

EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

Comitato scientifico:

Simonetta Bassi
Università di Pisa

Umberto Bottazzini
Università Statale di Milano

Michele Ciliberto
Scuola Normale Superiore di Pisa

Giuseppe Da Prato
Scuola Normale Superiore di Pisa

Paolo Freguglia
Università di L'Aquila

Mariano Giaquinta
Scuola Normale Superiore di Pisa, Centro di ricerca matematica "Ennio De Giorgi", Presidente

Angelo Guerreggio
Università Bocconi di Milano

Michele Marini
Fourweb Service srl

Stefano Marmi
Scuola Normale Superiore di Pisa, tesoriere

Massimo Mugnai
Scuola Normale Superiore di Pisa

Pietro Nastasi
Università di Palermo

Luigi Pepe
Università di Ferrara



The image shows the front cover of an antique book. The cover is bound in marbled paper with a dark blue and white pattern, accented with small brown spots. The spine is made of dark brown leather and features several raised bands. The title is embossed on the spine in a serif font.

M. G. A. C. Y. E. S. I
INSTITUTIONI
IN LITICHE

2

Segorini

ISTITUZIONI ANALITICHE

AD USO

DELLA GIOVENTU' ITALIANA

DI D.^{NA} MARIA GAETANA

A G N E S I

MILANESE

Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.

TOMO II.



IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

INSTITUZIONI

ANALITICHE

LIBRO SECONDO

Del Calcolo Differenziale.

L'Analisi delle quantità infinitamente piccole, che in altro modo Calcolo Differenziale, o Calcolo delle Flussioni suole chiamarsi, è quella, che versa intorno alle differenze delle quantità variabili, di qualunque ordine sieno esse differenze. Questo calcolo contiene i Metodi delle Tangenti; de' Massimi, e Minimi; de' Flessi contrarj, e Regressi delle Curve; de' Raggi Osculatori ec., e però dividendo in più Capi tutta la Materia sia.

C A P O I.

*Dell' Idea de' Differenziali di diversi ordini,
e del Calcolo de' medesimi.*

1. **C**OL nome di quantità variabili si vogliono significare quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento, e si concepiscono come fluenti, e per così dire, generate da un moto continuo.

S'intenda (*Fig. 1.*) la retta ABC , generata dal moto del punto A , prodotta in infinito, sopra cui insista, facendo un qualunque angolo, l'altra retta BD , e suppongasi, che mentre il punto B giugne da B in C , seco portando la linea BD sempre a se stessa parallela da BD in CE , il punto D trascorra lo spazio FE con tal legge, che descriva la curva ADE ; egli è chiaro, che l'assisse AB , AC , siccome l'ordinate BD , CE , e gl'archi AD , AE saranno quantità continuamente crescenti, e decrescenti, e però variabili.

2. Quantità costanti sono quelle, che nè crescono, nè calano, ma si concepiscono per determinate, ed invariabili, come i Parametri, gl' Assi, o Diametri ec.

Le costanti si denominano colle prime lettere dell'

Alfa-

Alfabeto, e le variabili colle ultime in quella guisa, che si è fatto nell'Algebra Cartesiana rispetto alle quantità note, ed incognite.

3. Si chiama differenza, o flussione di una quantità variabile quella porzione infinitesima, cioè tanto piccola, che ad essa variabile abbia proporzione minore di qualunque data, e per cui crescendo, o diminuendosi la medesima variabile, possa ciò non ostante assumersi per la stessa di prima.

Sia (Fig. 2., e 3.) la curva AM , il di cui asse, o diametro AP ; e si prenda nella AP prodotta una porzione infinitesima Pp , sarà essa la differenza, o sia la flussione dell'assisa AP , e si potranno considerare per eguali le due AP , Ap , non essendovi proporzione tra la quantità finita AP , e la porzione infinitesima Pp . Da' punti P , p si alzino le due ordinate parallele PM , $p m$ in qualunque angolo, e si tiri la corda mM prodotta in B , e la retta MR parallela ad AP ; poichè sono simili i due triangoli BPM , MRm , sarà BP , $PM :: MR$, Rm , ma le due quantità BP , PM sono finite, ed MR è infinitesima, adunque sarà pure infinitesima la Rm , e però sarà essa la differenza dell'ordinata PM ; per la stessa ragione sarà infinitamente piccola la corda Mm , ma (come dimostrerò in appresso) la corda Mm non si distingue dall'archetto, e si può prendere indifferentemente l'uno per l'altra, adun-

adunque sarà l'archetto Mm quantità infinitesima, e però la differenza dell'arco AM della curva. Da ciò chiaramente si vede, che anco lo spazio $PMmp$, chiuso dalle due ordinate PM , pm , dalla infinitesima Pp , e dall'archetto infinitesimo Mm , sarà la differenza dell'area AMP compresa fra le due coordinate AP , PM , e la curva AM ; e condotte le due corde AM , Am , sarà il triangolo mistilineo MAM la differenza del segmento AMS chiuso dalla corda AM , e dalla curva ASM .

4. La Caratteristica, con cui soglionfi esprimere le differenze, è la lettera d , quindi posta l'assissa $AP=x$, sarà Pp , o $MR=dx$; e similmente posta l'ordinata $PM=y$, sarà $Rm=dy$, e posto l'arco di curva $ASM=s$, lo spazio $APMS=t$, il segmento $AMS=u$, sarà $Mm=ds$, $PMmp=dt$, $AMm=du$, e tutte queste sono differenze prime, o flussioni del primo ordine.

E si avverta, che le predette differenze si scrivono col segno positivo, se per esse crescano le variabili loro, e col negativo se le variabili calino. Così nella curva NEC (Fig. 4.) essendo $AB=x$, $BF=dx$, $BC=y$, sarà $DC=-dy$, differenza negativa della y .

Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl' Antichi de' Poligoni inscritti, e circoscritti,

scritti, si può chiaramente vedere dal solo idearsi, che l'ordinata MN (Fig. 4.) si vada continuamente accostando alla BC , finchè con essa coincida; ora egli è chiaro, che prima, che queste due linee coincidano, avranno tra loro una distanza, ed una differenza inassegnabile, cioè minore di qualunque quantità data; in tale posizione sieno BC , FE , adunque BF , CD faranno quantità minori di qualunque data, e però inassegnabili, o sia differenze, o flussioni.

Anzi con la sola comun Geometria è sicuro, che non solo queste, ma altre quantità minime di classi infinite entrano realmente a formare l'estensione geometrica. Si danno in geometria le quantità incommensurabili, ed infinite di genere, come è noto a' Geometri, ed agl' Analisti, dunque si danno le grandezze infinitesime di varj ordini.

Ed in fatti sia a cagion d'esempio (Fig. 5.) AB il lato, ed AC il diametro d'un quadrato, le quali due linee per l'ultima proposizione del libro 10. di Euclide sono fra loro asimmetre, vale a dire incommensurabili. Dico pertanto: che non sono esse rese tali da una qual si sia finita lineetta CE , per quanto piccola essa si prenda, ma bensì da un'altra infinitamente minore, cioè della classe delle infinitesime.

Fingasi, che la linea EC finita renda, s'egli è possibile, le due AB , AC asimmetre; in conseguenza
la

la restante AE sarà commensurabile al lato AB . Sia la retta F comune loro misura, la quale non può mai essere eguale alla EC , altrimenti sarebbero commensurabili il lato, ed il diametro; sarà adunque, o maggiore, o minore.

Nel primo caso si sottragga F da EC , quante volte si può, ed il residuo sia GC . E perchè F misura AB , AE , ed anco EG , le due rette AB , AG avranno fra loro una proporzione razionale, conseguentemente non era la grandezza EC , che facesse incommensurabili le AB , AC , ma una quantità più piccola, per esempio la GC , la quale però è finita, essendosi dalla finita EC sottratta una, o più fiate la finita F . Dividasi F per metà, ed indi ancora per metà sino a tanto, che si venga ad una parte aliquota di F minore di GC , e levata questa da GC , resterà HC , la quale, replicato il discorso, non è quella che rende incommensurabili le linee AB , AC ; ed atteso che il ragioncinio vale per qual si sia grandezza finita, si conchiuda, che la incommensurabilità procede da una quantità inassegnabile minore di qualunque data, lo che si verifica parimente nell'altro caso, mentre cioè sia la comune misura F maggiore di EC , il che ec.

Dopo di ciò vado avanti, e dico, che i quadrati sopra le rette AB , AC , i quali si rispondono come l'unità al binario, non ostante, che i lati sieno irrazionali,

zionali, sono però commensurabili, e fatti tali da una quantità infinitesima del secondo ordine. Esposti (Fig. 6.) i due quadrati AB , AC , segno le due quantità eguali, ed infinitesime, che rendono asimmetri i lati AD , AG , AI , AH , e sieno queste ED , FI , e compiuta la preparazione (come nella Figura) si noti, che i due rettangoli DK , IK sono incommensurabili al quadrato AB , e la ragione si è, perchè sono compresi dalle rette EK , FK commensurabili alle due AG , GB , e di più dalle linee minime, ed inassegnabili ED , FI , che sono quelle, dalle quali nasce l'asimmetria de' lati AD , AG , AI , AH . Aggiunto però a' suddetti rettangoli il quadrato AK , avremo il gnomone composto delle tre accennate grandezze, asimmetro al quadrato AB ; ma l'intero quadrato AC sta all'altro AB in razional proporzione, dunque il quadrato AC è reso tale dal quadrato infinitesimo KC , quantità del secondo ordine, per la quale supera il suddetto gnomone asimmetro.

Noto, che i cubi sopra le linee AI , AH sono incommensurabili, tutto che sieno razionali le loro basi, e si può facilmente provare, che sono ridotti tali da una grandezza inassegnabile del terzo ordine, ed in tal guisa col discorso di mano in mano si proceda.

5. In quella guisa che le differenze prime non hanno proporzione assegnabile alle quantità finite, così

le differenze seconde, o flussioni del secondo ordine, non hanno proporzione assegnabile alle differenze prime, e sono di esse infinitamente minori per modo, che due quantità infinitesime del primo ordine, ma che differiscono tra loro d'una differenza seconda, possono assumersi per eguali. Lo stesso si dica delle differenze terze rispetto alle seconde, e così di mano in mano.

Le differenze seconde si sogliono marcare con doppia d , le terze con trè d ec. La differenza adunque di dx , cioè la differenza seconda di x si scriverà ddx , o pure d^2x , nel che si avverta, non essere lo stesso d^2x , e dx^2 , perchè il primo significa, come è detto, la differenza seconda di x , ed il secondo significa il quadrato di dx ; la differenza terza sarà $ddd x$, o pure d^3x ec. Così ddy sarà la differenza di dy , cioè la differenza seconda di y ec.

Ma per formare giusta idea delle seconde, terze ec. differenze saranno opportuni i seguenti Teoremi.

TEOREMA I.

6. Sia una qualunque curva MBC , (Fig. 7.) ed una porzione di essa BC infinitesima del primo ordine. Da' punti B , C si conducano perpendicolari alla curva le rette BA , CA . Dico: che le rette BA , CA si potranno assumere per eguali.

Si

Si conducano le tangenti BD , CD , e la corda BC . Se le due BA , CA non sono eguali, sia quella, che si vuole di loro, come CA , maggiore dell'altra, e ad essa si conduca perpendicolare la BH . La differenza fra le linee BA , CA sarà minore dell'intercetta CH , per l'angolo retto in H , e CH minore della corda BC , ma la corda BC è infinitesima del primo ordine, essendosi supposto infinitesimo l'arco; adunque la differenza tra BA , e CA almeno non sarà maggiore di una quantità infinitesima del primo ordine, e però le rette BA , CA potranno assumerfi per eguali.

COROLLARIO I.

Adunque il triangolo BAC sarà isoscele, e però gl'angoli ABC , ACB alla base eguali tra loro, e sottratti questi da' retti ABD , ACD , rimarranno eguali i due BCD , DBC , e per conseguenza anche eguali le due tangenti BD , CD .

COROLLARIO II.

Condotta la retta DA , essendo simili, ed eguali i due triangoli ADB , ADC , taglierà essa in due parti eguali gl'angoli BAC , BDC ; e perchè vengono pure ad essere simili, ed eguali i due triangoli AEB , AEC , sarà la stessa AD normale a BC , e la dividerà egualmente in E .

COROLLARIO III.

Ed essendo simili i due triangoli DAC, EDC ; farà l'angolo DCE eguale all'angolo DAC , ed i due angoli DCE, DBE presi assieme eguali all'angolo BAC .

COROLLARIO IV.

Da ciò si raccoglie, che un' arco qualunque infinitesimo BC di qualsivoglia curva avrà le stesse affezioni, e proprietà dell'arco di circolo descritto col centro A , e raggio AB , o AC .

COROLLARIO V.

Essendo simili i due triangoli AEB, BED , avremo $AE, EB :: EB, ED$; ma AE è linea finita, ed EB infinitesima del primo grado, dunque ED farà infinitesima del secondo, e farà il suo valore $= \frac{EB^2}{AE}$.

Ma il rettangolo sotto la doppia AE in EI è eguale (per la proprietà del circolo) al quadrato EB ; dunque $\overline{EB}^2 = 2AE \times EI = AE \times ED$, e per conseguenza $2AE, AE :: ED, EI$; ma il primo termine dell'analogia è doppio del secondo, dunque anco il terzo

del

del quarto, e conseguentemente faranno eguali le due linee del secondo ordine IE , ID .

COROLLARIO VI.

E perchè la differenza tra la semicorda BE , e la toccante BD è una quantità minima del terzo grado; conciosiacchè, condotto dal centro B , coll'intervallo BE l'arco di cerchio EL , grandezza della seconda classe, la quale con il suo seno si confonde, faranno simili i due triangoli BDE , EDL , che oltre gl'angoli retti in E , ed L , hanno l'angolo comune in D , dunque $BD, DE :: ED, DL$; ma BD è flussione prima, e DE seconda (per l'antecedente Corollario) dunque DL sarà una terza flussione. Quindi essendo l'arco BI della curva maggiore della semicorda BE , e minore della tangente BD , non può differire dall'una, e dall'altra se non per una grandezza al più del terzo ordine.

TEOREMA II.

7. Sia una qualunque curva DAE , (*Fig. 8., e 9.*) nel di cui asse prese due porzioni infinitesime del primo ordine, ed eguali HI , IM , si conducano le ordinate parallele HA , IB , ME , le quali taglieranno nella data curva gl'archetti AB , BE parimente infinitesimi del primo ordine. Si conduca la corda ABC , la quale concorra
nel

nel punto C con l'ordinata ME prodotta, se occorre. Dico: che l'intercetta CE tra la curva, e la corda AB prodotta sarà infinitesima del secondo ordine.

Si conduca la corda AE . Se la retta IM fosse quantità assegnabile finita, anco il triangolo ACE sarebbe finito; ma accostandosi sempre alla ordinata HA la ME in maniera, che la IM divenga pure flussione, o sia infinitesima del primo ordine, l'angolo ACE rimane sempre lo stesso, e l'angolo AEC si accresce, facendosi sempre minore l'angolo CAE , fino a che divenga finalmente minore di un qualunque dato, cioè si faccia infinitesimo. In questo caso, siccome il seno di un'angolo infinitesimo del primo ordine col raggio finito assegnabile è quantità infinitesima del primo ordine, così il seno dell'angolo CAE infinitesimo del primo ordine nel raggio AE , o AC infinitesimo del primo ordine, sarà quantità infinitesima del secondo ordine; ma ne' triangoli i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, adunque anche la retta CE sarà infinitesima del secondo ordine.

Chiamate per tanto le $DH = x$, $HA = y$, $HI = IM = dx$, sarà $FB = GC = dy$, ed $EC = -dy$, prefiggendo il segno negativo, perchè per essa cala, e non cresce la dy , (Fig. 8.) e così all'opposto averà il segno positivo, se per essa cresce la dy , cioè se la curva sia convessa in quel punto all'asse DM . (Fig. 9.)

COROL-

COROLLARIO.

Se dal punto E si conduca alla BC la normale ES , saranno pure ES , CS flussioni del secondo ordine, imperciocchè ciascuna minore di EC .

TEOREMA III.

8. Se nel circolo si prenda un'arco infinitesimo del primo ordine; dico che il seno verso farà quantità infinitesima del secondo, e la differenza fra il seno retto, e la tangente farà infinitesima del terzo.

Sia l'arco DC (Fig. 10.) infinitesimo del primo ordine, DB il seno retto, CE la tangente, e si conduca DF parallela ad AC . Per la natura del circolo si ha $GB, BD :: BD, BC$; ma GB è quantità finita, e BD infinitesima del primo ordine, adunque siccome GB è infinitamente maggiore di BD , così sarà BD infinitamente maggiore di BC , e però BC , o sia DF infinitesima del secondo ordine. Per la similitudine de' triangoli ABD, DFE , sarà $AB, BD :: DF, FE$; ma AB quantità finita è infinitamente maggiore di BD infinitesima del primo ordine, adunque DF infinitesima del secondo ordine sarà infinitamente maggiore di FE ; e però FE flussione del terzo.

COROL-

COROLLARIO I.

9. E poichè la tangente è sempre maggiore dell' arco, l'arco della corda, e la corda del seno retto; potendosi assumere per eguali la tangente, ed il seno retto, giacchè non differiscono se non per una infinitesima del terzo, si potranno anco assumere per eguali la tangente, l'arco, la corda, ed il seno retto.

COROLLARIO II.

10. Se s'immagineremo, che il raggio del circolo sia AN infinitesimo del primo ordine, farà l'arco NO , ed il seno OM infinitesimo del secondo, e però il seno verso MN infinitesimo del terzo.

COROLLARIO III.

11. Sieno nell' asse DM (Fig. 11., e 12.) due differenze prime, ed eguali HI , IM , alle quali corrispondono i due archi infinitesimi di curva AB , BE , e si tirino le due corde BE , AB , e questa prodotta incontri in C l'ordinata ME parimenti prodotta, se fa d'uopo. Si tiri ES perpendicolare a BC , e col centro B , raggio BE l'arco EO . Per il Corollario del Teorema II., CS è infinitesima del secondo grado, e per l'antecedente, OS è infinitesima del terzo, dunque CO è infiniti-

infinitesima del secondo, perchè l'infinitesima del terzo aggiunta, o sottratta dall'infinitesima del secondo non fa alcuna alterazione; ma essendo $HI=IM$, o sia $AF=BG$, per i triangoli simili, ed eguali AFB, BGC , è anco $AB=BC$, ma gl'archi possono assumersi eguali alle corde, dunque CO farà la differenza de' due archi AB, BE , e però se sia la curva $DA=s$, farà $AB=BC=ds$, $CO=-dds$ col segno negativo, perchè AB va calando, essendo BE minore di AB nella Fig. 11., ed all'opposto col segno positivo nella Fig. 12.

S C O L I O .

12. Nel determinare le seconde differenze dell'ordinata, e dell'arco della curva ò supposto, e nel Teorema II., ed in quest'ultimo Corollario, che le HI, IM sieno eguali, vale a dire, che la differenza prima dell'affissa non si alteri giammai, ma rimanga costante, nel qual caso la differenza seconda dell'affissa è nulla, cioè chiamata x l'affissa, dx la prima differenza, è $ddx=0$.

Si fanno però due altre supposizioni ancora, cioè l'una, che sia costante la differenza prima dell'ordinata, e variabile quella dell'affissa, e della curva; l'altra, che sia costante la differenza prima della curva, e variabile quella dell'affissa, e dell'ordinata.

Ma dalle premesse cose è facile il passaggio a.

Tom. II.

C

quest'

queste altre due ipotesi. Ritenuto ciò, ch'è stato detto di sopra, sia (Fig. 13., e 14.) $BF=EG$, cioè costante la flussione dell'ordinata, si conduca EP parallela a BG , e PT perpendicolare, sarà dunque $BF=PT$, quindi $AF=BT$, $AB=BP$, e però GT , o sia EP la differenza tra HI , ed IM ; e descritto col centro B , intervallo BE , l'arco EO , farà PO la differenza tra l'arco AB , e l'arco BE , potendosi assumere le corde per gl'archi infinitesimi. Ma, per i triangoli simili BTP , CEP , avremo $PT, TB::CE, EP$; $PT, PB::CE, CP$; e PT, TB, BP sono flussioni prime, e CE flussione seconda, dunque saranno EP, CP , e molto più OP flussioni seconde, onde se sia $DH=x$, $DA=s$, sarà $TG=PE=ddx$, $PO=dds$ nella Fig. 13., e $PE=-ddx$, $PO=-dds$ nella Fig. 14., e $ddy=0$.

Sia costante il differenziale primo della curva, cioè $AB=BE$. Dal punto O si abbassi ON parallela a TP . Poichè per la supposizione è $AB=BE=BO$, sarà anco $AF=BN$, adunque VE , o sia NG è la differenza tra HI , ed IM ; ma sarà anco $FB=NO$, dunque VO è la differenza tra BF , ed EG . Ma egli è chiaro, che essendo flussione del secondo ordine EC , lo sono pure EV , ed VO ; dunque se sia $DH=x$, $HA=y$, sarà $NG=ddx$, $OV=-ddy$ nella Fig. 13., ed $NG=-ddx$, $OV=ddy$ nella Fig. 14., e $dds=0$.

La supposizione di una prima flussione costante, rende

rende più brevi e facili i calcoli , come si vedrà nel farne uso ; in varj incontri però , a fine di maggiore universalità , si procede dalle prime alle seconde differenze , senza fare la supposizione di alcuna prima flussione costante , ed è facile il determinarle .

Siano (*Fig. 15., e 16.*) HI , IM flussioni prime, dell'assissa DH , ma non eguali , e la differenza tra loro sia ML , flussione seconda, e fatto il rimanente, come sopra , si tiri l'ordinata LN , e la Ei parallela a BG . Essendo adunque LM la differenza di HI , sarà $HI=IL$, cioè $AF=BR$, e però simili, ed eguali i triangoli ABF , BRN , ed in conseguenza $BF=NR$; dunque Ni sarà la differenza tra BF , ed EG , cioè la differenza di BF , o sia la differenza seconda di AH . Similmente sarà $AB=BN$, dunque NO sarà la differenza tra l'arco AB , e l'arco BE ; e però la differenza dell'arco AB , o sia la differenza seconda dell'arco DA , poichè egli è chiaro , che sono Ni , NO flussioni del secondo grado . Lo stesso discorso vale , se in luogo di supporfi IM maggiore di HI , di un differenziale secondo , si supponga minore .

13. Avvertirò , che le determinazioni fissate non racchiudono condizione alcuna intorno all'angolo delle coordinate , sebbene nelle Figure mostra di esser retto , ma nulla meno si deducono, qualunque siasi esso angolo.

L E M M A .

14. Gl'angoli rettilinei sono tra loro nella ragione diretta degl'archi, e nell'inversa de' raggi.

Sieno i due angoli (*Fig. 17.*) EAB , FAC . Prodotta AE in D , per la similitudine de' settori ABE , ACD , sarà $AB, BE :: AC, CD$, e però $CD = \frac{BE \times AC}{AB}$.

Ma l'angolo EAB , o sia DAC , è all'angolo FAC , come CD a CF ; dunque l'angolo EAB sarà all'angolo FAC , come $\frac{BE \times AC}{AB}$ a CF , cioè come $\frac{BE}{AB}$ a $\frac{CF}{AC}$.

T E O R E M A IV.

15. Preso l'arco CF (*Fig. 18.*) infinitesimo del primo grado della curva ACF qualunque, e condotte le perpendicolari CI , FI alla curva, se col centro I , intervallo IF , si descriverà l'arco di circolo FS , dico: che egli caderà tutto al di dentro della curva ACF verso C , e l'intercetta CS sarà quantità infinitesima del terzo grado.

Sulla curva AQR s'intenda condotto un filo, il quale essendo fisso al disotto nel punto R , e preso nel punto A , si vada scostando dalla curva, ma in modo, che sia sempre teso, onde il punto A descriva la curva ACF . Essendo il filo nella posizione CQ , sarà tangen-

te

te della curva nel punto Q ; e nella posizione FR , che intendo infinitamente prossima alla CQ , sarà tangente in R , e prodotta CQ incontrerà FR in I . Poichè, per la generazione della curva ACF , la retta QC è eguale alla curva QA , e la retta RF alla curva RQA , e le due tangenti infinitesime QI , RI sono assieme maggiori dell'elemento QR ; faranno anco CI , IR prese assieme maggiori della curva RQA , o sia della retta FR , dunque tolta la comune IR , sarà IC maggiore di IF , ed il circolo FS , descritto col centro I , intervallo IF , caderà dentro la curva. Ma per il I., e III. Teorema le due tangenti QI , RI non superano l'arco QR , che per una flussione terza, dunque la curva AQ assieme con le rette QI , IR supera della stessa quantità la curva AQR , cioè la retta FR ; e detratta la comune IR , sarà AQ con QI , cioè IC maggiore di IF per una infinitesima del terzo ordine.

COROLLARIO.

16. Adunque si potrà considerare l'arco di circolo FS , come se si confondesse con l'arco di curva FC ; e potrà prendersi indifferentemente l'uno per l'altro, e la tangente RF sarà perpendicolare alla curva ACF nel punto F , e QC nel punto C .

La curva AQR si chiama l'*Evoluta*, ACF la *Generata dell'evoluta*, cioè nata dallo scioglimento del
filo

filo della AQR ; ed il circolo FS , del centro I , raggio IF , il *Circolo Osculatore*.

T E O R E M A V.

17. Se alla curva $DABE$ (*Fig. 11., e 12.*) ne' punti infinitamente prossimi A, B, E , cioè essendo gl'archetti AB, BE infinitesimi primi, si conducano le perpendicolari QA, QB , ed NE , la quale incontri la BQ nel punto N . Dico: che gl'angoli AQB, BNE potranno assumersi per eguali.

Per l'antecedente Lemma, l'angolo AQB stà all'angolo BNE , come $\frac{AB}{AQ}$ ad $\frac{EB}{BN}$, cioè come $AB \times BN$ ad $EB \times AQ$, ma il rettangolo $EB \times AQ$ non è minore del rettangolo $AB \times BN$, se non per il rettangolo $BE \times QN$, e per il rettangolo di BN nella differenza degl'archetti AB, BE ; ed essendo QN, BE quantità infinitesime del primo grado, farà il rettangolo da esse fatto quantità infinitesima del secondo, siccome essendo la differenza degl'archetti AB, BE infinitesima del secondo, farà pure il rettangolo di questa in BN quantità infinitesima del secondo, adunque i due rettangoli $AB \times BN, EB \times AQ$ non sono diversi, se non per due rettangoli infinitesimi del secondo grado; adunque possono prendersi per eguali, ed in conseguenza anco gl'angoli AQB, BNE .

COROL-

COROLLARIO I.

18. Si conduca PBR tangente nel punto B ; questa dividerà in due egualmente l'angolo CBE fatto dalle due corde ABC , e BE ; imperciocchè essendo (Corollario III. Teorema I.) l'angolo BQA doppio dell'angolo PBA , a cui è eguale l'angolo CBR , anche l'angolo BNE sarà doppio dell'angolo CBR ; ma, per lo stesso Corollario, l'angolo BNE è doppio pure dell'angolo RBE , adunque sono eguali gl'angoli CBR , RBE .

COROLLARIO II.

19. Sarà adunque l'angolo CBE eguale all'angolo BNE , e quindi il settore BNE simile al settore EBO .

TEOREMA VI.

20. Se in due circoli, i diametri de' quali si eccedano d'un'infinitesima prima, si prenderanno due seni retti eguali, ed infinitesimi del primo grado; la differenza dei seni versi sarà infinitesima del terzo.

Sieno i due circoli ABC , PFH , (Fig. 19.) i seni retti infinitesimi del primo grado, ed eguali sieno BE , FG , i seni versi EC , GH . Si tirino le cor-

de

de AB , BC . Essendo il seno BE , e però l'arco BC flussione prima, farà l'angolo BMC infinitesimo del primo ordine, e però anche l'angolo BAC , che ne è la metà, e l'angolo EBC , che a quello è eguale; adunque poichè l'angolo EBC , ed i lati EB , BC sono infinitesimi primi, farà il seno verso EC infinitesimo secondo.

Lo stesso vale del seno verso GH . Ma il seno verso EC (per la proprietà del circolo) si trova essere $= \frac{EB^2}{AE}$, ed il seno verso $GH = \frac{GF^2}{PG} = \frac{EB^2}{PG}$, dunque avremo l'analogia $EC, GH :: PG, AE$; ma PG quantità finita supera AE quantità finita d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del primo ordine, per l'ipotesi, dunque EC quantità infinitesima del secondo ordine supererà GH infinitesima del secondo, d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del terzo.

TEOREMA VII.

21. Sia la curva BEG (Fig. 20., e 21.) riferita al fuoco, cioè tale, che le ordinate tutte si partano da un punto dato, che si chiama il fuoco, e sia A , da cui si conducano tre ordinate infinitamente prossime AB , AE , AG , le quali comprendano i due archetti infinitesimi del primo grado BE , EG , e si tiri la corda

da BE , la quale prodotta incontri in L l'ordinata AG pure prodotta, se fa bisogno. Col centro A si descrivano gl'archi BC , EF , e sieno BM , EN i loro seni retti; indi si faccia l'angolo NEP eguale all'angolo MBE , dico: che l'intercetta GP farà differenza infinitesima del secondo ordine dell'ordinata AB .

Si tiri la corda EG . Poichè gl'angoli MBE , NEP sono eguali per la costruzione, e gl'angoli in M , ed N sono retti, saranno simili i triangoli EBM , PEN ; quindi preso per costante il seno BM , cioè supposto eguale ad EN , i predetti triangoli saranno in oltre eguali, e però sarà $ME = NP$. Ma supposto $BM = EN$, per l'antecedente teorema, la differenza de' seni versì MC , NF è infinitesima rispetto a loro, dunque saranno anco eguali le CE , FP , e però GP sarà la differenza tra CE , ed FG . Ma condotte perpendicolari alla curva ne' punti E , G le rette EQ , QG , l'angolo LEG è eguale all'angolo EQG per il Corollario II. del Teorema V., (il quale si verifica, o sia la curva riferita all'asse, o sia riferita al fuoco) e l'angolo EQG è infinitamente piccolo, dunque sarà infinitamente piccolo anche l'angolo LEG ; e perchè sono infinitesime del primo ordine le rette EG , EL , sarà GL infinitesima del secondo, e molto più GP rispetto alla Fig. 20.

Per il Corollario I. del Teorema III. il seno BM

Tom. II.

D

è

è eguale all' arco BC ; dunque, preso per costante in luogo del seno l' arco, e chiamato esso $= dx$, $AB=y$, $CE=dy$, sarà $GP=-ddy$. E descritto col centro E , intervallo EG l' arco GV , sarà $VP=-dds$, se sia $BE=ds$.

COROLLARIO.

22. L'angolo LEP sarà eguale all'angolo EAG ; imperciocchè l'angolo EPA , per la costruzione, è eguale all'angolo BEA , ma EPA esterno è eguale ai due interni L , ed LEP ; e l'altro BEA eguale ai due L , ed EAG , dunque tolto il comune L , rimarranno eguali i due LEP , EAG . E perchè ciò si verifica, o sia la curva concava al punto A , (Fig. 20.) o sia convessa, (Fig. 21.) come è facile a vedere, sarà nella stessa Fig. 21. infinitesimo l'angolo LEP , e quindi infinitesima del secondo ordine la LP , ma si è veduto, che GL è pure infinitesima del secondo, dunque lo sarà anche tutta la GP , che sarà $= ddy$; e col centro E , intervallo EG descritto l' arco GV , sarà $PV=dds$.

Facendo l'ipotesi della dy costante, col centro A , intervallo AG si descriva l' arco GT , e dal punto T si tiri la retta TOA . Poichè $FG=EC$, per l'ipotesi, sarà il triangolo TEO simile, ed eguale al triangolo EBC , e però $BC=EO$, e $BE=ET$; dunque

que $OF = ddx$, e $TV = dds$ nella Fig. 20.; ma $OF = - ddx$, e $TV = - dds$ nella Fig. 21.

Presa ds costante, si conduca la retta VRA , sarà $EG = EV = BE$, e però simili, ed eguali i triangoli EBC , EVR , adunque $BC = ER$, $CE = RV$; onde $RF = ddx$, $VI = - ddy$ nella Fig. 20., ma $RF = - ddx$, $VI = ddy$ nella Fig. 21.

Che se non si prenda alcuna prima flussione costante: sia EF maggiore di BC (Fig. 22., e 23.) per la flussione seconda RF ; si conduca la retta ART ; col centro A , intervallo AG l'arco GT ; e col centro E , intervallo EG l'arco GV . Poichè dunque $BC = ER$, farà anco $CE = RI$, e $BE = EI$, adunque TI sarà la differenza tra CE , ed FG , ed VI la differenza tra BE , ed EG .

S C O L I O.

23. Non sarà fuor di proposito il prevenire una difficoltà, che mi potrebbe esser mossa. Ella è, che nel Teorema antecedente si assumono per eguali le CE , FP in virtù però del Teorema VI., ed il Teorema VI. suppone eguali i seni BM , EN ; dunque pare, che le determinazioni fissate de' differenziali secondi abbiano luogo solo nel caso, che si faccia l'ipotesi della flussione costante BC , e non nell'altre; ma per togliere questa difficoltà basta riflettere, che quan-

tunque si ponga variabile la BC , la differenza però è infinitesima del secondo grado, che non toglie l'egualianza tra le flussioni prime BC , EF ; e così nè meno tra i seni BM , EN .

SCOLIO II.

24. Ne' premessi Teoremi si contengono i principj, con i quali si maneggiano le quantità infinitesime di qualunque grado, e ci si apre la strada di far buon uso del calcolo differenziale, e sommatorio; ed ancora di applicare in oltre alle grandezze minime la Sintesi, e l'Analisi degli Antichi, e di servirsi della para geometria, il che riesce di una particolare semplicità, ed eleganza.

Per iscanfare poi i paralogismi, ne' quali pur troppo è facile incorrere, gioverà il riflettere, che nelle linee infinitamente piccole di qualsivoglia ordine, conforme si pratica anco nelle finite, anno a considerarsi due importanti circostanze, cioè la loro grandezza, e la loro posizione. E quanto alla grandezza non credo, che mai si possa sbagliare, se non da coloro, che credono tali grandezze infinitesime un mero nulla.

Ora sebbene le quantità col diminuirsi all'infinito passano da genere a genere, le proporzioni in qualunque ordine persistono le medesime; e perchè di tre

linee

linee della stessa classe può costituirsi un triangolo, si noti, che minorandosi proporzionalmente i lati fino a far transito da un grado all'altro, non si mutano gli angoli, che sempre fra loro la stessa ragione conservano. In tali incontri non è mai lecito prendere una linea per l'altra, nè fingere eguaglianza, o adeguazione dove non ci può essere, anzi conviene tener ferme le analogie, e paragonare i triangoli d'un genere con quelli dell'altro, cioè gl'infinitesimi coi finiti, e gl'infinitesimi del secondo ordine con quelli del primo, e con i finiti, e così vadasi discorrendo.

Ma se due grandezze di qual si sia ordine differiranno per una grandezza, che rispetto a loro sia inassegnabile, sicuramente, e senza rischio alcuno d'errare una si può prendere per l'altra, nè v'è timore, che l'adeguamento porti un minimo sconcerto.

Fa d'uopo adunque stare molto guardinghi quando si tratta della posizione delle linee, e degl'angoli, conciosiacchè il confondergli quando non deesi tira seco manifesti paralogismi.

25. Stabiliti i fondamenti principali di questo calcolo, farò passaggio alle maniere, o regole di differenziare le formole. Ed in primo luogo, debbasi prendere la differenza di varie quantità sommate assieme, o sottratte l'una dell'altra, per esempio di $a + x + z + y - u$. Siccome la differenza di x è dx , di z è dz ec.,

e della a costante è nulla, considerando ogni quantità accresciuta della sua differenza con quel segno, che le compete, la formola proposta si muterà in quest'altra $a + x + dx + z + dz + y + dy - u - du$, da cui sottraendo la prima, sarà il residuo $dx + dz + dy - du$, che è appunto ciò, per cui è cresciuta la quantità proposta, vale a dire la sua differenza.

Da ciò si ricava la regola generale, che per differenziare qualunque complesso di quantità analitiche di una dimensione, basterà prendere le differenze di ciascheduna variabile coi loro segni, ed il complesso di queste differenze sarà la differenza della quantità proposta. La differenza adunque di $b - s - z$ sarà $-ds - dz$; la differenza di $ax - abz + by$ sarà $-abdz + bdy$.

26. Che se la quantità proposta da differenziarsi sarà il prodotto di più variabili, come xy , mentre x diviene $x + dx$, la y diviene $y + dy$, ed xy diviene $xy + ydx + xdy + dxdy$, che è il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$; da questo prodotto adunque sottratta la quantità proposta xy , rimane $ydx + xdy + dxdy$, ma $dxdy$ è quantità infinitamente minore di ciascheduna dell'altre due, le quali sono il rettangolo di una quantità finita in una infinitesima, e $dxdy$ è il rettangolo di due infinitesime, e però infinitamente minore, dunque esso rettangolo si potrà francamente trascurare, quindi la differenza di xy sarà $x dy + y dx$.

Sia

Sia da differenziarsi xyz ; il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$ in $z + dz$ è $xyz + yzdx + xzdy + xydz + zdx dy + ydx dz + xdy dz + dxdydz$, il quale, sottratta la quantità proposta, rimane $yzdx + xzdy + xydz + zdx dy + ydx dz + xdy dz + dxdydz$; ma il primo, secondo, e terzo termine è ciascuno il prodotto di due quantità finite, e di una infinitesima; ed il quarto, quinto, e sesto è ciascuno il prodotto di una quantità finita, e di due infinitesime, dunque ciascuno di questi è infinitamente minore di ciascuno di quelli, e però si potrà trascurare, e molto più l'ultimo, che è il prodotto di tre infinitesimi; trascurati per tanto tutti i termini, principiando dal quarto, sarà $yzdx + xzdy + xydz$ la differenza di xyz .

Quindi nasce la regola, che per differenziare un prodotto di più quantità moltiplicate assieme, si dovrà prendere la somma de' prodotti della differenza di ciascuna di tali quantità nel prodotto dell'altre. La differenza adunque di $bxzt$ sarà $bxzdt + bxt dz + btz dx + xzt \times 0$, perchè la differenza della costante b è nulla, cioè la differenza di $bxzt$ sarà $bxzdt + bxt dz + btz dx$. La differenza di $a + x \times b - y$ sarà $dx \times b - y - dy \times a + x$, cioè $b dx - y dx - a dy - x dy$.

27. La formola da differenziarsi sia una frazione, per esempio, $\frac{x}{y}$. Si ponga $\frac{x}{y} = z$, sarà dunque $x = zy$,

e però anche eguali le loro differenze, cioè $dx = zdy + ydz$, quindi $dz = \frac{dx - zdy}{y}$, ora $z = \frac{x}{y}$, sostituito pertanto questo valore in luogo di z , farà $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$; ma se $z = \frac{x}{y}$, farà dz il differenziale di $\frac{x}{y}$, dunque il differenziale di $\frac{x}{y}$ farà $-\frac{xdy + ydx}{yy}$.

E la regola farà, che il differenziale d'una frazione farà un'altra frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore della proposta frazione; ed il denominatore sia il quadrato del denominatore della stessa proposta frazione da differenziarsi.

La differenza adunque di $\frac{a}{n}$ farà $-\frac{adx}{nn}$. La differenza di $\frac{a+x}{n}$ farà $\frac{ndx - adx - xdx}{nn}$, cioè $-\frac{adx}{nn}$.

La differenza di $\frac{y}{b-y}$ farà $\frac{bdy - ydy + ydy}{b-y^2}$, cioè $\frac{bdy}{b-y^2}$.

La differenza di $\frac{3xy}{a-x}$ farà $\frac{3xdy + 3ydx \times a - x + dx \times 3xy}{a-x^2}$, cioè $\frac{3axy + 3aydx - 3xxdy}{a-x^2}$.

28. Debbanfi differenziare le potestà. E sia in primo luogo una potestà perfetta, e positiva, cioè di esponente intero positivo, per esempio, xx ; ora xx è il prodotto di x in x , adunque per la regola de' prodotti il differenziale sarà $x dx + x dx$, cioè $2x dx$. Sia da differenziarsi x^3 ; ma x^3 è il prodotto di x in x in x , adunque il differenziale sarà $xx dx + x dx + x dx$, cioè $3xx dx$, e comechè la faccenda procede con lo stesso ordine all' infinito, il differenziale di x^m , essendo m un numero qualunque intero positivo, sarà $m x^{m-1} dx$.

Se l'esponente sarà negativo, per esempio ax^{-2} , o sia $\frac{a}{xx}$, il differenziale, per la regola delle frazioni,

farà il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, diviso il tutto per il quadrato del denominatore; ma il differenziale del denominatore è $2x dx$, dunque il differenziale di ax^{-2} , o sia $\frac{a}{xx}$, sarà $-\frac{2ax dx}{x^4}$, cioè $-\frac{2a dx}{x^3}$; il differenziale

di x^{-1} , o sia di $\frac{1}{x}$, sarà $-\frac{3xx dx}{x^6}$, cioè $-\frac{3 dx}{x^4}$;

generalmente il differenziale di $\frac{ax^{-m}}{b}$, o sia di $\frac{a}{bx^m}$, sarà $-\frac{max^{m-1} dx}{bx^{2m}}$, cioè $-\frac{max^{-m-1} dx}{b}$.

Tom. II.

E

Sia

Sia la potestà imperfetta, ed in primo luogo positiva (cioè l'esponente sia rotto positivo) $\sqrt[n]{x^m}$, o sia $x^{\frac{m}{n}}$, esprimendo $\frac{m}{n}$ un qualunque rotto positivo.

Si ponga $x^{\frac{m}{n}} = z$, ed elevando ciascun membro alla potestà n , $x^m = z^n$, e differenziando, $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, onde $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}$, ma essendo $x^m = z^n$ è

anco $z^{n-1} = x^{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}}$, dunque sostituito questo valore in luogo di z^{n-1} , farà $dz = \frac{mx^{\frac{m}{n}-1}dx}{n}$, cioè

$$dz = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx.$$

Se l'esponente sarà negativo, come $\sqrt[n]{x^{-m}}$, cioè $x^{-\frac{m}{n}}$, o sia $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, il differenziale, per la regola

delle frazioni, farà $-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$, cioè

$$-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx.$$

La

La regola generale è adunque, che il differenziale d'una qualunque potenza perfetta, o imperfetta, positiva, o negativa, è il prodotto dell'esponente della potenza nella quantità elevata alla potenza minore, per l'unità, della potenza data, ed il tutto moltiplicato nella differenza della quantità.

Sia da differenziarsi $x^{\frac{3}{2}}$, il differenziale sarà $\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} dx$, cioè $\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$, o sia $\frac{3}{2} dx \sqrt{x}$.

Sia $x^{\frac{5}{4}}$, la differenza sarà $\frac{5}{4} x^{\frac{5}{4}-1} dx$, cioè $\frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} dx$, o sia $\frac{5}{4} dx \sqrt[4]{x}$.

Sia $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, cioè $x^{-\frac{3}{2}}$, la differenza sarà $-\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} dx$, cioè $-\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} dx$, o sia $-\frac{3 dx}{2x^{\frac{5}{2}}}$.

Sia da differenziarsi $\frac{2}{ax+xx}$, farà la differenza $2 \times \frac{ax+xx}{ax+xx} \times \frac{adx+2xdx}{ax+xx}$, cioè $2axdx + 6axxdx + 4x^2 dx$.

Sia $\frac{3}{xy+ax}$, la differenza sarà $3 \times \frac{xy+ax}{xy+ax} \times \frac{xdy+ydx+adx}{xy+ax}$,

cioè $3x^2yydy + 6axydy + 3aax^2dy + 3y^2xxdx + 9ayyxxdx + 9aayxxdx + 3a^2xxdx$.

Sia $\frac{1}{\sqrt{ax-yy}}$, farà la differenza $-2 \times \frac{ax-yy}{\sqrt{ax-yy}} \times \frac{adx-2ydy}{\sqrt{ax-yy}}$,
cioè $-\frac{2adx+4ydy}{\sqrt{ax-yy}}$.

Sia $\sqrt{ax-xx}$, cioè $\frac{1}{\sqrt{ax-xx}}$, farà la differenza
 $\frac{1}{2} \times \frac{ax-xx}{\sqrt{ax-xx}} \times \frac{adx-2xdx}{\sqrt{ax-xx}}$, cioè $\frac{adx-2xdx}{2 \times \sqrt{ax-xx}}$,

o sia $\frac{adx-2xdx}{2 \sqrt{ax-xx}}$.

Sia $\sqrt{xx+xy}$, cioè $\frac{1}{\sqrt{xx+xy}}$, farà la differenza
 $\frac{1}{2} \times \frac{xx+xy}{\sqrt{xx+xy}} \times \frac{2xdx+xdy+ydx}{\sqrt{xx+xy}}$, o sia
 $\frac{2xdx+xdy+ydx}{2 \sqrt{xx+xy}}$.

Sia $\sqrt[3]{ax-xx}$, cioè $\frac{1}{\sqrt[3]{ax-xx}}$, farà la differenza
 $\frac{1}{3} \times \frac{ax-xx}{\sqrt[3]{ax-xx}} \times \frac{adx-2xdx}{\sqrt[3]{ax-xx}}$, o sia
 $\frac{adx-2xdx}{3 \times \sqrt[3]{ax-xx}}$.

$3 \times \frac{adx-2xdx}{\sqrt[3]{ax-xx}}$

Sia

Sia $\frac{1}{\sqrt[3]{ay+xy}}$, cioè $\frac{1}{ay+xy}^{\frac{1}{3}}$, farà la differenza

$$-\frac{1}{3} \times \frac{1}{ay+xy}^{\frac{1}{3}-1} \times \frac{ady+xdy+ydx}{ay+xy}^{\frac{2}{3}}, \text{ cioè}$$

$$-\frac{ady-xdy-ydx}{3 \times \frac{ay+xy}{ay+xy}^{\frac{4}{3}}}.$$

Sia $a-x \sqrt[3]{a+x}$, cioè $a-x \times a+x^{\frac{1}{3}}$, farà la differenza $-dx \times a+x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \times a+x^{\frac{1}{3}-1} \times a-x \times dx$,
o sia $-dx \sqrt[3]{a+x} + \frac{1}{3} \frac{dx \times a-x}{\sqrt[3]{a+x}^2}$.

Sia $\sqrt{ax+xx} + \sqrt[4]{a^4-x^4}$, cioè $ax+xx + \sqrt[4]{a^4-x^4}^{\frac{1}{2}}$, farà la differenza

$$adx+2xdx - \frac{x^3dx}{a^4-x^4}^{\frac{3}{4}}, \text{ cioè } \frac{adx+2xdx \times a^4-x^4^{\frac{3}{4}} - x^3dx}{2 \times a^4-x^4^{\frac{3}{4}} \sqrt{ax+xx} + \sqrt[4]{a^4-x^4}^{\frac{3}{2}}}$$

Sia

Sia $\frac{ax + xx}{\sqrt{ax + xx}}$, farà la differenza

$$3axxdx + 2x^1 dx - a^1 dx - 2axxdx .$$

$$2 \times \frac{ax + xx}{\sqrt{ax + xx}}^{\frac{1}{2}}$$

Sia $x \sqrt{ax + xx}$, farà la differenza

$$a \sqrt{ay - xy}$$

$$3aayxdx + 2ayxxdx - 3yx^1 dx - aaxxdy + x^2 dy .$$

$$2a \times \frac{ay - xy}{\sqrt{ay - xy}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{ax + xx}$$

29. In quella guisa, che si prendono le differenze prime delle quantità finite, si prendono ancora le differenze delle quantità infinitesime del primo ordine, e le differenze delle quantità infinitesime del secondo, e così successivamente, servendosi delle stesse regole, che ò fin' ora spiegate.

Solo vi farà da riflettere, se alcuna flussione prima sia stata assunta per costante, e quale essa sia, poichè la di lei differenza farà nulla, e si dovrà omettere nel differenziare.

Sia proposta da differenziarsi la formola $ydx - xdy$, e non sia stata assunta costante flussione alcuna, la differenza farà $dx dy + yddx - dxdy - xddy$, cioè $yddx - xddy$. Sia stata assunta costante la flussione dx , farà la differenza $dxdy - dxdy - xddy$, cioè $-xddy$. Sia costante la flussione dy , farà la differenza $dxdy + yddx - dxdy$, cioè $yddx$.

Sia

Sia $\frac{ydx}{dy}$, in cui nessuna flussione prima si prenda costante, sarà la differenza $\frac{dx dy^2 + y dy ddx - y dx ddy}{dy^2}$; presa costante dx , sarà $\frac{dy^2 dx - y dx ddy}{dy^2}$; presa per costante dy , sarà $\frac{dy^2 dx + y dy ddx}{dy^2}$, cioè $\frac{dy dx + y ddx}{dy}$.

Sia $y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e costante la dz , sarà la differenza $\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz \times \frac{dx ddx + dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}}{dz^2}$, cioè $\frac{dx^2 dy + dy^3 + y dx ddx + y dy ddy}{dz^2}$.

Presa per costante dy , sarà $\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz dx ddx - y ddz \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$, cioè $\frac{dx^2 dy dz + dy^3 dz + y dz dx ddx - y dx^2 ddz - y dy^2 ddz}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Presa per costante dx , sarà $\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz \times \frac{dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - y ddz \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$, cioè

$$\text{cioè } \frac{dx^2 dydz + dy^2 dz + ydzdyddy - ydx^2 ddz - ydy^2 ddz}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

E finalmente presa niſſuna fluſſione conſtante ,
farà la differenza

$$\frac{dydz \sqrt{dx^2 + dy^2} + ydz \times \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - yddz \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$$

$$\text{cioè } \frac{dx^2 dydz + dy^2 dz + ydzdxddx + ydzdyddy - ydx^2 ddz - ydy^2 ddz}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

E ſe in queſta ſi cancelleranno tutti i termini , ne' quali ſi trova la ddz , cioè fatta l'ipoteſi di dz conſtante , ſi muterà eſſa nella prima ; cancellando quelli , ne' quali ſi trova la ddy , ſi muterà nella ſeconda ; e cancellando quelli , ne' quali ſi trova la ddx , ſi muterà nella terza , come è chiaro .

Sia $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}$, e conſtante dx , farà la differenza .

$$\frac{dx^2 + dy^2 + yddy \sqrt{xx + yy} - xdx - ydy \times \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy}$$

$$\text{cioè } \frac{xxdy^2 + xxyddy + yydx^2 + y^2 ddy - 2xydx dy}{xx + yy^2}$$

Presa per costante dy , sarà

$$\frac{dx^2 + xddx + dy^2 \sqrt{xx + yy} - xdx - ydy \times \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy}$$

cioè $\frac{x^2 ddx + xxdy^2 + yydx^2 + yyx ddx - 2xy dxdy}{xx + yy^{\frac{3}{2}}}$.

E finalmente presa nessuna flussione costante, sarà

$$\frac{dx^2 + xddx + dy^2 + yddy \sqrt{xx + yy} - xdx - ydy \times \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy}$$

cioè $\frac{x^2 ddx + xxdy^2 + xxyddy + yydx^2 + yyx ddx + y^2 ddy - 2xy dxdy}{xx + yy^{\frac{3}{2}}}$.

Sia proposta da differenziarsi la formola differenziale del secondo grado $\frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx dy}$, o sia

$\frac{dx^2 + dy^2^{\frac{3}{2}}}{dx dy}$, e si prenda dx costante, sarà la differenza

$$\frac{3 \times dyddy \times \frac{dx^2 + dy^2^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy} \times -dxddy + dxddy \times \frac{dx^2 + dy^2^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy}}{dx^2 ddy^2}$$

L'ipotesi di dy costante ripugna per questa formola, in cui già si trova la ddy .

Tom. II.

F

Presa

Presa nessuna flussione costante, sarà

$$\frac{3 \times \overline{dxddx + dyddy} \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} \times -dxddy + \overline{dxdddy + ddxddy} \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}}{dx^2 ddy^2}$$

Con simil metodo si proceda in tutti gl'altri casi più composti.



C A P O I I.

Del Metodo delle Tangenti.

30. **A**lla Curva ADF (Fig. 24., è 25.) sia tangente in un qualunque punto la retta TDG , e perpendicolare all' asse AB l'ordinata BD nel punto B , alla quale sia infinitamente prossima CF , che prodotta (se fa bisogno) incontri la tangente nel punto G , e si tiri DE parallela all' asse AB . Per quanto è stato dimostrato ne' premessi Teoremi, e suoi Corollarj, la GF sarà infinitesima rispetto ad EF , e sarà pure infinitesima rispetto all' archetto DF la differenza tra DF , e DG ; dunque si potranno usurpare per eguali le due EF , EG , siccome le due DF , DG ; e però, se sia $AB=x$, $BD=y$, sarà $EF=EG=dy$, $DF=DG=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Ma i triangoli simili GED , DBT ci danno l'analogia $GE, ED::DB, BT$, cioè in termini analitici, $dy, dx::y, BT$, dunque $BT=\frac{ydx}{dy}$, ed ecco la formola generale della sottotangente per qualunque curva.

Nel caso per tanto di una curva data nulla altro rimarrà da farsi, per averne la sottotangente, che dif-

ferenziare l'equazione, ed il valore della dx , o dy sostituirla nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, con che svani-

ranno i differenziali, ed averassi il valore della sottotangente espresso in termini finiti, che compete alla data curva per un qualunque punto, e se si voglia per un determinato punto, basterà sostituire in luogo dell'incognite quel valore, che loro compete, rispetto al punto determinato.

31. Dal potersi assumere $EF=EG$, e $DF=DG$, ne viene, che si può considerare il punto G , come se cada in F , cioè, che la tangente DG , l'arco DF , e la sua corda si confondano assieme, vale a dire, che le curve sieno poligoni d'infiniti lati infinitamente piccoli. Questo discorso però procede solo, quando noi ci fermiamo nelle prime differenze; ma se si dovranno computare le seconde, non si confonderà il punto G col punto F essendo appunto GF una seconda differenza. Quindi perchè nel metodo delle tangenti non s'introducono differenziali secondi, farassi giustamente il supposto, che essa tangente si confonda con l'archetto, e sua corda.

32. Lo stesso triangolo GDE ci somministra le formole per l'altre linee analoghe alla sottotangente.

Per la similitudine de' triangoli GDE , DBT , farà

$GE,$

$GE, GD :: DB, DT$, cioè $dy, \sqrt{dx^2 + dy^2} :: y, DT$;
 e però $DT = y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, formola generale della
 tangente .

Sia DN perpendicolare alla curva nel punto D ,
 faranno simili i triangoli GDE, DBN , onde sarà
 $DE, EG :: DB, BN$, cioè $dx, dy :: y, BN$; e però
 $BN = y \frac{dy}{dx}$, formola generale della sottotangente .

Sarà ancora $DE, DG :: DB, DN$, cioè $dx,$
 $\sqrt{dx^2 + dy^2} :: y, DN$; e però $DN = y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$,
 formola generale della normale .

Dal punto B si conduca BM normale a DN , e
 BH normale a DT . Il triangolo GDE farà simile al
 triangolo DBM , onde sarà $GD, GE :: DB, BM$,
 cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}, dy :: y, BM = \frac{y dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, formola
 generale della linea BM .

Lo stesso triangolo GDE farà anco simile al trian-
 golo DBH , onde sarà $GD, DE :: DB, BH$, cioè
 $\sqrt{dx^2 + dy^2}, dx :: y, BH = \frac{y dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, formola ge-
 nerale della linea BH .

33. La similitudine de' due triangoli GED ,

DBT

DBT ci farà scoprire in oltre l'angolo, che fa con l'asse la tangente ad un qualsivoglia punto di curva, conciosiacchè sarà noto l'angolo DTB , qualora sia nota la ragione del seno retto DB al seno del complemento BT , cioè la ragione di GE ad ED , o sia di dy a dx .

Adunque data l'equazione della curva, se si differenzierà, e si risolverà in analogia, di cui sieno due termini dy , dx , avrassi la ragione de' seni dell'angolo DTB , e però noto l'angolo.

34. In virtù dello stesso discorso nascono le medesime formole anco nelle curve riferite al fuoco, (Fig. 26., e 27.) solo che si rifletta, che condotta dal fuoco B normale all'ordinata BD la retta BT , che incontri la tangente in T , i triangoli DBT , DGE faranno simili, perchè gl'angoli TBD , DEG sono retti, e l'angolo TDB non è maggiore dell'angolo DGE se non per l'angolo infinitesimo DBG , il che si vede chiaro conducendo GQ normale a TB ; adunque si potranno assumere per eguali i due angoli TDB , DGE , ed in conseguenza anco i due BTB , GDE , e però simili i due triangoli DTB , GDE ; ma in oltre GF è infinitesima rispetto ad EF , adunque ec.

ESEMPIO I.

35. Sia la curva ADF (Fig. 24.) la parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$. Differenziando sarà $adx = 2ydy$, e $dx = \frac{2ydy}{a}$. Sostituito per tanto questo

valore in luogo di dx nella formola generale della sottotangente $\frac{ydx}{dy}$, avremo $\frac{2yy}{a}$, o pure $2x$, posto in luogo

di yy il valore ax dato dall'equazione della curva. La sottotangente adunque nella parabola è doppia dell'assisa, e però se si prenda $AT = AB$, e dal punto T si tiri al punto D la retta TD , essa sarà tangente della curva nel punto D . Se in luogo del valore di dx dato dall'equazione della curva, sostituiremo il valore di dy , cioè $\frac{adx}{2y}$ nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, farà essa

ciò nulla ostante $\frac{2yy}{a}$, come prima, il che basterà d'avere notato in quest'esempio.

Nella stessa parabola si ricerchi la sottonormale BN . La formola generale della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$; ma per l'equazione della curva si ha $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione, farà la sottonormale nella parabola

rabola $= \frac{a}{2}$, cioè la metà del parametro, e però presa

$BN = \frac{a}{2}$, e dal punto N condotta al punto D la retta

ND , farà essa normale alla curva in D .

Si ricerchi la tangente DT , la di cui formola generale è $y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dy}}$. Per l'equazione della curva,

abbiamo $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione di

questo valore in luogo di dx nella formola, avremo $y \sqrt{\frac{4yydy^2 + aady^2}{ady}} = \frac{y}{a} \sqrt{4yy + aa} = \sqrt{4xx + ax}$, (posto

in luogo di yy il valore ax dato dall'equazione) che è la tangente cercata.

Si ricerchi la normale DN . Sostituito il valore di $dx = \frac{2ydy}{a}$ nella formola generale $y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx}}$, farà

essa $y \sqrt{\frac{4yydy^2 + aady^2}{2ydy}} = \sqrt{\frac{4yy + aa}{2}} = \sqrt{\frac{4ax + aa}{2}}$, posto

in luogo di yy il valore dato dall'equazione.

Si ricerchi la retta BM . Sostituito il valore di $dx = \frac{2ydy}{a}$ nella formola generale $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, farà essa

$$\frac{aydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{ay}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{a\sqrt{ax}}{\sqrt{4ax + aa}}.$$

Si

Si ricerchi la retta BH . Sostituito il valore di dx nella formola generale $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, farà effa

$$\frac{2yydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{2yy}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{2ax}{\sqrt{4ax + aa}}.$$

Ritrovata la sottotangente, non è necessario alcun uso di formole per ritrovare l'altre linee, sebbene a motivo di esercizio me ne sono qui servita, imperciocchè, essendo nota la BT , il triangolo TBD rettangolo in B ci somministra la tangente TD , e la similitudine de' triangoli TBD , DBN , DMB , DHB l'altre linee tutte, e però ne' seguenti Esempj applicherò il metodo alle sole sottotangenti.

Se vogliasi l'angolo, che fa la tangente della parabola con l'asse. Presa l'equazione differenziale, $adx = 2ydy$, e risolta in analogia, troverassi dy , $dx :: a, 2y$, cioè che il seno retto BD è al seno del complemento BT , come il parametro al doppio dell'ordinata, dovunque siasi il punto D ; e se si vorrà fissata la tangente ad un punto determinato, per esempio al punto D , a cui corrisponda l'assisa $AB = x = \frac{a}{4}$, dall'equazione della curva trovata la y corrispondente, ad $x = \frac{a}{4}$, che in questo caso è $y = \frac{a}{2}$, farà l'analoga

già $dy, dx :: a, a$, cioè semiretto l'angolo DTB , quando sia $y = \frac{a}{2}$, o $x = \frac{a}{4}$.

Nel vertice A è $y = 0$, e però l'analogia per l'angolo della tangente nel vertice sarà $dy, dx :: a, 0$, cioè la ragione di dy a dx infinita, vale a dire il seno del complemento sarà nullo, e però la tangente nel vertice sarà perpendicolare all'asse.

ESEMPIO II

36. Sia l'equazione generale di tutte le parabole di qualunque grado $x = y^m$, intendendo per m un qualunque numero positivo intero, o rotto, e che l'unità supplisca alle dimensioni. Differenziando sarà $dx = my^{m-1} dy$, e sostituito questo valore in luogo di dx nella formola generale $\frac{y dx}{dy}$, farà la sottotangente

$= my^m = mx$. Sia $m = 3$, cioè la parabola prima cubica $x = y^3$, farà la di lei sottotangente $= 3x$. Sia $m = \frac{3}{2}$, cioè la seconda parabola cubica $xx = y^3$, farà la di lei sottotangente $= \frac{1}{2} x$ ec.

L'equazione differenziale $dx = my^{m-1} dy$ della curva ci dà l'analogia $dy, dx :: 1, my^{m-1}$; ma posta $y = 0$, se farà m maggiore dell'unità, l'analogia sa-

rà

rà $dy, dx :: 1, 0$, cioè la ragione di dy a dx infinita, e però la tangente nel vertice perpendicolare all'asse; e se sarà m minore dell'unità, farà l'analogia $dy, dx :: 1, \frac{m}{0}$, cioè posta $y = 0$, $dy, dx :: 1, \frac{m}{0}$,

vale a dire la ragione di dy a dx infinitamente piccola, e però la tangente nel vertice parallela all'asse.

ESEMPIO III.

37. Sia la curva DCE , (Fig. 28.) di cui si vuole la sottotangente, l'iperbola fra gl'asintoti dell'equazione $xy = aa$. Differenziando farà $x dy + y dx = 0$, e $dx = -\frac{xy}{y}$; sostituito per tanto nella formola $\frac{y dx}{dy}$ della sottotangente il valore di dx , farà la sottotangente $= -x$, valore negativo, e questo vuol dire, che la sottotangente BT dee prenderli della parte opposta alle asisse.

Presa adunque $BT = BA$, e condotta al punto C la retta TC , farà essa tangente della curva nel punto C .

Poichè nella curva DCE crescendo l'assisa, cala l'ordinata y , s'avrebbe dovuto nel differenziare prendere negativa la differenza dy , ma perchè per la stessa ragione s'avrebbe dovuto prendere negativa la stessa dy anco nella formola generale, si à ommesso di farlo

nell'uno, e nell'altro luogo, giacchè senza imbarazzarsi co' segni torna lo stesso, il che ora avvertito servirà per gl'altri simili casi.

Sia l'equazione generale $x = \frac{1}{y^m}$ a tutte le infinite

iperbole fra gl'asintoti, essendo m un qualunque numero positivo intero, o rotto. Differenziando avremo $dx = -\frac{my^{m-1}dy}{y^{2m}} = -\frac{m dy}{y^{m+1}}$, e sostituito questo va-

lore nella formola generale $\frac{y dx}{dy}$, la sottotangente farà $-\frac{m}{y^m}$, o sia $-mx$, per l'equazione della curva.

ESEMPIO IV.

38. Sia la curva ADF (Fig. 24.) un circolo del diametro $= 2a$, $AB = x$, $BD = y$, farà l'equazione $2ax - xx = yy$, e differenziando $2adx - 2xdx = 2ydy$, e però $dx = \frac{ydy}{a-x}$, e sostituendo questo valore nella

formola $\frac{y dx}{dy}$, farà la sottotangente $\frac{yy}{a-x}$, cioè $\frac{2ax - xx}{a-x}$,

posto in luogo di yy il valore dato dall'equazione. Sarà dunque la sottotangente nel circolo la quarta proporzionale di $a-x$, di $2a-x$, e della x .

Ma se il circolo farà dell'equazione $aa - xx = yy$, nel

nel quale (Fig. 29.) si prendano le assisse $AB = x$ dal centro, differenziando avremo $-x dx = y dy$, e $dx = -\frac{y dy}{x}$, sostituendo per tanto questo valore nella formola, sarà la sottotangente $= -\frac{yy}{x}$, cioè la terza proporzionale di AB , e BD , ma negativa, vale a dire da prendersi da B verso T .

ESEMPIO V.

39. Sia la curva ADF (Fig. 24.) l'Ellissi dell'equazione $ax - xx = \frac{ayy}{b}$, prese le assisse dal vertice A .

Differenziando avremo $adx - 2x dx = \frac{2ay dy}{b}$, e

$dx = \frac{2ay dy}{b \times a - 2x}$. Sostituito questo valore nella formola

generale $\frac{y dx}{dy}$, sarà $\frac{2ayy}{b \times a - 2x}$ la sottotangente, o pure

$\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, posto in luogo di $\frac{ayy}{b}$ il valore $ax - xx$

dato dall'equazione. Fatta $x = \frac{1}{2}a$, metà dell'asse trasverso, nel valore della sottotangente, sarà essa $\frac{2aa}{0}$,

cioè infinita; adunque la tangente nel punto, in cui l'asse conjugato taglia la curva, sarà parallela all'asse tras-

trafverso, il che troveremo esser vero anche cercando, qual sia l'angolo, che essa tangente fa con il medesimo asse trafverso.

Sia generalmente l'equazione alle ellissi di qualunque grado $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \frac{a-x}{a-x}^n$, intendendo per m ,

n due numeri positivi intieri, o rotti. Differenziando farà $\frac{m+n}{b} \times \frac{ay^{m+n-1}}{b} dy = mx^{m-1} dx \times \frac{a-x}{a-x}^n -$

$ndx \times \frac{a-x}{a-x}^{n-1} \times x^m$, e però

$$dx = \frac{\frac{m+n}{b} \times \frac{ay^{m+n-1}}{b} dy}{\frac{m+n}{b} \times \frac{a-x}{a-x}^{n-1} \times x^m - bnx^m \times \frac{a-x}{a-x}^{n-1}}, \text{ e sostituendo}$$

questo valore nella formola generale, farà essa

$$\frac{\frac{m+n}{b} \times \frac{ay^{m+n}}{b}}{\frac{m+n}{b} \times \frac{a-x}{a-x}^{n-1} \times x^m - bnx^m \times \frac{a-x}{a-x}^{n-1}}, \text{ e posto in}$$

luogo di $\frac{ay^{m+n}}{b}$ il valore dato dall'equazione, farà la

$$\text{fottotangente } \frac{\frac{m+n}{b} \times x^m \times \frac{a-x}{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \frac{a-x}{a-x}^n - n x^m \times \frac{a-x}{a-x}^{n-1}},$$

e dividendo il numeratore, e denominatore per

$$x^{m-1} \times \frac{a-x}{a-x}^{n-1}, \text{ farà finalmente } \frac{m+n \times ax - xx}{ma - mx - nx}.$$

Sia

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'ellissi apolloniana, farà la sottotangente $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, come sopra. Sia $m=3$,

$n=2$, cioè l'equazione $\frac{ay^3}{b} = x^3 \times \frac{1}{a-x}^2$, farà la sot-

totangente $\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$ ec.

$$3a - 5x$$

Se l'equazione fosse $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \frac{1}{a+x}^n$, es-
primerebbe essa tutte le iperbole di qualunque grado
riferite agl'assi, prese istessamente le assisse dal vertice
 A . Operando nello stesso modo, troveremo essere la
sottotangente $\frac{m+n \times ax + xx}{na + mx + nx}$, diversa solo dall' autece-

dente ne' segni, siccome diversa solo ne' segni è l'e-
quazione, da cui si ricava.

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'iperbola apolloniana, farà
la sottotangente $\frac{2ax+2xx}{a+x}$. Sia $m=3$, $n=2$, cioè l'e-

quazione $\frac{ay^3}{b} = x^3 \times \frac{1}{a+x}^2$, farà la sottotangente

$$\frac{5ax + 5xx}{3a + 5x} \text{ ec.}$$

$$3a + 5x$$

40. Da questo metodo delle tangenti si ricava
ancora la maniera di riconoscere, se le curve anno
asim-

asintoti, ed il modo di condurli, quando essi sono inclinati all'asse, giacchè nel caso più semplice, che ad esso sieno, o perpendicolari, o paralleli, abbastanza si è parlato nel Libro I. Capo 5.

ESEMPIO I.

41. Sia la curva ADE (Fig. 30.) dell'equazione di sopra $ay^{m+n} = x^m \times \overline{a+x}^n$, la di cui sottotangente

$$TB = \frac{m+n}{ma+mn+nn} \times \overline{ax+xx}, \text{ farà dunque l'intercetta}$$

$$AT = \frac{m+n}{ma+mn+nn} \times \overline{ax+xx} - x, \text{ cioè } \frac{nan}{ma+mn+nn}.$$

Egli è chiaro, che la tangente TD diverrà asintoto, quando toccando ella la curva in infinita distanza, cioè quando l'assissa $AB=x$, essendo infinita, l'intercetta AT rimanga finita; ma posta x infinita nell'espressione di AT , il primo termine ma del denominatore è infinitamente minore degli'altri, e però da trascurarsi, onde in questo caso sarà $AT = \frac{nan}{mn+nn} = \frac{na}{m+n}$,

quantità finita, adunque la curva à l'asintoto, il quale partirà dal punto M , fatta $AM = \frac{na}{m+n}$. Ma per con-

durlo :

durlo: si alzi AH normale ad AB , e sia egli per esempio MHP ; ciò posto, se si prenda x infinita, sarà dx , $dy :: MA$, AH , ed in questa supposizione di x infinita

l'equazione della curva $ay^{m+n} = x^m \times \overline{a+x}^n$ (essendo a nullo rispetto ad x) si muta in quest' altra $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m+n}$, o sia, estraendo la radice, e facen-

do per maggior comodo $m+n=t$, $y \sqrt[t]{a} = x \sqrt[t]{b}$, ma differenziando è $dy \sqrt[t]{a} = dx \sqrt[t]{b}$; dunque dx , $dy :: \sqrt[t]{a}$, $\sqrt[t]{b}$, dunque MA , $AH :: \sqrt[t]{a}$, $\sqrt[t]{b}$, e perchè $MA = \frac{na}{t}$, sarà $\frac{na}{t}$, $AH :: \sqrt[t]{a}$, $\sqrt[t]{b}$, cioè

$AH = \frac{na \sqrt[t]{b}}{t \sqrt[t]{a}}$. Se per tanto si prenda $AM = \frac{na}{t}$, e si

alzi la normale $AH = \frac{na \sqrt[t]{b}}{t \sqrt[t]{a}}$, e si conduca infinita

la retta MHP , sarà essa l'asintoto della curva ADE .

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'equazione $\frac{ayy}{b} = ax + xx$ all'iperbola apolloniana, sarà $t=2$, e però $AM = \frac{a}{2}$,

$AH = \frac{a\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, cioè AM la metà dell'asse trasverso, ed AH la metà del conjugato, appunto come dalle sezioni coniche si fa, dover essere.

ESEMPIO II.

42. Sia ADE la curva dell'equazione $y^3 - x^3 = axy$, fatte le $AB = x$, $BD = y$. Differenziando avremo $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$, e però $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$,

ed $AT = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay}$, o pure, po-

sto in luogo di $3y^3 - 3x^3$ il valore $3axy$ dato dall'equazione della curva, farà $AT = \frac{axy}{3xx + ay}$; e fatta x

infinita, cioè nel caso dell'asintoto, in cui AT diviene AM , il termine ay è nullo rispetto a $3xx$, adunque farà $AM = \frac{axy}{3xx} = \frac{ay}{3x}$.

Ma poichè nell'equazione proposta non si possono separare le indeterminate, nè in conseguenza determinare il valore della AM ; si ponga $AM = \frac{ay}{3x} = t$, (il medesimo, o simile artificio potrà servire in altri

casì

casì della stessa natura) farà $y = \frac{3tx}{a}$, e sostituito questo valore nell'equazione proposta, farà essa $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 3txx$, ma quando sia x infinita, l'ultimo termine è nullo rispetto agl'altri; adunque sarà $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 0$, cioè $t = \frac{a}{3}$. Presa adunque $AM = \frac{a}{3}$, dal punto M si

dovrà condurre l'asintoto. Deve in oltre essere MA , $AH :: dx, dy$, e l'equazione proposta $y^3 - x^3 = axy$, o sia $y^3 = x^3 + axy$ si riduce ad essere $x^3 = y^3$, cioè $x = y$, quando sia x infinita, e però $dx = dy$; adunque fatta $MA = AH$, se dal punto M per lo punto H si condurrà una retta, essa farà l'asintoto della curva.

Aggiungo in oltre, che deve necessariamente la linea AT accostarsi ad un certo limite, oltre il quale non possa trascorrere, e che il menzionato limite talora è infinitesimo, o nulla. Eccone un' esempio semplice.

Sia l'iperbola equilatera BCF , (Fig. 31.) e posta $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$, abbiasi l'equazione $aa + xx = yy$, e differenziando, $x dx = y dy$. Quindi la sottotangente $ED = \frac{y dx}{dy} = \frac{yy}{x} = \frac{aa + xx}{x}$, e conseguentemente $ED - AD = \frac{aa + xx}{x} - x = \frac{aa}{x} = AE$.

Posta $x = 0$, si trova AE infinita, e la tangente
 H 2 del

del punto B parallela all'asse AD ; e fatta $x = \infty$, si $\frac{1}{2}$ $AE = 0$. Per la qual cosa il punto E scorre tutta la AE infinitamente prodotta, e si ferma nella origine A , oltre cui non trascorre, quantunque la nostra curva volti il convesso all'asse. L'asintoto adunque AG nasce dal punto A , e forma con la linea delle assisse un'angolo semiretto, stante che nella equazione locale $ax + xx = yy$, posta $x = \infty$, svanisce la costante ax , e diventa $xx = yy$, o sia $x = y$.

43. Fino ad ora è stato da me supposto, che l'angolo delle coordinate sia retto. Che se egli sia ottuso, o acuto, poste come sopra $BC = x$, $CE = y$, $CD = dx$, $OG = dy$, (Fig. 32., e 33.) la sottotangente sarà nè più nè meno $\frac{ydx}{dy}$, perchè saranno sempre simili

i due triangoli GEO , EAC ; ma l'altre formole avranno bisogno di riforma.

Nel triangolo EOG l'angolo O eguale all'angolo ACE si suppone noto, adunque dal punto G abbassata GI normale ad AD ; e prodotta, se fa bisogno, EO in H , nel triangolo GOH sarà noto l'angolo GOH , ma l'angolo in H è retto, quindi noto l'angolo OGH , e però noto in specie il triangolo OGH , cioè data la ragione di GO a GH , e sia quella di a ad m , sarà per tanto $a, m :: dy, GH = \frac{m dy}{a}$; sarà pure data la ragione

di GO ad OH , e sia quella di a ad n , e però a ,
 $n :: dy$, $OH = \frac{ndy}{a}$; adunque $EH = dx \pm \frac{ndy}{a}$ (cioè il
 segno positivo nella Fig. 32., ed il negativo nella
 Fig. 33.), quindi $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + nndy^2 + mmdy^2}{a^2}$;

ma se OG si esprime per a , GH per m , OH per n ,
 farà $aa = mm + nn$, ed $aady^2 = mmdy^2 + nndy^2$, adunque
 sostituito questo valore nell'espressione di $\overline{EG}^2$, farà
 $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a^2}$, ed $EG = ds =$

$\sqrt{\frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a^2}}$, espressione dell'elemento della
 curva. Ciò posto, per la similitudine de' triangoli

EGO , AEC , farà GO , $GE :: EC$, EA , cioè dy ,

$\sqrt{\frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a^2}} :: y$, $EA = \frac{y}{dy} \sqrt{\frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a^2}}$,

formola della tangente.

Sia TE normale alla curva, ed ES al diametro
 AI , per la similitudine de' triangoli GOH , ECS ,
 avremo $ES = \frac{my}{a}$, e $CS = \frac{ny}{a}$; e per la similitudine de'

triangoli GEH , EST , avremo EH , $HG :: ES$, ST ,
 cioè $\frac{adx \pm ndy}{a}$, $\frac{mndy}{a} :: \frac{my}{a}$, $ST = \frac{mmydy}{a \times adx \pm ndy}$,

$$\begin{aligned} \text{e però } CT &= \frac{mnydy}{a \times adx \pm ndy} \pm \frac{ny}{a} = \frac{mnydy + nnydy \pm anydx}{a \times adx \pm ndy} \\ &= \frac{aydy \pm nydx}{adx \pm ndy}, \text{ formola della sottanonormale.} \end{aligned}$$

In simil modo si ridurranno l'altre formole, il che basti d'aver indicato.

44. Ma le curve, delle quali si vogliono le tangenti, possono esser trascendenti, cioè non esprimibili da alcuna equazione algebrica, ma dipendenti dalla rettificazione d'altre curve non rettificabili. Sia la curva APB , (Fig. 34) di cui si sappia condurre la tangente PTK ad un qualunque punto P , e prodotta in M la QP normale ad AQ , la relazione di MP all'arco PA sia espressa da un'equazione qualunque, e si ricerchi la tangente MT della curva CMA descritta da' punti M ; condotta qm infinitamente prossima a QM , ed MR parallela a PT , e supposto rettificabile l'arco AP , cioè $=x$, e chiamata $PM=y$, sarà $Pp=dx$, $Rm=dy$, e simili i due triangoli mRM , MPT , e però mR , $RM::MP$, PT , cioè dy , $dx::y$, $PT=\frac{ydx}{dy}$, formola

la per la sottangente della curva CMA da prenderfi sulla tangente della curva APB . Dall'equazione data della curva AMC si ritroverà il valore della dx , o dy da sostituirsi nella formola, e si farà il rimanente al solito.

ESEMPIO.

45. Mentre il circolo DPC si arruota uniformemente sulla retta AB cominciando dal punto A , (Fig. 35.) il punto C della sua periferia, che nel principio del moto cade sul punto A , lasci impressa nel piano la traccia del suo cammino, e si continovi questo moto fino a che pervenga di nuovo il punto C nella retta AB ; descriverà esso una curva ACB , la quale dalla sua generazione viene chiamata la *Cicloide*; e dicesi *Cicloide ordinaria*, quando il circolo si muova talmente sulla retta AB , che tutta l'abbia esattamente misurata colla sua periferia dopo, che il punto C da A sia giunto in B per modo, che sia AB eguale alla periferia dello stesso circolo. Dicesi *Cicloide allungata* quando il moto sia tale, che la retta AB sia maggiore della periferia del circolo; e finalmente *Cicloide contratta* quando la stessa AB sia minore della periferia.

Dalla descrizione di questa curva chiaramente si vede, che condotta da un qualunque punto la retta MQ parallela ad AB , avrà l'intercetta MP fra la curva, ed il circolo CPD all'arco CP quella ragione, che è la retta AB a tutto il circolo.

Ed in fatti sia il circolo generatore nelle due posizioni EMF , DPC ; condotte le corde ME , PD ,

poi-

poichè sono eguali gli archi EM , DP , faranno eguali, e parallele le corde EM , DP , e però sarà $MP = ED$; ma per la natura della curva è AE , $EM :: AD$, $EMF :: AB$, $EMFE$, e nella stessa ragione è pure ED ad MF ; ed $MF = PC$, $ED = MP$, dunque sarà $MP, PC :: AD, EMF :: AB, EMFE$. Se però si chiami la retta $AB = a$, la periferia $EMFE$ del circolo generatore $= b$, ed un qualunque arco CP per affissa $= x$, l'ordinata $PM = y$, sarà l'equazione della curva cicloide $\frac{by}{a} = x$.

Avuta l'equazione alla curva, la differenza, per ritrovare la sottotangente, e però $\frac{b dy}{a} = dx$, e sostituito questo valore in luogo di dx nella formola $\frac{y dx}{dy}$, sarà $PT = \frac{by}{a} = x$. Presa adunque sulla tangente PK (Fig. 34.)

del circolo, che si suppone condotta, una porzione PT eguale all'arco AP del circolo, e condotta al punto M la retta TM , essa sarà tangente della cicloide nel punto M .

Che se in oltre la cicloide sia l'ordinaria; poichè in questo caso si à $b = a$, e però $y = x$, sarà $PM = PT$, e l'angolo $PTM = PMT$; ma l'angolo TPQ esterno è doppio dell'angolo TMP , e gl'angoli TPA , APQ (per la 32., e 29. prop. del 3. d'Euclide) sono eguali,

li, dunque sarà l'angolo APQ eguale all'angolo TMP , e però la tangente MT parallela alla corda PA .

46. Senza supporre la tangente della curva APB (Fig. 34.) si potrà avere la sottotangente della curva AM presa nell'asse KAB . Sia $AQ = x$, $QP = y$, l'arco $AP = s$, $QM = z$, e la relazione dell'arco AP all'ordinata MP sia espressa da un'equazione qualunque. Sia qm infinitamente prossima alla QM , ed MS parallela ad AB , farà $MS = dx$, $Sm = dz$, e la similitudine de' triangoli mSM , MQN ci darà dz , $dx :: z$. $QN = \frac{zdx}{dz}$, formola per la sottotangente.

Se in luogo di assumere per ordinata $QM = z$, si prenda $PM = u$, condotta MR parallela all'archetto Pp , farà $mR = du$, $RS = po = dy$, e però $MS = du + dy$, ed i triangoli simili mSM , MQN ci daranno $du + dy$, $dx :: u + y$, $QN = \frac{u + y \times dx}{du + dy}$, altra formola della sottotangente.

mS

ESEMPIO I.

47. Sia la curva APB (Fig. 34.) un circolo del diametro $= 2r$, e la ragione di PM all'arco PA sia quella di a alla b , cioè la curva AMC sia la cicloide. Chiamate $AQ = x$, $QP = y$, $QM = z$, l'arco $AP = s$,
Tom. II. I e

e condotta mq infinitamente prossima ad MQ , MR parallela a Pp ; MS , Po parallele ad AB , farà $mS=dz$, $RS=po=dy$, $Pp=ds$, ed mR differenza di MP farà $dz-dy$. Ma poichè, per la proprietà della curva, abbiamo MP all'arco PA , come a a b , nella stessa ragione faranno ancora i differenziali loro mR , pP ; e però farà $dz-dy$, $ds::a, b$, cioè $\frac{ads}{b}=dz-dy$;

ma $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, e per la proprietà del circolo $y=\sqrt{2rx-xx}$, dunque $dy=\frac{rdx-xx}{\sqrt{2rx-xx}}$, e $dy^2=\frac{r^2dx^2-2rxxdx+xx^2}{2rx-xx}$, quindi $ds=\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$.

Surrogati per tanto questi valori in luogo di ds , e dy nell'equazione $\frac{ads}{b}=dz-dy$, avremo $dz=\frac{ardx+brdx-bxxdx}{b\sqrt{2rx-xx}}$, equazione differenziale della cicloide.

Sostituito adunque il valore di dz dato dall'equazione nella formola $\frac{zdx}{dz}$ della sottotangente, avremo

$$QN=\frac{bz\sqrt{2rx-xx}}{ar+br-bx},$$

Che se la cicloide sia l'ordinaria, farà $a=b$, e però

però $QN = z \sqrt{\frac{2rx - xx}{2r - x}}$, cioè $2r - x, \sqrt{2rx - xx} :: z,$

QN , o sia $2r - x, y :: z, QN$; ma per la proprietà del circolo è $2r - x, y :: y, x$, adunque farà $y, x :: z, QN$, cioè $QP, QA :: QM, QN$, e però farà MN parallela a PA .

ESEMPIO II.

48. Sia la curva APB una parabola, la di cui equazione $px = yy$, poste $AQ = x, QP = y$, e sia l'arco $AP = s, PM = u$, e la ragione di MP all'arco PA sia quella di a alla b , farà pure $mR, Pp :: a, b$; cioè $du, ds :: a, b$, e però $\frac{ads}{b} = du$. Ma nella

parabola $y = \sqrt{px}$, e $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, dunque $ds =$

$\frac{dx \sqrt{4px + pp}}{2\sqrt{px}}$; quindi surrogato questo valore in luogo

di ds nell'equazione $\frac{ads}{b} = du$, l'equazione alla curva,

AMC farà $\frac{adx \sqrt{4px + pp}}{2b\sqrt{px}} = du$. Presa per tanto la

formola della sottotangente $\frac{u + y \times dx}{du + dy}$, che a questo

caso conviene, e fatte le sostituzioni in luogo di du , e dy sarà $QN = \frac{u+y}{a\sqrt{4px+pp+bp}} \times 2b\sqrt{px}$; ma $y = \sqrt{px}$, per

la proprietà della curva APB , ed $\frac{as}{b} = u$, per la proprietà della curva AMC ; dunque $QN = \frac{2as\sqrt{px} + 2bpx}{a\sqrt{pp+4px+bp}}$.

49. Dal diverso modo, con cui molte curve si generano, nascono diverse dalle ritrovate le formole, delle sottotangenti loro, benchè il metodo per ritrovarle sia simile. Basterà il ricercarle in alcune per fare idea della maniera, e dell'artificio, che dee usarsi in qualunque incontro; e però date le due curve AQC , BCN (Fig. 36.) al comune diametro TF , alle quali si sappiano condurre le tangenti, sia un'altra curva MC tale, che la relazione delle ordinate PQ , PM , PN rispetto ad un qualunque punto M sia espressa da una qual si sia equazione, e si dimandi la tangente MT di un qualunque punto M . Si conduca pS infinitamente prossima a PN , e le NS , MR , QO parallele ad AB , e sia $PE = s$, $PF = t$, cognite per la supposizione, $PQ = x$, $PM = y$, $PN = z$. Per la similitudine de' triangoli QPE , qOQ , sarà $QO = \frac{sdx}{x} = MR = NS$, e per la similitudine de' triangoli mRM , MPT , fa-

rà

rà $PT = \frac{sydx}{x^2y}$, formola della sottotangente; ma perchè

differenziando l'equazione della curva MC , a fine di avere il valore della dx da sostituirsi in essa formola, sarà egli dato per dy , e dz , non si averà essa sottotangente in termini finiti. Si rifletta adunque, che i triangoli simili NSn , NPF ci danno NP , $PF :: nS$, SN , cioè z , $t :: \pm dz$, $SN = \pm \frac{tdz}{z}$ (cioè il segno positivo

vo alla dz , se crescendo x , ed y , cresce la z ; ed il segno negativo, se crescendo x , ed y , la z cala). Ma è anco $SN = \frac{sdx}{x}$, dunque $\pm \frac{tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$, e però

$dz = \pm \frac{sdx}{tx}$. Posto adunque in luogo di dz questo va-

lore nell'equazione differenziata della curva MC , si averà un valore di dx dato per dy , il quale sostituito nella formola della sottotangente $\frac{sydx}{x^2y}$ farà svanire le

differenze, e la sottotangente sarà espressa in termini finiti.

ESEMPIO I.

50. Sia $xz = yy$ l'equazione della curva MC ; differenziando sarà $zdx + xdz = 2ydy$, e sostituito in luogo di dz il valore $\pm \frac{sdx}{tx}$, sarà $zdx \pm \frac{sdx}{t} = 2ydy$,

e però $dx = \frac{2tydy}{tz \pm sz}$; nella formola della sottotangente

$\frac{sydx}{x dy}$ surrogato per tanto, in luogo di dx , questo valore, farà $PT = \frac{2sty}{tzx \pm szx} = \frac{2st}{t \pm s}$, quando si ponga

in vece di yy il valore xz . Sia ora la curva AQC una parabola del parametro $= b$; la curva BCN un circolo del diametro $AB = 2a$. Se adunque il punto N cade, nella periferia del primo quadrante principiando da A , in cui la dz è positiva, la formola della sottotangente PT farà $\frac{2st}{t+s}$, e la sottotangente del circolo farà

$\frac{2aq - qq}{a - q} = t$ (chiamata $AP = q$), e quella della para-

bola farà $2q = s$; posti adunque questi valori in luogo di t , e di s nell'espressione $\frac{2st}{t+s}$, avremo $PT =$

$$\frac{82q - 4qq}{4a - 3q}$$

Che se il punto N cade nella periferia dell'altro quadrante, farà dz negativa, e la formola della sottotangente PT farà $\frac{2st}{t-s}$; ma in questo caso la sotto-

tangente del circolo è $\frac{2aq - qq}{q - a} = t$, e della parabola

rimane

rimane $2q = s$, e però fatte le sostituzioni de' valori di t , e di s nell'espressione $2st$, avremo $PT = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q}$,

come nel primo caso.

52. Ma quando siasi denominata AP , essendo AQ una parabola, sarà $PQ = x = \sqrt{bq}$; ed essendo BCN un circolo, sarà $PN = z = \sqrt{2aq - qq}$, adunque l'equazione $yy = zx$ della curva MC sarà $yy = q\sqrt{2ab - bq}$, e data così l'equazione per le due coordinate AP , PM , troverassi la sottotangente PT con le solite ordinarie formole $\frac{y dq}{dy}$. Differenziando adunque l'equazione $yy =$

$q\sqrt{2ab - bq}$, sarà $y dy = \frac{4abdq - 3bq dq}{4\sqrt{2ab - bq}}$; quindi multi-

plicando per y il numeratore, e denominatore della formola $\frac{y dq}{dy}$, onde sia $\frac{yy dq}{y dy}$, e sostituendo in luogo di

yy , e di $y dy$ i rispettivi valori, sarà $\frac{yy dq}{y dy} = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q} =$

PT , come prima.

53. Sia più generalmente $x^m z^n = y^{m+n}$ l'equazione della curva MC , differenziando sarà $mz^n x^{m-1} dx + nx^m z^{n-1} dz = m+n \times y^{m+n-1} dy$, e ponendo in

luogo

luogo di dz il valore $\pm \frac{szdx}{tx}$, farà

$$\frac{tmz^n x^{m-1} dx \pm snx^{m-1} z^n dx}{t} = \frac{tx}{m+n} \times y^{m+n-1} dy,$$

e però $dx = \frac{mt+nt}{mt \pm ns} \times y^{m+n-1} dy$; adunque $PT =$

$$\frac{sydx}{x dy} = \frac{mst + nst}{mt \pm ns} \times \frac{y^{m+n}}{z^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt \pm ns}, \text{ quando si ponga}$$

in luogo di y^{m+n} il valore $x^m z^n$.

54. Se le due curve AC , BCN diverranno linee rette, nel caso dell'equazione semplice $xz = yy$ della curva MC farà essa una delle Sezioni Coniche d'Apollonio, come si è veduto al Lib. I. Cap. III. num. 135., cioè un'Ellissi quando l'ordinata CD cade fra i punti A , B ; un'Iperbola quando cade dall'una, o dall'altra parte; ed in fine una Parabola quando i punti A , B sono infinitamente lontani l'uno dall'altro, cioè quando l'una delle rette linee AC , BC è parallela al diametro. Da ciò manifestamente si vede, che nelle stesse circostanze saranno le medesime curve coniche, ma di grado superiore in infinito, quando l'equazione alla curva MC sia la generale $x^m z^n = y^{m+n}$.

55. Data la curva AP (Fig. 37.) con l'origine in A , di cui si sappia condurre la tangente, sia un'altra curva CMD tale, che condotta da un punto dato

F la retta FMP in qualunque modo, la relazione di FM alla porzione AP sia espressa da un' equazione, qualunque, e debbasi ritrovare la tangente della curva CMD .

Sia PH tangente della curva APB nel punto P , e si conduca FH normale ad FP , ed Fp infinitamente prossima, e col centro F si descrivano gl'archetti infinitesimi MR , PO , e la ricercata tangente della curva CMD sia MT . Si chiamino $PH=t$, $FH=s$, $FM=y$, $FP=z$, e l'arco $AP=x$. Poichè per gl'archi infinitesimi possono assumersi i loro seni retti, farà il triangolo MRm rettangolo in R , e perchè l'angolo MmR non è diverso dall'angolo TMF , se non per l'angolo infinitesimo MFm , si potranno considerare simili i due triangoli MRm , TFM , e per la stessa ragione simili i due triangoli POp , HFP ; adunque farà mR , $RM::MF$, FT , cioè dy , $MR::y$, FT , ed $FT = \frac{MR \times y}{dy}$, onde per avere il valore di FT con-

viene avere prima quello di MR , che si averebbe, se fosse nota PO ; ma per i triangoli simili PFH , POp , farà PH , $FH::Pp$, PO , cioè t , $s::dx$, $OP = \frac{sdx}{t}$,

e per i settori simili FPO , FMR , farà FP , $PO::FM$, MR , cioè z , $\frac{sdx}{t}::y$, $MR = \frac{sydx}{zt}$, quindi $FT = \frac{sydy}{tady}$,

formola della sottotangente; la quale, se si sostituisc-

luogo di dx il valore dato dall'equazione differenziata della curva CMD , sarà espressa in termini finiti.

ESEMPIO I.

56. Sia il circolo $ABCD$ (Fig. 38.) del centro H , raggio HA , e mentre il raggio HA fisso nel centro si muove uniformemente, descrivendo il punto A la periferia $ABCD$, si muova il punto H uniformemente sul raggio HA in modo, che restitutosi il raggio nella prima situazione HA il punto H abbia percorso tutto il raggio, e sia in A ; descriverà il punto H la curva $HEcA$, che dicefi la *Spirale d'Archimede*. Dalla generazione di questa curva è facile a vedere, che un qualunque arco AB del circolo sarà alla corrispondente porzione HE del raggio, come tutto il circolo a tutto il raggio. Chiamato adunque il raggio $= r$, la periferia del circolo $= c$, l'arco $AB = x$, e l'ordinata $HE = y$, sarà $x, y :: c, r$, e però $y = \frac{rx}{c}$, equazione

della spirale, in cui le ordinate sono dal punto fisso H . Ciò premesso, si voglia la tangente ET della spirale: poichè in questo caso la FP della Fig. 37. è il raggio HB del circolo, sarà $z = r$, e le due, PH tangente, ed FH sottotangente, nella stessa Fig. 37. sono in questa ambedue perpendicolari al raggio HB (per la

natura

natura del circolo), ed in conseguenza tra loro parallele, e però eguali; onde sarà $s=t$, adunque la formola generale $\frac{xydx}{r^2dy}$ sarà in questo caso $\frac{ydx}{r dy}$; quindi

differenziando l'equazione $y = \frac{rx}{c}$, sarà $dy = \frac{r dx}{c}$, e so-

stituito nella formola il valore di dx , sarà essa $\frac{cyy}{r} = HT$; o pure posto in luogo di y il valore $\frac{rx}{c}$,

sarà $\frac{xy}{r} = HT$. Descritto adunque col centro H , rag-

gio $HE = y$ l'arco EQ , e presa HT eguale all'arco EQ , sarà essa la sottotangente, perchè per la similitudine de' settori HEQ , HBA , sarà $HA, AB :: HQ, QE$; cioè $r, x :: y, QE = \frac{xy}{r}$.

Se in luogo di essere l'equazione $y = \frac{rx}{c}$, sia

$y^m = \frac{r^m x}{c}$, cioè la periferia all'arco AB , come una

qualunque potestà m intiera, o rotta del raggio ad egual potestà dell'ordinata, differenziata l'equazione, ci darà $dx = \frac{mcy^{m-1}}{r^m} dy$, ed $ydx = \frac{mcy^m dy}{r^m}$; e fatta la sostitu-

zione nella formola $\frac{ydx}{r}$ della sottotangente, sarà essa

$\frac{mcy^{m+1}}{r^{m+1}} = HT$, ma $y^m = \frac{r^m x}{c}$, dunque $\frac{mxy}{r} = HT =$

$m \times EQ$.

57. Più semplice si averà la formola della sottotangente, se l'equazione della curva APB (Fig. 37.) sia data dalla relazione di FM ad FP ; poichè i triangoli simili pOP , PFH , ci danno $PO = \frac{sdz}{z}$, ed i settori simili FPO , FMR ci danno $MR = \frac{sydz}{zz}$, e finalmente i triangoli simili MRm , TFM ci daranno $FT = \frac{sydydz}{zzdy}$.

ESEMPIO II.

58. Sia la curva CMD al di sopra di APB , il che non fa alcuna alterazione (Fig. 39.), ed APB sia una retta linea, ed FM , FP sieno sempre diverse fra loro per la stessa quantità, cioè PM costante $= a$, sarà $y - z = a$ l'equazione della curva, che è la Concoide di Nicomede, il di cui polo F , ed AB l'asintoto. Differenziando l'equazione, sarà $dy = dz$, quindi la sottotangente $FT = \frac{sy}{zz}$.

Condotta adunque ME parallela a PA , ed MT parallela a PE , sarà MT tangente della curva in M ; imperciocchè sarà $FA = s$, $FE = \frac{sy}{z}$, ed $FT = \frac{sy}{zz}$.

59. Data all'asse EAT la curva qualunque AM , (Fig. 40.) di cui si sappia condurre la tangente MH ad un qualunque punto M , e dato fuori della curva il punto F , da cui sia condotta la retta FP ; se s'immagineremo, che

che aggirandosi la retta FPM sul punto F immobile, faccia muovere sulla retta ET il piano PAM sempre parallelo a se stesso, rimanendo la intercetta PA sempre la stessa: il punto M , che è la comune intersecazione delle due linee FM , AM , descriverà con questo moto una curva CMD , di cui si domanda la tangente. Si muova il piano PAM , e nel primo istante arrivi nella posizione infinitamente prossima pam ; e si conduca SRm parallela ad ET . La similitudine de' triangoli MRm , MHT ci darebbe la retta HT , che determina la tangente ricercata, se fossero noti i lati MR , Rm . Per averli adunque, chiamata FP , o $Fp = x$; FM , o $Fm = y$, $Pp = dz$, e le note $PA = a$, $MH = t$, $PH = s$; egli è chiaro, che sarà $Pp = Aa = Rm = dz$, e per i triangoli simili Fpp , FSm sarà $Fp, Pp :: Fm, Sm$, cioè $x, dz :: y, Sm = \frac{ydz}{x}$, dunque $SR = \frac{ydz}{x} - xdz$;

e per i triangoli simili MPH , MSR , sarà $HP, HM :: RS, RM$, cioè $s, t :: \frac{ydz}{x} - xdz, MR = \frac{tydz}{s} - \frac{txdz}{s}$;

finalmente, per i triangoli simili MRm , MHT , sarà $MR, Rm :: MH, HT$, cioè $\frac{tydz}{s} - \frac{txdz}{s}, dz :: t, Ht = \frac{sx}{y-x}$.

Dal punto F si conduca FE parallela alla tangente MH , e si prenda $HT = PE$, tirata TM , sarà essa tangente della curva nel punto M . Imperocchè per i triangoli simili PMH , PFE , sarà $PM, PH :: PF, PE$, cioè $y - x, s :: x, \frac{sx}{y-x} = PE = HT$.

60. E' stato dimostrato al num. 136. Cap. III. Lib. I. che se la linea AM fosse una retta, la curva CMD sarebbe l'iperbola, che averebbe ET per uno de' due asintoti. Se AM fosse un circolo col centro P , la curva CMD sarebbe la Concoide di Nicomede, il di cui polo F , e l'asintoto ET . E se finalmente AM fosse una parabola, la curva CMD sarebbe la Compagna della Paraboloide di Cartesio, cioè una delle due Concoide Paraboliche.

61. Al diametro AP (Fig. 41.) sia una curva qualunque AN , a cui si sappia condurre la tangente, ed un punto fisso F fuori di lei, e sia un'altra curva CMD tale, che condotta, come si vuole, dal punto F la retta $FMPN$, la relazione tra FN , FP , ed FM sia espressa da un'equazione qualunque; si dimanda la tangente MT di un qualunque dato punto M .

Per lo punto F si conduca HK perpendicolare ad FN , che incontra in K il diametro AP prodotto, ed in H la tangente data NH . Sia FQ infinitamente prossima ad FN , e col centro F si descrivano gl'archi MR , PQ , NQ . Chiamate $FK = s$, $FH = t$, $FP = x$, $FM = y$, $FN = z$, sarà $MR = dy$, $PQ = dx$, $QN = -dz$, e per la similitudine de' triangoli NQn , NFH , sarà $NQ = -\frac{tdz}{z}$; e per la similitudine de' settori FNQ , FMR , sarà $MR = -\frac{tydz}{z}$; e finalmente, per la simi-

litu-

litudine de' triangoli MRm , MFT , farà $FT = -\frac{yytdz}{zzdy}$,

formola ricercata della sottotangente. Ma quì pure si rifletta, che differenziando l'equazione della curva, il valore di dy da sostituirsi nella formola sarà dato per dx , e dz , quindi non spariranno i differenziali; tuttavia però la similitudine de' settori FNQ , FPO ci darà $PO = -\frac{txdz}{zz}$, e la similitudine de' triangoli Pop , PFK

l'analogia dx , $-\frac{txdz}{zz} :: x$, s , quindi l'equazione,

$szzdx = -txndz$, e però $-dz = \frac{szzdx}{txx}$; posto adun-

que nella formola della sottotangente il valore di dy , cavato dall'equazione differenziata della curva, indi in luogo di dz questo valore, spariranno le differenze, e si averà la sottotangente in termini finiti.

Se la linea AP in luogo di esser retta fosse una curva, condotta la tangente PK , col medesimo discorso si troverebbe lo stesso valore della sottotangente FT .

ESEMPIO.

62. La curva AN (Fig. 42.) sia un circolo, il quale passi per lo punto F , ed in tal modo posto, che conducendo dal puto F la FB normale ad AP prodotta, essa passi per lo centro G di esso circolo, e sia sem-

sempre PN eguale a PM , la curva CMD della Figura antecedente, cioè FMA in questa sarà la Cissoide, di Diocle, la di cui equazione sarà $z + y = 2x$. Differenziando adunque avremo $dz + dy = 2dx$, e però $dy = 2dx - dz$, e posto in luogo di dy questo valore nella formola $-\frac{yytdz}{zdy}$ della sottotangente, sarà

$-\frac{yytdz}{zdy}$, e finalmente surrogato in luogo di $-dz$

il valore $\frac{szdz}{txx}$, avremo $\frac{styy}{2txx + szz} = FT$, sottotan-

gente ricercata.

Egli è chiaro, che se il punto M , di cui si vuole la tangente, cadesse nel punto A , essendo in questo caso KH normale ad FA , farebbe $FN = FP = FM = FA = FK = FH$; e però $FT = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}AF$.

63. Troverassi forse più speditamente la sottotangente della Cissoide per mezzo della solita formola del num. 30.; poichè, condotte le NE , ML perpendicolari ad FB , e chiamando $FB = 2a$, $FL = x$, $LM = y$, per la proprietà della curva FMA sarà $BE = FL = x$, e per la proprietà del circolo, sarà $EN = \sqrt{2ax - xx}$, ed i triangoli simili FLM , FEN daranno FL , $LM :: FE$, EN , e però FL , $LM :: EN$, EB , cioè x , $y :: \sqrt{2ax - xx}$, x ; quindi $y = \frac{xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, o

fia

sia $yy = \frac{x^3}{2a-x}$, equazione della curva FMA ; differen-
 ziando adunque avremo $2ydy = \frac{3ax^2dx - 2x^3dx}{2a-x}$, e
 presa la formola solita $\frac{ydx}{dy}$, e fatte tutte le sostituzioni,
 sarà $\frac{ydx}{dy} = yy \times \frac{2a-x}{2ax-x^2} = LO = \frac{2ax-x^2}{2a-x}$, se si pon-
 ga in luogo di yy il valore $\frac{x^3}{2a-x}$.

64. Sieno due curve ANB , CPD , (Fig. 43.) ed una retta FK , ed in esse tre punti fissi A , C , F ; sia in oltre la curva EMG tale, che, condotta per un qualunque punto M di essa la retta FMN dal dato punto F , e dal punto M la retta MP parallela ad FK , la relazione dell'arco AN all'arco CP venga espressa da un'equazione qualunque. Si dimanda la tangente della curva EG nel punto M .

Sia MT la ricercata tangente, che incontri in T la retta FK prodotta, se fa bisogno, e dal punto T si tirì TH parallela ad FM , e per lo punto M si conducano MRK parallela alla tangente in P , ed MOH parallela alla tangente in N , e sia $FmOn$ infinitamente prossima ad FN . Chiamate $FM=s$, $FN=t$, $MK=u$, e gli archi $AN=y$, $CP=x$, e però $Nn=dy$, $Pp=dx$, sarà per i triangoli simili FNn , FMO , FN , $Nn::FM$, MO ,

MO , cioè t , $dy :: s$, $MO = \frac{sdy}{t}$, e per i triangoli simili MmR , MTK ; ed MOm , MHT , farà MR , $Mm :: MK$, MT ; ed Mm , $MO :: MT$, MH ; dunque farà anche MR , $MO :: MK$, MH , cioè dx , $\frac{sdy}{t} :: u$,

$MH = \frac{usdy}{t}$. Quindi differenziando l'equazione data, avremo il valore di dy dato per dx , e fatta la sostituzione, farà MH espressa in termini finiti. Presa adunque MH eguale al ritrovato valore, e parallela alla tangente in N della curva ANB , e condotta HT parallela ad MF , se dal punto M si tirerà al punto T la retta TM , farà essa tangente nel punto M della curva EMG .

E S E M P I O .

65. La curva ANB (Fig. 44.) sia un quarto di circolo, il di cui centro F , e CPD della Fig. 43. sia il raggio APF della Fig. 44. perpendicolare alla retta $FKT B$, e si conduca la tangente AR . S'intenda aggrarsi equabilmente il raggio FA intorno al centro F , e nello stesso tempo muoversi equabilmente la tangente AR sempre parallela a se stessa verso FB in modo, che quando il raggio FA cade in FB , cada pure in FB la tangente AR . Con questo moto il punto M , che è la intersecazione del raggio, e della tangente, descriverà la curva AMG , che chiamasi la *Quadratrice di Dinostrate*. Dalla

Dalla generazione di questa curva è chiaro, che sarà l'arco AN all'intercetta AP , come il quadrante AB al raggio AF ; chiamando adunque $AN = y$, $AP = x$, $AB = a$, $AF = r$, sarà $ry = ax$, e $dy = \frac{adx}{r}$, dunque sostituendo questo valore di dy nella formola $\frac{usdy}{tdx}$, sarà $MH = \frac{asu}{t}$; ma in questo caso FN è il raggio del

circolo, ed $MK = AF - AP$, dunque $t = r$, $u = r - x$, quindi $MH = \frac{asr}{r} - \frac{asx}{r} = \frac{as}{r} - \frac{sx}{r}$, posto in luogo di

ax il valore ry dato dall'equazione. Dal punto M si alzi MH normale ad FM , ed eguale all'arco MQ descritto col centro F , raggio FM , e si tiri HT parallela ad FM , sarà MT tangente della quadratrice nel punto M ; imperocchè, per i settori simili FNB , FMQ , sarà FN , $NB :: FM$, MQ , cioè r , $a - y :: s$, $MQ = \frac{as}{r} - \frac{sy}{r} = MH$.

66. Sieno due curve BN , FQ , (Fig. 45.) delle quali si sappiano condurre le tangenti, e che abbiano per asse comune la retta BA , in cui sieno due punti fissi A , E , e sia un'altra curva LM tale, che condotta per un qualunque punto M di essa la retta AMN ; e descritto col centro A , raggio AM , l'arco MG ; e dal punto G abbassata GQ normale ad AG , sia data la re-

lazione de' spazj ANB , $EFQG$, e delle linee AM , AN , QG per mezzo di un'equazione qualunque. Si ricerca la tangente della curva LM nel punto M .

Condotta la retta ATH perpendicolare ad AMN , sia un'altra Amn infinitamente prossima ad AMN , e l'arco (mg), e la perpendicolare (gq), quindi col centro A descritto l'archetto NS , si chiamino le sottotangenti date $HA=a$, $GK=b$, e sia $AM=y$, $AN=z$, $GQ=u$, e gli spazj $EGQF=s$, $ANB=t$, farà $Rm=Gg=dy$, $Sn=dz$, ed a cagione de' triangoli simili KGQ , Qog , farà $(og)=-du=\frac{udy}{b}$, e per i triangoli simili HAN , NSn , farà $SN=\frac{adz}{z}$. Lo spazio $GQgg$ si può pren-

dere per lo spazio $GQog$, perchè la differenza loro Qog è quantità infinitesima del secondo ordine, onde farà $GQgg=udy=-ds$; così pure farà $ANn=\frac{1}{z}AN \times NS=\frac{1}{z}adz=-dt$. Sostituiti per tanto nella differenza dell'equazione proposta, in luogo di du , ds , dt , questi valori, avremo un'equazione, da cui si caverà il valore di dz dato per dy . Ora per i settori simili ARM , ANS , farà $MR=\frac{aydz}{zz}$, e per i triangoli simili mRM , MAT , farà $AT=\frac{ayydz}{zzdy}$, formula della sottotangente, in cui se si sostituirà, in luogo di dz , il valore dato per dy dall'equazione della

curva,

curva, spariranno le differenze, e la sottotangente sarà data in termini finiti.

ESEMPIO.

67. Lo spazio $EGQF$ sia doppio di ABN , cioè $s = 2t$, farà $ds = 2dt$, ma $ds = -u dy$, e $dt = -\frac{1}{2}adz$, dunque farà $udy = adz$, e $dz = \frac{udy}{a}$, dunque la sottotangente $AT = \frac{uyy}{zz}$.

La curva BN sia un circolo del centro A , raggio $AN = c$, quindi $z = c$, e la curva FQ sia un'iperbola dell'equazione $uy = ff$, farà la sottotangente $AT = \frac{ffy}{cc}$, cioè la ragione di AM ad AT costante. La curva LM (Fig. 46.) chiamasi in questo caso la *Logaritmica spirale*.

E' chiaro, che la curva LM farà infiniti giri prima di giungere nel punto A ; imperocchè quando il punto G (Fig. 45.) arriva in A , lo spazio s sarà infinito, come vedrassi nel calcolo integrale, dunque dovrà essere infinito anche lo spazio t , che non può esserlo, se non dopo infiniti giri del raggio AM .

68. R' mane per ultimo da considerarsi un caso particolare delle tangenti. Si è veduto, che essendo le coordinate di una curva qualunque x , ed y , la formola generale della sottotangente è $\frac{ydx}{dy}$, o $\frac{xdy}{dx}$, secon-

do

do che la y , o la x fa figura di ordinata; e però, differenziata l'equazione della curva, se da essa si ricavi il valore della dx , o della dy , questo valore surrogato nella formola generale ci somministra una frazione in termini tutti finiti, la quale è l'espressione, o valore della sottotangente per un qualunque punto della proposta curva. Che se si vuole la sottotangente per un determinato punto della curva, niente altro si deve fare, che sostituire nella frazione in luogo delle x , ed y i valori, che esse hanno nel dato punto. Ma accade alcuna volta, che sostituendo in luogo di x , o di y un determinato valore nella frazione, che esprime la sottotangente, o sia nel rapporto della dx alla dy cavato dall'equazione differenziata della curva, tutti i termini nel numeratore, e denominatore di esso svaniscano, e così ne provenga $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, e però anco la sottotangente $= \frac{0}{0}$, dal che però non si deve inferire, che essa sia nulla in quel punto.

Sia per un'esempio la curva
 $y^4 - 8ay^3 - 12axy^2 + 16a^2xy + 48a^3x^2 - 64a^4x = 0$,
 e sia y l'assissa, x l'ordinata, e però $\frac{xdy}{dx}$ la formola della sottotangente. Differenziando adunque l'equazione, avremo $\frac{dy}{dx} = \frac{3ay^2 - 12a^2y - 2a^3x + 16a^4}{y^3 - 6ay^2 - 6axy + 8a^2y + 12a^3x}$, e la sot-

totan-

$$\text{tangentente } \frac{xdy}{dx} = \frac{3axy^2 - 12aaxy - 2aaxx + 16a^3x}{y^3 - 6axy - 6axy + 8aay + 12aax}$$

ma se si vuole la sottotangente di quel punto di curva, a cui corrisponde l'assissa $y=2a$, essendo in questo caso, per la data equazione, anche $x=2a$, fatte le sostituzioni nella frazione, che esprime il rapporto della dx alla dy , si trova egli essere

$$\frac{12a^3 - 24a^3 - 4a^3 + 16a^3}{8a^3 - 24a^3 - 24a^3 + 16a^3 + 24a^3}$$

cioè $\frac{0}{0}$, perchè tutti i termini si distruggono, e però anco la sottotangente in quel punto $= \frac{0}{0}$, il che nulla ci

fa sapere, quantunque allo stesso punto corrisponda benissimo la sottotangente, anzi due.

69. Accaderà infallibilmente questo caso ogni qual volta la curva abbia più rami, che s'incontrino, e si voglia la tangente nel punto del concorso; ed in fatti la curva $NOPQR$ (Fig. 47.) dell'equazione proposta à i due rami OP , MQ , che si tagliano nel punto G , a cui appunto corrisponde $y=2a$, essendo OT l'asse delle y , ed il principio in O , ed $x=2a$, prese le x nell'asse OQ .

Per rendere ragione di questo caso, basta avvertire due cose: la prima, che nel punto del concorso di diversi rami di curva diverse radici dell'equazione si fanno eguali tra loro; così rispetto alla proposta equazione

ne nel punto G sono eguali i due valori della x , e due pure sono eguali de' quattro valori della y ; la seconda, (come si è dimostrato nell'Algebra Cartesiana) che se un'equazione, la quale contenga delle radici eguali, si moltiplicherà termine per termine con una serie aritmetica qualunque, il prodotto sarà eguale al zero, e conterrà in se una meno delle radici eguali; se questo prodotto si moltiplicherà pure per una serie aritmetica, il nuovo prodotto sarà istessamente eguale al zero, e conterrà una meno delle radici eguali, che contiene il primo prodotto, cioè due radici meno delle eguali, che contiene la prima equazione, e così successivamente fino a quel prodotto, che una sola contenga delle radici eguali.

Se adunque un'equazione qualunque di curva, trattando x per variabile, ed y per costante, si moltiplicherà per una serie aritmetica, la quale termini nel zero; nel caso di radici eguali il prodotto sarà eguale al zero, e lo sarà ancora, se si divida esso prodotto per x , la qual divisione succede dal moltiplicarsi per zero l'ultimo termine. Lo stesso sarà, trattando y per variabile, ed x per costante, e moltiplicando l'equazione per tale serie aritmetica, che ponga il zero sotto l'ultimo termine.

Ciò posto, è facile a vedersi, che questa tale operazione si fa appunto differenziando, cioè si tratta la x , come

come variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della x , e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in dx ; indi si tratta y per variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della y , e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in dy ; ma nel caso di radici eguali di x , e di radici eguali di y , tanto il prodotto, che moltiplica dx , quanto quello, che moltiplica dy , sono zero; dunque appunto deve nascere la ragione di $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ in quel punto, nel quale due rami di curva s'incontrano.

Per vedere ciò chiaramente, ordino l'equazione della proposta curva per la lettera y , e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine sia zero.

$$\begin{array}{rccccccc}
 y^4 - 8ay^3 - 12axy^2 + 48a^2xy + 44ax^2 & = & 0, \\
 & + & 16a^2xy & & - & 64a^3x & \\
 4, & 3, & 2, & 1, & 0.
 \end{array}$$

il prodotto farà

$$4y^4 - 24y^3 - 24axy^2 + 32a^2xy + 48a^3x = 0,$$

cioè dividendo per $4y$

$$y^3 - 6ay^2 - 6axy + 8a^2x + 12a^3x = 0.$$

Ordino la stessa equazione per la lettera x , e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine,

fia zero

$$\begin{array}{r} 4aaxx + 48aaxy + y^4 \\ - 64a^3x - 8ay^3 = 0, \\ - 12ayyx + 16aayy \\ 2, \quad 1, \quad 0 \end{array}$$

il prodotto farà

$$8aaxx + 48aaxy - 64a^3x - 12ayyx = 0,$$

cioè dividendo per 4x

$$2aax + 12aay - 16a^3 - 3ayy = 0.$$

Ciò fatto, differenzio l'equazione proposta, ed il differenziale si è $4y^3dy - 24ayydy - 24axydy - 12ayydx + 32aaydy + 48aaxdy + 48aaydx + 8aaxdx - 64a^3dx = 0$, cioè dividendo per 4, e trasponendo i termini della dx

$$\frac{y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax}{3ayy - 12aay - 2aax + 16a^3} \times dy = dx.$$

Ma il moltiplicatore della dy è il primo prodotto nella serie aritmetica, ed in conseguenza $= 0$ relativamente al punto G , in cui y à due valori eguali; ed il moltiplicatore della dx è il secondo prodotto nella sua serie aritmetica, mutati i segni, il che però non fa, che non sia $= 0$ relativamente allo stesso punto G , in cui x à due valori eguali, dunque sarà $dy \times 0 = dx \times 0$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ nel punto G .

Ma se il moltiplicare qualunque equazione per una serie aritmetica, o sia il differenziarla (giacchè è lo stesso) fa,

fa, che nel supposto di radici eguali nasca il caso, di cui si tratta, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, fa ancora, che nell' equazione

indi nata vi sia una meno delle radici eguali, e però se l'equazione proposta à due radici eguali, la differenziata ne avrà una sola di esse eguali; se la proposta ne avrà tre, differenziando di nuovo la già differenziata, (assumendo per costanti le flussioni dx , dy) quella, che indi nasce, ne avrà una sola, e così di mano in mano discorrendo. Si assumono poi per costanti le flussioni dx , dy , perchè distruggendosi vicendevolmente tanto i termini moltiplicati in dx , quanto quelli moltiplicati in dy , nella supposizione di quel tale determinato valore della x , e della y , si distruggeranno nullameno sì i termini moltiplicati in ddx , come quelli moltiplicati in ddy . In questo modo operando si ridurranno le equazioni a non contenere, che una sola di quelle molte radici eguali, ch'è prima avevano; e però differenziando finalmente l'ultima, per ritrarne la ragione di dy alla dx , non potrà più nascere il caso di $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$.

Ripiglio adunque l'equazione di prima

$$y^4 - 8xy^3 - 12axy^2 + 16xy^2y + 48aaxy + 4aaxx - 64x^3x = 0,$$

differenziata si trova essere

$$y^4 dy - 6xy^3 dy - 6axy^2 dy - 3ayy dx + 8aaydy + 12aax dy + 12aaydx + 2aaxdx - 16x^3 dx = 0.$$

Ma poichè sostituendo in luogo di y il valore $2a$, ed il corrispondente in luogo di x , che è pure $2a$, a fine di avere la tangente del punto G , ritrovo $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, passo a differenziare la già differenziata, prendendo sempre per costanti le flussioni dx , dy , e ricavo $3yydy^2 - 12aydy^2 - 6axydy^2 + 8aady^2 - 12aydydx + 24aadxdy + 2aadx^2 = 0$.

Sostituisco in luogo di y , e di x il valore $2a$ relativamente al punto G , e trovo $dx = \pm dy \sqrt{8}$, indi nella formola generale della sottotangente $\frac{xy}{dx}$ posti i valori di $x = 2a$, e di $dx = \pm dy \sqrt{8}$, farà finalmente $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ la sottotangente, o per meglio dire, le due sot-

totangenti, che corrispondono al punto G , una positiva, l'altra negativa, ed eguale alla positiva.

Se la curva averà tre radici eguali nel punto, di cui si vuole la tangente, cioè se la curva averà tre rami, che in quel punto s'incontrino; poichè dopo averla la prima volta differenziata averà ancora due radici eguali, differenziata di nuovo, a fine di avere la ragione di dy alla dx , ci darà ciò non ostante, per quanto è stato detto, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, e però farà necessaria

una terza differenziazione; generalmente tante volte,

dovrà

dovrà differenziarsi l'equazione, quante sono le radici eguali, o sia i rami della curva, e dall'ultima differenza ricaverassi la ragione della dy alla dx , e tante saranno le tangenti, quanti sono i rami della curva stessa, i quali in quel punto si tagliano.

Sia la curva $QADHAbdAI$ (Fig. 48.) dell'equazione $x^4 - ayxx + by^3 = 0$, la quale ha i tre rami QAD , IAd , bAH , che si tagliano in A ; e sia AP l'asse delle x , ed AB normale ad AP l'asse delle y , ed A la comune loro origine. Differenziando l'equazione, farà $4x^3dx - 2ayxdx - axxdy + 3byydy = 0$, cioè $\frac{dx}{dy} = \frac{axx - 3byy}{4x^3 - 2ayx}$. Ma se si voglia la tangente del punto

A , poichè in esso è $x=0$, $y=0$, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Si passi adunque alla seconda differenziazione, e farà $12xxdx^2 - 2aydx^2 - 4axdx dy + 6bydy^2 = 0$, ma di qua pure si ricava $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, essendo ogni termine moltiplicato per $x=0$, secondo la supposizione, ovvero per $y=0$.

Differenziando finalmente per la terza volta, sarà $24xxdx^2 - 6adydx^2 + 6bdy^2 = 0$, ma posta $x=0$, svanisce il primo termine, e però è $adx^2dy = bdy^3$; dal che si ricavano tre valori della dy , cioè $dy=0$, e $dy = \pm \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, i quali ci danno tre rapporti della dx alla

dy ,

dy, vale a dire tre tangenti per lo punto *A*; una infinita, che si confonde con l'asse *AP*, e serve per il ramo *baH*. L'altre, prendendo una qualunque *AS*, e tirando normalmente *ST* tale, che sia *ST*, *SA*:: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, le *TA* faranno tangenti nel punto *A*, l'una del ramo *QAD*, l'altra del ramo *IAd*.

70. La verità di questo metodo si può dimostrare anco in altra maniera, e come suol dirsi *A posteriori*. I differenziali dell'equazioni finite, che con le accennate regole del differenziare si trovano, non sono essi realmente i differenziali compiuti, dandoci le regole i soli termini, che contengono i differenziali primi, cioè di una sola dimensione, ed ommettendo in figura di compendio, e di maggior comodo i differenziali di altro grado, cioè di maggior dimensione, i quali per i principj del calcolo, già renderebbero relativamente nulli i termini, ne quali si trovano.

Richiamata l'equazione

$$y^4 - 8ay^3 - 12axy^2 + 48a^2xy + 4a^3xx + 16a^2yy - 64a^3x = 0,$$

e differenziata, sarà

$$4y^3dy - 24ay^2dy - 12ayydx - 24axydy + 32a^2ydy + 48a^2axydy + 48a^2aydx + 8a^2axdx - 64a^3dx = 0;$$

ma se la *y* si consideri accresciuta della sua differenza, e così la *x*, e che nella proposta equazione in luogo della *y*, e

fue

sue potestà si ponga $y + dy$, e le corrispondenti potestà, e lo stesso si faccia ponendo $x + dx$, e le potestà corrispondenti in luogo di x , e sue potestà, averassi $y^4 + 4y^3dy + 6yydy^2 + 4ydy^3 + dy^4 - 8ay^3 - 24aaydy - 24aydy^2 - 8ady^3 - 12axy - 24axydy - 12axy^2 - 12aydyx - 24aydx - 12adxdy^2 + 16aay + 32aaydy + 16aady^2 + 48aaxy + 48aaydx + 48aaxydy + 48aadxdy + 4aaxx + 8aaxdx + 4aadx^2 - 64a^3x - 64a^3dx = 0$, ed ordinando i termini in colonne secondo le dimensioni de' differenziali

I.	II.	III.	IV.	V.
$+ y^4$	$+ 4y^3dy$	$+ 6yydy^2$	$+ 4ydy^3$	$+ dy^4$
$- 8ay^3$	$- 24aaydy$	$- 24aydy^2$	$- 8ady^3$	
$- 12axy$	$- 24axydy$	$- 12axy^2$	$- 12adxdy^2$	
$+ 16aay$	$- 12aydx$	$- 24aydx$		$= 0.$
$+ 48aaxy$	$+ 32aaydy$	$+ 16aady^2$		
$+ 4aaxx$	$+ 48aaydx$	$+ 48aadxdy$		
$- 64a^3x$	$+ 48aaxydy$	$+ 4aadx^2$		
	$+ 8aaxdx$			
	$- 64a^3dx$			

La somma per tanto di tutte queste colonne, tolto-
ne la prima, che è l'equazione stessa proposta, sarà il
compiuto, ed intero differenziale di lei. Ma perchè
l'ultimo termine, cioè la colonna quinta è infinitamen-
te piccola rispetto alla quarta, e la quarta rispetto alla
terza,

terza, e la terza rispetto alla seconda, si assume la seconda colonna per il differenziale della proposta equazione, il quale compendio ci vien dato dalla solita regola del differenziare; ma non è già, che le colonne dopo la seconda sieno assolutamente nulle. Se adunque nascerà il caso, che la seconda colonna sia assolutamente nulla, non farà più nulla rispetto a lei la terza, e però non dovrà trascurarsi, anzi sarà essa il differenziale della prima. Istessamente si discorra della quarta, quando sia zero la seconda, e la terza, e così dell'altre. Ora questo caso appunto succede, quando si cerca la relazione di dx alla dy nella proposta equazione in quel punto, in cui sia $y = 2a$, ed $x = 2a$; poichè, fatte queste sostituzioni, si trova essa seconda colonna esser zero, e però si passa a far uso della terza, il che è affatto la stessa cosa, che differenziare due volte l'equazione, come è manifesto.

71. Per gli stessi principj, e nella stessa maniera si scioglie un simil caso, che nasce talora nella costruzione delle curve, se l'ordinata venga espressa da una frazione, il di cui denominatore, e numeratore divengano eguali al zero, quando si fissi per l'assisa un determinato valore.

A fine d'uscir d'imbarazzo basta considerare la frazione, come se esprimesse le ordinate di due curve, che in qualche punto del loro comune asse concorrano,

e perchè in quel punto la ragione loro non può in altro modo esser espressa, che per $\frac{0}{0}$, bisogna cercare,

quale sia il loro rapporto nel punto infinitamente prossimo, cioè quando esse sieno cresciute d'un'infinitesimo, vale a dire, passare alla differenziazione del numeratore, poi del denominatore della frazione stessa, e ciò una, due, o più volte fin tanto, che finalmente, posto il valore determinato dell'assisa nella frazione, essa non sia più $\frac{0}{0}$, e ciò per quella stessa ragione detta di sopra intorno alle colonne de' differenziali.

Sia l'equazione $y = \sqrt[3]{2a^3x - x^3 - a^3\sqrt[3]{aax}}$. Presa

$$a - \sqrt[3]{ax^3}$$

$x = a$, e fatta la sostituzione, sarà $y = \frac{0}{0}$, dal che non

si può perciò inferire, che all'assisa $x = a$ corrisponda l'ordinata $y = 0$. Differenziando adunque il numeratore, indi il denominatore della frazione, sarà $y =$

$$\frac{a^3 dx - 3x^2 dx \times \frac{-\frac{1}{2}}{2a^3x - x^3} - \frac{1}{3} a^3 dx \times a^{-\frac{4}{3}} x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4} ax^2 dx \times a^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{2}{4}}}$$

cioè dividendo sopra, e sotto per dx , e ponendo $x = a$, sarà $y = \frac{16a}{9}$.

Sia l'equazione $y = a \sqrt[3]{4x^3 + 4x^2 - ax - aa}$, se

$$\sqrt[3]{2aa + 2xx - x - a}$$

si faccia $x = a$, farà $y = 0$.

Differenziando per tanto il numeratore, poi il denominatore della frazione, farà $y = \frac{4axx \times 4x^2 + 4x^2 - 1}{2x \times 2aa - 2xx - 1}$

ommettendo la dx , che è tanto nel numeratore, quanto nel denominatore; ma se in questa frazione pure si ponga $x = a$, farà ancora $y = 0$, dunque passando a differenziare questa seconda frazione, avremo $y =$

$$\frac{32a^4x \times 4x^2 + 4x^2 - 1}{4aa \times 2aa + 2xx - 1}$$

$x = a$, farà $y = 2a$.



C A P O III.

Del Metodo de' Massimi, e Minimi.

72. **S**E in una curva qualunque, le di cui ordinate sieno parallele, crescendo le assisse BC (Fig. 49. 50. 51., e 52.) continuamente, cresca altresì l'ordinata CG fino ad un certo punto E dopo di cui vada calando, o non vi sia più ordinata di sorta alcuna; o pure al contrario crescendo l'assissa, l'ordinata CG vada continuamente calando fino ad un certo punto E , dopo di cui, o cresca, o più non vi sia; l'ordinata EF si chiama la *Massima*, o la *Minima*.

Alla curva GHE sia EF la massima delle ordinate (Fig. 49.), o la minima (Fig. 50.); presa una qualunque assissa BC , e condotta l'ordinata CG , al punto G s'intenda essere tangente GA , e DH infinitamente prossima a CG ; chiamata $BC = x$, $CG = y$, e fatta GI parallela a BC , sarà $GI = CD = dx$, $IH = dy$. Poichè sono simili i triangoli ACG , GHI nella Fig. 49., sarà $AC, CG :: GI, IH$; e poichè sono simili i triangoli ATG , GHI nella Fig. 50., sarà $AT, TG :: GI, IH$. Ciò posso, si finga che l'ordinata GC s'accosti sempre parallela a se stessa alla massima, o mi-

nima ordinata EF ; egli è chiaro, che accostandosi CG ad EF , la sottotangente AC , o AT si farà sempre maggiore per modo, che quando CG cada sopra la EF , la tangente si farà parallela a BC , e per conseguenza la sottotangente sarà infinita. In questo caso adunque avrà AC a CG , o AT a TG ragione infinita, rimanendo CG quantità finita; ma poichè è sempre AC, CG , o $AT, TG :: GI, IH$, averà anco GI ad IH ragione infinita, e però sarà dy nulla rispetto alla dx , cioè $dy = 0$ nel punto della massima, o minima ordinata.

Sia la curva GHF , (Fig. 51., e 52.) EF la minima delle ordinate (Fig. 51.), o la massima (Fig. 52.); presa pure una qualunque assissa BC , e condotta l'ordinata CG , la tangente GA , DH infinitamente prossima a CG , e GI parallela a BC , e chiamate $BC = x$, $CG = y$, farà $GI = CD = dx$, $IH = dy$. Per i triangoli simili ACG, GIH , farà (Fig. 51.) $AC, CG :: GI, IH$; e per i triangoli simili ATG, GIH , (Fig. 52.) farà $AT, TG :: GI, IH$. Accostandosi adunque l'ordinata CG sempre parallela a se stessa alla massima, o minima ordinata, la sottotangente AC , o AT si farà sempre minore per modo, che quando CG cada sopra la EF , la tangente si farà normale a BC , e per conseguenza nulla la sottotangente. In questo caso adunque averà AC a CG , o AT a TG la ragione del nulla
alla

alla quantità finita, e però essendo nella stessa ragione GI ad IH , sarà dx nulla rispetto alla dy , cioè $dy = \infty$ nel punto della massima, o minima ordinata. Adunque la formola generale per le massime, e minime ordinate sarà $dy = 0$, o pure $dy = \infty$.

73. Data adunque l'equazione della curva, di cui si cerca la massima, o la minima ordinata, si dovrà differenziare, per ritrarne il valore della frazione, o rapporto $\frac{dy}{dx}$, indi fatta la supposizione di $dy = 0$, o pure di $dx = 0$, cioè di $dy = \infty$, si averà il valore dell'affissa x , a cui compete la massima o minima y , e questo valore sostituito nell'equazione proposta ci darà la massima, o minima ordinata, che si cerca; solo avvertendo, che nel caso della supposizione di $dy = \infty$, cioè di $dx = 0$, la x farà figura di ordinata, se nell'altra supposizione la faceva la y . Che se nè la prima supposizione di $dy = 0$, nè la seconda di $dy = \infty$ ci fornirà valore alcuno reale della y , si dovrà concludere, che la proposta curva non ha nè massimi, nè minimi.

74. Serve questo metodo per avere una compiuta, ed esatta idea delle curve; per ricavare, in quali punti le tangenti sieno parallele agl'assi conjugati ec. Ma oltre ciò si applica ad infinite questioni, che in tale proposito possono farsi sì geometriche, come fisiche; tale sarebbe il ricercare fra gl'infiniti parallelepipedi di una data

data solidità, quale sia quello, che abbia la minima superficie; siccome il ricercare tra le infinite vie, che può tenere un mobile, per giugnere da un punto all'altro non posto nella medesima verticale, quale sia quella, che sarà trascorsa nel minimo tempo con una data legge di moto, ed altre simili. In tali questioni ritrovata l'espressione analitica di ciò, che si vuole essere un massimo, o un minimo, si ponga eguale ad y , e fatta la differenziazione, si proceda avanti con le date regole.

ESEMPIO I.

75. Sia la curva dell'equazione $2ax - xx = yy$, e si voglia sapere, a quale punto dell'asse dell'assisse x corrisponda la massima ordinata y , e cosa ella sia.

Differenziata l'equazione, sarà $2adx - 2xdx = 2ydy$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$. Facendo la supposizione di $dy = 0$,

dovrà essere zero il numeratore della frazione, e però sarà $a - x = 0$, onde $x = a$; adunque la massima ordinata corrisponde a quell'assisse, che sia eguale ad a ; sostituito questo valore in luogo di x nella proposta equazione, sarà $2aa - aa = yy$, cioè $y = \pm a$; la massima ordinata adunque positiva, e negativa è eguale ad a . Facendo la supposizione di $dy = \infty$, dovrà essere zero il denominatore della frazione, e però sarà $y = 0$,
 folti-

sostituito per tanto questo valore in luogo di y nella proposta equazione, avremo $x=0$, ed $x=2a$; vale a dire, che $x=0$ sarà la minima, ed $x=2a$ la massima; o più propriamente, che quando sia $x=0$, ed $x=2a$, essendo infinita la dy rispetto alla dx , la sottotangente sarà nulla, cioè la tangente parallela alle ordinate y .

ESEMPIO II.

76. Sia la curva dell'equazione $xx - ax = yy$. Differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - a}{2y}$. La supposizione di

$dy=0$ ci dà $x=\frac{a}{2}$, ma sostituito questo valore in luogo di x nella proposta equazione, la y si trova immaginaria, dunque la curva non ha ordinata, che a tale asseissa corrisponda, e però molto meno avrà massima o minima. La supposizione di $dy=\infty$, cioè di $dx=0$ ci dà $y=0$, vale a dire, che la tangente sarà perpendicolare all'asse dell'asse x nel punto, in cui è $y=0$, il quale corrisponde alle due asseisse $x=0$, ed $x=a$, poichè sostituito in luogo di y il zero nella proposta equazione, sarà $xx - ax = 0$, e però $x=0$, ed $x=a$.

ESEMPIO III.

77. Sia la curva dell'equazione $2axy = a' + axx - bxx$, in cui le x sono le affisse, y le ordinate. Differenziando sarà $2axy + 2aydx = 2axdx - 2bx dx$, e però $\frac{dy}{dx} = \frac{ax - bx - ay}{ax}$. La supposizione di $dy = 0$ ci dà

$x = \frac{ay}{a-b}$, e sostituito questo valore nell'equazione proposta, sarà $\frac{2aay}{a-b} = a' + \frac{a^2y^2}{a-b} - \frac{aby^2}{a-b}$, cioè $yy = a \times \frac{a-b}{a-b^2}$,

ed $y = \pm \sqrt{aa - ab}$, massima, o minima ordinata. E poichè abbiamo $x = \frac{ay}{a-b}$, fatta la sostituzione del valore della y , sarà $x = \pm a \sqrt{\frac{a-b}{a}}$, affissa, a cui corrispon-

de la ritrovata massima, o minima ordinata. La supposizione di $dy = \infty$, o sia di $dx = 0$ ci dà $ax = 0$, cioè $x = 0$, e fatta la sostituzione nella proposta equazione, sarà $a' = 0$, ma implica, che una quantità data finita sia zero, adunque la curva non averà altri massimi, o minimi dai ritrovati nella prima supposizione, i quali per l'ambiguità de' segni sono due, ed eguali; uno positivo, che corrisponde alla affissa positiva, l'altro negativo, che corrisponde alla affissa negativa.

78. Ci dà il metodo confusamente i massimi, e minimi, nè in forza di esso si possono distinguere gl'uni dagl'altri, si riconoscono però quando sia noto l'andamento della curva; ma senza tale notizia si può procedere così. Si assegni all'assissa nell'equazione data un valore per poco maggiore, o minore di quello, che corrisponde alla massima, o minima ordinata, di cui si tratta, ed il valore dell'ordinata, che indi nasce, scioglierà il quesito; poichè se sarà maggiore di quello somministratoci dal metodo, la questione sarà de' minimi; ed all'opposto essendo, sarà de' massimi. La curva adunque di quest'esempio avrà due minimi.

ESEMPIO IV.

79. Sia la curva *MADEAN* (Fig. 53.) dell'equazione $x' + y' = axy$, $AB = x$, $BE = y$. Differenziando si averà $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - 3xx}{3yy - ax}$, e però facendo la supposi-

zione di $dy = 0$, sarà $y = \frac{3xx}{a}$, e fatta la sostituzione di

questo valore nella data equazione, si trova $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$;

quindi poichè $y = \frac{3xx}{a}$, sarà $y = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4} = BE$ la massi-

ma ordinata nella curva, la quale corrisponde all'assissa

fa $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2} = AB$. La supposizione di $dx = 0$ ci darà $x = \frac{3yy}{a}$, e fatta la sostituzione nell'equazione data, sarà $y = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, quindi $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4}$ la massima AC , cui corrisponde $y = CD = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, che è tangente nel punto D .

80. Ma prima di passare più avanti con gl'esempj, è necessario prevenire un caso, che suole alcuna volta succedere, ed è che tanto la supposizione di $dy = 0$, quanto quella di $dy = \infty$ ci fornisca un medesimo valore dell'ordinata, o dell'assissa, ed in tale caso non si determina alcun massimo o minimo, ma bensì un punto di intersecazione, o d'incontro di due rami della curva. E la ragione è evidente, imperciocchè essendo $\frac{dy}{dx}$ eguale ad una frazione, se dal numeratore

si ricava lo stesso valore della x , per esempio, che si ricava dal denominatore, questo valore, o radice sottratta renderà nullo l'uno e l'altro, e però in quel tal punto di curva sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, ma si è veduto di sopra al

num. 69., che $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ indica sempre incontro di due rami di curva, adunque ec.

ESEMPIO V.

81. Sia la curva GFM (Fig. 51.) la Parabola cubica dell'equazione $y - a = \sqrt[3]{a^3 - 2aax + ax^3}$, $BE = EF = a$, $BC = x$, $CG = y$. Differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2aa}{3 \times a^3 - 2aax + ax^3}$. La supposizione di $dy = 0$ ci

dà $x = a$; la supposizione di $dy = \infty$ ci dà parimenti $x = a$, adunque la curva ha un punto d'incontro F , che corrisponde all'assisa $x = a$, ed alla minima ordinata $y = a$, che si cava dalla proposta equazione, sostituito in luogo di x il suo valore.

Sia la stessa equazione, ma libera da' radicali, cioè $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2aax + ax^3$; differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa}$. La supposizione di $dy = 0$

ci dà $x = a$, e posto questo valore nella proposta equazione, si ricava $y = a$. La supposizione di $dy = \infty$ ci dà pure $y = a$, adunque $x = a$, ed $y = a$ ci danno il punto F , che è un punto d'incontro, o contatto de' due rami GF , FM , e nello stesso tempo la minima y .

Ma se opereremo sopra l'equazione $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times a - x^{\frac{2}{3}}$,

che esprime il solo ramo GF ($y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{x - a^{\frac{1}{3}}}$ esprimerebbe l'altro ramo FM) avremo $\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^{\frac{1}{3}}}{3 \times \sqrt[3]{a - x}}$.

La supposizione di $dy = 0$ nulla ci fa sapere; la supposizione di $dy = \infty$ ci dà $x = a$, e però $y = a$, ed il punto F in questo caso ci fornisce un massimo rispetto alla x , ed un minimo rispetto alla y .

82. Dissi, che la supposizione di $dy = 0$, che ci dà $2a^{\frac{1}{3}} = 0$ nulla ci fa sapere, intendendo rispetto ai massimi finiti, perchè comprendendo anco gl'infiniti, ella ce ne somministra due. Se $2a^{\frac{1}{3}} = 0$, sarà dunque $a = 0$, e sostituito questo valore nella proposta equazione, sarà essa $\frac{y}{0} = \sqrt[3]{xx}$, cioè $x = \pm \sqrt[3]{\frac{y}{0}}$, e però x , ed y infinite. Due sono i massimi, servendo uno al ramo FG , l'altro al ramo FM , poichè posta $a = 0$, l'equazione ambedue gli esprime.

Nascerà generalmente questo caso ogni qual volta la supposizione di $dy = 0$, o di $dy = \infty$ ci dia un'espressione finita costante, o un divisore costante eguale al zero, il qual valore sostituito nell'equazione proposta non porti o immaginario, o contradizione; e la ragione

ne si è, che una quantità finita non può essere presa per zero, se non rispetto a quantità infinita.

ESEMPIO VI.

83. Sia la curva (Fig. 54.) dell'equazione
 $x^4 - 2ax^3 + aaxx = y^4$, $AB = a$; AC , o $AP = x$; CM ,
 o $PM = y$; differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6axx + 2aa}{4y^3}$.

La supposizione di $dy = 0$ ci dà tre valori di x , cioè $x = 0$, $x = a$, $x = \frac{1}{2}a$; il valore $x = 0$ sostituito nella proposta equazione rende $y = 0$, il valore $x = a$ rende $y = 0$, il valore $x = \frac{1}{2}a$ rende $y = \pm \frac{a}{2}$. La supposi-

zione di $dy = \infty$ ci dà $y = 0$, adunque la y à il medesimo valore nell'una, e nell'altra supposizione, quando sia $x = 0$, ed $x = a$, quindi i punti A , B saranno punti d'incontro de' rami della curva, ed $x = \frac{1}{2}a = AC$ darà la massima ordinata $y = \pm \frac{1}{2}a = CM$, o Cm . Il

luogo del sopra posto esempio può chiamarsi luogo doppio, il quale nasce dall'esserealzata al quadrato l'una, o l'altra delle due semplici formole $ax - xx = yy$, al circolo, o pure $xx - ax = yy$, all'iperbola. Quindi non farebbe bastato il ridurre l'equazione al semplice circolo, o alla semplice iperbola, ma era necessario aver mira alla complicazione delle dette curve fra loro.

ESEMPIO VII.

84. Sia la curva della Fig. 55., la di cui equazione $yy = \frac{ax - 2axx + x^3}{2a - x}$, $AP = x$, $PM = y$, $AD = 2a$.

Differenziando farà $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4ax + 4xx - x^3}{y \times 2a - x}$, cioè

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4ax + 4xx - x^3}{a - x \sqrt{x \times 2a - x^2}}$$

ti osservo, che tanto il numeratore della frazione, quanto il denominatore è divisibile per $a - x$; adunque, e nella supposizione di $dy = 0$, e in quella di $dy = \infty$ si averà $a - x = 0$, cioè $x = a$, che sostituito ci dà $y = 0$, e però la curva avrà un nodo nell'asse, al punto B, fatta $AB = a$. Fatta per tanto la divisione, farà $\frac{dy}{dx} = \frac{aa - 3ax + xx}{2a - x \sqrt{2ax - xx}}$. La supposizione di

$dy = 0$ ci dà $x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$; il valore $x = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2}$

non serve, perchè sostituito nell'equazione proposta, rende immaginaria la ordinata, la quale è generalmente immaginaria, qualora si assuma x maggiore di $2a$, come manifestamente si vede. Sostituito perciò l'altro

valore

valore $x = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, ci dà $y = \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$.

Fatta adunque $AP = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, faranno PM , PM le massime ordinate, positiva l'una, e negativa l'altra,

$$ed = \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}.$$

La supposizione di $dy = \infty$ ci dà $x = 0$, ed $x = 2a$; sostituiti questi valori nell'equazione proposta, si averà $y = 0$, ed $y = \infty$; vale a dire, che presa $x = 0$, cioè nel punto A , la tangente sarà parallela alle ordinate, PM , e presa $x = 2a = AD$, la ordinata sarà infinita, cioè asintoto della curva rispetto ai rami BH , BI .

ESEMPIO VIII.

85. Sia la Concoide dell'equazione $yy = aaxx - x^4 + 2abx - 2bx^3 - bbxx + aabb$. Differenziando

$$\text{farà } \frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 - bx^2 - abx - aabb}{\pm xx\sqrt{aaxx - x^4 + 2abx - 2bx^3 - bbxx + aabb}}.$$

Nel primo Libro al num. 239. sono stati da me considerati tre casi di questa curva; il primo quando sia $a = b$; il secondo quando sia b minore di a ; ed il terzo quando b sia maggiore di a .

Rispetto al primo caso: la curva sarà quella della

Fig.

Fig. 56., e l'equazione $yy = \frac{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}{xx}$,

presa $GA = GP = a$, $GE = x$, $EM = y$; e differenziando,
 $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - ax^3 - a^3x - a^4}{\pm xx \sqrt{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}}$. La supposizione

di $dy = 0$ ci dà il numeratore eguale al zero, cioè
 $x + a \times x^3 + a^3 = 0$; e però $x = -a$, il qual valore, sostituito nell'equazione della curva, ci dà $y = 0$. La supposizione di $dy = \infty$ ci dà il denominatore eguale al zero,

cioè $xx \sqrt{x + a \times aa - xx} = 0$, e però $x = 0$,
 $x = -a$, ed $x = a$; ma il valore $x = -a$ si è trovato anche nella supposizione di $dy = 0$, adunque quando sia $x = -a$, cioè presa $GP = a$, la curva averà nel punto P un' incontro di due rami.

Il valore $x = a$ sostituito nell'equazione ci dà $y = 0$, adunque la medesima x farà $= a = GA$, a cui corrisponde $y = 0$. Il valore $x = 0$ sostituito ci dà $y = \infty$; adunque per lo punto G , in cui $x = 0$, condotta una parallela alle ordinate, toccherà la curva in infinita distanza, vale a dire, farà un' asintoto.

Rispetto agli altri due casi: (Fig. 57. 58.) sia $GA = GK = a$, $GP = b$, ed il resto come sopra. La supposizione di $dy = 0$ ci darà $-x^4 - bx^3 - aabx - aabb = 0$, cioè $x + b \times -x^3 - aab = 0$, e però $x = -b$, $x = \sqrt[3]{-aab}$.

La

La supposizione di $dy = \infty$ ci darà

$$xx\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabbx - 2bx^3 - b^2xx + aabb} = 0, \text{ cioè}$$

$$xx \sqrt{x+b} \times ax - xx = 0, \text{ e però } x = 0, x = -b, x = a, x = -a.$$

Il valore $x = -b$, che nel secondo caso sostituito nell'equazione rende $y = 0$, ci viene somministrato da ambedue le supposizioni, adunque (Fig. 57.) presa GP dalla parte de' negativi, ed $= -b$, il punto P farà un' incontro, o sia una intersecazione di due rami di curva. Lo stesso valore $x = -b$, sostituito nell'equazione della curva $\pm y = \frac{b+x}{x} \sqrt{aa - xx}$, ci dà nel terzo caso negativo il radicale, per essere b maggiore di a , e però immaginaria la curva, quindi a nulla serve.

Il valore $x = \sqrt{-aab}$, sostituito nell'equazione della curva, ci dà $y = \pm \frac{\sqrt{aa - bb} \sqrt{abb} + 3ab \sqrt{-aab} + 3abb}{\sqrt{abb}}$,

cioè immaginaria pure, quando sia b maggiore di a (Fig. 58.), e però similmente a nulla serve in questo terzo caso; ma ci dà y reale quando sia b minore di a ,

e però (Fig. 57.), fatta $GI = \sqrt{-aab}$, farà IN la massima ordinata $y = \pm \frac{\sqrt{aa - bb} \sqrt{abb} + 3ab \sqrt{-aab} + 3abb}{\sqrt{abb}}$.

Il valore $x = 0$ ci dà $y = \infty$, cioè asintoto; Il valore $x = \pm a$ ci dà $y = 0$, cioè la tangente ne' punti A, K parallela all'ordinate.

ESEMPIO IX.

86. Sia la mezza Cicloide abbreviata AMF (Fig. 59.), chiamata $AB = 2a$, $BF = b$, $AP = x$, $PM = z$, la femiperiferia $ANB = c$, l'arco $AN = q$; farà $PN = \sqrt{2ax - xx}$, $NM = z - \sqrt{2ax - xx}$, e per la proprietà della curva, è $ANB, BF :: AN, NM$; cioè $c, b :: q, NM = \frac{bq}{c}$;

dunque $\frac{bq}{c} = z - \sqrt{2ax - xx}$. Differenziando, $\frac{bdq}{c} = dz - \frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$; ma condotta mp infinitamente prossi-

sima ad MP , farà $Nn = dq = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, quindi fatta la

sostituzione nell'equazione, avremo $\frac{dz}{dx} = \frac{ab + ac - cx}{c\sqrt{2ax - xx}}$.

La supposizione di $dz = 0$ ci dà $x = \frac{ab}{c} + a$. Se adun-

que H sia il centro del circolo, presa HE eguale alla quarta proporzionale della femiperiferia ANB , della retta BF , e del raggio, la corrispondente ordinata sarà la massima, che si cerca.

La

La supposizione di $dz = \infty$ ci dà $x=0$, ed $x=2a$, vale a dire, che ne' punti A, F la tangente sarà parallela alle ordinate.

PROBLEMA I.

87. Dato il rettangolo ADCB, (Fig. 60.) si dimanda la minima retta QH, che si possa condurre per lo punto C nell' angolo QAH.

Sia $AB=a$, $BC=b$, $BH=x$, sarà $CH=\sqrt{bb+xx}$, e per i triangoli simili HBC, HAQ , averassi $HB, HC::HA, HQ$; cioè $x, \sqrt{bb+xx}::x+a, HQ=\frac{x+a}{x}\sqrt{bb+xx}$. Supposta per tanto la $HQ=y$, come

se fosse l'ordinata di una curva, onde si abbia $y=\frac{x+a}{x}\sqrt{bb+xx}$, e differenziando, sarà $\frac{dy}{dx}=\frac{x'-abb}{xx\sqrt{bb+xx}}$.

La supposizione di $dy=0$ ci darà $x=\sqrt[3]{abb}$, e però fatta $BH=\sqrt[3]{abb}$, e condotta HCQ , sarà essa la minima, che si cerca. La supposizione di $dy=\infty$ ci darà $x=\sqrt{-bb}$ immaginaria, ed $x=0$, che a nulla serve, quando non s'intenda, che la retta condotta per lo punto C , che in questo caso sarebbe BC infinita-

tamente prodotta, sia un massimo, appunto per esser infinita.

In queste tali questioni adunque basterà differenziare quell'espressione, che si vuole essere un massimo, o minimo, ed indi supporre eguale al zero il numeratore, poi il denominatore.

PROBLEMA II.

88. *Divisa la retta AB (Fig. 61.) in tre parti date AC, CF, FB, si dimanda il punto E, in cui deve tagliare la porzione di mezzo CF per modo, che il rettangolo AE × EB abbia al rettangolo CE × EF la minima ragione possibile.*

Si chiami $AC = a$, $CF = b$, $CB = c$, e $CE = x$; sarà $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, e però sarà il rapporto $\frac{AE \times EB}{CE \times EF} = \frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$, che

deve essere un minimo. Il differenziale adunque sarà $\frac{cx \times dx - bxx \times dx - ax \times dx + 2ac \times dx - abcdx}{bx - xx}^2$, e posto il

numeratore eguale al zero, avremo

$$x = \frac{-ac \pm \sqrt{abcc - abbc - aabc + aacc}}{c - b - a}.$$

Un valore positivo, che ci dà il punto ricercato E da C verso B, l'altro

l'altro negativo, che ci darebbe il punto E da C verso A . Posto il denominatore eguale al zero, avremo $x = 0$, ed $x = b$, ne' quali due casi il rapporto de' rettangoli sarà il massimo, perchè presa $x = 0$, il punto E cade in C ; e presa $x = b$, il punto E cade in F , e però sì nell' uno, come nell' altro caso il rettangolo $CE \times EF$ è zero.

PROBLEMA III.

89. La data retta AB si debba tagliare talmente, nel punto C , che il prodotto $\overline{AC}^2 \times CB$ sia il massimo di tutti i prodotti simili.

Chiamata $AB = a$, $AC = x$, sarà $CB = a - x$, e però $\overline{AC}^2 \times CB = axx - x^3$. Il differenziale sarà $2axdx - 3xxdx$, il quale paragonato al zero, darà $x = 2a$, ed $x = 0$. Presa per tanto $AC = x = \frac{2a}{3}$, il prodotto $\overline{AC}^2 \times CB$ sarà il massimo; e presa $x = 0$, il prodotto sarà in un certo modo il minimo, perchè sarà zero, cadendo il punto C in A . Non essendo la differenziale una frazione, non à luogo l'altra solita supposizione del denominatore eguale a zero, ma se si voglia considerare l'espressione del prodotto $axx - x^3$,
come

come un'ordinata di curva , converrà per la legge degl' omogenei dividere esso prodotto per un piano costante, e così il differenziale sarà una frazione del denominatore costante ; ma essa costante non può mai esser zero, se non relativamente alla x assunta infinita, e certamente, che allora il prodotto sarà un massimo , quando sia $AC = x = \infty$.

O detto , che il prodotto $\overline{AC} \times CB$ è un massimo , quando sia $AC = \frac{2a}{3}$, il che chiaramente si vede dal descrivere la curva dell' equazione $\frac{axx - x^3}{aa} = y$, poichè tutte le ordinate tra A , e B sono minori di quella , che corrisponde all' assissa $x = \frac{2a}{3}$. Sostituito nell' equazione l' altro valore $x = 0$, farà $y = 0$, dal che si conchiude , che esso valore a nulla serve .

90. Nel Problema antecedente , ed in tutti quelli di simil natura si può fare uso di questo metodo per conoscere , se le questioni sono de' Massimi , o de' Minimi .

PROBLEMA IV.

91. *Fra tutti i parallelepipedi eguali ad' un dato cubo , e de' quali sia dato un lato , si dimanda quello , che abbia la minor superficie .*

Il dato cubo sia a^3 , ed il lato cognito del parallelepipedo sia $= b$, uno de' lati, che si cercano, sia $= x$; il terzo sarà $= \frac{a^3}{bx}$, poichè il prodotto de' tre,

forma il parallelepipedo eguale al dato cubo a^3 . I prodotti dei lati presi a due a due, cioè bx , $\frac{a^3}{x}$, $\frac{a^3}{b}$

formano i tre piani, che sono la metà della superficie del parallelepipedo, e però la somma di questi, cioè $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ deve essere il minimo, che si cerca. Dif-

ferenziando adunque, avremo $bdx - \frac{a^3 dx}{xx}$, o sia $\frac{bxxdx - a^3 dx}{xx}$. La supposizione del numeratore eguale

al zero ci dà $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; faranno adunque i tre lati del

parallelepipedo, che si cerca, b , $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, ed $\frac{a^3}{b\sqrt{\frac{a^3}{b}}}$,

cioè $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, e però eguali faranno i due lati, che si cercano. La supposizione del denominatore eguale al zero a nulla serve, perchè ci dà $x = 0$, il che distrugge il problema.

Se si volesse il parallelepipedo con le assegnate
con-

condizioni, ma senza assumere lato alcuno per dato, chiamatone uno $= x$, sono gl'altri due eguali tra loro, ed $= \sqrt{\frac{a^3}{x}}$, e la somma de' tre piani, che deve essere un minimo, sarà $2x \sqrt{\frac{a^3}{x}} + \frac{a^3}{x}$, e differenziando,

$$\frac{a^3 dx}{x \sqrt{\frac{a^3}{x}}} - \frac{a^3 dx}{xx} = 0 \text{ sia } \frac{a^3 x dx}{xx} - \frac{a^3 dx}{xx} \sqrt{\frac{a^3}{x}} = 0, \text{ e fatto}$$

$$\frac{a^3 x dx}{xx} - \frac{a^3 dx}{xx} \sqrt{\frac{a^3}{x}} = 0$$

il numeratore eguale al zero, si averà $x = a$, e gl'altri due lati parimenti $= a$, ed il cubo stesso sarà il parallelepipedo, che si cerca.

PROBLEMA V.

92. *Fra gl'infiniti coni inscritti in una sfera, determinare quello, la di cui superficie convessa, cioè non compresa la base, sia la massima.*

Nel semicircolò ABD (Fig. 62.) sieno i triangoli ABC , AEH , e si giri il semicircolo attorno al diametro AD ; nel mentre, che egli descrive la sfera, i triangoli descriveranno tanti coni, ma poichè da Archimede si dimostra, che le superficie de' coni inscritti sono tra loro, come i prodotti $AE \times EH$, $AB \times BC$,

la

la questione si riduce a determinare nel diametro AD il punto C tale, che il prodotto $AB \times BC$ sia il massimo.

Chiamo adunque $AC = x$, $AD = a$; sarà, per la proprietà del circolo, $CB = \sqrt{ax - xx}$, $AB = \sqrt{ax}$, ed $AB \times BC = \sqrt{ax} \sqrt{ax - xx} = \sqrt{aaxx - ax^3}$. Differenziando adunque, avremo $\frac{2aaxdx - 3ax^2dx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}}$, e

fatto il numeratore $= 0$, sarà $x = \frac{2a}{3}$, ed $x = 0$; fatto

il denominatore $= 0$, sarà $x = a$, ed $x = 0$. Prefa adunque $AC = \frac{2}{3} AD$, la superficie del cono descritto dal triangolo ABC farà la massima, che si cerca. Gli altri due valori $x = 0$, ed $x = a$ non servono, come è chiaro.

PROBLEMA VI.

93. Dato l'angolo FDG , (Fig. 63.) e dato di posizione il punto A , ritrovare la minima retta, che nel dato angolo passi per lo punto A .

Sia CB quella, che si cerca, e si tiri AQ normale ad FD , FAP normale a DG , e CK normale ad

Tom. II.

Q

FP.

FP. Poichè è dato l'angolo *FDG*, e l'angolo *FPD* è retto, farà noto l'angolo *AFQ*, ma è in oltre dato di posizione il punto *A*, dunque saranno note le *QA*, *QF*, *FA*, *QD*. Sia per tanto $QF = a$, $QA = c$, $QD = b$, e la $QC = x$, farà $FA = \sqrt{aa + cc}$, $CA = \sqrt{cc + xx}$, $FD = b + a$, $FC = a - x$. Ma per i triangoli simili *FAQ*, *FDP*, è $FA, FQ :: FD, FP$; adunque $FP = \frac{aa + ab}{\sqrt{aa + cc}}$, e però $AP = \frac{ab - cc}{\sqrt{aa + cc}}$; e

per i triangoli simili *FCK*, *FAQ*, è $AF, FQ :: FC, FK$, adunque $FK = \frac{ax - ax}{\sqrt{aa + cc}}$, onde $AK = \frac{cc + ax}{\sqrt{aa + cc}}$;

e finalmente per i triangoli simili *ACK*, *ABP*, farà $AK, CA :: AP, AB$; adunque $AB = \frac{ab - cc \sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$,

e però $CB = \sqrt{cc + xx} + \frac{ab - cc \sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$, che deve

esser la minima. Differenziando farà

$$\frac{xdx}{\sqrt{cc + xx}} + \frac{xdx \times \frac{ab - cc}{cc + ax} \times \frac{cc + ax - ax}{cc + ax} - \frac{adx \times \frac{ab - cc}{cc + ax} \times \frac{cc + ax}{cc + ax}}{\frac{cc + ax}{cc + ax} \times \frac{cc + xx}{cc + ax}^{\frac{1}{2}}}$$

e posto il numeratore = 0, (riducendo prima al comun denominatore) farà $x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + c^2 - bcc = 0$, equazione solida.

Per

Per costruirla prendo l'equazione alla parabola $xx = ay$; fatta la sostituzione, sarà
 $xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{c^2}{aa} - \frac{bcc}{a} = 0$, luogo all'iperbola fra
 gl'asintoti.

Ciò posto, sulla retta QD si prenda $QM = \frac{2cc}{a}$, e
 condotta dal punto M parallela ad AQ la retta
 $MN = \frac{bcc}{aa}$, si tiri NS parallela a QD , e fra gl'asintoti
 NS , NT si descriva l'iperbola HOV del rettangolo
 costante $= \frac{2bc^2 + aabcc - ac^2}{a^3}$, e sieno sulla retta

QF le x prese dal punto Q ; e ad esse normali le y .
 Indi all'asse AQ , vertice Q , parametro $= a$ si descriva
 la parabola QO dell'equazione $xx = ay$; dal punto
 O , in cui la parabola taglia l'iperbola, condotta OC
 parallela ad AQ , e dal punto C condotta per lo punto
 A la retta CAB , sarà essa la minima, che si cerca.

Ed in fatti, per la costruzione, è $NS = x + \frac{2cc}{a}$,
 $SO = y + \frac{bcc}{aa}$, e per la proprietà dell'iperbola, deve
 essere $NS \times SO =$ al rettangolo costante, dunque
 $xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{2bc^2}{a^3} = \frac{2bc^2 + aabcc - ac^2}{a^3}$, ma

Qz

$CO =$

$CO = y = \frac{xx}{a}$, per la proprietà della parabola, dunque sostituito in luogo di y questo valore, avremo $\frac{x^3}{a} + \frac{2ccxx}{aa} + \frac{bccx}{aa} = \frac{bcc}{a} - \frac{c^4}{aa}$, cioè $x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \frac{c^4}{a} - bcc = 0$, che è l'equazione, da cui si doveva ricavare il valore della x , adunque cc.

O fatta la supposizione, che sia zero il numeratore della frazione, che esprime il minimo.

L'altra supposizione, che sia zero il denominatore, darà $cc + ax \sqrt{cc + xx} = 0$, cioè $\sqrt{cc + xx} = 0$, $cc + ax = 0$; ma $\sqrt{cc + xx} = 0$ ci dà $x = \sqrt{-cc}$ immaginaria, e però non serve; $cc + ax = 0$ ci dà $x = -\frac{cc}{a}$, ma presa $Qc = x = -\frac{cc}{a}$, e condotta Ae , sarà il triangolo QAc simile al triangolo QFA , o sia PFD , e però l'angolo QcA eguale all'angolo FDP ; quindi cA sarà parallela alla DP , vale a dire la condotta dal punto c , e per lo punto A nel dato angolo FDG sarà infinita, che in certo modo è un massimo.

Più brevemente ancora si può vedere, che in questo caso la retta, che si cerca, sarà infinita; poichè

nell'

nell' espressione $\sqrt{cc + xx} + \frac{ab - cc}{cc + ax} \sqrt{cc + xx} = CB$,
 sostituito in luogo di x il valore $-\frac{cc}{a}$, il denominato-
 re diviene zero, e però la linea infinita.



C A P O I V.

De' Flessi contrarj, e de' Regressi.

94. **C** Osa sieno i Flessi contrarj, ed i Regressi, è stato abbastanza detto nel Lib. I. Cap. VI., poste le quali notizie: Sia la curva *ADEM* (*Fig. 64.*) con le coordinate parallele, la quale abbia in *E* un flesso contrario, o regresso; presa una qualunque assissa $AB=x$, l'ordinata $BD=y$, e condotta *CF* parallela, ed infinitamente prossima a *BD*, egli è manifesto, che assunta $dx=BC$ costante, crescendo sempre più la assissa $AB=x$, la differenza *GF* dell'ordinata *BD*, cioè la dy si farà sempre minore fin'a tanto, che l'ordinata sia la *HE*, che corrisponde al punto del flesso contrario, o del regresso, dopo del qual punto nell'uno, e nell'altro caso la dy anderà sempre facendosi maggiore. Adunque nel punto del flesso contrario, e del regresso la dy farà un minimo; onde, per lo metodo de' massimi, e minimi, $ddy=0$, o pure $ddy=\infty$ farà la formola de' flessi contrarj, e de' regressi.

Se la curva farà (*Fig. 65.*) prima convessa, e poi concava all' asse *AH*: crescendo parimente la assissa, cresce la differenza dell' ordinata fino al punto *E* del flesso

flesso contrario, o regresso, dopo di cui va calando; farà adunque in quel punto la dy un massimo, e però istessamente si dovrà porre $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$.

Lo stesso s'inferisca ancora dal considerare, che, nelle curve prima concave all'asse la differenza seconda dell'ordinata y , cioè la ddy è negativa fino al punto E di regresso, o di flesso contrario, di poi si fa positiva; e nelle curve prima convesse essa differenza seconda è positiva fino al punto E , di poi si fa negativa; ma una quantità qualunque non può da negativa farsi positiva, o da positiva farsi negativa, se non passando per lo zero, o per l'infinito, adunque nel punto E di regresso, o di flesso contrario deve essere $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$.

Sia tangente della curva AEM prima concava all'asse (*Fig. 64.*) nel punto D la retta DT , e nel punto E la retta EP ; crescendo l'assisa AB , crescerà sempre l'intercetta AT fra la tangente, e l'origine delle assisse fino a tanto, che il punto B cada in H , dopo di che nel caso del flesso contrario crescendo ancora l'assisa, calerà essa intercetta, adunque nel punto E di flesso contrario l'intercetta $AP = \frac{ydx}{dy} - x$ dovrà essere un massi-

mo, e però differenziando, presa dx costante, $\frac{dy^2 dx - y dx ddy - dy^2 dx}{dy^2}$ eguale al zero, o all'infinito,

cioè

cioè riducendo, dividendo per $-ydx$, e moltiplicando per dy^2 , sarà finalmente $ddy=0$, o pure $ddy=\infty$. Nel caso, che il punto E sia di regresso, crescendo l'intercetta AT , crescerà pure l'assissa AB , fino a che il punto T cada in P , e l'assissa sarà AH , oltre il qual punto T l'assissa anderà calando; sarà adunque AH un massimo, e però la sua differenza eguale al zero, o all'infinito, adunque relativamente a tale differenza sarà infinita, o zero la differenza di AP , e però $ddy=\infty$, o pure $ddy=0$, come prima.

Se la curva (*Fig. 65.*) sia prima convessa all'asse, l'intercetta AT sarà $=x - \frac{ydx}{dy}$, e la differenza $\frac{dx dy^2 - dxdy^2 + ydxddy}{dy^2}$, o sia $\frac{ydxddy}{dy^2}$, e però dividendo per ydx , e moltiplicando per dy^2 , si avrà nè più, nè meno $ddy=0$, o pure $ddy=\infty$.

Nella curva DEM , (*Fig. 66.*) essendo A l'origine delle assisse x , ed E il punto del flesso contrario, l'intercetta AP sarà $=AH+HP$, ma in tale caso la sottotangente HP è negativa, vale a dire $-\frac{ydx}{dy}$, adunque sarà $AP=x - \frac{ydx}{dy}$, onde si vede, che in nessun modo essa intercetta AP potrà essere $x + \frac{ydx}{dy}$.

95. Serve la ritrovata formola per le curve, che,
anno

anno le ordinate parallele, cioè che sono riferite ad un'asse, o diametro; ma ella è diversa nelle curve riferite al fuoco.

Sia (Fig. 67. 68.) la curva ADE , il fuoco Q , da cui partono le ordinate QD , e sia Qd infinitamente prossima alla QD ; condotta QT normale a QD , e Qt normale a Qd , si tiri DT tangente della curva nel punto D , e (dt) tangente nel punto d ; la Qt prodotta, se fa bisogno, incontrerà DT nel punto o . Ora è chiaro, che crescendo le ordinate, se la curva è concava verso il fuoco Q , (Fig. 67.) sarà Qt maggiore di QT ; ma se la curva è convessa verso il fuoco Q , (Fig. 68.) sarà Qt minore di QT ; adunque nel passare la curva da concava ad esser convessa, o vicendevolmente, cioè nel punto del flesso contrario, e regresso, la quantità (ot) dovrà farsi da positiva negativa, o all'opposto, e però dovrà passare per lo zero, o per l'infinito.

Sia pertanto $QD=y$, $DM=dx$, e col centro Q si descrivano gli archi infinitesimi DM , TH ; saranno simili i due triangoli dMD , dQT , siccome dQo , THo , e però sarà $dM, MD :: dQ$, o sia DQ, QT , cioè dy , $dx :: y$, $QT = \frac{ydx}{dy}$, ma sono simili pure i due settori

DQM , TQH ; quindi $QD, DM :: QT, TH$, cioè $y, dx :: \frac{ydx}{dy}, TH = \frac{dx}{dy}$, e per la similitudine de' trian-

goli dQo , THo , sarà dQ (o sia DQ), Qo (o sia QT) :: TH , Ho ; cioè y , $\frac{ydx}{dy} :: \frac{dx^2}{dy}$, $Ho = \frac{dx^2}{dy^2}$; ma

Ht (Fig. 67.) è la differenza di QT , cioè $Ht = \frac{dx dy^2 - y dx ddy}{dy^2}$, (presa per costante dx) adunque,

$to = tH + Ho = \frac{dx dy^2 - y dx ddy + dx^2}{dy^2}$, che deve essere

eguale al zero, o all'infinito, e però anche moltiplicando per dy^2 , e dividendo per dx , sarà $dy^2 - y ddy + dx^2$ eguale al zero, o all'infinito.

Nella Fig. 68. la (*or*) viene ad esser negativa, e però $= -\frac{dx dy^2 + y dx ddy - dx^2}{dy^2}$, onde dividendo per $-dx$,

e moltiplicando per dy^2 , sarà $dx^2 + dy^2 - y ddy$ eguale al zero, o all'infinito.

Se per tanto una curva qualunque riferita al fuoco Q , (Fig. 69.) le di cui ordinate $QB = y$, e gli archetti $BC = dx$, averà un flesso contrario, o regresso, la formola generale per determinarlo sarà $dy^2 + dx^2 - y ddy = 0$, o pure $dy^2 + dx^2 - y ddy = \infty$.

Se si supponga y infinita, nella formola $dx^2 + dy^2 - y ddy$ saranno nulli i primi due termini rispetto al terzo, e però sarà $-y ddy$ eguale al zero, o all'infinito, e dividendo per $-y$, avremo $ddy = 0$, o $ddy = \infty$,
cioè

cioè la formola del primo caso delle curve riferite al diametro, come appunto deve succedere; perchè, supposta y infinita, le ordinate sono tra loro parallele.

96. Data la natura della curva, per mezzo di un'equazione, e supposta dx costante, differenziando due volte, se l'equazione è algebrica; una sola, se è differenziale del primo grado, a fine di avere il valore della ddy dato per dx , questo paragonato al zero, indi all'infinito ci fornirà i valori dell'assissa x , ai quali corrisponde l'ordinata y , che incontra la curva ne' punti di flesso contrario o regresso, se però, posti tali valori in luogo di x nell'equazione della curva, si abbia la y reale, che se la y sarà immaginaria, o involverà contradizione, la curva non avrà tali punti.

97. Per distinguere i flessi contrarj dai regressi, giacchè il metodo ci dà confusamente gl'uni, e gl'altri, basterà vedere a un di presso l'andamento della curva, e questo ci darà il lume necessario per determinarli.

98. Un'altra sorta di regresso possono avere le curve diversa da quella, che ora si è considerata, ed è quando la curva ritorna indietro verso la sua origine rivoltando la sua concavità a quella stessa parte, a cui la rivolgeva prima del regresso. Dopo aver trattato de' Raggi Osculatori, darò alla fine del seguente Ca-

po la formola generale anche per i regressi di questa seconda sorta.

ESEMPIO I.

99. Sia (Fig. 51.) la parabola cubica dell'equazione $y = a + \sqrt[3]{a^3 - 2ax + ax^2}$, che si è veduto nell'Esempio V. del Capo antecedente num. 81. avere un punto d'incontro. Differenziando è adunque,

$$dy = - \frac{2a dx + 2x dx}{3 \times \sqrt[3]{a^3 - 2ax + ax^2}}$$

vo, presa dx costante, farà

$$ddy = - \frac{2a dx^2}{9 \times \sqrt[3]{a^3 - 2ax + ax^2}}$$

La supposizione di $ddy = 0$ ci dà $-2a dx^2 = 0$, il che non serve; fatta adunque la supposizione di $ddy = \infty$,

farà $9 \times \sqrt[3]{a^3 - 2ax + ax^2} = 0$, cioè $ax - 2ax + ax^2 = 0$, e però $x = a$. Sostituito, in luogo di x , questo valore nella proposta equazione, farà $y = a$, adunque la curva à un flesso contrario, o regresso, che corrisponde alla assissa $x = a$, alla quale compete l'ordinata $y = a$, e perchè si fa altronde, essere pure questo

un punto d'incontro, non potrà dunque essere un flesso contrario, ma bensì un regresso.

Sia la stessa parabola cubica, ma prese le assisse $AB = x$ dal vertice A , (Fig. 70.) e BC le y . L'equazione è $axx = y^3$, e differenziando $2axdx = 3ydy$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, $ddy = -\frac{6ydy^2 + 2adx^2}{3yy}$; ma per l'equazione, si à $3yy =$

$$3x \sqrt[3]{aax}, \text{ e per la prima differenziazione, } dy = \frac{2axdx}{3x \sqrt[3]{aax}}, \text{ adunque fatte le sostituzioni, sarà } ddy = -\frac{2adx^2}{9x \sqrt[3]{aax}}.$$

La supposizione di $ddy = 0$ non serve; la supposizione di $ddy = \infty$ ci dà $9x \sqrt[3]{aax} = 0$, cioè $x = 0$, il qual valore sostituito nell'equazione rende $y = 0$, adunque la curva à un regresso nel vertice A .

ESEMPIO II.

100. Sia la versiera DFM , (Fig. 71.) la di cui equazione $y = a \sqrt{\frac{a-x}{x}}$, $AB = x$, $BF = y$, $AD = a$.

Diffe-

Differenziando, $dy = -\frac{aadx}{2x\sqrt{ax-xx}}$, e di nuovo dif-

ferenziando, presa dx costante, $ddy = \frac{3a^2 dx^2 - 4axdx^2}{4x \times ax - xx^2}$.

La supposizione di $ddy = 0$ ci dà $3a^2 - 4ax = 0$,
cioè $x = \frac{3a}{4}$, il qual valore sostituito nell'equazione del-

la curva rende $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, onde presa $AB = \frac{1}{4}a$, la
ordinata $BF = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ incontrerà la curva nel punto F ,
che farà un flesso contrario. La supposizione di $ddy = \infty$

ci dà $4x \times \frac{1}{ax-xx^{\frac{3}{2}}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = a$, il
primo valore sostituito nell'equazione rende $y = \infty$,
il secondo $y = 0$; ma nè l'uno, nè l'altro caso porta
flesso contrario, e porta solo, che sì l'asintoto AQ ,
come la tangente nel punto D è parallela alle or-
dinate.

ESEMPIO III.

101. Sia (Fig. 72. 73., e 74.) la Cicloide dell'e-
quazione $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{2rx - xx}}$ num. 47. Differen-

ziando

ziando, farà $ddz = \frac{arx - arr - brr}{b \times 2rx - xx^2} \times dx^2$.

La supposizione di $ddz = 0$ ci dà $arx - arr - brr = 0$, cioè $x = r + \frac{br}{a}$. Se a sia maggiore di b , la cicloide farà l'allongata; onde, presa CE dal centro eguale alla quarta proporzionale di BF , del semicircolo, e del raggio, e condotta l'ordinata ED , (Fig. 73.) incontrerà essa la curva nel punto del flesso contrario D . Se sia a minore di b , (Fig. 74.) la cicloide farà la raccorciata; ma quando $a < b$, la $x = r + \frac{br}{a}$ sarà maggiore

di $2r$, cioè maggiore di AB , nel qual caso le ordinate sono immaginarie, perchè non vi è curva al di sotto del punto F , adunque la curva non à flessi contrarij, nè regressi. Se sia $a = b$, la cicloide sarà l'ordinaria, (Fig. 72.) e però $x = r + \frac{br}{a} = 2r = AB$, ed $y = BF$, il

che non ci dà flesso contrario, o regresso; ma bensì ci fa sapere, che la tangente in F sarà parallela alle asisse, o sia al diametro AB .

La supposizione di $ddz = \infty$ ci dà $b \sqrt{2rx - xx^2} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = 2r$. Il valore $x = 0$ in tutti tre i casi ci dà la tangente nel punto A parallela alle ordinate. Il valore $x = 2r$ nel primo, e secondo caso ci dà

dà la tangente nel punto F istelfamente parallela alle ordinate; ma nel terzo caso ci dà una contradizione, poichè essendo l'equazione $dz = \frac{dx \sqrt{2r - x}}{\sqrt{x}}$, sostituito in

luogo di x il valore $2r$, farà $dz = 0$, ma non può essere $dz = 0$, e assieme $dz = \infty$, adunque tale valore a nulla serve in questo caso.

ESEMPIO IV.

102. Sia la Concoide di Nicomede di sopra considerata al num. 85., la di cui equazione è

$$yy = \frac{aaxx - x^4 + 2aabbx - 2bx^3 - bbxx + aabb}{xx}, \text{ o sia}$$

$$y = \frac{b + x \sqrt{aa - xx}}{x}. \text{ Differenziando, farà}$$

$$dy = -\frac{x^3 dx - aabdx}{xx \sqrt{aa - xx}}, \text{ e di nuovo differenziando, pre-$$

$$\text{sa } dx \text{ costante, } ddy = \frac{2a^4b - aax^3 - 3aabbxx}{x^3 \times \frac{aa - xx^{\frac{3}{2}}}} \times dx^2.$$

A riguardo de' tre soliti casi, che può avere questa curva, comincio dal primo quando $a = b$. (Fig. 56.)

$$\text{Ciò posto, farà } ddy = \frac{2a^5 - aax^3 - 3a^3xx}{x^3 \times \frac{aa - xx^{\frac{3}{2}}}} \times dx^2.$$

La

La supposizione di $ddy = 0$ ci dà $2a' - aax' - 3a'xx = 0$, cioè $x' + 3axx - 2a' = 0$, e risolvendo l'equazione, $x = \sqrt{3aa} - a$, $x = -\sqrt{3aa} - a$, $x = -a$; il primo valore ci dà l'assissa $GE = x = \sqrt{3aa} - a$, a cui compete l'ordinata $EM = y = \frac{\sqrt{3aa} \sqrt{2a \sqrt{3aa} - 3aa}}{\sqrt{3aa} - a}$,

che incontra la curva nel punto M del flesso contrario; il secondo valore a nulla serve, perchè rende l'equazione della curva immaginaria; il terzo ci dà un regresso nel punto P .

Riguardo agli altri due casi, la supposizione di $ddy = 0$ ci dà $2aab - x' - 3bxx = 0$, o sia $x' + 3bxx - 2aab = 0$. Per avere adunque le radici di quest'equazione, pongo $xx = bz$, luogo alla parabola apolloniana, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo $xz + 3bz - 2aa = 0$, all'iperbola.

Fra gli asintoti AQ , AD , fatta $AC = 2a$, CN normale $= a$, $AD = 3b$, e prese sull'asintoto AD dal punto D le x , si descriva (*Fig. 75.*) l'iperbola GNF del rettangolo costante $= 2aa$, passerà essa per lo punto N ; indi alzata DM normale alla DA , all'asse DM , vertice D , parametro $= b$, si descriva la parabola dell'equazione $xx = bz$.

Se adunque si assuma b maggiore di a , poichè $AD = 3b$, $AC = 2a$, farà CD maggiore di b , ora presa

Tom. II.

S

nella

nella parabola la affissa $z = a = CN$, l'ordinata sarà $x = \sqrt{ab}$, ma se a è minore di b , sarà anco $\sqrt{ab}$ minore di b , e però anco minore di CD ; adunque la parabola taglierà l'iperbola tra N , e D nel punto, per esempio, I .

Ciò posto, se si assuma $x = -a$, sarà nella parabola $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{-a+3b}$, ma $\frac{aa}{b}$ è maggiore di $\frac{2aa}{-a+3b}$, dunque la parabola taglia l'iperbola

nel punto I tale, che sarà $HI = -x$ minore di a , e però questa affissa averà nella concoide (Fig. 58.) la ordinata reale, che ci determina il flesso contrario nel punto, per esempio N , del ramo inferiore KN . La GM condotta dal punto G , altra intersecazione della parabola, e dell'iperbola, sarà necessariamente maggiore di a , e però a tale affissa non corrisponde nella concoide ordinata alcuna reale, onde questo valore a nulla serve. Finalmente il terzo valore TF ci darà l'affissa, a cui compete l'ordinata nel ramo superiore, che incontra la curva nel flesso contrario M .

Sia b minore di a , sarà (Fig. 76.) CD minore di b , e presa nella parabola la $z = a = CN$, l'ordinata sarà $x = \sqrt{ab}$, cioè maggiore di b , e però maggiore di CD , adunque la parabola passerà tra N , e C , quindi o non taglierà essa l'iperbola, e i due valori negativi della x nell'

nell'equazione $x' + 3bx - 2aab = 0$ saranno immaginari; o se la taglia, saranno essi sempre maggiori di a , ai quali nella concoide (Fig. 57.) corrispondono ordinate immaginarie, e però a nulla servono. Taglierà però la parabola certamente l'iperbola dalla parte de' positivi nel punto, per esempio F ; quindi la TF , che è minore di a , farà il valore della x , a cui corrisponde l'ordinata nel ramo AM della concoide, che l'incontra nel punto del flesso contrario M .

Disi, che se la parabola taglia l'iperbola tra N , ed O , i due valori negativi della x saranno maggiori di a ; imperciocchè, presa $x = -a$ nella parabola, farà $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{3b-a}$, ma $\frac{aa}{b}$ è minore di $\frac{2aa}{3b-a}$; dunque fino a tanto, che x negativa non sia

maggiore di a , la parabola non taglierà l'iperbola, dunque la taglierà in un punto, in cui essa x farà maggiore di a . Presa x positiva $= a$, farà nella parabola $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{3b+a}$; ma $\frac{aa}{b}$ è maggiore di

$\frac{2aa}{3b+a}$, dunque la parabola taglierà l'iperbola in un

punto F tale, che farà TF minore di a .

La supposizione di $ddy = \infty$ ci dà $x' \times aa - xx'^2 = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = \pm a$; vale a dire, che l'asintoto,

e la tangente in A sono parallele alle ordinate in tutti tre i casi, siccome la tangente in K nel secondo, e terzo caso; e nel primo, che in P vi è un punto d'incontro (come appunto portano i regressi) per esserci stato somministrato lo stesso valore $x = -a$ anche dalla supposizione di $ddy = 0$; il quale punto d'incontro si è trovato pure al num. 85.

103. In altro modo. Prendo la stessa Curva Concoide, ma con le ordinate tutte, che partano da un punto fisso, cioè dal polo P .

Sia adunque $PM = y$, (Fig. 56. 57., e 58.) e condotta PF infinitamente prossima a PM , e col centro P descritti gl' archetti MB , DH , sia $MB = dx$, $AG = a$, $GP = b$, e chiamata $PD = z$, $HO = dz$, per la proprietà della curva, sarà l'equazione $y = z \pm a$, cioè $y = z + a$ rispetto alla curva superiore al di sopra dell'asintoto GR , ed $y = z - a$ rispetto alla curva inferiore. Differenziando adunque nell'uno, e nell'altro caso, sarà $dy = dz$. Per la similitudine de' triangoli PGD , DHO (giacchè gl'angoli GDP , DOH non differiscono, se non per l'angolo infinitesimo DPH , e gl'angoli H , G sono retti) si averà $PG, GD :: DH, HO$; cioè $b, \sqrt{zz - bb} :: \frac{zdx}{y}, dz$, e però $dz = \frac{zdx \sqrt{zz - bb}}{by}$,

ma $dz = dy$, dunque $dy = \frac{zdx \sqrt{zz - bb}}{by}$; e differen-

ziando, presa dx costante,

$$ddy = \frac{2byzz - b'y - bz' + b'z \times dx dz}{bby \sqrt{zz - bb}}, \text{ mettendo } dz$$

in luogo di dy , e posto il valore di dz , avremo

$$ddy = \frac{zyz' - bbyz - z' + bbzz \times dx^2}{bby}, \text{ e finalmente,}$$

furrogato il valore di $y = z \pm a$, farà

$$ddy = \frac{z' \pm 2az' \mp abbz \times dx^2}{bb \times z \pm a^3}.$$

La formola delle curve riferite al fuoco si è veduto, essere $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, o pure $= \infty$; adunque, posti i valori di y , di dy , e di ddy , farà

$$\frac{aabb \pm 3abbz \mp 2az' \times dx^2}{bb \times z \pm a^3} = 0, \text{ o pure } = \infty. \text{ La sup-}$$

posizione della formola eguale al zero ci dà $abb \pm 3bbz \mp 2z' = 0$.

Sia in primo luogo $a = b$, e si voglia considerate il ramo superiore, farà $z' - \frac{3aaz}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$, ed i tre

valori di z sono $z = -a$, $z = a - \sqrt{3aa}$, $z = a + \sqrt{3aa}$,

ma

ma è $y = z + a$, dunque sarà $y = 0$, $y = \frac{3a + \sqrt{3aa}}{2}$,

$y = \frac{3a - \sqrt{3aa}}{2}$. Il terzo valore a nulla serve, perchè

ci dà l'ordinata y minore di $2a$, dove non è curva; il secondo ci dà la ordinata y , che incontra la curva nel punto del flesso contrario, per esempio M ; il primo ci viene somministrato anco considerando il ramo inferiore, e determina il punto P di regresso, ed infatti rispetto al ramo inferiore sarà $z^2 - \frac{3aaz}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$,

cioè i tre valori $z = a$, $z = -\frac{a \pm \sqrt{3aa}}{2}$; ma in que-

sto caso $y = z - a$, dunque avremo $y = 0$, $y = -\frac{3a \pm \sqrt{3aa}}{2}$; i due ultimi valori a nulla servono, che

ci danno y negativa, dove non è curva.

Riguardo agli altri due casi (Fig. 57. 58.) sarà $z^2 - \frac{3bbz}{2} \mp \frac{abb}{2} = 0$. Per avere le radici di questa

equazione, pongo $zz = \frac{bp}{2}$, luogo alla parabola apollonia-

na, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo all'iperbola $pz - 3bz = \pm ab$, cioè positivo l'omogeneo di comparazione rispetto al ramo superiore, e negativo rispetto all'inferiore. Fra gli asintoti PQ , MN normali in A , si descrivano le opposte iperbole (Fig. 77.) negli

gli angoli PAN , MAQ , se l'omogeneo di comparazione è positivo, e negli angoli PAM , NAQ , se è negativo; e supposta b maggiore di a , sia $AB=b$, $BC=a$: passeranno l'iperbole per i punti C ; e presa $AM=3b$, dal punto M sull'asintoto MN sieno le p , indi al vertice M , asse MN , parametro b si descriva la parabola

EMD dell'equazione $zz=\frac{bp}{2}$. Poichè presa $p=Mb=2b$,

la ordinata nella parabola è $z=b$ maggiore di a , cioè di (bc) , passerà essa parabola al di fuori de' punti C , e taglierà l'iperbole DC , CT ne' punti D , T , I , da' quali condotte parallele all'asintoto QP le rette DH , TV , IO , faranno esse le tre radici della z nell'equazione $z^3 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$, cioè rispetto al ramo superiore della concoide;

ma $y=z+a$, dunque $DH+a$ farà la ordinata y , che incontra la curva nel flesso contrario, per esempio M . (*Fig. 58.*) L'altre due radici VT , OI a nulla servono, perchè essendo negative, ad VT aggiunta a , la differenza, cioè y sarà negativa, e ad OI aggiunta a , la differenza sarà positiva, ma minore di a ; ed alla y negativa, o minore di a non corrisponde in questo caso curva. Rispetto al ramo inferiore della concoide, cioè nell'equazione $z^3 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$

le tre radici faranno OG , VK , HE , ma se dalla prima,

ma, e dalla terza si sottragga a per avere la y , la differenza sarà negativa, cioè y negativa, a cui non corrisponde curva, e però a nulla servono; se dalla seconda PK si sottragga a , la differenza LK sarà la ordinata y , che incontra la curva nel flesso contrario, per esempio, N .

Supposta b minore di a , la parabola passerà tra i punti c , C dell'iperbole GcK , ICT , e però i due valori negativi di z dell'equazione $z^2 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$, aggiungendo la a , daranno y minore di a , a cui non corrisponde curva; il terzo, aggiunta la a , darà la y , che incontrerà la curva nel flesso contrario, per esempio, M (Fig. 57.).

Rispetto al ramo inferiore, cioè all'equazione $z^2 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$, dalle due radici positive, che sono minori di b , sottratta a , e sottratta pure dalla radice negativa, avremo sempre y negativa maggiore di PK , a cui non corrisponde curva, e però il ramo inferiore della conoide quando b è minore di a , non à nè flessi contrarj, nè regressi.

La supposizione della formola $= \infty$ ci dà in tutti tre i casi $z = \mp a$, e però $y = 0$; nella Fig. 58. a nulla serve il valore $y = 0$, perchè non è in curva; nelle Fig. 56. 57.

ci

ci dà la tangente in P , che è assieme punto di regresso nella Fig. 56., ma non già nella Fig. 57.

ESEMPIO V.

104. Sia il circolo AED descritto col centro B (Fig. 78.), e sia una curva AFK tale, che condotto un qualunque raggio BFE , sia sempre il quadrato FE eguale al rettangolo del corrispondente arco AE in una data retta b , e si voglia il flesso contrario della curva AFK .

Si chiami l'arco $AE=z$, $BA=BE=a$, $BF=y$, ed $FG=dx$, fatta Be infinitamente prossima a BE , e descritto col centro B , raggio BF l'archetto FG ; per la natura della curva sarà $bz=aa-2ay+yy$, e però differenziando, $b dz = -2ady + 2ydy$, onde $dz = \frac{2ydy - 2ady}{b} = Ee$.

Ma per i settori simili BEe , BFG , sarà BE , $BF::Ee$, FG , cioè a , $y::\frac{2ydy - 2ady}{b}$, dx , dunque $dx =$

$\frac{2yydy - 2aydy}{ab}$, e differenziando, presa dx costante, $4ydy^2 + 2yyddy - 2ady^2 - 2ayddy = 0$, onde $yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y-a}$.

Nella formola generale delle curve riferite al fuoco $dx^2 + dy^2 = yddy$ si sostituiscano i valori di dx^2 , e di $yddy$ dati per dy , ed avremo

$$\frac{4y^4 dy^2 - 8ay^3 dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb} = \frac{ady^2 + ydy^2}{y-a},$$

cioè, riducendo al comun denominatore,

$$\frac{4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^2yy + 3aabby - 2a^2bb}{aabb \times y - a} \text{ eguale}$$

al zero, o all'infinito. Costruita per tanto l'equazione, una delle radici ci darà il valore dell'ordinata y , che incontra la curva nel punto del flesso contrario.



C A P O V.

Delle Evolute, e de' Raggi Osculatori.

105. Sia la Curva BDF (Fig. 79.) involupata dal filo $ABDF$, cioè essendo il filo fisso nel punto immobile F per un' estremità, s'intenda disteso sopra la curva BDF , e la porzione AB cada sulla tangente AR della curva nel punto B . Si muova il filo per l'estremità A sviluppando la curva, ma in maniera, che sia sempre teso, ed incapace di distrazione: il punto A descriverà con questo moto la curva AHK .

La curva BDF si chiama l'evoluta della curva AHK , come è stato detto anche di sopra al num. 16., e la curva AHK dicefi la generata dallo sviluppo della BDF , e le porzioni AB , HD , KF del filo si dicono raggi dell'evoluta, o raggi osculatori.

106. Poichè la lunghezza del filo $ABDF$ è sempre la stessa, ne viene, che la differenza de' raggi osculatori AB , HD sarà eguale alla porzione BD della curva; siccome l'altra porzione DF è eguale alla differenza de' raggi HD , KF , e la curva intiera BDF eguale alla differenza de' raggi AB , KF ; e se il raggio AB fosse nullo, cioè, se il punto A cadesse in B , farebbe il raggio HD eguale alla porzione BD , ed il raggio FK a tutta la curva BDF .

107. Dalla generazione della curva AHK per lo sviluppo del filo chiaramente si vede, che ciascun raggio HD , KF nelle sue estremità D , F tocca l'evoluta BDF .

108. L'arco HK della curva AHK sia infinitesimo, sarà pure infinitesimo l'arco DF dell'evoluta, e poichè è dimostrato nel corollario 4. del primo Teor. num. 6., che un qualunque archetto infinitesimo di curva à le stesse proprietà dell'arco di circolo; e nel Teorema 4. num. 15., che prodotto il raggio HD , sicchè incontri in S il raggio KF , sono SH , SK diverse tra loro solo per una quantità infinitesima del terzo grado, si possono dunque prendere per eguali SH , SK ; e però sono esse perpendicolari alla curva AHK ne' punti H , K . Ma le due HD , HS differiscono tra loro della DS infinitesima del primo ordine, ed è HD finita, dunque si potranno assumere per eguali; quindi per determinare un qualunque punto D nella curva evoluta, vale a dire, per determinare la lunghezza di un qualunque raggio osculatore HD , basterà, che data di posizione la perpendicolare HS della curva data AHK , (il che si à dal metodo delle tangenti) si determini il punto S , in cui essa si taglia con la perpendicolare infinitamente prossima KS . Ciò farassi nel seguente modo.

109. Sia in primo luogo la curva $DABE$ (Fig. 80.) riferita agli assi; i due archetti infinitesimi AB , BE , la perpendicolare BQ , e l'altra EQ , che la incontri nel

ricer-

ricercato punto Q . Chiamate al solito $DH=x$, $HA=y$, e condotte AF , BG parallele a DM , e la corda $PABC$, che incontri ME prodotta in C , e condotta l'altra corda EBR ; e col centro B , intervalli BE , BP , descritti gli archetti ES , PO , sarà $AF=dx$, $FB=dy$, $AB=ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$; ma per lo Corollario 2. del Teorema 5. num. 19. sono simili i settori QBE , BES ; dunque, avremo $QB, BE :: BE, ES$, cioè $QB, ds :: ds, ES$, (chiamando ds l'elemento della curva) e però $QB = \frac{ds^2}{ES}$.

Ora poichè l'archetto PO si può prendere per il suo seno retto, (Corollario 1. del Teor. 3. num. 9.) saranno simili i triangoli RPO , BEG , e però $BE, EG :: RP, PO$, cioè $ds, dy :: RP, PO = \frac{RP dy}{ds}$; ma sono pure simili i settori BPO , BES , e però sarà $BP, PO :: BE, ES$, cioè $\frac{y ds}{dy}, \frac{RP dy}{ds} :: ds, ES = \frac{RP \times dy^2}{y ds}$, e finalmente $QB = \frac{y ds^3}{RP \times dy^2}$, formola generale de' raggi osculatori,

in cui nulla altro rimane da farli, che sostituire il valore della RP , differenza della $DP = \frac{y dx}{dy} - x$, fecondo la diversa ipotesi della flussione prima, che si prende per costante.

Se nessuna flussione prima si assuma per costante, farà $RP = \frac{y dy dx - y dx dy}{dy^2}$, e però $QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dy dx - dx dy}$.
Se

Se si assuma costante dx , sarà $RP = -\frac{y dx dy}{dy^2}$;

$$\text{e però } QB = \frac{dx^2 + dy^2}{-dx dy} \cdot \frac{1}{2}.$$

Se si assuma costante dy , sarà $RP = \frac{y ddx}{dy}$, e però

$$QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dx dy} \cdot \frac{1}{2}.$$

Se si assuma costante ds , cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, sarà $dx ddx + dy ddy = 0$, e $-ddy = \frac{dx ddx}{dy}$, quindi $RP = \frac{y ddx}{dy} \times \frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}$, e però $QB = \frac{dy}{ddx} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, o pure

furrogato il valore di ddx , $QB = \frac{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-ddy}$.

que nell'espressione di $QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dy ddx - dx ddy} \cdot \frac{1}{2}$, in cui nes-

suna flussione è presa costante, basterà cancellare il termine ddx nella supposizione di dx costante; cancellare il termine ddy nella supposizione di dy costante; e porre in luogo di $-ddy$ il valore $\frac{dx ddx}{dy}$ nella supposizione di ds costante.

110. Può la curva essere riferita ad un diametro, vale a dire con le coordinate tra loro in angolo obbli-

bliquo. Sia DP l'assisa $= x$, $VK = dx$, VA l'ordinata $= y$, ed il rimanente, come sopra. Poichè è noto l'angolo DKB , sarà noto l'angolo BNF , e nota la ragione de' lati tra loro nel triangolo BNF , quindi essendo $NB = dy$, sarà data NF , ed FB , ed in conseguenza AB , o sia ds . Ma il triangolo RPO è simile al triangolo ABF , poichè gli angoli in O , ed F sono retti, e l'angolo ORP non è diverso dall'angolo FAB , che per l'angolo infinitesimo RBP ; adunque saranno date RP , PO , ed indi ES , e finalmente QB .

III. Dall'estremità del raggio osculatore BQ si tiri QT parallela all'asse DM , che incontra in T l'ordinata BI prodotta, la retta BT chiamasi *Sottosculatrice*, o *Co-raggio*. Dato il raggio BQ , è pure itteffamente sempre dato il co-raggio BT , perchè dal metodo delle tangenti è data la normale Bm della curva, e però dalla similitudine de' triangoli BmI , BQT sarà data BT .

Ma se si voglia l'espressione del co-raggio indipendentemente dal raggio, si chiami $BT = z$. Il triangolo BTQ è simile al triangolo BGC , o sia BAF , perchè essendo retti i due angoli TBG , QBC , tolto il comune QBG , rimarranno eguali TBQ , CBG , e sono retti T , e G ; adunque sarà $dx, ds :: z, BQ = \frac{zds}{dx} = z\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}}$.

Ma per lo Teorema 4. num. 15., BQ è eguale ad EQ , perchè non differiscono tra di loro, se non per una quan-

quantità infinitesima del terzo grado, adunque sarà nulla la differenza di QB , e però differenziando, senza assumere flussione costante,

$$\frac{dx dz \times dx^2 + dy^2 + z dx^2 ddx + z dx dy ddy - z ddx \times dx^2 + dy^2}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$$

ma $dz = dy$, perchè è la stessa la differenza di TB , e di IB ; dunque $z = \frac{dx \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy ddx - dx ddy} = BT$, formola del

co-raggio, in cui nessuna flussione è stata assunta costante. Se sia dx costante, il termine $dy ddx$ sarà nullo, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = BT$.

Se sia costante dy , sarà nullo il termine $-dx ddy$, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy ddx} = BT$.

Se sia costante l'elemento della curva, sarà $-ddy = \frac{dx ddx}{dy}$,

e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx dy}{\frac{dx}{ddx}} = BT$, surrogato il valore di ddy ; o pure $\frac{dx^2}{-ddy} = BT$, surrogato il valore di ddx .

Dato il co-raggio, per la similitudine de' triangoli BmI , BQT , sarà similmente dato il raggio QB .

112. Se le coordinate faranno tra loro in angolo obliquo, nell'analogia $dx, ds :: z, BQ$ in luogo delle

delle dx , e ds , basterà porre i rispettivi valori, che in questo caso convengono alle AF , AB , e fare il rimanente, come sopra, e si averà la formola del coraggio BT nel caso, che le coordinate sieno in angolo obbliquo.

113. In diverse altre maniere si può avere la stessa formola del raggio osculatore. Col centro Q , intervallo Qm si descriva l'archetto (mn) . Assumendo l'archetto infinitesimo (mn) per la tangente in n , saranno simili i due triangoli BCG , (mnq) , e però BC , $BG :: (mq)$, (mn) ; cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, $dx :: (mq)$, $(mn) = \frac{(mq) \times dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ma (mq) è la differenza di Dm , cioè del

la sottonormale Im con l'assisa DI , o sia DH , cioè di $x + \frac{ydy}{dx}$, adunque differenziando nell'ipotesi di nessuna

flusione costante, sarà

$$(mq) = \frac{dx^2 + ydxddy + dx^2dy^2 - ydyddx}{dx^2}, \text{ adunque,}$$

$$(mn) = \frac{dx^2 + ydxddy + dx^2dy^2 - ydyddx}{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ ma per i set-}$$

tori simili Qmn , QBE , sarà $BE = (mn)$, $BE :: Bm$ $(\frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx})$, QB , cioè sostituiti i valori analitici,

$$QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dyddx - dxddy}^{\frac{3}{2}}, \text{ la qual formola modificata secondo}$$

la supposizione di una flussione costante ci darà l'espessione del raggio QB , che a tale supposizione corrisponde.

114. In altro modo ancora.

Si produca EM in t , BG in L . Poichè il triangolo EGL è simile al triangolo BIm , essendo gl'angoli GEL , IBm diversi fra loro del solo angolo infinitesimo BQE , farà $GL = \frac{dy^2}{dx}$, e però $BL = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$, ma si è veduto, essere $(mq) = dx^2 + ydx \cdot dy + dx \cdot dy^2 - ydy \cdot dx$,

ed i triangoli simili QBL , Qmq ci danno $BL = (mq)$, $BL :: Bm$, BQ ; dunque sostituiti i valori analitici, avremo $BQ = \frac{dx^{\frac{3}{2}} + dy^{\frac{3}{2}}}{dy \cdot dx - dx \cdot dy}$.

115. Prendansi ora le curve riferite al fuoco: e però sia (Fig. 81.) la curva BEG , il fuoco A ; e presi due archetti infinitesimi BE , EG , e condotte le ordinate AB , AE , AG , col centro A si descrivano gl'archetti BC , EF , ed alle corde GE , EB prodotte sieno perpendicolari AI , AD , e finalmente la corda DE prodotta incontri in L l'ordinata AG , e col centro E si descriva l'archetto GR . Sia $AB = y$, $CE = dy$, $BC = dx$, $AD = p$. Col centro A descritto l'archetto DH , farà $HI = dp$, ma HM è quantità infinitesima.

de l.

del secondo grado; (Teor. 3. num. 8.) dunque si potranno prendere per eguali HI , IM , e però sarà $MI = dp$. La similitudine de' triangoli EBC , EAD ci dà $ED = \frac{ydy}{ds} = EI$, per esser diversa solo per un'

infinitesimo, ed assumendo l'archetto GR per la sua tangente, sono simili i triangoli EIM , EGR , quindi $GR = \frac{dpds}{ydy}$; ma condotte EQ , QG normali

alla curva ne' punti E , G , sono simili i settori QEG , EGR , dunque $QE = \frac{ydy}{dp}$. I triangoli simili EBC , EAD

ci danno $p = \frac{ydx}{ds} = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; e però differenziando,

senza prendere costante alcuna,

$$dp = \frac{y(dx + dx dy \times \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2 + dy^2} - dx dx - dy dy \times \frac{y}{dx^2 + dy^2})}{dx^2 + dy^2},$$

$$\text{cioè } dp = \frac{dx^2 dy + y dy^2 dx + dx dy^2 - y dx dy dy}{dx^2 + dy^2}, \text{ onde}$$

$$\text{fossituito questo valore in luogo di } dp \text{ nell'espressione di } QE, \text{ sarà } QE = \frac{y \times \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2 + dy^2}}{dx^2 + y dy dx + dx dy^2 - y dx dy dy}, \text{ for-}$$

mola generale del raggio osculatore per le curve rife-

rite al fuoco, presa nessuna flussione costante.

Se si voglia costante dx , preso il valore di dp in questa ipotesi, e sostituito; o pure senz'altro cancellato nella formola generale il termine $ydyddx$, sarà

$$QE = \frac{y \times \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dx^2dy^2 - ydxddy}$$

Se si voglia costante dy , cancellato nella formola generale il termine $-ydxddy$, sarà

$$QE = \frac{y \times \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dx^2dy^2 + ydyddx}$$

E finalmente presa per costante ds , cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, avremo $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$, e surrogato in luogo di ddx

questo valore nella formola generale, sarà

$$QE = \frac{ydx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 - yddy}$$

$$QE = \frac{ydy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2dy + yddx}$$

116. Se in ciascheduna di queste formole si supporrà la y infinita, svaniranno tutti que' termini, ne quali essa non si ritrova, e le formole saranno le stesse delle ritrovate per le curve riferite agli assi, il che deve appunto succedere, poichè se la y è infinita, il punto A sarà infinitamente lontano, e però parallele le ordinate.

117. In altra maniera. All' archetto EG infinitesimo sia tangente ER nel punto E , (Fig. 82.) e sieno QE, QG due raggi osculatori, e si produca QG in R . Dal fuoco A si tiri AN normale a QG , ed AK normale a QE , e sia $EK=t$, farà $KM=dt$. Poichè il triangolo AKM è simile al triangolo QNM , e questo è simile al triangolo QER , farà $QE, ER :: AK, KM$, cioè $QE, ER :: AK, dt$; ma per i triangoli ELC , o sia EGC, EAK simili, è $AK=\frac{ydy}{ds}$, ed ER si può assumere per EG , dunque farà $QE, ds :: \frac{ydy}{ds}, dt$, e però

$QE=\frac{ydy}{ds}$, ma $EK=t=\frac{ydx}{ds}$, dunque fatto il rimanente, come sopra, cioè preso differenziando il valore di dt , e sostituito nell'espressione di QE , si avranno le stesse formole.

118. Fatta QP normale ad EA prodotta in P , faranno simili i triangoli EAK, EQP , e però $EA, EK :: EQ, EP$; ma si è veduto, essere $EQ=\frac{ydy}{ds}$, dunque,

$y, t :: \frac{ydy}{ds}, EP=\frac{tdy}{ds}$, e surrogato in luogo di t il valore $\frac{ydx}{ds}$, ed in luogo di dt il differenziale

$\frac{dx^2 dy + ydy^2 ddx + dx dy^3 - ydx dyddy}{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}$, senza assumere,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2}$$

fluf.

flusione costante, sarà $EP =$

$$\frac{ydxds^2}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy} = \frac{ydx^3 + ydx^2dy}{dx^3 + dx^2dy + ydyddx - ydxddy}$$

formola generale del co-raggio, in cui nessuna flusione è presa costante, dalla quale modificata si ricavano le altre, che alle supposizioni di differenziale costante corrispondono, e se in queste si supporrà la y infinita, cioè, se si cancelleranno que' termini, ne quali essa non trovasi, si averanno le stesse formole, che si sono ritrovate per le curve riferite agl'assi.

119. Poichè, qualunque siasi la curva, si ritrova una sola espressione del raggio osculatore, e del co-raggio sì nelle curve riferite agl'assi, come in quelle riferite al fuoco, ne viene, che qualunque curva non potrà avere, che una sola evoluta.

120. Data adunque, per mezzo di un'equazione qualunque, la curva, di cui si vuole il raggio osculatore, o co-raggio; converrà differenziare l'equazione a fine di avere i valori di dy , dy^2 , e ddy dati per dx , o di dx ec. dati per dy , e sostituirli nelle ritrovate formole, con che si averà l'espressione in termini finiti, e affatto liberi dai differenziali, del raggio osculatore, o co-raggio della proposta curva.

121. Se il valore del raggio osculatore, o del co-raggio sarà positivo, dovranno essi prenderfi dalla par-

te dell'asse DM , (*Fig. 80.*) o del fuoco A (*Fig. 81.*), come ò fin' ora supposto, e la curva sarà concava a quest'asse, o fuoco; ma se sarà negativo, dovranno essi prenderli dalla parte opposta, ed in questo caso la curva sarà convessa. Da ciò ne segue, che nel punto del flesso contrario, o regresso, se la curva ne à, il co-raggio dovrà farsi da positivo negativo, e due raggi osculatori infinitamente prossimi dall'essere convergenti passeranno ad essere divergenti. Ma ciò non può essere, se essi non divengano prima paralleli, vale a dire infinito il raggio dell'evoluta in quel punto, o pure se essi non cadano prima l'uno sopra dell'altro, e così si faccia nullo il raggio dell'evoluta. Egli è assai chiaro, che quando l'evoluta sia tale, che i raggi vadano sempre crescendo accostandosi al punto del flesso contrario, o regresso B , (*Fig. 83.* , e *84.*) per passare ad essere da convergenti divergenti, dovranno farsi prima paralleli, essendo AD , FE l'evoluta della curva ABF . Ma se l'evoluta della curva ABF (*Fig. 85.* , e *86.*) farà DBE , sviluppandosi il filo dal punto B , e andando verso A rispetto alla porzione BA della curva, ed andando verso F rispetto alla porzione BF , poichè è sempre il raggio minore, quanto più è vicino al punto B ; converrà, che si faccia nullo prima di passare dall'esser positivo ad esser negativo.

ESEMPIO I.

122. La curva AB (Fig. 87.) sia la parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$, di cui si voglia il raggio osculatore ad un qualunque punto B . Differenziando sarà $adx = 2ydy$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, se così piace, $2dy^2 + 2yddy = 0$, ma $dy = \frac{adx}{2y}$, dunque $ddy = -\frac{aadx^2}{4y^3}$. Sostituiti per tanto questi valori nella formola del co-raggio $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, farà $\frac{4y^3 + aay}{a^2} = BE$, o pure, posto in luogo di y il valore dato dall'equazione della curva, $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$.

Dal punto B si tiri la tangente BT , che incontra l'asse in T , e dal punto T si conduca TE parallela alla normale BM ; incontrerà essa la BP prodotta nel ricercato punto E . Imperciocchè essendo l'angolo BTE retto, sarà $BP, PT :: PT, PE$, cioè per la proprietà della parabola, $\sqrt{ax}, 2x :: 2x, PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; adunque $BP + PE$, cioè $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$.

De-

Determinata BE , si conduca EQ parallela all'asse AP , la normale BQ prodotta incontrerà EQ nel punto Q , che sarà all'evoluta.

O pure, a cagione de' triangoli simili BPM , BEQ , sarà $BP, PM :: BE, EQ$; ma per la proprietà della parabola è $PM = \frac{1}{2}a$, dunque $\sqrt{ax}, \frac{1}{2}a :: 4x\sqrt{ax} +$

$\sqrt{ax}, EQ = 2x + \frac{a}{2} = PK$; dunque $MK = 2x$. Presa

per tanto MK doppia di AP , o sia $PK = TM$, e condotta KQ parallela a PB , incontrerà essa la normale BM prodotta nel punto Q , che sarà all'evoluta. E poichè $BP, BM :: BE, BQ$, e $BM = \sqrt{4ax + aa}$, sarà

$\sqrt{ax}, \sqrt{4ax + aa} :: \frac{4x\sqrt{ax} + \sqrt{ax}}{2}, BQ = \frac{4ax + aa}{2}$,

raggio osculatore.

Prendo la formola $\frac{dx^2 + dy^2}{dx dy}$ del raggio oscula-

tore, fatte le sostituzioni, sarà $QB = \frac{4xy + aa}{2} =$

$\frac{4ax + aa}{2}$, come prima.

Passando alle seconde differenze dell'equazio-

Tom. II.

X

ne

ne $ax = yy$, senza prendere alcuna flussione costante; poichè $adx = 2ydy$, sarà $addx = 2yddy + 2dy^2$, e $ddy = \frac{addx - 2dy^2}{2y}$. Quindi presa la formola del raggio oscu-

latore $\frac{dx^2 + dy^2}{\frac{1}{2} \frac{dx^2 + dy^2}{dyddx - dxddy}}$, che a questo caso conviene, e

fatta la sostituzione del valore di ddy , sarà $QB =$

$\frac{2y \times \frac{1}{2} \frac{dx^2 + dy^2}{dyddx - dxddy}}{2yddx - adx + 2dxdy}$, e finalmente posti i valo-

ri di y , e di dy , $QB = \frac{\frac{1}{2} \frac{dx^2 + dy^2}{dyddx - dxddy}}{2yddx - adx + 2dxdy}$, come sopra:

Si troverà la stessa cosa nell'altre supposizioni di dy , o di ds costanti, il che ometto di fare per brevità.

Se si volesse il raggio osculatore ad un determinato punto della curva, basterà sostituire nell'espressione finita già ritrovata del raggio osculatore per un qualunque punto il valore della x , che a tale determinato punto conviene. Così se si voglia il raggio osculatore nel vertice A , o sia il punto N , in cui l'asse AN della parabola tocca l'evoluta NQ : poichè nel vertice A è $x=0$,

cancellato il termine $4ax$ nell'espressione $\frac{\frac{1}{2} \frac{dx^2 + dy^2}{dyddx - dxddy}}{4ax + aa}$

del raggio osculatore, avremo $AN = \frac{a}{2}$, il che non

può

può essere altrimenti, essendo in questo caso il raggio AN lo stesso, che la sottonormale, la quale nella parabola si fa essere sempre la metà del parametro.

123. Sarà ora facile il ritrovare l'equazione alla Cartesiana dell'evoluta NQ , o sia la relazione delle ordinate NK , KQ nel seguente modo.

Si chiami $NK = u$, $KQ = t$. Poichè $KQ = PE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, avremo l'equazione $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, ma $AK = AP + PK = 3x + \frac{1}{2}a$, ed $AN = \frac{1}{2}a$; dunque $NK = 3x = u$, ed $x = \frac{u}{3}$, e però posto in luogo di x questo valore nell'equazione $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, avremo $t = \frac{4u\sqrt{\frac{au}{3}}}{3a}$,

e quadrando, $27att = 16u^3$, equazione alla seconda parabola cubica del parametro $= \frac{27a}{16}$, la quale esprime

la relazione delle coordinate NK , KQ , ed è l'evoluta della proposta parabola apolloniana.

Egli è manifesto, che la seconda parabola cubica intiera farà l'evoluta dell'intiera parabola apolloniana, cioè che (Fig. 88.) il ramo NQ farà l'evoluta della parte superiore AB , ed il ramo Nq della inferiore Ab ; e che i due rami Nq , NQ si voltano le convessità, ed anno un regresso in N .

124. E' pure manifesto, che se le curve proposte

sono algebrache, faranno pure algebrache le loro evolute, e si potrà sempre avere l'equazione in termini finiti esprimenti la relazione delle coordinate, e che in oltre esse evolute faranno rettificabili, cioè si potranno ritrovare delle rette linee eguali ad una qualunque porzione delle medesime, per esempio NQ . Imperciocchè, se la proposta curva AB è algebrica, si avranno sempre in termini finiti i raggi osculatori BQ , AN , e da BQ sottratto AN , il residuo farà l'arco NQ .

ESEMPIO II.

125. Sia la curva MBM (Fig. 89.) l'iperbola fra gli asintoti dell'equazione $aa = xy$. Differenziando, $xdy + ydx = 0$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $ddy = -\frac{2xdy}{x}$. Sostituiti i valori di dy , e ddy

nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, avremo $BE = \frac{xx + yy}{-2y}$, valore negativo. Se adunque sia $AP = x$,

$PB = y$, nella prodotta AB presa $BN = \frac{1}{2} BA = \frac{\sqrt{xx + yy}}{2}$,

ed alzata normale NE , che incontri la ordinata BP prodotta in E , farà BE il co-raggio, che si cerca; imperciocchè, per la similitudine de' triangoli BPA , BNE ,

farà

farà $BP, BA :: BN, BE$, cioè $y, \sqrt{xx+yy} :: \sqrt{xx+yy},$

$BE = \frac{xx+yy}{2y}$, e perchè si prende dalla parte de' negativi, $BE = -\frac{xx+yy}{2y}$. Quindi condotta EQ parallela

ad AP , e prodotta in Q la normale FB alla curva nel punto B , farà BQ il raggio osculatore, ed il punto Q nell' evoluta.

Per determinare il raggio osculatore nel vertice D dell' iperbola, si ponga $x = AH = a$, e però $y = HD = a$, adunque il co-raggio $\frac{xx+yy}{-2y}$ nel vertice D farà $= -a$,

ed il raggio $= -\sqrt{2aa}$.

Per poco, che si rifletta alla figura della curva MBM , si vede, che l'evoluta averà due rami con un punto di regresso in L , in cui il raggio DL converrà, che sia il minimo di tutti i raggi BQ ; e però differenziando la formola de' raggi osculatori $\frac{dx^2+dy^2}{-dxddy}$, la

differenza dovrà essere nulla, o infinita; cioè, supposta dx costante,

$$-\frac{3dxddy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^2ddy^2} + \frac{dxddy \times \sqrt{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2} = 0,$$

o pure $=$ all'infinito, e dividendo per $\sqrt{dx^2+dy^2}$, e mol-

moltiplicando per $dxddy^2$, farà $dx^2 ddd + dy^2 ddd - 3dyddy^2 = 0$, o pure $= \infty$. Ma per l'equazione della curva, si à $dy = -\frac{axdx}{xx}$, $ddy = \frac{2adx}{x^2}$, $ddd = -\frac{6aadx}{x^3}$;

dunque fatte le sostituzioni, e supposta la detta quantità eguale a zero, avremo $x = a = AH$; vale a dire, che il regresso sarà nel raggio osculatore al vertice D della curva; ma si è veduto, essere esso raggio $= -\sqrt{2aa}$, farà dunque $DL = -\sqrt{2aa} = DA$.

Nella formola de' raggi osculatori, surrogati i valori di dy , e di ddy , avremo $BQ = \frac{xx + yy}{-2xy} = \frac{x}{-2a}$,

e però differenziando, a fine di avere il minimo raggio, cioè il punto di regresso L , farà

$3x dx + 3y dy \sqrt{xx + yy} = 0$, e posto in luogo di dy il suo valore, farà $3xx dx - 3yy dx \sqrt{xx + yy} = 0$, cioè $x = y = a$, e sostituito questo valore nell'espressione del raggio osculatore, farà esso $= -\sqrt{2aa} = DL$, come sopra.

In altro modo ancora si può costruire il raggio BQ . Poichè $ddy = -\frac{2dx dy}{x}$, sostituiti in luogo di x , e di dx i valori dati per y , farà $ddy = \frac{2dy^2}{y}$, e però il co-rag-

gio

gio $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$, e per i triangoli simili BPF ,

BEQ , avremo $EQ = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$. Si conduca ora

al punto B la tangente BT , e dal punto T la TS normale a BT , o sia parallela a BQ , e si prenda $BE =$

$\frac{1}{2} BS$, o $PK = \frac{1}{2} FT$; se si farà EQ parallela alla AT ,

o KQ perpendicolare, esse incontreranno la normale

BQ nel punto Q dell' evoluta, poichè sarà $BS =$

$ydx^2 + ydy^2$, dunque $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$; sarà ancora

$FP + PT = FT = -\frac{ydy}{dx} - \frac{ydx}{dy}$, dunque $EQ =$

$-\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$.

Se l'equazione sarà $y^m = x$, la quale esprime tutte le parabole all' infinito, quando sia m numero positivo, ed in conseguenza anche la parabola dell' esempio primo; ed esprime tutte le iperbole fra gli asintoti all' infinito, quando sia m negativo, e però anche quella di questo esempio: differenziando avremo $my^{m-1} dy = dx$, e di nuovo differenziando, supposta dx costante, $m-1 \times y^{m-2} dy^2 + my^{m-1} ddy = 0$, e dividendo per my^{m-1} , farà $-ddy = \frac{m-1}{y} \times \frac{dy^2}{y}$. Presa pertanto

la

la formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, e fatta la sostituzione del valore di ddy , si averà $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{m-1 \times dy^2}$, e però EQ , o $PK = \frac{ydx}{m-1 \times dy} + \frac{ydy}{m-1 \times dx}$.

Dal punto T , in cui (Fig. 87., e 89.) la tangente BT incontra l'asse AP , si tiri istessamente TS parallela alla normale BQ alla curva, che incontra in S la ordinata BP prodotta, indi si prenda $BE = \frac{BS}{m-1}$ dal-

la parte dei negativi, se m sia numero negativo, come nelle iperbole le quali sono all'asse AP , cioè all'asintoto convesso (Fig. 89.); si prenda BE dalla parte dei positivi, se m sia numero positivo, e maggiore dell'unità, come nelle parabole (Fig. 87.) concave all'asse AP , e dalla parte dei negativi, se m positivo sia minore dell'unità, nel qual caso le parabole sono convesse all'asse AP .

Per determinare il punto, in cui l'asse della parabola tocca l'evoluta, prendo la formola de' raggi osculatori $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}$, da cui, sostituiti i valori di $dx =$

$my^{m-1}dy$, e di $-ddy = \frac{m-1 \times dy^2}{y}$, avere-

mo $BQ = \frac{mmy^{2m-2} + 1}{m \times m - 1 \times y^{m-2}}$, intendendo, che l'unità

supplisca per la legge degl' omogenei; quindi supposta m maggiore dell'unità, acciò sieno concave le parabole all'asse AP , se sarà m minore di 2, la y del denominatore passerà ad essere un moltiplicatore del numeratore, e però fatta $y = 0$, come richiede il caso, che si cerca, sarà $BQ = 0$, cioè l'asse toccherà l'evoluta nel vertice A della parabola, come sarebbe per esempio la seconda parabola cubica $axx = y$ (Fig. 70.).

Che se m è maggiore di 2, la y del denominatore sarà elevata a potestà positiva, e però fatta $y = 0$, sarà BQ infinita, vale a dire che l'asse della parabola sarà asintoto dell'evoluta; come la prima parabola cubica AB , (Fig. 90.) il di cui asse AP è asintoto dell'evoluta LQ .

L'evoluta CLQ della semi-parabola cubica ABM dell'equazione $axx = y$, à un punto di regresso L , e però due rami LQ , LC ; sviluppando il ramo LQ , si genera la porzione BA ; sviluppando il ramo LC , la porzione infinita BM .

Per determinare il flesso contrario L , prendo il valore del raggio osculatore, che in questa curva è

$$= \frac{9y^4 + a^4}{6a^4y}, \text{ il quale deve essere un minimo,}$$

e però differenziando

$$3 \times 18a^4y^4dy \times \frac{1}{9y^4 + a^4} - a^4dy \times \frac{1}{9y^4 + a^4} = 0,$$

cioè $45y^4 - a^4 = 0$, quindi $y = \sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$, e surrogato questo valore in luogo di y nell'equazione $axx = y^4$, avremo $x = \sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$. Presa adunque $AP = \sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$, e condotta l'ordinata PB , il punto di regresso L farà nella normale al punto B della curva; e nell'espressione del raggio osculatore posto $\sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$ in luogo di y , avremo il valore di BL .

In altro modo. Differenziando l'equazione $axx = y^4$, o sia $y = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, farà $dy = \frac{2}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}dx$, $ddy = -\frac{2}{9}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{5}{3}}dx^2$, $ddy = \frac{10}{27}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{8}{3}}dx^3$, posta dx costante; quindi, presa la formola $dx^2 ddy + dy^2 ddy - 3dyddy^2 = 0$, e sostituiti i valori, si averà $AP = \sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$.

ESEMPIO III.

126. Sia la curva ABD (Fig. 91.) un'ellissi, o un'iperbola, il di cui asse $AH = a$, ed il parametro $AF = b$, $AP = x$, $PB = y$, e l'equazione

$$y = \sqrt{abx \mp bxx}. \text{ Differenziando, sarà } dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{abx \mp bxx}}$$

$$\text{e } ddy = \frac{-a'bbdx^2}{4 \times \frac{abx \mp bxx}{2\sqrt{abx \mp bxx}}}, \text{ presa } dx \text{ per costante.}$$

Fatte le sostituzioni nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}$ del raggio osculatore, sarà

$$BGQ = \frac{4abx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4bbxx}{2a'bb} \cdot \frac{1}{2}. \text{ Ma}$$

la normale BG si troverà essere

$$= \frac{4abx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4bbxx}{2a}, \text{ dunque sa-}$$

rà il raggio $BGQ = \frac{1}{4} \frac{BG}{b}$; adunque preso il paramet-

ro b per primo termine, la normale BG per secondo, e continuata la serie geometrica, il quadruplo

del quarto termine sarà il raggio osculatore BQ :

Fatta $x = 0$ nella espressione del raggio osculatore , sarà $BGQ = AM = \frac{b}{2}$, e fatta $x = AO = \frac{1}{2} a$, si avrà nell' ellissi $BGQ = DOQ = \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, cioè eguale alla

metà del parametro dell' asse conjugato , ed in Q vi sarà un regresso , e l' evoluta della porzione $AD = DH$ sarà MQ ; della porzione DH sarà RQ ; ma nell' iperbola il raggio si estende all' infinito .

Se nell' ellissi si faccia $a = b$, il raggio osculatore BGQ sarà $= \frac{a}{2}$, qualunque siasi il punto B ; dun-

que i raggi tutti eguali tra loro , e l' evoluta un punto , cioè a dire l' ellissi , che in questo caso diviene un circolo , à per evoluta il suo centro .

ESEMPIO IV.

127. Sia la curva ABD (Fig. 92.) la logaritmica ordinaria , la di cui equazione è $\frac{ady}{y} = dx$.

Differenziando , presa dx costante , sarà $ddy = \frac{dx \cdot dy}{a} = \frac{y dx^2}{aa}$, posto il valore di dy . Fatte le sostituzio-

ni

ni nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, avremo

$BE = \frac{-aa - yy}{y}$, e perchè nella logaritmica si trova, essere la sottonormale $PH = \frac{yy}{a}$, sarà $EQ = -a - \frac{yy}{a}$.

Presa adunque $PK = TH$, ed alzata in angolo retto KQ , incontrerà essa la normale HBQ nel ricercato punto Q dell'evoluta.

Se si voglia determinare il punto della massima curvatura nella logaritmica, cioè il punto del minimo raggio osculatore, fatte le sostituzioni nella formola

$\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{3}{2}}$ del raggio osculatore, sarà $\frac{aa + yy}{-ay}^{\frac{3}{2}}$, e

differenziando sarà

$-\frac{3ayydy \times \frac{1}{aa + yy} + ady \times \frac{3}{aa + yy}}{aayy} = 0$, e però

$PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}$.

O pure, presa la formola del num. 125. $dx^2 dtdy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = 0$, e fatte le sostituzioni di $dy = \frac{ydx}{a}$, di $ddy = \frac{ydx^2}{a^2}$, di $ddy = \frac{ydx^3}{a^3}$, troveremo istef-

famente $PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}$.

ESEM-

ESEMPIO V.

128. Sia ABD (Fig. 93.) la logaritmica spirale, la di cui proprietà è, che condotta ad un qualunque punto B la tangente BT , e dal polo A la ordinata AB , l'angolo ABT sia sempre lo stesso, e però fatta AM infinitamente prossima ad AB , sarà costante la ragione di MR ad RB , quindi posta $AB = y$, l'archetto $BR = dx$, l'equazione sarà $adx = bdy$, e differenziando, fatta dx costante, $ddy = 0$. Presa pertanto la formola del co-raggio num. 118.

$$\frac{ydx^2 + ydxddy^2}{dx^2 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$$
, per le curve riferite al fuoco, la quale regolata nell'ipotesi di dx costante è $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$, e cancellato in questa il termine

$yddy$, perchè la curva ci dà $ddy = 0$, e fatta la sostituzione del valore di dx , o di dy , ovvero diviso il numeratore, e denominatore per $dx^2 + dy^2$, sarà il co-raggio $BA = y$.

Adunque, condotta AC normale ad AB , incontrerà essa la perpendicolare BC nel ricercato punto C

dell'

dell'evoluta, e perchè la sottotangente $AC = \frac{ay}{b}$, farà

$$BC = \frac{y \sqrt{aa + bb}}{b}.$$

Condotta la tangente BT alla curva nel punto B , faranno simili i triangoli TCB , CBA , e però eguali gl'angoli TBA , ACB ; ma l'angolo TBA è sempre costante, dunque lo farà ancora l'angolo ACB ; e però l'evoluta AC farà la stessa logarithmica spirale ABD , ma inverfamente posta.

ESEMPIO VI.

129. Sia ABD (Fig. 93.) la spirale iperbolica, la di cui proprietà è, che la sottotangente sia costante.

Fatte dunque le stesse cose dell'Esempio antecedente, l'equazione della curva farà $\frac{ydx}{dy} = a$, o sia.

$ydx = a dy$; quindi differenziando, posta dx costante, $ddy = \frac{dx dy}{a}$. Presa per tanto la formola del co-raggio,

che all'ipotesi di dx costante corrisponde, cioè $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2} = yddy$,

re $\frac{dx dy}{a}$, ed in luogo di dy il valore $\frac{y dx}{a}$ dato dall'

equazione, farà il co-raggio $= y \times \frac{aa + yy}{aa}$.

Ma poichè la sottotangente AT è $= a$, e la sotto-normale $AC = \frac{yy}{a}$, farà $TC = \frac{aa + yy}{a}$; dunque la quarta proporzionale della sottotangente TA , e della TC , e dell'ordinata AB ci determina il co-raggio. Quindi dal punto C condotta parallela alla tangente BT la CQ , che taglia in Q la ordinata BA prodotta, farà BQ il ricercato co-raggio.

Poichè per i triangoli simili BAT , CAQ , si avrà CA , $AQ :: TA$, AB , e permutando CA , $TA :: AQ$, AB , e componendo TC , $AT :: QB$, AB , ed invertendo TA , $TC :: BA$, BQ ; il che ec.

ESEMPIO VI.

130. Sia il settore di circolo ADN , (Fig. 94.) e condotto dal centro A un raggio qualunque ABP , si faccia ND , $NP :: \overline{AP}^m$, $\overline{AB}^m$, il punto B farà nella curva ABD , che è una delle spirali all'infinito, la di cui equazione, fatto $NPD = b$, $NP = z$, il raggio

gio $AP = a$, $AB = y$, farà $y^m = \frac{a^m z}{b}$, e differenzian-

do, $my^{m-1} dy = \frac{a^m dz}{b}$. Ma condotto il raggio Ap

infinitamente prossimo ad AP , e chiamata $BR = dx$, per i settori simili APp , ABR , farà $dz = \frac{adx}{y}$,

quindi posto questo valore in luogo di dz nell'equazione differenziale, farà $my^m dy = \frac{a^{m+1} dx}{b}$, e pe-

rò di nuovo differenziando, presa dx costante, $mmy^{m-1} dy^2 + my^m ddy = 0$, cioè $yddy = -m dy^2$.

Fatta pertanto la sostituzione di questo valore, e del valore di dx nella formola del co-raggio, farà $BE =$

$\frac{y \times mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mmbby^{2m} + 1 + m \times a^{2m+2}}$. Si faccia TAC perpendi-

colare ad AB , e si tiri la tangente BT della curva in B , e BC normale, farà $AT = \frac{mby^{m+1}}{a^{m+1}}$, $AC =$

$\frac{a^{m+1}}{y^{m-1}}$, e però $TC = \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mba^{m+1}y^{m-1}}$, quindi la

quarta proporzionale di $TA^{m+1} \times AC$, di TC , e di AB farà

$y \times \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mmbby^{2m} + 1 + m \times a^{2m+2}} = BE$, e però

condotta EQ parallela alla TC , incontrerà la normale BC nel punto Q , che farà all'evoluta.

ESEMPIO VII.

131. Sia la curva ABD (Fig. 95.) la metà della cicloide ordinaria, la di cui equazione $dy = dx \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, essendo $AC = 2a$, $AP = x$, $PB = y$.

Differenziando, presa dx costante, farà $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$, e posti questi valori nella formola

del raggio osculatore $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}$, farà $BQ =$

$2\sqrt{4aa - 2ax}$; ma la normale $BG = \sqrt{4aa - 2ax} =$ alla corda EC , dunque il raggio osculatore $BQ = 2BG = 2EC$.

Fatta $x = 0$, per avere il raggio osculatore nel punto A , farà $BQ = AN = 4a$, e però $CN = CA = 2a$.

Fatta $x = 2a$, il raggio osculatore nel punto D farà $= 0$, e però l'evoluta principia in D , e termina in N .

Poichè

Poichè la tangente in B della cicloide è parallela alla corda EA , (num. 47.) sarà la normale, BQ parallela alla corda EC . Ciò posto, si compisca il rettangolo $DCNS$, ed al diametro $DS = CN = AC$ si descriva il semicircolo DIS , e si tiri la corda DI parallela alla BQ , o sia alla EC . Saranno gl' angoli CDI , DCE eguali, e per conseguenza gl' archi DI , CE , e le corde; dunque DI , GQ eguali, e parallele, e condotta IQ , sarà essa eguale, e parallela a DG ; ma per la proprietà della cicloide, la DG è eguale all' arco EC , e però all' arco DI , dunque l' arco $DI = IQ$, ed il semicircolo $DIS = SN$, quindi l' evoluta DQN è la stessa cicloide DBA inversamente posta.

132. Avuta sufficiente notizia, e ritrovate le formole de' raggi osculatori, non è difficile il ritrovare la formola de' regreffi della seconda specie di sopra promessa al num. 98.

Sia la curva BAC (Fig. 96.) con un flesso contrario in A , e si sviluppi dal filo principiando in un qualunque punto D diverso dal flesso contrario A . Lo sviluppo della porzione DC genera la curva DG ; quello della porzione DA la curva DE ; e quello della porzione AB la curva EF di modo, che lo sviluppo di tutta la BAC formerà la intera curva $FEDG$;

la quale à due regreffi, uno in D della solita forma, poichè i due rami DE , DG si voltano le convessità, l'altro in E della seconda sorta, per essere i due rami ED , EF concavi verso la stessa parte. Sieno NM , Nm due qualunque raggi infinitamente prossimi dell'evoluta DA , ed NH , nH due normali alla stessa, faranno simili i due settori infinitesimi NmM , HNn , quindi HN , $NM :: Nn$, Mm ; ma nel punto del flesso contrario A , il raggio HN (num. 121.) deve essere o infinito, o eguale al zero, ed il raggio NM , che diventa AE , rimane finito, adunque nel caso del flesso contrario A , cioè nel punto del regresso E della seconda sorta, la ragione di Nn , Mm , vale a dire la ragione della differenziale del raggio MN all'elemento della curva, deve essere infinitamente grande, o infinitamente piccola. Ma la formola del raggio MN

è $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{3}{2}}$, presa dx costante, il di cui differenzia-

le è $-\frac{3dxddydy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} + dxddy \times \frac{3}{2} \frac{dx^2 + dy^2}{2}}{dx^2 ddy^2}$,

ed $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, dunque

$\frac{Nn}{Mm} = \frac{dx^2 ddy + dy^2 ddy - 3dyddy^2}{dxddy^2} =$ al zero, o all'in-

finito, formola per i regreffi della seconda sorta.

Questa

Questa formola è la stessa della ritrovata al num. 125., ma in quel luogo essa serve per i regressi della prima sorta delle evolute, e questa per i regressi della seconda sorta delle curve genite dell'evolute, essendo x , ed y le coordinate nell'uno, e nell'altro caso delle curve genite.

FINE DEL SECONDO LIBRO.

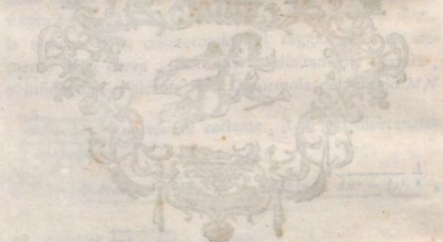


ANALITICHE DEL II

Quest'opera è la più bella che si sia mai vista in Italia, e che si sia mai vista in Europa. È una vera e propria enciclopedia di tutte le scienze, e di tutte le arti, e di tutte le lettere. È una vera e propria bibbia per tutti, e per tutti i tempi. È una vera e propria guida per tutti, e per tutti i luoghi. È una vera e propria luce per tutti, e per tutti i cuori.

LA BIBLIA DEL SECONDO LIBRO

La Bibbia è la più santa e la più preziosa delle scritture. È la guida per tutti, e per tutti i tempi. È la luce per tutti, e per tutti i cuori. È la vera e propria vita per tutti, e per tutti i luoghi.



La Bibbia è la più santa e la più preziosa delle scritture. È la guida per tutti, e per tutti i tempi. È la luce per tutti, e per tutti i cuori. È la vera e propria vita per tutti, e per tutti i luoghi.

INSTITUTIONI
ANALITICHE

LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrale.

INSTITUTIONI
ANALITICHE

LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrato

INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrale.

IL Calcolo Integrale, che suole dirsi ancora calcolo sommatorio, è un metodo di ridurre una quantità differenziale a quella quantità, di cui essa è la differenza, onde le operazioni del calcolo integrale sono opposte a quelle del differenziale, e però si chiama ancora metodo inverso delle flussioni, o sia delle differenze. Per cagion d'esempio il differenziale di x è dx , e per conseguenza x è l'integrale di dx . Quindi sarà segno sicuro, che sia giusto quell'integrale, che differenziato restituirà la quantità proposta da integrarsi. In due diverse maniere si ricercano gl'integrali delle formole differenziali, in una per mezzo di espressioni finite algebriche, o ridotte a quadrature, supposte; nell'altra facendo uso delle serie. Delle regole della prima maniera tratterò nel primo Capo; dell'altra nel secondo, a cui aggiungerò il terzo dell'uso di esse regole per le rettificazioni di curve, quadrature di spazj ec., e finalmente il quarto, che tratterà del Calcolo Esponenziale.

CAPO

INSTITUZIONI CAPOL

*Delle regole dell'integrazioni espresse da formole finite
algebraiche, o ridotte a quadrature supposte.*

1. Come nelle quantità incomplete elevate a qualunque potenza il differenziale loro è il prodotto dell'esponente della variabile nella variabile stessa elevata alla medesima potenza diminuita dell'unità, e moltiplicata nella sua differenza; così l'integrale del prodotto d'una variabile elevata a qualunque potenza nella differenza della stessa variabile è la variabile elevata alla potenza, il di cui esponente sia accresciuto dell'unità, divisa per lo stesso esponente così accresciuto, e ciò qualunque siasi l'esponente della potenza della variabile nella formola differenziale, cioè positivo, o negativo, intero, o rotto. Per esempio l'integrale di $mx^{m-1} dx$

farà $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1}$, cioè x^m . L'integrale di $x^n dx$

farà egli $x^{\frac{n+1}{n}}$, cioè $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

2. Ne punto alterano la regola le quantità costanti incomplete, o complesse, per le quali sia moltiplicata, o divisa la formola differenziale, rimanendo esse
nell'

nell'integrale, quali erano nella formola differenziale, e però l'integrale di $\frac{aax^n dx}{mb - ec}$ sarà $\frac{aax^{n+1}}{n+1} \times \frac{mb - ec}{mb - ec}$.

3. Che se la formola differenziale sarà una frazione, il di cui denominatore sia pure una qualunque potestà della variabile moltiplicata ancora, se si vuole, per qualunque costante, come a dire la formola $\frac{x^m dx}{aax^n - bbx^n}$, cioè $\frac{x^m dx}{aa - bb} \times x^n$, come che essa è la medesima di

questa $\frac{x^{m-n} dx}{aa - bb}$, sarà perciò soggetta alla data regola.

4. Ma qui fa d'uopo avvertire, che acciò gl'integrali sieno compiti, devesi ad essi sempre aggiungere, o da essi sottrarre una quantità costante a piacere, la quale ne' casi particolari si determina poi, come si vedrà a suo luogo.

Quindi l'integrale compito, per esempio, di dx sarà $x \pm a$, (intendendo per a una costante qualunque) di $xx dx$ sarà $\frac{x^3}{3} \pm \frac{a^3}{3}$, e così degl'altri. La ragione di ciò è, che non avendo le quantità costanti differenziale, la dx tanto può essere la differenziale di x , quanto di $x+a$, quanto di $x-b$ ec., e però tanto x , quanto $x+a$, quanto $x-b$ ec. possono essere gl'integrali di dx ; lo stesso vale di qualunque altra formola.

5. La stessa regola d'integrare serve per le formole differenziali complesse, cioè composte di molti termini, purchè, se hanno denominatore, sia egli o tutto costante, o se contiene la variabile, sia incompleso, cioè d'un solo termine, o riducibile ad esser tale.

Imperocchè in questi casi la formola differenziale complessa si risolve in altrettante incomplete, quanti sono i termini della complessa, e però ciascheduna è soggetta alla mentovata regola. Sia la formola $\frac{bx^m dx + aax^{m-1} dx}{aa - bb}$; questa equivale alle due

$$\frac{bx^m dx}{aa - bb} + \frac{aax^{m-1} dx}{aa - bb}, \text{ e però gl'integrali di queste}$$

due formole faranno l'integrale della prima, cioè

$$\frac{bx^{m+1}}{m+1 \times aa - bb} + \frac{aax^m}{m \times aa - bb} \pm f.$$

Sia $\frac{bx^c dx - a^c dx}{aax - cxx}$; questa equivale alle due

$$\frac{bx^c dx}{a - c \times xx} - \frac{a^c dx}{a - c \times xx}, \text{ cioè } \frac{bx^c dx}{a - c} - \frac{a^c x^{-1} dx}{a - c}, \text{ e}$$

però l'integrale sarà $\frac{bx^c}{\frac{1}{2} \times a - c} - \frac{a^c x^{-1}}{-1 \times a - c} \pm f$, cioè

$$\frac{bx^c}{\frac{1}{2} \times a - c} + \frac{a^c}{a - c \times x} \pm f$$

Sia $\frac{bx^m dx - aax^{m-1} dx}{bx^{m-2} dx - aax^{m-1} dx}$; questa equivale alle due

$$\frac{bx^m dx}{bx^{m-2} dx - aax^{m-1} dx} - \frac{aax^{m-1} dx}{bx^{m-2} dx - aax^{m-1} dx}, \text{ e però l'integrale sarà } \frac{bx^m}{m-1} - \frac{aax^{m-1}}{m-2} \pm f.$$

6. Se in oltre la formola differenziale complessa sarà elevata a qualche potestà, il di cui esponente sia positivo, ed intero, ridotta essa attualmente alla data potestà, ciascun termine s'integrerà colla stessa regola.

7. Tutto ciò, che fin' ora è detto, procede quando nella formola differenziale nessun termine vi sia, in cui l'esponente della variabile sia l'unità negativa, come $\frac{adx}{x}$, o sia $ax^{-1}dx$, imperocchè secondo la regola l'integrale sarebbe $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$, o sia $\frac{ax^0}{0}$, cioè infinito; il che nulla ci fa sapere.

8. In questi casi adunque bisogna ricorrere ad altri metodi. Due sono quelli, che servono: uno per mezzo d'una curva, che si chiama *Logaritmica*, ed ancora *Logistica*, l'altro per mezzo di serie infinite. Delle serie infinite, delle quali in moltissimi altri casi si può fare uso, come si vedrà, ne parlerò nel secondo Capo.

9. Per ora, quanto alla Logaritmica, ella è una curva di tale proprietà, che prese nell'asse le assisse in proporzione aritmetica, le corrispondenti ordinate sono in proporzione geometrica. E però l'asse AD (Fig. 1.) si divida in parti eguali AB, BC, CD ec., su i punti A, B, C, D ec. si eriggano le perpendicolari AE, BF, CG, DH ec. tali, che sieno tra di loro in geometrica proporzione; i punti E, F, G, H ec. saranno nella

nella curva, e di nuovo dividendo in parti eguali le AB , BC ec., e sopra le divisioni alzando le perpendicolari nella stessa geometrica proporzione, si averanno altri punti intermedj, e finalmente moltiplicando in infinito le divisioni, avremo infiniti punti, cioè la curva stessa.

Diviso adunque l'asse in parti infinitissime, ed eguali, sia una di queste $CM=dx$, l'ordinata $CG=y$, e ad essa infinitamente prossima MO , sarà adunque $NO=dy$. Sia un'altra ordinata $DH=z$, ed altre, quante si vuole, corrispondenti ad asse aritmeticamente proporzionali. Averanno adunque esse ordinate tra loro la medesima proporzione, ma per conseguenza saranno pure nella stessa proporzione le loro differenziali, adunque sarà $dy, dz :: y, z$, o sia $dy, y :: dz, z$; onde sarà costante la ragione di dy alla y , e però assumendosi costante la dx , sarà $dy, y :: dx, a$, cioè $\frac{ady}{y} = dx$, equazione della curva.

E' facile il vedere, che la sottangente di questa curva sarà sempre costante, imperocchè nella formola generale della sottangente ($\frac{ydx}{dy}$) sostituito in luogo di y il valore dato dall'equazione della curva, avrassi $ydx = \frac{ady}{dy} dx = a$. Ma comechè la progressione geometrica crescente delle ordinate si può produrre in infiniti

to, crescendo pure in infinito aritmeticamente le asisse, anderà in infinito la curva, e sempre allontanandosi dall'asse. E perchè la stessa progressione si può produrre ancora in infinito, ma decrescente, crescendo sempre le asisse, anderà da quest'altra parte in infinito la curva, ma sempre accostandosi all'asse senza toccarlo mai, e però sarà egli asintoto di essa curva.

10. In quest'altra maniera ancora, fra le molte, si può intendere descritta la Logaritmica.

Sia la retta indefinita MH (Fig. 2.) divisa in parti eguali MN , NB , BK ec., e presa NI a piacere, sul punto I si alzi la normale IO di quella grandezza, che si vuole, indi si conduca NO , e sul punto A si alzi la normale AC fin che incontri NO prodotta in C ; dal punto B si tiri BC , e sul punto E si alzi la normale ED , che incontri BC prodotta in D ; dal punto K si tiri KD , e sul punto F si alzi la normale FP , che incontri KD prodotta nel punto P ; e nello stesso modo si continovi in infinito l'operazione, ed i punti O , C , D , P ec. faranno nella curva logaritmica. Per avere i punti intermedj fra O , C , D , P ec. si dividano per metà le porzioni MN , NB , e ripetuta la stessa operazione, si avranno altri punti, e finalmente col moltiplicare in infinito le divisioni eguali nella retta MH , cioè col supporre infinitesime, ed eguali le porzioni MN , NB ec. avremo infiniti punti, i quali ci segneranno la

curva

curva logaritmica, la di cui sottangente, come apparisce dalla costruzione, sarà sempre costante. Chiamata adunque $NI=a$, e poste $=dx$ le infinitesime costanti porzioni dell'asse, sia l'ordinata $GR=y$, $GH=dx$, $TS=dy$; per la similitudine de' triangoli STR , RGA , sarà $dy, dx::y, a$, cioè $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{a}$, equazione della curva.

Da questa costruzione si deduce pure quello, che la prima suppone, vale a dire la primaria proprietà della logaritmica, che sieno in geometrica proporzione le ordinate, che corrispondono alle assisse in proporzione aritmetica. Imperocchè, supposte infinitesime le eguali porzioni dell'asse, l'archetto OC farà la tangente NO prodotta, l'archetto CD farà la tangente BC prodotta, l'archetto PD la tangente KD prodotta, e così di tutti gl'altri; saranno adunque simili i triangoli OIN , CAN , e però sarà $OI, CA::NI, NA$; così pure per la similitudine de' triangoli CAB , DEB sarà $CA, DE::BA, BE$; ma $NI=BA$, $NA=BE$, adunque sarà $OI, CA::CA, DE$, e così successivamente; e però le ordinate saranno in continua proporzione geometrica. . Quindi anche considerando l'asse non diviso in parti infinitesime, ma finite, ed eguali, perchè le intermedie ordinate proporzionali fra IO , per esempio, e CA sono nè più, nè meno di numero delle intermedie fra CA , e DE , e così dell'altre; saranno pure le IO ,
 CA ,

CA , DE in proporzione geometrica corrispondenti ad asisse in proporzione aritmetica. Anzi prese due ordinate a piacere, e prese due altre, dovunque si vuole, purchè la distanza fra la prima, e la seconda sia la stessa della distanza fra la terza, e la quarta, come sarebbero IO , CA , RG , SH ; sarà la prima alla seconda, come la terza alla quarta.

La curva logaritmica non si può geometricamente descrivere, bensì organicamente, e però è una curva meccanica, e l'impossibilità di essere geometricamente descritta è la stessa dell'impossibilità della quadratura dello spazio iperbolico, come si vedrà a suo luogo; quindi gl'integrali di quelle formole differenziali, che portano alla logaritmica, si dicono ancora dipendere dalla quadratura dell'iperbola.

Nella logaritmica adunque le porzioni dell'asse, o sia le asisse prese da un punto fisso corrispondono alle ordinate in quella guisa appunto, che nelle tavole trigonometriche corrispondono i logaritmi alla serie naturale dei numeri.

11. Ciò posto sia (*Fig. 3.*) la logaritmica DC , la di cui sottotangente eguale all'unità, o pure, se si vuole, eguale alla costante a , e sia l'ordinata AD eguale alla sottotangente, cioè eguale all'unità, o sia alla costante a , che fa figura d'unità. Presa una qualunque asissa $AB=x$, sia $BC=y$, ma l'equazione della

b

curva

curva è $ady = dx$, adunque l'integrale di $\frac{ady}{y}$ sarà x ,
 ma $x = AB$, ed AB è il logaritmo di BC , cioè di y ,
 adunque servendosi del segno $\int$ per significare integra-
 le o somma, che vuol dire lo stesso, e del segno l ,
 che vuol dire logaritmo, sarà $\int \frac{ady}{y} = ly$ nella logaritmi-
 ca, la di cui sottangente sia $= a$. Istessamente sarà

$\int \frac{dy}{y} = ly$ nella logaritmica della sottangente $= 1$;

$\int \frac{b dy}{y} = ly$ nella logaritmica della sottangente $= b$;

$\int \frac{ady}{b+y} = l(b+y)$ nella logaritmica della sottangente $= a$,

cioè presa nella logaritmica la ordinata $BC = AH = y$,
 se ad essa si aggiungerà $HK = b$, e si condurrà KG
 parallela all'asintoto, e si abbasserà GE parallela ad
 AD , sarà $GE = y + b$, e però $AE = l(b+y)$.

12. Dalla natura della logaritmica chiaramente si
 vede, che qualunque volta la quantità, di cui si vuole
 il logaritmo, è quantità infinita, facendo essa figura di
 ordinata infinita nella logaritmica, sarà pure infinita.
 l'intercetta nell'asse fra essa, ed il punto A , e però in-
 finito il logaritmo; e se essa sarà eguale alla prima AD ,
 cioè alla sottangente, il logaritmo sarà eguale al zero;

e se sarà minore di AD , come farebbe ΩA , il logaritmo sarà ΩA , e negativo; e finalmente se sarà $=0$, il logaritmo sarà infinito. Se la formola differenziale fosse $-\frac{dy}{y}$, l'integrale sarebbe $-\log y$, e se fosse $-\frac{dy}{a+y}$,

l'integrale sarebbe $-\log(a+y)$, ma se sarà $-\frac{dy}{a-y}$, l'integrale sarà $\log(a-y)$, e se sarà $\frac{dy}{a-y}$, l'integrale sarà $-\log(a-y)$,

intendendo questi logaritmi nella logaritmica della sottangente eguale all'unità. La ragione di ciò si è, che siccome l'integrale di $\frac{dy}{y}$ è $\log y$, così il differenziale di

$\log y$ è $\frac{dy}{y}$, e generalmente parlando, il differenziale di

una quantità logaritmica è la frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della sottangente nel differenziale della quantità, ed il denominatore la quantità stessa,

adunque il differenziale di $-\log(a+y)$ sarà $-\frac{dy}{a+y}$; il differenziale di $\log(a-y)$ sarà $\frac{dy}{a-y}$; il differenziale di $-\log(a-y)$

sarà $-\frac{dy}{a-y}$, supposta la sottangente della logaritmica $=1$,

e quando non sia tale, si moltiplicheranno i numeratori dei differenziali nella data sottangente.

13. Ma poichè la logaritmica non à ordinate nega-

tive, pare, che non si saprebbe ritrovare la quantità, che corrisponda all'espressione $\sqrt{a-y}$, cioè quale sia il logaritmo di $a-y$, qualora $a-y$ sia quantità negativa, cioè y maggiore di a ; ma in questo caso avvertasi, che è la stessa cosa $\sqrt{a-y}$, e $\sqrt{y-a}$, e che in tale supposto essendo $y-a$ positiva essa può essere ordinata nella logaritmica, ed in fatti differenziando il primo logaritmo si à $\frac{-dy}{a-y}$, differenziando il secondo si à $\frac{dy}{y-a}$, e mutando i segni al numeratore, e denominatore, si à $\frac{-dy}{a-y}$, che è lo stesso del primo.

14. Dalla proprietà della logaritmica altre se ne deducono intorno alle quantità logaritmiche, ed in primo luogo, che il multiplo, o submultiplo di un logaritmo farà il logaritmo della quantità elevata alla potestà del dato numero, così $2 \log x = \log xx$; $3 \log x = \log x^3$; $\frac{1}{2} \log x = \log \sqrt{x}$; $\frac{2}{3} \log x = \log \sqrt[3]{x}$; $n \log x = \log x^n$; $\frac{1}{n} \log x = \log x^{\frac{1}{n}}$, e la ragione si è, perchè, presa nella logaritmica una qualunque ordinata $OP=y$, il di cui logaritmo è AO (Fig. 3.), se li faranno AO, OS, SP ec. eguali tra loro, faranno AO, AS, AV aritmeticamente proporzionali, e le ordinate, AD, OP, ST, VI ec. faranno geometricamente proporzionali, onde posta AD eguale all'unità, $OP=y$, farà $ST=yy$, $VI=y^3$ ec., ma AS doppia di AO è lo-
garitmo

garitmo di yy , cioè lyy , ed AY tripla di AO è ly^3 ; adunque $2ly = lyy$, $3ly = ly^3$. Così pure, posta $AO = ly$, e divisa per metà in M , sarà $MN = \sqrt{y}$, e però $AM = \frac{1}{2}AO$, cioè $\frac{1}{2}ly$, sarà $ly^{\frac{1}{2}}$. Itteffamente posta $QR = y$, e divisa AQ in tre parti eguali in M , ed O , sarà $MN = \sqrt[3]{y}$, cioè $y^{\frac{1}{3}}$, ma $AM = \frac{1}{3}ly$, adunque $\frac{1}{3}ly = ly^{\frac{1}{3}}$, e così degl'altri.

Nè deveſi ommettere di avvertire, che l'integrale di $\frac{-dy}{y}$ non è ſolo $-ly$, come ſi è veduto al num.

12., ma che può eſprimerſi anco per $ly^{\frac{1}{y}}$, o ſia ly^{-1} ; concioſiachè preſa nella logaritmica una qualunque ordinata $OP = y$, e fatta $AQ = AO$, farà per la natura della curva OP , $AD :: AD, \Omega A$, cioè $y, 1 :: 1, \Omega A = 1$; ma AQ è il logaritmo negativo di OP , cioè di y , ed è aſſieme il logaritmo di ΩA , dunque ſarà $-ly = ly^{\frac{1}{y}} = ly^{-1}$, vale a dire, che il logaritmo negativo di una qualunque quantità ſarà lo ſteſſo del logaritmo poſitivo della frazione, di cui eſſa quantità formi il denominatore, o ſia della quantità ſteſſa con l'eſponente negativo; così ſarà $-mly = ly^{\frac{1}{y^m}} = ly^{-m}$.

15. In oltre la ſomma di due, di tre ec. logaritmi ſarà

farà eguale al logaritmo del prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi, e la differenza di due, di tre ec. logaritmi sarà eguale al logaritmo della frazione, il di cui numeratore sia il prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi positivi, ed il denominatore sia il prodotto delle quantità, delle quali sono i logaritmi negativi. Imperocchè sia $OP=y$, $QR=z$, sarà $AO=ly$, $AQ=lz$; si prenda $QB=AO$, sarà $AB=ly+lz$; ma AB è pure il logaritmo di BC , e per la proprietà della logaritmica, BC è la quarta proporzionale di AD , OP , QR , cioè $=yz$, adunque sarà $AB=ly+lz=lyz$. Sia un'altra ordinata $MN=p$, si prenda $BV=AM$, sarà $AV=AM+AB=lp+lyz$; ma AV è il logaritmo di VI , ed $VI=pyz$, adunque $lp+ly+lz=lpyz$.

Sia di nuovo $QR=z$, $OP=y$, e si prenda $QM=AO$, sarà $AM=AQ-AO=lz-ly$; ma AM è il logaritmo di MN , e per la stessa proprietà della logaritmica, $MN=\frac{z}{y}$, adunque $AM=lz-ly=l\frac{z}{y}$. Sia un'altra ordinata $BC=p$, e si prenda $SA=BM$, sarà $SA=-AB+AM=-lp+l\frac{z}{y}$; ma SA è il logaritmo di SN , ed $SN=\frac{z}{py}$ (per essere la quarta pro-

porzionale di BC, MN, AD), adunque $lz - ly -$
 $lp = \int \frac{z}{py}$ ec.

16. Siccome negl'altri casi, così ancora in questi delle integrazioni per via di logaritmi, si deve sempre aggiungere la costante, cioè il logaritmo di quantità costante arbitraria, da determinarsi poi ne' casi particolari.

17. Ma quando le formole differenziali proposte da integrarsi sieno frazioni col denominatore complesso, si possono dare alcuni casi, ne' quali è facile avere il loro integrale col mezzo della logaritmica, e sarà ogni qual volta il numeratore della frazione sia il differenziale preciso del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo di esso differenziale, anzi ogni qual volta gli sia proporzionale, ed in questi casi l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo, o proporzionale di esso logaritmo.

Così l'integrale di $\frac{x dx}{aa + xx}$ sarà $\int aa + xx$; l'integrale di $-\frac{x dx}{aa - xx}$ sarà $\int aa - xx$; l'integrale di $\frac{3xx dx}{a^2 + x^2}$

sarà $\int a^2 + x^2$; l'integrale di $\frac{4xx dx}{aa + xx}$ sarà $2 \int aa + xx$, cioè

$2 \int aa + xx^2$; l'integrale di $\frac{x dx}{aa + xx}$ sarà $\frac{1}{2} \int aa + xx$,

cioè

cioè $\int \frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}^{\frac{1}{2}}$; l'integrale di $\frac{xxdx}{\sqrt{a^2+xx}}$ farà $\frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+xx}}$,

cioè $\int \sqrt{a^2+xx}$; e generalmente l'integrale di $\frac{mx^{n-1}dx}{\sqrt{a^n \pm x^n}}$ farà $\pm \frac{m}{n} \int \frac{dx}{\sqrt{a^n \pm x^n}}$, cioè $\pm \frac{m}{n} \int \frac{dx}{\sqrt{a^n \pm x^n}}$.

o sia $\pm \int \frac{dx}{\sqrt{a^n \pm x^n}}$. Così l'integrale di $\frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$

farà $\int \frac{dx}{\sqrt{ax - xx}}$; l'integrale di $\frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$ farà

$\int \sqrt{ax - xx}$, e così degli altri a piacere, presi questi logaritmi nella logaritmica della sottangente = 1.

18. Ma se il numeratore della frazione non è della forma, che abbiamo considerata, quando però il denominatore sia tale, che nessuno de' suoi componenti lineari sia immaginario, cioè quando tutte le radici, dal prodotto delle quali egli è nato, sieno reali, allora si proceda nella seguente maniera.

19. Ed in primo luogo le radici del denominatore, o saranno tutte eguali tra loro, o no; se sono tutte eguali, come le avrebbe la formola $\frac{x^m dx}{x \pm a}$, si pon-

ga $x \pm a = z$, e però $dx = dz$, $x^m = z^m \mp a$, $x \pm a = z$;

e

e sostituendo nella formola questi valori, sarà $\frac{z^m}{z \mp a} dz$.

Fatta pertanto attualmente la potenza m , ciascun termine si saprà integrare, o algebricamente, o trascendentemente per mezzo della logaritmica; quindi restituito in luogo di z il valore dato per x , avremo l'integrale della proposta formola $\frac{x^m dx}{x \pm a^n}$.

Sia per esempio $\frac{x^1 dx}{x - a^3}$. Pongo $x - a = z$, e però

$dx = dz$, $x^1 = z^1 + 3azz + 3aaz + a^1$, $\frac{1}{x - a} = \frac{1}{z}$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{z^1 dz + 3azzdz + 3aazdz + a^1 dz}{z^1}$,

ed integrando, $z + 3 \int \frac{1}{z} dz - \frac{3aa}{z} - \frac{a^1}{2zz}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x , avremo finalmente

$\int \frac{x^1 dx}{x - a^1} = x - a + \int \frac{1}{x - a} - \frac{3aa}{x - a} - \frac{a^1}{2 \times (x - a)^2}$, il qual integrale differenziato restituirà la formola proposta da integrarsi.

20. Che se le radici del denominatore non saranno tutte eguali, ma o tutte disuguali, o miste d'uguali, e d'inequali, allora conviene prima preparare la formola col rendere positivo il termine della massima
c
potestà

potestà della variabile nel denominatore, se fosse negativo, indi liberarlo da' coefficienti, se ne à, di poi se la variabile nel numeratore, quando vi sia, fosse elevata a potestà maggiore, o eguale alla massima, che à nel denominatore, debbesi dividere il numeratore per lo denominatore fin' a tanto, che l'esponente della variabile in quello sia minore, che in questo; in fine si trovino algebricamente le radici del denominatore. Sia per cagion d'esempio la formola $\frac{aadx}{xx - 4xx}$. Mutan-

do i segni, e dividendo per 4, sarà $\frac{\frac{1}{4} aadx}{xx - \frac{1}{4} aa}$, cioè

$\frac{\frac{1}{4} aadx}{x - \frac{1}{2} a \times x + \frac{1}{2} a}$. Sia $\frac{aadx}{2xx + 4ax + 2bx + 2ab}$, dividendo per 2, sarà $\frac{\frac{1}{2} aadx}{xx + 2ax + bx + 2ab}$, cioè $\frac{\frac{1}{2} aadx}{x + 2a \times x + b}$.

Se nel numeratore vi fosse stata la variabile, ed elevata a maggiore potestà, che nel denominatore, si avrebbe fatta l'attual divisione, per cui avremmo avuti degl'intieri, e de' rotti: gl'intieri si tratterebbero nelle maniere fin' ora spiegate; i rotti nella seguente.

21. Sia la frazione $\frac{\frac{1}{2} aadx}{x + 2a \times x + b}$, dico: che questa sarà eguale a due frazioni, il numeratore delle quali

quali sia lo stesso di questa, ed i denominatori sieno: della prima il prodotto d'una delle radici nella differenza della quantità costante dell'altra radice, e della quantità costante della radice posta; della seconda sia il prodotto dell'altra radice nella differenza della costante della prima radice, e della costante di questa.

$$\text{seconda, cioè } \frac{\frac{1}{2} a a d x}{\overline{x+1a} \times \overline{x+b}} = \frac{\frac{1}{2} a a d x}{\overline{x+1a} \times \overline{b-2a}} + \frac{\frac{1}{2} a a d x}{\overline{x+b} \times \overline{1a-b}},$$

e se le radici fossero tre, quattro ec. si proceda sempre collo stesso metodo; ed in fatti riducendo al comune denominatore le frazioni in tal guisa ritrovate, restituiranno esse la frazione prima onde sono nate.

Gli integrali adunque di tali frazioni così spezzate, i quali saranno sempre in nostra mano, supposta la logaritmica, faranno gl'integrali della proposta formola, e però sarà

$$\int \frac{\frac{1}{2} a a d x}{\overline{x+1a} \times \overline{x+b}} = \frac{\frac{1}{2} a}{2a-b} \int \overline{x+b} - \frac{\frac{1}{2} a}{2a-b} \int \overline{x+2a}, \text{ cioè}$$

$$\frac{\frac{1}{2} a}{2a-b} \int \overline{\frac{x+b}{x+1a}}, \text{ o sia } \frac{a}{2a-b} \int \sqrt{\frac{x+b}{x+1a}} \text{ nella logaritmica}$$

della sottangente $= a$.

$$\text{Sia } \frac{\frac{1}{4} a a d x}{\overline{x+\frac{1}{2} a} \times \overline{x-\frac{1}{2} a}} : \text{ essa si spezzerà nelle}$$

due $\frac{\frac{1}{4} a dx}{x + \frac{1}{2} a \times -\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} a} + \frac{\frac{1}{4} a dx}{x - \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a}$,
cioè $\frac{\frac{1}{4} a dx}{x - \frac{1}{2} a} - \frac{\frac{1}{4} a dx}{x + \frac{1}{2} a}$, e però sarà

$$\int \frac{\frac{1}{4} a dx}{x + \frac{1}{2} a \times x - \frac{1}{2} a} = \frac{1}{4} \int \frac{x - \frac{1}{2} a}{x + \frac{1}{2} a} ; \text{ o sia } =$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x - \frac{1}{2} a}}{\sqrt[4]{x + \frac{1}{2} a}}, \text{ nella logaritmica della sottangente } = a.$$

Sia $\frac{a^3 dx}{x+a \times x-b \times x+c}$, essa si spezzerà nelle tre

$$\frac{a^3 dx}{x+a \times -b-a \times c-a} + \frac{a^3 dx}{x-b \times a+b \times c+b} + \frac{a^3 dx}{x+c \times a-c \times b-c},$$

e però sarà $\int \frac{a^3 dx}{x+a \times x-b \times x+c} = \frac{aa}{a+b \times a-c} \int \frac{1}{x+a} -$

$$\frac{aa}{a+b \times c+b} \int \frac{1}{x-b} - \frac{aa}{a-c \times b+c} \int \frac{1}{x+c} \text{ nella logarit-$$

mica della sottangente } = a.

Sia $\frac{-a^3 dx}{x^3 - aax}$, cioè $\frac{-a^3 dx}{x+a \times x-a \times x+0}$; essa

si spezzerà nelle tre

$$\frac{-a^1 dx}{x+a \times -1a \times 0 - a} - \frac{a^1 dx}{x-a \times 1a \times 0 + a} - \frac{a^1 dx}{x+0 \times a - 0 \times -a - a}$$

cioè $-\frac{adx}{2 \times x+a} - \frac{adx}{2 \times x-a} + \frac{adx}{x}$; e però sarà

$$\int \frac{-a^1 dx}{x^2 - aa} = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{xx - aa}, \text{ cioè } = \int \frac{x}{\sqrt{xx - aa}}$$

nella logaritmica della sottangente = a .

22. Se il denominatore della formola sarà misto di radici eguali, ed ineguali, come per esempio

$$\frac{a^1 dx}{x-b^2 \times x+c}, \text{ allora si consideri la formola, come}$$

se fosse $\frac{a^1 dx}{x-b \times x+c}$, e spezzata questa al solito, sarà

$$\frac{a^1 dx}{x-b \times x+c} = \frac{a^1 dx}{x-b \times c+b} + \frac{a^1 dx}{x+c \times -b-c}, \text{ adunque}$$

moltiplicando i denominatori per $x-b$, altra radice della proposta formola, sarà anco

$$\frac{a^1 dx}{x-b^2 \times x+c} = \frac{a^1 dx}{x-b^2 \times c+b} + \frac{a^1 dx}{x+c \times x-b \times -b-c},$$

ma il primo termine dell'omogeneo di comparazione à il denominatore di radici tutte eguali, ed il secondo di radici tutte disuguali; adunque l'uno, e l'altro inneggiato, come si è detto, potremo avere l'integrale di

$$\frac{a^1 dx}{x-b^2 \times x+c}, \text{ il quale sarà in parte algebraico, ed in}$$

in parte logaritmico, cioè $\frac{aa}{b+c} \int \frac{x+c}{x-b} - \frac{a^b}{x-b \times b+c}$,

preso il logarismo nella logaritmica della sottragente $= a$.

Se le radici eguali faranno in maggior numero, si dovrà nello stesso modo ripetere l'operazione fin che sia necessario.

23. Rimane ora da considerarsi il caso, in cui le frazioni abbiano in oltre nel numeratore la variabile a qualunque potestà, intendendo però sempre, come è stato avvertito di sopra, che la potestà di essa variabile nel numeratore sia minore della massima, che è nel denominatore, e non lo essendo, si riduca tale con l'attual divisione.

In questi casi si tratti la formola nello stesso modo, come se nel numeratore non vi fosse potestà alcuna della variabile, spezzandola nel modo spiegato in altrettante, quante sono le radici del denominatore, indi, se l'esponente della variabile nel numeratore della data formola è di numero dispari, si mutino i segni a' numeratori delle ritrovate frazioni, e se è di numero pari, si lascino ai numeratori quei segni che anno; di poi ciascun numeratore si moltiplichi per tanta potestà della costante di quella radice, che è nel denominatore, quanta è la potestà della variabile nel numeratore della proposta formola, prefiggendo ad essa costante

stante elevata a tale potestà quel segno, che porta il segno naturale, che à nel denominatore.

Sia $\frac{bbxdx}{x+a \times x-a}$. Considerata questa, come se nel

numeratore la variabile non vi fosse, si spezzerà nelle

due $\frac{bbdx}{x+a \times x-a} + \frac{bbdx}{x-a \times x-a}$; ma perchè nel nume-

ratore vi è la variabile elevata alla potestà dell'unità, si mutino i segni a' numeratori, e si moltiplichino relativamente per la costante di quella radice, che è nel suo denominatore, cioè la prima per a , la seconda per $-a$, ed avremo

$$\frac{bbxdx}{x+a \times x-a} = \frac{-bbdx \times a}{x+a \times x-a} - \frac{bbdx \times -a}{x-a \times x-a},$$

cioè $= \frac{bbdx}{2 \times x+a} + \frac{bbdx}{2 \times x-a}$, e però sarà

$$\int \frac{bbxdx}{x+a \times x-a} = b \int \sqrt{x+a} + b \int \sqrt{x-a}, \text{ o sia}$$

$= b \int \sqrt{xx-aa}$, nella logaritmica della sottangente $= b$; o pure, se si vuole, sarà $= bb \int \sqrt{xx-aa}$ nella logaritmica della sottangente $= 1$.

Ma era superfluo il ridurre questa formola alle due frazioni, poichè essendo essa $\frac{bbxdx}{xx-aa}$, il numeratore è

appunto la metà del differenziale del denominatore, e

però

però senz' altra operazione l' integrale farà , come al num. 17. si è detto , $bb \int \sqrt{xx - aa}$ nella logaritmica della sottangente = 1 .

Sia $\frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b}$, cioè $\frac{x^2 dx}{x^3 + bxx - aax - aab}$, e diviso il numeratore per lo denominatore , avremo $xdx - bx^2 dx + aaxxdx + aabxdx$, e diviso di nuovo

il termine $-bx^2 dx$ per lo denominatore , avremo $\frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = xdx - bdx + \frac{aaxxdx + bbx dx - aabdx}{xx - aa \times x + b}$.

Ma i due primi termini sono interi , e l' ultimo non è la variabile nel numeratore , e però si fa maneggiare ; adunque rimane da ridursi solamente l' altro termine ,

cioè $\frac{aa + bb \times x dx}{xx - aa \times x + b}$.

Considerato questo , come se non avesse la variabile nel numeratore , sarebbe $\frac{aa + bb \times dx}{xx - aa \times x + b} =$

$\frac{aa + bb \times dx}{x + b \times -aa + bb} + \frac{aa + bb \times dx}{x + a \times -aab + 1aa} + \frac{aa + bb \times dx}{x - a \times 1ab + 1aa}$, e per tanto sarà $\frac{aa + bb \times x dx}{x + b \times xx - aa} = \frac{aa + bb \times bdx}{x + b \times -aa + bb} +$

$\frac{aa + bb \times aadx}{x + a \times -aab + 1aa} + \frac{aa + bb \times aadx}{x - a \times 1ab + 1aa}$, onde finalmen-

$$\text{te poi } \frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = x dx - b dx + \frac{aabb dx}{x + b \times xx - aa}$$

$$\frac{aa + bb \times b b dx}{x + b \times -aa + bb} + \frac{aa + bb \times a a dx}{x + a \times -aab + aab} + \frac{aa + bb \times a a dx}{x - a \times aab + aab};$$

$$\text{e se vogliamo spezzare anche il termine } \frac{aabb dx}{x + b \times xx - aa},$$

$$\text{per avere in fine l'integrale della proposta formola, sarà } \frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = x dx - b dx + \frac{b^2 dx}{x + b \times -aa + bb} +$$

$$\frac{a^2 dx}{x + a \times aab - aab} + \frac{a^2 dx}{x - a \times aab + aab}. \text{ Adunque in-}$$

$$\text{tegrando avremo } \int \frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = \frac{xx}{2} - bx -$$

$$\frac{b^2}{aa - bb} \int \frac{1}{x + b} + \frac{a^2}{aab - aab} \int \frac{1}{x + a} + \frac{a^2}{aab + aab} \int \frac{1}{x - a},$$

presi tali logaritmi nella logaritmica della sottangente = 1.

Così in queste, come in tutte l'altre integrazioni, che si faranno, s'intenda doverli aggiungere la costante, qualora sarà da me per brevità ommessa, il che basterà d'avere qui avvertito.

24. Ma le formole differenziali possono avere, e spesso hanno denominatori tali, de' quali non si possono ritrovare algebricamente le radici, ciò non ostante, però serve egualmente bene la regola delle frazioni anche

che in questi casi; imperciocchè si tratti il denominatore, come se fosse un'equazione, e col mezzo delle intersecazioni delle curve si trovino geometricamente in linee i valori della variabile in quella guisa appunto, che si costruiscono i problemi solidi, e tali valori o linee si chiamino A, B, C , ec. coi segni positivi, o negativi secondo, che sono quantità positive, o negative; ciascuno di questi sottratto dalla variabile formerà le radici del denominatore di modo, che la proposta formola differenziale si convertirà in una di questa forma $\frac{x^n dx}{x - A \times x + B \times x - C \text{ ec.}}$, e sopra di quella nello

stesso modo si operi, come si è operato nel caso delle radici algebriche.

25. E' facile a vedersi, che l'addotta regola serve solamente nel caso, che le radici del denominatore sieno tutte reali, perchè altrimenti essendo, spezzata la formola in altre frazioni, tante di queste sarebbero immaginarie, ed in conseguenza immaginari gl'integrali, quante sono le radici immaginarie nel denominatore della proposta formola differenziale.

26. Quando adunque il denominatore delle proposte formole differenziali sia composto di radici immaginarie o in tutto, o in parte, fa d'uopo ricorrere ad altre maniere; ed in primo luogo abbiano le date for-

mole

mole il denominatore di due sole dimensioni, cioè di due radici immaginarie, e sia per esempio $\frac{b b d x}{x x + a a}$.

L'integrale di questa formola, e di tutte l'altre simili dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo: diſſi rettificazione, o quadratura, poichè data l'una, è vicendevolmente data l'altra.

Sia pertanto (Fig. 4.) il quadrante di circolo ACG , il raggio $AC = a$, CD tangente $= x$, farà $AB = \frac{a x}{\sqrt{a a + x x}}$,

$$CB = a \frac{-a x}{\sqrt{a a + x x}}, \text{ ed } EB = \frac{a x}{\sqrt{a a + x x}}.$$

Condotta AK infinitamente proſſima ad AD , farà EO la fluſſione, o differenza dell'arco CE ; e tirata dal punto O la retta OM parallela ad EB , ed EH parallela ad AC , farà HE la differenziale di CB , HO la

differenziale di EB , e però $EH = \frac{a x d x}{a a + x x^{\frac{3}{2}}}$, ed

$$HO = \frac{a^2 d x}{a a + x x^{\frac{3}{2}}}; \text{ adunque l'archetto } EO = \sqrt{\frac{HE^2 + HO^2}{a a + x x^{\frac{3}{2}}}}$$

farà $= \sqrt{\frac{a^2 d x^2 + a^4 x x d x^2}{a a + x x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{a a d x}{a a + x x}$; adunque l'integra-

le della formola $\frac{a a d x}{a a + x x}$ farà l'arco CE della tangente

$CD = x$, e del raggio $CA = a$.

Ripiglio ora la formola $\frac{bbdx}{aa+xx}$: moltiplicando il numeratore, e denominatore per aa , farà essa $bb \times \frac{aadx}{aa+xx}$; ma l'integrale di $\frac{aadx}{aa+xx}$ è l'arco di circolo, che abbia per tangente la x , ed il raggio $= a$, farà adunque $\int \frac{bbdx}{aa+xx} =$ al quarto proporzionale di aa , di bb , e dell'arco di circolo col raggio $= a$, tangente $= x$.

Sia la formola $\frac{aamdxx}{nxx+nab}$: come che moltiplicando il numeratore, e denominatore per b , equivale a quest'altra $\frac{am}{nb} \times \frac{abdx}{nxx+nab}$, farà $\int \frac{aamdxx}{nxx+nab} =$ al quarto proporzionale di nb , di am , e dell'arco di circolo col raggio $= \sqrt{ab}$, e tangente $= x$; e lo stesso si dica di tutte l'altre simili.

27. Per l'opposto farà adunque il differenziale di un'arco qualunque di circolo il prodotto del quadrato del raggio nella differenza della tangente diviso per la somma del quadrato dello stesso raggio, e del quadrato della tangente.

E come agl'altri integrali, o sommatorie devesi aggiungere sempre la costante, così a quelli ancora di rettificazioni di circolo, per avere le sommatorie compite, devesi aggiungere un'arco costante dello stesso circolo,

circolo, imperciocchè la differenza per cui può crescere, o calare l'arco così composto del fluente, e del costante, non sarà mai altro che il differenziale dell'arco fluente; adunque ad esso differenziale può competere per integrale la somma dell'arco fluente con qualunque arco costante del medesimo circolo. Supponiamo, che sia $=x$ la tangente d'un'arco del raggio $=a$, e sia b la tangente di un'altro arco costante del medesimo circolo; si sa, che la tangente della somma di questi due archi (num. 108. Lib. I.) sarà $=\frac{aab+axx}{aa+bx}$, ma il differenziale di questa moltiplicato nel quadrato del raggio, ed il prodotto diviso per lo quadrato del raggio più il quadrato della stessa tangente si trova essere $\frac{aadx}{aa+xx}$, che è il differenziale dell'arco fluente; adunque ec.

Se fosse la formola $\frac{aadx}{aa+xx-2bx+bb}$, essendo $xx-2bx+bb$ un quadrato, si faccia $x-b=z$, e sostituendo avremo $\frac{aadz}{aa+zz}$, e però $\int \frac{aadz}{aa+zz} =$ all'arco

di circolo del raggio $=a$, tangente $=z$, ma $z=x-b$; adunque $\int \frac{aadx}{aa+xx-2bx+bb} =$ all'arco di circolo del raggio $=a$, tangente $=x-b$, qualora però sia x maggiore di b ; ma presa x minore di b , l'integrale sarà — arco di circolo col medesimo raggio, e tangente;

ed

ed in fatti differenziando, avremo $\frac{aadx}{aa+bb-2bx+xx}$,
la stessa formola di prima.

Sia proposta la formola $\frac{4abdx+3bxdx}{xx-4ax+6aa}$. Si faccia spa-
rire il secondo termine nel denominatore col porre
 $x=y+2a$. Fatte le sostituzioni, sarà
 $\frac{4aby+3bydy+6aby}{yy+2aa}$, cioè $\frac{10aby+3bydy}{yy+2aa}$.

L'integrale del primo termine sarà adunque il ter-
zo proporzionale di a , di $5b$, e dell'arco di circolo
col raggio $=\sqrt{2aa}$, tangente $=y$; del secondo sarà
 $\frac{3}{\sqrt{yy+2aa}}$ nella logaritmica della sottangente $=b$.
Adunque restituendo in luogo della y il suo valore
 $x-2a$, l'integrale della formola $\frac{4abdx+3bxdx}{xx-4ax+6aa}$ sarà il
quarto proporzionale di a , di $5b$, e dell'arco di circolo
col raggio $=\sqrt{2aa}$, tangente $=x-2a$, con di più
 $\frac{3}{\sqrt{xx-4ax+6aa}}$ nella logaritmica della sottangen-
te $=b$.

28. Passando ora a quelle formole differenziali, che
contengono segni radicali, cioè quantità elevate a po-
tessà di esponente rotto, se la formola sarà, o si potrà
ridurre

ridurre ad esser tale, che l'incognita sotto il segno non ecceda la prima dimensione, e fuori del segno sia potenza positiva, allora faranno esse sempre algebricamente integrabili, e si avranno le integrazioni col servirsi d'una semplicissima sostituzione, cioè col porre la quantità sotto il segno eguale ad una nuova variabile.

Sia per tanto $ax \sqrt{ax - aa}$. Si ponga $\sqrt{ax - aa} = z$, e però $x = zz + aa$, $dx = 2zdz$, e fatte le sostituzioni, avremo $2zzdz$, ed integrando zz^2 , e restituendo in luogo di z il valore dato per x , farà $\frac{2}{3} \times \frac{ax - aa}{ax - aa}$ l'integrale della proposta formola.

Se la formola fosse stata $\frac{adx}{\sqrt{ax - aa}}$, procedendo

nello stesso modo avremmo per integrale $z \times \frac{ax - aa}{ax - aa}$.

Sia $ax \sqrt[4]{a - x}$; posta $\sqrt[4]{a - x} = z$, e però $x = a - z^4$,

$dx = -4z^3 dz$, e fatte le sostituzioni, avrassi $-4xz^3 dz + 4z^7 dz$, ed integrando $-\frac{4xz^3}{5} + \frac{4z^7}{9}$, e restituendo in

luogo di z il valore dato per x , farà $-\frac{4a}{5} \times \frac{a - x}{a - x} + \frac{4}{9} \times \frac{a - x^4}{a - x^4}$.

Se della proposta formola, Se

Se la formola fosse stata $\frac{x dx}{\sqrt{a-x}}$, procedendo nello stesso modo avrebbesi per integrale

$$-\frac{4a}{3} \times \frac{1}{a-x} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{a-x}.$$

Sia $x dx \sqrt{a+x}$; posta $\sqrt{a+x} = z$, e però $x = zz - a$, $dx = 2z dz$, $xx = zz - a$, e fatte le sostituzioni, avremo $zz - a \times 2z dz$, cioè $2z^3 dz - 4az dz + 2aazz dz$, ed integrando, $\frac{2z^4}{4} - \frac{4az^2}{2} + \frac{2aaz^3}{3}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x , sarà finalmente $\frac{2}{7} \times \frac{1}{a+x} - \frac{4a}{5} \times \frac{1}{a+x} + \frac{2aa}{3} \times \frac{1}{a+x}$.
l'integrale cercato.

Se la formola fosse $\frac{x dx}{\sqrt{a+x}}$, sarebbe l'integrale

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{a+x} - \frac{4a}{3} \times \frac{1}{a+x} + \frac{2aa}{3} \times \frac{1}{a+x}.$$

Sia $x dx \sqrt{a+x^3}$, cioè $x dx \times \frac{1}{a+x^3}$: posta al solito $a+x^3 = z$, e però $x = z^{\frac{1}{3}} - a$, $dx = \frac{2}{3} z^{-\frac{2}{3}} dz$,

e fatte

e fatte le sostituzioni, sarà $z^{\frac{2}{3}} - a \times \frac{2z^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}$, cioè
 $\frac{2z^{\frac{4}{3}}}{\frac{2}{3}} - \frac{2az^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}$, ed integrando, $\frac{2z^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{2az^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}$,
 e restituendo in luogo di z il valore dato per x , sarà
 $\frac{2}{7} \times \frac{2}{a+x^2} - \frac{2a}{5} \times \frac{2}{a+x^2}$.

Se la formola fosse $\frac{x dx}{a+x^2}$, avremmo per inte-
 grale $2\sqrt{a+x^2} + \frac{2a}{\sqrt{a+x^2}}$.

29. Generalmente: sia $ax^t dx \times \frac{1}{a+x^{\frac{n}{m}}}$, e sieno
 gli esponenti t, m, n numeri intieri positivi; posta al so-
 lito $\frac{1}{a+x^{\frac{n}{m}}} = z$, e però $a+x = z^{\frac{n}{m}}$, $dx = \frac{n}{m} z^{\frac{n}{m}-1} dz$,

$x^t = z^{\frac{n}{m}t} - a$, e fatte le sostituzioni, la formola sarà
 $z^{\frac{n}{m}t} - a \times \frac{an}{m} z^{\frac{n}{m}-1} dz$, e fatta attualmente la potestà t ,

ciascun termine, come è chiaro, sarà algebricamente
 integrabile, ne' quali termini integrati restituito in luogo
 di z il valore dato per x , avremo l'integrale algebrico
 della proposta formola.

30. Se l'esponente m fosse negativo di modo, che la quantità sotto il segno passasse nel denominatore, nel qual caso l'esponente m viene ad essere positivo; cioè la formola fosse $\frac{ax^t dx}{a+x^{\frac{n}{m}}}$, fatte le stesse sostituzioni,

avremmo $z^{\frac{n}{m}} - a \times \frac{an}{m} z^{\frac{n}{m}-2} dz$, e fatta attualmente la potestà t , sarebbe pure ogni termine algebricamente integrabile, salvi que' casi, ne' quali s'insinuia la potestà $z^{-1} dz$, che obbliga a' logaritmi.

Ma se l'esponente t sarà negativo, non saranno algebricamente integrabili le due suddette formole, saranno bensì libere da' radicali, e ridotte alle quadrature del circolo, e dell'iperbola, come si vedrà a suo luogo.

31. Ma quand'anche la variabile sotto il segno sia elevata a qualunque potestà maggiore dell'unità, purchè la quantità fuori del segno sia la precisa differenziale, o una proporzionale qualunque alla differenziale della quantità sotto il segno, per mezzo della stessa, semplicissima sostituzione si avranno gl'integrali delle formole differenziali, i quali integrali saranno sempre algebrici, e però

Sia $xx dx \sqrt{xx+aa}$. Pongo $\sqrt{xx+aa} = z$, onde $xx+aa = zz$, $xx dx = z dz$, e fatte le sostituzioni, avremo

avremo $2zzdz$, ed integrando $\frac{2z^3}{3}$, e restituendo il va-

lore di z dato per x , farà $\frac{2}{3} \times \frac{1}{xx+aa}^{\frac{3}{2}}$.

Se la formola fosse $\frac{2x dx}{\sqrt{xx+aa}}$, avremmo per inte-

grale $2 \sqrt{xx+aa}$.

Sia $2adx - 4x dx \sqrt{ax - xx + bb}$, cioè $2 \times adx - 2x dx \sqrt{ax - xx + bb}$. Pongo $\sqrt{ax - xx + bb} = z$, e però $ax - xx + bb = zz$, ed $adx - 2x dx = 2z dz$, e fatte le sostituzioni, avremo $4z dz$, ed integrando $\frac{4z^2}{2}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x ,

farà $\frac{4}{2} \times \frac{1}{ax - xx + bb}^{\frac{3}{2}}$.

Se la formola fosse $\frac{2adx - 4x dx}{\sqrt{ax - xx + bb}}$, avremmo per integrale $4 \times \frac{1}{ax - xx + bb}^{\frac{3}{2}}$.

Sia $xx dx - \frac{2}{3} ax dx \sqrt[4]{x^3 - axx}$, cioè $\frac{3xx dx - 2ax dx}{3} \sqrt[4]{x^3 - axx}$. Pongo $\sqrt[4]{x^3 - axx} = z$, e però $z^4 = x^3 - axx$, e $3xx dx - 2ax dx = 4z^3 dz$, e

e 2

fatte

fatte le sostituzioni, avremo $\frac{4z^5 dz}{3}$, ed integrando, $\frac{4z^6}{15}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x , farà $\frac{4}{15} \times \frac{x^6 - ax^4}{x^3 - axx^4}$.

Se la formola fosse stata $\frac{3xxdx - 2axdx}{3\sqrt[4]{x^3 - axx}}$, avremmo per integrale $\frac{4}{9} \times \frac{x^{\frac{3}{2}} - axx^{\frac{1}{2}}}{x^3 - axx}$.

Sia $2xxdx \sqrt[3]{xx + aa^2}$, cioè $2xxdx \times \frac{x^{\frac{2}{3}}}{xx + aa^2}$; pongo $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{xx + aa^2} = z$, e però $xx + aa^2 = z^{\frac{3}{2}}$, e $2xxdx = \frac{3}{2} z^{\frac{3}{2}-1} dz$, e fatte le sostituzioni, avremo

$\frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$, ed integrando $\frac{3}{5} z^{\frac{5}{2}}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x , $\frac{3}{5} \times \frac{xx + aa^2 \sqrt[3]{xx + aa^2}}{xx + aa^2}$.

Se la formola fosse $\frac{2xxdx}{\sqrt[3]{xx + aa^2}}$, avremmo per integrale $3 \sqrt[3]{xx + aa^2}$.

Sia

Sia generalmente la formola $p x^{m-1} dx \times x^{\frac{n}{m} + a^{\frac{n}{m}}}$,
 in cui p , ed m possono anche essere numeri rotti;
 pongo $x^{\frac{n}{m} + a^{\frac{n}{m}}} = z$, e però $z^{\frac{n}{n}} = x^{\frac{n}{m} + a^{\frac{n}{m}}}$, ed
 $m x^{m-1} dx = u z^{\frac{n}{n}} dz$, e fatte le sostituzioni, avremo
 $\frac{pu}{mn} z^{\frac{n}{n}} dz$, ed integrando, $\frac{pu}{mn + n} \times z^{\frac{n}{n} + 1}$, e resti-
 tuendo in luogo di z il valore dato per x , avremo
 per integrale $\frac{pu}{mn + n} \times x^{\frac{n}{m} + a^{\frac{n}{m}}} \times x^{\frac{n}{m} + a^{\frac{n}{m}} \frac{n}{n}}$.

Se n fosse negativo, cioè se la formola fosse
 $\frac{p x^{m-1} dx}{x^{\frac{n}{m} + a^{\frac{n}{m}}}}$, in cui n è positivo, avremmo per inte-
 grale $\frac{pu}{mn - n} \times x^{\frac{n}{m} + a^{\frac{n}{m}}}$.

Quindi formeremo la regola generale, che l'integrale di tali formole sarà la quantità sotto al segno, accrescendo dell'unità l'esponente, e dividendola per esso esponente così accresciuto, o pure l'integrale sarà un proporzionale di questo, secondo la proporzione, che averà la quantità differenziale fuori del segno al differenziale preciso.

32. Ma più generalmente ancora: sia la formola
 $p x^{rm-1} dx \times \frac{n}{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$, supposto però r numero in-
 tiero, e positivo. Essa equivale a quest'altra

$p x^{rm-m} \times x^{m-1} dx \times \frac{n}{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$; pongo al solito
 $z = \frac{x^m + a^m}{x^m}^{\frac{n}{u}}$, e però $x^m + a^m = z^{\frac{u}{n}}$, ed
 $m x^{m-1} dx = \frac{u}{n} z^{\frac{u}{n}-1} dz$; e perchè $x^m = z^{\frac{u}{n}} - a^m$, fa-

rà pure $x^{rm-m} = z^{\frac{u}{n} - a^m}^{\frac{r-1}{r-1}}$. Fatte adunque le so-

stituzioni, avremo $p \times z^{\frac{u}{n} - a^m}^{\frac{r-1}{r-1}} \times \frac{u}{n} z^{\frac{u}{n}-1} dz$. Ma
 posto r numero intero, e positivo, sarà pure $r-1$
 intero, e positivo, adunque fatta attualmente la pote-
 stà $r-1$, ciascun termine sarà algebricamente inte-
 grabile, nel qual integrale restituito in luogo di z il
 valore dato per x , avremo l'integrale della proposta
 formola.

Se n fosse negativo, cioè se la formola fosse
 $p x^{rm-1} dx$, in cui n è positivo, fatte le sostituzioni,
 $x^m + a^m$

farebbe

farebbe $p \times z^{\frac{n}{m}} - a^m \times \frac{u}{\frac{m}{m}} z^{\frac{n}{m} - 2} dz$ parimente integrabile, e però ec.

Se in tutti questi casi la quantità sotto il vincolo in luogo di essere $x^m + a^m$ fosse $x^m - a^m$, o pure $a^m - x^m$, si proceda nello stesso modo, che ciò nulla turba l'operazione.

Con questo metodo troveremo per tanto, che sarà

$$\int ax^{m-1} dx \sqrt{e + fx^m} = \frac{2a}{1mf} \times \frac{e + fx^m}{2}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{m-1} dx}{\sqrt{e + fx^m}} = \frac{2a}{mf} \times \frac{e + fx^m}{2}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int ax^{3m-1} dx \sqrt{e + fx^m} = -\frac{4e + 6fx^m}{45mf} \times a \times \frac{e + fx^m}{2}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{3m-1} dx}{\sqrt{e + fx^m}} = -\frac{4e + 6fx^m}{15mf} \times a \times \frac{e + fx^m}{2}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int ax^{5m-1} dx \sqrt{e + fx^m} = a \times \frac{16ee - 24efx^m + 3offx^{2m}}{105f^3m} \times \frac{e + fx^m}{2}^{\frac{5}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{5m-1} dx}{\sqrt{e + fx^m}} = \frac{16ee - 8efx^m + 6ffx^{2m}}{15mf^3} \times a \times \frac{e + fx^m}{2}^{\frac{5}{2}},$$

e così

e così di mano in mano quanti altri si vuole :

33. Ancora nel caso, che la variabile fuori del segno sia nel denominatore, la formola farà algebricamente integrabile col mezzo di due sostituzioni, purchè l'esponente di essa variabile fuori del segno abbia una condi-

zione, cioè la formola sia $\frac{dx \times x^m + a^m}{x^{rm + \frac{m}{u} + 1}}$. Si faccia

$$x = \frac{ay}{y}, \quad dx = -\frac{aady}{yy}, \quad x^m = \frac{a^{2m}}{y^m}, \quad \frac{x^m + a^m}{x^{rm + \frac{m}{u} + 1}} = \frac{a^{2m} + a^m y^{\frac{m}{u}}}{y^{\frac{rm}{u} + 1}}$$

Fatte le sostituzioni, farà la formola

$$-\frac{aady \times \frac{a^{2m} + a^m y^{\frac{m}{u}}}{y^{\frac{rm}{u} + 1}}}{yy \times y^{\frac{rm}{u} + 1} \times a}$$

$$\text{cioè } \frac{a^{2m} + a^m y^{\frac{m}{u}}}{a^{\frac{2rm}{u} + \frac{rm}{u} + 1}} \times -y^{\frac{rm}{u} + 1} dy,$$

formola, che à le condizioni quì sopra ricercate, e che per mezzo della sostituzione notata (num. 32.) s'integrerà algebricamente.

Se

Se fosse proposta la formola $\frac{a^x dx}{x^2 \sqrt{ax + x^2}}$, cioè

$$\frac{a^x dx}{x^2 \sqrt{ax + x^2}}, \text{ avendo questa le condizioni ricercate,}$$

farà algebricamente integrabile, e ciò si osservi d'altra ancora.

34. Ma qui avvertasi, che nella formola generale la u può anche essere eguale all'unità, nel qual caso la potestà di $x^m + a^m$ sarà razionale, cioè intera.

Anche in questo caso, supposta la n quantità negativa, (giacchè quando è positiva non involge difficoltà alcuna) si può fare uso della stessa sostituzione, e del medesimo metodo, con cui troveransi gl'integrali delle formole, i quali integrali però non saranno sempre algebratici, anzi per lo più dipenderanno in parte dalla quadratura dell'iperbola, cioè dalla logaritmica.

Col noto metodo adunque troveremo, che

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{m-1} dx}{x^m + a^m} &= -\frac{1}{m} \times \frac{x^m + a^m}{x^m + a^m} - 1 \\ \int \frac{x^{m-1} dx}{x^m + a^m} &= \frac{1}{m} \frac{l(a^m + x^m) + a^m}{m \times \frac{a^m + x^m}{m}} \\ \int \frac{x^{m-1} dx}{x^m + a^m} &= \frac{a^m + x^m}{m} - \frac{2a^m}{m} \frac{l(a^m + x^m)}{m \times \frac{a^m + x^m}{m}} - \frac{a^{2m}}{m \times \frac{a^m + x^m}{m}} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{a^m + x^m} = \frac{-1}{2m \times a^m + x^m}^2$$

$$\int \frac{x^{2m-1} dx}{a^m + x^m} = \frac{-1}{m \times a^m + x^m} + \frac{a^m}{2m \times a^m + x^m}^2$$

$$\int \frac{x^{3m-1} dx}{a^m + x^m} = \frac{1}{m} \int \frac{1}{a^m + x^m} + \frac{2a^m}{m \times a^m + x^m} - \frac{a^{2m}}{2m \times a^m + x^m}^2$$

e quant'altri si vuole.

35. Ma è bene molto diversa la faccenda allora quando le proposte formole differenziali, che contengono radicali, non sono tali, che la quantità fuori del segno abbia quelle condizioni da me qui sopra accennate. Queste formole potranno sempre liberarsi dai radicali, purchè un solo ne contengano, il quale sia di radice quadrata, e la incognita sotto di esso non ecceda la seconda dimensione; ma per queste fa d'uopo di qualche riflessione nella scelta delle sostituzioni da farsi, acciò si liberino da' segni radicali; il che fatto, si passa alle integrazioni, o algebriche, o dipendenti dalle quadrature del circolo, e dell'iperbola nelle maniere spiegate, se alle date regole saranno sottoposte; se no, si rapporteranno ad altri canoni, che sono per dare in breve.

Se adunque la radicale della proposta formola fosse $\sqrt{ax \pm xx}$, o pure $\sqrt{xx \pm ax}$, essa radicale si pon-

$ga = \frac{xz}{b}$, intendendo per z una nuova variabile, e per

b una costante qualunque.

Se la radicale fosse $\sqrt{xx \pm aa}$, si ponga la radicale $= x + z$, ovvero, se si vuole, $= x - z$.

Se la radicale fosse $\sqrt{aa - xx}$, o sia $\sqrt{fp - xx}$ si ponga la radicale $= \sqrt{fp + \frac{xz}{b}}$, o pure $= \sqrt{fp - \frac{xz}{b}}$.

Da queste così fatte equazioni si ricavi il valore di x , e di dx , che si averanno dati per z , e le costanti; questi valori si sostituiscano nelle date formole, e si averanno libere dai segni radicali altre formole date per z , nelle sommatorie delle quali, se si potranno avere, restituito il valore di z dato per x , si averanno le sommatorie delle formole proposte.

36. Se la quantità avesse tre termini, cioè il quadrato della variabile col rettangolo di essa nella costante, e di più il termine tutto costante, allora o si levi il secondo termine nella solita maniera dell'algebra cartesiana, o pure, se il termine costante è positivo, come se fosse $\sqrt{xx + ax + aa}$, comunque sieno positivi, o negativi gl'altri, purchè non sia immaginaria la quantità, si faccia $\sqrt{xx + ax + aa} = a + \frac{xz}{b}$; e se il ter-

mine costante è negativo, come a dire $\sqrt{xx + ax - aa}$,
 si faccia $\sqrt{xx + ax - aa} = x + z$.

Da ciò si vede, che tutto l'artifizio consiste in
 paragonare la quantità radicale ad una tale quantità
 composta della data variabile, e di una nuova colle co-
 stanti, sicchè ne risulti un' equazione, da cui si possa
 avere il valore di x , e di dx libero da' segni radicali.

Sia proposta da sommarli la formola differenziale

$x^3 dx \sqrt{ax - xx}$. Pongo $\sqrt{ax - xx} = \frac{xz}{b}$, e però

$a - x = \frac{xzz}{bb}$, cioè $x = \frac{abb}{zz + bb}$, e $dx = -\frac{2abbzdz}{zz + bb}$

$x^3 = \frac{a^3 b^6}{zz + bb^3}$, e $\sqrt{ax - xx} = \frac{abz}{b \sqrt{zz + bb}}$. Fatte le so-

stituzioni nella proposta formola, sarà essa $-\frac{2a^3 b^6 z z dz}{zz + bb^6}$

formola bensì libera da' segni radicali, ma che però,
 ciò non ostante, non si fa coi dati metodi maneggiare
 rispetto alle sommazioni.

Sia $\frac{aadx}{x \sqrt{ax + xx}}$. Pongo $\sqrt{ax + xx} = \frac{xz}{b}$, e però fa-

rà $x = \frac{abb}{zz - bb}$, $dx = -\frac{2abbzdz}{zz - bb}$, $\sqrt{ax + xx} = \frac{abz}{b \sqrt{zz - bb}}$

Fatte -

Fatte le sostituzioni nella propolta formola, sarà essa.
 $-\frac{zadz}{b}$, ed integrando, $-\frac{zaz}{b}$, e restituendo in luogo
 di z il valore dato per x , sarà $\int \frac{adax}{x\sqrt{ax+xx}} = -\frac{za\sqrt{ax+xx}}{x}$.

Sia $\frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}}$. Pongo $\sqrt{ax+xx} = \frac{xz}{b}$, e fatte le
 necessarie sostituzioni, come qui sopra, la formola sarà
 $-\frac{zab^2dz}{zz-bb^2}$, cioè $-\frac{zab^2dz}{z+b^2} \times \frac{1}{z-b^2}$, ma questa già si fa ma-
 neggiare con la regola delle frazioni, ed avrà per som-
 matoria $\frac{abz}{zz-bb} + \frac{1}{2}a \int \frac{z-b}{z+b}$ nella logaritmica della
 sottangente eguale all'unità; e restituendo in luogo di
 z il valore dato per x , sarà $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}} = \sqrt{ax+xx} +$
 $\frac{a}{2} \int \frac{\sqrt{ax+xx}-x}{\sqrt{ax+xx}+x}$ nella logaritmica della stessa sot-
 tangente = 1.

Sia $\frac{xdx}{\sqrt{xx+ax-aa}}$. Pongo $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z$,
 e però sarà $x = \frac{zz+aa}{a-zz}$, $dx = \frac{zadz}{a-zz} - \frac{zzdz}{a-zz} + \frac{2aadz}{a-zz}$,
 e $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z = \frac{aa+az-zz}{a-zz}$. Fatte le so-

stitu-

stituzioni, farà la proposta formola $\frac{zz + aa \times 2dz}{a - 2z}$, cioè

$\frac{2zzdz + 2aadz}{a - 2z}$, ed integrando, il che per le date re-

gole si può fare, $\frac{5aa}{4 \times a - 2z} - \frac{a + 2z}{4} + \frac{a}{2} \log a - 2z$ nel-

la logaritmica della sottangente = 1, e restituendo in luogo di z il valore dato per x , farà finalmente

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{xx + ax - aa}} = \frac{5aa}{4 \times a + 2x - 2\sqrt{xx + ax - aa}} - \frac{a - 2x + 2\sqrt{xx + ax - aa} + \frac{2a}{4} \log a + 2x - 2\sqrt{xx + ax - aa}}{4}$$

nella logaritmica della stessa sottangente eguale all'unità.

37. Affatto superflua intorno ad alcune formole differenziali radicali farà la fatica di trasmutarle per mezzo dell'accennate sostituzioni in altre libere da' segni radicali, e così prepararle per le integrazioni, e ciò per tutte quelle, che di natura sua involgono quadratura, o rettificazione di circolo; perchè sebbene si convertiranno in altre esenti da' radicali, queste però ci porteranno allo stesso circolo. E però sia (Fig. 5.) il semicircolo GMD , AD raggio = a , $AB = x$, onde $BF = \sqrt{aa - xx}$, e fatta CH infinitamente prossima a.

BF ,

BF, sarà $BC = dx$, $EF = \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}}$. Adunque l'espres-

sione del rettangolo infinitesimo BCHE sarà $dx\sqrt{aa - xx}$,
e però $\int dx\sqrt{aa - xx} =$ allo spazio ABFM. Sarà pu-
re $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ l'espressione dell'archetto infinitesimo FH,

e però $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} =$ all' arco MF. E se l'archetto
FH si moltiplicherà per la metà del raggio, sarà
 $\frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}}$ espressione del settore infinitesimo AFH, e
però $\int \frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}} =$ al settore AFM.

Sia ora, nel medesimo circolo, $DC = x$, e $CB = dx$,
sarà $CH = \sqrt{2ax - xx}$, $EF = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Pertanto

$\int dx\sqrt{2ax - xx}$ sarà = allo spazio HCD. Così $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} =$

all' arco HD, e $\int \frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}} =$ al settore AHD. In-

queste adunque sarà superflua la fatica; imperciocchè
nel primo caso pongo $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xx}{b}$, e pe-

rò

$$\text{rò } x = \frac{2abz}{zz+bb}, dx = \frac{2ab^1 dz - 2abzzdz}{\frac{zz+bb}{2}}; \sqrt{aa-xx} =$$

$$\frac{a-xx}{b} = \frac{abb-azz}{zz+bb}. \text{ Fatte le sostituzioni, sarà } \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}} =$$

$$\frac{2abdz}{zz+bb}, \text{ formola di rettificazione di circolo, la di cui}$$

tangente = z , come già si è veduto al num. 26.

$$\text{Sarà pure } \frac{aadx}{2\sqrt{aa-xx}} = \frac{aabdz}{zz+bb}, \text{ formola, che invol-}$$

ve la stessa rettificazione.

$$\text{Istessamente sarà } dx\sqrt{aa-xx} = \frac{2aabd z \times bb - zz}{\frac{zz+bb}{2}},$$

formola, che sebbene non si fa per ora maneggiare, si vedrà però in appresso dipendere dallo stesso circolo.

Nel secondo caso pongo $\sqrt{2ax-xx} = \frac{xz}{b}$, e però

$$x = \frac{2abb}{zz+bb}, dx = -\frac{4abbzdz}{\frac{zz+bb}{2}}, \text{ e } \sqrt{2ax-xx} = \frac{xz}{b} = \frac{2abz}{zz+bb}.$$

Fatte le sostituzioni, sarà $\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}} = -\frac{2abd x}{zz+bb}$, rettifi-
cazione di circolo.

$$\text{Sarà pure } \frac{aadx}{2\sqrt{2ax-xx}} = -\frac{aabd z}{zz+bb}, \text{ rettificazione}$$

di circolo come sopra.

Istessa-

$$\text{Isteflamente farà } dx \sqrt{2ax - xx} = - \frac{8aab^1 z dz}{zz + bb^3},$$

che involve lo stesso circolo.

38. Se le nostre formole differenziali faranno composte di due quantità radicali, l'operazione sarà in questo caso raddoppiata, ma succederà egualmente bene, purchè nelle quantità radicali manchi, o sia tolto il secondo termine, e la formola sia moltiplicata per una potenza dispari dell'incognita; e ciò col porre una delle quantità radicali eguale ad una nuova variabile, e così la proposta formola sarà ridotta ad un'altra, che conterrà una sola radicale, e che per conseguenza si maneggerà nella solita maniera.

$$\text{Sia per esempio } x^1 dx \sqrt{aa + xx}. \text{ Pongo } \sqrt{aa + xx} = y,$$

$$\sqrt{bb + xx}$$

e però $xx = yy - aa$, $x dx = y dy$. Fatte le sostituzioni, sarà $yy dy \times \frac{1}{\sqrt{yy - aa + bb}}$, cioè $\frac{y^4 dy}{\sqrt{yy - aa + bb}} - \frac{aayy dy}{\sqrt{yy - aa + bb}}$; ciascheduna delle quali si fa maneggiare.

39. Per poco, che si rifletta a questa maniera di operare, è facile a conoscere, che in queste formole radicali non succederà di poterle generalmente liberare dal vincolo radicale, se non quando sia radice quadrata, e la incognita sotto il vincolo non ecceda la seconda dimensione. Dissi generalmente,

g

perchè

perchè in parecchi casi succede la faccenda, qualunque siasi il segno radicale, e qualunque la potestà dell'incongnita sotto il segno, e certamente in tutti i casi compresi dalle due seguenti formole, la prima delle quali

sarà $\frac{dy \times \sqrt{y^m + b^m}}{y^{tm+1}}$, in cui m, n, t sono numeri in-

tieri, e positivi, e possono anche essere zero, e ciò

s'ottiene facendo $\sqrt{y^m + b^m}^{\frac{1}{n}} = z$, e però $y^m = z^n - b^m$,
 $dy = nz^{n-1} dz$, onde fatte le sostituzioni, sarà

$\frac{nz^{n-1} dz \times z^{\pm 1}}{my^{tm+m}}$, cioè $\frac{nz^{n-1} dz \times z^{\pm 1}}{\frac{1}{t+1} \times m}$, ma

$y^{\frac{1}{t+1} \times m} = z^n - b^m$, e quando t sia numero
 intiero, sarà intiera la potestà $t+1$; adunque la pro-
 posta formola sarà libera da' radicali.

Se t fosse negativo, la formola farebbe il caso di
 sopra considerato al numero 32., che à integrale alge-
 braico.

Negl' altri casi l'integrale dipenderà dalle quadratu-
 re del circolo, e dell' iperbola, come si vedrà a suo
 luogo.

La seconda formola è $y^n dy \times \sqrt{y^m + b^m}^{\frac{1}{p}}$, la

quale,

quale, quando sia $\frac{n+1}{m}$ numero intiero, si potrà sempre liberare da' segni radicali, o in tutto, o almeno da' radicali di quantità complesse, il che basta. Si faccia

$$\text{per tanto } y^m + b^m \frac{z}{p} = z, \text{ e però sarà } y^m = z \frac{p}{z} - b^m,$$

$$y = z \frac{p}{z} - b^m \frac{1}{m}, \text{ } dy = \frac{p}{z} z^{\frac{p}{z}-1} dz \times z \frac{p}{z} - b^m \frac{1}{m}, \text{ ed}$$

$$y^n = z \frac{p}{z} - b^m \frac{n}{m}, \text{ e fatte le sostituzioni, avremo la}$$

$$\text{formola } \frac{p}{z} z^{\frac{p}{z}-1} dz \times z^{\frac{1}{m} + \frac{n}{m}-1} \times z \frac{p}{z} - b^m \frac{1}{m}, \text{ ma}$$

quando sia $\frac{n+1}{m}$ numero intiero, sarà sempre intiera la potenza $\frac{1+n}{m}-1$, adunque la formola non avrà mai

segni radicali di quantità complesse. E però quando sia $\frac{1+n}{m}-1$ numero intiero, e positivo, l'integrale al più dipenderà dalla quadratura dell'iperbola, o sia dalla logaritmica, e si potrà avere per le regole date; e quando sia $\frac{1+n}{m}-1$ numero intiero negativo, l'integrale dipenderà dalle quadrature del circolo, e dell'iperbola, e si

averà per le regole da darli a suo luogo.

40. Passando ora a quelle formole, che essendo

frazioni libere da' radicali, nel denominatore di esse (che suppongo composto di radici immaginarie, poichè in queste sole s'ha la difficoltà) la incognita sia elevata a qualunque potestà, dico: che ogni qual volta il denominatore sia riducibile in componenti reali, ne' quali la incognita non ecceda la seconda dimensione, si potrà sempre spezzare la formola in tante frazioni, quanti sono i suddetti componenti reali, ciascuna delle quali sarà integrabile, supposte le quadrature del circolo, e dell'iperbola, ed in conseguenza la proposta formola sarà sempre riducibile alle stesse quadrature. Per lo che fare: sia proposta la formola

$$\frac{aax}{xx+ax+bb} \times \frac{xx+cx+cb}{xx+cx+cb}$$
, si finga un'equazione, cioè, che sia

$$\frac{aax}{xx+ax+bb} \times \frac{xx+cx+cb}{xx+cx+cb} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+ax+bb} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx+cx+cb}$$

nella quale formola le majuscole A, B, C, D sono costanti arbitrarie da determinarsi nel progresso.

Così se fosse la formola

$$\frac{abdx}{xx+ax+bb} \times \frac{xx+ax+bb}{xx+ax+bb} \times \frac{xx+cx+cb}{xx+cx+cb}$$
, si faccia

$$\frac{abdx}{xx+ax+bb} \times \frac{xx+ax+bb}{xx+ax+bb} \times \frac{xx+cx+cb}{xx+cx+cb}$$

$$\frac{a dx}{xx + ax + bb} = \frac{A x dx + B dx}{xx + ax + bb} + \frac{C x dx + D dx + E dx}{xx + ax + bb}$$

se i componenti del denominatore fossero in maggior numero. Il che fatto, si riducano allo stesso denominatore i termini di queste equazioni, e finalmente con la trasposizione si riduca l'equazione al zero, indi col paragone de' primi termini al zero si ritroverà il valore dalla assunta A ; col paragone de' secondi, terzi, quarti ec. si troveranno i valori delle assunte B, C, D , ec. dati per le costanti della proposta formola, i quali valori sostituiti in luogo delle majuscole A, B, C, D ec. nella equazione, ci somministreranno tante frazioni, le quali equivagliano alla proposta, ed in fatti, ridotte al comune denominatore, appunto restituiranno la formola da prima proposta.

Prendiamone un' esempio. Sia proposta da integrarsi la formola

$$\frac{a dx}{xx + 2ax - aa} = \frac{A x dx + B dx}{xx + 2ax - aa} + \frac{C x dx + D dx}{xx + aa}$$

Fingo adunque, che sia

$$\frac{a dx}{xx + 2ax - aa} = \frac{A x dx + B dx}{xx + 2ax - aa} + \frac{C x dx + D dx}{xx + aa}$$

Riduco adunque al comune denominatore l'equazione, indi col trasportare il termine $a dx$, la riduco

al

al zero, e si trova essere

$$Ax'dx + Bxxdx + Aaaxdx + Baadx \\ Cx'dx + Dxxdx + 2Daxdx - Daadx = 0. \\ + 2Caxdx - Caaxdx - aadx$$

Per tanto dal paragone de' primi termini al zero si averà $A + C = 0$, cioè $A = -C$; de' secondi $B + D + 2Ca = 0$, cioè ponendo $-A$ in luogo di C , $B = 2Aa - D$; de' terzi $Aaa + 2Da - Caa = 0$, cioè $C = A + \frac{2D}{a}$; degl' ultimi $Baa - Daa - aa = 0$,

cioè ponendo in luogo di B il valore dato per D , e per A , farà $D = Aa - \frac{1}{2}$; adunque farà $C = 3Aa - \frac{1}{2}$, ma $C = -A$, e però $A = \frac{1}{4a}$, $D = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$,

$C = -\frac{1}{4a}$, onde avremo finalmente

$$\frac{aadx}{xx + 2ax - aa} = \frac{xdx + 3adx}{4a \times xx + 2ax - aa} - \frac{xdx - adx}{4a \times xx + aa}$$

Ma l'omogeneo di comparazione, facendo sparire ove fa d'uopo il secondo termine dal denominatore, è integrabile con le quadrature del circolo, e dell'iperbola, il di cui integrale con le date regole si troverà

$$\text{essere } \frac{1}{4a} \sqrt{xx + 2ax - aa} + \frac{1}{2\sqrt{2aa}} \sqrt{x + a} - \sqrt{2aa} -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2aa}} \sqrt{x + a} + \sqrt{2aa} - \frac{1}{4a} \sqrt{xx + aa}, \text{ sottraendo}$$

in

in oltre da questi logaritmi il quarto proporzionale di $4aa$, dell'unità, e dell'arco di circolo, che abbia il raggio $= a$, e la tangente $= x$. Adunque l'integrale di questa formola non dipende da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola.

41. Se in oltre la frazione sarà moltiplicata in una qualunque potestà dell'incognita, la quale potestà sia positiva, come se fosse l'equazione

$$\frac{aax^n dx}{xx + 2ax - aa \times xx + aa}, \text{ si faccia}$$

$$\frac{aax^n dx}{xx + 2ax - aa \times xx + aa} = \frac{Ax^{n+1} dx + Bx^n dx}{xx + 2ax - aa}$$

$$\frac{Cx^{n+1} dx + Dx^n dx}{xx + aa}, \text{ e si trovino nello stesso modo,}$$

come sopra, i valori delle majuscole A, B, C ec., o pure si operi, come se la detta potestà non vi fosse, e le risultanti frazioni si moltiplichino per la stessa potestà, ed avremo parimenti altrettante frazioni, che non esiggeranno quadrature superiori a quelle del circolo, e dell'iperbola, e che si sapranno maneggiare colle date regole.

42. E se la potestà della variabile sarà negativa, cioè, se sarà positiva nel denominatore, per questa potestà si moltiplichino tutti i denominatori delle frazioni risultanti, e faranno della seguente forma.

Sia

Sia per esempio $x^{-n} dx$

risolta questa, come se non vi fosse la x^{-n} , ed indi moltiplicando ogni termine per x^{-n} , sarà

$$\frac{x^{-n} dx}{xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c} = \frac{A x dx + B dx}{xx + ax + bb \times x^n} + \frac{C x dx + D dx}{xx \pm aa \times x^n} + \frac{H dx}{x \pm c \times x^n},$$

intendendo già per le

majuscole que' tali valori ritrovati con la data maniera, che rendano la somma di queste frazioni eguale alla proposta.

L'ultima frazione non avrà bisogno d'altro artificio, perchè si saprà integrare colle date regole.

Quanto alla prima: sia per chiarezza d'esempio $A = aa$, $B = abb$, onde si esprima così

$$\frac{aax dx + abbdx}{xx + ax + bb \times x^n}, \text{ si faccia}$$

$$\frac{aax dx + abbdx}{xx + ax + bb \times x^n} = \frac{Mx dx + Ndx}{xx + ax + bb}$$

$$\frac{Px^{n-1} dx + Hx^{n-2} dx + Ex^{n-3} dx \text{ ec.}}{x^n} \text{ così profe-}$$

guendo fino, che l'ultimo termine sia costante, cioè zero la potenza dell'incognita x . Ridotte queste frazioni al comune denominatore, e ridotta al zero l'equazione,

zione, averemo, come s'è fatto di sopra, i valori delle majuscole. Lo stesso si faccia rispetto all'altra frazione $\frac{Cxdx + Ddx}{xx \pm aa \times x^n}$, e troverassi finalmente l'integrale della proposta formola.

E però generalmente, supposte le sole quadrature del circolo, e dell'iperbola, si potrà sempre avere l'integrale della formola

$$\frac{x^{\pm n} dx}{xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c \text{ ec.}}$$

comunque sieno i componenti reali del denominatore, purchè in essi la incognita non ecceda la seconda dimensione.

43. Ma se il denominatore della proposta formola, o frazione non sarà risoluto ne' suoi componenti reali, ne' quali l'incognita non ecceda la seconda dimensione, nè tale si potrà ridurre colle regole ordinarie dell'algebra, si potrà sempre però con un poco d'artifizio ridurlo tale, ogni qual volta egli sia una formola convertibile, o pure il prodotto di più formole convertibili. Formole convertibili chiamerò quelle, nelle quali la variabile abbia il massimo numero delle sue dimensioni pari affermativo, quale sia per esempio n , l'ultimo termine sia a^n , indi i termini equidistanti da quello di mezzo abbiano il medesimo coefficiente, ed affetto dal medesimo segno, supplite le dimensioni colla costante,

da cui è formato l'ultimo termine; tale sarebbe la formola $x^6 + a^6$, o pure l'altra $x^6 + bx^5 + ccxx + aabx + a^6$, o l'altra $x^6 - bx^5 + b^2x^4 - a^2bx + a^6$. Che se fosse $x^6 + bx^5 + a^2x + a^6b$, si scriva essa nell'equivalente formola $x^6 + a^2 \times x + b$, in cui $x^6 + a^2$ è formola convertibile, ed $x + b$ è lineare, che non apporta difficoltà alcuna. Lo stesso s'intenda d'infinite altre.

44. Abbiafi ora adunque $x^m - a^m$ da risolvere in componenti reali, ne' quali x non ecceda la seconda dimensione, e che non abbia esponenti rotti, e sia in primo luogo m numero intero affermativo pari. In tal caso sarà egli divisibile in $x^{\frac{1}{2}m} + a^{\frac{1}{2}m}$, ed $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$ senza frazione negl'esponenti, per essere m numero intero pari. Il primo divisore si risolverà per le regole, che si daranno fra poco per il binomio $x^m + a^m$. Il secondo $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$, se $\frac{1}{2}m$ sarà numero pari, si risolverà nuovamente in $x^{\frac{1}{4}m} + a^{\frac{1}{4}m}$, ed $x^{\frac{1}{4}m} - a^{\frac{1}{4}m}$ senza frazione negl'esponenti. Ma se $\frac{1}{2}m$ sarà numero dispari, si risolverà per le regole da prescriversi per il binomio $x^m - a^m$ quando m è numero dispari.

Sia in secondo luogo $x^m + a^m$, e sia m numero intero affermativo pari, nel qual caso la formola è

con-

convertibile. Si supponga $x^m + a^m = 0$, indi si formi una formola convertibile, in cui il massimo esponente di x sia $m-2$, e che abbia tutti i termini, e l'ultimo termine sia a^{m-2} , ed il coefficiente del secondo termine sia per esempio b , quello del terzo sia cc , quello del quarto d ec., e questa si paragoni al zero, onde ne risulti un'equazione. Tale equazione si moltiplichi per $xx + fx + aa$; il prodotto sarà un'altra equazione convertibile, in cui l'esponente massimo di x sarà $= m$. Questa equazione si paragoni termine per termine coll'equazione fittizia $x^m + a^m = 0$, in cui i coefficienti de' termini intermedj sono $= 0$, e cavando dal paragone de' secondi termini il valore dell'assunta b , dal paragone de' terzi il valore dell'assunta cc , da quello de' quarti il valore dell'assunta d , e così fino al termine di mezzo, compreso anche questo (giacchè di là dal medio l'altre equazioni tornerebbero le medesime, per essere le equazioni, che si paragonano, convertibili) da quest'ultimo si caverà il valore di f espresso con una equazione, che avrà numero $\frac{m}{2}$ dimensioni,

di cui tutte le radici faranno reali, e ci daranno i valori di f , che sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$ daranno altrettanti trinomj, il prodotto de' quali restituirà il proposto binomio $x^m + a^m$.

Sia $x^4 + a^4$. Prendo un'equazione convertibile del

secondo grado $xx + bx + aa = 0$, la multiplico per $xx + fx + aa = 0$, e ne ricavo un'altra equazione convertibile $x^4 + bx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 = 0$. Paragono questa con la fittizia $x^4 + a^4 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 0$, cioè $b = -f$; dal paragone de' termini di mezzo trovo $2aa + bf = 0$, e sostituito in luogo di b il suo valore $-f$, trovo $ff - 2aa = 0$, onde $f = \pm \sqrt{2aa}$.

Sia $x^6 + a^6$. Prendo l'equazione convertibile, $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$, la multiplico per $xx + fx + aa = 0$, e ne risulta l'equazione

$$\begin{aligned} x^6 + bx^5 + ccx^4 + 2aabbx^3 + a^4xx + a^4fx + a^6 \\ + fx^5 + bfx^4 + fccx^3 + aabfxx + a^4bx \\ + aax^4 + aaccxx \end{aligned} = 0.$$

Paragono questa con la fittizia $x^6 + a^6 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 0$; dal paragone de' terzi trovo $cc + bf + aa = 0$, cioè sostituendo il valore di b , $cc - ff + aa = 0$; dal paragone de' medj trovo $2aab + fcc = 0$, cioè sostituendo in luogo di b , e di cc i suoi valori, $f^3 - 3aaf = 0$.

Facendo attualmente queste operazioni si troverà adunque, che

Se $m = 4$, sarà $ff - 2aa = 0$.

Se $m = 6$, sarà $f^3 - 3aaf = 0$.

Se $m = 8$, sarà $f^4 - 4aaff + 2a^4 = 0$.

Se $m = 10$, sarà $f^3 - 5af^2 + 5a^2f = 0$.

Se $m = 12$, sarà $f^3 - 6af^2 + 9a^2ff - 2a^3 = 0$.

Se $m = 14$, sarà $f^3 - 7af^2 + 14a^2f - 7a^3 = 0$,

e così si può procedere per gli altri valori pari di m .

In luogo di $x^4 + a^4$, sia $x^4 + 2bx^3 + 2aabbx + a^4$, formola pure convertibile. Moltiplico l'equazione convertibile $xx + bx + aa = 0$ per $xx + fx + aa = 0$, ed avrò, come sopra, $x^4 + bx^3 + 2aaxx + aafx + a^4$
 $+ fx^3 + bfx^2 + aabx = 0$.

Paragono questa con l'equazione fittizia $x^4 + 2bx^3 + 2aabbx + a^4 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 2b$, cioè $b = 2b - f$; dal paragone de' medj trovo $2aa + bf = 0$, e sostituendo in luogo di b il suo valore, si à $2aa + 2bf - ff = 0$, cioè $ff - 2bf - 2aa = 0$.

Sia $x^6 + a^1x^3 + a^6$. Prendo l'equazione convertibile $x^4 + bx^3 + ccxx + aabbx + a^4 = 0$; la moltiplico per $xx + fx + aa$, ed avrò

$$\begin{aligned} x^6 + bx^5 + ccx^4 + 2aabbx^3 + a^4xx + a^4fx + a^4aa \\ + fx^3 + bfx^2 + ccfx^2 + aabfxx + a^4bx \\ + aax^4 + aaccxx = 0. \end{aligned}$$

Paragonata questa con l'equazione $x^6 + a^1x^3 + a^6 = 0$, trovo dal paragone de' secondi termini $b + f = 0$; dal paragone de' terzi trovo $cc + bf + aa = 0$, e posto in luogo di b il suo valore, sarà $cc - ff + aa = 0$; dal paragone de' medj trovo $2aab + ccf = a^1$, e posti in luogo

luogo di b , e di cc i suoi valori, sarà $f^3 - 3aaf - a^3 = 0$, e così di quant' altri si vuole.

Abbiassi adunque $x^3 + 2bx^2 + 2aabbx + a^3$ da risolvere in componenti reali, ne quali x non abbia esponenti rotti, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di f , è adunque $ff - 2bf = 2aa$, dalla quale si ricavano i valori di f tutti reali, cioè $f = b + \sqrt{2aa + bb}$, $f = b - \sqrt{2aa + bb}$. Sostituito pertanto ciascuno di questi valori in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, troveremo, che $x^3 + 2bx^2 + 2aabbx + a^3$ è il prodotto de' due componenti reali $xx + bx + x\sqrt{2aa + bb} + aa$; $xx + bx - x\sqrt{2aa + bb} + aa$. Così se sia $x^6 + aax^3 + a^3xx + a^6 = 0$. Essendo l'equazione, che dà i valori di f , $f^3 - 3aaf = 0$, dalla quale si hanno i valori di f tutti reali, cioè $f = 0$, $f = \sqrt{2aa}$, $f = -\sqrt{2aa}$, sarà $x^6 + aax^3 + a^3xx + a^6$ il prodotto de' tre efficienti reali $xx + aa$, $xx + x\sqrt{2aa} + aa$, $xx - x\sqrt{2aa} + aa$.

Abbiassi $x^{10} + a^{10}$. L'equazione, che deve dare i valori di f , è $f^5 - 5aaf^3 + 5a^4f = 0$, dalla quale si ricavano i valori di f tutti reali, cioè $f = 0$, $f = a\sqrt[5]{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $f = -a\sqrt[5]{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $f = a\sqrt[5]{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, $f = -a\sqrt[5]{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Sosti-

Sostituito per tanto ogn'uno di questi valori in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, si troverà, che $x^{10} + a^{10}$ è il prodotto de' cinque efficienti reali $xx + aa$,

$$xx + ax \sqrt[2]{5 + \sqrt[2]{5 + aa}}, \quad xx - ax \sqrt[2]{5 + \sqrt[2]{5 + aa}},$$

$$xx + ax \sqrt[2]{5 - \sqrt[2]{5 + aa}}, \quad xx - ax \sqrt[2]{5 - \sqrt[2]{5 + aa}};$$

onde si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia dx moltiplicato in qualunque costante, ed il denominatore di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola, e potrássi avere con le date regole.

45. Sia poi $x^m \pm a^m$ da risolvere, come sopra, e sia m numero intero affermativo, ma dispari.

La formola si divida per $x \pm a$, ed il quoziente, (che nel primo caso sarà $x^{m-1} - ax^{m-2} + aax^{m-3} - a^3x^{m-4}$ ec. fino all'ultimo termine, che sarà $+a^{m-1}$; e nel secondo caso sarà $x^{m-1} + ax^{m-2} + aax^{m-3} + a^3x^{m-4}$ ec. fino all'ultimo termine, che sarà $+a^{m-1}$) si supponga $= 0$, e questa finta equazione, che è convertibile, si paragoni termine per termine col prodotto di una equazione convertibile, in cui il numero delle dimensioni dell'incognita x sia $m-3$, nel trinomio $xx + fx + aa$, e dal paragone de' secondi termini si ca-

verà

verà il valore dell'assunta, per esempio b , da quello de' terzi il valore di cc , da quello de' quarti il valore di d ; e finalmente dal paragone de' termini di mezzo si caveranno i valori di f espressi con una equazione di numero $\frac{m-1}{2}$ dimensioni, della quale tutte le radici

faranno reali, e determineranno i valori di f tutti reali, che sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$, verranno a somministrarci altrettanti trinomi, che insieme moltiplicati, e moltiplicati per $x \pm a$ restituiranno la proposta formola $x^m \pm a^m$.

Con questo metodo si trovano le infraferitte equazioni, che servono per la risoluzione del binomio $x^m + a^m$ quando m è numero intero affirmativo dispari.

Se $m = 3$, sarà $f + a = 0$.

Se $m = 5$, sarà $ff + af - aa = 0$.

Se $m = 7$, sarà $f^2 + aff - 2aaf - a^3 = 0$.

Se $m = 9$, sarà $f^3 + af^2 - 3aaff - 2a^2f + a^3 = 0$.

Se $m = 11$, sarà $f^4 + af^3 - 4aaf^2 - 3a^2ff + 3a^2f + a^4 = 0$.

Se $m = 13$, sarà $f^5 + af^4 - 5aaf^3 - 4a^2f^2 + 6a^2ff + 3a^2f - a^5 = 0$.

E così si può procedere per gli altri valori dispari di m .

Se la formola proposta fosse stata $x^m - a^m$, essendo m numero intero affirmativo dispari, fatta, come si è detto, la divisione per $x - a$, le medesime equazio-

ni avrebbero luogo, mutati i segni nel secondo, quarto, sesto termine, ed in tutti gl'altri posti ne' luoghi pari.

46. Se in luogo di $x^m \pm a^m$, posto m numero intero affermativo dispari, la formola fosse qualunque, altra, ma tale, che divisa per $x \pm$ una costante, ciò che ne risulta fosse una formola convertibile, come sarebbe $x^4 + bx^3 - aax^2 - aabxx + a^2x + a^2b$, la quale divisa per $x + b$ dà $x^3 - aaxx + a^2$, trattata quest'ultima al solito, e trovati i valori di f , e sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$, avremo altrettanti trinomi, che insieme moltiplicati, e moltiplicati per $x + b$, restituiranno la proposta formola.

Debba, per esempio, risolversi $x^4 + a^4$ in efficienti reali, ne quali x non abbia esponenti rotti, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di f (secondo le cose dette) sarà $ff + af - aa = 0$, dalla quale cavati essi valori di f , che sono $f = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$, e sostituiti in luogo di f nel

trinomio $xx + fx + aa$, avremo due trinomi reali $xx - \frac{ax + ax\sqrt{5}}{2} + aa$, ed $xx - \frac{ax - ax\sqrt{5}}{2} + aa$, il prodotto de' quali con $x + a$ restituisce la formola proposta $x^4 + a^4$.

Debba dividerli in efficienti reali la formola

la $x^5 + bx^4 - aax^3 - aabxx + a^2x + a^2b$, che divisa per $x + b$ ci dà $x^4 - aaxx + a^2$.

L'equazione di f per questa sarà $ff = 3aa$, ed i valori di f faranno $f = \pm \sqrt{3aa}$. Sostituiti questi in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, avremo due trinomi reali $xx + x\sqrt{3aa} + aa$, $xx - x\sqrt{3aa} + aa$, il prodotto de' quali con $x + b$ restituisce la proposta formola.

47. Da ciò si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia dx in qualunque costante, ed il denominatore sia di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola, e potrássí avere con le date regole.

48. Ma perchè nelle dimensioni più alte il valore di f dalle equazioni di sopra riferite non può coll'attuale separazione ricavarli, in questi casi basterà rivolgersi alla costruzione geometrica delle medesime equazioni. Così per ritrovare i componenti di $x^7 + a^7$, ed indi l'integrale della formola $\frac{dx}{x^7 + a^7}$, diviso il deno-

minatore per $x + a$, il quoziente sarà $x^6 - ax^5 + aax^4 - a^2x^3 + a^2xx - a^3x + a^6$. I valori di f per risolvere questa formola sono somministrati dall'equazione $f^3 + aff - 2aaf - a^3 = 0$. Ritrovati per tanto coi me-

todi

todi soliti dell'algebra, per mezzo dell'intersecazione, di due curve, o in altro modo i valori veri, e falsi di f , che saranno tutti reali, per esempio, uno A , l'altro $-B$, l'altro $-C$, la quantità $x^2 + a^2$ sarà il prodotto di $x + a$ in $xx + Ax + aa$ in $xx - Bx + aa$ in $xx - Cx + aa$, e le quantità A, B, C saranno reali, e date; onde si potrà procedere alla integrazione della formola $\frac{dx}{x^2 + a^2}$ per le sole quadrature del circolo, e dell'iperbola.

49. Col medesimo artificio, con cui si trovano le equazioni per risolvere il binomio $x^m \pm a^m$, si possono ritrovare per risolvere il trinomio $x^{2m} \pm 2ax^m + aa$, essendo $2m$ numero intero affermativo pari; anzi generalmente ogni qual volta si proponga da risolvere, una formola, che sia convertibile, o il prodotto di convertibili in lineari, e che non abbia frazioni negl'espONENTI, sempre potrà ridursi col metodo di sopra esposto.

Il caso del prodotto di formola convertibile in una lineare l'abbiamo quando m è dispari, ed altrove. Esempio dell'altre sia $x^3 + b^3x - a^3x - a^3b^3$, cioè $x^3 + b^3 \times x - a^3 \times x - a^3 \times b^3$, o sia $x^3 + b^3 \times xx + aa \times xx - aa$. Risolto per tanto ne' suoi efficienti reali di due dimensioni il divisore $x^2 + b^2$, che sieno per esem-

pio $xx + Ax + bb$, $xx + Bx + bb$, sarà

$$x^4 + b^4 \times x^4 - a^4 = xx + Ax + bb \times xx + Bx + bb \times xx + aa \times xx - aa :$$

E se fosse stato $x^4 + b^4 \times x^4 + a^4$, risoluto in oltre $x^4 + a^4$

in $xx + Cx + aa$, ed $xx + Dx + aa$, sarebbe $x^4 + b^4 \times x^4 + a^4 =$

$$xx + Ax + bb \times xx + Bx + bb \times xx + Cx + aa \times xx + Dx + aa.$$

50. Per avere l'integrale della formola $\frac{mx^m dx}{x^m \pm a^m}$,

in cui m esprime un qualunque numero intero affermativo, si chiamino A, B, C , ec. i valori di f coi loro segni, che servono per la risoluzione del denominatore $x^m \pm a^m$, e si avverta, che di questi valori uno può alle volte essere $= 0$, il che seguirà qualunque volta, essendovi $x^m + a^m$ nella detta formola, sia m un numero della serie 2, 6, 10, 14, 18 ec., e qualunque volta, essendovi $x^m - a^m$ nella data formola, sia m un numero della serie 4, 8, 12, 16 ec.; ciò posto, l'integrale cercato sarà $\pm \frac{A}{a} \int \sqrt{xx + Ax + aa} \pm$

$$\frac{B}{a} \int \sqrt{xx + Bx + aa} \pm \frac{C}{a} \int \sqrt{xx + Cx + aa} \text{ ec. , presi}$$

tali logaritmi nella logaritmica, di cui la sottangente sia $= a$, aggiungendo, o sottraendo da questo complesso di termini logaritmici (secondo che il segno del termine a^m nel denominatore farà quello del più, o quello del meno) il doppio della somma di tanti archi di cir-

colo,

colo, quanti sono i valori A, B, C ec., de' quali archi

i raggi sieno per ordine $\sqrt{aa - \frac{1}{4}AA}, \sqrt{aa - \frac{1}{4}BB},$

$\sqrt{aa - \frac{1}{4}CC}$ ec., le tangenti sieno col medesimo ordine

$x + \frac{1}{2}A, x + \frac{1}{2}B, x + \frac{1}{2}C$ ec. Tale sarà l'integrale,

della formola $\frac{ma^m dx}{x^m + a^m}$, se m farà numero pari affermati-

vo; ma se nella medesima formola m farà numero dis-

pari affermativo, converrà aggiungere al tutto il loga-

ritmo di $x + a$, perchè il denominatore à anche la ra-

dice reale $x + a$. E se la formola sarà $\frac{ma^m dx}{x^m - a^m}$, essen-

do m numero dispari affermativo, converrà in luogo del

logaritmo di $x + a$, aggiungere quello di $x - a$. E se

finalmente, essendo la formola $\frac{ma^m dx}{x^m - a^m}$, sarà m nu-

mero pari affermativo, converrà aggiungere il loga-

ritmo di $x - a$, e sottrarre quello di $x + a$, prendendo

sempre anche questi logaritmi nella logaritmica della

sottangente $= a$.

51. Ma se nella proposta formola $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ il

numero m fosse intero negativo, cioè se fosse $\frac{dx}{x^{-m} \pm a^{-m}}$,

essa

essa si esprima così $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$, la quale ridotta al co-

mune denominatore equivale a questa $\frac{a^m x^m dx}{a^m \pm x^m}$, e di-

videndo il numeratore per lo denominatore, acciò la massima potestà dell'incognita sia minore in quello, che in questo, si averà finalmente $\pm a^m dx \pm \frac{a^{2m} dx}{x^m \pm a^m}$,

in cui m sarà numero positivo, ed averanno luogo le cose dette di sopra anche quando nella formola $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ sia m numero negativo intero.

52. Se in oltre la frazione $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ s'intenderà moltiplicata per x^n , essendo n intero affermativo, o negativo, risoluto il denominatore ne' suoi efficienti reali, ne' quali x non ecceda la seconda dimensione, sarà essa il caso da me sopra considerato ai num. 41., e 42., e però riducibile alle quadrature del circolo, e dell' iperbola.

53. Ma quando n sia negativo, si potrà più spedatamente ridurre così. Sia in primo luogo n minore di m : la formola $\frac{dx}{x^m + a^m} \times x^n$ si esprima coll'equi-

valen-

valente $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{x^{m-n} dx}{a^m \times x^m + a^m} = \frac{dx}{x^m - a^m \times x^n}$ con

la $\frac{-dx}{a^m x^n} + \frac{x^{m-n} dx}{a^m \times x^m - a^m}$. Sia in secondo luogo

n maggiore di m , la formola $\frac{dx}{x^m + a^m \times x^n}$ si esprima

con l'equivalente $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{dx}{a^{2m} x^{n-m}} + \frac{dx}{a^{3m} x^{n-2m}} -$

$\frac{dx}{a^{4m} x^{n-3m}} + \dots$ ec. fino a quel termine, in cui l'esponen-

te di x sia prossimamente maggiore di m , $\pm$ (secon-

do, che porterà l'alternativa de' segni) $\frac{dx}{x^m + a^m \times a^r x^t}$,

dove r è lo stesso esponente della quantità a nel termine antecedente, e la t è il residuo della divisione fatta del numero n per lo numero m quante volte si può.

E se fosse $\frac{dx}{x^m - a^m \times x^n}$, supposto pure n maggio-

re di m , tutti i termini della serie dovranno essere affetti dal segno negativo, ed il termine fuori della serie,

cioè il termine $\frac{dx}{x^m - a^m \times a^r x^t}$ dovrà avere sempre

prefisso il segno affermativo. Data adunque la formola

la $\frac{dx}{x^1 + a^1 \times x^1}$, farà ella $= \frac{dx}{a^1 x^1} - \frac{dx}{x^1 + a^1 \times a^1 x x}$,
 ma sappiamo, che $-\frac{dx}{x^1 + a^1 \times a^1 x x} = -\frac{dx}{a^1 x x} + \frac{x dx}{a^1 \times x^1 + a^1}$,
 adunque farà $\frac{dx}{x^1 + a^1 \times x^1} = \frac{dx}{a^1 x^1} - \frac{dx}{a^1 x x} + \frac{x dx}{a^1 \times x^1 + a^1}$,
 quantità tutte, che si fanno maneggiare con le date
 regole.

54. Ma se m sarà numero rotto affermativo, o
 negativo, chiamisi r il numeratore della frazione, che
 è eguale ad m , ridotta che questa sia ai termini sem-
 plicissimi, e p il denominatore della medesima; talchè
 la formola data sia espressa per $\frac{dx}{x^p \pm a^p}$; pongasi

$x = y^p$, ed $a = b^p$, e la formola si convertirà in
 $\frac{p y^{p-1} dy}{y^p \pm b^p}$, che non à esponenti rotti, onde si può ri-
 solvere per le date regole.

Sia adunque, per esempio, la formola $\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \pm a^{\frac{3}{2}}}$;
 pongo $x = y y$, $a = b b$, farà $dx = 2y dy$, e fatte le so-
 stituzioni, la formola farà mutata in $\frac{2y dy}{y^3 \pm b^3}$, che non
 à esponenti rotti.

55. Se poi fosse data la formola $\frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$, in cui m , ed n fossero numeri rotti, chiamando r il numeratore della frazione n , e p il denominatore di quella, e così chiamando t il numeratore della frazione m , e q il denominatore della medesima (intendendo, che tali frazioni sieno ridotte a' termini semplicissimi) la formola sarà $\frac{x^{\frac{r}{p}} dx}{x^{\frac{t}{q}} \pm a^{\frac{t}{q}}}$, in cui r, p, q, t saranno nu-

meri intieri positivi, o negativi.

Pongasi ora $x = y^{pq}$, ed $a = b^{pq}$, la formola si convertirà in $\frac{pqy^{p-1} dy}{y^{t^2} \pm b^{t^2}}$, che non à frazioni negli es-

ponenti. Sia per esempio la formola $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{x^{\frac{4}{5}} \pm a^{\frac{4}{5}}}$; pon-

go $x = y^{10}$, $a = b^{10}$, sarà $dx = 10y^9 dy$, $x^{\frac{3}{2}} = y^{15}$, $x^{\frac{4}{5}} = y^8$, e fatte le sostituzioni, sarà mutata la formola in $\frac{10y^9 dy}{y^8 \pm b^8}$, che non à esponenti rotti.

56. Finalmente se sarà $\frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$, essendo n, m ,

ed u numeri interi positivi, si potrà sempre averne l'integrale, supposte le sole quadrature del circolo, e dell'iperbola, e l'integrale sarà composto di quantità algebriche, e di una quantità sommatoria, il che si farà nel seguente modo.

Si supponga la formola $\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m} =$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.}}{x^m \pm a^m}^{u-1}$$

fino al termine costante, cioè fino a quello in cui l'esponente di x sia zero, e sia questo K , indi si aggiunga

$$A \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}, \text{ cioè si faccia } \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m} =$$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.} + K}{x^m \pm a^m}^{u-1} + A \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}.$$

Si differenzj l'equazione, e si riduca al zero, e si ordinino i termini; dal paragone de' primi al zero troverassi il valore dell'assunta B ; dal paragone de' secondi al zero troverassi il valore dell'assunta C ; e così di mano in mano il valore dell'altre, i quali valori sostituiti in luogo delle majuscole, comechè la somma-

toria

toria $\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$ dipende dalle sole quadrature del circolo, e dell'iperbola, e gl'altri termini nell'omogeneo di comparazione sono algebratici, così la proposta formola non esigerà quadrature superiori.

57. Alle volte potrà occorrere, che alcuno de' coefficienti B, C, D ec. si trovi arbitrario, ma solo allora quando sia n maggiore di $m-1$. E si noti pure, che ogni qual volta sia $m=n+1$, il coefficiente A si troverà eguale al zero, ed in conseguenza algebratico l'integrale della proposta formola.

58. Ma se nella proposta formola differenziale l'esponente n fosse intero negativo, di modo, che essa fosse $\frac{dx}{x^n \times x^m \pm a^m}$, in cui ora è positivo, l'integrale sa-

$$\text{rebbe } \frac{Bx^{nm-2m} + Cx^{nm-2m-1} + Dx^{nm-2m-2} \text{ ec.} + K +}{x^{n-1} \times x^m \pm a^m}^{n-1}$$

$$A \int \frac{dx}{x^n \times x^m \pm a^m} \quad \text{i quali coefficienti } B, C, D \text{ ec. si}$$

determineranno nello stesso modo, come sopra.

Sia adunque per esempio $\frac{x dx}{x^3 + a^3}$; in questo ca-

$$\frac{x dx}{x^3 + a^3}$$

so si è $n=1$, $m=3$, $u=2$. Sarà pertanto

$$\int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{Bxx + Cx + K}{x^3 + a^3} + A \int \frac{x dx}{x^3 + a^3}, \text{ e differenziando,}$$

$$\frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{2Bxx + Cdx \times x^3 + a^3 - 3xx dx \times Bxx + Cx + K + Axx dx}{x^3 + a^3} =$$

e riducendo al comun denominatore, ordinando l'equazione, e paragonandola al zero, sarà

$$2Bx^4 dx + Cx^3 dx - 3Kxx dx + 2Ba^1 x dx + Ca^1 dx - 3Bx^4 dx - 3Cx^3 dx + Aa^1 x dx = 0,$$

e però dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini, troveremo $A - B = 0$, cioè $B = A$, $C = 0$, $K = 0$, $2Ba^1 + Aa^1 - 1 = 0$, cioè $Aa^1 = 1 - 2Ba^1$, e ponendo A in luogo di B , farà $A = \frac{1}{3a^1} = B$, onde

$$\text{finalmente} \quad \int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{xx}{3a^1 \times x^3 + a^3} + \frac{1}{3a^1} \int \frac{x dx}{x^3 + a^3}.$$

Ma $\int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{1}{3aa} \times \int \frac{1}{xx - ax + aa} = \frac{1}{3aa} \times \int \frac{1}{x^2 - ax + aa}$
con di più $\frac{2}{3aa}$ moltiplicato nell'arco di circolo del rag-

gio $\sqrt[4]{3aa}$, tangente $= x - a$; adunque sarà

$$\int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{1}{3a^3} \times \frac{x^3}{x^3 + a^3} + \frac{1}{9a^3} \sqrt[4]{V \frac{x^3}{x^3 + a^3}}$$

$\frac{1}{2a^3} \sqrt[4]{x + a} + \frac{2}{9a^3} \times$ arco di circolo del raggio $= \sqrt[4]{3aa}$, tangente $= x - \frac{a}{2}$, presi i logaritmi nella logaritmica della sottangente $= a$.

59. Ma se l'esponente m fosse negativo, si trasformi la formola in altra equivalente, in cui l'esponente sia positivo nel modo indicato al num. 51.

60. E se ambi m , ed n fossero rotti, si facciano le sostituzioni del numero 55.

61. Se poi l'esponente u non fosse numero intero, ma rotto affermativo o negativo, basterà, che la formola sia uno de' casi considerati al numero 39. acciocchè si trasformi in un'altra capace d'essere maneggiata colle date regole.

Anzi la formola $\frac{x^m dx}{x^m \pm a^m}$, essendo gl'esponenti

m , n , u numeri interi positivi, o negativi, ed anco in qualunque modo rotti razionali, co' segni del più, o del meno a piacere, sarà integrabile, o almeno riducibile

ducibile alle note quadrature, ogni qualvolta i detti esponenti abbiano tra loro tal proporzione, che una delle due quantità da essi composte, cioè $u - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$,

o pure $\frac{1}{m} - 1 + \frac{n}{m}$ sia eguale ad un numero qualun-

que intero. Se questo numero intero sarà positivo, la formola s'integrerà algebricamente, salvi que' casi, ne quali s'insinui la potestà $x^{-1} dx$, che obbliga a' logaritmi. Se questo numero intero sarà negativo, la formola si ridurrà alle quadrature del circolo, o dell'iperbola.

Per conseguire l'intento rispetto al primo caso di $u - \frac{1}{m} - \frac{n}{m} - 1$ eguale a numero intero, si faccia

$$x^m + a^m = z x^m; \text{ dunque } x^m = \frac{a^m}{z - 1}, x = \frac{a}{z - 1}^{\frac{1}{m}},$$

$$x^n = \frac{a^n}{z - 1}^{\frac{n}{m}}, x^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{z - 1}^{\frac{n+1}{m}}, \text{ e però}$$

$$x^n dx = - \frac{a^{n+1}}{z - 1}^{\frac{n+1}{m}} dz \times z - 1^{\frac{1}{m}}; \text{ ma } x^m + a^m =$$

$$z x^m = a^m z, \text{ ed } x^m + a^m = a^m z^{\frac{m}{m+1}}, \text{ dunque fatte le}$$

dotute

dovute sostituzioni nella proposta formola, sarà essa

$$\frac{dz}{z - a^{\frac{n-1}{m}}} \times z - \frac{1}{m} \frac{dz}{z - a^{\frac{n-1}{m}}}, \text{ o sia, la quale}$$

manifestamente si vede, essere integrabile algebricamente (salva l'eccezione fatta) quando sia $\frac{n-1}{m}$

1 + u eguale a numero positivo intero. Che se sia

$\frac{n-1}{m} - 1 + u$ numero intero, ma negativo, per le

cose dette ne' superiori paragrafi, la sommatoria della formola non dipenderà da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola.

Vengo al secondo caso, cioè di $\frac{1}{m} - 1 + \frac{n}{m}$ eguale a numero intero; si faccia $x^m + a^m = z$, sarà dunque

$$x^m = z - a^m, \quad x = z - a^{\frac{1}{m}}, \quad x^n = z - a^{\frac{n}{m}}, \quad x^n + 1 = z - a^{\frac{n}{m}}, \quad x^n dx = dz \times z - a^{\frac{n}{m}}, \quad \text{ma}$$

$x^m + a^m = z$, ed $x^m + a^m = z^u$, dunque fatte le sostituzioni nella proposta formola, sarà essa

$$\frac{dz}{z - a^{\frac{n}{m}}} \times z - \frac{1}{m} \frac{dz}{z - a^{\frac{n}{m}}}, \quad \text{o sia } z - \frac{n}{m} \frac{dz}{z - a^{\frac{n}{m}}},$$

la quale è integrabile algebricamente (salva la suddet-

ta

ta eccezione) quando sia $n+1=1$ eguale a numero positivo intero , e quando sia eguale a numero negativo intero , la sommatoria dipenderà dalle note quadrature del circolo , e dell' iperbola , per i superiori paragrafi .

62. Che se il denominatore della proposta frazione elevato a qualunque potestà intiera non fosse un binomio , come si è fin' ora considerato , ma fosse un qualunque altro , purchè egli sia riducibile ne' suoi componenti reali , ne' quali la incognita non ecceda la seconda dimensione , o per mezzo delle equazioni convertibili , o in altro modo , si potrà sempre ridurre la formola alle note quadrature .

Imperciocchè sia per esempio $\frac{dx}{xx+bx+aa} \times x+c$;

fatta attualmente la potestà del denominatore , si finga un' equazione così , $xx+bx+aa \times x+c$;

$\frac{Ax^3 dx + Bxx dx + Cx dx + D dx}{x^4 + 2bx^3 + 2aax^2 + b^2xx + 2aabbx + a^4}$, ponendo generalmente tanti

termini , quanti sono i componenti del denominatore , ed in essi termini tante majuscole , quanta è la massima potestà

potestà dell'incognita nel denominatore rispettivo, moltiplicando in oltre in ogni termine la prima majuscola per la massima potestà meno uno della incognita del suo denominatore, la seconda majuscola per essa potestà meno due, e così di mano in mano fino all'ultima costante. Con la solita maniera si devono determinare esse costanti assunte, ed il primo termine somministrerà tante frazioni divise per $xx + bx + aa$, nel qual denominatore fatto sparire il termine di mezzo, le frazioni saranno un caso particolare del Canone generale, $\frac{x^m dx}{x^n \pm a^n}$, ed il secondo termine ci darà tante frazioni divise per $x + c$, che si riducono alla regola ordinaria dei denominatori composti di radici eguali.

63. Se in oltre il numeratore della proposta formola sarà moltiplicato per una potestà positiva, o negativa dell'incognita, ritrovati i valori delle majuscole, operando come se la frazione non fosse moltiplicata per essa potestà, i termini risultanti si moltiplichino per la stessa potestà, ed il rimanente si faccia al solito ec.

64. Finisco questo primo Capo con soddisfare alla promessa fatta al Lettore intorno al *Metodo de' Polinomj* del Sig. Conte Jacopo Riccati, che è il seguente.

Col nome di Polinomj differenziali appello le frazioni, che hanno per numeratore la flussione dx , e per

denominatore un aggregato di potestà, gl'esponenti delle quali costituiscano una progressione aritmetica, che va a terminarsi nel nulla. E mentre questa condizione non si adempia, bisognerà supplire qualche termine affetto dal coefficiente = 0. Abbiasi la espressione

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + a}$$

sembra a prima vista un trinomio, ma realmente è un quadrinomio, e va esposta così

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{2}{6}} + 0x^{\frac{3}{6}} + a}$$

In qualunque Polinomio esposto per una frazione, il di cui denominatore sia alzato alla potestà p , numero intero e positivo, àssi un metodo, che sarebbe generale, se non venisse frequentemente reso inutile dalle quantità immaginarie, ed oltre ciò alcuni artifizj particolari, che tal volta opportunamente ci soccorrono.

Do principio dal trinomio

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = dy,$$

conciosiacchè a cotale espressione ogni trinomio facilmente si riduce. Facciasi $x^m = z + A$. (E' z una nuova variabile assunta, ed A una costante da determinarsi) Istituiti i necessarj computi per giungere alla sostituzione, abbiamo come segue

$$\begin{aligned} x^{2m} &= zz + 2Az + AA \\ ax^m &= az + aA \\ b &= b \end{aligned}$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{dz + 2A + a}{zz + 2Az + AA + az + aA + b} = \frac{dz + 2A + a}{z^2 + 2Az + A^2 + az + aA + b}$$

Dee farfi in maniera, che spariscano le quantità $AA + aA + b$, ponendole $= 0$, e ne' casi, in cui A non è quantità immaginaria, succede ottimamente la riduzione.

E giacchè $x^m = z + A$, e prese le differenze, $mx^{m-1} dx = dz$,

$$\text{ed } x = z + A^{\frac{1}{m}}, \text{ dunque } dx = \frac{dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}}}.$$

In passando alle necessarie sostituzioni, onde nella nostra formola principale in cambio di x , e delle sue funzioni resti surrogata la variabile assunta z colle sue funzioni, troveremo

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}} \times z + 2A + a \times z},$$

e liberando la quantità z , che moltiplica il binomio $z + 2A + a$ sotto il segno, sarà

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{z^{-p} dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}} \times z + 2A + a}.$$

Il caso più semplice vuole l'esponente p eguale all'unità, essendo l'altro m qualsivoglia numero intero, o rotto, affermativo, o negativo; e fatto per brevità $2A + a = g$, l'espressione generale passa nella particolare

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + z \times z + A^{\frac{m-1}{m}}} = m dy.$$

Istituisco una prima divisione, partendo cioè il numeratore della frazione per lo suo denominatore, ed il primo

quoziente sarà $\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m}$, e fatta la moltiplicazione,

e la sottrazione, conforme la pratica ordinaria, il residuo sarà $-dz$, da esser partito per lo denominatore, e perciò

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m} = \frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^m} - \frac{dz}{g \times z + A^m}$$

Il primo termine del secondo membro è già ridotto alle quadrature note, e l'altro termine facilmente vi si riduce, ponendo $z + A = u$, e fatte le debite sostituzioni,

$$\text{avremo } \frac{-dz}{g \times z + A^m} = u^{\frac{-m+1}{m}} du$$

Seguitando la nostra ricerca, sia l'esponente p eguale a qualsivoglia numero positivo, ed intero: per ottenere l'invento basterà prolungare alquanto l'operazione. Ripigliata per mano la formola generale

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{z^{-p} dz}{m \times z + A^m \times z + g}$$

e posto, per esempio, $p = \text{al binario}$, si ridurrà alla seguente

$$\frac{z^{-2} dz}{g \times z + A^m + 2gz \times z + A^m + 2z \times z + A^m} = mdy$$

Di-

Divido, come sopra, il numeratore di queste frazioni per lo suo denominatore, ed il primo quoziente sarà

$$\frac{z^{-1} dz}{m-1}, \text{ e dopo le necessarie operazioni avremo}$$

$$gg \times z + A^{\frac{m-1}{m}} - \frac{2z^{-1} dz}{g} - \frac{dz}{gg}$$

il residuo $-\frac{2z^{-1} dz}{g} - \frac{dz}{gg}$ da essere nuovamente per l'intero denominatore diviso. Istituisco una seconda divisione nella frazione

$$\frac{-\frac{2z^{-1} dz}{g} - \frac{dz}{gg}}{m-1} = \frac{g^1 \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + 2ggz \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + gzz \times z + A^{\frac{m-1}{m}}}{m-1}$$

e dopo le debite operazioni si avrà il residuo $\frac{4dz}{g} + \frac{2zdz}{gg}$ da partirsi per l'intero denominatore. Nascerà pertanto la seguente equazione

$$\frac{z^{-1} dz}{m-1} = \frac{\frac{z^{-1} dz}{m-1} \times z + g}{m-1} + \frac{2z^{-1} dz}{m-1} + \frac{gg \times z + A^{\frac{m-1}{m}}}{m-1} + \frac{g^1 \times z + A^{\frac{m-1}{m}}}{m-1} + \frac{4g-1 \times dz}{m-1} + \frac{2zdz}{m-1}$$

I primi due termini nell'omogeneo di comparazione sono due binomj, e gli altri due possono facilmente ridursi alla forma del binomio, facendo $z + A = u$, ovvero $z + g = u$. Ne' casi più composti, in cui si mette $p=3, 4, 5$ ec.

Dopo ciò intraprendo tante divisioni, quante sieno bastanti, per fare, che laddove nel numeratore ci sia l'esponente negativo, nel denominatore non si rinvenga altra quantità, che il binomio $z + A^{\frac{m-1}{m}}$, e metto da parte sì fatte frazioni, che, trascurati i coefficienti, saranno analoghe alla seguente $\frac{z^{-n} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}}$, posto n qualsivoglia numero po-

sitivo, ed intero. Gli altri termini sono rappresentati dalla formola generale

$$\frac{z^n dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}} \times \sqrt[p]{zz + gz + b}}$$

Ripeto dunque l'operazione, facendo $z = u + B$, indi fatto sparire l'ultimo termine, conforme il solito, ed alzato il binomio $u + B$ alla potestà qualunque $n + 1$, e surrogati in cambio di z , e delle sue funzioni, i valori esposti per la nuova indeterminata u , tutti i membri compariranno sotto l'aspetto espresso dalla seguente formola

$$\frac{u^{n-p} du}{u + A + B^{\frac{m-1}{m}} \times \sqrt[p]{u + k}}$$

Quando sia p maggiore di n , onde l'esponente $n - p$ sia negativo, si mettano in pratica le divisioni, e la formola indi nascente sarà

$$\frac{u^{-n} du}{u + A + B^{\frac{m-1}{m}}}$$

positivo, avremo

$$\frac{u^n du}{u + A + B^{\frac{m-1}{m}} \times \sqrt[p]{u + k}}$$

po-

ponendo $u + k = \omega$, ed essendo tanto n , quanto p numeri interi, saranno sempre riducibili alle quadrature più semplici i binomj, che nasceranno dalle accennate operazioni.

Egli è vero, che a cagione delle immaginarie il metodo riescè limitato; ma oltrechè bene spesso le radici, o tutte, o in parte sono reali; oltrechè in molti casi particolari possono scansarsi le quantità immaginarie, non bisogna trascurare quel molto, che si può avere, perchè il tutto non può conseguirsi.

Abbiassi per esempio il trinomio $\frac{dx}{x + 2\sqrt{x+2}}$.

Faccio $x^{\frac{1}{2}} = z + A$, dunque $x + 2\sqrt{x+2} = zz + 2Az + 2z + AA + 2A + 2$. Mettendo $AA + 2A + 2 = 0$, trovo $A = \sqrt{-1} - 1$; ed ecco in campo una grandezza mista di reale, ed immaginario, e procedendo a norma del metodo avremo $\frac{z - p dz}{z + A} = \frac{z - p dz}{z + 2\sqrt{-1}} + \frac{Az - p dz}{z + 2\sqrt{-1}}$.

Perchè si tolgano di mezzo le immaginarie, mutiamo maniera, e nella grandezza $zz + 2A + 2 \times z + AA + 2A + 2$ facciamo, che si dilegui il termine di mezzo $2Az + 2z$, ponendolo $= 0$, onde sia $A \pm = 1$, e di più $AA + 2A + 2 = 1$, e la formola sarà, come segue

$$\frac{dz}{z - 1} = \frac{z dz}{zz + 1} - \frac{dz}{zz + 1}; \text{ e ne' due}$$

binomj dell'omogeneo di comparazione, che sono equivalenti agl' altri due già considerati, non s'incontra difficoltà.

CAPO

C A P O I I.

Delle Regole dell'Integrazioni facendo uso delle Serie.

65. **F**Acendo ora passaggio all'altra maniera d'integrare nel principio indicata, cioè col mezzo delle serie, è necessario di premettere le seguenti Regole.

Regola I. Ridurre una frazione a serie infinita.

Si divida il numeratore per lo denominatore con la regola ordinaria della divisione, ed il rimanente di nuovo si divida, e così di mano in mano in infinito, e si avrà una serie d'infiniti termini eguale alla proposta frazione. Si avverta però di porre tanto nel numeratore, quanto nel denominatore della frazione proposta per primo termine quello, che sarà il maggiore. Con questo modo operando averemo per tanto

$$\frac{f}{m+n} = \frac{f}{m} - \frac{fn}{mn} + \frac{fnn}{m^2} - \frac{fn^2}{m^3} + \frac{fn^3}{m^4} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m-n} = \frac{f}{m} + \frac{fn}{mn} + \frac{fnn}{m^2} + \frac{fn^2}{m^3} + \frac{fn^3}{m^4} \text{ ec.}$$

$$\frac{af}{mn \pm nn} = \frac{af}{mn} \mp \frac{afnn}{m^4} + \frac{afn^2}{m^5} \mp \frac{afn^3}{m^6} + \frac{afn^4}{m^7} \text{ ec.}$$

cioè coi segni alternativi, quando il secondo termine

m

del

del denominatore sia positivo; e tutti positivi, quando sia col segno negativo.

Similmente sarà

$$\frac{f}{m \pm n} = \frac{f}{m} \mp \frac{fn}{m^2} + \frac{fnn}{m^3} \mp \frac{fn^2}{m^4} + \frac{fn^3}{m^5} \mp \frac{fn^4}{m^6} \text{ ec.}$$

$$\frac{1}{1 \pm nx} = 1 - nx + x^2 - x^3 + x^4 \text{ ec.}$$

$$\frac{1}{2x^2} - x^{\frac{3}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13xx + 34x^{\frac{5}{2}} \text{ ec.}$$

$$1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x$$

$$\frac{f}{m \pm n} = \frac{f}{m} \pm \frac{2fn}{m^2} + \frac{3fnn}{m^3} \pm \frac{4fn^2}{m^4} + \frac{5fn^3}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m \pm n} = \frac{f}{m} \pm \frac{3fn}{m^2} + \frac{6fnn}{m^3} \pm \frac{10fn^2}{m^4} + \frac{15fn^3}{m^5} \text{ ec.}$$

Sia una frazione, il di cui numeratore, e denominatore sieno due serie infinite, e sia per esempio

$$1 + \frac{1}{2} axx - \frac{1}{8} aax^4 + \frac{1}{16} a^3 x^6 - \frac{5}{128} a^4 x^8 \text{ ec.}$$

$$1 - \frac{1}{2} bxx - \frac{1}{8} bbx^4 - \frac{1}{16} b^3 x^6 - \frac{5}{128} b^4 x^8 \text{ ec.}$$

$$\text{farà essa} = 1 + \frac{1}{2} bxx + \frac{1}{8} bbx^4 + \frac{5}{16} b^3 x^6 + \frac{15}{128} b^4 x^8 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{2} axx + \frac{1}{4} abx^4 + \frac{3}{16} abbx^6 + \frac{5}{32} ab^2 x^8 \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{8} aax^4 - \frac{1}{16} aabx^6 - \frac{3}{64} aabbx^8 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{16} a^3 x^6 + \frac{1}{32} a^4 x^8 \text{ ec.}$$

$$- \frac{5}{128} a^4 x^8 \text{ ec.}$$

in cui $P + PQ$ è la quantità data, $\frac{m}{n}$ è l'esponente numerico, P rappresenta il primo termine, Q il rimanente di tutti gl'altri termini divisi per il primo, e ciascuna delle lettere A, B, C, D ec. significano rispettivamente il termine anteriore di modo, che per A s'intenda $P^{\frac{m}{n}}$, per B s'intenda $\frac{m}{n} AQ$, per C s'intenda $\frac{m-n}{2n} BQ$ ec.

Sia da ridursi in serie la formola $\sqrt{aa + xx}$, adunque farà $P = aa$, $Q = \frac{xx}{aa}$, $m = 1$, $n = 2$, e però

$$\sqrt{aa + xx} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}$$

Sia $\sqrt[5]{a^5 + a^4x - x^5}$, cioè $a^5 + a^4x - x^5$ $\frac{1}{5}$, farà $P = a^5$, $Q = \frac{a^4x - x^5}{a^5}$, $m = 1$, $n = 5$, e però

$$\sqrt[5]{a^5 + a^4x - x^5} = a + \frac{a^4x - x^5}{5a^5} - \frac{2a^3xx + 4a^4x^6 - 2x^{10}}{25a^9} \text{ ec.}$$

Sia $\sqrt[3]{y^3 - aay}$, cioè $b \times y^3 - aay$ $-\frac{1}{3}$, farà

$$P = y^3, \quad Q = -\frac{aa}{yy}, \quad m = -1, \quad n = 3, \quad \text{e però}$$

Abbiasi da elevare una serie infinita ad una data potestà. E sia per esempio $y + ayy + by^2 + cy^3 + fy^4$ ec. da elevarsi alla potestà m ; sarà dunque $P = y$, $Q = ay + byy + cy^2 + fy^3$ ec., $n = 1$, $m = m$, onde averemo

$$y + ayy + by^2 + cy^3 + fy^4 \text{ ec. }^m =$$

$$y^m + \frac{may^{m+1}}{1} + \frac{m \times m-1}{1 \times 2} aay^{m+2} + \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} \times a^2 y^{m+3} + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^3 y^{m+4} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{m \times m-1}{1 \times 2} by^{m+2}$$

$$+ \frac{m \times m-1}{1 \times 2} aby^{m+3}$$

$$+ \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} \times aaby^{m+4} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{mcy^{m+3}}{1}$$

$$+ \frac{m \times m-1}{1 \times 2} \times acy^{m+4} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{m \times m-1}{1 \times 2} bby^{m+4} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{mfy^{m+4}}{1} \text{ ec.}$$

$$\text{rò } b \times y^2 - aay^3 = \frac{b}{y} + \frac{aab}{3y^2} + \frac{2a^2b}{9y^3} + \frac{14a^3b}{81y^4} \text{ ec.}$$

$$\text{Se fosse } \frac{b}{\sqrt{a+x}}, \text{ si esprimerebbe così } b \times \frac{1}{a+x}^{\frac{1}{2}},$$

ed il rimanente si farebbe, come sopra.

$$\text{Sia } \frac{b}{a+x}^{\frac{1}{2}}, \text{ cioè } b \times \frac{1}{a+x}^{\frac{1}{2}}, \text{ farà } P = a, Q = \frac{x}{a},$$

$$m = -\frac{1}{2}, n = 1, \text{ e però } b \times \frac{1}{a+x}^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3bx}{a^{\frac{3}{2}}} +$$

$$\frac{6bxx}{a^{\frac{5}{2}}} - \frac{10bx^2}{a^{\frac{7}{2}}} \text{ ec.}$$

68. Abbiasi, da elevare una quantità complessa ad una data potestà, e sia per esempio $a+x$ da elevarsi alla potestà m , cioè $\frac{1}{a+x}^m$. Sarà $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$,

$$m = m, n = 1, \text{ onde } \frac{1}{a+x}^m = \frac{1}{a^m} + \frac{ma^{m-1}x}{1} +$$

$$\frac{m \times m-1}{1 \times 2} \times \frac{a^{m-2}x^2}{1} + \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{a^{m-3}x^3}{1} \text{ ec.}$$

Abbiasi ec.

69. Ciò posto: Sia da integrarsi la formola differenziale $\frac{b dx}{a+x}$. Ridotta in serie la frazione $\frac{b}{a+x}$, e

moltiplicato ciascun numeratore per dx , avremo

$$\frac{b dx}{a+x} = \frac{b dx}{a} - \frac{b x dx}{a^2} + \frac{b x^2 dx}{a^3} - \frac{b x^3 dx}{a^4} + \frac{b x^4 dx}{a^5} \text{ ec.},$$

ed integrando

$$\int \frac{b dx}{a+x} = \frac{b x}{a} - \frac{b x^2}{2 a^2} + \frac{b x^3}{3 a^3} - \frac{b x^4}{4 a^4} + \frac{b x^5}{5 a^5} \text{ ec.}$$

70. Sia la formola $\frac{a dx}{x}$. Fatta $x = b + z$, intendendo per la b una qualunque costante a piacere, e per z una nuova incognita, sarà $\frac{a dx}{x} = \frac{a dz}{b+z}$.

Ridotta in serie la frazione $\frac{a}{b+z}$, e moltiplicato ciascun numeratore per dz , farà

$$\frac{a dz}{b+z} = \frac{a dz}{b} - \frac{a z dz}{b^2} + \frac{a z^2 dz}{b^3} - \frac{a z^3 dz}{b^4} + \frac{a z^4 dz}{b^5} \text{ ec.},$$

ed integrando $\int \frac{a dz}{b+z} = \frac{a z}{b} - \frac{a z^2}{2 b^2} + \frac{a z^3}{3 b^3} - \frac{a z^4}{4 b^4} +$

$\frac{a z^5}{5 b^5} \text{ ec.}$, cioè $\int \frac{a dx}{x} = a \times \frac{x-b}{b} - \frac{a \times x-b^2}{2 b^2} +$

$$\frac{a \times x-b^3}{3 b^3} - \frac{a \times x-b^4}{4 b^4} \text{ ec.}$$

71. Sia la formola $\frac{b dx}{x+a}$; ridotta in serie,

$$\frac{b dx}{\sqrt[5]{a+x}} = \frac{b dx}{a^{\frac{1}{5}}} - \frac{3bx dx}{5a^{\frac{6}{5}}} + \frac{12bxx dx}{25a^{\frac{11}{5}}} - \frac{52bx^3 dx}{125a^{\frac{16}{5}}} \text{ ec.,}$$

e però integrando sarà

$$\int \frac{b dx}{\sqrt[5]{a+x}} = \frac{bx}{a^{\frac{1}{5}}} - \frac{3bxx}{10a^{\frac{6}{5}}} + \frac{12bx^3}{75a^{\frac{11}{5}}} - \frac{52bx^4}{500a^{\frac{16}{5}}} \text{ ec.}$$

E così si faccia di qualunque altra proposta formola.

72. Se le serie così ritrovate, che esprimono l'integrale delle proposte formole differenziali, e comprendono un numero infinito di termini, saranno di valore infinito, sarà infinito l'integrale delle proposte formole differenziali. E se esse serie saranno di valore finito, e di più sommabili, cioè a dire, che si sappia ritrovare il valore di esse serie, quantunque composte di termini infiniti di numero, il che molte volte succede, si avrà in quantità finite, e però algebriche l'integrale delle proposte formole differenziali. Ma se le serie essendo di valore finito non saranno sommabili, quanti più termini nella serie si prenderanno, tanto più si accosterà al giusto l'integrale della proposta formola differenziale, ma l'esatto però verrà espresso da tutta la serie.

73. Per riconoscere, quali sieno le serie di valore infinito, quali di valore finito, e quali sommabili, si
veda

veda il trattato *De Seriebus Infinitis* del Sig. Giacomo Bernulli, ed altri Autori, che di esse trattano.

74. Ma qualunque volta la formola differenziale sia composta di due soli termini, si può generalmente, e più speditamente far uso del seguente Canone, in cui gl'esponenti m , n , t possono essere intieri, rotti, positivi, e negativi, ed il quale si può produrre a quanti termini si vuole, giacchè da' quattro posti, abbastanza si manifesta la legge, con cui si forma.



$$\int ay^{t-1} dy \times \overline{b+cy^m}^m = \frac{ay^t - ac}{tb} \times \frac{t+mn+n}{t+n} \times \overline{y^{t+n}}^m + \frac{acc}{tb^2} \times \frac{t+mn+n}{t+n} \times \frac{t+mn+2n}{t+2n} \times \overline{y^{t+2n}}^{m-1} - \frac{ac^2}{tb^3} \times \frac{t+mn+n}{t+n} \times \frac{t+mn+2n}{t+2n} \times \frac{t+mn+3n}{t+3n} \times \overline{y^{t+3n}}^{m-2} \text{ ec. } \times \overline{b+cy^m}^{m+1}.$$

La maniera di ritrovare esso canone è questa. Si finga che sia l'equazione

$$\int ay^{t-1} dy \times \overline{b+cy^m}^m = Ay^t + By^{t+n} + Cy^{t+2n} + Dy^{t+3n} + Ey^{t+4n} \text{ ec. } \times \overline{b+cy^m}^{m+1}, \text{ in cui le affunte } A, B, C, D, E \text{ ec. sono costanti arbitrarie da determinarsi.}$$

Adunque differenziando la finta equazione, avremo pure.

$$ay^{t-1} dy \times \overline{b+cy^m}^m = tAy^{t-1} dy + t+n By^{t+n-1} dy + t+2n Cy^{t+2n-1} dy + t+3n Dy^{t+3n-1} dy \text{ ec. } \times \overline{b+cy^m}^{m+1} + m+1 \times cy^{m-1} dy \times \overline{b+cy^m}^m \times Ay^t + By^{t+n} + Cy^{t+2n} \text{ ec.},$$

cioè dividendo per $\overline{b+cy^m}^m$, ed ordinando i termini,

$$\begin{aligned} ay^{t-1} dy &= tbAy^{t-1} dy + t+n \times bBy^{t+n-1} dy + t+2n \times bCy^{t+2n-1} dy \text{ ec.} \\ &+ t \times Ay^{t+n-1} dy + t+n \times cBy^{t+2n-1} dy \text{ ec.} \\ &+ m+1 \times ncAy^{t+n-1} dy + m+1 \times ncbBy^{t+2n-1} dy \text{ ec.} \end{aligned}$$

e trasportando il termine $ay^{t-1} dy$ dall'altra parte, farà

$$\begin{aligned} tbAy^{t-1} dy + t+n \times bBy^{t+n-1} dy + t+2n \times bCy^{t+2n-1} dy \text{ ec.} \\ - ay^{t-1} dy + t \times Ay^{t+n-1} dy + t+n \times cBy^{t+2n-1} dy \text{ ec.} = 0. \\ + m+1 \times ncAy^{t+n-1} dy + m+1 \times ncbBy^{t+2n-1} dy \text{ ec.} \end{aligned}$$

Ridotta adunque al zero l'equazione, faranno pure eguali al zero i coefficienti di ciascun termine; per lo che avremo tante equazioni, quante sono le arbitrarie affunte A, B, C, D ec., con le quali equazioni esse arbitrarie si determineranno. Pertanto sarà $t b A - a = 0$, cioè $A = \frac{a}{tb}$; $t+n \times b B + t \times m+1 \times nc A = 0$, e sostituendo il valore di A , $t b B + n b B + \frac{ac}{b} + \frac{mnac+nac}{tb} = 0$, cioè $B = \frac{t+mn+n}{tb} \times \frac{-ac}{t+n}$; $t+2n \times b C + t+n \times c B + m+1 \times nc B = 0$, cioè $C = \frac{t+n \times -c B + m+1 \times -nc B}{b \times t+2n}$,

e sostituendo il valore di B , farà $C = \frac{t+mn+n}{tb \times t+n} \times \frac{ac}{t+n}$, e così di mano in mano si averanno i valori quanti si vogliono per altrettante affunte costanti, e

questi valori posti nella finta equazione ci somministreranno appunto il canone assegnato.

Se gl'esponenti m, n, t della proposta formola saranno tali, che il canone, o sia la serie infinita s'interrompa, cioè che qualche termine diventi $= 0$ (nel qual caso farebbero $= 0$ tutti gl'altri, che vengono dopo) la serie farà finita, e terminata, vale a dire algebrico l'integrale della proposta formola differenziale, ma è necessario, che la serie prima s'interrompa nel numeratore, cioè che prima diventi il numeratore $= 0$ del denominatore, perchè è prima sarà $= 0$ il denominatore, quel termine, ed indi gl'altri dopo avranno eguali all'infinito. Acciò che la serie s'interrompa nel numeratore, fa d'uopo che sia $\frac{t}{n} - m$ eguale ad un numero intero positivo.

Che se gl'esponenti t, m, n della proposta formola saranno tali, che la serie non s'interrompa mai, allora si muti l'espressione della proposta formola in un'altra equivalente, cioè la formola per esempio $ay^{t-1} dy \times \overline{b+cy^m}^m$ si muti in quest'altra $ay^{t-1} + m dy \times \overline{by^{-n}+c}^m$, che equivale alla prima, e si provi se così si è l'intento, e se no, la formola non farà algebricamente integrabile con questo canone. Se la formola fosse $ay^{t-1} dy \times \overline{b-cy^m}^m$, allora i termini tutti del canone farebbero positivi.

Sia $a^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{bx+xx}^{-\frac{2}{2}}$, cioè $a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{2}} dx \sqrt{b+x^2}^{\frac{1}{2}}$. Sarà $t-1 = -\frac{2}{2}$, $n=1$, $m=\frac{1}{2}$, $c=1$, onde sarà eguale a zero la quantità $t+mn+3n$, ed in conseguenza sarà zero il quarto termine, e gl'altri appresso della serie, e però avremo

$$\int a^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{bx+xx} = \int a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{2}} dx \sqrt{b+x^2}^{\frac{1}{2}} = -\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{7b} + \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{7bb} \times \frac{4}{5} x^{-\frac{5}{2}} - \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{7b^2} \times \frac{2}{15} x^{-\frac{7}{2}} \times \overline{b+x^2}^{\frac{1}{2}} = -\frac{30a^{\frac{1}{2}}bb+24a^{\frac{1}{2}}bx-16a^{\frac{1}{2}}xx}{105b^2x^2} \times \overline{b+x^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Sia $\frac{ady}{xy \sqrt{ax+yy}}$, farà $t=-1$, $n=3$, $m=-\frac{1}{2}$, $c=1$, $b=aa$, e però sarà zero il secondo termine della serie, quindi

$$\int \frac{ady}{xy \sqrt{ax+yy}} = \frac{ay^{-1}}{-aa} \times \overline{aa+yy}^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{aa+yy}}{ay} \text{ ec.}$$

C A P O I I I.

Dell' uso delle accennate Regole nelle Rettificazioni delle Curve, Quadrature de' Spazj, Appianazioni delle Superficie, e Cubature de' Solidi.

75. **P**ER fare uso delle sopraccennate regole di calcolo integrale, applicandole alle quadrature de' spazj, rettificazioni di curve, appianazioni, o sia quadrature di superficie, e cubature de' solidi, sia una qualunque curva ADH (Fig. 6.) riferita all' asse AB con le ordinate parallele fra loro, ed in angolo retto sopra l' asse stesso. Alla ordinata BD condotta CH parallela, ed infinitamente prossima, e tirata DE parallela a BC , il mistilineo $BDHC$ farà la flussione, o il differenziale, o sia l'elemento dello spazio ABD , e perchè lo spazio DEH è nullo rispetto al rettangolo $BDEC$, si potrà prendere esso rettangolo per l'elemento del suddetto spazio ABD . Adunque la somma di tutti questi rettangoli infinitesimi $BDEC$ farà lo spazio compreso dalla curva AD , e dalle coordinate AB , BD . Quindi chiamata $AB=x$, $BD=y$, sarà $BC=dx$, $EH=dy$, ed il rettangolo $BDEC=ydx$ farà la formola per gli spazj. Se adunque in questa formola sostituiremo in luogo di y il valore dato per x , e per le co-

n

stanti

stanti dell'equazione della curva, o in luogo di dx , il valore dato per y , dy , e le costanti, ed indi integremo, sarà l'integrale il ricercato spazio ABD .

Altre espressioni, o formole possono averfi degli elementi de' spazj per mezzo di Settori, o di Trapezj, le quali in certi incontri sogliono essere più comode della riferita; se ne vedrà la maniera, e l'uso in alcuni esempj.

76. Che se la curva sarà riferita al fuoco, o sia ad un punto fisso, per esempio M , da cui partano tutte le ordinate; condotta all'ordinata MD la infinitamente prossima MH , lo spazio infinitesimo MHD sarà l'elemento dello spazio AMD ; onde, perchè descritto col centro M , raggio MD , l'archetto infinitesimo DK , lo spazietto DKH è nullo rispetto allo spazio MDK , e perchè altresì l'archetto DK si può assumere per la tangente in D , o in K , ne viene, che lo spazio MDK sarà l'elemento dello spazio AMD .

Chiamata per tanto $MD=y$, $KD=dz$, sarà ydz

la formola generale degli spazj per le curve riferite al fuoco. E se in questa formola si sostituirà in luogo di y , o di dz il rispettivo valore dato dall'equazione della curva, l'integrale sarà lo spazio ricercato, cioè lo spazio AMD .

77. Ma se la curva sarà riferita ad un diametro, cioè se le coordinate non saranno tra loro in angolo retto, condotta (Fig. 7.) HG perpendicolare ad AG , il prodotto di HG , o sia di FG in BC sarà il piccolo parallelogrammo $BCED$, ed in conseguenza l'elemento dell'area ABD . E perchè essendo dato l'angolo DBG , è data la ragione del seno tutto al seno retto, che sia per esempio quella di m ad n , fatta al solito $AB = x$, $BD = y$, sarà HG , o sia $FG = \frac{ny}{m}$, ed il parallelogrammo $BCED$ sarà $\frac{nydx}{m}$, formola generale dello spazio.

78. Egli è chiaro, che la somma di tutte le porzioni infinitesime DH della curva formano la curva stessa, e però, che DH ne sarà l'elemento, adunque chiamata (Fig. 6.) $AB = x$, $BD = y$, e però $BC = dx$, $EH = dy$, nelle curve riferite all'asse, cioè con le coordinate in angolo retto, sarà $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, formola generale per la rettificazione di esse curve.

79. Rispetto alle curve riferite al fuoco, fatta pure $MD = y$, $KD = dz$, sarà istessamente la formola generale $\sqrt{dy^2 + dz^2}$.

80. Ma intorno alle curve con le coordinate in angolo obbliquo, (Fig. 7.) essendo dato l'angolo HCG , è data la ragione del seno tutto al seno del comple-

mento, che sia quella di m , ad e , onde farà $CG = \frac{ey}{m}$,
 ed $EF = \frac{edy}{m}$, e però $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$.

81. Sostituito in ciascuna di queste formole, in luogo di dy , o di dx , o di dz , il rispettivo valore dato per l'altra variabile, e suoi differenziali dalla equazione della curva, ed indi fatte le integrazioni, averemo la ricercata lunghezza della curva AD .

82. S'intenda moverfi il piano AHC (Fig. 6.) attorno alla retta AC , la curva AH descriverà una superficie nel mentre, che il piano AHC descriverà un solido; ma la porzione infinitesima DH descriverà una zona infinitesima, che farà l'elemento della superficie descritta dalla curva AH , ed il piano infinitesimo $DBCH$ descriverà un solido pure infinitesimo, che farà l'elemento del solido descritto dal piano AHC . Ora intorno alle curve riferite all'asse colle coordinate in angolo retto; sia la ragione del raggio alla circonferenza del circolo quella di r alla c , la circonferenza descritta col raggio $BD = y$ farà $\frac{cy}{r}$, e però $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ l'espressione della zona infinitesima, ed in conseguenza la formola generale per le superficie.

83. Sarà pure $\frac{cyy}{2r}$ l'area del circolo col rag-

gio $BD = y$, e però $\frac{cyydx}{2r}$ sarà l'espressione del cilin-

dretto infinitesimo descritto dal rettangolo $BCED$, ma esso non differisce, se non per quantità infinitesima del secondo ordine, dal solido generato dal piano $BCHD$; adunque sarà $\frac{cyydx}{2r}$ la formola generale per i solidi.

84. Ma rispetto al caso della Fig. 7., cioè quando le coordinate sono tra loro nel dato angolo obbliquo, il raggio del circolo, sopra cui insiste la piccola zona, ed il picciol cilindro, non è $CH = y$, ma bensì $GH = \frac{ny}{m}$, siccome l'elemento DH , che forma la zona, non è $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ma $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$, e

l'altezza del picciol cilindro non è $BC = dx$, ma $FD = dx + \frac{edy}{m}$; adunque la formola della superficie in questo caso sarà $\frac{cny}{m} \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$.

85. Il prodotto del circolo col raggio GH nell'altezza FD , cioè $\frac{cnny}{2rmm} \times \frac{dx + \frac{edy}{m}}{m}$, è l'elemento del solido generato dal piano AGH ; adunque da questo sottraendo l'elemento del solido generato dal triangolo HCG , cioè $\frac{cnny}{2rmm} \times \frac{edy}{m}$, il rimanente sarà l'elemento

del

del solido generato dal piano ABD , e però sarà $\frac{cnyyydx}{2ymn}$ la formola generale per essi solidi.

86. Per le curve riferite al fuoco, come che è variabile l'angolo DMB (Fig. 6.), e per conseguenza non si può avere il valore della BD , o CH , raggio del circolo, che necessariamente entra nella formola delle quadrature della superficie, e cubature del solido, fa d'uopo dall'equazione riferita al fuoco cavare l'equazione della stessa curva riferita all'asse, ed indi procedere colla solita maniera già spiegata; avvertendo, che nelle cubature bisognerà dagl'integrali sottrarre il cono generato dal triangolo MHC , per avere il solido generato dal piano AMD .

87. La maniera di cavare dall'equazione differenziale di una curva al fuoco l'equazione della stessa curva all'asse è la seguente.

La curva ADH (Fig. 6.) si consideri nel tempo stesso relativamente al fuoco M , ed all'asse AMB , egli è certo, che il quadrato HD dell'elemento della curva è eguale tanto ai due quadrati DK , KH , quanto agl'altri due DE , EH , e che di più il quadrato di MD è eguale ai due quadrati MB , BD . Chiamando $MB=x$, $BD=y$, $MD=z$, e l'arco minimo $DK=du$, avremo $dz^2 + du^2 = dx^2 + dy^2$, ed $xx + yy = zz$.

Ora l'equazione della curva al fuoco venga espressa
general-

generalmente dalla formola $p dz = du$, in cui p è una data funzione di z , e farà $dz^2 + p^2 dz^2 = dx^2 + dy^2$, e collocando in vece di dy il suo valore nascente dall'equazione $xx + yy = zz$, vale a dire $\frac{z dz - x dx}{\sqrt{zz - xx}}$, trovare

mo $dz^2 + p^2 dz^2 = dx^2 + \frac{z dz - x dx}{\sqrt{zz - xx}}$, la quale si riduce alla seguente $pp dz^2 \times \sqrt{zz - xx} = z dx^2 - x x dx dz + x x dz^2$, ed estratta la radice quadrata, $p dz = \frac{z dx - x dz}{\sqrt{zz - xx}}$.

E' d'uopo espurgare nuovamente la premessa equazione liberandola dalla mistura delle incognite, col porre $x = \frac{zq}{b}$, e però $dx = z dq + q dz$. Fatta svanire, col mezzo dell'equazione sussidiaria assunta, la x , e le sue funzioni, avremo $\frac{p dz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$.

Nell'equazione $\frac{p dz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$ se tale farà il valore di p dato per z , che la quantità $\frac{p dz}{z}$ con le debite so-

stituzioni possa ridursi alla differenziale d'un arco di circolo, e che fatte le necessarie sommatorie, i due archi circolari si rispondano, come numero a numero, allora la curva sarà algebraica, e troveremo la sua equazione

all'

all'asse con una formola alla Cartesiana. In ogn'altro caso la curva sarà trascendente.

ESEMPIO.

Sia l'equazione di una curva al fuoco $\frac{zdz}{\sqrt{cc-2bz-zz}} = du$.

Avremo in tal caso $p = \frac{z}{\sqrt{cc-2bz-zz}}$, e nell'equazione

$\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb-qq}}$, sostituito il valore di p , farà essa.

$\frac{dz}{\sqrt{cc-2bz-zz}} = \frac{dq}{\sqrt{bb-qq}}$. Pongo $b+z=t$, dunque

$bb+2bz+zz=tt$, e $bb-tt=-2bz-zz$, onde fatta la sostituzione, farà $\frac{dt}{\sqrt{cc+bb-tt}} = \frac{dq}{\sqrt{bb-qq}}$.

Sia per un caso $cc+bb=bb$, in tale supposto farà $t=q$, cioè $b+z=q=\frac{bx}{z}$, dunque $bz+zz=bx$, e ponendo in luogo di z il suo valore, farà l'equazione della curva $b\sqrt{xx+yy}+xx+yy=bx$, il che ec.

88. Il Canone assegnato c'insegna la maniera ancora di passare dall'equazione differenziale di una curva all'asse a quella del fuoco nel modo, che segue.

ESEMPIO I.

Si cerchi l'equazione al fuoco in un circolo, preso il fuoco in un punto della sua circonferenza A .

Sia (Fig. 8.) $AH = b$, $AG = x$, $AC = z = \sqrt{bx}$.

Richiamisi a memoria la formola $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$,

ove si è preso $q = \frac{bx}{z}$; poichè per l'equazione locale

del circolo è $bx = zz$, farà $q = z$, sicchè fatta svanire la q , sostituendo il suo valore z , farà $\frac{pdz}{z} = \frac{dz}{\sqrt{bb - zz}}$,

o sia $p = \frac{z}{\sqrt{bb - zz}}$; nella formola adunque $pdz = du$ se

in cambio di p sostituirassi il valore ritrovato, farà $\frac{zdz}{\sqrt{bb - zz}} = du$, equazione del circolo al fuoco preso nel punto A .

ESEMPIO II.

89. Si cerchi l'equazione delle sezioni coniche, riferite al loro umbilico M . (Fig. 6.)

Chiamata $MB = x$, $BD = y$, l'equazione generale,

le, che abbraccia tutte le sezioni del cono, farà
 $a \pm \frac{cx}{b} = \sqrt{xx + yy}$, cioè: alla parabola col parame-

tro $2a$, quando $c = b$; all'ellissi coll'asse trasverso
 $= \frac{2abb}{bb - cc}$, col conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{bb - cc}}$, distanza del suo-

co dal vertice $= \frac{ab}{b + c}$, se b sia maggiore di c ; all'

iperbola coll'asse trasverso $= \frac{2abb}{cc - bb}$, col conjugato
 $= \frac{2ab}{\sqrt{cc - bb}}$, distanza del vertice dall'umbilico $= \frac{ab}{b + c}$;

se b sia minore di c ; se $c = 0$, farà al circolo col dia-
 metro $= 2a$. Ma $\sqrt{xx + yy} = z$, dunque $a \pm \frac{cx}{b} = z$,

ed in oltre $bx = zq$, dunque $a \pm \frac{czq}{bb} = z$, ovvero
 $\pm \frac{bb}{c} \mp \frac{abb}{cz} = q$, e differenziando $\pm \frac{abcbdz}{cczz} = dq$, e

$qq = \frac{bbbb}{cc} - \frac{2abbbb}{ccz} + \frac{aabbbb}{cczz}$, ed $bb - qq = bb -$
 $\frac{bbbb}{cc} + \frac{2abbbb}{ccz} - \frac{aabbbb}{cczz}$, ayremo dunque

$\frac{dq}{\sqrt{bb - qq}} = \frac{\pm cbabdz}{cz\sqrt{bbcczz - bbb^2z^2 + 2abbb^2z - a^2bbbb}} = \frac{pdz}{z}$,
 dunque $p = \frac{\pm abb}{\sqrt{bbcczz - bbb^2z^2 + 2abbb^2z - aabbbb}}$, ed

essendo

essendo $p dz = du$, avremo l'equazione cercata $\pm abbdz = du$. Il segno

$\sqrt{bbcczz - bbbhzz + 2abbbhz - aabbbb}$ negativo serve, quando le assisse si prendono dal fuoco verso il vertice, il positivo al contrario ec.

90. Dissi doverfi ridurre l'equazione della curva al fuoco ad un'altra riferita all'asse, non perchè ciò sia necessario assolutamente per le compianazioni delle superficie, e per le cubature de' solidi, mentre tutto questo si può ottenere per mezzo del noto Teorema, cioè, che *La periferia della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa periferia è eguale alla superficie del solido, che dalla rotazione viene generato; e l'area della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa area è eguale al solido accennato; ma qui non si suppone il Lettore informato di essi centri di gravità.*

Ora per avere una sufficiente idea delle curve riferite al fuoco, mi faccio ad indagare la loro costruzione. Sia una di queste BCD , (Fig. 9.) le coordinate infinitamente prossime AC , AE , che partono dal punto A , si chiamino z , la loro differenza $FE = dz$, e l'archetto minimo CF descritto col centro A sia $= du$. La natura della curva venga generalmente espressa dall'equazione differenziale $p dz = du$, in cui la p è data in qualsivoglia modo per z . Si noti pertanto, che il

primo membro $p dz$, avendo le variabili z , che tutte prendono origine dal polo A , è integrabile o algebricamente, o trascendentemente; ma l'altro membro du , senza incorrere in paralogismo, non può sommarfi, non essendo egli già la flussione dell' arco u , perchè esso elemento du cresce, o cala in doppio senso, cioè ed in se stesso, e coll' aumentarsi o diminuirfi dell' ordinate AC , AE . Per procedere adunque aggiustatamente, col raggio arbitrario $AI = r$ si descriva il circolo IGH , e sia nella periferia determinato un punto qualunque I , da cui si prendano come da punto fisso gl' archi crescenti IG , IH ; e prorogate, se occorre, le variabili AC , AE fino in G , ed H , faranno simili i settori ACF , AGH , e però z , $du :: r$, GH , che si chiami dq , dunque $\frac{z dq}{r} = du$; ma per l'equazio-

ne generale della curva è $p dz = du$, dunque $\frac{z dq}{r} = p dz$, e però $\frac{r p dz}{z} = dq$; quindi sommando, sarà $\int \frac{r p dz}{z} = q = IG$.

Le costanti aggiunte, o levate nell' integrare altro non farebbero, che diversificare il sito del punto I .

ESEMPIO I.

Sia da costruirsi la spirale logaritmica, la di cui equazione è $\frac{adz}{b} = du$; ma $du = \frac{z dq}{r}$, dunque $\frac{adz}{b} = \frac{z dq}{r}$; o pure, perchè il raggio AI è assunto ad arbitrio, fatta $b = r$, e presa a come unità, $\frac{dz}{z} = dq$, ed integrando, $Iz = q$, la di cui effezione geometrica è trascendente, ma semplicissima.

ESEMPIO II.

Sia la spirale iperbolica della sottangente costante $= a$, e però l'equazione $\frac{adz}{z} = du$; ma $du = \frac{z dq}{r}$, dunque $\frac{ardz}{z} = dq$, e sommando sarà $b - \frac{ar}{z} = q$ cc.

In tali costruzioni si à sempre l'arco IG di circolo, che forma l'omogeneo di comparazione, l'altro membro $\int \frac{r p dz}{z}$ può essere integrabile analiticamente, come nel secondo esempio, o trascendentemente per via della quadratura dell'iperbola, come nel primo, o per qualunque altra più composta. Quindi in un solo caso le nostre curve possono esser algebriche, cioè quan-

do la quantità $\int \frac{rpdz}{z}$ possa ridursi alla rettificazione

d'un arco di cerchio, che al corrispondente IG stia, come numero a numero. Se la proporzione fosse per avventura sorda, allora la curva $BCE D$ farà bensì meccanica, ma non già dipendente dal tetragonismo del cerchio, riducendosi ad un problema diverso consistente nel dividere gl'archi circolari in qualunque data ragione, il che può ottenersi per mezzo dell'Elice o sia Spirale d'Archimede, o della Quadratrice di Dinostrato.

Le soprascritte cose ci somministrano un' altro modo di far passaggio dalle espressioni delle curve al fuoco a quelle, che si riferiscono all'asse, o al contrario. Giacchè $\frac{rpdz}{z} = dq = \frac{rrdt}{rr+tt}$, chiamata la tangente $IK = t$

(num. 26.), farà essa tangente t data analiticamente, o trascendentemente per z , ma $AI = r$, $AK = \sqrt{rr+tt}$, $AM = x$, $MC = y$, dunque $\frac{rz}{x} = \sqrt{rr+tt}$, e dopo le debite riduzioni, $\frac{r\sqrt{zz-xx}}{x} = t = \frac{ry}{x}$, ma t è dato

per z , e $z = \sqrt{xx+yy}$, dunque siamo arrivati alla curva locale all'asse, che tosto si riduce alle solite coordinate x, y . Tornando indietro per la stessa strada si passa dalle equazioni all'asse a quelle al fuoco.

Ripi-

Ripiglio l'esempio del num. 87., cioè la curva.

$zdz = du$ riferita al fuoco, per riferirla all'

$$\sqrt{cc - 2bz - zz}$$

asse. Poichè si è presa $p dz = du$ per equazione generale delle curve riferite al fuoco, sarà in questo caso particolare $p = \frac{z}{\sqrt{cc - 2bz - zz}}$, onde surrogato questo

$$\sqrt{cc - 2bz - zz}$$

valore in luogo di p nell'equazione $r p dz = dq = \frac{rr dt}{rr + tt}$,

$$\text{sarà } \frac{rdz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = \frac{rr dt}{rr + tt}. \text{ Faccio } b + z = s, dz = ds,$$

$bb + 2bz + zz = ss$, onde $-2bz - zz = bb - ss$, e sostituiti quelli valori, sarà $\frac{rds}{\sqrt{cc + bb - ss}} = \frac{rr dt}{rr + tt}$, cioè

$$\text{fatta } cc + bb = bb, \frac{rds}{\sqrt{bb - ss}}, \text{ o sia } \frac{rbds}{b\sqrt{bb - ss}} = \frac{rr dt}{rr + tt};$$

ma l'integrale del primo membro è un'arco di cerchio, di cui sia b il raggio, ed s il seno del complemento, (num. 37.) moltiplicato nella frazione costante $\frac{r}{b}$, e l'integrale del secondo è un'arco di cerchio del

raggio r , tangente t ; dunque il primo arco sarà al secondo, come b ad r , cioè saranno tra loro, come i raggi, dunque sono simili, dunque nella stessa ragione de' raggi sono pure le tangenti; e perchè la tangente del

del primo arco è $\frac{b}{t} \sqrt{bb - ss}$, farà $\frac{b}{t} \sqrt{bb - ss}$, $t :: b$,

r , cioè $t = \frac{r}{s} \sqrt{bb - ss}$, quindi restituito il valore di s , e posto $\frac{ry}{x}$ in luogo di t , si averà

$$\frac{ry}{x} = \frac{r \sqrt{bb - bb - 2bz - zz}}{b + z}, \text{ equazione ridotta all'asse,}$$

la quale si esprimerà con le sole coordinate x, y , ponendo in luogo di zz il valore $xx + yy$, e farà $by +$

$$y \sqrt{xx + yy} = x \sqrt{bb - bb - 2b \sqrt{xx + yy} - xx - yy},$$

che è la stessa della ritrovata al citato num. 87.

Per passare dall'equazioni all'asse a quelle del fuoco, prendo l'Esempio I. del num. 88. la di cui equazione al circolo è $z = \sqrt{bx}$ (Fig. 8.).

La tangente data per z dell'arco OQ descritto col centro A , raggio r , si trova essere $\frac{r \sqrt{bb - zz}}{z} = t$;

dunque nell'equazione canonica $dq = \frac{rrdt}{rr + tt}$ sostituiti in

luogo di t , e di dt i rispettivi valori, avremo
 $-dq = -\frac{rdx}{\sqrt{bb - zz}}$; pongo $-dq$, perchè crescen-

do AC , (z) cala l'arco OQ (q); ma $dq = \frac{rdu}{x}$, quin-

di

di $\frac{rdu}{z} = \frac{rdz}{\sqrt{bb-zz}}$, cioè $\frac{zdz}{\sqrt{bb-zz}} = du$, che è la stessa

la equazione della ritrovata al num. 88.

91. Nè meno sono necessarie le particolari formole, che si sono ritrovate nel caso delle curve con le coordinate in angolo obbliquo tra loro, perchè tali equazioni possono sempre mutarsi in altre, che abbiano le coordinate in angolo retto, ed indi poi si potrà servirsi delle solite formole.

Ed in fatti si chiami (Fig. 7.) $HG = p$, $AG = q$; è adunque $p = \frac{ny}{m}$, $q = x + \frac{ey}{m}$, denominando, come so-

pra, $AB = x$, $BD = y$, e la ragione del seno tutto al seno retto quella di m ad n , al seno del complemento quella di m ad e ; adunque farà $y = \frac{mp}{n}$, $x = q -$

$\frac{ey}{m} = q - \frac{ep}{n}$. Sostituiti per tanto nella proposta equazio-

ne in luogo di x , ed y questi valori dati per p , e q , avrassi l'equazione della curva con le coordinate in angolo retto fra loro. Ma succederà bene spesso, che l'equazione primitiva sia semplice, e trasformandola si faccia assai composta; anzi, che essendo separate le incognite nella proposta, non lo sieno nella trasformata, il che è di maggiore difficoltà, nè possano separarsi con le solite regole di divisioni, estrazioni di radici ec.

Tuttavia però in molti casi particolari non sarà forse mal fatto il mettere a prova, e l'una, e l'altra maniera per appigliarsi a quella, che nel dato caso sarà più comoda.

Ma sarà opportuno venire agl' Esempj, ne' quali, quando non si avvifi in contrario, intenderassi sempre, che le coordinate sian fra loro in angolo retto.

Delle Quadrature de' Spazj.

ESEMPIO I.

92. Sia ABC (Fig. 10.) una parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$, una qualunque affissa $AD = x$, $DB = y$, e debbasi quadrare lo spazio ADB . Sarà dunque $y = \sqrt{ax}$, e posto questo valore nella formola generale de' spazj (ydx) in luogo di y , sarà essa $dx\sqrt{ax}$, ed integrando $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$. La quantità b è la solita costante, che nelle integrazioni devesi aggiungere, e che ora fa d'uopo di determinare. Nel punto A , cioè quando $x = 0$, lo spazio è zero, adunque l'integrale $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$, che esprime questo spazio, deve pure essere zero, fatta $x = 0$, e però sarà $\frac{2}{3}0\sqrt{a0} + b = 0$, cioè $b = 0$; vale a dire, che in questo caso non devesi all'integrale aggiungere costante alcuna.

Adun-

Adunque sarà lo spazio $ABD = \frac{2}{3} x \sqrt{ax}$, ma $\sqrt{ax} = y$, onde $ABD = \frac{2}{3} xy$, cioè eguale a due terzi del rettangolo dell'affissa nell'ordinata.

Quindi se si volesse lo spazio chiuso da una fissa, e determinata affissa, ed ordinata, per esempio quando sia $x = 2a$; comechè, per l'equazione della curva, è in questo caso $y = \sqrt{2aa}$, sarà lo spazio $= \frac{4}{3} aa\sqrt{2}$. Se le affisse della parabola non principiaessero dal vertice A , ma da un dato punto D ; posta, per esempio $AD = a$, una qualunque $DE = x$, il parametro $= f$, sarà l'equazione $af + fx = yy$, ed $y = \sqrt{af + fx}$. Sostituito questo valore nella formola ydx , sarà essa $dx\sqrt{af + fx}$, ed integrando $\frac{2}{3} \times a + x\sqrt{af + fx} + b$ eguale allo spazio $DCEB$. Ma per determinare la costante b si rifletta, che nel punto D , cioè quando $x = 0$, lo spazio è eguale a zero, adunque nell'integrale fatta $x = 0$, dovrà essere $\frac{2}{3} a\sqrt{af} + b = 0$, e però la costante $b = -\frac{2a}{3}\sqrt{af}$; adunque per avere l'integrale compito, in luogo di aggiungere la b , bisognerà sottrarre $\frac{2}{3} a\sqrt{af}$, e però lo spazio ricercato $DCEB$ sarà $= \frac{2}{3} \times a + x\sqrt{af + fx} - \frac{2}{3} a\sqrt{af}$.

Sia $AE = a$, ed in E principj la x verso A , e sia

una qualunque $ED = x$, farà l'equazione $af - fx = yy$, ed $y = \sqrt{af - fx}$, onde $ydx = dx\sqrt{af - fx}$, ed integrando, farà $-\frac{2}{3} \overline{a - x} \times \overline{af - fx}^{\frac{1}{2}} + b$. Ma quando $x = 0$, lo spazio pure è $= 0$, adunque fatta nell'integrale $x = 0$, dovrà essere $-\frac{2}{3} a\sqrt{af} + b = 0$, e però $b = \frac{2}{3} a\sqrt{af}$; adunque lo spazio $EDBC = \frac{2}{3} a\sqrt{af} - \frac{2}{3} \overline{a - x} \times \overline{af - fx}^{\frac{1}{2}}$.

Si è veduto, che generalmente lo spazio AEC nella parabola è $= \frac{2}{3} AE \times EC$, così lo spazio $ADB = \frac{2}{3} AD \times DB$; adunque lo spazio $DECB$ farà $= \frac{2}{3} AE \times EC - \frac{2}{3} AD \times DB$, il che appunto confronta col calcolo dell'uno, e dell'altro caso dell'origine della x dal punto D verso E , e dal punto E verso D .

Prendo l'equazione generale a tutte le parabole di qualunque grado $a^m x^n = y^r$, onde farà $y = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$, e però la formola $ydx = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}} dx$, ed integrando, farà lo spazio $= \frac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r} + b$, ma presa $x = 0$, si trova essere $b = 0$, adunque non va aggiunta costante alcuna, e l'integrale ritrovato $\frac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r}$ è compito, e

ponendo y in luogo di $a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$, farà $\frac{rxy}{n+r} =$ allo spazio ricercato.

ESEMPIO II.

93. Sia la curva $y = \sqrt[m]{x+a}$, farà adunque $ydx = dx \sqrt[m]{x+a}$, ed integrando, farà lo spazio $\frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \times \overline{x+a}^{\frac{1}{m}} + b$.

Ma posta $x=0$, dovrà essere $b = -\frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$,
adunque l'integrale compito, cioè lo spazio ricercato
farà $= \frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \sqrt[m]{x+a} - \frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$.

ESEMPIO III.

94. Sia l'iperbola fra gl'asintoti FED , (Fig. 11.)
e sia $AB = x$, $BE = y$, e l'equazione $xy = aa$; farà
 $y = \frac{aa}{x}$, e però $ydx = \frac{aadx}{x}$, ed integrando, farà lo
spazio $= a \log x + b$, preso il logaritmo nella logaritmi-

ca della sottangente $= a$. Ma posta $x = 0$, il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, per la natura della logaritmica, adunque la quantità b da aggiungersi all'integrale deve essere quantità infinita, e positiva, e però infinito lo spazio compreso della curva EF prodotta in infinito, dall'asintoto, e dalle due coordinate AB , BE .

Sia l'iperboloide dell'equazione $a^2 = xyy$, farà $y = \sqrt{\frac{a^2}{x}}$, e però $ydx = dx \sqrt{\frac{a^2}{x}}$, ed integrando, farà lo spazio $= 2\sqrt{a^2x+b}$, ma posta $x = 0$, è $b = 0$, adunque non fa d'uopo aggiungere costante alcuna, e l'integrale compito, cioè lo spazio $ABEF$ infinitamente prodotto all'insù, farà $2\sqrt{a^2x}$, quantità finita, o sia, per l'equazione della curva, $= 2xy$.

Sia l'iperboloide dell'equazione $a^2 = xxy$; farà $y = \frac{a^2}{x}$, ed $ydx = \frac{a^2 dx}{x}$, ed integrando farà lo spazio $= -\frac{a^2}{x} + b$, ma posta $x = 0$, farà $\frac{a^2}{0}$ quantità infinita,

adunque b è eguale all'infinito, onde per avere l'integrale compito bisognerà aggiungere quantità infinita, e però sarà infinito lo spazio.

Sia generalmente l'equazione a tutte le iperboli-

di

di $a^{m+n} = x^m y^n$, farà $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}$, e però $\int y dx =$
 $\frac{m a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}+1}}{m-n} + b$. Se $m = 1$, $n = 1$, cioè $xy = aa$,

avremo $\int y dx = \frac{aa}{0} + b$, quantità infinita, onde lo spazio infinito, come si è veduto di sopra :

Se $n = 1$, $m = 2$, cioè $a^1 = xxy$, farà $\int y dx =$
 $2\sqrt{a^1 x} + b$; ma posta $x = 0$, farà pure $b = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio cercato $= 2\sqrt{a^1 x} = 2xy$, per l'equazione della curva, e però finito, quantunque infinitamente prodotto all'insù dalla parte di F .

Se $n = 2$, $m = 1$, cioè $a^1 = xxy$, farà $\int y dx =$
 $-\frac{a^1}{x} + b$, ma posta $x = 0$, farà $-\frac{a^1}{0}$ infinito, e però $b =$ all'infinito, adunque si deve aggiungere all'integrale quantità infinita, e però lo spazio sarà infinito.

Se $n = 1$, $m = 3$; cioè $a^1 = xxy^2$, farà $\int y dx =$
 $\frac{1}{2} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b$; ma posta $x = 0$, farà $b = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio, farà $= \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x x} =$
 $= \frac{3}{2} xy$, quantità finita, quantunque infinitamente prodotta all'insù.

Se

Se $n = 3$, $m = 1$; cioè $a' = x'y$, farà $\int ydx =$
 $-\frac{a'}{2x^2} + b$; ma posta $x = 0$, è $b = \infty$, adunque
 lo spazio infinito.

Se $n = 1$, $m = 4$; cioè $a' = xy^4$, farà $\int ydx =$
 $\frac{4}{3} \sqrt[4]{a'x^3} + b$; ma posta $x = 0$, farà $b = 0$, adunque
 l'integrale compito, cioè lo spazio, farà $= \frac{4}{3} \sqrt[4]{a'x^3} =$
 $\frac{4}{3} xy$, quantità finita.

Se $n = 4$, $m = 1$; cioè $a' = x^4y$, farà $\int ydx =$
 $-\frac{a'}{3x^3} + b$; ma posta $x = 0$, farà b eguale all'infinito,
 adunque infinito lo spazio. Con la stessa maniera
 si potrà procedere quanto si vuole.

Prendansi ora le assisse dal punto B , e si cerchi
 lo spazio $BCDE$. Sia dunque $AB = b$, $BC = x$,
 $CD = y$, e sia la stessa iperbola apolloniana, la di cui
 equazione $by + xy = aa$; adunque farà $y = \frac{aa}{b+x}$, e però
 $ydx = \frac{aadx}{b+x}$, ed integrando $\int ydx = a \int \frac{dx}{b+x} + f$, pre-
 so il logaritmo nella logaritmica della sottangente $= a$.

Ma

Ma per determinare la costante f , posta $x = 0$, dovrà essere $f = -a \int b$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio $BCDE$ sarà $a \int b + x - a \int b$.

Se si prenda $BC = x$ infinita, sarà infinito $\int b + x$; adunque lo spazio $EB CD$ infinitamente prodotto dalla parte di C è infinito.

Si prenda x negativa $= BA = -b$, sarà a $\int b + x$ eguale ad a moltiplicato nel logaritmo del zero; ma il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, adunque in questo caso lo spazio è negativo, cioè dalla parte di M , ed è infinito, come si è veduto anche di sopra, e però lo spazio tra l'iperbola apolloniana, e gli asintoti è infinito dall'una, e dall'altra parte infinitamente prodotto.

Sia l'iperboloide cubico dell'equazione $bxy + xxy = a^3$, sarà $y = \sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$, onde $ydx = dx \sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$, ed integrando

$\int ydx = 2\sqrt{a^3b + a^3x} + f$, ma posta $x = 0$, sarà $f = -2\sqrt{a^3b}$, adunque l'integrale compito, o sia lo spazio $EB CD$, sarà $2\sqrt{a^3b + a^3x} - 2\sqrt{a^3b}$, quantità algebrica. Presa x infinita, sarà infinito lo spazio $EB CD$ infinitamente prodotto dalla parte di C .

Preso x negativa $= BA = -b$, l'integrale sarà $-2\sqrt{a^3b}$, adunque lo spazio sarà negativo, cioè sa-

rà *FEBA*M, e sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di *M*, come si è pure veduto di sopra.

Sia l'iperboloide dell'equazione $\sqrt{b+x} \times y = a^2$, sarà $y = \frac{a^2}{\sqrt{b+x}}$, onde $ydx = \frac{a^2 dx}{\sqrt{b+x}}$. Ed integrando $\int ydx = -\frac{a^2}{\sqrt{b+x}} + f$, ma posta $x = 0$, sarà $f = \frac{a^2}{b}$; adunque l'integrale compito, cioè lo spazio *EBCD* sarà $= \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{\sqrt{b+x}}$. Presa x infinita, il termine $-\frac{a^2}{\sqrt{b+x}}$ sarà zero, adunque lo spazio sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di *C*. Sia x negativa $= BA = -b$, l'integrale sarà $\frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{0}$, ma $-\frac{a^2}{0}$ è quantità infinita, e negativa, adunque lo spazio sarà dalla parte di *M* infinito cc.

Con questo metodo operando troverassi, che lo spazio tra l'iperbola apolloniana, e gli asintoti infinitamente prodotto sarà infinito dall'una, e dall'altra parte; tra l'iperboloide primo cubico, e gli asintoti sarà finito dalla parte di *M*, ed infinito dalla parte di *C*; tra l'iperboloide secondo cubico, e gli asintoti sarà infinito dalla parte di *M*, e finito dalla parte di *C*; tra l'iperboloide primo del quarto grado, e gli asintoti sarà finito dalla parte di *M*, ed infinito dalla parte di *C*; tra l'iper-

Iperboloide secondo, e gli asintoti sarà finito dalla parte di C , ed infinito dalla parte di M ec.

Per porre in opera le serie. Prendo l'espressione dello spazio $BCDE$ della suddetta iperbola apolloniana, cioè $\frac{aadx}{b+x}$.

Ridotta questa in serie, sarà essa $= \frac{aadx}{b} - \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxx^2dx}{b^3} - \frac{aax^3dx}{b^4}$ ec., ed integrando $\frac{aax}{b} - \frac{a^2xx}{2bb} + \frac{a^2xx^2}{3b^3} - \frac{a^2xx^3}{4b^4}$ ec., la qual serie infinitamente prodotta

equivale appunto allo spazio $BCDE$, e se fosse sommabile, ci darebbe in termini finiti, cioè algebricamente lo spazio cercato, vale a dire la quadratura dell'iperbola, ma non essendo sommabile, quanti più termini di essa si prenderanno, principiando dal primo, tanto più ci avvicineremo al giusto valore dello spazio.

Prendo l'assissa BT dalla parte de' negativi, sarà l'equazione della curva $by - xy = aa$, e però $ydx = \frac{aadx}{b-x}$, e riducendo in serie, sarà

$ydx = \frac{aadx}{b} + \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxx^2dx}{b^3} + \frac{aax^3dx}{b^4} + \frac{aax^4dx}{b^5}$ ec., ed integrando, $\int ydx = \frac{aax}{b} + \frac{a^2xx}{2bb} + \frac{a^2xx^2}{3b^3} + \frac{a^2xx^3}{4b^4} + \frac{a^2xx^4}{5b^5}$ ec.

eguale allo spazio $BTPE$. Presa $BT = BA$, lo spazio $FEBAM$ infinitamente prodotto dalla parte di M sarà $= aa + \frac{aa}{2} + \frac{aa}{3} + \frac{aa}{4} + \frac{aa}{5}$ ec., serie di valore infinito; adunque lo spazio infinito.

ESEMPIO IV.

95. Fra gl'asintoti AS , AB (Fig. 12.) sia l'iperbola equilatera OC , e sia $AB = BC = a$, $BI = -x$. S'intenda descritta la curva meccanica BEF tale, che il rettangolo di AB in qualunque ordinata IE sia eguale al corrispondente spazio iperbolico $BCOI$. Si ricerca lo spazio indeterminato $SABEF$. Sia l'ordinata $IE = z$. Si è veduto, essere lo spazio $BCOI$ eguale alla serie $ax + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4aa} + \frac{x^5}{5a^3}$ ec., posta come

suppongo, $a = b$, adunque per la proprietà della curva, sarà $z = x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{3aa} + \frac{x^4}{4a^3}$ ec., e però $zdx =$

$x dx + \frac{xx dx}{2a} + \frac{x^3 dx}{3aa} + \frac{x^4 dx}{4a^3}$ ec.; ed integrando, sarà fi-

nalmente lo spazio $BIE = \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6a} + \frac{x^4}{12aa} + \frac{x^5}{20a^3} + \frac{x^6}{30a^4}$ ec.,

e presa $x = a = BA$ rispetto a tutto lo spazio $SABEF$

infi-

nitamente prodotto, farà esso $= \frac{aa}{2} + \frac{aa}{0} + \frac{aa}{12} + \frac{aa}{20} + \frac{aa}{30}$ ec.,

la qual serie è sommabile, ed è $= aa$, adunque è algebricamente quadrabile, ed eguale al quadrato di BA lo spazio infinitamente prodotto $SABEF$.

ESEMPIO V.

96. Sia l'iperbola ATC , (Fig. 13.) l'asse trasverso $DA=2a$, il parametro $=p$, $EB=x$, $BC=y$, e però l'equazione $xx - aa = \frac{2aay}{p}$, e si cerchi lo spazio ABC ;

farà dunque $y = \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$, e però la formola

$ydx = dx \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$. Fatto sparire il segno radicale,

e passando all'integrazione, troverassi con le solite maniere l'integrale in parte algebrico, ed in parte logaritmico, adunque lo spazio ABC dell'iperbola dipende dalla descrizione della logaritmica.

Se si voglia lo spazio $ACHE$, lo spazietto infinitesimo $ITCH$, fatta MT infinitamente prossima a BC , ne farà l'elemento, e però la formola farà xdy , in cui sostituendo in luogo di x il valore dato per y dall'equazione, farà $xdy = dy \sqrt{\frac{2aay + aap}{p}}$, il di cui inte-

grale

grale isteffamente dipende dalla logarithmica :

E se tanto nella formola ydx del primo spazio, quanto nella xdy del secondo si avesse sostituito in luogo di dx in quella, ed in luogo di dy in questa i rispettivi valori dati dall'equazione, si farebbero parimente ritrovati gl'integrali della stessa natura.

Per far uso delle serie. Prendo la formola dello spazio $ACHEA$, cioè xdy ; adunque $xdy =$

$$dy \sqrt{\frac{2ayy + aap}{p}}, \text{ e facendo per maggiore facilità } 2a = p,$$

(giacchè le costanti non alterano il metodo) cioè supposta l'iperbola equilatera, farà $xdy = dy \sqrt{yy + aa}$, e riducendo in serie il radicale, farà

$$xdy = a dy + \frac{yy dy}{2a} - \frac{y^3 dy}{8a^3} + \frac{y^5 dy}{16a^5} - \frac{5y^7 dy}{128a^7} \text{ ec. , ed inte-}$$

$$\text{grando } \int xdy, \text{ cioè lo spazio } ACHEA = ay + \frac{y^3}{6a} -$$

$$\frac{y^5}{40a^3} + \frac{y^7}{7 \times 16a^5} - \frac{5y^9}{9 \times 128a^7} \text{ ec. , serie che non si sa-}$$

sommare. E sottraendo questa serie dal rettangolo xy , avrassi lo spazio ABC .

Si conducano dal centro E le infinitamente prossime ET , EC , e sia AKP tangente nel vertice. Col centro E si descrivano gli archetti di circolo KQ , TR ;

farà

farà $AK = \frac{ay}{x}$, e $KP = \frac{axy - aydx}{xx}$, $ET = \sqrt{xx + yy}$,

$EK = \frac{a\sqrt{xx + yy}}{x}$, e per la similitudine de' triangoli

PKQ , KEA , o sia TEM , farà $KQ = \frac{axy - aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$;

e per la similitudine de' settori EKQ , ETR , farà
 $TR = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{xx + yy}}$, e però farà $\frac{1}{2} ET \times TR$, cioè $\frac{xdy - ydx}{2}$

l'elemento del settore ETA , e sostituendo in luogo di y ,
 e dy il valore dato dall'equazione della curva $y = \sqrt{xx - aa}$,
 (supposta equilatera l'iperbola) farà $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$, ed in-

tegrando $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$, cioè il settore $ETA =$

$-\frac{1}{2} a \int \frac{dx}{\sqrt{xx - aa}}$ nella logaritmica della sottan-
 gente $= a$, il quale spazio è espresso da quantità nega-
 tiva appunto, perchè si assume nel senso de' negativi.

Riducendo la formola in serie, troveremo $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}} =$

$$\frac{aadx}{2x} + \frac{a^3 dx}{4x^3} + \frac{3a^5 dx}{16x^5} + \frac{5a^7 dx}{32x^7} + \frac{35a^9 dx}{256x^9} \text{ ec.}$$

Ma per integrare il primo termine della serie fa-
 rebbe

rebbe d'uopo ridurre prima quello ancora ad una serie infinita; adunque sarà meglio fare più speditamente nel seguente modo. Sia $EM = x$, $MT = y$, $AK = z$, farà $KP = dz$, e sia $KE = p$, $AE = a$, semiaffe trasverso, il semiaffe conjugato $= b$. Sarà adunque $KQ = \frac{adz}{p}$,

$$ET = \frac{px}{a}, \quad TR = \frac{xdz}{p}, \quad \text{e però } \frac{1}{2} ET \times TR = \frac{xxdz}{2a},$$

ma, per l'equazione della curva, è $y = \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$,

e per i triangoli simili EAK , EMT , farà $y = \frac{xz}{a}$,

adunque $xz = b \sqrt{xx - aa}$, ed $xx = \frac{aabb}{bb - zz}$; e però

la formola sarà $\frac{abbdz}{2 \times bb - zz}$, cioè ridotta in serie

$$\frac{adz}{2} + \frac{azxdz}{2bb} + \frac{az^3dz}{2b^3} + \frac{az^5dz}{2b^5} + \frac{az^7dz}{2b^7} \text{ ec., ed integrando,}$$

$$\int \frac{abbdz}{2 \times bb - zz}, \quad \text{cioè lo spazio } ETA = \frac{az}{2} + \frac{az^3}{6bb}$$

$$+ \frac{az^5}{10b^3} + \frac{az^7}{14b^5} + \frac{az^9}{18b^7} \text{ ec.}$$

ESEMPIO VI.

97. Sia il circolo ABD (Fig. 14.) col diametro $AD = a$, e si cerchi l'area d'un qualunque mezzo segmento AHE . Fatta $AE = x$, $EH = y$, farà l'equazione $y = \sqrt{ax - xx}$, e però $y dx = dx \sqrt{ax - xx}$. Qui non occorre liberare la formola dalla radicale, o tentare altri modi, a fine di mutarla in un'altra capace d'essere integrata algebricamente, o per mezzo de' logaritmi, perchè farà fatica superflua, mentre ci ridurremo sempre ad una formola di quadratura, o rettificazione di circolo, come si è notato al num. 37., e però senz'altro potressi procedere con le serie.

Risolta adunque in serie la formola, farà

$$dx \sqrt{ax - xx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{\frac{1}{2}}{2a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{3}{2}} dx - \frac{\frac{1}{2}}{8a^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{5}{2}} dx - \frac{\frac{7}{2}}{16a^{\frac{5}{2}}} x^{\frac{7}{2}} dx \text{ cc.},$$

ed integrando $\int y dx$, cioè lo spazio $AHE =$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{5a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{5}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{28a^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{7}{2}} - \frac{\frac{7}{2}}{72a^{\frac{5}{2}}} x^{\frac{9}{2}} \text{ cc.}$$

Sia ora il raggio $CA = a$, e sia $CE = x$, $EH = y$,

e l'equazione $y = \sqrt{aa - xx}$; adunque $ydx = dx \sqrt{aa - xx}$,
e riducendo in serie, $ydx = adx - \frac{xxdx}{2a} - \frac{x^3dx}{8a^3} - \frac{x^5dx}{16a^5}$

$\frac{5x^5dx}{128a^7}$ ec., ed integrando, $\int ydx$, cioè lo spazio

$$CEHB = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} \text{ ec.},$$

e fatta $x = a$ rispetto a tutto il quadrante, $aa - \frac{aa}{6} - \frac{aa}{40} - \frac{aa}{112} - \frac{5aa}{1152}$ ec., ed il quadruplo di questa serie farà l'area di tutto il circolo.

Per mezzo d'un settore. Sia $CA = a$, $AQ = x$, e condotta CK infinitamente prossima alla CQ , farà $QK = dx$, $CQ = \sqrt{aa + xx}$, e descritto col centro C l'archetto infinitesimo QS , per la similitudine de' triangoli KSQ , QAC , farà $QS = \frac{adx}{\sqrt{aa + xx}}$, e però $MN =$

$\frac{aadx}{aa + xx}$; adunque il picciolo settore CMN , elemento

del settore CAM , farà $= \frac{a^2 dx}{2 \times aa + xx}$. Ridotto esso

per tanto in serie, farà $\frac{a^2 dx}{2 \times aa + xx} = \frac{a^2 dx}{2aa} - \frac{a^2 x dx}{2a^4} + \frac{a^2 x^2 dx}{2a^6} - \frac{a^2 x^3 dx}{2a^8} + \frac{a^2 x^4 dx}{2a^{10}}$ ec., ed inte-

grando,

grando, sarà $\int \frac{a^2 dx}{2 \times aa + xx}$, cioè il settore $CMA =$

$$\frac{ax}{2} - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{10a^3} - \frac{x^7}{14a^5} + \frac{x^9}{18a^7} \text{ ec., e posto, che l'arco}$$

AM sia la metà del quadrante, cioè presa $x = a$, la serie sarà $\frac{aa}{2} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{10} - \frac{aa}{14} \text{ ec.}$; ed il doppio, cioè

$$aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} - \frac{aa}{7} \text{ ec. farà il quadrante } ABC.$$

Se in vece di prendere il raggio $CA = a$, l'avessi preso $= \sqrt{\frac{aa}{8}}$, farebbe il quadrante $ABC =$

$$\frac{aa}{8} - \frac{aa}{3 \times 8} + \frac{aa}{5 \times 8} - \frac{aa}{7 \times 8} \text{ ec., e sottraendo attual-$$

mente ciascun termine negativo dall'antecedente positivo, sarà $\frac{aa}{8} + \frac{aa}{35} + \frac{aa}{99} + \frac{aa}{195} \text{ ec.,}$ che è la stessa serie inserita dal Sig. Leibnizio negl'atti di Lipsia dell'anno 1682.

ESEMPIO VII.

98. Sia l'ellissi BCD , (Fig. 15.) il semiasse trasverso $AB = a$, il semiasse conjugato $AC = b$, $AE = x$, $EH = y$, onde l'equazione $\frac{bb}{aa} \times aa - xx = yy$, e pe-

rò $ydx = \frac{b dx}{a} \sqrt{aa - xx}$, elemento dell'area $AEHC$.

Ma $dx \sqrt{aa - xx}$ è formola di quadratura del circolo BOD , il di cui diametro sia l'asse trasverso dell'ellissi, adunque dalla quadratura del circolo dipenderà la quadratura dell'ellissi. E perchè $\int \frac{b dx}{a} \sqrt{aa - xx} = EHCA$,

e $\int dx \sqrt{aa - xx} = EMOA$; sarà un qualunque spazio dell'ellissi al corrispondente spazio del circolo sul diametro DB , come b ad a , cioè come il semiasse, conjugato al semiasse trasverso, ed in conseguenza lo spazio intero dell'ellissi a tutto lo spazio del circolo nella stessa ragione. Ma poichè i circoli sono tra loro, come i quadrati de' diametri, o sia de' raggi, se faremo un circolo, il di cui raggio sia $= \sqrt{ab}$, cioè medio proporzionale tra i due semiasse dell'ellissi BCD , sarà questo circolo al circolo BOD , come ab , $aa :: b$, a , ma in questa medesima ragione è l'area dell'ellissi BCD allo stesso circolo BOD ; adunque l'area dell'ellissi sarà eguale all'area del circolo, il di cui raggio sia medio proporzionale fra i semiasse dell'ellissi.

Per mezzo della serie. Ridotta in serie la formola $\frac{b dx}{a} \sqrt{aa - xx}$, sarà essa $= \frac{b dx}{a} \times \frac{a - xx - \frac{x^4}{2a} - \frac{x^6}{8a^3} - \frac{x^8}{16a^5} - \frac{5x^{10}}{128a^7} \text{cc.}$,

ed

ed integrando $\int \frac{b dx}{a} \sqrt{aa - xx}$, cioè l'area $ACHE =$

$$bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8} \text{ ec.}, \text{ e fatta } x = a,$$

farà l'area ACB , quarta parte dell'ellissi, eguale ad $ab -$
 $\frac{ab}{6} - \frac{ab}{40} - \frac{ab}{112} - \frac{5ab}{1152} \text{ ec.}$

Nella stessa ellissi, preso un qualunque arco DS ; sia DP tangente in D , $AI = x$, $IS = y$, e per lo punto S condotta AP , le sia infinitamente prossima AK , che taglierà l'ellissi in T . Col centro A si descrivano gl'archetti di circolo KQ , TR ; sarà dunque $AS = \sqrt{xx + yy} = AT$, $DP = \frac{ay}{x}$, $AK = AP = \frac{a\sqrt{xx + yy}}{x}$,

$KP = -\frac{axy + aydx}{xx}$, essendo PK differenza negativa;

e per la similitudine de' triangoli PQK , PAD , sarà $QK = -\frac{axy + aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$, e per la similitudine de' settori

ATR , AKQ , sarà $TS = -\frac{xdy + ydx}{\sqrt{xx + yy}}$, e però

$TR \times \frac{AT}{x}$, cioè $-\frac{xdy + ydx}{2}$ sarà la formola per lo

spazio ACT , la quale, sostituito in luogo di y , e di dy il valore dato dall'equazione della curva, sarà finalmente

$$\frac{abdx}{2\sqrt{aa - xx}}.$$

Ma

Ma $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ è la rettificazione del circolo,

come si è veduto al num. 37., e come si vedrà in breve, adunque la quadratura de' settori ellittici dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo. Nè occorre affaticarsi per liberare la formola dal radicale, perchè, ciò non ostante, urteremo in un'altra dallo stesso circolo dipendente.

Per mezzo poi delle serie troveremo, essere,

$$\frac{abdx}{2\sqrt{aa - xx}} = \frac{bdx}{2} + \frac{bx^2dx}{4aa} + \frac{3bx^4dx}{16a^3} + \frac{5bx^6dx}{32a^5} +$$

$\frac{35bx^8dx}{256a^7}$ ec., ed integrando, avremo lo spazio $ATC =$

$$\frac{bx}{2} + \frac{bx^3}{12aa} + \frac{3bx^5}{80a^3} + \frac{5bx^7}{224a^5} + \frac{35bx^9}{2304a^7}$$

rispetto a tutto lo spazio ADC , quarta parte dello spazio intero dell' ellissi, sarà esso $= \frac{ab}{2} + \frac{ab}{12} + \frac{3ab}{80} +$

$$\frac{5ab}{224} + \frac{35ab}{2304}$$

Che se avessi voluto liberare la formola dal segno radicale, facendo la sostituzione $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xz}{a}$, si farebbe mutata in quest' altra $\frac{aabdz}{aa + zz}$, la quale ridotta in

serie

serie si trova essere $bdz - \frac{bzzdz}{aa} + \frac{bz^2dz}{a^2} - \frac{bz^3dz}{a^3} + \frac{bz^4dz}{a^4}$ ec.,

ed integrando, $bz - \frac{bz^2}{3aa} + \frac{bz^3}{5a^2} - \frac{bz^4}{7a^3} + \frac{bz^5}{9a^4}$ ec., e posta

$x = a$, nel qual caso è pure $z = a$, farà $ab - \frac{ab}{3} + \frac{ab}{5} -$

$\frac{ab}{7} + \frac{ab}{9}$ ec. rispetto al quadrante dell'ellissi.

E se si supponga $a = b$, l'ellissi passa ad essere un circolo del raggio $= a$, e la serie sarà $aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} -$

$\frac{aa}{7} + \frac{aa}{9}$ ec. come al num. 97., che esprimerà il qua-

drante; e però da qui ancora si vede, che l'area dell'ellissi è all'area del circolo, il di cui diametro sia eguale all'asse trasverso dell'ellissi, come l'asse conjugato all'asse trasverso della stessa ellissi.

ESEMPIO VIII.

99. Sia la cicloide NAM , (Fig. 16.) il circolo generatore ARH , e sia $AH = a$, $AB = x$, $BC = dx$, $BE = y$, $DF = dy$, farà l'equazione $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$

$\frac{dx \sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$. Ma lo spazietto $QEF P$ è l'elemento dello

spazio

spazio AEQ , adunque $FP \times PQ$, cioè $\frac{x dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$

$dx \sqrt{ax-xx}$ ne farà la formola; ma $\int dx \sqrt{ax-xx}$ è il segmento circolare ASB , adunque lo spazio cicloidale AEQ farà eguale al corrispondente spazio circolare ASB , e tutto lo spazio AMK al semicircolo. Ma il rettangolo $AHMK$ è quadruplo del semicircolo, poichè è il prodotto della semiperiferia nel diametro; adunque lo spazio AMH farà triplo del semicircolo, e però tutto lo spazio della cicloide triplo del circolo generatore.

Se si volesse immediatamente lo spazio AFC ; come che il piccolo spazio $FCBE$, cioè $y dx$ ne è l'elemento, e dall'equazione della curva abbiamo $dy = \frac{dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, si riduca in serie l'omogeneo di compa-

razione; moltiplicando prima per $\sqrt{x}$ il numeratore, e denominatore, onde sia $\frac{dx \sqrt{ax-xx}}{x} = a^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} -$

$\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{8a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{16a^{\frac{1}{2}}} \text{ ec. , e però integran-}$

do,

do, $\int \frac{dx \sqrt{ax - xx}}{x}$, cioè $y = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}}$ —

$\frac{\frac{5}{2}}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{7}{2}}{x^{\frac{5}{2}}}$ ec., onde $ydx = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} dx -$
 $20a^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{5}{2}}{x^{\frac{3}{2}}} - 56a^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{7}{2}}{x^{\frac{5}{2}}}$

$\frac{\frac{5}{2}}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \frac{\frac{7}{2}}{x^{\frac{5}{2}}} dx$ ec., e finalmente integrando ,
 $20a^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{5}{2}}{x^{\frac{3}{2}}} \quad 56a^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{7}{2}}{x^{\frac{5}{2}}}$

$\int ydx = ABE = \frac{4a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{70a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{252a^{\frac{1}{2}}}$ ec.

ESEMPIO IX.

100. Sia la concoide ADR , $CB = BA = a$, $CM = x$, $MD = y$, (Fig. 17.) e si voglia lo spazio $ADGB$. Chiamo $CG = z$, la quale farà sempre data per le x , ed y della proposta curva, come è affai chiaro. Sia CE infinitamente prossima a CD , e col centro C , cogli' intervalli CG , CD si descrivano i due archetti GI , DF , farà $HI = dz$, ed il trapezio $FDGI$ l'elemento del ricercato spazio. Per la similitudine de'

triangoli HIG , BGC , sarà $GI = \frac{adz}{\sqrt{zz - aa}}$, e per la

similitudine de' settori CGI , CDF , sarà $DF = \frac{azdz + aadz}{z\sqrt{zz - aa}}$. Ma il trapezio $FDGI$ è $= \overline{DF + GI} \times \frac{1}{2} GD =$

$$\frac{2aazdz + a^2dz}{2z\sqrt{zz - aa}}, \text{ dunque } \int \frac{2aazdz + a^2dz}{2z\sqrt{zz - aa}}, \text{ cioè } -$$

$a \sqrt{zz - aa} - z + a \times \text{arco di circolo col raggio} = a,$
 tangente $= \sqrt{zz - aa} - z$, (preso il logaritmo nella
 logaritmica della sottangente $= a$) sarà eguale allo spa-
 zio, che si cercava.

Si può niente meno avere lo spazio totale, ed i
 parziali della stessa concoide considerando la curva in
 relazione al suo asse. Sia nella stessa Figura $AB =$
 $DG = a = BC$, $BM = x$, $MD = y$, e dal punto G si
 tiri all'ordinata MD la perpendicolare GO , sarà $DO =$
 $\sqrt{aa - xx}$, per l'angolo retto GOD , e per la simili-
 tudine de' triangoli CBG , GOD sarà $BG = \frac{a\sqrt{aa - xx}}{x} =$
 MO ; dunque $MD = \sqrt{aa - xx} + \frac{a\sqrt{aa - xx}}{x} = y$,
 quindi $y dx$, cioè l'elemento dello spazio, sarà
 $dx \sqrt{aa - xx} + \frac{adx \sqrt{aa - xx}}{x}$. Il primo termine inte-

grato

grato dipende della quadratura del circolo, il secondo da quella dell'iperbola.

ESEMPIO X.

101. Sia AMI (Fig. 18.) la Cissoide di Diocle, la di cui equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$. Sarà dunque la formola,

sostituito il valore di y dato dall'equazione, $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{a-x^2}$,

il di cui integrale dipende dalla quadratura del circolo. Per avere il rapporto dello spazio totale della cissoide a quello del circolo generatore, si rifletta, che essendo l'equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$, farà anco $yy \times \frac{a-x}{ax-xx} = x^2$,

e però $y \sqrt{ax-xx} = xx$. Ciò posto, differenziando la proposta equazione $ayy - xyy = x^2$, viene $2aydy - 2xydy - yydx = 3xxdx$, cioè $2dy \times \frac{a-x}{a-x} - ydx = 3xxdx$, e

perchè $xx = y \sqrt{ax-xx}$, dunque $2dy \times \frac{y}{a-x} - ydx = 3dx \sqrt{ax-xx}$. Ma $dy \times \frac{y}{a-x}$ è l'elemento dello spazio $AMQB$, ydx è l'elemento dello spazio

AMP, ed integrando rispetto allo spazio totale, è
 $\int dy \times \overline{a-x} = \int y dx$, dunque in tale circostanza sarà
 $2 \int dy \times \overline{a-x} - \int y dx = \int dy \times \overline{a-x}$, e però
 $\int dy \times \overline{a-x} = 3 \int dx \sqrt{ax-xx}$, e perchè nel caso
 dello spazio totale della Cissoide $\int dx \sqrt{ax-xx}$ è l'a-
 rea del semicircolo *ABN*; quindi lo spazio della Cif-
 soide infinitamente prodotto è triplo del semicircolo ge-
 neratore,

ESEMPIO XL

102. Sia la Logaritmica *HBD* (*Fig. 19.*) all' asin-
 toto *MQ*, e sia *AB* = alla sottangente = *a*, *KH* = *y*,
AK = *x*, e l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$. Sarà adunque la

formola $y dx = a dy$, ed integrando $\int y dx = ay + bb$;
 ma posta *y* = *a*, farà *bb* = -*aa*, adunque l'integrale,
 compito, cioè lo spazio *AKHB* = *ay* - *aa*. Presa una
 qualunque altra ordinata *MN* = *z*, farà pure *AMNB* =
az - *aa*; adunque *MKHN* = *ay* - *az*. Sia l'ordinata
EF minore di *AB*, ed eguale ad *y*, *AE* = -*x*, farà

nello

nello stesso modo l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$, perchè essen-

do negativa la x , deve essere pure negativa la sua differenza, ma crescendo l'assissa x , cala l'ordinata y , adunque dovrà essere negativa la dy ; per lo che sarà pure negativo l'elemento dello spazio, sarà adunque esso elemento $-ydx$, cioè $-ady$, ed integrando, $-ay + bb$, ma quando y sia $= a$, sarà $bb = aa$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio $AEFB$ sarà $= aa - ay$; e posta $y = 0$, cioè quando egli sia infinitamente prodotto dalla parte di Q , sarà egli $= aa$; ed in conseguenza lo stesso spazio infinitamente prodotto dalla parte di Q , ma che principj da una qualunque ordinata $EF = y$, sarà $= ay$.

ESEMPIO XII.

103. La curva ABF sia la Trattoria, (Fig. 20.) la di cui proprietà primaria è, che la tangente BP di un qualunque punto B , sia sempre costante eguale ad una data retta. Si faccia una qualunque assissa $ED = x$, l'ordinata $DB = y$, l'arco della curva $AB = u$, e la data retta $= a$. Perchè crescendo l'assissa ED , cala l'ordinata DB , sarà negativo il di lei elemento, cioè $-dy$; quindi per la proprietà della curva avremo l'equazione

quazione $y \frac{du}{dy} = a$, e posto in luogo di du il valore

$\sqrt{dx^2 + dy^2}$, farà $dx = - \frac{dy \sqrt{aa - yy}}{y}$. Ciò fatto, nella

formola $y dx$ degli spazj posto in luogo di dx il valore dato dall'equazione della curva, avremo $- dy \sqrt{aa - yy}$, elemento di un qualunque spazio $ABDE$. Ma posta AE la prima delle ordinate $= a$, e col raggio EA descritto il quadrante AQM , e condotta BQ parallela ad MH , poichè $DB = EC = y$, e per la proprietà del circolo, $CQ = \sqrt{aa - yy}$, anco l'elemento dello spazio circolare CQA farà $- dy \sqrt{aa - yy}$; quindi lo spazio CQA eguale allo spazio $ABDE$, e così degl'altri, e per conseguenza lo spazio infinitamente prodotto compreso dalla trattoria ABF , dall'asintoto EH , e dalla retta AE farà eguale al quadrante AME .

ESEMPIO XIII.

104. Sia la spirale ACB , (Fig. 21.) ed $AB = a$ il raggio del circolo BMD , la di cui periferia $= b$, un qualunque arco $BD = x$, $AC = y$; farà l'equazione $by = ax$. Condotta AE infinitamente prossima ad AD , sia $ED = dx$, e col centro A si descriva l'archetto infinitesimo CH ; per la similitudine de' settori ACH ,
ADE

ADE , farà $CH = \frac{ydx}{a}$, e però il settore ACH , elemento dello spazio $ANCA$, farà $= \frac{yydx}{2a}$; ma, per l'equazione della curva, è $y = \frac{ax}{b}$, dunque esso elemento farà $= \frac{axxdx}{2bb}$, ed integrando, $\frac{ax^2}{6bb}$ (ommesa la costante, che è superflua) farà lo spazio ACN , e fatta $x = b$ rispetto a tutto lo spazio ANB , farà esso $= \frac{ab}{6}$.

Sia l'equazione generale alle infinite spirali $a^m x^n =$

$b^n y^m$, adunque farà $yy = \frac{aax^{\frac{2n}{m}}}{b^{\frac{2n}{m}}}$, e la formola dello

spazio farà $\frac{ax^{\frac{2n}{m}} dx}{2b^{\frac{2n}{m}}}$, ed integrando, $\frac{max^{\frac{2n}{m} + 1}}{4n + 2m}$, e fatta $x = b$, farà lo spazio intero $= \frac{mab}{4n + 2m}$.

E' facile a vedere, che lo spazio $ABMDCNA$ terminato dal raggio AB , dall'arco di circolo BMD , e dalla porzione ANC della spirale farà $\frac{ax}{2} - \frac{ax^2}{6bb}$, perchè egli è eguale al settore $ABMDA$ meno lo spazio ACN ; ma se lo volessimo per mezzo di formola diffe-

differenziale, basta osservare, che l'elemento di esso sarà il trapezio infinitesimo $ECHD$, il quale si fa essere $= \overline{DE + CH} \times \overline{CD}$, cioè $\frac{dx + ydx}{2} \times \frac{a - y}{2} = \frac{aadx - yydx}{2}$, e ponendo in luogo di yy il valore $\frac{axx}{bb}$ dato dall'equazione, sarà $\frac{aadx}{2} - \frac{axxdx}{2bb}$, ed integrando (ommesa la costante superflua) $\frac{adx}{2} - \frac{axx}{6bb}$.

ESEMPIO XIV.

105. Sia la parabola ABM (Fig. 22.) dell'equazione $ax = yy$, e sia $AC = x$, $CB = y$, e la ragione del seno tutto al seno retto dell'angolo BCD sia quella di a alla b ; al seno del complemento, quella di a alla f , sarà $BD = \frac{by}{a}$, $CD = \frac{fy}{a}$. Sia $CH = dx$, adunque $CH \times DB = CHMB$, elemento dello spazio ACB , e però la formola sarà $\frac{bydx}{a}$, e posto in luogo di y il valore dato dall'equazione, cioè $\sqrt{ax}$, sarà $\frac{bdx\sqrt{ax}}{a}$, ed integrando, $\frac{2bx\sqrt{ax}}{3a}$, o sia $\frac{2bxy}{3a} = \frac{2}{3} AC \times BD$, ommesa la costante superflua.

ESEM-

ESEMPIO XV.

106. Sia la parabola ACM (Fig. 23.) riferita al fuoco B , la di cui equazione sarà $\frac{adz}{\sqrt{2az - aa}} = du$, essen-

$$\sqrt{2az - aa}$$

do $BC = z$, $CD = du$, archetto infinitesimo di circolo, parametro $= 2a$. Sarà dunque il rettore infinitesimo BMC , o sia BDC l'elemento dello spazio ABC , e però zdu , cioè $\frac{azdz}{2\sqrt{2az - aa}}$ la formola, il di cui inte-

$$2\sqrt{2az - aa}$$

grale si trova essere $\frac{z + a\sqrt{2az - aa}}{6} + mm$. Ma presa

$z = BA = \frac{1}{2}a$, nel qual caso deve essere nullo lo spazio, farà $mm = 0$, adunque l'integrale compiuto, cioè lo spazio ABC , farà $= \frac{z + a\sqrt{2az - aa}}{6}$.

Ed in fatti dal punto C abbassata la perpendicolare CQ ad AQ , lo spazio BCA è eguale allo spazio QCA meno il triangolo BQC , ma fatta $BQ = x$, $QC = y$,

farà $QCA - QCB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a + x \times y - \frac{xy}{2} = \frac{2a + x \times y}{6}$

adunque $BCA = \frac{2a + x \times y}{6}$, ma per la proprietà della

parabola, $BC = AQ + AB = x + a$, cioè $z = x + a$,
 ed $y = \sqrt{aa + 2ax} = \sqrt{2az - aa}$; sostituiti adunque in
 luogo di x , ed y questi valori, troveremo $BCA =$
 $\frac{2a+x}{6} \times y = \frac{a+z}{6} \sqrt{2az - aa}$, come sopra.

ESEMPIO XVI.

107. Se la quarta parte AC (Fig. 24.) della periferia
 di circolo s'intenderà distesa nella retta (ac), e presa una
 qualunque porzione (ae) eguale all'arco AE , si alzi
 normale (ed) eguale al seno retto DE , la curva (at),
 che passerà per tutti i punti (d) così determinati, si
 chiama la linea de' seni retti. Prodotta (ae) onde sia
 eguale alla semicirconferenza del circolo, la curva ave-
 rà un'altro ramo al di là di (ct) simile, ed eguale
 al primo.

Sia il raggio $= r$, un qualunque arco $AE = x = (ae)$,
 il corrispondente seno $DE = y = (ed)$; poichè il differen-
 ziale, o sia la flussione dell'arco espressa per mezzo del
 seno si trova essere $\frac{r dy}{\sqrt{rr - yy}}$, avremo $dx = \frac{r dy}{\sqrt{rr - yy}}$,

equazione della nostra curva. La formola adunque $y dx$,
 sostituito il valore di dx , sarà $\frac{r y dy}{\sqrt{rr - yy}}$, ed integran-

do,

do, $-r\sqrt{rr-yy} + n$; ma posta $y=0$, viene $n=rr$, dunque l'integrale compito è $rr - r\sqrt{rr-yy} =$ allo spazio (*ade*), e fatta $y=r$, farà $rr =$ allo spazio totale. (*atc*). Quindi fatto il quadrato *TH* del raggio, e prodotto il seno *DE* in *M*, lo spazio (*ade*) farà eguale al rettangolo *DH*, e lo spazio totale (*atc*) eguale al quadrato *TH*.

108. Gli addotti esempj possono bastare per fare uso del metodo, rimane solamente d'avvertirsi, che molte volte le equazioni delle curve, gli spazj delle quali si vogliono quadrare (e ciò s'intenda pure rispetto alle rettificazioni, quadrature di superficie, e cubature) possono essere tali, che non abbiano le incognite separate, nè si possano separare colla sola divisione, ed in conseguenza non siano addattabili alle formole. Tale sarebbe la curva $x^3 + y^3 = axy$.

In questi casi bisogna valersi di qualche congrua sostituzione, per mezzo di cui l'equazione si trasformi in un'altra, in cui sieno separate, o separabili le incognite. Ma non si può generalmente definire, quale sostituzione debba farsi; bisognerà avere pratica, e provarne molte per ottenere, quando si possa, l'intento.

Rispetto alla proposta $x^3 + y^3 = axy$. Si ponga $y = \frac{axx}{zz}$, e fatta la sostituzione, farà l'equazio-

ne $x^3 + \frac{a^3 x^3}{z^3} = \frac{a^3 x^3}{z^3}$, cioè $x^3 = \frac{a^3 z^3 - z^6}{z^3}$. Differen-

ziando adunque, $xxdx = \frac{3a^3 z^2 dz - 6z^5 dz}{z^3}$; quindi

presa la formola degli spazj, cioè ydx , poichè per la sostituzione è $y = \frac{axx}{zz}$, sarà essa formola $\frac{axxdx}{zz}$, e

sostituendo in luogo di $xxdx$ il valore ritrovato $\frac{3a^3 z^2 dz - 6z^5 dz}{z^3}$, sarà $ydx = \frac{3a^3 z^2 dz - 6z^5 dz}{3z^2}$, ed inte-

grando $\int ydx = \frac{1}{3} zz - \frac{z^4}{2}$; e restituendo in luogo di zz

il valore $\frac{axx}{y}$, sarà finalmente $\int ydx = \frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy}$.

ESEMPIO XVII.

109. Sia la curva $a^3 xxyy - x^3 = a^6 y^3$, di cui si voglia lo spazio. Pongo $y = \frac{xx}{z}$, e l'equazione si trasformerà in quest'altra $a^3 z - x^3 z^3 = a^6$, da cui si ricava $x = a \sqrt[3]{\frac{aaz - a^3}{z}}$, e però $dx = \frac{a^3 dz}{3z \times \frac{aaz - a^3}{z}}$.

$adz \times \frac{1}{aaz - a^{\frac{1}{3}}}$, ed $y = \frac{aa \times aaz - a^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}}$; quindi a-

vremo l'elemento dello spazio, cioè $ydx = \frac{a^{\frac{1}{3}}dz}{3z^{\frac{4}{3}}}$

$\frac{a^{\frac{1}{3}}dz \times aaz - a^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}dz}{z^{\frac{4}{3}}} - \frac{2a^{\frac{1}{3}}dz}{3z^{\frac{4}{3}}}$, e però integrando
 $\int ydx = -\frac{a^{\frac{1}{3}}}{4z^{\frac{1}{3}}} + \frac{2a^{\frac{1}{3}}}{9z^{\frac{1}{3}}}$, e restituendo in luogo di z il suo

valore $\frac{xx}{y}$, farà $-\frac{a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{4x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{9x^{\frac{1}{3}}}$ lo spazio ricercato.

A questo proposito si potrà vedere il metodo del Signor Craigo nel suo libro: *De Calculo fluentium*.

Della rettificazione delle Curve.

ESEMPIO XVIII.

110. Sia da rettificarsi la parabola apolloniana, cioè da ritrovarsi una retta linea eguale ad un' arco qualunque della stessa parabola, la di cui equazione sia $ax = yy$. Differenziando farà $adx = 2ydy$, e $dx^{\frac{1}{2}} = \frac{2ydy}{\sqrt{ax}}$. Ma la formola per la rettificazione è $\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

ad

adun.

adunque sostituendo in questa, in luogo di dx^2 , il valore dato dall' equazione differenziata, sarà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{4yydy^2 + aady^2} = \frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa}$, elemento per la parabola apolloniana $ax = yy$. Passando alle integrazioni, fatta la sostituzione di $\sqrt{4yy + aa} = 2y + z$, a fine di levare il radicale, troveremo essere $\frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa} = -\frac{a'dz}{8z} - \frac{adz}{4z} - \frac{zdz}{8a}$, il di cui integrale si vede esse-

re in parte algebrico, ed in parte logaritmico, e però la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell'iperbola, la qual verità in quest'altro modo pure si scorge. Sia l'iperbola equilatera ADE (Fig. 25.) coi semiasse $= a$, $BC = x$ dal centro, $CD = 2y$, la di cui equazione sarà $xx - aa = 4yy$. Condotta GE infinitamente prossima ad HD , farà $HGED$ l'elemento dello spazio $ADHB$, ma $HGED$ si fa essere $2dy \sqrt{4yy + aa}$, che è la stessa formola della rettificazione della parabola, a riserva del denominatore costante $\frac{a}{2}$, dunque ec.

Per mezzo della serie. Prendo la sopra scritta formola per la rettificazione della parabola, cioè $\frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa}$,

la quale ridotta in serie sarà $= dy + \frac{2ydy}{aa} - \frac{2y^3dy}{a^3} + \frac{4y^5dy}{a^5} - \frac{10y^7dy}{a^7}$ ec., ed integrando, $\int \frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa}$,
cioè l'arco qualunque $= y + \frac{2y^3}{3aa} - \frac{2y^5}{5a^3} + \frac{4y^7}{7a^5} - \frac{10y^9}{9a^7}$ ec.

Se nella formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ in vece di sostituire in luogo di dx il valore dato per y dall'equazione della curva, sostituiremo in luogo di dy il valore dato per x , sarà essa $\frac{dx \sqrt{4ax + aa}}{\sqrt{4ax}}$, o sia $\frac{dx \sqrt{4xx + ax}}{2x}$,

la quale non è punto più trattabile dell'altra.

Se la parabola non fosse l'apolloniana, ma la seconda cubica, la di cui equazione è $axx = y^3$, differenziando sarebbe $dx^2 = \frac{3ydy^2}{4a}$, e però la formola,

$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{\frac{9y + 4a}{4a}}$, il di cui integrale sarà $\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} + m$; ma posta $y = 0$, sarà $m = -\frac{8a}{27}$; adunque l'integrale compito, cioè la lunghezza dell'arco sarà $\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} - \frac{8a}{27}$.

Se nella parabola apolloniana ADM (Fig. 26.) sarà

farà $AC = \frac{4x}{9}$, e si prenda una qualunque $CK = y$,

il parametro $= \frac{9x}{4}$, farà $AK = \frac{4a}{9} + y$, $KM = \sqrt{\frac{4xa + 9xy}{4}}$,

onde l'elemento dell'area $MKCD$ farà $dy \sqrt{\frac{4xa + 9xy}{4}}$,

che è lo stesso dell'elemento della lunghezza della seconda parabola cubica, a riserva della costante a , e però la rettificazione di questa, e la quadratura di quella è la stessa cosa, onde perchè quella è algebricamente quadrabile, questa è algebricamente rettificabile. Quindi generalmente, se l'espressione dell'elemento di una qualunque data curva diviso per la differenza dell'incognita si porrà per ordinata, e la incognita per l'assissa, onde nasca una nuova curva, la quadratura di questa ci darà la rettificazione della curva data.

ESEMPIO XIX.

111. Sia il circolo AEM , (Fig. 27.) AM diametro $= a$, $AB = x$, farà $BF = y = \sqrt{ax - xx}$; adunque $dy = \frac{1}{2} \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$, $dy^2 = \frac{1}{4} \frac{a^2dx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx}$,

e però FH elemento della curva $= \sqrt{dx^2 + dy^2} =$

$\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$, e riducendo in serie, farà

$$\frac{\frac{1}{a^2}x - \frac{1}{2}dx}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2 \times 2a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 2 \times 4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{5}{2}}dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6a^{\frac{5}{2}}} +$$

$\frac{105x^{\frac{7}{2}}dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8a^{\frac{7}{2}}}$ ec., ed integrando, farà $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} +$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 4 \times 5a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^{\frac{5}{2}}} +$$

$\frac{105x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^{\frac{7}{2}}}$ ec.; o pure essendo $dx^2 = dy^2 \times \frac{ax-xx}{\frac{1}{4}aa-ax+xx}$,

cioè (sostituendo yy in luogo di $ax-xx$) $dx^2 = \frac{yydy^2}{\frac{1}{4}aa-yy}$; posto questo valore in luogo di dx^2 nella

formola generale, farà essa $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ady}{2\sqrt{\frac{aa}{4}-yy}}$,

che ridotta in serie si trova essere

$$= dy + \frac{2yydy}{a^2} + \frac{6y^2dy}{a^4} + \frac{20y^3dy}{a^6} + \frac{70y^4dy}{a^8} \text{ ec. , ed inte-}$$

u

grando,

grando, sarà finalmente l'arco $AF =$

$$y + \frac{2y^3}{3aa} + \frac{6y^5}{5a^4} + \frac{20y^7}{7a^6} + \frac{70y^9}{9a^8} \text{ ec.}$$

Che se il raggio fosse stato $= a$, farebbe la serie,

$$y + \frac{y^3}{2 \times 3aa} + \frac{3y^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15y^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} + \frac{105y^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

E se finalmente sarà $DB = x$, DA raggio $= a$, sarà $y = \sqrt{aa - xx}$, e $dy = \frac{-x dx}{\sqrt{aa - xx}}$, adunque

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}, \text{ e riducendo in serie, sarà}$$

$$\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} = dx + \frac{xx dx}{2aa} + \frac{3x^4 dx}{2 \times 4a^4} + \frac{15x^6 dx}{2 \times 4 \times 6a^6} +$$

$$\frac{105x^8 dx}{2 \times 4 \times 6 \times 8a^8} \text{ ec., ed integrando, sarà l'arco } EF =$$

$$x + \frac{x^3}{2 \times 3aa} + \frac{3x^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} +$$

$$\frac{105x^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

ESEMPIO XX.

112. Sia l'ellissi ADC , (Fig. 28.) semiasse trasverso $AB = a$, semiasse conjugato $BD = b$, $BE = x$, $EO = y$, farà l'equazione $\frac{ayy}{bb} = aa - xx$, e però $ydy = -\frac{bbx dx}{aa}$, e $dy^2 = \frac{bbxx dx^2}{aa \times aa - xx}$, e la formola

$$\text{generale } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{bbxx dx^2}{a^2 - a^2xx}} = \frac{dx \sqrt{a^2 - a^2xx + bbxx}}{a \sqrt{a^2 - xx}}.$$

Se in luogo di sostituire il valore di dy dato per x dall'equazione, sostituiremo il valore di dx , farà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{\frac{a^2yy - b^2yy + b^4}{b^2bb - yy}}$. Ma e l'una, e

l'altra delle due ritrovate espressioni manca di una delle condizioni del num. 38., senza di cui si è veduto, che queste formole non si possono liberare dai segni radicali, e preparare per l'integrazioni. Adunque per passare alle serie,

prendo una delle due formole, per esempio

$dx \sqrt{a^2 - aaxx + bbxx}$, la quale si esprime con l'equi-

$$a \sqrt{aa - xx}$$

valente $dx \sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^2 - aaxx}}$, e questa ridotta in serie

$$\text{sarà} = dx + \frac{\frac{1}{2} bbxx dx}{aa \times aa - xx} - \frac{\frac{1}{8} b^2 x^2 dx}{a^4 \times aa - xx^2} +$$

$$\frac{\frac{1}{16} b^4 x^4 dx}{a^6 \times aa - xx^3} - \frac{\frac{5}{128} b^4 x^4 dx}{a^8 \times aa - xx^4} \text{ ec., e riducendo in}$$

oltre in serie ciascun termine di questa, cominciando dal secondo, sarà

$$\begin{aligned} dx \sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^2 - aaxx}} &= dx + \frac{\frac{1}{2} bbxx dx \times \frac{1 + \frac{xx}{aa} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} \text{ ec.}}{aa} \\ &- \frac{\frac{1}{8} b^2 x^2 dx \times \frac{1 + \frac{2xx}{a^2} + \frac{3x^4}{a^4} + \frac{4x^6}{a^{10}} \text{ ec.}}{a^4}} \\ &+ \frac{\frac{1}{16} b^4 x^4 dx \times \frac{1 + \frac{3xx}{a^2} + \frac{6x^4}{a^{10}} + \frac{10x^6}{a^{12}} \text{ ec.}}{a^6}} \\ &- \frac{\frac{5}{128} b^4 x^4 dx \times \frac{1 + \frac{4xx}{a^2} + \frac{10x^4}{a^{10}} + \frac{20x^6}{a^{14}} \text{ ec.}}{a^8}} \end{aligned}$$

ed

ed integrando, sarà l'arco DO , cioè

$$\int dx \sqrt{1+bbxx} = x + \frac{\frac{1}{2}bb \times \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9}}{aa} \text{ ec.}$$

$$- \frac{\frac{1}{8}b^4 \times \frac{x^5}{5a^5} + \frac{2x^7}{7a^7} + \frac{3x^9}{9a^9} + \frac{4x^{11}}{11a^{11}}}{a^4} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{\frac{1}{16}b^6 \times \frac{x^7}{7a^7} + \frac{3x^9}{9a^9} + \frac{6x^{11}}{11a^{11}}}{a^6} \text{ ec.}$$

$$- \frac{\frac{5}{128}b^8 \times \frac{x^9}{9a^9} + \frac{4x^{11}}{11a^{11}}}{a^8} \text{ ec.,}$$

e finalmente riducendo alla stessa denominazione i termini omogenei, troveremo $DO =$

$$x + \frac{bbx^3}{6a^4} + \frac{4aab - b^4 \times x^5}{40a^5} + \frac{8a^2bb - 4aab^4 + b^6 \times x^7}{112a^{12}} +$$

$$\frac{64a^3bb - 48a^2b^4 + 24aab^6 - 5b^8 \times x^9}{9 \times 128a^{10}} \text{ ec. Che se vo-$$

gliasi supporre $a=b$, nel qual caso l'ellissi diviene un circolo, sarà l'arco $DO = x + \frac{x^3}{6aa} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} +$

$\frac{35x^9}{9 \times 128a^8}$ ec. appunto come sopra al num. 111.

In

In altra maniera ancora . Nella formola

$dx \sqrt{a^2 - aaxx + bbxx}$ si faccia $bb - aa = -cc$, onde

$$a \sqrt{aa - xx}$$

sia $dx \sqrt{a^2 - ccxx}$; risolti in serie i due radicali, farà

$$a \sqrt{aa - xx}$$

$$\frac{dx \sqrt{a^2 - ccxx}}{a \sqrt{aa - xx}} = \frac{dx}{a} \times \frac{aa - ccxx - c^2 x^4 - c^4 x^6 - 5c^6 x^8 cc}{2aa \quad 8a^6 \quad 16a^{10} \quad 128a^{14}}$$

$$a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} cc.$$

e facendo attualmente la divisione del numeratore per lo denominatore, dopo un lunghissimo calcolo troveremo un'altra serie, la quale integrata, e restituito in luogo di cc il suo valore, ci darà la medesima serie di sopra, che esprime il valore dell'arco DO .

ESEMPIO XXI.

113. Sia l'iperbola BD , (Fig. 29.) semiasse trasverso $AB = a$, semiasse conjugato $AE = b$, $CD = y$, $AC = x$, farà l'equazione $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; adunque

differenziando farà $dx = \frac{a y dy}{b \sqrt{bb + yy}}$, onde

de

$$\text{de } \sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{1 + \frac{aay}{b^2 + bby}} = \frac{dy}{b} \sqrt{bby + aay + b^2},$$

e però ridotta questa in serie o nell'una, o nell'altra maniera usata intorno all'ellissi, troveremo essere il suo integrale, cioè l'arco $BD = y + \frac{aay}{6b^2} - \frac{4aabb - a^2 \times y^2}{40b^4} +$

$$\frac{8aab^2 + 4a^2bb + a^2 \times y^2}{112b^{12}} - \frac{64aab^6 - 48a^2b^4 - 24a^2bb - 5a^2 \times y^2 \text{ ec.}}{9 \times 128b^{16}},$$

che è la stessa serie dell'ellissi, a riserva de' segni, e della mutazione delle veci delle costanti a, b .

ESEMPIO XXII.

114. Sia la cicloide dell'Esempio VIII. delle quadrature, (Fig. 16.) la di cui equazione sappiamo essere

$$dy = \frac{dx \sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}; \text{ adunque sarà la formola } \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$\frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{x}}, \text{ e però integrando, sarà l'arco } FA = 2\sqrt{ax} =$$

al doppio della corda AS del corrispondente arco di circolo AS , e posta $x = a$, sarà AM doppia del diametro del circolo generatore, e però tutta la cicloide quadrupla.

ESEMPIO XXIII.

115. Sia la trattoria ABF , (Fig. 20.) la di cui equazione (num. 103.) è $-\frac{ydu}{dy} = a$; dunque $du = -\frac{ady}{y}$,

ed integrando, un qualunque arco $AB = u = -\int y \pm n$ nella logaritmica della sottotangente $= a$; ma fatta $u = 0$, è $y = a$, e $\int y = 0$, dunque $n = 0$, e l'integrale compiuto farà $u = -\int y$. Se pertanto con la sottotangente AE , per lo punto A , all'asintoto MH si descriva la logaritmica AKS , preso un qualunque punto B nella trattoria, e condotta alla logaritmica la BK parallela all'asintoto, ed abbassata la normale KN , l'intercetta NE farà eguale all'arco AB .

ESEMPIO XXIV.

116. Sia la spirale d'Archimede ACB del num. 104., (Fig. 21.) il raggio del circolo $= a$, la circonferenza $= b$, l'arco $BMD = x$, $AC = y$. Sia AE infinitamente prossima ad AD , e però $DE = dx$. Col centro A sia descritto l'arco CH , farà $CH = \frac{ydx}{a}$,

ed

ed $OH = dy$; adunque farà CO l'elemento della curva $= \sqrt{yy dx^2 + aady^2}$, ma l'equazione della curva è $ax = by$, e però $dx^2 = \frac{bbdy^2}{aa}$, onde, fatta la sostituzione, farà $CO = \frac{dy}{aa} \sqrt{a^4 + bbbyy}$, il di cui integrale, dopo un lungo calcolo, che ommetto per brevità, troveremo dipendere da' logaritmi, o sia dalla quadratura dell'iperbola.

Per mezzo delle serie. Faccio in primo luogo

$a^4 = bbmm$, onde la formola sia questa $\frac{b dy}{aa} \sqrt{mm + yy}$,

che ridotta in serie è =

$\frac{b dy}{aa} \times \frac{m + yy}{2m} - \frac{y^3}{8m^3} + \frac{y^5}{16m^5} - \frac{5y^7}{128m^7}$ ec., e però inte-

grando, cioè l'arco AC farà $= \frac{bmy}{aa} + \frac{by^3}{6aam} - \frac{by^5}{40aam^3} +$

$\frac{by^7}{112aam^5} - \frac{5by^9}{9 \times 128aam^7}$ ec., e fatta $y^2 = a$, farà tutta

la curva $ACB = \frac{bm}{a} + \frac{ab}{6m} - \frac{a^3b}{40m^3} + \frac{a^5b}{112m^5} - \frac{5a^7b}{9 \times 128m^7}$ ec.,

cioè restituendo in luogo di m il valore $\frac{a^2}{b}$, $ACB =$

$a + \frac{bb}{6a} - \frac{b^3}{40a^3} + \frac{b^5}{112a^5} - \frac{5b^7}{9 \times 128a^7}$ ec.

Se la curva fosse la logaritmica spirale ABC , (Fig. 30.) la di cui equazione $ady = bdx$, chiamando $RB = y$, e l'archetto infinitesimo $BD = dx$, posto nella formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ il valore di dx dato dall'equazione, farà essa $\frac{dy \sqrt{aa + bb}}{b}$, ed integrando, la curva $AB = \frac{y}{b} \sqrt{aa + bb}$.

Sia la curva ABC la spirale iperbolica, in cui la sottangente deve sempre essere costante, e però l'equazione, denominando come sopra, $ydx = ady$, farà dunque $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy}$; l'integrale della qual formola, liberata che sia dal segno radicale, troveremo dipendere dalla logaritmica.

Per mezzo della serie troveremo $\frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy} = \frac{ady}{y} + \frac{ydy}{2a} - \frac{y^3 dy}{8a^3} + \frac{y^5 dy}{16a^5} - \frac{5y^7 dy}{128a^7}$ ec.; ma volendo passare all'integrazioni, il primo termine non è integrabile, se non per mezzo d'un'altra serie infinita; adunque la somma della soprascritta serie integrata, eccetto il primo termine, con l'integrale della serie, che esprime esso primo termine, formerà una serie, che farà il valore della proposta curva.

ESEMPIO XXV.

117. Sia la logaritmica HBD , (Fig. 19.) AB sottangente $= a$, $AK = x$, $KH = y$, e l'equazione $ady = dx$. Posto nella formola generale il valore di dx , farà $\frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy}$, il di cui integrale dipende dalla stessa logaritmica. Ometto l'uso delle serie, che abbastanza s'è veduto ne' superiori Esempj.

ESEMPIO XXVI.

118. Sia la parabola apolloniana con le coordinate in angolo obliquuo dell'equazione $ax = yy$. Differenziata questa, e sostituito nella formola generale delle rettificazioni, quando le coordinate sono in angolo obliquuo, cioè nella formola $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxy}{m}}$, in luogo di dx , e di dx^2 il loro valore dato per y , si avrà $\frac{2dy}{a} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$, il di cui integrale è in parte algebrico, ed in parte dipende dalla quadratura dell'iperbola.

ESEMPIO XXVII.

119. Sia l'equazione $\frac{x^2}{1} = y$ alle infinite parabole, ed alle infinite iperbole fra gl'asintoti. Differenziando sarà $x^2 - 1 dx = dy$, ed $x^{2t-2} dx^2 = dy^2$, onde $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, elemento della curva, $= dx \sqrt{x^{2t-2} + 1}$. Passando all'integrazioni, per valermi del metodo del num. 61. espongo la formola nel seguente modo

$$\frac{dx}{x^{2t-2} + 1} \quad - \frac{1}{2}$$

La formola canonica $\frac{x^n dx}{x^m + a^m}$ del suddetto numero è

integrabile algebricamente quando sia $1 - \frac{m+n}{m}$ numero intero affermativo; e se sia intero negativo, si ridurrà alle note semplici quadrature. Paragonando questa formola $\frac{dx}{x^{2t-2} + 1}$ con la canonica, si ha $n=0$,

$$\frac{dx}{x^{2t-2} + 1} \quad - \frac{1}{2}$$

$2t-2=m$, a = all'unità; per lo che converrà, che sia $1 - \frac{2t+2}{2t-2}$ numero intero, che chiamo b , dunque

$1 - \frac{2t+2}{2t-2}$, cioè $\frac{3-2t}{2t-2} = b$, e conseguentemente

te $\frac{3+2b}{2+2b} = t$, esponente determinatore delle curve infinite.

Sia b numero positivo intero, principiando dal nulla. Se $b = 0$, farà $t = \frac{3}{2}$; se $b = 1$, farà $t = \frac{5}{4}$; sia b qualunque numero della serie de' numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ec., faranno espressi gl' innumerabili valori dell' esponente t dalla seguente progressione $t = \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}$ ec. L'andamento della serie è manifesto, ed in tutti questi casi le curve paraboliche sono algebricamente rettificabili, e la prima di esse è la seconda parabola cubica.

Sia b eguale ad un numero intero negativo, ed in primo luogo sia $b = -1$, torna in campo la seconda parabola cubica, equivalendo -1 al $+1$; sia $b = -2$, l'esponente t diventa eguale ad $\frac{1}{0}$, e di conseguenza infinito; sia $b = -3$, farà $t = \frac{1}{2}$; sia $b = -4$, farà $t = \frac{3}{4}$, e così di mano in mano, e gl' infiniti valori dell' esponente t faranno espressi dalla progressione $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$ ec., e le curve paraboliche indi nascenti rettificabili per via delle note quadrature.

La prima curva, che ci si affaccia, è la parabola conica, la di cui rettificazione richiede (num. 110.) la quadratura dell'iperbola.

L'altro caso, in cui la formola generale del num. 61., o è integrabile algebricamente, o per mezzo delle note quadrature, è che $u = \frac{1}{m} - 1 - \frac{n}{m}$ sia numero intero, cioè, sostituendo le spezie particolari di questo esempio, $-\frac{3t+2}{2t-2} = b$, e però $\frac{2+2b}{3+2b} = t$, esponente determinatore delle curve infinite.

Sia b numero intero positivo, principiando dal zero, avremo la seguente progressione

$$t = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11} \text{ ec.}$$

Sia b intero negativo, ed in primo luogo sia $b = -0$, torna in campo lo stesso esponente $t = \frac{2}{3}$, equivalendo -0 al $+0$; sia $b = -1$, l'esponente t diventa eguale alla frazione $\frac{0}{1}$, e di conseguenza nullo;

sia $b = -2$, $b = -3$ ec., avremo la seguente progressione $t = \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}$ ec.

La frazione, che dà il valore dell'esponente determinatore t , è la stessa nell'uno, e nell'altro caso, solo che nel secondo è inversa del primo, dal che dovevano

no nascere, come di fatto sono nate inverse le progressioni; le curve adunque scoperte per mezzo dell'una, e dell'altra formola sono le medesime, ma congl'esponenti inversi, vale a dire riferite a due assi differenti; a cagion d'esempio i due esponenti $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$ appartengono alla parabola apolloniana, che in due ma-

niera ci si presenta $x^{\frac{1}{2}} = y$, vale a dire $x = yy$; ed in oltre $xx = y$, equazione locale al trilineo parabolico.

Quelle curve pertanto, che sono inchiusse nelle premesse progressioni, o sono integrabili algebricamente, o non esigono quadrature oltre il circolo, e l'iperbola; ma le altre infinite richieggon tetragonismi più alti.

Dalle nostre progressioni appare, che il valore dell'esponente t non è mai negativo, onde nessuna iperbola non ammette rettificazione nè algebrica, nè dipendente dalle mentovate più semplici quadrature.

Delle Cubature.

ESEMPIO XXIII.

120. Sia il cono retto $ACGKA$; (Fig. 31.) $AB = a$, $BC = b$, una qualunque porzione AD dell'asse AB sia $= x$,
farà

farà y , cioè $DE = \frac{bx}{a}$, e però nella formola generale

$\frac{cyydx}{2r}$ sostituito questo valore in luogo di y , farà essa

$\frac{cbbxxdx}{2ar}$, ed integrando $\frac{cbbx^2}{6ar}$, rispetto ad una qualun-

que porzione presa dal vertice (ommessa la costante superflua), e fatta $x = a$, farà tutto il cono $ACGKA = \frac{cbb}{6r} = \frac{cbb}{2r} \times \frac{a}{3}$, cioè eguale al prodotto della base nella terza parte dell'altezza.

E perchè la solidità de' cilindri è il prodotto della base nell'altezza, farà il cilindro al cono inscritto, come 3 ad 1.

Il cono $ACGKA$ è adunque $= \frac{cbb}{6r}$, ed il cono $AIEMP = \frac{cbbx^3}{6ar}$, adunque il frusto di cono $IMCK$

farà $\frac{cbb}{6r} \times a - \frac{x^3}{6a}$, e però sarà a tutto il cono nella ragione di $a^3 - x^3$ ad a^3 ; onde se per esempio faremo $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$, farà il frusto a tutto il cono, come $a^3 - \frac{a^3}{8}$, a^3 ; cioè come 7, 8, ed al cono $AEMPI$,

come 7, 1.

Ogni qual volta però si pensa a misurare qualche solido, fa di mestieri considerare, di quali elementi in-

ten-

tendiamo, ch'egli sia composto giusta le differenti sezioni, che possono adoprarfi, tornando in acconcio ora l'una, ora l'altra secondo le circostanze; indi fra i suddetti elementi scegliere quelli, che con maggiore facilità possono maneggiarsi, ed a' quali più naturalmente il calcolo s'adatta. Nel cono retto, per esempio, di cui si tratta, vi sono tanti cerchi paralleli alla base; ed oltre ciò tanti triangoli, che hanno comune il vertice con quello del cono, e per base le ordinate, parallele del circolo CGK ; si può ancora tagliare il cono con tante parabole fra loro equidistanti, e con gl'assi paralleli al lato AK , ed altre molte sezioni possono farsi.

Egli è bensì vero, che per ritrovare la solidità del cono sì fatti mezzi devono riputarfi fuor di proposito, e troppo composti per lo proposto caso; ma si potrebbe proporre di tagliare il cono, o altro solido con un piano qualunque, ed indi misurare i due pezzi, in cui egli è diviso, ed in questo caso conviene far uso di quelli elementi, che a tale sezione corrispondono, come si vedrà negl'esempj 37., e 38.

ESEMPIO XXIX.

121. Sia il semicircolo CDK , (Fig. 32.) che s'aggiri attorno al raggio immobile DB , onde produca un'emisfero, e sia $DB = a$, $DA = x$, farà $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$. Sostituito adunque questo valore nella formula generale, farà essa $\frac{cdx}{2r} \times 2ax - xx$, ed integrando, farà la solidità del segmento indefinito $AEM = \frac{3caxx - cx^3}{6r}$, e fatta $x = a$, farà la solidità dell'emisfero $= \frac{ca^3}{3r}$, ed il doppio $\frac{2ca^3}{3r}$ tutta la sfera.

E perchè il cilindro, la di cui altezza eguale al diametro della base sia $= 2a$, è $= \frac{ca^3}{r}$, farà il cilindro circoscritto alla sfera inscritta, come $\frac{ca^3}{r}$ a $\frac{2ca^3}{3r} :: 3, 2$, ed in conseguenza nella stessa ragione la metà del cilindro all'emisfero. Ma il cono pure, la di cui altezza eguale al raggio della base sia $= a$, raggio della sfera, è $= \frac{ca^3}{6r}$, adunque farà l'emisfero al cono inscritto, come 2, 1.

In

In oltre essendo, come è noto, $= \sqrt{\frac{3aa}{2}}$ il raggio

della base del cono equilatero Inscritto nella sfera, il di cui raggio sia $= a$, ed essendo l'altezza di esso $= \frac{3a}{2}$,

farà il cono $= \frac{9ca^3}{48r}$, e la sfera farà $= \frac{2ca^3}{3r}$, e però la

sfera al cono come $\frac{2}{3}, \frac{9}{48}$, cioè, come 32 al 9. In-

simil modo si possono dimostrare quanti teoremi si vogliono d'Archimede in questo proposito.

E' chiara la maniera di avere un qualunque settore di sfera generato per esempio dal settore $BEDM$ del circolo; imperciocchè al segmento di sfera generato dalla figura AED , che si fa essere $= \frac{3caax - cx^3}{6r}$,

s'aggiunga il cono generato dal triangolo $EB A$, e che si troverà essere $= \frac{c}{6r} \times \frac{2ax - xx \times a - x}{3}$, e la somma,

cioè $\frac{caax}{3r}$ farà il settore cercato.

ESEMPIO XXX.

122. Sia (*Fig. 33.*) la parabola di qualunque ordine, la di cui equazione $y^m = a^{m-1}x$, la quale ruotandosi attorno all'asse AM generi il conoide parabolico. Sarà

y 2

dun-

dunque $y = a^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$, ed $yy = a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}}$, e però la formola generale, sostituito questo valore, farà

$$\frac{ca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}} dx}{2r}, \text{ ed integrando, } \frac{mca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{m+2}{m}}}{2r \times \frac{m+2}{2}}$$

la solidità del conoide indefinito; o pure, perchè $x^{\frac{2}{m}} =$

$$\frac{yy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}, \text{ e però } x^{\frac{2+m}{m}} = \frac{xyy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}, \text{ sostituendo questo}$$

valore nell' integrale ritrovato, farà esso $\frac{mcxyy}{2r \times \frac{m+2}{2}}.$

Sia $m = 2$, cioè la parabola apolloniana, farà il conoide $= \frac{cxyy}{4r}$, cioè il prodotto della base nella metà dell'altezza, ed in conseguenza il detto conoide farà la metà del cilindro nella medesima altezza, e nella medesima base.

Se si volesse la solidità della scodella, o sia il solido generato dalla figura ACD mossa attorno all'asse AB , dal cilindro descritto dal rettangolo $ABCD$, che sapiamo essere $= \frac{cxyy}{2r}$, si sottragga il conoide parabolico

$$\frac{mcxyy}{2r \times \frac{m+2}{2}}, \text{ il residuo } \frac{cxyy}{r \times \frac{m+2}{2}} \text{ farà la scodella. E fat-}$$

ta $m = 2$ rispetto alla parabola apolloniana, farà la sconda $\frac{cxy}{4r}$ metà del cilindro, appunto come deve essere,

il conoide essendo pure la metà d'esso cilindro.

Si muova la figura attorno all'ordinata MO ; e sia $AM = b$, $MO = f$, $AB = x$, $BC = y$, $CK = b - x$,

$KO = f - y$. Sarà il circolo del raggio $CK = \frac{c}{2r} \times \overline{b - x}^2$,

adunque il prodotto di questo circolo in dy , differenziale di KM , cioè $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - 2bxdy + xxdy}$ sarà l'elemento

del solido generato dalla figura $MACK$, e però integrando, posto in luogo di x il valore dato per y , sarà $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{2by^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{2m+1}}{2m+1}}$ = al solido

indefinito, o pure, ponendo x in luogo di $\frac{y^m}{a^{m-1}}$,

$\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{2bxy}{m+1} + \frac{xxxy}{2m+1}}$. E posta $x = b$, $y = f$ rispetto

a tutto il solido generato dalla figura $ACOM$,

farà $\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{2bbf}{m+1} + \frac{bbf}{2m+1}}$, cioè $\frac{2mmbbf}{2m+1} \times \frac{c}{2r}$.

E se si vuole, che la parabola sia apolloniana, cioè che sia $m = 2$, farà il solido $\frac{4cbbf}{15r}$.

È facile il vedere, che nella parabola apolloniana il cilindro sulla medesima base, ed altezza del detto solido farà al solido, come 15, 8; e che il solido generato dalla figura OAP farà $= \frac{7cbbf}{30r}$.

Si muova la figura attorno alla retta AP ; e sia, come sopra, $AB = x$, $BC = y$, farà $\frac{cxy}{2r}$ il circolo del raggio DC ; adunque $\frac{cxydy}{2r}$ l'elemento del solido generato dalla figura ACD , e ponendo in luogo di x il valore dato per y , ed integrando, farà $\frac{c}{2r} \times \frac{y^{2m+1}}{2m+1 \times a^{2m-2}}$, cioè $\frac{c}{2r} \times \frac{xy}{2m+1}$ eguale al solido indefinito, e fatta $x = b$, $y = f$, farà $\frac{cbbf}{2r \times 2m+1}$ rispetto a tutto il solido generato dalla figura AOP .

Ma il cilindro nella medesima base, ed altezza è $= \frac{cbbf}{2r}$, farà adunque il solido generato dalla figura

$$AMO = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}.$$

Ma in altra maniera ancora si può avere il solido generato dalla figura AOM ruotata attorno all'asse AB . Sia $AM = b$, $MO = f$. Il circolo del raggio DC farà $= \frac{cxy}{2r}$, ed il circolo del raggio DK farà $\frac{cbb}{2r}$,
adun-

adunque sarà $\frac{c}{2r} \times \overline{bb - xx}$ l'anello descritto dalla linea

CK, adunque $\frac{c}{2r} \times \overline{bb - xx} \times dy$ sarà l'elemento del so-

lido generato dalla figura CKMA, e posto in luogo di x il valore dato per y , sarà $\frac{c}{2r} \times \overline{bbdy - \frac{y^{2m}dy}{a^{2m-2}}}$, ed

integrando, $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{y^{2m+1}}{2m+1 \times a^{2m-2}}}$, e finalmente

fatta $y = f$ rispetto a tutto il solido generato dalla figura AMOA, sarà egli $\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{f^{2m+1}}{2m+1 \times a^{2m-2}}}$; ma

quando $y = f$, sarà, per la parabola, x cioè $b = \frac{f^m}{a^{m-1}}$,

e $bb = \frac{f^{2m}}{a^{2m-2}}$, adunque posto nell'integrale questo va-

lore dato per b , sarà il solido =

$$\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{bbf}{2m+1}} = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}, \text{ come sopra.}$$

ESEMPIO XXXI.

123. Sia l'ellissi ADC , (Fig. 28.) $AB = a$, $BD = b$, $AE = x$, $EO = y$, e però l'equazione,

$$\frac{bb}{as} \times \frac{2ax - xx}{2a} = yy. \text{ Sostituito adunque nella formola}$$

generale il valore di y dato dall'equazione, farà essa

$$\frac{cbb}{2aav} \times \frac{2axdx - xxdx}{2a} \text{, ed integrando, farà}$$

$$\frac{cbb}{2aar} \times \frac{axx - \frac{x^3}{3}}{3} \text{ eguale al solido indefinito generato}$$

dalla figura AEO mossa attorno all'asse AC . Posta $x = a$, farà $\frac{cbba}{3r}$ metà dello sferoide; e posta $x = 2a$, farà $\frac{2cbba}{3r}$ tutto lo sferoide.

E perchè il cono nella medesima altezza AC , e nella base, il di cui raggio sia il semiasse conjugato BD , è $= \frac{cbba}{3r}$, ed il cilindro è $= \frac{cbba}{3}$, farà lo sferoide due terzi del cilindro, e doppio del cono.

ESEMPIO XXXII.

124. Sia l'iperbola AD , (Fig. 25.) che s'aggi-
 attorno a BC , e sia il semiasse trasverso $BA = \frac{a}{2}$, il
 centro B , ed il parametro $= b$, $AC = x$, $CD = y$,
 e l'equazione $ax + xx \times \frac{b}{a} = yy$. Sostituito il valore

di y nella formola generale, sarà $\frac{cbdx}{2ar} \times \frac{ax + xx}{a}$, ed
 integrando, sarà $\frac{cb}{2ar} \times \frac{axx + \frac{x^3}{3}}{2}$ eguale al conoid
 iperbolico indefinito generato dalla figura ADC .

Sia $BC = x$, il resto come sopra. Sarà l'equazio-
 ne $\frac{b}{a} \times \frac{xx - \frac{aa}{4}}{4} = yy$, e però la formola sarà

$\frac{cbdx}{2ar} \times \frac{xx - \frac{aa}{4}}{4}$, ed integrando, $\frac{cb}{2ar} \times \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{aax}{4}}{4} + f$.

Aggiungo la costante, che in questo caso non è
 zero. Per determinarla si avverta, che nel punto A ,
 quando $x = \frac{1}{2}a$, il solido deve essere nullo, onde
 posto nell'integrale $\frac{1}{2}a$ in luogo di x , dovrà essere

$f + \frac{cb}{2ar} \times \frac{a^3 - \frac{a^3}{8}}{8} = 0$, adunque $f = \frac{caab}{24r}$; e però l'in-

tegrale compito sarà $\frac{cb}{2r} \times \frac{x^3}{3} - \frac{aax}{4} + \frac{a^3}{12}$.

S' aggiri l'iperbola attorno al semiasse conjugato HB , e sia BA semiasse trasverso $= a$, il semiasse conjugato $= b$, $BC = x$, $CD = y$. Il circolo del raggio HD sarà $= \frac{cxx}{2r}$, adunque $\frac{cxydy}{2r}$ sarà l'ele-

mento del solido generato dal piano, o sia figura $BHDA$, e posto in luogo di xx il valore dato dall'

equazione della curva, avremo $\frac{cdy}{2r} \times \frac{aayy + aabb}{lb}$, ed

integrando, $\frac{c}{2r} \times \frac{aay^3}{3bb} + aay$, e fatta $y = b$, sarà il soli-

do $= \frac{2caab}{3r}$.

ESEMPIO XXXIII.

125. Sia l'iperbola KHF (Fig. 34.) fra gl'asintoti, $AD = a$, $DE = b$, $AP = x$, $PH = y$, e l'equazione $xy = ab$. Si muova la curva attorno all'asintoto AB . Adunque il circolo del raggio QH sarà $= \frac{cxx}{2r}$, e pe-

rò $\frac{cxydy}{2r}$ sarà l'elemento del solido generato dalla figu-

ra $AQHfMA$ infinitamente prodotta della parte di M , e posto in luogo di x il valore dato dall'equazio-

ne,

ne, sarà $\frac{caabbdy}{2ryy}$, ed integrando, $f = \frac{caabb}{2ry}$; ma per determinare la f , si osservi che quando sia $y = 0$, il solido deve essere $= 0$, adunque $f = \frac{caabb}{2r \times 0}$, quantità infinita, e però l'integrale compito sarà $-\frac{caabb}{2ry} + \infty$, adunque il solido di valore infinito.

Se in vece di sostituire nella formola in luogo di xx il valore dato per y dall'equazione, sostituiremo il valore di dy , sarà essa $-\frac{abcdx}{2r}$, ed integrando, $-\frac{abcdx}{2r} + f$; ma il solido non può essere zero se non quando sia x infinita, adunque la costante f da aggiungersi deve essere infinita, e però infinito il solido.

Per avere il solido generato dal piano, o figura $BAPHK$ infinitamente prodotta verso B , basta riflettere, che essendo cx la periferia del circolo, il di cui raggio è $QH = r$, sarà $\frac{cxv}{r}$ la superficie del cilindro generato dal piano $AQHP$, ed in conseguenza sarà $\frac{cxvdx}{r}$ la solidità del cilindro vuoto generato dal rettangolo infinitesimo $IPHO$; adunque la somma di tutti questi, cioè $\int \frac{cxvdx}{r}$ sarà il solido, che si cerca.

Posto adunque in luogo di y il suo valore $\frac{ab}{x}$, farà l'integrale $\frac{cabx}{x}$ quantità finita, quantunque il solido sia infinitamente alto.

Nell'espressione $\frac{cabx}{x}$ del solido posto in luogo di ab il valore xy dato dall'equazione, farà $\frac{cxy}{x}$, ma $\frac{cxy}{x}$ è il cilindro generato dal rettangolo $APHQ$; adunque il solido iperbolico sarà doppio di esso cilindro, e però il solido generato dalla figura $BQHK$ infinitamente prodotta sarà eguale al cilindro, che gli serve di base. Presa adunque $x = a$, ed in conseguenza $y = b$, farà il cilindro $= \frac{caab}{x} =$ al solido sopra di esso.

ESEMPIO XXXIV.

126. Sia la logaritmica HCD , (Fig. 35.) la sottangente $CA = a$, $AB = x$, $BD = y$, e l'equazione $dx = \frac{ady}{y}$. S'aggiri attorno all'asintoto EB . Posto

nella formola generale in luogo di dx il valore dato dall'equazione, farà $\frac{caydy}{y}$, ed integrando, $\frac{cayy}{y} + f$.

Ma quando sia $y = AC = a$, il solido è zero; adunque
deve

deve essere $f = -\frac{ca^3}{4r}$, e l'integrale compiuto, cioè il solido generato dal piano indefinito $ABDC$, sarà $= \frac{cayy}{4r} - \frac{ca^3}{4r}$.

Sia l'assissa AE negativa, e però $= -x$, sarà pure negativa la differenza cioè $-dx$, e perchè crescendo l'assissa cala l'ordinata, sarà pure negativa la differenza di EH , cioè $-dy$, e l'equazione della curva sarà nello stesso modo $dx = \frac{ady}{y}$. Ma per essere negativa dx , sarà negativa la formola generale, vale a dire $-\frac{cyydx}{2r}$. Sostituito adunque il valore di dx , sarà $-\frac{caydy}{2r}$, ed integrando $-\frac{cayy}{4r} + f$; ma quando il solido è zero, sarà $y = a$; adunque $f = \frac{ca^3}{4r}$, e l'integrale compiuto sarà $\frac{ca^3}{4r} - \frac{cayy}{4r}$ eguale al solido generato dal piano $ACHE$. Posto $y = 0$, cioè supposto il solido infinitamente prodotto dalla parte di M , l'integrale sarà $= \frac{ca^3}{4r}$, adunque esso solido infinitamente prodotto sarà eguale a $\frac{ca^3}{4r}$, ma il solido generato dal piano $ACHE$ abbiamo veduto essere $\frac{ca^3}{4r} - \frac{cayy}{4r}$, adunque il solido

infi-

infinitamente prodotto generato dal piano *LEHM* farà $\frac{cayy}{4r}$.

Poichè il cilindro, il di cui raggio della base sia $AC = a$, e l'altezza pure $= a$, è $= \frac{ca^3}{2r}$, farà il solido

della logaritmica infinitamente prodotto dalla parte di *M* nella base del raggio $AC = a$ al detto cilindro, come $\frac{1}{4}, \frac{1}{2} :: 1, 2$.

ESEMPIO XXXV.

127. Sia la curva *AMI* (*Fig. 18.*) la Cissoide di Diocle, la quale aggirandosi attorno alla retta *AB* descriva un solido. Sia $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, e l'equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$. Sarà adunque la formola generale de' solidi, sostituito il valore di yy , $\frac{cx^3 dx}{2r \times a-x}$, ed

integrando, $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} \int a-x + f$;
 ma fatta $x = 0$, il solido deve essere zero, adunque $f = \frac{caa}{2r} \int a$, e l'integrale compito $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} \int a-x + \frac{caa}{2r} \int a$ eguale al solido generato

dalla

dalla figura APM , e fatta $x = a$, farà il solido intiero $= -\frac{11ca^3}{12r} - \frac{caa}{2r} / 0 + \frac{caa}{2r} / a$. Ma il logaritmo del

zero è quantità infinita, e negativa, che moltiplicata in $-\frac{caa}{2r}$ fa quantità positiva, adunque il solido intiero

farà infinito. Si avverta, che i suddetti logaritmi si prendono nella logaritmica della sottangente $= a$.

Per mezzo della serie farà $\frac{cx^3 dx}{2r \times a - x} = \frac{cx^3 dx}{2ar} + \frac{cx^4 dx}{2raa} +$

$\frac{cx^5 dx}{2ra^3} + \frac{cx^6 dx}{2ra^4}$ ec., ed integrando, il solido generato

dal piano APM farà $= \frac{cx^4}{8ar} + \frac{cx^5}{10raa} + \frac{cx^6}{12ra^3} + \frac{cx^7}{14ra^4}$ ec.,

e fatta $x = a$ rispetto al solido intiero, farà

$\frac{a^3}{2r} \times \frac{c}{4} + \frac{c}{5} + \frac{c}{6} + \frac{c}{7}$ ec., serie di valore infinito.

ESEMPIO XXXVI.

128. S'aggiungi la trattoria ABF (Fig. 20.) attorno l'asintoto EH . Nella formola generale $\frac{cydy}{2r}$ sostituito il valore della dx dato dall'equazione $dx =$

$-\frac{dy \sqrt{aa - yy}}{2}$ num. 103., avremo $-\frac{cydy \sqrt{aa - yy}}{2r}$,

ed

ed integrando , $\frac{c}{6r} \times \frac{aa - yy^{\frac{3}{2}}}{2} =$ al solido generato dalla figura $AEDB$, ommessa l'aggiunta della costante superflua . Fatta pertanto $y = 0$, farà il solido infinitamente prodotto $= \frac{ca^3}{6r}$; ma la solidità della sfera, il di cui raggio sia $AE = a$ (num. 121.) è $= \frac{2ca^3}{3r}$, dunque il solido infinitamente prodotto farà la quarta parte di essa sfera .

ESEMPIO XXXVII.

129. Sia il cilindro $QBMCP T$, (Fig. 36.) da cui con un piano per BC diametro , e nella direzione AP si tagli la porzione , o sia l'unghia $BMCPB$, si cerca la solidità di questa .

Sia $BC = QM = 2a$, $MP = QT = b$, $AD = x$, e farà DH condotta ordinata nel circolo $= \sqrt{aa - xx}$. Si tiri dal punto H parallelamente ad MP , o sia QT la retta HO , che farà nella superficie del cilindro, indi dal punto D al punto O si conduca la retta DO , che farà nel piano $BOPC$, avremo formato nella solidità dell'unghia il triangolo DHO simile al triangolo

lo AMP , e però farà $HO = \frac{b\sqrt{aa-xx}}{a}$. Ma la somma di tutti queſti triangoli DHO è appunto la ricercata ſolidità della metà dell'unghia, adunque farà eſſa $= \int \frac{bdx}{a} \times \sqrt{aa-xx}$, ed integrando, $\frac{abx}{2} - \frac{bx^2}{6a}$, e fatta $x = a$, farà finalmente la ſuddetta metà dell'unghia $= \frac{1}{3} aab$, e tutta $= \frac{2}{3} aab$.

In altra maniera, e più generalmente ſia (Fig. 37.) il mezzo cilindro $DACHEG$, il quale per lo diametro CD ſia tagliato da un piano nella direzione DE , onde naſca l'unghia $DBCEAD$, di cui ſi vuole la ſolidità. Sia $BA = a$, $AE = b$, $BQ = x$, $QM = y$, farà $QK = \frac{bx}{a}$, e però il rettangolo $PONM = \frac{2bxy}{a}$, e queſto moltiplicato in dx farà l'elemento della ſolidità dell'unghia, cioè $\frac{2byxdx}{a}$.

Sia la curva DAC un ſemicircolo, adunque $y = \sqrt{aa-xx}$, e la formola farà $\frac{2bx dx \sqrt{aa-xx}}{a}$, ed integrando $-\frac{2b}{3a} \times \frac{aa-xx}{2} + m$, ma la conſtante m , poſta $x = 0$, ſi trova eſſere $= \frac{2}{3} baa$, adunque l'integrale

grale compito del solido farà $\frac{2baa}{3} - \frac{2b}{3^4} \times \frac{aa - xx^2}{3}$,
 e fatta $x = a$ rispetto a tutta l'unghia, farà essa $\frac{2baa}{3}$.

Sia la curva DAC una delle infinite parabole, e
 l'equazione $y^m = a - x$; farà la formola, sostituito il
 valore di y , $\frac{2bx dx}{a} \times \frac{1}{a - x^{\frac{1}{m}}}$, la quale integrata,

conforme al num. 29., ed aggiunta la debita costante,
 e fatta $x = a$, darà per la solidità di tutta l'unghia
 $\frac{2bmma^{\frac{m+1}{m}}}{2m+1 \times m+1}$, e posta $m = 2$, cioè che la parabola

sia l'apolloniana, $\frac{8ba^{\frac{3}{2}}}{15}$. E supposto, che quando

$x = 0$, sia $BC = y = c$, farà $a^{\frac{1}{2}} = c$, e però l'unghia
 = $\frac{8abc}{15}$. Nello stesso modo troverassi l'unghia del ci-

lindro ellittico essere = $\frac{2abc}{3}$, supposto il semiasse tras-
 verso = a , il semiasse conjugato = c ec.

ESEMPIO XXXVIII.

130. Tagliato il conoide parabolico BAC (Fig. 38.) col piano qualunque IEH perpendicolare alla base circolare $BICH$, si dimanda la misura del pezzo compreso dalla sezione IEH , e dal piano a lei parallelo per l'asse AD .

Sia $= a$ il parametro della parabola generatrice BAC , l'assisa data $AD = b$, farà l'ordinata $DB = \sqrt{ab}$. Sieno le coordinate $DF = x$, $FE = y$, e però l'equazione alla predetta curva BAC $ab - xx = ay$. Per la natura del circolo $BICH$ farà il rettangolo $CFB = ab - xx$, eguale al quadrato $FH = zz$; ma $ab - xx = ay$, dunque $ay = zz$, e conseguentemente la sezione IEH farà una parabola con lo stesso parametro della principale. Resta pertanto fissato il rettangolo $EFH = yz = y\sqrt{ay}$; e perchè questo sta all'area IEH , come 3 a 4, farà essa area $= \frac{4}{3} y\sqrt{ay}$, ed il prodotto di essa area IEH nell'altezza infinitesima dx , flussione di $DF = x$, farà l'elemento del solido in questione, cioè $\frac{4}{3} y dx \sqrt{ay}$; ma $y = \frac{ab - xx}{a}$, dunque esso elemento

$$\text{farà } \frac{4}{3} dx \times \frac{ab - xx}{a} \sqrt{ab - xx}, \text{ o sia } \frac{4}{3} b dx \sqrt{ab - xx} -$$

$$\frac{4}{3a} x dx \sqrt{ab - xx}.$$

L'integrale del primo termine dipende dalla quadratura del cerchio *BHC*; il secondo si ridurrà alle quadrature note per via della prima formola del num. 61.

131. Ommetto gli esempj de' solidi generati da curve con le coordinate tra loro in angolo obbliquo, perchè essendo la formola per questi casi diversa dalla solita, ed ordinaria per le sole costanti, non si potranno incontrare difficoltà di natura diversa dalle già spiegate. Così pure ommetto gl'esempj de' solidi generati da curve riferite al fuoco, perchè non volendomi servire della teoria de' centri di gravità, come ô detto di sopra, bisognerà ridurre le date curve ad altre riferite agl'assi, intorno alle quali già abbastanza si è parlato.

Delle Quadrature, o sia Compianazioni delle superficie de' Corpi.

ESEMPIO XXXIX.

132. Sia il cono retto *ACGK*, (Fig. 31.) $AB = a$, $BC = b$, una qualunque porzione dell'asse *AB*, come

me AD , sia $=x$, farà $DE=y=\frac{bx}{a}$, e $dy=\frac{b dx}{a}$,

$dy^2=\frac{bb dx^2}{aa}$. Sostituito adunque questo valore di dy^2

nella formola generale $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, farà

$\frac{cy}{r} \sqrt{\frac{aadx^2 + bb dx^2}{aa}} = \frac{cy dx \sqrt{aa + bb}}{ar}$, e sostituito il va-

lore di y , cioè $\frac{bx}{a}$, farà $\frac{cbx dx \sqrt{aa + bb}}{aar}$, ed integran-

do, $\frac{cbxx \sqrt{aa + bb}}{2aar}$ rispetto alla superficie del cono

$AEMPI$; e fatta $x=a$, farà $\frac{cb \sqrt{aa + bb}}{ar}$ rispetto alla

superficie di tutto il cono, e però eguale al rettangolo della metà della circonferenza della base nel lato AC .

La stessa determinazione avrebbesi avuta, se in luogo di sostituire nella formola generale il valore di dy^2 , si fosse sostituito il valore di dx^2 .

Sarà per tanto la superficie del frusto conico

$IMKCG = \frac{cb \sqrt{aa + bb}}{2r} - \frac{cbxx \sqrt{aa + bb}}{2aar}$, cioè

$\frac{cb \sqrt{aa + bb}}{2r} \times aa - xx$; e però farà alla superficie di tutto

il cono, come $aa - xx$ ad aa .

133. Ma se il cono farà scaleno, bisognerà procedere

cedere in altra maniera . Onde sia il cono scaleno $PAFBM$, (Fig. 39.) la base sia il circolo $AFBM$, e nel diametro prodotto, se fa bisogno, s'abbassi la PD normale al piano del circolo, o sia base . Si prendano nella periferia del circolo due punti F, f infinitamente prossimi, e si tirino i due lati FP, fP del cono . Egli è chiaro, che il triangolo infinitesimo PFf sarà la differenza, o sia l'elemento della superficie del cono . Adunque al punto F si conduca la tangente TFQ , a cui sia normale DQ , e si congiungano i punti P, Q con la retta PQ .

Poichè il piano del triangolo PDQ passa per la retta PD normale al piano della base del cono, il piano PQD sarà anch'egli normale allo stesso piano della base, ma la tangente TQ , che è nel piano pure della base, fa angolo retto con QD comune sezione de' due piani, dunque sarà normale al piano PQD , ed in conseguenza alla retta QP , e però sarà il triangolo $PFf = \frac{PQ \times Ff}{2}$.

2

Si chiami il raggio $CA = r$, $CD = b$, $CE = x$, farà $EE = \sqrt{rr - xx}$, e perchè l'angolo CFT è retto, essendo tangente del circolo la TF , sono simili i triangoli CFE , TCF ; onde sarà $CT = \frac{rr}{x}$, ma CT è alla

CF,

CF , o sia CF , $CE :: TD$, DQ , adunque $DQ = \frac{rr + bx}{r}$. Sia la data $PD = p$, farà dunque la $PQ =$

$\sqrt{pp + \frac{rr + bx}{r}}$; ma l'elemento del cerchio Ff si sa

essere $= \frac{rdx}{\sqrt{rr - xx}}$; adunque $\frac{Ff \times PQ}{2}$, elemento della

superficie, farà $= -rdx \sqrt{pp + \frac{rr + bx}{r}}$, formola che

fin' ora non si fa ridurre alle note quadrature di circolo, o dell'iperbola, perchè non si può liberare da' segni radicali, come si è veduto al num. 38., e come ci è pure occorso nel volere rettificare l'ellissi.

Ricorrendo alla serie: si riduca in serie infinita, il numeratore, e lo stesso si faccia del denominatore, indi si proceda nello stesso modo, come si è fatto nella seconda maniera intorno all'ellissi nell'Esempio 20. num. 112.

ESEMPIO XL.

134. Sia l'emisfero, il di cui semicircolo generatore CDK , (Fig. 32.) che s'aggiri attorno al raggio DB , e sia $DB = a$, una qualunque $DA = x$, farà

rà $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$, e però $dy^2 = \frac{a - x^2 \times dx^2}{2ax - xx}$;

e fatte le sostituzioni nella formola generale, sarà essa $= \frac{cax}{r}$, ed integrando $\frac{cax}{r} =$ alla superficie del seg-

mento di sfera generato dall'arco EDM ; e fatta $x = a$, sarà $\frac{caa}{r}$ la superficie dell'emisfero, e però $\frac{2caa}{r}$ la su-

perficie di tutta la sfera. Sarà adunque la superficie, d'un qualunque segmento eguale al prodotto della periferia del circolo generatore della sfera nell'altezza di esso segmento; dell'emisfero, eguale al rettangolo della stessa periferia nel raggio; e della sfera, eguale al rettangolo della periferia nel diametro, e però esse superficie tra loro nella ragione, che hanno l'altezza, il raggio, ed il diametro.

E perchè l'area del circolo generatore della sfera, è $\frac{caa}{2r}$, sarà la superficie della sfera ad essa area :: 4, 1, cioè quadrupla del massimo circolo.

Ma poichè è pure la superficie del cilindro (non comprese le basi) circoscritto all'emisfero, eguale al prodotto della periferia della base nell'altezza, sarà dunque $= \frac{caa}{r}$, ed in conseguenza essa superficie eguale alla superficie dell'emisfero. Ma il cono inscritto nell'emis-

emisfero à pure la superficie $= \frac{ca \sqrt{2aa}}{2}$, dunque sarà la superficie del cilindro, o dell' emisfero alla superficie del cono inscritto, come $2a$, $\sqrt{2aa}$, cioè a dire, come il diametro al lato del cono ec.

ESEMPIO XLI.

135. Si muova la parabola ACO dell' equazione $ax = yy$ attorno all' asse AM (*Fig. 33.*). Sarà dunque $adx = 2ydy$, e $dx^2 = \frac{4yydy^2}{a}$; e però la formola, fatta

la sostituzione, $\frac{cydy}{a} \sqrt{4yy + aa}$, ed integrando,

$\frac{c}{127a} \times \frac{1}{3} (4yy + aa)^{3/2} =$ alla superficie del conoide parabolico indefinito, eguale alla quarta proporzionale di $6a$, $\sqrt{4yy + aa}$, e dell' area del circolo del raggio $= \sqrt{4yy + aa}$.

136. Sia più generalmente $\frac{x^2}{i} = y$ l' equazione della parabola ACO (*Fig. 33.*) con l' assissa $AB = x$, e coll' applicata $BC = y$, la qual' equazione per lo trilineo

bb

ACD

ACD sarà $x^{\frac{1}{2}} = y$, se si prenda $AD = x$ siccome as-
fissa, e $DC = y$ siccome ordinata. Al num. 119. Esempio 27. si è veduto, essere l'elemento della curva, il
quale chiamo $du = \frac{dx}{\sqrt{x^{2t-2} + 1}}$, e la formola diffie-

renziale per le superficie è $\frac{cydu}{r}$, dunque sarà $\frac{cydu}{r} =$

$$\frac{cydx}{r \times \sqrt{x^{2t-2} + 1}}; \text{ ma è, per l'equazione locale, } \frac{cydu}{r} = \frac{cx^{\frac{1}{2}}dx}{rt \times \sqrt{x^{2t-2} + 1}}$$

Per procedere alle integrazioni, o quadrature mi
servirò del metodo spiegato al num. 61., e posto in-
uso nel suddetto Esempio 27., ma prima si offervi, che
essendo c la periferia del circolo, il di cui raggio r ,
l'integrale $\int \frac{cydu}{r}$ ci dà la superficie del conoide; ma

se c farà una qualunque data retta, si averà la misura
della superficie dell'ugna, quando cioè eretta sulla ba-
se CAB una cilindroide, questa viene tagliata da un
piano, che passa per l'asse AB , e forma con la base
sottoposta CAB un'angolo, il di cui seno retto a quel-
lo del complemento sia, come la c alla r . Le superfie-
cie

cie unguolari adunque stanno a quelle del solido rotondo, come una data retta alla circonferenza c .

Operando adunque, come nel citato num. 61. è stato spiegato, affinchè la nostra formola sia algebricamente integrabile, o riducibile alle note quadrature, troveremo dover essere $t = \frac{3+2b}{1+2b}$, o pure $t = \frac{b+1}{b+2}$,

intendendo per b un qualunque numero intero positivo, o negativo.

La prima condizione, cioè $t = \frac{3+2b}{1+2b}$, posto b

numero intero prima positivo, e poi negativo, ci dà le due progressioni

$$\text{I. } t = \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9} \text{ ec.}$$

$$\text{II. } t = \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11} \text{ ec.}$$

La seconda condizione, cioè $t = \frac{b+1}{b+2}$, posto b nume-

ro intero prima positivo, poi negativo, ci dà le due altre progressioni

$$\text{III. } t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \text{ ec.}$$

$$\text{IV. } t = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \text{ ec.}$$

bb z

Sog-

Soggiungo alcune brevi osservazioni.

I. Siccome le due progressioni prima, e terza abbracciano gli esponenti di tutte quelle parabole, che aggirandosi intorno all'asse generano conoidi, la superficie de' quali è analiticamente quadrabile, supposta soltanto la rettificazione della periferia circolare, e conseguentemente tutte le unghie sopra descritte di data altezza ammettono una quadratura algebrica; così ne' casi della serie seconda, e quarta ci vuole qualche cosa di più, e c'entra il tetragonismo dell'iperbola.

II. E' notevole, che paragonando insieme la serie prima con la seconda, e la terza con la quarta, gli esponenti sono inversi, ed appartengono alla medesima curva. Ciò significa, che potendosi girare l'area parabolica o intorno l'asse AB , o intorno l'asse AD , e producendosi nell'uno, e nell'altro caso superficie affatto diverse, se nel primo si genera una superficie assolutamente quadrabile, almeno considerata nell'unghie; nel secondo tutto all'opposto, essendo reciprochi i valori, nascono le superficie suddette ipoteticamente quadrabili. Per esempio il conoide formato dalla prima parabola cubica arruotata intorno AD ci somministra quadrabile algebricamente la superficie dell'unghie, ed anche quella del solido rotondo, mentre si abbia una linea retta eguale alla circonferenza. Ma se s'aggi' intorno all'asse AB , si richiegono le quadrature. Nella para-

parabola seconda cubica succede lo stesso; e tutto all'opposto nella apolloniana.

III. Confrontando queste serie con quelle del num. 119. si scorge, che fra queste nessuna parabola, della prima, o seconda serie è rettificabile nè analiticamente, nè per via delle note quadrature; quelle all'opposto della seconda, e quarta sono tutte rettificabili, ed abbracciano tutte le contenute nelle progressioni comprese nel citato num. 119.

IV. Fra le iperbole la sola comune tra gli asintoti ammette la superficie riducibile alla quadratura della stessa iperbola, perchè altro esponente negativo non ci si affaccia nelle citate progressioni, salvo che -1 .

V. Gli esponenti, che non si trovano nelle dette serie, come $t = 4, 5, 6$ ec. $\frac{2}{5}, \frac{5}{7}$ ec. vogliono qua-

drature più alte per misurare le superficie conoidali indi nascenti.

ESEMPIO XLII.

137. Sia l'ellissi ADC , (Fig. 28.) che si muova attorno all'asse AC , e sia $AB = a$, $BD = b$, $AE = x$, $EO = y$, e l'equazione $\frac{ayyv}{bb} = 2ax - xx$.

Sarà

Sarà dunque, differenziando, $dx = \frac{aaydy}{bb \times a - x}$, e pe-

rò $dx^2 = \frac{a^2 yydy^2}{b^2 \times a - x^2}$; e ponendo in luogo di $-2ax + xx$

il valore $-\frac{aayy}{bb}$ dato dall'equazione, farà $dx^2 =$

$\frac{aayydy^2}{bb \times bb - yy}$. Adunque sostituito questo valore nella

formola generale, la troveremo essere

$cydy \sqrt{b^2 + aayy - bbyy}$, e fatta per brevità $aa - bb = ff$,

$rb \sqrt{bb - yy}$ supposta a maggiore di b , cioè che l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, sia il maggiore, (se fosse a minore di b si farebbe $aa - bb = -ff$) farà $cydy \sqrt{b^2 + ffyy}$ for-

mola, che per le cose dette a suo luogo si potrà liberare dai radicali, ed il di cui integrale per mezzo del canone del num. 56. troveremo dipendere dalla quadratura del circolo. Ma se sarà a minore di b , cioè l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, il minore, la superficie dello sferoide dipenderà d'ambe le quadrature, cioè dalla circolare, e dall'iperbolica. La superficie poi dell'ugna nel primo caso è eguale ad una porzione di spazio ellittico, che si determina facilmente per via

delle

delle normali alla curva; ma nel secondo caso appunto queste normali ci danno uno spazio iperbolico eguale alla stessa superficie dell'ugna. Per vedere ciò chiaramente: sia la curva ACF , (Fig. 40.) su cui s'intenda eretta una cilindroide, che venga tagliata da un piano, il quale passi per l'asse AB , e formi col sottoposto piano CAB un'angolo semiretto, egli è manifesto, che chiamato du l'elemento della curva, sarà $\int y du$ la superficie dell'ugna inferiore, e $\int \frac{cy du}{r}$ la superficie del conoide nascente dal girarsi la figura CAB intorno l'asse AB , e però sarà la superficie dell'ugna a quella del conoide, come il raggio alla circonferenza del circolo.

Ora sieno le due ordinate BC , DF infinitamente prossime, e condotta al punto F la normale FG , si metta essa in DH , e faccia figura di applicata della nuova curva MIH delineata col metodo prescritto: dico, che l'area $MABI$ è eguale alla superficie dell'ugna, che ha per base l'arco AC .

I due triangoli FCE , GFD sono simili, dunque sarà FC , $CE :: GF$, FD , e però $FD \times FC = GF \times CE = DH \times DB$. Ma $FD \times FC$ ($y du$) è l'elemento della superficie dell'ugna; ed $HD \times DB$ è l'elemento dell'area $IMAB$, dunque essendo eguali questi elementi, lo faranno ancora i loro integrali,

cioè

cioè le predette aree. Ciò premesso, sia la Figura ACB un quarto d'ellissi dell'equazione $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$, farà

la normale $FG = \frac{b \sqrt{2a^3x - aaxx + bbx - 2abbx + aabb}}{aa}$,

dunque chiamata z l'ordinata BI , farà $z =$

$\frac{b \sqrt{xx - 2ax \times bb - aa + aabb}}{aa}$, equazione alla curva.

MIH , che appunto è un'altra ellissi quando sia a maggiore di b , cioè se AB sia l'asse maggiore dell'ellissi ACB ; ed all'incontro un'iperbola quando sia a minore di b , cioè AB l'asse minore.

Finalmente nel caso di mezzo, cioè quando l'ellissi degenera in circolo, già si sa, che la detta superficie dell'ugna è quadrabile, eguagliandosi ad un rettangolo.

ESEMPIO XLIII.

138. Sia l'iperbola BD , (Fig. 29.) che s'aggiri attorno all'asse trasverso BA . Sia A il centro, $BA = a$, AE semiasse conjugato $= b$, $AC = x$, $CD = y$; farà l'equazione $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, e però $y = \frac{b \sqrt{xx - aa}}{a}$,

$dy = \frac{bx dx}{a \sqrt{xx - aa}}$, adunque la formola generale, fatte

le sostituzioni, sarà

$$\frac{cb}{ar} \sqrt{xx - aa} \sqrt{\frac{aaxxdx^2 + bbxxdx^2 - a^2 dx^2}{aa \times xx - aa}}, \text{ cioè}$$

$$\frac{cbdx}{aar} \sqrt{aaxx + bbxx - a^2}, \text{ o sia, fatta } aa + bb = ff,$$

$$\frac{cbfdx}{aar} \sqrt{xx - \frac{a^2}{ff}}, \text{ il di cui integrale, quando si sia libe-}$$

rata dal segno radicale, troveremo dipendere medesimamente dalla quadratura dell'iperbola.

ESEMPIO XLIV.

139. Sia l'iperbola MD , (*Fig. 41.*) equilatera, fra gl'asintoti, e si muova attorno all'asintoto AC , di cui l'equazione sia $ay + xy = aa$, essendo $AB = a$, $BC = x$, $CD = y$. Sarà dunque $x = \frac{aa - a}{y}$, e $dx^2 =$

$\frac{a^2 dy^2}{y^4}$; e però la formola generale sarà, fatta la sostituzione,

$\frac{cdy}{ry} \sqrt{y^4 + a^4}$. Si faccia $\sqrt{y^4 + a^4} = z$, e però

$y^4 = zz - a^4$, $dy = \frac{zdz}{2y^3}$. Fatte queste sostituzioni,

avremo trasformata la formola in quest'altra

$$\frac{czzdz}{2r \times zz - a^4}$$

c c

libera

libera da' segni radicali, il di cui integrale dipende in parte da' logaritmi, come è facile a vedere. Adunque la ricercata superficie della nostra iperbola descritta dipenderà dalla quadratura pure dell'iperbola.

ESEMPIO XLV.

140. Sia il solido generato dalla trattoria (Fig. 20.) ABF , come nel Esempio 36. num. 128., di cui si voglia la superficie. Nella formola generale $\frac{cydu}{r}$ (intendendo per du l'elemento della curva) sostituito in luogo di du il valore $-\frac{ady}{y}$ dato dall'equazione della curva, avremo $-\frac{acdy}{r}$, ed integrando $-\frac{acy}{r} + n$. Ma quando la superficie sia nulla, si à $y = a$; dunque la costante $n = \frac{aac}{r}$, e però l'integrale compito $\frac{aac}{r} - \frac{acy}{r}$ eguale alla superficie del solido generato dalla figura $AEDB$; e fatta $y = 0$, farà $\frac{aac}{r}$ eguale alla superficie del solido infinitamente prodotto. Ma l'area del circolo, il di cui raggio $= \sqrt{2aa}$, si trova $= \frac{caa}{r}$, dunque la superficie del solido infinitamente prodotto è eguale all'

all'area del circolo, il di cui raggio sia la diagonale del quadrato di AE .

ESEMPIO XLVI.

141. Sia l'unghia $CNEODAC$, (Fig. 37.) di cui si cerchi la superficie. Denominando, come al num. 129, sarà $QK = bx = MN$, ma Mi elemento della curva

$va = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, adunque sarà $\frac{bx}{a} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ eguale al quadrilineo infinitesimo $MimN$, elemento della superficie della metà dell'unghia.

Sia la curva DAC un semicircolo, sarà in questo caso $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, e però la formola

$\frac{bx dx}{\sqrt{aa - xx}}$, ed integrando (per lo num. 31.) sarà

$-b \sqrt{aa - xx} + f$, ma fatta $x = 0$, sarà $f = ab$, adunque l'integrale compito si trova essere $ab - b \sqrt{aa - xx}$, e posta $x = a$, rispetto a tutta la superficie della metà dell'unghia, sarà essa superficie $= ab$.

Sia la curva DAC la parabola dell'equazione $yy = a - x$, farà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2} dx \sqrt{4a - 4x + 1}$, e però

la formola $\frac{bx dx}{2a} \sqrt{\frac{4a - 4x + 1}{a - x}}$, il di cui integrale

dipende dalla quadratura dell'iperbola, adunque dalla stessa quadratura dipenderà la superficie dell'uoghia.

ESEMPIO XLVII.

142. Sia il conoide parabolico generato dalla rotazione della parabola ADH con le coordinate in angolo obbliquo (*Fig. 7.*) attorno all'asse AC , la di cui equazione è $ax = yy$. Si sostituifca nella formola delle superficie, che a questo caso compete, cioè nella formola $\frac{cay}{rm} \sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{2edxdy}{m}$ il valore di dx dato per dy

dall'equazione differenziata della curva, e si trasformerà in quest'altra $\frac{2cnydy}{arm} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$, il di cui integrale si trova essere in parte algebrico, ed in parte logaritmico.

143. Coerentemente al metodo esposto delle quadrature, rettificazioni ec. farebbe questo luogo oppor-

tuno

tuno per dare altresì le formole de' centri di gravità , di oscillazione , e di percussione , ma stimo meglio di ometterle , includendo esse necessariamente alcuni principj di Statica , dei quali non suppongo informati i miei Leggitori .



C A P O I V.

*Del Calcolo delle Quantità Logaritmiche ,
ed Esponenziali .*

144. **Q**uantità esponenziali (giacchè altrove abbastanza è stato detto, cosa sieno le logaritmiche) si chiamano quelle , che sono elevate a qualunque potestà indeterminata ; tali sarebbero a^x , y^z ec., gli esponenti delle quali x , z sono quantità indeterminate , e però il calcolo , che versa sopra queste tali quantità , chiamasi calcolo esponenziale .

145. Ma di più gradi sono le quantità esponenziali ; si dicono del primo grado quelle , i di cui esponenti sono indeterminate ordinarie , come sono appunto le quantità a^x , y^z . Del secondo grado sono quelle , gli esponenti delle quali sono essi pure quantità esponenziali , come sarebbe a^{x^t} , y^{z^p} , intendendo la x elevata alla potestà t , e la z alla potestà p . Del terzo grado sono quelle , che hanno per esponente una quantità esponenziale del secondo grado , e così di mano in mano coll' istesso ordine .

146. Ma qui fa d'uopo richiamare a memoria

ciò ,

ciò, che è stato detto al num. 111., cioè, che $\int \frac{ady}{y} = l y$ nella logaritmica della sottangente $= a$; adunque il differenziale di $l y$ farà $\frac{dy}{y}$ moltiplicato nella sottangente della logaritmica, in cui si prende il logaritmo; così il differenziale di $l \sqrt{aa - xx}$ nella logaritmica della sottangente $= 1$ farà $-\frac{x dx}{aa - xx}$, e generalmente il diffe-

renziale d'una qualunque quantità logaritmica farà una formola composta del differenziale della quantità moltiplicata nella sottangente, e divisa per la quantità stessa.

147. Ciò posto: abbiassi da differenziare la quantità logaritmica $l^m x$ (la m è esponente del logaritmo). Si ponga $l^m x = y^m$, adunque farà $l x = y$, e $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$;

ma il differenziale di $l^m x$ farà $m y^{m-1} dy$, ed è $y^{m-1} = l^{m-1} x$; adunque sostituito il valore in luogo di y , e dy dato per x , farà il differenziale di $l^m x = m l^{m-1} x \times \frac{dx}{x}$, supposta $= a$ la sottangente della logaritmica; o pure $m l^{m-1} x \times \frac{dx}{x}$, supposta essa sottangente $= 1$.

148. Che se fosse da differenziarsi $l^m x^n$; fat-

ta $x^n = z$, farà $l^m z$, ed il differenziale farà $m l^{m-1} z \times \frac{dz}{z}$; ma $dz = nx^{n-1} dx$, adunque sostituendo, il differenziale della proposta formola $l^m x^n$ farà $nm l^{m-1} x^n \times \frac{dx}{x}$.

149. Abbiati da differenziare la formola $l x$. Si ponga $l x = y$, e però $l y = l y$; adunque farà $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ nella logaritmica della sottangente = 1 (il che s'intende da ogni qual volta esse sottangenti non siano espresse); ma poichè $l x = l y$, il differenziale di $l x$ farà $\frac{dy}{y}$, adunque posti in luogo di y , e di dy i valori dati per x , farà $\frac{dx}{x}$ il differenziale della proposta formola.

Ma più generalmente sia $l^m l x$ da differenziarsi. Pongo $l x = y$, e però $l^m l x = l^m y$, e $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$; ma il differenziale di $l^m y$ è $m l^{m-1} y \times \frac{dy}{y}$; adunque substituiti i valori in luogo di y , e di dy dati per x , farà $m l^{m-1} l x \times \frac{dx}{x}$ il differenziale cercato.

Più generalmente ancora. Sia da differenziarsi $l^n l^m x$. Pongo $l^m x = y^m$, e però $l x = y$, e $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$; adun-

adunque sarà $l^n l^m x = l^n y^m$. Ma il differenziale di $l^n y^m$ è $mn l^{n-1} y^m \times \frac{dy}{y}$, adunque fatte le sostituzioni, sarà $mn l^{n-1} l^m x \times \frac{dx}{x}$ il differenziale cercato.

150. Quanto al modo di differenziare le quantità esponenziali. Sia la quantità z^x da differenziarsi. Pongo $z^x = t$, sarà in conseguenza $l z^x = l t$, ma per lo num. 14. $l z^x = x l z$; adunque sarà $x l z = l t$, e però differenziando $dx l z + \frac{x dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma $t = z^x$, onde $dx l z + \frac{x dz}{z} = \frac{dt}{z^x}$, e finalmente $dt = z^x dx l z + x z^{x-1} dz$, differenziale cercato.

151. Sia da differenziarsi la quantità esponenziale del secondo grado z^{x^p} . Pongo $z^{x^p} = t$, adunque sarà $x^p l z = l t$, e differenziando, il differenziale di $x^p \times l z + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma per lo num. antecedente, il differenziale di x^p sappiamo essere $x^p dp l x + p x^{p-1} dx$, adunque sarà $x^p dp l x + p x^{p-1} dx \times l z + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma $t = z^{x^p}$, adunque sarà $dt = z^{x^p} x^p dp l x l z + z^{x^p} p x^{p-1} dx l z + z^{x^p} z^{-1} x^p dz$, differenziale cercato.

Nello stesso modo si proceda intorno alle quantità esponenziali di qualunque altro grado.

152. Istessamente si averanno i differenziali delle quantità, che sono il prodotto di quantità esponenziali, per esempio di $x^p y^n$, imperocchè il differenziale di questa sarà il prodotto di x^p nel differenziale di y^n , con di più il differenziale di x^p in y^n ; ma i differenziali di x^p , ed y^n si fanno trovare, adunque ec.

153. Dall'ordine, con cui procedono i differenziali logaritmici, si possono cavare alcune regole per la integrazione delle formole differenziali logaritmiche; ed in primo luogo que' canoni, che servono per la integrazione delle quantità differenziali ordinarie, serviranno ancora per le quantità differenziali logaritmiche a loro simili, purchè queste sieno in oltre divise per la variabile, e l'integrale di queste sarà lo stesso dell'integrale di quelle, ponendo solo in queste in luogo della incognita, o sua potestà, il logaritmo, o potestà del logaritmo dell'incognita stessa, ed il tutto dividendo per la sottangente della logaritmica.

Così poichè l'integrale di $mx^{m-1}dx$ è x^m , sarà pure $\frac{l^m x}{a}$ l'integrale di $m l^{m-1} x \times \frac{dx}{x}$.

Istessamente poichè $\int x^{-1} dx = l x$, sarà pure $\int l^{-1} x \times \frac{dx}{x}$, o sia $\int \frac{dx}{x \cdot l x}$, supposta la sottangente = 1.

E poichè $\int y dy \sqrt{aa + yy} = \frac{aa + yy^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$, farà pure

$$\int l y \sqrt{aa + l^2 y} \times \frac{dy}{y} = \frac{aa + l^2 y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}.$$

Sia da integrarsi $ml^{m-1}lx \times \frac{dx}{xlx}$. Pongo $lx = y$,

adunque $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, e fatta la sostituzione, farà $ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$;

ma l'integrale di $my^{m-1}dy$ si fa essere y^m , adunque l'integrale di $ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$ farà $l^m y$; ma $y = lx$, e

però $ly = l^2 x$, e $l^m y = l^m lx$; adunque

$$\int ml^{m-1}lx \times \frac{dx}{xlx} = l^m lx.$$

Sia $nml^{n-1}x^m \times \frac{dx}{x}$. Pongo $x^m = y$, e però

$$dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}; \text{ fatte le sostituzioni, farà}$$

$$nml^{n-1}y \times \frac{dy}{mx^{m-1} \times x}, \text{ cioè } \frac{nml^{n-1}y \times dy}{my}, \text{ o sia}$$

$$nl^{n-1}y \times \frac{dy}{y}, \text{ il di cui integrale è } l^n y, \text{ adunque re-}$$

$$\text{stituito il valore di } y, \text{ farà } \int nml^{n-1}x^m \times \frac{dx}{x} = l^n x^m.$$

Sia $nml^{n-1}l^m x \times \frac{dx}{xlx}$. Pongo $lx = y$, dun-

dd 2

que

che $\frac{dx}{x} = dy$, e $l^m x = y^m$; fatta la sostituzione, sarà
 $nm l^{n-1} y^m \times \frac{dy}{y}$, ma l'integrale di questa è $l^n y^m$,
 adunque restituito il valore, sarà
 $\int nm l^{n-1} l^m x \times \frac{dx}{x l^m} = l^n l^m x.$

154. A ciò aggiungo una regola generale per la
 integrazione della formola $y^m l^n y dy$, e dico, che sarà
 generalmente $\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1} l^n y - n y^{m+1} \frac{a l^{n-1} y +$

$$\frac{n \times \frac{a l^{n-1} y}{m+1} \times y^{m+1} + a a l^{n-1} y}{m+1} -$$

$$\frac{n \times \frac{a l^{n-1} y}{m+1} \times \frac{a l^{n-2} y}{m+1} \times y^{m+1} + a^2 l^{n-2} y}{m+1} \text{ ec. , e così conti-}$$

novando in infinito con la stessa legge, che da se è
 manifesta.

Quindi se l'esponente n sarà un numero intero,
 e positivo, è facile il vedere, che la serie s'interrom-
 perà, ed in conseguenza sarà dato in termini finiti l'in-
 tegrale della proposta formola.

Sia per cagione d'esempio $n = 2$; sarà dunque
 $n - 2 = 0$, e però sarà zero il coefficiente del quarto
 termine, e de' susseguenti, per essere ciascuno multi-
 plicato

plicato per $n-2$. Così se farà $n=3$, s'interromperà la serie nel quinto termine; e così degl'altri ec.

Sia $n=2$, $m=1$, onde la formola d'integrarsi sia $y l^2 y dy$; farà adunque zero il quarto termine, ed ognuno de' suffeguenti, e però l'integrale sarà

$$\frac{yy l^2 y}{2} - \frac{2yya ly}{4} + \frac{2yyaa}{8}, \text{ cioè } \frac{2yy l^2 y}{2} - \frac{2a yy ly}{4} + \frac{a^2 yy}{4}.$$

Che se fosse $m=-1$, farebbe inutile la serie, perchè farebbe $m+1=0$, il che rende infinito ciascun termine, ma in questo caso non v'è bisogno della serie, giacchè si fanno integrare queste formole, per le cose dette di sopra.

Rimane, che di tale regola se ne dia la dimostrazione; per lo che fare si ponga $ly=z$, e però $\frac{ady}{y}=dz$;

farà adunque, fatta la sostituzione, $y^m l^n y dy = y^m z^n dy$; ma $y^m z^n dy = y^m z^n dz + \frac{n}{m+1} y^{m+1} z^{n-1} dz -$

$$\frac{n}{m+1} y^m z^{n-1} ady - \frac{n \times n-1}{m+1} \times y^{m+1} z^{n-2} adz +$$

$\frac{n \times n-1}{m+1} \times y^m z^{n-2} aady$ ec., e così in infinito, perchè in questa guisa ciascun termine, toltone il primo, si distrugge dall'immediatamente suffeguento, appunto per

per essere $dz = \frac{ady}{y}$. Ora poichè questa tal serie infinita

è integrabile, prendendo i termini a due a due, imperciocchè l'integrale del primo, e secondo termine è $\frac{y^{m+1}z^n}{m+1}$; del terzo, e quarto è $-\frac{any^{m+1}z^{n-1}}{m+1}$;

del quinto, e sesto è $\frac{aan \times n-1 \times y^{m+1}z^{n-2}}{m+1}$, e

così di mano in mano; restituito in questi integrali ly in luogo di z , troveremo finalmente essere

$$\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - \frac{any^{m+1} l^{n-1} y}{m+1} + \frac{aan \times n-1 \times y^{m+1} l^{n-2} y}{m+1} - \frac{a^2 n \times n-1 \times y^{m+1} l^{n-3} y}{m+1} + \dots$$

155. L'artificio, con cui si ritrova la suddetta serie, può essere il seguente.

M'immagino, che l'integrale di $y^m l^n y dy$ sia $\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1}$, quale appunto sarebbe, se $l^n y$ non fosse

quantità variabile, ma posta la sottangente $= a$, il differenziale di esso integrale è $y^m l^n y dy + \frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$,

il quale si trova maggiore della proposta formola, quan-

to è $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$; adunque l'integrale assunto è mag-

giore del dovere, quanto è l'integrale di $\frac{ny a l^{n-1} y dy}{m+1}$,

e però l'integrale di questo si dovrà sottrarre dall'integrale supposto.

E qui di nuovo m'immagino, che l'integrale di $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ sia $\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{m+1}$, onde l'integrale

della proposta formola venga ad essere

$\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - \frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{m+1}$. Ma differenziando

$\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{m+1}$, si à $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1} +$

$n \times \frac{n-1}{m+1} \times \frac{y^m a^2 l^{n-2} y dy}{m+1}$; adunque l'integrale di

$\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ non è $\frac{ny^m a l^{n-1} y}{m+1}$, ma è maggiore

del dovere, quanto è l'integrale di $\frac{n \times \frac{n-1}{m+1} \times y^m a a l^{n-2} y dy}{m+1}$,

adunque si è sottratto troppo, e però bisognerà aggiungere questo integrale, il quale nuovamente m'im-

ma-

magino, che sia $\frac{n \times \overline{n-1} \times y^{m+1} a a l^{n-2} y}{m+1}$, adun-

que sarebbe l'integrale della proposta formola

$$\frac{y^{m+1} l^n y - n y^{m+1} a l^{n-1} y + n \times \overline{n-1} \times y^{m+1} a a l^{n-2} y \text{ ec.}}{m+1} \quad \frac{\overline{2}}{m+1} \quad \frac{\overline{3}}{m+1}$$

e così con lo stesso ordine procedendo si continuerà la serie in infinito.

156. Si possono anco avere gl'integrali delle formole differenziali logaritmiche per via di serie, che non contengano quantità logaritmiche, ma sole ordinarie, le quali serie però non s'interrompono mai, e sono sempre infinite.

Sia adunque da integrarsi $x/x \times dx$. Pongo $x = z + a$, sostituendo sarà $\overline{z+a} / \overline{z+a} \times dx$, ma per lo num. 70.

$$\overline{z+a} = \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2aa} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} \text{ ec., supposta la sottan-}$$

gente = 1, facendo adunque l'attuale moltiplica, avremo $\overline{z+a} / \overline{z+a} \times dz =$

$$\frac{zdz}{a} + \frac{z^2 dz}{2aa} - \frac{z^3 dz}{3a^3} + \frac{z^4 dz}{4a^4} - \frac{z^5 dz}{5a^5} \text{ ec.}$$

$$- \frac{z^2 dz}{2a} + \frac{z^3 dz}{3aa} - \frac{z^4 dz}{4a^3} + \frac{z^5 dz}{5a^4} ,$$

cioè

cioè $zdz + \frac{zzdz}{2a} - \frac{z^3dz}{6aa} + \frac{z^4dz}{12a^3} - \frac{z^5dz}{20a^4}$ ec., ed integran-

do farà $\frac{zz}{2} + \frac{z^3}{6a} - \frac{z^4}{24aa} + \frac{z^5}{60a^3} - \frac{z^6}{120a^4}$ ec. =

$$\int \frac{1}{z+a} \frac{1}{z+a} \times dz.$$

Che se la formola fosse $x^m l x dx$, cioè $\frac{1}{z+a} \frac{1}{z+a} \times dz$, si dovrebbe moltiplicare la serie esprimente il logaritmo nella potestà $\frac{1}{z+a}^m$. E se di più fosse anco il logaritmo elevato a potestà, come a. dire $x^m l^n x dx$, cioè $\frac{1}{z+a}^m \frac{1}{z+a} \times dz$, bisognerebbe in oltre elevare alla potestà n la serie infinita, che esprime esso logaritmo, e fare il rimanente come sopra.

157. Le equazioni o formole differenziali affette da quantità logaritmiche bene spesso ammettono integrazioni, che sono geometriche, e dipendono da quadrature di spazj curvilinei, che facilmente si descrivono, supposta la logistica. Eccone alcuni esempj scelti fra i più semplici.

Sia l'equazione $dy l y = dx$, e nella logaritmica, descritta (Fig. 42.) pongasi $CD = y$, e presa la sottangente per unità, avremo AC , o $HD = l y$; onde il rettangolo infinitesimo DG , la di cui base $GH = FE = dy$, farà $= dy l y$, ma questo rettangolo si è l'elemento

e c

dell'

dell'area crescente BDH , dunque la somma $\int dy \, l y$ è eguale alla detta area BDH .

Di fatto l'area stessa si eguaglia al rettangolo AD meno lo spazio logaritmico $ABDC$; ma questo spazio, siccome è noto, si misura dal rettangolo $AB \times CD = y$, dunque l'area $BDH = \int dy \, l y = y \, l y - y$, siccome pure può trovarsi per via d'analisi.

Considero un'altra formola $dy \, l^2 y = dx$. Il primo membro altro non è, che il solido generato dalla flussione HG moltiplicata nel quadrato dell'ordinata GF , il qual solido è analogo all'elemento del conoide generato dall'area BDH girata attorno l'asse BG , dunque l'integrale $\int dy \, l^2 y = y \, l^2 y - 2y \, l y + 2y$ sia al detto conoide in data ragione.

Più generalmente abbiassi $dy \, l^m y$. Alzata l'applicata HD alla potestà m (essendo l'indice m un numero affermativo, o negativo, intero, o rotto) basterà, che l'ordinata HM facciafi eguale alla dignità $\overline{HD}^m$, e che per lo punto M , ed altri infiniti in simil maniera determinati passi la curva BMN , per conseguire, che l'area $BMH = \int MH \times dy$ sia eguale, o analoga all'integrale $\int dy \, l^m y$.

Mag-

Maggiore difficoltà non si incontra quando anche nella espressione ci si parano avanti i logaritmi dei logaritmi. Propongasi $dy lly = dx$; giacchè AC è il logaritmo di CD , se si adatterà nella logistica la nuova applicata IL eguale all'assisa AC , farà AI il logaritmo di IL , e conseguentemente il logaritmo del logaritmo della CD . Si proroghi la retta IL fin a tanto, che tagli la HD parallela, ed eguale ad AC nel punto K , per cui, ed altri infiniti similmente determinati passi una nuova curva delineata relativamente alla logistica: dico, che la quadratura dello spazio spettante ad essa curva ci dà l'integrale della formola $dy lly = dx$.

In altro modo: piglio la differenza della quantità $y lly$, cioè $dy lly + \frac{dy}{ly}$, ed aggiunto nella nostra espressione da ambo le parti il termine $\frac{dy}{ly}$, si à $dy lly +$

$$\frac{dy}{ly} = dx + \frac{dy}{ly}, \text{ ed integrando, } y lly = x + \int \frac{dy}{ly}.$$

Po-
sta dunque all'assisa AH l'ordinata corrispondente in ragion reciproca di $HD = ly$, nascerà una curva, il di cui tetragonismo esprimerà l'integrale $\int \frac{dy}{ly}$. E ciò

basterà, onde si vegga l'andamento del metodo.

158. Passerò ora alle integrazioni delle formole.

differenziali, che contengono quantità esponenziali; e sia da integrarsi $x^x dx$. Pongo $x = 1 + y$, (prendo l'unità per una qualunque costante) sarà dunque $x^x dx = \overline{1+y}^{1+y} dy$; ciò posto, faccio in oltre $\overline{1+y}^{1+y} = 1 + u$, adunque sarà $\overline{1+y} \mid \overline{1+y} = \mid \overline{1+u}$, e però convertiti in serie pel num. 70. i due logaritmi, e fatta l'attual moltiplica per $1+y$ della prima serie, averassi $y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$ ec. = $u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$ ec. Indi faccio una equazione fittizia, e suppongo, che sia

$$u = y + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \text{ ec. ;}$$

(A, B, C, D ec. sono quantità da determinarsi)
e però

$$uu = yy + 2Ay^2 + AAy^3 + 2ABy^4 + BBy^5 \text{ ec.} \\ + 2By^4 + 2Cy^5 + Dy^6$$

$$u^3 = y^3 + 3Ay^4 + 3AAy^5 \text{ ec.} \\ + 3By^5$$

$$u^4 = y^4 + 4Ay^5 \text{ ec.}$$

$$u^5 = y^5 \text{ ec.,}$$

adun-

$$\text{adunque farà } u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} \text{ ec.} =$$

$$y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{2}yy - Ay^3 - \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5 \text{ ec.}$$

$$= By^4 - Cy^5 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 \text{ ec.}$$

$$+ By^5 \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{4}y^4 - Ay^5 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{5}y^5 \text{ ec.}$$

$$\text{Ma poichè } u - \frac{1}{2}uu + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 \text{ ec.}$$

$$= y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20} \text{ ec., farà}$$

$$y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{2}yy - Ay^3 + \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5 \text{ ec.,}$$

$$- By^4 - Cy^5 \text{ ec.} = y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 \text{ ec.}$$

$$+ By^5 \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{4}y^4 - Ay^5 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{5}y^5 \text{ ec.}$$

E riducendo l'equazione al zero, farà

$$y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.}$$

$$-\frac{1}{2}yy - Ay^3 - \frac{1}{2}AAy^4 - AB y^5 \text{ ec.}$$

$$- By^4 - Cy^5 \text{ ec.}$$

$$+\frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 \text{ ec.} = 0.$$

$$-\frac{1}{4}y^4 - Ay^5 \text{ ec.}$$

$$+\frac{1}{5}y^5 \text{ ec.}$$

$$-y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} + \frac{y^5}{20} \text{ ec.}$$

Quindi dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini troveremo il valore delle affunte A, B, C ec., che faranno $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = \frac{1}{12}$. Adunque, posti questi valori in luogo delle majuscole, avremo $1 + u = 1 + y + y^2 + y^3 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^5 + \frac{1}{12}y^6 \text{ ec.}$, onde

$1 + y^{1+y} dy = dy + ydy + y^2 dy + \frac{1}{2}y^3 dy + \frac{1}{3}y^4 dy + \frac{1}{12}y^5 dy \text{ ec.}$, ed integrando, farà finalmente

$$\int 1 + y^{1+y} dy = y + \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{15} + \frac{y^6}{72} \text{ ec.}$$

159. In altra maniera ancora si troverà l'integrale

le della formola $x^x dx$. Pongo $x^x = 1+y$, adunque

$x l x = l 1+y$; riduco in serie $l 1+y$, e farà

$$l 1+y = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{y^3}{4} + \frac{y^4}{5} \text{ ec.}$$

Ciò posto, fingo $y = l 1+y + Al^2 1+y + Bl^3 1+y + Cl^4 1+y + Dl^5 1+y$ ec., (A, B, C, D ec. sono quantità da determinarsi) adunque farà

$$y = l 1+y + Al^2 1+y + Bl^3 1+y + Cl^4 1+y + Dl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$yy = l^2 1+y + 2Al^3 1+y + AAl^4 1+y + 2ABl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$+ 2Bl^4 1+y + 2Cl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$y^3 = l^3 1+y + 3Al^4 1+y + 3AAl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$+ 3Bl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$y^4 = l^4 1+y + 4Al^5 1+y \text{ ec.}$$

$$y^5 = l^5 1+y \text{ ec. ,}$$

e però $y - \frac{yy}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{y^3}{4} + \frac{y^4}{5} \text{ ec. ,}$ cioè

$$l 1+y = l 1+y + Al^2 1+y + Bl^3 1+y + Cl^4 1+y + Dl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{2} l^2 1+y - Al^3 1+y - \frac{1}{2} AAl^4 1+y - ABl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$- Bl^4 1+y - Cl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{3} l^3 1+y + Al^4 1+y + AAl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$+ Bl^5 1+y \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{4} l^4 1+y - Al^5 1+y \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{5} l^5 1+y \text{ ec.}$$

Quindi

Quindi riducendo l'equazione al zero, dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini troveremo il valore delle assunte A, B, C, D , ec., cioè $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{24}$, $D = \frac{1}{120}$ ec., onde sarà

$$1+y = 1 + l'1+y + \frac{1}{2} l'^2 1+y + \frac{1}{6} l'^3 1+y + \frac{1}{24} l'^4 1+y + \frac{1}{120} l'^5 1+y \text{ ec.};$$

ma $l'1+y = x l'x$, ed $1+y = x^x$; adunque fatte le sostituzioni, e moltiplicando per dx , sarà $x^x dx = dx + x dx l'x + \frac{1}{2} x x dx l'^2 x + \frac{1}{6} x^3 dx l'^3 x + \frac{1}{24} x^4 dx l'^4 x + \frac{1}{120} x^5 dx l'^5 x \text{ ec.}$,

ed integrando con le note regole di sopra spiegate, farà finalmente $\int x^x dx = x + \frac{x x l'x}{2} + \frac{x x^2 l'^2 x}{4} + \frac{x^3 l'^3 x}{6} +$

$$\frac{x^4 l'^4 x}{24} + \frac{x^5 l'^5 x}{120} + \frac{x^6 l'^6 x}{720} + \frac{x^7 l'^7 x}{5040} + \frac{x^8 l'^8 x}{40320} + \frac{x^9 l'^9 x}{362880} + \frac{x^{10} l'^{10} x}{3628800} \text{ ec.}$$

160. Ma per dire in oltre alcuna cosa intorno alla costruzione delle curve espresse da equazioni logaritmiche, ed esponenziali. Debba in primo luogo descrivere la

curva dell'equazione $x = \frac{1}{a} l^2 y$: sia BD (Fig. 43.) la

logritmica, in cui si prendano i logaritmi della proposta equazione, la di cui sottangente sia, per esempio, $= a = AB$; ciò posto, presa $y = a = AB$, il logaritmo di y sarà $= 0$, e però $x = 0$; adunque fatta (Fig. 44.)

$MN =$

$MN=y=a$, farà N un punto nella curva. Prefa y minore di AB , farà ly quantità negativa, e però $l^{\frac{1}{2}}y$ quantità immaginaria, per essere il 2 indice pari di radice, di quantità negativa, onde x farà immaginaria ogni qual volta sia y minore di a . Prefa y maggiore di AB per esempio $=CD$, farà $AC=ly$; ma per l'equazione data, è $a^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}}y :: ly, x$, cioè $a, \sqrt{aly} :: ly, x$; adunque fatta $MP=CD$, se prenderassi PH eguale alla quarta proporzionale di AB , della medietra AB , ed AC , e della stessa AC , farà essa $=x$, ed il punto H nella curva. In questo modo si troveranno quanti punti si vogliono, e descriverassi la curva, la quale anderà in infinito, come è facile a conoscere.

Per avere la sottangente della data curva, prendo la formola differenziale $\frac{ydx}{dy}$ delle sottangenti; differenzio l'equazione della data curva, e trovo $dx =$

$$\frac{1}{2} l^{\frac{1}{2}} y \times \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} dy; \text{ fatta la sostituzione in luogo di } dx,$$

$$\text{averassi essa sottangente} = \frac{1}{2} l^{\frac{1}{2}} y \times a^{\frac{1}{2}} = \frac{3ax}{2ly} =$$

$$\frac{3a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{2}$$

ff

Averà

Averà pure la nostra curva un flesso contrario, per ritrovare il quale prendo le seconde differenze della data equazione, supposta dx costante, e ritrovò

$$\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y \times ddy + \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y = 0,$$

e però $ddy = \frac{\frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y}{yy}$; ma per lo

$$\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y$$

metodo de' flessi contrarj, deve essere $ddy = 0$; adun-

que farà $\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y = 0$, cioè

$l^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} a l^{-\frac{1}{2}} y = 0$, cioè $ly = \frac{1}{2} a$, farà adunque il flesso contrario allora quando sia $ly = \frac{a}{2}$.

Se la proposta curva da descriversi sarà $x lx = y$, risolta l'equazione in analogia, farà $1, lx :: x, y$, e si costruirà in simil modo.

E se fosse $xx lx = y$, o pure $x^3 lx = y$, o $x^{\frac{1}{3}} lx = y$, o più generalmente $x^n lx = y$, essendo n una qualunque potestà intiera o rotta di x ; risolta istessamente l'equazione nell'analogia $1, lx :: x^n, y$, e presa nella logaritmica una qualunque $CD = x$, onde sia

$$AC =$$

$AC = lx$; il multiplo di AC secondo il numero n , se è intero; il submultiplo, se è rotto, ci darà la corrispondente ordinata nella logaritmica stessa, che sarà x^n , per la proprietà della logaritmica.

Che se la curva contenesse quantità, che fossero il logaritmo di logaritmo, come se fosse $x^{llx} = y$, facilmente si averebbe nella logaritmica la linea espressa per llx prendendo una qualunque $CD = x$ (Fig. 43.), onde sia $AC = lx$, ed indi posta AC per ordinata in (ac) ; imperocchè sarà Aa il logaritmo di (ac) , cioè llx , come ancora è stato avvertito al num. 157.

161. Debbaſi coſtruire la curva eſponenziale dell' equazione $x^x = y$. Adunque prendendo i logaritmi, farà $x lx = ly$. Però deſcritta (Fig. 45.) la logaritmica PAB con la ſottangente $AD = 1$, e preſa una qualunque $CB = DE = x$, farà $DC = lx$; adunque poichè l'equazione ſi riſolve nell'analogia $1, x :: lx, ly$, il quarto proporzionale di AD, BC , e DC , che ſia per eſempio DM , farà ly ; adunque $MN = y$, e però ſe ſaraſſi $EF = MN$, farà $DE = x, EF = y$, ed F un punto della curva da deſcriverſi.

La curva taglierà l'aſintoto HM in H , fatta $DH = DA$; imperocchè poſta $x = 0$, farà $ly = 0$, cioè y eguale alla ſottangente DA . Similmente poſta $x = 1 = DA$, farà $lx = 0$, e però $ly = 0$, cioè $y = DA$; fatta adunque $AG = DH$, farà G un punto in curva.

Dal punto H alzando l'applicata HP alla logaritmica, e conducendo POR parallela ad HD , farà OR la minima ordinata y alla curva. Imperciocchè differenziando l'equazione, farà $dx + dx \ln x = \frac{dy}{y}$, cioè $y dx + y dx \ln x = dy$, ma per lo metodo de' massimi, e minimi, deve essere $dy = 0$, adunque $y dx + y dx \ln x = 0$, e però $-\ln x = 1 = HD = DA$.

Essendo $\frac{y dx}{dy}$ la formola generale della sottangente, e dall'equazione data della curva avendosi $dx = \frac{dy}{y \times 1 + \ln x}$, sostituito questo valore nella formola, farà la sottangente per un qualunque punto della curva $= \frac{1}{1 + \ln x}$, e per lo

punto G , rispetto a cui è $x = AD$, ed in conseguenza $\ln x = 0$, farà la sottangente $= 1 = AD$, sottangente della logaritmica.

Rispetto allo spazio: prendo la formola generale $y dx$; ma $y = x^x$, equazione della curva, sostituito adunque nella formola il valore di y , farà $x^x dx$, e però $\int x^x dx$ lo spazio indefinito $HOFEADH$, il quale, integrando per lo num. 159., farà =

$$x + \frac{x x \ln x}{2} - \frac{x x}{4} + \frac{x^3 \ln x}{6} - \frac{x^3 \ln x}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4 \ln x}{24} - \frac{x^4 \ln x}{12} + \frac{x^4 \ln x}{64} \text{ ec.}$$

E presa $x = AD = 1$, sarà $lx = 0$, e però lo spazio

$$HOGAD = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} \text{ cc. ,}$$

$$\text{cioè} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} \text{ cc.}$$

162. Sia la curva dell'equazione $xy = a$, sarà $ylx = la$, e però si potrà costruire per mezzo della logaritmica. Differenziando l'equazione $ylx = la$, avremo $\frac{ydx}{x} + dylx = 0$ (presa la sotttangente della loga-

ritmica $= 1$), e però sarà $dx = -\frac{x l x dy}{y}$, adunque la sottangente $= -x l x$.

163. Sia $x^x = a^y$; adunque $x l x = y l a$, che si potrà costruire al solito. Prese le differenze, sarà $dx + dx l x = dy l a$, e però la sottangente $= \frac{x l x}{1 + l x}$.

Ma poichè $y = \frac{x l x}{l a}$, sarà $y dx$, cioè l'elemento dello spazio $= \frac{x l x \times dx}{l a}$, ed integrando per lo num. 154,

$$\frac{2x x l x - x x}{4 l a}.$$

164. Altre questioni ancora possono proporsi appartenenti ad equazioni esponenziali; come, per esempio, nelle equazioni esponenziali composte di sole quan-

tità

tà cognitive, ma con gl'esponenti incogniti, trovare essi esponenti.

Sia adunque $c^x = ab^{x-1}$, si dimanda il valore dell'esponente incognito x , essendo date le a, b, c ; scrivo $\frac{c^x}{a} = b^{x-1}$, adunque sarà $xlc - la = x - 1lb$,

e però $xlc - xlb = la - lb$, quindi $x = \frac{la - lb}{lc - lb}$.

165. Altra questione sarebbe questa. Trovare un numero x tale, che sia $x^x = a$, e $x^{x+p} = b$. Adunque per la prima condizione avremo $xlx = la$, e però $x = \frac{la}{lx}$, o pure $lx = \frac{la}{x}$.

Per la seconda condizione avremo $x + plx = lb$, e però sarà $x = \frac{lb - plx}{lx}$, o pure $lx = \frac{lb}{x+p}$. Adunque

farà $\frac{la}{x} = \frac{lb}{x+p}$, cioè $xla + pla = xlb$, cioè $x = \frac{pla}{lb - la}$,

o pure $\frac{la}{lx} = \frac{lb - plx}{lx}$, cioè $lx = \frac{lb - la}{p}$. Ciò posto,

mi faccio a sciogliere il seguente problema.

166. Dato un vaso di nota capacità pieno di qualunque liquore, che sia per esempio vino, se ne estragga in un sorso una data quantità, poi si riempia d'acqua il vaso, indi del liquore ora misto d'acqua, e

di

di vino, se ne estrarra un'altro sorso eguale al primo, e di poi si riempia d'acqua il vaso, e nuovamente si estrarra del misto liquore un sorso pure eguale al primo, e così di mano in mano si vada con la stessa legge ripetendo l'operazione: si dimanda, quanti sorfi bisognerà prendere, cioè quante volte bisognerà ripetere l'operazione, acciò sia nel vaso una data quantità di vino.

Sia $= a$ la capacità del vaso, e sia $= b$ la quantità di ciaschedun sorso. Nel primo sorso adunque s'estraerà dal vaso tanta quantità di vino, che sarà $= b$, ed altrettanto s'infonderà d'acqua, onde dopo il primo sorso sarà nel vaso quantità di vino $= a - b$.

Nel secondo sorso s'estraerà b di liquore misto, onde per avere la quantità del puro vino, che in esso sorso s'estrae, si faccia l'analogia: come la capacità del vaso (a) sta alla quantità d'un sorso (b), così il vino, che è nel vaso, ($a - b$) al quarto $\frac{ab - bb}{a}$, farà

esso la quantità del puro vino, che si è estratto nel secondo sorso, rimarrà adunque nel vaso quantità di puro vino $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$, cioè $\frac{a - b}{a}$. Pel terzo sorso

facendo pure l'analogia: come la capacità del vaso (a) sta alla quantità d'un sorso (b), così il vino, che è nel vaso, ($\frac{a - b}{a}$) al quarto $\frac{a - b}{a} \times \frac{b}{a}$, farà esso la

quan-

quantità del puro vino, che si è estratto nel terzo sorfo, rimarrà pertanto nel vaso quantità di puro vino

$$\frac{a-b^2}{a} - \frac{b}{a} \times \frac{a-b^2}{a}, \text{ cioè } \frac{a-b^3}{aa}, \text{ e così dopo il quar-}$$

to sorfo farà nel vaso quantità di puro vino $\frac{a-b^4}{a^3}$, e

generalmente dopo un numero n di sorfi farà nel vaso quantità di puro vino $\frac{a-b^n}{a^{n-1}}$. Se adunque si voglia sa-

pere, quanti sorfi debbanfi prendere, acciò nel vaso rimanga una data quantità, che sia per esempio $\frac{a}{m}$ di

puro vino, faremo l'equazione $\frac{a-b^n}{a^{n-1}} = \frac{a}{m}$, la quale,

per essere n incogita, farà appunto esponenziale. Ridotta per tanto l'equazione ai logaritmi, sarà

$$\int \frac{a-b^n}{a^{n-1}} = \int \frac{a}{m}, \text{ cioè } nla-b = la-lm+n-1la,$$

$$\text{o sia } nla-b = -lm+nla, \text{ e però } n = \frac{lm}{la-la-b},$$

con che sarà facile avere il numero n col mezzo delle tavole logaritmiche.

FINE DEL TERZO LIBRO.

INSTITUZIONI ANALITICHE LIBRO QUARTO

Del Metodo Inverso delle Tangenti.

INSTITUZIONI ANALITICHE LIBRO QUARTO

Del Metodo Inverso delle Tangenti.

Nel secondo, e terzo libro si sono curate le espressioni generali differenziali della tangente, e delle linee analoghe, come pure delle rettificazioni, e degli spazi; adunque paragonando la proprietà data della tangente, della rettificazione ec. alla rispettiva espressione, o formula generale differenziale, nascerà una equazione differenziale del primo grado, o di grado superiore, la quale integrata, o algebricamente, o supposte le quadrature, ci darà la curva, che si ricerca, ed a

INSTITUZIONI ANALITICHE LIBRO QUARTO

Del Metodo Inverso delle Tangenti .

I. **P**Oichè , data una qualunque curva , il modo di ritrovare la di lei tangente , sottotangente , normale , o qualunque analoga linea si chiama *Il Metodo diretto delle Tangenti* ; così , data la tangente , sottotangente , normale , o qualunque analoga linea ; siccome pure data la rettificazione , o lo spazio , il modo di ritrovare quella curva , a cui compete la data proprietà della tangente , dello spazio ec. , si chiama *Il Metodo inverso delle Tangenti* .

Nel secondo , e terzo libro si sono ritrovate le espressioni generali differenziali della tangente , e delle linee analoghe , come pure delle rettificazioni , e degli spazj ; adunque paragonando la proprietà data della tangente , della rettificazione ec. alla rispettiva espressione , o formola generale differenziale , nascerà una equazione differenziale del primo grado , o di grado superiore , la quale integrata , o algebricamente , o supposte le quadrature , ci darà la curva , che si ricerca , ed a

cui compete la data proprietà. Si cerchi, per esempio, la curva la di cui sottotangente debba essere eguale alla doppia assissa. Chiamate le assisse x , le ordinate y , la formola della sottotangente è $\frac{ydx}{dy}$, adunque sarà l'e-

quazione $\frac{ydx}{dy} = 2x$. Si cerchi la curva, il di cui spa-

zio debba essere eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate. L'elemento dello spazio è ydx ; adunque dovrà essere $\int ydx = \frac{2xy}{3}$, e però $ydx = \frac{2x dy + 2y dx}{3}$.

Si cerchi la curva, la di cui proprietà sia, che un qualunque arco preso dal vertice sia eguale alla rispettiva sottonormale. L'espressione dell'arco è $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$;

quella della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$; dunque avremo

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ydy}{dx}, \text{ e però } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ydxddy + dx dy^2}{dx^2},$$

(presa per costante dx) equazione differenziale del secondo grado.

2. Le equazioni, che in questo modo risultano, avranno sempre, come è facile a vedere, le indeterminate con le differenziali tra loro miste, e confuse, quindi non si fanno per ora maneggiare a fine di passare alle integrazioni, e così avere le curve, che si

cer-

cercano, e molto meno se contengono differenziali secondi, terzi ec., poichè nell'antecedente terzo libro si sono sempre supposte le formole differenziali essere composte di una sola indeterminata con la sua differenza. Sono adunque necessarj altri ripieghi per tentare di ridurre alle integrazioni, o quadrature tali equazioni, il che si chiama *Costruire le equazioni differenziali del primo, secondo ec. grado*. E quanto a quelle del primo in due maniere si procede; l'una è di passare alle integrazioni, o quadrature senza alcuna previa separazione delle indeterminate, e loro differenziali; l'altra di separare prima le indeterminate, e così render le equazioni atte all'integrazioni, o quadrature.

Anderò spiegando varj metodi particolari per ambedue le maniere, co' quali in molte equazioni si ottiene l'intento; ma moltissime altre se ne incontrano, che si trovano affatto contumaci, almeno coi metodi fin' ora scoperti, i quali non hanno quell'universalità, che sarebbe necessaria.

C A P O I.

Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado, senza alcuna previa separazione dell'indeterminate.

3 LE più semplici formole, che abbiano le due variabili assieme confuse, sono le due $xdy + ydx$, ed $\frac{ydx - xdy}{yy}$; l'integrale della prima è xy , della seconda è $\frac{x}{y}$, come è chiaro. A queste adunque devesi procurare di ridurre le più composte, e ciò con i soliti ajuti della semplice Analisi, aggiungendo, sottraendo, moltiplicando, dividendo ec. per quelle quantità, che fanno al proposito, le quali varie saranno, secondo i varj casi. Se ne veggia ora la pratica.

Sia $ydx = xdx - xdy$, trasportato all'altra parte il termine ultimo, sarà $ydx + xdy = xdx$, e però $xy = \frac{xx \pm bb}{2}$. Sia l'equazione $x^*dy^2 + 2x^*ydx dy = a^*dx^2 -$

$xxyydx^2$, cioè $x^*dy^2 + 2x^*ydx dy + xxyydx^2 = a^*dx^2$, e dividendo per xx , $xydy^2 + 2xydx dy + yydx^2 = \frac{a^*dx^2}{xx}$,

e cavando la radice quadrata, $xy + ydx = \frac{adx}{x}$, ed in-

tegran-

tegrando, $xy = a \log x \pm b$ nella logaritmica della sottangente $= a$. Sia l'equazione $y dx = y' dy + yy dy + x dy$, cioè $y dx - x dy = y' dy + yy dy$. Il primo membro sarebbe integrabile, se fosse diviso per yy , divido adunque l'equazione, onde sia $\frac{y dx - x dy}{yy} = \frac{y' dy}{y} + dy$, ed inte-

grando, $\frac{x}{y} = \frac{yy}{2} + y \pm b$.

4. Sia l'equazione $y^r dy = m y dx + x dy$. Se non vi fosse il coefficiente m , la cosa sarebbe facile, poichè l'integrale del secondo membro sarebbe xy . Non riuscirà l'operazione nè meno trasportando il membro $x dy$ nella parte opposta dell'equazione, cioè scrivendo $y^r dy - x dy = m y dx$; osservo pertanto, che il differen-

ziale di $mxy^{\frac{1}{m}}$ si è $my^{\frac{1}{m}} dx + xy^{\frac{1}{m}-1} dy$, diverso dal proposto $m y dx + x dy$ in questo solo, che è moltiplicato per $y^{\frac{1}{m}-1}$; per rendere adunque integrabile la quantità

$m y dx + x dy$, basta moltiplicarla per $y^{\frac{1}{m}-1}$, ed a fine di conservare l'egualità, moltiplicare altresì il corrispondente membro $y^r dy$ dell'equazione, e però sarà

$y^{\frac{r+1}{m}} dy = my^{\frac{1}{m}} dx + xy^{\frac{1}{m}-1} dy$, ed integrando,

$\int y^{\frac{r+1}{m}} dy = mxy^{\frac{1}{m}} \pm b$.

Sia

Sia la medesima equazione, ma con coefficiente diverso a ciascuno degl'ultimi due termini, cioè $y^r dy = mydx + nxy dy$. Il secondo membro non è integrabile; osservo però, che il differenziale di $mxy^{\frac{n}{m}}$ si è

$$my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n}{m}-1} dy, \text{ adunque l'omogeneo di comparazione sarebbe integrabile, se fosse moltiplicato per } y^{\frac{n-1}{m}}; \text{ moltiplico per tanto tutta l'equazione, e sarà}$$

$$y^{\frac{n-1}{m}} dy = my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n-1}{m}} dy, \text{ e l'integrale sarà}$$

$$\int y^{\frac{n-1}{m}} dy = mxy^{\frac{n}{m}} \pm b.$$

5. Il differenziale di $x^n y$ è $x^n dy + nyx^{n-1} dx$. Ciò posto, sia l'equazione $y^r dy = x^n dy + yx^{n-1} dx$; se l'ultimo termine avesse il coefficiente n , l'integrale del secondo membro dell'equazione sarebbe $x^n y$. Osservo però, che il differenziale di $x^n y^n$ si è $nx^n y^{n-1} dy + ny^n x^{n-1} dx$; adunque moltiplicando l'equazione per ny^{n-1} , onde sia $ny^{r+n-1} dy = nx^n y^{n-1} dy + ny^n x^{n-1} dx$, si trova integrabile, e l'integrale è $\int ny^{r+n-1} dy = x^n y^n \pm b$.

Ma se l'ultimo termine in vece del coefficiente n ne avesse un'altro, anzi generalmente, se ambedue i termini ultimi fossero affetti da coefficienti diversi; co-

me se l'equazione fosse $y^r dy = cx^n dy + eyx^{n-1} dx$; osservo, che il differenziale di $\frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}}$ si è

$cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$; adunque moltiplicando l'equazione per $y^{\frac{cn}{e}-1}$, onde sia

$y^{r+\frac{cn}{e}-1} dy = cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$, sarà integrabile, e l'integrale sarà $\int y^{r+\frac{cn}{e}-1} dy = \frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}} \pm b$.

Facciasi $r=1$, $c=3$, $n=1$, $e=1$, cioè l'equazione $ydy = 3xdy + ydx$; l'integrale sarà $\frac{y^4}{4} = xy$. Facciasi

$e=2$, $c=3$, $n=1$, $r=1$, cioè l'equazione $ydy = 2xdy + 3ydx$, l'integrale sarà $y^{\frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$, cioè

$\frac{1}{5} y^{\frac{5}{3}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$. Facciasi $c=2$, $e=2$, $n=3$, $r=3$, cioè l'equazione $y^3 dy = 2x^3 dy + 2yx^2 dx$, l'integrale sarà $\frac{y^6}{6} = \frac{2}{3} x^3 y^3$.

Se l'equazione fosse espressa così $y^{1-\frac{cn}{e}} x^r dx = cx^n dy + eyx^{n-1} dx$, è chiaro a vedere, che sarebbe in-

h h

tegra-

tegrabile, poichè moltiplicata per $y^{\frac{cn}{e}-1}$ sarebbe $x^r dx =$
 $cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$, ma l'integrale del secondo
 membro si è veduto, essere $\frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}}$, adunque ec.

6. Sia ora l'equazione $y^r dy = \frac{2xy dy - y dx}{xx}$. Se non
 vi fosse il coefficiente 2, l'integrale del secondo mem-
 bro sarebbe $\frac{y}{n}$. Ma non perciò servirà trasportare alla
 opposta parte il termine $xy dy$, e scrivere $y^r dy - \frac{xy dy}{xx} =$
 $\frac{xy dy - y dy}{xx}$; osservo però, che il differenziale di $\frac{yy}{n}$ si è
 $\frac{2xy dy - yy dx}{xx}$, dunque se si moltiplicherà l'equazione
 proposta per y , onde sia $y^{r+1} dy = \frac{2xy dy - yy dx}{xx}$, farà
 integrabile, e l'integrale sarà $\int y^{r+1} dy = \frac{yy}{n} \pm b$. Ma
 più generalmente sia un qualunque coefficiente n , e
 però l'equazione $y^r dy = \frac{nxy dy - y dx}{xx}$. Osservo, che il
 differenziale di $\frac{y^n}{n}$ è $\frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$, adunque se si
 moltiplicherà l'equazione per y^{n-1} , onde sia
 $y^{r+n-1} dy = \frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$, farà integrabile, e
 l'in-

L'integrale sarà $\int y^{r+\frac{n-1}{m}} dy = \frac{y^{r+\frac{n}{m}}}{\frac{n}{m}} \pm b$.

Anzi abbiamo ambi gli ultimi due termini coefficiente diverso, e sia l'equazione $y^r dy = \frac{nx dy - my dx}{x^x}$,

Osservo, che il differenziale di $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$ si è

$\frac{nx y^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{x^x}$; adunque se si moltiplicherà l'equazione per $y^{\frac{n-1}{m}}$, onde sia $y^{\frac{r+n-1}{m}} dy =$

$\frac{nx y^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{x^x}$, farà integrabile, e l'integrale sarà

$\int y^{\frac{r+n-1}{m}} dy = \frac{my^{\frac{n}{m}}}{x} \pm b$.

Se l'equazione fosse $y^{\frac{r+n}{m}} x^r dx = \frac{nx dy - my dx}{x^x}$,

farebbe pure integrabile, poichè moltiplicata per $y^{\frac{n-1}{m}}$

farà $x^r dx = \frac{nx y^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{x^x}$; ma l'integrale del

secondo membro si fa, essere $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$, dunque ec.

Alle suddette equazioni manchi il denominatore xx , e sia l'equazione $y^r dy = nxdy - ydx$. Per sommare la seconda parte dell'equazione, bisognerebbe moltiplicarla per y^{n-1} , e dividerla per xx ; ma ciò dovendosi fare anche rispetto alla prima parte, sarebbe essa $\frac{y^{r+n-1} dy}{xx}$, che in nessuna maniera si può som-

mare; adunque si mutino i segni all'equazione, e sarà $-y^r dy = ydx - nxdy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x}{y^n}$ si è $\frac{y^n dx - nxy^{n-1} dy}{y^{2n}}$; adunque se si mol-

tiplicherà l'equazione per y^{n-1} , ed indi se si dividerà per y^{2n} , onde sia $\frac{-y^{r+n-1} dy}{y^{2n}} = \frac{y^n dx - nxy^{n-1} dy}{y^{2n}}$,

sarà integrabile, e l'integrale sarà

$$\int \frac{-y^{r+n-1} dy}{y^{2n}} = \frac{x \pm b}{y^n}$$

Abbia l'equazione ambi gli ultimi due termini con il coefficiente, e sia $y^r dy = nxdy - mydx$. Si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = mydx - nxdy$; osservo, che il differenziale di $\frac{x}{my^{\frac{n}{m}}}$ è $\frac{my^{\frac{n}{m}} dx - nxy^{\frac{n}{m}-1} dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$; adunque

se si moltiplicherà l'equazione per $y^{\frac{n}{m}}$, e si dividerà

per

per $mmy^{\frac{2n}{m}}$, onde sia $-y^{\frac{r+\frac{n-1}{m}}{m}} dy =$

$my^{\frac{n}{m}} dx - nxy^{\frac{n-1}{m}} dy$, sarà integrabile, e l'integrale sarà

$$\int -y^{\frac{r+\frac{n-1}{m}}{m}} dy = \frac{x}{my^{\frac{n}{m}}} \pm b.$$

7. Sia l'equazione $y^r dy = x^n dy - nyx^{n-1} dx$. Si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = nyx^{n-1} dx - x^n dy$; osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{y}$ è $\frac{nyx^{n-1} dx - x^n dy}{yy}$,

dunque dividendo l'equazione per yy , onde sia $-y^{r-2} dy = \frac{nyx^{n-1} dx - x^n dy}{yy}$, sarà integrabile, e sarà l'integrale $\int -y^{r-2} dy = \frac{x^n}{y} \pm b$.

Ma se mancasse il coefficiente n , e l'equazione fosse $y^r dy = x^n dy - yx^{n-1} dx$; si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = yx^{n-1} dx - x^n dy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{y^n}$ è $\frac{ny^n x^{n-1} dx - nx^n y^{n-1} dy}{y^{2n}}$; dunque moltiplicando l'equazione per ny^{n-1} , e dividendola

per

per y^{2n} , onde sia $\frac{-ny^{r+n-1} dy}{y^{2n}} = \frac{ny^n x^{n-1} dx - nx^n y^{n-1} dy}{y^{2n}}$,

farà integrabile, e l'integrale sarà $\int \frac{-ny^{r+n-1} dy}{y^{2n}} = \frac{x^n \pm b}{y^n}$.

Che se in luogo del coefficiente n ve ne fosse un'altro di natura diversa; anzi se ambi gl'ultimi termini fossero affetti da coefficiente diverso, come se l'equazione fosse $y^r dy = cx^n dy - eyx^{n-1} dx$, si mutino i segni, e farà $-y^r dy = eyx^{n-1} dx - cx^n dy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}}$ è $\frac{nex^{\frac{nc}{e}-1} dx - ncx^n y^{\frac{nc}{e}-1} dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}}$;

dunque moltiplicando l'equazione per $ny^{\frac{nc-1}{e}}$, e dividendola per $eey^{\frac{2nc}{e}}$, onde sia $\frac{-ny^{\frac{r+nc-1}{e}} dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}} =$

$\frac{nex^{\frac{nc}{e}-1} dx - ncx^n y^{\frac{nc}{e}-1} dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}}$, sarà integrabile, e l'in-

tegrale sarà $\int \frac{-ny^{\frac{r+nc-1}{e}} dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}} = \frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}} \pm b$.

Ma se l'equazione fosse espressa così $y^{\frac{1-nc}{e}} x^r dx = cx^n dy - eyx^{n-1} dx$; senza mutare i segni osservo, che il differenziale di $ey^{\frac{nc}{e}}$ si è $ncx^n y^{\frac{nc}{e}-1} dy - ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1} dx$;

dunque moltiplicando l'equazione per $y^{\frac{nc}{e}-1}$, e dividendola per x^{2n} , onde sia $\frac{nx^r dx}{x^{2n}} =$

$\frac{ncx^n y^{\frac{nc}{e}-1} dy - ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1} dx}{x^{2n}}$, farà integrabile, e farà

l'integrale $\int \frac{nx^r dx}{x^{2n}} = ey^{\frac{nc}{e}} \pm b$.

8. È stato detto da me al num. 17. dell'antecedente libro, che ogni qual volta il numeratore d'una frazione composta di una sola indeterminata, e delle costanti, sia il differenziale preciso del denominatore, o pure un proporzionale di esso differenziale, l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o il proporzionale di esso logaritmo. Ciò vale per tanto anche quando la formola contenga due indeterminate fra se mille coi loro differenziali. L'integrale adunque di $\frac{dx + dy}{x + y} = dz$ (dz è in qualunque modo data per x , o

per

per y) farà $\int \frac{dx + dy}{2x + 2y} = z \pm b$. L'integrale di $\frac{dx + dy}{2x + 2y} = dz$

farà $\int \sqrt{x + y} = z + b$. L'integrale di $\frac{4xdx - 4ydy}{xx - yy} = dz$

farà $\int \frac{2 \sqrt{xx - yy}}{xx - yy} = z \pm b$. L'integrale di

$\frac{xydy + ydx - 2ydy}{2xy - 2yy} = dz$ farà $\int \sqrt{xy - yy} = z \pm b$. E

generalmente l'integrale di

$$\frac{my^n x^{m-1} dx + nx^m y^{n-1} dy - m-n \sqrt{xy^{m+n-1}} dy}{r \times \sqrt{x^m y^n - y^{m+n}}} = dz$$

farà $\int \sqrt{x^m y^n - y^{m+n}} = z \pm b$; e così di qualunque altra equazione, che abbia la assegnata condizione.

9. Molte equazioni però, sebbene non anno la necessaria condizione, possono facilmente con gli ajuti dell'algebra ridursi ad averla. Così l'equazione $\frac{xdy + ydx}{x} = -dy$

non à nel primo membro la condizione, che si ricerca; l'avrà però, se si divida per y , onde sia

$$\frac{xdy + ydx}{xy} = -\frac{dy}{y}, \text{ e però integrando, } \int \frac{xy = ly^{-1} \pm lb}{y}$$

Sia l'equazione $axy + 2aydx = xydy$; la divido per axy , e farà $\frac{xdy + 2ydx}{xy} = \frac{dy}{a}$, la quale sarebbe integra-

bile, se nel secondo termine del primo membro non

vi fosse il coefficiente 2, sottraggo adunque la quantità ydx dall'uno, e dall'altro membro, e sarà $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, cioè $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, e però integrando, $\ln xy = \frac{y}{x} - \ln x \pm \ln b$.

Sia l'equazione $yx dx = \frac{xxxydy + y^3 dy}{y} - yydy$, la divido per y , e sarà $xdx = \frac{xxdy + yydy}{y} - ydy$, cioè $xdx + ydy = \frac{xxdy + yydy}{y}$, e di nuovo dividendo per $xx + yy$, $\frac{xdx + ydy}{xx + yy} = \frac{dy}{y}$, ed integrando,

$$\ln \sqrt{xx + yy} = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \pm b.$$

10. Dalli numeri 31., e 32. dello stesso sopra citato libro terzo si ricava, che una qualunque formola composta di una sola variabile, se sarà il prodotto di qual si sia quantità complessa elevata a potestà positiva, o negativa, intera, o rotta nel differenziale preciso, o nel proporzionale del differenziale de' termini della quantità, sarà sempre integrabile, e l'integrale sarà la stessa quantità, il di cui esponente sia quello di prima, ma accresciuto dell'unità, e moltiplicato nello stesso esponente così accresciuto, ma inversamente preso; cioè, che è lo stesso, per esso divisa; o pure esso integrale sarà un proporzionale di questo. Nulla meno vale la

regola, quando le formole differenziali sieno ancora composte di due variabili, e loro differenziali promissuamente, purchè abbiano la notata condizione.

L'integrale adunque di $\overline{dx + dy \sqrt{x+y}} = dz$ (dz è in qualunque modo data per x , o per y) sarà

$\frac{2}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$. L'integrale di

$\frac{1}{2} \overline{dx} + \frac{1}{2} \overline{dy} \sqrt{x+y} = dz$ sarà $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$,

cioè $\frac{1}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$. L'integrale di $\frac{2ax + 2by}{\sqrt{ax + by}} = dz$

farà $4\sqrt{ax + by} = z \pm b$. L'integrale di

$\frac{p^1 dq + 3qppdp + 3pqqdq + q^1 dp}{2\sqrt{p^1 q + q^1 p}} = dz$ sarà $\sqrt{p^1 q + q^1 p} =$

$z \pm b$. L'integrale di $\overline{xdy + ydx + 2ydy} \times b \times \overline{xy + yy}^{\frac{n}{m}} = dz$ sarà $\frac{mb}{m+n} \times \overline{xy + yy}^{\frac{m+n}{m}} = z \pm b$. L'integrale di

$\overline{xdy + ydx + 2ydy} = dz$ sarà $\frac{m \times \overline{xy + yy}^{\frac{m-n}{m}}}{m-n \times b} = z \pm b$.

E così di mille altre di simil sorta.

Tal

Tal ora però avranno le equazioni bisogno prima di qualche preparazione. Sia l'equazione $xxdx + xydy + yydx = dz$, (dz è data in qualunque modo per x) la moltiplico per x , e sarà $x^2dx + xxydy + yyxdx = xdz$, cioè $xdx \times \overline{xx + yy} + ydy \times \overline{xx} = xdz$, che non è la condizione necessaria; l'avrebbe però, se ydy fosse altresì moltiplicata in yy , aggiungo adunque all'uno, ed all'altro membro il termine y^2dy , e sarà $xdx \times \overline{xx + yy} + ydy \times \overline{xx + yy} = xdz + y^2dy$, cioè $xdx + ydy \times \overline{xx + yy} = xdz + y^2dy$, capace d'integrazione, e però integrando,

$$\frac{xx + yy}{4} = \frac{y^2}{4} \pm b + \int xdz.$$

Ma non è così facile a riconoscere, quale quantità debba aggiungersi, o sottrarsi, o quale altra alterazione possa farsi alle equazioni, a fine di renderle capaci del suddetto metodo, così che quando le equazioni sieno alquanto composte, l'arrivare in questo modo al fine si potrà dire una fortuna, un caso; quindi in tali incontri bisognerà ricorrere ai metodi della separazione delle indeterminate, e però sia

C A P O II.

Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado per mezzo della precedente separazione delle Indeterminate .

11. DI alcune equazioni , quantunque pochissime , succede la separazione delle indeterminate con le sole operazioni prime dell'algebra ordinaria . Tale sarebbe l'equazione $xxdx^2 + xydx dy = aady^2$, in cui osservo , che il primo membro è una formola di quadratica affetta dal lato , che farebbe un quadrato , se vi fosse di più la quantità $\frac{yydy^2}{4}$. Aggiungo per tanto all'uno , ed all'altro membro la quantità $\frac{yydy^2}{4}$, e l'equazione farà $xxdx^2 + xydx dy + \frac{yydy^2}{4} = aady^2 + \frac{yydy^2}{4}$, ed estraendo la radice , $xdx + \frac{ydy}{2} = dy \sqrt{\frac{yy}{4} + aa}$, in cui sono separate le variabili , e però integrando , $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} = \int dy \sqrt{aa + \frac{yy}{4}} \pm b$. L'integrale del secondo membro dipende dalla quadratura dell'iperbola .

12. Il più delle volte adunque conviene servirsi delle sostituzioni. Sia l'equazione $aadx = xxdy + 2xydy + yydy$. Si ponga $x + y = z$, (la z è una nuova indeterminata) e però $dx + dy = dz$, ed $xx + 2xy + yy = zz$. Fatte adunque le sostituzioni, sarà $aadz - aady = zzdy$, cioè $\frac{aadz}{aa + zz} = dy$, equazione, in cui sono separate le

$$aa + zz$$

variabili.

L'integrale del primo membro dipende dalla rettificazione del circolo.

Sia l'equazione $\frac{xdy + ydx \sqrt{a^2 - xxyy}}{xx + yy \sqrt{xx + yy}} =$
 $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy \sqrt{xx + yy}}}$. Osservo nel primo membro,

che l'integrale di $xdy + ydx$ si è xy , e che il quadrato di questo integrale si trova precisamente nella quantità $\sqrt{a^2 - xxyy}$; adunque se porrò $xy = z$, nel primo membro faranno separate le variabili, e sarà esso $dz \sqrt{a^2 - zz}$. Osservo in oltre, che nel secondo membro l'integrale di $xdx + ydy$ è $\frac{xx + yy}{2}$, e che simili a questo integrale sono le quantità nel denominatore; adunque con la sostituzione di $xx + yy = 2p$ si separeranno le indeterminate anche nel secondo membro, e l'equazione sarà

$$dz \sqrt{a^2 - zz} = \frac{dp}{\sqrt{2p} \sqrt{2p}}.$$

Sia

Sia l'equazione $\frac{xdy - ydx}{x - y} = dz$ (la dz è data in

qualsivoglia modo per x , o per y). L'integrale di $xdy - ydx$ si averà quando si divida per xx , e farà $\frac{y}{x}$.

Suppongasi adunque $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$, e però $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dp}{a}$, e $xdy - ydx = \frac{2xxdp}{a}$. Fatta per tanto la sostituzione,

farà $\frac{2xxdp}{a \times xx - 2xy + yy} = dz$, e dividendo il numera-

tore, e denominatore del primo membro per xx , farà

$\frac{2dp}{a \times 1 - \frac{2y}{x} + \frac{yy}{xx}} = dz$; ma si è posto $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$, ed $\frac{yy}{xx} = \frac{pp}{aa}$,

adunque farà $\frac{2adp}{aa - 2ap + pp} = dz$; e giacchè l'integrale

di questa equazione è algebrico, anderò avanti per l'integrazione; e però sia $a - p = q$, adunque $-\frac{2adq}{q^2} = dz$,

ed integrando, $\frac{2a}{q} \pm b = z$. Ma $q = a - p$, e $p = \frac{ay}{x}$,

e però $q = \frac{ax - ay}{x}$; restituito per tanto questo valore,

farà $\frac{2x \pm b}{x - y} = z$, che è la curva dell'equazione differenziale proposta.

Se in luogo di fare $a - p = q$, si avesse fatto

fatto $p - a = q$, averebbessì trovato altro integrale, ma diverso solo ne' segni.

13. La sopra scritta equazione mi porge occasione di fare una importante avvertenza; ed è, che le curve non solo mutano tal ora natura nel prendere le sommatorie, o semplicemente, o coll'addizione della costante, il che è stato notato fino dalla prima origine delle quantità infinitefime, ma alle volte ci si presentano pure formole tali, che ammettono integrazioni affatto diverse, e ci somministrano curve di vario genere anche senza aggiungere costante alcuna, il che merita qualche riflesso.

Per mezzo della supposizione $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$ è stata integrata l'equazione $2xdy - ydx = dz$, e l'integrale si è

trovato, essere $\frac{2x}{x-y} = z$, ommessa la costante. Faccio

ora la supposizione di $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$, e tento l'integrazione; sarà dunque $ydx - xdy = \frac{dp}{a}$, e però $2xdy - ydx = -\frac{2yydp}{a}$, e sostituendo, sarà l'equazione $-\frac{2dp}{a} = dz$;

$$a \times \frac{xx - 2x + 1}{yy} = \frac{dp}{y}$$

ma

ma $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$, dunque $\frac{-2adp}{pp-2ap+aa} = dz$; e fatta
 $p-a=q$, $-\frac{2adq}{q^2} = dz$, ed integrando, $\frac{2a}{q} = z$; quin-
 di restituiti i valori, $\frac{2y}{x-y} = z$, integrale della proposta

equazione differenziale, e diverso dal primo.

Altro integrale della proposta formola diverso dai
 primi due si è $\frac{x+y}{x-y} = z$; ed in fatti differenziando,

$$\frac{x dx - y dx + x dy - y dy - x dx - y dx + x dy + y dy}{x-y} = dz,$$

e cancellati i termini, che si elidono, $\frac{2x dy - 2y dx}{x-y} = dz$,

che è l'equazione da prima proposta.

Sia $dz = dy$, e la proposta equazione $\frac{2x dy - 2y dx}{x-y} = dy$.

Se mi servo del secondo integrale ritrovato, nasce l'e-
 quazione $\frac{2y}{x-y} = y$, e perciò $z+y=x$, luogo al trian-

golo. Se poi mi servo del primo, e del terzo integra-
 le ponendo $\frac{2x}{x-y} = y$, ovvero $\frac{x+y}{x-y} = y$, la curva è del
 secondo grado.

Generalmente sia $\frac{zxdy - yzdx}{x-y} = y^m dy$. Adoperata

la prima, e la terza integrazione, la curva indistinta monterà al grado $m+2$, mentre sia m numero positivo; fatto uso della seconda, la curva resterà un passo addietro.

14. Ma oltre che nè meno il metodo delle sostituzioni è universale, la maggiore difficoltà si è, che per lo più è molto difficile il sapere, quale sostituzione debba farsi, per non operare a caso, e gittare molta fatica inutilmente. Tuttavia però si procederà con la totale sicurezza in tutte quelle equazioni, nelle quali la somma degli esponenti dell'incognite sia la stessa per ciascun termine, e succederà sempre la separazione delle indeterminate; nè importa che sieno esse equazioni affette di radicali, o di frazioni, o di serie, e che i coefficienti, e segni sieno in qualunque maniera. La sostituzione da farsi in tutte queste equazioni sarà col porre una delle variabili eguale al prodotto dell'altra in una nuova variabile di modo, che se l'equazione è data per x , ed y , si faccia $x = \frac{yz}{a}$, o pure $y = \frac{xz}{a}$;

(per lo denominatore a si intenda una qualunque costante a piacere) e però $dy = \frac{xdz + zdz}{a}$, e fatte le sostituzioni, si arriverà ad un'altra equazione, la quale

k k

farà

farà sempre divisibile per tanta potestà dell' indeterminata x , quanta era la somma degl' esponenti di x , ed y in ogni termine dell' equazione proposta, quindi fatta la divisione, la lettera x non oltrepasserà la prima potestà, e farà sempre moltiplicata in dx , onde si ridurrà l' equazione in modo, che da una parte vi sia dx ,

e dell' altra dz con le sole funzioni di z , e così saranno separate le variabili. Impareciocchè chiamando A tutti que' termini, che sono moltiplicati nella dy , e B quelli, che sono moltiplicati nella dx , l' equazione sarà $A dy = B dx$, e le A , B sono date promiscuamente per x , ed y . Ora poichè le dimensioni della lettera y assieme con le dimensioni della lettera x in ogni termine fanno lo stesso numero, se in luogo di y si porrà $\frac{xz}{a}$, ne verrà, che in ciascun termine delle quantità

A , B la lettera x abbia la stessa dimensione, che prima avevano x , ed y assieme; per lo che, se questa dimensione si chiamerà n , l' equazione sarà divisibile per x^n , rimanendo solo z , a , dy , dx . Suppongasi, che dopo la sostituzione di $\frac{xz}{a}$, e dopo la divisione per x^n

ciò, che rimane nella quantità A , sia C ; e ciò, che rimane nella quantità B , sia D ; sarà l' equazione $C dy = D dx$, e le C , D sono date per z , e per le costanti, ma

$dy =$

$dy = \frac{x dz + z dx}{a}$; adunque farà l'equazione $\frac{C x dz + C z dx}{a} =$

$D dx$, cioè $D a dx - C z dx = C x dz$, e però $\frac{dx}{x} = \frac{C dz}{D a - C z}$,

e così le indeterminate coi loro differenziali faranno separate, e l'equazione costruibile, almeno per le quadrature.

E' indifferente il porre $y = \frac{zx}{a}$, o pure $x = \frac{yz}{a}$,

poichè sì nell'una, come nell'altra maniera si separano sempre le indeterminate; ma alle volte una sostituzione piuttosto, che l'altra ci darà l'equazione più semplice, e di minori termini, o la costruzione più facile, e più elegante; quindi non sarà mal fatto il provarle tutte due, ed in fine appigliarsi a quella, che riuscirà la migliore.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $xxdy = yydx + xydx$. Pongo $y = \frac{xz}{a}$,

e però $dy = \frac{x dz + z dx}{a}$; fatte le sostituzioni, farà

$\frac{x^3 dz + z x x dx}{a} = \frac{x x z z dx}{a} + \frac{z x x dx}{a}$, e riducendo al comun

denominatore, e dividendo per xx , farà $axdz + azdx =$
 $zzdx + azdx$, cioè $axdz = zzdx$, e $\frac{dx}{ax} = \frac{dz}{zz}$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $xxdy = yydx + xxdx$. Posta $y = \frac{xz}{a}$,
 $dy = \frac{xdz + zdz}{a}$, e fatte le sostituzioni, sarà $x' dz + \frac{zxxdx}{a} =$
 $\frac{zx'xdx + xxdx}{aa}$, e riducendo al comun denominatore,
 e dividendo per xx , sarà $axdz + azdx = z'xdx + aadx$,
 cioè $z'xdx - azdx + aadx = axdz$, e però $\frac{dx}{x} =$
 $\frac{adz}{zz - az + aa}$. Facendo poi l'altra sostituzione $x = \frac{yp}{a}$,
 $dx = \frac{ydp + pdy}{a}$, sarà $\frac{ppydy}{aa} = \frac{y'dp + ppydy}{a} +$
 $\frac{y'ppdp + p'yydy}{a'}$, e dividendo per yy , $\frac{appdy}{a} = \frac{aaydp +$
 $aapdy + yppdp + p'dy}{y}$, cioè $\frac{appdy}{y} - \frac{aapdy}{y} - \frac{p'dy}{y} =$
 $\frac{aaydp + yppdp}{y}$, e però $\frac{dy}{y} = \frac{aaydp + yppdp}{y^2 - aay - p'}$.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $dy \sqrt{xx+yy} = ydx$. Posta $y = \frac{xz}{a}$,
 e $dy = \frac{x dz + z dx}{a}$, e fatte le sostituzioni, farà

$$\frac{x dz + z dx}{a} \sqrt{xxzz + aaxx} = \frac{zx dx}{a}, \text{ cioè}$$

$$xxdz + zxdx \sqrt{aa + zz} = axdx, \text{ e dividendo per } x,$$

$$xdz \sqrt{aa + zz} + zdx \sqrt{aa + zz} = axdx, \text{ o sia}$$

$$xdz \sqrt{aa + zz} = axdx - zdx \sqrt{aa + zz}, \text{ e però}$$

$$\frac{dz \sqrt{aa + zz}}{ax - z \sqrt{aa + zz}} = \frac{dx}{x}. \text{ Se avessi posto } x = \frac{yp}{a}, \text{ avrei}$$

$$\text{avuta l'equazione } \frac{dy}{y} = \frac{dp}{\sqrt{aa + pp} - p}.$$

15. Ma alle volte i differenziali medesimi dx , e
 dy ascendono a dimensioni più alte, essendovi per altro
 nelle equazioni la condizione espressa di sopra. In que-
 sti casi la sostituzione, come prima, fatta di $\frac{xz}{a}$ in
 luogo della y (lasciando per ora intatta la dy) renderà
 ogni termine dell'equazione divisibile per la stessa po-
 tessà di x , e vi resteranno solo nell'equazione z , dx ,

e dy con le costanti date, ed assunte, ma non più la x . Ora perchè in luogo pure di dy si deve porre $\frac{zdx + xdz}{a}$,

con che di nuovo si introduce la lettera x , si faccia $\frac{x dz}{a} = dt$, ed in luogo di dy si scriva $\frac{z dx + a dt}{a}$, e l'e-

quazione averà solamente z , dt , dx con le costanti date, ed assunte, ma non più x . Si faccia $a, u :: dx, dt$, ed in luogo di dt si ponga da pertutto $\frac{u dx}{a}$, ne-

verrà un'equazione libera dalle quantità differenziali, in cui si avranno le sole u, z , e le costanti per una curva algebrica. Per mezzo di questa curva si troveranno i valori reali della u ; sieno adunque questi A, B, C ec. in modo, che sia $u = A, u = B, u = C$ ec., faranno A, B ec. date solamente per z , e per le costanti, e sarà $dx = \frac{adt}{A}, dx = \frac{adt}{B}$ ec., e perchè $dt =$

$\frac{x dz}{a}$, sarà $dx = \frac{x dz}{A}, dx = \frac{x dz}{B}$ ec.; onde finalmente,

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}, \frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$ ec., ed i logaritmi della x faranno di-

rettamente proporzionali agli spazj compresi dalle curve, delle quali le assisse essendo z , le ordinate sieno reciprocamente proporzionali ai valori di sopra ritrovati della quantità u , e tante saranno le curve, che soddisfaranno, quanti saranno i valori reali fra le diversi

della

della lettera u , avvertendo però, che l'aggiungere la costante nelle integrazioni delle equazioni $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}$, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$ ec. può nuovamente diversificare le curve, che soddisfanno al quesito, e raddoppiare spesso volte il numero loro. Sarà dunque $1x$ allo spazio di quella curva, che abbia per assissa z , e per ordinata $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ ec., cioè eguale all'integrale di $\frac{dz}{A}$, $\frac{dz}{B}$ ec.; quindi

prendendo z arbitraria, il logaritmo della x sarà dato, e per conseguenza anche data la corrispondente x ordinata nella logaritmica. Data adunque la x , per mezzo dell'equazione $y = \frac{xz}{a}$, sarà anche data la y , cioè ambe le coordinate dell'equazione differenziale proposta, o sia della curva, che si cerca. A misura de' diversi valori, che si daranno alla z , saranno anche diversi i punti della stessa curva cercata.

ESEMPIO.

Applicherò la regola ad un'esempio: sia l'equazione $xxdy + xydx = xdx^2$. Si faccia adunque $y = \frac{xz}{a}$, e collocato questo valore nell'equazione in luogo di y ,
ave-

averemo $axxdy^2 + xzxzxdy = axxdx^2$, e fatta la divisione per xx , sarà $ady^2 + zdx dy = adx^2$, onde si vede, che x , e le sue funzioni interamente spariscono, restandovi solo z , dx , dy con le loro funzioni. Ma perchè collocando in luogo di dy il suo valore $\frac{zdx + xdz}{a}$ s'introdurrebbe di nuovo nell'equazione la x , si faccia $\frac{xaz}{a} = dt$, e però $dy = \frac{zdx + adt}{a}$, e l'equazione sarà $\frac{zzdx^2 + 2zxdxdt + aadt^2}{a} + \frac{zzdx^2 + azdxdt}{a} = adx^2$, cioè $zzzdx^2 + 3azdxdt + aadt^2 = aadx^2$, in cui entrano le sole z , dx , dt con le loro funzioni. Di nuovo supposta $dt = \frac{udx}{a}$, e fatta la sostituzione, si arriva alla espressione puramente algebrica $zzz + 3zu + uu = az$, adunque averemo il valore di u dato algebraicamente per z , e le costanti. Ma $dt = \frac{udx}{a} = \frac{x dx}{a}$, quindi $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{u}$, nella quale equazione essendo u data per z , sono separate le variabili. Descritte adunque le curve, delle quali le assisse essendo z , le ordinate sieno reciprocamente proporzionali ai valori di u , averemo la x , ed indi la y , per la sostituzione fatta di $y = \frac{xz}{a}$.

16. Di questa equazione però, che è presa per esempio, siccome d'altre ancora succede, che senza servirsi di questo metodo, si possano ridurre facilmente,

al

al metodo del num. 14. Ed in fatti, se all'uno, ed all'altro membro della suddetta equazione $xxdy^2 + xydx dy = xxdx^2$ aggiungasi il quadrato $\frac{1}{4}yydx^2$, essa sarà $xxdy^2 + xydx dy + \frac{1}{4}yydx^2 = xxdx^2 + \frac{1}{4}yydx^2$, e cavando la radice, $xdy + \frac{1}{2}ydx = dx \sqrt{xx + \frac{1}{4}yy}$, ed eccola ridotta al suddetto metodo generale del num. 14. O pure trasponendo il termine $xydx dy$, ed aggiungendo il quadrato $\frac{1}{4}yydy^2$, onde sia $xxdy^2 + \frac{1}{4}yydy^2 = xxdx^2 - xydx dy + \frac{1}{4}yydy^2$, ed estraendo la radice, $dy \sqrt{xx + \frac{1}{4}yy} = xdx - \frac{ydy}{2}$, ridotta allo stesso metodo.

17. Le equazioni, che contengono differenziali fra loro misti, ed elevati a potestà qualunque, non solo possono costruirsi nel caso considerato al num. 15., che suppone eguale la somma degli esponenti delle variabili in ciascun termine; ma generalmente in qualunque modo sieno esse equazioni, purchè l'una delle due indeterminate x , o y manchi. Ciò si farà ponendo $dx = \frac{zdy}{a}$, se manca la x ; o $dy = \frac{zdx}{a}$, se manca la y , essendo la z una nuova indeterminata, ed a una costante qualunque.

que . Imperciocchè con tale sostituzione , per esempio , di $\frac{zdy}{a}$ in luogo di dx nella proposta equazione , è manifesto , che ne nascerà un' altra , la quale sarà divisibile per la potestà della dy per modo , che si troverà composta di sole quantità finite , e però si averà la z data per la sola y , e le costanti , e la relazione della y alla z sarà espressa da un' equazione , o sia curva algebrica . Nella equazione adunque $dx = \frac{zdy}{a}$ posto in luogo di dy il valore , che si ricaverà da tale equazione algebrica , si averanno separate le variabili .

ESEMPIO I.

Sia l' equazione $ydy^3 dx = adx^4 + 2adx^2 dy^2 + ady^4$.
 Pongo $dx = \frac{zdy}{a}$; fatte le sostituzioni in luogo di dx , e sue potestà , avremo l' equazione $\frac{zydy^4}{a} = \frac{z^4 dy^4}{a^4} + \frac{2zzdy^4}{a} + ady^4$, e dividendo per dy^4 , sarà $\frac{zy}{a} = \frac{z^4}{a^4} + \frac{2zz}{a} + a$, e però $y = \frac{z^4}{a^4} + 2z + \frac{aa}{z}$, e $dy = \frac{3zzdz}{a^4} + 2dz - \frac{aadz}{z^2}$, adunque $\frac{zdy}{a} = dx = \frac{3z^4 dz}{a^4} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$.

Si

Si faccia passaggio all'integrazioni, sarà dunque $x = \frac{3z^4 + zz - 1z}{4a^3 a}$, preso il logaritmo nella logaritmica.

della sottangente a . Quindi si anno i valori delle due coordinate x, y della equazione differenziale proposta, per mezzo di due curve, che anno la comune indeterminata z . Per avere la costruzione si proceda così.

Nell'asse QE (Fig. 1.) prese le assisse, si descriva la curva DAH dell'equazione $y = \frac{z^3}{aa} + zz + \frac{aa}{z}$, e la curva RIK dell'equazione $x = \frac{3z^4 + zz - 1z}{4a^3 a}$, faranno

le $EH = y$, $EK = x$ le coordinate della proposta curva differenziale, per la costruzione della quale, fatta CM parallela ad EK , si produca KM in N , onde sia sempre $MN = EH$; e la curva NBN farà la ricercata.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $y^3 dx^3 + aaydydx^2 = a^3 dy^3$. Pongo $dx = \frac{zdy}{a}$; fatte le sostituzioni, avremo $\frac{z^3 y^3 dy^3}{a^3} + \frac{aaz^2 y^2 dy^3}{a^3} = a^3 dy^3$, e dividendo per dy^3 , $z^3 y^3 + a^3 z^2 y =$

a^3 ; farà adunque la z data per la sola y , e le costanti,

ti, e però nell'equazione $dx = \frac{zdy}{a}$ faranno separate le variabili.

Per avere la curva della proposta equazione differenziale. All'asse CE , (Fig. 2.) si descriva la curva IK dell'equazione $z'y' + a'z'y = a'$, essendo le $CM = y$, $MK = z$; in KM prodotta si prenda MN eguale allo spazio $CMKI$ diviso per a , sarà $MN = \int \frac{zdy}{a} = x$, ed il punto N in curva.

18. Si può rendere più generale il metodo del num. 14. col trasformare le equazioni, che non anno la condizione delle somme eguali degl' esponenti, in altre, che abbiano esse somme eguali, e fiano in conseguenza soggette al canone di esso numero. Ciò in due maniere si può fare. L' una sarà di servirsi di congrue sostituzioni, delle quali però non v'è regola alcuna, ed i soli esempj possono farcene acquistare l' industria; L' altra alterando gli esponenti della proposta formola, o equazione a fine di determinare almeno, in quali casi, e con quale sostituzione possa riuscire di trasformarla in una equivalente, in cui si verifichi la condizione prescritta; così se non si potranno generalmente separare le variabili, si determineranno infiniti casi, ne quali la separazione succede.

ESEMPIO I.

E quanto alla prima maniera : sia l'equazione,
 $dx \sqrt{aaxx + az^3} = zzdz$, che non à la necessaria con-
 dizione. Faccio $z^3 = ayy$, e differenziando $zzdz = \frac{2aydy}{3}$;
 e però, fatte le sostituzioni, $dx \sqrt{aaxx + aayy} = \frac{2aydy}{3}$,
 espressione, che può trattarsi col metodo del num. 14.
 Si può avere l'intento anche ponendo $\sqrt{aaxx + az^3} = au$,
 e però $aaxx + az^3 = aaau$, e differenziando, $2aaxdx +$
 $3azzdz = 2aauu$, cioè $zzdz = \frac{2aauu}{3} - \frac{2axdx}{3}$, e fatte
 le sostituzioni, $udx = \frac{2udu}{3} - \frac{2xdx}{3}$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $x^3 dx + \frac{xxdy}{\sqrt{a+y}} = dy$. Faccio $\sqrt{a+y} = z$,
 e però $a+y = zz$, e $dy = 2zdz$, e sostituendo, $x^3 dx +$
 $\frac{2xxdz}{z} = 2zdz$. Ma questa ricerca in oltre un'altra pic-
 cola riduzione; pongo per tanto $xx = u$, e però $x^3 = uu$,

e $4x^1 dx = zudu$, quindi furrogati i valori, sarà finalmente $\frac{udu}{z} + zudz = z^2 dz$, il che ec.

19. Passo alla seconda maniera con alterare gli esponenti, e però prendo l'equazione generale di tre termini $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, in cui i segni possono essere, comunque si vuole, positivi, o negativi. Se fosse $n + m = q + p = r + s$, farebbe il caso del num. 14.; ma supposto, che fra le somme degli esponenti non vi sia questa eguaglianza, si ponga $y = z^t$, onde $dy = tz^{t-1} dz$, $y^q = z^{tq}$, $y^s = z^{st}$, e fatte le debite sostituzioni nella proposta equazione, sarà $az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^p dx + tcx^r z^{st+t-1} dz = 0$. Ma per la condizione del suddetto num. 14. fa di mestieri, che sia $nt + m = qt + p = r + st + t - 1$; dalla prima equazione adunque $nt + m = qt + p$ caverassi il valore dell'esponente assunto $t = \frac{p - m}{n - q}$,

da $qt + p = r + st + t - 1$, o sia $\frac{s - q + 1}{n - q} \times t = p - r + 1$, ci darà $\frac{s - q + 1}{n - q} \times \frac{p - m}{n - q} = p - r + 1$, che è la condizione, che devono avere gli esponenti della proposta equazione, verificandosi la quale, sarà sempre riducibile al canone del num. 14., e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p - m}{n - q}}$.

Se

Se in luogo di porre $y = z^t$ avessi posto $x = z^t$, avrei trovata la medesima condizione da verificarsi negli esponenti, ma farebbe $t = \frac{n-q}{p-m}$, e però la sostituzione da farsi $x = z^{\frac{n-q}{p-m}}$.

Può darfi, che la sostituzione $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ divenga impossibile, cioè quando sia $p = m$, o $n = q$; ma si avverta, che in questi casi le indeterminate sono separabili senza bisogno di riduzione.

Nella equazione canonica $ay^n x^m dx + by^t x^p dx + cx^r y^i dy = 0$, se oltre la supposizione di $y = z^t$, si porrà ancora $x = u^i$, fatte tutte le sostituzioni, si troverà l'equazione $aiz^{nt} u^{im} + i - 1 du + biz^{qt} u^{ip} + i - 1 du + ctu^{ir} z^{it} + t - 1 dz = 0$; dal paragone degli esponenti del primo, e secondo termine caverassi $nt + im + i - 1 = qt + ip + i - 1$, cioè $t = i \times \frac{p-m}{n-q}$; dal paragone di quelli del secondo, e terzo si troverà $ir + st + t - 1 = qt + ip + i - 1$, o sia $t \times \frac{s-q+1}{p-r+1} = i \times \frac{p-m}{n-q}$, e posto in luogo di t il suo valore, $i \times \frac{p-m}{n-q} \times \frac{s-q+1}{p-r+1} = i \times \frac{p-m}{n-q} \times \frac{s-q+1}{p-r+1}$, che è la condizione, che devono avere gli esponenti dell'equazione proposta; ma la lettera i sparisce dalla condizione, dunque è stata affatto superflua la seconda sostituzione di $x = u^i$, dal che

che s'inferisce, che tutte le formole al canone del num. 14. non possono ridursi generalmente, ma solo quelle, in cui si verifichi la condizione $\overline{p-m} \times \overline{s-q+1} = \overline{n-q} \times \overline{p-r+1}$. Istessamente si discorra dell'altre, che quanto prima maneggerò, composte di maggior numero di termini.

20. Crescendo il numero de' termini oltre il tre, cresce istessamente il numero delle condizioni, che devono avere gli esponenti delle equazioni, acciò sieno riducibili al metodo del num. 14. Prendo l'equazione canonica di quattro termini $ax^m y^n dx + bx^t y^q dx + cx^r y^s dy + fx^e y^u dy$. Posta $y = z^t$, $dy = tz^{t-1} dz$, e fatte le sostituzioni, sarà $az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^t dx + tx^{rt} z^{st+t-1} dz + fx^{et} z^{ut+t-1} dz$. Deve adunque essere $nt+m = qt+p$, onde si caverà il valore dell'esponente assunto $t = \frac{p-m}{n-q}$. Deve essere pure $r+st+$

$t-1 = qt+p$, o sia $st-qt+t = p-r+1$, e posto il valore di t , sarà $\overline{s-q+1} \times \overline{p-m} = \overline{p-r+1} \times \overline{n-q}$, prima condizione. Ma in oltre deve essere $e+tu+t-1 = qt+p$, o sia $tu-qt+t = p-e+1$, e posto il valore di t , $\overline{u-q+1} \times \overline{p-m} = \overline{p-e+1} \times \overline{n-q}$, seconda condizione. Se adunque gli esponenti d'una proposta equazione saranno tali, che ambe le ritrovate condizioni si verifichino, sarà essa riducibile al caso del num.

num. 14., e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Se le equazioni avranno cinque termini, le condizioni da verificarsi saranno tre, e così si vada discorrendo.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $ay'x dx + byy x^{\frac{1}{2}} dx = cxdy$. Paragonata questa con la canonica, sarà $n = 3$, $m = 1$, $q = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $r = 1$, $s = 0$; e perchè nel presente caso si verifica la condizione $\frac{s-q+1}{p-m} \times \frac{p-m}{p-r+1} \times \frac{n-q}{n-q}$, dandoci $-1 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$, che è una verità, sarà riducibile al metodo del num. 14. l'equazione, e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$. Pongo adunque $y = z^{-\frac{1}{2}}$, $dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$, $y' = z^{-\frac{3}{2}}$, $yy = z^{-1}$, e fatte le sostituzioni, trovo $az^{-\frac{3}{2}} x dx + bz^{-1} x^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} cxz^{-\frac{3}{2}} dz$, ed eccola ridotta al caso del suddetto numero.

21. Ma senza rapportare le particolari equazioni alle canoniche, tornerà forse più comodo il maneggiarle sole collo stesso metodo.

m m

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia adunque l'equazione $ay^{\frac{1}{3}}x^{\frac{11}{6}}dx - \frac{bx^4dy}{y} = exxydy$. Pongo $x = z^t$, $dx = tz^{t-1}dz$; fatte le sostituzioni, farà $tay^{\frac{1}{3}}z^{\frac{11t}{6}+t-1}dz - bz^4y^{-1}dy = cz^{2t}ydy$, ma deve essere $\frac{1}{3} + \frac{11t}{6} + t - 1 = 3t - 1$, quindi ricavo $t = 2$, il qual valore posto in luogo di t mi dà l'equazione $2ay^{\frac{1}{3}}z^{\frac{14}{3}}dz - bz^4y^{-1}dy = cz^4ydy$, che è appunto il caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque $x = zz$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $x^{\frac{1}{2}}dx + y^{\frac{4}{3}}dx + x^{\frac{2}{3}}ydy = y^3dy$. Pongo $y = z^t$, e $dy = tz^{t-1}dz$, fatte le sostituzioni, farà $x^{\frac{1}{2}}dx + z^{\frac{4t}{3}}dx + tx^{\frac{2}{3}}z^{t+t-1}dz = tz^{3t+t-1}dz$. Ma deve essere $\frac{1}{2} = \frac{4t}{3}$, quindi ricavo $t = \frac{3}{8}$, il qual

valo-

valore posto in luogo di t mi dà l'equazione

$$x^{\frac{1}{2}} dx + z^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{8} x^{\frac{3}{4}} z^{\frac{1}{4}} dz = \frac{1}{8} z^{\frac{1}{2}} dz, \text{ che appun-}$$

to è il caso del numero 14. La sostituzione da farsi è

$$\text{adunque } y = z^{\frac{1}{2}}.$$

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $ayyxxdx + bdx + cyxdx + fx^t yydy = 0$.

Pongo $y = z^t$, $dy = tz^{t-1} dz$; fatte le sostituzioni, fa-

$$\text{rà } az^{2t} xxdx + bdx + cz^t xdx + tfx^t z^{2t+t-1} dz = 0.$$

Ma deve essere $2t + 2 = t + 1$, quindi ricavo $t = -1$,

il qual valore posto in luogo di t mi dà l'equazione

$$\frac{axxdx}{z^2} + bdx + \frac{cx dx}{z} - \frac{fx^t dz}{z^2} = 0, \text{ che è appunto il}$$

caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque

$$y = \frac{1}{z}.$$

22. Reso più generale il metodo del num. 14., passo ad un' altro, che è pure generale nel suo genere. Comprende questo tutte quelle equazioni, nelle quali nè le indeterminate, nè i loro differenziali oltrepassano la prima dimensione.

Sia per tanto l'equazione differenziale generale, che abbraccia tutti i casi possibili, ne' quali le variabili, e loro

m m z

dif

differenziali non ascendono oltre la prima dimensione $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + bdy = 0$. I coefficienti a, b ec. possono essere affirmativi, o negativi, ed anche zero, conforme portano le circostanze dell'equazione particolare, che si vuole costruire. Intorno a questa equazione osservo in primo luogo, che se sarà $c = g$, essendo $c, e g$ ambe positive, o ambe negative, l'equazione potrà integrarsi; imperciocchè sarà $\pm c \times ydx + xdy = - axdx - bydy - fdx - bdy$, ed integrando, $\pm cxy = - \frac{axx}{2} - \frac{byy}{2} - fx - by$. Ma non essendo $c = g$, fac-
cio $x = p + A, y = q + B$; le $p, e q$ sono due nuove, indeterminate, e le A, B due costanti arbitrarie da fissarsi nel progresso. Sarà dunque $dx = dp, dy = dq, xdx = pdp + Adp, ydy = qdq + Bdq$. Collocati questi valori nella equazione principale proposta, nascerà la seguente

$$\begin{aligned} apdp + aAdp + bqdq + bBdq + cqp + cpdq \\ + cBdp + gAdq = 0. \\ + fdp + bdq \end{aligned}$$

Se in questa equazione svanissero i termini secondo, e quarto, sarebbe essa il caso del num. 14., e si saprebbero separare le indeterminate, ma svanirà il secondo termine se sia $aA + CB + f = 0$, ed il quarto se sia $bB + gA + b = 0$; quindi da queste due equazioni si determinano i valori dell'assunte A, B , talchè la nuova

equa-

equazione sia il caso del suddetto num. 14. Sarà per tanto

$$A = -\frac{cB-f}{a}, B = -\frac{gA-b}{b}, \text{ cioè } A = \frac{bf-cb}{cg-ab},$$

$$B = \frac{ab-fg}{cg-ab}. \text{ Se adunque si faranno le sostituzioni}$$

$$x = p + \frac{bf-cb}{cg-ab}, y = q + \frac{ab-fg}{cg-ab}, \text{ nascerà un' equazio-}$$

ne da maneggiarsi col metodo del num. 14.

Se in una particolar equazione succedesse, che fosse $bf=cb$, ovvero $ab=fg$ di modo, che o l' una, o l'altra delle costanti assunte fosse zero, farebbe indizio, poterli ottenere l'intento con una sola sostituzione. Sia per cagion d'esempio $\frac{bf-cb}{cg-ab} = A = 0$; in tal caso, lasciata

la quantità x colle sue differenze, basterà in luogo di y sostituire $q+B$, e proseguire a norma di quanto è stato detto di sopra.

Che se fossero nulle ambe le grandezze A, B , in sì fatta ipotesi averebbesi $bf=cb$, $ab=fg$, ed in conseguenza $\frac{cb}{b} = \frac{ab}{g} = f$; dunque $cg=ab$, con che non

anno più luogo le sostituzioni praticate. Ogni qual volta adunque sia $cg=ab$, si faccia la sostituzione $ax+cy=z$, e si tolga dall'equazione la y , e dy . Sarà adunque $y = \frac{z-ax}{c}$, $dy = \frac{dz-adx}{c}$; fatte le sostituzioni nella

equa-

equazione principale, si avrà $axdx +$
 $\frac{bx dz - abx dz - abz dx + aabx dx}{ce} + z dx - ax dx +$

$\frac{gx dx - agx dx}{e} + f dx + \frac{bz dx - ab dx}{e} = 0$, cioè elidendo

il primo termine col settimo, e riducendo al comun denominatore, $bx dz - abx dz - abz dx + aabx dx + ccz dx +$
 $cgx dx - acgx dx + ccf dx + cbdx - acb dx = 0$; ma poichè
 $cg = ab$, il secondo termine glide il sesto, ed il quarto
il settimo, onde rimane $bx dz - abz dx + ccz dx + ccf dx +$
 $cb dx = acb dx$, cioè $\frac{bx dz + cb dx}{abz - ccz - ccf + acb} = dx$

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $axdx + 2aydx + bxy - aby = 0$.
Faccio $x = p + A$, $y = q + B$, $dx = dp$, $dy = dq$; fatte le
sostituzioni, l'equazione sarà
 $apdp + aAdp + 2aqdp + bpdq + bAdq = 0$,
 $+ 2aBdp - abdq$

L'ultimo termine svanirà, se sia $bA - ab = 0$, cioè
 $A = a$; svanirà il secondo, se sia $2AB + aA = 0$, cioè
 $B = -\frac{a}{2}$, le sostituzioni sono adunque $x = p + a$, $y = q - \frac{1}{2}a$,
e l'equazione si riduce al caso del num. 14.

Sya-

Svaniti i suddetti termini nell' equazione , si può essa integrare per mezzo del num. 4. senza servirsi del num. 14.

ESEMPIO II.

Sia l' equazione $2axdx - 2bydy - 4aydx + bxdy - aadx = 0$. In questa il coefficiente $2a$ corrisponde ad a della canonica , $-2b$ alla b , $-4a$ alla c , b alla g , e si dà il caso , che sia $cg = ab$ rispetto alle costanti della canonica ; faccio adunque la sostituzione $2ax - 4ay = z$, e però $y = \frac{2ax - z}{4a}$, $dy = \frac{2adx - dz}{4a}$; quindi eliminate

le y , e dy , avremo $2axdx -$

$$\frac{8aaxdx + 4abzdx + 4abxdz - 2bzdz}{16aa} - 2axdx + zdx +$$

$$\frac{2abxdx - bxdz - aadx}{4a} = 0 , \text{ cioè } 4abzdx - 2bzdz +$$

$$16aazdx - 16a^2dx = 0 , \text{ e però } dx = \frac{2bzdz}{4abz + 16aaz - 16a^2} .$$

23. Si le notate equazioni , come quelle ancora di grado superiore , possono maneggiarsi per mezzo di una sola , ma più composta sostituzione . Ripiglio l' equazione canonica di sopra $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + bdy = 0$, perchè quelle di grado superiore portano a calcoli troppo lunghi , e ciò , che dirò intorno a quella ,
ba-

basterà per far vedere, come debbano quelle trattarsi. Pongo adunque $x = Ay + p + B$, nella quale equazione sussidiaria la p è una nuova indeterminata, a cui non si prescrive costante alcuna, perchè sarebbe superflua, come si può conoscere, facendo l'operazione; le A , B sono due costanti da fissarsi nel progresso. Posta adunque $x = Ay + p + B$, sarà $dx = A dy + dp$, $x dx = A Ay dy + A p dy + A B dy + p dp + B dp$, quindi surrogati questi valori nell'equazione canonica, sarà essa trasformata nella seguente

$$\begin{aligned}
 & a A Ay dy + a A p dy + a A y dp + a p dp + a A B dy + a B dp \\
 & + b y dy + g p dy + c y dp + g B dy + f dp = 0, \\
 & \quad c Ay dy + f A dy \\
 & \quad g Ay dy + b dy
 \end{aligned}$$

Convienne adunque procurare di fare svanire alcuni termini di questa equazione, fissando opportunamente le arbitrarie all'origine A , B , e con ciò renderla capace del fine, che si pretende; quando però si verificchino alcune condizioni, che nascono da' valori delle A , B . Se adunque mancassero i due termini secondo, e terzo, farebbero separate le variabili, ed integrabile l'equazione. Ma acciò sieno nulli essi due termini, bisogna, che sia $aA + g = 0$ rispetto al secondo, ed $aA + c = 0$ rispetto al terzo, ed in conseguenza $g = c$; ma posto ciò, l'equazione principale era già integrabile senza l'aiuto d'alcuna operazione.

Se

Se fossero nulli i due ultimi termini, l'equazione sarebbe ridotta al canone del num. 14., ma acciò essi spariscano, convien, che sia $aB + f = 0$ rispetto all'ultimo, cioè $B = -\frac{f}{a}$, ed $aAB + gB + fA + b = 0$ rispetto al quinto, ma surrogato il valore di B , farà $-Af - \frac{gf}{a} +$

$Af + b = 0$, cioè $ab = gf$. Non possono adunque sparire gli ultimi due termini, e così per essi ridursi l'equazione, se non nel caso particolare, che si verifichi la condizione $ab = gf$.

Si procuri adunque di togliere il primo, e quinto termine, con che l'equazione sarà ridotta al caso de' numeri 4., e 6. Adunque sarà rispetto al primo termine $aAA + b + cA + gA = 0$, cioè $AA + \frac{cA + gA}{a} = -\frac{b}{a}$, da cui si ricaverà il valore dell'assunta A ; trovato questo, scoprirassi quello di B dal quinto termine, e sarà $B = -\frac{fA + b}{a}$, e la nuova equazione verrà ad essere,

$\frac{aA + g}{a} \times pdy + \frac{aA + c}{a} \times ydp = -apdp - aBdp - fdp$, che si costruirà per mezzo del num. 4., se i coefficienti de' due primi termini saranno ambi positivi, o negativi; e per mezzo del num. 6., se uno sia positivo, negativo l'altro.

Ma per ottenere la bramata separazione, basterà far svanire il primo termine dall'equazione sussidiaria, ponendo $aA + cA + gA + b = 0$, mentre posta $= 0$ la costante assunta B , che in questo caso riesce superflua, resterà l'equazione $-apdp - fdp = aA + g \times pdy + fA + b \times dy + aA + c \times ydp$, nella quale si separano le variabili col metodo, che prenderò a spiegare nel numero, che siegue; o pure con l'antecedente per mezzo di una facile preparazione, cioè facendo $Aa + g \times p + fA + b = q$, e differenziando $Aa + g \times dp = dq$; dunque sostituendo, $-apdp - fdp = qdy + Aa + c \times ydq$. Si dee però riflettere, che nel fare uso di queste formole bene spesso s'insinuano le quantità immaginarie nascenti dalla equazione quadratica affetta dal lato $aA + cA + gA + b = 0$; ed esse non solo si rinvencono nelle grandezze coefficienti, ma passano talvolta negli esponenti; e perchè fin ora non si fanno maneggiare, fa d'uopo evitarle, e fra varj metodi valersi di quello, che più cade in acconcio.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $abxxdx + bbyxdx + a'ydx + aabydy + a'xdy = 0$. Pongo $y = Ax + p + B$ (sostituisco in luogo della y piuttosto, che della x , perchè preveggo il calcolo più breve) adunque $dy = Adx + dp$. Fatte pertanto le sostituzioni, averassi l'equazione

$$abxxdx + bbyxdx + bbBxdx + a'pdx + a'Bdx + aabAxdp + aabpdp + aabBdp + aabBdx + a'Adx + aabApdx + aabBdp + a'xdp + aabAxdx = 0.$$

Osservo, che se in questa equazione sparissero i termini 1, 3, 5, e 6., avrebbonfi le indeterminate separabili, perchè sarebbe

$$bbpdx + a'pdx + aabpdp + aabBdp = 0,$$

e dividendo per p ,

$$bbxdx + a'dx + aabAdx = -aabdp - \frac{aabBdp}{p}.$$

Adunque sparisca il primo, bisogna, che sia $a + bA = 0$, cioè $A = -\frac{a}{b}$, e con ciò spariscono pure il quinto, e

sesto senza, che nasca condizione alcuna. Acciò sparisca il terzo, conviene, che sia $bbB + 2a'A + aabAA = 0$, e surrogato il valore di A , $bbB - \frac{2a^2}{b} + \frac{a^2b}{bb} = 0$, cioè

$$nn 2$$

$$B =$$

$B = \frac{a^4}{b^4}$. La sostituzione adunque sarà $y = -\frac{ax}{b} + p + \frac{a^4}{b^4}$,

e l'equazione, che indi nasce, $bbx dx = -aabd p - \frac{a^4 dp}{bbp}$

24. Consiste il metodo di questo numero nel disporre primieramente l'equazione proposta in maniera, che le quantità differenziali restino accompagnate rispettivamente dalle loro indeterminate, e si faccia, per così dire, una dimezzata separazione, rigettando ne' comuni moltiplicatori, o divisori quelle grandezze, che turbano l'operazione; indi presa la sommatoria della differenziale così preparata composta di due incognite, si deve porre eguale ad una variabile assunta, e col mezzo d'una equazione ausiliaria dare una nuova forma alla principale. Finalmente fatta osservazione a ciò, che succede, deve rinnovarsi l'operazione sino a tanto, che si consegua la bramata separazione, o si vegga essere la formola superiore alla nostra industria.

A di vantaggio questo metodo sopra degli altri, che valendosi noi delle sostituzioni, nel tempo stesso ci insegna, quali sieno le legittime, e quali le inutili. Si osservi però, esservi delle equazioni, che non ammettono l'artificio del presente metodo, se prima non vengano con qualche industria preparate. Il tutto s'intenderà meglio dagli esempi.

ESEMPIO I.

Ci venga proposta l'equazione

$$x^1 dy + y^1 dx = dz, \text{ nella quale la } dz \text{ è una}$$

funzione qualunque di x , ovvero di y . Metto da parte

la quantità $xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}$, che è una affezione comune a due termini, che compongono la prima parte dell'equazione, resterà la differenziale nuda

$x^1 dy + y^1 dx$. Divido dx per x^1 , dy per y^1 , e però sarà $x^1 dy + y^1 dx = x^1 y^1 \times \frac{dy + dx}{y^1 x^1}$, onde la proposta

equazione prenderà il nuovo aspetto

$$\frac{x^1 y^1}{xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}} \times \frac{dx + dy}{x^1 y^1} = dz, \text{ Ottenuta}$$

questa dimezzata separazione, in cui le flussioni dx , dy vengono combinate semplicemente colle funzioni delle loro fluenti, o sia variabili x^1 , y^1 , e gli altri termini costituiscono una quantità quasi estranea, che fa figura di moltiplicatore; pongo $\frac{dx + dy}{x^1 y^1} = -\frac{dp}{a^1}$, e però integrando $\frac{a^1}{2xx} + \frac{a^1}{2yy} = p$,

quindi ritrovato il valore, per esempio di $x = \frac{y}{\sqrt{2yyp - a^2}}$,

e sostituito questo in luogo di x , e $-\frac{dp}{a'}$ in luogo di

$\frac{dx}{x'} + \frac{dy}{y'}$ nell'equazione, sarà essa $-\frac{dp \times a \vee a}{2p \vee 2p - a'}$ $= dz$,

il che ec.

Raccoglasi, che presa ad arbitrio una quantità in qualsivoglia modo data per p , come $p = \frac{a}{2qq}$, sarà $\frac{a}{2qq} = \frac{a}{2xx}$, cioè $q = \frac{xy}{\vee xx + yy}$, con che in un batter d'occhio si

scoprono le infinite sostituzioni, che servono alla bramata separazione. Tutte le altre possibili sono inutili, e lasciano le variabili più di prima confuse.

Si noti di più, che colle spiegate sostituzioni spesso volte accade, che in un membro dell'equazione ci resti qualche funzione dell'una, o dell'altra variabile x , o pure y ; nel qual caso se la dz fosse data per la variabile, di cui resta la funzione, una semplice divisione supplirebbe al bisogno.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $2ydy + xdy + ydx = dz$, in cui la dz sia data in qualsivoglia modo per y . Per ridurre al metodo

todo questa equazione, prendo l'integrale del numeratore della frazione, cioè $yy + xy$, e lo pongo $= p$, quindi fatta svanire dall'equazione la x , e dx , collocandovi il suo valore, ò la nuova equazione $\frac{dp}{a + \frac{p}{y}} = dz$,

che si riduce alla seguente $ydp - pdz = aydz$; e questa preparata secondo il metodo, si trova essere $p \times \frac{dp}{p} - \frac{dz}{y} = adz$.

Faccio $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y} = \frac{dq}{q}$, e però $lp - \int \frac{dz}{y} = lq$; pongo in oltre $\int \frac{dz}{y} = ulm$, (lm è un logaritmo costante) sarà

$lp - lq = ulm$, e passando dalle quantità logaritmiche alle esponenziali, $\frac{p}{q} = m^u$. Fatte adunque nell'equazione

ridotta le sostituzioni di $\frac{dq}{q}$ in luogo di $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}$, e di $m^u q$ in luogo di p , sarà $m^u dq = adz$, cioè $dq = \frac{adz}{m^u}$, in cui sono separate le variabili, per essere tanto dz , quanto m^u date per y , il che ec.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $\frac{zxzdx + xydy + yydx}{x^2 + xxy + a^2} = \frac{zdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}$.

Prima di tentare questa formola farà bene ridurla. Osservo, che il secondo membro è integrabile, e la sua sommatoria è $\sqrt{xx + yy}$. (num. 10.) Pongo per tanto $\sqrt{xx + yy} = z$, e fatta svanire la y , atteso che le sue funzioni montano al quadrato, collocando $zz - xx$ in luogo di yy , e $zdz - xdx$ in luogo di ydy , avremo l'equazione $\frac{zxzdx + xzdz - xxdx + zzdx - xxdx}{x^2 + xxy + a^2} = dz$, cioè $\frac{xzdz + zzdx}{x^2 + xxy + a^2} = dz$, la quale preparata al solito farà

$\frac{xzdz + zzdx}{x^2 + xxy + a^2} = dz$. Faccio $xzdz + zzdx = dp$, ed integrando $xz = p$, e fatta svanire la x , avremo $\frac{zdp}{pp + aa} = dz$, e finalmente $\frac{dp}{pp + aa} = \frac{dz}{z}$, il che ec.

ESEMPIO IV.

Sia l'equazione ultima dell' antecedente numero

$-apdp - fdp = aA + g \times pdy + fA + b \times dy + aA + c \times ydp$,
che ò promesso di costruire . Preparata questa secondo
il metodo , e fatto per brevità $aA + g = e$, $fA + b = m$,
 $aA + c = n$, si riduce ad essere

$-apdp - fdp = y \times \frac{dy}{ep + m} + \frac{ndp}{y}$. Pongo adunque $\frac{dy}{y} +$
 $\frac{ndp}{ep + m} = \frac{dq}{q}$, ed integrando $ly + \frac{n}{e} lp + \frac{m}{e} = lq$, e però

$y = \frac{q}{p + \frac{m}{e}}$, e fatta svanire la y , averassi

$-apdy - fdp = \frac{dq}{q}$, cioè $-\frac{apdp - fdp}{ep + m} \times p + \frac{n}{e} = \frac{dq}{q}$,
il che ec.

ESEMPIO V.

Sia l'equazione già preparata $y^m \times \frac{xdx + ydy}{x^n} = x^n \times \frac{ydx - xdy}{yy}$, che scrivo così $\frac{y^{m-1}}{x^n} \times \frac{xdx + ydy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$, a fine di rendere integrabile il secondo membro. In questa farò uso d'una doppia sostituzione, e però pongo $xdx + ydy = pdp$, ed integrando, $xx + yy = pp$; pongo in oltre $\frac{ydx - xdy}{yy} = dq$, ed integrando $\frac{x}{y} = q$. Fatte le sostituzioni, averassi $\frac{y^{m-1}}{x^n} \times pdp = dq$; ma $yy = pp - xx$, ed $xx = qqyy$, adunque farà $yy = pp - qqyy$, cioè $yy = \frac{pp}{aa + qq}$, ed $y^{m-1} = \frac{p^{m-1}}{aa + qq^{\frac{m-1}{2}}}$, $x^n = \frac{q^n p^n}{aa + qq^{\frac{n}{2}}}$; sostituiti per tanto questi valori di y^{m-1} , e di x^n , averassi $p^{m-n-1} dp = q^n dq \times \frac{p^{m-n-1}}{aa + qq^{\frac{n}{2}}}$, il che cc.

ESEMPIO VI.

Sia l'equazione $\frac{2xdy - 2ydx}{x - y} = dz$, in cui dz è data

in qualsivoglia modo per x , o per y . Osservo, che il numeratore del primo membro $2xdy - 2ydx$ è integrabile quando si divida per xx , ed il suo integrale è $\frac{2y}{x}$, e però dispongo l'equazione così

$$\frac{1}{x - y} \times \frac{2xdy - 2ydx}{xx} = \frac{dz}{xx}; \text{pongo } \frac{2y}{x} = p, \text{ onde}$$

farà $\frac{2xdy - 2ydx}{xx} = dp$, e l'equazione si muterà nella

$$\text{seguente } \frac{dp}{x - y} = \frac{dz}{xx}; \text{ ma } 2y = px, \text{ ed } yy = \frac{ppxx}{4},$$

$$\text{dunque fatte le sostituzioni, } \frac{dp}{xx - pxx + \frac{ppxx}{4}} = \frac{dz}{xx},$$

$$\text{e moltiplicando per } xx, \frac{dp}{1 - p + \frac{pp}{4}} = dz, \text{ in cui sono}$$

separate le variabili. Passo avanti all'integrazione, e

però sarà $\frac{z}{1-\frac{p}{z}} + c = \int dz$; e posto il valore di p ,

$$\frac{z}{1-\frac{y}{x}} + c = \int dz, \text{ e riducendo al comun denomina-}$$

tore, $\frac{zx + cx - cy}{x-y} = \int dz$. Posta la costante $c=0$, avremo $\frac{zx}{x-y} = \int dz$; posta $c=-2$, sarà $\frac{zy}{x-y} = \int dz$, altro integrale della proposta formola diverso dal primo; posta finalmente $c=-1$, nascerà il terzo integrale $\frac{x+y}{x-y} = \int dz$.

25. Il metodo, che ora prendo a spiegare, quantunque molto limitato, è però di grande uso ne' casi particolari. Con questo si separano le variabili nell'equazione canonica $ady = ypdx + by^n qdx$, in cui le quantità p, q s'intendono date in qualunque modo per x ; le a, b sono costanti, i segni possono essere positivi, e negativi a piacere, e l'esponente n può essere intero, rotto, positivo, negativo, ed anco zero. Sia adunque l'equazione $ady = ypdx + by^n qdx$. Si faccia $y=zu$, (z , ed u sono due nuove variabili) e differenziando, $dy = zdu + udz$, e sostituendo in luogo di dy , di y , e di y^n i valori $zdu + udz$, uz , $u^n z^n$, averassi l'equazione $azdu + audz = uzpdx + bz^n u^n qdx$, nella quale se due termini sparissero,

fi

si separerebbero le indeterminate. Per far ciò si finga un' equazione tra due termini $adz = uzpdx$, dunque,

$\frac{adz}{z} = pdx$, ed integrando, $alz = \int pdx$, e passando da'

logaritmi alle quantità esponenziali, $z^a = m^{\int pdx}$, o sia

$z = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, supposta l'unità $= 1m$. Quest' ultima equazio-

ne mi mostra il valore di z , e m' insegna, che per ridurre l' equazione proposta a due soli termini, e fare, che gl' altri due si distruggano, si doveva in vece di

$y = zu$ porre $y = um^{\frac{\int pdx}{a}}$, cioè $ly = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, o sia $ly - lu =$

$\int \frac{pdx}{a}$, e differenziando, $\frac{ady}{y} - \frac{adu}{u} = pdx$, e però $ady =$

$ypdx + \frac{aydu}{u}$. Sostituisco adunque nell' equazione canoni-

ca $ady = ypdx + by^n qdx$ in luogo di dy il valore ritro-

vato, e sarà $ypdx + \frac{aydu}{u} = ypdx + by^n qdx$, cioè $\frac{aydu}{u} =$

$by^n qdx$, e però $\frac{adu}{u} = by^{n-1} qdx$; ma $y = zu$, ed

$y^{n-1} = z^{n-1} u^{n-1}$, onde finalmente $\frac{adu}{u^n} = bz^{n-1} qdx$,

equazione in cui sono separate le variabili, per essersi trovata la z data per x . Quando siasi giunto all' equa-

zione $alz = \int pdx$, egli è certo, che se p data per

x sarà tale , che l'integrale $\int p dx$ dipenda dalla quadratura dell'iperbola , o sia da' logaritmi , e la quantità a sia un numero qualunque , sarà algebrica la relazione di z ad x , ed in ogni altro caso trascendente .

E qui si offervi , acciò una data equazione sia il caso della formola canonica , essere necessario , che si adempiano le seguenti condizioni , cioè che la differenza dy possa restar da se sola , o al più moltiplicata per una costante in una parte dell'equazione ; che nell'altra parte dell'equazione il primo termine contenga la differenza dx moltiplicata per qual si sia funzione di x espressa per p , e per l'indeterminata y , che nell'altro termine la quantità $q dx$ data per x venga moltiplicata per una dignità di y ; in una parola , fatta la divisione per y , si richiede , che da una parte dell'equazione resti la flussione logaritmica $\frac{ady}{y}$, e nell'

altra il primo termine sia libero dall'indeterminata y , ed il secondo moltiplicato per la dignità y^{n-1} . Mancando l'uno de' premessi requisiti , non à più luogo questo metodo , come non lo avrebbe nelle seguenti equazioni $ady = yypdx + by^n qdx$, $ady = ypdx + ayy + y^1 \times qdx$.

Alcune formole però si riducono con tutta facilità al canone col solo prepararle . Per esempio sia l'equazione $ady = ypdx + byqdx + yyqdx$; fatta riflessione , che
la

la quantità $pdx + bqdx$ viene moltiplicata per y , e che il binomio $p + bq$ è dato per x di maniera, che si può in sua vece surrogare la quantità r data ugualmente per x , l'espressione si muterà nella seguente $ady = yrdx + yyqdx$, in cui trova luogo il metodo spiegato, e ciò basterà per indicare il modo d'operare in simili casi.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$. Pongo $y = zu$, e però $ady = azdu + audz$; e fatte le debite sostituzioni, avremo $azdu + audz = \frac{fuzdx}{x} + zzuudx$. Sia $audz = \frac{fuzdx}{x}$, cioè $\frac{adz}{z} = \frac{f dx}{x}$, integrando sarà $a \log z = f \log x$, e però $z^a = x^f$.

Se le costanti a, f saranno numeri razionali interi, rotui, affermativi, o negativi, la z sarà data algebricamente per x . Sia per esempio $a = 1, f = 2$, così che sia $z = xx$. Dunque dileguandosi i termini $audz, \frac{fuzdx}{x}$, resteranno i due $azdu = zzuudx$, ma $z = xx$, dunque sarà $\frac{adu}{xu} = \frac{xxdx}{x}$, equazione, in cui sono separate le variabili.

Passan-

Passando all'integrazione, sarà $\frac{a}{u} + c = \frac{x^3}{3}$, ma
 $u = \frac{y}{x} = \frac{y}{xx}$, adunque $\frac{axx}{y} + c = \frac{x^3}{3}$, cioè $3cy -$
 $3axx = x^3y$, che è l'equazione algebrica nascosta sotto
 la differenziale proposta.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $dy = \frac{aydx}{xx-aa} + \frac{y^3dx}{xx-aa}$. Faccio, come
 sopra, $y = zu$, e $dy = zdu + udz$, e però fatte le sostitu-
 zioni, averassi l'equazione $zdu + udz = \frac{azudx}{xx-aa} +$
 $\frac{z^3u^3dx}{xx-aa}$, e supposto $udz = \frac{azudx}{xx-aa}$, cioè $\frac{dz}{z} = \frac{adx}{xx-aa}$, cioè
 $z = m \frac{\int \frac{adx}{xx-aa}}$, averassi l'equazione $zdu = \frac{z^3u^3dx}{xx-aa}$, o sia
 $\frac{du}{u^3} = \frac{z^2dx}{xx-aa}$, in cui sono separate le variabili, essendo z
 data per x . Ma si osservi, che la quantità $\frac{adx}{xx-aa}$ si
 può ridurre ad una funzione logaritmica ponendo $x =$
 $\frac{a+n \times a}{a-n}$, poichè fatte le sostituzioni debite, sarà

adx

$$\frac{adx}{xx-aa} = \frac{dn}{2n}, \text{ quindi } \frac{dz}{z} = \frac{dn}{2n}, \text{ e per\`o } zz = n =$$

$$\frac{a \times x - a}{x + a}, \text{ e posto questo valore in luogo di } zz \text{ nell'}$$

$$\text{equazione finale, averassi } \frac{du}{u^3} = \frac{axdx - aadx}{x^4 + ax^3}, \text{ il che ec.}$$

$$\text{Senza fare la sostituzione di } x = \frac{a+n \times a}{a-n}, \text{ si pu\`o}$$

$$\text{ridurre la quantit\`a } \frac{adx}{xx-aa} \text{ ad una fuzione logaritmica}$$

$$\text{per mezzo del num. 21. del Libro III., ed averassi}$$

$$\frac{adx}{xx-aa} = -\frac{dx}{2 \times x + a} + \frac{dx}{2 \times x - a} = \frac{dz}{z}, \text{ ed in conseguen-}$$

$$\text{za } zz = \frac{x-a}{x+a}.$$

ESEMPIO III.

$$\text{Sia l'equazione } dy = -\frac{ydx}{x} + y^m dx. \text{ Faccio } y = zu,$$

$$dy = zdu + udz; \text{ adunque sostituendo, } zdu + udz =$$

$$-\frac{uzdx}{x} + u^m z^m dx. \text{ Suppongasi } udx = -\frac{uzdx}{x}, \text{ o sia}$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}, \text{ ed integrando, } z = \frac{a}{x}; \text{ avrassi l'equazione.}$$

P P

zdu =

$xdu = x^m u^m dx$, cioè $\frac{du}{u^m} = x^{m-1} dx$, o sia $\frac{du}{u^m} =$

$$\frac{x^{m-1} dx}{x^{m-1}}$$

ESEMPIO IV.

Qualche volta è necessaria una doppia operazione, come in certe equazioni, che hanno più di tre termini. Sia pertanto l'equazione $x dy + y dx = adu + xdu$, e s'intenda u data in qualunque modo per la y . Dispongo l'equazione nella seguente maniera $adu + xdu - xdy = ydx$, o pure $\frac{adu}{y} + \frac{xdu}{y} - \frac{xdy}{y} = dx$; pongo $x = pq$, e $dx = pdq + qdp$, onde fatte le sostituzioni, farà $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq + qdp$. Chi volesse ridurre con una sola operazione la formola, bisognerebbe porre $\frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq$, cioè $\frac{du}{y} - \frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, con che si scopre la q data per y ; ma più elegantemente si opererà nel seguente modo. Facciasi $-\frac{pqdy}{y} = pdq$, dunque $-\frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, ed integrando, $\frac{a}{y} = q$; presi pertanto gli altri termini dell'equazione, $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} = qdp$, ed in vece di q posto il valore $\frac{a}{y}$, farà

farà $\frac{adu}{y} + \frac{apdu}{yy} = \frac{adp}{y}$, cioè $du + \frac{pdu}{y} = dp$. Sia $p = mn$, dunque $dp = mdu + ndm$, e fatta la sostituzione, $du + \frac{mndu}{y} = mdu + ndm$; si supponga $\frac{mndu}{y} = mdu$, cioè $du = \frac{dn}{n}$, sarà dunque n data per y , e nell'equazione restante, dopo essere svaniti i termini $\frac{mndu}{y}$, mdu , cioè nell'equazione $du = \frac{dn}{n}$ saranno separate le variabili, e sarà $du = \frac{dm}{m}$.

26. In altra maniera ancora si possono separare le variabili nell'equazione canonica $dy = pydx + qy^ndx$. Si faccia $pdx = \frac{dz}{z}$, $dx = \frac{dz}{z}$; fatte le sostituzioni, sarà $dy = \frac{ydz}{1-n \times z} + \frac{qy^ndz}{1-n \times pz}$, cioè $dy = \frac{pydz + qy^ndz}{1-n \times pz}$, o sia $1-n \times pzdy = pydz + qy^ndz$, e però $\frac{1-n \times zdy - ydz}{y^n} = \frac{qdz}{p}$, dividendo per py^n , e finalmente dividendo per zz , sarà $\frac{1-n \times zy^{1-n}dy - y^{1-n}dz}{zz} = \frac{qdz}{pzz}$, ed integrando, $\frac{y^{1-n}}{z} = \int \frac{qdz}{pzz}$, cioè $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{pzz}$; e poichè le p ,

e q si suppongono date per x , e la z pure, per la sostituzione $pdx = \frac{dz}{1-n \times z}$, è data per x , almeno trascendentemente, faranno separate le variabili.

Ripresa adunque l'equazione dell'esempio primo $ady = \frac{fydx}{n} + \frac{yydx}{a}$, vale a dire $dy = \frac{fydx}{an} + \frac{yydx}{a}$, farà $p = \frac{f}{an}$, $q = \frac{1}{a}$, $n = 2$; quindi surrogati questi valori nell'equazione finale $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{paz}$, farà essa $\frac{1}{y} = z \int \frac{x dz}{fz^2}$, e la sostituzione $pdx = \frac{dz}{1-n \times z}$ farà $\frac{f dx}{az} = -\frac{dz}{z}$, e posta $f=2$, $a=1$, avremo $\frac{2dx}{x} = -\frac{dz}{z}$, cioè $z = \frac{1}{xx}$, e però $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \int -xx dx$; ed integrando, $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \times -\frac{1}{3} x^3 + c$, cioè $3cy - 3xx = x^3 y$, come prima. Istessamente si discorra degli altri esempi,

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $ax^4ydy - bx^4ydy = ayyx^4dx - byyx^4dx + a^6dx - x^6dx$, la quale divisa per $ax^4y - bx^4y$, si trova essere $dy = \frac{ydx}{x} + \frac{a^6dx - x^6dx}{ax^4y - bx^4y}$, che è il caso

dell'equazione canonica. Sarà adunque $p = \frac{1}{x}$, $q =$

$$\frac{a^6 - x^6}{ax^4 - bx^4}, n = -1, \text{ e per la sostituzione } p dx = \frac{dz}{1-n \times z},$$

sarà $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{1-z}$, quindi $z = xx$; onde posti questi valori

nell'equazione finale canonica $y^{1-n} = z \int \frac{q dz}{p z z}$, avere-

mo $yy = xx \int \frac{a^6 - x^6 \times z x dx}{ax^4 - bx^4 \times x^4}$, in cui sono separate le variabili.

27. Se l'equazione canonica fosse $y^{n-1} dy = p dx + q y^n dx$, essendo parimente le p , e q date in qualunque modo per x , si separano le indeterminate, ponendo $q dx = \frac{dz}{n z}$; e $dx = \frac{dz}{n q z}$; imperciocchè fatte le sostituzioni,

sarà

farà $y^{n-1} dy = \frac{p dz}{nqz} + \frac{y^n dz}{nz}$, cioè $\frac{nzy^{n-1} dy - y^n dz}{z} = \frac{p dz}{qz}$, e dividendo per z , $\frac{nzy^{n-1} dy - y^n dz}{z^2} = \frac{p dz}{qz^2}$, ed integrando, $\frac{y^n}{z} = \int \frac{p dz}{qz^2}$, cioè $y^n = z \int \frac{p dz}{qz^2}$, equazione, in cui sono separate le variabili.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2aaxydy = aayydx + 2bx^1dx$, cioè $ydy = \frac{bx^1dx}{ax} + \frac{yydx}{2x}$. Sarà $n = 2$, $p = \frac{bx^1}{ax}$, $q = \frac{1}{2x}$, e però avremo $\frac{yy}{z} = \int \frac{2bx^1 dz}{axz}$; ma $qdx = \frac{dx}{2x} = \frac{dz}{2z}$, ed $x = z$, adunque sarà $\frac{yy}{x} = \int \frac{2bx^1 dx}{ax}$, ed integrando, $\frac{yy}{x} = \frac{bx^1}{ax} \pm c$, curva algebrica.

Potevasi anche costruire la formola generale, $y^{n-1} dy = p dx + qy^n dx$, ed in conseguenza la particolare dell'esempio per mezzo del metodo del num. 24. 28. Aggiungo una riflessione prima di finire questo Capo, cioè che tal volta si sviluppano le indeterminate miste, e confuse colle quantità differenziali, quando

do ci venga permesso di modificare le grandezze coefficienti, e ciò specialmente succede quando gli esponenti si formano dalli coefficienti, così portando il giro della riduzione. 'A principalmente luogo questo artificio ne' Problemi Fisico-Matematici, ne' quali accoppiandosi grandezze di genere affatto diverso, siamo in maggior libertà di servirsi di quelle quantità costanti, che meglio vengono al proposito.

Per un esempio mi propongo l'equazione $x^m dx + by + yy \times \frac{cdx}{x} = ydy$, la quale preparata giusta il metodo

del num. 24. sarà $x^m dx + \frac{bcydx}{x} = yy \times \frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x}$. Faccio

adunque $\frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x} = \frac{dp}{p}$, ed ô il valore di $y = px^e$,

ed $yy = pp x^{2e}$. Questi valori opportunamente sostituiti mi danno l'equazione $x^m dx + bcpx^{e-1} dx = x^{2e} p dp$, e dividendo per x^{2e} , sarà $x^{m-2e} dx + bcpx^{e-1} dx = p dp$. Egli è evidente, che data l'eguaglianza fra gli esponenti della indeterminata x , cioè fra $m - 2e$, e $e - 1$, le incognite sono separate, avendosi solamente a dividere l'omogeneo di comparazione $p dp$ per il binomio $1 + bcp$. Ora posto $m - 2e = -e - 1$, ne segue, che sia $m + 1 = e$, quindi esposta la costante e per $m + 1$, abbiamo l'intento. Se la e fa figura di unità, il che non ci è vietato di supporre, sarà $m = 0$; e se $e = 2$,

sarà

farà $m = 1$, e così vadasi discorrendo.

L'artifizio spiegato si applichi a tutte le altre equazioni di simil genere, per esempio alla seguente

$$x^m dx + cby^n dx + \frac{gy^r dx}{x} = y^t dy, \text{ posto però } t = r - 1,$$

ovvero $= n - 1$, onde si possa abbreviare la formola, usando i logaritmi.



C A P O I I I.

*Della Costruzione d'altre Equazioni più limitate
per mezzo di varie sostituzioni.*

29. SI separeranno sempre le indeterminate nell'equazione $x^n dx \pm ay^n dy \times p = xdy - ydx \times q$, nella quale le p , e q sono date promiscuamente per x , ed y in qualunque modo, purchè algebricamente, quando però in ogni termine della quantità p la somma degli esponenti di x , ed y sia la stessa, e così la stessa sia in ogni termine della quantità q ; non richiedendosi però, che sia la medesima in p , ed in q . Le sostituzioni da farsi sono $y = tz^{\frac{1}{n+1}}$, $x = t \times a^{\frac{1}{n+1}} azz^{\frac{1}{n+1}}$. Surrogati i rispettivi valori in luogo di x , dx , y , dy , e fatte le debite operazioni, arriverassi dopo lunghissimo calcolo alla seguente equazione

$$z^{n-2} dt = \frac{\frac{1}{n+1} z^{\frac{1}{n+1}} dz \times q}{a^{\frac{1}{n+1}} azz^{\frac{1}{n+1}} p}.$$

Ma poichè si fa, che in ciascun termine di p la somma degli esponenti di x , ed y è eguale, siccome
qq
pure

pure in ciascun termine di q , fatte in essi ancora le sostituzioni de' valori dati per t , e per z , in ciascun termine di p , averà t la medesima potestà, siccome pure in ciascun termine di q una medesima potestà, vale a dire, che sarà l'omogeneo di comparazione moltiplicato per una potestà positiva, o negativa di t , cioè sarà per essa potestà diviso, o moltiplicato il primo membro, e però separate le variabili.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $\frac{x dx + ay dy \sqrt{y}}{y} = \frac{x dy - y dx \sqrt{a}}{y}$; farà $n=1$, $p=\sqrt{y}$; $q=\sqrt{a}$, e però $\frac{dt}{t} = \frac{dz \sqrt{a}}{\sqrt{a^3} - azz \sqrt{y}}$,

ma $y = tz^{\frac{2}{1-n}} = tz$; adunque sarà $\frac{dt}{t} = \frac{dz \sqrt{a}}{\sqrt{a^3} z - azz}$.

Nella stessa equazione si separano le indeterminate, quando anche sia negativo l'esponente n , cioè quando sia l'equazione $\frac{x^{-n} dx \pm ay^{-n} dy \times p}{y} = \frac{x dy - y dx \times q}{y}$, e le sostituzioni sono $y = tz^{\frac{2}{1-n}}$, $x = t \times \frac{1}{a^{\frac{1}{1-n}} \mp azz^{\frac{1}{1-n}}}$;

le

le quali ci danno l'equazione

$$x^{-n-1} dt = \frac{x}{1-n} z^{\frac{1+n}{1-n}} dz \times \frac{q}{p}, \text{ la stessa di quella di}$$

$$\frac{a^1 + azz}{1-n}$$

sopra, mutati i segni alla n .

E poichè l'equazione è anche esprimibile così:

$$y^n dx \pm ax^n dy \times \frac{p}{x^n y^n} = xdy - ydx \times q, \text{ ne viene, che}$$

questa pure per la stessa sostituzione è costruibile.

30. Sia più generalmente l'equazione

$$x^n dx \pm ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy \times p = xdy + cydx \times q. \text{ Si separa-}$$

$$\text{no sempre le variabili, fatte le sostituzioni di } y = t^r z^{\frac{r}{n+1}},$$

$x = t^{-\frac{r}{c}} \times a \pm acz^{-\frac{r}{c} \frac{1}{n+1}}$, (s , ed r sono numeri a piacere) supposta però la condizione, che le quantità p , q sieno date algebricamente, e in modo tale, che in ciascun termine della quantità p l'esponente della y preso tante volte, quanto è il numero c , superi, o sia superato dall'esponente della x col medesimo eccesso, e così in ciascun termine della quantità q , non importando poi, che l'eccesso in p sia lo stesso, che in q .

qq 2

Così,

Così, per esempio, essendo $c = 3$, sia $p = byy^4 + fy^3x^{15}$ ec., e q sia $= gy^{\frac{1}{2}}x^3 - by^{10}x^2$ ec. E' facile a vedere, che la c non può essere zero.

Fatte le debite sostituzioni in luogo della x , e della y nell'equazione proposta, avremo la seguente equazione

$$-\frac{t}{c} \frac{-n-c-1}{c} dt = \frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r-n-1}{n+1}} dz \times \frac{q}{p}.$$

$$\frac{n}{-\frac{r}{n+1} \frac{n}{c}}$$

$$a \pm acz$$

ESEMPIO.

Sia $\overline{xdx + ay^{-1}dy} \times \frac{1}{y} = \overline{xdy + ydx} \times x$. E sia $s = 1$, $r = 2$, sarà $n = 1$, $c = 1$, $p = \frac{1}{y}$, $q = x$, e fatte le sostituzioni nell'ultima equazione di sopra ritrovata, avremo $-t^{-1}dt = \frac{dz \times xy}{a + az^{-2} \frac{1}{2}}$. Ma per le sostituzioni fatte, $x = t^{-1} \times \overline{a + az^{-2} \frac{1}{2}}$, ed $y = tz$, dunque $xy = z \times \overline{a + az^{-2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$, onde avremo $-\frac{dt}{t} = z dz$, il che ec.

31. Ma più generalmente ancora sia l'equazione

$x^n dx \pm ay^{\frac{r}{c}} dy \times p = fxdy + cydx \times q$, la quale comprende come casi particolari le due canoniche dei numeri antecedenti, cioè quella del num. 30., quando sia $f=1$; e quella del num. 29., quando sia $f=1$, $c=-1$.

Si separano le indeterminate per mezzo della sostituzione $y = t^{\frac{r}{c}} z^f \times \frac{r}{n+1}$, ed $x = t^{-\frac{r}{c}} \times a \pm \frac{acz}{f}$,
 $\frac{r}{n+1}$

essendovi però la condizione circa le quantità p , e q , che in esse l'esponente della y moltiplicato per c superi, o sia superato dall'esponente della x moltiplicato per f col medesimo eccesso in ciascun termine. Le stesse quantità p , q possono anche essere frazioni, o miste di frazioni, ed interi razionali, o irrazionali, comunque sianli; e faranno sempre nelle equazioni separabili le indeterminate, purchè le p , e q sieno in tal modo date per x , ed y , che fatte le sostituzioni assegnate, nascano in luogo loro quantità tali, che sieno il prodotto di due, una delle quali contenga la z , e non la t ; l'altra la t , e non la z .

Fatte le dette sostituzioni, avremo la formola

$$-\frac{fc - fn - sc}{cf} dt = \frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r-fn-f}{fn+f}} dz \times \frac{q}{p} \cdot$$

$$a \pm \frac{acz}{f}$$

ESEM.

ESEMPIO I.

Sia $\frac{xxdx + ay^s dy}{y} \times y = - \frac{3x dy + y dx}{y} \times ax$. E sia, come sopra, $s = 1$, $r = 2$, sarà $f = -3$, $c = 1$, $n = 2$, $q = ax$, $p = y$, e fatte le sostituzioni nell'ultima formola ritrovata di sopra, avremo

$$-t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{a}{\frac{1}{3}z} dz \times \frac{ax}{y} . \text{ Ma } y = t^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{2}{9}} ,$$

$$\frac{a - az^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}}$$

$$x = t^{-1} \times \frac{a - az^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}} , \text{ dunque sarà } - \frac{dt}{n} =$$

$$\frac{2adz}{3} , \text{ il che cc.}$$

$$3z \times \frac{a - az^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}} .$$

ESEMPIO II.

$$\text{Sia } \frac{x^{\frac{1}{2}} dx + ay^{-2} dy}{y} \times ay^{\frac{1}{2}} x + yx^{\frac{1}{2}} =$$

$$2x dy + 3y dx \times y^{\frac{1}{2}} x - yx^{\frac{1}{2}} ; \text{ e sia } s = 1 , r = 1 , \text{ sarà } c = 3 ,$$

$c = 3$, $f = 2$, $n = \frac{1}{2}$, $p = ay^{\frac{1}{2}}x + yx^{\frac{13}{4}}$, $q = y^{\frac{1}{2}}x - yxx$, e fatte le sostituzioni, farà

$$-\frac{1}{3}dt = \frac{2}{3}z^{-\frac{5}{2}}dz \times a + \frac{3az}{3} - \frac{1}{3}z^{-\frac{1}{3}}dz \times a + \frac{3az}{3},$$

$$\frac{19}{f^{12}} \frac{az^{\frac{1}{6}} \times a + \frac{3az}{3} + z^{\frac{2}{3}} \times a + \frac{3az}{3}}{2}$$

in cui sono separate le variabili, il che ec.

32. Nelle equazioni 1. $pxy^{n-1}dy = py^ndx + qdx$

2. $pxy^{n-1}dy = -py^ndx + qdx$

3. $apxy^{n-1}dy = bpy^ndx + qdx$

4. $apxy^{n-1}dy = -bpy^ndx + qdx$

essendo le p , e q date in qualunque maniera per x , si separano le indeterminate, ponendo rispetto alla prima.

$y = xz$; rispetto alla seconda $y = \frac{z}{x}$; rispetto alla terza

$y = x^{\frac{b}{a}}z$; rispetto alla quarta $y = x^{-\frac{b}{a}}z$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2bbxydy - 2x'ydy = bx^*dx - 3bby'dx + 3xy'dx$, che scrivo così: $bb - xx \times 2xydy = bx^*dx + bb - xx \times -3y'dx$. Riferita questa all'ultima delle

delle quattro canoniche, sarà $p = bb - xx$, $a = 2$, $n = 3$,
 $b = 3$, $q = bx^4$. Adunque si dovrà porre $y = \frac{z}{x^2}$, $dy =$

$$\frac{\frac{1}{2} dz - \frac{3}{2} z x^{-\frac{1}{2}} dx}{x^3}, \quad yy = \frac{zz}{x^4}, \quad y' = \frac{z'}{x^2}, \quad \text{e fatte le folti-}$$

$$\text{tuzioni, avremo } 2bbx - 2x' \times \frac{\frac{1}{2} z z dz - \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} z' dx}{x^4} =$$

$$bx^4 dx + \frac{3bb - 3xx}{x^2} \times -\frac{z' dx}{x^2}, \quad \text{cioè}$$

$$\frac{2bb - 2xx}{x^2} \times \frac{zz dz - \frac{3}{2} z' dx}{x^4} = bx^{\frac{17}{2}} dx + \frac{3bb - 3xx}{x^2} \times$$

$$- z' dx, \quad \text{e facendo le attuali moltipliche, sarà}$$

$$2bbxzzdz - 2x'zzdz = bx^{\frac{17}{2}} dx, \quad \text{cioè}$$

$$zzdz = \frac{bx^{\frac{17}{2}} dx}{2bbx - 2x'}$$

33. Sia l'equazione $axdy + bydx + cy^m x^{m-1} dx +$
 $fx^m y^{n-1} dy = 0$. In questa generalmente si separano le
indeterminate, ponendo $x = u^{n-1} z^{n-1}$, ed $y = z^{1-m}$,
poichè fatte le dovute operazioni, si arriva all'equazio-

$$\frac{n-1}{1-m} \times \frac{adz + fu^{mn-m-n+1} dz + n-1 \times b dz + cu^{mn-m-n+1} dz}{n-1 \times -bzu^{-1} du - czu^{mn-m-n} du}, \text{ cioè } \frac{dz}{z} =$$

$$\frac{n-1 \times -bu^{-1} du - cu^{mn-m-n} du}{1-m \times a + fu^{mn-m-n+1} + n-1 \times b + cu^{mn-m-n+1}}$$

ESEMPIO.

Sia l'equazione $a^1 x dy - b^1 y dx = cyyx dx - fxx y dy$. Sarà dunque $n = 2$, $m = 2$, quindi pongo $x = \frac{uz}{a}$, ed

$y = \frac{au}{z}$, cioè $x = \frac{au}{y}$, e però $dx = \frac{ay du - audy}{yy}$, onde

fatte le dovute sostituzioni, avremo

$$\frac{a^1 u dy}{y} - b^1 \times \frac{ay du - audy}{y} = \frac{caayudu}{y} - \frac{faauudy}{y},$$

cioè $a^1 u dy + ab^1 u dy + aacuu dy + faauudy = ab^1 y du + aacyudu$,
e però $dy = \frac{ab^1 du + aacudu}{y}$.

$$y \quad a^1 u + ab^1 u + aacuu + aafuu$$

34. Sia l'equazione $y dx = dy$; e più

$$\frac{1}{m} bx^{\frac{1}{m}} + ay^n x^r$$

generalmente $x^{m-1} y dx = dy$. Si separano le indetermina-

$$bx^{\frac{1}{m}} + ay^n x^r$$

nate ponendo $\overline{bx^t + ay^n x^r}^m = zx^{mt}$, quindi

$$y = \frac{z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ e per\`o } dy =$$

$$\frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{m} x^{t-r} z^{\frac{1}{m}-1} dz + t-r \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dz + t-r \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dz + t-r \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dz =$$

$$\frac{x^{t-1} dx \times \frac{1}{m} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}} z}, \text{ posto nell'equazione}$$

generale proposta il valore di y , ed y^n , quindi divi-

$$\text{dendo per } \frac{z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ far\`a}$$

$$\frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} x^{t-r} z^{\frac{1}{m}-1} dz + t-r \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dz + t-r \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dz - bx^{t-r-1} dz =$$

$$\frac{x^{t-1} dx}{a^{\frac{1}{n}}},$$

cio\`e

cioè $\frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}} dz + t - r \times z^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx + t - r \times -bz x^{-1} dx =$
 $nz^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx - nbx^{-1} dx$, e però

$$\frac{z^{\frac{1}{m}} dz}{z^{\frac{1}{m}} dz} = \frac{dx}{x}$$

$$mnz^{\frac{1}{m}} + mr - mt \times z^{\frac{1}{m} + 1} + mr - mt \times -bz - mnb$$

Se vi fossero termini con segni negativi, si proceda nello stesso modo, e nell'equazione finale non vi sarà altra differenza, che ne' segni stessi.

35. Anche presa l'equazione più universale così

$$\frac{y^n dx}{bx^2 + ay^n x^m} = c x^{\frac{nt - mnt - t + r + n - nr}{n}} dy$$

si separano le

indeterminate colla stessa sostituzione.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $\frac{aaydx}{\sqrt{bbxx - a'y}} = bdy$. Pongo

$$\sqrt{bbxx - a'y} = xz, \text{ e però } y = \frac{bbxx - z^2xx}{a^2}, \text{ e } dy =$$

$$\frac{2bbxdx - 2zzxdx - 2xxzdz}{a^2}, \text{ e fatte le sostituzioni}$$

112

ni,

$$\text{ni, } \frac{aadx}{xz} \times \frac{bbxx - zzzx}{a'} = \frac{zb'xdx - zbzzxdx - zbxxzdz}{a'}$$

cioè $aabbxxdx - aazzxxdx = zb'zxdx - zbz'xdx - zbxxzdz$, o sia $zbxxzdz = zb'zxdx - zbz'xdx + aazzxxdx - aabbxxdx$, e però

$$\frac{zbzzdz}{zb'z - zbz' + aazz - aabb} = \frac{dx}{x}$$

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{xydx}{\sqrt{-bbx^2 + a'xyy}} = \frac{dy}{b}$. Pongo

$$\sqrt{-bbx^2 + a'xyy} = zxx, \text{ e però } y = \sqrt{\frac{zzx^2 + bbx^2}{a'}}, \text{ e } dy =$$

$x'zdz + \frac{1}{2}zzxxdx + \frac{1}{2}bbxxdx$. Fatte pertanto le sostitu-

$$a' \sqrt{\frac{zzx^2 + bbx^2}{a'}}$$

$$\text{zioni, averassi } \frac{xdx}{zxx} \sqrt{\frac{zzx^2 + bbx^2}{a'}} =$$

$$x'zdz + \frac{1}{2}zzxxdx + \frac{1}{2}bbxxdx,$$

$$a'b \sqrt{\frac{zzx^2 + bbx^2}{a'}}$$

cioè

$$\text{cioè } bzzxxdx + b'xxdz = x'zzdz + \frac{1}{2} z'xxdx + \frac{1}{2} bzzxxdx,$$

$$\text{o sia } bzzxxdx + b'xxdx = \frac{1}{2} z'xxdx + \frac{1}{2} bzzxxdx = x'zzdz,$$

$$\text{e però } \frac{dx}{x} = \frac{zzdz}{bzz - \frac{1}{2} z' - \frac{1}{2} bbz + b'}$$

36. Con la stessa sostituzione usata di sopra si separano le indeterminate anche nell'equazione

$$\frac{y^n dy}{bx^t + ay^n x^r} = cx \frac{t^n - n - tnn - rn + t - r}{n} dx. \text{ Pongo adun-}$$

$$\text{que } bx^t + ay^n x^r = x^{mt} z, \text{ sarà } y =$$

$$\frac{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ e } dy =$$

$$\frac{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} dz + t-r \times z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + r-t \times bx^{t-r-1} dx \times x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}},$$

e fatte le sostituzioni, averassi l'equazione

$$\frac{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} dz + t-r \times z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + r-t \times bx^{t-r-1} dx \times x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}} x^{tm} z} =$$

$$cx \frac{t^n - n - tnn - rn + t - r}{n} dx. \text{ Dividendo pertanto il nume-}$$

rato-

ratore, e denominatore del primo membro dell'equazione per x^m , e moltiplicandola tutta per $a^{\frac{n+1}{n}} z$, ed

in luogo di $x^t - r z^{\frac{1}{m}} - b x^{t-r} z^{\frac{n+1-n}{n}}$ scrivendo

$x^{\frac{tm - tn + t - rn + nr - r}{n}} \times z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{n+1-n}{n}}$, che è lo stesso, ed unendo le dimensioni della lettera x , troveremo esser l'equazione divisibile per $x^{\frac{t - n - tm - rn + r - r}{n}}$, e divisa farà

$$\frac{x^{\frac{1-m}{n}} dz + \frac{t-r}{n} \times z^{\frac{1}{m}} dx + \frac{r-t}{n} \times b dx \times z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{n+1-n}{n}}}{\frac{1-m}{n}} =$$

$ca^{\frac{n+1}{n}} z dx$, e finalmente di nuovo dividendo per

$$z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{n+1-n}{n}}, \text{ farà}$$

$$\frac{x^{\frac{1-m}{n}} dz}{\frac{1-m}{n}} = \frac{r-t}{n} \times z^{\frac{1}{m}} dx + \frac{t-r}{n} \times b dx + ca^{\frac{n+1}{n}} z dx \times z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{n+1-n}{n}},$$

$$\text{cioè } \frac{dx}{x} = \frac{z^{\frac{1-m}{n}} dz}{\frac{1-m}{n}} \div \frac{mca^{\frac{n+1}{n}} z \times z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{n+1-n}{n}} + mr - mt \times z^{\frac{1}{m}} + mt - mr \times b}{n}$$

ESEM.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $\frac{y^1 dy}{\sqrt{bbxx - aaxy - abxy}} = \frac{xxdx}{c}$. Pon-

go $\sqrt{bbxx - aaxy - abxy} = xz$, e però $y = \frac{bbxx - zzzx}{aa + ab}$

$\frac{bbx - zzz}{aa + ab}$, e $dy = \frac{bbdx - zzzx - 2xzdz}{aa + ab}$. Fatte dun-

que le sostituzioni, sarà $\frac{bbx - zzz}{aa + ab}^3 \times \frac{bbdx - zzzx - 2xzdz}{aa + ab} \times xz =$

$\frac{xxdx}{c}$, ed in luogo di $bbx - zzz$ scrivendo $x^1 \times bb - zz$,

e moltiplicando tutta l'equazione per $\frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times xz$,
avremo

$x^1 \times bb - zz \times \frac{bbdx - zzzx - 2xzdz}{aa + ab}^3 = \frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times \frac{xx^1 dx}{c}$,

e dividendo per $x^1 \times bb - zz$, sarà $\frac{bbdx - zzzx - 2xzdz}{aa + ab}^3 =$

$\frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times \frac{bb - zz}{bb - zz} \times \frac{zdx}{c}$, cioè

$\frac{bbdx - zzzx + aa + ab}{aa + ab}^4 \times \frac{bb - zz}{bb - zz} \times -\frac{zdx}{c} = 2xzdz$,

c

e però $\frac{dx}{x} = \frac{2zdz}{bb - zz - \frac{z}{c} \times bb - zz \times \frac{1}{c} \times aa + ab}$.

37. Servirà la medesima sostituzione similmente per l'equazione più generale $\frac{bx^i + fy^n x^r}{bx^i + ay^n x^r} \times y^n dy =$

$\frac{cx^{m-n-1} - mn - ru + 1 - r + mi}{n} dx$. Anzi servirà pure anco per l'equazione $\frac{y^{n-1} dy}{bx^i + cx^r + ay^n x^r} = f x^{i-r-1+mi-m} dx$,

ponendo $bx^i + cx^r + ay^n x^r = x^{mi} z$; la quale, se sia $m = 1$, farà un caso particolare del num. 27., e se sia $c = 0$, farà un caso particolare del num. 36. Di più si potrà costruire anche l'equazione

$\frac{gx^i + bx^r + ky^n x^r}{ax^i + bx^r + cy^n x^r} \times y^{n-1} dy = f x^{i-r-1+mi-m} dx$,

quando però sia $cb = bk$, usando della stessa sostituzione $ax^i + bx^r + cy^n x^r = x^{mi} z$.

Che se faranno in oltre $b = 0$, $c = 0$, l'equazione farà un caso particolare della prima di questo numero.

38. Si costruiranno le equazioni

$$\frac{ady}{b + cy^n + fx^m} = gy^{1-n} dx,$$

$$\frac{ay^{n-1} dy}{b + cy^n + fx^m} = gy^{m-1} dx,$$

$$\frac{b + cy^n + fx^m}{b + cy^n + fx^m}$$

ponendo per la prima $cy^n + fx^m = z$, e per la seconda

$cy^n + fx^m = z$. E quanto alla prima, sarà dunque

$$y = z^{\frac{1}{n}} - fx^{\frac{1}{n}}, \text{ e } dy = \frac{1}{n} \times \frac{z^{\frac{1}{n}-1} dz}{c^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} z^{\frac{1}{n}-1} dz - f dx,$$

e però fatte le sostituzioni, avremo $az^{\frac{1-n}{n}} dz = nubcgdx + nucgzdx + aufdx$, cioè

$$\frac{az^{\frac{1-n}{n}} dz}{nubcg + nucgz + auf} = dx. \text{ Rispetto alla seconda avremo}$$

$$y = z^{\frac{1}{n}} - fx^{\frac{1}{n}}, \text{ e però } dy = \frac{1}{n} \times \frac{z^{\frac{1}{n}-1} dz}{c^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} z^{\frac{1}{n}-1} dz - mfx^{m-1} dx, \text{ e fatte}$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{z^{\frac{1}{n}-1} dz}{c^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} z^{\frac{1}{n}-1} dz - mfx^{m-1} dx, \text{ e fatte}$$

le sostituzioni , $x^{m-1} dx = \frac{1-u}{az^u dz} \cdot$
 $begu + cguz + mafu$

Ma anche se l'equazione più generalmente presa
 sia $\frac{ay^{n-1} dy}{b + cy^n + p^u} = qdx$, essendo in qualunque modo

le p , e q date per x , e le costanti, purchè sia
 $q = \frac{dp}{dx}$, si separeranno le indeterminate ponendo simil-

mente $\frac{1}{cy^n + p^u} = z$. Imperciocchè sarà $y = z^{\frac{1}{n}} - p$, e
 $c^{\frac{1}{n}}$

però $dy = \frac{1}{n} \times z^{\frac{1}{n}-1} - p \times \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz - dp$, e fatte le
 $c^{\frac{1}{n}}$

sostituzioni, sarà l'equazione $az^{\frac{1-u}{n}} dz = nbeguqdx +$
 $ncguzqdx + audp$; ma si suppone $dp = qdx$, adunque sarà

$$\frac{az^{\frac{1-u}{n}} dz}{nbegu + ncguz + au} = qdx.$$

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $a'dy = 6b'dx - 3bb'dx \sqrt{cy + bx}$,
 cioè $\frac{a'dy}{2b - \sqrt{cy + bx}} = 3bb'dx$. Posta $\sqrt{cy + bx} = z$, farà
 $y = \frac{z^2 - bx}{c}$, $dy = \frac{2zdz - bdx}{c}$, e fatte le sostituzioni;
 $\frac{2a'zdz - a'b'dx}{2bc - cz} = 3bb'dx$, o. sia $2a'zdz = 6b'cdx -$
 $3bb'cdx + a'b'dx$, e però $\frac{2a'zdz}{6b'c - 3bb'cz + a'b} = dx$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{ayydy}{b + \sqrt[3]{y^3 + aax - bxx}} = aadx -$
 $2bx dx$. Pongo $\frac{y^3 + aax - bxx}{3} = z$, farà $y =$
 $\frac{z^{\frac{1}{3}} - aax + bxx^{\frac{1}{3}}}{3}$, e però $dy =$
 $\frac{1}{3} \times \frac{3zzdz - a'zdx + 2bx dx}{z^{\frac{1}{3}} - aax + bxx^{\frac{1}{3}}}$, quindi fatte le sostituzioni,
 f 1 2 farà

farà l'equazione $\frac{a}{3} \times \frac{3zzdz - aadx + 2bx dx}{b+z} = aadx -$

$2bx dx$, cioè $3azzdz = a^3 dx - 2abx dx + 3aabd x - 6bbx dx + 3aazdx - 6bzx dx$, e dividendo per $a + 3b + 3z$, sarà $\frac{3azzdz}{a+3b+3z} = aadx - 2bx dx$.

39. L'equazione, o formola canonica $ax^m dx + cyx^n dx = dy$ non è generalmente separabili le indeterminate, qualunque siasi l'esponente m ; le è però separabili in infiniti casi, cioè infiniti sono i valori dell'esponente m , posti i quali, succede la bramata separazione.

Per determinarli mi servo di un metodo simile a quello del num. 23. Si ponga $y = Ax^p + x^r t$; (la quantità A , e gli esponenti p , r sono costanti arbitrarie da determinarsi nel progresso, e la t è una nuova variabile) sarà adunque $dy = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$, ed $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r}t + ttx^{2r}$, quindi sostituiti questi valori nella proposta formola, daranno la seguente $ax^m dx + cAAx^{2p+n} dx + 2cAtx^{p+r+n} dx + ctt x^{2r+n} dx = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$. Si supponga $cAA = pA$, $2p+n = p-1$, $r = 2cA$, cioè $p = -n-1$, $A = \frac{n-1}{c}$, $r = -2n-2$, con che in quest'ultima formola spariranno il secondo, terzo, quinto, e sesto termine, e si ridurrà ad esse-

re $ax^m dx + ctt x^{-m-4} dx = x^{-2n-2} dt$, cioè dividendo per x^{-2n-2} , $ax^{m+2n+2} dx + ctt x^{-n-2} dx = dt$, o sia (D) $ax^K dx + ctt x^X dx = dt$, fatto $K = m + 2n + 2$, $X = -n - 2$.

Ripiglio la proposta equazione $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, la quale ponendo $y = \frac{1}{z}$, si trasformi in quest'altra $azzx^m dx + cx^n dx = -dz$, in cui si ponga, come sopra, $z = Bx^q + x^i u$ (B, q, i sono similmente costanti da determinarsi, ed u una nuova incognita) sarà dunque $dz = qBx^{q-1} dx + iux^{i-1} dx + x^i du$, $zz = BBx^{2q} + 2Bx^q + iu + uux^{2i}$, e sostituiti questi valori, avremo $aBBx^{2q+m} dx + 2aBux^q + i + m dx + auux^{2i+m} dx + cx^n dx = -qBx^{q-1} dx - iux^{i-1} dx - x^i du$. Si supponga $aBB = -Bq$, $2q + m = q - 1$, $-i = 2aB$, cioè $q + m = -1$, $B = \frac{m+1}{a}$, $i = -2m - 2$,

con che in quest'ultima formola spariranno il primo, secondo, quinto, e sesto termine, e si ridurrà ad essere $auux^{-2m-4} dx + cx^n dx = -x^{-2m-2} du$, cioè dividendo per x^{-2m-2} , $cx^{2m+n+2} dx + auux^{-m-2} dx = -du$, o sia (G) $cx^d dx + auux^e dx = -du$, fatto $d = 2m + n + 2$, $e = -m - 2$.

Ora nella proposta equazione sono separabili le indeterminate, quando sia $m = n$; adunque anche nelle formole D, G saranno separabili le indeterminate, quando sia $m + 2n + 2 = -n - 2$, $2m + n + 2 = -m - 2$,
dal

dal che si ricavano due valori di m , cioè $m = -3n - 4$,
 $m = -\frac{n-4}{3}$, posti i quali, succede la separazione
 delle indeterminate. Poichè adunque nella proposta
 equazione si separano le indeterminate quando sia
 $m = -\frac{n-4}{3}$, si separeranno anche nelle formole D ,
 G quando sia $K = -\frac{X-4}{3}$, $s = -\frac{x-4}{3}$, dal che si
 ricavano altri due valori di m , cioè $m = -\frac{5n-8}{3}$,
 $m = -\frac{3n-8}{5}$.

Ripetendo lo stesso discorso, si averanno infiniti
 altri valori della m ; come a dire $m = -\frac{7n-12}{5}$,
 $m = -\frac{5n-12}{7}$, $m = -\frac{9n-16}{7}$, $m = -\frac{7n-16}{9}$ ec.,
 vale a dire generalmente $m = \frac{2b \pm 1}{2b \mp 1} \times -n - 4b$, preso per
 b un qualunque numero intero positivo principiando
 dall'unità; posti i quali valori nella proposta equazione,
 ci daranno separabili le indeterminate.

Si aggiunga, essere in oltre separabili le indeter-
 minate nella equazione proposta, quando l'esponente
 m sia tale, che col metodo del num. 19. possa essa ri-
 durfi ad essere il caso del num. 14.

Sa-

Sarebbe questo il luogo di fare uso di due dissertazioni del dottissimo Signor Eulero inserite negli Atti dell' Accademia di S. Pietro-Burgo Tomo 6., ma perchè la sottile maniera, con cui procede l'Autore, mi sembra oltrepassare i limiti, che io mi sono prefissa di una semplice Instituzione, lascerò, che a suo talento la veggano i Lettori nel citato libro.

PROBLEMA I.

40. Ritrovare la curva, la di cui sottangente sia eguale al quadrato dell'ordinata diviso per una costante.

Poste le assisse $= x$, le ordinate $= y$, la sottangente è sempre $\frac{ydx}{dy}$, dunque deve essere eguale ad $\frac{yy}{a}$, e però avremo l'equazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, onde $adx = ydy$, ed integrando $ax = \frac{yy}{2}$, o sia $2ax = yy$, Parabola apolloniana.

Se la sottotangente dovesse essere eguale alla doppia assissa, averebbesi l'equazione $\frac{ydx}{dy} = 2x$, e però

$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log a = \log y$ (aggiungo la costante $\frac{1}{2} \log a$ per adempire la legge degli omogenei),
cioè

cioè $l\sqrt{ax} = ly$, e togliendo i logaritmi, $\sqrt{ax} = y$,
cioè $ax = yy$, parabola pure apolloniana.

Debba essere costante la sottonormale, sarà $\frac{ydy}{dx} = a$,
cioè $ydy = adx$, ed integrando $\frac{yy}{2} = ax$, o sia $yy = 2ax$,
parabola pure apolloniana.

Debba essere la sottotangente tripla dell'assisa, sarà
 $\frac{ydx}{dy} = 3x$, cioè $\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $l\sqrt[3]{aax} = ly$,
o sia $aax = y^3$, parabola prima cubica.

Debba essere la sottotangente multipla dell'assisa se-
condo un qualunque numero m , sarà $\frac{ydx}{dy} = mx$, cioè
 $\frac{dx}{mx} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $l\sqrt[m]{a^{m-1}x} = ly$, o sia
 $a^{m-1}x = y^m$, curva del genere delle parabole.

Debba essere la sottotangente $= \frac{2ax + xx}{a + x}$, sarà l'e-
quazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax + xx}{a + x}$, cioè $aydx + yxdx = 2axdy +$
 $xxdy$, o sia $\frac{adx + xdx}{2ax + xx} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $ly =$
 $\frac{1}{2} l(2ax + xx)$, e però $xx + 2ax = yy$, equazione all'iper-
bola.

Deb-

Debba essere la sottangente $= \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$, sarà

l'equazione $ydx = \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$, cioè $ayydx + 3yxxdx =$

$2axydy - 3x^3dy$. Secondo ciò, che è stato detto al num. 18. procuro di ridurre questa equazione al caso del num. 14.; pongo adunque $y = \frac{zz}{a}$, $dy = \frac{2zdz}{a}$,

fatte le sostituzioni, sarà $z^4dx + 3zzxxdx = 4xz^3dz - 6x^3zdz$, ed eccola ridotta al suddetto caso; quindi si separeranno le indeterminate, se si porrà $z = \frac{xp}{a}$, $dz = \frac{x dp + p dx}{a}$, e fatte le sostituzioni, sarà

$$\frac{p^4 x^4 dx}{a^4} + \frac{3 p p x^4 dx}{a a} = \frac{4 x^4 p^3}{a^3} \times \frac{x dp + p dx}{a} -$$

$$\frac{6 x^4 p}{a} \times \frac{x dp + p dx}{a}, \text{ cioè } 9 a a p dx - 3 p^3 dx = 4 x p p d p -$$

$$6 a a x d p, \text{ e però } \frac{dx}{x} = \frac{4 p p d p - 6 a a d p}{9 a a p - 3 p^3}, \text{ ed integrando,}$$

$$l x = \frac{l m}{1 \sqrt[3]{p^3 - 3 a a p p}}, \text{ e restituito il valore di } p, \text{ cioè}$$

$$a \sqrt[3]{\frac{ay}{x}}, \text{ sarà } x = \frac{m}{\sqrt[3]{a^3 y y - 3 a^3 y x x}}, \text{ cioè finalmente}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 y y - 3 a^3 y x x}{x^4}}$$

$$a^3 y y - 3 a^3 y x x = m x.$$

t t

Le

Le due sostituzioni fatte di $y = \frac{zx}{a}$, e di $z = \frac{xp}{a}$,
 per separare le indeterminate, ci fanno vedere, che
 sul bel principio bastava farne una sola, cioè $y = \frac{xx+p}{a}$,

Ma assai più speditamente si otterrà l'intento scri-
 vendo l'equazione così: $3yxxdx + 3x'dy = 2axydy -$
 $ayydx$, la quale divisa per xx sarà $3ydx + 3x'dy =$
 $\frac{2axydy - ayydx}{xx}$, ed integrando, $3xy = \frac{ayy}{x}$, cioè $\frac{ay}{x} =$
 xx , parabola apolloniana, quando si ometta la co-
 stante m .

Debba esser la sottangente $= \frac{4x' - axy}{3xx - ay}$, sarà l'e-

quazione $\frac{4x' - axy}{3xx - ay} = \frac{ydx}{dy}$, cioè $4x'dy - axydy =$

$3xxydx - ayydx$, che scrivo in quest' altra maniera:

$4x'dy - 3yxxdx = axydy - ayydx$. Osservo, che il se-

condo membro sarebbe integrabile se fosse diviso per

xy ; divido adunque tutta l'equazione, onde sia

$\frac{4x'dy}{y} - \frac{3yxxdx}{xx} = \frac{axydy}{xx} - \frac{ayydx}{xx}$, pongo l'integrale di esso

secondo membro $\frac{ay}{x} = z$, e fatta svanire dall'equazione

la y , sarà essa $4x \times \frac{xdz + zdx}{xx} - 3zxdx = dz$,

cioè

cioè $\frac{4xdz + zdx}{z} = dz$, la quale si potrà costruire col

metodo del num. 14., o pure preparata giusta il metodo del num. 24., sarà $x \times \frac{4dz + dx}{z} = dz$. Faccio

adunque $\frac{4tz}{z} + \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$, ed integrando $4z^4x = 4a^4p$,

o sia $z^4x = a^4p$, e però fatta svanire dall'equazione finale la x , avremo finalmente $\frac{a^4p}{z^4} \times \frac{dp}{p} = dz$, cioè

$a^4dp = z^4dz$, ed integrando, $a^4p = \frac{z^5}{5}$, in cui restitui-

to il valore di p , indi quello di z , sarà $xx = \frac{ay}{5}$, parabola apolloniana.

Debba esser la sottangente $= \frac{a+x}{a+la+x}$, sarà

l'equazione $\frac{a+x}{a+la+x} \frac{dy}{y} = \frac{ydx}{y}$, cioè $\frac{dy}{y} = \frac{adx + dx}{a+la+x}$.

Per passare all'integrazioni, pongo $\frac{a+x}{a+la+x} = z$,

e però $dz = \frac{dx}{a+la+x} + \frac{adx}{(a+la+x)^2}$; (supposta la logaritmica della sottangente $= a$) sostituiti i valori nell'equazione,

sarà $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, ed integrando $y = z$, cioè $y = \frac{a+x}{a+la+x}$,

curva trascendente, ma che facilmente si descrive, supposta la logaritmica.

PROBLEMA II.

41. Ritrovare la curva, il di cui spazio sia eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate.

La formola dello spazio è ydx , e però averassi $\int ydx = \frac{2}{3}xy$, quindi $ydx = \frac{2}{3}x dy + \frac{2}{3}y dx$, cioè $ydx = 2x dy$, o sia $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando come sopra,

$\sqrt{ax} = ly$, ed $ax = yy$, la stessa parabola.

Debba lo spazio esser eguale alla quarta potestà dell' ordinata divisa per un quadrato costante; farà $\int ydx = \frac{y^4}{aa}$, cioè $ydx = \frac{4y^3 dy}{aa}$, o sia $aadx = 4yydy$, ed integrando, $\frac{3aax}{4} = y^4$, parabola prima cubica.

Debba lo spazio esser eguale alla potestà m dell' ordinata divisa per una costante, farà $\int ydx = \frac{y^m}{a^{m-2}}$, cioè $ydx = \frac{my^{m-1} dy}{a^{m-2}}$, o sia $a^{m-2} dx = my^{m-1} dy$, ed integrando $\frac{a^{m-2}}{m-1} \times a^{m-2} x = my^{m-1}$, curva del ge-

nere

nere delle parabole, o dell' iperbole, secondo che sarà
 m — 1 positivo, o negativo.

PROBLEMA III.

42. *Date infinite parabole del medesimo genere qualunque; ritrovare, quale sia quella curva, che tutte le taglia ad angolo retto.*

Sia l'equazione $p^{m-n}x^n = y^m$, la quale (considerando, come arbitraria la p , e suscettibile d' infiniti valori) esprime infinite parabole, e similmente considerando le m , ed n , esprime qualunque genere. E sieno esse in primo luogo tutte al medesimo asse AB , (Fig. 3.) vertice A , diverse solo nel parametro. Una di queste infinite parabole sia AC , in cui $AB=x$, $BC=y$.

Da un qualunque punto C si conduca la tangente CT , e la normale CP ; già si sa, che sarà $BT = \frac{mx}{n}$. La curva, che si cerca, sia DC ; e poichè questa deve normalmente tagliare la parabola nel punto C , per una porzione infinitesima dovrà confondersi con la normale CP nel punto C ; adunque CT tangente della parabola AC sarà assieme normale alla curva DC nel punto C , ed in conseguenza BT sarà nello stesso tempo e sottotangente della parabola, e sottotonormale della ricercata curva DC . Ciò, che dicesi della parabola AC , conviene a qualun-

que

que altra del medesimo genere. Il problema adunque consiste a ritrovare, quale sia la curva DC , la di cui sottotangente sia $= \frac{mx}{n}$. L'espressione generale della

sottotangente è $\frac{ydy}{dx}$, che in questo caso deve prenderfi

negativa, perchè nella curva DC crescendo $AB(x)$, cala $BC(y)$, e però sarà l'equazione differenziale $\frac{mx}{n} =$

$-\frac{ydy}{dx}$, e separando le variabili, $\frac{mxdx}{n} = -ydy$, ed

integrando, $\frac{mxx}{2n} = -\frac{yy}{2} + aa$, o sia $\frac{nyy}{m} = \frac{2naa}{m} - xx$,

equazione all'ellissi. E perchè in nessun modo ci entra il parametro p , la soluzione sarà generale per le infinite parabole così descritte.

Se l'esponente n della equazione $p^{m-n}x^n = y^m$ si supporrà negativo, onde l'equazione sia $x^ny^m = p^{m+n}$, in cui ora è positivo, sarà essa all'infinito iperbole del medesimo genere fra gli asintoti, le di cui sottotangenti sono $-\frac{mx}{n}$, e deve pure essere a queste eguale la

sottotangente della curva DC ; adunque sarà $-\frac{mx}{n} =$

$-\frac{ydy}{dx}$, cioè $\frac{mxdx}{n} = ydy$, ed integrando, $\frac{mxx}{2n} = \frac{yy}{2} + aa$,

o sia $xx - \frac{2naa}{m} = \frac{nyy}{m}$, equazione all'iperbola.

Se

Se le infinite parabole AC , QC ec. dell'equazione $p^{m-n}z^n = y^m$ averanno tutte lo stesso parametro, ma ciascuna diverso il vertice sul medesimo asse, vale a dire, se una si muova sempre sull'asse parallela a se medesima; chiamando da un punto fisso A (Fig. 4.) una qualunque $AB = x$, e presa una qual si sia QC , la di cui affissa $QB = z$, ordinata $BC = y$, farà pure $-\frac{ydy}{dx}$ la

sottotangente della ricercata curva DC , e però eguale alla sottotangente BT della parabola QC ; quindi l'equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{mz}{n}$; ma per l'equazione della parabola si

$$\begin{aligned} \frac{z}{p^{\frac{m-n}{n}}} &= \frac{y^{\frac{m}{n}}}{n p^{\frac{m}{n}}}, \text{ adunque } -\frac{ydy}{dx} = \frac{my^{\frac{m}{n}}}{n p^{\frac{m}{n}}}, \text{ cioè } dx = \\ &= -\frac{n}{m} p^{\frac{m-n}{n}} y^{1-\frac{m}{n}} dy, \text{ ed integrando, } x = \\ &= -\frac{mp^{\frac{m-n}{n}} y^{\frac{2n-m}{n}}}{m \times 2n-m}, \text{ equazione della ricercata curva } DC. \end{aligned}$$

Le parabole sieno apolloniane, cioè $m=2$, $n=1$; l'equazione integrata non servirà in questo caso, perchè fatte le sostituzioni de' valori di m , ed x , averassi $x = -\frac{p}{0}$; ma presa la differenziale, sarà essa $dx = -\frac{1}{2} p \times \frac{dy}{y}$, equazione alla logaritmica. La

curva

curva adunque, che taglia le infinite parabole apolloniane ad angolo retto, farà la logaritmica MCN , la di cui sottangente è eguale alla metà del parametro delle parabole.

Le parabole sieno prime cubiche, cioè $m = 3$, $n = 1$, farà $x = -\frac{ppy^{-1}}{-3}$, o sia $xy = \frac{pp}{3}$, e la curva DC sarà l'iperbola fra gli asintoti.

Le parabole sieno le seconde cubiche; cioè $m = 3$, $n = 2$, farà $x = -\frac{4}{3}\sqrt{py}$, o sia $xx = \frac{16}{9}py$, e la curva DC la parabola ordinaria. Presi altri valori per le m , ed n , altre curve si averanno.

Se le parabole AC , QC ec. oltre l'aver sul medesimo asse diverso il vertice, averanno variabile il parametro, cioè uguale in ciascuna alla rispettiva distanza del vertice dal punto fisso E , presa una qualunque QC , sia $EB = x$, assisa della ricercata curva DC , BC ordinata $= y$, $EQ = p =$ al parametro, sarà $QB = x - p$, e l'equazione delle infinite parabole $p^{m-n}x - p^n = y^m$, e la sottangente $BT = \frac{m}{n} \times \frac{x - p}{y}$, e però l'equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \frac{x - p}{y}$.

Le parabole sieno apolloniane, cioè $m = 2$, $n = 1$, sarà $p = \frac{x \pm \sqrt{xx - yy}}{2}$, quindi fatte le sostituzioni

nell'

nell'equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \overline{x - p}$, farà essa $-\frac{ydy}{dx} =$

$x \mp 2 \sqrt{\frac{xx}{4} - yy}$, che si potrà ridurre col metodo del numero 14. alla separazione, per indi passare all'integrale, che farà algebrico.

Se le infinite parabole AC , QC ec. dell'equazione $p^{m-n} z^n = y^m$ averanno lo stesso parametro costante, gli assi paralleli, ed i vertici variabili nella perpendicolare agli assi, vale a dire, se una si muova in maniera, che ciascun punto di essa descriva delle perpendicolari agli assi. Presane una qualunque EC (Fig. 5.), e chiamata $AM = EB = z$, $BC = y$, $MC = x$, e condotta alla parabola EC la tangente CT prodotta in V , farà MV la fottonormale della ricercata curva DC ; ma poichè $BT = \frac{mz}{n}$, farà $MV = \frac{mzx}{ny}$, quindi averassi l'equazione $\frac{mzx}{ny} =$

$-\frac{x dx}{dz}$, e sostituito in luogo di y il valore $p^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}$

dato dall'equazione $p^{m-n} z^n = y^m$, farà finalmente

$$\frac{mzx}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = -\frac{x dx}{dz}, \text{ cioè } -\frac{mz dz}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = dx, \text{ ed in-}$$

tegrando, $x = - \frac{2m - n}{m^2 n^2} \frac{2m - n}{m^2}$, equazione della

$$m \times 2m - n \times p^{\frac{m-1}{m}}$$

curva ricercata DC .

Le parabole sieno apolloniane, cioè $m=2$, $n=1$, farà

$$x = - \frac{4z^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}}, \text{ o sia } \frac{9pxx}{16} = z^2, \text{ e però la curva } DC \text{ la}$$

seconda parabola cubica, il di cui lato retto farà a , quello della parabola AC , come il 9. al 16.

Avvertasi, che in questo caso la posizione della curva DC non farà la segnata nella figura 5., ma averà il vertice in A , tagliando ad angolo retto la parte inferiore delle parabole apolloniane, cioè incontrando il convesso, come nella figura 6.

fissato altro genere per le parabole AC , farà pure una parabola d'altro genere la curva DC .

PRO.

PROBLEMA IV.

43. Sulla retta AD (Fig. 7.) insista la retta AC in angolo semiretto, si ricerca l'equazione della curva AB, la di cui proprietà sia, che l'applicata BD abbia alla sottotangente DF la ragione d'una costante a alla BC.

Chiamate $AD = x$, $DB = y$, sarà $CB = y - x$, quindi per la condizione del Problema si averà y , $y \frac{dx}{dy} :: a, y - x$, e però l'equazione $adx = ydy - xdy$.

Per separare le indeterminate mi servo del metodo del num. 23., pongo pertanto $x = Ay + p + B$, e $dx = A dy + dp$; fatte le sostituzioni, sarà $aA dy + adp = ydy - Aydy - pdy - Bdy$, ma in questa equazione si separano le indeterminate, se spariscono il primo, e secondo termine, dell'omogeneo di comparazione, cioè se sia $A = 1$, e B rimane arbitraria, che porrò per brevità $= 0$; adunque la sostituzione da farsi è $x = y + p$, $dx = dy + dp$, e l'equazione sarà $adp = -ady - pdy$, cioè $\frac{adp}{a+p} = -dy$, curva trascendente, e che dipende dalla logaritmica.

PROBLEMA V.

44. Ritrovare la curva, la di cui area sia $axy + bx^c y^e$, chiamando al solito le affisse x , le ordinate y .

Deve adunque essere $\int y dx = axy + bx^c y^e$; e però $y dx = ax dy + ay dx + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy$; o sia, fatto $a - 1 = m$, $my dx + ax dy + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy = 0$. Per separare le indeterminate in questa equazione si potrebbe servirsi del metodo del num. 33. ponendo $x = u^{e-1} z^{e-1}$, ed $y = z^{1-c}$, onde $dx = \frac{e-1}{e-1} \times z^{e-1} u^{e-2} du + \frac{e-1}{e-1} \times u^{e-1} z^{e-2} dz$, e $dy = \frac{1-c}{1-c} \times z^{-c} dz$; ma fatte le sostituzioni, ci si presenterebbe un'equazione molto composta, la quale richiederebbe un lunghissimo calcolo.

Per venirne a capo con brevità: ripresa l'equazione $\int y dx = bx^c y^e + axy$, pongo $x^c y^e = q$, onde l'equazione sia $\int y dx = bq + axy$, e però $y dx = bdq + ax dy + ay dx$. Ciò posto, mi serva del metodo del num. 24., a norma di cui scrivo l'equazione così:

$$axy \times \frac{1-a}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = bdq; \text{ indi pongo } \frac{1-a}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}; \text{ e però integrando, } \frac{1-a}{a} \int \frac{x}{y} = \int \frac{p}{y},$$

o sia $x^{\frac{1-a}{a}} = p$. Fatte per tanto le dovute so-

stituzioni, averassi l'equazione $\frac{ax^{\frac{1}{a}} dp}{p^p} = bdq$.

Ora per esprimere la $x^{\frac{1}{a}}$ per le assunte p, q , si
rifletta, che $x^e y^e = q$, cioè $y^e = \frac{q}{x^e}$, cioè $y = \frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{c}{e}}}$;

ma si à pure $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{p} = y$, dunque $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{p} = \frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{c}{e}}}$, o sia

$$x^{\frac{e-ae+ac}{ae}} = q^{\frac{1}{e}} p, \text{ e finalmente } x^{\frac{1}{a}} =$$

$q^{\frac{1}{e-ae+ac}} p^{\frac{e}{e-ae+ac}}$. Fatta adunque questa sostituzio-
ne in luogo di $x^{\frac{1}{a}}$, avremo l'equazione

$$ap^{\frac{e}{e-ae+ac}-2} dp = \frac{bdq}{q^{\frac{1}{e-ae+ac}}}, \text{ cioè } ap^{\frac{2ae-2ac-e}{e-ae+ac}} dp =$$

$$bq^{\frac{-1}{e-ae+ac}} dq, \text{ ed integrando,}$$

$$\frac{ae-aac+aac}{ae-ac} \times p^{\frac{ae-ac}{e-ae+ac}} = \frac{be-bae+bac}{e-ac+ac-1} \times q^{\frac{e-ac+ac-1}{e-ae+ac}} + g,$$

equazione della curva, che si cerca.

E'

E' manifesto , che questa curva sarà per lo più algebrica quando le quantità a , c , e saranno razionali , ed all'opposto trascendente quando una di esse sarà irrazionale. Dissi per lo più, perchè anche poste razionali le a , c , e , sarà però trascendente la curva , se sia $e = c$; o pure $a = 1 - \frac{e}{c}$; o $c = 1$, ed assieme $a = 1$; o $a = 0$,

ed assieme $e = 1$, ed in diversi altri casi, che non serve tutti accennare.



C A P O I V.

*Della riduzione delle Equazioni differenziali
del secondo grado.*

45. QUANDO le equazioni differenziali del secondo grado sono tali, che possano loro adattarsi le Regole spiegate dell'integrazioni sì ne' casi delle variabili separate, come in quelle, che sono miste, nulla occorre di più, che servirsi delle dette regole, e così per mezzo dell'integrazioni ridurle a' primi differenziali; e però intorno a ciò nient'altro fa d'uopo aggiungere. Che se poi le formole così ridotte al primo grado non averanno bene spesso separabili le indeterminate, nè saranno costruibili in verun modo, la colpa non sarà della maniera, con cui si sviluppano le seconde differenze, ma piuttosto di quella, con cui si maneggiano le prime.

Dovrà adunque versare la nostra industria circa il ridurre le equazioni *differenzio-differenziali* ad essere atte per le assegnate regole dell'integrazioni, il che si può tentare in più modi.

46. Una maniera potrà essere di servirsi de' soliti ripieghi dell'Algebra volgare trasponendo i termini, dividendoli, o moltiplicandoli per qualche quantità, ed altri simili. Ma prima d'ogn'altra cosa è necessario ricordarsi,

cordarsi, o sapere, se nel passare dalle prime alle seconde differenze siasi presa qualche flussione per costante, e quale sia stata; ed in oltre, che siccome nell'integrazioni dalle prime differenze alle quantità finite si aggiunge sempre la costante, così nulla meno deve si aggiungere nelle integrazioni dalle seconde alle prime differenze. Ciò posto, sia

ESEMPIO I.

Sia proposta l'equazione $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{du}$, in cui la $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ è l'elemento della curva, e si suppone costante; la scrivo così $\frac{by^m dy du}{c^m} = 2ayddx + adxdy$

Il primo membro, essendó costante du , è integrabile, quando anche si multiplichí, o si divida per qualunque funzione di y ; ed osservo, che lo farebbe pure il secondo, se si dividesse per $2\sqrt{y}$. Divido adunque tutta l'equazione per $2\sqrt{y}$, e sarà $\frac{by^m dy du}{2c^m \sqrt{y}} = 2ayddx + adxdy$, ed integrando sarà $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m}$

$adx\sqrt{y} + adu\sqrt{a}$, equazione ridotta alle prime differenze.

Nell'integrare ó aggiunta la du appunto, perchè è costante, e l'ó moltiplicata in $a\sqrt{a}$ per gli omogenei.

ESEM.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $f = \frac{dx^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, in cui si è presa

ydx per costante; la moltiplico per $2dy$, e farà $2fdy = \frac{2dx^2 dy - 2ydyddy}{y^3 dx^2}$, cioè $2fdy = \frac{2dy}{y^3} - \frac{2dyddy}{yydx^2}$, ed inte-

grando, per esser costante ydx , farà $\int 2fdy =$
 $-\frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yydx^2} + nyydx^2.$

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $f = \frac{du^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, in cui dx sia co-

stante, e du l'elemento della curva, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2} = du$.

Poichè dunque è costante dx , farà $dyddy = duddu$, e però sostituendo il valore di ddy nell'equazione, farà $f = \frac{dydu^2 - yduddu}{y^3 dydx^2}$, e moltiplicando per $2y$, $2fy =$

$\frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^3 dydx^2}$, cioè $2fdy = \frac{2ydydu^2}{y^3 dx^2} - \frac{2yyduddu}{y^3 dx^2}$,

ed integrando $2 \int f dy = - \frac{du^2}{yy dx^2} + n dx^2$.

In quest'altra maniera ancora: posto nell'equazione in luogo di du il suo valore, sarà essa $f = \frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{y^2 dx^2}$,

e moltiplicando per $2ydy$, $2fydy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^2 dx^2}$,

cioè $2fydy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^2 dx^2}$, ed integrando,

$$2 \int f dy = - \frac{dx^2 - dy^2 \pm n dx^2}{yy dx^2}.$$

ESEMPIO IV.

Sia l'equazione $adx = \frac{xyddy + xdy^2}{dx}$, in cui dx sia costante; moltiplicata per dx , e divisa per x sarà $\frac{adx^2}{x} = yddy + dy^2$, ed integrando, giacchè dx è costante, $adx \log x + Adx = ydy$. Che se farassi la costante aggiunta $A = a$, averassi $adx \log x + adx = ydy$, e passando avanti con l'integrazione, $ax \log x = \frac{yy}{2}$.

ESEM-

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $f = \frac{dx dy du^2 + y du^2 dx - y dx du du}{y dx dy dt^2}$,

in cui du è l'archetto della curva, dt è data per x , e per y , e nessuna flussione prima è stata presa per costante; la divido per $y^2 dx^2$, e la moltiplico per 2, e sarà $\frac{2f}{y^2 dx^2} = \frac{2 dx dy du^2 + 2 y du^2 dx - 2 y dx du du}{y^2 dx^2 dy dt^2}$, o sia

$$\frac{2 f dy dt^2}{y y dx^2} = \frac{2 y dx^2 dy du^2 + 2 y y du^2 dx dx - 2 y y dx^2 du du}{y^2 dx^2}$$

ed integrando, $2 \int \frac{f dy dt^2}{y y dx^2} = - \frac{du^2}{y y dx^2} \pm n$.

Ma si può ben dire, essere cosa impossibile, il fare uso di questo metodo nell'equazioni, le quali sieno alquanto composte, quando a un di presso già non si sapiano le integrazioni, che devono farsi, onde passerò ad altri metodi.

47. Nella soluzione de' Problemi passando dalle prime alle seconde differenze può tornare molto comodo il non assumere, qualora sia libero, flussione alcuna per costante, per potere quindi con la formola sotto l'occhio determinare quella tale costante, per cui l'espressione venga in tale modo ad abbreviarsi, che sia

facilmente integrabile. Gli esempi faranno meglio intendere il metodo.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $f = dy' + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy$,
 la quale siasi avuta senza assumere alcuna flussione costante. Per abbreviare questa formola: confidero, quale possa essere quella flussione, che presa per costante mi distrugga nell'omogeneo di comparazione due termini, due soli lasciandone, e trovo che due possono essere, cioè xdy , e $\frac{dx}{x}$.

Sia dunque $xdy = c$, e prese le differenze, $xddy + dxdy = 0$, e però anco moltiplicando per dx , $xdxddy + dx^2 dy = 0$, con che spariscono nell'omogeneo di comparazione dall'equazione principale il secondo, e quarto termine così, che si avrà $f = \frac{dy'}{2x^2 dy^2} - xdyddx$; ma
 essendo $xddy + dxdy = 0$, sarà $dy = -\frac{xddy}{dx}$, quindi
 sostituendo, sarà $f = -\frac{xdy^2 ddy}{2x^2 dx dy^2} - \frac{xdyddx}{2x^2 dy^2}$, cioè
 $f = -\frac{xdy^2 ddy - xdx dyddx}{2x^2 dx dy^2}$, o sia $f = -\frac{dyddy - dxddx}{2xxdx dy^2}$,
 ma

ma $x dy = c$, adunque $f = -\frac{dyddy}{2c dx} - \frac{dx ddx}{2c}$, e final-

mente $fdx = -\frac{dyddy}{2c} - \frac{dx ddx}{2c}$, ed integrando,

$$\int f dx = -\frac{dy^2}{4c} - \frac{dx^2}{2c} \pm n, \text{ o sia } \int f dx = -\frac{dy^2}{4c} - \frac{dx^2}{2c} \pm n.$$

Quando siasi giunto all'equazione $f = \frac{dy^2}{2x^2} - \frac{xdy ddx}{2x^2}$, si

può più brevemente passare all'integrazione multipli-

candola per dx , e disponendola così: $fdx = \frac{dx}{2x^2} - \frac{dx ddx}{2x^2}$,

mentre essendo $x dy$ costante, sarà $\int f dx = -\frac{1}{4x^2} -$

$\frac{dx^2}{4x^2 dy^2} \pm n$, come sopra.

Facciasi ora costante la quantità $\frac{dx}{x}$. Una tale sup-

posizione dando $\frac{xdx}{x^2} - \frac{dx^2}{x^2} = 0$, e però anco —

$\frac{xdy ddx}{x^2} + \frac{dx^2 dy}{x^2} = 0$, toglie il secondo, e terzo termi-

ne dall'equazione principale, e la muta in questa $f =$

$\frac{dy^2}{2x^2} + \frac{xdy ddy}{2x^2}$, e moltiplicando per dx , $fdx =$

$\frac{dx dy^2}{2x^2} + \frac{xdx^2 ddy}{2x^2}$, il di cui integrale, a cagione di $\frac{dx}{x}$,

o $\frac{dx^2}{xx}$ costante, si trova essere $\int f dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm u$,
come sopra.

48. Ma per sapere a un di presso, quale flussione possa prendersi per costante, si osservi, se nell'equazione proposta vi sieno due, tre, o più termini, i quali moltiplicati, o divisi per una quantità a loro comune, possano ridursi ad essere integrabili; indi fatta l'integrazione, la loro integrale si prenda per costante, e si proceda nel modo spiegato. Se non sempre, qualche volta almeno avremo l'intento.

Ripiglio l'equazione $f = \frac{dy^2 + dx^2 dy - xdydx + xdx dy}{2x^2 dy^2}$; osservo, che i due

termini $dx^2 dy + xdx dy$ divisi per dx rimangono $dx dy + xddy$, quantità integrabile, e che il suo integrale è $x dy$; ecco adunque, per qual cagione dovevasi prendere questa quantità per costante. Similmente osservo, che i due termini $dx^2 dy - xdydx$, se si dividono per $-x dy$, ci danno $-\frac{dx^2 + xdx}{x}$, quantità integrabile, il di cui

integrale è $\frac{dx}{x}$; potevasi adunque prendere per costante anche la flussione $\frac{dx}{x}$.

ESEMPIO.

Venga proposta la formola $xy \times dxdy - dydx = ydyx^2 - yydzdy^2 - xdx^2y^2$, in cui la variabile z è in qualunque modo data per y .

La dispongo così: $xydxddy + yydzdy^2 = yxdydx + ydyx^2 - xdx^2y^2$, ed osservo, che se si divida per $yydy$ l'omogeneo di comparazione, sarà egli $\frac{yxdydx + ydyx^2 - xdx^2y^2}{yy}$, il di cui integrale $\frac{xdx}{y}$. Pren-

do adunque per costante $\frac{xdx}{y}$, e però $\frac{xdx}{y} = c$, ed

$\frac{yxdydx + ydyx^2 - xdx^2y^2}{yy} = 0$, quindi la proposta equazio-

ne verrà ad essere $xydxddy + yydzdy^2 = 0$, cioè $dz = -\frac{xdx}{ydy}$, ed integrando, per essere $\frac{xdx}{y}$ costante,

$$z = \frac{xdx}{ydy} + n.$$

49. Quando in una equazione del secondo grado manca l'una, o l'altra delle due indeterminate con tutte le sue funzioni, e non entrano nella formola se non le sue differenze prime, o seconde in qual si sia modo com-

poste

poste, ed a qualunque dignità elevate, l'integrazione, o riduzione alle prime differenze sarà sempre in nostra mano per mezzo di una sostituzione. Questa sarà di porre la prima differenza, che fluisce, eguale ad una nuova incognita moltiplicata nella flussione assunta costante, o che si assuma ad arbitrio in caso, che nessuna fosse stata fissata costante. Per esempio: in una data equazione sia stata supposta dx variabile, e dy costante; si faccia $dx = pdy$, e prendendo le differenze nell'ipotesi di dy costante, $ddx = dpdy$. Fatta questa sostituzione in luogo di ddx , e maneggiata l'equazione, col sostituire i valori presi dall'equazione $dx = pdy$, si ridurrà sempre alle prime differenze.

O pure se tornasse più comodo, si ponga la prima flussione della variabile, che manca dall'equazione, eguale ad una nuova indeterminata moltiplicata nella prima flussione dell'altra. Fatte le debite sostituzioni, avendo riguardo alla flussione, che sarà stata presa costante, avremo l'equazione proposta ridotta alle prime differenze.

ESEMPIO I.

Sia di nuovo l'equazione dell'esempio primo del num. 46. $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{du dy}$, in cui è supposta co-

stante la du .

Fac-

Faccio pertanto $dx = pdu$, e differenziando, $dx = dpdu$, quindi surrogato questo valore, avremo $\frac{by^m}{c^m} =$

$\frac{2aydpdu + apdudy}{dudy}$, cioè $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydp + apdy}{dy}$, e però $\frac{by^m dy}{c^m} = 2aydp + apdy$, la qual equazione divisa per $2\sqrt{y}$

è integrabile, e l'integrale si è $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} = ap\sqrt{y} \pm g$;

ma $p = \frac{dx}{du}$, dunque $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} du = adx\sqrt{y} \pm gdu$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $fydydx^2 = -duddu$. La f è data per y , du è l'elemento della curva, ed ydx è la flussione presa costante. Faccio adunque $du = pydx$, e differenziando, $ddu = ydpdx$, e però fatte le sostituzioni, farà $fydydx^2 = -yypdpdx^2$, cioè $f dy = -pdp$; onde integrando, $2 \int f dy = -pp + 2m$, ma $pp = \frac{du^2}{yydx^2} =$

$\frac{dx^2 + dy^2}{yydx^2}$; fatte pertanto le sostituzioni, e la riduzione,

yy ne,

ne, averassi $dx = \frac{dy}{\sqrt{2my - 1 - 2yy \int f dy}}$;

$$\sqrt{2my - 1 - 2yy \int f dy}$$

Riduco ora la stessa equazione per mezzo dell'altra sostituzione indicata . Pongo adunque $dx = pdu$, e $ddx = \dot{a} pdu + pddu$, e però $ddu = \frac{ddx - dpdu}{p}$. Fatte le

sostituzioni , sarà l'equazione $fyppdydu^2 = - \frac{duddx + dpdu^2}{p}$, ma è stata assunta costante la flussio-

ne ydx , quindi avremo $yddx + dydx = 0$, cioè $ddx = - \frac{dx dy}{y}$, o sia $ddx = - \frac{pdudy}{y}$, e surrogato questo va-

lore ancora nell'equazione , sarà $fppyydy = \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p}$. Ciò

posto : passo avanti , e faccio $\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$, onde $py = q$,

e però $fqqdy = \frac{dq}{q}$, o sia $f dy = \frac{dq}{q}$, ed integrando ,

$$\int f dy = - \frac{1}{2qq} + m ; \text{ ma } qq = ppyy = \frac{yydx^2}{du^2} = \frac{yydx^2}{dx^2 + dy^2} ,$$

dunque sarà $2 \int f dy = - \frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2m$, da cui si ri-

cava , come sopra , $dx = \frac{dy}{\sqrt{2my - 1 - 2yy \int f dy}}$;

$$\sqrt{2my - 1 - 2yy \int f dy}$$

ESEM.

ESEMPIO III.

Ripiglio l'equazione dell'esempio 3. del num. 46. $fy^3 dx^2 = dx^2 + dy^2 - yddy$, in cui è costante dx , e pongo $dy = p dx$, e però $ddy = dp dx$, fatta la sostituzione, sarà $fy^3 dx^2 = dx^2 + dy^2 - ydp dx$, e fatta sparire la dx col valore $\frac{dy}{p}$, avremo $\frac{fy^3 dy^2}{p} = \frac{dy^2}{p} + dy^2 - \frac{y p dy dp}{p}$, e dividendo

per $y^3 dy$, sarà $f dy = \frac{dy}{y^3} + \frac{p dp}{y^3} - \frac{y p dp}{y^3}$, ed integrando,

$\int f dy = -\frac{1}{2yy} - \frac{pp}{2yy} + m$, e fatta la sostituzione in luogo di p del valore $\frac{dy}{dx}$, $\int f dy = -\frac{1}{2yy} - \frac{dy^2}{2yy dx^2} + m$,

cioè $2 \int f dy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yy dx^2} + 2m$, e però $dx =$

$$\frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}$$

50. Che se nella proposta equazione nessuna funzione sia stata presa per costante, una se ne prenda a piacere, e si operi come s'è fatto nel num. 48.

ESEMPIO.

Data l'equazione dell'esempio 5. num. 46., in cui nessuna flussione è assunta costante, cioè $fy^1 dydx^1 = dx dydu^2 + ydu^2 ddx - ydxduddu$ (posta ydx in luogo di dt), se si prenda costante dx , sparirà il termine $ydu^2 ddx$, e l'equazione sarà $fy^1 dydx^1 = dydu^2 - yduddu$, onde per ridurla dovrà porsi $du = p dx$, quindi $ddu = dp dx$. Surrogati questi valori, avremo $fy^1 dydx^1 = p p dydx^1 - y p d p dx^1$, cioè $fy^1 dy = p p dy - y p dp$, la quale equazione, per passare alle integrazioni, scrivo così: $fy^1 dy = p p y \times \frac{dy}{y} - \frac{dp}{p}$, quindi integrando col metodo del num.

24. dell' antecedente capo, $\int f dy = - \frac{p p}{2 y y} + m$; e re-

stituito il valore di p , $\int f dy = - \frac{du^2}{2 y y dx^2} + m$.

Se si prenda costante du , sparirà il termine $ydxduddu$, e l'equazione sarà $fy^1 dydx^1 = dx dydu^2 + ydu^2 ddx$, e però dovrà porsi $dx = p du$, $ddx = dp du$. Sostituiti questi valori, avremo $fy^1 dy \times p^1 du^1 = p dy du^1 + y dp du^1$, cioè $fy^1 dy = \frac{p dy}{p^1} + y dp$, e però integrando, sarà $\int f dy = - \frac{1}{2 p p y y} + m$,

e restituito il valore di p , $\int f dy = - \frac{du^2}{2yydx^2} + m$.

51. Il poterfi assumere una flussione a piacere per costante nelle equazioni, in cui nessuna sia già stata presa, può rendere capaci del metodo del num. 49. alcune equazioni, le quali, per avere ambedue le indeterminate finite, non lo sieno; e ciò assumendo tale flussione per costante, che faccia sparire tutti que' termini, ne' quali si trova l'una delle indeterminate finite, rimanendo quelli soli, che l'altra contengono.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $dx^3 - dx dy^2 = y dx ddx + 2x dy ddy$, in cui nessuna flussione è presa costante.

Se faremo costante dx , sparirà il primo termine dell'omogeneo di comparazione, e se faremo costante dy , sparirà l'ultimo; e sì nell'uno, che nell'altro caso una sola delle indeterminate rimane. Fisso adunque costante dx ; sarà l'equazione $dx^3 - dx dy^2 = 2x dy ddy$.

Pongo $dy = \frac{p dx}{a}$, $ddy = \frac{dp dx}{a}$; fatte le sostituzioni, sarà

$$dx^3 - \frac{pp dx^3}{aa} = \frac{2x p dp dx^3}{aa}, \text{ cioè } aadx - ppdx = 2x p dp,$$

o sia $\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa - pp}$; integrando adunque, sarà $lx =$

$-l \frac{aa - pp}{aa - pp} + lm$, e però $x = \frac{m}{aa - pp}$; e restituito in

luogo di p il suo valore $\frac{ady}{dx}$, sarà $x = \frac{m}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}$,

cioè $x = \frac{mdx^2}{aadx^2 - aady^2}$, o sia $mdx^2 = aadx^2 - aaxy^2$.

52. Ma quando il prendere una flussione a piacere per costante non serva per eliminare una delle due indeterminate finite, o la flussione costante sia già stata fissata, sicchè nell'equazione rimangano ambedue le indeterminate, fin'ora non è stato scoperto alcun metodo generale per procedere avanti.

I metodi spiegati possono avere tal volta il loro uso, siccome pure i soliti artifizj dell'Algebra comune con le moltiplicazioni, divisioni ec., come per esempio nell'equazione $xydy^2 = xddx - dx^2$, la quale divisa per xx farà $ydy^2 = \frac{xddx - dx^2}{xx}$, e però integrabile (supposta dy costante) e l'integrale è $\frac{yydy}{2} = \frac{dx}{x} + mdy$.

Tal'ora una sostituzione può rendere la proposta equazione soggetta al metodo del num. 49. Ed in fatti l'equazione $x^m ddx = yddy + dy^2 + yydy^2$, che non è sog-

soggetta al canone del suddetto numero, lo farà però se si faccia $ydy = dz$, onde sia $x^m ddx = ddz + dz^2$.

53. In caso poi, che nelle equazioni sia già stata assunta la flussione costante, può essere di molto uso il mutare l'equazione proposta in un'altra equivalente, in cui nessuna flussione sia costante. Per far ciò: sia l'equazione generale $dy = p dx$ (la p è una quantità data in qualunque modo per x , e per y) e sia dx costante, differenziando sarà $ddy = dp dx$; ma è $p = \frac{dy}{dx}$, dunque

differenziando senza alcuna flussione costante, sarà $dp = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}$, quindi surrogato questo valore in luogo

di dp nell'equazione $ddy = dp dx$, avremo $ddy = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$. Se pertanto in una qualunque proposta equazione, in cui sia costante dx , si ponga in luogo di ddy il valore $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$, sarà essa mutata in un'altra

equivalente, in cui nessuna flussione è costante.

Ma perchè frequentemente altre più composte flussioni si assumono, o sono state assunte per costanti, sarà bene rendere più universale questo metodo.

Sia adunque l'equazione generale $dy = m p dx$; (la p è similmente data in qualunque modo per x , e per y , ed m è una funzione qualunque di x , o di y , o di am-

be insieme) Sia costante mdx , differenziando sarà $ddy = m dx dp$; ma $p = \frac{dy}{mdx}$, e differenziando senza assumere costante, $dp = \frac{mdx ddy - dmdx dy - mdy dx}{mmdx^2}$, quindi sur-

rogato questo valore in luogo di dp nell'equazione $ddy = m dx dp$, avremo $ddy = \frac{mdx ddy - dmdx dy - mdy dx}{mdx}$.

Se pertanto in una qualunque proposta equazione, in cui sia costante mdx , si ponga in luogo di ddy il valore ritrovato $\frac{mdx ddy - dmdx dy - mdy dx}{mdx}$, sarà essa mutata in altra equivalente, in cui nessuna flussione è costante.

Rese in questa guisa compite le equazioni, cioè tali, che non abbiano flussione costante, per passare alla riduzione sarà in nostro arbitrio di prendere per costante quella, mediante la quale ci verrà fatto di ottenere l'intento.

ESEMPIO I.

Ci venga proposta l'equazione da ridurre $dx^2 dy - dy^2 = adx ddy + x dx ddy$, in cui è costante dx . Posto adunque in luogo di ddy il valore $\frac{dx ddy - dy dx}{dx}$,

(poi-

(poichè in questo caso $m = 1$, e $dm = 0$) sarà $dx^2 dy - dy^3 = adxddy - adyddx + xdxddy - xdyddx$, in cui nessuna flussione è costante, quindi fatta costante la dy , si trova essere $dx^2 + xddx + addx = dy^2$, ed integrando, $xdx + adx = ydy$, equazione all'iperbola.

E S E M P I O II.

Sia l'equazione $\frac{xdy^2 - xyddy - ydydx}{ydy} =$

$\frac{aadx - xxdx}{aa + xx}$, in cui sia stata presa costante la flussione

ydx . Per trasformarla in un'altra, in cui nessuna flussione sia costante, poichè in questo caso $m = y$, il valore della ddy da sostituirsi sarà $\frac{ydxddy - dx dy^2 - ydyddx}{ydx}$,

e però l'equazione

$$-\frac{xdy}{y} - dx - \frac{xydxddy + xdx dy^2 + xydyddx}{ydx dy} =$$

$\frac{aadx - xxdx}{aa + xx}$. Per ridurla, fissò per costante la flussione

xdy , in conseguenza di che sarà $xddy + dx dy = 0$, cioè $-ddy = \frac{dx dy}{x}$, e però fatta la sostituzione,

$$-\frac{xdy}{y} - dx + dx + \frac{xdy}{y} + \frac{xddx}{dx} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx},$$

ZZ

cioè

cioè — $\frac{ddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aax + x^2}$, ed integrando, — $l dx =$

$\int \frac{aa + xx}{x} - l x dy$ (fourraggo $l x dy$, per essere quantità costante), e togliendo i logaritmi, $\frac{1}{dx} = \frac{aa + xx}{x x dy}$, cioè $xx dy = aadx + x x dx$.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione — $\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$, e costante la flussione $y dx$. Pongo adunque in luogo di ddy il corrispondente valore $\frac{y dxddy - dx dy^2 - y dyddx}{y dx}$, farà — $\frac{dxddy}{dy} + \frac{dyddx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$, in cui nessuna flussione è costante, quindi presa costante dy , farà $x ddx = dx^2 + dy^2$, la quale equazione è il caso del num. 49., e però si fa ridurre.

54. Il metodo spiegato nell' antecedente capo al num. 24. può avere uso anche nelle equazioni differenzio-differenziali, procedendo a un di presso nella maniera ivi adoperata. Eccone la pratica in alcuni esempi.

ESEMPIO I.

Ripiglio la formola dell'esempio primo di questo capo $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, in cui $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ è

assunta costante, sarà $\frac{by^m dydu}{ac^m} = 2yddx + dx dy$; la pre-

paro nella seguente maniera: $\frac{ddx + dy}{dx \quad 2y} \times dx = \frac{by^m dydu}{ac^m \times 2y}$,

osservo, che le due quantità sotto la linea sono integrabili per via de' logaritmi; faccio adunque $\frac{ddx + dy}{dx \quad 2y} = \frac{dp}{p}$,

e però $l dx + l \sqrt{y} = l p + l du$ (aggiungo il logaritmo di du , per essere du costante) cioè $dx \sqrt{y} = p du$. Quindi sostituendo nella proposta equazione in luogo di $\frac{ddx + dy}{dx \quad 2y}$

il valore $\frac{dp}{p}$, ed in luogo di dx il valore $\frac{p du}{\sqrt{y}}$, sarà

$$\frac{dp du}{\sqrt{y}} = \frac{by^{m-1} dy du}{2ac^m}, \text{ o sia } dp = \frac{by^{m-\frac{1}{2}} dy}{2ac^m}, \text{ ed integrando,}$$

$$b + p = \frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2} \times 2ac^m}, \text{ ma } p = \frac{dx \sqrt{y}}{du}; \text{ e però finalmen-}$$

te $bdu + dx\sqrt{y} = \frac{bv^m + \frac{1}{2} du}{m + \frac{1}{2} \times 2ac^m}$, come nel citato esempio.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{ddx \sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{ydx - xdy}{xx+yy}$, in-

cui è costante $ydx - xdy$.

La seconda differenza ddx divisa per la costante $ydx - xdy$ ci dà quantità integrabile, e però scrivo l'equazione così: $\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{x \times ydx - xdy}{xx + yy \sqrt{xx + yy}}$. Ma,

osservo, che nel secondo membro la quantità $ydx - xdy$ è sommabile, quando si divida per yy , adunque preparo l'equazione secondo il metodo, e farà

$\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xyy}{xx + yy \sqrt{xx + yy}} \times \frac{ydx - xdy}{yy}$. Pongo

$\frac{ydx - xdy}{yy} = dp$, ed integrando, $\frac{x}{y} = p$, quindi fatta la

sostituzione, avremo $\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xyydp}{xx + yy \sqrt{xx + yy}}$,

da cui si farà svanire la x , o la y per mezzo dell'equazione

zione $\frac{x}{y} = p$. Facciassi sparire dal secondo membro la x , collocando il suo valore py , averassi $\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{pdp}{aa + pp}$, e passando all'integrazione, sarà $\frac{dx}{ydx - xdy} = \frac{1}{\sqrt{aa + pp}}$, cioè $\frac{dx}{ydx - xdy} = \frac{1}{\sqrt{aayy + xx}}$, restituendo in luogo di p il suo valore $\frac{x}{y}$.

In questa integrazione potevasi aggiungere la costante $ydx - xdy$, ma o si aggiunga, o si ometta, la integrazione dalle prime differenze alle quantità finite, nell'uno, e nell'altro caso ci dà sempre le sezioni coniche.

55. Disfi al num. 52., che quando le equazioni differenzio-differenziali contengano ambedue le variabili, non vi è metodo generale per ridurle; uno però se ne può assegnare, il quale sebbene non serve per tutte, è molto universale nel genere suo, ed abbraccia tutte le infinite equazioni, che a tre canoni si rapportano. Mediante questo metodo le date equazioni si trasmutano in altre, nelle quali manca l'una delle due variabili, e che

per

per conseguenza si fanno maneggiare col metodo del num. 49.

Il primo canone comprende quelle, che sono di due soli termini, e vengono espresse dalla formola generale $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, in cui sia presa dx costante. Per ridurre questa equazione, pongo $x = c^{bu}$, ed $y = c^{at}$; la c è un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, b è un arbitraria da fissarsi nel progresso, ed u, t sono due nuove variabili. Poichè $x = c^{bu}$, ed $y = c^{at}$, per le regole del calcolo esponenziale sarà $dx = bc^{bu} du$, $ddx = bc^{bu} \times ddu + bdu^2$, $dy = c^a dt + c^a tdu$, $ddy = c^a \times ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu$. Ma posta costante dx , si à $ddx = 0$, e però $bc^{bu} \times ddu + bdu^2 = 0$, cioè $ddu = -bdu^2$, il che sostituito in luogo di ddu nel valore di ddy , sarà $ddy = c^a \times ddt + 2dtdu + 1 - b \times tdu^2$. Sostituiti nella proposta equazione, in luogo di x , ed y , e suoi differenziali, i rispettivi valori, si muterà essa in quest'altra $ac^{bm} \times b^p \times c^{bp} du^p =$

$$c^{mu} t^n \times c^u dt + c^u tdu \times c^u \times ddt + 2dtdu + 1 - b \times tdu^2,$$

$$\text{cioè } ac^{bu \times m + p} b^p du^p = c^{n+p-1} \times u \times t^n \times dt + tdu \times ddt + 2dtdu + 1 - b \times tdu^2$$

Ma per liberare questa equazione dalle quantità esponenziali, cioè per togliere da essa la c , converrà che

sia

fia $n + p - 1 = bm + bp$, con che si determina il valore dell'affunta b , cioè $b = \frac{n + p - 1}{m + p}$, quindi l'equazione

$$\text{farà } a \times \frac{\frac{p}{n + p - 1} du^p}{\frac{p}{m + p}} =$$

$$x^n \times \frac{p-2}{dt + tdu} \times \frac{ddt + 2tdtdu + \frac{m-n+1}{m+p} \times tdu^2}{}, \text{ la}$$

quale, perchè contiene una sola delle variabili finite, cioè la t , viene ad esser soggetta alla regola del sopracitato num. 49.

Poichè adunque si trova il valore di $b = \frac{n + p - 1}{m + p}$,

tosto apparisce, quali sostituzioni dovevano farsi da principio, cioè $x = c^{\frac{n + p - 1}{m + p} \times u}$, ed $y = c^u t$ per ottenere l'intento.

Passando avanti con l'operazione, giusta il metodo del num. 49., pongo $du = zdt$, e però $ddu = zddt + dzdt$, ma la supposizione di dx costante ci ha dato $ddu = -bdu^2$, cioè $ddu = \frac{1 - n - p}{m + p} \times zzdt^2$; adunque

$$\text{averemo } \frac{1 - n - p}{m + p} \times zzdt^2 = zddt + dt dz, \text{ quindi } ddt =$$

$$\frac{1 - n - p}{m + p} \times zdt^2 - \frac{dt dz}{z}$$

zione,

zione, in luogo di du , e ddt , i rispettivi valori, farà

$$a \times \frac{n+p-1}{m+p} \times z^p ddt =$$

$$t^n \times dt + zt dt \times \frac{p-2}{p+m} \times \frac{1-n-p}{z} \times z dt^2 - \frac{dtdz + 2z dt^2 + m-n+1}{m+p} \times z z dt^2,$$

o sia dividendo per dt^{p-1} , e moltiplicando per z ,

$$a \times \frac{n+p-1}{m+p} \times z^{p-1} dt =$$

$$t^n \times 1 + tz \times \frac{p-2}{m+p} \times \frac{1-n-p}{m+p} \times z z dt + \frac{m-n+1}{m+p} \times tz^2 dt - dz,$$

la quale equazione è ridotta alle prime differenze. E' facile a vedere, che per ridurre sul bel principio l'equa-

zione, bastava porre $x = c \frac{n+p-1}{m+p} \times \int z dt$, ed $y = c \int z dt$.

In questa generale equazione, che ô ridotta, ô supposta costante la flussione dx ; ciò non ostante però non farà difficoltà alcuna al metodo, che in una qualunque proposta equazione altra flussione diversa da dx sia presa costante, poichè col metodo del num. 53. si potrà mutare la proposta equazione in altra equivalente, in cui nessuna flussione sia costante, per indi poi fissare costante la suddetta dx .

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $x dx dy = y dy$, in cui è costante dx ; la scrivo così: $x dx = y dy^{-1} dy$. Paragonata questa con la canonica, farà $a = 1$, $m = 1$, $p = 1$, $n = 1$, quindi surrogati questi valori nell'equazione generale differenziale del primo grado di sopra ritrovata, avremo

$$\frac{1}{2} z z dt = \frac{1}{1+tz} \times \frac{1}{2} z z dt + \frac{1}{2} t z' dt - dz.$$

ESEMPIO II.

Sia $p = 1$, $n = -1$, $m = -1$, cioè l'equazione $ax^{-1} dx = y^{-1} dy^{-1} dy$, o sia $\frac{adx}{x} = \frac{ddy}{ydy}$, in cui è costante la flussione dx . Rispetto a questa sarà inutile il metodo, poichè si avrà $p + m = 0$, ed in conseguenza infinito ciascuno de' termini dell'equazione generale differenziale del primo grado, a riserva dell'ultimo.

Ma in questo caso, senz'altro artificio, è facile la riduzione. Scrivo adunque l'equazione così: $x dy = a y dy dx$, ma l'integrale del primo membro è $x dy - y dx$, quello del secondo è $\frac{a y y dx}{2}$; dunque $x dy - y dx = \frac{a y y dx}{2} \pm b dx$.

56. Il secondo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali la somma degli esponenti delle indeterminate, e dei loro differenziali sia in ciascun termine la stessa. Supposte x , ed y le due indeterminate, e dx costante, si riducono queste al caso del num. 49. col porre $x = c^u$, ed $y = c^t$, essendo parimente c un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, e le u , t due nuove indeterminate. Per far vedere il metodo, prendo l'equazione $ax^m y^{n-p} dx^p dy^q + bx^m y^{n-q} dx^q dy^p + c^m dy^2 = ddy$, la quale, sebbene è di una sola dimensione, e di tre soli termini, ciò nonostante il metodo è generale, e serve, quanti si sieno i termini, e qualunque la dimensione, purchè vi sia la condizione notata.

Pongo adunque $x = c^u$, $y = c^t$, sarà $dx = c^u du$, e perchè dx è costante, avremo $c^u ddu + c^u du^2 = 0$, cioè $ddu = -du^2$; sarà pure $dy = c^t dt + c^t tdu$, $ddy = c^t \times ddt + 2dudt + tdu^2 + tddu$, ma $ddu = -du^2$, adunque $ddy = c^t \times ddt + 2dudt$. Sostituiti pertanto questi valori nella proposta equazione, sarà essa

$$ac^{m-p} du^p \times \frac{dt + tdu}{c^t}^{1-p} + bc^{m-q} du^q \times \frac{dt + tdu}{c^t}^{1-q} = ddt + 2dudt.$$

Perchè adunque manca in questa la indeterminata u , si potrà procedere avanti col metodo del suddetto num. 49.

Faccio

Faccio $du = zdt$, sarà $dda = dzdt + zdt$, ma
 $dzu = -du^2 = -zzdt^2$, adunque $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$,
 quindi surrogati questi valori, avremo

$$at^{-m-1}z^p dt^p \times \frac{z^{-p}}{1+z} + bt^{-n-1}z^q dt^q \times \frac{z^{-q}}{1+z} =$$

$$-\frac{dzdt}{z} + zdt^2, \text{ o sia } at^{-m-1}z^p dt^p \times \frac{z^{-p}}{1+z} +$$

$$bt^{-n-1}z^q dt^q \times \frac{z^{-q}}{1+z} = -\frac{dz}{z} + zdt, \text{ equazione dif-}$$

ferenziale del primo grado. Da ciò si vede, che da
 principio potevasi ridurre la proposta equazione ponen-
 do $x = c^{\int zdt}$, ed $y = c^{\int zdt}$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $xdxdy - ydx^2 = yyddy$.

Per rapportarla alla canonica, la scrivo così:
 $xy^{-1}dxdy - y^{-1}dx^2 = ddy$, sarà dunque $a=1, m=1,$
 $p=1, n=0, b=-1, q=2$; quindi surrogati questi
 valori nell'equazione canonica differenziale qui sopra ri-
 trovata, avremo l'equazione ridotta $t^{-1}zdt \times \frac{1}{1+z} -$
 $t^{-1}zzdt = -\frac{dz}{z} + zdt$, o sia $\frac{zdt}{1+z} - \frac{zzdt}{1} =$
 $-\frac{dz}{z} + zdt$, cioè $zzdt - zttdt = -tdz$.

Passando avanti per l'integrazione, sarà $t dt - dt = \frac{dz}{zz}$, e però integrando, $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + f$, (la f è la costante aggiunta per l'integrazione) cioè $tz + z = -t + ftz$, ma per le sostituzioni $z = \frac{du}{dt}$, $x = c^u$, $y = c^u t$, sarà $du = \frac{dx}{x}$, $t = \frac{y}{x}$, $dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$, e però $z = \frac{xdx}{xdy - ydx}$, quindi surrogati i valori di t , e di z , avremo $\frac{xdy - ydx}{ydx} = f$.

57. Il terzo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali l'una delle due variabili, qualunque siasi, assieme con i suoi differenziali forma in ogni termine perpetuamente un medesimo numero di dimensioni. Ma bisogna distinguere due casi; l'uno quando sia costante il differenziale di essa variabile, che forma il medesimo numero di dimensioni; l'altro quando sia costante il differenziale dell'altra.

E quanto al primo caso: sia l'equazione canonica $P x^m dy^{m+1} + Q x^{m-n} dx^n dy^{m+1-n} = dx^m ddy$, in cui la somma degli esponenti di x , e di dx in ogni termine è la stessa; P , Q sieno funzioni qualunque della y , e dx sia costante. Per ridurre questa equazione, si

fac-

cia $x = c^u$, essendo parimente c un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, ed u una nuova variabile. Sarà adunque $dx = c^u du$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $c^u ddu + c^u du^2 = 0$, cioè $ddu = -du^2$. Sostituiti questi valori nell'equazione, avremo $P dy^{m+2} + Q du^m dy^{m+2} - du^m ddy$, la quale, perchè non contiene la u , sarà soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque $du = zdy$, sarà $ddu = dzdy + zddy$, ma $ddu = -du^2$, e $du^2 = zzdy^2$, adunque avremo $zddy + dzdy = -zzdy^2$, e però $ddy = \frac{-zzdy^2 - dzdy}{z}$.

Sostituiti pertanto nella ritrovata equazione questi valori di du , e ddy , sarà

$P dy^{m+2} + Q z^m dy^{m+2} - z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m+1} dy^{m+1} dz$, e dividendo per dy^{m+1} ,

$P dy + Q z^m dy = -z^{m+1} dy - z^{m+1} dz$, equazione del primo grado. Potevasi adunque sul bel principio porre

$x = c^{\int z dy}$, e così in un sol colpo ridurre l'equazione.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $zadx^2dy + axdxddy = zxdxdy^2 + zxxdyddy$, in cui sia costante dx . Pongo adunque $x = c$, e però $dx = zdy$; $ddx = \frac{dzdy}{z}$ $\times z z dy^2 + z ddy + dydz$, ma dx è costante, dunque $z z dy^2 + z ddy + dzdy = 0$, e però $ddy = -\frac{z z dy^2 + dzdy}{z}$.

Sostituiti adunque nell'equazione i valori di x , e di dx , avremo $zazzdy^3 + azdyddy = z z dy^3 + z ddydy$, e posto il valore di ddy , $zazzdy^3 + azdy \times -\frac{z z dy^2 + dzdy}{z} = z z dy^3 + z dy \times -\frac{z z dy^2 + dzdy}{z}$, cioè dividendo per dy^3 , $az'dy - az'dz = -zdz$, o sia $ady = \frac{azdz - zdz}{z^2}$, ed integrando, $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{z^2}$, e finalmente restituendo il

valore di z dato dalla supposizione fatta di $x = c$, cioè $z = \frac{dx}{x dy}$, avremo l'equazione ridotta

$$aydx^2 = xx dy^2 - ax dx dy.$$

58. Rispetto al secondo caso, sia l'equazione canonica $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$, in cui sia costante dy , e P, Q sieno funzioni qualunque di y .

Pongo, come sopra, $x = c^u$, e però $dx = c^u du$, $ddx = c^u ddu + c^u du^2$. Fatte le sostituzioni nell'equazione canonica, avremo $P dy^{m+1} + Q du^n dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1} ddu$, la quale, per non contenere la u , è soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque $du = z dy$, quindi essendo costante dy , sarà $ddu = dz dy$, e però fatte le sostituzioni, avremo $P dy^{m+1} + Q z^n dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$, e dividendo per dy^m , $P dy + Q z^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$, equazione del primo grado, la quale potevasi in un sol colpo ridurre ponendo, come sopra, $x = c^{\int z dy}$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $z dx dy = a ddx - y ddx$, in cui sia costante dy . Pongo adunque $x = c^{\int z dy}$, quindi $dx = c^{\int z dy} z dy$, $ddx = c^{\int z dy} (z dz + z dy dz)$; ma

fi

si suppone costante dy , dunque $ddy = 0$, e però $dlx = \int ady \times zdy + dzdy$. Fatte pertanto nella proposta equazione le sostituzioni, avremo $zdy^2 = azdy^2 + adzdy - zzydy^2 - ydydz$, e dividendo per dy , $zdy = azdy + adz - zzydy - ydz$, equazione differenziale del primo grado.

Per passare alla integrazione, divido l'equazione per $az - yz$, onde sia $\frac{zdy}{az - yz} = \frac{zdy}{az - yz} + \frac{dz}{az - yz}$, o pure

$$\frac{zdy}{az - yz} - \frac{dz}{az - yz} = \frac{zdy}{az - yz}, \text{ quindi facendo uso del metodo del num. 24. , se così piace, ed integrando, avremo } \frac{1}{az - yz} = -\frac{1}{a - y} + m, \text{ e finalmente restituendo}$$

$$\frac{1}{az - yz} \times z$$

il valore di $z = \frac{dx}{x dy}$, avremo l'equazione ridotta.

$$ydx + xdy = adx, \text{ trascurando la costante } m \text{ aggiunta nell'integrazione.}$$

A servito quest' esempio per l'applicazione del metodo, per altro erano superflue tante operazioni, mentre l'equazione $zdx dy = addx - yddx$ si riduce in un batter d'occhio, trasportando il termine $yddx$, e scrivendo $zdx dy + yddx = addx$, poichè essendo costan-

te dy , l'integrale del primo membro è $ydx + xdy$, come è chiaro.

59. Oltre a ciò, che è stato detto intorno alle equazioni differenzio-differenziali, nelle quali nessuna prima flussione sia stata presa costante, si può aggiungere un' altro metodo più universale, il quale serve per tutte quelle, che sono comprese sotto la formola canonica $z^{m+1}dx^mddx + \frac{dz}{z}dy^{m+1} = dy^mddy$, in cui la z è in qualunque modo data per le funzioni di x , e di y .

Per ridurre questa, si determini per costante la flussione $\frac{dx}{q}$, e sia pure la q in qualunque modo data per le funzioni di x , e di y ; indi si ponga $\frac{dx}{q} = dp$. Poichè $\frac{dx}{q}$ è costante, sarà differenziando, $qddx - dx'q = 0$, cioè $ddx = \frac{dx dq}{q}$, o sia, posto in luogo di $\frac{dx}{q}$ il valore dp , $ddx = dqdp$. In oltre si ponga $dy = udp$, e prese le seconde differenze nell'ipotesi di dp costante, per esser eguale alla costante $\frac{dx}{q}$, sarà $dly = du dp$. Surrogati adunque nell'equazione canonica i valori così determinati in luogo di dx , ddx , dy ,
bbb c

e ddy , avremo l'equazione $z^{m+1} q^m dq dp^{m+1} + u^{m+1} dz dp^{m+1} = u^m du dp^{m+1}$, e dividendo per dp^{m+1} ,

farà $z^{m+1} q^m dz + \frac{u^{m+1} dz}{z} = u^m du$, o sia $q^m dz =$

$\frac{zu^m du - u^{m+1} dz}{z^{m+1}}$, ed integrando, $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g =$

$\frac{u^{m+1}}{m+1}$, e però $u = z \times q^{m+1} + m+1 \times g^{m+1}$.

$m+1 \times z^{m+1}$

Ma $u = \frac{dy}{dp} = \frac{q dy}{dx}$, adunque $\frac{q dy}{dx} =$

$z \times q^{m+1} + m+1 \times g^{m+1}$, equazione ridotta alle prime differenze.

60. Intorno a quest'ultima equazione è da offer-
varsi, che se la quantità z sarà in tal modo data per x ,
e per y , che possa assegnarsi alla quantità q un valor
tale, dato pure per x , e per y , onde in essa equa-
zione sieno separabili le indeterminate, e però costru-
bile, o algebricamente, o almeno per le quadratu-
re, avremo la curva, da cui dipende l'equazione
differenzio-differenziale. E perchè molti possono essere
i valori da assegnarsi alla q , molte potranno essere le
curve, e ciascun valore della q ci somministrerà una
diversa curva o trascendente, o algebrica, la quale
soddisfa alla questione.

Sia

Sia l'equazione

$$x^2 y d x d d x + 2 x a y d x d y + a a x d y^2 = a a d y d d y$$

Riferendo questa alla canonica, sarà $m=1$, $z = \frac{xxy}{aa}$

e però la ridotta $\frac{qdy}{dx} = \frac{xy}{aa} \times \frac{1}{qq + 2gg}^{\frac{1}{2}}$.

Prendo la $q = x$; sarà $\frac{xdy}{dx} = \frac{xy}{aa} \sqrt{xx + 2gg}$, cioè $\frac{aady}{y} = xdx \sqrt{xx + 2gg}$, il di cui integrale dipende in parte dalla quadratura dell'iperbola, e la curva sarà trascendente.

61. Nel fare passaggio dalle prime alle seconde differenze, o non si assume flussione alcuna per costante, o si assume quella, che più si vuole, come è stato detto; quindi nel ricercare le sommatorie delle formole del secondo grado, poichè si fa qual partito sia stato preso, si fa altresì come governarsi, e ne sono state spiegate le regole.

Ma vi sono infiniti Problemi, che portano alle seconde differenze senza, che si sappia quali costanti involvano le formole indi nascenti. Accade tal volta, che all'espressione analitica arrivare non si possa senza valersi delle costanti, e succede altresì talora, che l'e-

quazione si sviluppi senza ricorrere alle costanti . Questi due casi adunque devono essere esaminati , e deve si procurare qualche criterio per distinguere l'uno dall'altro . E perchè meglio di ogni altra cosa possono servire gli Esempj , prendo il seguente .

Si dimanda una curva tale , che la di lei affissa , elevata a qual si sia dignità sia direttamente , come la seconda differenza dell'ordinata , e reciprocamente come la seconda differenza dell'affissa medesima . Avremo dunque l'analogia x^m , $\frac{ddy}{ddx} :: a , b$; e per conse-

guenza l'equazione $bx^m ddx = addy$. In questa equazione osservo ambe le differenze seconde dell'affissa , e dell'ordinata ; ma non so , quale costante sia stata assunta , o se non siasi assunta costante alcuna , e perciò non so la strada , per cui incamminarmi .

Nel caso della premessa equazione dico , che nessuna curva fra le possibili soddisfa al Problema , mentre si faccia passaggio dalle prime alle seconde differenze senza valersi delle costanti . All'opposto , determinate le costanti , si ritroveranno le curve , che adempiono le condizioni del Problema , ma infinite di numero , e differenti di natura , siccome quelle , che variano al mutarsi della costante arbitraria , che si assume .

Per distinguere l'una dall'altra specie di queste equazioni

zioni si può far uso della maniera, o canone, che nascerà da' seguenti esempj, e servirà in tutti que' casi, nei quali il calcolo integrale non ci abbandona.

ESEMPIO I.

Venga proposta l'equazione

$$z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} = dy^m ddy; \text{ dico essere que-}$$

sta una di quelle tali formole, alle quali si può giungere senza pigliare quantità alcuna in figura di costante. La variabile z sia data in qualunque modo per x , ed y .

La dimostrazione si renderà generale, per quanto si può, pigliando come costante la flussione $\frac{dx}{q}$, in cui q è una funzione di x , ed y in qualunque modo combinate. Pongo per tanto $\frac{dx}{q} = dp$, e giacchè il primo membro di questa equazione è costante, farà tale anche il secondo dp ; per lo che essendo $dx = qdp$, se si passi alle seconde differenze, farà $ddx = dqdp$.

Appresso facciasi $dy = udp$, e prese le seconde differenze nell'ipotesi di dp costante, averassi $ddy = du dp$. Quindi surrogati nella equazione principale i valori così

de-

determinati, nascerà l'equazione $z^{m+1} q^m dq dp^{m+1} + u^{m+1} dz dp^{m+1} = u^m du dp^{m+1}$, e dividendo per dp^{m+1} ,

z

nascerà l'equazione libera dall'incognita p , e dalle sue funzioni, cioè $z^{m+1} q^m dq + \frac{u^{m+1} dz}{z} = u^m du$. Sommando

z

adunque, per le spiegate regole, non ommessa l'addizione della costante g , $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{m+1 \times z^{m+1}}$, la qua-

le equazione ci dà $u = z \times q^{m+1} + gm + g^{m+1}$. E poichè $dy = u dp = \frac{u dx}{q}$, fatte le opportune sostituzioni, ci si presen-

q

ta l'equazione al più semplice stato ridotta, cioè

$$dy = \frac{z dx}{q} \times \frac{q^{m+1} + gm + g^{m+1}}{q}, \text{ il che ec.}$$

Dalla premessa maniera d'operare si deducono i seguenti Corollarj.

I. Se determinata la grandezza z , l'ultima equazione si costruirà, almeno per le quadrature, mentre ciò possa eseguirsi è manifesto, che infinite curve rispondono alla nostra formola, le quali cangiano natura alla mutazione della flussione costante assunta $\frac{dx}{q}$, ed ogni valore della

quantità q ci somministra una nuova equazione locale o algebrica, o trascendente.

II. Benchè alterato il valore della spezie q , nascano curve diverse, certo è però, che se pongasi la costante aggiunta $g=0$, averassi sempre l'equazione $dy=zdx$. In questo caso nulla rileva, quale differenza $\frac{dx}{q}$ siati presa per costante; conciosiacchè collo sparire della data g , anche la variabile q si dilegua.

III. Ed ecco il segno, onde si conosce, che alla nostra equazione primaria si perviene senza assumere costante flussione alcuna, e che in tale supposizione la sua sommatoria si è $zdx=dy$. Di fatto richiamata sotto gli occhj la nostra espressione $z^{m+1}dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} - dy^m ddy = 0$, e di bel nuovo differenziando l'integrale $zdx=dy$, senza assumere alcuna costante, onde si abbia $zddx + dzdx = ddy$, se con il mezzo di queste due ultime equazioni farassi svanire nella formola principale, prima la dy , poscia la dx con le loro funzioni, si scoprirà

$$z^{m+1}dx^m ddx + z^m dzdx^{m+1} - z^{m+1}dx^m ddx - z^m dzdx^{m+1} = 0,$$

$$dy^m ddy - \frac{dz}{z} dy^{m+1} + \frac{dz}{z} dy^{m+1} - dy^m ddy = 0.$$

IV. Maneggiata la formola primaria, come sopra, ed essendosi ritrovata l'equazione ridotta al primo grado, cioè

cioè $dy = \frac{zdx}{q} \times \frac{1}{q^{m+1} + g^m + g^{m+1}}$, si dovrebbe fare

transito alle integrazioni, le quali alle volte sono superiori alla nostra industria, secondo i varj valori dell'esponente m della frazione z data per x , e per y , e della quantità $\frac{dx}{q}$, che si piglia per costante. Comunque vada la facenda, determinati in infiniti casi particolari i predetti valori, e scoperta l'equazione locale della curva in termini finiti, quando si passi alle prime, indi alle seconde differenze, tenuta ferma la costante $\frac{dx}{q}$, ci si presenterà la nostra formola principale. Ma mutata costante, altre, ed altre formole si troveranno. Non mi fermo di più, perchè ciò è manifesto tornando indietro per le vestigia dell'Analisi.

V. Interviene lo stesso, tolta per costante la prima flussione $\frac{dy}{q}$; conciosiacchè fatta l'operazione a norma del metodo, la quale io tralascio per brevità, arriverassi all'equazione ridotta $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q} \times \frac{1}{mg + g^{m+1}}$, in cui parimente si noti, che fatta $g = 0$, torna a restituirsi l'equazione $dx = \frac{dy}{z}$ espressa per le prime differenze.

VI. Adoperate alcune limitazioni più semplici, cioè $m = 1$, $z = xx$, e $q = x$, se si farà uso della costante $\frac{dx}{q}$, come nel Corollario IV., la formola

$$\frac{dy}{q} = \frac{z dx}{q^{m+1} + g m + g^{m+1}} \quad \text{si muta nella se-}$$

guente $dy = x dx \sqrt{xx + 2g}$, la quale ammette integrazione analitica. Fatto poi uso della espressione contenu-

ta nel Corollario V. $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q} \times \frac{1}{mg + g^{m+1}}$ nascente dalla costante assunta $\frac{dy}{q}$, tenute ferme le mede-

sime limitazioni di $m = 1$, $z = xx$, e $q = x$, risulta l'espressione $\frac{xx dx}{1 - x \sqrt{2g}} = dy$, che senza l'ajuto de' lo-

garitmi non è sommabile, ed in conseguenza ci dà curve trascendenti.

Egli è adunque manifesto, che alla formola differenziale del secondo ordine $z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} dy^{m+1} =$

$dy^m ddy$ si poteva arrivare senza prendere alcuna costante, nel qual caso à luogo l'integrale $z dx = dy$; ovvero fissando per costanti, a cagion d'esempio, le flussioni $\frac{dx}{q}$, $\frac{dy}{q}$, ed allora ci si fanno avanti le sommatorie,

ccc

che

che in tali supposizioni si sono ritrovate.

ESEMPIO II.

Abbiassi l'equazione $x^m dx = dy + dy^2$. Dico, che ad essa non si può arrivare, senza prendere una qualche costante, salvo l'unico caso, in cui sia $m = -1$. Per vederlo chiaramente; maneggio la formola nel seguente modo.

Primieramente prendo per costante dx , e però $ddx = 0$, dunque $-\frac{ddy}{dy} = dy$, ed integrando $\int \frac{dx}{dy} = y$, ovvero $\frac{dx}{dy} = cy$. Pongasi $cy = z$, sarà $ylc = lz$, e però $dy = \frac{dz}{z}$, e sostituendo in luogo di dy questo valore, avrassi $\frac{zdx}{dz} = cy$, ma $cy = z$, dunque $dx = dz$, ed $x = z = cy$; e però $\frac{dx}{x} = dy$, equazione alla logaritmica.

Secondariamente mi faccio ad investigare, cosa succeda nell'ipotesi di un'altra costante, per esempio dy , e però $ddy = 0$. Pongo $dx = sdy + cdy$; la s è una nuova variabile, e la c una quantità data. M'intendo

alle

alle seconde differenze, sarà $dx = ds dy$, e fatta la sostituzione, $x^m ds dy = dy^2$, o sia $x^m ds = dy$; ma $dy = \frac{dx}{s+c}$,

dunque $s ds + c ds = x^{-m} dx$, e sommando, ommessa l'aggiunta della costante, $\frac{ss + cs}{2} = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$, ovvero

$$s+c = \sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}. \text{ Ma } dx = s+c \times dy =$$

$$dy \sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}, \text{ dunque } \frac{dx}{\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}} = dy.$$

Profeguisco, e cerco, se sia per avventura nascosta sotto l'ultima formola la logaritmica, che essendosi di sopra ritrovata nell'ipotesi della costante dx , può essere, che abbia luogo anche nell'altra supposizione della costante dy . Fatta $c=0$, è d'uopo, che si verifichi l'uguaglianza

$$\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1}} = x, \text{ o pure } 2x^{-m+1} =$$

$\frac{-m+1}{-m+1} \times xx$. E perchè sia falsa l'egualità, la stessa quantità $-m+1$ deve essere, tanto nel coefficiente, quanto nell'esponente, $=2$; onde ne segue, che ciò s'ottiene, determinato l'indice $m = -1$.

Nella formola adunque $x^m ddx = ddy + dy^2$, limitando il valore dell'esponente $m = -1$, si perviene all'equazione differenziale del secondo grado senza assumere costante, la di cui sommatoria è l'espressione logaritmica $\frac{dx}{x} = dy$. In ogni altro caso non si può otte-

nere la premessa espressione, se non fissando qualche grandezza infinitesima del primo ordine, siccome costante.

ESEMPIO III.

Rimane, che si proponga per ultimo una equazione differenziale dell'altra classe, a cui non si possa mai giungere senza assumere una costante.

Ripiglio il Problema: Costruire una curva, in cui qualsivoglia dignità dell'assissa stia in ragione diretta della seconda flussione dell'ordinata, ed inversa della seconda flussione dell'assissa.

L'equazione è $bx^m ddx = addy$. Facciasi $dx = qdp$, $dy = udp$; e praticate le operazioni, come nell'Esempio primo, avremo, prese le seconde differenze, $ddx = dpdq$, $ddy = du dp$, e surrogati i valori, $bx^m dq = adu$,

e sommando, $\int bx^m dq = au \pm g$. Ma $dy = u dp = \frac{u dx}{q}$,

dunque $dy = \frac{dx}{q} \int x^m dq \pm \frac{g dx}{q}$. In questo caso, fatta

$g = 0$, qual si sia valore della spezie q ci dà una curva differente, se pure non si ponesse l'esponente $m = 0$, con che si distrugge l'ipotesi, e si cangia problema. Lo stesso dicasi, fatta costante la frazione $\frac{dy}{q}$, e da ciò

si conchiuda, non esser possibile un'equazione differenziale del primo grado, che senza il beneficio della costante restituisca la nostra formola, quando di bel nuovo venga differenziata; conciosiacchè, se vi fosse, avrebbe a manifestarsi in qualunque assunzione di costante, e pure l'analisi ci dimostra il contrario.

PROBLEMA I.

62. *Dato il raggio osculatore in qual si sia modo per l'ordinata dalla curva, ritrovare la curva.*

Siccome, data la curva, il ritrovare il di lei raggio osculatore si chiama il problema, o metodo diretto de' raggi osculatori, di cui si è trattato al Capo V.

del

del Libro secondo; così, dato il raggio osculatore, ritrovare, quale sia la curva, a cui egli appartiene, si chiama il problema inverso de' raggi osculatori. Sia pertanto il raggio osculatore $= r$ dato in qualsivoglia modo per la ordinata y della curva; presa quella, che si vuole, delle formole de' raggi osculatori per le curve in primo luogo riferite al fuoco, per esempio

$$\frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}, \text{ in cui } dx \text{ è costante, e la } ds \text{ è}$$

l'elemento della curva, avremo l'equazione

$$r = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}, \text{ o pure essendo } ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

e $dsdds = dyddy$, perchè dx è costante, $r =$

$$\frac{ydyds^2}{dxddyds - ydxdds}$$

Per ridurre questa equazione mi servo del metodo del num. 49., e però pongo $ds = p dx$, onde $dds = dp dx$, quindi fatte le sostituzioni nell'equazione, sarà $r =$

$$\frac{ppydy}{pdy - ydp}, \text{ o sia } \frac{pdy - ydp}{pdy - ydp} = \frac{ydy}{r}, \text{ e però integrando,}$$

giacchè r è data per y , $\frac{y}{r} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$, ma

$$p = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}}, \text{ dunque la curva sa-}$$

rà $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$; equazione ridotta alle prime differenze, perchè essendo r data per y , l'integrale $\int \frac{ydy}{r}$ si potrà sempre avere, almeno trascendente-mente.

In altro modo;

Scrivo l'equazione $r = \frac{yds^2}{dxds^2 - ydxddy}$ così:

$\frac{yds^2}{r} = dxds^2 - ydxddy$, indi dal punto B , (Fig. 8.)

da cui partono le ordinate BE della ricercata curva AEC , conduco normale ad EB la BF terminata al raggio osculatore EQ , e chiamate $BF = p$, $EF = q$, per le note formole della normale, e sottornale, sarà $q = \frac{yds}{dx}$, $p = \frac{ydy}{dx}$, o sia $dy = \frac{pdx}{y}$, e differenziando nell'ipotesi di dx costante, $ddy = \frac{ydpdx - pxdy}{y^2}$, e

fatta la sostituzione nell'equazione principale^{yy}, sarà $\frac{yds^2}{r} = dxds^2 - \frac{dpdx^2 + pdx^2dy}{y}$, ma $ds = \frac{qdx}{y}$, dunque

$\frac{q^2dx}{r} = qqdx - yydp + pydy$, ed essendo $dx = \frac{ydy}{p}$,
 farà

farà $\frac{q^2 dy}{r} = qqdy + ppdy - ypdp$. Ma, per l'angolo retto

EBF , è $pp = qq - yy$, e $pdp = qdq - ydy$, quindi fatta la sostituzione, si averà $\frac{qqdy}{r} = 2qdy - ydq$, e moltiplicando per y , indi dividendo per qq , farà $\frac{ydy}{r} =$

$\frac{2qydy - yydq}{qq}$, ed integrando, $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{yy}{q}$, ma

$q = \frac{yds}{dx}$, dunque $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Più semplicemente ancora, sfuggendo le seconde differenze, si potrà fare così:

Preso l'archetto infinitesimo EC , sia CED la corda prodotta, a cui sia normale BD , se ora si chiami $BD = p$, per le cose dette al numero 115. del Capo V. del secondo Libro, QE , cioè $r = \frac{ydy}{dp}$, e però $\frac{ydy}{r} = dp$,

ed integrando, per essere r data per y , $\int \frac{ydy}{r} \pm b = p$; ma nello stesso citato luogo $p = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, dun-

que

que $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Sia $r = \frac{y}{b} \sqrt{aa + bb}$, adunque farà

$$\int \frac{b dy}{\sqrt{aa + bb}} \pm b = \frac{y dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ ed integrando attual-}$$

mente, ommessa per maggiore semplicità la costante b , $\frac{b}{\sqrt{aa + bb}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, e però $b b dx^2 + b b dy^2 =$

$a a dx^2 + b b dx^2$, cioè $b dy = a dx$, logaritmica spirale dell' Esempio V. num. 128. dello stesso Capo V. Libro II.

In luogo del raggio QE , ci venga dato in qualunque modo per l'ordinata y il co-raggio HE , che chiamo $= z$. Per la similitudine de' triangoli EBD , QEH , farà $EB, BD :: QE, EH$, cioè $y, p :: \frac{y dy}{dp}$,

z , e però $z = \frac{p dy}{dp}$, o sia $\frac{dy}{z} = \frac{dp}{p}$, ed integrando,

$$\int \frac{dy}{z} \pm b = l p. \text{ Sia } z = y, \text{ farà } \int \frac{dy}{y} \pm b = \frac{dp}{p}, \text{ ed in-}$$

tegrando, $l y = l p + \int \frac{m}{b}$, cioè $y = \frac{p m}{b}$; ma $p =$

$$\frac{y dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ dunque } b \sqrt{dx^2 + dy^2} = m dx, \text{ e pe-}$$

ddd

rò

rò $b dy = dx \sqrt{mm - bb}$, logaritmica spirale, e la stessa della citata di sopra, quando sia $b = b$, $m = \sqrt{aa + bb}$.

63. Per le curve riferite all' asse la formola del raggio osculatore è $\frac{ds^3}{-dx dy}$, posta dx costante, e

$$\text{però l'equazione } r = \frac{ds^3}{-dx dy}.$$

Pongo $dy = q dx$, e però $ddy = dq dx$, onde fatte,

le sostituzioni, $r = \frac{dx^3 + dy^3}{-dx^2 dq}$, e posto il valore $\frac{dy}{q}$ in

luogo di dx , $r = \frac{dy \times \sqrt{1 + qq}}{-qdq}$, cioè $\frac{dy}{r} = \frac{-qdq}{\sqrt{1 + qq}^{\frac{3}{2}}}$,

ed integrando, $\int \frac{dy}{r} \pm b = \frac{1}{\sqrt{1 + qq}}$, ma $q = \frac{dy}{dx}$,

dunque $\int \frac{dy}{r} \pm b = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Sia $r = \frac{2aay + aa^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, adunque sarà

$\int \frac{2aady}{4yy + aa^{\frac{3}{2}}} \pm b = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attual-

mente,

mente, ommessa la costante b , $\frac{2y}{\sqrt{4yy+aa}} =$

$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, cioè $2ydy = adx$, ed integrando, $yy = ax$,

parabola dell' Esempio primo num. 122. dello stesso Capo V. Libro II.

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio, che chiamo $= z$, la di cui formola, supposta dx costante, è $\frac{dx^2+dy^2}{-dly}$. Dunque $\frac{dx^2+dy^2}{-dly} = z$, e posta

$dy = qdx$, $ddy = dqdx$, e fatte le sostituzioni de' valori di ddy , e di dx , farà $\frac{dy \times 1 + qq}{-qdq} = z$, cioè $\frac{dy}{z} =$

$\frac{-qdq}{1+qq}$, ed integrando, $\int \frac{dy}{z} \pm b = -l\sqrt{1+qq}$,

quindi se la z , cioè il co-raggio farà in tal modo dato per y , che $\int \frac{dy}{z}$ sia logaritmico, avremo l'equazio-

ne differenziale del primo grado espressa nella solita ordinaria maniera, in altro caso sarà espressa con quantità logaritmiche.

Sia $z = \frac{4y^2+axy}{aa}$, avremo l'equazione

$\int \frac{aady}{4y^2+axy} \pm b = -l\sqrt{1+qq}$, ed integrando attual-

ddd 2

mente,

mente , ommessa la costante b , $\int \frac{y}{\sqrt{yy + \frac{aa}{4}}} =$

$\int \frac{1}{\sqrt{1 + qq}}$, e però $\frac{yy}{yy + \frac{aa}{4}} = \frac{1}{1 + qq}$, e posto il

valore di q , $2ydy = adx$, ed integrando , $yy = ax$, la parabola sopra citata .

64. Il raggio osculatore , o co-raggio sia in secondo luogo dato in qualsivoglia modo per l'assisa x , egli è chiaro , che in questo caso non possono servire le riduzioni avute nel primo , poichè le sommatorie $\int \frac{dy}{r}$, $\int \frac{dy}{z}$ non si averanno mai , se r , e z sieno date per x .

Presa adunque la formola del raggio osculatore in cui è costante dx , cioè $\frac{dx^2 + dy^2}{dxddy}^{\frac{3}{2}}$ per le curve riferite all'asse (giacchè in quelle riferite al fuoco il raggio , o co-raggio non può esser dato per l'assisa) sarà $r = \frac{dx^2 + dy^2}{dxddy}^{\frac{3}{2}}$; e però istessamente , come sopra , pon-
go $dy = qdx$, onde $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$, e fatte le
sosti-

sostituzioni, $r = \frac{dx^2 + qqdx^{\frac{3}{2}}}{-dx^2 dq}$, cioè $\frac{dx}{r} = \frac{-dq}{\frac{1}{1+qq^{\frac{1}{2}}}}$,

ed integrando, $\int \frac{dx}{r} \pm b = \frac{-q}{\frac{1}{1+qq^{\frac{1}{2}}}}$, equazione ri-

dotta alle prime differenze, perchè essendo r data per x , la sommatoria $\int \frac{dx}{r}$ si potrà sempre avere, almeno trascendentemente. E posto il valore di q , $\int \frac{dx}{r} \pm b =$

$$\frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Sia $r = 2\sqrt{4aa - 2ax}$; adunque sarà $\int \frac{dx}{2\sqrt{4aa - 2ax}}$
 $\pm b = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attualmente, ommef-

fa la costante b , $\frac{-\sqrt{4aa - 2ax}}{2a} = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, e

quadrando, e riducendo al comune denominatore,
 $4aadx^2 - 2axdx^2 - 2axdy^2 = 0$, cioè $dy = dx \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$,

equazione alla cicloide del num. 131. Capo V. Libro II.

In

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio. Dunque $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, e posta istessamente $dy = qdx$,

onde $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$, e fatte le sostituzioni in luogo di ddy , e di dy^2 , sarà $z = \frac{dx^2 + qqdx^2}{-dqdx}$, cioè

$$\frac{dx}{z} = \frac{-dq}{1+qq}, \text{ ed integrando, } \int \frac{dx}{z} \pm b = \int \frac{-dq}{1+qq};$$

ma l'integrale dell'omogeneo di comparazione è arco di circolo; dunque se il co-raggio sarà in tal modo dato, che anche $\int \frac{dx}{z}$ sia arco circolare, e questi archi

si corrispondano come numero a numero, avremo l'equazione ridotta alle prime differenze, ed espressa in quantità ordinarie.

Sia $z = 2\sqrt{2ax - xx}$, adunque sarà

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{2ax - xx}} = \int \frac{-dq}{1+qq};$$

ma l'integrale del primo membro è l'arco di circolo, la di cui tangente sia $\sqrt{2ax - xx}$, e del secondo è l'arco di circolo, la di cui tangente sia q , dunque sarà $\sqrt{2ax - xx} = q = \frac{dy}{dx}$, e però $dy = dx \sqrt{2a - x}$, equazione alla stessa cicloide.

PROBLEMA II.

65. Dato il raggio osculatore in qualunque modo per la curva riferita all'asse, ritrovare la curva stessa.

La formola del raggio osculatore, posto costante ds (elemento della curva) si è $\frac{dx ds}{ddy}$, e però farà l'e-

quazione $r = \frac{dx ds}{ddy}$. Chiamo t la tangente della curva,

e p la sottotangente; farà $\frac{y ds}{dy} = t$, e differenziando

nell'ipotesi di ds costante, $dt = \frac{dy^2 ds - y ds ddy}{dy^2}$, cioè

$ddy = \frac{dy^2 ds - dy^2 dt}{y ds}$, onde fatta la sostituzione, farà

$r = \frac{y dx ds^2}{dy^2 ds - dy^2 dt}$. Ma poichè si ha $p = \frac{y dx}{dy}$, e $t = \frac{y ds}{dy}$,

farà $dx = \frac{p dy}{y}$, $ds = \frac{t dy}{y}$; onde sostituiti questi valori

nella equazione superiore, si averà $r = \frac{p t ds}{t dy - y dt}$;

ma $p = \sqrt{tt - yy}$, dunque $r = \frac{tds\sqrt{tt - yy}}{tdy - ydt}$, cioè

$$\frac{ds}{r} = \frac{tdy - ydt}{t\sqrt{tt - yy}}.$$

Il primo membro di quest'ultima equazione è in nostra mano, almeno trascendentemente, poichè r è una funzione di s ; nel secondo poi facilmente si separano le indeterminate, se si faccia $q = \frac{y}{t}$, con che

$$\frac{ds}{r} = \frac{dq}{\sqrt{1 - qq}}.$$

Se nella formola $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$ in luogo di t si

avesse preso il valore $\sqrt{pp + yy}$, averebbesi ritrovato

$$r = \frac{pp + yy}{p} \times \frac{ds}{pdy - ydp}, \text{ e fatta } \frac{y}{p} = z, \text{ l'equazione pure sem-}$$

$$\text{pliciſſima } \frac{ds}{r} = \frac{dz}{1 + zz}.$$

Le due quantità differenziali $\frac{dq}{\sqrt{1 - qq}}$, $\frac{dz}{1 + zz}$ fo-

no l'espressione dell'elemento d'arco di circolo; quindi se l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ farà algebrico, o pure dipenderà

da

da' logaritmi, o da quadrature più alte, la rettificazione delle ricercate curve, ed il valore del raggio osculatore supporrà la quadratura del circolo; ma all'opposto potrà l'uno, e l'altro esser algebrico, se l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ convenga con una formola d'arco circolare.

Ritenuta una delle due equazioni, per esempio, la seconda $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$; poichè $ds = \frac{tdy}{y} = \frac{dy}{y} \sqrt{pp+yy}$, e $p = \frac{y}{z}$, farà $ds = \frac{dy}{z} \sqrt{1+zz}$, onde posto questo valore nell'equazione, averassi $dy = \frac{rzdz}{1+zz \sqrt{1+zz}}$.

Essendo $ds = \frac{dy}{z} \sqrt{1+zz}$, farà anche ds^2 , cioè $dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2 + zzdy^2}{zz}$, e però $dx = \frac{dy}{z}$.

Il dato raggio osculatore r sia $= 1+ss$; l'equazione $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{r}$ si muterà in questa $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{1+ss}$, da cui si ricava $z=s$, e però $r=1+zz$. Pongo questo valore nella equazione $dy = \frac{rzdz}{1+zz \sqrt{1+zz}}$, e

farà $dy = \frac{zdz}{\sqrt{1+zz}}$; ed integrando, ommessa la co-

c c c

stante,

stante, $y = \sqrt{1 + zz}$, quindi $z = \sqrt{yy - 1}$. Adunque perchè δ ritenuto $dx = \frac{dy}{z}$, sarà finalmente $dx = \frac{dy}{\sqrt{yy - 1}}$, equazione della ricercata curva nella suppo-

fizione assunta del raggio osculatore. La costruzione dipende dalla quadratura dell'iperbola.

Prendo la formola del raggio osculatore $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dxds}$, in cui nessuna flussione prima è costan-

te. Dispongo l'equazione così: $\frac{dy}{dx} \times \frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds} = \frac{ds}{r}$.

L'integrale di $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$ si è $l dy - l ds$, che pongo = lp ; dunque sarà $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds} = \frac{dp}{p}$, e $\frac{dy}{ds} = p$, e però sa-

rà l'equazione $\frac{ds}{r} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{p}$; ma $p = \frac{dy}{ds}$, e $\frac{dy^2}{pp} =$

$ds^2 = dx^2 + dy^2$, dunque $dx = \frac{dy \sqrt{1 - pp}}{p}$; e sostit-

tuendo questo valore, sarà $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1 - pp}}$, equazione

in cui sono separate le variabili, e che per conseguenza può trattarsi con la maniera di sopra usata.

Sia

Sia la formola del raggio osculatore $\frac{ds}{r} = -\frac{dy dds}{ds dx}$,

in cui è costante dy . Pongo $ds = q dy$, e però $dds = dq dy$, dunque $\frac{ds}{r} = -\frac{dy^2 dq}{ds dx}$; ma $ds^2 = dx^2 + dy^2 =$

$qq dy^2$, onde ricavasi $dx = dy \sqrt{qq - 1}$, e $dx ds = qq dy^2 \sqrt{qq - 1}$. Fatta pertanto questa sostituzione, sarà $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q \sqrt{qq - 1}}$.

Sia finalmente la formola del raggio osculatore, $\frac{ds}{r} = \frac{-dx ddy}{ds^2}$, in cui è costante dx . Pongo $z = \frac{dx}{dy}$, e però $dz = \frac{-dx ddy}{dy^2}$; dunque $\frac{ds}{r} = \frac{dy^2 dz}{ds^2}$, ma $dx = z dy$, e $ds^2 = dx^2 + dy^2 = zz dy^2 + dy^2$, quindi $\frac{ds}{r} =$

$$\frac{dz}{1 + zz}.$$

In qualunque modo adunque si operi, l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ sarà sempre riferito alla rettificazione, o quadratura del circolo.

Sia dato in qualunque maniera per la curva il co-raggio, che chiamo $= u$. Prendo una delle tre for-

mole superiori, per esempio quella, in cui è stata presa costante dy , cioè $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$, dove è stato

posto $ds = qdy$. Sarà il raggio $r = \frac{uds}{dx}$, e posto questo

valore nella formola, avremo $\frac{ds}{u} = \frac{-dsdq}{qdx\sqrt{qq-1}}$;

ma $ds = qdy$, e $dx = dy\sqrt{qq-1}$, quindi fatte le sostituzioni, sarà $\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{qq-1}$; ma u è data per s , adun-

que ec.

Qui si offervi, che siccome la sommatoria $\int \frac{ds}{r}$ è eguale all'espressione d'arco circolare, così l'altra sommatoria $\int \frac{ds}{u}$ viene riferita alla quadratura dell'iperbola, o sia a' logarithmi.

66. Con simili, o poco diversi artifizj e maniere si potranno ridurre a' secondi differenziali molte equazioni, o formole espresse con differenziali terzi, quarti ec. Ed in primo luogo il metodo del num. 49. si può estendere (dentro certe limitazioni però) alle equazioni differenziali del terzo ordine, del quarto, del quinto ec., vale a dire si ridurranno sempre al primo ordine le equazioni del terzo, purchè l'una, e

l'altra

l'altra delle variabili finite x, y in esse manchi; si ridurranno quelle del quarto, purchè oltre l'una, e l'altra delle due variabili finite x, y , in esse manchi l'una, o l'altra delle prime flussioni dx, dy con le rispettive funzioni; si ridurranno quelle del quinto, purchè in esse manchino ambe le variabili finite, ed ambe le prime loro flussioni; quelle del sesto, purchè oltre tutto ciò, manchi l'una, o l'altra delle flussioni seconde, e così vadasi discorrendo.

Sia l'equazione $dxddd\dot{y} + dx^2d\dot{y} = dx^4 + dy^4$, in cui è stata presa costante dx . Faccio al solito $pdx = dy$, e però $dpdx = d\dot{y}$, $ddpdx = ddd\dot{y}$; fatte pertanto le sostituzioni, si averà $dx^2ddp + dx^3dp = dx^4 + dy^4$; ma $dy^4 = p^4dx^4$, dunque sarà $ddp + dxdp = dx^2 + p^4dx^2$, equazione ridotta al secondo ordine. Pongo in oltre $qdx = dp$, ritenendo per costante dx , e però $dqdx = ddp$, onde sostituendo, sarà $dqdx + dpdx = dx^2 + p^4dx^2$, cioè $dq + dp = dx + p^4dx$; ma $dx = \frac{dp}{q}$, dunque,

$dq + dp = \frac{dp}{q} + \frac{p^4dp}{q}$, equazione ridotta alle prime differenze.

Sia l'equazione differenziale del quarto ordine $d^4y + dxddd\dot{y} - dx^2d\dot{y} = 0$, in cui sia costante dx . Faccio adunque $pdx = dy$, e però $dpdx = d\dot{y}$, e $ddpdx = ddd\dot{y}$, e $dddpx = d^4y$; fatte però le sostituzioni,

ni, si averà $dddp + dxddp - dx^2 dp = 0$, equazione, che è il caso del sopra posto esempio, onde si fa maneggiare, e facilmente si ridurrà alle prime flussioni.

Il metodo del num. 49. ritrovato già tempo fa dal Sig. Conte Jacopo Riccati prima d'ora mi era noto; ma la qui sopra posta estensione, siccome il problema secondo inverso de' raggi osculatori ora solamente gli ô appresi, che mi è venuto alle mani il secondo Tomo de' commentarj dello Instituto di Bologna; e certamente troppo tardi per me, perchè ritrovandomi già al termine dell'impressione di questa mia fatica, non sono più in tempo di prevalermi d'altre dottissime Dissertazioni, e del P. Vincenzo Riccati figlio del suddetto Sig. Conte Jacopo, e del Sig. Gabriello Manfredi ivi inserite. Basterà adunque averle indicate al Lettore, acciò voglia trarne profitto.

67. Veduta la suddetta estensione del metodo del num. 49., passo ad altre equazioni, e ad altri ripieghi; e però sia l'equazione $pyddy^2 = pdx^2 ddy - 2pdxddxddy - dpdx^2 ddy$, in cui la p è in qualunque modo data per x , ed y , ed è stato preso per costante l'elemento ds della curva. Poichè ds è costante, sarà $dxddx = -dyddy$, onde sostituito questo valore in luogo di $dxddx$, sarà $pyddy^2 = pdx^2 ddy + 2pyddy^2 - dpdx^2 ddy$, cioè cancellato ciò, che si elide, $dpdx^2 ddy = pyddy^2 + pdx^2 ddy$,

o sia $\frac{dp}{p} = \frac{dydy}{dx^2} + \frac{ddy}{ddy}$, e posto in luogo di $dydy$

il valore $-dxddx$, sarà $\frac{dp}{p} = -\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy}$, e final-

mente integrando con i logaritmi, $lp = lddy - ldx -$
 $l ds$, essendo ds costante, e però $p = \frac{ddy}{dxds}$, equazio-

ne ridotta alle seconde differenze.

Sia l'equazione $b dz ddx - 3 b d d d x - d b d z d d x = 0$,
 in cui la b è in qualunque modo data per x , e z . Si
 finga la seguente equazione $b^m dz^n ddx^r =$ ad una co-
 stante (le m , n , r sono potestà incognite da de-
 terminarsi nel progresso), dunque differenziando,
 farà $r b^m dz^n ddx^{r-1} d d d x + n b^m d d x^r dz^{n-1} d d z +$
 $m b^{m-1} d b d z^n d d x^r = 0$, la quale divisa per
 $b^{m-1} dz^{n-1} d d x^{r-1}$ si riduce ad essere $r b d z d d x +$
 $n b d d x d d z + m d b d z d d x = 0$. Paragonata questa equazione
 termine per termine con la principale proposta, si à
 $r = 1$, $n = -3$, $m = -1$, adunque in vece dell'
 equazione finta $b^m dz^n d d x^r =$ ad una costante, avere-
 mo la vera $\frac{ddx}{bdz} =$ ad una costante, che è l'integrale
 della proposta.

Per via di logaritmi ancora si può ottenere la
 stessa integrazione. Ripiglio l'equazione $b dz d d x -$
 $3 b d d d x - d b d z d d x = 0$: divido per $b d z d d x$, fa-
 rà

rà $\frac{dddx}{dx} - 3\frac{ddz}{dz} - \frac{db}{b} = 0$, ed integrando, $l ddx - l dz^3 - lb =$ ad un logaritmo costante, dunque $\frac{ddx}{bdz^3} =$

ad una costante.

Finirò queste Instituzioni con una avvertenza, ed è, che deve l'accorto Analista procurare con tutta l'industria di scansare nella soluzione de' Problemi le seconde, e molto più le ulteriori flussioni per mezzo di certi ripieghi, che nascono opportunamente sul fatto. Tali artificj si vedono adoperati da illustri Matematici ne' Problemi delle *Curve Elastiche*, *Catenarie*, *Velarie*, in quello degl'*Isoperimetri*, ed in altri, le soluzioni de' quali pubblicate sì negli Atti di Lipsia, come in altre opere, si potranno leggere, a fine di acquistare quella avvedutezza e destrezza, che è necessaria.

F I N E.

TOMO SECONDO.

ERRORI

CORREZIONI

Pag. 432 lin. 11	giungne	giunge
Pag. 435 lin. 22	lineeta	lineetta
Pag. 511 lin. 9	equaaione	equazione
Pag. 515 lin. 14	<i>NOPQR</i>	<i>NOPQMR</i>
Pag. 587 lin. 17	divegenti	divergenti
Pag. 697 lin. 1	queste frazioni	questa frazione
Pag. 727 lin. 13) lin. 20)	<i>DCEB</i>	<i>DECB</i>
Pag. 745 lin. 14	<i>TS</i>	<i>TR</i>
Pag. 790 lin. 17	della	dalla
Pag. 795 lin. ult.	$-\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$	$-\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$
Pag. 844 lin. 10	incogoita	incognita
Pag. 901 lin. 10	$-\frac{apdy-fdp}{ep+m}$	$-\frac{apdp-fdp}{ep+m}$
Pag. 924 lin. 5	$\times -\frac{z'dx}{x^{\frac{9}{2}}}$	$\times -\frac{z'dx}{x^{\frac{9}{2}}}$
Pag. 929 lin. 1	$+ b'xxdz$	$+ b'xxdx$
Pag. 939 lin. 2	dotiffimo	dotissimo

Fig. 1.

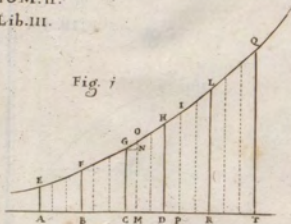


Fig. 2.

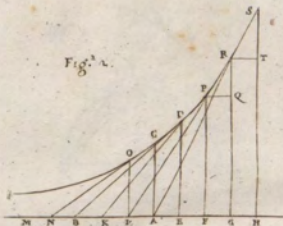


Fig. 4.

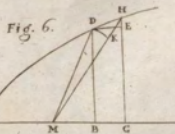


Fig. 6.

Fig. 3.

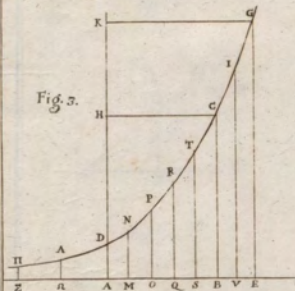
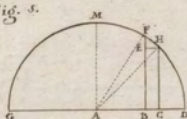


Fig. 5.



lib. II. Fig. 1.

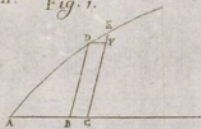


Fig. 2.

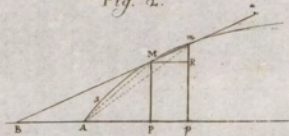


Fig. 3

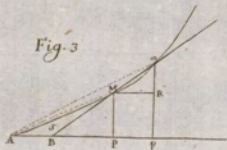


Fig. 4.

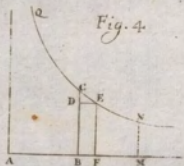


Fig. 5.

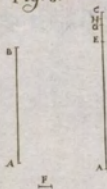


Fig. 6.

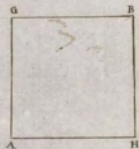
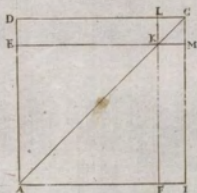


Fig.^a 7.

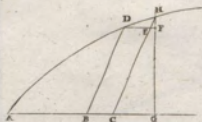


Fig.^a 8.

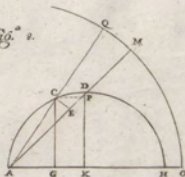


Fig.^a 9.

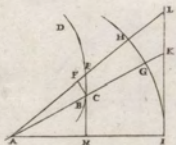


Fig.^a 10.

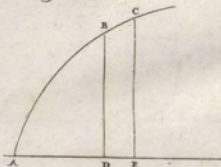


Fig.^a 11.

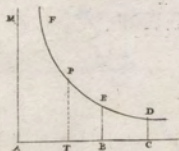


Fig.^a 12.

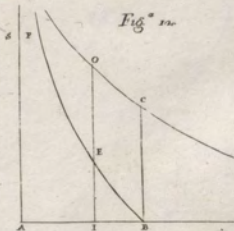


Fig. 7



Fig 2

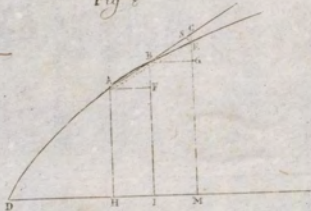


Fig. 9.

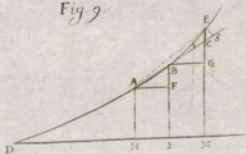


Fig. 10.

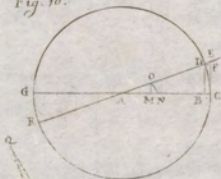


Fig. 11.

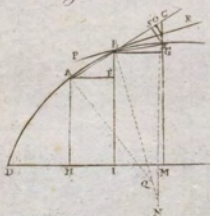


Fig. 12.



Fig.^a 19.

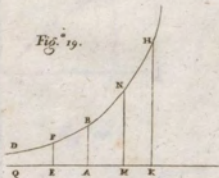


Fig.^a 20.

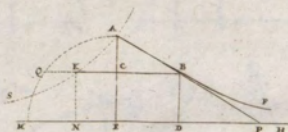


Fig.^a 21.

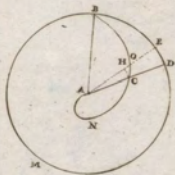


Fig.^a 22.

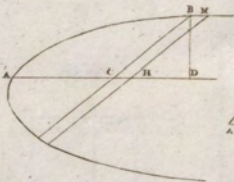


Fig.^a 23.

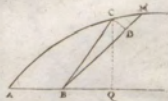


Fig.^a 24.

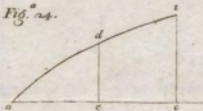
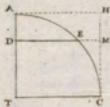


Fig.^a 25.

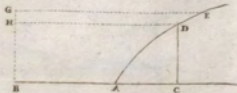


Fig. 19.

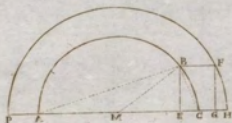


Fig. 20.

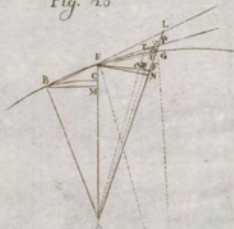


Fig. 21.

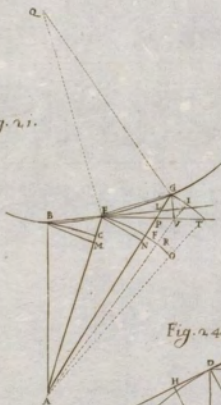


Fig. 22.

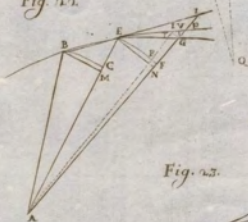


Fig. 23.



Fig. 24.



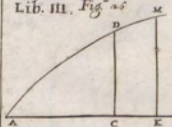


Fig.^a 27.

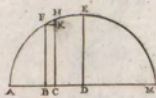


Fig.^a 22.

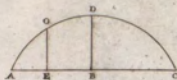


Fig.^a 29.

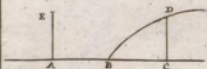


Fig.^a 30.

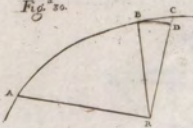


Fig.^a 31.



Fig.^a 32.

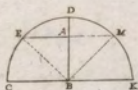


Fig.^a 33.

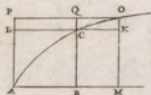


Fig.^a 34.

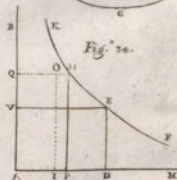


Fig.^a 35.

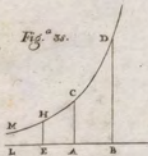


Fig.^a 36.

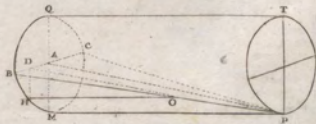


Fig. 26.

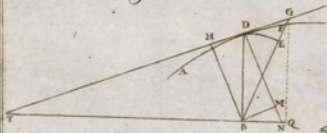


Fig. 27.

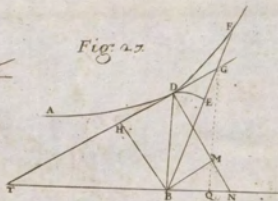


Fig. 28.

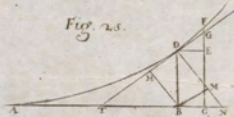


Fig. 29.

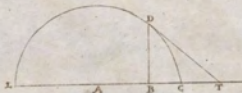


Fig. 30.

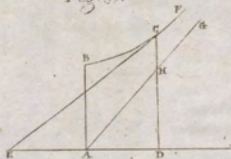


Fig. 31.

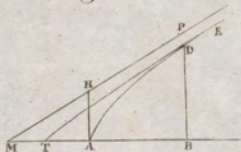


Fig.^o 37.

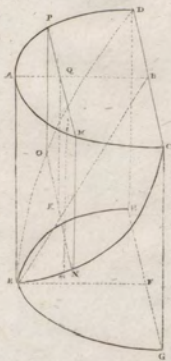


Fig. 38.

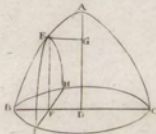


Fig. 40.

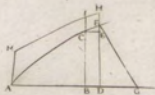


Fig. 42.

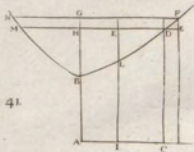


Fig. 41.

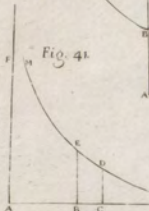


Fig. 43.

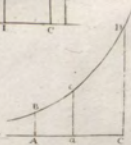


Fig.^o 39.

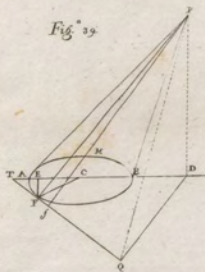


Fig.^o 44.

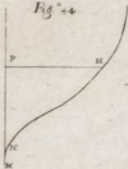


Fig.^o 45.

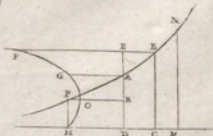


Fig. 32.

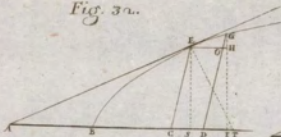


Fig. 55.

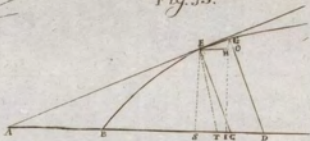


Fig. 34.

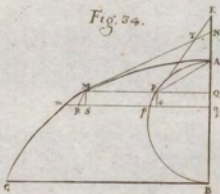


Fig. 37.

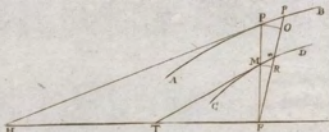


Fig: 35.

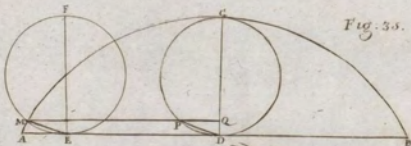


Fig. 36.

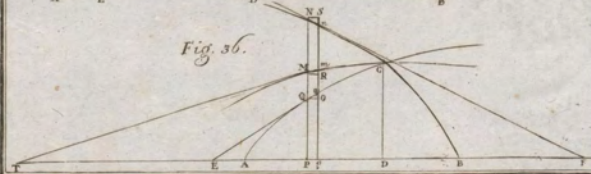


Fig. 45.

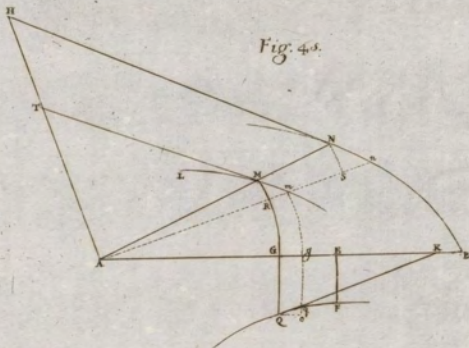


Fig. 44.

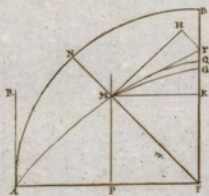


Fig. 46.

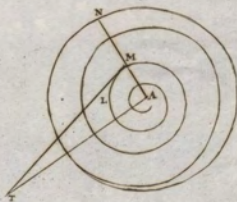


Fig. 47.

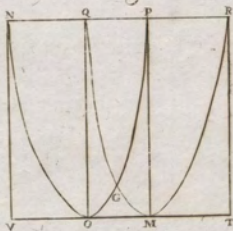


Fig. 49.

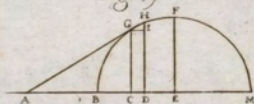


Fig. 51.

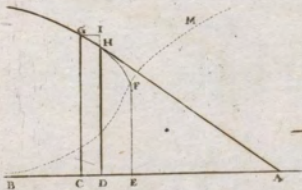


Fig. 48.

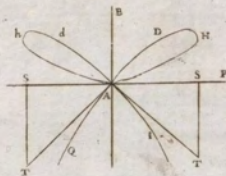


Fig. 50.

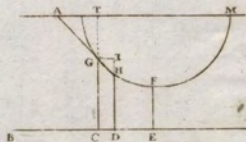


Fig. 52.

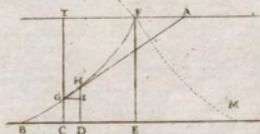


Fig. 53.

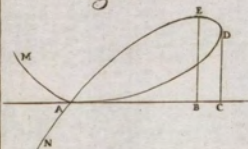


Fig. 55.

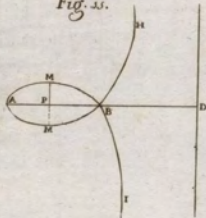


Fig. 54.

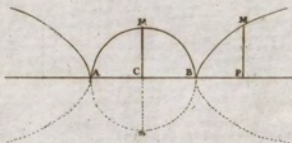


Fig. 56.

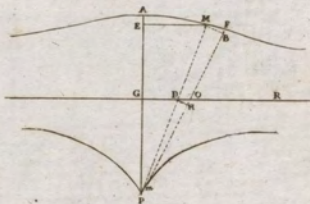


Fig. 57.



Fig. 58.



Fig. 59.

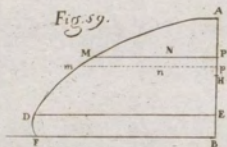


Fig. 61.

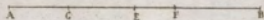


Fig. 60.

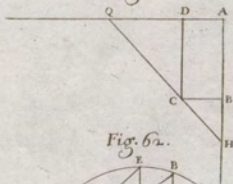


Fig. 62.

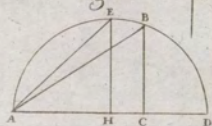


Fig. 63.

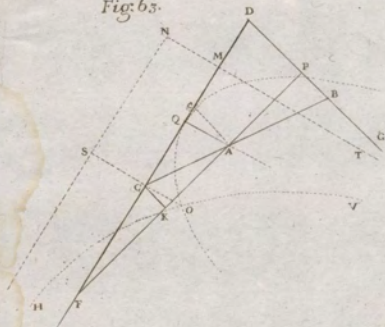


Fig. 64.

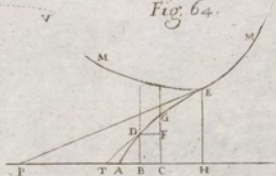


Fig. 65.

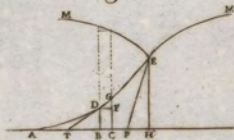


Fig. 66.

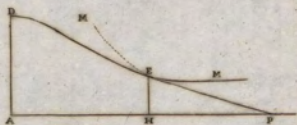


Fig. 67.



Fig. 68.



Fig. 69.

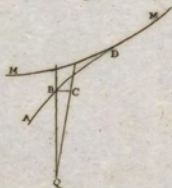


Fig. 70.

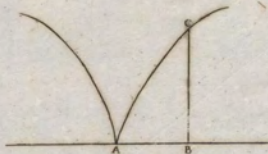


Fig. 71.

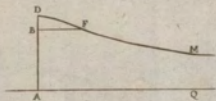


Fig. 72.

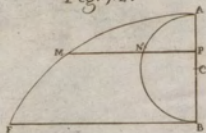


Fig. 73.

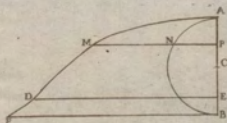


Fig. 74.

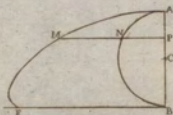


Fig. 76.

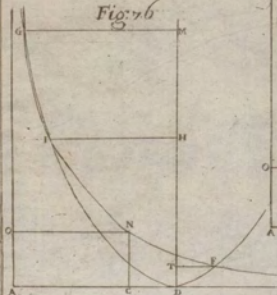


Fig. 75.

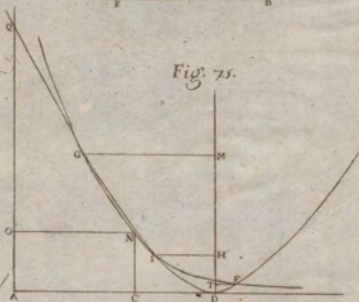


Fig. 77.

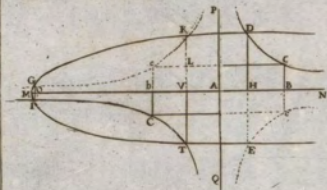


Fig. 78.

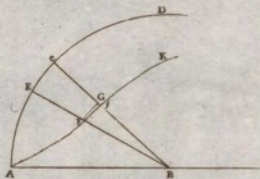


Fig. 79.



Fig. 80.

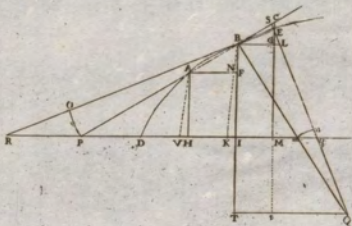


Fig. 81

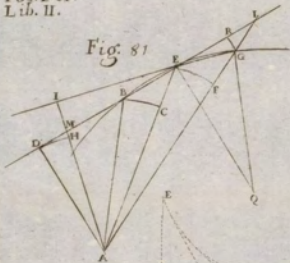


Fig. 82.

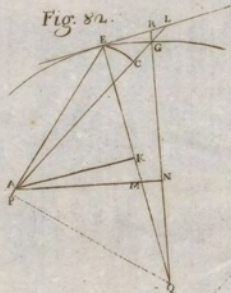


Fig. 83.

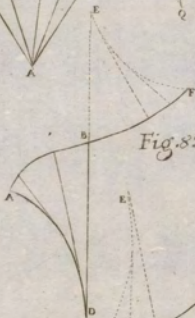


Fig: 84.



Fig. 85.



Fig. 86.

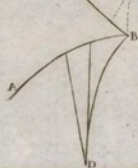




Fig. 93.



Fig. 95.



Fig. 94.

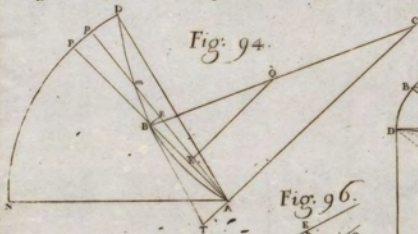


Fig. 96.

