrammo NL è dimostrato vguale al parallelogrammo OFQP; farà il rettilineo C vguale allo gnomone EBGQPO: ma lo gnomone è dimostrato vguale al parallelogrammo AP; farà il paralellogrammo AP vguale al dato rettilineo C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

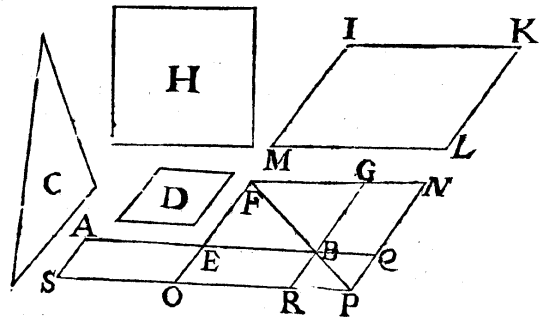
c 25. del 6.
d 21. del 6.
e 3. del 1.
f 31. del 1.
g Scol. alla 4. del 6.
h 21. del 6.
K 26. del 6.
l 24. del 6.
m 43. del 1.
n 36. del 1.

PRO-

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXIX.

Applicare ad vna data retta linea vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che superi la retta data d'vn parallelogrammo simile ad vn altro dato parallelogrammo.

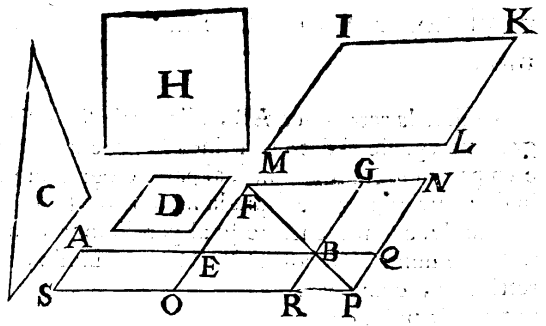
Sia data la retta linea AB, alla quale si voglia applicare vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo C, che superi la retta AB, per quanto è vn parallelogrammo simile al parallelogrammo dato D. Si diuida AB [a] in due parti vguali, e sopra la metà E B [b] si descriua il parallelogrammo GE simile, e similmente posto al parallelogrammo D. S'aggiunga il parallelogrammo EG, col rettilineo C [c] in modo, che costituiscano vn solo rettilineo, come il notato H; poi si costruisca il parallelogrammo M K vguale al rettilineo H; [d] e che sia simile, e similmente posto al parallelogrammo D; farà il parallelogrammo MK [e] simile, e similmente posto al parallelogrāmo EG; e perciò l'angolo E F G farà vguale all'angolo I. Hor perche il parallelogrammo MK è vguale al rettilineo H, ed il rettilineo H è vguale à i due rettilinei EG, & C giunti insieme; farà il parallelogrammo MK maggiore del simile parallelogramo EG: per la qual cosa il lato IK [f] farà maggiore di FG, ed il lato IM farà maggiore di FE. Si continui FG verso N, e si faccia FN [g] vguale ad IK; e si continui il lato FE verso O, e si faccia FO vguale ad IM; dal punto N si tiri la retta NP [h] parallela ad FO; e per il punto O si faccia passare la retta SP parallela ad AB, la quale concorrerà con NP in qualche punto P; dal punto A si tiri la retta AS [K] parallela ad FO, la quale concorrerà con PS in qualche punto S; si prolunghi AB fino che concorra con NP in qualche punto Q, e si prolunghi GB fino ad R. Perche l'angolo OFN è vguale all'angolo MIK, ed i lati OF, FN sono vguali à i due MI, IK; farà il parallelogrammo ON [l] simile, e similmente posto, ed vguale al parallelogrammo M K; dal che i due parallelogrammi O N, EG [m] sono frà di loro simili, e similmente posti; hanno l'angolo F commune, e perciò tirato il diametro FP, [n] quello passa per il punto B; dal che il parallelogrammo RQ farà intorno al diametro FP: per la qual cosa farà [o] simile à tutto il parallelogrammo FOPN, cioè farà [p] simile al pa-



a 10. del 1.
b 18. del 6.
c 45. del 1.
d 25. del 6.
e 21. del 6.
f Scol. alla 20. del 6.
g 3. del 1.
h 31. del 1.
K 31. del 1.
l 4. del 6.
m 21. del 6.
n 26. del 6.
o 24. del 6.
p 21. del 6.

 ralle-

rallelogrammo dato D, sarà dunque applicato alla retta AB il parallelogrammo SQ, il quale supera la retta AB, per quanto è il parallelogrammo R Q, simile al parallelogrammo D. Dico che il parallelogrammo SQ è vguale al dato rettilineo C.



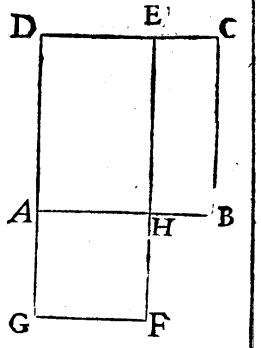
I parallelogrammi AO, OB hanno vguali basi, e sono frà le medesime parallele, e perciò q sono frà di loro vguali; ma OB r è vguale al complemento BN, sarà il piano AO vguale al piano B N; vgualmente se gli aggiunga il piano OQ, ne viene il parallelogrammo SQ vguale allo gnomone OPNGBE. In oltre perche il parallelogrammo ON è vguale al parallelogrammo MK; ed il parallelogrammo MK è vguale à i due rettilinei EG, & C insieme; sarà il parallelogrammo ON vguale à i due piani EG, & C, giunti insieme; se ne leui il commune EG, resta il rettilineo C vguale allo gnomone OPNGBE: ma questo gnomone fù dimostrato vguale al parallelogrammo S Q; sarà il parallelogrammo S Q vguale al dato rettilineo C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

q 36. del 1.

r 43. del 1.

PROBLEMA X. PROPOSITIONE XXX.

Diuidere vna data retta linea terminata secondo l'estrema, e media proportione.



Sia data la retta terminata AB, la quale si voglia diuidere secondo l'estrema, e media proportione; cioè che tutta alla maggior parte, habbia l'istessa proportione, quale hà la maggior parte al rimanente. Sopra la retta A B si descriua il quadrato AC, e si applichi al lato A D il parallelogrammo EG, a vguale al quadrato AC, e che superi la retta AD per vn parallelogrammo simile al medesimo quadrato AC; cioè che superi la retta AD per vna figura quadrata, il lato EF segarà la retta AB in qualche punto H. Dico che AB ad AH è come AH ad HB.

a 29. del 6.

Perche il parallelogrammo DF, per costruttione, è vguale al quadrato AC; leuatone il commune rettangolo AE, resta il quadrato AF vguale al rettangolo EB. In oltre,

oltre, essendo i rettangoli AF, EB frà di loro vguali, e gli angoli ad H retti; i lati intorno à gli angoli vguali b sono reciprochi; e perciò EH ad HF sarà come AH ad HB: ma EH è vguale à CB, cioè vguale ad AB; sarà A B ad F H come A H ad H B; E perche il lato F H è vguale al lato A H (stante che AF è quadrato) sarà AB ad AH, come A H ad H B. Per la qual cosa la retta A B è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

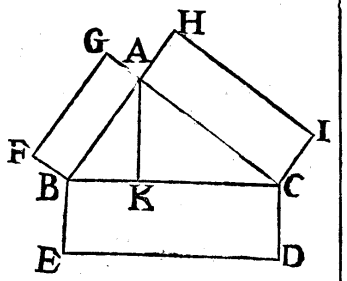
b 14. del 6.

SCOLIO.

Volendo diuidere qualunque retta AB secondo l'estrema, e media proportione con modo facile, si operi come si disse nell' 11. *proposi ione del secondo Libro.*

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXXI.

Ne i triangoli rettangoli, la figura descritta sopra del lato opposto all'angolo retto, è vguale alle figure simili, e similmente descritte sopra i lati, che contengono l'angolo retto.



Sia il triangolo A B C, angolo retto in A, e sopra i lati BC, CA, AB siano descritte figure rettilinee simili, e similmente poste, che siano le notate BD, CH, BG. Dico che la figura BD descritta sopra del lato B C, opposto all'angolo retto, è vguale alle figure CH, BG, descritte sopra i lati AB, AC, che contengono l'angolo retto A. Dall'angolo retto A si faccia cadere la retta AK c perpendicolare al lato B C, e per il Corollario 2. all'8. propositione di questo, la retta AC è media proportionale frà le due BC, CK; e la retta AB è media proportionale frà le due CB, BK; dalche BC ad AC sarà come AC à CK; e per il Lemma 8. dopo la 18. propositione di questo, la prima BC alla terza CK, hà duplicata proportione di quella, che hà BC à CA: Ma il rettilineo EC al simile rettilineo CH e hà la medesima duplicata proportione, che hà BC ad AC; hauerà BC à CK l'istessa proportione, quale hà il rettilineo EC al rettilineo CH; ed inuertendo CK à CB d sarà come il rettilineo CH, al rettilineo CE. Similmente essendo AB media proportionale frà le due CB, BK, hauerà C B à BK duplicata proportione di quella, che hà C B ad A B: ma il rettilineo EC al simile rettilineo BG f hà la medesima duplicata proportione di quella, che hà CB à BA, hauerà CB à BK l'istessa proportione, che hà il rettilineo DB al rettilineo BG; ed inuertendo, BK à B C, sarà come il rettilineo B G al rettilineo B D. Si considerino sei

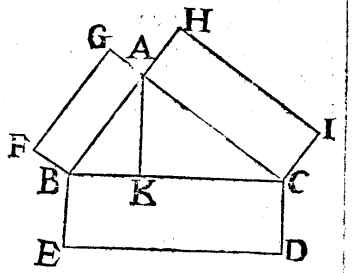
a 12. del 1.

e 20. del 6.

b Corol. alla 4. del 5.

f 20. del 6.

quantità, la prima CK, la seconda C B, la terza CH, la quarta C E, la quinta BK, e la sesta BG. Perche si è dimostrato, che la prima C K alla seconda C B hà l'istessa proportione, quale hà la terza CH alla quarta CE; e s'è dimostrato ancora, che la quinta B K alla seconda C B, hà l'istessa proportione, quale hà la sesta B G alla quarta CE; la prima C K con la quinta BK alla seconda BC [c] hauerà l'istessa proportione, quale hà la terza C H con la sesta B G alla quarta C E; ma la prima C K con la quinta BK è vguale alla seconda BC, la terza dunque CH con la sesta BG [d] sarà vguale alla quarta CE. Per la qual cosa il rettilineo EC è vguale à i due rettilinei simili C H, B G, giunti insieme, ch'era da dimostrarsi.



c 24.del 5.

d 14. del 5.

SCOLIO.

Il Campano fà la conuersa à questa propositione, la quale non è diuersa dalla 48. propositione del primo Libro in cosa alcuna, e perciò con ogni breuità l'esponiamo in questo luogo.

Se la figura descritta sopra del lato d'vn triangolo è vguale, simile, e similmente posta alle figure descritte sopra gli altri due lati; l'angolo contenuto da quei due lati sarà retto.

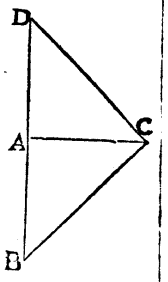
Nel triangolo ABC, supposto che la figura descritta sopra del lato BC sia vguale, simile, e similmente posta alle figure descritte sopra degli altri due lati BA, AC. Dico che l'angolo BAC è retto. Nel punto A sopra la retta AC, [a] *si erigga la perpendicolare AD; si faccia AD* [b] *vguale ad AB, e si tiri la retta DC. Le figure simili, e similmente descritte sopra i lati DA, AC;* [c] *sono vguali alla simile figura, e similmente descritta sopra del lato C D. In oltre perche D A è vguale ad AB, la figura descritta sopra DA* [d] *sarà vguale alla figura simile, e similmente descritta sopra AB; e perciò le due simili figure descritte sopra i lati CA, AD sono vguali alle due simili figure descritte sopra i lati CA, AB; cioè la figura descritta sopra del lato CD è vguale alle due figure simili, e similmente descritte sopra i lati CA, AB: ma queste, per ipotesi, sono vguali alla simile figura, e similmente descritta sopra del lato BC; sarà la figura descritta sopra del lato DC vguale alla simile figura, e similmente descritta sopra del lato BC; e per lo Scolio alla propos. 2. di questo, sarà D C vguale al lato B C. Finalmente perche i lati DA, AC sono vguali à i due lati BA, AC, e la base DC è vgua-*

a 11. del 1.

b 3. del 1.

c 31.del 6.

d Scol.alla 20. del 6.



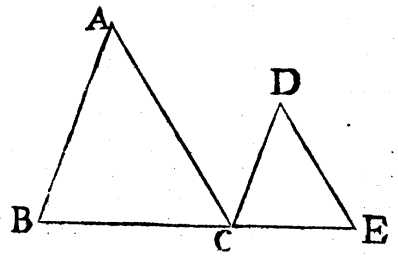
vguale alla base BC; sarà l'angolo DAC [e] *vguale all'angolo BAC: ma l'angolo DAC, per costruttione è retto; l'angolo dunque BAC sarà retto, ch'era da dimostrarsi.*

e 8.del 1.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXII.

Se due triangoli, che hanno due lati proportionali à due lati, siano composti secondo vn angolo talmente, che i lati homologhi siano frà di loro paralleli, e l'angolo, secondo il quale sono composti, sia alterno à gli angoli contenuti da i lati proportionali; i restanti due lati saranno in vna medesima dirittura, e costituiranno vna sola retta linea.

Siano i due triangoli A B C, D C E, composti secondo l'angolo ACD, il quale sia alterno à gli angoli A, & D; e la proportione di BA ad AC sia come quella di C D à D E; e siano i lati homologhi AB, DC frà di loro paralleli; come ancora i lati homologhi AC, DE siano frà di loro paralleli. Dico che i lati BC, CE costituiscono vna sola retta linea BE. Perche i lati AB, DC sono paralleli, e sono segati dalla retta AC, l'angolo BAC [a] sarà vguale all'angolo alterno ACD; similmente essendo i lati AC, DE frà di loro paralleli, sarà l'angolo EDC vguale all'angolo alterno ACD; per la qual cosa l'angolo A sarà vguale all'angolo D. In oltre perche gli angoli A, & D sono vguali, e la proportione di BA ad AC, per ipotesi, è come quella di CD à DE; i triangoli ABC, DCE [b] sono equiangoli; e sarà l'angolo ACB vguale all'angolo E, e l'angolo DCE vguale all'angolo B. Hor all'angolo DCE s'aggiunga l'angolo DCA; ed all'angolo B s'aggiunga l'angolo A; sarà tutto l'angolo E C A vguale à i due angoli A, & B, giunti insieme. Se tanto all'angolo ECA, quanto alla somma de i due angoli A, & B, s'aggiunga l'angolo ACB, i due angoli ECA, ACB, saranno vguali alli trè angoli del triangolo A B C: ma i tre angoli del triangolo ABC [c] sono vguali à due angoli retti, i due angoli dunque ECA, ACB sono vguali à due angoli retti, e le rette BC, CE [d] costituiscono la sola retta linea BE, ch'era da dimostrarsi.



a 29.del 1.

b 6.del 6.

c 32.del 1.

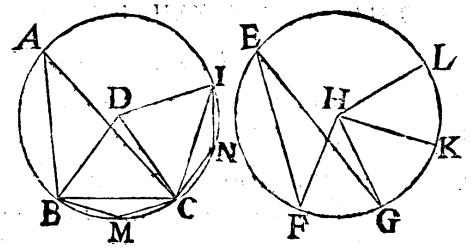
d 14.del 1.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Ne i circoli vguali gli angoli à i centri, ouero alle cir-

confe-

conferenze, come ancora i ſettori, hanno la medeſima proportione, che gli archi, à i quali inſiſtono.



Siano i due circoli vguali ABC, EFC, i di cui centri D, ed H; e ſiano due qualunque angoli a i centri, come BDC, FHG, e due altri alla circonferenza, come BAC, FEG, i quali ſiano oppoſti à gli archi BMC, FG. Dico, che l'angolo B D C all'angolo FHG; ouero l'angolo BAC all'angolo FEG; come ancora il ſettore DBMC al ſettore FHG, è come l'arco BMC all'arco FG.

a 33. del 1. Sopra la retta HG, nel punto H, ſi faccia l'angolo G H K [a] vguale all'angolo GHF; e ſopra la retta H K ſi coſtituiſca l'angolo KHL, vguale all'angolo FHG, ouero GHK; e col medeſimo ordine ſe ne coſtituiſcano quanti altri ſe ne vogliano. Similmente nel circolo ABC, ſopra la retta b 23. del 1. CD, nel punto D, [b] ſi coſtituiſca l'angolo CDI, vguale all'angolo BDC; e ſe ne coſtituiſcano col medeſimo ordine, quanti altri ſi vogliano, ogn'vno vguale all'angolo BDC; ſaranno gli archi FG, GK, KL, frà di loro vguali; e tante volte l'angolo FHL ſarà miſurato dall'angolo FHG, per quante volte l'arco FL è miſurato dall'arco FG: per la qual coſa l'angolo FHL è multiplice dell'angolo FHG, come l'arco FL è multiplice dell'arco FG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo BDI è multiplice dell'angolo BDC, come l'arco BI è multiplice dell'arco BC. Se dunque l'angolo BDI è vguale all'angolo F H L, ſarà l'arco B I c 26. del 3. [c] vguale all'arco FL; ſe l'angolo BDI è maggiore dell'angolo FHL, per il Corollario alla 26. propoſitione del terzo Libro, l'arco B I ſarà maggiore dell'arco FL; e ſe l'angolo BDI è minore dell'angolo F H L, l'arco B I ſarà minore dell'arco FL. Si conſiderino quattro quantità; cioè l'angolo BDC prima, l'angolo FHG ſeconda, la terza ſia l'arco B C, e la quarta l'arco FG. Gli vguali multiplici della prima, e terza, ſono l'angolo BDI, e l'arco BI; e gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta ſono l'angolo FHL, e l'arco FL: perche l'angolo BDI, ch'è multiplice della prima, ſe è maggiore dell'angolo FHL, ch'è multiplice della ſeconda, ancora l'arco BI, ch'è multiplice della terza, è maggiore dell'arco FL, ch'è multiplice della quarta; e ſe l'angolo BDI è minore, ò vguale all'angolo FHL, ancora l'arco BI è minore, ò vguale all'arco FL; e per la ſeſta definitione del quinto Libro, la prima alla ſeconda hauerà l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta; cioè l'angolo BDC all'angolo FHG ſarà, come l'arco BC all'arco FG. In oltre perche l'angolo B D C al centro è il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza; e l'angolo FHG al centro è il doppio dell'angolo FEG alla circonferenza; ſaranno gli angoli BDC, FHG, vguali multiplici degli angoli BAC, FEG; e perciò l'angolo B D C all'

angolo FHG [d] è come l'angolo BAC all'angolo FEG: ma ſi è dimoſtrato, che l'angolo BDC all'angolo FHG è come l'arco BC all'arco FG; ſarà l'angolo BAC all'angolo FEG [e] come l'arco BC all'arco F G. Per la qual coſa ne i circoli vguali gli angoli à i centri, ouero alle circonferenze ſono come gli archi, à i quali inſiſtono. d 15. del 5. e 11. del 5.

Finalmente dico, che il ſettore B D C al ſettore F H G, è come l'arco BC all'arco FG. Si tirino le rette BC, CI. Perche gli archi BC, CI ſono frà di loro vguali, le rette ancora BC, CI [f] ſono frà di loro vguali. Proueremo prima, che eſſendo gli archi B C, C I frà di loro vguali, che i ſettori ancora DBC, CDI ſono frà di loro vguali. Ne gli archi BC, CI ſi prendano due qualunque punti M, & N, e ſi tirino le rette BM, MC, CN, NI. Perche gli archi BMC, CNI ſono frà di loro vguali, i rimanenti di tutta la circonferenza, cioè gli archi BAIC, CBAI ſono frà di loro vguali: ma gli archi vguali [g] ſi oppongono ad angoli vguali; gli angoli dunque BMC, CNI ſono frà di loro vguali; dalche le portioni BMC CNE [h] ſono frà di loro ſimili: ma ſono poſte ſopra le rette vguali B C, CI; perciò K ſono frà di loro vguali. In oltre ſi conſiderino i triangoli DBC, DCI. Perche i due lati BD, DC ſono vguali à i due lati C D, DI, e l'angolo BDC è vguale all'angolo CDI; ſarà il triangolo D B C I vguale al triangolo DCI; à i quali s'aggiungano le vguali portioni BMC, CNI, ne viene il ſettore DBMC vguale al ſettore DCNI. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà che i ſettori HFG, HGK, HKL ſono frà di loro vguali: e ſe l'arco BCI è vguale all'arco FKL, nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il ſettore BDIC è vguale al ſettore FHLG. D'onde facilmente ſi può dimoſtrare, che ſe l'arco B C I è maggiore, ò minore dell'arco FGL; ancora il ſettore BDIC ſarà maggiore, ò minore del ſettore FHLG. Hor perche tanti ſono gli archi vguali FG, GK, KL, per quanti ſono gli vguali ſettori HFG, HGK, HKL; ſarà il ſettore F H L G multiplice del ſettore HFG, come l'arco F L è multiplice dell'arco F G. E per l'iſteſſa ragione ſarà il ſettore BDIC multiplice del ſettore B D C, come l'arco BCI è multiplice dell'arco BC. Si conſiderino quattro quantità, la prima ſia il ſettore DBC, la ſeconda il ſettore HFG, la terza l'arco B C, e la quarta l'arco FG. Gli vguali multiplici della prima, e terza, ſono il ſettore BDIC, e l'arco BI; gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta ſono il ſettore FHL, e l'arco FL; e perche ſe il ſettore BDI è vguale al ſettore FHL ancora l'arco BI è vguale all'arco FL; e ſe il ſettore BDI è maggiore, ò minore del ſettore FHL, ancora l'arco BI è maggiore, ò minore dell'arco F L, per la ſeſta definitione del quinto Libro, ſarà la prima, cioè il ſettore DBC alla ſeconda, ch'è il ſettore HFG, come la terza, cioè l'arco BC, alla quarta, ch'è l'arco FG, come fù propoſto dimoſtrare. f 29. del 3. g 27. del 3. h 10. defin. del 3. K 24. del 3. l 4. del 1.

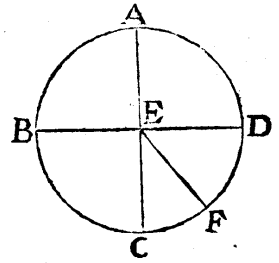
COROLLARIO I.

Eſſendo l'arco BC all'arco FG, come l'angolo BDC all'angolo FHG; cioè come l'angolo BAC all'angolo FEG; ſarà manifeſto, che il ſettore DBC al ſettore HFG è come

l'angolo BDC all'angolo FHG; ed è ancora come l'angolo BAC all'angolo FEG.

COROLLARIO II.

Dall'antecedente propoſ. è parimente manifeſto, che l'angolo al centro à quattro angoli retti è come l'arco oppoſto all'angolo nel centro à tutta la circonferenza del circolo; ed al contrario, i quattro angoli retti hanno l'iſteſſa proportione all'angolo nel centro, quale hà tutta la circonferenza all'arco, al quale inſiſte l'angolo nel centro.



Nel circolo ABCD, il di cui centro E, & i diametri AC, BD ſi ſeghino ad angoli retti in E; ſaranno gli archi AB, BC, CD, DA, [a] *frà di loro vguali. Si prenda nell'arco CD qualunque punto F, e ſi tiri la retta FE. Per l'antecedente propoſitione l'angolo CED all'angolo FED ſarà come l'arco CD all'arco FD; e perche i quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED ſono multiplici dell'angolo retto CED; come i quattro archi DA, AB, BC, CD ſono multiplici dell'arco CD; per il Corollario alla 24. propoſitione del 5. libro, li quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED, all'angolo retto CED, hanno l'iſteſſa proportione, che i quattro archi DA, AB, BC, CD, cioè che tutta la circonferenza ABCD all'arco CD: ma l'angolo CED all'angolo FED è come l'arco CD all'arco FD, per l'egualità, i quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED all'angolo FED,* [b] *ſono come tutta la circonferenza ABCD all'arco FD; ed inuertendo, l'angolo al centro FED* [c] *à i quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED, ſono come l'arco FD à tutta la circonferenza, come ſi diſſe.*

a 23. del 3.

b 22. del 5.

c Corol. alla 4. del 5.

SCOLIO.

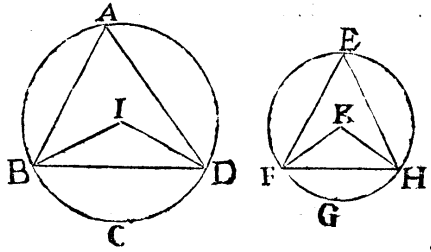
Non ſarà inutile ſpicgare quì col Clauio il ſeguente Theorema.

I.

Se da due qualunque circoli ſi taglino portioni ſimili; la proportione dell'arco à tutta la circonferenza del ſuo circolo, è come quella dell'altro arco à tutta la circonferenza del ſuo circolo.

Ne i circoli ABCD, EFGH, i di cui centri I, & K, ſiano tagliate le portioni ſimili BAD, FEH. Dico che l'arco BAD à tutta la circonferenza

za ABCD, è come l'arco FEH à tutta la circonferenza EFGH. Da i centri I, & K ſi tirino le rette IB, ID, KF, KH. Perche le portioni BAD, FEH ſono ſimili, perciò gli angoli BAD, FEH, [a] *alle circonferenze ſono frà di loro vguali; & i loro dupli, cioè gli angoli BID, FKH, à i centri, ſono frà di loro vguali; e tal proportione hauerà l'angolo I à quattro angoli retti,* [b] *quale hà l'angolo K à quattro angoli retti: ma, per l'antecedente Corollario, l'angolo I à quattro angoli retti è come l'arco BCD à tutta la circonferenza ABCD; e l'angolo K à quattro retti è come l'arco FGH à tutta la circonferenza EFGH; ſarà l'arco BCD à tutta la circonferenza ABCD,* [c] *come l'arco FGH à tutta la circonferenza EFGH; ed inuertendo, tutta la circonferenza ABCD all'arco BCD, ſarà come tutta la circonferenza EFGH* [d] *all'arco FGH; e per la conuerſione della proportione, tutta la circonferenza ABCD all'arco BAD* [e] *è come tutta la circonferenza EFGH all'arco FEH; ed inuertendo, l'arco BAD à tutta la circonferenza ABCD* [f] *è come l'arco FEH à tutta la circonferenza EFGH, ch'era da dimoſtrarſi.*



a 10. defin. del 5.

b Coroll. alla 7. del 5.

c 11. del 5.

d Coroll. alla 4. del 5.

e Coroll. alla 19. del 5.

f Coroll. alla 4. del 5.

COROLLARIO.

Sarà manifeſto dal quel, che s'è detto, che gli archi delle ſimili portioni ſono come le circonferenze de'loro circoli, e ſono ancora come i reſtanti archi.

Perche eſſendoſi dimoſtrato, che l'arco BAD à tutta la circonferenza ABCD è come l'arco FEH à tutta la circonferenza EFGH; ſarà, permutando, l'arco BAD all'arco FEH [g] *come la circonferenza ABCD alla circonferenza EFGH: ma tutta la circonferenza ABCD à tutta la circonferenza EFGH, per quel che s'è dimoſtrato, è come l'arco BCD all'arco FGH; ſarà l'arco BAD all'arco FEH* [h] *come l'arco BCD all'arco FGH, come ſi diſſe.*

g 16. del 5.

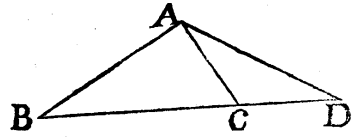
h 11. del 5.

Per facilitare le coſe che ſeguono pongo quì li ſeguenti due Theoremi.

II.

Se ſarà qualunque triangolo ABC, e ſarà fatto l'angolo DAC vguale all'angolo B; ſarà il triangolo ABD ſimile al triangolo ACD, oltre à ciò la retta AD ſarà media propor-

tionale frà le rette BD, DC, e la proportione di BA ad AC sarà come quella di BD à DA, ouero come quella di AD ad AC; e se AD è media proportionale frà le rette BD, DC, l'angolo DAC sarà vguale all'angolo B.



Supposto prima, che l'angolo DAC sia vguale all'angolo B. Dico che i triangoli ABD, ACD sono frà di loro simili; che la retta AD è media proportionale frà le rette BD, DC; e che BA ad AC è come BD à DA. Perche l'angolo CAD è vguale all'angolo B, vgualmente s'aggiunga l'angolo BAC, i due angoli CAB, CBA a *saranno vguali à tutto l'angolo BAD. Nel triangolo ABC, il lato BC è continuato in D, dal che l'angolo esterno DCA* b *è vguale à i due angoli CBA, CAB interni, ed opposti: ma i due angoli CBA, CAB, insieme giunti, per quel che s'è dimostrato, sono vguali all'angolo BAD; sarà l'angolo DCA* c *vguale all'angolo BAD; l'angolo D è commune ad ambidue i triangoli ABD, ACD; saranno i due triangoli ABD, ACD equiangoli; per la qual cosa* d *haueranno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e perciò sono frà di loro simili, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

Perche dunque i triangoli ABD, ACD sono simili, ed hanno l'angolo D commune, sarà BD à DA e *come AD à DC, e la retta AD sarà media proportionale frà le due BD, DC, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.*

In oltre, essendo i triangoli ABD, ACD frà di loro simili, e l'angolo CAD è vguale all'angolo B; sarà AB à BD f *come AC ad AD; e permutando, AB ad AC* g *sarà come BD à DA, ouero come AD à DC, ch'era da dimostrarsi.*

Di nuouo, supposto che AD sia media proportionale frà le due BD, DC. Dico che l'angolo CAD è vguale all'angolo B. Perche AD è media proportionale frà le due BD, DC, sarà BD à DA come AD à DC; si che i triangoli ABD, ACD hanno i lati proportionali intorno all'angolo commune D, e perciò h *sono equiangoli, e gli angoli vguali saranno DCA, BAD, che sono opposti à i lati homologhi AD, DB; e similmente gli angoli CAD, DBA, che sono opposti à i lati homologhi CD, DA sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.*

a 2.assioma.
b 32.del 1.
c 1.assioma.
d 4.del 6.
e 4.del 6.
f 4.del 6.
g 16.del 5.
h 6.del 6.

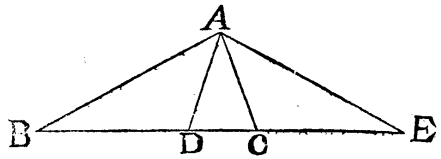
COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che douendosi inclinare vna retta, come AD, che sottenda l'angolo esterno ACD, e che AD sia media proportionale frà le rette BD, DC, basta à fare l'angolo CAD vguale all'angolo B.

III.

In qualunque triangolo ABC, del quale l'angolo BAC

sia diuiso in due parti vguali con la retta AD, ed in punto A sia fatto l'angolo DAE vguale all'angolo ADE; e prolongata la retta AE concorra con BC in qualche punto E. Dico che la retta DE, ouero AE, sarà media proportionale frà le due BE, EC; ed il triangolo ACE sarà simile al triangolo BAE.



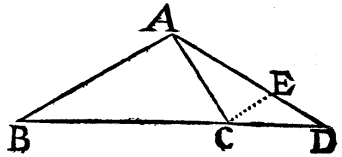
Nel triangolo ABD il lato BD è continuato verso E; sarà l'angolo ADE a *esterno vguale à i due angoli DAB, DBA interni, ed opposti: ma l'angolo ADE* b *è vguale all'angolo DAE; sarà l'angolo DAE vguale à i due angoli DAB, DBA; ma per ipotesi, l'angolo DAC è vguale all'angolo DAB; sarà il rimanente angolo CAE vguale all'angolo B; e per l'antecedente Theorema, sarà AE media proportionale frà le due BE, EC; ed il triangolo ACE sarà simile al triangolo BAE, ch'era da dimostrarsi.*

a 32.del 1.
b 5.del 1.

Di Pappo propos. 119. lib. 7.

IV.

Se sarà qualche triangolo ABC, del quale continuato il lato BC verso D in modo, che BD à DC sia come il quadrato di BA al quadrato di AC, tirata la retta AD. Dico che il rettangolo BDC è vguale al quadrato di AD.



Dal punto C si tiri la retta CE a *parallela ad AB; sarà il triangolo DEC* b *equiangolo al triangolo ABD; e sarà BD ad AB* c *come DC, à CE; e permutando, BD à DC* d *sarà come BA à CE; e prese le rette AB, EC come basi di due rettangoli, e l'altezza commune sia AB; sarà il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, CE* e *come la base AB alla base CE; cioè* f *come BD à DC: ma BD à DC, per ipotesi, è come il quadrato di AB al quadrato di AC; sarà il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, CE, come il medesimo quadrato di AB* g *al quadrato di AC; e perciò il quadrato di AC* h *sarà vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, CE; donde le tre rette BA, AC, CE* K *sono proportionali; e sarà AB ad AC come AC à CE. Si considerino i triangoli ABC, ACE; essendo i lati AB, CE, per costruttione, frà di loro paralleli, gli angoli alterni BAC, ECA* l *sono frà di loro vguali. Si disse che BA ad AC è come AC à CE; i lati dunque intorno à gli angoli vguali sono proportionali; e perciò i triangoli ABC, EAC* m

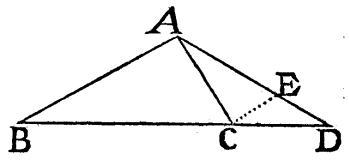
a 31.del 1.
b Corol.alla 4.del 6.
c 4.del 6.
d 16.del 5.
e 1.del 6.
f 11. del 5.
g 11.del 5.
h 9.del 5.
K 17.del 6.
l 29. del 1.
m 6. del 6.

ſono equiangoli; e ſarà l'angolo CAE vguale all'angolo B; e per l'antecedente theorema, la retta AD ſarà media proportionale frà le due BD, DC; ed il rettangolo contenuto dalle due BD, DC ſarà vguale al quadrato di AD, che era da dimoſtrarſi.

Il ſeguente theorema è la conuerſa all'antecedente, la quale dimoſtreremo con Pietro Herigonio nel ſeguente modo.

V.

Se il rettangolo contenuto dalle due BD, DC, è vguale al quadrato di AD; ſarà BD à DC, come il quadrato di AB al quadrato di AC.



Perche il rettangolo cõtenuto dalle due BD, DC è vguale al quadrato di AD; ſarà A D [a] *media proportionale frà le due BD, DC; e per il ſecondo degli antecedenti theoremi, l'angolo DAC ſarà vguale all'angolo B; il triangolo AC D ſarà ſimile à tutto il triangolo AB D; e la proportione di BA ad AC* [b] *ſarà come quella di* [c] *B D à D A; ouero di AD à D C. Hor eſſendo A D media proportionale frà le due BD, DC, hauerà BD à DC* [e] *duplicata proportione di quella, che hà B D à D A: ma BD à DA è come BA ad AC, hauerà B D à D C* [f] *duplicata proportione, che BA ad AC. E perche il quadrato di BA al quadrato di AC* [g] *hà la medeſima duplicata proportione, che BA ad AC; ſarà dunque BD à DC come il quadrato di BA al quadrato di AC, come fù propoſto dimoſtrare.*

a 17. del 6.
b 4. del 6.
c 11. del 5.
e 8. Lemm. dopo la 18 prop. del 6.
f 13. del 5.
g 20. del 6.

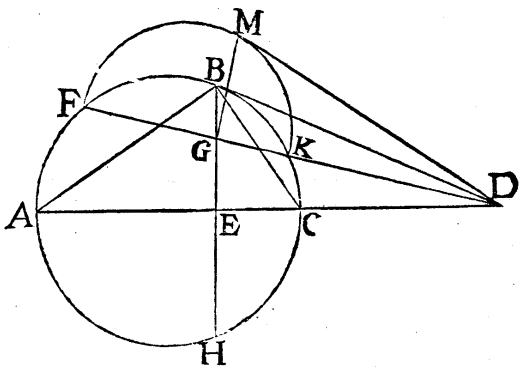
Dimoſtra Pietro Herigonio il ſeguente Theorema di Pappo propoſ. 154. del lib. 7. nel modo, che ſegue.

V I.

Se da qualche punto preſo fuori del circolo ſono tirate più rette linee, delle quali vna tocchi il circolo, e le altre lo ſeghino; e dal contatto cada vna retta perpendicolare à quel diametro, che continuato paſſi per il punto preſo; la proportione di tutta la ſegante alla parte eſterna, ſarà come le parti interpoſte frà la perpendicolare, e la circonferenza di eſſo circolo.

Sia il circolo ABC, e da qualche punto D, fuori del circolo, ſiano tirate le rette DB, DF, D A; cioè che DB tocchi il circolo in qualche punto B, e le rette

DF, DA lo ſeghino; e paſſi la retta D A per il centro del circolo; dal contatto B cada la retta BE, perpendicolare al diametro AC, la quale ſeghi la retta D F in qualche punto G. Dico che AD à DC è come AE ad E C; e che FD à D K è come F G à GK. Si prolunghi BE ſino ad H; ſarà [a] *B E vguale ad E H, ed il rettangolo cõtenuto dalle due BE, E H ſarà vguale al quadrato di BE. Si tirino le rette BA, BC. Perche la retta D B tocca il circolo A B C,*



a 3. del 3.

ſarà il rettangolo contenuto dalle due AD, DC [b] *vguale al quadrato di DB; e per l'antecedente Theorema, AD à DC è come il quadrato di AB al quadrato di BC. In oltre eſſendo l'angolo ABC* [c] *nel mezzo circolo retto, e dall'angolo retto B cade la retta B E perpendicolare ad A C, la retta B E diuide il triangolo ABC* [d] *ne' due triangoli ABE, B E C ſimili frà di loro, e ſimili à tutto il triangolo ABC; e per il primo Corollario all'ottaua propoſitione di queſto, ſarà BE media proportionale frà le due AE, EC; e perciò la proportione della prima AE alla terza EC* [e] *è duplicata di quella, che hà la prima AE alla ſeconda EB: mà il quadrato di A E al quadrato di EB* [f] *hà la medeſima duplicata proportione, che hà AE ad EB; hauerà il quadrato di AE al quadrato di E B l'iſteſſa proportione, che hà AE ad EC. Di più, eſſendo i triangoli ABC, AEB frà di loro ſimili, ſarà AB à BC,* [g] *come AE ad EB; ed il quadrato di AB al quadrato di BC* [h] *ſarà come il quadrato di AE al quadrato di EB; ſù dimoſtrato il quadrato di AB al quadrato di BC eſſere come AD à DC; ed il quadrato di AE al quadrato di EB, come AE ad EC; ſarà dunque* K *AD à DC come AE ad EC; ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

b 36. del 3.
c 31. del 3.
d 8. del 6.
e Lemma 8. dopo la 18. prop. del 6.
f 20. del 6.
g 4. del 6.
h 22. del 6.
K 11. del 5.

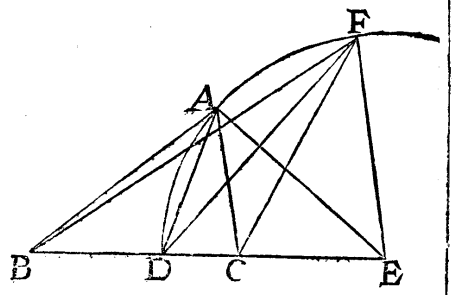
Di nuouo dico che FD à D K è come FG à G K. Sopra la retta F K ſi deſcriua il mezzo circolo FMK; nel punto G [l] *ſi erigga la retta GM, perpendicolare alla retta F K; e ſi tiri la retta D M. La retta H B è diuiſa in due parti vguali in E, ed in due ineguali in G, il rettangolo contenuto dalle due HG, GB, col quadrato di EG,* [m] *è vguale al quadrato di EB; vgualmente ſi aggiunga il quadrato di E D; ſarà il rettangolo delle due H G, G B, con li due quadrati GE, E D, cioè* [n] *col quadrato di GD, vguali à i quadrati de i due lati BE, ED, cioè* [o] *vguali al quadrato di BD: mà il quadrato di BD* [p] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, cioè al rettangolo* [q] *delle due FD, DK; ſarà il rettangolo contenuto dalle due HG, GB, col quadrato di GD, vguale al rettangolo contenuto dalle due FD, DK; e perche il rettangolo delle due HG, GB* [r] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due FG, GK; ed il rettangolo delle due FG, GK* [t] *è vguale al quadrato di GM (ſtante che GM è media proportionale frà le due FG, G K) ſaranno i quadrati de i due lati MG, GD, cioè* [u] *il quadrato di MD, vguale al rettangolo contenuto dal-*

l 11. del 1.
m 5. del 2.
n 47. del 1.
o 47. del 1.
p 36. del 3.
q Corol. alla 36. del 3.
r 35. del 3.
t 17. del 6.
u 47. del 1.

x 37. del 3. *le due FD, DK: per la qual cosa la retta DM x tocca il circolo nel punto M: mà per costruttione, dal contatto M cade la retta MG perpendicolare al diametro FK, per quel che si è dimostrato nella prima parte, la proportione di FD à DK è come quella di FG à GK, come fù proposto dimostrare.*

V I I I.

Se sarà qualunque triangolo ABC, del quale sia cõtinuato il lato BC verso E, e dal punto A sia inclinata la retta AE in modo, che AE sia media proportionale frà le due BE, EC, e fatto centro in E, coll'interuallo EA, si descriua il circolo DAF; preso nella circonferenza DAF qualunque punto F, dal quale à i punti B, D, C, si tirino le rette FC, FD, FB. Dico che l'angolo BFD è vguale all'angolo DFC.



Si tiri la retta EF; perche le rette EA, EF sono frà di loro vguali, e la retta EA, per ipotesi, è media proportionale frà le due BE, EC; sarà la retta EF media proportionale fra le due BE, EC, e per il secondo de gli antecedenti Theoremi, l'angolo EFC sarà vguale all'angolo FBC. Nel triangolo FBD, il lato BD è continuato verso E, e perciò

a 32. del 1. b 5. del 1. *l'angolo EDF a esterno è vguale à i due angoli DFB, DBF interni, ed opposti: mà l'angolo EDF è vguale all'angolo EFD (stante che le rette EF, ED b sono frà di loro vguali) sarà l'angolo EFD vguale à i due angoli DBF, DFB. Fù dimostrato l'angolo EFC vguale all'angolo DBF; sarà il rimanente angolo CFD vguale al rimanente angolo DFB. E perche il punto F è preso ad arbitrio, perciò da qualunque altro punto preso nella circonferenza DAF, tirate rette linee à i punti B, D, C sempre saranno angoli vguali nel punto F; ch'era da dimostrarsi.*

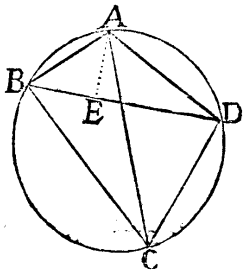
COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se nella circonferenza DAF sia preso qualunque punto F, dal quale siano tirate à i punti B, D, C, le rette FB, FD, FC, sempre la proportione di BF ad FC sarà come quella di BD à DC; e questo perche l'angolo BFC sarà sempre diuiso dalla retta FD in due parti vguali.

Di Tolomeo nel libro 1. del suo Almagesto.

V I I I.

Se dentro d'vn circolo sia descritto qualunque quadrilatero, i rettangoli contenuti dà i lati opposti, giunti insieme, sono vguali al rettangolo contenuto dalle diagonali di esso quadrilatero.



Nel circolo ABCD sia iscritto qualunque quadrilatero ABCD, e le diagonali siano le rette AC, BD. Dico che il rettangolo contenuto da i due lati BC, AD, col rettangolo contenuto da i due lati AB, DC, è vguale al rettangolo contenuto dalle diagonali AC, BD. Nel punto A, sopra la retta AB, si faccia l'angolo BAE, a vguale all'angolo CAD; e si continui AE fino che seghi il lato BD in qualche punto E. Si considerino i triangoli AEB, ACD, de' quali l'angolo BAE, per costruttione, è vguale all'angolo CAD; gli angoli ABE, ACD b nella medesima portione, sono frà di loro vguali; e perciò il rimanente angolo ADC c è vguale al rimanente angolo AEB, ed i triangoli AEB, ADC sono equiangoli. Di nuouo, essendo l'angolo EAB vguale all'angolo CAD, s'aggiunga all'vno. ed all'altro il commune angolo EAC, ne viene tutto l'angolo BAC vguale all'angolo EAD: mà gli angoli ADE, ACB, d nella medesima portione, sono frà di loro vguali; sarà il terzo angolo AED e vguale al rimanente angolo ABC; ed il triangolo AED sarà equiangolo al triangolo ABC; e la proportione di AD, à DE f sarà come quella di AC à CB; dalche il rettangolo delle estreme AD, BC g è vguale al rettangolo contenuto dalle medie AC, ED. Similmente, essendosi dimostrato il triangolo AEB equiangolo al triangolo ACD, la proportione di AB à BE h sarà come quella di AC à CD; ed il rettangolo contenuto dalle estreme AB, DC, K sarà vguale al rettangolo contenuto dalle medie BE, AC: mà si è dimostrato, che il rettangolo contenuto dalle due ED, AC, è vguale al rettangolo delle due AD, BC; saranno i rettangoli, cioè vno contenuto dalle due AD, BC, e l'altro contenuto dalle due AB, DC, insieme giunti, vguali à i due rettangoli, cioè vno contenuto dalle due BE, AC, e l'altro contenuto dalle due ED, AC; mà i rettangoli contenuti da AC, ED, e dalle due AC, EB, l sono vguali à tutto il rettangolo contenuto dalle due AC, BD; i rettangoli dunque contenuti da i lati opposti, cioè il rettangolo contenuto da i due lati AD, BC, ed il rettangolo contenuto da i lati AB, DC, giunti insieme, sono vguali al rettangolo contenuto dalle diagonali AC, BD, come fù proposto dimostrare.

a 23. del 1. b 21. del 3. c 32. del 1. d 21. del 3. e 32. del 1. f 4. del 6. g 16. del 6. h 4. del 6. K 16. del 6. l 1. del 2.

Fine del Sesto Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO SETTIMO.

DEFINITIONI.

I.

L'vnità è quella, secondo la quale ciascheduna delle cose, che sono, si dice vna, ouero vno.

II.

Il numero è moltitudine composta di vnità.

ACCIOCHE *si faccia distintione dal proferire qualche cosa, ch'è considerata sola, e separata dall'altre, al proferirne più insieme; è vso commune, quella, la quale è considerata sola, esprimere con questa voce, Vna, ouero Vno; come quando si proferisce vn huomo, vna naue, vna linea &c. Hor questa particola Vna, ouero Vno (con che s'esprime la cosa nominata esser sola) è quella, ch'Euclide chiama, vnità, la quale si segna con questa nota. 1. si che in luogo di notare vn huomo, vna pietra, vna superficie &c. si esporrà 1. huomo, 1. pietra, 1. superficie &c. E notisi che l'vnità, nella quantità discreta, è indiuisibile, come è indiuisibile il punto nella quantità continua; con questa differenza, che l'vnità è principio della quantità discreta, ed il punto non è principio della quantità continua, ma termine della quantità continua: cioè la quantità discreta comincia con l'vnità, e la quantità continua comincia dal punto.*

Le cose poi, che sono più d'vna, per proferirle con voci distinte da quelle, che sono considerate sole, volgarmente si dicono essere molte; e questa pluralità, ò composto di più vnità, si chiama Numero. Notisi però, che questa voce Numero è nome generico à tutte le moltitudini di qual si sia grandezza; si che tanto se la moltitudine sarà composta di due vnità, quanto s'è composta di tre vnità, quanto s'è composta di quattro, ò più vnità, sempre quella moltitu-

dine si chiama numero: è ben vero che, se quella moltitudine è composta di due sole vnità, s'esprime con questa voce numero due, e si segna con la seguente nota 2. se sarà composta di tre vnità, si dice numero tre, e si nota col seguente carattere 3. s'è composta di quattro vnità si dice numero quattro, e si nota 4. s'è di cinque vnità, si dice numero cinque, e si nota 5; e con quest'ordine il numero sei si nota 6; il numero sette si nota 7; il numero otto si nota 8; e s'è composta di noue vnità si dice numero noue, e si nota 9. Questi esposti numeri, come anco l'vnità, e la nota 0 (che si chiama zero, la qual voce significa nulla) cioè 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. si chiamano Digiti, co'i quali si compongono gli altri numeri, come i notati 10. 11. 12. &c. 20. 21. 22. 23. &c. 30. 31. 32. &c.

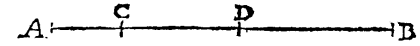
Perche dunque s'è detto che il numero è vna moltitudine composta di vnità, e l'vnità è indiuisibile, perciò la minima parte di qualunque numero sarà l'vnità: per la qual cosa il numero hauerà tante minime parti, per quante sono le vnità, che lo compongono. Per esempio il numero 7, il quale è composto di sette vnità, si diuide in sette minime parti, e ciascheduna si dice essere la settima parte di esso numero; similmente il numero 60, ch'è composto di sessanta vnità, si diuide in sessata parti minime, e ciascheduna di quelle si dice essere la sessantesima parte di esso numero: ed il simile s'intende di tutti gli altri numeri.

Ogni numero dunque si risolue nelle sue vnità, e l'vnità misura tante volte quel numero, per quante sono l'vnità, che lo compongono: dal che l'vnità è misura commune di tutti i numeri, e per conseguenza tutti i numeri sono frà di loro commensurabili; stante che le quantità si dicono commensurabili, quando hanno vna commune misura, cioè quando l'vna è l'altra è misurata giustamente da vna terza quantità, che si chiama commune misura, come à suo luogo più chiaramente si spiegherà.

Ogni quantità, sì continua, come discreta, può essere considerata come vnità, la quale è sempre indiuisibile. Per esempio, la linea B considerata come vna sola, per quel che s'è detto, sarà denominata dall'vnità: e benche l'vnità sia indiuisibile, non è per questo, che la linea B, per essere denominata dall'vnità, cioè considerata come vna, debba essere indiuisibile, stante che non la linea B è vnità, mà ben si la linea B è quella cosa, che chiamiamo vna; e perciò la linea B come quantità continua è diuisibile, e l'vnità è sempre indiuisibile. Si che diuidendosi la linea B, non per questo si diuide l'vnità; mà si diuide quella cosa, che chiamiamo vna. E per maggior chiarezza, siano esposte le linee A, B, frà di loro ineguali; perche la linea A è vna sola, perciò sarà denominata dall'vnità. E similmente essendo la linea B vna sola, sarà anco denominata dall'vnità; si pongano insieme queste due vnità, ne viene il numero 2. che denota le linee A, & B in moltitudine essere due. Donde è manifesto, che nella quantità discreta non s'attende all'vgualità, ò inegualità delle cose, che si numerano, mà alla moltitudine di esse; e perciò non si deue dire, che vna vnità è maggiore, ò minore dell'altra; mà ben si le cose che si dicono vna, ouero vno, possono essere vguali, e possono ancora essere ineguali. Dal che la cosa la quale è chiamata vna, non è vnità, mà è denomi-

A B

nata dall'vnità ; cioè è considerata come vna sola, e separata dall'altre. Similmente s'intenda diuisa la linea AB in quante si voglia parti AC, CD, DB. Perche AC è vna sola parte, perciò sarà denominata dall'vnità; e per l'istessa ragione CD sarà denominata dall'vnità, come



ancora DB. E considerando AD come vna sola linea, sarà AD considerata come vnità. Parimente la linea CB, considerata come vna, sarà denominata dall'vnità, e l'istesso s'intende di tutta la linea AB. Hor se ciascuna delle linee AC, CD, DB, AD, CB, AB, è considerata come vna, cioè come vnità; poste insieme queste vnità compongono il numero 6, che denota il numero delle linee, che si contano in AB, essere composto di sei vnità, senza che s'habbia rignardo all'ineguali tà delle dette linee; mà si hà solo consideratione alla di loro moltitudine. Quindi è (come sopra si disse) che la cosa, considerata come vnità, s'è diuisibile per sua natura, si diuide in tutte le sue parti, e l'vnità resta sempre intatta, e libera da qualunque diuisione.

In oltre se le parti AC, CD, DB sono frà di loro vguali, sarà AC vna terza parte di tutta la linea AB, che si nota $\frac{1}{3}$: mà la parte AC fù considerata come vnità, ne segue $\frac{1}{3}$ ancora potersi considerare come vnità; il medesimo s'intende se AC fosse la quarta, ò quinta, ò altra parte di AB. Di più perche AC è la terza parte di AB, e CD è ancora la terza parte di AB; sarà AD i due terzi di AB, che si notano $\frac{2}{3}$: mà AD fù considerata come vnità, li $\frac{2}{3}$ dunque si possono considerare come vnità; ed il medesimo s'intende di tutti gli altri rotti, auuertendo sempre, che quando si dice $\frac{1}{3}$, ò $\frac{1}{4}$, ouero $\frac{1}{5}$ &c. non s'intende essere la terza, ò quarta, ò quinta parte dell'vnità, mà ben si è la terza, ò quarta, ò quinta parte di quella cosa, che consideriamo essere vna sola.

Finalmente sia esposto qualunque numero, come per essempio 10, il quale è composto di diece vnità. Perche esso numero 10 ci rappresenta essere vna decina, per questa voce Vna lo possiamo considerare come vnità. Hor essendo il numero 10 composto di diece vnità, non sarà esso numero 10 l'vnità; mà ben si esso numero 10 sarà quella cosa, che chiamiamo vna. Si che diuiso il numero 10 nelle sue vnità, ò in altre parti possibili, non sarà diuisa l'vnità, mà sarà diuisa quella cosa, che chiamiamo vna. Ed il medesimo si deue intendere di tutti gli altri numeri considerati come vnità.

Si conchiude dunque, che l'vnità non è numero, mà principio, e fondamento del numero; stante che, essendosi definito il numero essere vna moltitudine composta di vnità, è necessario che siano più vnità insieme acciòche formino il numero. Di più, che la cosa la quale chiamiamo vna, ouero vno, non è vnità; mà l'vnità è quella singolarità, secondo la quale nominiamo quella cosa da per sè essere vna sola; e perciò quella cosa, che si dice vna, ouero vno, può essere diuisibile nelle sue parti; e l'vnità, secondo la quale ciascheduna delle cose, che si dicono vno, ò vna, è sempre indiuisibile: oltre à ciò ogni quantità, si continua, come discreta, può essere considerata come vnità; e questo non solo accade negl'intieri, mà ancora ne' rotti; e finalmente tutti i numeri sono commensurabili, stante che tutti sono misurati dall'vnità.

III.

Il numero minore è parte del maggiore, quando misura il maggiore giustamente.

Il numero minore si dice misurare il numero maggiore giustamente, quando detratto il minore dal maggiore, e da quel che resta, se ne detrae il medesimo numero minore, e dall'auanzo se ne leua di nuouo il minore, e con quest'ordine sempre da ogn'auanzo se ne detrae il minore, finalmente nell'vltima detrattione non resta cos'alcuna; come per essempio. Sia il numero minore 3, ed il maggiore sia 12, sottraendo dal maggiore 12 il minore 3, resta il numero 9; da questo se ne detragga il minore 3, resta 6; e da questo se ne leui il minore 3, resta 3; e finalmente leuato da questo auanzo il minore 3, non resta cos'alcuna; in tal caso il numero minore 3 si dice misurare giustamente il numero maggiore 12: ed il simile s'intende di tutti gli altri numeri. Quando poi dalla continua sottrattione nel modo, che antecedentemente s'è fatto, resta qualche numero composto di minor moltitudine d'vnità di quelle, che sono nel numero minore, all'hora il numero minore non si può sottrarre da quell'auanzo; ed in tal caso il numero minore non si dice misurare giustamente il maggiore; come se il numero minore fosse 5, ed il maggiore 13, detratto dal numero maggiore 13 il minore 5, resta 8; e detratto da questo auanzo il minore 5, resta 3: e perche da questo auanzo non se ne può sottrarre il minore 5, perciò il numero 5 non misura giustamente il maggiore 13: e l'istesso s'intende de gli altri numeri. Hor Euclide in questa definitione spiega, che all'hora il numero minore si dice esser parte del numero maggiore, quando il minore misura giustamente il maggiore; come per essempio, il numero minore 4, il quale misura giustamente il maggiore 28 sette volte, e non'auanza cos'alcuna, si dice esser parte del numero 28. E nell'istesso modo ciascuno de'i numeri 2. 3. 4. 6. 12 sarà parte del numero 24, stante che il 2 misura il 24 dodici volte; il 3 misura il medesimo 24 giustamente otto volte; il 4 lo misura sei volte; ed il numero 6 lo misura quattro volte; ed il numero 12 lo misura giustamente due volte. Il medesimo s'intende di tutti gli altri numeri.

Notisi che la parte prende il nome dal numero, secondo il quale il minore misura il maggiore, cioè se il minore misura il maggiore due volte, si dice il minore essere la metà del maggiore; se il minore misura il maggiore tre volte, si dice essere la terza parte del maggiore; se lo misura quattro volte, si dirà essere la quarta parte del maggiore, e con questo ordine in infinito.

IV.

Il numero minore si dice esser parti del maggiore, quando il minore non misura giustamente il maggiore.

Due casi possono succedere in due dati numeri ineguali; cioè, ò che il minore misuri giustamente il maggiore, ouero che non lo misuri giustamente; ma che sopravanzi qualche cosa. Se il numero minore misura giustamente il maggiore, per quel che s'è detto nell'antecedente definitione, il minore si dice esser parte del maggiore; ma se non lo misura giustamente, vuole Euclide ch'il minore si dica esser parti del maggiore. Per essempio, siano esposti i numeri 3,

& 7; perche il numero minore 3 non misura giustamente il maggiore 7, si dirà il minore 3 essere parti del 7, cioè essere tre di quelle parti, delle quali nel maggiore ne sono sette. Similmente se il minore fosse 9, ed il maggiore 11, si direbbe il minore essere noue di quelle parti, che nel maggiore sono vndeci: ed il simile s'intenda negli altri.

V.

Il numero maggiore è multiplice del minore, quando è misurato dal minore giustamente.

Quando il numero minore misura giustamente il numero maggiore; se si fà la comparatione dal minore al maggiore, si dice il minore esser parte del maggiore, come fù spiegato nella definitione terza; e se si farà la comparatione dal maggiore al minore, si dirà il maggiore essere multiplice del minore.

V I.

Il numero paro è quello, che si diuide in due parti vguali.

Tutti i numeri, che si possono diuidere giustamente in due parti vguali, si dicono numeri pari; come i numeri 4, 8, 10, 20, 50, 100, 1000 &c. i quali si dicono numeri pari, stante che ogn'vno si diuide giustamente in due parti vguali, e le loro metà sono 2, 4, 5, 10, 25 50, 500.

V I I.

Numero disparo è quello, che non si diuide in due parti vguali; ouero, è quello ch'è differente dal numero paro per vna vnità.

A distintione del numero pari, chiama Euclide numero disparo quello, che non si diuide in due parti vguali, ouero ch'è differente dal numero paro per vna sola vnità; come sono i numeri 3, 5, 7, 9, 11, 15, 47, 101. 1001, i quali sono differenti da i seguenti numeri pari 2, 4, 6, 8, 10, 14, 46, 100, 1000, ouero 4, 6, 8, 10, 12, 16, 48, 102, 1002 per quanto è vna sola vnità.

V I I I.

Numero parimente paro è quel numero, ch'è misurato da vn numeto paro, per volte pari; cioè per vn numero paro.

Siano esposti i numeri 64, e 32, questi, secondo la definitione d'Euclide, sono ambidue numeri parimente pari, stante che il numero 64 è misurato dal 4, ch'è numero pari, sedici volte; cioè per il numero pari 16; e similmente il numero 32 è misurato dal numero paro 8 quattro volte, cioè per il numero paro 4.

I X.

Numero parimente disparo si chiama quello, ch'è misurato da vn numero paro per numero disparo.

Sia esposto il numero 30, il quale è misurato dal numero paro 6 per il numero disparo 5; e questo numero 30, secondo l'antecedente definitione, si chiama numero parimente disparo. Il medesimo si deue intendere d'ogn'altro numero, che hauerà le medesime conditioni.

E d'auuertirsi che si trouano de i numeri come il 20, il 24, e simili, i quali hanno le medesime conditioni d'ambedue l'antedette definitioni, cioè sono numeri parimente pari, ed ancora parimente dispari. stante che il numero 20 è misurato dal numero paro 2, per il numero paro 10, e per l'ottaua definitione il numero 20 è numero parimente paro: e perche il medesimo numero paro 20 è misurato dal numero paro 4 per il numero disparo 5, per quel che prima s'è detto, il numero 20 sarà numero parimente disparo. Il medesimo succede al numero 24, il quale è misurato dal numero paro 4 per il numero paro 6; ed ancora è misurato dal numero paro 8 per il numero disparo 3, e benche alcuni Commentatori hanno stimato, che simili numeri non siano parimente pari, ne meno parimente dispari, con tutto ciò vniformandomi con l'interpretatione del P. Clauio, dico che simili numeri sono parimente pari, ed ancora parimente dispari; stante che se Euclide hauesse voluto escludere questi dal significato, e conditioni del numero parimente paro, non haurebbe definito il numero parimente paro esser quello, ch'è misurato da vn numero paro per numero paro, mà hauerebbe detto numero parimente paro è quello, del quale tutti i numeri, che lo misurano, sono numeri pari; ed in tal caso hauerebbe esclusi da questi i numeri 20, 24, e simili: mà hauendo fatta la definitione più generica, dobbiamo senza dubio stimare, ch'Euclide non habbia escluso da i numeri parimente pari i numeri 20, 24, e simili, e così diremo; che i numeri 20, 24, e simili, sono numeri parimente pari, e sono ancora numeri parimente dispari.

X.

Numero disparimente disparo è quel numero; ch'è misurato dal numero disparo per vn numero disparo; ouero è quel numero, del quale tutti i numeri, che lo misurano, sono numeri dispari.

Quando tutti i numeri, che misurano vn numero, sono numeri dispari, quello si dice numero disparimente disparo. Per essempio sia esposto il numero disparo 135. il quale è misurato da i seguenti numeri dispari 3, 5, 9, 15, 27, 45, cioè è misurato dal 3. per il numero 45, è misurato dal 5, per il numero 27, & è misurato dal 9, per il numero 15, i quali tutti sono numeri dispari; in tal caso il numero 135, ò altro, che habbia le medesime conditioni, si chiama numero disparimente disparo.

X I.

Primo numero è quello, ch'è misurato solamente dall' vnità.

Tutti i numeri, che non possono essere misurati giustamente da altri numeri, cioè che non sono numeri parimente pari, ne parimente dispari, ne meno disparimente dispari, mà che possono essere misurati solamente dall'vnità, si dicono numeri primi: come sono i seguenti 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 &c. Notisi però, che nissun numero misura il numero primo, eccettuatone, che si misuri da se medesimo; come il numero 2 è misurato dal medesimo 2; il 3 è misurato dal medesimo 3; mà nissun altro numero lo può misurare, e l'istesso si deue intendere di tutti gli altri numeri primi.

X I I.

Quei numeri si dicono essere frà di loro primi, de' quali la commune misura è solamente l'vnità.

Si come, quando vn numero è misurato dalla sola vnità, si dice numero primo; così quando due, ò più numeri, hanno per commune misura la sola vnità, si dicono essere frà di loro primi. Per essempio siano esposti i numeri 4, e 9; benche il numero 4 sia misurato dal 2, ed il numero 9 sia misurato dal 3 contutto ciò, non potendo il numero 3 misurare ambidue i numeri 4, e 9, e ne meno il 2 può misurare ambidue essi numeri 4 & 9; tanto il numero 3, come il numero 2, non sarà commune misura de i numeri 4, e 9; mà ben si la commune misura sarà solamente l'vnità: ed in tal caso i numeri 4, e 9 si chiamano numeri frà di loro primi. Similmente i numeri 5, 8, 21, sono frà di loro primi, stante che la di loro commune misura è solamente l'vnità; e l'istesso s'intende di tutti gli altri, che hanno per commune misura solamente l'vnità.

X I I I.

Numero composto è quello, ch'è misurato da qualche numero.

Perche ogni numero è misurato dall'vnità, e non tutti sono misurati da altri numeri, perciò Euclide, volendo fare distintione frà il numero, ch'è misurato dalla sola vnità, e quello, ch'oltre l'essere misurato dall'vnità, è ancora misurato da qualche numero; chiama numero primo quello, ch'è misurato dalla sola vnità; e numero composto chiama quello, il quale non solo è misurato dal vnità, mà ancora da qualche numero: come il numero 24, il quale, oltre che è misurato dall'vnità, è ancora misurato da tutti i numeri seguenti 2. 3. 4. 6. 8. 12. Parimente il numero 15 è misurato dall'vnità, ed ancora da i seguenti numeri 3. & 5; e questi numeri 24 & 15, come ancora altri, che sono misurati da qualche numero, si dicono numeri composti. E notisi, che tutti i numeri parimente pari, parimente dispari, e disparimente dispari, sono numeri composti.

Quei

X I V.

Quei numeri si dicono frà di loro composti, i quali hanno per commune misura qualche numero.

Il numero, che misura giustamente due, ò più numeri, si chiama commune misura de i numeri misurati, come altroue si disse. Per essempio, i numeri 9, & 12, sono ambidue misurati giustamente dal numero 3: poiche il 3 misura il 9 tre volte, e misura il 12 quattro volte; e secondo quel, che s'è detto, il numero 3 sarà commune misura de i due 9, & 12; e così per gli altri. Hor perche i numeri 9, & 12, hanno per commune misura il numero 3, essi numeri 9, & 12, si chiameranno numeri frà di loro composti. E similmente i numeri 25, & 40 sono frà di loro composti, stante che la loro commune misura è il numero 5; ed i numeri 7, 28, 35, si dicono ancora frà di loro composti à causa, che il numero 7 è loro commune misura.

X V.

Vn numero si dice multiplicare vn altro numero, quando si prende tante volte il numero multiplicato, per quante vnità sono nel multiplicante; e quel numero composto si chiama Prodotto.

Quando vn numero si multiplica per vn'altro numero, quello, che multiplica, si chiama multiplicante, e l'altro si dice numero multiplicato. Siano dunque esposti i numeri 5, & 9; sia 5 il multiplicante, ed il numero multiplicato sia 9: perche nel multiplicante sono cinque vnità, prendendo il numero 9 cinque volte, il composto di queste cinque volte il 9 sarà 45; e così diremo che il 9 si è multiplicato per il 5, ed il prodotto è 45. All'incontro se porremo il 9 come numero multiplicante, ed il 5 sarà il numero multiplicato; essendo nel multiplicante noue vnità, si prenderà noue volte il numero multiplicato 5, che similmente produrrà il numero 45; e diremo, ch'il numero 5 s'è multiplicato per il numero 9, ed il prodotto è 45. E questo intende Euclide per la voce Multiplicare, cioè trouare vn numero, che sia composto di tante volte il numero multiplicato, per quante vnità sono nel numero multiplicante.

All'antecedente definitione si può aggiungere la seguente.

Dicesi diuidere vn numero per vn altro numero, quando si troua vn numero composto di tante vnità, per quante volte il diuisore misura il numero diuiso; e quel numero trouato si chiama Quotiente.

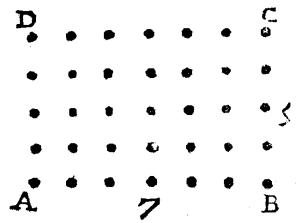
Siano esposti due qualunque numeri, come 7, & 21; all'hora il numero 7 si dice diuidere il numero 21, quando si troua vna quantità, nella quale siano tante vnità, per quante volte il numero 7 misura il numero 21. E perche

il

il 7 misura il numero 21 tre volte, il numero 3, in questo essempio, sarà quello, nel quale sono tante vnità, per quante volte il 7 misura il 21; ed il numero 3 sarà quello, che si chiama Quotiente. Notisi che quel numero, che diuide, si chiama diuisore, e l'altro si chiama numero diuiso; come per essempio hauendosi à diuidere il numero 32 per 8, perche il numero 8 è quello, che diuide, perciò il numero 8 si chiamerà diuisore, ed il numero 32 sarà il numero diuiso. Si veda dunque quante volte il numero 8 misura il 32, e trouaremo quattro volte, e così il numero 4 sarà il quotiente; cioè sarà quello, che indica essere di tante vnità, per quante volte il diuisore misura il numero diuiso.

X V I.

Quando due numeri, multiplicandosi scambieuolmente frà di loro producono, altro numero, quel prodotto si dice numero piano, ed i numeri multiplicati si chiamano lati di quel piano.



Siano due qualunque numeri AB, BC, le vnità de' quali siano disposte in lunghezza, e larghezza con vguali distanze, rappresenteranno vn parallelogrammo rettangolo, come il notato ABCD, i di cui lati saranno i dati numeri AB, BC, ed il prodotto, fatto dalla loro multiplicatione, saranno l'vnità, che occupano il piano ABCD. Quindi è, ch' Euclide definisce il numero piano esser quello, ch'è prodotto dalla multiplicatione di due numeri, e quei due numeri, multiplicati scambieuolmente frà di loro, gli chiama lati di quel piano. Quando dunque nelle cose auuenire si dirà il prodotto contenuto da vn numero in vn altro numero, si concepirà vn parallelogrammo rettangolo, formato dalla dispositione delle vnità, che sono nel prodotto con vguali distanze, tanto in lunghezza, come in larghezza, ed i numeri multiplicati saranno i lati di esso prodotto.

Benche i numeri piani possano essere infiniti, cioè possano formare innumerabili figure piane, come triangolari, pentagonali, &c. con tutto ciò Euclide s'è contentato di parlare solamente di quei numeri piani, che formano le figure parallelogramme rettangole, tralasciando l'altre come non necessarie al suo fine: di questi numeri però, come triangolari, pentagonali, esagonali, &c. ne parleremo nell' Aritmetica pratica, e qui proseguiremo la spiegatione delle sole cose poste da Euclide.

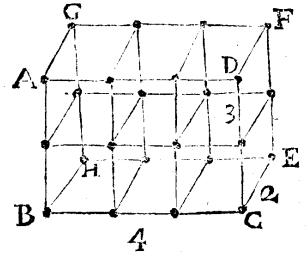
Perche il numero, che forma il piano rettangolo ABCD, cioè il prodotto fatto dalla multiplicatione di A B in B C, per la 15. definitione, è composto di tante volte il numero delle vnità, che sono in BC, per quante vnità sono in AB, perciò il numero B C misura tante volte il numero piano A B C D, per quante vnità sono nel lato AB. Similmente, essendo il numero piano ABCD, per la 15. definitione di questo, composto di tante volte il numero A B, per quante

quante vnità sono in BC, tante volte il numero AB misurerà il numero piano ABCD, per quante vnità sono nel lato BC; la onde per quel, che si disse nella 15. definitione, diuidendo il numero piano ABCD per le vnità, che sono in BC, cioè per il numero, che rappresenta il lato BC, il quotiente sarà il lato AB: ed all'incontro, diuiso il numero piano ABCD per il lato AB, il quotiente sarà il lato BC.

X V I I.

Quando tre numeri, multiplicandosi scambieuolmente frà di loro, producono vn altro numero, quel numero prodotto si chiama numero solido, ed i numeri multiplicati si dicono esser lati di quel numero solido.

Siano i tre numeri BC, CE, CD, le di cui vnità siano disposte con vguali distanze in lunghezza, larghezza, ed altezza in modo, che il prodotto fatto da i due BC, CD, formi il piano rettangolo ABCD; ed il prodotto de i due DC, CE faccia il piano rettangolo DCEF; come anco il prodotto de i due BC, CE formi il piano rettangolo BCEH, sarà fatto tutto il solido GBCF contenuto da sei piani rettangoli; e perciò le vnità del prodotto fatto dalla multiplicatione de i tre numeri BC, CD, CE, disposte con vguali distanze il lunghezza, larghezza, e profondità, formeranno il solido GBCF. Quindi è, ch' Euclide definisce il numero solido esser quello, ch'è prodotto dalla scambieuole multiplicatione di tre numeri frà di loro; cioè dalla multiplicatione del primo nel secondo, ed il prodotto nel terzo; ed i numeri BC, CD, CE, multiplicati si chiamano lati del prodotto numero solido. Qui ancora Euclide, tralasciando ogn'altro numero solido, hà definito solamente quelli, che sono contenuti da piani rettangoli, le di cui faccie opposte sono parallele; e perciò nelle cose, che seguono, quando si dirà il numero solido contenuto dal prodotto fatto dalla multiplicatione di tre numeri frà di loro, douremo concepire le vnità del prodotto talmente disposte in lunghezza, larghezza, e profondità, che formino vna figura come la notata GBCF, i dui cui lati vengano rappresentati dalle vnità de i numeri multiplicati.

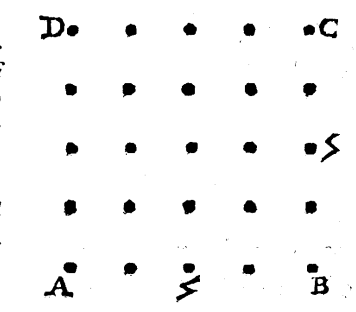


X V I I I.

Numero quadrato è quello, ch'è vgualmente vguale, cioè ch'è contenuto da due numeri vguali.

Definisce Euclide il numero quadrato esser quello, ch'è vgualmente vguale; cioè che le sue vnità formano vn piano d'vguale lunghezza, e larghezza,

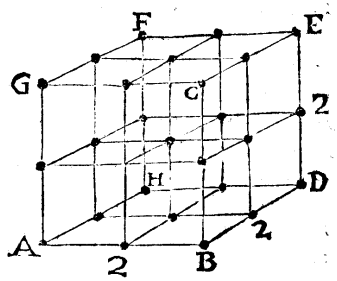
ed è l'istesso come se dicessimo, che le sue vnità occupano vn piano quadrato; come il notato ABCD, i di cui lati AB, BC sono frà di loro vguali; e perche dalla multiplicatione del numero AB nell' vguale numero BC, ne nasce il piano AB CD quadrato, dalla multiplicatione ancora del lato AB nel medesimo lato AB, si produrrà l'istesso numero quadrato ABCD Quindi è, che multiplicandosi qualunque numero in se medesimo, il prodotto, che ne viene, è numero quadrato; ed il numero, che fù multiplicato in se medesimo è il lato di quel numero quadrato, che generalmente si chiama radice quadrata. Si che nelle figura ABCD, il numero quadrato è il composto delle vnità, che formano il quadrato ABCD, ed il lato, ò radice quadrata è il notato AB, ouero BC.



X I X.

Chiamasi numero Cubo quello, ch'è contenuto da tre numeri vguali; cioè che vien prodotto dalla continua multiplicatione di tre numeri vguali.

Siano i tre numeri vguali AB, BD, DE, e dalla multiplicatione de i due vguali AB, BD ne venga il numero quadrato ABDH, dal quale, multiplicato dal numero ED, ne venga il numero solido FABE. E perche i lati AB, BD, DE, sono frà di loro vguali, perciò il numero solido FABE sarà vgualmente vguale in lunghezza, larghezza, e profondità; e questo Euclide lo chiama numero Cubo; ed ogn' vno de i numeri vguali AB, BD, DE, &c. si chiama lato del numero cubo FABE. E perche dalla continua multiplicatione de i tre lati vguali AB, BD, DE se ne produce il numero cubo FABE; dalla multiplicatione ancora d'vno di questi lati, come AB, in se medesimo, e dal prodotto, multiplicato per il medesimo lato AB, se ne produrrà l'istesso numero cubo FABE. e perciò multiplicandosi qualunque numero in se medesimo, ed il prodotto multiplicandosi per l'istesso numero, quel, che ne viene, si chiamerà numero Cubo; e quel numero multiplicato in se medesimo, e di nuouo multiplicato per il prodotto, si chiamerà lato di quel numero Cubo, che volgarmente si chiama ancora Radice cuba. Si che, nella figura FABE, il composto delle vnità, che formano il solido FABE, si chiama numero Cubo, ed ogn'vno de i suoi lati AB, BD, DE, &c. si chiama Radice cuba, ouero lato del Cubo FABE.



X X.

Numeri proportionali sono, quando il primo è multiplice, ò parte, ò parti del secondo, come il terzo è multiplice, ò parte, ò parti del quarto: o pure, quando il primo contiene vgualmente il secondo, come il terzo contiene il quarto, e di sopra più il primo, e terzo, contengono vguali parte, ò parti del secondo, e quarto.

Dopo ch' Euclide hà definito che cosa sia numero, e come s'intenda vn numero esser multiplice, ò parte, ò parti d'vn altro numero; ed oltre à ciò che cosa dobbiamo intendere per numero piano, e che cosa per numero solido; spiega in questa definitione quali conditioni deuono hauere quattro numeri, acciòche siano proportionali; cioè acciòche frà di loro cada proportionalità: e, supponendo quel, che disse nella settima definitione del quinto Elemento, cioè Le quantità, che hanno la medesima proportione si dicono proportionali, *definisce quisolamente quali siano quei numeri, che douremo chiamare proportionali; cioè quali conditioni deuono hauere quattro numeri, acciòche la proportione del primo al secondo sia come quella del terzo al quarto numero. E dice che all' hora quattro numeri si diranno essere proportionali, quando il primo è vgualmente multiplice del secondo, come il terzo è multiplice del quarto; ouero, quando il primo è vgualmente parte, o parti del secondo, come il terzo è parte, ò parti del quarto: ò pure quando il primo, e terzo contengono vgualmente il secondo, e quarto, e di sopra più la medesima parte, ò le medesime parti del secondo, e quarto. Verbi gratia siano i quattro numeri A, B, C, D; se il primo A è multiplice del secondo B, come il terzo C è multiplice del quarto D, come nel primo essempio: ouero, se il primo numero A è parte del secondo B come il terzo C è parte del quarto D (come nel secondo esempio): ouero il primo A sia tante parti del secondo B per quante parti è il terzo C del quarto D, come nel terzo esempio; ò finalmente il primo A contenga il secondo B, come il terzo C contiene il quarto D; e li due A, & C contengano di sopra più vguali parte, ò parti di B, & D, come nel quarto, e quinto essempio. In tutti i detti casi li quattro numeri A, B, C, D, si dicono numeri proportionali. E perche fù definito nel quinto Libro le quantità proportionali esser quelle, le quali hanno la medesima proportione, chiamando Euclide i notati A, B, C, D, numeri proportionali, sarà la proportione di A à B, come quella di C à D. Dond'è manifesto, che la proportione frà due numeri è la scambieuole relatione, secondo la quale l'vno è multiplice, ò parte, ò parti dell'altro; ò che l'vno contenga l'altro, e di sopra più contenga vguale parte, ò parti dell'altro.*

A	B
24	8
12	4
C	D
A	B
6	30
9	45
C	D
A	B
6	8
9	12
C	D
A	B
12	8
6	4
C	B
A	B
30	8
15	4
C	D

DIVISIONE DELLE PROPORTIONI.

I numeri, frà quali cade la proportione, si chiamano Termini della proportione, de' quali quello, che si nomina nel primo luogo, si chiama Antecedente, e l'altro, che si nomina nel secondo luogo, si chiama Conseguente: come, facendosi la comparatione da 9 à 7; i numeri 9, e 7 si chiamano termini della proportione, ed il numero 9, che habbiamo nominato nel primo luogo, si chiama Antecedente; l'altro, cioè il numero 7, posto nel secondo luogo, si chiama Conseguente.

Denominatore della proportione si chiama quel numero, che ci rappresenta che parte, ò parti, ouero multiplice, è l'antecedente del conseguente; ò pure come l'antecedente contiene il conseguente, e con che parte, ò parti di più lo contiene. E perche diuidendosi vn numero per vn altro numero, per la natura della diuisione, il quotiente ci mostra qual parte, ò parti, ò multiplice, è il numero diuiso del diuisore; perciò quando saranno posti due numeri, e si voglia ritrouare qual proportione sia frà l'antecedente, e conseguente, cioè si voglia ritrouare quella quantità, che ci mostra qual parte, ò parti, ò multiplice, sia l'antecedente del conseguente, la quale habbiamo chiamato denominatore della proportione, sempre si diuiderà l'antecedente per il conseguente, ed il quotiente sarà il denominatore della proportione; cioè sarà quel numero, dal quale prenderà il nome quella proportione. Per essempio siano esposti i numeri 18, & 6, perche diuidendo l'antecedente 18 per il conseguente 6, il quotiente 3 ci mostra la grandezza dell'antecedente 18 esser tanta, per quanto è tre volte il conseguente 6, per ciò il quotiente 3 sarà il denominatore della proportione. Similmente habbiasi da ritrouare il denominatore della proportione, ch'è da 25 à 7, si diuida l'antecedente 25 per il conseguente 7, il quotiente sarà $3\frac{4}{7}$, il quale rappresenta la grandezza dell'antecedente 25 esser tanta, per quanto è tre volte il conseguente 7, e di più quattro settime parti del medesimo conseguente 7; e questo numere $3\frac{4}{7}$ sarà il denominatore della proportione, ch'è da 25 à 7. In oltre douendosi trouare il denominatore della proportione, ch'è da 5 à 9; perche l'antecedente 5 non è misurato dal 9, sarà l'antecedente 5 noue parti del conseguente, che si nota $\frac{5}{9}$; e questo sarà il denominatore della proportione, ch'è da 5 à 9; e l'istesso s'intende di tutti gli altri numeri.

La proportione si diuide nella proportione d'vgualità, e d'inegualità.

Dicesi proportione d'vgualità, quando l'antecedente è vguale al conseguente, come se si farà la comparatione da 7 à 7, ouero da 13 à 13 &c.

La proportione d'inegualità è quando l'antecedente è ineguale al conseguente, come se si farà la comparatione da 3 à 7; ouero da 7 à 3 &c.

La proportione d'inegualità si diuide nella proportione di maggiore inegualità, e nella proportione di minore inegualità.

Quando l'antecedente è maggiore del conseguente, la proportione, che cade frà quei due termini, si chiama proportione nella maggiore inegualità; e se l'antecedente sarà minore del conseguente, si dirà proportione nella minore inegualità.

La proportione nella maggiore inegualità si diuide in cinque generi di proportioni, de' quali tre sono semplici, e due compositi. Il primo de semplici si chiama

Multiplice; il secondo Superparticolare; ed il terzo Superpartiente. De i due compositi il primo si dice Multiplice superparticolare (per esser composto del multiplice, e del superparticolare,) l'altro si chiama Multiplice superpartiente (stante che è composto del multiplice, e del superpartiente.)

La proportione multiplice si diuide in infinite proportioni multiplici; e questo è quando l'antecedente è misurato dal conseguente più d'vna volta, e non auanza cosa alcuna. Come se si farà la comparatione da 6 à 3; perche l'antecedente 6 è misurato dal conseguente 3 due volte, e non auanza cosa alcuna, cioè diuiso l'antecedente 6 per il conseguente 3, il quotiente è 2; sarà il quotiente due il denominatore della proportione; cioè indicarà che l'antecedente contiene il conseguente due volte: e questa si chiamerà proportione dupla. Similmente habbiasi da fare la comparatione da 12 à 4, perche, diuiso l'antecedente 12 per il conseguente 4, il quotiente è tre; perciò la proportione di 12 à 4 si dirà esser Tripla. Se poi, diuidendosi l'antecedente per il conseguente, il quotiente sarà 4, tal proportione si chiamerà Quadrupla. E se il quotiente sarà 5, si dirà Quintupla, e con quest'ordine in infinito.

La proportione superparticolare si diuide in infinite proportioni superparticolari: e questo è quando l'antecedente è misurato dal conseguente vna volta, ed auanza vno, come se si farà la comparatione da 3 à 2, che, diuiso l'antecedente 3 per il conseguente 2, il quotiente sarà $1\frac{1}{2}$: e questa proportione si dice Sesquialtera. Di nuouo douendosi fare la comparatione da 4 à 3, si diuida l'antecedente 4 per il conseguente 3, il quotiente, ò denominatore della proportione sarà $1\frac{1}{3}$; e tal proportione si chiama sesquitertia. Se poi, diuiso l'antecedente per il conseguente, il quotiente sarà $1\frac{1}{4}$, si dirà proportione sesquiquarta. Se il quotiente sarà $1\frac{1}{5}$ si dirà sesquiquinta; e con quest'ordine per l'altre proportioni superparticolari.

La proportione superpartiente si diuide in infinite proportioni superpartienti: e questo è quando l'antecedente è misurato dal conseguente vna volta, ed auanza più di vno: come se si farà la comparatione di 5 à 3, che diuiso l'antecedente 5 per il conseguente 3 il quotiente sarà $1\frac{2}{3}$; e tal proportione si dice superbipartiente tertia. Se diuidendosi l'antecedente per il conseguente il quotiente sarà $1\frac{3}{4}$, si dirà proportione supertripartiente quarta. Se il quotiente sarà $1\frac{3}{5}$, si dirà supertripartiente quinta. Se sarà $1\frac{4}{5}$ si dirà superquadripartiente quinta; e con quest'ordine si procederà in tutte l'altre del medesimo genere.

La proportione multiplice superparticolare si diuide in infinite proportioni multiplici superparticolari: e questo è quando l'antecedente è misurato dal conseguente più d'vna volta, ed auanza vno; come se si farà la comparatione di 5 à 2, che diuidendo l'antecedente 5 per il conseguente 2, il quotiente sarà $2\frac{1}{2}$; e questa proportione si dice dupla sequialtera. Similmente facendosi la comparatione di 7 à 3, diuiso l'antecedente 7 per il conseguente 3, il quotiente sarà $2\frac{1}{3}$; e tal proportione si chiamera dupla sesquitertia. Se poi diuidendosi l'antecedente per il conseguente il quotiente sara $3\frac{1}{4}$, si dirà tripla sesquitertia. Se il quotiente sarà $4\frac{1}{7}$, si dirà quadrupla sesquisettima, e con quest'ordine si procederà per tutte l'altre del medesimo genere.

La proportione multiplice superpartiente si diuide in infinite proportioni multiplici superpartienti: e questo è quando l'antecedente è misurato dal con-

seguente più d'vna volta, ed auanza più di vno: come se si farà la comparatione da 8 à 3, che diuiso l'antecedẽte 8 per il conseguente 3, il quotiente sarà 2 $\frac{2}{3}$; e tal proportione si dice dupla superbipartiente tertia, e diuidendosi l'antecedente per il conseguente, se il quotiente sarà 2 $\frac{3}{4}$, si dirà dupla supertripartiente quarta. Se il quotiente sarà 3 $\frac{1}{4}$, si dirà tripla supertripartiente quarta. Se sarà 4 $\frac{2}{3}$, si dirà quadrupla superbipartiente tertia, e se sarà 5 $\frac{7}{8}$ si dirà quintupla superseptipartiente ottaua; e con quest'ordine si procederà in infinito.

La proportione nella minore inegualità si diuide ne i medesimi cinque generi come s'è fatto nella maggiore inegualità, con la sola differenza, che in questa di minore inegualità vi s'aggiunge sempre la particola Sotto. E così diremo, sumultiplice, susuperparticolare, susuperpartiente, sumultiplice, susuperparticolare, sumultiplice superpartiente, sudupla, sutripla, suquadrupla &c. susesquialtera, susesquitertia, susesquiquarta &c. susuperbipartiente tertia, susupertripartiente quarta &c. sudupla sesquialtera, sudupla sesquitertia, sutripla sesqui settima &c. sudupla superbipartiente tertia, sudupla supertripartiente quarta, sutripla superbipartiente quinta, suquadrupla superquadripartiente nona &c.

Per essempio siasi proposta fare la comparatione di 1 à 2, si diuida l'antecedente 1 per il conseguente 2, il quotiente sarà $\frac{1}{2}$; e questa si dice proportione sudupla; se il quotiente sarà $\frac{1}{3}$ si dirà sutripla, se sarà $\frac{1}{4}$, si dirà suquadrupla, e con quest'ordine per le altre del medesimo genere. E per maggior facilità, quando sono proposti due numeri nella minore inegualità, cioè che l'antecedente sia minore del conseguente, e si voglia vedere qual specie di proportione sia, si permutino i termini, e si ponga il conseguente in luogo dell'antecedente, e l'antecedente in luogo del conseguente, e si veda qual specie di proportione è in questa dispositione della maggiore inegualità; se nella maggiore inegualità si trouasse essere in proportione tripla, vi s'aggiunga la particola Sotto, e si dirà, che i numeri dati sono nella proportione sutripla; se nella maggiore inegualità fosse nella proportione sesquialtera, ò sesquitertia &c. si dirà che nella minore inegualità sono nella proportione susesquialtera, ouero susesquitertia &c. Per essempio, habbiasi da fare la comparatione da 7 à 25; perche l'antecedente è minore del conseguente, i proposti numeri saranno esposti nella minore inegualità; si permutino questi termini, facendo dell'antecedente conseguente, e del conseguente antecedente, saranno esposti nel seguente modo 25 à 7: si diuida il 25 per il 7; il quotiente sarà 3 $\frac{4}{7}$, e perciò i numeri 25, & 7 esposti nella maggiore inegualità sono nella proportione, che si dice tripla superquadripartiente settima, vi s'aggiunga la particola Sotto, e così diremo, che la proportione di 7 à 25 è sutripla superquadripartiente settima; ed il denominatore di tal proportione sarà $\frac{7}{25}$, stante che sempre si diuide l'antecedente per il conseguente; tenendo per regola ferma, ch'il denominatore della proportione di due termini, che sono nella minore inegualità, in qualunque genere di proportione, sempre sarà vn rotto senza intiero alcuno; e nella maggiore inegualità sempre sarà, ò semplicemente intiero, ouero sarà intiero accompagnato da qualche rotto.

DELLE PROPORTIONALITA'.

La proportionalità spiegata da Euclide nella quarta definitine del quinto, si diuide in tre generi, e si dicono Medietà, che sono Medietà, Aritmetica, Geometrica, ed Armonica.

La proportionalità, ò Medietà Aritmetica è quando tre, ò più numeri, si auanzano con vguali differenze, come sono i seguenti 5. 8. 11. 14. 17. &c. ouero 3.5.7.9.11.13.&c. Donde si vede, che il secondo supera il primo, come il terzo supera il secondo, ed il quarto supera il terzo &c. Questa medietà, ò è continua, ouero discontinua. Continua si dice, quando sono più di tre termini nella Medietà Aritmetica, i quali continuatamente, e senza interrompimento alcuno, ognuno supera il suo prossimo antecedente con vguale differenza, come appare negli essempij antecedenti. E si dice Discontinua, quando nella progressione de'numeri, si fà interrompimento in modo, che la differenza frà il primo, e secondo, è vguale alla differenza frà il terzo, e quarto, e frà il quinto, e sesto, e con quest'ordine presi à due à due: ma non è vguale alla differenza frà il secondo, e terzo, ne frà il quarto, e quinto &c. come appare ne i seguenti numeri 3. 7. 9. 13. 12. 16. doue la differenza frà i due 3. 7 è vguale alla differenza, ch'è frà i due 9. 13. ed ancora è vguale alla differenza, ch'è frà i due 12.16. ma non è vguale alla differenza, ch'è frà i due 7.9. ne à quella, ch'è frà i due 13.12.

La proportionalità, ò Medietà Geometrica è quando sono tre, ò più numeri, i quali successiuamente sono nella medesima proportione; cioè, che la proportione del primo termine al secondo, sia l'istessa, che la proportione del secondo al terzo, e del terzo al quarto, e con quest'ordine per tutti i termini, come sono i seguenti 2.4.8.16.32.64.&c. ouero 2.6.18.54.162.&c. che nel primo essempio s'auanzano tutti successiuamente nella proportione dupla; e nel sedo essempio s'auanzano nella proportione tripla. Questa proportionalità ancora ò è continua, ouero discontinua. Proportionalità continua si dice quando il primo termine al secondo è come il secondo al terzo, ed il terzo al quarto, &c. come ne' gli essempij antecedenti: e si chiama discontinua quando si fà interrompimento in modo, che sono proportionali à due à due; cioè il primo al secondo è come il terzo al quarto, ed ancora come il quinto al sesto, &c. come per essempio 2. 4. 5. 10. 12. 24, doue apparisce, che la proportione de i due 2. 4 è l'istessa, che la proportione de i due 5. 10, e de i due 12. 24; mà la proportione de i due 2. 4 non è l'istessa, che la proportione de i due 4. 5, ne come quella de i due 10. 12, &c.

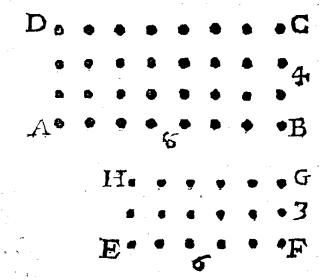
La proportionalità, ò Medietà Armonica, è quando tre numeri sono talmente disposti, che la proportione del massimo al minimo sia l'istessa, quale è quella frà la differenza del massimo, e medio, alla differenza frà il medio, e minimo in modo, che le differenze frà i prossimi non siano vguali, come nella medietà Aritmetica, ne siano nella medesima proportione, come si disse nella medietà Geometrica. Come per essempio sono i tre numeri 3. 4. 6, doue apparisce, che la proportione del numero 6 al numero tre è l'istessa, che la proportione, che hà la differenza frà il 6, e 4 alla differenza frà il quattro, ed il 3; poiche la proportione del 6 al 3 è dupla, ed ancora la proportione della

differenza frà il 6, e 4, ch'è 2, alla differenza frà il 4 e 3, ch'è 1, è dupla. E questi non hanno successiuamente la medesima differenza, ne meno il primo al secondo hà l'istessa proportione, che il secondo al terzo, come richiede la medietà Geometrica; questa proportionalità si chiama Armonica, stante che i numeri esposti secondo tal dispositione, per lo più hanno quelle proportioni, che si richiedono alle consonanze della Musica; come nel soprapposto esempio, doue la proportione del 4 à 3 è sesquitertia, la quale costituisce la consonanza, che si dice Diatessaron, ouero quarta. In oltre la proportione del 6 al 4 è sesquialtera, e questa costituisce la consonanza, che si dice Diapente, ouero quinta: e la proportione del 6 al 3 è dupla, la quale costituisce la consonanza che si chiama Diapason, ouero ottaua. Circa poi al modo di ritrouare quanti si voglia numeri nella proportionalità Aritmetica, ò Geometrica, ò Armonica si veda la mia Aritmetica Prattica, doue si troverà il tutto diffusamente spiegato,

X X I.

Quei numeri piani, ò solidi, si dicono essere frà di loro simili, i quali sono contenuti da lati proportionali.

Siano esposti i due numeri piani ABCD, EFGH, ed il numero piano ABCD, sia prodotto dalla multiplicatione de i numeri AB, BC; similmente il numero piano EFGH sia prodotto dalla multiplicatione dei due numeri EF, GF; definisce Euclide, che se i numeri, ò lati AB, BC, EF, FG sono proportionali, cioè se la proportione del numero AB al numero BC è come quella del numero EF al numero FG, i numeri piani ABCD, EFGH, contenuti da quelli, si dicono essere frà di loro simili. Il medesimo s'intende de' numeri solidi, cioè se i numeri, da' quali sono prodotti, sono proportionali, quei numeri solidi si dicono essere frà di loro simili. E però da notarsi, ch'Euclide nel definire i numeri piani simili, ed i numeri solidi simili, non assegna altre conditioni, se non che chiama simili quelli, che hanno i lati proportionali, stante che parla solo de' piani rettangoli, e de' solidi contenuti da piani rettangoli.



X X I I.

Numero perfetto è quello, ch'è vguale alle sue parti giunte insieme.

Quando vn numero è misurato da più numeri, quelli, che rappresentano le quantità delle volte, che lo misurano, si chiamano parti aliquote. Per esempio il numero 12 è misurato da tutti i seguenti numeri 12. 6. 4. 3. 2. cioè è mi-

è misurato dal 12 vna volta; dal 6 due volte; dal 4 tre volte; dal 3 quattro volte; e dal due sei volte. Hor quelli, che rappresentano le volte, che il numero 12 è misurato da i numeri 12. 6. 4. 3. 2. si chiamano parti aliquote, ch'in questo essempio sono 1. 2. 3. 4. 6. e secondo questa spiegatione si deuono intendere le parti, delle quali parla Euclide in questa definitione; e così diremo, che se le parti aliquote, secondo le quali vn numero è misurato da tutti i numeri, che lo possono misurare, giunte insieme, sono frà di loro vguali al medesimo numero misurato, tal numero si chiamerà numero perfetto, come è il numero 6, le di cui parti aliquote sono 1. 2. 3. le quali giunte insieme fanno giustamente 6. Similmente il numero 28 si dirà essere numero perfetto, stante che le sue parti aliquote 1. 2. 4. 7. 14, le quali, giunte insieme, fanno giustamente il medesimo numero 28.

Se tutte le parti aliquote d'vn numero, giunte insieme, sono minori del medesimo numero, all'hora quel numero si chiamerà numero diminuto; com'è il numero 8, il quale è misurato da i numeri 8. 4. 2; e le parti aliquote sono 1. 2. 4, che, giunte insieme, fanno il numero 7 minore del proposto numero 8.

Quando poi tutte le parti aliquote d'vn numero, giunte insieme, sono maggiori del medesimo numero; in tal caso quel numero si chiama numero abondante; come è il numero 12, il quale è misurato da i seguenti numeri 12. 6. 4. 3. 2, e le parti aliquote sono 1. 2. 3. 4. 6, che, giunte insieme, fanno il numero 16 maggiore del proposto numero 12.

Dopo spiegate le definitioni d'Euclide stimo bene aggiungere quì i seguenti postulati, ed assiomi introdotti da altri Autori per maggior spiegatione di quel che segue.

P O S T V L A T I.

I.

Si prende per concesso potersi pigliare quanti si voglia numeri, ò vguali, ò multiplici à qualunque altro numero.

I I.

Che si possa prendere vn numero maggiore di qualunque altro numero.

Benche il numero non si può diminuire in infinito, stante che l'vnità è la sua minima parte, con tutto ciò questo non impedisce, che non si possa accrescere quanto si vuole, coll'aggiungere sempre più, e più vnità: donde è manifesto, che à qualunque dato numero se gli può trouare altro numero maggiore, e più maggiore, quanto si vuole.

A S S I O M I.

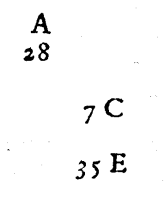
I.

Tutti i numeri, che sono vguali multiplici d'vn medesimo, ò d'altri numeri vguali, sono frà di loro vguali.

I I.

Quei numeri, de' quali vn medesimo è vgualmente multiplice, ouero de' quali gli vgualmente multiplici sono vguali, ancor essi sono frà di loro vguali.

Se il numero A è vgualmente multiplice de i due B, & C, i due numeri B, & C sono frà di loro vguali; ouero se i numeri vguali D, E sono vguali multiplici de i due B, C, i numeri B, & C sono frà di loro vguali.



I I I.

Tutti i numeri, che sono la medesima parte, ò le medesime parti dell'istesso numero, ouero di numeri vguali, sono frà di loro vguali.

I V.

I numeri, de' quali il medesimo numero, ouero numeri vguali, sono la medesima parte, ò le medesime parti, sono frà di loro vguali.

V.

L'vnità misura ogni numero secondo le vnità, che lo compongono, cioè lo misura tante volte, per quante sono le vnità, che lo compongono.

V I.

Ogni numero misura se medesimo secondo vna sola vnità, cioè lo misura vna sol volta.

V I I.

Se vn numero, multiplicato per vn altro, produce qualche numero, il multiplicante misura il prodotto secondo le vnità, che sono nel multiplicato, ed il multiplicato misura il medesimo, secondo le vnità, che sono nel multiplicante.

V I I I.

Se vn numero misura vn altro numero, quello, secondo il quale lo misura, misurerà il medesimo secondo le vnità, che sono in quello, che misura.

Per essempio il numero 4 misura il numero 12 secondo le vnità del numero 3, ed il numero 3 misura il medesimo numero 12 secondo le vnità del numero 4; cioè il numero quattro entra tre volte nel numero 12, ed all'incontro il numero 3 entra quattro volte nell'istesso numero 12.

I X.

Ogni numero, che misura vn altro numero, se multiplica quello, secondo il quale egli lo misura, ò è multiplicato da quello, produce il medesimo numero misurato.

Per essempio il numero 7 misura il numero 28 per il numero 4; se il numero 7 multiplica il numero 4, ouero il numero 4 multiplica il numero 7, sempre il prodotto sarà vguale al numero 28.

X.

Se vn numero misura due, o più numeri, misurerà ancora il composto da quelli.

X I.

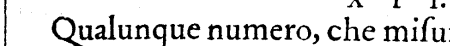
Qualunque numero, che misura vn altro numero, misurerà ancora il misurato da quello.

Se il numero 4 misura il numero 12, ed il numero 12 misura il numero 24; il numero 4 misurerà ancora il numero 24.

X I I.

Qualunque numero, che misura il tutto, e misura la parte detratta, misurerà ancora il rimanente.

Cioè se il numero AB misura tutto il numero CF, e misura la parte CD. Dico che misurerà ancora l'auanzo DF. Se il numero AB non misura l'auanzo DF, si detragga dal numero DF quanto si può il numero AB, e quel che resta sia EF; sarà EF minore di AB. Perche AB, per ipotesi, misura CD, e per costruttione misura DE, per il 10 assioma, misurerà ancora tutto il numero CE; s'aggiunga à CE la parte EF minore di AB; il numero AB non misurerà giustamente CF, ch'è contro all'ipotesi, essendosi supposto, ch'il numero AB misura tutto CF. Donde è manifesto, che se AB misura il tutto CF, e misura la parte CD, misurerà ancora il rimanente DF, ch'era da dimostrarsi:



THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se di due proposti numeri ineguali si detrae sempre quanto si può il minore dal maggiore reciprocamente, ed

il rimanente mai misuri quello, che l'antecede, fin tanto, che si peruenga all'vnità; i due numeri proposti saranno frà di loro primi.

Siano proposti i due numeri ineguali AB, CD, e dal maggiore AB, ne sia detratto quante volte si può il numero CD, e quel che resta, sia EB, sarà EB minore di CD; sia poi detratto da CD quanto si può il numero EB, e quel che resta sia FD; sarà FD minore di EB; similmente da EB ne sia detratto quanto si può il numero FD, e l'auanzo sia GB, e con questo ordine si proceda fin che si può; se in questa continua detrattione reciprocamente fatta, nissun auanzo misura il numero antecedente, ma che in questa continuata detrattione l'vltimo auanzo, come GB, sia l'vnità. Dico che i numeri AB, CD sono frà di loro primi; cioè che la loro commune misura è solamente l'vnità.

Se i numeri A B, C D non sono primi frà loro, qualche numero sarà loro commune misura; cioè l'vno, e l'altro sarà misurato da qualche numero. Sia, s'è possibile, quel numero, che li misura, il notato H. Perche il numero H, per la suppositione fatta, misura il numero CD; ed il numero CD, per ipotesi, misura il numero AE, il numero H dunque [a] misurerà il numero AE: ma il numero H, per ipotesi, misura il tutto AB, il numero H misurerà ancora [b] il rimanente EB. In oltre perche il numero E B, per ipotesi, misura CF; perciò il numero H [c] misurerà CF. Per suppositione il numero H misura il tutto CD; il numero H dunque misurerà ancora [d] il rimanente FD, E perche FD, per ipotesi, misura EG, in conseguenza il numero H [e] misurerà EG. Di più essendosi dimostrato, che il numero H misura il tutto EB; misurerà ancora [f] il rimanente GB; ma per ipotesi, GB rappresenta l'vnità, il numero H dunque misurerà l'vnità G B; il tutto misura la parte, ch'è impossibile. Non dunque alcun numero, fuor che l'vnità, misura i due numeri AB, CD; e perciò i numeri AB, CD sono frà di loro primi, ch'era da dimostrarsi.

A . . . . . E . . G . B
C . . . F . . D
H . . . . . .

a 11. assioma del 7.
b 12. assioma del 7.
c 11. assiom. del 7.
d 12. assiom. del 7.
e 11. assiom. del 7.
f 12. assiom. del 7.

SCOLIO.

La conuersa dell'antecedente propositione la fà il Campano nel seguente modo.

Se di due proposti numeri frà di loro primi si detrae sempre, quanto si può, il minore dal maggiore, con reciproca detrattione; nissuno degli auanzi, prima che si peruenga all'vnità, misurerà il numero antecedente.

Siano i due numeri AB, CD, frà di loro primi, e dal maggiore AB se ne detrag-

detragga quanto si può il minore CD, e l'auanzo sia EB; sarà EB minore di CD. Similmente dal numero CD se ne detragga quanto si può il numero EB, e l'auanzo sia FD, sarà FD minore di EB; poi dal numero EB se ne detragga quanto si può il numero FD; e quel che resta sia GB. Dico ch'in questa continua detrattione reciprocamente fatta, mai alcun'auanzo, prima di peruenire all'vnità, misurerà il numero antecedente. Misuri s'è possibile prima, che si peruenga all'vnità, l'auanzo GB il numero antecedente FD; perche FD, per ipotesi, misura EG, dunque l'auanzo GB [a] misurerà ancora il numero EG; mà l'auanzo GB misura se medesimo; perciò [b] misurerà ancora tutto il numero EB. In oltre perche GB misura EB; ed il numero EB, per ipotesi, misura CF; in conseguenza GB [c] misura CF: mà, per il supposto fatto, GB misura FD, dunque GB [d] misurerà CD. Il numero CD, per ipotesi, misura AE, perciò l'auanzo GB [e] misurerà AE. Di più perche GB misura AE, e per quel che s'è dimostrato, misura ancora EB; dunque GB [f] misurerà il tutto AB. Mà, per quel, che s'è dimostrato, GB misura tutto il numero CD; perciò l'auanzo GB sarà commune misura de i due proposti numeri AB, CD; per la qual cosa i numeri AB, CD [g] sono frà di loro composti, ch'è contro all'ipotesi; mentre furono supposti frà di loro primi. Non dunque alcun' auanzo, prima, che si peruenga all'vnità, misura il numero antecedente, ch'era da dimostrarsi.

A . . . . . E . . G — B
C . . . . . F . . D

a 11. assioma del 7.
b 10. assiom. del 7.
c 11. assioma del 7.
d 10. assiom. del 7.
e 11. assiom. del 7.
f 10. assiom.
g 14. defin. del 7.

Il P. Clauio aggiunge la seguente dimostratione.

Se di due proposti numeri frà di loro composti, si detrae sempre quanto si può il minore dal maggiore con reciproca detrattione; la detrattione non peruerrà fino all'vnità, ma peruerrà à tale auanzo, che misurerà il numero precedentemente detratto.

Perche se la detrattione peruiene fino all'vnità; cioè se l'vltimo auanzo sarà l'vnità, per la prima propositione di questo, i numeri proposti saranno frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi: non dunque la detrattione peruiene all'vnità, mà si peruiene à tale auanzo, che misura il numero precedentemente detratto, ch'era da dimostrarsi.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE II.

Dati due numeri non primi frà loro, ritrouare la loro massima commune misura.

Siano i due dati numeri, non primi frà loro AB, CD, e si voglia ritrouare la loro massima commune misura. Dal maggiore A B se ne detragga quanto si può il minore CD, e quel che resta sia EB; sarà EB mi-

nore

nore di CD. Similmente dal numero CD se ne detragga quanto si può il numero EB, e quel che resta sia FD: e continuandosi questa reciproca detrattione, col sottrarre sempre il minore dal maggiore fin à tanto, che si peruenga ad vn auanzo, che misuri il numero antecedente; non potendosi peruenire all'vnità, stante che se l'vltimo auanzo fosse l'vnità, i numeri AB, CD [m] sarebbero frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi. Sia dunque F D quell'auanzo, che misura l'antecedente numero E B. Dico che FD sarà la massima commune misura d'ambidue i proposti numeri AB, CD. Perche FD misura il numero EB, e per costruttione il numero E B misura CF; il numero dunque FD [a] misurerà CF: ma FD misura se medesimo, perciò FD [b] misura il tutto C D. In oltre il numero FD, per quel che si è dimostrato, misura il numero C D; il numero C D per costruttione misura AE; il numero dunque FD [c] misurerà AE: ma per ipotesi FD misura EB; perciò il numero FD [d] misura il tutto AB. Fù dimostrato, ch'il medesimo numero FD misura il tutto CD, in conseguenza FD sarà commune misura d'ambidue i numeri AB, CD.

A.....E.....B
C.....F..D
G-----

m 1. del 7.
a 11. assiom. del 7.
b 10. assiom. del 7.
c 11. assiom. del 7.
d 10. assiom. del 7.

Dico finalmente che FD è la massima commune misura de' medesimi numeri AB, CD. Perche se FD non è la massima commune misura, qualche altro numero sarà massima commune misura de i due AB, CD. Sia s'è possibile il numero G commune misura de i numeri A B, C D, e sia maggiore di FD. Perche G è commune misura de i due AB, CD, perciò G misurerà CD: ma CD per costruttione misura AE, il numero G [e] dunque misurerà AE; si disse che G misura il tutto AB, in conseguenza G [f] misurerà il rimanente EB. Di più, perche G misura E B, ed il numero EB misura CF, il numero G [g] misurerà ancora CF; ma G, per suppositione, misura tutta CD; misurerà [h] similmente l'auanzo FD. Fù supposto il numero G maggiore di FD, il maggiore dunque, cioè G, misura il minore FD, ch'è impossibile. Non dunque è maggiore di FD: per la qual cosa FD sarà la massima commune misura de i numeri A B, C D, ch'era da dimostrarsi.

e 11. assiom. del 7.
f 12. assiom. del 7.
g 11. assiom. del 7.
h 12. assiom. del 7.

Se poi detraendo quanto si può il minor numero CD dal maggiore AB, non auanzasse cos'alcuna, all'hora CD sarà la massima commune misura de i due AB, CD, stante che CD, misurando AB, misurarebbe ancora se medesimo, ch'è quanto si doueua dimostrare.

A.....B
C.....D

COROLLARIO

Da quel che s'è detto, è manifesto, che se vn numero misura due altri numeri, misurerà ancora la massima commune misura di quelli.

Nella dimostratione antecedente supponendo G commune misura de i due AB, CD, fù dimostrato, ch'il medesimo numero G misura la parte FD; se dunque

dunque FD sarà la massima commune misura de i due AB, CD; sarà manifesto, che G, essendo commune misura de i due AB, CD, misurerà ancora la loro massima commune misura FD, come si disse.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE III.

Dati tre numeri non primi frà di loro, ritrouare la loro massima commune misura.

Siano dati i tre numeri A, B, C, non primi frà di loro, e si voglia ritrouare la loro massima commune misura. Si troui prima [a] la massima commune misura de i due A, & B, che sia D. Se il numero D misura C, sarà D la massima commune misura de i tre dati numeri A, B, C: perche se non fosse D la massima, che misura i tre A, B, C, sarebbe qualche altro numero maggiore di D, che sia per essempio H. Perche D, per costruttione, è massima commune misura de i due A, & B, ed il numero H misura i due A, & B, per l'antecedente Corollario, il numero H misurerà ancora la massima commune misura D; dalche il numero maggiore misurarebbe il minore, ch'è impossibile; non dunque altro numero maggiore di D è massima commune misura de i tre A, B, C, ma la massima commune misura sarà il numero D, come si disse. Di nuouo supposto ch'il numero D non misuri il numero C. Perche i tre A, B, C, per ipotesi, sono numeri compositi; per la 14. definitione di questo, haueranno vna commune misura, la quale, se è commune misura di tutti tre i numeri A, B, C, sarà ancora commune misura de i due A, B; e per il Corollario antecedente, quello, che misura i due A, B, misurerà ancora la loro massima misura commune D: dal che quello, che misura i tre A, B, C, misura ancora il numero D; e perciò i due C, & D, [b] sono numeri compositi; si troui dunque [c] la massima commune misura de i due C, & D, che sia E. Dico che il numero E è massima commune misura de i tre dati numeri A, B, C. Perche il numero E misura i due C, & D; ed il numero D misura i due A, & B; il numero E [d] misurerà i due A, & B: ma per costruttione misura ancora C; dunque sarà E commune misura de i tre A, B, C. Dico finalmente, che non solo il numero E è commune misura de i tre A, B, C; ma che è la massima commune misura de i tre A, B, C. Se il numero E non è la massima commune misura, qualche altro numero maggiore di E sarà massima commune misura de i tre A, B, C, sia quello s'è possibile il notato F. Perche F misura i due A, & B, per il Corollario antecedente, misurerà ancora la loro massima commune misura D: ma il numero F, per la suppositione fatta, misura C, perciò F sarà misura commune de i due C, & D; e per il Corollario antecedente, F misurerà la loro massima commune misura E: per la qual cosa il numero maggiore F misura il numero minore E, ch'è impossibile. Non dunque altro numero maggiore di E è massima commune misura de i tre A, B, C; ma la loro massima commune misura sarà il numero E; ch'era da farsi, e dimostrarsi.

H.....
A.....
B.....D....
C.....E..F---

a 2. del 7.
b 14. defin. del 7.
c 2. del 7.
d 11. assiom. del 7.

COROLLARIO.

Quindi appare, che se vn numero misura tre numeri, misurerà ancora la massima commune misura di quei tre numeri.

Si è dimostrato nell'vltima parte dell'antecedente propositione, che se F misura i tre A,B,C, misurerà ancora il numero E: ma s'è dimostrato, che il numero E è la massima commune misura de i tre A, B, C; quel numero dunque, che misura i tre A, B, C, misurerà ancora la loro massima commune misura, come si disse.

Col medesimo ordine si può trouare la massima commune misura di più di tre numeri frà di loro non primi: cioè, se saranno quattro numeri, si troua prima la massima commune misura à tre di quelli, come antecedentemente si è fatto; e poi si troui la commune misura frà vno di quei tre, ed il quarto, quella sarà la massima commune misura di tutti quattro. Se i numeri saranno cinque, si troua prima la massima commune misura di quattro di quelli, e poi si troui la massima commune misura di vno di quei quattro, e del quinto; quella sarà la massima commune misura di tutti cinque. E con quest'ordine si procederà se saranno più di cinque; e sempre quel numero, che misura tutti i numeri, misurerà ancora la loro massima commune misura, come s'è detto nell'antecedente Corollario: poiche la medesima dimostratione fatta, quando sono tre soli numeri, si può fare quando sono più di tre.

THEOREMA II. PROPOSITIONE IV.

Ogni numero ò è parte, ò è parti d'ogn'altro numero maggiore.

Siano due numeri come A, & B; e sia il numero A minore del numero B. Dico che il numero A ò è parte del numero B, ouero è tante parti del numero B. Siano prima i numeri A, & B frà di loro primi. Perche qualunque vnità del numero A è parte del numero B, conterrà il numero A tante parti di B, per quante vnità sono nel medesimo numero A; per la qual cosa il numero A sarà parti di B, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

A.....
B.....

In oltre non siano A, & B numeri primi; se il numero A misura il numero B, per la terza definitione di questo, sarà A parte di B. Finalmente non sia A parte di B: perche A, & B, per suppositione non sono numeri primi, si troui, per la prima propositione di questo, la loro commune misura, che sia C. Perche C misura A, perciò A si può diuidere nelle parti vguali à C; si diuida dunque il numero A nelle parti vguali à C, che siano AD, DE, EF. Perche C misura il numero B, ed AD è vguale al numero C; perciò AD misu-

A..D..E..F
B.....
C..

misurerà il numero B; e per la terza definitione, AD sarà parte di B. Nell'istesso modo si dimostrerà, che DE è parte di B, e che EF è parte del medesimo numero B; e perciò i numeri AD, DE, EF saranno tante parti di B, per quante volte C misura AF. Per la qual cosa ogni numero ò è parte, ouero è parti d'ogn'altro numero maggiore, che era da dimostrarsi.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

Se vn numero è parte d'vn numero, ed vn altro numero è la medesima parte d'vn altro; i due, che sono parte, giunti insieme, saranno parte degli altri due, come vno è parte di vno, ò l'altro è parte dell'altro.

Sia il numero A parte di BC, come D è parte di EF. Dico che i due numeri A, & D insieme, sono parte di BC, EF insieme, come A è parte di BC, e come D è parte di EF.

A..... D.....
B.....G.....C E.....H.....F

Perche A è parte di BC, come D è parte di EF; tante volte A misurerà BC, per quante volte D misura EF. Si diuida il numero BC nelle parti vguali ad A, che siano BG, GC; e si diuida il numero EF nelle parti vguali al numero D, che siano EH, HF. Perche A è vguale à BG, ed il numero D è vguale ad EH; al numero A s'aggiunga D, ed al numero BG s'aggiunga EH: i due A, & D insieme giunti, saranno vguali à i due BG, & EH insieme. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i due A, & D insieme, sono vguali à i due GC, HF insieme: dal che tante volte A, & D insieme, misura le due BC, EF insieme, per quante volte A misura BC, ouero D misura EF. Per la qual cosa le due A, & D insieme, sono parte de i due BC, EF insieme, come A è parte di BC, e come il numero D è parte di EF; che era da dimostrarsi.

SCOLIO.

Quel, che s'è detto nell'antecedente propos. di due soli numeri, si deue intendere ancora di più di due numeri: cioè, se quanti si voglia numeri, di quanti si voglia altri numeri, ciascuno da per se, è la medesima parte del suo corrispondente, tutti insieme sono tal parte di tutti gli altri insieme, come vno è parte di vno. E la dimostratione è la medesima, che si è fatta antecedentemente.

Qui si può ancora dimostrare che se quanti numeri si vogliano sono vguali multiplici di altretanti numeri, tutti insieme saranno multiplici di tutti insieme, come vno è multiplice di vno.

Siano i numeri A, & C vguali multiplici de i numeri B, & D. Dico che A è multiplice di B, ouero C è multiplice di D, come i numeri A, & C, insieme, sono multiplici de' numeri B, & D insieme. Perche A è multiplice di B come C è multiplice di D; tante volte B misura il numero A, per quante volte D misura il numero C: dal che B è parte di A come D è parte di C; e per l'antecedente propositione B, & D insieme sono parti di A, & C insieme, come B è parte di A, e come D è parte di C: per la qual cosa B, & D insieme, misura A, & C insieme, tante volte, per quante volte B misura A; ouero D misura C: e perciò A, & C insieme, è multiplice di B, & D insieme, come A è multiplice di B, e come C è multiplice di D, che era da dimostrarsi.

A C
B ..... D

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VI.

Se due, ò più numeri, sono vgualmente parti di altretanti numeri; tutti saranno parti di tutti, come vno è parti di vno.

Sia il numero AB tale parti del numero C, quale parti è DE del numero F. Dico che AB, DE insieme, sono tali parti di C, ed F insieme, quali parti è AB di C; e quali parti è DE di F. Perche AB è tante parti di C, per quante parti è DE di F; saranno in AB tante parti di C, per quante in DE sono parti di F. Si diuida AB nelle parti di C, e siano AG, GB; cioè AG sia parte di C, ed anco GB sia parte di C. Similmente si diuida DE nelle parti di F, che siano DH, HE, cioè, che DH sia parte di F, ed anco HE sia parte di F; la moltitudine delle parti in AB sarà vguale alla moltitudine delle parti in DE. E perche AB è tale parti di C, quale parti è DE di F; ogn'vna delle parti in AB sarà parte di C, come ogn'vna delle parti in DE è parte di F: dal che AG è parte di C, come DH è parte di F: donde le due insieme AG, DH, [a] saranno parte delle due insieme C, ed F, come AG è parte di C, ouero DH è parte di F. Nell'istesso modo si proverà, che li due insieme GB, HE sono parte delli due insieme C, ed F, come GB è parte di C, ouero HE è parte di F; e perciò AB, DE insieme, sono parti di C, ed F insieme, come AB è parti di C, ouero DE è parti di F. L'istesso si dimostrerà se i numeri saranno più di due. Per la qual cosa se due, ò più numeri, sono vguali parti di altretanti numeri, tutti sono parti di tutti, come vno è parti di vno, che era da dimostrarsi.

A ... G ... B
C .....
D .... H .... E
F .....

[a] 5. del 7.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Se vn numero è parte d'vn altro numero, come il numero detratto dall'vno è parte del numero detratto dall'altro;

tro; il rimanente sarà parte del rimanente, come tutto è parte di tutto.

Sia il numero AB parte di CD come AE è parte di CF. Dico che il rimanente numero EB è parte del rimanente FD, come tutto il numero AB è parte di tutto il numero CD. Si concepisca il numero CG in modo, che EB sia parte di CG, come AE è parte di CF; cioè come tutto il numero AB è parte di tutto il numero CD. Perche EB è parte di CG, come AE è parte di CF; sarà tutto AB [a] parte di tutto GF, come AE è parte di CF; cioè come tutto AB è parte di CD: e perciò sarà il medesimo numero AB tale parte di GF, quale parte è di CD; per la qual cosa [b] i numeri GF, CD sono frà di loro vguali: se ne leui il commune CF, resta GC vguale ad FD; preso EB come terza quantità, sarà EB tale parte di FD, quale è di CG: ma EB, per costruttione, è parte di CG, come tutto AB è parte di tutto CD; sarà il rimanente numero EB, parte del rimanente numero FD, come tutto AB è parte di tutto CD, che era da dimostrarsi.

A .... E .. B
G .... C ..... F .... D

[a] 5. del 7.

[b] 4. assioma del 7.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Se vn numero è tante parti d'vn altro numero, per quante parti è il numero detratto dall'vno del numero detratto dall'altro; il rimanente sarà tante parti del rimanente, per quante parti è tutto di tutto.

Sia il numero AB tante parti di CD, per quante parti è il numero AE del numero CF. Dico che il rimanente EB sarà tante parti del rimanente FD, per quante parti è tutto il numero AB di tutto il numero CD. Si concepisca il numero CG in modo, che EB sia tante parti di CG, per quante parti è il numero AE di CF, sarà tutto il numero AB tante parti di GF, [a] per quante parti è AE di CF: ma, per ipotesi, AE è tante parti di CF, per quante parti è AB di CD; sarà AB tante parti di GF, per quante parti è il medesimo numero AB di CD: per la qual cosa i numeri GF, CD [b] sono frà di loro vguali; se ne leui il commune CF, resta GC vguale ad FD; dal che tante parti è il numero EB di FD, per quante parti è il medesimo numero EB di GC: ma, per costruttione, EB è tante parti di CG, per quante parti è AE di CF; sarà EB tante parti di FD, per quante parti è AE di CF; cioè per quante parti è tutto il numero AB di tutto il numero CD, come fù proposto dimostrare.

A ..... E .... B
C D. G ..... C ..... F ..... D

[a] 6. del 7.

[b] 4. assioma del 7.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

Se vn numero è parte d'vn numero, come vn altro nu-

mero è parte d'vn altro numero; permutando, quale parte, ò parti è il primo del terzo, la medesima parte, ò le medesime parti, sarà il secondo del quarto.

Sia il numero A la medesima parte del numero BC, quale parte è il numero D del numero EF; e sia A minore di D, ed il numero BC minore di EF. Dico che, permutando, quale parte, ò parti è il primo A del terzo D; tale parte, ò parti sarà il numero BC del numero EF. Perche A è la medesima parte di BC, quale è il numero D di EF; tante volte A misurerà BC, per quante volte D misura il numero EF. Si diuida BC nelle parti vguali ad A, che siano BG, GC; e si diuida EF nelle parti vguali à D, che siano EH, HF; tante parti saranno in BC vguali ad A, per quante ne sono in EF vguali à D. In oltre perche A è vguale à BG, ed il numero D è vguale ad EH; tale parte, ò parti sarà A di D, quale parte, ò parti è BG di EH. Similmente, essendo A vguale à GC, ed il numero D vguale ad HF, tale parte ò parti sarà A di D, quale parte, ò parti è GC di HF; ma tale parte, ò parti è A di D, quale parte, ò parti è BG di EH; tale parte, ò parti dunque sarà BG di EH, quale parte, ò parti è GC di HF: dal che tutto il numero BC [a] sarà tale parte, ò parti, di tutto il numero EF, quale parte, ò parti è BG di EH; ma si disse che tale parte, ò parti è BG di EH, quale parte, ò parti, è A di D; tale parte, ò parti dunque è il numero A del numero D, quale parte, ò parti, è il numero BC del numero EF, che era da dimostrarsi.

a 5. e 6. del 7

A....
B....G....C
D.....
E.....H.....F

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE X.

Se di quattro numeri il primo è tante parti del secondo, per quante parti è il terzo del quarto; permutando, il primo sarà tante parti, ò tale parte del terzo, per quante parti, ò quale parte, è il secondo del quarto.

Sia il numero AB tante parti del numero C, per quante parti è il numero DE del numero F; e sia AB minore di DE, ed il numero C minore di F. Dico che il numero AB sarà tante parti, ò tale parte, del numero DE, per quante parti, ò quale parte, è il numero C del numero F. Si diuida AB nelle parti di C, che siano AG, GB; cioè AG è tale parte di C, quale parte è GB del medesimo numero C; donde AG, GB sono frà di loro vguali. Similmente si diuida DE nelle parti di F, che siano DH, HE; sarà DH tale parte di F, quale parte è HE del medesimo numero F; e così li due DH, HE sono frà di loro vguali. E perche AB è tante parti di C, per quante parti è DE di F; saranno in AB tante parti di C, per quante parti sono in DE di F; e perciò vna delle parti, che sono in AB, sarà tale parte di C, quale parte è vna di quelle, che sono in DE di F;

A..G..B
C.....
D.....H.....E
F.....

cioè sarà AG tale parte di C, quale parte è DH di F; e permutando, sarà AG [a] tale parte, ò parti, di DH, quale parte, ò parti è il numero C del numero F. Nell'istesso modo si proverà, che tale parte, ò parti è GB di HE, quale parte, ò parti, è C di F. Per la qual cosa tale parte, ò parti è AG di DH, quale parte, ò parti è GB di HE; e perciò tutto AB [b] sarà tale parte, ò parti di tutta DE, quale parte, ò parti è AG di DH. Ma quale parte, ò parti è AG di DH, per quel che si è dimostrato, tale parte, ò parti è C di F; quale parte, ò parti dunque è il numero AB del numero DE, tale parte, ò parti sarà C di F, che era da dimostrarsi.

a 9. del 7.

b 5. & 6. del 7.

SCOLIO.

Prima di passare in altro, stimo bene dimostrare ne i numeri quella medesima passione, che fù dimostrata nel Corollario alla quarta propositione del quinto Libro.

Se di quattro numeri la proportione del primo al secondo è come quella del terzo al quarto; inuertendo, il secondo al primo hauerà l'istessa proportione, che il quarto al terzo.

Siano i quattro numeri A, B, C, D, ed habbia il primo A al secondo B l'istessa proportione, quale hà il terzo C al quarto D. Dico che, inuertendo, B ad A sarà come D à C. Supposto prima, che A, & C siano minori di B & D. Perche A à B, per ipotesi, è come C à D; sarà A [a] parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di D: se A è parte di B, come C è parte di D; sarà B multiplice di A, come D, è multiplice di C; e perciò B ad A [b] sarà come D à C. Se A è parti di B, come C è parti di D; all'hora B, & D [c] conterranno vgualmente i numeri A, & C, e di più conterranno la medesima parte, ò le medesime parti di A, & C; e per la 20. definitione di questo B ad A sarà come D à C.

A.....C.....
B.....D.....

a 20. defin. del 7.

b 20. defin. del 7.

c 20. defin. del 7.

Di nuouo siano li due A, & G maggiori de i due B, & D. Perche A à B, è come C à D, i due A, & C [d] saranno ò vguali multiplici de i due B, & D; ouero conterranno vgualmente i due B, & D, e di sopra più la medesima parte, ò le medesime parti di B, & D. Se A, & C sono vguali multiplici di B, & D, sarà B parte di A, come D è parte di C: dalche B ad A [e] sarà come D à C. Se poi li due A, & C contengono vgualmente li due B, & D, e di sopra più la medesima parte, ò le medesime parti di B, & D; sarà B parti di A, come D è parti di C. Per la qual cosa B ad A [f] sarà come D à C, come fù proposto dimostrare.

A.....C.....
B.....D.....

d 20. defin. del 7.

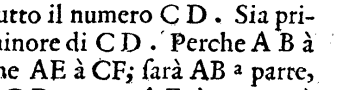
e 20. defin. del 7.

f 20. defin. del 7.

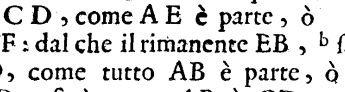
THEOREMA IX. PROPOSITIONE XI.

Se tutto vn numero à tutto vn altro numero è come la parte detratta dall'vno alla parte detratta dall'altro, il rimanente al rimanente sarà come il tutto al tutto.

Sia tutto il numero AB à tutto il numero CD, come la parte AE alla parte CF. Dico che l'auanzo EB all'auanzo FD, è come tutto il numero AB à tutto il numero CD. Sia prima AB minore di CD. Perche AB à CD è come AE à CF, sarà AB [a] parte, ò parti di CD, come AE è parte, ò parti di CF: dal che il rimanente EB, [b] sarà parte, ò parti, del rimanente FD, come tutto AB è parte, ò parti di tutto CD; e perciò EB ad FD [c] sarà come AB à CD.



In oltre sia AB maggiore di CD: perche AB à CD, per ipotesi, è come AE à CF, inuertendo, CD ad AB [d] sarà come CF ad AE; e sarà CD parte, ò parti di AB, [e] come CF è parte, ò parti di AE; dalche il rimanente FD [f] sarà parte, ò parti di EB, come CD è parte, ò parti di AB; e perciò FD ad EB [g] sarà come CD ad AB; ed inuertendo, EB ad FD [h] sarà come AB à CD, ch'era da dimostrarsi.

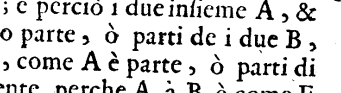


a 20. defin. del 7.
b 7. & 8. del 7.
c 20. defin. del 7.
d Scol. ant.
e 20. defin.
f 7. & 8. del 7.
g 20. defin. del 7.
h Scol. ant.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XII.

Se quanti si voglia numeri sono proportionali; sarà vno antecedente ad vn conseguente, come tutti gl'antecedenti insieme à tutti li conseguenti insieme.

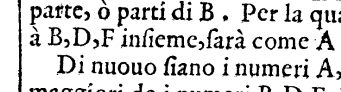
Siano quanti si voglia numeri proportionali A,B, C,D,E,F; cioè sia A à B come C à D, e come E ad F. Dico che tutti gli antecedenti A,C,E, insieme à tutti i conseguenti B, D, F, insieme, sono come l'antecedente A al conseguente B; ouero come C à D, ò pure come E ad F. Siano prima i numeri A,C, E minori de i numeri B, D, F. Perche A à B, per ipotesi, è come C à D, sarà A [a] parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di D; e perciò i due insieme A, & C [b] saranno parte, ò parti de i due B, D [i] insieme, come A è parte, ò parti di B; similmente perche A à B è come E ad F, sarà A [c] parte, ò parti di B, come E è parte ò parti di F; ma per quel, che si è dimostrato A è parte, ò parti di B, come A, C, è parte, ò parti di B,D; sarà A,C parte, ò parti di B,D, come E è parte, ò parti di F; dalche A,C,E insieme, saranno parte, ò parti di B,D,F [d] insieme, come A,C, insieme, sono parte, ò parti di B, D, insieme; cioè, come A è



a 20. defin. del 7.
b 5. e 6. del 7.
c 20. defin.
d 5. e 6. del 7.

parte, ò parti di B. Per la qual cosa la proportione di A,C,E, [e] insieme, à B,D,F insieme, sarà come A à B.

Di nuouo siano i numeri A,C,E maggiori de i numeri B,D,F. Perche A à B è come C à D, sarà, inuertendo, B ad A, [f] come D à C; e sarà B [g] parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di C. Similmente, perche A à B è come E ad F, inuertendo, B ad A [h] sarà come F ad E; e sarà B parte, ò parti di A, [k] come F è parte, ò parti di E: ma per quel che si è dimostrato, B è parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di C; sarà F parte, ò parti di E, come D è parte, ò parti di C. Per la qual cosa i numeri B,D,F sono vgualmente parte, ò parti de i numeri A,C,E; e per quel che si è dimostrato nel principio, i numeri B,D,F, [l] insieme, à i numeri A,C,E, insieme, sono come il numero B al numero A; ed inuertendo, i numeri A, C, E, [m] insieme, à i numeri B,D,F, insieme, sono come A à B, ch'era da dimostrarsi.



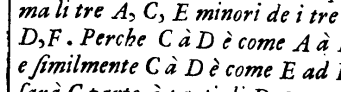
e 20. defin. del 7.
f Scol. alla prop. 10. del 7.
g 20. defin. del 7.
h Scol. alla prop. 10. del 7.
k 20. defin. del 7.
l 5. e 6. del 7.
m Scol. alla prop. 10. del 7.

SCOLIO.

Quì facilmente, con modo simile à quello tenuto nell'antecedente propositione, si può prouare quel, che dimostra Euclide nell'vndecima propositione del quinto Libro; cioè.

Ne i numeri le proportioni, che sono le medesime ad vna terza, sono le medesime frà di loro.

Habbia il numero A al numero B l'istessa proportione, che il numero C al numero D; e sia E ad F come C à D. Dico che la proportione di A à B è l'istessa, che quella di E ad F. Siano prima li tre A, C, E minori de i tre B, D, F. Perche C à D è come A à B; e similmente C à D è come E ad F; sarà C parte, ò parti di D, [a] come A è parte, ò parti di B; e come E è parte, ò parti di F; dalche A è parte, ò parti di B, come E è parte, ò parti di F; e perciò A à B [b] sarà come E ad F. Di nuouo siano le tre A,C,E, maggiori delle tre B, D, F. Perche C à D, è come A à B, sarà, inuertendo, D à C [c] come B ad A: e similmente D à C sarà come F ad E; e per quel, che si è dimostrato, B ad A sarà come F ad E; ed inuertendo, A à B [d] sarà come E ad F, ch'era da dimostrarsi.



a 20. defin. del 7.
b 20. defin. del 7.
c Scol. alla 10. prop. del 7.
d Scol. alla 10. prop. del 7.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Se quattro numeri sono proportionali, permutandosi saranno ancora proportionali.

Siano i quattro numeri A,B,C,D, proportionali; e sia il numero A al

numero B, come C à D. Dico che, permutandoſi, A à C ſarà come B à D. Siano prima A, & C minori de i due B,& D; e ſia A minore di C, come nella prima figura. Perche A à B è come C à D, ſarà A [a] parte, o parti di B, come C è parte, ò parti di D; e permutando, il numero A [b] ſarà parte, ò parti di C, come B è parte, ò parti di D; e perciò A à C ſarà come B à D. Di nuouo ſiano A, & C minori de' numeri B, & D, e ſia A maggiore di C, come nella ſeconda figura. Perche A à B è come C à D, ſarà A [c] parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di D; cioè C ſarà parte, ò parti di D, come A è parte, ò parti di B: e permutando, C [d] ſarà parte ò parti di A, come D è parte, ò parti di B: per la qual coſa C ad A [e] ſarà come D à B; ed inuertendo, A à C [f] ſarà come B à D. In oltre ſiano A, & C maggiori di B, & D, e ſia A minore di C. Perche A à B è come C à D, inuertendo B ad A [g] ſara come D à C; donde B [h] ſarà tale parte, ò parti di A, quale è D di C; e permutando, B [K] ſarà parte, ò parti di D, come A è parte, ò parti di C; cioè A è parte, ò parti di C, come B è parte, ò parti di D: e perciò la proportione di A à C [l] ſarà come quella di B à D. Siano poi due A, & C maggiori de i due B, & D; e ſia A maggiore di C. Perche C à D, per ipoteſi, è come A à B; inuertendo, D à C [m] ſarà come B ad A; dalche D ſarà parte, ò parti di C, [n] come B è parte, ò parti di A; e permutando, D [o] ſarà parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di A: cioè C è parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di B; e perciò C ad A [p] ſarà come D à B; ed inuertendo, A à C [q] ſarà come B à D.

Di più ſe A è vguale à B, ed il numero C vguale à D, ed A ſia minore di C, ſarà A parte, ò parti di C, come B è parte, ò parti di D; e perciò A à C [r] ſarà come B à D. Finalmente ſia A vguale à B, ed il numero C vguale à D, e ſia A maggiore di C; ſarà C parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di B; dalche la proportione di C ad A, [f] ſarà come quella di D à B; ed inuertendo, A à C [t] ſarà come B à D, ch'era da dimoſtrarſi.

a 20. defin. del 7.
b 9. e 10. del 7.
c 20. defin. del 7.
d 9. e 10. del 7.
e 20. defin. del 7.
f Scol. alla 10. prop. del 7.
g Scol. alla 10. prop. del 7.
h 20. defin. del 7.
K 9. & 10. del 7.
l 20. defin. del 7.
m Scol. alla 10. prop. del 7.
n 20. defin. del 7.
o 9. e 10. del 7.
p 20. defin. del 7.
q Scol. alla 10. del 7.
r 20. defin. del 7.
f 20. defin. del 7.
t Scol. alla 10. del 7.

A . . . C . . . . . B . . . . D . . . . . A . . . C . . . . . B . . . . D . . . . . A . . . . C . . . . . B . . . D . . . . . A . . . . . C . . . , B . . . . . D . . . A . . . C . . . . . B . . . . D . . . . .

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIV.

Se ſiano quanti numeri ſi vogliano da vna parte, ed altrettanti d'vguale moltitudine da vn altra parte, e ſiano proportionali à due à due; per l'egualità, il primo all'vltimo è come il primo all'vltimo.

Siano quanti numeri ſi vogliano A, B, C, da vna parte, & altrettanti, come

me D, E, F, da vn altra parte, e ſia A à B, come D ad E, e B à C, come E ad F. Dico che per l'egualità, A à C ſarà come D ad F. Perche A à B, per ipoteſi, è come D ad E, permutando, A à D [a] ſarà come B ad E. Similmente, eſſendo B à C come E ad F; ſarà, permutando, B ad E [b] come C ad F: ma B ad E è come A à D, ſarà A ad D [c] come C ad F; e permutando, A à C [d] ſarà come D ad F. Se i numeri propoſti ſaranno più di tre per parte, e ſia C à G come F ad H: perche A à C è come D ad F, e C à G è come F ad H, per quel che ſi è dimoſtrato, A à G ſarà come D ad H. Ed il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe i numeri propoſti ſaranno più di quattro per parte, il che era da dimoſtrarſi.

a 13. del 7.
b 13. del 7.
c Scol. alla 12. propoſ. del 7.
d 13. del 7.

A . . . . . D . . . . . B . . . . . E . . . . . C . . . , F . . . G . . . . . H . . . . .

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

Se l'vnità miſura vn numero, ed vn terzo numero miſura vgualmente vn altro numero; permutandoſi, l'vnità miſurerà il terzo numero, come il ſecondo miſura il quarto.

Miſuri l'vnità A il numero BC, come il numero D miſura il numero EF. Dico che permutandoſi, l'vnità A miſurerà il numero D, come il numero BC miſura il numero EF. Si diuida BC nelle vnità BG, GH, HC; e ſi diuida EF nelle parti vguali al numero D, che ſiano EI, IK, KF. Perche l'vnità A miſura BC, come il numero D miſura EF, la moltitudine delle vnità in BC ſarà vguale alla moltitudine delle parti in EF: e perche il numero D è vguale ad EI, l'vnità A miſurerà il numero D come l'vnità B G miſura il numero E I. Nell'iſteſſo modo l'vnità A miſura il numero D, come l'vnità G H miſura il numero IK; e come l'vnità HC miſura il numero KF; e perciò il numero BC miſura il numero EF, come l'vnità BG miſura l'vnità EI, cioè come l'vnità A miſura il numero D; il che era da dimoſtrarſi.

A . . . B . . . . D . . . . . C . . . . . E . . I . . K . . F

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVI.

Se due numeri ſi multiplicano ſcambieuolmente, i prodotti ſono frà di loro vguali.

Siano due qualunque numeri A, & B, e, multiplicando il numero A per il numero B, il prodotto ſia il numero D; ſimilmente multiplicando il numero B per il numero A, il prodotto ſia il numero C. Dico che i prodotti D, & C, ſono frà di loro vguali. Si eſponga l'vnità E. Perche multiplicando il numero A

A . . . B . . . . E . D . . . . . C . . . . . .

per il numero B il prodotto è il numero D, sarà D composto di tante volte A, [a] per quante vnità sono in B; e perciò A misura il numero D, come l'vnità E misura il numero B; cioè, l'vnità E misura il numero B, come il numero A misura il numero D; e permutandosi, l'vnità E misura il numero A, [b] come il numero B misura il numero D. In oltre, perche, multiplicando il numero B per il numero A, si produce il numero C, il prodotto C [c] sarà composto di tante volte il numero B, per quante vnità sono nel numero A; e perciò l'vnità E misurerà tante volte il numero A, come il numero B misura il numero C: ma si disse, che l'vnità E misura il numero A, come il numero B misura il numero D; il numero dunque B misura vgualmente i numeri D, & C; e perciò i prodotti D, & C [d] sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

E.
A... B....
D..... C.....

a 15. defin. del 7.
b 15. del 7.
c 15. defin. del 7.
d 4. assioma del 7.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se vn numero, multiplicando due numeri, produce due altri numeri; i prodotti sono frà di loro come i numeri multiplicati.

Sia il numero A, il quale, multiplicando il numero B, produca il numero D; e multiplicando il numero C, produca il numero E. Dico che il prodotto D al prodotto E, è come il numero multiplicato B al numero multiplicato C. Si prenda l'vnità F, sarà il prodotto D composto di tante volte il numero B, [a] per quante volte l'vnità F misura il numero A; ed il prodotto E sarà composto di tante volte il numero C, [b] per quante volte l'vnità F misura il numero A: per la qual cosa il numero B misura il numero D, come l'vnità F misura il numero A; ed il numero C misura tante volte il numero E, per quante volte l'vnità F misura il numero A; e perciò il numero B misura il numero D, come il numero C misura il numero E: dal che la proportione di B à D [c] sarà come quella di C ad E; e permutando, il numero multiplicato B al numero multiplicato C, [d] sarà come il prodotto D al prodotto E, che era da dimostrarsi.

F.
A...
B.. C....
D..... E.....

a 15. defin. del 7.
b 15. defin. del 7.
c 20. defin. del 7.
d 13. del 7.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Se due numeri, multiplicando vn medesimo numero, producono due altri numeri; i prodotti sono frà di loro come i multiplicanti.

Siano i numeri A, & B; ed il numero A, multiplicando il numero C, produca il numero D; come ancora il numero B, multiplicando il medesimo

simo numero C, produca il numero E. Dico che il prodotto D al prodotto E sarà come il multiplicante A al multiplicante B. Perche il prodotto del numero A nel numero C [a] è vguale al prodotto del numero C nel numero A; ed il prodotto del numero A nel numero C, per ipotesi, è il numero D; multiplicando dunque C il numero A, produrrà il numero D: e per l'istessa ragione C multiplicando il numero B, produrrà il numero E; dal che i numeri A, & B, che prima erano multiplicanti, à questa seconda esposizione, vengono ad essere numeri multiplicati; e per l'antecedente propositione, il prodotto D al prodotto E sarà come il numero A al numero B, ch'era da dimostrarsi.

A.... B.....
C...
D..... E.....

a 16. del 7.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se quattro numeri sono proportionali, il prodotto, fatto dalla multiplicatione de gli estremi, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione de i medij: e se il prodotto fatto dalla multiplicatione degli estremi è vguale al prodotto de i medij; i quattro numeri sono proportionali.

Siano i quattro numeri proportionali A, B, C, D; e sia A à B come C à D. S'intenda multiplicato il primo A per il quarto D, ed il prodotto sia E. Similmente s'intenda multiplicato il secondo B per il terzo C, ed il prodotto sia F. Dico che i prodotti E, ed F, sono frà di loro vguali. E per dimostrarlo, si multiplichi il numero A per il numero C, ed il prodotto sia G. Perche i numeri C, & D sono multiplicati dal numero A, ed i prodotti sono E, & G; sarà il prodotto E al prodotto G [a] come C à D: ma C à D, per ipotesi, è come A à B; sarà E à G [b] come A à B. In oltre perche i numeri A, & B, multiplicando il numero C, producono i numeri F, & G; sarà il prodotto F al prodotto G, [c] come A à B: ma fù dimostrato E à G essere come A à B; sarà E à G [d] come F al medesimo numero G: dal che E, ed F [e] ò sono vguali multiplici di G, ò vgualmente parte, ò le medesime parti &c. di G; e perciò sono frà di loro vguali, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.

A...
B..
C.....
D....
E.....
F.....
G.....

a 17. del 7.
b Scol. alla 12. del 7.
c 18. del 7.
d Scol. alla 12. del 7.
e 20. defin. del 7.

Di nuouo sia E il prodotto fatto dalla multiplicatione del primo A nel quarto D; ed F sia il prodotto del secondo B nel terzo C; e supposto il prodotto E vguale al prodotto F. Dico che A à B è come C à D. Si multiplichi di nuouo il numero A nel numero C, ed il prodotto sia G. Perche i numeri C, & D, multiplicati per il numero A, producono i numeri E, & G; sarà C à D [f] come E à G. Similmente perche i numeri A, & B, multiplicando il numero C, producono i numeri F, & G; sarà A à B [g] come

f 17. del 7.
g 18. del 7.

F à G. In oltre perche i prodotti E, ed F, ſono frà di loro vguali, preſo G come terza quantità, gli vguali numeri E, ed F ſaranno, ò vgualmente multiplici del numero G, ò vgualmente parte, ò le medeſime parti, ouero conterranno vgualmente G in qualche parte, ò parti di G; e per la 20. definitione di queſto, ſarà E à G come F à G: ma F à G, per quel che ſi è dimoſtrato, è come A à B; e la proportione di E à G è come C à D; ſarà A à B [h] come C à D, il che era da dimoſtrarſi.

A . . .
B . .
C . . . . .
D . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .
G . . . . . .

h Scol. alla 12. del 7.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se tre numeri ſono proportionali, quello, che ſi produce dagli eſtremi, è vguale à quello, che ſi produce dal medio, multiplicato in ſe medeſimo; e ſe quello, che ſi produce dagli eſtremi, è vguale à quello, che ſi produce dal medio, i tre propoſti numeri ſono proportionali.

Siano i tre numeri proportionali A, B, C; e ſia A à B come B à C. Dico prima che il prodotto fatto da gli eſtremi A, & C, è vguale al prodotto di B in ſe medeſimo; cioè vguale al quadrato di B. Sia eſpoſto il numero D vguale al numero B, ſarà D à C, come B al medeſimo numero C: ma B à C, per ipoteſi, è come A à B; ſarà A à B [a] come D à C; e per l'antecedēte propoſitione, il prodotto fatto dalla multiplicatione de gli eſtremi A, & C, è vguale al prodotto de i medij B, & D: ma il prodotto di B in D è vguale [b] al prodotto di B in ſe medeſimo; ſarà il prodotto de gli eſtremi A, & C, vguale al prodotto di B in ſe medeſimo, che era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . .

a Scol. alla 12. del 7.

b 18. defin. del 7.

Di nuouo ſia il prodotto fatto dalla multiplicatione de gli eſtremi A, & C, vguale al prodotto del medio B in ſe medeſimo. Dico che A à B è come B à C. Si prenda di nuouo il numero D vguale al numero B; ſarà il prodotto di B in D [c] vguale al prodotto di B in ſe medeſimo: ma il prodotto di B in ſe medeſimo, per ipoteſi, è vguale al prodotto de gli eſtremi A, & C; ſarà il prodotto de gli eſtremi A, & C, vguale al prodotto de i medij B, & D: e per la ſeconda parte dell'antecedente propoſitione, ſarà A à B come D à C: ma D à C è come B à C (ſtante che D è vguale à B) ſarà A à B [d] come B à C, ch'era da dimoſtrarſi.

c 18. defin. del 7.

d Scol. alla 12. del 7.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Di tutti i numeri, che hanno la medeſima proportione, i minimi miſurano vgualmente i maggiori; cioè il minore miſura il minore, ed il maggiore miſura il maggiore.

Siano

Siano i numeri AB, CD minimi nella proportione di due altri maggiori, come ſono i due E, ed F; cioè che AB à CD ſia come E ad F; e ſia AB maggiore di CD; ed ancora E ſia maggiore di F.

Dico che AB miſura il maggiore E, come CD miſura il minore F; cioè l'antecedente miſura l'antecedente, ed il conſeguente miſura vgualmente il conſeguente. Perche AB à CD, per ipoteſi, è come E ad F; permutando, AB ad E [a] ſarà come C D ad F: mà AB è minore di E, ed il numero CD è minore di F; ſarà AB [b] parte di E, come CD è parte di F; ſtante che i due AB, CD non poſſono eſſere parti de i due E, ed F; perche, ſe poſſono eſſer parti de i due E, ed F, ſia diuiſo AB nelle parti di E, che ſiano AG, GB; e ſia diuiſo ancora CD nelle parti di F, che ſiano CH, H D: e perche A B ad E è come CD ad F; tale parti ſarebbe AB di E, [c] quale parti è CD di F; e perciò la moltitudine delle parti in AB ſarà vguale alla moltitudine delle parti in CD; e ſarà A G tale parte di E, quale è CH di F; per la qual coſa AG ad E [d] ſarà come C H ad F; e permutando, AG à CH [e] ſarà come E ad F: mà, per ipoteſi, AB à CD è come E ad F, ſarà AG à CH [f] come AB, à CD: mà AB, & CD ſono maggiori di AG, & CH, non ſaranno dunque i due AB, CD i minimi nella proportione di AB à CD; mentre nella medeſima proportione ſarebbero i minori AC, CH, ch'è contro all'ipoteſi, eſſendoſi ſuppoſto i due AB, CD minimi nella proportione di AB, à CD. Non dunque AB è parti di E, come CD è parti F; mà AB è parte di E, come CD è parte di F; è perciò AB miſura il numero E, come CD miſura F, il che era da dimoſtrarſi.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . . . .
F . . . . . .

a 13. del 7.

b 26. defin. del 7.

c 20. defin. del 7.

d 20. defin. del 7.

e 13. del 7.

f Scol. alla 12. del 7.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se ſaranno tre numeri da vna parte, e tre altri da vn altra parte, i quali, preſi à due à due, ſiano nella proportione perturbata; per l'egualità, il primo all'vltimo ſarà come il primo all'vltimo.

Siano i tre numeri A, B, C, da vna parte, e tre altri come D, E, F da vn altra parte nella perturbata proportione; cioè A à B ſia come E ad F; e ſia B à C come D ad E. Dico che per l'egualità, A à C è come D ad F.

Perche A à B è come E ad F, il prodotto de gli eſtremi A, & F, [a] è vguale al prodotto de i medij B, ed E. Similmente perche B à C è come D ad E, il prodotto fatto da gli eſtremi B, ed E, [b] è vguale al prodotto de i medij C, & D; mà il prodotto de i due B, ed E, fù dimoſtrato vguale al prodotto de i due A, ed F; ſarà il prodotto de i due A, & F, vguale al prodotto de i due C, & D; cioè il prodotto de gli eſtremi A, ed F, vguale al prodotto de i medij C, & D; e perciò la proportione di A à C [c] ſarà come quella di D ad F, come fù propoſto dimoſtrare.

A . . . . . .
B . . . D . . . .
C . . . . . E . . . . . .
F . .

a 19. del 7.

b 19. del 7.

c 19. del 7.

SCO-

SCOLIO.

Qui si possono aggiungere gli altri modi d'argumentare vsati da Euclide nel quinto Libro;

I.

Se quattro numeri sono proportionali, componendo, saranno ancora proportionali.

Sia il numero A al numero B, come il numero C al numero D. Dico che, componendo, A, B, insieme, al conseguente B, sarà come C, D, insieme, al conseguente D. Perche A à B è come C à D, permutando, A à C [a] *sarà come B à D, e perciò* [b] *A, B insieme, à C, D, insieme, sarà come B à D; e permutando, A, B, insieme, à B,* [c] *sarà come C, D, insieme, à D, ch'era da dimostrarsi.*

A.....B...
C.....D....

a 13. del 7.
b 12. del 7.
c 13. del 7.

II.

Se quattro numeri sono proportionali, diuidendo, saranno proportionali.

Habbia A, e B insieme, à B, l'istessa proportione, quale hà C, e D insieme, à D: Dico che, diuidendo A à B, sarà come C à D. Perche il numero A, B, al numero B è come il numero C, D al numero D; [a] *permutando, A, B, insieme, à C, D, insieme, sarà come la parte B alla parte D; e perciò l'auanzo A* [b] *all'auanzo C sarà come A, B, à C, D; ma A, B, à CD, è come B à D; sarà A à C* [c] *come B à D; e permutando A à B* [d] *sarà come C à D, come fù proposto dimostrare.*

A.....B....
C.....D.....

a 13. del 7.
b 11. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 13. del 7.

III.

Se quattro numeri sono proportionali, per la conuersione della proportione, saranno proportionali.

Habbia il numero AB al numero B l'istessa proportione, quale hà il numero C D al numero D. Dico che, per la conuersione della proportione, hauerà AB ad A l'istessa proportione, quale hà C D à C. Perche AB à B hà l'istessa proportione, quale ha CD à D, diuidendo, A à B, per l'antecedente dimostratione, sarà come C à D; ed inuertendo, B ad A [e] *sarà come D à C; e componendo, AB ad A, per la prima delle antecedenti dimostrationi, sarà come CD à C, ch'era da dimostrarsi.*

A.....B....
C.....D.....

e Scol. alla 10. del 7.

IV.

Se di sei numeri, il primo al secondo è come il terzo al quarto; ed il quinto al secondo è come il sesto al quarto;

il

il numero composto del primo è quinto al secondo, sarà come il numero composto del terzo, e sesto al quarto.

Sia il primo AB al secondo C, come il terzo D E al quarto F; ed il quinto B G al secondo C, sia come il sesto EH al quarto F. Dico che AG, composto del primo è quinto, al secondo C, sarà come DH, composto del terzo, e sesto, al quarto F. Perche BG à C è come EH ad F; inuertendo, C à BG [a] *sarà come F ad EH. In oltre, perche AB à C è come DE ad F; e si è dimostrato che C à BG è come F ad EH; per l'egualità, AB à B G* [b] *sarà come D E ad EH; e componendo, AG à GB, per la prima delle antecedenti dimostrationi, sarà come D H ad HE: ma per ipotesi BG à C è come EH ad F; sarà, per l'egualità, AG à C,* [c] *come DH ad F, ch'era da dimostrarsi.*

A.....B.....G D....E...H
C.... F..

a Scol. alla 10. del 7.
b 14. del 7.
c 14. del 7.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Quei numeri, che sono primi frà di loro, sono i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione.

Siano i numeri A, & B frà di loro primi. Dico che questi sono i minimi di tutti gli altri, che sono nella proportione di A à B. Se i numeri primi A, & B non sono i minimi nella proportione di A à B, due altri minori di A, & B, haueranno la medesima proportione di A à B: siano quelli i notati C, & D. Perche C, & D sono minori di A, & B, e la proportione di C à D è come A à B, per la 21. propositione di questo, C misurerà A come D misura B; cioè tante volte C misura A, per quante volte D misura B. Sia E il numero delle volte, che C misura A, sarà E il numero delle volte, che D misura B; dal che tante volte C misura A, ed il numero D misura B, per quante vnità sono nel numero E; per la qual cosa l'vnità misura tante volte il numero E, per quante volte C misura A; e permutandosi, l'vnità misura il numero C, [a] come E misura A. Nell'istesso modo si proverà, che l'vnità misura D, come E misura B. Donde è manifesto, che il numero E misura il numero A, e misura ancora il numero B; si che il numero E sarà commune misura de i numeri A, & B; e perciò i numeri A, & B non sono numeri primi, [b] ma composti, ch'è contro all'ipotesi, mentre i numeri A, & B gli habbiamo supposti frà di loro primi. Non dunque altri numeri minori di AB possono essere nella proportione di A à B, ed in conseguenza i numeri A, & B sono i minimi, come fù proposto dimostrare.

A.....B....
C-----D—
E---

a 15. del 7.
b 14. defin. del 7.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Di tutti i numeri, che sono nella medesima proportione, i minimi sono frà di loro primi.

Siano

Siano i numeri A, & B, i minimi di tutti quelli, che hanno la medesima proportione di A à B. Dico che sono frà di loro primi; cioè, che nissun'altro numero gli misura, fuor che l'vnità. Se non sono frà di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura; sia quello, se è possibile, il numero C, il quale misuri A tante volte, per quante vnità sono nel numero D; e misuri il numero B tante volte, per quante vnità sono nel numero E. Preso dunque il numero C tante volte, per quante vnità sono in D, [a] produrrà il numero A; e preso il medesimo numero C tante volte, per quante vnità sono in E, produrrà il numero B. Per la qual cosa, multiplicando il numero C per i numeri D, ed E, i prodotti saranno A, & B; e perciò il prodotto A al prodotto B [b] sarà come il multiplicante D al multiplicante E: ma i numeri D, ed E sono minori de i numeri A, & B, stante che sono parti di A, & B; i numeri dunque A, & B, che sono nella proportione di D ad E, non sono i minimi, ch'è contro all'ipotesi; mentre i numeri A, & B, gli habbiamo supposti minimi di tutti quelli, che sono nella medesima proportione. Non dunque il numero C è misura commune de i numeri A, & B. Per la qual cosa i numeri A, & B sono frà di loro primi, come fù proposto dimostrare.

A ..... B .....
C -----
D ----- E ----

a 9. assioma

b 18. del 7.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXV.

Se due numeri sono primi frà di loro, quel numero, che misura vno di essi, sarà numero primo rispetto all'altro.

Siano i numeri A, & B frà di loro primi; ed vn altro numero, come C, misuri il numero A. Dico che i numeri C, & B sono frà di loro primi. Se i numeri C, & B non sono frà di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura; sia quello, s'è possibile, il numero D. Perche il numero D misura C, ed il numero C, per ipotesi, misura A; il numero D [a] dunque misurerà il numero A; ma per la suppositione fatta, il numero D misura il numero B; sarà il numero D commune misura de i numeri A, & B: per la qual cosa i numeri A, & B, non sono frà di loro primi, [b] ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero D è commune misura de i due C, & B; ma i due C, & B sono frà di loro primi, il che era da dimostrarsi.

A ..... B .....
C ... D ----

a 11. assiom. del 7.

b 14. defin del 7.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVI.

Se due numeri sono primi à qualche numero, il prodotto, fatto dalla loro multiplicatione, sarà ancora primo al medesimo numero.

Sia ciascuno de'numeri A, & B, primo al numero C; e multiplicando A per

B, ouero B per A, il prodotto sia D. Dico che i numeri D, & C sono frà di loro primi. Se i numeri D, & C non sono frà di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura: sia quello, se è possibile, il numero E, il quale misuri il numero D tante volte, per quante vnità sono nel numero F; composto dunque tante volte il numero E, per quante vnità sono nel numero F, tal composto sarà vguale al numero D; e perciò, multiplicando il numero E per il numero F, [a] il prodotto sarà il numero D. Ed all'incontro, multiplicando il numero F per il numero E, [b] il prodotto sarà similmente il numero D; ma il numero D è il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due A, & B; il prodotto dunque fatto dalla multiplicatione de i due E, & F, sarà vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione de i due A, & B. Posto E come prima quantità, A seconda, B terza, ed F quarta. Essendo il prodotto della prima E, e quarta F, vguale al prodotto della seconda A, e terza B; sarà E ad A [c] come B ad F. In oltre, perche A, & C, per ipotesi, sono frà di loro primi; e per la fatta suppositione il numero E misura il numero C; i due numeri E, & A, [d] saranno frà di loro primi; e perciò i due E, & A [e] nella loro proportione sono i minimi; ma E ad A è come B ad F, in conseguenza E misurerà B [f] come A misura F. Hor perche E misura B, e per la fatta suppositione, misura ancora C; i due C, & B [g] non sono frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi, mentre i due A, & B furono supposti primi al numero C. Non dunque il numero E è commune misura frà i due D, & C; ma i due D, & C sono frà di loro primi, ch'era da dimostrarsi.

D .....
E ---- F ----

a 9. assioma del 7.

b 16. del 7.

c 19. del 7.

d 27. del 7.

e 23. del 7.

f 21. del 7.

g 14. defin. del 7.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVII.

Se due numeri sono frà di loro primi, il prodotto fatto da vno in se medesimo, sarà primo all'altro.

Siano i due numeri A, & B frà di loro primi, e dalla multiplicatione di A in se medesimo se ne produca il numero C. Dico che i numeri C, & B sono frà di loro primi. Si esponga il numero D vguale al numero A; i numeri D, & B saranno frà di loro primi; e per l'antecedente propositione, il prodotto di D in A sarà primo al numero B: ma il prodotto di D, A, è vguale al prodotto di A in se medesimo, cioè vguale al prodotto C; sarà il prodotto C primo al numero B. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il prodotto fatto dalla multiplicatione di B in se medesimo è primo al numero A, come fù proposto dimostrare.

A .... B .....
C .....
D ....

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVIII.

Se due numeri sono primi à due altri numeri, l'vno all'

altro ; ancora i prodotti fatti dalle loro multiplicationi ſono frà di loro primi.

Siano i due numeri A, & B, i quali ſiano primi alli due C, & D ; cioè i due A,& B,ogn'vno da per ſe, ſia primo al numero C ; ed i medeſimi A , & B , ſeparatamente ſiano primi al numero D ; e ſia E il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due A , & B ; come ancora il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due C, & D ſia F . Dico che i due prodotti E, ed F ſono frà di loro primi . Perche i due A, & B, per ipoteſi, ſono primi al numero C ; il prodotto de i due A,& B , cioè il numero E, [a] ſarà primo al numero C . Similmente eſſendo i due A, B, primi al numero D , il prodotto de i due B, A , cioè il numero E , [b] ſarà primo al numero D ; donde ciaſcuno de i due C, D , ſarà primo al numero E . Hor perche i due C, D, ogn'vno da per ſe, è primo al numero E , il prodotto de i due C,& D, cioè il numero F, [c] ſarà primo al numero E . Per la qual coſa i due prodotti E, ed F ſono frà di loro primi, come fù propoſto dimoſtrare .

A . . . . . B . . .
E . . . . . .
C . . . D . .
F . . . . . .

a 26.del 7.
b 26.del 7.
c 26. del 7.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXIX.

Se due numeri ſono primi frà di loro , e ciaſcuno di queſti ſi multiplichi in ſe medeſimo , ed ogn'vno multiplichi il ſuo prodotto; e di nuouo ogn'vno multiplichi il ſuo vltimo prodotto , e con queſt'ordine in infinito : i primi due prodotti ſono frà di loro primi ; i ſecondi due prodotti ſono primi frà di loro ; e con queſt'ordine i terzi ſono frà di loro primi ; e ſempre gli eſtremi , cioè vltimi prodotti , ſono primi frà di loro.

Siano i numeri A, & B frà di loro primi ; e ſia multiplicato il numero A in ſe medeſimo , ed il prodotto ſia C ; ſimilmente ſia multiplicato il numero B in sè medeſimo, ed il prodotto ſia D . Dico che i prodotti C, & D ſono frà di loro primi . Di più ſia multiplicato il prodotto C dal numero A , e ne venga il numero E ; e ſia multiplicato il prodotto D dal numero B, e ne venga il numero F . Dico parimente , che i prodotti E , ed F ſono frà di loro primi . E finalmente , multiplicandoſi i prodotti E , & F per li numeri A, & B ; cioè E ſi multiplichi per A,ed il numero F per B ; e gli auuenimenti ſiano G, ed H ; e queſti multiplicati per li medeſimi numeri A, & B, ne venghino i prodotti K, ed L . Dico che i prodotti G, ed H ſono frà di loro primi ; come ancora i prodotti K , ed L ſono primi frà di loro. Perche i due numeri A , B ſono frà di loro primi, il prodotto C, fatto dalla multiplicatione di A in ſe medeſimo [a] ſarà primo all'altro numero B . E conſiderando i due numeri C, & B frà di loro primi , il prodotto fatto del numero B, in ſe medeſimo , cioè il numero D , [b] ſarà primo al numero C ; dal che i due prodotti C , & D ſono frà di loro primi, ch'era prima da dimoſtrarſi.

A	3	2	B
C	9	4	D
E	27	8	F
G	81	16	H
K	243	32	L

a 27. del 7.

Di nuouo , perche B, ed A ſono frà di loro primi , il prodotto di B in ſe medeſimo , cioè il numero D, [c] ſarà primo al numero A : fù dimoſtrato il prodotto C eſſere primo al numero B ; ſaranno i due A, & C, primi al numero B , ed ancora al numero D ; e perciò i due A, & C, ſono primi à i due B, & D . Per la qual coſa il prodotto de i due A, & C, [d] cioè il numero E, ſarà primo al prodotto de i due B, & D , cioè al numero F, e così i due E, ed F ſono frà di loro primi . In oltre perche A, & C ſono primi al numero B, il prodotto de i due A,& C , cioè il numero E, [e] ſarà primo al numero B ; ſimilmente perche i due B , & D ſono primi al numero A ; ſarà il prodotto de i due B, & D , cioè il numero F , [f] primo al numero A : ma i due A , et B, per ipoteſi, ſono frà di loro primi , & i due E, ed F ſono ſtati dimoſtrati primi frà di loro ; in conſeguenza i due A , ed E ſono primi alli due B, ed F ; ed il prodotto fatto da i due A , ed E , cioè il numero G, [g] ſarà primo al prodotto fatto da i due B, ed F, cioè al numero H ; donde i numeri G , ed H ſono frà di loro primi . Finalmente , eſſendo i due A , ed E primi al numero B ; il prodotto fatto da eſſi , cioè il numero G, [h] ſarà primo al numero B. E ſimilmente , perche i due F, & B ſono primi al numero A; il prodotto de i medeſimi F, & B,[K] cioè H, ſarà primo al numero A : mà i numeri A , & B , per ipoteſi , ſono frà di loro primi ; ed i numeri G, H, per quel che ſi è dimoſtrato , ſono frà di loro primi ; i numeri dunque A, & G ſono primi à i numeri B , ed H . dal che il prodotto de i due A , & G , cioè il numero K , [l] ſarà primo al prodotto de i due B, ed H , cioè al numero L . Il medeſimo ſi proverà , ſe le multiplicationi aſcendeſſero à maggior moltitudine , il che era da dimoſtrarſi .

b 27. del 7.
c 27 del 7.
d 28. del 7.
e 26..del 7.
f 26. del 7.
g 28. del 7.
h 26. del 7.
K 26.del 7.
l 28. del 7.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXX.

Se due numeri ſono frà di loro primi , giunti inſieme, il loro aggregato ſarà primo all'vno , ed all'altro ; e ſe l'aggregato di due numeri, giunto inſieme , ſarà primo ad vno di eſſi , quei numeri ſono frà di loro primi .

Siano prima i numeri AB , BC , frà di loro primi . Dico che , giunti inſieme , il loro aggregato AC ſarà primo al numero AB , ed ancora al numero BC . Se i numeri AC , AB non ſono frà di loro primi , qualche numero ſarà loro commune miſura ; ſia quello il numero D ; il numero D dunque miſura AC , e miſura la parte AB ; e perciò miſurerà ancora [a] l'auanzo BC ; ſi che il numero D ſarà miſura commune de i due AB, BC ; dal che i numeri AB, BC non ſono frà di loro primi , ch'è contro all'ipoteſi . Non dun-

A . . . . . B C
D

a 12.aſſioma del 7.

que il numero D è commune misura de i due AC, AB; mà i due AC, AB sono frà di loro primi. Nell'istesso modo si proverà, che i due AC, BC sono frà di loro primi, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo supposto che il numero AC sia primo al numero AB, ouero BC. Dico che i numeri AB, BC sono frà di loro primi. Se non sono fra di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura; sia dunque il numero D la loro commune misura. Perche il numero D misura ambidue i numeri AB, BC; misurerà ancora [b] il tutto AC; dal che il numero D sarà commune misura de i due AC, AB; e perciò i numeri AC, AB non sono frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero D è commune misura de i due AB, BC; mà i numeri AB, BC sono frà di loro primi, il che era da dimostrarsi.

A ..... B C
D ----

b 30. assiom. del 7.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, ne segue, che se vn numero composto di due numeri è primo ad vno di quelli, sarà ancora primo all'altro; poiche se i due AC, AB, sono frà di loro primi, per quel che si è dimostrato nella seconda parte, saranno i due AB, BC frà di loro primi; e per quel che si è dimostrato nella prima parte, i due AC, CB sono frà di loro primi.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXI.

Ogni numero primo sarà primo ad ogni numero, che non misura.

Sia il numero primo A, il quale non misuri il numero B. Dico che i numeri A, & B sono frà di loro primi. Se i numeri A, & B non sono frà di loro primi, qualche numero, oltre l'vnità, sarà loro commune misura; sia quello il numero C; il numero C dunque misurerà il numero B, e misurerà ancora il numero A; dal che il numero A non sarà primo; ch'è contro all'ipotesi: non dunque il numero C è commune misura delli due A & B, mà i numeri A, & B sono frà di loro primi, come fù proposto dimostrare.

A ..... B .....
C ----

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXII.

Se due numeri, multiplicandosi frà di loro, producono vn altro numero; ed vn numero primo misuri il prodotto; quel

quel numero primo misurerà ancora vno di quei numeri multiplicati.

Siano i due numeri A, & B, i quali, multiplicandosi frà di loro, producano il numero C; e supposto che il numero primo D misuri il prodotto C. Dico che il numero primo D, se non misura ambidue i numeri A, & B, almeno ne misurerà vno solo. Supposto che D non misuri il numero A, i numeri A, & D, [a] saranno primi frà di loro. In oltre misurando D il numero C, lo misurerà secondo qualche moltitudine di vnità; lo misuri, per esempio, tante volte, per quante vnità sono nel numero E; sarà il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due numeri D, ed E, vguale al numero C: ma il prodotto fatto da i due A, & B, per ipotesi, è il numero C; sarà il prodotto fatto da i due D, ed E, vguale al prodotto fatto da i due A, & B; dal che il primo D al secondo A [b] sarà come il terzo B al quarto E: ma i due D, ed A, [c] per quel che si disse, sono primi frà di loro, in conseguenza [d] saranno i minimi nella loro proportione di D ad A; per la qual cosa misureranno vgualmente gli altri, che sono nella proportione di D ad A: [e] ma si è dimostrato, che D ad A è come B ad E, i minimi dunque D, ed A misureranno vgualmente i numeri B, ed E; cioè l'antecedente D misura l'antecedente B, ed il conseguente A misura il conseguente E. Per la qual cosa se D non misura A, almeno misurerà il numero B, come fù proposto dimostrare.

A .....
B ..... C ...
D ... E .....

a 31. del 7.
b 19. del 7.
c 31. del 7.
d 23. del 7.
e 21. del 7.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXIII.

Ogni numero composto è misurato da qualche numero primo.

Sia qualunque numero composto A. Dico che il numero A è misurato da qualche numero primo. Sia dunque misurato il numero A da qualche numero B; se B è numero primo, si sarà sodisfatto à quanto si è proposto. Se poi B è numero composto, questo sarà misurato da qualche altro numero C, il quale ò sarà numero primo, ouero numero composto. Se è numero primo, perche C misura B, ed il numero B misura A, il numero C [a] misurerà ancora il numero A; ed in tal caso il numero A sarà misurato dal numero primo C, ch'è il nostro proposto. Mà se C non è numero primo, necessariamente qualche altro numero lo misurerà; e perche il numero non si diminuisce in infinito, si peruerrà finalmente à qualche numero, che nissun altro numero lo misurerà; cioè che sarà misurato solamente dall'vnità; per la qual cosa quello sarà numero primo, il quale, perche misura [b] tutti gl'antecedenti, misurerà ancora il numero composto A, come fù proposto dimostrare.

In altro modo. Perche A, per ipotesi, è numero composto, perciò sarà misurato da qualche numero, ouero da più numeri. Sia il minimo

A .....
B ..... C ...

a 11. assioma del 7.
b 11. assiom. del 7.

di

di quelli, che lo misurano, il numero B. Dico che il minimo B è numero primo. Se B non è numero primo, lo misuri, s'è possibile, qualche numero C. Perche C misura il numero B, ed il numero B misura il numero A; il numero C [c] misurerà ancora il numero A: mà il numero B è supposto il minimo di tutti quelli, che misurano il numero A, sarà dunque C maggiore di B, dal che il numero maggiore C misura il minore B, ch'è impossibile: non dunque il numero B è composto, mà è numero primo, come fù proposto dimostrare.

A.....
B... C—

c 11. assioma del 7.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXIV.

Ogni numero ò è numero primo, ouero è misurato da qualche numero primo.

Figura antecedente.

Sia proposto qualunque numero A. Dico che il numero A, ò è numero primo, ouero è misurato da qualche numero primo. Perche ogni numero ò è composto, ouero è numero primo; se il numero A è numero primo, il tutto sarà concluso; se poi è numero composto, per l'antecedente propositione, qualche numero primo lo misura; e perciò ogni numero ò è primo, ouero è misurato da qualche numero primo, come fù proposto.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXXV.

Dati quanti numeri si vogliano, ritrouare i minimi, che hanno la medesima proportione con i dati numeri.

Siano quanti numeri si vogliano A,B,C, i quali habbiano quali si siano proportioni; cioè, ò che la proportione di A à B sia come quella di B à C, ò le proportioni di A à B, e di B à C, non siano simili; e si vogliano ritrouare altretanti numeri, i quali siano i minimi nelle medesime proportioni di A à B, e di B à C. Perche i numeri A, B, C, ò sono frà di loro primi, ouero sono cõposti; se sono frà di loro primi; per la 24. propositione di questo, i medesimi A, B, C saranno i minimi nelle loro proportioni di A à B, e di B à C, ch'è il nostro proposto. Se poi non sono frà di loro primi, si troui [a] la loro massima commune misura, che sia il numero D, la quale misuri i numeri A, B, C secondo le vnità de i numeri E, F, G. Dico che i numeri E, F, G, sono i minimi nelle proportioni di A à B, e di B à C. Perche il numero D misura i numeri A, B, C, per li numeri E, F, G, multiplicando D, ogn'vno de' numeri E, F, G, [b] produrrà i numeri A, B, C; e per la 18. propositione di questo, i numeri E, F, G haueranno le

A..... B.... C.....
D..
E... F.. G....
H— I— K—
L—

a 3. del 7.

b 9. assioma del 7.

medesime proportioni, che hanno i numeri A, B, C. In oltre se i numeri E, F, G non sono i minimi, altri numeri, nelle medesime proportioni di E ad F, e di F à G, cioè di A à B, e di B à C, minori di E, F, G, saranno i minimi. Siano quelli, s'è possibile, i minimi H, I, K, i quali per la 21. propositione di questo, misureranno vgualmente i numeri A, B, C. Gli misurino, per essempio, secondo qualche numero L, si che multiplicando L per li numeri H, I, K, produrrà [c] i numeri A, B, C; ed all'incontro il numero L misurerà [d] i numeri A, B, C, per li numeri H, I, K. Si considerino quattro numeri, de quali il primo sia E, il secondo H, il terzo L, ed il quarto D. Perche il primo E, multiplicando il quarto D, produce A; ed il secondo H, multiplicando il terzo L, produce il medesimo numero A; sarà il prodotto del primo E nel quarto D, vguale al prodotto del secondo H nel terzo L: e perciò sarà il primo E al secondo H, [e] come il terzo L al quarto D. Mà il numero E, per la fatta suppositione, è maggiore di H; il numero dunque L sarà maggiore di D. Hor perche L misura i numeri A, B, C, essendo maggiore di D, non sarà D la massima commune misura de i numeri A, B, C, ch'è contro all'ipotesi: non dunque altri numeri minori de gli esposti E, F, G, sono minimi nelle proportioni di A à B, e di B à C; mà i medesimi E, F, G sono i minimi nelle proportioni di A à B, e di B à C, che era da farsi, e dimostrarsi.

c 9. assioma del 7.

d 8. assioma del 7.

e 19. del 7.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che quanti si voglia numeri sono misurati dalla loro massima commune misura per numeri, i quali sono i minimi nella proportione de i numeri misurati; stante che si è dimostrato, che la massima commune misura D misura i numeri A,B,C, per i numeri E, F, G, i quali sono minimi nella continuata proportione di A à B, e di B à C.

SCOLIO.

Perche spesse volte bisognerà trouare due numeri minimi in vna data proportione, perciò aggiungo quì il seguente problema, come fà il Commandino, ed il Clauio.

Dati quanti si voglia numeri continuamente proportionali, ritrouare due numeri minimi nella proportione de i dati numeri.

Siano i dati numeri A,B,C,D,E, in continua proportione; cioè che A à B sia come B à C; & B à C come C à D; e C à D come D ad E; e si vogliano ritrouare due numeri minimi nella proportione di A à B. Se i numeri A, & B sono numeri primi, quelli saranno i minimi nella proportione di A à B;

A	B	C	D	E
16	24	36	54	81
H 8				
		2	3	
		F	G	

a 2.del 7. *ma se non saranno numeri primi, si troui* [a] *la massima commune misura de i due A, & B, che sia il numero H; misuri poi H il numero A per il numero F; ed il medesimo numero H misuri B per il numero G; per il Corollario antecedente, i numeri F, & G saranno i minimi nella proportione di A à B, e di B à C &c.*

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XXXVI.

Dati due numeri, ritrouare il minimo numero, ch'è misurato da quelli.

Siano dati qualunque numeri A, & B, e s'habbia da ritrouare il minimo numero, ch'è misurato da i proposti numeri A, & B. Supposto prima che i dati numeri A, & B siano frà di loro primi, ed il numero A multiplichi il numero B, ouero il numero B multiplichi il numero A, e produca il numero C. Dico che il numero C è il minimo di tutti gli altri, che sono misurati da i numeri A, & B. Che i numeri A, & B misurino il numero C, è manifesto; poiche nascendo il numero C dalla multiplicatione di A in B, ò di B in A, sarà il numero C composto di tante volte A, per quante vnità sono nel numero B; e sarà ancora composto di tante volte B, per quante vnità sono nel numero A; e perciò il numero C [a] è misurato dal numero A, per il numero B, ed è misurato dal numero B per il numero A. Che poi C sia il minimo di tutti quelli, che sono misurati da A, & B, lo dimostraremo in questo modo. Se il numero C non è il minimo, qualche altro numero minore di C sarà misurato da i numeri A, & B; sia quello il numero D, il quale sia misurato dal numero A per il numero E, e sia misurato da B, per il numero F; si che A, multiplicando E, [b] produrrà il numero D; ed il numero B, multiplicando F, produrrà il medesimo numero D: per la qual cosa il prodotto di A in E sarà vguale al prodotto di B in F. Si considerino i quattro numeri, il primo de'quali sia A, il secondo B, il terzo F, ed il quarto E. Perche il prodotto del primo A nel quarto E è vguale al prodotto del secondo B nel terzo F, sarà il primo A al secondo B, e come il terzo F al quarto E; e perche i due A, & B gli habbiamo supposti numeri primi, perciò [d] saranno i minimi nella loro proportione di A à B, ed in conseguenza i numeri A, & B e misureranno vgualmente tutti gli altri, che hanno la medesima proportione: ma A à B si disse essere come F ad E, i numeri dunque A, & B misurano vgualmente i numeri F, ed E; cioè l'ante-

a 7.assiom. del 7.

b 9.assiom. del 7.

c 19. del 7.

d 23. del 7.

e 21. del 7.

l'antecedente A misura l'antecedente F, ed il conseguente B misura il conseguente E. In oltre perche A, multiplicando B, produce, per ipotesi, C, e multiplicando E produce, per costruttione, D, sarà la proportione di B [f] ad E come quella di C à D: ma B, per quel che si è dimostrato, misura E, dunque C misurerà il numero D; fù supposto D minore di C, il maggiore dunque misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri A, & B misurano altro numero minore di C; ma il minimo, che misurano, sarà C, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

f 17.del 7.

Di nuouo non siano i numeri A, & B frà di loro primi. Si trouino i due numeri C, & D [g] minimi nella proportione di A à B; i quattro numeri A,B,C,D sono proportionali, ed il prodotto de gli estremi A, & D, [h] sarà vguale al prodotto de i medij C, & B; sia quel prodotto il notato E. Dico che il numero E è il minimo di tutti gli altri, che sono misurati da i due A, & B. Perche A, multiplicando D, produce il numero E; ed il numero B, multiplicando C, produce l'istesso numero E; perciò [K] i numeri A, & B misurano il numero E. Che finalmente il numero E sia il minimo di quelli, che sono misurati da A, & B, si proua in questo modo. Se il numero E non è il minimo, qualche altro numero minore di E sarà misurato da A, & B; sia quello, se è possibile, il numero F, il quale sia misurato da A per il numero G, e sia misurato da B per il numero H: il prodotto di A in G [l] sarà vguale ad F; ed il prodotto di B in H sarà vguale all'istesso numero F; e perciò il prodotto di A in G sarà vguale al prodotto di B in H. Si considerino quattro numeri, cioè A primo, B secondo, H terzo, e G quarto. Perche il prodotto del primo A nel quarto G è vguale al prodotto del secondo B nel terzo H, sarà il primo A al secondo B, [m] come il terzo H al quarto G. E perche i numeri C, & D sono minimi nella proportione di A à B, ouero di H à G, perciò i numeri C, & D [n] misureranno vgualmente i numeri G, ed H; cioè l'antecedente C misurerà l'antecedente H, ed il conseguente D misurerà il conseguente G. Si considerino i due D, & G come numeri multiplicati, ed A multiplicante. Perche A multiplicando D, produce E, ed il medesimo numero A, multiplicando G, produce F; sarà D à G [o] come E ad F; ma D misura G, per quel che si è dimostrato, il numero E misura il numero F; fù supposto F minore di E; il numero maggiore dunque misura il minore, ch'è impossibile. Non dunque F è il minimo de i numeri misurati da A, & B; ma il minimo sarà il numero E, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

A	B	C	D	E	F	G	H
A....	B.....						
C.....							
D----------							
E-------	F----						

g 35. del 7.

h 19. del 7.

K 7.assioma del 7.

l 19. assioma del 7.

m 19. del 7.

n 21 del 7.

o 17. del 7.

COROLLARIO.

Quindi è, che se due numeri, come A, & B, multiplicano due numeri minimi, come C, & D, che sono nella medesima proportione; multiplicando il minore A per il

maggiore D, ed il maggiore B per il minore C, nell'vna, e nell'altra multiplicatione producono il numero E, ch'è il minimo misurato da i due A, & B.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXVII.

Se vn numero è misurato da due numeri, sarà ancora misurato dal numero minimo, ch'è misurato da quelli due.

Misurino i numeri A, & B qualunque numero CD, e di tutti i numeri, che possono essere misurati da i medesimi A, & B, il minimo sia il notato E. Dico che il numero E misura il numero CD. Se il numero E non misura il numero CD, detraendo dal numero CD tante volte il numero E, per quanto si può, quel, che resta, sarà minore del numero E; fatta dunque la detrattione del numero E quanto si può, e resti, s'è possibile il numero FD, minore del numero E, in modo che il numero E misuri il numero CF. Perche tanto il numero A, quanto il numero B, misura il numero E; ed il numero E misura il numero CF; ogn'vno dunque de i numeri A, & B, misurerà [a] il numero CF; ma ciascuno de' numeri A, & B, per ipotesi, misura tutto il numero CD; ogn'vno de i numeri A, & B, [b] misurerà ancora il rimanente FD; fù supposto il numero FD minore di E, dunque i numeri A, & B misurano vn numero minore di E; per la qual cosa il numero E non è il minimo di tutti quelli, che sono misurati da i numeri A, & B, il che è contro all'ipotesi, mentre il numero E fù supposto il minimo. Non dunque, detratto da CD quanto si può il numero E, resta quantità alcuna minore di E; per la qual cosa il numero minimo E misura il numero CD, come fù proposto dimostrare.

A . . B . . .
C . . . . . F . . . . . D
E . . . . . .

a 11. assioma del 7.

b 12. assiom.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXXVIII.

Dati tre numeri, ritrouare il minimo numero, che quelli misurano.

Siano dati tre numeri, come A, B, C, e si voglia ritrouare il minimo numero, che misurano i tre A, B, C. Si troui [a] il minimo numero misurato da due di quelli; e supposto che il numero D sia il minimo misurato da i due A, & B; se il numero D è misurato dal numero C; il numero D sarà il minimo misurato da i tre A, B, C; se il numero D non è

A . . . B . . . . C . . . . .
D . . . . . .
E ---------

a 36. del 7.

il minimo, misurino i numeri A, B, C, qualche altro numero E, minore del numero D. Perche i due A, & B, misurano il numero E minore di D, non sarà il numero D il minimo misurato da i due A, & B, ch'è contro all'ipotesi, mentre si è supposto il numero D essere il minimo di quelli misurati da i numeri A, & B: non dunque il numero E è il minimo de' numeri, che sono misurati da i numeri A, B, C, mà il minimo sarà il numero D.

Di nuouo, supposto che il numero C non misuri il numero D, in tal caso si troui il numero E, [b] che sia il minimo misurato da i numeri C, & D. Dico che il numero E sarà il minimo di quelli, che i numeri A, B, C misurano. Perche i numeri A, & B, per costruttione, misurano il numero D, ed il numero D misura il numero E; i numeri dunque A, & B [c] misurano il numero E; mà il numero C, per costruttione, misura il numero E, perciò tutti tre i numeri A, B, C misurano il numero E. Finalmente se il numero E non è il minimo di tutti gli altri misurati da i numeri A, B, C, misurino i numeri A, B, C, se è possibile, qualche altro numero F, minore del numero E. Perche il numero D è il minimo di quelli misurati da i due A, & B, ed i numeri A, & B misurano il numero F, ancora il numero D, [d] ch'è minimo, misurerà il numero F. In oltre perche il numero E, per costruttione, è il minimo, ch'è misurato da i due C, & D; ed i numeri C, & D misurano il numero F; il numero E dunque, ch'è minimo, misurerà [e] il numero F: mà il numero F è supposto minore del numero E; il maggiore misurarebbe il minore, il che è impossibile: non dunque il numero F è il minimo di quelli misurati da i tre A, B, C; mà il minimo sarà il numero E, che era da farsi, e dimostrarsi.

b 36. del 7.

c 11. assiom. del 7.

d 37. del 7.

e 37. del 7.

A . . B . . . C . . .
D . . . . . .
E . . . . . .
F ———

COROLLARIO.

Perche il numero E è il minimo di quelli misurati da i tre numeri A, B, C; e, supponendo, che il numero F sia misurato da i medesimi numeri A, B, C, fù prouato, che il minimo E misura il numero F; sarà manifesto, che se vn numero è misurato da tre numeri, il medesimo sarà ancora misurato dal minimo, ch'è misurato da quei tre numeri.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXIX.

Se vn numero misura vn altro numero, il numero misurato haverà la parte nominata da quello, che misura.

Sia il numero A misurato dal numero B. Dico che il numero A hà la

parte denominata dal numero B. Sia misurato il numero A dal numero B tante volte, per quãte vnità sono nel numero C; l'vnità misurerà tante volte il numero C, per quãte volte il numero B misura il numero A; e permutando, l'vnità misurerà il numero B, [a] come il numero C misura il numero A; e perciò tal parte sarà l'vnità del numero B, quale parte è il numero C del numero A: mà l'vnità è parte di B denominata dal numero B, come se l'vnità fosse terza, ò quarta, ò quinta parte, &c. di B; sarà ancora C parte denominata da A; cioè sarà C terza, ò quarta, ò quinta, ò altra parte di A, denominata dal numero B; cioè il numero C sarà tale parte di A, quale denomina B con le sue vnità. Si che se B conterrà quattro vnità, C si dirà essere la quarta parte di A; se B contiene cinque vnità, si dirà C essere la quinta parte di A; e con quest'ordine se B conteneſse più, ò meno vnità. Per la qual cosa se vn numero misura vn altro numero, il numero misurato hà la parte denominata dal numero, che misura.

A . . . . . .
B . . . . C . . .

a 15 del 7.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XL.

Se vn numero hà qualunque parte, il numero denominato da quella parte, lo misura.

Sia B parte del numero A, dalla quale sia denominato il numero C. Dico che il numero C misura il numero A. Perche B è parte di A, perciò B misura il numero A; e per l'antecedente propositione haverà A la parte denominata da B: ma, per ipotesi, il numero C è la parte denominata da B, in conseguenza C sarà parte di A; per la qual cosa il numero C misura il numero A, che era da dimostrarsi.

A . . . . . .
B . . . C . . . .

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XLI.

Ritrouare vn minimo numero, che habbia le parti date.

Siano le parti proposte A,B,C, e si habbia à ritrouare il minimo numero, che habbia le parti A,B, & C.

Siano i numeri D,E,F quelli, che denominano le parti A, B, C; si troui il numero G, [a] che sia il minimo di quelli misurati da i numeri D,E, F. Dico che il numero G è il minimo, che contiene le parti A,B,C. Perche i numeri D,E, F misurano il numero G, haverà G [b] le parti denominate da essi numeri D,E,F; ma le parti denominate da essi numeri D, E, F, sono le date A,B,C; il numero dunque G haverà le

D . .	A	metà
E . . .	B	terza parte
F	C	quarta parte
G		
H ———		

a 38. del 7.

b 39. del 7.

parti

parti date A,B,C. In oltre dico che il numero G è il minimo di quelli, che contengono le parti A, B, C: perche se non è il minimo, qualche altro numero minore di G sarà il minimo, che conterrà le parti A, B, C; sia quello il numero H. Perche il numero H hà le parti A,B,C, esso numero H [c] sarà misurato da i numeri D, E, F, che sono denominati dalle parti A,B,C; ma i numeri D,E,F misurano il numero G, essendo H minore di G, non sarà G il minimo, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque alcun numero minore di G hà le parti date; ma il numero G sarà il minimo, che hà le parti A,B,C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

c 4. del 7.

Fine del Settimo Elemento.



EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO OTTAVO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, gli estremi de'quali siano primi frà loro; quelli saranno i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione.

SIANO quanti numeri si vogliano A, B, C, D, continui proportionali, li di cui estremi A, & D siano primi frà loro. Dico che i numeri A,B,C, D sono i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione. Se i numeri A,B,C, D non sono i minimi, altri numeri nella medesima proportione saranno minimi; siano quelli, s'è possibile, i notati E,F,G,H. Perche i numeri E,F,G,H hanno la medesima proportione de'numeri A, B, C,D, sarà per l'egualità, la proportione di A à D [a] come quella di E ad H; ma i due A, & D [b] sono minimi nella proportione di A à D (stante che, per ipotesi sono numeri primi) i numeri dūque A, & D [c] misureranno vgualmente i numeri E, ed H; cioè l'antecedente A misura l'antecedente E, ed il conseguente D misura il conseguente H: ma i due E, ed H sono suppositi minimi nella proportione di E ad H, ouero di A à D; i maggiori dunque A, & D misurano i minori E, ed H, ch'è impossibile. Non dunque i numeri E,F,G, H sono i minimi nella proportione de i numeri A, B, C, D; ma i minimi sono i proposti A,B,C,D, ch'era da dimostrarsi.

a 14. del 7.
b 23. del 7.
c 21. del 7.

A ..... E ---
B ..... F -----
C ..... G -----
D ..... H --------

SCO-

SCOLIO.

L'antecedente propositione si può fare più vniuersale nel seguente modo.

Se siano quanti numeri si vogliano ò continui, ò non continui proportionali, de'quali gli estremi siano numeri frà loro primi; quelli sono i minimi di tutti gli altri, che, esposti col medesimo ordine, hanno le medesime proportioni.

Siano quanti numeri si vogliano, A, B, C, D, i di cui estremi A, & D siano frà loro primi. Dico che i numeri A,B,C,D sono i minimi di tutti gli altri, che esposti col medesimo ordine, hanno le medesime proportioni de i numeri A, B, C, D. Se i numeri A, B,C,D non sono i minimi, altri numeri nelle medesime proportioni saranno i minimi; siano quelli i notati E,F,G,H. Perche A à B è come E ad F, e la proportione di B à C è come quella di F à G; ed ancora C à D è come G ad H; sarà per l'egualità A à D [a] come E ad H; ma i due A, & D sono nella loro proportione minimi, stante che sono primi; perciò misureranno [b] vgualmente i numeri E, ed H; ma i numeri E, ed H sono [c] suppositi i minimi, i numeri dunque A, & D maggiori misureranno i minori E, ed H, ch'è impossibile. Non dunque i numeri E,F,G,H sono i minimi nelle proportioni di A,B,C,D; ma i minimi saranno essi numeri A,B,C,D, ch'era da dimostrarsi.

a 14. del 7.
b 23. del 7.
c 21. del 7.

A ..... E ---
B ..... F -------
C .... G ----
D ..... H -----

PROBLEMA I. PROPOSITIONE II.

Data qualunque proportione, ritrouare quanti numeri si vogliano continui proportionali, che siano i minimi nella data proportione.

Sia data la proportione ne i minimi numeri, come A à B, e si habbiano à ritrouare quanti numeri si vogliano continui proportionali, che siano i minimi nella proportione di A à B. Si multiplichi il numero A in se medesimo, ed il prodotto sia C; similmente si multiplichi il numero B in se medesimo, ed il prodotto sia E; poi si multiplichi il numero A per il numero B, ed il prodotto sia D. Dico prima che i tre C, D, E sono i minimi nella proportione di A à B. Si considerino i numeri A, & B come numeri multiplicati, ed A sia il multiplicante; perche il prodotto del multiplicante A nel numero

A 2 B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27
L 16 M 24 N 36 P 54 Q 81

mul-

multiplicato A è il numero C; ed il prodotto del multiplicante A nel multiplicato B è il numero D; sarà il prodotto C [a] al prodotto D come il multiplicato A al multiplicato B. Similmente presi i numeri B, ed A come numeri multiplicati, ed il multiplicante sia B. Perche i prodotti fatti dal multiplicante B ne i numeri multiplicati B, ed A, sono, per costruttione, E, & D, sarà il prodotto D al prodotto E [b] come il numero multiplicato A al numero multiplicato B: mà fù dimostrato A à B essere come C à D; sarà C à D [c] come D à E; e perciò i tre C, D, E sono continui proportionali nella proportione di A à B. In oltre perche i numeri A, & B, per ipotesi, sono nella loro proportione minimi, perciò [d] sono frà di loro primi; e perche dalla multiplicatione de i numeri primi A, & B in se medesimi, ne vengono i prodotti C, ed E; saranno i prodotti C, ed E [e] frà loro primi; e per la prima propositione di questo, i tre numeri proportionali C, D, E sono i minimi nella loro proportione di A à B.

a 17. del 7.
b 17. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 24. del 7.
e 29. del 7.

Di nuouo si multiplichi il numero A in ciascuno de i tre prodotti C, D, E, e ne risultino i prodotti F, G, H; e si multiplichi il numero B nell'vltimo E, ed il prodotto sia K. Dico che i quattro numeri F, G, H, K sono i minimi nella continua proportione di A à B. Perche il numero A, multiplicando i tre numeri C, D, E, produce i numeri F, G, H, per la 17. propositione del settimo, i prodotti F, G, H hanno l'istessa proportione, che i numeri multiplicati C, D, E: mà i numeri C, D, E sono continui proportionali nella proportione di A à B; i numeri dunque F, G, H sono continui proportionali nella proportione di A à B. Di nuouo, perche i i numeri A, & B, multiplicando il medesimo numero E, producono i due H, & K, per la 18. propositione del 7, il prodotto H al prodotto K sarà come il multiplicante A al multiplicante B; e perciò i numeri F, G, H, K, sono continui proportionali nella proportione di A à B. Di più, essendo i numeri A, & B minimi nella loro proportione, per la 24. propos. del 7, saranno frà di loro primi. E perche dalle multiplicationi di A, & B in se medesimi, ne sono prodotti i numeri C, ed E; e dalle multiplicationi di A in C, e di B in E, ne sono risultati i numeri F, & K (che sono estremi delle continue proportionali F, G, H, K) per la 29. propos. del 7, gli estremi F, & K sono primi frà loro; e per la 1. propositione di questo i numeri F, G, H, K, sono i minimi nella loro proportione, cioè nella proportione di A à B.

A 2 B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27
L 16 M 24 N 36 P 54 Q 81

Nell'istesso modo, multiplicando i quattro numeri F, G, H, K per il numero A, e ne vengano i prodotti L, M, N, P, saranno i prodotti L, M, N, P [a] nella proportione de i numeri multiplicati F, G, H, K; cioè nella proportione di A à B. Poi si multiplichi il numero B nel numero K, ed il prodotto sia Q; perche i numeri A, & B, multiplicando il medesimo numero K, producono i numeri P, Q, sarà il prodotto P al prodotto Q [b] come il multiplicante A al multiplicante B; dal che i numeri L, M, N, P, Q

a 17. del 7.
b 18. del 7.

sono

sono continui proportionali nella proportione di A à B. Finalmente perche i minimi numeri A, & B [c] sono frà loro primi, e questi multiplicati in se medesimi producono i numeri C, ed E; e multiplicando i medesimi A, & B, cioè A in C, & B in E, producono i numeri F, & K; e similmente multiplicando A in F, & B in K, producono i numeri L, & Q (che sono estremi de i numeri continui proportionali L, M, N, P, Q) gli estremi L, & Q [d] saranno frà di loro primi, ed in conseguenza i numeri L, M, N, P, Q, [e] saranno i minimi nella proportione di A à B. Non altrimente si farà se si volessero trouare altri numeri continui proportionali, che siano minimi nella proportione di A à B: poiche multiplicando i cinque L, M, N, P, Q, per il numero A, e poi multiplicato l'vltimo Q per il numero B, i sei numeri, che ne verranno, haueranno le medesime conditioni sudette; il che si dimostrerà nel medesimo modo: e con quest'ordine procedendo si possono ritrouare quanti numeri si vogliono minimi nella continua proportione di A à B; ch'era da farsi e dimostrarsi.

c 24. del 7.
d 29. del 7.
e 1. del 8.

SCOLIO.

Tutto quello, che nell'antecedente propositione si è fatto con le multiplicationi del numero A, si può fare col numero B; e quello, che si è fatto col numero B, si farà col numero A; cioè multiplicando il numero B ne i tre E, D, C, se ne producono i numeri K, H, G; e multiplicando il numero A per l'vltimo C, se ne produce il numero F; similmente, multiplicando il numero B ne i numeri K, H, G, F, se ne producono i numeri Q, P, N, M, e multiplicando il numero A per l'vltimo numero F, si ne produce il numero L.

COROLLARIO I.

Perche dalla multiplicatione di A in se medesimo, e di B in se medesimo, se ne producono i numeri quadrati C, ed E; ed i numeri continui proportionali C, D, E, sono i minimi nella proportione di A à B, sarà manifesto, che quando tre numeri continui proportionali sono i minimi nella loro proportione, i loro estremi sono numeri quadrati; similmente, perche multiplicando il numero A per il suo quadrato C, ed il numero B per il suo quadrato E, se ne producono i numeri cubi F, & K, che sono estremi de i quattro numeri F, G, H, K, minimi nella continua proportione di A à B; chiaramente appariſce, che se quattro numeri continui proportionali sono minimi nella loro

proportione, i loro eſtremi ſono numeri cubi. E con queſt' ordine, ſe i minimi numeri continui proportionali ſono cinque, i loro eſtremi ſono quadrati; ſe ſaranno ſei, i loro eſtremi ſaranno numeri ſolidi, che cadono ſotto altre denominationi, come à pieno ſi parlerà nel noſtro trattato dell'Algebra. * quadrati

COROLLARIO II.

Perche i numeri intermedij de gli antedetti numeri continui proportionali naſcono dalle multiplicationi de' minimi numeri A, & B; cioè D naſce dalla multiplicatione di A in B, il numero G dalla multiplicatione di D in A; cioè dal prodotto di A in B, multiplicato per A; ed il numero H naſce dalla multiplicatione di E in A, cioè dal quadrato di B, multiplicato per A; e nell'iſteſſo modo gli altri medij naſcono dalle multiplicationi di A ne i numeri F, G, H, K; perciò tutti i numeri intermedij D,G,H,M,N,P ſaranno miſurati da i minimi numeri A,& B. Dond'è manifeſto, che due minimi numeri in vna data proportione miſureranno tutti i numeri medij di quanti ſi voglia numeri continui proportionali, che ſaranno minimi nella medeſima data proportione.

A 2 B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27
L 16 M 24 N 36 P 54 Q 81

THEOREMA II. PROPOSITIONE III.

Se quanti numeri ſi vogliano continui proportionali ſono i minimi di tutti quelli, che hanno la medeſima proportione con eſſi, i loro eſtremi ſaranno frà di loro primi.

Siano i numeri A,B,C,D continui proportionali, i quali ſiano minimi nella loro proportione di A à B, ouero B à C &c. Dico che gli eſtremi A,

Si trouino due numeri [a] come E, ed F, che ſiano i minimi nella proportione di A à B, ouero di B à C, ò pure di C à D; e ſecondo il metodo tenuto nell'antecedente propoſitione, ſi trouino i tre numeri G,H,K continui proportionali, che ſiano minimi nella proportione di E ad F; e di nuouo ſe ne trouino quattro altri, ò cinque altri, e quanti biſognano, ſino à tanto, che ſi peruiene ad vna moltitudine di termini, vguale alla moltitudine de'termini dati A, B, C, D; e ſuppoſto che ſi ſia peruenuto à quella moltitudine, che ſi cerca, e ſiano quelli i notati L,M,N,P, i quali ſiano continui proportionali, e ſiano minimi nella proportione di E ad F. Perche la moltitudine de' termini L,M,N,P è vguale alla moltitudine de'termini A, B, C,D; e gli vni, e gli altri ſono minimi nella proportione di E ad F; non potendoſi dare il minore del minimo, ciaſcuno de'termini L,M,N,P ſarà vguale à quello, che gli corriſponde ne i dati A,B,C,D; cioè L ſarà vguale ad A, il numero M vguale à B, il notato N vguale à C, ed il numero P vguale al numero D. E perche dalla multiplicatione de'numeri E, ed F in ſe medeſimi, ſecondo quel che ſi diſſe nell'antecedente propoſitione, ſe ne producono i numeri G, & K; e dalla multiplicatione di E in G, e di F in K, ſe ne producono i numeri L, & P; per la 29. propoſ. del 7, i numeri L, & P ſono frà di loro primi: ma i numeri L, & P ſono vguali à i due A, & D; i due eſtremi dunque A, & D ſono frà di loro primi, ch'era da dimoſtrarſi.

A 8 B 12 C 18 D 27
E 2 F 3
G 4 H 6 K 9
L 8 M 12 N 18 P 27

[a] Scol. alla 35. del 7.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE IV.

Date quante proportioni ſi vogliano ne i minimi numeri; ritrouare i numeri minimi, che ſucceſſiuamente ſiano nelle proportioni date.

Siano date prima due proportioni ne i minimi numeri, come A à B, e come C à D; e ſi vogliano ritrouare tre minimi numeri, che ſucceſſiuamente ſiano nelle proportioni date; cioè che il primo al ſecondo ſia come A à B; e che il ſecondo al terzo ſia come C à D. Si troui il minimo numero E, [a] il quale ſia miſurato dal ſecondo B, e dal terzo C. Si eſpongano poi i numeri F, & G in modo, che F ſia multiplice di A, come E è multiplice di B; e che G ſia multiplice di D, come E è multiplice di C; cioè che il numero A miſuri il numero F, come il numero B miſura il numero E; e che il numero D miſuri il numero G, come C miſura il numero E. Dico che i tre numeri F,E,G ſono i minimi nelle proportioni di F ad E, e di E à G, cioè nelle proportioni di A à B, e di C à D. Perche i numeri A, & B,

A 6 B 5 C 4 D 3
F 24 E 20 G 15
I ----- K ----- L -----

[a] 36. del 7.

per costruttione, misurano vgualmente i numeri F, ed E, sarà A parte di F, come B è parte di E, e per la 20. definitione di questo, A ad F è come B ad E; e permutando, A à B b è come F ad E. Similmente perche i numeri C, & D misurano vgualmente i numeri E, & G, sarà C ad E c come D à G; e permutando, C à D d sarà come E à G; per la qual cosa i numeri F,E,G sono successiuamente nelle proportioni di A à B, e di C à D. In oltre se i numeri F, E, G non sono i minimi, altri numeri nelle medesime proportioni saranno i minimi; siano quelli i notati I, K, L, minori de i numeri F,E,G, in modo,che I à K sia come A à B, e K ad L sia come C à D. Perche A à B è come I à K, ed i numeri A, & B sono minimi; i numeri dunque A, & B e misurano vgualmente i numeri I,& K, cioè l'antecedente A misura l'antecedente I, ed il conseguente B misura il conseguente K. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i numeri C, & D misurano vgualmente i numeri K, ed L; cioè C misura K, ed il numero D misura L; per la qual cosa tanto il numero B, quanto il numero C misura il numero K. Hor perche i minimi numeri B, & C misurano il numero K, ed i medesimi B, & C misurano il minimo numero E; perciò il numero E f misura il numero K: ma fù supposto K minore di E; il maggiore dunque misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri I, K, L sono minimi nella data proportione; ma i minimi sono i notati F, E, G, ch'era da farsi nel primo luogo.

	A 6	B 5	C 4	D 3
	F 24	E 20	G 15	
	I ------	K ------	L ------	

Di nuouo siano date tre proportioni ne i minimi numeri, e la prima sia come A à B, la seconda come C à D, e la terza come E ad F; e si vogliano ritrouare quattro numeri minimi, che il primo al secondo sia come A à B; che il secondo al terzo sia come C à D; e che il terzo al quarto sia come E ad F. Si troui, come prima, g il minimo numero G, il quale sia misurato dal secondo B, e dal terzo C; si espongano poi i numeri H, & K in modo, che A misuri H, come B misura G; e che D misuri K, come C misura G. O il numero E misura K, ouero non lo misura; supposto prima che lo misuri; si esponga il numero L in modo, che F misuri L, come E misura K. Dico che i quattro numeri H, G, K, L sono quelli, che si cercano; cioè che H à G è come A à B; che G à K è come C à D; e che K ad L è come E ad F; e che i numeri H, G, K, L sono i minimi nelle date proportioni. Perche i numeri A, & B misurano vgualmente i numeri H, & G, sarà A ad H h come B à G; e permutando, A à B K è come H à G. Similmente, perche i numeri C, & D misurano vgualmente i numeri G, & K, ed i numeri E, ed F misurano vgualmente i numeri K, ed L, per l'istessa ragione C à D sarà come G à K; e sarà E ad F come K ad L: per la qual cosa i numeri H, G, K, L sono successiuamente nelle proportioni di A à B, di C à D, e di E ad F. Dico oltre à ciò, che i numeri H, G, K, L sono i minimi nelle date proportioni. Perche, se

	A 6	B 5.	C 4	D 3.	E 5	F 7.
	H 24	G 20	K 15	L 21		
	M ----	N ----	O ---	P -----		

non

non sono i minimi, altri numeri nelle date proportioni saranno i minimi; siano quelli i notati M,N,O,P, minori de i corrispondenti numeri H, G, K, L, in modo, che M ad N sia come A à B, N ad O come C à D, ed O à P come E ad F; e perche i due A, & B sono, per ipotesi, minimi, perciò i misureranno vgualmente i numeri M, ed N; cioè l'antecedente A misura M, ed il conseguente B misura N. Similmente essendo C, & D minimi nella loro proportione, perciò m misureranno vgualmente i numeri N, ed O; cioè l'antecedente C misura l'antecedente N, ed il conseguente D misura il conseguente O; dal che i due B, & C misurano il medesimo numero N; mà i due B, & C misurano il minimo G, in conseguenza il minimo G n misura il numero N; fù supposto N minore di G, il maggiore misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri M, N, O, P sono i minimi nella data proportione; mà i minimi saranno i quattro H, G, K, L, come fù proposto fare.

Se poi il numero E non misura il numero K. Si troui o il minimo numero L, misurato da i due E, & K, e si espongano i numeri M, N, P in modo, che il numero G misuri il numero M, come K misura il numero L; che H misuri N, come G misura M; e che F misuri P, come E misura L. Perche i numeri H, G, K misurano vgualmente i numeri N, M, L, sarà H à G p come N ad M; e sarà G à K, come M ad L: mà H à G, & G à K sono come A à B, e come C à D; sarà N ad M q come A à B; ed M ad L come C à D. Similmente perche i due E, ed F misurano vgualmente i numeri L, & P, sarà E ad F come L à P. Per la qual cosa i quattro numeri N, M, L, P sono successiuamente nelle date proportioni. Dico che sono i minimi nelle medesime date proportioni. Perche se non sono i minimi, altri numeri nelle medesime proportioni saranno i minimi; siano quelli i notati Q, R, T, V, minori de i corrispondenti numeri N, M, L, P; e sarà A à B come Q ad R; ed ancora C à D come R à T; e sarà E ad F come T ad V. E perche C, & D sono minimi, perciò r misureranno vgualmente i due R, & T; cioè l'antecedente C misura l'antecedente R, ed il conseguente D misura il conseguente T. Similmente, essendo i numeri E, & F minimi, il numero E t misurerà T, ed il numero F misura V; dal che i due D, ed E misurano il medesimo numero T. In oltre perche i due D, ed E, per costruttione, misurano il minimo numero L, ed i medesimi D, ed E misurano il numero T; perciò u il numero L misura il numero T: fù supposto T minore di L, il maggiore misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri Q, R, T, V sono i minimi nelle date proportioni, mà i minimi sono i quattro N, M, L, P, ch'era da farsi.

	A 6	B 5.	C 4	D 3.	E 2	F 7.
	H 24	G 20	K 15			
	N 48	M 40	L 30	P 105		
	Q ----	R ----	T ----	V ------		

Se saranno date quattro proportioni, si trouino prima i minimi numeri proportionali nelle tre date proportioni, come sopra si è fatto, e con la quarta proportione si faccia l'istesso, che antecedentemente si fece con la terza proportione data, e ne verranno i cinque minimi numeri proportionali, che si cercano. Per esempio, oltre le date tre proportio-

ni.

ni, ſia data la quarta proportione come X ad Y. Si trouino prima i quattro minimi numeri N, M, L, P, che ſiano ſucceſsiuamente nelle medeſime prime tre proportioni di A à B, di C à D, e di E ad F: poi, ſe X misura P, ſi esponga il numero Q in modo, che Y misuri il numero Q, come X misura P; sarà X ad Y come P a Q; ed i cinque numeri N, M, L, P, Q saranno ſucceſsiuamente i minimi proportionali, ſecondo le date proportioni. Se poi il numero X non misura il numero P, ſi troui il minimo numero Q, [x] che ſia misurato da i due P, ed X, e ſi espongano i numeri R T, V, Z in modo,

A 6	B 5	C 4	D 3	E 2	F 7	X 9	Y 2	
N 48		M 40		L 30		P 105		
V 144		T 120		R 90		Q 315		Z 70

che il numero L misuri il numero R, come P misura Q; che M misuri T, come L misura R; che N misuri V, come M misura T; e che Y misuri Z, come X misura Q; ed i numeri V, T, R, Q, Z saranno i minimi nelle proportioni date: il che ſi dimoſtra col procedere, come ſopra s'è fatto. Ed il medeſimo ordine ſi terrà ſe le proportioni date ſarāno più di quattro, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.

x 36. del 7.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

I numeri piani hanno la proportione compoſta da i loro lati.

Siano i due numeri piani A, B, e ſiano i lati del numero A i notati C, D, ed i lati del numero B ſiano E, F. Dico che la proportione del numero piano A al numero piano B è compoſta di due proportioni, cioè della proportione del lato C al lato E, e della proportione del lato D al lato F. Si multiplichino i numeri D, E, frà di loro, ed il prodotto ſia il numero G. Perche D, multiplicando i due C, ed E, produce i numeri A & G, ſarà il prodotto A al prodotto G, [a] come il numero multiplicato C al numero multiplicato E. Similmente perche E, multiplicando i numeri D, & F, produce i due G, & B, ſarà il prodotto G al prodotto B [b] come il numero multiplicato D al numero multiplicato F, per la qual coſa i tre A, G, B ſono ſucceſsiuamente proportionali nelle proportioni di C ad E, e di D ad F. In oltre, preſi i numeri A, & B, come eſtremi, ed il numero G ſia intermedio; la proportione di A à B [c] ſarà compoſta delle proportioni di A à G, e di G à B: mà la proportione di A à G è come C ad E, e la proportione di G à B è come D ad F; la proportione dunque del numero piano A al numero piano B ſarà compoſta delle proportioni di C ad E, e di D ad F. Per la qual coſa i numeri piani hanno la proportione compoſta da i loro lati, il che era da dimoſtrarſi.

A 24		B 48		
	G 18			
C 4.	D 6.	E 2.	F 16.	

a 17. del 7.

b 19. del 7.

c Lem. 7. do. po la 18. propoſ. del 6.

Nell'

Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che il numero piano A al numero piano B hà la proportione compoſta delle proportioni di C ad F, e di D ad E: Poiche multiplicando il numero D per il numero F, ed il prodotto ſia G; per le ragioni antedette, ſarà A à G come C ad F, e ſarà G à B come D ad E; ma la proportione di A à B è compoſta delle proportioni di A à G, è di G à B; ſarà la proportione di A à B compoſta delle proportioni di C ad F, e di D ad E, ch'era da dimoſtrarſi.

A 24		B 48		
	G 96			
C 4.	D 6.	F 16.	E 3.	

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VI.

Di quanti ſi voglia numeri continui proportionali, ſe il primo non misura il ſecondo, niun'altro di quelli misurerà alcuno de gli altri.

Siano i numeri continui proportionali A, B, C, D, E, ed il primo A non misuri il ſecondo B. Dico che niun altro di loro misurerà alcuno de gli altri. Perche i propoſti numeri ſono continui proportionali, ſarà A à B come B à C, ouero C à D, & D ad E; ſi che ſe A misuraſſe B, per la 20. definitione, B misurarebbe vgualmente C, ed il numero C misurarebbe vgualmente D; come ancora D misurarebbe vgualmente E: ma, per ipoteſi, A non misura B, ne meno B misurerà il numero C, ne C misurerà D, &c. e perciò niſſuno misura il ſuo proſſimo ſeguente.

A 16	B 24	C 36	D 54	E 81
F 4	G 6	H 9		

In oltre ſi prendano [a] tre numeri continui proportionali, che ſiano i minimi nella proportione di A à B, come F, G, H in modo, che F à G ſia come A à B, & G ad H ſia come F à G, cioè come B à C, e per l'egualità, ſarà [b] F ad H, come A à C. In oltre perche A à B è come F à G, ſe A misura B, il numero F [c] misurerà vgualmente G; ma A per ipoteſi, non misura B, ne meno F misurerà G; per la qual coſa F non ſarà l'vnità; perche ſe foſſe l'vnità misurarebbe il numero G, ſtante che l'vnità misura tutti i numeri: ma ſi è dimoſtrato, che F non misura G, perciò F non è l'vnità. E perche i numeri F, G, H ſono i minimi nella proportione di F à G, cioè di A à B, gli eſtremi F, ed H [d] ſono numeri primi; dal che F non misura H; ma F ad H è come A à C, ed il numero F, non misura H, ne meno A misurerà C. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che B non misurerà il numero D, ne meno C misurerà il numero E. E ſe in luogo de i tre F, G, H, ſi prenderanno quattro numeri continui proportionali, che ſiano minimi nella proportione di A à B, proſeguendo col medeſimo metodo di prima, ſi proverà, che il primo A non misura il quarto D, ne B misura E, come anco C non misurerà quello, che ſegue dopo il numero E. E ſe i numeri F, G, H ſaranno cinque, ſi proverà, che A non misura il quinto termine E, ne meno niſſun altro misurerà il ſuo quinto termine; e con queſt'ordine procedendo, ſarà prouato, che ſe A non misura B, niuno de' numeri A, B, C, D &c. misurerà gli altri, il che era da dimoſtrarſi.

a 22. del 8.

b 22. del 7.

c 20. defin. del 7.

d 3. del 8.

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Di quanti si voglia numeri continui proportionali, se il primo misura l'vltimo, misurerà ancora il secondo.

Siano i numeri continui proportionali A, B, C, D, E, ed il primo A misuri l'vltimo E. Diço che A misurerà il secondo B. Se il primo A non misura il secondo B, per l'antecedente propositione, ne meno misurerà alcun'altro de'numeri B,C,D,E, ch'è contro all'ipotesi, mentre si è supposto, che A misura l'estremo E. Per la qual cosa il primo A misurerà il secondo B, ch'era da dimostrarsi.

A 3 B 6 C 12 D 24 E 48

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Quanti numeri continui proportionali cadono frà due proposti numeri, altretanti ne caderanno frà gli altri numeri, che sono nella medesima proportione.

Frà due qualunque numeri A, & B cadano i medij continui proportionali C, & D; e siano altri numeri, cioè E, F, che habbiano la medesima proportione, quale hà il numero A al numero B. Dico che frà i numeri E, F cadono tanti medij proportionali, per quanti ne cadono frà i numeri A, & B. Si trouino tanti minimi numeri continui proportionali [a] nella proportione di A à C, per quanti sono i termini A,C,D,B, che siano i notati G,H,K,L, e per l'egualità, [b] sarà G ad L come A à B, e come E ad F: e perche i numeri G,H,K,L continui proportionali, sono per costruttione minimi, gli estremi G, ed L sono [c] frà di loro primi; e per la 23. del settimo, i numeri G, ed L sono minimi nella loro proportione, cioè nella proportione di G ad L: ma G ad L è come E ad F, perciò i numeri G, ed L [d] misureranno vgualmente i numeri E, ed F; cioè l'antecedente G misura l'antecedente E, ed il conseguente L misura il conseguente F.

A 24 C 36 D 54 B 81
G 8 H 12 K 18 L 27
E 32 M 48 N 72 F 108

E perche G, H, K, L, sono continui proportionali, quante volte i due G, L misurano i due E, F, altretante volte i numeri H, K misureranno altri numeri, come per essempio M, N. Per la qual cosa i numeri G,H,K,L misureranno vgualmente i corrispondenti E, M, N, F; e per la 20. definit. del 7, sarà G ad E come H ad M, e come K ad N, ed L ad F; e permutandosi, i numeri G, H, K, L, [e] hanno successiuamente le medesime proportioni de'numeri E, M, N, F; ma i numeri G, H, K, L, per costruttione, sono continui proportionali; perciò i numeri E,M,N,F saranno ancora

A 40 C 20 D 10 B 5
G 8 H 4 K 2 L 1
E 8 M 4 N 2 F 1

a 2. del 8.
b 22. del 7.
c 3. del 8.
d 21. del 7.
e 13. del 7.

conti-

continui proportionali; e tanti saranno i termini E, M, N, F, per quanti sono i termini G, H, K, L; cioè per quanti sono i termini A, C, D, B. E perciò quanti termini medij sono frà i due A,B, altrettanti ne saranno frà i due E, F, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

Quanti medij continui proportionali cadono frà due numeri frà loro primi, altrettanti ne cadono frà vno di essi, e l'vnità.

Siano i due numeri frà loro primi A, B, frà quali cadano i medij continui proportionali C,D. Dico che altrettanti medij continui proportionali caderanno frà l'vnità, ed il numero A, e frà l'vnità, ed il numero B. Si trouino due numeri minimi [a] nella proportione di A à B, che siano E, ed F; e nella medesima proportione si trouino tre altri minimi numeri cõtinui proportionali come G,H,K; e similmente se ne trouino quattro altri, come L,M,N,P, e con quest'ordine fin che si peruenga à tanta moltitudine di termini, per quanta è la moltitudine de'termini A, C, D, B. Perche gli estremi A,B, per ipotesi, sono primi frà loro, i numeri A, C, D, B saranno i minimi nella proportione di E ad F: ma perche altrettanti termini L, M, N, P, per costruttione, sono ancora minimi nella proportione di E ad F, non potendosi dare il minore del minimo, i numeri L,M,N,P, saranno vguali à i corrispondenti numeri A,C, D,B; cioè L vguale ad A, il numero M vguale à C, il numero N vguale à D, ed il numero P vguale à B. In oltre perche nel trouare i numeri minimi G, H, K, ouero L, M, N, P, per la 20. propositione di questo, si è prodotto G dalla multiplicatione di E in se medesimo, e si è prodotto L dalla multiplicatione di E nel numero G; il numero G [b] sarà misurato da E per il medesimo numero E, ed il prodotto L sarà misurato da G per l'istesso numero E; ma il numero E è misurato dall'vnità [c] per il medesimo numero E, in conseguenza i numeri L, G, E, e l'vnità, si misureranno vgualmente; cioè l'vnità misura E, come E misura G, ed il numero G misura L; per la qual cosa la medesima parte sarà l'vnità di E, qual'è il numero E di G, ed il numero G di L. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la medesima parte è l'vnità di F, quale è F di K, ed il numero K di P, e perciò l'vnità, ed i numeri E, G, L, come ancora l'vnità, ed i numeri F,K, P [d] sono continui proportionali. E perche, come apparisce nella 2. propos. di questo, i termini L, M, N, P sono sempre vno più de'termini L,G,E, ouero P, K, F, aggiunta à i termini L, G, E l'vnità per primo termine, saranno tanti i termini continui proportionali L,G,E, con l'vnità, per quanti sono i termini L,M,N,P; ma i termini L, M, N, P, sono tanti, per quanti sono i termini A,C,D,B, tanti dunque saranno i termini con-

A 8 C 12 D 18 B 27
vnità 1
E 2 F 3
G 4 H 6 K 9
L 8 M 12 N 18 P 27

a 2. del 8.
b 7. assioma del 7.
c 5. assioma del 7.
d 20. defin. del 7.

tinui proportionali L, G, E, coll'vnità, per quanti sono i termini A, C, D, B. Per la qual cosa tanti medij continui proportionali cadono frà i due A, & B, per quanti ne cadono frà l'vnità, ed il numero A, ch'è vguale ad L. Nell'istesso modo si proverà, che tanti sono i numeri medij, che cadono frà i due A, & B, per quanti sono quelli, che cadono frà l'vnità, ed il numero B, che fù dimostrato vguale à P, come fù proposto dimostrare.

A 8 C 12 D 18 B 27
vnità
1
E 2 F 3
G 4 H 6 K 9
L 8 M 12 N 18 P 27

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE X.

Quanti medij continui proportionali cadono frà l'vnità, e ciascuno di due numeri, altrettanti ne caderanno frà i medesimi due numeri.

Frà i due numeri A,& B; e l'vnità Z cadano quanti numeri si vogliano continui proportionali, cioè frà l'vnità Z, ed il numero A cadano i medij C,D,E; e frà l'vnità Z, ed il numero B, ne cadano altrettanti, come F,G,H. Dico che quanti medij cadono frà l'vnità Z, ed il numero A; ouero frà l'vnità Z, ed il numero B, altrettanti medij continui proportionali cadono frà i numeri A, & B. Si multiplichino i due C, F scambieuolmente, ed il prodotto sia K; poi si multiplichi C per li due K, & G, ed i prodotti siano L, ed M; ed il medesimo numero C multiplichi i tre L,M,H, ed i prodotti siano N,P,Q, i quali, essendo tanti, per quanti sono i medij, che cadono frà l'vnità, ed il numero A, ouero frà l'vnità, ed il numero B, si pongano frà i numeri A, & B. Dico che i numeri A, N,P,Q,B sono continui proportionali. Perche, per ipotesi, l'vnità Z à C è come C à D, & D ad E, & E ad A; tante volte l'vnità misura C, [a] per quante volte C misura D, ed il numero D misura E, come ancora E misura A; ma l'vnità Z misura C per il numero C; perciò [b] C misura D, il numero D misura E, ed E misura A per il medesimo numero C. Per la qual cosa [c] C, multiplicando se medesimo, produce D; ed il medesimo C, multiplicando D, produce E; e multiplicando E, produce A. Nel medesimo modo si dimostrerà, che F, multiplicando se medesimo, produce G, e multiplicando G, produce H, ed ancora, multiplicando H, produce B. In oltre perche C, multiplicando C, & F, produsse D, e K; sarà D à K [d] come C ad F. Similmente, perche F, multiplicando C, ed F, produsse K,& G; la proportione di K à G [e] sarà come quella di C ad F, cioè come quella di D à K; e perciò i tre D,K,G sono

A 81 N 162 P 324 Q 648 B 1296
E 27 L 54 M 108 H 216
D 9 K 18 G 36
C 3 F 6
1
Z

a 20. defin. del 7.
b 5. assiom. del 7.
c 9. assioma del 7.
d 17. del 7.
e 17. del 7.

con-

continui proportionali nella proportione di C ad F. Di nuouo perche C multiplicando i tre D,K,G, produsse i numeri E,L,M; i numeri E,L,M [f] saranno nella medesima continua proportione de i numeri multiplicati D,K,G; cioè la medesima proportione di C ad F. E perche i due C,ed F, multiplicando il medesimo numero F, produssero i numeri M, ed H; sarà la proportione di M ad H [g] come quella de i multiplicanti, cioè come quella di C ad F; dalche i numeri E, L, M, H sono continui proportionali nella proportione di C ad F. Finalmente perche C, multiplicando i quattro E, L, M, H, produsse i numeri A, N, P, Q; saranno i numeri A, N, P, Q [h] nella continua proportione de i numeri E,L,M,H; cioè nella proportione di C ad E. E similmente i numeri C,F, multiplicando il medesimo numero H, hanno prodotti i numeri Q, & B; la proportione di Q à B [K] sarà come quella di C ad F; cioè come quella, che successiuamente hanno i numeri A,N,P,Q. Per la qual cosa i numeri A,N,P,Q,B sono continui proportionali; e perciò frà i due numeri A, & B, cadono tanti medij continui proportionali, per quanti ne cadono frà l'vnità Z, ed i numeri A,& B, ch'era da dimostrarsi.

f 17. del 7.
g 18. del 7.
h 17. del 7.
K 18 del 7.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XI.

Frà due numeri quadrati cade vn numero medio proportionale: ed il numero quadrato al numero quadrato, hà duplicata proportione, che il lato al lato.

Siano i due numeri quadrati A, & B, i di cui lati, ò radici, siano i numeri C,& D. Dico che frà i numeri quadrati A, & B, cade vn numero medio proportionale; e che il numero quadrato A al numero quadrato B, hà duplicata proportione, che il lato C al lato D. S'intendano multiplicati i numeri C,D, scambieuolmente, ed il prodotto sia E. Perche C è lato di A, multiplicato C in se medesimo produce A, e per simile ragione, multiplicato D in sè medesimo, il prodotto sarà B. In oltre perche i numeri C, & D, multiplicati per il medesimo numero C, producono i numeri A, & E; sarà la proportione di A ad E [a] come quella di C à D. Similmente perche i numeri C, & D, multiplicati per il medesimo numero D, producono i numeri E, & B; sarà E à B [b] come C à D; cioè [c] come A ad E: per la qual cosa i tre A,E,B sono continui proportionali, nella proportione di C à D; e perciò frà i due numeri quadrati A, & B, cade vn solo numero E medio proportionale. Finalmente perche i tre numeri A,E,B sono continui proportionali; la proportione del primo A al terzo B [d] è duplicata di quella, che hà il primo A al secondo E; ma per quel, che si è dimostrato, la proportione di A ad E è come quella di C à D, hauerà il numero quadrato A al numero quadrato B, duplicata proportione di quella, che hà il lato C al lato D, come fù proposto dimostrare.

A 9 E 21 B 49
C 3 D 7

a 17. del 7.
b 17. del 7. e Scol. alla 12. del 7.
d lemma 7. dopo la 18. del 6.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che se due numeri si multiplicano in se medesimi, e si multiplicano frà di loro, i prodotti sono in continua proportione de i numeri multiplicati.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XII.

Frà due numeri cubi cadono due medij continui proportionali; ed il cubo al cubo hà triplicata proportione, che il lato al lato.

Siano i due numeri cubi A, & B, i di cui lati, ò radici, siano i numeri C,& D. Dico che frà i numeri cubi A, & B, cadono due medij continui proportionali; e che il numero cubo A al numero cubo B hà triplicata proportione di quella, che hà il lato C al lato D. Si multiplichi C in se medesimo, ed il prodotto sia E; e multiplicando D in se medesimo, si produca F; poi si multiplichino i due C, & D scambieuolmente, ed il prodotto sia G; e finalmente i due numeri C, & D multiplichino il medesimo numero G, ed i prodotti siano H, & K.

A 27 H 36 K 48 B 64
E 9 G 12 F 16
C 3 D 4

Perche il numero C, multiplicando i due C, & D, produsse i numeri E, & G; sarà E à G [a] come C à D. Similmente perche il numero D, multiplicando i due C, & D, produsse i numeri G, ed F; sarà G ad F [b] come C à D, cioè [c] come E à G; dal che i tre E, G, F sono continui proportionali nella proportione di C à D. In oltre, per la definitione del cubo, C multiplicando E, produce A; mà il numero C, multiplicando G, produsse H; sarà A ad H [d] come E à G; cioè [e] come C à D. Similmente, per la definitione del cubo, D, multiplicando F, produce B: mà, per costruttione, D, multiplicando G, produsse K; sarà K à B [f] come G ad F, cioè come C à D, ouero come A ad H. Di più, perche i due C, & D multiplicando il medesimo numero G, produssero i numeri H, & K; sarà H à K [g] come C à D: per la qual cosa i numeri A, H, K, B sono continui proportionali, de' quali i medij sono H, & K, che, per la costruttione fatta, sono due solamente, e perciò frà i due numeri cubi A, & B, cadono due soli medij continui proportionali. Finalmente perche i quattro numeri A, H, K, B sono continui proportionali, il primo A al quarto B, [h] hà triplicata proportione di quella, che hà al secondo H: mà la proportione di A ad H è come quella di C à D, haverà il numero cubo A al numero cubo B, triplicata proportione di quella, che hà il lato C al lato D, come fù proposto dimostrare.

a 17. del 7.
b 17. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 17. del 7.
e Scol. alla 12. del 7.
f 17. del 7.
g 18. del 7.
h Lemma 7 dopo la 18. del 6.

CO-

COROLLARIO.

Nell'antecedente propositione appare, che multiplicati i lati di due numeri cubi, come C, D in se medesimi, e multiplicati frà di loro in modo, che produchino le continue proportionali E, G, F; poi li due C, D, multiplicandoli nel medesimo numero G, i prodotti H, K, con i cubi A, & B, cioè A, H, K, B, sono continui proportionali nella proportione di C à D.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Se, di quanti si voglia numeri continui proportionali, ogn'vno è multiplicato in se medesimo, i prodotti saranno similmente continui proportionali; e se i numeri posti nel principio si multiplicaranno ne i loro prodotti, i numeri, che ne risultano, saranno continui proportionali; e sempre, multiplicando i numeri, posti nel principio, per gli vltimi prodotti, quelli, che ne risultano, sono continui proportionali.

Siano i numeri continui proportionali A, B, C, ciascuno de' quali si multiplichi in se medesimo, ed i prodotti siano i numeri D, E, F.

A 2 B 4 C 8
D 4 N 8 E 16 O 32 F 64
G 8 P 16 Q 32 H 64 R 128 S 256 I 512
K 16, T 32, V 64, X 128, L 256, Y 512, Z 1024, & 2048, M 4096,

Di nuouo si multiplichino questi per li primi A, B, C, cioè A multiplichi D, il numero B multiplichi E, ed il numero C multiplichi F; ed i prodotti siano G, H, I. Similmente si multiplichino questi vltimi prodotti, col medesimo ordine, per li numeri A, B, C, e ne vengano i numeri K, L, M, e con quest'ordine si proceda quanto si vuole. Dico che i numeri D, E, F sono continui proportionali: e similmente i numeri G, H, I, come ancora i numeri K, L, M, sono continui proportionali. Si multiplichino i due A, & B scambieuolmente, ed il prodotto sia N; e multiplicando i due B, C scambieuolmente, se ne produca il numero O. Di nuouo multiplichi A i due N, E, ed i prodotti siano P, Q. Di più, multiplichi B i numeri O, F, e si produchino i numeri R, S. Similmente A multiplichi i tre P, Q, H, e faccia i prodotti T, V, X; ed il numero B multiplichi i tre R, S, I, e faccia i prodotti Y, Z, &. Perche A, multiplicando se me-

desimo,

desimo, è multiplicando ancora B, produsse i numeri D, ed N; sarà D ad N, [a] come A à B. Similmente B, multiplicando A, e multiplicando se medesimo, produsse i due N, ed E; sara N ad E, [b] come A à B, cioè [c] come D ad N; e perciò i tre D, N, E sono continui proportionali, nella proportione di A à B. Di nuouo, perche B, multiplicando se medesimo, e multiplicando C, produsse E, ed O; sarà B à C, [d] come E ad O. Similmente C, multiplicando B, e multiplicando se medesimo, produsse O, ed F; sarà O ad F [e] come B à C; si che i tre, E, O, F sono continui proportionali nella proportione di B à C, cioè di A à B: mà li tre D, N, E sono continui proportionali nella medesima proportione di A à B; sarà D ad N, come E ad O; & N ad E, come O ad F; e per l'egualità, D ad E [f] sarà come E ad F: per la qual cosa i tre primi prodotti D, E, F sono continui proportionali.

a 17. del 7.
b 17. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 17. del 7.
e 17. del 7.
f 14. del 7.

		A 2	B 4	C 8		
	D 4	N 8	E 16	O 32	F 64	
G 8	P 16	Q 32	H 64	R 128	S 256	I 512

K 16, T 32, V 64, X 128, L 256, Y 512, Z 1024, & 2048, M 4096,

Di nuouo, perche A, multiplicando i tre D, N, E, produsse i tre G, P, Q, saranno i prodotti G, P, Q, [g] nella medesima proportione de i tre D, N, E; cioè nella proportione di A à B. Parimente, perche A, & B, multiplicando il medesimo numero E, produssero i due Q, ed H; sarà Q ad H [h] come A à B; dal che i quattro G, P, Q, H sono continui proportionali nella proportione di A à B. Oltre à ciò, perche B, multiplicando i tre E, O, F, produsse i tre H, R, S; saranno i tre H, R, S, [K] proportionali, nella proportione de i tre E, O, F; cioè nella proportione di B à C ouero di A à B. E similmente, perche, multiplicando i due B, C, per il medesimo numero F, produsse i due S, ed I; sarà S ad I [l] come B à C, cioè come A à B; per la qual cosa i quattro numeri H, R, S, I sono continui proportionali nella proportione di A à B; mà i quattro G, P, Q, H sono similmente continui proportionali nella medesima proportione di A à B; saranno i quattro G, P, Q, H nella medesima continua proportione de i quattro H, R, S, I; e per l'egualità, sarà G ad H [m] come H ad I, e perciò i secondi prodotti G, H, I sono continui proportionali. Nell'istesso modo si dimostrerà che i tre vltimi prodotti K, L, M sono continui proportionali, che era da dimostrarsi.

g 17. del 7.
h 18. del 7.
K 17. del 7.
l 18. del 7.
m 14. del 7.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIV.

Se vn numero quadrato misura vn altro numero quadrato, il lato dell'vno misurerà il lato dell'altro; e se il lato d'vn numero quadrato misura il lato d'vn altro numero quadrato, il quadrato dell'vno, misurerà il quadrato dell'altro.

Siano

Siano i numeri quadrati A, & B, i di cui lati siano C, & D; e prima il numero quadrato A misuri il numero quadrato B. Dico che il lato C misurerà il lato D. Si multiplichino i numeri C & D scambieuolmente, ed il prodotto sia E, per il Corollario all'vndecima propositione di questo, i tre numeri A, E, B sono continui proportionali, nella proportione di C à D; mà il primo A, per ipotesi, misura il terzo B; per la settima di questo, il primo A misurerà ancora il secondo numero E: e perche A ad E è come C à D, ed il numero A misura E, il numero C [a] misurerà ancora il numero D, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 4	E 16	B 64	
C 2	D 8		

a 20. defin. del 7.

Di nuouo, supposto che il lato C misuri il lato D. Dico, che il quadrato A misurerà il quadrato B. S'intenda fatta l'istessa costruttione; saranno i tre numeri A, E, B continui proportionali, nella proportione di C à D; e perciò A ad E è come C à D; ma il numero C misura, per ipotesi, il numero D; il numero A ancora [b] misurerà il numero E. Finalmente perche A ad E è come E à B, ed il numero A misura E, ancora il numero E [c] misurerà B; per la qual cosa il numero quadrato A [d] misurerà il numero quadrato B, come fù proposto dimostrare.

b 20. defin. del 7.
c 20. defin. del 7.
d 11. assioma del 7.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

Se vn numero cubo misura vn altro numero cubo, il lato di vno misura il lato dell'altro; e se il lato misura il lato, ancora il cubo misurerà il cubo.

Siano i numeri cubi A, & B, i di cui lati siano C, & D. Dico che, se il cubo A misura il cubo B, ancora il lato C misurerà il lato D; e se il lato C misura il lato D, ancora il cubo A misurerà il cubo B. Si multiplichino in se medesimi i numeri C, & D, ed i prodotti siano E, ed F; poi si multiplichino i numeri C, D scambieuolmente, ed il prodotto sia G, per il Corollario all'11. propositione, i tre numeri E, G, F saranno continui proportionali, nella proportione di C à D. Di nuouo, i numeri C, & D multiplichino il numero G, ed i prodotti siano H, & K; sarà H à K [a] come C à D; ed i quattro numeri A, H, K, B, per il Corollario alla 12. propositione di questo, sono continui proportionali, nella proportione di C à D. E perche il primo termine A misura l'vltimo B, perciò il medesimo numero A [b] misurerà il secondo H; ma la proportione di A ad H è come C à D, misurando A il numero H, [c] ancora C misurerà il numero D, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 8	H 24	K 72	B 216
E 4	G 12	F 36	
C 2	D 6		

a 18 del 7.
b 7. del 8.
c 20. defin. del 7.

Di nuouo, supposto che il lato C misuri il lato D. Dico che il cubo A misurerà il cubo B. Si concepisca fatta la medesima costruttione, e per il Corollario alla 12. propositione di questo, i numeri A, H, K, B sono con-

continui proportionali nella proportione di C à D; dal che A ad H sarà come C à D: mà C misura D, per ipotesi, perciò A misurerà [d] H. In oltre perche i numeri A, H, K, B, sono continui proportionali, ed A misura H, ancora H [e] misurerà vgualmente K, ed il numero K misurerà B. Hor perche A misura H, ed H misura K, il numero A [f] misurerà K; mà K misura B, dunque A misurerà B, ch'era da dimostrarsi.

A 8 H 24 K 72 B 216
E 4 G 12 F 36
C 2 D 6

d 20. defin. del 7.
e 20. defin. del 7.
f 11. assioma del 7.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVI.

Se il numero quadrato non misura il numero quadrato, ne meno il lato misura il lato; e se il lato d'vn quadrato non misura il lato d'vn altro quadrato, ne meno quel quadrato misura l'altro quadrato.

Siano i numeri quadrati A,B, i di cui lati siano C,D. Dico prima, che se il quadrato A non misura il quadrato B, ne meno il lato C misurerà il lato D. Misuri C, s'è possibile, il lato D, per l'antecedente propositione, il quadrato A misurerà il quadrato B, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque C misura D, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 16 B 81
C 4 D 9

Di nuouo Dico che, se il lato C non misura il lato D, ne meno il quadrato A misurerà il quadrato B. Perche, se il quadrato A misurasse il quadrato B, per l'antecedente propositione, il lato C misurarebbe il lato D, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il quadrato A misura il quadrato B, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se il numero cubo non misura vn altro numero cubo, ne meno il lato dell'vno misurerà il lato dell'altro; e se il lato d'vn numero cubo non misura il lato d'vn altro numero cubo, ne meno il cubo dell'vno, misurerà il cubo dell'altro.

Siano i numeri cubi A, B, i di cui lati siano i numeri C,D. Dico prima, che se il cubo A non misura il cubo B, ne meno il lato C misurerà il lato D. Perche se il lato C misurasse il lato D, il cubo A [a] misurarebbe il cubo B, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque C misura il lato D.

A 8 B 27
C 2 D 3

a 15. del 8.

Supposto che il lato C non misuri il lato D. Dico che il cubo A non misura il cubo B. Misuri il cubo A, s'è possibile, il cubo B, per la 15.

propo-

positione di questo, il lato C misurerà il lato D, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il cubo A misura il cubo B, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Frà due numeri piani simili cade vn medio proportionale; ed il numero piano al simile numero piano, hà duplicata proportione, che il lato homologo dell'vno al lato homologo dell'altro.

Siano i numeri piani simili A,B, ed i lati del piano A siano C,& D; come ancora i lati del piano B siano E,F, in modo, che multiplicandosi i due C,D scambieuolmente, produchino il piano A; e multiplicandosi i due E,F, produchino il piano B. Perche i piani A, & B sono simili, perciò i loro lati [a] saranno proportionali, e sarà C à D come E ad F. Dico prima, che frà i due A,& B cade vn medio proportionale. Si multiplichino i due D,E scambieuolmente, ed il prodotto sia G. Perche C à D è come E ad F, permutando, [b] C ad E sarà come D ad F. Hor perche D, multiplicando i due C, ed E, produce i due A, & G; sarà A à G, [c] come C ad E, cioè [d] come D ad F: e perche E, multiplicando i due D, ed F, produce i due G,& B; sarà G à B [e] come D ad F; cioè come A à G: dal che i tre A,G,B sono continui proportionali, e perciò frà i numeri piani A,& B cade vn solo medio proportionale, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 12 G 18 B 27
C 6 D 2 E 9 F 3

a 21. defin. del 7.
b 13. del 7.
c 17. del 7.
d Scol. alla 18. del 7.
e 17. del 7.

Di nuouo Dico, che il numero piano A al simile numero piano B, hà duplicata proportione, di quella che hà il lato homologo C al lato homologo E; ouero di quella, che hà il lato homologo D al lato homologo F; cioè che hà l'antecedente all'antecedente, ò il conseguente al conseguente. Perche i tre numeri A,G,B sono continui proportionali, il primo A al terzo B [f] hà duplicata proportione di quella, che hà il primo A al secondo G: ma A à G, per quel che si è dimostrato, è come C ad E, ouero come D ad F; hauerà il numero piano A al numero piano B duplicata proportione, di quella che hà C ad E, ouero D ad F, come fù proposto dimostrare.

f Lemma 2. dopo la 18. del 7.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Frà due numeri solidi simili cadono due medij continui proportionali; ed il numero solido al numero solido simile hà triplicata proportione, che il lato homologo dell'vno al lato homologo dell'altro.

Siano i numeri ſolidi ſimili A, & B; i lati del ſolido A ſiano i notati C, D, E, ed i lati del ſolido B ſiano i notati F, G, H; e perche i ſolidi A, & B ſono ſimili, perciò haueranno i lati proportionali; cioè C à D, come F à G, & D ad E come G ad H. Dico prima, che frà i due A, & B cadono due medij proportionali. Si multiplichino i due C, D ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia K. Parimente ſi multiplichino i due F, G ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia L; e multiplicandoſi i due D, F ſcambieuolmente producano il numero P. In oltre multiplicando i due E, H, per il medeſimo numero P, produchino i numeri M, N. Perche i tre C, D, E ſono proportionali à i tre F, G, H, permutandoſi, [a] ſaranno ancora proportionali; cioè C ad F ſarà come D à G, e come E ad H. Di più, perche D, multiplicando i due C, ed F, produſſe i due K, & P, [b] ſarà K à P come C ad F. Similmente perche F, multiplicando i due D, & G, produſſe i due P, ed L; ſarà P ad L [c] come D à G; per la qual coſa i tre K, P, L ſono continui proportionali nella proportione di C ad F, ouero di D à G, ò pure di E ad H. E perche il ſolido A è prodotto dalla multiplicatione de i tre lati C, D, E, ed il numero K naſce dalla multiplicatione de i due C, D, multiplicando il numero K per l'altro lato E, produrrà il numero A. Oltre à ciò perche il ſolido B vien fatto [d] dalla multiplicatione de i tre lati F, G, H, ed il numero L è fatto dalla multiplicatione de i due F, G multiplicando H il numero L, produrrà il numero B. E perche E, multiplicando i due K, P, produſſe i due A, M; ſarà il numero A al numero M, [e] come K à P; cioè come C ad F, ouero come D à G, ò pure come E ad H. Similmente H, multiplicando P, ed L, produſſe i due N, B; ſarà N à B [f] come P ad L, cioè come C ad F, ouero D à G, ò pure E ad H. Finalmente perche i due E, H, multiplicando P, produſſero M, ed N, la proportione di M ad N [g] ſarà come quella di P ad L; cioè come C ad F, ouero D à G, ouero E ad H: per la qual coſa i quattro A, M, N, B, ſono continui proportionali nella proportione di C ad F, ouero di D à G, ò pure di E ad H; e perciò frà i numeri ſolidi ſimili A, & B, cadono due numeri medij proportionali, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

Di nouo. Dico che il ſolido A al ſolido ſimile B, hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo C al lato homologo F, ouero D à G, ouero E ad H. Perche i quattro numeri A, M, N, B ſono continui proportionali, il primo A al quarto B, [h] hà triplicata proportione di quella, che hà il primo A al ſecondo M: ma il primo A al ſecondo M è come C ad F, ouero D à G, ouero E ad H; il ſolido dunque A al ſimile ſolido B, hauerà triplicata proportione di quella, che hà C ad F, ouero D à G, ouero E ad H, ch'era da dimoſtrarſi.

a 13. del 7.
b 17. del 7.
c 17. del 7.
d 17. defin. del 7.
e 17. del 7.
f 17. del 7.
g 18. del 7.
h Lemma 7. dopo la 18. del 7.

A 30 M 60 N 120 B 240
K 6 P 12 L 24
C 2 D 3 E 5 F 4 G 6 H 10

THEO-

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se frà due numeri piani cade vn medio proportionale, quei numeri ſono piani ſimili.

Frà i due numeri A, & B, cada il numero C, medio proportionale. Dico che i numeri A, & B ſono piani ſimili. Si prendano i due numeri D, ed E in modo, che ſiano [a] i minimi nella proportione di A à C, ouero C à B, perche i due D, E ſono minimi nella proportione di A à C, perciò i numeri D, ed E [b] miſurano vgualmente i due A, & C, per qualche numero F. Similmente perche A à C, per ipoteſi, è come C à B, ſarà D ad E come C à B: mà i numeri D, E, per coſtruttione, ſono i minimi nella proportione di C à B, perciò miſurano i numeri C, & B [d] vgualmente per qualche numero G. Hor perche D miſura il numero A per il numero F, multiplicando F nel numero D, [e] il prodotto ſarà A, ed il medeſimo numero F, multiplicando il numero E, produrrà C. Di più, perche i numeri D, E miſurano vgualmente i numeri C, B per il numero G, multiplicando G per D, [f] produrrà il numero C; e multiplicando G per E, produrrà il numero B. Oltre à ciò, perche i due F, & G, multiplicando il medeſimo numero E, produſſero i numeri C, & B, ſarà C à B, [g] come F à G; mà C à B è come D ad E, ſarà D ad E [h] come F à G; e permutando, D ad F [k] ſarà come E à G. In oltre, perche F, multiplicando D, produſſe il numero A, ſarà A [l] numero piano, i di cui lati ſono D, ed F. Similmente, multiplicando G per E, ſi produſſe il numero B, e perciò B [m] ſarà numero piano, i di cui lati ſono E, & G: mà queſti quattro lati furono dimoſtrati proportionali, cioè D ad F come E à G; i numeri dunque A, & B [n] ſono piani ſimili, come fù propoſto dimoſtrare.

a Scol. alla 35. del 7.
b 21. del 7.
c Scol. alla 22. del 7.
d 21. del 7.
e 9. aſſioma del 7.
f 2. aſſioma 7.
g 18. 6.
h Scol. 7. 22. del 7.
k 13. del 7.
l 16. defin. del 7.
m 16. defin. del 7.
n 21. defin. del 7.

A 18 C 24 B 32
D 3 E 4 F 6 G 8

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Se frà due numeri cadono due medij continui proportionali, quei numeri ſaranno ſolidi ſimili.

Frà i due numeri A, & B cadano i due medij continui proportionali C, & D. Dico che i numeri A & B ſono ſolidi ſimili. Si prendano i tre E, F, G [a] minimi nella proportione de' i numeri A, C, D, B ſaranno i tre E, F, G continui proportionali; e perche frà i due E, & G cade vn medio proportionale F, ſaranno i due E, & G [b] piani ſimili. Hor ſiano li due H & K i lati del piano E, ed i due P, ed L i lati del piano G; ſarà H à K [c] come P ad L, e permutandoſi, H à P [d] ſarà come K ad L: e perche i tre E, F, G ſono i minimi nella proportione de i

A 24 C 72 D 216 B 648
E 1 F 3 G 9
H 1 K 1 M 24 P 3 L 3 N 72

a 35. del 7.
b 20. del 8.
c 21. defin. del 7.
d 13. del 7.

numeri A, C, D, perciò i numeri E, F, G [e] misureranno vgualmente i numeri A, C, D, per qualche numero M. Similmente perche i numeri E, F, G sono i minimi nella proportione de i tre C, D, B, perciò [f] misurano vgualmente i numeri C, D, B, per qualche numero N in modo; che M, multiplicando i numeri E, F, G produrrà i numeri A, C, D; ed il numero N, multiplicando i medesimi E, F, G produca i numeri C, D, B. E perche dalla multiplicatione de i due lati H, K è fatto il numero E; e dalla multiplicatione de i due P, L, è fatto il numero G; ed il numero A è fatto dalla multiplicatione di M in E, in conseguenza il numero A sarà fatto dalla multiplicatione de i tre H, K, M. Nell'istesso modo si proverà, che il numero B è fatto dalla multiplicatione de i tre numeri P, L, N; per la qual cosa i numeri A, & B sono [g] numeri solidi; i di cui lati sono H, K, M, & P, L, N. oltre perche M, N multiplicando il medesimo numero F, per quel che si è dimostrato producono i numeri C, D sarà [h] C à D, come M ad N. Similmente perche N, multiplicando i due E, F produsse i due C, & D; sarà E ad F, come C à D; mà C à D è come M ad N; sarà E ad F, come M ad N. Di più essendo i numeri E, & G piani simili, haueranno [m] duplicata proportione de' loro lati homologhi, cioè haverà E à G duplicata proportione di quella, che hà il lato homologo H al lato homologo P; ouero di quella, che hà K ad L; mà E à G [n] hà duplicata proportione che il medesimo numero E ad F (stante che E, F, G sono continui proportionali) perciò E ad F sarà come H à P, ouero come K ad L. mà E ad F, per quel che si è dimostrato, è come M ad N; sarà H à P, [o] come K ad L; e K ad L come M ad N: dal che i tre lati H, K, M sono proportionali à i tre lati P, L, N, per la qual cosa il solido A, prodotto da i tre lati H, K, M [p] sarà simile al solido B, prodotto da i tre lati P, L, N, come fù proposto dimostrare.

A 24	C 72	D 216	B 648			
E 1	F 3	G 9				
H 1	K 1	M 24	P 3	L 3	N 72	
A 8	C 12	D 18	B 27			
E 4	F 6	G 9				
H 2	K 2	M 2	P 3	L 3	N 3	

e 21. del 7.
f 21. del 7.
g 17. defin. del 7.
h 18. del 7.
17. del 7.
i Scol. alla 12. del 7.
m 18. del 8.
n Lemma 7. dopo la 18. del 6.
o Scol. alla 12. del 7.
p 21. defin. del 7.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se tre numeri sono continui proportionali, ed il primo sia numero quadrato, ancora il terzo sarà numero quadrato.

Siano i tre numeri A, B, C continui proportionali, ed il primo A sia numero quadrato. Dico che il terzo C sarà ancora numero quadrato. Perche frà gli estremi A, & C cade il numero medio proportionale B, i due A, & C, [a] saranno piani simili; ma il piano A è supposto

A 9	B 54	C 324

a 20. del 8.

sto quadrato, in conseguenza il simile piano C sarà quadrato, che era da dimostrarsi.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Se quattro numeri sono continui proportionali, ed il primo sia numero cubo, ancora il quarto sarà numero cubo.

Siano i quattro numeri A, B, C, D continui proportionali, ed il primo A sia numero cubo. Dico che il quarto D sarà ancora numero cubo. Perche frà gli estremi A, & D cadono due medij continui proportionali; perciò i due A, & D [a] sono solidi simili: ma il numero A è supposto numero cubo: sarà il numero D, che gli è simile, ancora numero cubo, ch'era da dimostrarsi.

A 27	B 45	C 75	D 125

a 21. del 8.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Se due numeri hanno frà di loro l'istessa proportione, che hà vn numero quadrato ad vn altro numero quadrato; se il primo è numero quadrato, ancora il secondo sarà numero quadrato.

Siano i due numeri A, & B da vna parte, e due numeri quadrati C, & D da vn altra parte; ed habbia il numero A al numero B l'istessa proportione, quale hà il numero quadrato C al numero quadrato D; e sia A numero quadrato. Dico che B sarà ancora numero quadrato. Cada frà i due numeri quadrati C, & D [a] vn medio proportionale, che sia E. Similmente cada frà i due numeri A, & B [b] vn medio proportionale, che sia F. Perche i tre A, F, B sono continui proportionali, ed il primo A è numero quadrato, sarà ancora il terzo B [c] numero quadrato, il che era da dimostrarsi.

A 36	F 48	B 64	
C 9	E 12	D 16	

a 11. del 8.
b 8. del 8.
c 22. del 8.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXV.

Se due numeri hanno frà di loro l'istessa proportione, che hà vn numero cubo ad vn altro numero cubo, ed il primo di quelli è numero cubo, ancora il secondo sarà numero cubo.

Habbia il numero A al numero B, quella proportione, che hà il numero cubo C al numero cubo D, ed il numero A sia cubo. Dico che il numero B sarà ancora lui cubo. Frà i due numeri cubi C, & D [a] cadano due medij continui proportionali, come E, ed F, e frà i due numeri A, & B [b] cadano due medij continui proportionali, come G, ed H. Perche i quattro A, G, H, B sono continui proportionali, de'quali il primo A, per ipotesi, è numero cubo, sarà ancora il quarto B [c] numero cubo, come fù proposto dimostrare.

A 8	G 12	H 18	B 27
C 64	E 96	F 144	D 216

a 19. del 8. b 8. del 8. c 3. del 8.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVI.

I simili numeri piani sono frà di loro, come i numeri quadrati.

Siano i simili numeri piani A, & B. Dico che il numero piano A al simile numero piano B, è come qualche numero quadrato ad vn altro numero quadrato. Perche i numeri A, & B sono piani simili, [a] caderà frà di loro vn medio proportionale; sia quello il numero C. Si prendano tre numeri, come D, E, F, [b] che siano minimi nella continua proportione di A, C, B, per il primo Corollario alla 2. propositione di questo, gli estremi D, ed F sono numeri quadrati. Hor perche A à C è come D ad E, e C à B è come E ad F, per l'egualità, il numero piano A [c] al simile numero piano B è come il numero quadrato D al numero quadrato F, ch'era da dimostrarsi.

A 20	C 30	B 45
D 4	E 6	F 9

a 18. del 7. b 35. del 7. c 14. del 7.

SCOLIO.

La conuersa dell'antecedente propositione facilmente la dimostraremo col P. Clauio nel seguente modo.

I numeri, che hanno la medesima proportione, quale hanno i numeri quadrati, sono piani simili.

Habbia il numero A al numero B l'istessa proportione, quale hà il numero quadrato C al numero quadrato D. Dico che i numeri A, & B sono piani simili. Perche frà i numeri quadrati C, & D [a] cade vn medio proportionale, e la proportione di C à D è come A à B, caderà frà i due A, & B [b] vn medio proportionale, e perciò i numeri A, & B [c] sono piani simili, ch'era da dimostrarsi.

A 8	B 18	
C 16	D 36	

a 11. del 8. b 8. del 8. c 20. del 8.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVII.

I numeri solidi simili sono frà loro, come i numeri cubi.

Siano

Siano i numeri solidi simili A, & B. Dico che il numero A al numero B è come qualche numero cubo ad vn altro numero cubo. Perche i numeri A, & B sono solidi simili, frà essi caderanno [a] due medij cõtinui proportionali, che siano C, & D: si prendano poi quattro numeri minimi [b] nella continua proportione de' numeri A, C, D, B; saranno gli estremi E, ed H, per il primo Corollario alla seconda propositione di questo, numeri cubi. E perche i numeri E, F, G, H sono nella continua proportione de i numeri A, C, D, B, per l'egualità, sarà E ad H [c] come A à B; cioè il numero solido A al simile solido B, come il numero cubo E al numero cubo H, che era da dimostrarsi.

A 240	C 360	D 540	B 810
E 8	F 12	G 18	H 27

a 19. del 8. b 35. del 7. c 14. del 7.

SCOLIO.

La conuersa di questa propositione è facilissima nel seguente modo.

I numeri, che hanno l'istessa proportione de' numeri cubi, sono soli di simili.

Habbia il numero A al numero B l'istessa proportione, quale hà il numero cubo C al numero cubo D. Dico che i numeri A, & B sono solidi simili. Perche A à B, per ipotesi, è come C à D, ed i numeri C, & D sono cubi, caderanno frà i due C, & D, [a] due medij continui proportionali: mà il cubo C al cubo D è come A à B, caderanno ancora frà i due A, & B [b] due medij continui proportionali, e per la 21. propositione di questo, gli estremi A, & B sono solidi simili, come fù proposto dimostrare.

A 16	B 54
C 64	D 216

a 12. del 8. b 8. del 8.

SCOLIO.

Per le cose da dimostrarsi non sarà inutile il seguente problema.

Ritrouare due numeri piani, i quali non habbiano la proportione del numero quadrato al numero quadrato.

Si prendano due numeri primi, ouero due numeri frà di loro primi, che nissuno sia numero quadrato, e siano per essempio li notati A & B. Dico che il numero A al numero B non è come il numero quadrato al numero quadrato; se il numero A al numero B è come il numero quadrato al numero quadrato, li numeri A & B, per la 26. di questo, saranno piani simili, e per la 18. di questo, frà li due A & B cade vn medio proportionale; e perche li due estremi A & B, per ipotesi, sono numeri primi, non hanno alcuna commune misura fuor che l'vnità; per la qual cosa li due estremi A & B, ed il medio, non hanno commune misura, e perciò sono frà di loro primi, e per la prima propositione di questo sono i minimi nella

A 7	B 13

lo-

loro proportione, e per il Corollario primo alla propoſitione ſeconda di queſto, li due eſtremi A, & B ſono numeri quadrati, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto, che niſſuno delli due ſia quadrato; non dunque il numero A al numero B è come il numero quadrato al numero quadrato, che era da dimoſtrarſi.

COROLLARIO I.

Da quel che ſi è detto è manifeſto, che li numeri primi non ſono come i numeri quadrati.

COROLLARIO II.

Dall'antecedente propoſitione ſi caua il modo da ritrouare due numeri, che non ſiano piani ſimili l'aggregato dè quali non ſia numero quadrato, ne habbia proportione à ciaſcuno di loro, come numero quadrato à numero quadrato; poiche, ſe ſi diuiderà vn numero non quadrato in due numeri primi, ouero frà di loro primi, il loro aggregato non ſarà numero quadrato, ed il medeſimo aggregato, per la 30. propoſitione del ſettimo, ſarà primo à ciaſcuno di quelli, e per l'antecedente Scolio, l'aggregato à ciaſcuno di quelli non ſarà come numero quadrato à numero quadrato.

Fine del Ottauo Elemento.

99628