Sacch
erius

PISA
BIBLIOTECA
E
5
6
13
UNIVERSITARIA
PISA

REGIA · BIBLIOTECA · UNIVERSITARIA DI PISA
E
B 6
13

EUCLIDES

AD OMNI NÆVO VINDICATUS:

SIVE

ÆDIFICATUS GEOMETRICUS

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] SACCHERIO

[illegible] JESU

[illegible]

OPUSCULUM

EX.MO SENATUI

MEDIOLANENSI

Ab Auctore Dicatum.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.

[illegible] *Superiorum permissu.*



EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.

AUCTORE

HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.

OPUSCULUM

EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.

BLIOTECA
DELL'
NIVERSITA'
DI PISA.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permissu.*

EUCLIDES

AB OMNI NÆVO VINDICATUS:

SIVE

CONATUS GEOMETRICUS

QUO STABILIUNTUR

Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.

AUCTORE

HIERONYMO SACCHERIO

SOCIETATIS JESU

In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.

OPUSCULUM

EX.MO SENATUI

MEDIOLANENSI

Ab Auctore Dicatum.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.

Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

EX.mo SENATUI MEDIOLANENSI

Hieronymus Saccherius e Soc. Jesu

F.

EUclidem ab omni nævo vindicatum, supplicem vobis sisto, PP. Sapientissimi; quibus nempe quotidiano veluti usu compertissimum est, quanti in unaquaque disciplinâ intersit, earum prima quædam dogmata inconcussa, atque immota consistere, ne tota superextructæ inquisitionis machina, inopino casu, funditùs evertatur. Id enim in ipsâ Divini, Humanique Juris scientiâ, quæ Amplissimi Ordinis Vestri præcipuum decus est, rerumque maxima-

rum arbitra, ac moderatrix ſedet, perſpectum ſatis habere poteſtis. Hæc enim niſi æquiſſimis Principum Legibus, Sapientiumque Reſponſis, quæ vim legis, ac pondus ipsâ humani generis approbatione meruerunt, quibuſdam veluti baſibus niteretur, quanta emergeret in jure dicendo nunquam vincenda perplexitas, quot in Foro inextricabiles tenebræ, quàm infelix perturbatio publicæ felicitatis! Et hæc quidem cautio, cum in omni diſciplinarum genere locum habet, tum præcipuè in Mathematicis diligentiùs adhibenda eſt, unde omne opinandi arbitrium exulat, ſoloque principiorum, ac conſecutionum inſeparabili nexu elicitur manifeſta, ac compertiſſima veritas. Eâ de causâ inſignes Geometræ, tum prioribus illis, tum etiam ad hanc uſque ætatem noſtram conſequentibus ſæculis, Matheſeos Elementa ad exactiſſimæ firmitatis leges redigere ſtuduerunt; eo tamen conatu, qui & mihi (abſit verbo invidia) exercendi ingenii, pro muneris mei ratione, facultatem reliquerit, ac excitaverit voluntatem. Quo ſucceſſu, Eruditorum judicium erit. Me certè, ſi audire quempiam in re ſuâ decet, non pœnitet laboris mei; qui ut latiùs promanaret, atque exciperetur libentiùs, cui niſi Excelſo Ordini Veſtro, PP. Ampliſſimi, ſacran-

dus

dus erat, qui Veſtri Nominis gloriam ſplendore ſanguinis, Doctrinæ eminentiâ, virtutum merito ſuperatis? Hoc itaque alterum, poſt Neoſtaticam, ſummi in vos obſequii mei, pignus, ac monumentum excipite; quodque caput eſt: Authorem ipſum habete, quamdiu vivet, vobis Addictiſſimum.

IGNATIUS VICECOMES
SOCIETATIS JESU
In Provincia Mediolanenſi Præpoſitus Provincialis.

CUm librum, cui titulus *Euclides ab omni nævo vindicatus* a P. Hieronymo Saccherio noſtræ Societatis Sacerdote conſcriptum, aliquot ejuſdem Societatis Theologi recognoverint, & in lucem edi poſſe probaverint; facultate nobis a R. P. Noſtro Præpoſito Generali Franciſco Retz communicata, concedimus ut typis mandetur, ſi iis, ad quos ſpectat, ita videbitur: Cujus rei gratiâ has litteras manu noſtra ſubſcriptas, ſigilloque noſtro munitas dedimus. Mediolani 16. Auguſti 1733.

IGNATIUS VICECOMES.

Loco ✠ Sigilli.

DOn Gaſpar a Baſilica-Petri Sacræ Theologiæ, ac Juris utriuſque Doctor, S. Offitii Reviſor, ex juſſu Reverendiſſimi Patris Magiſtri Sylveſtri Martini Inquiſitoris Generalis Mediolani, vidi, & attentè legi Librum, cui titulus, Euclides ab omni nævo vindicatus, Auctore Hieronymo Saccherio Societatis Jesu &c. nihilque in eo reperi contra Fidem Orthodoxam; neque contra bonos mores, ac ideo poſſe prælo mandari cenſeo &c.

Die 13. Julii 1733.

IMPRIMATUR

F. Sylveſter Martini Ord. Præd. Inquiſitor Generalis Mediol.

Franciſcus Curionus S. Euſebii Archipresb. pro Eminentiſs. & Reverendiſs. D. D. Card. Odeſcalco Archiep.

Carlius pro Excellentiſſimo Senatu.

PROŒMIUM AD LECTOREM.

QUanta ſit Elementorum Euclidis præſtantia, ac dignitas, nemo omnium, qui Mathematicas diſciplinas noverint, ignorare poteſt. Lectiſſimos hanc in rem teſtes adhibeo Archimedem, Apollonium, Theodoſium, alioſque penè innumeros, ad hæc uſque noſtra tempora rerum Mathematicarum Scriptores, qui non aliter hæc Euclidis Elementa uſurpant, niſi ut principia jam diu ſtabilita, ac penitus inconcuſſa. Verùm tanta hæc nominis celebritas vetare non potuit, quin multi ex Antiquis pariter, ac Recentioribus, iique Magni Geometræ nævos quoſdam a ſe deprehenſos cenſuerint in his ipſis pulcherrimis, nec unquam ſatis laudatis Elementis. Tres autem hujuſmodi nævos deſignant, quos ſtatim ſubnecto.

Primus reſpicit definitionem parallelarum, & ſub ea Axioma, quod apud Clavium eſt decimumtertium Libri primi, ubi Euclides ſic pronunciat: Si in duas rectas lineas, in eodem plano exiſtentes recta incidens linea duos ad eaſdem partes internos angulos minores duobus rectis cum eiſdem efficiat, duæ illæ rectæ lineæ ad eas partes in infinitum protractæ inter ſe mutuò incident. Porrò nemo eſt, qui dubitet de veritate expoſiti Pronunciati; ſed in eo unicè Euclidem accuſant, quòd nomine Axiomatis uſus fuerit, quaſi nempè ex ſolis terminis ritè perſpectis ſibi ipſi faceret fidem. Inde autem non pauci (retentâ cæteroquin Euclidæâ parallelarum definitione) illius demonſtrationem aggreſſi ſunt ex iis ſolis Propoſitionibus Libri primi Euclidæi, quæ præcedunt vigeſimam nonam, ad quam ſcilicet uſui eſſe incipit controverſum Pronunciatum.

Sed rursum; quoniam antiquorum in hanc rem conatus visi non sunt adamussim scopum attingere; factum idcircò est, ut multi proximiorum temporum eximii Geometræ, idem pensum aggressi, necessariam censuerint novam quandam parallelarum definitionem. Itaque; cum Euclides parallelas rectas lineas definiat, quæ in eodem plano existentes, si in utramque partem in infinitum producantur, nunquam inter se mutuò incidunt; *postremis expositæ definitionis vocibus has alias substituunt*: Semper inter se æquidistant; *adeò ut nempè singulæ perpendiculares ab uno quolibet unius illarum puncto ad alteram demissæ æquales inter se sint.*

At nova rursum hinc oritur scissura. Nam aliqui, & ii sanè acutiores, demonstrare conantur parallelas rectas lineas prout sic definitas, unde utique gradum faciant ad demonstrandum sub ipsis Euclidæis vocibus controversum Pronunciatum, cui nimirum ab eâ vigesimâ nonâ Libri primi Euclidæi (pauculis quibusdam exceptis) universa innititur Geometria. Alii verò (non sine magno in rigidam Logicam peccato) eas tales rectas lineas parallelas, nimirum æquidistantes, *assumunt tanquam datas, ut inde gradum faciant ad reliqua demonstranda.*

Et hæc quidem satis sunt ad præmonendum Lectorem super iis, quæ materiam exhibebunt Libro priori hujus mei Opusculi: Nam uberior prædictorum omnium explicatio habebitur in Scholiis post Prop. vigesimam primam enunciati Libri, quem dividam in duas veluti partes. In priore imitabor antiquiores illos Geometras, nihil propterea sollicitus de naturâ, aut nomine illius lineæ, quæ omnibus suis punctis a quadam suppositâ rectâ lineâ æquidistet: Sed unicè in id incumbam, ut controversum Euclidæum Axioma citra omnem petitionem principii clarè demonstrem; nunquam idcircò adhibens ex ipsis prioribus Libri primi Euclidæi Propositionibus, non modò vigesimam septimam, aut vigesimam octavam, sed nec ipsas quidem decimam sextam, aut decimam septimam, nisi ubi clarè agatur de triangulo omni

ex

ex parte circumscripto. Tum in posteriore parte, ad novam ejusdem Axiomatis confirmationem demonstrabo non nisi rectam lineam esse posse, quæ omnibus suis punctis a quadam supposità rectâ lineâ æquidistet. Horum autem occasione prima ipsa universæ Geometriæ Principia rigido examini subjicienda hìc esse nullius est, qui non videat.

Transeo ad alios duos nævos Euclidi objectos. Prior respicit definitionem sextam Libri quinti super æquè proportionalibus: Posterior Definitionem quintam Libri sexti super compositione rationum. Hic autem erit secundi mei Libri unicus scopus, ut dilucidè explicem præfatas Euclidæas Definitiones, simulque ostendam non æquo jure hac in parte Euclidis nomen vexatum fuisse.

Prodest tamen rursum præmonere, demonstratum a me iri hac occasione unum quoddam Axioma, quod tutissimè per omnem Geometriam versetur, sine indigentiâ illius Postulati, *sub nomine Axiomatis ab interpretibus (ut reor) intrusi, cujus usus incipit ad* 18. *quinti.*

INDICIS LOCO.

Addenda cenſeo, quæ ſequuntur.

1. IN I. & II. Propoſ. Lib. primi duo jaciuntur principia, ex quibus in III. & IV. demonſtratur, angulos interiores ad rectam jungentem extremitates æqualium perpendiculorum, quæ ex duobus punctis alterius rectæ, veluti baſis, versùs eaſdem partes (in eodem plano) erigantur, non modò fore inter ſe æquales, ſed præterea aut rectos, aut obtuſos, aut acutos, prout illa jungens æqualis fuerit, aut minor, aut major prædictâ baſi: Atque ita viciſſim. *a pag.* 1

2. Hinc ſumitur occaſio ſecernendi tres diverſas hypotheſes, unam anguli recti, alteram obtuſi, tertiam acuti: circa quas in V. VI. & VII. demonſtratur, unam quamlibet harum hypotheſium fore ſemper unicè veram, ſi nimirum deprehendatur vera in uno quolibet caſu particulari. *a pag.* 5

3. Tum verò; poſt interpoſitas tres alias neceſſarias Propoſitiones; demonſtratur in XI. XII. ac XIII. univerſalis veritas noti Axiomatis, reſpectu habito ad priores duas hypotheſes, unam anguli recti, & alteram obtuſi; ac tandem in XIV. oſtenditur abſoluta falſitas hypotheſis anguli obtuſi. Atque hinc incipit diuturnum prælium adversùs hypotheſin anguli acuti, quæ ſola renuit veritatem illius Axiomatis. *a pag.* 10

4. Itaque in XV. ac XVI. demonſtratur ſtabilitum iri hypotheſes aut anguli recti, aut obtuſi, aut acuti, ex quolibet triangulo rectilineo, cujus tres ſimul anguli æquales ſint, aut majores, aut minores duobus rectis; ac ſimiliter ex quolibet quadrilatero rectilineo, cujus quatuor ſimul anguli æquales ſint, aut majores, aut minores quàtuor rectis. *a pag.* 20

5. Sequuntur quinque aliæ Propoſitiones, in quibus demonſtrantur alia indicia pro ſecernenda vera hypotheſi a falſis. *a pag.* 23

6. Accedunt quatuor principalia Scholia; in quorum poſtremo exhibetur figura quædam geometrica, ad quam fortaſſe reſpexit Euclides, ut ſuum illud Pronunciatum aſſumeret tanquam per ſe notum. In tribus prioribus oſtenditur non valuiſſe ad intentum præcedentes inſignium Geometrarum conatus. Sed quia controverſum Axioma exactiſſimè demonſtratur ex duabus præſuppoſitis rectis lineis *æquidiſtantibus*; monet ibi Auctor contineri in eo præſuppoſito manifeſtam petitionem *Principii*. Quòd ſi provocari hìc velit ad communem perſuaſionem, atque item exploratiſſimam *praxim*; rurſum monet provocari non debere ad experientiam, quæ reſpiciat puncta infinita, cum ſatis eſſe poſſit unica experientia uni cuivis puncto affixa. Quo loco tres ab ipſo afferuntur invictiſſimæ Demonſtrationes Phyſico-Geometricæ. *a pag.* 29

7. Superſunt duodecim aliæ Propoſitiones,

tiones, quæ primæ Parti hujus Libri finem imponunt. Non expono particularia assumpta, quia nimis implexa. Solùm dico ibi tandem manifestæ falsitatis redargui inimicam hypothesim anguli acuti, utpotè quæ duas rectas agnoscere deberet, quæ in uno eodemque puncto commune reciperent in eodem plano perpendiculum: Quod quidem naturæ lineæ rectæ repugnans esse demonstratur per quinque Lemmata, in quibus concluduntur quinque principalia Geometriæ Axiomata, quæ respiciunt lineam rectam, ac circulum, cum suis correlativis Postulatis. *a pag.* 43

8. Secunda pars continet sex Propositiones. Ibi autem; post expensam (juxta hypothesim anguli acuti) naturam illius lineæ, quæ omnibus suis punctis a quadam præsuppositâ rectâ lineâ æquidistet; multis modis ostenditur, eam fore æqualem contrapositæ basi, unde infertur prænunciatæ hypothesis certissima falsitas. Quare tandem in ultima Propos. quæ est XXXIX. exactissimè demonstratur celebre illud Euclidæum Axioma, cui nempe (ut omnes sciunt) universa Geometria innititur. *a pag.* 87

9. Secundus Liber digeri commodè non potuit in Propositiones, etiamsi locis opportunis plura intermista sint utilissima Theoremata, ac Problemata. Meretur nihilominus expresse notari unum quoddam Axioma, cujus ibi demonstratur non modò veritas, verùm etiam universalis utilitas

pro

prq omni Geometria, ſine indigentia alterius parum decori Poſtulati, quod ab interpretibus cenſeri poteſt intruſum ſub nomine Axiomatis, cujus nempe uſus incipit ad 18. quinti. Et id quidem pro prima Parte hujus Libri, in qua vindicatur Def. ſexta quinti Euclidæi. *a pag.* 102.

10. Tum in ſecunda Parte; præter nonnulla alia opportunè addita, ad tuendas reliquas Definitiones ejuſdem Quinti circa magnitudines proportionales; demonſtratur priore loco (reſpectu habito ad magnitudines commenſurabiles) quinta Definitio Sexti, etiamſi recipi ea deberet in *quid rei*, veluti Axioma: Sed rurſum multis exemplis, ex ipſo Euclide petitis, oſtenditur nullius demonſtrationis indigam eam eſſe, quia Definitionem *puri nominis*. Atque ita, poſt opportunam additam Appendicem, huic Operi finis imponitur. *a pag.* 132

ERRATA	CORRIGE
Pag. lin.	
11. 5. teſpectivè	reſpectivè
20. 9. mauifeſtum	manifeſtum
26. 9. *punctum* D	*punctum* B
28. 11. Jnngantur	Jungantur
28. 14. pu ctum	punctum
30. 17. Inſiſtentis	Inſiſtenti
40. 10. prætet	præter
46. 29. ratioue	ratione
65. 16. ſuppoſita ri	ſuppoſitam
72. 30. unâ *ABX* rectâ	unâ *ADX* rectâ
73. 1. intelligantur	intelligatur
73. 5. cum eâdem rectâ *ABX*	cum eâdem rectâ *ADX*
75. penult. ſita	ſit a
85. 1. exactiſſimæ	exactiſſimè
97. ult. Ipſi	ipſi
109. ult. *IBC*	*ABC*
136. 16. habet	ſe habet

Reliqua errata leviora, ac præſertim circa frequentem immutationem literarum n & u, f & ſ, r & t ſapiens Lector condonabit.

EUCLIDIS
AB OMNI NÆVO VINDICATI
LIBER PRIMUS:

In quo demonſtratur: duas quaslibet in eodem plano exiſtentes rectas lineas, in quas recta quæpiam incidens duos ad eaſdem partes internos angulos efficiat duobus rectis minores, ad eas partes aliquando invicem coituras, ſi in infinitum producantur.

PARS PRIMA

PROPOSITIO I.

SI *duæ æquales rectæ* (*fig.* 1.) AC, BD, *æquales ad eaſdem partes efficiant angulos cum recta* AB: *Dico anguſos ad junctam* CD *æquales invicem fore.* Tab. I.

Demonſtratur. Jungantur *AD*, *CB*. Tum conſiderentur triangula *CAB*, *DBA*. Conſtat (ex quarta primi) æquales fore baſes *CB*, *AD*. Deinde conſiderentur triangula *ACD*, *BDC*. Conſtat (ex octava primi) æquales fore angulos *ACD*, *BDC*. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

MAente uniformi *quadrilatero* ABDC, *latera* AB, CD, *bifariam dividantur* (*fig.* 2.) *in punctis* M, *&* H. *Di-*

co angulos ad junctam MH *fore hinc inde rectos.*

Demonstratur. Jungantur *AH*, *BH*, atque item *CM*, *DM*. Quoniam in eo quadrilatero anguli *A*, & *B* positi sunt æquales, atque item (ex præcedente) æquales sunt anguli *C*, & *D*; constat ex quarta primi (cum aliàs nota sit æqualitas laterum) æquales fore in triangulis *CAM*, *DBM*, bases *CM*, *DM*; atque item, in triangulis *ACH*, *BDH*, bases *AH*, *BH*. Quare; collatis inter se triangulis *CHM*, *DHM*, ac rursum inter se triangulis *AMH*, *BMH*; constabit (ex octava primi) æquales invicem fore, atque ideo rectos angulos hinc inde ad puncta *M*, & *H*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

SI duæ æquales rectæ (fig. 3.) AC, BD, *perpendiculariter insistant cuivis rectæ* AB: *Dico junctam* CD *æqualem fore, aut minorem, aut majorem ipsâ* AB, *prout anguli ad eandem* CD *fuerint aut recti, aut obtusi, aut acuti.*

Demonstratur prima pars. Existente recto utroque angulo *C*, & *D*; sit, si fieri potest, alterutra ipsarum, ut *DC*, major alterâ *BA*. Sumatur in *DC* portio *DK* æqualis ipsi *BA*, jungaturque *AK*. Quoniam igitur super *BD* perpendiculariter insistunt æquales rectæ *BA*, *DK*, æquales erunt (ex prima hujus) anguli *BAK*, *DKA*. Hoc autem absurdum est; cum angulus *BAK* sit ex constructione minor supposito recto *BAC*; & angulus *DKA* sit ex constructione externus, atque ideo (ex decimasexta primi) major interno, & opposito *DCA*, qui supponitur rectus. Non ergo alterutra prædictarum rectarum, *DC*, *BA*, est altera major, dum anguli ad junctam *CD* sint recti; ac propterea æquales invicem sunt. Quod erat primo loco demonstrandum.

Demon-

Demonſtratur ſecunda pars. Si autem obtuſi fuerint anguli ad junctam *CD*, dividantur bifariam *AB*, & *CD*, in punctis *M*, & *H*, jungaturque *MH*. Quoniam ergo ſuper recta *MH* perpendiculariter inſiſtunt (ex præcedente) duæ rectæ *AM*, *CH*, poniturque ad junctam *AC* angulus rectus in *A*, non erit (ex prima hujus) recta *CH* æqualis ipſi *AM*, cum deſit angulus rectus in *C*. Sed neque erit major: cæterùm ſumptâ in *HC* portione *KH* æquali ipſi *AM*, æquales forent (ex prima hujus) anguli ad junctam *AK*. Hoc autem abſurdum eſt, ut ſupra. Nam angulus *MAK* eſt minor recto; & angulus *HKA* eſt (ex decimafexta primi) major obtuſo, qualis ſupponitur internus, & oppoſitus *HCA*. Reſtat igitur, ut *CH*, dum anguli ad junctam *CD* ponantur obtuſi, minor ſit ipsâ *AM*; ac propterea prioris dupla *CD* minor ſit poſterioris duplâ *AB*. Quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

Demonſtratur tertia pars. Tandem verò, ſi acuti fuerint anguli ad junctam *CD*, ductâ pariformiter (ex præcedente) perpendiculari *MH*, ſic proceditur. Quoniam ſuper recta *MH* perpendiculariter inſiſtunt duæ rectæ *AM*, *CH*, poniturque ad junctam *AC* angulus rectus in *A*, non erit (ut ſuprà) recta *CH* æqualis ipſi *AM*, cum deſit angulus rectus in *C*. Sed neque erit minor: cæterùm; ſi in *HC* protractâ ſumatur *HL* æqualis ipſi *AM*; æquales forent (ut ſuprà) anguli ad junctam *AL*. Hoc autem abſurdum eſt. Nam angulus *MAL* eſt ex conſtructione major ſuppoſito recto *MAC*; & angulus *HLA* eſt ex conſtructione internus, & oppoſitus, atque ideo minor (ex decimafexta primi) externo *HCA*, qui ſupponitur acutus. Reſtat igitur, ut *CH*, dum anguli ad junctam *CD* ſint acuti, major ſit ipsâ *AM*, atque ideo prioris dupla *CD* major ſit poſterioris duplâ *AB*. Quod erat tertio loco demonſtrandum.

Itaque conſtat junctam *CD* æqualem fore, aut minorem

rem, aut majorem ipsâ *AB*, prout anguli ad eandem *CD* fuerint aut recti, aut obtusi, aut acuti. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

HInc in omni quadrilatero continente tres quidem angulos rectos, & unum obtusum, aut acutum, latera adjacentia illi angulo non recto minora sunt, alterum altero, lateribus contrapositis, si ille angulus sit obtusus, majora autem, si sit acutus. Id enim demonstratum jam est de latere *CH* relatè ad contrapositum latus *AM*; similique modo ostenditur de latere *AC* relatè ad contrapositum latus *MH*. Cum enim rectæ *AC*, *MH*, perpendiculares sint ipsi *AM*, nequeunt (ex prima hujus) esse invicem æquales, propter inæquales angulos ad junctam *CH*. Sed neque (in hypothesi anguli obtusi in *C*) potest quædam *AN*, portio ipsius *AC*, æqualis esse ipsi *MH*, qua nimirum major sit prædicta *AC*: cæterùm (ex eadem prima) æquales forent anguli ad junctam *HN*; quod est absurdum, ut suprà. Rursum verò (in hypothesi anguli acuti in eo puncto *C*) si velis quandam *AX*, sumptam in *AC* protractâ, æqualem ipsi *MH*, qua nimirum minor sit modò dicta *AC*; jam eodem titulo æquales erunt anguli ad *HX*; quod utique absurdum itidem est, ut supra. Restat igitur, ut in hypothesi quidem anguli obtusi in eo puncto *C*, latus *AC* minus sit contrapositio latere *MH*; in hypothesi autem anguli acuti sit eodem majus. Quod erat intentum.

COROLLARIUM II.

MUltò autem magis erit *CH* major portione qualibet ipsius *AM*, ut putà *PM*, ad quam nempe juncta

CP

CP acutiorem adhuc angulum efficiat cum ipsa *CH* versùs partes puncti *H*, & obtusum (ex decimasexta primi) cum ea *PM* versùs partes puncti *M*.

COROLLARIUM III.

RUrsum constat prædicta omnia æquè procedere, sive assumpta perpendicula *AC*, & *BD*, fuerint certæ cujusdam apud nos longitudinis, sive sint, aut supponantur infinitè parva. Quod quidem notari opportunè debet in reliquis sequentibus Propositionibus.

PROPOSITIO IV.

VIciſſim autem (*manente figura præcedentis Propositionis*) *anguli ad junctam* CD *erunt aut recti, aut obtusi, aut acuti, prout recta* CD *æqualis fuerit, aut minor, aut major contrapositâ* AB.

Demonstratur. Si enim recta *CD* æqualis sit contrapositæ *AB*, & nihilominus anguli ad eandem sint aut obtusi, aut acuti; jam ipsi tales anguli eam probabunt (ex præcedente) non æqualem, sed minorem, aut majorem contrapositâ *AB*; quod est absurdum contra hypothesim. Idem uniformiter valet circa reliquos casus. Stat igitur angulos ad junctam *CD* esse aut rectos, aut obtusos, aut acutos, prout recta *CD* æqualis fuerit, aut minor, aut major contrapositâ *AB*. Quod erat demonstrandum.

DEFINITIONES.

QUandoquidem (ex prima hujus) recta jungens extremitates æqualium perpendiculorum eidem rectæ (quam vocabimus basim) insistentium, æquales efficit

ficit angulos cum ipsis perpendiculis; tres idcirco distinguendæ sunt hypotheses circa speciem horum angulorum. Et primam quidem appellabo hypothesim anguli recti; secundam verò, & tertiam appellabo hypothesim anguli obtusi, & hypothesim anguli acuti.

PROPOSITIO V.

HYpothesis anguli recti, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera.

Demonstratur. Efficiat juncta *CD* (fig. 4.) angulos rectos cum duobus quibusvis æqualibus perpendiculis *AC*, *BD*, uni cuivis *AB* insistentibus. Erit *CD* (ex tertia hujus) æqualis ipsi *AB*. Sumantur in *AC*, & *BD* protractis duæ *CR*, *DX*, æquales ipsis *AC*, *BD*; jungaturque *RX*. Facilè ostendemus junctam *RX* æqualem fore ipsi *AB*, & angulos ad eandem rectos. Et primò quidem per superpositionem quadrilateri *ABDC* super quadrilaterum *CDXR*, adhibitâ communi basi *CD*. Deinde elegantiùs sic proceditur. Jungantur *AD*, *RD*. Constat (ex quarta primi) æquales fore in triangulis *ACD*, *RCD*, bases *AD*, *RD*, atque item angulos *CDA*, *CDR*, ac propterea æquales reliques ad unum rectum, nimirum *ADB*, *RDX*. Quare rursum (ex eadem quarta primi) æqualis erit, in triangulis *ADB*, *RDX*, basis *AB*, basi *RX*. Igitur (ex præcedente) anguli ad junctam *RX* erunt recti, ac propterea persistemus in eadem hypothesi anguli recti.

Quoniam verò augeri similiter potest longitudo perpendiculorum in infinitum, sub eadem basi *AB*, consistente semper hypothesi anguli recti, demonstrandum est eandem hypothesim semper mansuram in casu cujusvis imminutionis eorundem perpendiculorum; quod quidem ita evincitur.

Suman-

Sumantur in AR, & BX duo quælibet æqualia perpendicula AL, BK, jungaturque LK. Si anguli ad junctam LK recti non ſint, erunt tamen (ex prima hujus) invicem æquales. Erunt igitur ex una parte, ut putà versùs AB obtuſi, & versùs RX acuti, ut nimirum anguli hinc inde ad utrunque illorum punctorum æquales ſint (ex decimatertia primi) duobus rectis. Conſtat autem æqualia etiam invicem eſſe perpendicula LR, KX, ipſi RX inſiſtentia. Igitur (ex tertia hujus) erit LK major quidem contrapoſitâ RX, & minor contrapoſitâ AB.

Hoc autem abſurdum eſt; cum AB, & RX oſtenſæ ſint æquales. Non ergo mutabitur hypotheſis anguli recti ſub quacunque imminutione perpendiculorum, dum conſiſtat ſemel poſita baſis AB.

Sed neque immutabitur hypotheſis anguli recti, ſub quacunque imminutione, aut majori amplitudine baſis; cum manifeſtum ſit conſiderari poſſe ut baſim quodvis perpendiculum BK, aut BX, atque ideo conſiderari viciſſim ut perpendicula ipſam AB, & rectam æqualem contrapoſitam KL, aut XR.

Conſtat igitur hypotheſim anguli recti, ſi vel in uno caſu ſit vera, ſemper in omni caſu illam ſolam eſſe veram. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Hypotheſis anguli obtuſi, ſi vel in uno caſu eſt vera, ſemper in omni caſu illa ſola eſt vera.

Demonſtratur. Efficiat juncta CD (fig. 5.) angulos obtuſos cum duobus quibuſvis æqualibus perpendiculis AC, BD, uni cuivis rectæ AB inſiſtentibus. Erit CD (ex tertia hujus) minor ipsâ AB. Sumantur in AC, BD protractis duæ quælibet invicem æquales portiones CR, DX

DX; jungaturque RX. Jam quæro de angulis ad junctam RX, qui utique (ex prima hujus) æquales invicem erunt. Si obtusi sunt, habemus intentum. At recti non sunt; quia sic unum haberemus casum pro hypothesi anguli recti, qui nullum (ex præcedente) relinqueret locum pro hypothesi anguli obtusi. Sed neque acuti sunt. Nam sic esset RX (ex tertia hujus) major ipsâ AB; ac propterea multò major ipsâ CD. Hoc autem subsistere non posse sic ostenditur. Si quadrilaterum $CDXR$ intelligatur impleri rectis abscindentibus ab ipsis CR, DX, portiones invicem æquales, implicat transiri a recta CD, quæ minor est ipsâ AB, ad RX eâdem majorem, quin transeatur per quandam ST ipsi AB æqualem. Hoc autem absurdum esse in hac hypothesi ex eo constat; quia sic (ex quarta hujus) unus haberetur casus pro hypothesi anguli recti, qui nullum (ex præcedente) relinqueret locum hypothesi anguli obtusi. Igitur anguli ad junctam RX debent esse obtusi.

Deinde, sumptis in AC, BD, æqualibus portionibus AL, BK; simili modo ostendemus angulos ad junctam LK nequire esse acutos versùs ipsam AB; quia sic illa foret major, quàm AB, ac propterea multò major rectâ CD. Hinc autem reperiri deberet, ut suprà, quædam intermedia inter CD minorem, & LK majorem ipsâ AB; intermedia, inquam, æqualis ipsi AB, quæ utique, ex jam notis, omnem locum auferret hypothesi anguli obtusi. Tandem propter hanc ipsam causam recti esse nequeunt anguli ad junctam LK; ergo erunt obtusi. Igitur sub eadem basi AB, auctis, aut imminutis ad libitum perpendiculis, manebit semper hypothesis anguli obtusi.

Sed debet idem demonstrari sub assumpta qualibet basi. Eligatur (fig. 6.) pro basi quodlibet ex prædictis perpendiculis, ut putà BX. Dividantur bifariam in punctis

M, & *H* ipſæ *AB*, *RX*; jungaturque *MH*. Erit *MH* (ex ſecunda hujus) perpendicularis ipſis *AB*, *RX*. Eſt autem angulus ad punctum *B* rectus ex hypotheſi; & obtuſus, ex jam demonſtratis, ad punctum *X*. Fiat igitur angulus rectus *BXP* versùs partes ipſius *MH*. Occurret *XP* ipſi *MH* in quodam puncto *P* inter puncta *M*, & *H* conſtituto; cum ex una parte angulus *BXH* ſit obtuſus; & ex altera, ſi jungatur *XM*, angulus *BXM* (ex decimaſeptima primi) ſit acutus. Tum verò; quoniam quadrilaterum *XBMP* tres continet angulos rectos ex jam notis, & unum obtuſum (ex decimaſexta primi) in puncto *P*, quia eſt externus relatè ad internum, & oppoſitum rectum angulum in puncto *H* trianguli *PHX*; erit latus *XP* (ex Cor. I. poſt tertiam hujus) minus contrapoſito *BM*. Quare; aſſumptâ in *BM* portione *BF* æquali ipſi *XP*; erunt (ex prima hujus) anguli ad junctam *PF* invicem æquales, nimirum obtuſi, cum angulus *BFP* (ex decimaſexta primi) ſit obtuſus propter rectum angulum internum, & oppoſitum *FMP*. Igitur ſub qualibet baſi *BX* conſiſtit hypotheſis anguli obtuſi.

Conſiſtet autem, ut ſuprà, eadem hypotheſis ſub eadem baſi *BX*, quamvis æqualia perpendicula ad libitum augeantur, aut minuantur. Itaque conſtat hypotheſim anguli obtuſi, ſi vel in uno caſu ſit vera, ſemper in omni caſu illam ſolam eſſe veram. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

HYpotheſis anguli acuti, ſi vel in uno caſu eſt vera, ſemper in omni caſu illa ſola eſt vera.

Demonſtratur facillimè. Si enim hypotheſis anguli acuti permittat aliquem caſum alterutrius hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, jam (ex duabus præceden-

tibus) nullus relinquetur locus ipsi hypothesi anguli acuti; quod est absurdum. Itaque hypothesis anguli acuti, si vel in uno casu est vera, semper in omni casu illa sola est vera. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Dato quovis triangulo (*fig.* 7.) ABD, *rectangulo in* B, *protrahatur* DA *usque ad aliquod punctum* X, *& per* A *erigatur ipsi* AB *perpendicularis* HAC, *existente puncto* H *ad partes anguli* XAB. *Dico angulum externum* XAH *æqualem fore, aut minorem, aut majorem interno, & opposito* ADB, *prout vera sit hypothesis anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti: Et viciſſim.*

Demonstratur. Sumatur in *HC* portio *AC* æqualis ipsi *BD*, jungaturque *CD*. Erit *CD*, in hypothesi anguli recti, æqualis (ex tertia hujus) ipsi *AB*. Quare angulus *ADB* æqualis erit (ex octava primi) angulo *DAC*, sive ejus æquali (ex decimaquinta primi) angulo *XAH*. Quod erat primo loco demonstrandum.

Tum, in hypothesi anguli obtusi, erit *CD* (ex eadem tertia hujus) minor ipsâ *AB*. Quare in triangulis *ADB*, *DAC* erit (ex vigesimaquinta primi) angulus *DAC*, sive (ipsi ad verticem) *XAH*, minor angulo *ADB*. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Tandem, in hypothesi anguli acuti, erit *CD* (ex eadem tertia hujus) major contrapositâ *AB*. Quare in prædictis triangulis, erit (ex eadem vigesimaquinta primi) angulus *DAC*, sive (ipsi ad verticem) *XAH*, major angulo *ADB*. Quod erat tertio loco demonstrandum.

Viciſſim autem: si angulus *CAD*, sive ejus ad verticem *XAH*, æqualis sit interno, & opposito *ADB*; erit (ex quarta primi) juncta *CD* æqualis ipsi *AB*, ac propterea

rea (ex quarta hujus) vera erit hypotheſis anguli recti.

Sin verò angulus *CAD*, ſive ejus ad verticem *XAH*, minor ſit, aut major interno, & oppoſito *ADB*; erit etiam (ex vigeſimaquarta primi) juncta *CD* minor, aut major ipsâ *AB*; ac propterea (ex quarta hujus) vera erit reſpectivè hypotheſis aut anguli obtuſi, aut anguli acuti. Quæ omnia erant demonſtranda.

PROPOSITIO IX.

Cujuſvis trianguli rectanguli reliqui duo acuti anguli ſimul ſumpti æquales ſunt uni recto, in hypotheſi anguli recti; majores uno recto, in hypotheſi anguli obtuſi; minores autem in hypotheſi anguli acuti.

Demonſtratur. Si enim angulus *XAH* (manente figura ſuperioris Propoſitionis) æqualis eſt (nimirum, ex præcedente, in hypotheſi anguli recti) angulo *ADB*; jam angulus *ADB* duos rectos efficiet cum angulo *HAD*, prout eos efficit (ex decimatertia primi) prædictus angulus *XAH* cum eodem angulo *HAD*. Quare, dempto recto angulo *HAB*, æquales manebunt uni recto duo ſimul anguli *ADB*, & *BAD*. Quod erat primum.

Tum verò; ſi angulus *XAH* minor eſt (nimirum, ex præcedente, in hypotheſi anguli obtuſi) angulo *ADB*, jam angulus *ADB* pluſquam duos rectos efficiet cum angulo *HAD*, cum quo duos efficit rectos (ex prædicta decimatertia primi) angulus *XAH*. Quare, dempto angulo *HAB*, majores erunt uno recto duo ſimul anguli *ADB*, & *BAD*. Quod erat ſecundum.

Tandem, ſi angulus *XAH* major ſit (nimirum, ex præcedente, in hypotheſi anguli acuti) angulo *ADB*; jam angulus *ADB* minus quàm duos rectos efficiet cum angulo *HAD*, cum quo duos efficit rectos (ex eadem decima

tertia primi) angulus *XAH*. Quare, dempto angulo recto *HAB*, minores erunt uno recto duo simul anguli *ADB*, & *BAD*. Quod erat tertium.

PROPOSITIO X.

SI recta DB (*fig.* 8.) *perpendiculariter insistat cuidam* ABM, *sitque juncta* DM *major juncta* DA, *etiam basis* BM *major erit basi* BA. *Et vicissim.*

Demonstratut. Et primò quidem non erunt illæ bases invicem æquales. Cæterùm (ex quarta primi) æquales forent, contra hypothesim, ipsæ *AD*, *DM*. Sed neque erit *BA* major quàm *BM*. Cæterùm, sumptâ in *BA* portione *BS* æquali ipsi *BM*, junctâque *SD*, æquales forent (ex eadem quarta primi) anguli *BSD*, *BMD*: Est autem angulus *BSD* (ex decimasexta primi) major angulo *BAD*. Ergo eodem major foret angulus *BMD*. Hoc autem est contra decimamoctavam primi; cum latus *DM* in triangulo *MDA* supponatur majus latere *DA*. Restat igitur, ut basis *BM* major sit basi *BA*. Quod erat primo loco demonstrandum.

Deinde si alterutra basis, ut putà *BA* (ne immutetur figura) fingatur major alterâ *BM*; tunc juncta *DS*, quæ ex *BA* abscindat portionem *SB* æqualem ipsi *BM*, æqualis erit (ex quarta primi) junctæ *DM*. Rursum obtusus erit (ex decimasexta primi) angulus *DSA*, & acutus (ex decimaseptima ejusdem primi) angulus *DAS*. Quare (ex decimaoctava ejusdem) erit juncta *DA* major junctâ *DS*, ejusque suppositâ æquali junctâ *DM*. Quod erat secundo loco demonstrandum. Itaque constant proposita.

PRO-

Recta AP *(quantælibet longitudinis) secet duas rectas* PL, AD *(fig. 9.) priorem quidem sub recto angulo in* P, *posteriorem verò in* A *sub quovis acuto angulo convergente ad partes ipsius* PL. *Dico rectas* AD, PL *(in hypothesi anguli recti) in aliquo puncto, & quidem ad finitam, seu terminatam distantiam, tandem coituras, si protrahantur versùs illas partes, ad quas cum subjecta* AP *duos angulos efficiunt duobus rectis minores.*

Demonstratur. Protrahatur *DA* versùs alias partes usque ad aliquod punctum *X*, & per *A* erigatur ipsi *AP* perpendicularis *HAC*, existente puncto *H* ad partes anguli *XAP*. Tum in *AD* protractâ versùs partes ipsius *PL* sumantur duo æqualia intervalla *AP*, *DF*, demittanturque ad subjectam *AP* perpendiculares *DB*, *FM*, quæ utique cadent, propter decimamseptimam primi, ad partes anguli acuti *DAP*; jungaturque *DM*. Ostendere debeo junctam *DM* æqualem fore ipsi *DF*, sive *DA*.

Et primò quidem nequit *DM* major esse ipsâ *DF*. Cæterùm enim angulus *DMF* minor foret (ex decimaoctava primi) angulo *DFM*, sive ejus æquali (ex octava hujus, in hypothesi anguli recti) angulo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAD*. Quare (cum anguli *CAM*, *FMA* ponantur æquales, utpote recti) reliquus angulus *DMA* major foret reliquo angulo *DAM*. Hoc autem absurdum est (contra decimamoctavam primi) si nempe *DM* ponatur major ipsâ *DF*, sive *DA*.

Sed neque erit *DM* minor ipsâ *DF*. Cæterùm angulus *DMF* major foret (ex eadem decimaoctava primi) angulo *DFM*, sive ejus æquali (ex prædicta octava hujus, in hypothesi anguli recti) angulo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAD*. Quare rursum, ut suprà, reliquus angulus

DMA

DMA non major, ſed minor foret reliquo angulo *DAM*. Hoc autem abſurdum eſt (contra eandem decimamoctavam primi) ſi nempe *DM* ponatur minor ipsâ *DF*, ſive *DA*.

Reſtat igitur, ut juncta *DM* æqualis ſit ipſi *DF*, ſive *DA*. Quare in triangulo *DAM* æquales erunt (ex quinta primi) anguli ad puncta *A*, & *M*; atque ideo in triangulis *DBA*, *DBM*, rectangulis in *B*, æquales erunt (ex vigeſimaſexta primi) baſes *AB*, *BM*. Quod quidem hoc loco intendebatur.

Quoniam igitur (aſſumpto in *AD* continuatâ intervallo *AF* duplo intervalli *AD*) perpendicularis *FM* ad ſubjectam *AP* demiſſa abſcindit ex *AP* versùs *P* baſim *AM* duplam illius *AB*, quam abſcindit perpendicularis demiſſa ex puncto *D*; manifeſtum eſt tot vicibus fieri poſſe hanc præcedentis intervalli duplicationem, ut ſic in ipſa *AD* continuata deveniatur ad quoddam punctum *T*, ex quo perpendicularis demiſſa ad continuatam *AP* abſcindat quandam *AR* majorem ipsâ quantâlibet finitâ *AP*. Conſtat autem evenire id non poſſe, niſi poſt occurſum ipſius continuatæ *AD* in quoddam punctum *L* ipſius *PL*. Si enim punctum *T* conſiſteret ante illum occurſum, deberet ipſa perpendicularis *TR* ſecare eandem *PL* in quodam puncto *K*. Tunc autem in triangulo *KPR* invenirentur duo anguli recti in punctis *P*, & *R*; quod eſt abſurdum contra decimamſeptimam primi. Itaque conſtat rectas *AD*, *PL* ſibi invicem (in hypotheſi anguli recti) in aliquo puncto occurſuras (& quidem ad finitam, ſeu terminatam diſtantiam) ſi protrahantur versùs illas partes, ad quas cum ſubjecta *AP* (quantælibet finitæ longitudinis) duos angulos efficiunt duobus rectis minores. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

Rursum dico rectam AD *alicubi ad eas partes occursuram rectæ* PL (*& quidem ad finitam, seu terminatam distantiam*) *etiam in hypothesi anguli obtusi.*

Demonstratur. Nam sumptâ, ut in superiore Propositione, *DF* æquali ipsi *AD*, demissisque jam notis perpendicularibus, ostendere debeo junctam *DM* majorem fore ipsâ *DF*, sive *DA*, atque ideo (ex decima hujus) rectam *BM* majorem fore ipsâ *AB*. Et primò non erit *DM* æqualis ipsi *DF*. Cæterùm angulus *DMF* æqualis foret (ex quarta primi) angulo *DFM*, atque ideo major (ex octava hujus in hypothesi anguli obtusi) angulo externo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAF*. Quare (cum anguli *CAM*, *FMA* ponantur æquales utpote recti) reliquus angulus *DMA* minor foret reliquo angulo *DAM*. Quod est absurdum contra quintam primi, si nempe *DM* æqualis sit ipsi *DF*, sive *DA*.

Sed neque ipsa *DM* minor est alterâ *DF*, sive *DA* Cæterùm (ex decimaoctava primi) angulus *DMF* major foret angulo *DFM*, atque ideo (in hac hypothesi anguli obtusi) multò major angulo externo *XAH*, sive ejus ad verticem *CAD*. Quare rursum, ut suprà, reliquus angulus *DMA* multò minor foret reliquo angulo *DAM*. Hoc autem absurdum est, contra eandem decimamoctavam primi, si nempe *DM* minor sit ipsâ *DF*, sive *DA*.

Restat igitur, ut juncta *DM* major sit ipsâ *DF*, sive *DA*, atque ideo (ex decima hujus) ipsa *BM* major sit alterâ *AB*. Quod erat hoc loco intentum.

Quoniam igitur, assumpto in *AD* continuatâ intervallo *AF* duplo intervalli *AD*, perpendicularis *FM* ad subjectam *AP* demissa plus duplo ex eadem abscindit, quàm abscindatur a perpendiculari demissa ex puncto *D*;

multò

multò citiùs in hac hypotheſi anguli obtuſi, quàm in ſuperiore hypotheſi anguli recti, devenietur ad tantum intervallum, ex quo perpendicularis demiſſa abſcindat baſim majorem ipsâ quantalibet deſignatâ *AP*. Hoc autem, ut in ſuperiore Propoſitione, contingere nequit, niſi poſt occurſum continuatæ *AD* in aliquod punctum ipſius *PL*; & quidem ad finitam, ſeu terminatam diſtantiam. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIII.

Si recta XA (*quantælibet deſignatæ longitudinis*) *incidens in duas rectas* AD, XL *efficiat cum eiſdem ad eaſdem partes* (*fig.* 11.) *angulos internos* XAD, AXL *minores duobus rectis: dico, illas duas* (*etiamſi neuter illorum angulorum ſit rectus*) *tandem in aliquo puncto ad partes illorum angulorum invicem coituras, & quidem ad finitam, ſeu terminatam diſtantiam, dum conſiſtat alterutra hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi.*

Demonſtratur. Nam unus prædictorum angulorum, ut putà *AXL*, erit acutus. Itaque ex apice alterius anguli demittatur ad *XL* perpendicularis *AP*, quæ utique (propter decimamſeptimam primi) cadet ad partes anguli acuti *AXL*. Quoniam igitur in triangulo *APX*, rectangulo in *P*, duo ſimul anguli acuti *PAX*, *PXA*, minores non ſunt (ex nona hujus) uno recto, in utraque hypotheſi aut anguli recti, aut anguli obtuſi; ſi duo iſti anguli auferantur a ſumma angulorum propoſitorum jam reliquus angulus *PAD* minor erit recto. Itaque erimus in caſu duarum præcedentium Propoſitionum, dum ſcilicet alterutra hypotheſis conſiſtat aut anguli recti, aut anguli obtuſi. Quare (ex eiſdem) rectæ *AD*, & *PL*, ſive *XL*, in aliquo puncto finitæ, ſeu terminatæ diſtantiæ ad notas

partes

partes concurrent, tam ſub una, quàm ſub altera prædictarum hypotheſium. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION I.

UBi obſervare licet notabile diſcrimen ab hypotheſi anguli acuti. Nam in iſta demonſtrari nequiret generalis hujuſmodi rectarum concurſus, quoties recta aliqua in duas incidens, duos ad eaſdem partes efficiat internos angulos duobus rectis minores; nequiret, inquam, directè demonſtrari, etiamſi in eadem hypotheſi admitteretur prædictus generalis concurſus, quoties unus duorum angulorum eſt rectus. Quamvis enim recta *AD* perpendicularis & ipſa foret rectæ *AP*; quo caſu nequiret certè, propter 17. primi, concurrere cum altera perpendiculari *PL*; nihilominus duo ſimul anguli *DAX*, *PXA*, minores forent duobus rectis, juxta hypotheſim prædictam, cum in ea duo ſimul anguli *PAX*, *PXA* minores ſint (ex nona hujus) uno recto. Id autem obſervaſſe operæ pretium fuit.

Qualiter verò ex eo ſolo admiſſo generali concurſu, dum unus angulorum eſt rectus, & quidem ſub aſſignata quantumlibet parva incidente, deſtrui poſſit hypotheſis anguli acuti; docebimus poſt tres ſequentes Propoſitiones.

SCHOLION II.

IN tribus ante jactis theorematis ſtudiosè appoſui illam conditionem, quòd recta incidens *AP*, ſive *XA*, intelligatur eſſe *quantælibet deſignatæ longitudinis*. Si enim, citra omnem rectæ incidentis determinatam menſuram, præcisè agatur de exhibendo, ac demonſtrando duarum rectarum concurſu in apicem cujuſdam trianguli, cujus

anguli ad baſim ſint dati (minores utique duobus rectis) ut putà unus rectus, & alter duobus tantùm gradibus, vel, ut libet, minùs deficiens à recto; quis eſt tam expers Geometriæ, quin ſtatim rem ipſam demonſtrativè exhi-
Tab. II. beat? Nam ſupponatur (fig. 12.) datus quilibet angulus *BAP*, ut putà 88. graduum. Si ergo ex quolibet puncto *B* ipſius *AB*, demittatur ad ſubjectam *AP* (juxta duodecimam primi) perpendicularis *BP*, conſtat enim verò in eo triangulo *ABP* exhibitum fore demonſtrativè concurſum optatum in eo puncto *B*.

Quod ſi alter angulus ad baſim poſtuletur & ipſe minor recto, ut putà 84. graduum, quem nempe exhibeat datus angulus *K*: tunc (juxta 23. primi) efficere poteris versùs partes rectæ *AB* æqualem angulum *APD*, occurrente *PD* ipſi *AB* in quodam ejus intermedio puncto *D*. Quare habebitur rurſum demonſtrativè concurſus optatus in eo puncto *D*.

Tandem vero: ſi alter angulus poſtuletur obtuſus, ſed minor tamen 92. gradibus, ne cum alio dato angulo *BAP* compleantur duo recti: exhibitus hic ſit in quodam angulo *R* 91. graduum. Oſtendendum eſt, unum aliquod eſſe punctum *X* in ipſa *AP*, ad quod juncta *BX* efficiat angulum *BXA* æqualem dato angulo *R* 91. graduum; adeo ut propterea ſub quadam recta incidente *AX* habeatur concurſus optatus in prædicto puncto *B*. Sic autem proceditur. Quandoquidem (protractà *PA* uſque in aliquod punctum *H*) angulus externus *BAH* & eſt (propter decimamtertiam primi) 92. graduum, cum angulus interior *BAP* poſitus ſit 88. graduum; ac rurſum, propter decimamſextam primi, major eſt non ſolùm angulo recto *BPA*, verùm etiam quibuſvis eodem titulo obtuſis angulis *BXA*, ſumpto puncto *X* ubilibet intra ipſam *PA*, & quidem, propter eandem decimamſextam primi, ſemper majoribus, dum punctum *X* aſſumitur propius puncto *A*: conſequens pla-

nè

nè eſt, ut inter iſtos angulos, unum 90. graduum in puncto *P*, & alterum 92. graduum in puncto *A*, unus reperiatur angulus *BXA*, qui ſit 91. graduum, nimirum æqualis dato angulo *R*.

Nihilominus, omiſſa poſtrema hac obſervatione circa anguſlum obtuſum, cavere diligentiſſimè oportet, in eo poſitam eſſe difficultatem illius pronunciati Euclidæi, quòd velit occurſum duarum rectarum; in illam utique partem, ad quam cum recta incidente duos angulos efficiant duobus rectis minores; atque ita quidem prædictum occurſum velit, *quantæcunque longitudinis ſit incidens aſſignata*. Cæterùm enim (ut jam monui in præcedente Scholio) demonſtrabo generalem iſtum occurſum ex ſolo admiſſo occurſu ejuſmodi, dum unus angulorum ſit rectus; & quidem, etiamſi admiſſo non pro qualibet aſſignabili finita incidente, ſed ſolùm admiſſo intra limites cujuſdam aſſignatæ parviſſimæ incidentis.

PROPOSITIO XIV.

HYpotheſis anguli obtuſi eſt abſolutè falſa, quia ſe ipſam deſtruit.

Demonſtratur. Ex hypotheſi anguli obtuſi, aſſumptâ ut verâ, jam elicuimus veritatem illius Pronunciati Euclidæi; quòd duæ rectæ ſibi invicem in aliquo puncto ad eas partes occurſuræ ſint, ad quas recta quædam, eaſdem ſecans, duos qualeſcunque effecerit internos angulos, duobus rectis minores. Stante autem hoc Pronunciato, cui innititur Euclides poſt vigeſimamoctavam ſui Libri primi, manifeſtum eſt omnibus Geometris, ſolam hypotheſim anguli recti eſſe veram, nec ullum relinqui locum hypotheſi anguli obtuſi. Igitur hypotheſis anguli obtuſi eſt abſolutè falſa, quia ſe ipſam deſtruit. Quod erat demonſtrandum.

Aliter, ac magis immediatè. Quandoquidem ex hypotheſi anguli obtuſi demonſtravimus (in nona hujus)
Tab. I. duos (fig. 11.) acutos angulos trianguli *APX*, rectanguli in *P*, majores eſſe uno recto; conſtat talem aſſumi poſſe acutum angulum *PAD*, qui ſimul cum prædictis duobus acutis angulis duos rectos efficiat. Tunc autem recta *AD* deberet (ex præcedente, juxta hypotheſim anguli obtuſi) aliquando concurrere cum ipſa *PL*, ſive *XL*, reſpectu habito ad ſecantem, ſive incidentem *AP*; quod eſt manifeſtum abſurdum contra decimamſeptimam primi, ſi reſpicias ad ſecantem, ſive incidentem *AX*.

PROPOSITIO XV.

Tab. II. EX *quolibet triangulo* ABC, *cujus tres ſimul anguli* (*fig.* 13.) *æquales ſint, aut majores, aut minores duobus rectis, ſtabilitur reſpectivè hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti.*

Demonſtratur. Nam duo ſaltem illius trianguli anguli, ut putà ad puncta *A*, & *C*, acuti erunt, propter decimamſeptimam primi. Quare perpendicularis, ex apice reliqui anguli *B* ad ipſam *AC* demiſſa, ſecabit ipſam *AC* (propter eandem decimamſeptimam primi) in aliquo puncto intermedio *D*. Si ergo tres anguli ipſius trianguli *ABC* ſupponantur æquales duobus rectis, conſtat æquales fore quatuor rectis omnes ſimul angulos triangulorum *ADB*, *CDB*, propter duos additos rectos angulos ad punctum *D*. Hoc ſtante: neutrius modò dictorum triangulorum, ut putà *ADB*, tres ſimul anguli minores erunt, aut majores duobus rectis; nam ſic viceverſa alterius trianguli tres ſimul anguli majores forent, aut minores duobus rectis. Quare (ex nona hujus) ab uno quidem triangulo ſtabilirétur hypotheſis anguli acuti, & ab altero hypotheſis anguli

obtuſi

obtuſi; quod repugnat ſextæ, & ſeptimæ hujus. Igitur tres ſimul anguli utriuſque prædictorum triangulorum æquales erunt duobus rectis; ac propterea (ex nona hujus) ſtabilietur hypotheſis anguli recti. Quod erat primo loco demonſtrandum.

Sin autem tres anguli propoſiti trianguli *ABC* ponantur majores duobus rectis; jam duorum triangulorum *ADB*, *CDB* omnes ſimul anguli majores erunt quatuor rectis, propter duos additos rectos angulos ad punctum *D*. Hoc ſtante: neutrius modò dictorum triangulorum tres ſimul anguli æquales præcisè erunt, aut minores duobus rectis; nam ſic viceversâ alterius trianguli tres ſimul anguli majores forent duobus rectis. Quare (ex nona hujus) ab uno quidem triangulo ſtabiliretur hypotheſis aut anguli recti, aut anguli acuti, & ab altero hypotheſis anguli obtuſi, quod repugnat quintæ, ſextæ, & ſeptimæ hujus. Igitur tres ſimul anguli utriuſque prædictorum triangulorum majores erunt duobus rectis; ac propterea (ex nona hujus) ſtabilietur hypotheſis anguli obtuſi. Quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

Tandem verò. Si tres anguli propoſiti trianguli *ABC* ponantur minores duobus rectis, jam duorum triangulorum *ADB*, *CDB*, omnes ſimul anguli minores erunt quatuor rectis, propter duos additos rectos angulos ad punctum *D*. Hoc ſtante: neutrius modò dictorum triangulorum tres ſimul anguli æquales erunt, aut majores duobus rectis; nam ſic viceversâ alterius trianguli tres ſimul anguli minores forent duobus rectis. Quare (ex nona hujus) ab uno quidem triangulo ſtabiliretur hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, & ab altero hypotheſis anguli acuti; quod repugnat quintæ, ſextæ, & ſeptimæ hujus. Igitur tres ſimul anguli utriuſque prædictorum triangulorum minores erunt duobus rectis; ac propterea (ex

nona hujus) ſtabilietur hypotheſis anguli acuti. Quod erat tertio loco demonſtrandum.

Itaque ex quolibet triangulo *ABC*, cujus tres ſimul anguli æquales ſint, aut majores, aut minores duobus rectis, ſtabilitur reſpectivè hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti. Quod erat propoſitum.

COROLLARIUM.

Hinc; protracto uno quolibet cujuſvis propoſiti trianguli latere, ut putà *AB* in *H*; erit (ex 13. primi) externus angulus *HBC* aut æqualis, aut minor, aut major reliquis ſimul internis, & oppoſitis angulis ad puncta *A*, & *C*, prout vera fuerit hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti. Et viciſſim.

PROPOSITIO XVI.

EX quolibet quadrilatero ABCD, *cujus quatuor ſimul anguli æquales ſint, aut majores, aut minores quatuor rectis, ſtabilitur reſpectivè hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti.*

Demonſtratur. Jungatur *AC*. Non erunt (fig. 14.) tres ſimul anguli trianguli *ABC* æquales, aut majores, aut minores duobus rectis, quin tres ſimul anguli trianguli *ADC* ſint ipſi etiam reſpectivè æquales, aut majores, aut minores duobus rectis; ne ſcilicet (ex præcedente) ab uno illorum triangulorum ſtabiliatur una hypotheſis, & ab altero altera, contra quintam, ſextam, & ſeptimam hujus. Hoc ſtante: Si quatuor ſimul anguli propoſiti quadrilateri æquales ſint quatuor rectis, conſtat utriuſque modò dictorum triangulorum tres ſimul angulos æquales fore duobus rectis, atque ideo (ex præcedente) ſtabili-

tum

tum iri hypotheſim anguli recti.

Sin verò ejuſdem quadrilateri quatuor ſimul anguli majores ſint, aut minores quatuor rectis, debebunt ſimiliter illorum triangulorum tres ſimul anguli reſpectivè eſſe aut unà majores, aut unà minores duobus rectis. Quare ab illis triangulis ſtabilietur reſpectivè (ex præcedente) aut hypotheſis anguli obtuſi, aut hypotheſis anguli acuti.

Itaque ex quolibet quadrilatero, cujus quatuor ſimul anguli æquales ſint, aut majores, aut minores quatuor rectis, ſtabilitur reſpectivè hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

HInc: protractis versùs eaſdem partes duobus quibuſvis propoſiti quadrilateri contrapoſitis lateribus, ut putà *AD* in *H*, & *BC* in *M*; erunt (ex 13. primi) duo ſimul externi anguli *HDC*, *MCD* aut æquales, aut minores, aut majores duobus ſimul internis, & oppoſitis angulis ad puncta *A*, & *B*, prout vera fuerit hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti.

PROPOSITIO XVII.

SI uni, ut libet, cuidam parvæ rectæ AB *inſiſtat* (*fig.* 15.) *ad rectos angulos recta* AH: *Dico ſubſiſtere non poſſe in hypotheſi anguli acuti, ut quævis* BD, *efficiens cum* AB *quemlibet angulum acutum versùs partes ipſius* AH, *occurſura tandem ſit ad finitam, ſeu terminatam diſtantiam ipſi* AH *productæ.*

Demonſtratur. Jungatur *HB*. Erit (ex 17. primi) acutus angulus *ABH*, propter angulum rectum ad punctum *A*. Jam (ex 23. primi) ducatur quædam *HD* versùs

sùs partes puncti *B*, quæ non secans angulum *AHB* efficiat cum ipsa *HB* angulum acutum æqualem ipsi acuto *ABH*. Deinde ex puncto *B* demittatur ad *HD* perpendicularis *BD*, quæ cadet ad partes prædicti anguli acuti ad punctum *H*. Quoniam igitur latus *HB* opponitur in triangulo *HDB* angulo recto in *D*, atque item in triangulo *BAH* angulo recto in *A*; ac rursum in duobus illis triangulis adjacent eidem lateri *HB* æquales anguli, qui sunt in priore quidem triangulo angulus *BHD*, & in posteriore angulus *HBA*; erit etiam (ex 26. primi) reliquus angulus *HBD* in priore triangulo æqualis reliquo angulo *BHA* in posteriore triangulo. Quare integer angulus *DBA* æqualis erit integro angulo *AHD*.

Jam verò: non erit uterque prædictorum æqualium angulorum obtusus, ne incidamus (ex præcedente) in unum casum jam reprobatæ hypothesis anguli obtusi. Sed neque erit rectus, ne incidamus (ex eadem præcedente) in unum casum pro hypothesi anguli recti, qui nullum (ex 5. hujus) relinqueret locum hypothesi anguli acuti. Uterque igitur illorum angulorum erit acutus. Hoc stante: Quòd recta *BD* protracta occurrere nequeat in quodam puncto *K* ipsi *AH* ad easdem partes productæ, ex eo demonstratur; quia in triangulo *KDH*, præter angulum rectum in *D*, adesset angulus obtusus in *H*, cum angulus *AHD*, in prædicta hypothesi anguli acuti, demonstratus sit acutus. Hoc autem absurdum est, contra 17. primi. Non ergo subsistere potest in ea hypothesi, ut quævis *BD*, efficiens cum una, ut libet parva recta *AB*, quemlibet angulum acutum versùs partes ipsius *AH*, occursura tandem sit ad finitam, seu terminatam distantiam, ipsi *AH* productæ. Quod erat demonstrandum.

Aliter idem, ac facilius. Insistant uni cuidam quantumlibet paryæ rectæ *AB* (fig. 16.) duæ perpendiculares

AK,

AK, *BM*. Demittatur ad *AK* ex aliquo puncto *M* ipsius *BM* perpendicularis *MH*, jungaturque *BH*. Constat acutum fore angulum *BHM*. Est etiam (ex præcedeute) acutus angulus *BMH*, in hypothesi anguli acuti. Ergo perpendicularis *BDX*, ex puncto *B* ad ipsam *HM* demissa, secabit (ex 17. primi) eam *HM* in quodam puncto intermedio *D*. Ergo angulus *XBA* erit acutus. Constat autem (ex eadem 17. primi) non posse invicem concurrere (saltem ad finitam, seu terminatam distantiam) duas illas utcunque productas *AHK*, *BDX*, propter angulos rectos in punctis *H*, & *D*. Itaque nequit subsistere in hypothesi anguli acuti, ut quævis *BD*, efficiens cum una, ut libet, parva recta *AB* quemlibet angulum acutum versùs partes ipsius *AH*, eidem *AB* perpendicularis, occursura tandem sit (ad finitam, seu terminatam distantiam) ipsi *AH* productæ. Quod erat propositum.

SCHOLION I.

ATque id est, quod spopondi in Scholiis post **XIII.** hujus, nimirum destructum iri hypothesim anguli acuti (quæ sola obesse jam potest generali illi Pronunciato Euclidæo) ex solo admisso generali duarum rectarum concursu ad eas partes, versùs quas recta quæpiam, quantumlibet parva, in easdem incidens, duos efficiat internos angulos minores duobus rectis; atque ita quidem, etiamsi alteruter illorum angulorum supponi debeat rectus.

SCHOLION II.

SEd rursum meliore loco, post XXV. hujus, ostendam destructum pariter iri hypothesim anguli acuti, dum unus aliquis tenuissimus, ut libet, angulus acutus designari

gnari poſſit; ſub quo, ſi recta quæpiam in alteram incidat, debeat hæc producta (ad finitam, ſeu terminatam diſtantiam) aliquando occurrere cuivis ad quantamlibet finitam diſtantiam excitatæ ſuper ea incidente perpendiculari.

PROPOSITIO XVIII.

EX quolibet triangulo ABC, *cujus angulus* (*fig.* 17.) *ad punctum* D *in uno quovis ſemicirculo exiſtat, cujus diameter* AC, *ſtabilitur hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti, prout nempe angulus ad punctum* B *fuerit aut rectus, aut obtuſus, aut acutus.*

Demonſtratur. Ex centro *D* jungatur *DB*. Erunt (ex quinta primi) æquales anguli ad baſim *AB*, atque item ad baſim *BC*, in triangulis *ADB*, *CDB*. Quare, in triangulo *ABC*, duo ſimul anguli ad baſim *AC* æquales erunt toti angulo *ABC*. Igitur tres ſimul anguli trianguli *ABC* æquales erunt, aut majores, aut minores duobus rectis, prout angulus ad punctum *B* fuerit aut rectus, aut obtuſus, aut acutus. Itaque ex quolibet triangulo *ABC*, cujus angulus ad punctum *B* in uno quovis ſemicirculo exiſtat, cujus diameter *AC*, ſtabilitur (ex 15. hujus) hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti, prout nempe angulus ad punctum *B* fuerit aut rectus, aut obtuſus, aut acutus. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIX.

ESto quodvis triangulum AHD (*fig.* 18.) *rectangulum in* H. *Tum in* AD *continuatâ ſumatur portio* DC *æqualis ipſi* AD; *demittaturque ad* AH *productam perpendicularis* CB. *Dico ſtabilitum hinc iri hypotheſim aut anguli recti, aut anguli obtuſi, aut anguli acuti, prout portio* HB *æqualis fuerit,*

rit, aut major, aut minor ipsâ AH.

Demonstratur. Nam juncta *DB* erit (ex 4. primi, & ex 10. hujus) aut æqualis, aut major, aut minor ipsâ *AD*, sive *DC*, pro ut illa portio *HB* æqualis fuerit, aut major, aut minor ipsâ *AH*.

Et primò quidem sit *HB* æqualis ipsi *AH*, ita ut propterea juncta *DB* æqualis sit ipsi *AD*, sive *DC*. Constat circumferentiam circuli, qui centro *D*, & intervallo *DB* describatur, transituram per puncta *A*, & *C*. Igitur angulus *ABC*, qui ponitur rectus, existet in eo semicirculo, cujus diameter *AC*. Quare (ex præcedente) stabilietur hypothesis anguli recti. Quod erat primo loco demonstrandum.

Sit secundò *HB* major ipsâ *AH*, ita ut propterea juncta *DB* major sit ipsâ *AD*, sive *DC*. Constat circumferentiam circuli, qui centro *D*, & intervallo *DA*, sive *DC*, describatur, occursuram ipsi *DB* in aliquo puncto intermedio *K*. Igitur, junctis *AK*, & *CK*, erit angulus *AKC* obtusus, quia major (ex 21. primi) angulo *ABC*, qui ponitur rectus. Quare (ex præcedente) stabilietur hypothesis anguli obtusi. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Sit tertiò *HB* minor ipsâ *AH*, ita ut propterea juncta *DB* minor sit ipsâ *AD*, sive *DC*. Constat circumferentiam circuli, qui centro *D*, & intervallo *DA*, sive *DC* describatur, occursuram in aliquo puncto *M* ipsius *DB* ulteriùs protractæ. Igitur junctis *AM*, & *CM*, erit angulus *AMC* acutus, quia minor (ex eadem 21. primi) illo angulo *ABC*, qui ponitur rectus. Quare (ex præcedente) stabilietur hypothesis anguli acuti. Quod erat tertio loco demonstrandum. Itaque constant omnia proposita.

PROPOSITIO XX.

Esto triangulum ACM (*fig.* 19.) *rectangulum in* C. *Tum ex puncto* B *dividente bifariam ipsam* AM *demittatur ad* AC *perpendicularis* BD. *Dico hanc perpendicularem majorem non fore* (*in hypothesi anguli acuti*) *medietate perpendicularis* MC.

Demonstratur. Continuetur enim *DB* usque ad *DH* duplam ipsius *DB*. Foret igitur *DH* (si *DB* major sit prædicta medietate) major ipsâ *CM*, ac propterea æqualis cuidam continuatæ *CMK*. Jnngantur *AH*, *HK*, *HM*, *MD*. Jam sic progredimur. Quoniam in triangulis *HBA*, *DBM*, æqualia ponuntur latera *HB*, *BA*, lateribus *DB*, *BM*; suntque (ex 15. primi) æquales anguli ad punctum *B*; erit etiam (ex quarta ejusdem primi) basis *HA* æqualis basi *MD*. Deinde, propter eandem rationem, æquales erunt in triangulis *HBM*, *DBA*, bases *HM*, *DA*. Quare in triangulis *MHA*, *ADM*, æquales erunt (ex 8. primi) anguli *MHA*, *ADM*. Rursum in triangulis *AHB*, *MDB*, æqualis manebit angulus residuus *MHB* residuo recto angulo *ADB*. Igitur rectus erit angulus *MHB*. At hoc absurdum est, in hypothesi anguli acuti; cum recta *KH* jungens æqualia perpendicula *KC*, *HD*, acutos angulos efficiat (ex tertia hujus) cum eisdem perpendiculis. Non ergo perpendicularis *BD* major est (in hypothesi anguli acuti) medietate perpendicularis *MC*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Iisdem manentibus: Intelligantur in infinitum produci ipsæ AM, *&* AC. *Dico earundem distantiam majorem fore* (*in utraque hypothesi aut anguli recti, aut anguli acuti*) *quavis assignabili finita longitudine.*

Demon-

Demonſtratur. In AM continuatâ ſumatur AP dupla ipſius AM, demittaturque ad AC continuatam perpendicularis PN. Non erit (ex præcedente) in utrâvis prædictâ hypotheſi perpendicularis MC major medietate perpendicularis PN. Igitur PN ſaltem erit dupla ipſius MC, prout MC ſaltem eſt dupla alterius BD. Atque ita ſemper, ſi in continuata AM ſumatur dupla ipſius AP, ex ejuſque termino demittatur perpendicularis ad continuatam AC. Scilicet perpendicularis, quæ ex AM ſemper magis continuatâ demittetur ad continuatam AC, multiplex erit determinatæ BD ſupra quemlibet finitum aſſignabilem numerum. Igitur prædictarum rectarum diſtantia major erit (in utraque prædicta hypotheſi) qualibet aſſignabili finita longitudine. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

QUoniam verò hypotheſis anguli obtuſi, quæ unicè obeſſe hìc poſſet, demonſtrata jam eſt abſolutè falſa; conſequitur ſanè abſolutè verum eſſe, quod diſtantia unius ab altera prædictarum rectarum, ſi in infinitum producantur, major ſit qualibet finita aſſignabili longitudine.

SCHOLION I.

In quo expenditur conatus Procli.

POſt Theoremata a me huc uſque demonſtrata ſine ulla dependentia ab illo Pronunciato Euclidæo, ad cujus nempe exactiſſimam demonſtrationem omnia conſpirant; operæ pretium facturum me judico, ſi quorundam etiam celebriorum Geometrarum labores in eandem metam

tam contendentium diligenter expendam. Incipio a Proclo, cujus est apud Clavium in Elementis post XXVIII. Libri primi sequens assumptum: *Si ab uno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet*. At Proclus demonstrat quidem (ut ibi optimè advertit Clavius) duas rectas (fig. 20.) ut putà *AH*, *AD* ab eodem puncto *A* exeuntes versùs easdem partes, semper magis, in majore distantia ab eo puncto *A*, inter se distare, sed non etiam itaut ea distantia crescat ultra omnem finitum designabilem limitem, prout opus foret ad ipsius intentum. Quo loco præfatus Clavius affert exemplum Conchoidis Nicomedeæ, quæ cum recta *AH* ex eodem puncto *A* versùs easdem partes exiens, ita semper magis ab eadem recedit, ut tamen ipsarum distantia non nisi ad infinitam earundem productionem, æqualis sit cuidam finitæ rectæ *AB* perpendiculariter insistentis ipsis *AH*, *BC*, versùs easdem partes in infinitum protractis. Quid ni ergo, nisi specialis ratio in contrarium cogat, dici idem possit de duabus suppositis rectis lineis *AH*, *AD*?

Neque hìc accusari potest Clavius, quòd Proclo opponat eam Conchoidis proprietatem, quæ nempe demonstrari non potest sine adjumento plurium Theorematum, Pronunciato hìc controverso innixorum. Nam dico ex hoc ipso confirmari vim redargutionis Clavianæ; quia scilicet ex illo Pronunciato assumpto ut vero manifestè consequitur, duas lineas in infinitum protractas, unam rectam, & alteram inflexam, posse unam ab altera semper magis recedere intra quendam finitum determinatum limitem; unde utique oriri potest suspicio, ne simile quidpiam contingere possit in duabus lineis rectis, nisi aliter demonstretur.

Sed non idcirco; postquam ego in Cor. præcedentis

Pro-

Propoſitionis manifeſtam jam feci abſolutam veritatem præcitati aſſumpti; tranſiri ſtatim poteſt ad aſſerendum Pronunciatum illud Euclidæum. Nam antea demonſtrari etiam oporteret, quòd duæ illæ rectæ *AH*, *BC*, quæ cum incidente *AB* duos ad eaſdem partes angulos efficiant duobus rectis æquales, ut putà utrunque rectum, non etiam ipſæ, ad eas partes in infinitum protractæ, ſemper magis invicem diſſiliant ultra omnem finitam aſſignabilem diſtantiam. Quatenus enim partem affirmativam præſumere quis velit; quæ utique veriſſima eſt in hypotheſi anguli acuti; non erit ſanè legitimum conſequens, quòd recta *AD* quomodolibet ſecans angulum *HAB*; unde nempe minores fiant duobus rectis duo ſimul ad eaſdem partes interni anguli *DAB*, *CBA*; quòd, inquam, ea recta *AD*, in infinitum producta coire tandem debeat cum producta *BC*; etiamſi aliàs demonſtratum ſit, quòd diſtantia duarum *AH*, *AD* in infinitum productarum major ſemper evadat ultra omnem finitum deſignabilem limitem.

Quòd autem præfatus Clavius ſatis eſſe judicaverit veritatem illius aſſumpti ad demonſtrandum Pronunciatum hìc controverſum; condonari id debet præconceptæ ab ipſo Clavio opinioni circa rectas lineas æquidiſtantes, de quibus in ſequente Scholio commodiùs agemus.

SCHOLION II.

In quo expenditur idea Clariſſimi Viri Joannis Alphonſi Borellii in ſuo Euclide Reſtituto.

ACcuſat doctiſſimus hic Auctor Euclidem, quòd rectas lineas parallelas eas eſſe definiverit, *quæ in eodem plano exiſtentes non concurrunt ad utraſque partes, licèt in infinitum producantur*. Rationem accuſationis affert, quòd talis paſſio

passio ignota sit: *tum quia*, inquit, *ignoramus, an tales lineæ infinitæ non concurrentes reperiri possint in natura: tum etiam quia infiniti proprietates percipere non possumus, & proinde non est evidenter cognita passio ejusmodi.*

Sed pace tanti Viri dictum sit: Numquid reprehendi potest Euclides, quòd *quadratum* (ut unum inter innumera exemplum proferam) definiverit esse *figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam*; cum dubitari possit, an figura ejusmodi locum habeat in natura? Reprehendi, inquam, æquissimè posset; si, ante omnem Problematicam demonstrativam constructionem, figuram prædictam assumpsisset tanquam datam. Hujus autem vitii immunem esse Euclidem ex eo manifestè liquet, quòd nusquam præsumit quadratum a se definitum, nisi post Prop. 46. Libri primi, in qua problematicè docet, ac demonstrat *quadrati prout ab ipso definiti, a data recta linea descriptionem*. Simili igitur modo reprehendi nequit Euclides, quòd rectas lineas parallelas eo tali modo definiverit, cum eas nusquam ad constructionem ullius Problematis assumat tanquam datas, nisi post Prop. 31. lib. primi, in qua Problematicè demonstrat, quo pacto *a dato extra datam rectam lineam puncto duci debeat recta linea eidem parallela*, & quidem juxta definitionem ab eo traditam parallelarum, *ita ut nempe in infinitum protractæ in neutram partem sibi invicem occurrant*: Quodque amplius est; id ipsum demonstrat sine ulla dependentia a Pronunciato hìc controverso. Itaque Euclides sine ulla petitione principii demonstrat *reperiri posse in natura duas tales lineas rectas, quæ* (in eodem plano consistentes) *in utramque partem in infinitum protractæ nunquam concurrant*; ac propterea *cognitam nobis evidenter facit eam passionem*, per quam rectas lineas parallelas definit.

Pergamus porrò, quò nos invitat diligens Euclidis accusator. Parallelas rectas lineas appellat duas quaslibet

rectas

rectas *AC*, *BD*, quæ perpendiculariter ad easdem partes (fig. apud me 21.) insistant uni cuidam rectæ *AB*. Nihil moror, quin definitio ejusmodi exposita sit *per passionem* (ut ipse ait) possibilem, & evidentissimam; cum (ex undecima primi) a quolibet in data recta puncto excitari possit perpendicularis.

Verùm hanc ipsam & possibilitatem, & evidentiam jam demonstravi circa definitionem traditam ab Euclide. Quare unicè restat, ut conferatur notum illud Pronunciatum Euclidæum cum altero itidem Pronunciato, quod usui esse debeat ad ulteriorem progressum post novam istam parallelarum definitionem. Ecce autem alterum istud Pronunciatum apud Clavium (ad quem disertè provocat ipse Borellius) in Scholio post Prop. 28. lib. primi: Si recta linea, ut putà *BD* super aliam rectam, ut putà *BA*, in transversum moveatur constituens cum ea in suo extremo *B* angulos semper rectos, describet alterum illius extremum *D* lineam quoque rectam *DC*, dum nempe ipsa *BD* pervenerit ad congruendum alteri æquali *AC*.

Agnosco opportunitatem Pronunciati, ut inde transitus fiat ad demonstrandum illud alterum Euclidæum, quo nempe fulciri tandem debet reliqua omnis Geometria. Nam antea proposuerat Clavius; quòd linea, cujus omnia puncta æquè distent a quadam supposita recta *AB*; qualis utique est (ex hypothesi prædictæ descriptionis) linea *DC*; debet esse etiam ipsa linea recta; quia nempe ejusmodi erit, ut omnia ipsius puncta intermedia *ex æquo jaceant* (qualis est rectæ lineæ definitio) inter ejus extrema puncta *D*, & *C*; *ex æquo*, inquam, *jaceant*; cum omnia æquè distent ab ea supposita recta *AB*, nimirum quanta est longitudo ipsius *BD*, aut *AC*. Quo loco affert Clavius exemplum lineæ circularis, de qua commodiùs infra disseremus; ubi ostendam clarissimam hac in parte disparitatem

rem inter lineam rectam, & circularem. Nam interim dico non satis liquere, an linea descripta ab eo puncto *D* sit potiùs recta *DC*, quàm curva quædam *DGC* seu convexa, seu concava versùs partes ipsius *BA*.

Si enim ex puncto *F* dividente bifariam ipsam *BA* intelligatur educta perpendicularis, quæ occurrat rectæ *DC* in *E*, & prædictis curvis in *G*, & *G*, constat sanè (ex 2. hujus) rectos fore angulos hinc inde ad punctum *E*; qualiscunque tandem in eo motu intelligatur descripta linea *DC* a puncto *D*; ac præterea (ex facili intellecta superpositione) æquales hinc inde fore angulos ad puncta *G*, prout alterutra curva *DGC* descripta fuerit.

Sed rursum; assumpto in *AB* quolibet puncto *M*; si educatur perpendicularis, quæ occurrat rectæ *DC* in *N*, & prædictis curvis in *H*, & *H*, paulò post demonstrabo rectos fore angulos hinc inde ad punctum *N*, quatenus quidem recta ipsa *DC* genita supponatur in suo illo motu a puncto *D*, seu quatenus recta *MN* æqualis censeatur ipsi *BD*. Sin verò alterutra curva *DHC* genita putetur; ex facili itidem præscripta superpositione demonstrabitur æquales rursum hinc inde fore angulos *MHD*, *MHC*, ubivis in ea alterutra descripta curva sumptum fuerit punctum *H*, ex quo ad subjectam rectam lineam *AB* demissa intelligatur perpendicularis *HM*. Verùm hac de re fusiùs, ac diligentiùs in altera parte hujus libri, ubi locum proprium habet.

Quorsum igitur, inquies, præcox ista anticipatio? In eum, inquam, finem; ut ne ex ista lineæ eo modo genitæ verissima, & a me exactissimè in præcitato loco demonstranda proprietate; & quidem citra omnem defectum quomodolibet infinitè parvum; præcipitanter censeremus non nisi rectam lineam esse posse. Scilicet hìc inquiritur penitior rectæ lineæ natura, sine qua vix infantiam prætergres-

tergressa Geometria subsistere ibi deberet. Non igitur hac in re vituperari potest major quædam exactissimæ veritatis inquisitio.

Neque tamen hìc renuo, quin diligentissimâ aliquâ experientiâ physicâ deprehendi possit, quòd linea *DC* eo motu genita non nisi recta linea censenda sit. Sed quatenus ad experientiam physicam provocare hìc liceat; tres statim afferam demonstrationes Physico-Geometricas ad comprobandum Pronunciatum Euclidæum. Ubi non loquor de experientia physica tendente in infinitum, ac propterea nobis impossibili; qualis nempe requireretur ad cognoscendum, quòd puncta omnia junctæ rectæ *DC* æquidistent a recta *AB*, quæ supponitur in eodem cum ipsa *DC* plano consistens. Nam mihi satis erit unicus individuus casus; ut putà, si junctâ rectâ *DC*, assumptoque uno aliquo ejus puncto *N*, perpendicularis *NM* demissa ad subjectam *AB* comperiatur esse æqualis ipsi *BD*, sive *AC*. Tunc enim anguli hinc inde ad punctum *N* æquales forent (ex 1. hujus) angulis sibi correspondentibus ad puncta *C*, & *D*, qui rursum (ex eadem 1. hujus) æquales inter se forent. Quare anguli hinc inde ad punctum *N*, atque ideo etiam reliqui duo recti erunt. Igitur unum habebimus casum pro hypothesi anguli recti; ac propterea (juxta quintam, & decimamtertiam hujus) demonstratum habebimus Pronunciatum Euclidæum. Atque hæc esse potest prima demonstratio Physico-Geometrica.

Transeo ad secundam. Esto semicirculus, cujus centrum *D*, & diameter *AC*. Si ergo (fig. 17.) in ejus circumferentia assumatur punctum aliquod *B*, ad quod junctæ *AB*, *CB* comperiantur continere angulum rectum, satis erit hic unicus casus (prout demonstravi in 18. hujus) ad stabiliendam hypothesim anguli recti, ac propterea (ex prædicta 13. hujus) ad demonstrandum notum illud Pronunciatum.

Supereſt tertia demonſtratio Phyſico-Geometrica, quam puto omnium efficaciſſimam, ac ſimpliciſſimam, utpote quæ ſubeſt communi, facillimæ, paratiſſimæque experientiæ. Si enim in circulo, cujus centrum *D*, tres coaptentur (fig. 22.) rectæ lineæ *CB*, *BL*, *LA*, æquales ſingulæ radio *DC*, comperiaturque juncta *AC* tranſire per centrum *D*, ſatis id erit ad demonſtrandum intentum. Nam junctis *DB*, *DL*, tria habebimus triangula, quæ (ex 8. & 5. primi) tum inter ſe invicem, tum etiam in ſe ipſis ſingula erunt æquiangula. Quoniam igitur tres ſimul anguli ad punctum *D*, nimirum *ADL*, *LDB*, *BDC* æquales ſunt (ex 13. primi) duobus rectis; duobus etiam rectis æquales erunt tres ſimul anguli cujuſvis illorum triangulorum, ut putà trianguli *BDC*. Quare (ex 15. hujus) ſtabilita hinc erit hypotheſis anguli recti; ac propterea (ex jam nota 13. hujus) demonſtratum manebit illud Pronunciatum.

Sin verò, ante omnem attentatam ſeu demonſtrationem, ſeu figuralem exhibitionem, conferre inter ſe placeat duo illa Pronunciata, fateor ſanè Euclidæum videri poſſe obſcurius, aut etiam falſitati obnoxium. At poſt figuralem exhibitionem, quam Scholio IV. conſequenti reſervo, conſtabit viceversâ Pronunciatum quidem Euclidæum retinere poſſe dignitatem, ac nomen Pronunciati, alterum verò inter Theoremata computari tutiùs debere.

Sed hìc explicare debeo (prout paulò ante me facturum ſpopondi) manifeſtam iſto in genere diſparitatem inter lineam circularem, & lineam rectam. Diſparitas autem ex eo oritur; quòd recta quidem linea dicitur ad ſe ipſam; circularis verò, ut putà (fig. 23.) *MDHNM*, non ad ſe ipſam, ſed ad alterum dicitur, nimirum ad quoddam alterum in eodem cum ipſa plano exiſtens punctum *A*, quod eſt ejuſdem centrum. Conſequens igitur eſt, prout optimè

mè demonſtratur a Clavio, quòd linea *FBCL* in eodem cum illa plano conſiſtens, & cujus omnia puncta æquidiſtent a prædicta *MDHNM*, ſit & ipſa circularis, nimirum omnibus ſuis punctis æquidiſtans a communi centro *A*. Quod enim *BD*, quæ ſit continuatio in rectum ipſius *AB*, ſit menſura diſtantiæ illius puncti *B* ab ea circulari *MDHNM*, ex eo conſtat; quia (ex 7. tertii, quæ eſt independens a Pronunciato hìc controverſo) minima omnium ipſa eſt, quæ ab eo puncto in eam circumferentiam cadere poſſint. Idem valet de reliquis *CH*, *LN*, *FM*. Quoniam igitur & totæ *AM*, *AD*, *AH* æquales ſunt, utpote radii ex centro *A* ad ſuppoſitam lineam circularem *MDHNM*; atque item æquales ſunt abſciſſæ *FM*, *BD*, *CH*, *LN*, quæ nempe menſura ſunt æqualis diſtantiæ omnium punctorum illius lineæ *FBCLF* ab ea ſuppoſita linea circulari *MDHNM*; conſequens planè eſt, ut æquales pariter ſint reſiduæ *AF*, *AB*, *AC*, *AL*, ac propterea ipſa etiam linea *FBCLF* ſub eodem centro *A* circularis ſit.

Numquid autem uniformiter, ad demonſtrandum, quòd linea *DC* (fig. 21.) eo tali motu genita a puncto *D* ſit linea recta, ſatis erit æquidiſtantia omnium ipſius punctorum a ſubjecta recta *AB*? Nullo modo. Nam linea recta dicitur abſolutè ad ſe ipſam, ſive in ſe ipſa, nimirum ita *ex æquo jacens inter ſua puncta*, ac præſertim extrema, ut manentibus iſtis immotis nequeat ipſa revolvi ad occupandum novum locum. Niſi hæc paſſio aliquo pacto demonſtretur de ea *DC*, nunquam conſtabit eam eſſe lineam rectam, qualiſcunque tandem ſupponatur, aut demonſtretur omnium ipſius punctorum relatio ad ſubjectam in eodem plano rectam *AB*; præſertim verò, ne uniformiter dicamus nullam aliam in eo plano fore lineam rectam, quæ omnibus ſuis punctis non æquidiſtet ab ea ſuppoſita recta linea *AB*.

Neque

Neque tamen dictum hoc meum ita accipi volo, quasi putem demonstrari non posse, quòd linea sic genita ipsâ sit linea recta, nisi post demonstratam veritatem controversi Pronunciati; cum magis ego ipse prope finem hujus Libri demonstraturus id sim, ad confirmandum ipsum tale Pronunciatum.

SCHOLION III.

In quo expenditur conatus Nassaradini Arabis, & simul idea super eodem negotio Clariss. Viri Joannis Vallisii.

COnatum istum Nassaradini Arabis latino idiomate typis vulgavit prælaudatus Vir Joannes Vallisius, cum animadversionibus opportuno loco adjectis. Duo autem in rem suam postulat sibi concedi Nassaradinus.

Primum est; ut duæ quælibet rectæ lineæ in eodem plano positæ, in quas aliæ quotlibet rectæ lineæ ita incidant, ut uni quidem earum perpendiculares semper sint, alteram verò ad angulos inæquales semper secent, nimirum versùs unam partium sub angulo semper acuto, & versùs alteram sub angulo semper obtuso; ut, inquam, priore loco dictæ lineæ censeantur semper magis (quandiu se mutuò non secent) ad se invicem accedere versùs partes illorum angulorum acutorum; & vicissim semper magis a se invicem recedere versùs partes angulorum obtusorum.

At ego quidem, si nihil aliud moratur Nassaradinum, libens permitto, quod postulat; cum istud ipsum, quod ab eo indemonstratum relinquitur, intelligi possit exactissimè a me demonstratum in Cor. II. post 3. hujus.

Alterum Nassaradini Postulatum est reciprocum primi; ut nempe acutus semper sit angulus versùs eas partes,

ad

ad quas jam dictæ perpendiculares ſupponantur fieri ſemper breviores; obtuſus autem versùs alias partes, ad quas eædem perpendiculares ſupponantur evadere ſemper longiores.

Verùm hìc latet æquivocatio. Cur enim (dum ab una aliqua ſtatuta tanquam prima perpendiculari procedatur ad alias) conſequentium perpendicularium anguli, ad eandem partem acuti, non fiant ſemper majores, quo uſque incidatur in angulum rectum, nimirum in talem perpendicularem, quæ ipſa ſit utriuſque prædictarum rectarum commune perpendiculum? Et iſtud quidem ſi accidat, evaneſcit latebroſa illa Naſſaradini præparatio, poſtquam ingeniosè quidem, ſed magno cum labore Euclidæum Pronunciatum demonſtrat.

Quòd ſi Naſſaradinus jure quodam ſuo præſumere velit tanquam per ſe notam conſiſtentiam illam ad eandem partem angulorum acutorum: Cur non etiam (dicam cum Valliſio) concipi poteſt tanquam per ſe clarum: *Duas rectas in eodem plano convergentes* (in quas nempe alia recta incidens duos ad eaſdem partes angulos efficiat minores duobus rectis, ut putà unum rectum, & alterum quomodolibet acutum) *tandem occurſuras, ſi producantur*? Neque enim opponi poteſt, quòd major iſta ad unas partes convergentia ſubſiſtere ſemper poſſit intra quendam determinatum limitem, adeò ut nempe tanta quædam diſtantia inter eas lineas ad eam partem ſemper interſit, etiamſi cæteroquin una ad alteram ſemper propiùs accedat. Non, inquam, opponi id poteſt; quoniam ex hoc ipſo demonſtrabo, poſt XXV. hujus, omnium talium rectarum ad finitam diſtantiam occurſum, juxta Pronunciatum Euclidæum.

Jam tranſeo ad prælaudatum Joannem Valliſium, qui nempe, ut morem gereret tot Magnis Viris, Veteribus pariter, ac Recentioribus, & rurſum ex onere Cathedræ

dræ ſuæ Oxonienſi impoſito, hoc idem penſum aggredi voluit demonſtrandi ſæpe dictum Pronunciatum. Unicè autem aſſumit tanquam certum, quod ſequitur: nimirum *Datæ cuicunque figuræ ſimilem aliam cujuſcunque magnitudinis poſſibilem eſſe*. Et id quidem præſumi poſſe de qualibet figura (etiam ſi in rem ſuam unicè aſſumat triangulărem rectilineam) bene argumentatur ex circulo, quem ſcilicet ſub quantolibet radio deſcribi poſſe omnes agnoſcunt. Deinde acutus Vir cautiſſimè obſervat præſumptioni huic ſuæ non obſtare, quòd prætet correſpondentium angulorum æqualitatem requiratur etiam correſpondentium omnium laterum proportionalitas, ut habeatur una figura rectilinea, v. g. triangularis, alteri rectilineæ triangulari ſimilis; cum tamen Proportionalium, ac ſubinde ſimilium Figurarum definitio ex Quinto, ac Sexto Euclidis Libro deſumendæ ſint: *Poterat enim Euclides* (inquit ipſe) *utramque Libro Primo præmiſiſſe*. Porrò autem, hoc ſtante (quod tamen negari à quopiam poſſet, niſi demonſtretur) intentum ſuum pulchro ſanè, atque ingenioſo molimine exequitur laudatus Vir.

Sed nolo oneri a me ſuſcepto in quoquam deeſſe. Itaque aſſumo duo triangula, unum *ABC*, & alterum *DEF* (fig. 24.) invicem æquiangula: Non dico planè ſimilia; quia non indigeo proportionalitate laterum circa angulos æquales, immo neque ullâ ipſorum laterum determinatâ menſurâ. Solùm igitur nolo triangula invicem æquilatera, quia tunc ſufficeret ſola octava primi, ſine ulla præſumptione. Itaque anguli ad puncta *A*, *B*, *C*, æquales ſint angulis ad puncta *D*, *E*, *F*; ſitque latus *DE* minus latere *AB*; aſſumaturque in *AB* portio *AG* æqualis ipſi *DE*, atque item in *AC* portio *AH* æqualis ipſi *DF*. Debere autem *DF* minorem eſſe ipsâ *AC* infrà declarabo. Tum (junctâ *GH*) conſtat (ex 4. primi) æquales fore

an-

angulos ad puncta *E*, & *F*, ipsis *AGH*, *AHG*. Quapropter; cum modò dicti anguli unâ cum aliis *BGH*, *CHG*, æquales sint (ex 13. primi) quatuor rectis ; quatuor itidem rectis æquales erunt anguli ad puncta *B*, & *C*, unà cum eisdem angulis *BGH*, *CHG*. Igitur quatuor simul anguli quadrilateri *BGHC* æquales erunt quatuor rectis ; ac propterea (ex 16. hujus) stabilietur hypothesis anguli recti ; & simul (ex 13. hujus) Pronunciatum Euclidæum.

Porrò suppositi latus *DF*, sive *AH* sumptum ipsi æquale, minus fore latere *AC*. Si enim æquale foret, & sic punctum *H* caderet in punctum *C*; tunc angulus *BCA* æqualis foret (ex hypothesi) angulo *EFD*, sive *GCA* (qui tunc fieret) totum parti ; quod est absurdum. Sin verò majus foret, & sic juncta *GH* secaret in aliquo puncto ipsam *BC*; jam angulus *ACB* externus æqualis foret ex hypothesi (contra 16. primi) angulo interno, & opposito (qui tunc fieret) *AHG*, sive *GHA*. Itaque bene suppositi latus *DF* unius trianguli minus fore latere *AC* alterius trianguli, juxta hypothesim jam stabilitam.

Quare ex duobus quibusvis invicem æquiangulis triangulis, sed non etiam invicem æquilateris, stabilitur Pronunciatum Euclidæum. Quod intendebatur.

SCHOLION IV.

In quo exponitur figuralis quædam exhibitio, ad quam fortasse respexit Euclides, ut suum illud Pronunciatum tanquam per se notum stabiliret.

PRæmitto primò : sub quolibet angulo acuto *BAX* (recole ex hac Tab. Fig. 12.) educi posse ex aliquo

 pun-

puncto X ipsius AX quandam XB, quæ sub quovis designato etiamsi obtuso angulo R, qui nimirum cum eo acuto BAX deficiat à duobus rectis; quandam, inquam, educi posse XB, quæ ad finitam distantiam occurrat ipsi AB in quodam puncto B. Nam id ipsum jam demonstravi in Scholio post XIII. hujus.

Tab. III. Præmitto secundò: eas AB, AX (Fig. 25.) intelligi posse in infinitum protractas usque in quædam puncta Y, & Z; atque item prædictam XB (in infinitum & ipsam protractam usque in quoddam punctum Y) intelligi posse ita moveri super eâ AZ versùs partes puncti Z, ut angulus ad punctum X versùs partes puncti A æqualis semper sit dato cuivis obtuso angulo R.

Præmitto tertiò: nulli jam dubitationi obnoxium fore illud Pronunciatum Euclidæum, si antedicta XY in eo quantocunque motu super rectâ AZ secet semper illam AY in quibusdam punctis B, D, H, P, atque ita consequenter in aliis punctis remotioribus ab eo puncto A. Ratio evidens est; quia sic duæ quælibet in eodem plano existentes rectæ AB, XH, in quas recta quælibet incidens AX duos ad easdem partes angulos BAX, HXA, duobus rectis minores efficiat, convenire tandem ad eas partes deberent in uno eodemque puncto H.

Præmitto quartò: nulli item dubitationi locum fore super veritate præcedentis hypothetici assumpti; si posteriores illi externi anguli YDH, YHP, & sic alii quilibet consequentes, aut æquales semper sint priori externo angulo YBD, aut saltem non ita minores semper sint, quin eorum unusquisque major semper sit parvulo quopiam designato acuto angulo K: Hoc enim stante manifestum fiet, quòd ea XY, in suo illo quantocunque motu versùs partes puncti Z, nunquam cessabit secare prædictam AY; quod utique (ex præcedente notato) satis est ad stabili-

biliendum Pronunciatum controverſum.

Unicè igitur ſupereſt, ut quidam Adverſarius dicat angulos illos externos in majore, ac majore diſtantia ab illo puncto *A* fieri ſemper minores ſine ullo determinato limite. Inde autem fiet, ut illa *XY* in ſuo illo motu ſuper recta *AZ* occurrere tandem debeat ipſi *AY* in quodam puncto *P* ſine ullo angulo cum ſegmento *PY*, adeo ut nempe ſegmentum ejuſmodi commune ſit duarum rectarum *APY*, & *XPY*. At hoc evidenter repugnat naturæ lineæ rectæ.

Sin verò cuiquam minùs opportunus videatur angulus obtuſus ad illud punctum *X* versùs partes puncti *A*, nullo negotio ſupponi poterit rectus; adeò ut nempe (in motu prædictæ *XY* ad angulos ſemper rectos ſuper rectâ *AZ*) manifeſtiùs appareat ſingula illius *XY* puncta æquabiliter ſemper moveri relatè ad ſubjectam *AZ*; ac propterea nequire jam dictam *XY* tranſire de ſecante in non ſecantem alterius indefinitæ *AY*, niſi eam aut aliquando in aliquo puncto præcisè contingat, aut ipſi occurrat in aliquo puncto *P*, ubi cum eadem *AY* commune obtineat ſegmentum *PY*; quorum utrunque adverſari naturæ lineæ rectæ oſtendam ad XXXIII. hujus. Igitur juxta veram ideam lineæ rectæ, debebit illa *XY*, in quantacunque diſtantia puncti *X* a puncto *A*, occurrere ſemper in aliquo puncto ipſi *AY*. Atque id quidem (quantumlibet parvus ſupponatur acutus angulus ad punctum *A*) ſatis eſſe ad demonſtrandum, contra hypotheſim anguli acuti, Pronunciatum Euclidæum, conſtabit ex XXVII. hujus.

PROPOSITIO XXII.

Si duæ rectæ AB, CD *in eodem plano exiſtentes perpendiculariter inſiſtant cuidam rectæ* BD; *ipſa autem* AC *jungens ea perpendicula internos* (*in hypotheſi anguli acuti*) *acu-*

Tab. III. *tos angulos cum eiſdem efficiat: Dico (fig. 26.) rectas terminatas* AC, BD *commune aliquod habere perpendiculum, & quidem intra limites deſignatis punctis* A, *&* C *præfinitos.*

Demonſtratur. Si enim æquales ſint ipſæ *AB*, *CD*; conſtat (ex 2. hujus) rectam *LK*, a qua bifariam dividantur illæ duæ *AC*, & *BD*, commune fore eiſdem perpendiculum. Sin verò alterutra ſit major, ut putà *AB*: demittatur ad *BD* (juxta 12. primi) ex quovis puncto *L* ipſius *AC* perpendicularis *LK*, occurrens alteri *BD* in *K*. Occurret autem in aliquo puncto *K*, conſiſtente inter puncta *B*, & *D*; ne (contra 17. primi) perpendicularis *LK* ſecet alterutram *AB*, aut *CD*, perpendiculares eidem *BD*. Si ergo anguli ad punctum *L* recti non ſunt, unus eorum acutus erit, & alter obtuſus. Sit obtuſus versùs punctum *C*. Jam verò intelligatur *LK* ita procedere versùs *AB*, ut ſemper ad rectos angulos inſiſtat ipſi *BD*, atque item opportunè aucta, aut imminuta, in aliquo ſui puncto ſecet rectam *AC*. Conſtat angulos ad puncta interſectiva ipſius *AC* non poſſe omnes eſſe obtuſos versùs partes puncti *C*, ne tandem in ipſo puncto *A*, dum recta *LK* congruet cum recta *AB*, angulus ad punctum *A* versùs partes puncti *C* ſit obtuſus, cum ad eas partes poſitus ſit acutus. Quoniam ergo angulus ad punctum *L* ipſius *LK* poſitus eſt obtuſus versùs partes puncti *C*, non tranſibit in eo motu recta *LK* ad faciendum in aliquo ſui puncto cum recta *AC* angulum acutum versùs partes prædicti puncti *C*, niſi priùs tranſeat ad conſtituendum in aliquo ſui puncto cum eadem *AC* angulum rectum versùs partes ejuſdem puncti *C*. Erit igitur inter puncta *A*, & *L* unum aliquod punctum intermedium *H*, in quo *HK* perpendicularis ipſi *BD* ſit etiam perpendicularis alteri *AC*.

Simili modo oſtendetur adeſſe aliquam *XK* inter ipſas *LK*, *CD*, quæ ſit perpendicularis & rectæ *BD*, &

rectæ

rectæ *AC*, dum ſcilicet angulus obtuſus ad punctum *L* ponatur conſiſtere versùs partes puncti *A*.

Conſtat igitur rectas *AC*, *BD* commune aliquod habituras eſſe perpendiculum, & quidem intra limites deſignatis punctis *A*, & *C* præfinitos, quoties junctæ *AB*, *CD* in eodem plano exiſtant, ſintque perpendiculares ipſi *BD*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXIII.

SI duæ quælibet rectæ AX, BX (*fig.* 27.) *in eodem plano exiſtant; vel unum aliquod* (*etiam in hypotheſi anguli acuti*) *commune obtinent perpendiculum; vel in alterutram eandem partem protractæ, niſi aliquando ad finitam diſtantiam una in alteram incidat, ſemper magis ad ſe invicem accedunt.*

Demonſtratur. Ex quolibet puncto *A* ipſius *AX* demittatur ad rectam *BX* perpendicularis *AB*. Si ipſa *BA* efficiat cum *AX* angulum rectum, habemus intentum communis perpendiculi. Cæterùm verò ea recta efficiat ad alterutram partem, ut putà versùs partes puncti *X*, angulum acutum. Itaque in prædicta recta *AX* deſignentur inter puncta *A*, & *X* quælibet puncta *D*, *H*, *L*, ex quibus demittantur ad rectam *BX* perpendiculares *DK*, *HK*, *LK*. Si unus aliquis angulus ad puncta *D*, *H*, *L* acutus ſit versùs partes puncti *A*, conſtat (ex præcedente) unum aliquod adfuturum commune perpendiculum ipſarum *AX*, *BX*. Sin verò omnis hujuſmodi angulus ſit major acuto; vel unus aliquis erit rectus, & ſic rurſum habemus intentum communis perpendiculi, cum omnes anguli ad puncta *K* ſupponantur recti; vel omnes illi anguli ponuntur obtuſi versùs partes puncti *A*, ac propterea omnes itidem acuti versùs partes puncti *X*, & ſic rurſum argumentor. Quoniam in quadrilatero *KDHK* recti ſunt

angu-

anguli ad puncta *K*, ponitur autem acutus angulus ad punctum *D*, erit (ex Cor. II. post 3. hujus) latus *DK* majus latere *HK*. Simili modo ostendetur latus *HK* majus esse latere *LK*; atque ita semper, conferendo inter se perpendiculares ex quolibet puncto altiore ipsius *AX* demissas ad alteram *BX*. Quapropter ipsæ *AX*, *BX* semper magis versùs partes puncti *X* ad se invicem accedent: Quæ est altera pars propositi disjuncti.

Ex quibus omnibus constat duas quaslibet rectas *AX*, *BX*, quæ in eodem plano existant, vel unum aliquod (etiam in hypothesi anguli acuti) commune habere perpendiculum, vel in alterutram eandem partem protractas, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat, semper magis ad se invicem accedere. Quod erat &c.

COROLLARIUM I.

HInc anguli versùs basim *AB* erunt semper obtusi ad illud punctum ipsius *AX*, ex quo demittitur perpendicularis ad rectam *BX*: erunt, inquam, semper obtusi, quoties duæ illæ *AX*, & *BX* semper magis ad se invicem accedant versùs partes punctorum *X*; quod quidem sano modo intelligi debet, nimirum de perpendicularibus demissis ante prædictum occursum, si fortè ad finitam distantiam una in alteram incidere debeat.

SCHOLION.

VIdeo tamen inquiri hìc posse, qua ratione ostendendum sit commune illud perpendiculum; quoties recta quæpiam *PFHD* (fig. 28.) occurrens duabus *AX*, *BX* in punctis *F*, & *H*, duos ad eàsdem partes efficiat internos angulos *AHF*, *BFH*, non eos quidem rectos, sed tamen

æqua-

æqualès ſimul duobus rectis. Ecce autem commune illud perpèndiculum geometricè demonſtratum. Divisâ *FH* bifariam in *M* demittantur ad *AX*, & *BX* perpendiculares *MK*, *ML*. Angulus *MFL* æqualis erit (ex 13. primi) angulo *MHK*, qui nempe ſupponitur duos rectos efficere cum angulo *BFH*. Præterea recti ſunt anguli ad puncta *K*, & L; ac rurſum æquales ſunt ipſæ *MF*, *MH*. Igitur (ex 26. primi) æquales itidem erunt anguli *FML*, *HMK*. Quare angulus *HMK* duos efficiet rectos angulos cum angulo *HML*, prout cum eodem duos efficit rectos angulos (ex 13. primi) angulus *FML*. Igitur (ex 14. primi) una erit recta linea continuata ipſa *KML*, commune idcirco perpendiculum prædictis rectis *AX*, *BX*. Quod erat &c.

COROLLARIUM II.

SEd rurſum docere hinc poſſum, quòd illæ duæ *AX*, *BX*, in quas incidens recta *PFHD*, aut duos efficiat cum ipſis *AX*, *BX* internos ad eaſdem partes angulos æquales duobus rectis; aut conſequenter (ex 13. & 15. primi) alternos ſive externos, ſive internos angulos inter ſe æquales; aut rurſum, eodem titulo, externum (ut putà *DHX*) æqualem interno, & oppoſito *HFX*: quòd, inquam, illæ duæ rectæ neque ad infinitam earundem productionem coire inter ſe poſſint. Si enim ex quolibet puncto *N* ipſius *AX* demittatur ad *BX* perpendicularis *NR*, erit hæc in ipſa hypotheſi anguli acuti (quæ utique ſola obeſſe nobis poſſet) major (ex Cor. I. poſt 3. hujus) eo communi perpendiculo *KL*. Non igitur illæ duæ *AX*, *BX* convenire unquam inter ſe poterunt.

Porrò autem demonſtratas hinc habes Propoſ. 27. & 28. Libri primi Euclidis; & quidem citra immediatam dependentiam a præcedentibus 16. & 17. ejuſdem primi, circa

ca quas oriri posset difficultas, quoties sub basi finita infinitilaterum esset triangulum; ad quale nempe triangulum provocare non dubitaret, qui eas duas *AX*, *BX* ad infinitam saltem distantiam inter se coituras censeret, quamvis anguli ad incidentem *PFHD* tales forent, quales supposuimus.

Præterea, propter demonstratum commune perpendiculum *KL*, nequirent sanè illæ duæ *KX*, *LX* ad suam partem punctorum *X* simul concurrere, quin etiam (ex facili intellecta superpositione) ad alteram etiam parte n simul concurrerent reliquæ & ipsæ interminatæ *KA*, *LB*. Quare duæ rectæ *AX*, *BX* clauderent spatium; quod est contra naturam lineæ rectæ.

Sed hæc posteriora sunt. Nam in præcedentibus nusquam adhibui aut 16. aut 17. primi, nisi ubi clarè ageretur de triangulo omni ex parte circumscripto, prout nempe in Proemio ad Lectorem ita me curaturum spoponderam.

PROPOSITIO XXIV.

Iisdem manentibus: Dico quatuor simul angulos (fig. 27.) quadrilateri KDHK *proximioris basi* AB *minores esse (in hypothesi anguli acuti) quatuor simul angulis quadrilateri* KHLK *remotioris ab eadem basi; atque ita quidem, sive illæ duæ* AX, BX *aliquando ad finitam distantiam incidant versùs partes puncti* X; *sive nunquam inter se incidant; sed versùs eas partes aut semper magis ad se invicem accedant, aut aliquando recipiant commune perpendiculum, post quod nempe (juxta Cor. II. præc. Propos.) ad easdem partes incipiant invicem dissilire.*

Demonstratur. Verùm hìc supponimus portiones *KK* sumptas esse invicem æquales. Quoniam igitur (ex præ-

ceden

cedente) latus DK majus eſt latere HK, ac ſimiliter HK majus latere LK; ſumatur in HK portio MK æqualis ipſi LK, & in DK portio NK æqualis ipſi HK; jungantur-que MN, MK, LK; nimirum punctum K intermedium cum puncto L, & punctum K vicinius puncto B cum puncto M. Jam ſic progredior. Quandoquidem latera trianguli KKL (initium ſemper ducam à puncto K viciniore puncto B) æqualia ſunt lateribus trianguli KKM, & anguli comprehenſi æquales, utpotè recti; æquales etiam erunt (ex 4. primi) baſes LK, MK; atque item æquales, qui correſpondent invicem anguli, ad eaſdem baſes, nimirum angulus KLK angulo KMK, & angulus LKK angulo MKK. Igitur æquales etiam ſunt reſidui NKM, & HKL. Quare, cum latera NK, KM trianguli NKM æqualia itidem ſint lateribus HK, KL trianguli HKL; æquales etiam erunt (ex eadem 4. primi) baſes NM, HL; anguli KNM, KHL; ac tandem anguli KMN, KLH. Sunt autem in prioribus triangulis jam probati æquales anguli KLK, & KMK. Igitur totus angulus NMK æqualis eſt toti angulo HLK. Quare, cum omnes ad puncta K anguli ſint recti, manifeſtè conſequitur omnes ſimul quatuor angulos quadrilateri $KNMK$ æquales eſſe omnibus ſimul quatuor angulis quadrilateri $KHLK$. Quoniam verò duo ſimul anguli ad puncta N, & M in quadrilatero $KNMK$ majores ſunt, in hypotheſi anguli acuti, duobus ſimul angulis (ex Cor. poſt XVI. hujus) ad puncta D, & H in quadrilatero $NDHM$, ſeu quadrilatero $KDHK$; conſequens inde eſt, ut (additis communibus rectis angulis ad puncta K) quatuor ſimul anguli quadrilateri $KNMK$, ſeu quadrilateri $KHLK$, majores ſint (in hypotheſi anguli acuti) quatuor ſimul angulis quadrilateri $KDHK$. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

SEd opportunè obſervari hìc debet, nihil defuturum factæ argumentationi, quamvis angulus ad punctum *L* poneretur rectus, juxta hypotheſin anguli acuti. Nam adhuc illa communis perpendicularis *LK* minor foret (ex Cor. I. poſt III. hujus) altera perpendiculari *HK*, ex qua propterea ſumi adhuc poſſet portio *MK* æqualis prædictæ *LK*: Quo ſtante conſtat nullum poſſe obicem intercurrere.

SCHOLION.

DUbitari nihilominus poſſet, an ex quolibet puncto K (aſſumpto nimirum in *BX* ante occurſum ipſius *BX* in alteram *AX*) perpendicularis educta versùs partes rectæ *AX* occurrere huic debeat (fig. 29.) in aliquo puncto *L*; dum nempe illæ duæ, ante prædictum occurſum, ponantur ad ſe invicem ſemper magis accedere. Ego autem dico ita omnino ſecuturum.

Demonſtratur. Aſſignatum ſit in *BX* quodvis punctum K. Sumatur in *AX* quædam *AM* æqualis ſummæ ex ipsâ *BK*, & duplâ *AB*. Tum ex puncto *M* ducatur ad *BX* (juxta 12. primi) perpendicularis *MN*. Erit *MN* (juxta præſentem ſuppoſitionem) minor ipsâ *AB*. Quare *AM* (facta æqualis ſummæ ex ipsâ *BK*, & duplâ *AB*) major erit ſummâ ipſarum *BK*, *AB*, & *NM*. Jam oſtendere oportet eandem *AM* minorem eſſe ſummâ ipſarum *BN*, *AB*, & *MN*, ut inde conſtet eam *BN* majorem eſſe prædictâ *BK*, ac propterea punctum K jacere inter puncta *B*, & *N*. Jungatur *BM*. Erit latus *AM* (ex 20. primi) minus duobus ſimul reliquis lateribus *AB*, & *BM*. Rurſum

latus

latus BM (ex eadem 20. primi) minus erit duobus simul lateribus BN, & MN. Igitur latus AM multò minus erit tribus simul lateribus AB, BN, & NM. Hoc autem erat ostendendum, ut constaret punctum K jacere inter puncta B, & N. Inde autem consequens est, ut perpendicularis ex puncto K educta versùs partes ipsius AX occurrere huic debeat in aliquo puncto L inter puncta A, & M constituto; ne scilicet (contra 17. primi) secare debeat alterutram AB, aut MN perpendiculares eidem BX. Quod &c.

PROPOSITIO XXV.

SI duæ rectæ (fig. 30.) AX, BX *in eodem plano existentes (una quidem sub angulo acuto in puncto* A, *& altera in puncto* B *perpendiculariter insistens ipsi* AB*) ita ad se invicem semper magis accedant versùs partes punctorum* X, *ut nihilominus earundem distantia semper major sit assignatâ quadam longitudine, destruitur hypothesis anguli acuti.*

Demonstratur. Assignata sit longitudo R. Si ergo in ea BX sumatur quædam BK quantumlibet multiplex propositæ longitudinis R; constat (ex præcedente Scholio) perpendicularem ex puncto K eductam versùs partes ipsius AX in aliquo puncto L eidem occursuram; ac rursum (ex præsente hypothesi) constat eam KL majorem fore prædicta longitudine R. Porrò intelligatur BK divisa in portiones KK, æquales singulas ipsi R, usque dum KB æqualis sit ipsi longitudini R. Tandem verò ex punctis K erectæ sint ad BX perpendiculares occurrentes ipsi AX in punctis L, H, D, M, usque ad punctum N proximius puncto A. Jam sic progredior.

Erunt (ex Prop. præcedente) quatuor simul anguli quadrilateri $KHLK$, remotioris ab ea basi AB, majores

quatuor ſimul angulis quadrilateri *KDHK*, proximioris eidem baſi; cujus itidem quadrilateri quatuor ſimul anguli majores erunt quatuor ſimul angulis ſubſequentis versùs eandem baſim quadrilateri *KMDK*. Atque ita ſemper uſque ad ultimum quadrilaterum *KNAB*, cujus utique quatuor ſimul anguli minimi erunt, relatè ad quatuor ſimul angulos ſingulorum aſcendentium versùs puncta *X* quadrilaterorum.

Quoniam verò tot aderunt prædicto modo recenſita quadrilatera, quot ſunt præter baſim *AB* demiſſæ ex punctis ipſius *AX* ad rectam *BX* perpendiculares; expendenda eſt ſumma omnium ſimul angulorum, qui comprehenduntur in illis quadrilateris. Ponamus eſſe novem ejuſmodi perpendiculares demiſſas, ac propterea novem itidem quadrilatera. Conſtat (ex 13. primi) æquales eſſe quatuor rectis angulos hinc inde comprehenſos ad bina puncta illarum octo perpendicularium, quæ mediæ jaceant inter baſim *AB*, & remotiorem perpendicularem *LK*. Itaque ſumma horum omnium angulorum erit 32. rectorum. Reſtant duo anguli ad perpendiculum *LK*, & duo ad baſim *AB*. At anguli, unus quidem ad punctum *K*, & alter ad punctum *B*, ſupponuntur recti; angulus autem ad punctum *L* (ex Cor. poſt **XXIII.** hujus) eſt obtuſus. Quapropter (etiam neglecto angulo acuto ad punctum *A*) ſumma omnium angulorum, qui comprehenduntur ab illis novem quadrilateris, excedet 35. rectos. Inde autem fit, ut quatuor ſimul anguli quadrilateri *KHLK*, remotioris a baſi, minùs deficiant a quatuor rectis, quàm ſit nona pars unius recti; & id quidem etiam ſi æqualis portio prædictæ omnium angulorum ſummæ contingeret ſingulis illis quadrilateris. Ergo minor adhuc erit inſinuatus defectus, cum ſumma quatuor ſimul angulorum illius quadrilateri *KHLK* oſtenſa ſit omnium maxima, relatè ad

qua-

quatuor ſimul angulos reliquorum quadrilaterorum.

Sed rurſum; juxta ſuppoſitionem, in qua procedit hæc Propoſitio; aſſumi poteſt tanta longitudo ipſius *Bk*, ut confici ſemper poſſint non tot quin plura quadrilatera ſub baſibus *kk*, æqualibus ſingulis illi aſſignatæ longitudini *R*. Quare defectus quatuor ſimul angulorum illius remotioris quadrilateri *kHLk* a quatuor rectis oſtendetur ſemper minor & unâ centeſimâ, & unâ milleſimâ, & ſic ſub quolibet aſſignabili numero unâ portiunculâ unius recti.

Porrò autem erunt ſemper (juxta prædictam ſuppoſitionem) ipſæ *Lk*, & *Hk* majores deſignata longitudine *R*. Si ergo in *kL*, & *kH* ſumantur *kS*, & *kT* æquales ipſi *kk*, ſeu longitudini *R*; erunt, junctâ *ST*, duo ſimul anguli *kST*, *kTS* majores, in hypotheſi anguli acuti, duobus ſimul angulis (ex Cor. poſt XVI. hujus) ad puncta *H*, & *L* in quadrilatero *THLS*, ſeu quadrilatero *kHLk*; ac propterea (additis communibus rectis angulis ad puncta *k*, *k*) erunt quatuor ſimul anguli quadrilateri *kTSk* majores quatuor ſimul angulis illius quadrilateri *kHLk*.

Jam verò: cum ex una parte ſtabile ſit, ac datum quadrilaterum *kTSk*, utpotè conſtans data baſi *kk*, quæ nimirum æqualis ponitur aſſignatæ longitudini *R*, ac rurſum conſtans duobus perpendiculis *Tk*, *Sk* eidem baſi æqualibus, ac tandem jungente *TS*, quæ evadit omnino determinata; & ex altera quatuor ſimul anguli ſtabilis illius, ac dati quadrilateri, oſtenſi jam ſint majores quatuor ſimul angulis quadrilateri *kHLk* quantumlibet diſtantis ab ea baſi *AB*: conſequens utique fit, ut quatuor ſimul anguli ſtabilis illius, ac dati quadrilateri *kTSk* majores ſint qualibet angulorum ſummâ, quæ quomodolibet deficiat a quatuor rectis; quandoquidem oſtenſum jam eſt deſignari ſemper poſſe tale aliquod quadrilaterum *kHLk*,

cujus

cujus quatuor ſimul anguli minùs deficiant à quatuor rectis, quàm ſit quævis deſignabilis unius recti portiuncula. Igitur quatuor ſimul anguli ſtabilis illius, ac dati quadrilateri, vel æquales ſunt quatuor rectis, vel eiſdem majores. Tunc autem (ex XVI. hujus) ſtabilitur hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi; ac propterea (ex V. & VI. hujus) deſtruitur hypotheſis anguli acuti.

Itaque conſtat deſtructum iri hypotheſim anguli acuti, ſi duæ rectæ in eodem plano exiſtentes ita ad ſe invicem ſemper magis accedant, ut nihilominus earundem diſtantia major ſemper ſit aſſignatâ quadam longitudine. Hoc autem erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

AT (deſtructâ hypotheſi anguli acuti) manifeſtum fit, ex 13. hujus, controverſum Pronunciatum Euclidæum; prout a me hoc loco declaratum iri ſpopondi in Scholio III. poſt XXI. hujus, ubi de conatu Naſſaradini Arabis locuti ſumus.

COROLLARIUM II.

RUrſum ex hac Propoſitione, & ex præcedente XXIII. manifeſtè colligitur ſatis non eſſe ad ſtabiliendam Geometriam Euclidæam duo puncta ſequentia. Unum eſt: quòd nomine parallelarum illas rectas cenſeamus, quæ in eodem plano exiſtentes commune aliquod obtinent perpendiculum. Alterum verò, quòd omnes rectæ in eodem plano exiſtentes, quarum nullum commune ſit perpendiculum, ac propterea quæ juxta aſſumptam Definitionem parallelæ non ſint, debeant ipſæ in alterutram partem ſemper magis protractæ inter ſe aliquando incidere, ſi non ad

fini-

finitam, saltem ad infinitam distantiam. Nam rursum demonstrare oporteret, quòd duæ quælibet in eodem plano existentes, in quas recta quæpiam incidens duos ad easdem partes internos angulos efficiat minores duobus rectis, nusquam alibi possint ipsæ recipere commune perpendiculum. Quòd autem, hoc demonstrato, exactissimè stabiliatur Geometria Euclidæa, infrà constabit.

PROPOSITIO XXVI.

SI prædictæ AX, BX (*fig.* 31.) *coire quidem inter se debeant, sed non nisi ad infinitam earundem productionem versùs partes punctorum* X: *Dico nullum fore assignabile punctum* T *in ipsa* AB, *ex quo perpendicularis educta versùs partes ipsius* AX *non occurrat ad finitam, seu terminatam distantiam eidem* AX *in aliquo puncto* F.

Demonstratur. Nam (ex præcedente hypothesi) unum aliquod erit in ipsa *AX* punctum *N*, ex quo perpendicularis *Nk* demissa ad *BX* minor sit qualibet assignata longitudine, ut putà eâ *TB*. Tum verò sumatur in *TB* portio *CB* æqualis ipsi *Nk*, jungaturque *CN*. Constat angulum *NCB* acutum fore, in hypothesi anguli acuti. Ergo (ex 13. primi) obtusus erit, qui deinceps est angulus *NCT*. Igitur recta, quæ ex puncto *T* (inter puncta *A*, & *C* constituto) perpendiculariter educatur versùs partes ipsius *AX*, non incidet (ex 17. primi) in ullum punctum ipsius *CN*; ac propterea (ne claudat spatium cum *AT*, aut cum *TC*) occurret ipsi terminatæ *AN* in aliquo puncto *F*. Igitur in ipsa etiam hypothesi anguli acuti (quam scimus obesse unicè hic posse) nullum erit assignabile punctum *T* in ea *AB*, ex quo perpendiculariter educta versùs partes ipsius *AX* non occurrat ad finitam, seu terminatam distantiam eidem *AX* in quodam puncto *F*. Quod &c.

CO-

COROLLARIUM I.

INde autem fit, ut assumpto in AB protractâ quolibet puncto M, ex quo versùs partes punctorum X educatur perpendicularis MZ, nequeat ipsa, etiamsi infinitè producatur, occurrere prædictæ AX; quia cæterùm illa altera BX deberet (ex præmissa demonstratione) ad finitam distantiam occurrere eidem AX; quod est contra præsentem hypothesin.

COROLLARIUM II.

EX quo rursum consequitur omnem perpendiculariter eductam ex quolibet puncto illius quantumlibet continuatæ AB, sed non tamen infinitè dissito, debere ad finitam distantiam occurrere prædictæ AX; quatenus nempe supponatur omnem talem perpendiculariter eductam semper magis, sine ullo certo limite accedere ad alteram semper continuatam AX.

COROLLARIUM III.

UNde tandem fit, ut ab illa AX neque ad infinitam ejusdem productionem secari possit ipsa BX; quia cæterum ex quodam illius AX ultra prædictam sectionem puncto intelligi posset demissa ad AB productam quædam perpendicularis ZM; unde rursum fieret, ut ipsa BX (contra præsentem hypothesim) non ad infinitam, sed omnino ad finitam distantiam occurreret prædictæ AX. Sed hoc postremum dictum sit ultra necessitatem.

SI recta AX *(fig. 32.) ſub aliquo, ut libet, parvo angulo educta ex puncto* A *ipſius* AB, *occurrere tandem debeat (ſaltem ad infinitam diſtantiam) cuivis perpendiculari* BX, *quæ ad quantamlibet ab eo puncto* A *diſtantiam excitari intelligatur ſuper ea incidente* AB: *Dico nullum jam fore locum hypotheſi anguli acuti.*

Demonſtratur. Ex quodam puncto k prope punctum *A*, ad libitum in ipsa *AB* deſignato, erigatur ad *AB* perpendicularis k*L*, quæ utique (ex Cor. II. præcedentis Propoſitionis) occurret ipſi *AX* ad finitam, ſeu terminatam diſtantiam in aliquo puncto *L*. Jam verò conſtat ſumi poſſe in k*B* portiones k k æquales ſingulas cuidam aſſignabili longitudini *R*, & eas plures quolibet aſſignabili numero finito; quandoquidem punctum *B* ſtatui poteſt; juxta præſentem ſuppoſitionem; in quantalibet diſtantia ab eo puncto *A*. Itaque ex aliis punctis k erigantur ad *AB* perpendiculares k*H*, k*D*, k*P*, quæ omnes (ex præcitato Corollario) occurrent rectæ *AX* in quibuſdam punctis *H*, *D*, *P*; atque ita circa reliqua puncta k uniformiter deſignata versùs punctum *B*. Conſtat ſecundò (ex 16. primi) angulos ad puncta *L*, *H*, *D*, *P*, fore omnes obtuſos versùs partes punctorum *X*; atque item (ex 13. ejuſdem primi) angulos ad prædicta puncta fore omnes acutos versùs punctum *A*. Igitur (ex Cor. II. poſt 3. hujus) latus k*H* majus erit latere k*L*; latus k*D* majus latere k*H*; atque ita ſemper, procedendo versùs puncta *X*. Conſtat tertiò quatuor ſimul angulos quadrilateri k*LH*k majores fore quatuor ſimul angulis quadrilateri k*HD*k: nam id in ſimili demonſtratum jam eſt in XXIV. hujus. Conſtat quartò idem ſimiliter valere de quadrilatero k*HD*k relatè ad quadrilaterum *KDP*k; atque ita ſemper, procedendo ad qua-

drilatera remotiora ab eo puncto *A*.

Quoniam igitur tot aderunt (ut in XXV. hujus) prædicto modo recenſita quadrilatera, quot ſunt, præter primam *Lk*, demiſſæ ex punctis ipſius *AX* perpendiculares ad rectam *AB*; conſtabit uniformiter (ſi ponamus novem, præter primam, demiſſas ejuſmodi perpendiculares) ſummam omnium angulorum, qui comprehenduntur ab illis novem quadrilateris, excedere 35. rectos; ac propterea quatuor ſimul angulos primi quadrilateri *kLHk*, quod quidem in hac ratione oſtenſum eſt omnium maximum, minùs deficere à quatuor rectis, quàm ſit nona pars unius recti. Quare; multiplicatis ultra quemlibet aſſignabilem finitum numerum eiſdem quadrilateris, procedendo ſemper versùs partes punctorum *X*; conſtabit ſimiliter (ut in eadem præcitata) quatuor ſimul angulos ſtabilis illius quadrilateri *kHLk* minùs deficere à quatuor rectis, quàm ſit quælibet aſſignabilis unius recti portiuncula. Igitur quatuor ſimul illi anguli vel æquales erunt quatuor rectis, vel eiſdem majores. Tunc autem (ex XVI. hujus) ſtabilitur hypotheſis aut anguli recti, aut anguli obtuſi; ac propterea (ex V. & VI. hujus) deſtruitur hypotheſis anguli acuti.

Itaque conſtat nullum jam fore locum hypotheſi anguli acuti, ſi recta *AX* ſub aliquo, ut libet, parvo angulo, educta ex puncto *A* ipſius *AB* occurrere tandem debeat (ſaltem ad infinitam diſtantiam) cuivis perpendiculari *BX*, quæ ad quantamlibet ab eo puncto *A* diſtantiam excitari intelligatur ſuper eâ incidente *AB*. Quod erat &c.

SCHOLION I.

ET hoc eſt, quod prædixi in Cor. II. poſt XXV. hujus; nullum ſcilicet ſuperfuturum locum hypotheſi anguli

guli acuti, seu stabilitum exactissimè iri Geometriam Euclidæam ; si duæ quælibet in eodem plano existentes rectæ, ut putà *AX*, *BX*, in quas incidens recta *AB* (sumpto puncto *B* in quantalibet distantiâ a puncto *A*) duos cum eisdem ad easdem partes punctorum *X* angulos efficiat minores duobus rectis ; si (inquam) nusquam alibi (hoc stante) possint illæ recipere commune perpendiculum. Tunc enim illæ duæ *AX*, *BX* semper magis ad se invicem accedent ; nimirum vel intra quendam determinatum limitem, prout in XXV. hujus; vel sine ullo certo limite, ac propterea usque ad occursum saltem post infinitam productionem, prout in hac XXVII. Constat autem in utroque prædictorum casuum ostensam jam esse destructionem hypothesis anguli acuti. Quod intendebatur.

SCHOLION II.

ATque id rursum est, quod spopondi in fine Scholii IV. post XXI. hujus, prout ex ipsis terminis clarè eluceſcit.

SCHOLION III.

PRæterea observari hic velim discrimen inter hanc Propos. & præcedentem XVII. Nam ibi (recole fig. 15.) ostensa est destructio hypothesis anguli acuti, si (existente, ut libet parvâ, rectâ *AB*) omnis *BD* sub quovis acuto angulo educta, occurrere tandem debeat in quodam puncto *K* ipsi perpendiculari *AH* productæ. Hic autem (viceversâ) permittitur quidem designatio cujusvis parvissimi acuti anguli ad punctum *A*, dum tamen interjecta *AB*, ad quam erigenda est perpendicularis indefinita Tab. II.

BX, ſtatui poſſit quantælibet longitudinis.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duæ rectæ AX, BX (*quarum prior ſub angulo acuto, & altera ad perpendiculum eductæ ſint versùs eaſdem partes ex quantalibet recta* AB) *ſemper magis ſine ullo certo limite ad ſe invicem accedant, præterquam ad infinitam earundem productionem; Dico omnes angulos* (*fig.* 33.) *ad quælibet puncta* L, H, D *ipſius* AX, *ex quibus demittantur ad rectam* BX *perpendiculares* LK, H*K*, D*K*; *tum fore omnes obtuſos versùs partes puncti* A; *tum fore ſemper minores, qui magis diſtant ab eo puncto* A; *ac tandem angulos magis, ac magis diſtantes ab eodem puncto* A, *ſemper magis ſine ullo certo limite accedere ad æqualitatem cum angulo recto.*

Tab. IV.

Demonſtratur. Et prima quidem pars conſtat ex Cor. I. poſt XXIII hujus. Secunda verò pars ita evincitur. Nam duo ſimul anguli ad *LK* versùs baſim *AB* majores ſunt (ex Cor. poſt XVI. hujus) duobus ſimul internis, & oppoſitis angulis ad *HK* versùs eandem baſim *AB*. Sunt autem inter ſe æquales, utpote recti, anguli ad utrumque punctum *K* versùs baſim *AB*. Ergo angulus obtuſus ad *L* versùs baſim *AB* major eſt angulo obtuſo ad *H* versùs eandem baſim *AB*. Simili modo oſtendetur prædictum angulum obtuſum ad *H* majorem eſſe angulo obtuſo ad punctum *D*. Atque ita ſemper, procedendo versùs puncta *X*.

Tertia tandem pars majore indiget diſquiſitione. Si ergo fieri poteſt, aſſignatus ſit (fig. 34.) quidam angulus *MNC*, quo ſemper major ſit, aut ſaltem non minor, exceſſus cujuſvis ex prædictis angulis obtuſis ſupra angulum rectum. Conſtat (ex XXI. hujus) latera *NM*, *NC* comprehendentia illum angulum *MNC* taliter produci poſſe, ut perpendicularis *MC*, ex quodam puncto *M* ipſius *MN* de-

demissa ad *NC*, major fit (in ipsa etiam hypothesi anguli acuti) qualibet finitâ assignatâ longitudine, ut putà prædicta basi *AB*. Hoc stante : assumatur in *BX* (fig. 35.) quædam *BT* æqualis ipsi *CN*; educaturque ex puncto *T* versùs *AX* perpendicularis *TS*, quæ nempe (ex Scholio post XXIV. hujus) occurret ipsi *AX* in quodam puncto *S*. Deinde ex puncto *S* demittatur ad *AB* perpendicularis *SQ*. Cadet hæc (propter 17. primi) ad partes anguli acuti *SAB* inter puncta *A*, & *B*. Porrò acutus erit angulus *QST* in quadrilatero *QSTB*, cum reliqui tres anguli sint recti; ne (contra V. & VI. hujus) incidamus in hypothesin aut anguli recti, aut anguli obtusi. Hinc recta *SQ* major erit (ex Cor. 1. post 3. hujus) rectâ *BT*, sive *CN*; ac rursum angulus *ASQ* major erit excessu, quo angulus obtusus *AST* excedit angulum rectum, & sic major angulo *MNC*. Ducatur igitur quædam *SF* secans *AQ* in F, & efficiens cum *SA* angulum æqualem ipsi *MNC*. Deinde ex puncto *A* ducatur ad *SF* productam perpendicularis *AO*. Cadet punctum *O* (ex 17. primi) infra punctum *F*, cum angulus *AFS* (ex 16. ejusdem primi) sit obtusus. Tandem verò; cum *FS* major sit (ex 18. primi) ipsâ *QS*, & sic multò major ipsâ *BT*, sive *CN*; sumatur in *FS* portio *IS* æqualis ipsi *CN*, & ex puncto *I* erigatur ad *FS* perpendicularis *IR* occurrens in puncto *R* ipsi *AS*. Cadet autem punctum *R* inter puncta *A*, & *S*: si enim caderet in aliquod punctum ipsius *AF*, haberemus in eodem triangulo (contra 17. primi) duos angulos majores duobus rectis, cum angulus ad punctum *F* versùs partes puncti *A* ostensus jam sit obtusus.

Post tantum apparatum sic concludo. Quandoquidem in quadrilatero *AOIR* recti sunt anguli ad puncta *O*, & *I*; & est acutus angulus (ex 17. primi) ad punctum *A*, propter rectum angulum *AOS*; ac rursum est obtusus (ex 16.

ejus-

ejuſdem primi) angulus *IRA*, cum rectus ſit angulus *RIS*: conſequens tandem eſt (ex Cor. II. poſt 3 hujus) ut latus *AO* majus ſit latere *IR*. At (juncta *OQ*) latus *AQ* majus eſt (ex 18. primi) latere *AO* propter angulum obtuſum in *O*, cum angulus *AOS* factus ſit rectus. Igitur recta *AQ* multò major erit rectâ *IR*, ſive (ex 26. primi) rectâ *NC*, & ſic multò major rectâ *AB*, pars toto; quod eſt abſurdum.

Non igitur ullus aſſignari poteſt angulus *MNC*, quo ſemper major ſit, aut ſaltem non minor exceſſus cujuſvis ex prædictis angulis obtuſis ſupra angulum rectum. Quare anguli illi obtuſi, magis ac magis diſtantes ab eo puncto *A*, ſemper magis ſine ullo certo limite accedent ad æqualitatem cum angulo recto. Quod erat poſtremo loco demonſtrandum.

COROLLARIUM.

HOc autem ſtante, quod poſtremo loco demonſtratum eſt, manifeſtè conſequitur, duas illas *AX*, *BX*, in infinitum protractas, commune tandem habituras, vel in duobus diſtinctis punctis, vel in uno, eodemque puncto *X* infinitè diſſito, perpendiculum. Rurſum verò, quòd non in duobus diſtinctis punctis haberi poſſit commune iſtud perpendiculum, ex eo manifeſtè liquet; quia cæterum (ex Cor. II. poſt XXIII. hujus) inciperent inde illæ rectæ invicem diſſilire, & ſic neque ad infinitam diſtantiam inter ſe concurrerent; quin etiam (contra expreſſam ſuppoſitionem) non ad ſe invicem, ſine ullo certo limite, ſemper magis versùs eas partes accederent. Itaque in uno, eodemque puncto *X* infinitè diſſito commune haberent perpendiculum.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Resumptâ fig. (33.) *præcedentis Propositionis: Dico omnem rectam* AC, *quæ secet angulum* BAX, *aliquando ad finitam, seu terminatam distantiam* (*etiam in hypothesi anguli acuti*) *occursuram ipsi* BX *in quodam puncto* P, *dum nempe illa* AC *semper magis protrahatur versùs partes punctorum* X.

Demonstratur. Et primò quidem (ne recta *AC* spatium claudat cum ea *AX*) occurret ipsa ad finitam distantiam rectis *LK*, *HK*, *DK* in quibusdam punctis *C*, *N*, *M*; occurret, inquam, nisi antea (ad finitam utique distantiam, prout intendimus) occurrat ipsi *BX* in aliquo puncto inter punctum *B*, & unum aliquod punctorum *K* constituto. Deinde (ex Cor. I. post XXIII. hujus) obtusi erunt anguli *ACK*, *ANK*, *AMK*. Præterea anguli isti, semper obtusi, accedent (ex præcedente) sine ullo certo limite ad æqualitatem cum angulo recto, quoties nempe illa *AC* non nisi ad infinitam distantiam occursura putetur i. si *BX*. Igitur deveniri posset ad talem ordinatam *KMD*, ad quam angulus *AMK* minùs superaret angulum rectum, quàm sit ille angulus *DAC*. Tunc autem angulus *DAC*, sive *DAM*, unà cum angulo *AMD* major erit uno recto. Quare; addito obtuso angulo *ADM*; tres simul anguli trianguli *ADM* majores erunt duobus rectis, quod est contra hypothesin anguli acuti. Igitur omnis recta *AC*, quæ secet illum angulum *BAX*, aliquando ad finitam, seu terminatam distantiam (etiam in hypothesi anguli acuti) occurret ipsi *BX* in quodam puncto *P*. Quod &c.

CO-

COROLLARIUM I.

HInc nulla *AZ*, quæ versùs partes punctorum *X* angulum acutum efficiat majorem illo *BAX*, occurrere unquam poterit, sive ad finitam, sive ad infinitam distantiam ipsi *BX*. Quatenus enim ita contingeret, jam illa *AX*, dividens angulum *BAZ*, deberet (contra præmissam suppositionem) ad finitam distantiam occurrere ipsi *BX*; prout demonstratum id est de recta *AC* dividente angulum *BAX*.

COROLLARIUM II.

PRæterea sequitur nullum fore determinatum acutum angulum omnium maximum, sub quo educta ex puncto *A* ad finitam distantiam occurrat illi *BX*. Si enim versùs partes puncti *X* punctum quodvis assumas, quod sit altius puncto *P*, constat rectam jungentem punctum *A* cum illo puncto altiore majorem angulum effecturam cum ipsa *AB*, quàm sit angulus *BAP*. Atque ita semper sine ullo termino intrinseco. Quare angulus *BAX* (dum scilicet ipsa *AX*, & semper accedat ad eam *BX*, & non nisi ad infinitam distantiam in eandem incidat) erit limes extrinsecus acutorum omnium angulorum, sub quibus rectæ eductæ ex illo puncto *A* ad finitam distantiam occurrunt prædictæ *BX*.

PROPOSITIO XXX.

CUivis terminatæ AB *insistat ad perpendiculum* (*fig.* 36.) *quædam indefinita* BX. *Dico primò rectam* AY, *perpendiculariter elevatam versùs partes easdem super illâ* AB, *fore limitem unum intrinsecum earum omnium, quæ ex illo puncto* A *ver-*

A *versùs eaſdem partes eductæ commune aliquod (juxta hypotheſin anguli acuti) in duobus diſtinctis punctis obtinent perpendiculum cum alterâ indefinitâ* BX. *Dico ſecundò nullum fore acutum angulum omnium minimum, ſub quo educta ex prædicto puncto A commune aliquod (juxta prædictam hypotheſin) in duobus diſtinctis punctis obtineat perpendiculum cum eadem* BX.

Demonſtratur prima pars. Quoniam enim illa *AY* commune obtinet cum altera *BX* perpendiculum *AB* in duobus diſtinctis punctis *A*, & *B*; ſi educatur versùs eaſdem partes ſub angulo obtuſo quæpiam *AZ*, conſtat nullum ad eas partes eſſe poſſe in duobus diſtinctis punctis commune perpendiculum ipſarum *AZ*, *BX*; ne ſcilicet ex conſecuturo quadrilatero continente quatuor angulos majores quatuor rectis incidamus (ex XVI. hujus) in hypotheſin jam reprobatam anguli obtuſi, contra ſuppoſitam hoc loco hypotheſin anguli acuti. Igitur illa perpendicularis *AY* erit ex iſta parte limes intrinſecus earum omnium, quæ ex illo puncto *A* versùs eaſdem partes eductæ commune aliquod (juxta illam hypotheſin anguli acuti) in duobus diſtinctis punctis obtineant perpendiculum cum alterâ indefinitâ *BX*. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. Si enim fieri poteſt; eſto quidam angulus acutus omnium minimus, ſub quo educta *AN* commune habeat cum illa *BX* in duobus diſtinctis punctis perpendiculum *ND*. Tum aſſumpto in *BX* altiore puncto k, ex eo educatur ad *BX* perpendicularis *KL*, ad quam ex puncto *A* demittatur (juxta 12. primi) perpendicularis *AL*. Jam verò, ſi hæc *AL* occurrat in quodam puncto *S* ipſi *ND*, conſtat ſanè angulum *BAL* minorem fore eo *BAN*, qui propterea non erit omnium minimus, ſub quo educta *AN* commune habeat cum illa *BX* in duobus diſtinctis punctis perpendiculum *ND*.

Porrò autem ab ea perpendiculari *AL* ſecari prædictam *ND* in quodam ejus intermedio puncto *S* ſic demonſtratur.

Et primò quidem non poſſe ab ea *AL* ſecari ipſam *BK* in quodam puncto *M* conſtare abſolutè poteſt ex 17. primi, ne ſcilicet in eodem triangulo *MKL* duos habeamus angulos rectos in punctis *K*, & *L*; præterquam quòd in hoc ipſo haberemus intentum contra illum angulum *BAN*, ne ſcilicet in hac tali ratione cenſeatur omnium minimus. Rurſum verò nequit *AL* eſſe continuatio ipſius *AN*; quia cæterum in quadrilatero *NDKL* quatuor haberemus angulos rectos, contra hypotheſim anguli acuti. Sed neque eam *DN* protractam ſecare poteſt in quovis ulteriore puncto *H*; quia angulus *AHN* (ex 16. primi) foret acutus, propter ſuppoſitum rectum angulum externum *AND*; ac propterea angulus *DHL* foret obtuſus, & ſic in quadrilatero *DHLK* quatuor haberemus angulos, qui ſimul ſumpti majores forent quatuor rectis, contra prædictam hypotheſin anguli acuti. Igitur conſtat ab ea *AL* ſecari debere angulum *BAN*, qui propterea nequit dici omnium minimus, ſub quo educta *AN* commune habeat cum illa *BX* in duobus diſtinctis punctis perpendiculum *ND*. Quod erat ſecundo loco demonſtrandum. Itaque conſtat &c.

COROLLARIUM.

INde autem obſervare licet, quòd ſub angulo minore *BAL* obtinetur (in hypotheſi anguli acuti) commune *LK* perpendiculum, remotius quidem ab illa baſi *AB*, prout conſtat ex ipſa conſtructione, ſed rurſum minus altero viciniore communi perpendiculo *ND*, quod obtinetur ſub angulo majore *BAN*. Ratio hujus poſterioris eſt,

quia

quia in quadrilatero *LKDS* angulus ad punctum *S* acutus est in prædicta hypothesi, cum reliqui tres supponantur recti. Quare (ex Cor. I. post 3. hujus) latus *LK* minus erit contrapositio latere *SD*, & sic multò minus latere *ND*.

PROPOSITIO XXXI.

JAm dico nullum fore prædictorum in duobus distinctis punctis communium perpendiculorum limitem determinatum, quo minùs sub minore, ac minore acuto angulo, ad illud punctum A *constituto, deveniri semper possit (juxta hypothesin anguli acuti) ad tale commune in duobus distinctis punctis perpendiculum, quod sit minus qualibet assignatâ longitudine* R.

Demonstratur. Quatenus enim aliter res se habeat; si ex puncto *K* (recole fig. 30.) in quantalibet à puncto *B* distantiâ in ea *BX* assignato, educatur perpendicularis *KL*, ad quam ex puncto *A* (juxta 12. primi) demissa intelligatur perpendicularis *AL*, deberet ipsa *KL* major esse eâ longitudine *R*. Ratio autem est; quia assumpto in eadem *BX* altiore puncto *Q*, ex quo educatur ad ipsam *BX* perpendicularis *QF*, ad quam (juxta eandem 12. primi) demittatur perpendicularis *AF*, deberet hæc rursum saltem non esse minor eâ longitudine *R*. Erit autem *KL* (ex Cor. præced. Prop.) major ipsâ *QF*. Igitur ea *KL* major foret prædictâ longitudine *R*. Atque ita semper altiùs procedendo. Tab. III.

Jam verò: si illa quantacunque *KB* divisa intelligatur (prout in XXV. hujus) in portiones *KK*, æquales illi longitudini *R*, educanturque ex illis punctis *K* perpendiculares, quæ occurrant ipsi *AX* in punctis *H, D, M*; non erunt anguli ad hæc puncta, versùs partes puncti *L*, aut recti, aut obtusi; ne in aliquo quadrilatero, ut putà *K M*-

LK quatuor ſimul anguli æquales ſint, aut majores quatuor rectis, contra hypoteſim anguli acuti, juxta quam procedimus. Omnes igitur hujuſmodi anguli acuti erunt versùs partes puncti *L*; ac propterea omnes itidem ad illa puncta obtuſi verſus partes puncti *A*. Quare (ex Cor. 1. poſt 3. hujus) prædictarum perpendicularium minima quidem erit *KL* remotior à baſi *AB*, maxima *KM* propinquior eidem baſi; reliquarum verò propinquior remotiore ſemper major erit. Igitur (ex meâ præced. 24. ejuſque Coroll.) quatuor ſimul anguli quadrilateri *KHLK* remotioris à baſi *AB* majores erunt quatuor ſimul angulis reliquorum omnium quadrilaterorum eidem baſi proximiorum. Quare (prout in XXV. hujus) deſtructa maneret hypotheſis anguli acuti.

Itaq; conſtat nullum fore prædictorum in duobus diſtinctis punctis communium perpendiculorum limitem determinatum, quo minùs ſub minore, ac minore acuto angulo, ad illud punctum *A* conſtituto, deveniri ſemper poſſit (juxta hypotheſin anguli acuti) ad tale commune in duobus diſtinctis punctis perpendiculum, quod ſit minus qualibet aſſignatâ longitudine *R*. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXII.

JAm dico unum aliquem fore (in hypotheſi anguli acuti) determinatum acutum angulum BAX, *ſub quo educta* AX (*fig.* 33.) *non niſi ad infinitam diſtantiam incidat in eam* BX, *ac propterea ſit ipſa limes partim intrinſecus, partim extrinſecus; tum earum omnium, quæ ſub minoribus acutis angulis ad finitam diſtantiam incidunt in prædictam* BX; *tum etiam aliarum, quæ ſub majoribus angulis acutis, uſque ad angulum rectum incluſivè, commune obtinent in duobus diſtinctis punctis perpendiculum cum eadem* BX.

Tab. IV.

De-

Demonſtratur. Nam primò conſtat (ex Cor. II. poſt XXIX. hujus) nullum fore determinatum acutum angulum, omnium maximum, ſub quo educta ex illo puncto *A* ad finitam diſtantiam occurrat prædictæ *BX*. Secundò conſtat nullum itidem eſſe (in hypotheſi anguli acuti) acutum angulum omnium minimum, ſub quo educta commune habeat in duobus diſtinctis punctis perpendiculum cum illa *BX*; quandoquidem (ex præcedente) nullus eſſe poteſt limes determinatus, quo minùs ſub minore acuto angulo ad illud punctum *A* conſtituto deveniri poſſit ad tale commune in duobus diſtinctis punctis perpendiculum, quod ſit minus qualibet aſſignabili longitudine *R*.

Atque hinc tertiò conſequitur unum aliquem (in ea hypotheſi) eſſe debere determinatum acutum angulum *BAX*, ſub quo educta *AX* ita ſemper magis accedat ad eam *BX*, ut non niſi ad infinitam diſtantiam in eandem incidat.

Porrò autem hanc ipſam *AX* fore limitem partim intrinſecum, partim extrinſecum utriuſque prædictarum rectarum claſſis, ſic demonſtratur. Nam primò conveniet cum illis rectis, quæ ad finitam diſtantiam occurrunt ipſi *BX*, cum ipſa etiam aliquando conveniat; diſcrepabit autem, quia ipſa non niſi ad infinitam diſtantiam. Secundò autem conveniet etiam, & ſimul diſcrepabit ab illis rectis, quæ commune obtinent in duobus diſtinctis punctis perpendiculum cum illâ *BX*; quia ipſa etiam commune obtinet perpendiculum cum eadem *BX*; ſed in uno eodemque puncto *X* infinitè diſſito. Hoc autem poſtremum cenſeri debet demonſtratum in XXVIII. hujus, prout moneo in ejuſdem Corollario.

Itaque conſtat unum aliquem fore (in hypotheſi anguli acuti) determinatum acutum angulum *BAX*, ſub quo educta *AX* non niſi ad infinitam diſtantiam incidat in

eam

eam BX, ac propterea sit ipsa limes partim intrinsecus, partim extrinsecus; tum earum omnium, quæ sub minoribus acutis angulis ad finitam distantiam incidunt in prædictam BX; tum etiam aliarum, quæ sub majoribus angulis acutis, usque ad angulum rectum inclusivè, commune obtinent in duobus distinctis punctis perpendiculum cum eadem BX. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXIII.

Hypothesis anguli acuti est absolutè falsa; quia repugnans naturæ lineæ rectæ.

Demonstratur. Ex præmissis Theorematis constare potest eò tandem perducere Geometriæ Euclideæ inimicam hypothesin anguli acuti, ut agnoscere debeamus duas in eodem plano existentes rectas AX, BX, quæ in infinitum protractæ versùs eas partes punctorum X in unam tandem eandemque rectam lineam coire debeant, nimirum recipiendo, in uno eodemque infinitè dissito puncto X, commune in eodem cum ipsis plano perpendiculum. Quoniam verò de primis ipsis principiis agendum mihi hìc est, diligenter curabo, ut nihil omittam quasi nimis scrupulosè objectum, quod quidem exactissimæ demonstrationi opportunum esse cognoscam.

LEMMA I.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Definit Euclides lineam rectam, quæ *ex æquo sua interjacet puncta*. Esto igitur (fig. 37.) linea quædam AX, quæ ex puncto A per sua quælibet intermedia puncta continuativè excurrat usque ad punctum X. Non dicetur

cetur hæc linea recta, si talis ipsa fuerit, ut circa duo illa immota extrema sua puncta possit ipsa in alteram partem converti, ut putà a læva parte in dexteram: Non dicetur, inquam, linea recta; quia non jacebit ex æquo inter sua designata extrema puncta; quandoquidem vel in lævam partem declinabit, ubi ex puncto *A* excurrit ad punctum *X* per quædam intermedia puncta *B*; vel declinabit in dexteram, ubi ex eodem immoto puncto *A* excurrit ad idem immotum punctum *X* per quædam intermedia puncta *C*, quæ alia planè sunt a prædictis punctis *B*. Scilicet illa sola linea *AX* dici poterit recta, quæ excurrat ex puncto *A* ad punctum *X* per talia intermedia puncta *D*, quæ ipsa, prout sic invicem continuata, revolvi nequeant, circa illa immota extrema puncta *A*, & *X*, ad novum & novum occupandum situm.

In hac autem rectæ lineæ idea manifestè continetur proposita veritas, duas nempe rectas lineas spatium non comprehendere. Si enim duæ exhibeantur lineæ claudentes spatium, quarum nempe communia sint extrema duo puncta *A*, & *X*, facilè ostenditur vel neutram, vel unam tantùm illarum linearum esse rectam. Neutra erit recta, ut putà *ABBX*, & *ACCX*, si circa duo extrema immota puncta *A*, & *X*, ita revolvi posse intelligantur ipsæ *ABBX*, *ACCX*, ut reliqua ipsarum intermedia puncta ad novum, & novum occupandum locum pertranseant. Una tantùm erit recta, ut putà *ADDX*, si circa illa immota extrema puncta ita revolvi intelligantur ipsæ *ABBX*, *ACCX*, quæ hinc inde cum illa *ADDX* spatium claudunt, ut ipsarum quidem *ABBX*, *ACCX* puncta intermedia ad novum, & novum occupandum locum pertranseant, ipsius verò *ADDX* puncta omnia etiam intermedia in eodem loco persistant. Non igitur fieri potest, ut duæ juxta præmissam intelligentiam rectæ lineæ, spatium comprehendant. Quod erat propositum.

CO-

COROLLARIUM I.

HInc porrò ſequitur admitti oportere poſtulatum illud Euclidæum: quòd *à dato puncto ad quodlibet aſſignatum punctum rectam lineam ducere liceat*. Nam clarè intelligitur, duas ſemper ſine ullo certo limite duci poſſe lineas, prædictis punctis *A*, & *X* terminatas, quæ propiores invicem fiant, minuſque idcirco ſpatium comprehendant, dum ſcilicet una quidem ducatur ad lævam partem, & altera uniformis ad dexteram, ſive una ſurſum, & altera deorſum; duci, inquam, poſſe lineas ejuſmodi ſemper invicem ſine ullo certo limite propiores, quæ utique omnino uniformes inter ſe ſint, ſibique invicem idcirco ſuccedant, dum circa immota extrema puncta *A*, & *X*, revolvi ipſæ intelligantur. Inde autem clarè itidem intelligitur, ſequi tandem debere (in ſemper majore harum uniformium linearum, unius ad alteram acceſſu) coitionem in unam, eandemque lineam *ADX*, quæ circa immota extrema illa puncta revolvi nequeat ad occupandum novum locum. Et hæc erit linea recta poſtulata.

Ubi rurſum conſtat unicam eſſe, quæ à dato puncto ad quodlibet alterum aſſignatum punctum poteſt duci linea recta.

COROLLARIUM II.

PRæterea ſequitur uniformem eſſe debere intelligentiam alterius Euclideæ definitionis, in qua dicit planam ſuperficiem eſſe, *quæ ex æquo ſuas interjacet lineas*. Si enim ſuperficies clauſa prædictis lineis unâ *ABX* rectâ, & alterâ *ABBX* (ſive hæc ſit unica, aut multiplex linea curva, ſive ſit compoſita ex duabus, aut pluribus lineis rectis, ut putà *AB*, *BB*, *BX*) ſi, inquam, ſuperficies

ejuſ-

ejuſmodi revolvi intelligantur circa immotam rectam *ADX*, uſque dum ipſa linea *ABX* perveniat ad congruendum lineæ *ACX*, in parte adversâ locatæ, quæ utique ad omnimodam æqualitatem, & ſimilis omnino ſit ipſi *ABX*, & rurſum cum eadem rectâ *ABX* claudat (versùs eandem ſive ſupernam, ſive infernam partem) ſuperficiem omnino æqualem, & ſimilem antedictæ: alterutrum ſanè continget; vel ita ut una ſuperficies alteri adamuſſim congruat; vel ita ut intra duas illas ſuperficies claudatur ſpatium trinæ dimenſionis. Et primum quidem ſi contingat, dicetur ſuperficies plana; ſin verò contingat ſecundum, non dicetur ſuperficies plana; quia tunc aliæ intermediæ intelligi poterunt inter eaſdem extremas lineas interpoſitæ ſuperficies invicem æquales, ac ſimiles, quæ ſemper magis ad ſe invicem ſine ullo certo limite accedant, ac propterea uſque ad excludendum omne ſpatium intermedium. Tunc autem utraque illa ſuperficies dicetur plana, quia verè jacebit ex æquo inter ſuas extremas lineas, ſine ullo aſcenſu, aut deſcenſu in partes adverſas.

LEMMA II.

Duæ lineæ rectæ non poſſunt habere unum & idem ſegmentum commune.

DEmonſtratur. Si enim fieri poteſt; unum & idem ſegmentum *AX* commune ſit (fig. 38.) duabus rectis, per punctum *X* in eodem plano continuatis *AXB*, & *AXC*. Tum centro *X*, & intervallo *XB*, ſive *XC*, deſcribatur arcus *BMC*, ad cujus quodlibet punctum *M* jungatur ex puncto *X* recta *XM*.

Dico primò, lineam *AXM* fore & ipſam, in facta hy-

potheſi, lineam rectam, ex puncto *A* per punctum *X* continuatam. Si enim linea ejuſmodi recta non ſit, duci poterit (ex Cor. I. præcedentis Lemmatis) alia quædam linea *AM*, quæ ipſa ſit recta. Hæc autem vel ſecabit in aliquo puncto *K* alterutram ipſarum *XB*, *XC*; vel earundem alterutram, ut putà eam *XB* claudet intra ſpatium comprehenſum ipſis *AX*, *XM*, & *APLM*. At horum prius manifeſtè repugnat præcedenti Lemmati; quia ſic duæ ſuppoſitæ rectæ lineæ, una *AXK*, & altera *ATK*, ſpatium clauderent. Poſterius autem uniformis abſurdi ſtatim convincitur.

Nam conſtat rectam *XB*, ſi per *B* ulteriùs protrahatur, occurſuram tandem in aliquo puncto *L* ipſi *APLM*; unde rurſum duæ ſuppoſitæ rectæ, una *AXBL*, & altera *APL*, ſpatium claudent. Porrò uniforme ſequitur abſurdum, ſi fingamus, quòd recta *XB*, ulteriùs protracta per *B*, occurrat tandem in quovis alio puncto aut rectæ *XM*, aut rectæ *XA*.

Ex iſtis autem evidenter conſequitur lineam *AXM* fore ipſam, in facta hypotheſi, lineam rectam ex puncto *A* ad punctum *M* deductam. Quod erat propoſitum.

Dico ſecundò, eam ſuppoſitam rectam *AXB* (quatenus quidem intelligatur conſervare ſuam illam qualemcunque continuationem ex puncto *A* per *X* versùs *B*) non poſſe recipere duplicem aliam in eodem plano poſitionem, in quarum utrâque portio quidem *AX* in eodem ſitu perſiſtat, portio verò altera *XB* in una illarum duarum poſitionum congruat (exempli causâ) ipſi *XC*, & in alia poſitione congruat ipſi *XM*.

Scilicet non hìc renuo, quin portio *XB*, ſi intelligatur moveri in illo ſuo plano circa punctum *X*, adeò ut ſucceſſivè adamuſſim congruat (ex præcedente Lemmate) non modò ipſis *XM*, *XC*, verùm etiam adamuſſim con-

gruat

gruat infinitis aliis rectis, quæ ex puncto *X* duci possunt ad reliqua intermedia puncta arcus *BC*: Non, inquam, hìc renuo, quin illa *XB* in qualibet illarum positionum considerari debeat tanquam continuatio in rectum ipsius immotæ *AX*; cum magis circa eam *AXM* jam demonstraverim id secuturum in facta hypothesi illius communis segmenti: Unicè igitur hìc affero, in una tantùm novarum illarum positionum, ut putà dum congruit ipsi *XC*, retineri ab ea posse illam eandem qualemcunque continuationem, quam obtinet in prima positione, ubi ex puncto *A* per *X* procedit versùs punctum *B*.

Et istud quidem sic demonstratur. Nam primò constat continuationem illam *AXB* nequire esse omnino similem, aut æqualem continuationi *AXC*, si utraque considerètur versùs eandem seu lævam, seu dexteram partem; quia cæterùm in ea tali positione deberent invicem congruere ipsæ *AXB*, *AXC*; quod est contra hypothesim communis illius segmenti *AX*: Deberent, inquam, congruere; dum scilicet, relatè ad eam immotam *AX*, æquè similiter in eandem seu lævam, seu dexteram partem convergerent in eo tali plano illæ continuatæ *XB*, & *XC*. Secundò constat nihil vetare, quin prædicta continuatio *AXB*, considerata versùs unam partem, ut putà, ad lævam, similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXC*, consideratæ versùs partem adversam, ut putà, ad dexteram, adeò ut propterea, sine ulla immutatione in ipsa *AXB*, locari hæc possit ad congruendum in eodem plano alteri *AXC*. At manifestè repugnat, quòd rursum, sine ulla immutatione illius suæ continuationis, locari ea possit in eodem plano ad congruendum alteri *AXM*, quæ nimirum dividat in *X* illum qualemcunque angulum *BXC*. Quòd enim continuatio *AXB* alia planè sita continuatione *AXM*, si utraque considerètur versùs eandem seu læ-

vam, seu dexteram partem, ex eo manifestum esse debet; quia cæterùm (ut in simili observatum jam est) in ea tali positione deberent invicem congruere ipsæ *AXB*, *AXM*. Sed neque sustineri potest, quòd continuatio *AXB* versùs unam partem, ut putà ad lævam, similis planè sit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs partem adversam, ut putà ad dexteram; quia cæterùm continuatio *AXM* versùs dexteram similis planè foret, aut æqualis continuationi *AXC* versùs eandem dexteram partem, propter suppositam omnimodam similitudinem, aut æqualitatem inter modò dictam continuationem, & illam aliam *AXB* versùs lævam. Tunc autem in ea tali positione (ut est prædictum) deberent invicem congruere ipsæ *AXM*, *AXC*; quod est contra præsentem hypothesim.

Ex quibus omnibus infero: eam suppositam rectam *AXB* (quatenus quidem intelligatur conservare suam illam qualemcunque continuationem ex puncto *A* versùs *B*) recipere non posse duplicem aliam in eodem plano positionem, in quarum utrâque portio quidem *AX* in eodem situ persistat, portio verò altera *XB* in una illarum duarum positionum congruat (exempli causâ) ipsi *XC*, & in alia positione congruat ipsi *XM*. Quod erat propositum.

Dico tertiò: eandem suppositam rectam *AXB* non aliâ ratione conservare posse suam illam qualemcunque continuationem, dum ejusdem portio *XB* intelligitur transferri per nova, & nova loca usque ad congruendum in illo quodam plano ipsi *XC*, persistente interim in eodem suo loco portione *AX*; non posse, inquam, conservare suam illam qualemcunque continuationem, nisi quatenus portio ipsa *XB* intelligatur ascendere, aut descendere ad existendum cum illa immota *AX* in novis, & novis planis, usque dum redeat ad antiquum planum, congruens ibi prædictæ *XC*.

Id

Id enim cenſeri poteſt jam demonſtratum; quia ſcilicet nulla alia in eodem illo plano reperiri poteſt poſitio, juxta quam ipſa *AXB* (perſiſtente portione *AX* in ſuo eodem loco) conſervet ſuam illam qualemcunque continuationem, præterquam ubi deveniat ad congruendum prædictæ *AXC*.

Dico quartò: deſignari poſſe in eo arcu *BC* tale punctum *D*, ad quod ſi jungatur *XD*, jam ipſa *AXD* non modò recta linea ſit, ſed rurſum ita ſe habeat, ut continuatio *AXD*, conſiderata versùs lævam, æqualis planè ſit, aut ſimilis eidem continuationi conſideratæ versùs dexteram.

Demonſtratur. Et prior quidem pars (qualecunque ſit illud punctum *D* in arcu *BC* deſignatum) eo modo oſtenditur, quo ſupra uſi ſumus circa continuatam *AXM*. Poſterior verò pars ita evincitur. Nam hìc ſupponimus duas rectas *AXB*, *AXC*, ſub eodem communi ſegmento *AX*. Præterea ſupponimus continuationem *AXB* versùs lævam non eſſe omnino ſimilem, aut æqualem eidemmet continuationi versùs dexteram; quia ſtante omnimodà ejuſmodi ſimilitudine, aut æqualitate, facilè oſtenditur nulli alteri rectæ lineæ commune eſſe poſſe illud ſegmentum *AX*, prout nempe ſic demonſtrabimus de illa continuata *AXD*. Tandem conſequenter ſupponimus continuatam illam *AXB* ita locari poſſe in eodem plano, ut ſub eodem immoto ſegmento *AX* congruat cuidam alteri *AXC*, in qua nimirum continuatio ipſa *AXC* versùs dexteram ſimilis planè ſit, aut æqualis continuationi *AXB* versùs lævam, ac rurſum continuatio *AXC* versùs lævam ſimilis planè ſit, aut æqualis continuationi *AXB* versùs dexteram.

His ſtantibus: ſi ad quodvis punctum *M* ſumptum in eo arcu *BC* jungatur *XM*; vel continuatio *AXM* erit

ſibi

ſibi ipſi planè uniformis relatè ad lævam, ac dexteram partem ipſius *AX*; vel non. Si primum; demonſtrabo de iſta *AXM*, quod ſtatim demonſtraturus ſum de illa continuata *AXD*. Si ſecundum, ergo prædicta *AXM* ita rurſum locari poterit in eodem plano, ut ſub eodem immoto ſegmento *AX* congruat cuidam alteri *AXF*, in qua nimirum continuatio ipſa *AXF* versùs dexteram ſimilis planè ſit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs lævam, ac rurſum continuatio *AXF* versùs lævam ſimilis planè ſit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs dexteram. Porrò, cum punctum *M* ſupponi poſſit vicinius puncto *B*, quàm punctum *C*, non cadet punctum *F* in ipſum punctum *C*; quia ſic continuatio *AXM* versùs lævam ſimilis planè foret, aut æqualis continuationi *AXF*, ſive *AXC* versùs dexteram, ac propterea ſimilis planè, aut æqualis continuationi *AXB* versùs lævam, quod eſt abſurdum, cum illæ duæ *XM*, *XB* non ſibi invicem congruant in ſua tali poſitione. Sed neque etiam exiſtet punctum *F* ultra punctum *C* in eo arcu *BC* ulteriùs producto; quia ſic uniformi ratiocinio oſtendetur, contra hypotheſim, quòd etiam punctum *M* deberet exiſtere in eo arcu *CB* ulteriùs producto, adeo ut nimirum ipſa *XM* divideret versùs lævam eum qualemcunque angulum *AXB*, prout *XF* poneretur dividere versùs dexteram eum qualemcunque angulum *AXC*: Deberet, inquam, ſic exiſtere, ad eum utique finem, ut ea *AXM* ſub eodem immoto ſegmento *AX* locari rurſum poſſit in eodem plano ad congruendum illi alteri *AXF*, in qua nimirum continuatio ipſa *AXF* versùs dexteram ſimilis planè ſit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs lævam, ac rurſum continuatio *AXF* versùs lævam ſimilis planè ſit, aut æqualis continuationi *AXM* versùs dexteram.

Quoniam verò arcus *BC* major eſt ejuſdem portione

MF

MF, designarique uniformiter possunt in ea portione *MF* alia duo puncta cum minore, sine ullo certo termino, intercapedine; alterutrum sanè in hac prædictorum punctorum approximatione contingere debet. Unum est, si tandem incidatur in unum idemque intermedium punctum *D*, ad quod si jungatur *XD*, talis habeatur continuatio *AXD*, cui soli conveniat (factâ comparatione inter lævam, ac dexteram partem) esse sibi ipsi omnino similem, aut æqualem. Alterum est, si duo talia inveniantur distincta puncta *M*, & *F*, ad quæ junctæ *XM*, & *XF*, duas exhibeant continuationes, unam *AXM*, & alteram *AXF*, quarum utraque sit sibi ipsi, modo jam explicato, omnino similis, aut æqualis. Hoc autem secundum impossibile esse sic demonstro. Nam ex ipsis terminis constare potest, quòd recta linea, ex puncto *A* per *X* ulteriùs producta, unicam tantùm sortiri potest in eo tali plano positionem, dum scilicet quædam superaddita *XF* æquè omnino se habeat in lævam, & in dexteram partem præsuppositæ *AX*, seu non magis in lævam, quàm in dexteram ejusdem partem convergat. Non ergo alia erit continuatio *AXM*, quæ rursum æquè omnino se habeat in lævam, & in dexteram partem ejusdem *AX*. Scilicet constat subsistere simul non posse; & quòd continuatio *AXF* versùs dexteram similis planè sit, aut æqualis sibi ipsi consideratæ versùs lævam; & quòd alia quædam continuatio *AXM* versùs lævam (quæ, ex ipsa positione, minor sit continuatione *AXF* versùs eandem lævam) æqualis iterum sit eidem continuationi versùs dexteram, quæ certè, ex ipsa rursum positione, major est prædictâ continuatione *AXF* versùs eandem dexteram.

Non ergo in eo arcu *BC* duo talia inveniri possunt puncta *M*, & *F*, ad quæ junctæ *XM*, & *XF*, duas exhibeant continuationes, unam *AXM*, & alteram *AXF*, quarum

rum utraque sit sibi ipsi, modo jam explicato, omnino similis, aut æqualis. Unde tandem consequitur incidi aliquando debere in unum, idemque punctum *D*, ad quod juncta *XD* talem exhibeat continuationem *AXD*, cui soli conveniat (factâ comparatione inter lævam, ac dexteram partem) esse sibi ipsi omnino similem, aut æqualem. Quod erat hoc loco demonstrandum.

Dico tandem quintò: eam solam *AXD* fore lineam *rectam*, nimirum ex *A* per *X directè* continuatam in *D*. Quamvis enim ly *ex æquo*, in definitione lineæ rectæ, applicari primitùs debeat punctis intermediis relatè ad puncta ipsius extrema; unde utique jam elicuimus, *duas lineas rectas non claudere spatium*; intelligi tamen etiam debet de ejusdem rectæ lineæ continuatione *in directum*. Itaque ea sola *XD* (in eodem cum *AX* plano existens) dicetur esse continuatio *recta*, sive *in rectum* prædictæ *AX*, quando ipsa neque in lævam, neque in dexteram illius partem convergat, sed utrinque *ex æquo* procedat; adeo ut nempe continuatio illa *AXD* versùs lævam similis planè sit, aut æqualis eidem continuationi consideratæ versùs dexteram. Inde enim fiet, ut illi soli *AXD* conveniat non posse ab ea suscipi in eo tali plano aliam positionem sub illa immota *AX*; cum certè (ex jam demonstratis) illæ aliæ *AXB*, & *AXM*, citra omnem suarum talium continuationum immutationem, suscipere possint sub eadem immota *AX* alias in eodem plano positiones, quales sunt ipsarum *AXC*, & *AXF*. Igitur illa sola *AXD*, cujus nempe continuatio *XD* tum in eodem cum ipsa *AX* plano existat, tum etiam æquè omnino se habeat in lævam, ac dexteram partem prædictæ *AX*, erit linea *recta* juxta explicatam definitionem, seu continuatio *in rectum* ejusdem præsuppositæ rectæ *AX*.

Ex quibus omnibus tandem constat evenire non posse, ut unum quodpiam sit commune segmentum duarum

recta-

rectarum. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

EX duobus præmissis Lemmatis tria opportunè subnotare licet. Unum est: duas rectas, neque sub infinitè parvâ inter ipsas distantiâ, claudere spatium posse. Ratio est, quia (prout in primo Lemmate) vel utraque illarum sub duobus illis communibus extremis punctis immotis revolvi posset ad novum situm occupandum, & sic (ex jam tradita lineæ rectæ definitione) neutra foret linea recta: vel una tantum in suo eodem situ persisteret, & sic illa sola recta linea foret. Quod autem nequeat utraque in eodem ipso situ persistere, dum aliquod concludant spatium, etiamsi infinitè parvum, manifestum fiet consideranti posse faciem illius plani, in quo illæ duæ consistunt, converti de superna in infernam, manentibus cæteroquin in suo eodem loco duobus illis extremis punctis.

Alterum est: neque item ullam lineam rectam, in quantalibet ejusdem productione in directum, diffindi posse in duas, quamvis sub infinitè parva intercapedine. Ratio est; quia (prout in præcedente Lemmate) continuatio in directum præsuppositæ cujusdam simplicis rectæ *AX* non alia esse intelligitur præter unam *XD*, quæ *ex æquo* utrinque procedat relatè ad lævam, ac dexteram partem prædictæ *AX*; ex quo utique fiat, ut sub ea immota *AX* non aliam ipsa immutata habere possit in eo plano positionem. Quòd autem in eodem plano alia quædam ad lævam decerni possit *XM*, infinitè parum dissiliens ab ipsa *XD*, nihil suffragatur. Nam rursum alia item ad dexteram designari poterit *XF*, quæ uniformiter infinitè parum dissiliat ab eadem *XD*. Quare (prout in præcitato Lemma-

te) illa ſola *AXD* erit linea recta a nobis definita.

Tertium tandem eſt: in hoc ipſo ſecundo Lemmate cenſeri poſſe immediatè demonſtratam 4. undecimi; quòd nempe ejuſdem rectæ nequeat pars una quidem in ſubjecto plano exiſtere, & altera in ſublimi.

LEMMA III.

Si duæ rectæ AB, CXD *ſibi invicem occurrant (fig. 39.) in aliquo ipſarum intermedio puncto* X, *non ibi ſe invicem contingent, ſed una alteram ibidem ſecabit.*

DEmonſtratur. Si enim fieri poteſt, tota *CXD* ad unam eandemque partem ipſius *AB* conſiſtat. Jungatur *AC*. Non erit porrò *AC* eadem cum ipsâ veluti continuatâ *AXC*; quia cæterùm (contra præcedens Lemma) duarum rectarum, unius *AXC*, & alterius præſuppoſitæ *DXC*, unum idemque foret commune ſegmentum *XC*. Itaque jungatur *BC*. Non erit rurſum hæc *BC* continuatio ipſius *BA* uſque in punctum *C*; ne duæ rectæ, una *XAC*, portio ipſius *BAC*, & altera *XC* ſpatium claudant, contra præmiſſum Lemma primum. Igitur ea *BC* vel ſecabit in aliquo puncto *L* ipſam *XD*, ſive præſuppoſitam rectam *DXC*; & tunc rurſum duæ rectæ lineæ, una *LC* portio ipſius *BC*, & altera *LXC* portio prædictæ *DXC*, ſpatium claudent; vel alterutrum extremum punctum ſive *A* ipſius *BA*, ſive *D* ipſius *CXD*, claudetur intra ſpatium comprehenſum ipſis *CX*, *XB*, & alterutrâ vel *BFC*, vel *BHC*. At in utroque caſu idem abſurdum conſequitur: Sive enim *BA* protracta per *A* occurrat ipſi *BFC* in aliquo puncto *F*; ſive *CXD* protracta per *D* occurrat ipſi *BHC* in aliquo puncto *H*: in idem ſemper abſurdum incidimus, quòd duæ rectæ ſpatium claudant; nimirum aut

Tab. IV.

recta

recta *BF* portio ipsius *BFC* unà cum altera *BAF*; aut recta *HC*, portio ipsius *BHC*, unà cum altera præsupposita recta continuata *CXDH*.

Porrò idem, aut majus absurdum consequitur, si illa *BA* protracta per *A* occurrat in aliquo puncto vel ipsi *CX*, vel sibi ipsi in aliquo puncto suæ portionis *XB*. Atque id similiter valet, si altera *CXD* protracta per *D* occurrat in aliquo puncto vel ipsi *XB*, vel sibi ipsi in aliquo puncto suæ portionis *CX*.

Itaque constat, quòd duæ rectæ *AB*, *CXD* sibi invicem occurrentes in aliquo ipsarum intermedio puncto *X*, non ibi se invicem contingent, sed una alteram ibidem secabit. Quod erat &c.

LEMMA IV.

Omnis diameter dividit bifariam suum circulum, ejusque circumferentiam.

DEmonstratur. Esto circulus (recole fig 23.) *MDHNKM*, cujus centrum *A*, & diameter *MN*. Intelligatur illius circuli portio *MNKM* ita revolvi circa immota puncta *M*, & *N*, ut tandem accommodetur, seu coaptetur reliquæ portioni *MNHDM*. Constat primò totam diametrum *MAN* quoad omnia ipsius puncta in eodem situ esse mansuram: ne duæ rectæ lineæ (contra præcedens Lemma primum) spatium claudant. Constat secundò nullum punctum *K* circumferentiæ *NKM* casurum vel intra, vel extra superficiem clausam diametro *MAN*, & alterâ circumferentiâ *NHDM*; ne scilicet contra naturam circuli, unus radius v.g. *AK* minor sit, aut major altero ejusdem circuli radio v.g. *AH*. Constat tertiò quemlibet radium *MA* continuari unicè posse in rectum per Tab. II.

alterum quendam radium *AN*, ne (contra præcedens Lemma ſecundum) duæ ſuppoſitæ rectæ lineæ, ut putà *MAN*, *MAH*, unum idemque commune habeant ſegmentum *MA*. Conſtat quartò (ex proximè antecedente Lemmate) omnes cujuſvis circuli diametros ſe invicem in centro ſecare, & ex notâ naturâ circuli bifariam.

Ex quibus omnibus conſtare poteſt, quòd diameter *MAN* tum dividit exactiſſimè ſuum circulum, ejuſque circumferentiam in duas æquales partes, tum etiam aſſumi univerſim poteſt pro qualibet ejuſdem circuli diametro. Quod erat &c.

SCHOLION.

HAnc eandem veritatem demonſtratam leges apud Clavium a Thalete Mileſio, ſed fortaſſe non exhauſtâ omni qualibet objectione.

LEMMA V.

Inter angulos rectilineos omnes anguli recti ſunt invicem exactiſſimè æquales, ſine ullo defectu etiam infinitè parvo.

DEmonſtratur. Angulum inter rectilineos rectum definit Euclides: *qui eſt æqualis ſuo deinceps*. Non hunc poſtulat ipſe ſibi concedi, ſed problematicè demonſtrat in ſua Prop. XI. Libri primi. Ibi enim ex dato in recta *BC* quolibet puncto *A* (fig. 40.) docet excitare perpendicularem *AD*, ad quam anguli *DAB*, *DAC* ſint invicem æquales. Porrò illos duos angulos eſſe invicem exactiſſimè æquales, ſine ullo defectu etiam infinitè parvo, conſtare poteſt ex Corollario poſt duo priora præmiſſa Lemmata;

Tab. IV.

ſi

ſi nempe ipſæ *AB*, *AC* deſignatæ ſint exactiſſimæ æquales.

Sed aliqua oriri poteſt dubitatio, ſi duo alii ad quandam alteram *FM* recti anguli *LHF*, *LHM* (fig. 41.) conferantur cum prædictis rectis angulis *DAB*, *DAC*. Itaque *HL* æqualis ſit ipſi *AD*, ac rurſum poſterior integra Figura ita intelligatur ſuperponi priori, ut punctum *H* cadat ſuper punctum *A*, & punctum *L* ſuper punctum *D*. Jam ſic progredior. Et primò quidem (ex præcedente Lemmate) ipſa *FHM* non præcisè continget alteram *BC* in eo puncto *A*. Ergo vel adamuſſim procurret ſuper illa *BC*, vel eandem ita ſecabit, ut unum ejus punctum extremum v. g. *F* cadat ſuprà, & alterum *M* deorſum. Si primum: jam clarè habemus exactiſſimam inter omnes rectilineos angulos rectos æqualitatem intentam. At non ſecundum; quia ſic angulus *LHF*, hoc eſt *DAF*, minor foret angulo *DAB*, ejuſque ſuppoſito exactiſſimè æquali *DAC*, & ſic multò minor angulo *DAM*, ſive *LHM*; contra hypotheſin. Deinde verò nihil ſuffragatur, quòd angulus *DAF* infinitè parùm deficiat ab angulo *DAB*, ſive ejus exactiſſimè æquali *DAC*, qui rurſum ſolùm infinitè parum ſuperetur ab angulo *DAM*. Nam ſemper angulus *DAF*, ſive *LHF*, non erit exactiſſimè æqualis angulo *DAM*, ſive *LHM*, contra hypotheſin.

Itaque conſtat omnes rectilineos angulos rectos eſſe invicem exactiſſimè æquales, ſine ullo defectu etiam infinitè parvo. Quod &c.

COROLLARIUM.

INde autem fit, ut quæ ex uno dato cujuſvis rectæ lineæ puncto perpendiculariter in aliquo plano ad eandem educitur, ipſa ſit in eo tali plano unica exactiſſimè linea recta, nec potens diffindi in duas.

Poſt

Poſt quinque præmiſſa Lemmata, eorumque Corollaria, progredi jam debeo ad demonſtrandum principale aſſumptum contra hypotheſin anguli acuti.

UBi ſtatuere poſſum, tanquam per ſe notum, non minùs repugnare, quòd duæ rectæ lineæ (ſive ad finitam, ſive ad infinitam earundem productionem) in unam tandem, eandemque rectam lineam coeant; quàm quòd una eademque linea recta (ſive ad finitam, ſive ad infinitam ejuſdem continuationem) in duas rectas lineas diffindatur, contra præcedens Lemma ſecundum, ejuſque Corollarium. Quoniam ergo naturæ lineæ rectæ (ex præcedente Corol. proximi Lemmatis) oppoſitum itidem eſt, quòd duæ rectæ lineæ ad unum, idemque punctum cujuſdam tertiæ rectæ, perpendiculares ipſi ſint in eodem communi plano; agnoſcere oportet tanquam abſolutè falſam, quia repugnantem naturæ prædictæ, hypotheſin anguli acuti, juxta quam duæ illæ *AX*, *BX* (fig. 33.) in uno eodemque communi puncto *X* perpendiculares eſſe deberent cuidam tertiæ rectæ, quæ in eodem cum ipſis plano exiſteret. Hoc autem erat principale demonſtrandum.

SCHOLION.

ATque hìc ſubſiſtere tutus poſſem. Sed nullum non movere lapidem volo, ut inimicam anguli acuti hypotheſim, a primis uſque radicibus revulſam, ſibi ipſi repugnantem oſtendam. Iſte autem erit conſequentium hujus Libri Theorematum unicus ſcopus.

LIBRI PRIMI
PARS ALTERA.

In qua idem Pronunciatum Euclidæum contra hypotheſin anguli acuti redargutivè demonſtratur.

PROPOSITIO XXXIV.

In qua expenditur curva quædam enaſcens ex hypotheſi anguli acuti.

REcta *CD* jungat æqualia perpendicula *AC*, *BD* cuidam rectæ *AB* inſiſtentia. Tum diviſis bifariam in punctis *M*, & *H* (fig. 42.) ipſis *AB*, *CD*, jungatur *MH* (ex 2. hujus) utrique perpendicularis. Rurſum in hac hypotheſi ſupponuntur acuti anguli ad junctam *CD*. Quare in quadrilatero *AMHC* erit *MH* (ex Cor. I poſt 3. hujus) minor ipsâ *AC*. Hinc autem; ſi in *MH* protractâ ſumas *MK* æqualem ipſi *AC*; puncta *C*, *K*, *D* ſpectabunt ad curvam hìc expenſam. Deinde anguli ad junctam *CK* erunt & ipſi (ex 7. hujus) acuti. Igitur juncta *LX*, quæ bifariam, atque ideo (ex 2. hujus) ad angulos rectos dividat ipſas *AM*, *CK*, erit ſimiliter (ex Cor. I. poſt 2. hujus) minor eâdem *AC*. Quapropter; ſi in *LX* protractâ ſumas *LF* æqualem ipſi *AC*, aut *MK*; etiam punctum *F* ſpectabit ad eam curvam. Præterea jungens *CF*, & *FK* invenies ſimiliter duo alia puncta ad eandem curvam ſpectantia. Atque ita ſemper. Quod autem dico pro inveniendis punctis inter puncta *C*, & *K*, idem etiam uniformiter valet pro inveniendis punctis inter puncta *K*, & *D*, ſcilicet curva Tab. V.

va *CKD*, enaſcens ex hypotheſi anguli acuti, eſt linea jungens extremitates omnium æqualium perpendiculorum ſuper eâdem baſi verſus eandem partem erectorum, quæ utique venire poſſunt ſub nomine rectarum ordinatim applicatarum; eſt, inquam, linea ejuſmodi, quæ propter ipſam, ex qua naſcitur, hypotheſim anguli acuti, ſemper eſt cava versùs partes contrapoſitæ baſis *AB*. Quod quidem hoc loco declarandum, ac demonſtrandum a nobis erat.

PROPOSITIO XXXV.

Si ex quolibet puncto L *baſis* AB *ordinatim applicetur ad eam curvam* CKD *recta* LF: *Dico rectam* NFX *perpendicularem ipſi* LF *cadere totam ex utraque parte debere versùs partes convexas ejuſdem curvæ, atque ideo eam fore ejuſdem curvæ tangentem.*

Demonſtratur. Si enim fieri poteſt, cadat quoddam punctum *X* (fig. 43.) ipſius *NFX* intra cavitatem ejuſdem curvæ. Demittatur ex puncto *X* ad baſim *AB* perpendicularis *XP*, quæ protracta per *X* occurrat curvæ in quodam puncto *R*. Jam ſic. In quadrilatero *LFXP* non erit angulus in puncto *X* aut rectus, aut obtuſus: Cæterùm (ex 5. & 6. hujus) deſtrueretur præſens hypotheſis anguli acuti. Ergo prædictus angulus erit acutus. Quare erit *PX* (ex Cor. 1. poſt 3. hujus) & ſic multò magis *PR* major ipsâ *LF*. Hoc autem abſurdum eſt (ex præcedente) contra naturam iſtius curvæ. Itaque illa *NF* protracta cadere tota debet versùs partes convexas, atque ideo ipſa erit ejuſdem curvæ tangens. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Si recta quæpiam XF (*fig.* 44.) *acutum angulum efficiat cum quavis ordinatâ* LF, *non cadet punctum* X *extra cavitatem curvæ, niſi priùs ipſa* XF *in aliquo puncto* O *curvam ſecuerit.*

Demonſtratur. Conſtat ſumi poſſe in ipſa *XF* punctum quoddam *X* adeò vicinum ipſi puncto *F*, ut juncta *LX* priùs curvam ſecet in aliquo puncto *S*: cæterùm ipſa *XF* vel non cadet tota extra cavitatem curvæ, & ſic habemus intentum; vel adeò non efficiet cum *FL* angulum acutum, ut magis cenſenda jam ſit in unicam rectam cum altera *LF* coire. Itaque ex puncto *S* demittatur ad baſim *AB* perpendicularis *SP*. Erit hæc (ex 34. hujus) æqualis ipſi *LF*. Eſt autem *SP* (ex 18. primi) minor ipſâ *LS*. Ergo etiam *LF* minor eſt eâdem *LS*, ac propterea multò minor ipſâ *LX*. Hinc in triangulo *LXF* acutus erit angulus in puncto *X*, quia minor (ex 18. primi) angulo *LFX* ſuppoſito acuto. Jam demittatur ad *FX* perpendicularis *LT*. Cadet hæc (propter 17. primi) ad partes utriuſque anguli acuti. Quare punctum *T* jacebit inter puncta *X*, & *F*. Deinde ex puncto *T* demittatur ad baſim *AB* perpendicularis *TQ*. Erit *LF* (propter angulum rectum in *T*) major ipſâ *LT*, & hæc (propter angulum rectum in *Q*) major alterâ *QT*. Igitur *LF* multò major erit ipſâ *QT*. Hinc autem; ſi in *QT* protractâ ſumatur *QK* æqualis ipſi *LF*; punctum *K* (ex 34. hujus) ad præſentem curvam ſpectabit, cadetque idcirco punctum *T* intra cavitatem ejuſdem curvæ. Non ergo recta *FT*, quæ ſecat duas rectas *QK*, & *LT* in *T*, promoveri poteſt ad ſecandam protractam *LS* in puncto *X*, conſtituto extra cavitatem præſentis curvæ, niſi priùs ipſa protracta *FT* ſecet in aliquo puncto *O* portionem ejuſdem curvæ inter puncta *S*, & *K*

conſtitutam. Hoc autem erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

ATque hinc manifeſtè liquet, inter tangentem hujus curvæ, & ipſam curvam locari non poſſe quandam rectam, quæ tota ad hanc, vel illam tangentis partem extra curvæ cavitatem cadat; quandoquidem recta ſic locata efficere debet (ex præcedente) angulum acutum cum demiſſa ex puncto contactus ad contrapoſitam baſim perpendiculari.

PROPOSITIO XXXVII.

CUrva CKD, *ex hypotheſi anguli acuti enaſcens, æqualis eſſe deberet contrapoſitæ baſi* AB.

Ante demonſtrationem præmitto ſequens axioma.

Si duæ lineæ bifariam dividantur, tum earum medietates, ac rurſum quadrantes bifariam, atque ita in infinitum uniformiter proce latur; certo argumento erit, duas iſtas lineas eſſe inter ſe æquales, quoties in iſta uniformi in infinitum diviſione comperiatur, ſeu demonſtretur, deveniri tandem debere ad duas illarum ſibi invicem reſpondentes partes, quas conſtet eſſe inter ſe æquales.

Jam demonſtratur propoſitum. Intelligantur erecta ex baſi *AB* ad eam curvam *CKD* (fig. 45) quotvis perpendicula *NF*, *LF*, *PF*, *MK*, *TF*, *VF*, *IF*; ſintque æquales in ipſa baſi *AB* portiones *AN*, *NL*, *LP*, *PM*, *MT*, *TV*, *VI*, *IB*.

Conſtat primò angulum ipſius *AC* cum eâ curvâ æqualem fore ſingulis hinc inde ad puncta *F*, ſive ad punctum *K*, aut punctum *D*, prædictarum perpendicularium angulis cum eâdem curvâ. Si enim miſtum quadrilaterum

rum *ANFC* ſuperponi intelligatur miſto quadrilatero *NLFF*, conſtitutâ baſi *AN* ſuper æquali baſi *NL*, cadet *AC* ſuper *NF*, & *NF* ſuper *LF*, propter æquales angulos rectos ad puncta *A*, *N*, *L*. Deinde propter æqualitatem rectarum (ex 34. hujus) *AC*, *NF*, *LF*, cadet punctum *C* ſuper punctum *F* ipſius *NF*, & hoc ſuper alterum punctum *F* ipſius *LF*. Præterea curva *CF* congruet adamuſſim ipſi curvæ *FF*: ſi enim una illarum, ut *CF* introrſum, aut extrorſum cadat; ſumpto quolibet puncto *Q* inter puncta *N*, & *L*, ductâque perpendiculari ſecante unam curvam in *X*, & alteram in *S*, æquales forent (ex notâ hujus curvæ naturâ) ipſæ *QX*, *QS*, quod eſt abſurdum. Idem valebit, ſi in dicta ſuperpoſitione maneat in ſuo ſitu recta *NF*, & recta *AC* cadat ſuper *LF*. Rurſum idem valebit, ſi idem quadrilaterum miſtum *ANFC* utrovis modo ſuperponi intelligatur cuivis reliquorum quadrilaterorum uſque ad ipſum incluſivè poſtremum quadrilaterum *BDFI*. Itaque angulus ipſius *AC* cum eâ curvâ æqualis eſt ſingulis hinc inde ad puncta *F*, ſive ad punctum *K*, aut punctum *D*, prædictarum perpendicularium angulis cum eadem curva.

Conſtat hinc ſecundò æquales adamuſſim inter ſe eſſe portiones ipſius curvæ ab iſtis perpendicularibus hinc inde abſciſſas.

Si ergo baſis *AB* diviſa ſit bifariam in *M*, & medietas *AM* bifariam in *L*; tum quadrans *LM* bifariam in *P*; atque ita in infinitum, procedendo ſemper versùs partes puncti *M*; conſtabit tertiò, etiam curvam *CKD* bifariam dividi in *K* a perpendiculari *MK*, medietatem *CK* bifariam itidem dividi in *F* a perpendiculari *LF*, quadrantem *FK* bifariam in *F* a perpendiculari *PF*; atque ita in infinitum, procedendo ſemper uniformiter versùs partes ipſius puncti *K*.

Quoniam verò in iſtâ baſis *AB* in infinitum diviſione

considerare possumus rem deveniſſe ad portionem ipſius *AB* infinitè parvam, quæ nempe exhibeatur per latitudinem infinitè parvam perpendicularis *MK*, conſtabit quartò (ex præmiſſo axiomate) æqualitas intenta totius baſis *AB* cum totâ cutvâ *CKD*, dum aliàs oſtendam portionem infinitè parvam abſciſſam ex baſi *AB* a perpendiculari *MK* æqualem eſſe adamuſſim portioni infinitè parvæ, quam eadem perpendicularis abſcindit ex curva *CKD*. Et hoc quidem poſtremum ſic demonſtro.

Nam *RK* perpendicularis ipſi *KM* tanget (ex 35. hujus) curvam in *K*, atque ita eandem tanget in *K*, ut inter ipſam tangentem (ex Cor. poſt 35. hujus) & curvam, ex neutra parte locari poſſit recta, quæ ipſam curvam non ſecet. Igitur infiniteſima *K*, ſpectans ad curvam, æqualis omnino erit infiniteſimæ *K* ſpectanti ad tangentem. Conſtat autem infiniteſimam *K* ſpectantem ad tangentem, nec majorem, nec minorem, ſed omnino æqualem eſſe infiniteſimæ *M* ſpectanti ad baſim *AB*; quia nempe recta illa *MK* intelligi poteſt deſcripta ex fluxu ſemper ex æquo ejuſdem puncti *M* uſque ad eam ſummitatem *K*.

Quare (juxta præmiſſum axioma) curva *CKD*, ex hypotheſi anguli acuti enaſcens, æqualis eſſe deberet contrapoſitæ baſi *AB*. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION I.

SEd fortè minùs evidens cuipiam videbitur enunciata exactiſſima æqualitas inter illas infiniteſimas *M*, & *K*. Quare ad avertendum hunc ſcrupulum ſic rurſum procedo. Cuidam rectæ *AB* inſiſtant ad rectos angulos in eo-
Tab V. dem plano (fig. 48.) duæ rectæ æquales *AC*, *BD*. Rurſum in eodem plano intelligatur exiſtere circulus *BLDH*, cujus diameter *BD*; ſitque ſemicircumferentia *BLD* æqua-

lis

lis prædictæ *AB*. Præterea idem circulus ita in eo plano revolvi concipiatur ſuper eâ rectâ *AB*, ut motu ſemper continuo, & æquabili perficiat, ſeu deſcribat ſuæ ipſius ſemicircumferentiæ punctis prædictam *BA*; quouſque nempe punctum *D*, ad illam ſemicircumferentiam ſpectans, perveniat ad congruendum ipſi puncto *A*, itaut propterea punctum *B*, ejuſdem ſemicircumferentiæ alterum extremum punctum, deveniat ad congruendum illi puncto *C*.

His ſtantibus; ſi in ſemicircumferentia *BLD* deſignetur quodvis punctum *L*, cui in deſcripta recta linea *BA* correſpondeat punctum *M*, ex quo in eo tali plano educatur perpendicularis *MK*, æqualis ipſi *BD*: Dico illud punctum K fore ipſum punctum *H* diametraliter oppoſitum illi puncto *L*. Nam ibi in puncto *M*, ſive *L* recta *AB* continget prædictum circulum. Igitur *MK* eidem *AB* perpendicularis tranſibit (ex 19. tertii, quæ utique independens eſt ab Axiomate controverſo) per centrum ejuſdem circuli. Quare; ubi punctum *L* in eâ tali circuli *BLDH* revolutione perveniat ad congruendum cum puncto *M* ipſius *AB*, etiam punctum *H*, diametraliter oppoſitum prædicto puncto *L*, incidet in punctum *K* illius *MK*.

Porrò conſtat idem ſimiliter valere de reliquis punctis ſemicircumferentiæ *BLD*, & horum diametraliter correlativis in altera ſemicircumferentia *BHD*. Quare linea, eo tali modo ſucceſſivè deſcripta a punctis ſemicircumferentiæ *BHD*, erit illa eadem jam expenſa *DKC*, quæ nempe ſuis omnibus punctis æquidiſtet ab illa recta *BA*; ſitque idcirco (juxta hypotheſin anguli acuti) ſemper cava versùs partes ejuſdem *AB*.

Inde autem fit, ut punctum *M* in ea *BA* cenſendum ſit exactiſſimè æquale puncto *K* in altera *DKC*, propter

omni-

omnimodam istorum æqualitatem cum punctis *L*, & *H* diametraliter oppositis in eo circulo *BLDH*. Quare; cum idem valeat de omnibus punctis descriptæ rectæ *BA*, si conferantur cum aliis uniformiter contrapositis in prædicta supposita curva *DKC*; consequens planè est, ut ipsa talis curva, ex hypothesi anguli acuti enascens, censenda sit æqualis contrapositæ basi *AB*. Atque id est, quod novâ hac methodo iterum demonstrandum susceperam.

SCHOLION II.

RUrsum verò: quoniam recta *BA* intelligitur successivè descripta a punctis semicircumferentiæ *BLD* motu illo semper æquabili, & continuo; cui nempe descriptioni correspondet descriptio illius lineæ *DKC* a punctis diametraliter correlativis alterius semicircumferentiæ *BHD*: obvium est intelligere, quòd ipsa recta *BA* motu illo semper æquabili, & continuo describatur ab eo unico puncto *B*, quod nempe (veluti replicatum) intelligatur cum ipsa tali semicircumferentia semper excurrere super eâ *BA*; dùm interim eodem ipso tempore, motu eodem semper æquabili, & continuo, describitur illa altera *DKC* ab altero diametraliter correlativo unico puncto *D*, quod ipsum rursum (veluti replicatum) intelligatur cum sua altera semicircumferentia *BHD* semper excurrere super prædicta *DKC*. Tunc autem faciliùs intelligitur intenta æqualitas inteream *DKC*, & eidem contrapositam rectam *BA*; quippe quæ duæ æquali ipso tempore, & æquali motu intelliguntur descriptæ a duobus exactissimè inter se æqualibus punctis, seu mavis infinitesimis. Ubi constat hanc ipsam exactissimam prædictorum punctorum æqualitatem non esse mihi in ista nova contemplatione necessariam.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

Hypotheſis anguli acuti eſt abſolutè falſa, quia ſe ipſam deſtruit.

Demonſtratur. Nam ſuprà ex ipſa hypotheſi anguli acuti evidenter elicuimus, curvam *CKD* (fig. 46.) ex ea prognatam æqualem eſſe debere contrapoſitæ baſi *AB*. Nunc autem contradictorium ex eadem hypotheſi elicimus, quòd curva *CKD* nequeat eſſe æqualis illi baſi, cum certè ſit eâdem major. Quod enim curva *CKD* major ſit rectâ *CD* ejus extremitates jungente, notio eſt omnibus communis, quam etiam demonſtrare poſſumus ex vigeſima primi, quòd duo trianguli latera reliquo ſemper ſunt majora; junctis nimirum *CK*, & *KD*; ac rurſum junctis ſimiliter apicibus, primò quidem duorum, tum quatuor, & ſic in infinitum, duplicato numero enaſcentium ſegmentorum, quouſque intelligatur hoc pacto abſumi, ſeu deſinere in ipſas infinitè parvas ſeu chordas, ſeu tangentes, tota curva *CKD*. Sed hìc procedere poſſumus ex ſola communi notione. Quòd autem juncta *CD* major ſit baſi *AB*, demonſtratum a nobis eſt in 3. hujus ex ipſis viſceribus hypotheſis anguli acuti. Igitur curva *CKD*, ex hypotheſi anguli acuti enaſcens, eſt certè major baſi *AB*, quia eſt major, ſaltem ex communi notione, rectâ *CD*, quæ ex hac ipſa hypotheſi anguli acuti demonſtratur major baſi *AB*. Non igitur poteſt ſimul conſiſtere, quòd curva iſta *CKD* æqualis ſit baſi *AB*. Itaque conſtat hypotheſim anguli acuti eſſe abſolutè falſam, quia ſe ipſam deſtruit.

SCHOLION.

Obſervare tamen debeo, quòd etiam ex hypotheſi anguli obtuſi enaſcitur curva quædam *CKD*, ſed con-

vexa

vexa versùs partes basis *AB*. Nam *MH* (fig. 47.) bifariam dividens ipsas *AB*, *CD* erit (ex 2. hujus) eisdem perpendicularis; & major (ex Cor. I. post 3. hujus) ipsis *AC*, *BD*, in hypothesi anguli obtusi. Quare ipsius *MH* portio quædam *MK* æqualis erit ipsi *AC*, aut *BD*. Tum junctis *Ck*, & *kD*, divisisque bifariam in punctis *X*, *P*, *Q*, *N* rectis *Ck*, *AM*, *MB*, *kD*, constat (ex eadem 2. hujus) junctas *PX*, *QM*, perpendiculares fore ipsis rectis divisis. At rursum erunt illæ (ex eodem Cor. I. post 3. hujus) majores ipsis *AC*, *Mk*, *BD*. Hinc; assumptis earundem portionibus *PL*, *QS*, quæ prædictis æquales sint; habebimus curvam, ex hypothesi anguli obtusi enascentem, quæ transibit per puncta *C*, *L*, *k*, *S*, *D*. Atque ita semper, si decernere velimus reliqua puncta ejusdem curvæ. Inde autem constat eam fore convexam versùs partes basis *AB*. Jam fateor demonstrari uniformi planè methodo potuisse æqualitatem hujus curvæ cum ipsa basi *AB*. At quis fructus? Nullus sanè. Quemadmodum enim curva ista *CkD* censeri debet, ex communi saltem notione, major rectâ *CD*; ita etiam (in 3. hujus) basis *AB* demonstratur major eâdem *CD*, dum stet hypothesis anguli obtusi. Nullum ergo ex hac parte absurdum, si basis *AB* æqualis sit prædictæ curvæ. Aliter verò rem procedere in hypothesi anguli acuti, constat ex dictis suprà.

Ex hoc igitur Scholio, & ex altero post 13. hujus intelligi potest, diversam planè viam iniri debuisse ad refellendam utranque falsam hypothesim, unam anguli obtusi, & alteram anguli acuti.

Præterea facilè itidem est ex istis dignoscere, non nisi rectam lineam *CD* esse posse, quæ omnibus suis punctis æquidistet ab ea supposita recta linea *AB*.

PRO-

SI in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

Et hoc est notum illud Axioma Euclidæum, quod tandem absolutè demonstrandum suscipio. Ad hunc autem finem satis erit recolere nonnullas præcedentium Demonstrationum. Itaque in meis Propositionibus, usque ad VII. hujus inclusivè, tres secrevi hypotheses circa rectam jungentem extrema puncta duorum æqualium perpendiculorum, quæ uni cuidam rectæ, quam basim appello, in eodem plano insistant. Porrò circa has hypotheses (quas invicem secerno ex specie angulorum, qui ad eam jungentem fieri censeantur) demonstro unam quamlibet earum, nimirum aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, si vel in uno casu sit vera, semper & in omni casu illam solam esse veram. Tum in XIII. ostendo universalem veritatem Axiomatis controversi, dum constitat alterutra hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi. Hinc in XIV. declaro absolutam falsitatem hypothesis anguli obtusi, quia se ipsam destruentis, utpote quæ prædicti Axiomatis veritatem infert, ex quo contra reliquas duas hypotheses soli hypothesi anguli recti locus relinquitur. Igitur sola restat hypothesis anguli acuti, contra quam diutiùs pugnandum fuit.

Et hujus quidem (post multa, ne dicam omnia, conditionatè expensa) absolutam falsitatem in XXXIII. tandem ostendo, quia repugnantis naturæ lineæ rectæ, circa quam multa ibi interfero necessaria Lemmata. Tandem verò in præcedente Propositione absolutè demonstro sibi ipsi repugnantem hypothesin anguli acuti. Quoniam igi-

tur unica reſtat hypotheſis anguli recti; conſequens planè eſt, ut ex prædicta XIII. hujus ſtabilitum abſolutè maneat prænunciatum Euclidæum Axioma. Quod erat propoſitum.

SCHOLION.

SEd juvat expendere hoc loco notabile diſcrimen inter præmiſſas duarum hypotheſium redargutiones. Nam circa hypotheſin anguli obtuſi res eſt meridianâ luce clarior; quandoquidem ex ea aſſumpta ut verâ demonſtratur abſoluta univerſalis veritas controverſi Pronunciati Euclidæi, ex quo poſtea demonſtratur abſoluta falſitas ipſius talis hypotheſis; prout conſtat ex XIII. & XIV. hujus. Contra verò non devenio ad probandam falſitatem alterius hypotheſis, quæ eſt anguli acuti, niſi priùs demoſtrando; quòd linea, cujus omnia puncta æquidiſtent a quadam ſuppoſita recta linea in eodem cum ipſa plano exiſtente, æqualis ſit ipſi tali rectæ; quod ipſum tamen non videor demonſtrare ex viſceribus ipſius met hypotheſis, prout opus foret ad perfectam redargutionem.

Reſpondeo autem triplici medio uſum me fuiſſe in XXXVII. hujus ad demonſtrandam prædictam æqualitatem. Et primò quidem, in corpore illius Propoſitionis, demonſtro eam curvam *CKD*, prout enaſcentem ex hypotheſi anguli acuti (ac propterea ſemper cavam versùs partes illius rectæ *AB*) æqualem eidem eſſe debere, & quidem argumentum ducendo ex ipſis ejuſdem curvæ tangentibus. Deinde in duobus ejuſdem Propoſitionis ſubſequentibus Scholiis, præciſivè a qualibet ſpeciali hypotheſi, bis rurſum demonſtro æqualitatem illius genitæ lineæ *CD* cum ſubjecta recta linea *AB*, qualiſcunque tandem cenſeatur eſſe ipſa linea *CD* eo modo genita.

Jam verò; quatenus illa curva *CKD*, prout enaſcens

ex

ex hypotheſi anguli acuti, cenſeatur primo illo modo demonſtrata æqualis ſubjectæ rectæ lineæ *AB*; manifeſta evadit redargutio, cum ex eadem hypotheſi evidenter demonſtretur major. Sin autem alterutro ex duobus aliis modis oſtenſa cenſeatur æqualitas prædicta; neque tunc ceſſat redargutio contra hypotheſin anguli acuti. Ratio eſt; quia nihil vetat, quin illa *CD* ſit curva, & nihilominus æqualis ſit illi rectæ *AB*, dum tamen ſit ſemper versùs eas partes convexa, ac propterea recta jungens illa eadem puncta *C*, & *D* minor ſit contrapoſitâ baſi *AB*, prout in hypotheſi anguli obtuſi: At omnino repugnat, ſi versùs eaſdem partes ſit ſemper cava, ac propterea recta jungens prædicta illa puncta *C*, & *D* major ſit eâdem contrapoſitâ baſi *AB*, prout in hypotheſi anguli acuti. Atque ita declaratum jam eſt in Scholio præcedentis Propoſitionis. Scilicet contra hypotheſin anguli obtuſi manifeſtum eſt nullam hinc ſequi redargutionem, quæ propterea unicè impetit hypotheſin anguli acuti.

Hoc tamen loco aliquis fortaſſe inquiret, cur adeò ſollicitus ſim in demonſtranda utriuſque falſæ hypotheſis exacta redargutione. Ad eum, inquam, finem, ut inde magis conſtet non ſine cauſa aſſumptum fuiſſe ab Euclide tanquam per ſe notum celebre illud Axioma. Nam hic maximè videtur eſſe cujuſque primæ veritatis veluti character, ut non niſi exquiſitâ aliquâ redargutione, ex ſuo ipſius contradictorio, aſſumpto ut vero, illa ipſa ſibi tandem reſtitui poſſit. Atque ita a prima uſque ætate mihi feliciter contigiſſe circa examen primarum quarundam veritatum profiteri poſſum, prout conſtat ex mea Logica demonſtrativa.

Inde autem tranſire poſſum ad explicandum, cur in Proemio ad Lectorem dixerim: *non ſine magno in rigidam Logicam peccato aſſumptas a quibuſdam fuiſſe tanquam datas*

duas rectas lineas æquidistantes. Ubi monere debeo nullum eorum a me hìc carpi, quos in hoc meo Libro vel indirectè nominavi, quia verè magnos Geometras, hujusque peccati verissimè immunes. Dico autem: *magnum in rigidam Logicam peccatum*: quid enim aliud est assumere tanquam datas *duas rectas lineas æquidistantes*: nisi aut velle; quòd omnis linea in eodem plano æquidistans a quadam suppositâ lineâ rectâ sit ipsa etiam linea recta; aut saltem supponere, quòd una aliqua sic æquidistans possit esse linea recta, quam idcirco seu per hypothesin, seu per postulatum præsumere liceat in tanta aliqua unius ab altera distantia? At constat neutrum horum venditari posse tanquam per se notum. Scilicet ratio objectiva lineæ, quæ omnibus suis punctis æquidistet a quadam suppositа linea recta, non ita clarè per se ipsam congruit cum definitione propria ipsius lineæ rectæ. Quare assumere duas rectas lineas sub ista *æquidistantiæ* ratione inter se *parallelas* fallacia est, quam in prædicta mea Logica appello *Definitionis complexæ*, juxta quam irritus est omnis progressus ad assequendam veritatem absolutè talem.

Unam tamen supereſſe adhuc video necessariam observationem. Nam lineam jungentem extrema puncta omnium æqualium perpendiculorum, quæ in eodem plano versùs easdem partes erigantur a singulis punctis subjectæ rectæ lineæ *AB*, debere esse & æqualem prædictæ *AB*, & rursum in seipsa rectam, fateri omnes volumus. Sed dico prius esse apud nos, quòd æqualis sit; deinde autem, quòd recta. Cum enim singula puncta illius rectæ *AB* intelligi possint semper æquabiliter procedere per sua illa perpendicula ad formandam tandem illam qualemcunque *CD*; manifestum videri debet, quòd illa qualiscunque genita *CD* æqualis sit eidem *AB*; præsertim verò, si respiciamus explicationem contentam in Scholio II. post

XXXVII.

XXXVII. hujus, ubi hoc punctum clariſſimè demonſtratum eſt.

Sed poſtea magna adhuc reſtat difficultas in demonſtrando, quòd illa eadem ſic genita *CD* non niſi recta linea ſit. Atque hinc factum eſſe puto, ut ex communi quadam perſuaſione rectam lineam, pro faciliore progreſſu, maluerint præſumere, ut inde æqualem oſtenderent illi baſi *AB*, ac poſtea inferrent rectos angulos ad ipſam talem jungentem *CD*. Dico autem *magnam difficultatem*: Nam priùs expendere oportebat tres hypotheſes circa angulos ad illam junctam *rectam CD*, nimirùm aut rectos, ſi ipſa æqualis ſit baſi *AB*; aut obtuſos, ſi minor; aut acutos, ſi major. Tum verò oſtendi debebat non niſi cavam eſſe poſſe versùs baſim *AB* lineam curvam, quæ (in hypotheſi anguli acuti) jungat extremitates illorum æqualium perpendiculorum, ac rurſum non niſi convexam versùs eandem baſim aliam curvam, quæ (in hypotheſi anguli obtuſi) jungat extremitates eorundem perpendiculorum. Deinde autem hypotheſis quidem anguli acuti ex eo demonſtranda erat falſa; quia linea jungens prædictorum perpendiculorum extremitates adeò non erit æqualis baſi *AB*, ut immo (ex communi ſaltem notione) major ſit illâ junctâ rectâ *CD*, quæ ex natura ipſiuſmet hypotheſis major eſt prædictâ baſi *AB*. At hypotheſis anguli obtuſi aliunde oſtendenda erat ſibi ipſi repugnans, prout in XIV. hujus. Sed hæc jam ſatis.

Finis Libri primi.

EUCLI-

EUCLIDIS
AB OMNI NÆVO VINDICATI
LIBER SECUNDUS.

SOlo plerunque ratiocinio opus erit in toto hujus Libri decurſu. Nam hìc Euclidem in eo unicè accuſant, quòd in ſexta Definitione Quinti magis obtenebret, quàm explicet naturam magnitudinum æquè proportionalium, ſibique idcirco onus imponat demonſtrandi plures Propoſitiones, quæ per ſe ipſas clariſſimæ videri poſſunt, vel certè allatis ab ipſo demonſtrationibus clariores: Tum verò, quòd in quinta Definitione Sexti ſub ſpecie Definitionis Axioma quoddam aſſumat non facilè permittendum, ſine prævia demonſtratione.

PARS PRIMA.

In qua expenditur ſexta Definitio Libri quinti Euclidæi.

DEfinit ibi Euclides magnitudines æquè proportionales, prout ſequitur: *In eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ, & tertiæ æquè multiplicia, a ſecundæ, & quartæ, æquè multiplicibus, qualiſcunq; ſit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque vel unà deficiunt, vel unà æqualia ſunt, vel unà excedunt, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent.* Superſedeo ab omni exemplo, quia profiteor me ſcribere jam verſatis in Geometria, non autem immaturis novitiis. Moneo tamen juſtè hoc loco reprehendi a Clavio Campanum, atque

Oron-

Orontium, quòd ita hanc Euclidis definitionem interpretentur, quasi tunc solùm illa *proportionalitas* subsistere debeat, quando prædicta æquè multiplicia vel unà deficiant, vel unà excedant *proportionaliter*, *sive in eadem proportione*. Nam id foret inducere Euclidem desipientem, qui nempe idem per idem definiret. Fateri igitur debemus, quòd Euclides loquatur de quolibet defectu, aut excessu; dum tamen ad utramque partem juxta quamlibet multiplicationem alteruter idem semper consistat, & non etiam aliquando ex una quidem parte defectus, ex altera autem aut æqualitas, aut excessus.

Audire jam oportet, quid reprehensione dignum invenerint in exposita Euclidæa Definitione. Itaque dicunt debuisse probari ab Euclide istud ipsum esse verum; quòd nempe, quoties prædicta qualiacunque æquè multiplicia vel unà excedunt, vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, toties quatuor illæ magnitudines in eâdem sint ratione. Ego autem non satis miror, quomodo Viri apprimè docti in hunc lapidem impegerint. Quid enim, quæso, probari debuit ab Euclide? An fortè, quòd nusquam asserat, seu præsumat quatuor magnitudines in eadem esse ratione, nisi quando aliunde constet prædicta qualiacunque earundem æquè multiplicia vel unà excedere, vel unà deficere, vel unà æqualia esse? At id ipsum tam religiosè exequitur, ut nimius hac in parte videri quibusdam potuerit in demonstrandis primis undecim Propositionibus Libri quinti, quæ nimirùm, sub alio quodam magis vulgari æquè Proportionalium conceptu, immediatam sibi ipsis facerent fidem.

Rursum verò: Quid per se ipsum clarius, si præcisè attendamus ad vulgarem quandam acceptionem, quàm quòd Partes cum pariter Multiplicibus in eadem sint ratione; ut putà, quòd 4. eandem habeat rationem ad 6.

quam

quam habet 8. duplus ipsius 4. ad 12. duplum illius 6.? Nihilominus magna ista claritas satis non fuit Euclidi, qui in Propos. 15. prædicti Libri istud ipsum demonstrat ex Definitione ab eo assumpta æquè Proportionalium; ne scilicet accusari posset de petitione Principii, hoc est de duplici assumpta Definitione. Nihil ergo probare debuit Euclides, quod facto ipso non probet.

Sed in hoc ipso (inquiet aliquis) peccare ipse videtur, quòd rem per se claram suâ illâ Definitione obscurare voluerit. Quasi verò (inquam ego) non potuerit acutus Euclides magnitudines invicem commensurabiles ab aliis non talibus separare, illasque idcirco ita definire, prout in Libro VII. Defin. XX. numeros proportionales apud Clavium definit: tunc nimirùm quatuor magnitudines proportionales fore: *Cum prima secundæ, & tertia quartæ æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certè, cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes.* Ita sanè: At quis fructus, cum tandem descendere debuerit ad magnitudines multis modis incommensurabiles? Decuit igitur, ut unâ, eâdemque Definitione ipsas etiam non invicem commensurabiles magnitudines complecteretur.

Nullus, inquiunt, refragatur; aliamque idcirco ipsis etiam quomodolibet incommensurabilibus magnitudinibus Definitionem assignant, quæ sequitur: *Prima ad secundam eandem rationem habebit, ac tertia ad quartam, si prima secundæ partes aliquotas quascunque contineat, quoties tertia quartæ similes partes aliquotas continet:* Ut putà; si magnitudo *A* toties continet magnitudinis *B* partes centesimas, millesimas, centies millesimas, & quascunque alias aliquotas similes; ita ut nulla sit pars magnitudinis *B*, quæ pluries contineatur in magnitudine *A*, quàm similis pars aliquota ipsius *D* contineatur in *C*, licèt in irrationalibus re-

stet

ſtet ſemper aliqua quantitas; tunc ita eſt *A* ad *B*, ut *C* ad *D*.

Agnoſco eximium, meiſque oculis familiarem Geometram ſic loquentem. Sed pace ipſius dictum ſit: nullum video hujus novæ Definitionis commendabilem fructum? Et primò quidem indignum puto homine Geometra aliud quidpiam intelligere in uſu alicujus termini ſcientifici præter id, quod in ejuſdem Definitione exprimitur; ac præſertim, ubi Definitio tradita ſit per voces minimè ambiguas, quales ſunt *multiplicatio*, *majus*, *minus*, *æquale*. Igitur Definitio Euclidæa repræhendi non debuit titulo obſcuritatis. Deinde verò: Nemo ibit inficias, quin promptior ſit ad uſum, ac propterea opportunior ad rectam, expeditamque intelligentiam multiplicatio præſcripta ab Euclide, quàm diviſio ab aliis ſubſtituta. Unicè igitur expendendum ſupereſt, an nova illa æquè proportionalium Definitio opportunior ſit ad demonſtrandum, ubi applicari debeat in ſpecialibus materiis. Ad hunc finem aſſumo Prop. primam Libri ſexti, quæ utique prima eſt omnium talium applicationum: ubi Euclides demonſtrat: Triangula, & Parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habere, ut baſes.

Ecce autem ex Euclide nitidiſſimam demonſtrationem. Sint duo triangula (fig. 49.) *ABC*, *DEF*, eandem habentia altitudinem, quorum baſes *BC*, *EF*. Omitto parallelogramma, quia ſcribo jam verſatis in Geometria. Jam dico ita eſſe triangulum *ABC* ad triangulum *DEF*, ut baſis *BC* ad baſim *EF*. Nimirùm; ſi baſis *BC* ſtatuatur prima magnitudo, baſis *EF* ſecunda, triangulum *ABC* tertia, & triangulum *DEF* quarta; Dico qualiacunque æquè multiplicia primæ ac tertiæ a quibuſvis æquè multiplicibus ſecundæ & quartæ vel unà deficere, vel unà æqualia eſſe, vel unà excedere, prout exigit Definitio ſexta Libri quinti. Tab. VI.

Intelligantur enim prædicta triangula tum in eodem plano existere, tum etiam constituta esse inter easdem parallelas *AD*, *CBEF*; adeò ut nempe (ex natura parallelarum) æqualem altitudinem habeant. Tum verò sumptis in *BC* indefinitè protractâ quotvis portionibus *CI*, *IK*, *KL*, æqualibus ipsi *BC*; atque item in *EF* similiter protractâ quotvis *FM*, *MN*, æqualibus ipsi *EF*; jungantur *AI*, *AK*, *AL*; atque item *DM*, *DN*. Constat (ex 38. primi) æqualia inter se fore triangula *ALK*, *AKI*, *AIC*, *ACB*; atque item eâdem ratione æqualia inter se fore triangula *DEF*, *DFM*, *DMN*. Igitur, quàm multiplex est rectæ *CB* quæcunque assumpta recta *CL*, tam multiplex quoque erit triangulum *ACL* trianguli *ACB*; & quam multiplex est recta *EN* rectæ *EF*, tam quoque multiplex erit triangulum *DEN* trianguli *DEF*; quia in tot triangula æqualia sunt divisa tota triangula *ACL*, *DEN*, in quot rectas æquales sectæ sunt totæ rectæ *CL*, *EN*. Quoniam verò, si basis *CL* æqualis fuerit basi *EN*, necessariò (ex predicta 38. primi) etiam triangulum *ACL* æquale est triangulo *DEN*; ac proinde, si *CL* major fuerit quàm *EN*, necessariò *ACL* majus est quàm *DEN*; & si minor, minus: consequens planè est, ut recta *CL*, & triangulum *ACL*, quæ assumpta sunt pro quibusvis æquè multiplicibus primæ magnitudinis *BC*, & tertiæ *ABC*; si conferantur (prout inter se respondent) cum recta *EN*, & triangulo *DEN*, quæ ipsa rursum assumpta sunt pro quibusvis æquè multiplicibus secundæ magnitudinis *EF*, & quartæ *DEF*; inveniantur semper vel unà æqualia esse, vel unà excedere, vel unà deficere. Igitur (juxta sextam Definitionem quinti) quæ proportio primæ *BC* ad secundam *EF*, basis ad basim, ea est tertiæ *ABC* ad quartam *DEF*, trianguli ad triangulum. Quod erat propositum.

Conferre nunc debeo præmissam Euclidæam Demon-

ſtrationem cum alterâ indicati eximii Geometræ, quam ipſis ejuſdem vocibus ſtatim exhibeo.

Sint duo triangula (fig. 50.) *ABC*, *DEF*, quorum altitudo ſit eadem. Dico eandem eſſe rationem trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*, quæ baſis *BC* ad baſim *EF*. Demonſtratur. Intelligatur baſis *EF* diviſa in quotcunque partes æquales, ut putà in quatuor, & ex puncto *D* ducantur lineæ *DG*, *DH*, *DI*; & linea *BC* quadrantem lineæ *EF* contineat ter, ſintque lineæ *CM*, *ML*, *LK*, quæ ſint ſingulæ æquales lineis *EG*, *GH*, *HI*, *IF*, ducanturque lineæ *AK*, *AL*, *AM*. Triangula *DEG*, *DGH*, *DHI*, *DIF* ſingula ſunt æqualia (per 38. 1.) quia ſunt ſupra baſes æquales, & in eiſdem parallelis. Igitur ſunt quadrantes trianguli *DEF*: & quia triangula *ABC*, *DEF* habent æquales altitudines, etiam in eiſdem parallelis intelligi poſſunt conſtituta, & ſic triangula *AKL*, *ALM*, *AMC*, habentia baſes æquales cum triangulis *DEG*, *DGH*, *DHI*, *DIF*, illis æqualia erunt. Ergo quot erunt quadrantes lineæ *EF* in linea *BC*, tot erunt quadrantes trianguli *DEF* in triangulo *ABC*. Quod autem oſtenſum eſt de quadrantibus, poteſt ſimiliter oſtendi de quibuslibet partibus aliquotis. Igitur (juxta aſſumptam novam illam æquè proportionalium Definitionem) ut baſis *BC* ad baſim *EF*, ita triangulum *ABC* ad triangulum *DEF*. Quod erat &c.

Jam fateor hanc etiam demonſtrationem opportunam eſſe intento; ſed puto non æquè claram eſſe, atque Euclidæam. Ratio diſcriminis hæc eſt; quia poſterior Definitio procedit in *quid rei*; prior autem in *quid nominis*. Scilicet non eo inficias, quin probè demonſtratum ſit tot fore v. g. quadrantes (fig. 50.) trianguli *DEF* in triangulo *ABC*, quot erunt quadrantes baſis *EF* in baſi *BC*; atque ita uniformiter ſecundùm quamlibet aliam partem aliquotam.

At ubi venitur ad concluſionem, quòd triangulum *ABC* ita ſit ad triangulum *DEF*, ut baſis *BC* ad baſin *EF*, hæret ſtatim mens; cum magis immediatè debuerit inferri, ita eſſe baſim *KC* ad baſim *EF*, ut triangulum *AKC* ad triangulum *DEF*.

Neque juvat reponere, quòd una veritas alteri officere non debeat. Nam dico ex hac ipſa innegabili veritate oriri dubium poſſe, an fortè per nullam partem aliquotam ipſius *EF* quomodolibet multiplicatam exhauriri præcisè poſſit ipſa *BC*; quod ſanè omninò continget, ſi ipſæ *EF*, *BC* ſint incommenſurabiles; niſi fortè provocare velimus ad partem aliquotam infinitè parvam, circa quam rurſum non levis oriri poſſet difficultas.

Cur autem (urgebit quiſpiam) licitum fuerit Euclidi tradere ſuam illam Definitionem æquè proportionalium, quæ nulli communi notioni innititur; & non etiam aliis liceat quampiam aliam ſubrogare, quæ ex quadam cum numeris æquè proportionalibus ſimilitudine ſibi ipſi faciat fidem? Per me (inquam) quidquid libeat, licitum etiam hac in parte puto; dum tamen obſerventur duo ſequentia. Primò; ut ne (quatenus procedi velit per Definitionem *puri nominis*) accuſetur ut mala quæpiam alia *puri nominis* aſſumpta Definitio; niſi aut oſtendatur ex ipſis ejuſdem vocibus nimis perplexa, aut aliunde conſtet longiore quadam indagine opus eſſe ad aſſequendam *rem ipſam*, cujus nempe veluti propria dignoſci tandem debeat expoſita Definitio. Secundò autem; ut (quatenus procedi velit per Definitionem *ipſius rei* aliunde cognitæ) nunquam putemus *rem ipſam* aſſecutos nos eſſe, niſi clarè deveniamus ad illam originem, unde ſumpta eſt occaſio, aut opportunitas talis Definitionis.

Poſt hanc non inutilem digreſſionem duo alia opportunè ſubdo. Unum eſt; me non negare, quin poſteriore

loco

loco expoſita Demonſtratio optima ſit, & evidentiſſima; dum tamen ibi aſſumpta æquè proportionalium Definitio recipi unicè debeat in *quid nominis*. Sed tunc obſervo nullam fuiſſe cauſam reſpuendi, ac multò minùs damnandi Definitionem Euclidæam: cum ex una parte & Demonſtratio eidem innixa nulli tergiverſationi obnoxia ſit; & ex alterâ Definitio, certiſſimè ibi aſſumpta in *quid nominis*, procedat per multiplicationem, quam unuſquiſque intelligit clariorem eſſe, ac faciliorem diviſione, & quidem (ſuo quodam proprio jure) ſine ullo periculo cujuſvis objectæ incommenſurabilitatis; prout conſtare poteſt ex antea dictis.

Alterum eſt; me rurſum non negare, quin aliquo tandem pacto demonſtrari poſſit prima illa Propoſitio Libri ſexti, etiamſi aſſumpta cenſeatur in *quid rei* prædicta æquè proportionalium nova Definitio. Verùm arbitror hac ſola ratione demonſtrari eam poſſe, dum aliàs præſumatur unam aliquam eſſe rectam lineam determinatam, quæ ad baſim *BC* eam habeat rationem, quæ eſt trianguli *DEF* ad triangulum *ABC*. Nam demonſtrabo nullam *EI*, quæ ſit portio ipſius *EF*, ac ſimiliter nullam *EX*, quæ aſſumpta ſit in *EF* productâ, tales eſſe poſſe, ut eam habeant ad baſim *BC* rationem, quæ eſt trianguli *DEF* ad triangulum *ABC*.

Demonſtratur prima pars. Nam conſtat primò (fig. 50.) talem ipſius *BC* aſſumi poſſe partem aliquotam *BK*, ut putà *octavam*, quæ minor ſit illâ in *EF* reſiduâ portione *IF*. Conſtat hinc ſecundò; tot in *EF* deſignari poſſe portiones æquales ipſi *BK*, ita ut poſtrema deſignata portio deſinat in punctum *Q*, quod jaceat inter puncta *I*, & *F*. Tunc autem (junctâ *QD*) manifeſtum fiet (ex 38. 1.) tot contineri in triangulo *DEQ* octavas partes trianguli *IBC*, quot in baſi *EQ* continentur octavæ partes illius baſis

basis *BC*. Quare (ex nova illa assumpta in *quid rei* æquè proportionalium Definitione) ita erit triangulum *DEQ* ad triangulum *ABC*, ut basis *EQ* ad basim *BC*. Habet autem *EQ* ad *BC* majorem rationem (ex 8. 5.) quàm illa *EI* ad eandem *BC*; Igitur (ex 13. 5.) etiam triangulum *DEQ* non æqualem, sed majorem rationem habebit ad triangulum *ABC*, quàm sit ratio prædictæ *EI* ad illam basim *BC*. Quod erat priore loco demonstrandum.

Demonstratur secunda pars. Nam rursum constat primò; talem illius *BC* assumi posse partem aliquotam *BK*, ut putà *decimam*, quæ minor sit illo excessu *FX*, quo basis *EF* superatur ab ipsa *EX*. Atque hinc constat secundò; tot in *EX* designari posse portiones æquales ipsi *BK*, ita ut postrema designata portio desinat in punctum *T*, quod jaceat inter puncta *F*, & X. Tunc autem (junctâ *TD*) manifestum fiet (ex eadem 38. 1.) tot in triangulo *DET* decimas partes trianguli *ABC* contineri, quot in basi *ET* continentur decimæ partes ipsius basis *BC*. Quare (ex eadem assumpta in *quid rei* æquè proportionalium nova Definitione) ita erit triangulum *DET* ad triangulum *ABC*, ut basis *ET* ad basim *BC*; & invertendo ita erit triangulum *ABC* ad triangulum *DET*, ut basis *BC* ad basim *ET*. Habet autem basis *BC* ad basim *ET* rationem majorem (ex eadem 8. 5.) quàm sit ratio ejusdem basis *BC* ad illam *EX*, quæ supponitur major prædictâ *ET*; ac propterea (ex eadem 13. 5.) majorem ratione trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*. Non igitur ulla *EX*, quæ sit major ipsâ *EF*, talis esse potest, ad quam basis *BC* eam habeat rationem, quæ est trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Unde tandem fit, ut ratio trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*, quod eandem cum ipso altitudinem habeat,

eadem

eadem ſit ac baſis *BC* ad baſim *EF*; dum ſcilicet aliàs præſumatur unam aliquam eſſe rectam lineam determinatam, ad quam baſis *BC* eam habeat rationem, quæ eſt trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*. Quod erat principale intentum.

Poſt hæc autem addere inſuper debeo, non placere mihi neceſſitatem illius *Petitionis*, quòd una aliqua ſit recta linea determinata, ad quam prædicta baſis *BC* eam habeat rationem, quæ eſt trianguli *ABC* ad triangulum *DEF*. Nam certè verus nævus hic foret, maximè dolendus in primo ingreſſu novæ hujus apud Geometras nobiliſſimæ partis; quòd ſcilicet reperiri demonſtrativè non poſſit recta linea, ad quam talis quæpiam data recta eam rationem habeat, quæ eſt vel talis cujuſdam dati trianguli rectilinei ad alterum datum triangulum rectilineum, vel talis cujuslibet datæ rectæ ad alteram quamlibet propoſitam rectam lineam; quòd, inquam, talis recta linea reperiri non poſſit, niſi antea præſumendo, per modum primi Principii, quòd una aliqua ejuſmodi recta linea verè exiſtat in rerum natura.

Sed hìc audio quempiam reclamantem, quòd ipſe etiam Euclides, ſine demonſtratione, hoc veluti Axiomate utitur in Propoſ. 18. 5. ubi demonſtrat compoſitionem rationis; hoc eſt, *duas magnitudines, quæ diviſæ proportionales ſint, has quoque compoſitas proportionales eſſe*. Quin etiam Clavius, acutiſſimus Euclidis Interpres, ſub expreſſo *Axiomatis* nomine, ante omnes prædicti Libri Propoſitiones ſic præmittit: *Quam proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quævis magnitudo propoſita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propoſitam*. Hujus autem aſſumpti hanc reddit rationem. *Quamvis enim ignoremus interdum, quænam ſit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non eſt, eam*

eſſe

esse posse in rerum natura, cum id contradictionem non implicet, ut Philosophi loquuntur, neque absurdi aliquid ex eo consequatur.

Veruntamen, his ipsis stantibus, non desino agnoscere indecorum nævum, a quo, ex officio assumpto, vindicare debeam Euclidem; præsertim verò, cum ipse Clavius non Euclidi, sed interpretibus istud attribuat. Itaque dico illam 18. 5. demonstrari potuisse sine ullo recursu ad intrusum illud Axioma; nimirùm provocando ad quasdam Libri sexti Propositiones, quæ ab illo intruso Axiomate nullatenus pendent; & ex quibus illud ipsum Problematicè demonstratur, saltem quoad lineas rectas. Cur autem oculatissimus Clavius non id animadverterit, in causa esse potuit, quòd ibi fusior esse debuerit in explicanda vera doctrina proportionum, adversùs quosdam non ignobiles Euclidis interpretes.

Jam pergo ad exequendum munus assumptum: Ubi, ut expeditior sim, resolvendo magis, quàm componendo, rem ipsam paucioribus exhibere conabor. Præmitto autem, assumi hìc posse tanquam a me juxta Euclidem jam demonstratam primam sexti, sine ulla dependentia a præfato Axiomate; cum ibi (si excipias doctrinam parallelarum) sola usui fuerit ex Libro primo Propositio 38. & ex quinto Euclidæa æquè proportionalium Definitio.

Deinde transeo ad exequendum Problema, quod continetur in 12. sexti; ubi datis tribus rectis lineis, ut putà *AD*, *DB*, *AE*, præcipitur quartæ proportionalis inventio. Disponantur enim (fig. 51.) primæ duæ *AD*, *DB* secundùm lineam rectam, quæ sit *AB*: Tertia verò *AE* quemlibet angulum *A* efficiat cum prima *AD*. Deinde ex *D* ad *E* recta ducatur *DE*, cui per *B* parallela ducatur *BC*, occurrens rectæ *AE* productæ in *C*. Dico ipsam *EC* esse quartam proportionalem quæsitam. Cum enim in tri-

angulo

gulo *ABC* acta sit parallela *DE*; erit (ex 2. 6.) ut *AD* ad *DB*, ita *AE* ad *EC*. Quare *EC* erit quarta proportionalis quæsita. Quod erat &c.

Verùm obstat, quòd nondum demonstravi independentiam secundæ Sexti ab illo intruso Axiomate. Itaque (manente eadem Figura) jungantur *EB*, *CD*. Constat (ex 37. primi) æqualia inter se fore triangula *DEB*, *DEC*, utpotè constituta inter easdem parallelas *DE*, *BC*, & super eadem basi *DE*. Quare (ex 7. 5.) ut triangulum *ADE* ad triangulum *DEB*, ita est idem triangulum *ADE* ad triangulum *DEC*. Atqui ut triangulum *ADE* ad triangulum *DEB*, ita est (ex 1. 6.) basis *AD* ad basim *DB*; propter æqualem eorundem altitudinem in puncto *E*: & eadem ratione, ut triangulum *ADE* ad triangulum *CDE*, ita est basis *AE* ad basim *EC*; propter æqualem eorundem altitudinem in puncto *D*. Igitur (ex 11. quinti) ut *AD* ad *DB*, ita est *AE* ad *EC*; cum hæ duæ proportiones eædem sint proportionibus trianguli *ADE* ad triangulum *DEB*, & ejusdem trianguli *ADE* ad triangulum *DEC*. Quod erat hoc loco demonstrandum.

Hinc porrò evidenter constat nihil vetuisse, quin statim (præciso ordine materiæ) post 17. 5. procederet Euclides ad demonstrandas primam, secundam, & duodecimam sexti, quæ utique satis erant ad stabiliendam, saltem pro lineis rectis, illam 18. ejusdem quinti, pro qua sola induci ibi debuerat præfatum Axioma. Quòd enim post illam 12. sexti progredi facilè possimus (sine indigentia novæ alicujus præsumptæ veritatis) ad inveniendam rectam lineam, quæ ita se habeat ad aliam quamlibet datam rectam, ut unum quodvis datum triangulum rectilineum ad alterum quodlibet datum triangulum rectilineum, etiamsi non æqualis altitudinis cum priore; solis Geometriæ imperitis difficile videri poterit. Porrò uniformiter

conſtabit, reperiri ſimiliter poſſe rectam lineam, quæ ita ſe habeat ad quamlibet aliam datam rectam, ut una quælibet data figura rectilinea ad alteram quamlibet datam figuram rectilineam. Atque hæc rurſum utrovis modo vice versâ.

Sed video opponi adhuc mihi poſſe ipſummet Euclidem, qui in 2. 12., ut oſtendat eandem eſſe rationem cujuſvis circuli ad alterum quemlibet exhibitum circulum, quæ eſt quadratorum ab ipſorum diametris, tacitè præſumit unam aliquam eſſe in rerum natura ſuperficiem, vel æqualem, vel majorem, vel minorem exhibito circulo, ad quam alter circulus eam habeat rationem, quæ eſt prædictorum ab illis diametris quadratorum.

Et hìc quidem duo reſpondenda cenſeo. Unum eſt; abſonam utique videri potuiſſe, in ipſo primo ingreſſu hujus materiæ *de proportionibus*, præſumptionem ejuſmodi; ſed non etiam, poſtquam circa lineas rectas, ac figuras rectilineas demonſtratum generaliter id ſit (non obſtante qualicunque earundem irrationalitate) aut incongruum, aut nimis remotum a veritate videri poſſe, quòd ſimile quidpiam præſumatur circa duas figuras rectilineas ex una parte, & ex altera duas circulares. Alterum eſt; neque ibi neceſſariam eſſe Euclidi jam dictam præſumptionem. Nam antea in prima duodecimi ſine ulla præſumptione demonſtrat, duo quælibet in circulis ſimilia poligona eſſe inter ſe, ut a diametris quadrata. Deinde (in ipſa ſecunda) abſolutè rurſum demonſtrat, tale in exhibito circulo (duplicando, ac duplicando numerum laterum) inſcribi poſſe poligonum, cujus defectus ab ipſo integro circulo minor ſit qualibet parvulâ aſſignatâ magnitudine; intactâ nihilominus manente eâdem ſemper ratione ad alterum ſimile poligonum, quod in alio circulo inſcribatur. Quare ipſoſmet circulos conſiderare jam potuit tanquam ſimi-

lia

lia infinitilatera poligona, in quibus propterea firma adhuc consisteret jam demonstrata ratio, quæ est quadratorum a diametris.

Agnosco tamen doctioribus Geometris nunquam plenè satisfactum iri, nisi aliquo tandem pacto aut generaliter demonstrem præsumptum illud Axioma, aut saltem unum aliquod in ejus locum substituam, quod usui esse possit in decursu universæ Geometriæ. Ecce autem statim rem exequor.

Dico enim assumi posse hoc alterum Axioma; quòd nempe *duæ quælibet, in quolibet eodem genere constitutæ magnitudines, rationem inter se habebunt, quæ vel æqualis sit, vel major, vel minor ratione duarum quarumlibet aliarum magnitudinum, quæ vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quolibet ipsarum proprio constitutæ sint*. Ubi constat duplex a me onus assumi; nimirùm demonstrandi & veritatem propositi Axiomatis, & plenam ejusdem sufficientiam pro usu in decursu totius Geometriæ.

Priori oneri sic satisfacio. Sint quatuor magnitudines (fig. 52.) *A*, *B*, *C*, *D*, quarum duæ priores in suo proprio genere, ac similiter posteriores vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quodam suo proprio genere consistant. Dico rationem tertiæ *C* ad quartam *D* vel æqualem fore, vel majorem, vel minorem ratione primæ *A* ad secundam *B*.

Demonstratur. Sumantur enim ipsarum *A* primæ, & tertiæ *C*, duæ quælibet æquè multiplices *EF*, *GH*; atque item ipsarum *B* secundæ, & quartæ *D*, duæ quælibet æquè multiplices *IK*, *LM*. Constat primò, rationem ipsius *A* ad *B* æqualem fore rationi ipsius *C* ad *D*, si vel in uno casu talium assumptarum æquè multiplicium contingat, ut *EF* multiplex primæ æqualis sit ipsi *IK* multiplici secundæ, & *GH* multiplex tertiæ æqualis sit ipsi *LM* multiplici quartæ.

Ratio evidens est; quia hìc agitur de multiplici propriè tali secundùm veram rationem numeri, juxta quam multiplicatum non transit in novam speciem entis, sed in eadem specie consistens ita se habet v.g. *EF* ad *A*, ut numerus ibi multiplicans ad unitatem. Quoniam igitur genitæ magnitudines *EF*, & *IK* ponuntur æquales; consequens est (ex 19. 7.) ut numeri, per quos multiplicantur magnitudines *A*, & *B*, sint inter se reciprocè, ut ipsæ magnitudines multiplicatæ. Simili modo ostendetur numeros, per quos multiplicantur magnitudines *C*, & *D*, esse inter se reciprocè, ut sunt magnitudines multiplicatæ; Porrò (ex hypothesi) per eundem quempiam numerum multiplicatæ intelliguntur magnitudines *A*, & *C*; ac similter magnitudines *B*, & *D*. Igitur (ex 11. 5.) ita erit prima *A* ad secundam *B*, ut tertia *C* ad quartam *D*. Quod erat hìc demonstrandum.

Constat secundò, rationem primæ *A* ad secundam *B* majorem fore ratione tertiæ *C* ad quartam *D*; si vel in uno casu talium assumptarum æquè multiplicium contingat, ut *EF* multiplex primæ excedat ipsam *IK* multiplicem secundæ, sed *GH* multiplex tertiæ non excedat illam *LM* multiplicem quartæ; aut illa *EF* æqualis sit prædictæ *IK* (prout ego cum Clavio interpretor) dum altera *GH* minor est sibi correspondente *LM*.

Patet autem nullâ mihi argumentatione opus hìc esse. Nam omnes sciunt hanc ipsam esse rectam intelligentiam Definitionis octavæ Libri quinti, juxta quam Euclides constantissimè, ac rigidissimè semper procedit. Ubi adverto (propter quosdam minùs doctos) aliud esse accusare Euclidem de quadam veluti affectatâ in suis quibusdam definitionibus obscuritate; & aliud longè diversum, quòd non ritè juxta assumpta processerit; cum magis omnes

docti consentiant accuratissimum hac in parte eundem fuisse. Unicè igitur restat hoc loco, ut substitutum a me Axioma clarissimè demonstrem.

Sic autem procedo. Vel inter possibiles æquè multiplices primæ *A*, & tertiæ *C*, ac simul inter possibiles æquè multiplices secundæ *B*, & quartæ *D*, una quæpiam reperitur *EF* multiplex primæ *A*, & *IK* multiplex secundæ *B* invicem æquales; ac simul (in eodem casu) una quædam *GH* multiplex tertiæ *C* æqualis ipsi *LM* multiplici quartæ *D*: vel nusquam talis æqualitas reperitur. Si primum; constat ex jam demonstratis ita fore *A* ad *B*, ut *C* ad *D*. Sin verò nusquam reperitur ejusmodi simul ex utrâque parte æqualitas; vel saltem ad alterutram partem reperitur, ut putà ad partem primæ *A*, vel nusquam. Si primum; ergo (ex præmissa Euclidæa majoris, ac minoris proportionis Definitione) habebit *A* ad *B* majorem, aut minorem proportionem, quàm *C* ad *D*; prout *GH* multiplex tertiæ *C* minor fuerit, aut major ipsâ *LM* multiplici quartæ *D*. Sin verò secundum; ergo ex una quidem parte v. g. ad ipsas *A* primam, & *B* secundam, contingere poterit, ut illa multiplex *EF* minor sit alterâ multiplici *IK*, dum vice versâ ex altera parte illa multiplex *GH* major est alterâ multiplici *LM*. Tunc autem (sub eadem Euclidæa Definitione) ratio primæ *A* ad secundam *B* erit minor ratione tertiæ *C* ad quartam *D*; aut vice versâ.

Igitur demonstratum manet substitutum illud Axioma; quòd nempe duæ quælibet, in quolibet eodem genere constitutæ magnitudines, rationem inter se habebunt, quæ vel æqualis sit, vel major, vel minor ratione duarum quarumlibet aliarum magnitudinum, quæ vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quolibet ipsarum proprio constitutæ sint. Quod erat onus priore loco mihi impositum.

Tran-

Transeo ad secundum onus mihi adjectum. Ubi, ad exemplum aliarum in decursu Geometriæ similium, illustrandam suscipio illam secundam duodecimi, præmissis (claritatis gratiâ) duobus sequentibus Lemmatis.

LEMMA I.

SI quępiam tertia magnitudo *C* habeat (fig. 52.) ad quartam *D* majorem rationem, quàm sit ratio primę *A* ad secundam *B*; habebit etiam illa *C* ad eandem *D*, auctam quapiam magnitudine *X*, majorem rationem, quàm sit prędicta ratio primę *A* ad secundam *B*.

Nam constat prędictam *LM*, multiplicem quartę *D*, tali magnitudine *S* augeri posse, ut adhuc minor sit illâ *GH* multiplici tertię *C*. Quare, si quarta *D* augeatur magnitudine *X*, cujus prędicta *S* ita sit multiplex, ut *LM* est multiplex quartę *D*, sive illa *IK* est multiplex secundę *B*; non ideo (ex defin. 8. 5.) ratio tertię *C* ad quartam *DX* desinet esse major ratione primę *A* ad secundam *B*; quia adhuc *GH* multiplex tertię *C* major erit illâ *LS* multiplici quartę *DX*, dum interim *EF* multiplex primę *A* major non est illâ *IK* multiplici secundę *B*. Quod erat &c.

LEMMA II.

PORRÒ autem (ne peritum Geometram in re facili molestè detineam) simili modo ostendam, quòd tertia illa magnitudo *C*; quatenus ponatur habere ad quartam *D* minorem rationem, quàm sit ratio primę *A* ad secundam *B*; habebit etiam ad eandem *D*, imminutam quapiam magnitudine *T*, minorem rationem, quàm sit prędicta ratio primę *A* ad secundam *B*. Ratio est; quia (ex 26. 5.) habebit convertendo secunda *B* ad primam *A* minorem rationem,

tionem, quàm quarta *D* ad tertiam *C*. Igitur (ut in prę-cedente Lemmate) habebit adhuc quarta *D* ad tertiam *C*, auctam quapiam magnitudine *Y*, majorem rationem, quàm ſit ſecundę *B* ad primam *A*. Quapropter (ex eâdem 26. 5.) habebit rurſum convertendo prima *A* ad ſecundam *B* majorem rationem, quàm tertia *C*, aucta illâ magnitudine *Y*, ad quartam *D*.

Quoniam verò illa magnitudo *Y* ſumi poteſt minor, ac minor, adeò ut ſit pars quędam ipſius *C* ab aliquo finito numero denominata; ac propterea ſit pars ipſius *YC* a numero unâ unitate majore denominata: ſi rurſum illius magnitudinis *D* ſumatur pars quępiam *T*, ab eodem numero denominata, a quo *Y* denominatur talis pars prędictę *YC*; erit (ex 15. 5.) *Y* ad *T*, ut *YC* ad *D*. Igitur (ex 13. 5.) ratio primę *A* ad ſecundam *B* major etiam erit ratione illius *Y* ad alteram *T*. Undè tandem fit (ex illâ 13. & prędictâ 15. 5.) ut illa tertia *C*, poſt ſublatam ab *YC* additam illam portionem *Y*, minorem adhuc habeat rationem ad quartam *D*, imminutam notâ illa magnitudine *T*, quàm ſit ratio primę *A* ad ſecundam *B*. Quod erat intentum.

PROPOSITIO PRINCIPALIS:

In qua illuſtratur ſecunda Duodecimi; ſimulque exponitur ſubſtituti Axiomatis Major forſitan opportunitas pro ſimilibus caſibus in decurſu totius Geometriæ.

DEmonſtrat ibi Clavius ex Euclide, circulos eſſe inter ſe, quemadmodum a diametris quadrata. At ſupponit (ex communi ab Interpretibus intruſo Axiomate) quòd unus circulus habebit ad aliquam magnitudinem,

quæ

quæ vel æqualis ſit, vel major, vel minor altero circulo, eam rationem, quæ eſt prædicta quadratorum a diametris. Porrò, hoc ſtante, clariſſimè exequitur intentum ſuum; quia optimè demonſtrat nullam eſſe poſſe magnitudinem aut majorem, aut minorem altero circulo, ad quam prior circulus eam habeat rationem, quam expoſuimus.

Jam ego ſubſtituo alterum a me demonſtratum Axioma, quòd unà cum duobus adjectis Lemmatis ſic applicatur in noſtrâ materia: Habebit unus circulus ad alterum circulum vel eandem rationem, quæ eſt jam dicta quadratorum a diametris, vel habebit rationem iſtâ majorem, non modò ad illum alterum circulum, ſed etiam ad aliquam magnitudinem eodem altero circulo majorem, ut putà ad poligonum aliquod eidem circumſcriptum: vel tandem habebit rationem minorem, non modò ad prædictum alterum circulum, ſed etiam ad aliquam magnitudinem eodem minorem, ut putà ad poligonum aliquod eidem inſcriptum.

Tum unuſquiſque videt, quàm facilè (ex Prop. 8. 5.) demonſtrari poſſit, non poſſe priorem circulum ad quoddam poligonum, poſteriori circulo circumſcriptum, habere majorem rationem, quàm ſit ratio illa quadratorum ex diametris; cum ſimile poligonum priori circulo circumſcriptum habeat ad jam dictum poligonum (ex 1. 12.) eam ſolam rationem, quæ eſt prædictorum quadratorum: ac ſimiliter priorem jam dictum circulum habere non poſſe ad quoddam poligonum, eidem poſteriori circulo inſcriptum, minorem rationem, quàm ſit eadem ratio prædictorum quadratorum; cum ſimile poligonum priori circulo inſcriptum habeat (ex eâdem 1. 12.) ad modò dictum poligonum eam ipſam rationem, quæ eſt illorum ſtabilium quadratorum: Atque hinc tandem fit, ut prior ille circulus (ex meo

ſub-

ſubſtituto, ac demonſtrato Axiomate cum adnexis Lemmatis) eam habere debeat ad poſteriorem circulum rationem, quæ eſt jam dictorum quadratorum.

Conſtat autem pro ſimilibus caſibus procedi ſimiliter poſſe in decurſu totius Geometriæ. Igitur ſubſtitutum, ac demonſtratum a me Axioma, cum ſuis adnexis Lemmatis, non modò utile, verùm etiam opportunius videri poteſt illo alio communi merè præſumpto, & indemonſtrato. Quod &c.

SCHOLION I.

QUia tamen in meo ſecundo Lemmate bis aſſumpſi 26. 5. quæ apud Clavium non demonſtratur ſine recurſu ad illud commune Axioma, a me repudiatum in rigore Axiomatis; eam idcirco demonſtro ex ſola Definitione Euclidæa. Si enim prima *A* (fig. 52.) ponatur habere ad ſecundam *B* majorem rationem, quàm tertia *C* ad quartam *D*; debebit quædam *EF* multiplex primæ *A* æqualis eſſe, aut major quadam *IK* multiplici ſecundæ *B*; dum interim (ex æquo) quædam *GH* æquè multiplex tertiæ *C*, ut *EF* eſt multiplex primæ *A*, vel minor eſt, vel non major quadam *LM* æquè multiplici quartæ *D*, ut *IK* eſt multiplex ſecundæ *B*. Tunc autem (conſiderando vice versâ *B* ut primam, & *A* ut ſecundam; ac ſimiliter *D* ut tertiam, & *C* ut quartam) debebit quædam *IK* multiplex primæ *B* aut æqualis eſſe, aut minor quadam *EF* multiplici ſecundæ *A*; dum interim (ex æquo) quædam *LM* æquè multiplex tertiæ *D*, ut *IK* eſt multiplex primæ *B*, vel major eſt, vel non minor quadam *GH* æquè multiplici quartæ *C*, ut *EF* eſt multiplex ſecundæ *A*. Quare (ex Def. 8. 5.) habebit ex oppoſito illa *B* ſtatuta ut prima, ad alteram *A* ſtatutam ut ſecundam, minorem rationem, quàm ſit

ratio illius *D* ſtatutæ ut tertiæ, ad alteram *C* ſtatutam ut quartam. Quod erat &c.

SCHOLION II.

NE verò acutus quiſpiam Geometra accuſare me poſſit, quaſi de induſtria in rem meam immutaverim Definitionem Euclidæam majoris, ac minoris proportionis; quoniam ego volo rationem primæ *A* ad ſecundam *B* majorem eſſe ratione tertiæ *C* ad quartam *D*; quoties (collatis inter ſe jam notis quibuſvis illis æquè multiplicibus) vel ſemel inveniatur multiplex primæ æqualis eſſe, aut major multiplici ſecundæ, dum ex æquo multiplex tertiæ vel minor eſt, vel non major multiplici quartæ; cum Euclides (in illa Def 8. 5.) unicè id aſſumat, quoties multiplex primæ major ſit multiplici ſecundæ, & non etiam multiplex tertiæ major ſit multiplici quartæ: duas afferre hìc debeo clariſſimas reſponſiones, quæ omnem dubitationem ſuſtollant.

Prior reſponſio hæc eſt; quòd ipſe Clavius (prout ſuo loco inſinuavi) prædictam Definitionem ſic interpreratur: *Quòd ſi quando è contrario multiplex primæ deficiat a multiplici ſecundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ, dicetur prima magnitudo ad ſecnndam minorem habere proportionem, quàm tertia ad quartam*. Porrò nemo omnium neſcit *majus*, ac *minus* correlativè invicem dici. Igitur, juxta hanc interpretationem, tertia magnitudo dicetur habere majorem rationem ad quartam, quàm prima ad ſecundam; ſi quando contingat, ut multiplex tertiæ vel æqualis ſit, vel major multiplici quartæ, dum multiplex primæ minor eſt multiplici ſecundæ; atque id propterea eodem jure vice versâ. Cur verò (hoc ſtante) præfatus Clavius (cujus eximium in demonſtrando nitorem magni a me fieri fateor)

fateor) non demonſtraverit eam 26. 5. ex ſola Definitione; ex eo eveniſſe vaticinor, quia aliàs non dubitabat de veritate illius ab aliis Interpretibus jam intruſi Axiomatis; unde fieri potuit, ut nobilius, aut expeditius fortaſſe cenſuerit a prima ipſa Definitione aliquantulum recedere.

Poſterior, & longè potior reſponſio eſt, quæ ſequitur. Licitum eſt unicuique definire, prout ipſi libuerit, terminos ſuæ facultatis; dum tamen ex unâ parte eos nunquam uſurpet, niſi juxta Definitiones jam ſtabilitas; & ex altera accuſari iſtæ non poſſint de confuſione unius termini cum altero. Hoc autem loco nos eſſe in caſu manifeſtè liquet. Nam conſtat, Definitiones æqualis, majoris, ac minoris proportionis traditas eſſe per membra opportunè contradictoria, inter quæ nec medium dari poteſt, nec inexpectata confuſio. Quid enim clarius, minuſque confuſioni obnoxium; quàm quòd (ſumptis quibuſvis æquè multiplicibus primæ, ac tertiæ, ac rurſum quibuſvis ſecundùm eandem, vel quamlibet aliam multiplicationem, æquè multiplicibus ſecundæ, ac quartæ) ſi fiat comparatio multiplicis primæ cum multiplici ſecundæ, ac ſimiliter multiplicis tertiæ cum multiplici quartæ, vel unà deficiant, vel unà excedant, vel unà æqualia ſint? Similiter verò: quid clarius, minùſque rurſum confuſioni obnoxium, quàm quòd (in defectu prædictæ uniformitatis) aliquando contingat, ut multiplex primæ vel major ſit, vel ſaltem æqualis multiplici ſecundæ, dum interim multiplex tertiæ vel major non eſt, vel neque æqualis multiplici quartæ; aut vice versâ? Atque hinc (occlusâ neceſſitate alterius ſubdiviſionis) clariſſimè diſtinctas habemus Definitiones æqualis, majoris, ac minoris proportionis; inter primam, & ſecundam ex una parte; ex altera verò tertiam, & quartam. Plura alia in hanc rem hìc omitto, quia ſpectantia ad ſequens in hac materia Principale Scholium.

SCHOLION III. *omnino Principale.*

NObilis quidam Nationis noſtræ Italicæ Scriptor, quem honoris cauſsâ hìc non nomino, quia verè eximium, ac magnum Geometram; nimius videri poteſt in accuſando tam frequenter Euclide ſuper Definitionibus terminorum. Aſſumo hìc præ cæteris expendendam accuſationem circa magnitudines proportionales. Præmittit laudatus Auctor neminem inficiari, quin ſexta illa Libri quinti Definitio *perplexa ſit, ignota, & ideo reſpuenda*. Rationem affert, quia *Definitio ſcientifica debet evidentiſſimè exponere naturam rei definitæ per paſſionem poſſibilem, veram, primam, & notiſſimam, per quam definitum diſtinguatur a quolibet alio ſubjecto*. At ego (cum bona venia tanti Viri) reponere poſſem, unum aliquem inter omnes eſſe Chriſtophorum Clavium, ipſi optimè notum, & aliàs in rem ſuam circa parallelas ab eodem citatum, qui tamen hanc ipſam circa proportionales magnitudines Euclidæam Definitionem maximè commendat, tueturque ab adverſis, aut extraneis interpretationibus. Sed præſtat meritum cauſæ diligentiùs inſpicere.

Admitto *Definitionem ſcientificam* tradi debere, prout ibi deſcribitur; omiſsâ dumtaxat illâ particulâ *primam*, de qua poſtea ſpeciatim agemus. Nam multiplicatio propoſitarum quatuor magnitudinum, ſimulque præſcripta collatio inter earundem multiplices, ſecundùm rationem *majoris, minoris*, aut *æqualis*, quæ ſemper, aut non ſemper conſiſtat, paſſio eſt *poſſibilis, vera*, & *notiſſima*, immo etiam (propter membra contradictoria) cognita neceſſaria, *per quam definitum diſtinguitur a quolibet alio non tali ſubjecto*. Ubi indignum foret tanto Viro; ſi quis cenſeret eum reſpicere ad infinitas ſecundùm quemlibet numerum propoſitarum magnitudinum præſcriptas multiplicationes, quas certè

certè mens humana aſſequi omnes diſtinctè non poteſt, & ſic neque inter ſe conferre ſecundùm præſcriptas rationes *majoris*, *minoris*, aut *æqualis*. Nam id neceſſarium non eſſe conſtare poteſt ex prima ſexti, prout jam evidenter declaravi.

Venio ad ly *primam*. Atque hìc (cum bona rurſum venia) ſatis mirari non poſſum, quomodo laudatus Vir provocare velit ad paſſionem *primam* in ſenſu veluti metaphyſico, ex qua nempe, tanquam primo fonte, reliquæ proprietates ratione noſtrâ promanare intelligantur. Si enim loquatur de paſſione *primâ* quò ad nos, tam certum eſt aſſignatam ab Euclide eſſe veriſſimè primam, quàm certum eſt, ejuſmodi eam eſſe, ut inde reliquæ omnes huc uſque notæ proportionalium paſſiones cum ſumma certitudine eruantur; quod utique notum eſt omnibus Geometris. In hac proinde materia diſtinguendum ſic puto. Vel agitur de ſubjecto quopiam per aliquam experientiam aliunde cognito, ut ſunt elementa vulgaria, miſta, planetæ, ſtellæ, aliaque hujuſcemodi: & in iſtis dico Definitionem tradi debere per talem paſſionem, quæ præcognita jam ſit, eamque appello Definitionem *quid rei*. At ubi agitur de ſubjecto, quod nulli communi experientiæ ſubjaceat, unde ab omni non ipſo ſupponi debeat jam diſcretum, quales procul dubio ſunt magnitudines inter ſe proportionales, & tunc dico opportunius omnino eſſe procedere per Definitionem *quid nominis*, dum ſcilicet obſervantur hæc duo. Unum eſt; ut ne talis afferatur Definitio, quæ repugnet, ſeu non comprehendat magnitudines invicem commenſurabiles, quæ nimirum ſub datis quibuſdam numeris exhiberi poſſint. Nam Definitio debet eſſe univerſalis, ac propterea non excludens magnitudines ſub tali nomenclatura jam notas. Alterum eſt, ut nulla altera paſſio de ipſo tali ſic definito præſumatur, niſi quæ ex ipſa

tali

tali ſtatuta Definitione promanet. Atque ita certiſſimè, nullo refragante, procedit in hac materiâ Euclides.

Adeò igitur hac in parte reprehendi ipſe non poteſt, ut immo a quadraginta circiter annis in fine meæ Logicæ Demonſtrativæ ſic ſcripſerim, ac demonſtraverim. *Huc ſi reſpexiſſent doctiſſimi cæteroqui Geometræ, non tantùm peccaſſent, ut in dubium revocarent Definitionem ſextam Libri quinti Euclidis de æquè proportionalibus. Scilicet deponere noluerunt omnem prævium conceptum æquè proportionalium; unde factum eſt, ut quæ recipienda erat tanquam Definitio* quid nominis, *reſpiceretur ut concluſio Theorematica aliunde confirmanda.* Paucis: In eodem meo Opuſculo clariſſimè oſtendo non Matrem, ſed Filiam plurium præcedentium Demonſtrationum eſſe debere illam *Definitionem*, quam nobis laudatus Vir tanquam origine primam commendare intendit.

Nondum tamen rem omnem a primis uſque fibris diſcuſſi. Nam adhuc reprehendi ego poſſum, quòd illam Def. 8. 5. ita aſſumpſerim juxta Clavium; quaſi unâ aliquâ vice contingere non poſſit, ut multiplex primæ æqualis ſit multiplici ſecundæ, dum multiplex tertiæ minor eſt multiplici quartæ; quin juxta quandam aliam aſſumptam ex æquo multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplicem ſecundæ, dum multiplex tertiæ non excedit multiplicem quartæ; ac propterea unus quilibet priore loco dictus caſus ſatis ſit ad decernendum, quòd ratio primæ ad ſecundam major ſit ratione tertiæ ad quartam, cum aliis ab Euclide conſequenter demonſtratis. Quare hoc loco rem totam diſcutiendam aſſumo.

Sint igitur quatuor (fig. 52.) magnitudines, prima *A*, ſecunda *B*, tertia *C*, & quarta *D*; vel omnes quatuor in eodem genere; vel priores quidem in uno, & aliæ duæ poſteriores in alio ipſarum communi genere conſtitutæ. Aſſumptæ

etiam

etiam sint earundem, juxta præscriptum, æquè multiplices *EF*, *IK*, *GH*, *LM*; reperiaturque in uno tali casu *EF* quidem æqualis ipsi *IK*, at *GH* minor ipsâ *LM*. Dico proportionem primæ *A* ad secundam *B* majorem fore (juxta voces ipsas ab Euclide adhibitas in illâ Def. 8. 5.) proportione tertiæ *C* ad quartam *D*.

Demonstratur. Nam constat primò (ex Def. 6. 5.) hunc unicum casum sufficere, ut una proportio non dicatur esse alteri æqualis. Constat secundò (ex prædictâ Def. 8. 5.) unicum item casum sufficere, ut prima *A* dicatur habere ad secundam *B* majorem proportionem, quàm sit tertiæ *C* ad quartam *D*; si probetur unam aliquam esse multiplicationem inter præscriptas, juxta quam multiplex primæ *A* excedat multiplicem secundæ *B*, dum interim multiplex tertiæ *C* non excedit multiplicem quartæ *D*. Hunc verò casum demonstrandum assumo ex illo ipso casu proposito, in quo *EF* multiplex primæ *A* æqualis est ipsi *IK* multiplici secundæ *B*, dum *GH* multiplex tertiæ *C* minor est illâ *LM* multiplici quartæ *D*.

Esto enim portio *NM* excessus quo *LM* superat illam *GH*. Tum prædicta ipsa *GH* tali magnitudine *XG* augeri intelligatur, quæ & minor sit illo excessu *NM*, & sit pars quædam tertiæ *C* ab aliquo finito numero denominata. Deinde augeatur *EF* tali magnitudine *FT*, quæ sit pars primæ *A*, qualis *XG* pars est tertiæ *C*. Quoniam igitur sermo est de multiplicibus, sive per numeros integros, sive per fractos; erit *ET* æquè multiplex primæ *A*, ut *XH* est multiplex tertiæ *C*. Præterea manebunt, ut suprà, *IK*, & *LM* æquè multiplices secundæ *B*, & quartæ *D*. Atqui *ET* multiplex primæ *A* excedet tunc illam *IK* multiplicem secundæ *B*, dum interim *XH* multiplex tertiæ *C* adeò non excedit, ut immo deficiat a correspondente *LM* multiplici quartæ *D*. Igitur a casu proposito transitur demonstrativè

tivè ad alterum, qui exprimitur ab Euclide in illâ Def. 8. 5. Quare conſtat de veritate, quam demonſtrandam aſſumpſeram.

Neque hìc remorari quempiam debet, quòd ſæpe aſſumam diviſionem cujuſvis datæ rectæ in quotlibet præſcriptas æquales partes. Nam conſtat diviſionem ejuſmodi non indigere doctrinâ æquè proportionalium, ut videri poteſt apud Clavium, qui hanc diviſionem demonſtrat poſt Prop. 40. Libri primi. Neque etiam accuſari hìc poſſum, quòd ordine quodam præpoſtero uſus fuerim; quia nempe, reſolvendo magis quàm componendo demonſtrare multa debui illuſtrando Euclidi neceſſaria. Nam facile eſt, ſi placeat, ipſum naturæ ordinem ſequi.

Et primò cenſeo Euclidæam æquè proportionalium Definitionem pulcherrimam eſſe; & quia conceptam per voces communi intelligentiæ facillimas, quales ſunt *multiplicatio*, *majus*, *minus*, *æquale*; & quia comprehendentem, ſine ullâ neceſſariâ diſcretione, omnes magnitudines, ſeu rationales, ſeu quomodolibet irrationales.

Secundò cenſeo excludendum eſſe indecorum illud Poſtulatum, ſub nomine Axiomatis intruſum; cum ſine illo, & ex ſolis aliunde notis, etiam problematicè procedi poſſit circa omnes & lineas rectas, & figuras itidem rectilineas, opportunè invicem comparatas; prout ſuprà non modò declaravi, verùm etiam ex parte demonſtravi; unde utique opportunior poſtea, ſi opus ſit, videri poſſit ſimilis præſumptio circa reliquas omnes magnitudines.

Tertiò cenſeo, ſine ullo adjecto extraneo Poſtulato, ex ſola Euclidæa æquè Proportionalium Definitione tale elici poſſe veluti Axioma, quod tutiſſimè per omnem Geometriam verſetur. Ejuſmodi autem eſt: *Omnis magnitudo ad aliam quamlibet ejuſdem generis magnitudinem habet rationem vel æqualem, vel majorem, vel minorem illâ, quæ eſt cujuſvis*

ſaſvis alterius magnitudinis ad aliam quamlibet in ſuo earundem proprio genere conſtitutam magnitudinem. Tum verò, poſt duo alia a me demonſtrata Lemmata, ſic tandem ſtabilio integrum Axioma, quod ſit immediatè utile in qualibet materia: *Habebit omnis quæpiam tertia magnitudo* C *ad quamlibet aliam quartam magnitudinem* D *in eodem cum ipsâ genere conſtitutam; vel rationem æqualem illi, quæ eſt cujuſdam primæ magnitudinis* A *ad quamlibet ſecundam magnitudinem* B, *quæ in eodem ſuo proprio cum magnitudine* A *genere conſiſtat; vel tertia illa magnitudo* C *habebit majorem rationem non modò ad magnitudinem* D, *verùm etiam ad aliquam magnitudinem majorem illâ magnitudine* D; *vel tandem habebit rationem minorem non modò ad prædictam magnitudinem* D, *verùm etiam ad aliquam magnitudinem eâdem magnitudine* D *minorem*.

Quòd autem Axioma ejuſmodi opportuniſſimum ſit, jam ſuprà oſtendi, ſumptâ experientiâ a ſecunda duodecimi. Sed idem rurſum experiri volo ſub tota ſua generalitate, circa illam 18. 5. ut magis conſtet nullam fuiſſe, in ipſo fermè Geometriæ initio, neceſſitatem illius intruſi Poſtulati.

Proponit ibi Euclides (fig. 53.) compoſitas magnitudines proportionales fore, ſi diviſæ proportionales ſint; ut putà, ita fore *AC* ad *BC*, ut *DF* ad *EF*; ſi diviſæ proportionales ſint; nimirùm, ſi ita ſit *AB* ad *BC*, ut *DE* ad *EF*.

Demonſtratur. Et primò non erit *AC* ad quandam *YC*, minorem eâ *BC*, ut *DF* ad *EF*; quia dividendo ita foret (ex præc. 17. 5.) *AY* ad *YC*, ut *DE* ad *EF*, ſive (ex 11. 5.) ut *AB* ad *BC*; cum diviſæ iſtæ magnitudines ſuppoſitæ ſint proportionales. Hoc autem abſurdum eſt, contra 8. ejuſdem 5. ex qua conſtat rationem illius *AY* ad *YC* majorem fore ratione prædictæ *AB* ad *BC*.

Simili modo oſtendetur non eſſe *AC* ad quandam *AX*, minorem prædictâ *AB*, ut *DF* ad *EF*; quia uniformiter (ex prædictis 17. & 11. 5.) deberet eſſe *AX* ad *XC*, ut *AB* ad *BC*; contra eandem 8. 5.

Tum ex meo illo Axiomate, ſub adnexis Lemmatis perfectè conſtituto, demonſtro principale intentum. Nam *AC* ad *BC* habebit vel æqualem, vel minorem, vel majorem rationem, quàm *DF* ad *EF*. At non minorem, neque majorem; quia, in qualibet vicinitate punctorum *Y*, & *X* ad punctum *B*, erit ſemper (ſtante proportionalitate jam dictarum partium) ratio illius *AY* ad *YC*, major, & ratio illius *AX* ad *XC*, minor ratione prædictæ *AB* ad *BC*, ſive *DE* ad *EF*. Igitur; ne factâ incidentiâ punctorum *Y*, & *X* in idem punctum *B*, ex liberâ permiſsâ deſtinatione, debeat eſſe ratio *AB* ad *BC* & major, & minor ratione illius *DE* ad *EF*; conſequens eſt ita fore *AC* ad *BC*, ut *DF* ad *EF*; dum ſcilicet diviſæ illæ magnitudines *AB*, *BC*, & *DE*, *EF* ſupponantur proportionales. Quod &c.

Sed quia hìc agitur de ſtabiliendo uno modo argumentandi circa magnitudines proportionales, qui frequentiſſimus eſt apud Geometras; nolo fidere (in hac ſummè abſtractâ rationum ſimilitudine) illi ſoli communi notioni; quòd, ubi conſiſtitur in eodem infimo genere, non poſſit ſucceſſivè ordinatim tranſiri de majori in minus, niſi tranſeundo per æquale. Itaque ſic rurſum argumentor ex eodem meo, noviter illuſtrato Axiomate. Nequit *AC* ad *BC* habere v. g. majorem rationem, quàm *DF* ad *EF*, quin majorem etiam habeat rationem ad quandam *XC*, majorem prædictâ *BC*, dum nempe aliàs ſupponatur ita eſſe *AC* ad *BC*, ut *DF* ad *EF*. Hæc autem ſimul ſtare non poſſe, ita demonſtro.

Quandoquidem rurſum (ex illo eodem meo Axiomate)

mate) haberet AC ad quandam TC, majorem illâ XC, rationem adhuc majorem, quàm ſit ejuſdem DF ad EF; atque ita ſemper uſque ad ipſum punctum A. Hoc autem ex ipſo Euclide certiſſimè abſurdum eſt; quòd nempe magnitudo aliqua ad æqualem habeat majorem rationem, quàm tota quæpiam DF ad unam ſui partem EF. Unicè igitur reſtat, ut harum rationum majorum unus quiſpiam ſit terminus, ſi non intrinſecus, at ſaltem merè extrinſecus, ut putà in eo puncto T; adeò ut nempe habeat quidem AC ad TC rationem minorem, quàm DF ad EF; ſed rurſum ad quamlibet, minorem illâ TC, majorem rationem obtineat. Verùm hoc etiam repugnat meo illi Axiomati. Si enim habet AC ad TC minorem rationem, quàm DF ad EF, habebit etiam AC ad aliquam, quæ minor ſit eâdem TC, minorem adhuc rationem illius DF ad EF. Non igitur ſubſiſtere poteſt terminus ille extrinſecus conſtitutus in illo quolibet deſignato puncto T. Inde autem fit, ut ratio AC ad BC nequeat eſſe major ratione DF ad EF. At ſimili modo oſtendetur rationem DF ad EF majorem non eſſe ratione AB ad BC. Quare (ex illo meo Axiomate) unicè reſtat, ut ratio illius DF ad EF non niſi æqualis ſit rationi ipſius AC ad BC, dum ſcilicet diviſæ magnitudines AB, BC proportionales ſupponantur diviſis magnitudinibus DE, EF. Quod erat &c.

Atque hæc ſatis jam ſunt ad oſtendendam illius Definitionis Euclidææ non modò certitudinem, verùm etiam opportunitatem ad repellendum intruſum illud, ſub nomine Axiomatis, Poſtulatum.

LIBRI SECUNDI

PARS SECUNDA.

In qua expenditur quinta Definitio Libri sexti Euclidæi.

DEfinitio est, quæ sequitur: *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem.*

Definitionem hanc egregiè more suo elucidat Clavius, qui nempe ad Def. 10. Lib. 5. jam explicaverat, quo sensu una ratio dicatur penes Euclidem alterius cujusdam *duplicata*, *triplicata*, atque ita consequenter. Sed placet rem totam a primis usque initiis diligentiùs scrutari; nimirum hìc addendo, quæ in priore hujus Libri parte videri potuissent importuna.

Nam prælaudatus, Nationis nostræ Italicæ, eximius Geometra ipsam etiam Libri quinti Def. 3. accusat, ubi legimus: *Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam, secundùm quantitatem, habitudo*; ac similiter Def. 4. ubi habemus: *Proportionem esse harum rationum similitudinem*. Quasi verò (inquam ego) Definitiones ejusmodi quidquam amplius continere deberent, præter abstractos quosdam terminos, grammatico more ibi explicatos, sed postea per voces communi usu notissimas philosophicè explicandos, sine periculo ullius confusionis; prout fit in Definitionibus sextâ, & octavâ ejusdem Libri.

Quid verò, si latinus interpres malè posuerit *quantitatem*, cum magis debuerit scribere *quotitatem*, prout interpretatur, ac demonstrat ex Græco Euclidæo textu, omnimodè laudandus Joannes Vallisius? Tunc enim multò magis,

magis, etiam ante ſubſequentes Definitiones, promptum foret intelligere non loqui ibi Euclidem de qualicunque habitudine, ſeu relatione unius magnitudinis ad alteram, ſed de illa dumtaxat, juxta quam una vel eſt alteri æqualis, vel tali quodam modo alterâ major, aut minor. Ubi; ne quis erraret circa magnitudines invicem comparatas, notumque faceret ſe loqui de magnitudinibus ejuſdem generis; ſubdit Definitionem quintam, in qua dicit: *Rationem inter ſe habere magnitudines, quæ poſſunt multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare:* Unde utique conſtat nullam eſſe v. g. cujuſvis lineæ rationem ad quamlibet ſuperficiem, quia nulla linea quantumvis multiplicata ſuperare poteſt vel minimam quampiam ſuperficiem.

Quo loco fateor præclarum Geometram Chriſtianum Volfium bene obſervare in ſuis Elementis Arithmeticæ Cap. III. Schol. I. quòd tertia illa Euclidæa Definitio *videri poteſt incompleta*; quia nempe *dantur & aliæ magnitudinum relationes, quæ ſunt conſtantes, nec tamen in rationum numero continentur:* Ubi ex Trigonometria in exemplum affert relationem *ſinus recti ad ſinum complementi*. Quamvis enim certiſſimum ſit talem eſſe habitudinem, ſeu relationem cujuſvis ſinus recti ad ſinum correſpondentis complementi, ut quadrata utriuſque ſinus ſimul ſumpta æquent quadratum ſinus totius; aliunde tamen ſcimus non eandem eſſe *rationem* cujuſvis ſinus recti ad ſinum correſpondentis complementi, quæ eſt alterius ſinus recti ad ſinum ſibi correſpondentis complementi. Unde infert non idem eſſe hac in re *habitudinem*, ſeu *relationem* ex una parte, & ex altera *rationem*, juxta communem Geometrarum intelligentiam.

Nihilominus dico, neque ex hoc capite accuſari poſſe Euclidem. Nam in ſua Definitione dicit; mutua *quædam* ſecundùm quantitatem *habitudo*. Qui autem dicit

quan-

quandam habitudinem, certè non vult comprehendere omnes habitudines, seu relationes. Et hìc rursum expendere debeo ly *secundùm quantitatem*. Quis enim putet loqui ibi Euclidem de *quantitate* metaphysico more expensâ, juxta quam unum corpus dicitur alteri naturaliter impenetrâbile; & non magis loqui de *extensione* in suo tali quodam genere, juxta quam una magnitudo dicitur, relatè ad alteram, vel æqualis, vel major, vel minor? Et sanè ad interrogationem *quanta sit* quæpiam linea recta, respondebitur v. g. palmaris, bipalmaris, tripalmaris, aut alio quovis modo, cum relatione (seu per numeros integros, seu per fractos, sive etiam per minutiam) ad palmum, aut ad aliam longitudinem jam notam. Atque ita uniformiter circa alias cujusvis generis magnitudines.

Unde infero tertiam illam Def. Euclidæam nulli querelæ obnoxiam esse, etiamsi inspiciatur seorsùm a consequentibus. Quòd enim prælaudatus Christianus Volfius *rationem* definiat *esse eam homogeneorum relationem, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius sine tertio homogeneo assumpto*, verissimè quidem dicit; quia hinc manifestum fit, non omnem *relationem*, etiam constantem, unius talis magnitudinis ad alteram, ut putà sinus recti ad sinum complementi, esse *rationem*; cum quantitas sinus complementi determinari non possit ex quantitate sinus recti, nisi assumatur tertium homogeneum, quale est sinus totus: sed non ideo reprehendi hinc potest Euclides, quasi *incompletè* definiverit; cum hæc ipsa discretio manifesta sit in illis suis vocibus *secundùm quantitatem*, acceptâ nimirum *quantitate* pro *quotitate*, prout certissimè intelligi sic debere paulò ante declaravi, sumpto argumento ex interrogatione super *quantitate* talis cujusdam propositæ magnitudinis. Atque ita a prima usque ætate intellectum a me fuisse Euclidem, fateri omnibus possum. Hoc autem stante

vix

vix intelligo, quomodo dubitari poſſit, an ex quantitate unius magnitudinis decerni poſſit immediatè quantitas alterius, dum aliàs nota ſit prædicta unius ad alteram *ſecundùm quantitatem* habitudo: Nam qualiter una illarum nota erit, taliter rurſum, ſine alio extrinſecùs aſſumpto, nota erit etiam altera ex illa ſola præcognita habitudine.

Poſt hæc gradum facio ad illam quintam Def. ſexti: Ubi dico falſiſſimum eſſe, quòd ſub ſpecie ſimplicis Definitionis Axioma quoddam intrudatur, non permittendum ſine demonſtratione.

Et primò: Si ſermo ſit de magnitudinibus in ſuo tali quodam ordine commenſurabilibus, ſive rationem inter ſe habentibus, quæ eſt alicujus numeri (aut integri, aut fracti, aut cujuſvis minutiæ) ad alium quempiam hujuſmodi numerum, ita ut nempe prima quædam magnitudo *A* per talem quempiam ſeu numerum, ſeu minutiam multiplicata, æqualis fiat ſecundæ magnitudini *B*; adeò clarè, & immediatè oſtendetur veritas illius Definitionis, ut etiam Axiomatis loco æquiſſimè cenſeri poſſit.

Sint enim quatuor quælibet (fig. 54.) ejuſdem generis magnitudines, prima *A*, ſecunda *B*, tertia *C*, & quarta *D*, prædicto modo invicem rationales. Dico rationem primæ *A* ad quartam *D* componi ex rationibus magnitudinum intermediarum, hoc eſt primæ *A* ad ſecundam *B*, ſecundæ *B* ad tertiam *C*, & tertiæ *C* ad quartam *D*. Scilicet dico magnitudinem *A* toties contineri in magnitudine *D* (ſumpto ly *toties* pro quolibet numero, ſive integro, ſive fracto, ſive unitate, aut qualibet ipſius unitatis minutiâ) quotus fuerit numerus ortus, aut quælibet unitatis minutia, ex ductu inter ſe numerorum prædicto modo ſumptorum, qui ſignificent quoties magnitudo *A* continetur in magnitudine *B*, hæc in magnitudine *C*, & iſta in magnitudine *D*. Sint porrò iſti numeri *T*, *X*, *Y*, qui inter

ſe

se ducti procreent numerum *Z*.

Jam sic. Constat, quòd magnitudo *A* multiplicata per numerum *T* facit magnitudinem *B*, & hæc multiplicata per *X* facit magnitudinem *C*, quæ rursum multiplicata per *Y* facit magnitudinem *D*. Igitur *A* in *T*, in *X*, in *Y* producit magnitudinem *D*. Ponitur autem, quòd numeri *T*, *X*, *Y* inter se multiplicati faciant numerum *Z*. Igitur magnitudo *A* multiplicata per numerum *Z* facit eam magnitudinem *D*. Rursum constat, quòd numerus *T* exprimit illam quantitatem, seu *quotitatem*, juxta quam prima magnitudo *A* taliter se habet ad secundam magnitudinem *B*, nimirum prout unitas se habet ad eum numerum *T*; atque ita uniformiter de secunda magnitudine *B* relatè ad tertiam *C*, prout unitas se habet ad eum numerum *X*; ac tandem de hac tertia *C* ad quartam *D*, prout unitas se habet ad reliquum numerum *Y*.

Simili modo ostendetur exhiberi ab eo numero *Z* (qui nempe oritur ex ductu prædictorum inter se numerorum *T*, *X*, *Y*) illam quantitatem, seu *quotitatem*, juxta quam prima magnitudo *A* taliter se habet ad quartam magnitudinem *D*, nimirum prout unitas se habet ad eundem numerum *Z*. Cum ergo hic numerus *Z* compositus sit ex prædictis numeris *T*, *X*, *Y*, manifestum fit nos esse in casu illius Def. Euclidææ. Si enim quantitates, seu quotitates rationum primæ *A* ad secundam *B*, secundæ *B* ad tertiam *C*, ac tandem tertiæ *C* ad quartam *D*, invicem multiplices, gignaturque quantitas, seu quotitas *Z*, hæc porrò exhibebit rationem primæ magnitudinis *A* ad quartam *D*, rationem idcirco compositam ex rationibus magnitudinum intermediarum. Quod utique erat demonstrandum.

Tum secundò: non diffiterer istud ipsum demonstrari a me posse, dum sermo sit de magnitudinibus quomodolibet irrationalibus. Sed non vacat tantum laborem im-

pen-

perdere in re non necessariâ. Nam dico non nisi iniquè hac in parte Euclidis nomen vexatum fuisse; quia nempe (ad ipsius usum) nullam ibi veritatem proponit præter eam, quæ in usu *puri nominis* consistit. Ad quod explicandum, seu mavis demonstrandum, capere licet exemplum ex Propos. 23. lib. 6. in qua Euclides demonstrat æquiangula parallelogramma eam inter se rationem habere, quæ ex rationibus laterum componitur.

Sint enim duo talia parallelogramma (fig. 55.) unum *ABCD*, & alterum *CEFG* ita constituta, ut anguli ad punctum *C* sint æquales, ac propterea in unam rectam lineam coeant ipsæ *BCG*, & *DCE*: Tum compleatur alterum parallelogrammum *BCEH*, fiatque, ut latus *BC* unius parallelogrammi ad latus *CG* alterius, ita recta quæpiam linea *I* ad *K*, & ut latus *DC* ad latus *CE*, ita illa *K* ad alteram *L*. Jam sic. Constat (ex 1. sexti) parallelogrammum *AC* ita fore ad parallelogrammum *CH*, ut basis *DC* ad basim *CE*, sive (ex 11. quinti) ut *I* ad *K*. Rursum, eodem jure, parallelogrammum *CH* ita erit ad parallelogrammum *CF*, ut basis *BC* ad basim *CG*, sive (ex eâdem 11. quinti) ut *K* ad *L*. Igitur ex æquo (nimirum ex 22. quinti) ita erit parallelogrammum *AC* ad parallelogrammum *CF*, ut *I* ad *L*.

Atque id est, quod intelligit Euclides, dum dicit rationem unius parallelogrammi ad alterum æquiangulum parallelogrammum componi ex rationibus laterum: Id enim unicè vult, ut ratio prædicta æqualis sit rationi cujusdam rectæ lineæ *I* ad alteram *L*, inter quas interponatur quæpiam *K*, per quam continuentur duæ rationes æquales rationibus prædictorum laterum; dum scilicet ita sit *I* ad *K*, ut latus *DC* unius parallelogrammi ad latus *CE* alterius; & rursum ita sit *K* ad *L*, ut est prioris parallelogrammi alterum latus *BC* ad alterum posterioris parallelogrammi latus *CG*.

Eodem planè modo interpretari debemus Propoſ. 19. & 20. ejuſdem Sexti, in quibus legimus ſimilia triangula, & quælibet ſimilia itidem poligona, duplicatam habere inter ſe eam rationem, quæ eſt lateris homologi ad latus homologum. Ibi enim nihil aliud demonſtrari debere intelligitur, niſi quòd ratio unius trianguli, aut poligoni, ad alterum ſimile triangulum, aut poligonum, æqualis ſit rationi cujuſdam rectæ lineæ *I* ad alteram *L*, inter quas interpoſita ſit quæpiam *K*, per quam continuentur duæ rationes æquales illi, quæ eſt cujuſdam lateris unius trianguli, aut poligoni ad latus homologum alterius trianguli, aut poligoni.

Præterea (ut nullus ſuperſit dubitationi locus) ſimili itidem modo interpretari debemus Propoſ. 33. undecimi, ubi legimus: Similia ſolida parallelepipeda eſſe inter ſe in triplicata ratione laterum homologorum. Nam ibi nihil aliud demonſtrandum aſſumitur, niſi quòd ratio unius parallelepipedi ad alterum ſimile parallelepipedum æqualis ſit rationi cujuſdam rectæ lineæ *H* ad alteram *L*, inter quas duæ quædam *I*, & *K* interpoſitæ ſint, per quas continuentur tres rationes æquales illi, quæ eſt cujuſdam lateris unius parallelepipedi ad latus homologum alterius parallelepipedi.

Sed nolo diſſimulare, quòd jam inutilis fieret illa Definitio, ſuper qua diſputamus. Nam reſpondeo voluiſſe utique Euclidem rationem veluti reddere nominis ab ipſo aſſumpti, ita ut nempe ad eum modum una aliqua ratio intelligatur ex pluribus rationibus componi, quo unus quiſpiam numerus ex pluribus numeris invicem multiplicatis exoriri intelligitur, & componi; ſed eâ tamen nuſquam violatâ lege, ut nunquam ad demonſtrandum eam definitionem adhibeat, niſi antea ita omnes terminos diſponat, ut locum habere poſſit demonſtratio *ex æquo* juxta præ-

prædictam 22. quinti. Atque ita ſemper faciunt omnes magni Geometræ tam veteres, quàm recentiores; quod ſanè neceſſarium præſertim eſt, ubi componendæ invicem ſint rationes magnitudinum diverſorum generum, ut putà linearum, planorum, ſolidorum, velocitatum, temporum, & ejuſmodi. Tunc enim certum eſt has omnes rationes ex utrâque parte reduci primùm debere ad unam aliquam talium magnitudinum ſpeciem, ut poſtea detur locus alicui argumentationi *ex æquo*; nimirum vel ad probandam (ex illa 22. quinti) æqualem rationem inter extremas; vel ad probandam inter eaſdem unam rationem alterâ majorem, ex unâ aliquâ conſequentium ejuſdem Libri quinti Propoſitionum. Unde tandem conſtat, illam 5. Def. ſexti nulli difficultati obnoxiam eſſe; utpotè quæ *ſolius nominis* impoſitionem decernit, nulli poſtea ad demonſtrandum uſui futuram.

APPENDIX.

ATque hìc opportunum eſt obſervare, nullius Analyticæ ope decerni poſſe rationem datæ cujuſdam figuræ, etiamſi rectilineæ, ad alteram quamlibet datam figuram rectilineam, niſi priùs ſtabilitum ſupponatur Euclidæum illud Axioma, unde pendet doctrina parallelarum.

Demonſtratur. Præmitto autem communes eſſe Analyticæ, & Arithmeticæ vulgari, regulas omnes additionis, ſubtractionis, diviſionis, & extractionis radicum; quouſq; nempe in eodem infimo jam ſtabilito entis genere conſiſtitur. At ubi tranſire oporteat de genere in genus, ut putà (per multiplicationem, ſeu ductum cujuſdam rectæ lineæ in alteram rectam lineam) de mera longitudine in ſuperficiem planam; tum conſimiliter de hac (per quan-

dam rursum rectam lineam multiplicatâ) in solidum trinæ dimensionis; atque ita ascendendo per novas multiplicationes ad altiores conceptibiles gradus plurium dimensionum; quod utique uniformiter valet de divisione, per quam ad inferiores gradus descenditur: Tunc enimverò censeo, nullum ab Analytica subministrari posse Principium, quo fulciantur præscriptæ ab ipsa operationes ad assequendam veritatem.

Nam constat duas intelligi posse figuras rectilineas, unam (fig. 55.) *DABC*, & alteram *CEFG*; quarum & noti sint anguli ad puncta *D*, *C*, *G*, ut putà omnes quatuor recti; & rursum nota sint perpendicula *DA*, *CB*, *CE*, *GF*, nimirum æqualia singula uni palmo; ac tandem notæ sint ipsæ bases *DC*, *CG*; prior quidem v. g. unius palmi, & altera duorum. Ex his autem rursum constat, datas fore positione ipsas rectas *AB*, *EF*, nimirum jungentes ipsarum extrema puncta, quæ supponuntur data in sua tali positione.

His positis: audire cupio ab Analyticâ Principium aliquod, ex quo decerni possit ratio prioris rectilineæ figuræ *DABC* ad alteram itidem rectilineam *CEFG*. Respondebit quispiam rationem esse, ut basis *DC* ad basim *CG*; addetque demonstrari id posse (jure quodam Analyticæ proprio) ex 18. septimi; ubi habemus, numeros genitos ex duobus, unum quempiam multiplicantibus, eandem inter se habere rationem, quam multiplicantes.

Et ego quidem non renuo jus quoddam hac in parte proprium Analyticæ præ Arithmeticâ vulgari. Itaque agnosco rectam *DA*, quæ ad angulos rectos semper excurrat super rectâ *DC*, quoad usque congruat ipsi *CB*, toties multiplicari, quot sunt quomodolibet distinguibilia puncta in eâdem *DC*; adeò ut propterea superficies quædam *DABC* intelligi possit genita ex illâ *DA* multiplicatâ

tâ per *DC*. Tum ſimili rurſum modo agnoſco, rectam *CE*, quæ ad angulos rectos ſemper excurrat ſuper rectâ *CG*, quoad uſque congruat ipſi *GF*, toties multiplicari, quot ſunt quomodolibet diſtinguibilia puncta in eâ *CG*; adeò ut ſimiliter ſuperficies quædam *CEFG* intelligi poſſit genita ex prædictâ *CE*, ſive ipſius æquali *DA*, multiplicatâ per *CG*.

At hoc opus, hic labor: Decernere enim oportet, quænam ſint iſtæ ſuperficies genitæ, una *DABC*, & altera *CEFG*, circa quas demonſtratum agnoſco fore eas inter ſe, ut baſes *DC*, *CG*.

Si enim præſumere quis velit non alias eſſe modò dictas ſuperficies, præter illas, quas jam ſuppoſuimus concludi a duabus illis rectis, unâ *AB*, & alterâ *EF*, jungentibus extremitates illorum quatuor æqualium perpendiculorum, quæ ſupponuntur in eodem plano inſiſtere rectis *DC*, *CG*: Is enimverò convinci poſſet de manifeſtâ petitione principii; cum id ipſum maximè inquiratur, an ſcilicet utraque linea jungens extremitates etiam intermediorum perpendiculorum ſit ipſa etiam linea recta, & non magis aut ſemper cava, aut ſemper convexa versùs partes ſuæ baſis, juxta diverſam hypotheſin aut anguli acuti, aut anguli obtuſi; quod quidem ſatis conſtat ex dictis in ſecunda Parte mei primi Libri.

Præterea non renuo, quin demonſtrari uniformiter poſſit ab Analyticâ, quòd ratio unius ſuperficiei genitæ *DABC* ad alteram ſuperficiem genitam *CEFG* (quamvis ipſæ *DA*, & *CE* ponantur invicem inæquales) componatur ex rationibus perpendiculi *DA* ad perpendiculum *CE*, ſeu perpendiculi *CB* ad perpendiculum *GF*; ac rurſum baſis *DC* ad baſim *CG*; dum ſcilicet ipſæ *AB*, *EF* ponantur jungere extremitates omnium æqualium perpendiculorum a ſubjectis baſibus erectorum: Atque id inſuper

multis

multis aliis modis. At ſemper manebit quæſtio circa jungentes extrema puncta illorum perpendiculorum. Quapropter tandem ſtatuo recurri ſemper oportere ad Geometriam, quæ nempe ex illo ſtabilito Euclidæo Axiomate demonſtret naturam talium linearum.

Ex quibus omnibus ſatis conſtat, nullius Analyticæ ope decerni poſſe rationem datæ cujuſdam figuræ, etiamſi rectilineæ, ad alteram quamlibet datam figuram rectilineam, niſi priùs ſtabilitum ſupponatur Euclidæum illud Axioma, unde pendet doctrina parallelarum. Quod &c.

Atque hæc ſufficere jam poſſunt ad vindicandum Euclidem a nævis eidem objectis.

FINIS TOTIUS OPERIS.



TABULA I.

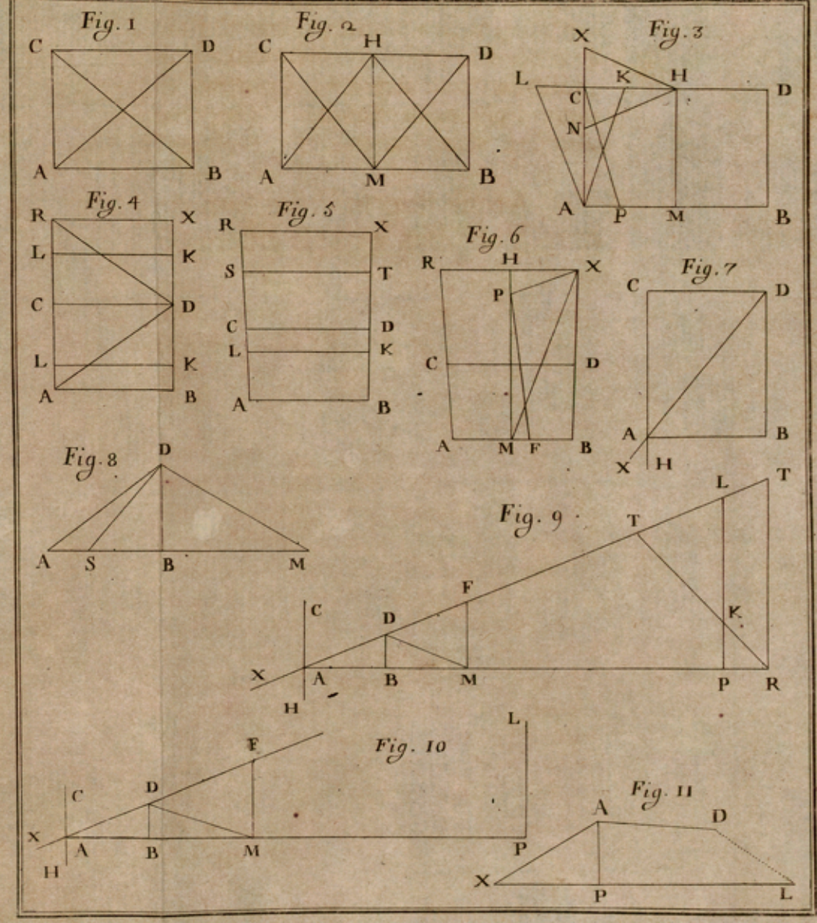


Fig. 1
C D A B
Fig. 2
C H D A M B
Fig. 3
X L K H C N D A P M B
Fig. 4
R X L K C D L K A B
Fig. 5
R X S T C D L K A B
Fig. 6
R H X P C D A M F B
Fig. 7
C D A B X H
Fig. 8
D A S B M
Fig. 9
L T T K C D F X A B P R
Fig. 10
L F C D X A B M P H
Fig. 11
A D X P L

TABULA II.

Fig. 12

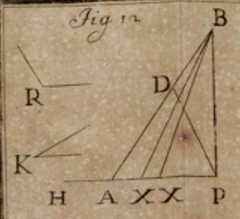


Fig. 13



Fig. 14

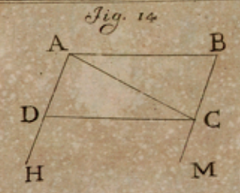


Fig. 15

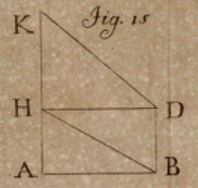


Fig 16

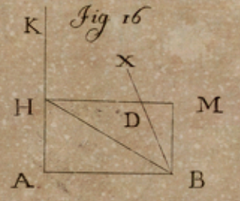


Fig. 17

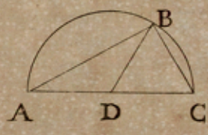


Fig. 18

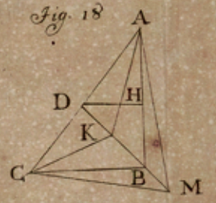


Fig. 19

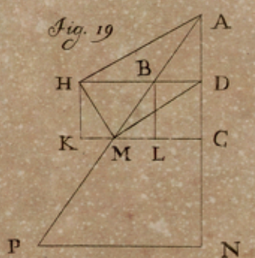


Fig. 20

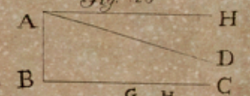


Fig. 21



Fig. 22

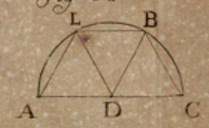
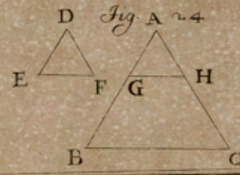


Fig. 23



Fig. 24



TABULA III.

Fig. 25.

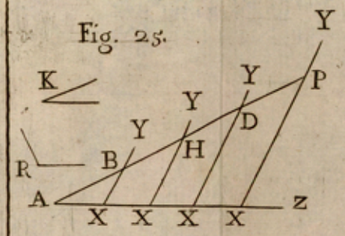


Fig. 26.

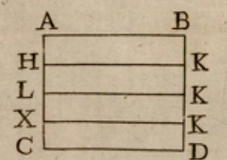


Fig. 27.

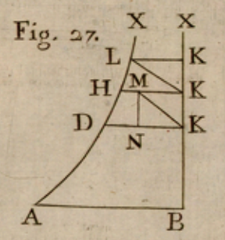


Fig. 28.



Fig. 29.

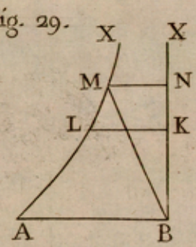


Fig. 30.

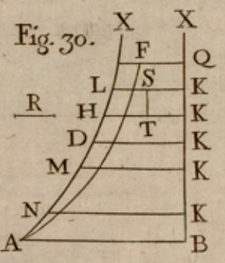


Fig. 31.

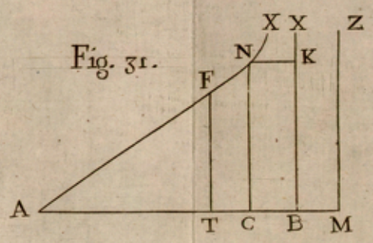
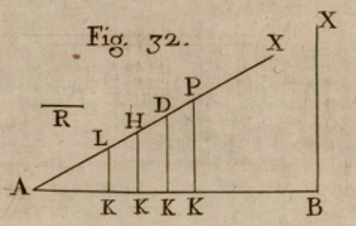


Fig. 32.



TABULA IV.

Fig. 33.

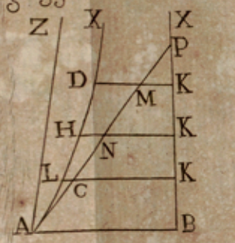


Fig. 34

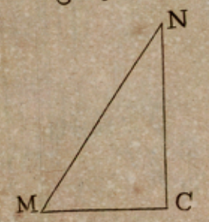


Fig. 35

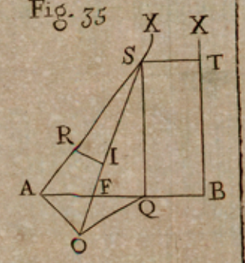


Fig. 36.



Fig. 37.

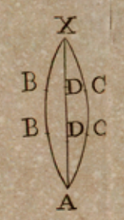


Fig. 38.



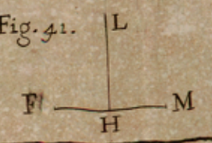
Fig. 39.



Fig. 40.



Fig. 41.



TABULA IV.

Fig. 33.



Fig. 34

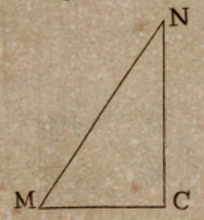


Fig. 35

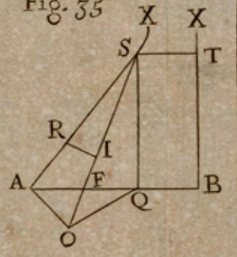


Fig. 36.



Fig. 37.

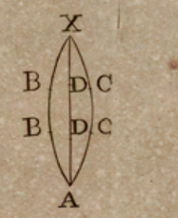


Fig. 38.



Fig. 39.



Fig. 40.

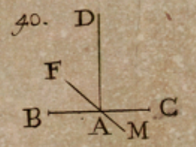
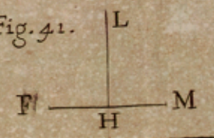


Fig. 41.



TABULA V

Fig. 42.

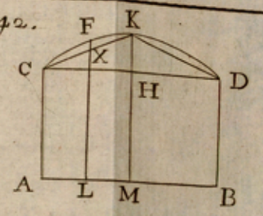


Fig. 43.

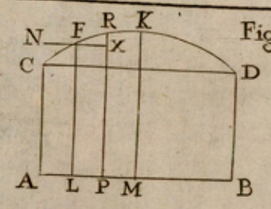


Fig. 44.

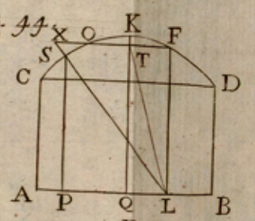


Fig. 45.

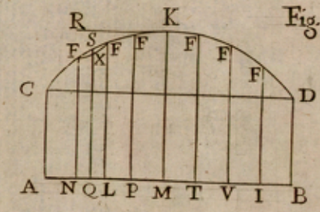


Fig. 46.

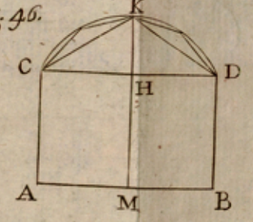


Fig. 47.

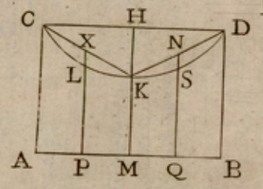
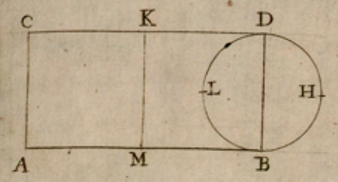


Fig. 48.



TABULA. VI

Fig. 49.

Fig. 50.

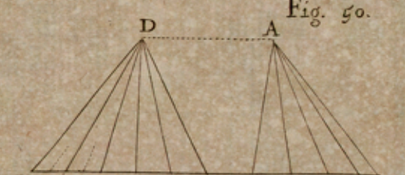


Fig. 51

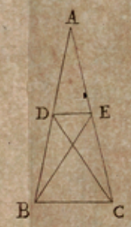


Fig. 52

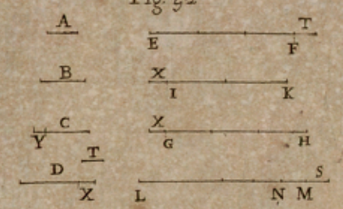


Fig. 53

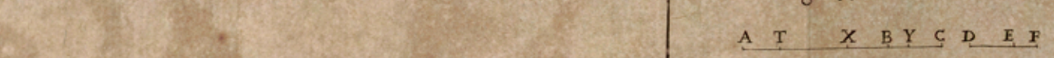


Fig. 54



Fig. 55.

