La geometria in Peano e la sua scuola

1. Il calcolo geometrico nella scuola di Peano

Le questioni che portarono alla nascita del calcolo geometrico sono molteplici e relative alla formazione scientifica e culturale di ciascun matematico che se ne interessò[1]. Si può comunque ritenere che le problematiche legate al calcolo baricentrico (Lhuilier (1808), Möbius (1827)), alla geometria di posizione di Lazare Carnot (1803) (Bellavitis (1832)), alla natura dei numeri complessi (Argand (1806), Bueé (1806), Bellavitis, Rowan Hamilton (1844)), alla meccanica (Barrée de Saint-Venant (1845), Rowan Hamilton, Tait (1867), Burali Forti e Marcolongo (1909)) e alle forme geometriche (H.Grassmann (1844), Peano (1888), Burali Forti (1926)) determinarono il sorgere e gli sviluppi di questo calcolo. Si tratta, per intenderci, della formazione e della determinazione di una struttura di calcolo algebrico che ha per oggetti enti geometrici (segmenti orientati), e che oggi assimileremmo allo spazio vettoriale con l'aggiunta di una operazione di prodotto generale tra vettori. I matematici italiani che maggiormente si interessarono a questo calcolo furono Giusto Bellavitis (1803 – 1880), che partendo dalla lettura della *Géométrie de position* di Lazare Carnot e dalle idee di Buée sulla natura dei numeri complessi, ideò il calcolo delle equipollenze, e Giuseppe Peano (1858 –1932) e il suo allievo Cesare Burali Forti (1861 – 1931) che rielaborando le idee della *Ausdehnungslehre* (1844, 1862) di Hermann Grassmann giunsero ad una forma di calcolo geometrico ben interpretabile nell'ambito della geometria elementare. Una delle caratteristiche dell'approccio di questi nostri matematici fu quella di preoccuparsi in modo non secondario di dedurre nell'ambito di questo contesto i teoremi della geometria euclidea e della geometria proiettiva. Dal punto di vista fondazionale si tratta dunque di assegnare una struttura algebrico geometrica e di stabilire poi mediante il calcolo che ne scaturisce i teoremi della geometria elementare (euclidea e proiettiva).

L'*Ausdehnungslehre* di Hermann Grassmann fu studiata ed elaborata, come si diceva, da Giuseppe Peano e la sua scuola[2]. Una serie di interessanti lavori sono dedicati dallo stesso Peano a questo argomento a partire dal 1888 con l'ampio saggio *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre *di H.Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*[3]. Peano traduce con un linguaggio più vicino a quello della geometria elementare i concetti astratti grassmanniani. La nozione di *forma* (o *formazione*) *geometrica* è la base di tutto l'impianto teorico proposto. Siano m, n, p, …, q numeri reali, allora una *forma geometrica* sarà una espressione di questo tipo:

---

[1] Si rimanda, anche per le indicazioni bibliografiche relative alle fonti ed alla letteratura critico storiografica, a P. Freguglia, *Dalle equipollenze ai sistemi lineari. Il contributo italiano al calcolo geometrico*, con appendici di S. Briccoli e G. Canepa, Ediz. QuattroVenti, Urbino, 1992. Vedi anche U. Bottazzini, *Va pensiero,* Il Mulino, Bologna, 1994.

[2] P. Freguglia, *Dalle equipollenze […]*, op.cit., cap.li III e IV.

[3] Vedi G. Peano, *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre *di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Fratelli Bocca ed., Torino, 1888. Per quanto concerne i contributi della scuola di Peano in questo settore, tra i vari lavori realizzati da Cesare Burali Forti e Roberto Marcolongo, si segnala C. Burali Forti, R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale*, Zanichelli ed., Bologna, 1909 e C. Burali Forti, *Geometria analitico-proiettiva*, ed. Petrini, Torino, 1926. Per la letteratura vedi anche U. Bottazzini, "Sul *Calcolo Geometrico* di Peano", in *Atti del Convegno internazionale di Storia della Logica*, San Gimignano 4-8.XII.1982, CLUEB, Bologna, 1989.

(1) $$m\alpha + n\beta + p\gamma + \ldots + q\tau$$

in cui se α, β, γ, … e τ denotano *punti* si dirà di prima specie (o primo grado), se denotano *linee*, di seconda specie, se denotano *superfici*, di terza specie e se, infine, individuano *volumi*, di quarta specie. Nell'impostazione peaniana non si hanno forme di specie superiore alla quarta, nel senso che non si considerano generalizzazioni a dimensioni superiori alla terza. Un punto verrà denotato con una lettera maiuscola, ad es. A, un linea con AB, una superficie (triangolo) con ABC, un volume con ABCD. Chiameremo *prodotto progressivo* tra una forma di specie i ed una forma di specie j, supposto che $i + j \leq 4$ (nel caso del piano dovremmo supporre che $i + j \leq 3$), la somma dei prodotti di ogni termine della prima per ogni termine della seconda. Risulterà allora che un punto A è la forma di prima specie più semplice e che un segmento (orientato) AB è il prodotto progressivo di due punti, come pure che un triangolo ABC lo è di tre punti oppure di un segmento BC per il punto A. D'altro canto la forma di prima specie B – A rappresenta anch'essa un segmento orientato. Si ha inoltre che AB = - BA e che quindi AA = 0. Il prodotto progressivo interpreta l'operazione di *proiezione*, come si può constatare facilmente sia nel caso del prodotto AB (proiezione dal punto A al punto B) sia nel caso del prodotto ABC.
In questo contesto per alcuni particolari prodotti progressivi uguagliati a zero si possono stabilire interessanti interpretazioni geometriche, come ad esempio:

ABCD = 0	i quattro punti A, B, C, D sono complanari;
ABC = 0	i tre punti A, B, C sono allineati, ovvero giacciono su una stessa retta;
AB = 0	i due punti A, B coincidono;
$A\alpha = 0$	il punto A giace sul piano α, cioè appartiene al piano α;
Aa = 0	il punto A giace sulla retta a, cioè appartiene alla retta a;
ab = 0	le rette a e b giacciono su uno stesso piano, cioè o si incontrano o sono parallele;
abc = 0	le tre rette a, b, c hanno un punto in comune.

Peano è in grado di dimostrare grazie a questo apparato di calcolo geometrico alcuni fondamentali teoremi di geometria proiettiva che riguardano l'allineamento fra punti.
Passiamo ora ad un'altra fondamentale operazione del calcolo geometrico proposta da Peano, il *prodotto regressivo*, che interpreta l'operazione geometrica di *intersezione* o *sezione*. Ci limiteremo al caso piano. Esso viene così definito da Peano:
"Alla scrittura AB∗CD attribuiremo il significato:

$$AB*CD = (ACD)B - (BCD)A$$

perciò la scrittura AB∗CD rappresenta una formazione di prima specie che è collineare con AB […]. Ad essa daremo il nome *intersezione* o *prodotto regressivo*". Analogamente si potrà estendere predetta definizione allo spazio. La condizione per avere il prodotto regressivo è che, se i e j indicano rispettivamente la specie di due formazioni, sia per lo spazio $i + j > 4$ e, nel piano $i + j > 3$. In realtà Peano utilizza tanto per il prodotto progressivo che per quello regressivo lo stesso segno, introducendo a tal fine la nozione di *prodotto alternato.*
Mentre il calcolo proposto da Bellavitis procede, nonostante la presenza di aspetti calcolativi rilevanti, seguendo il tradizionale schema dimostrativo e risolutivo geometrico, il calcolo proposto da Peano e Burali Forti è più strettamente calcolativo, sintetico e compatto. Addirittura ci si può ridurre alla interpretazione di una sola espressione vera di questo calcolo.

2. I fondamenti della geometria secondo Peano e la sua scuola

Il contributo di Peano e della sua scuola allo studio dei fondamenti della geometria è assai rilevante, tanto che i lavori in questo settore, in particolar modo quelli ad opera di Peano e di Pieri, costituiscono dei punti di riferimento obbligati per gli studiosi della problematica storica e non solo sui fondamenti ed in particolare sull'assiomatizzazione della geometria. I lavori di Peano che riguardano direttamente l'assiomatica della geometria sono *I principi di geometria logicamente esposti* del 1889 e «Sui fondamenti della geometria» del 1894[4], i quali si collocano storicamente tra le *Vorlesungen über neuere Geometrie* di Pasch del 1882 e le *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert del 1899. Nel primo dei due lavori citati, Peano dichiara di volersi limitare a ritrovare deduttivamente le proposizioni principali della geometria di posizione, ossia quelle che riguardano le relazioni di appartenenza e di ordine.
L'intento dell'Autore è quello di stabilire un minimo numero di enti geometrici come primitivi (dai quali poter definire poi tutti gli altri) ed un numero il più possibile ristretto di proposizioni primitive, cioè assiomi (da cui dimostrare tutte le altre).
Come concetti primitivi, Peano dichiara di assumere quelli di "punto" e "segmento", anche se, in effetti, egli si riferisce più propriamente al concetto di "punto" ed alla relazione ternaria $c \in ab$, che significa "c è un punto interno al segmento ab" o "c sta tra a e b" . Tipograficamente troviamo in originario il simbolo ε al posto del simbolo ∈.
Mediante questa relazione Peano è in grado di definire le nozioni di retta e di piano. Ma vediamo come prende le mosse la trattazione peaniana.
La classe dei punti è denotata con **1**. Se a e b sono punti, si definiscono i due seguenti insiemi di punti, chiamati *raggi:*

$$a'b =: \mathbf{1} \,.\, [x\ \varepsilon]\ (b\ \varepsilon\ ax)$$

$$ab' =: \mathbf{1} \,.\, [x\ \varepsilon]\ (a\ \varepsilon\ xb)$$

Cioè $a'b$ è l'insieme dei punti x tali che b è interno al segmento ax, mentre ab' è l'insieme dei punti x tali che a è interno al segmento xb.
Se a è un punto e k una classe di punti, Peano denota con ak l'insieme dei punti x tali che esiste un y in k per cui $x\ \varepsilon\ ay$. Ad esempio se k coincide con il segmento bc, con ak, ossia con abc, denotiamo l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici a, b, c. Peano in particolar modo in *I principi di geometria logicamente esposti* (come d'altronde negli *Arithmetices principia)* utilizza sistematicamente la sua "logica matematica" che, come asserisce, "in studi di questo genere è strumento pressoché indispensabile". Gli assiomi da lui introdotti e studiati sono tratti, nonostante l'apporto di alcune non indifferenti modifiche, dalle *Vorlesungen* del Pasch.
Vediamo ora gli assiomi assunti da Peano cominciando da quelli relativi ai segmenti.

---

[4]Per questo paragrafo abbiamo ripreso, con qualche ampliamento, parti degli articoli M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, "Il problema dei fondamenti della matematica nella scuola di Peano", *Epistemologia,* VI, 1983 e P. Freguglia, "Il contributo di G. Peano agli studi sui fondamenti della geometria", in *Atti del convegno 'La storia delle matematiche in Italia'*, Cagliari, 29-30 set. e 1 ott. 1982. Rimandiamo anche a M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali della scuola di Peano* op.cit. in particolare al cap. III. I lavori peaniani qui ricordati sono *I principi di geometria logicamente esposti*, Frat.lli Bocca, Torino, 1889 e "Sui fondamenti della geometria" in *Rivista di Matematica* IV (1894) pp. 51-90.

Assiomi preliminari sui segmenti:

0.1. $a, b \varepsilon \mathbf{1} . \supset . ab \varepsilon K \mathbf{1}$

cioè, se a e *b* sono punti, allora il segmento *ab* è una classe di punti. Inoltre «[…] Il segno = fra due punti indica la loro identità o coincidenza», quindi:

0.2. $a,b,c,d \varepsilon \mathbf{1} . a = b . c = d : \supset . ac = bd$

cioè, se *a*, *b, c, d,* sono punti ed *a* sia uguale a *b* e *c* sia uguale a *d*, allora il segmento *ac* è uguale al segmento *bd.*

Assiomi della geometria sulla retta:

1. $\mathbf{1}- = \Lambda$, cioè $\mathbf{1} \neq \emptyset$
2. $a \varepsilon \mathbf{1} . \therefore \supset x \varepsilon \mathbf{1} . x - = a : - =_x \Lambda$ (cioè: "se *a* è un punto allora esiste un punto $x \neq a$")
3. $a \varepsilon \mathbf{1} . \supset : aa = \Lambda$
4. $a, b \varepsilon \mathbf{1} . a - = b : \supset . ab - = \Lambda$
5. $a, b \varepsilon \mathbf{1} . \supset . ab = ba$
6. $a, b \varepsilon \mathbf{1} . \supset . a - \varepsilon ab$
7. $a, b \varepsilon \mathbf{1} . a - = b : \supset . a'b - = \Lambda$
8. $a, b, c, d \varepsilon \mathbf{1} . c \varepsilon ad . b \varepsilon ac : \supset . b \varepsilon ad$
9. $a, d \varepsilon \mathbf{1} . b, c \varepsilon ad : \supset : b = c . \cup . b \varepsilon ac . \cup . b \varepsilon cd$
10. $a, b \varepsilon \mathbf{1} . c, d \varepsilon a'b : \supset : c = d . \cup . d \varepsilon bc . \cup . c \varepsilon bd$
11. $a, b, c, d \varepsilon \mathbf{1} . b \varepsilon ac . c \varepsilon bd : \supset . c \varepsilon ad$

Quindi per la geometria del piano e dello spazio vengono aggiunti altri assiomi.
Peano dice: "Arrivati al teorema di Desargues (sui triangoli omologici) si può continuare senz'altro lo studio della geometria di posizione [...] si possono introdurre, mediante definizioni, i punti impropri o ideali, ecc. seguendo per esempio il Pasch nella sua opera citata *(Vorlesungen)*".
In "Sui fondamenti della geometria" Peano riprende ed amplia le tematiche trattate in *I principi di geometria logicamente esposti.* Nella prima parte vengono ripresentati più schematicamente i risultati che aveva esaminato ne *I principi.* Le idee primitive sono le stesse ("punto" e "$c \varepsilon ab$") e le proposizioni primitive sono in tutto 17 (come abbiamo già visto); viene aggiunto l'assioma della continuità sulla retta. Anche se vi è lo stesso impiego di simboli per esprimere le varie proposizioni, l'uso degli strumenti logici è meno massiccio e le dimostrazioni sono condotte in modo più intuitivo, facendo uso del linguaggio comune. La definizione di retta risulta semplificata.

La seconda parte del lavoro costituisce un ampliamento essenziale del sistema geometrico de *I principi,* in quanto viene introdotta la nozione di congruenza. Questa è ricondotta al concetto di "movimento" (nel senso che due figure sono considerate congruenti se esiste un "movimento" che fa passare da una all'altra), a sua volta inteso come una speciale affinità, caratterizzata da opportuni assiomi.

3. Confronto Peano-Pasch

Cerchiamo ora di vedere un po' più da vicino ciò che differenzia la trattazione peaniana da quella di Pasch. Riguardo al sistema di assiomi, Peano stesso stabilisce un

ben articolato confronto. I primi due assiomi del Pasch dicono:

1. Tra due punti si può tirare sempre una linea retta ed una soltanto.
2. Esiste sempre (almeno) un punto che giace all'interno di un segmento rettilineo dato.

Quest'ultimo assioma è del tutto equivalente al quarto assioma di Peano. Per quanto riguarda il primo, Peano osserva l'ambiguità insita nell'espressione "due punti" che ivi compare. Infatti si potrebbero indicare ora "due punti qualunque" ora "due punti distinti". Per cui traducendo nel linguaggio logico (peaniano) la prima parte del primo assioma potremmo avere rispettivamente:

$$a, b \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\, \supset .\, ab \,\varepsilon\, \mathrm{K}\mathbf{1}$$

oppure:

$$a, b \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\, a \text{ -} = b : \supset .\, ab \,\varepsilon\, \mathrm{K}\mathbf{1}$$

In questo secondo caso vengono esclusi i segmenti nulli. A parere di Peano, se si tiene presente il secondo assioma le parole di Pasch vanno intese come nella seconda delle due formulazioni interpretative. Peano vede ancora un'altra ambiguità nell'espressione "due punti": essa può indicare o la successione (disposizione) di due punti oppure l'insieme (combinazione) dei due punti. Nel primo caso l'interpretazione logico-simbolica della seconda parte del primo assioma di Pasch è:

$$a,b,c,d \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\, a = b \,.\, c = d : \supset .\, ac = bd$$

che è l'assioma 0.2 sui segmenti di Peano. Se invece assumiamo la seconda delle indicazioni possibili avremo:

$$a,b,c,d \,\varepsilon\, \mathbf{1} .\, a \cup c = b \cup d : \supset .\, ac = bd$$

che comprende anche l'assioma peaniano sopra richiamato. E' questa seconda interpretazione, a parere di Peano, quella autentica. L'assioma terzo delle *Vorlensungen* nel linguaggio logico (peaniano) è così trascrivibile:

$$a, b \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\, c \,\varepsilon\, ab : \supset : a \text{ -} = c \,.\, a \text{ -} = b .\, a \text{ -} \,\varepsilon\, bc$$

Questa espressione raggruppa tre proposizioni tra le quali una equivalente al sesto ed un'altra al terzo degli assiomi peaniani. Inoltre gli assiomi IV, V, VI, VII, VIII del Pasch corrispondono senza differenziazione rispettivamente agli assiomi VIII, IX, VII, X, XI di Peano. Fin qui le idee primitive utilizzate sia da Pasch sia da Peano sono "punto" e la relazione ternaria "$c \,\varepsilon\, ab$". Ma Pasch considerò, fra le idee primitive, a differenza di Peano, anche quella di "porzione di piano", per cui l'assiomatica successiva (dall'ottavo assioma delle *Vorlesungen*) si differenzia necessariamente da quella peaniana. Peano, dunque, compie una revisione critico-logica del sistema proposto da Pasch. Da un lato chiarifica ambiguità e complessità di formulazione negli assiomi e dall'altro (ed è il fatto tecnicamente più importante) riduce l'apparato delle idee primitive eliminando proprio tra queste quella intuitivamente meno immediata.
Un altro significativo versante del confronto tra Pasch e Peano riguarda la trattazione del *trasporto* o *moto* ("movimento") delle figure geometriche e quindi della *congruenza.* In questo modo la discussione si sposta dai fondamenti della geometria di posizione a quelli della geometria metrica. A p. 101 delle *Vorlensungen,* Pasch stabilisce i dieci

postulati che regolano il movimento, le trasformazioni, le congruenze in geometria. Peano ha un'altra concezione del movimento delle figure, lo considera come una *trasformazione* di punti in punti. In questo modo toglie a questa nozione ogni possibile senso fisico. Egli basa tutto sulla nozione di *affinità* che è concetto puramente matematico. Per Peano una *affinità* è "una corrispondenza *m* fra punto e punto nello spazio, tale che se il punto *e* giace tra *a* e *b* anche fra i loro corrispondenti *mc, ma* ed *mb* passa la stessa relazione". Nel *gruppo* delle affinità Peano individua mediante l'introduzione di opportuni postulati, il *sottogruppo* dei "moti".

Per Pasch e per Peano la congruenza diventa una relazione del tutto astratta (indipendente dal movimento fisico), autonomamente impostata, senza connessioni a schemi matematici fondamentali generali. Interessante osservare quanto dice Piero Benedetti in un dei volumi dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* (1937) a tal proposito[5]:

> Si deve però riconoscere che, spogliata l'idea del movimento della sua essenza intuitiva, essa diviene superflua, identificandosi logicamente con quella di «figure congruenti», che si può assumere direttamente come primitiva. Così fa M. Pasch, il quale considera la congruenza come una relazione primitiva tra gruppi finiti di punti, stabilendo alcuni postulati riguardanti coppie, terne e quaterne di punti [...] .

Possiamo rilevare che quanto sostiene Benedetti condurrebbe a vedere come superflui gli studi fatti da Pasch, Peano e quindi Pieri e da Hilbert (tanto per citare) orientati decisamente alla rigorizzazione dell'idea di "moto" in geometria. Pertanto merito di Pasch e di Peano è proprio quello di aver caratterizzato la nozione di moto, equivoca se solo intuitivamente applicata in geometria.

4. Conclusioni

Vorremmo innanzi tutto mettere in luce storicamente il fatto che Pasch, dopo aver influenzato direttamente con la sua opera sia Peano sia Hilbert, abbandonò la posizione epistemologica secondo la quale la fondazione della geometria è autonoma rispetto a quella dell'aritmetica. In una lettera a Frege dell'11 febbraio 1894 viene significativamente illustrata la sua posizione, a quella data, sui fondamenti della geometria.

> [...] Posso concordare completamente con la sua [di Frege] esigenza che non debbano tollerarsi ipotesi tacitamente assunte. Ho compiuto nel 1882 un tentativo di rispettare tale esigenza per la geometria, nel mio libro *Vorlesungen über neuere Geometrie*; oggi però, da un punto di vista generale, dissento in parte delle motivazioni che allora mi muovevano.
> La rigorosa fondazione della geometria dovrà essere preceduta da quella dell'aritmetica.
> A questo proposito non sono finora riuscito a convincermi di scorgere nell'aritmetica solo una parte della logica .

Pasch nelle sue *Vorlesungen* aveva comunque scritto:

> Se si vuole che la geometria sia veramente deduttiva, il processo di deduzione deve essere totalmente indipendente dal significato dei concetti geometrici, così come deve essere indipendente dalle figure; si possono considerare solo le relazioni fra i concetti geometrici espresse nelle proposizioni e nelle definizioni utilizzate.

D'altro canto Peano dice ad esempio "Il segno **1** leggasi *punto*", e Pieri quando

---

[5] Vedi P. Benedetti, "Fondamenti di geometria", in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi* (a cura di L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli) vol. II, parte II, Edit. Ulrico Hoepli, Milano, 1937, p. 25

specifica la categoria di *astratto* in geometria, sostiene che vuol dire "prescindere da ogni interpretazione *fisica* delle premesse, e quindi anche dalla loro *evidenza* ed *intuitività geometrica*"[6]. Tuttavia questi autori legittimarono le *nozioni primitive*. Con Hilbert c'è invece un deciso atteggiamento formale. Ma riteniamo che anche da Hilbert la geometria non sia stata certamente intesa come un "gioco formale"[7] . Anche per lui il riferimento ad Euclide non era casuale. Con Hilbert d'altra parte le problematiche metateoriche per la geometria sono esplicitamente contemplate e trattate, dando nuovi spunti alla ricerca sui fondamenti. Anche se tematiche come quelle dell'indipendenza furono affrontate dalla scuola di Peano.
Il "programma fondazionale peaniano" è diverso certamente da quello sia di Frege sia di Hilbert. Per Peano il programma di rigorizzazione del corpus matematico non prevede necessariamente la ricerca di un'unitarietà teorica di tutte le conoscenze matematiche attorno ad alcuni concetti basilari di natura logica. Secondo il Nostro la matematica è costituita da varie branche, ognuna delle quali può essere autonomamente ed indipendentemente considerata rispetto alle altre. Così quasi contemporaneamente, alla fine degli anni '80 dell'Ottocento, Peano scrive i suoi lavori principali sui fondamenti della matematica: sull'aritmetica, sulla geometria e sul calcolo geometrico (base per la meccanica). Questi lavori, a parte talune connessioni senz'altro significative, sono sviluppati senza la ricerca di possibili concetti unificanti, come invece accadeva in Frege. La posizione di Peano e della sua scuola, molto simile a quella di Pasch, è tutto sommato "neoeuclidea". A parte l'utilizzo di un apparato logico linguistico, di una ideografia logica, ed un modo di esprimersi implicitamente formale, ciò che conta in Peano è aver ben determinato nozioni primitive (la cui origine è empirica) e assiomi (postulati) e sviluppare dunque la relativa teoria nel rispetto più assoluto del rigore logico. Concludiamo riportando il giudizio (che si commenta da solo nel bene e nel male) che qualche (indubbiamente di rilievo) rappresentante della scuola peaniana, dette sulle ricerche della propria scuola. Cesare Burali Forti nella sua *Logica matematica* (pubblicata nel 1919) dice:

> […] E' a proposito di merce estera, conviene far notare come, specialmente dagli italiani (!), si citi e si usi il caotico ed impreciso sistema geometrico dell'Hilbert, quasi non esistessero i sistemi semplici, chiari e precisi (ma sono italiani!), e ben superiori a quello dell'Hilbert, di M.Pieri.

Paolo Freguglia

---

[6] Si rimanda a M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali […]*, op. cit., pp. 50 e segg.

[7] Vedi U. Bottazzini, "I geometri italiani e i *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert", (Atti XVI Cong. UMI), Monograf, Bologna, 2000