

EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

Comitato scientifico:

Simonetta Bassi
Università di Pisa

Umberto Bottazzini
Università Statale di Milano

Michele Ciliberto
Scuola Normale Superiore di Pisa

Giuseppe Da Prato
Scuola Normale Superiore di Pisa

Paolo Freguglia
Università di L'Aquila

Mariano Giaquinta
Scuola Normale Superiore di Pisa, Centro di ricerca matematica "Ennio De Giorgi", Presidente

Angelo Guerreggio
Università Bocconi di Milano

Michele Marini
Fourweb Service srl

Stefano Marmi
Scuola Normale Superiore di Pisa, tesoriere

Massimo Mugnai
Scuola Normale Superiore di Pisa

Pietro Nastasi
Università di Palermo

Luigi Pepe
Università di Ferrara

Manfred

Conrad

de

Manfred

Conrad

de

D E
CONSTRUCTIONE
ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM
PRIMI GRADUS

AUTHORE

GABRIELE MANFREDIO

PHILOSOPHIÆ DOCTORE BONONIENSI

Philosophicæ, quæ in Patria, est Academiæ
Socio Ordinario.

ILLUSTRISSIMO atque AMPLISSIMO

BONONIENSI
SENATUI.



BONONIÆ MDCCVIL

Typis Constantini Pisarii. Superiorum permisso.

1953

CONFIDENTIAL

MEMORANDUM FOR THE DIRECTOR

FROM: [illegible]

SUBJECT: [illegible]

1. [illegible]

2. [illegible]

3. [illegible]

4. [illegible]

5. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Illustrissimi, atque Amplissimi
PATRES.



Agna est, Illustrissimi, atque Amplissimi PATRES, quam bonarum artium præsidio, & augmento conferre soletis non cura modo, & vigilantia, sed & utilis atque opportuna opera, & efficax auxilium. Florentissimam nempe hac in Urbe Academiam habetis, Vestraque sustinetis munificentia, quam unice placendi Vobis viam concivibus Vestris intento veluti digito PATRES prudentissimi monstratis, & dulce simul incitamen-

4
tum præmii spem additis, & præmium ipsum, sola meritorum ratione attenta, identidem indulgetis; Quo ipso, & nobis virtutum studia incenditis, & vetus doctissime Civitatis nomen servatis, & maximam apud exteras ipsas nationes gratiam initis, cum clarissimos ex Vestro hoc Lyceo Viros promitis, & per ipsas rogati spargitis, & elargimini; ut ea quibus nostra, hæc secula abundant Scientiarum incrementa, Vos etiam, Vestrumque hoc Athenæum, non ultimum quasi fontem agnoscant. Qua propter id nobis, quibus hac in Urbe nasci, Vestroque, Illustrissimi, ac Amplissimi VIRI, beneficio meliores inter Scientias educari contigit grati animi iniungit officium, ut generosam Indolis Vestræ magnitudinem prædicemus, & Vestrum esse quidquid hac in Urbe à doctissimis, quos Vos ipsi assignatis Præceptoribus nostris didicimus, unanimiter fateamur. Atque id quidem in primis, quod Opusculo huic materiam facit omni titulo Vestrum esse nemo inficiabitur; est enim hæc ipsa Ars, quam hinc primùm à rudimentis, ac à prima

5
veluti foetura excitavit Celeberrimus P. Bonaventura Cavallerius, quem Vos ipsi maxima, qua soletis consilii maturitate ad Vos accersistis, atque accersitum impensa Liberalitate fovistis, Vestrumque effecistis. Crevit illa deinde, & ad externos migravit; unde iam, mutato non tantum nomine, sed & Analyticam induta spetiem, & quantum in melius conversa! Italiae nunc primum Vestrum precata patrocinium se denuò redux committit tenui hoc liberculo excepta, qui primus in omni Italia Analysim hanc ex professo traditurus prodit, atque vulgatur. Dum igitur Amplissimo Vestrorum Coetui hoc quaecumque studiorum specimen, quæ Vestro hoc in Gymnasio renovantur humillimè exhibeo, non quidem quasi quidquam Vobis largiturum me sisto, sed quod unice Vestrum est tandem Vobis ipsis redditurus accedo, nec nisi timidus, oblatae scilicet rei tenuitate perspecta. Nec tamen id mihi minorem fiduciam facit, fore siquidem ut benigno aspiciatis Vultu opusculum, quo Vestrum imploro auctorabile patro-
ci-

cinium; ea nempe estis Clementia, ut quæ passim Vestro firmanda præsidio hoc de Lyceo ad Vos quotidie confluunt tamquam si Vestra non essent humanissimè excipiatis, at quasi non Vestra modo, sed & Vestrum pars etiam forent potentissima protectione tueamini. Hanc operi huic, hanc mihi ipsi, PATRES Illustrissimi, atque Amplissimi exopto, & supplex posco, & confido etiam, tanto me auctum auspicio majora, & Vestro digniora nomine, & multa, qua Vos veneror observantia in dies daturum. Deus Optimus Maximus servet Vos diù Illustrissimi VIRI, & Amplissimi PATRES, felici Scientiarum progressui, Urbisque fausto Regimini natos

DD. VV. Illustriss.^{rum}, atq; Ampliss.^{rum}

Bononiæ Kal. Ianuar. 1707.

Humillimus Devotissimus, atq; Addictissimus Servus, & Client

Gabriel Manfredi.

PRÆFATIO.

7



*T*Radimus in hoc opusculo Constructionem Equationum Differentialium primi Gradus ex collectis, & in ordinem dispositis, & analyticè demonstratis speciminibus, quæ clarissimi nostro hoc ævo geometræ in libris sparsim, nullo quidem ordine, nulla ve methodi ratione habita, prout passim invenerunt publico sunt elargiti. Ac ne quidem totam hanc funditus materiam exhaustam esse speramus, est enim illa, non viribus modò nostris, quas infirmas admodum fatemur, adhuc imperuia, sed quantum huc usque constet, incompleta adhuc, & mutila, ut hac de re tractatum absolutissimum ex iis, quæ ad nos usque pervenerunt inventis frustra desideres. At vero, cum plura tamen extent à recentioribus ad methodi saltem exordium conscripta, eaque non quidem ordinatim, & ad unum quasi finem collimantia, sed solo inventionis ordine servato in Literatorum diariis, quæ quotidie vulgantur diligentissime inserta sint, ac præcipue in actis Eruditorum, quæ Lipsiæ accuratissimi collectores imprimunt, ac in actis Regiæ Scientiarum Academiæ, ac alibi prostant, fas erat, ut hæc omnia clarissimorum virorum Schediasmata novam omnino artem claudentia, & ferè exemplis plusquam regulis indicantia in ordinem revocarentur, & ab occultis Analyticis fontibus immediate derivarentur, ut si methodum completam non suppeditent, id saltè quod continent, quod nec modicum est, nec inutile, præ oculis poneretur, ad commodiorem facilitatem deduceretur, atque ingens labor ijs demeretur,

retur, quibus hæc cordi sunt, quem generaliorum regularum coniectura, & deductiones per pressa ut plurimum exempla particularia injungunt, atque præferunt; dum interim Clarissimi in hoc calculo primi inventoris Leibnitzij opus de scientia Infiniti, quo id totum pro re nata à principijs usque dilucidetur expectamus, atq; otium tanto, tamq; utili operi necessarium apprecamur.

Libellus itaque noster Clariss. Marchionis Hospitalii celeberrimum opus de Infite Parvis excipiet, non quidem quasi ab illo secundus haberi possit, qui tanto discriminis intervallo ab illo degreditur, sed quod post calculi differentialis fundamenta ibi dilucide adeo perspecta integralis calculus, de quo hic tractatio qualiscumque instituitur Geometriæ cursum per agentem se sistat. Sicuti enim seriei cujusvis quantitatum continue fluentium, hoc est variabilium, si ve ille sint cujusvis Curvæ ordinatæ, si ve quævis alia series assignatur per differentialem calculum fluxio, hoc est minimi incrementi quantitas, sic vicissim in nostro calculo integrali, data fluxione, si ve differentiali quantitate invenitur quantitas, cui competat, atque inde quadraturæ spatiorum, rectificationes curvarum, cubaturæ solidorum, superficierumque compilationes derivantur, sed & Curvarum innumerabilium, ex data Tangentium conditione, & quamplurimis alijs proprietatibus descriptiones efficiuntur, quas calculi integralis expertibus nullatenus in potestate esse crediderim. Neque ideo opusculum in ordine ad usus integralis calculi in his præstandis disposuimus, Clariss. Hospitalium imitati, qui varias laudati operis sui sectiones per diversos differentialis calculi usus distinguit, tum, quod id non ita pridem Clariss. Carre egregie omnino in opere suo præstiterit, cum vero, quod multa ad integralem calculum pertinentia,

tia, qualis est reductio æquationum differentialium, & alia huiusmodi commodius in ordinem venire viderim si totum opus ad earundem differentialium æquationum constructionem referendo dirigerem. Illud propterea in VI. omnino Sectiones partitus sum. Prima viam ostendit, qua ex datis quæsitæ alicuius curvæ proprietatibus nonnullis ad æquationem illius differentialem perveniri possit; neque enim de illis ordiendæ erat dissertatio, nisi prius ratione qua ad illas quandoque perducamur satis perpensa. Postquam vero ad talem æquationem perducti fuerimus, siquidem algebraicæ fuerit integrabilis ad secundam pertinet Sectionem, quæ spectat quidquid de spatijs algebraicæ quadrabilibus, curvis rectificabilibus &c. huc usque sit proditum. Si vero æquatio algebraicæ non sit integrabilis, vel unicam tantum indeterminatarum, vel ambas (præter utriusq; differentiale, quod in omni æquatione differentiali haberi necessum est) continebit. Tertia Sectio considerat ex illis, quæ unicam tantum habent indeterminatam illas tantummodo in quibus differentialia primam dimensionem non superant; quarta vero illas, in quibus differentialia ad quamvis potestatem sint elevata. Quinta porro æquationes construit, quæ utramq; indeterminatam cum habeant, separabiles illæ tamen ab invicem existunt. Sexta demum varias ex illis prosequitur, quæ suas sic sibi mutuè implicitas indeterminatarum expressiones sortiuntur, ut multo opus sit artificio ad earum separationem instituendam, & constructionem ex inde geometricè derivandam.

Atque hoc quidem id totum est, quod præsentî opusculo peragitur, quo sane integralis calculi prima tantum rudimenta adumbrare præsumimus, hunc porro in finem, ut si quis post

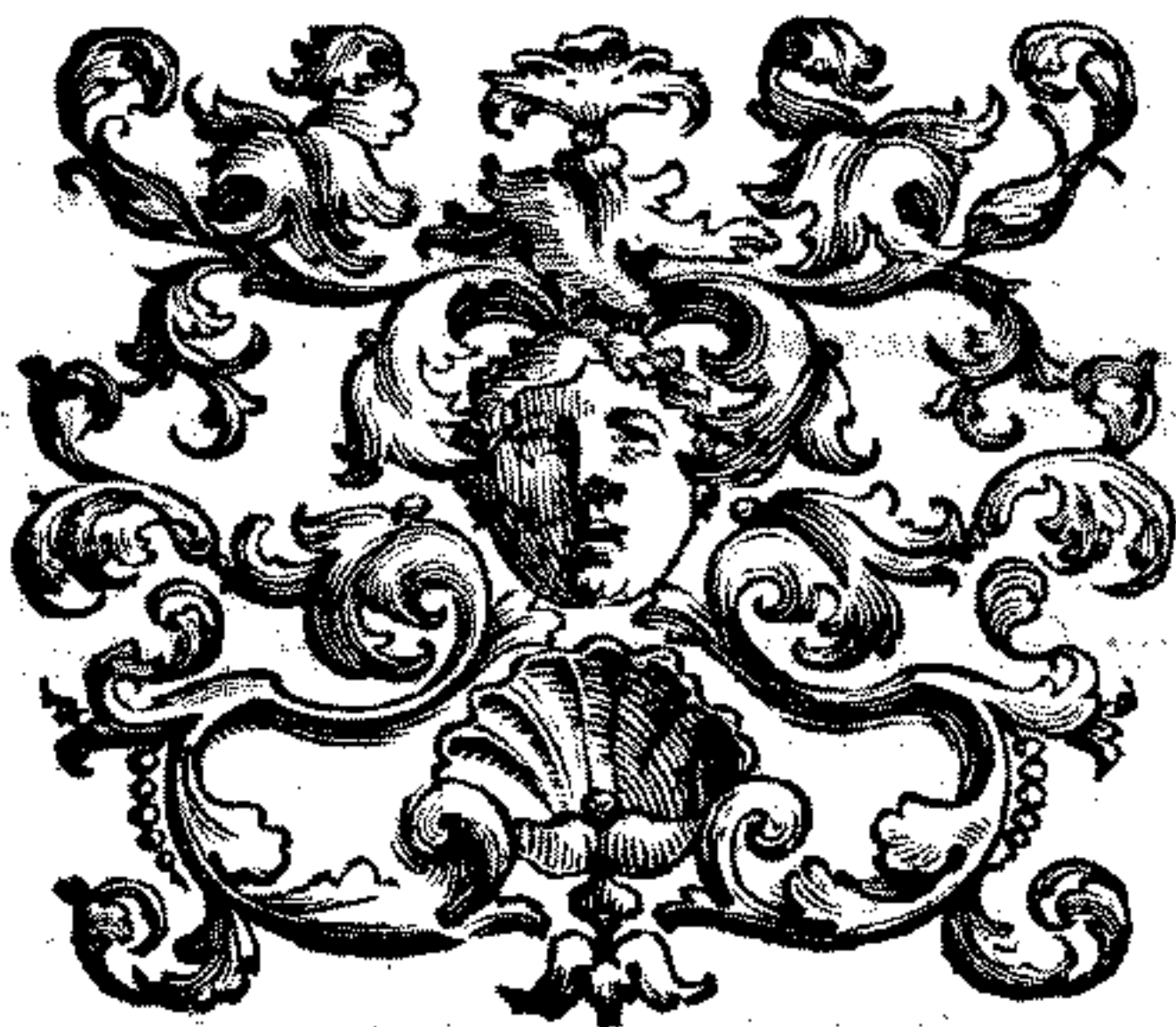
differentialem ulterius pergere, & hanc analysim intrinsecus perlustrare velit, facem veluti præferamus, & prima saltèmpandamus vestibula, quod novam scientiam ingressuro nullius omnino usus esse non poterit. Speramus etenim postquam ea ritè intellecta fuerint, quæ principijs necessaria judicantes ex actis Lipsiensibus explicanda selegimus ad reliqua etiam Equationes differentiales primi gradus respicientia, quæ inexplicata reliquimus stratam fore viam, vel certè superabilem; neque enim omnia, quæ in actis extant prosequi vel opportunum erat, vel etiam possibile, quandoquidem nova, & nova quotidie vulgantur, nec omnia finito hoc, & terminum habente opusculo claudi possent. Quin & à quo vulgando liberculo insistimus acta Annorum 1702., 1703. ad nos pervenerunt, ac in illis Schediasmata Leibnitziana Mensium Maii, & Ianuarii, quæ quidem scientiam latè promonent, & sola Opusculo sufficientem materiam præbere possent. At nobis, quibus brevitati parendum erat, & iam totius opusculi textura erat absoluta ab his fuit abstinendum, ut & à quamplurimis, ea tantum attigisse contenti, quæ Tyronibus primam lucem inducere possint, quorum tantum gratia labor hic est institutus.

Usus porro calculi quod attinet, is sanè ingens est, & ad omnes Matheseos partes, maximo illarum incremento protenditur. Est enim universa Analysis nil aliud, quam ipsa genuina, & infallibilis veritatis inveniendæ methodus, quam adeò si Mechanicis, Staticis, Nauticis, Astronomicis, cæterisque Mathematicis usibus applices, innumeram veritatum segetem colliges. Atque hinc tot recentiorum Geometrarum

in ipsis etiam Physico-mathematicis tractatibus inventa derivantur, quæ nostrum hoc seculum præ cæteris scientiarum, artiumque incremento insigne efficiunt. Hinc Horologiorum æquabilitas, elaterum & catenarum curvitas, navium opportunissima constructio, aquarum per cujusvis figure foramina fluentium determinatio, orbium planetarum exactissima inventio, & plurima ad humanos usus perquam necessaria derivantur. Nos certè materiam humanis civilibusque usibus accomodatam hic tradituros adeo non diffidimus, ut Philosophicæ quam hic Bononiæ in Edibus Domini Com. Marsigli habemus Academiæ, rem minimè inutilem oblatores speremus, & curæ qua Dominus ipse Comes studia Philosophica impense, & generosè fovet, & qua Doctissimi Coacademici ea quotidie augere student, quid opportunum pro instituti nostri ratione collaturos existimemus. Sed & illud in primis omni utilitate majus emolumentum accedit, ut recta ratiocinandi methodo, & continua in id, quod agitur animi adversione, Intellectus maturiori assuescat discursus rationi, neque jam, aut verbis, aut fallacibus moveatur coniecturis, sed veræ rationis vim, & robur ubique expetat, atque requirat. Quod quantæ sit utilitatis, & fructus non in Geometriæ tantum, sed & in omni civilis vitæ commercio nemo sanè non videt.

Illud tandem hic iterum, atque iterum testatum volumus, opusculum hoc quaecumque aliorum penitus cogitatis reffer-tum illis omnino adscribendum esse, &tribuendum. Debentur enim omnia celeberrimorum Leibnitzij, Bernoulliorum Fratrum, Hospitalii, Varignonii, & P. Grandi in-

Pisano Lyceo professoris egregij ingeniosissimis inventis, vel ex Libris erutis, vel per Literas nobiscum humanissime communicatis. Ordinem nos addidimus, & Analysim ubi de illa deesset, ad eorum utilitatem, qui in hisce mirabilibus Geometriæ arcanis experiri se volunt adiunximus, alias fortasse nonnulla, quæ huius calculi interiora respiciunt, quæque indigesta adhuc versamus, favente Deo, publici juris facturi.



SECTIO PRIMA.

Quomodo ex datis quæsitæ alicujus Lineæ proprietatibus nonnullis, ad æquationem illius Curvæ differentialem possit perveniri.

DEFINITIONES.

Prima Definitio.

1 uantitatem quamvis p dari per aliam, vel alias quasvis $x, z, \&c.$ nil aliud est, quam notum esse quomodo, data hac, vel his $x, z, \&c.$ ad cognitionem illius debeat procedi. Hinc si ex datis quantitatibus $x, z, \&c.$ quantitas p nota fieri possit ope lineæ determinati generis, vel æquationis determinati gradus, dicetur p dari per $x, z, \&c.$ algebraicè. Sin minus, dicetur dari tantum transcender. Sic $x^3 - axx$, datur per x , & a algebraicè. Peripheria verò Circuli datur per Radium tantum transcender.

Secunde Definitio.

2 uantitatem verò quamvis h ; sic dari per aliam quamvis k , ut tertia quæcumque l datur

datur per quartam m , idem est, ac eodem modo ex secunda k deveniri in cognitionem primæ h , quo ex quarta m devenitur in cognitionem tertiæ l . Vel clarius, si sint quatuor quantitates h, k, l, m , tales ut in prioris h valore, loco literæ k substituendo m , prodeat l , dicetur tunc h sic dari per k , ut l datur per m ; exemplum sunt ax , x , $\sqrt{aa+xx}$, ay , y , $\sqrt{aa+yy}$, quæ qua-

tuor quantitates tales sunt, ut in priori, si loco secundæ x substituatur quarta y , prodibit tertia ay
 $\sqrt{aa+yy}$

dicetur igitur ax sic dari per x , ut ay datur per y .
 $\sqrt{aa+xx}$ $\sqrt{aa+yy}$

Nuncque clarius intelligitur prima definitionis hujus expositio, patet enim, quod ex litera x devenitur in cognitionem quantitatis ax eodem modo, quo ex litera y devenitur in cognitionem quan-

titatis ay , siquæ quantitas ax sic componitur
 $\sqrt{aa+xx}$ $\sqrt{aa+yy}$

ex x , ut ay componitur ex y , quia ut data x in-
 $\sqrt{aa+yy}$
 notescat ax eadem operatio, tam geometrica,
 $\sqrt{aa+xx}$

quam arithmetica est instituenda, quæ & institui debet ut cognita y ad quantitatis ay cognitio-
 $\sqrt{aa+yy}$
 nem deveniamus.

De-

Definitio tertia.

3 **A**Equatio differentialis primi gradus pro aliqua Linea, five alicujus Lineæ est æquatio exprimens relationem quam habent ad invicem prima differentialia coordinatarum illius Lineæ. Nominine verò coordinatarum intelligo duas indeterminatas datæ naturæ, quarum data sit positio ad singula quæsitæ Lineæ puncta sufficienter determinanda. Sic $adx - 2ydy = 0$ est æquatio differentialis primi gradus pro parabola communi, quia exprimit relationem differentialium dx , dy linearum x , & y , quas summimus pro rectis se invicem in angulo recto decussantibus ut in Cartesiana Analyfi moris est; Verùm eadem $adx - 2ydy = 0$ non esset æquatio differentialis pro curva exempli gratia, cujus y quidem esset ordinata, x verò esset subtangens, quia ordinata & subtangens non sunt duæ coordinatæ pro curva describenda, cum data etiam earum longitudine non innotescat positio ipsarum, quò quæsitæ Lineæ puncta sufficienter determinentur.

4 Advertotantum, quod hæc differentialia coordinatarum, in omni æquationis differentialis membro eundem habitura sint numerum dimensionum, ut si in uno membro adfuerit dx^3 ; in aliis aderit quidem aut dy^3 , aut $dx^2 dy$, aut $dx dy^2$, sed nullibi aderit dy^2 tantum, vel dy , vel $dy dx$; uno verbo nullum aderit in æquatione membrum in quo dif-

fe-

ferentialia eundem dimensionum numerum simul sumpta non efficiant. Ratio evidens est ex eo, quod membrum in quo quantitates differentiales majorem numerum dimensionum sortirentur, tutò deleri posset ex æquatione, esset enim cæteris infinitè minus, ac proinde nil adderet illis. Hæc satis nota sunt, nec aliquid novi tradimus, undè ad rem properantes aggrediamur modum, quo hæ differentiales æquationes ex datis quibusdam proprietatibus Linearum sint eruendæ.

Prop. prima.

Fig. 1. **S**I detur æquatio exprimens relationem B T subtangents describendæ curvæ AD, in axe AB, aut subnormalis BC, aut tangentis DT, aut normalis DC, ad coordinatas AB, BD, & constantes quasvis, aut ad quantitates, quæ per coordinatas, & constantes quomodocumq; dentur; invenire æquationem differentiale primigradus curvæ describendæ.

Quoniam valor subtangents BT in omni curva cujus axis sit Linea recta (vocando abscissas $AB = x$ quæ scilicet in axe summuntur, & ordinatas $BD = y$) est $y dx = s$, & $BC = y dy = r$, & $DT = y \sqrt{dx^2 + dy^2} = t$, & $DC = y \sqrt{dx^2 + dy^2} = n$ opus erit tantum hos va-

lores substituere in locis Literarum s, t, r, n in æquatione-

tione data exprimente relationem harum Linearum ad coordinatas, vel ad quantitates, quę per coordinatas, & constantes quomodocumque dantur, & æquatio resultans erit manifestè æquatio differentialis primi gradus curvæ quęsitæ.

C O R O L L.

6. **M**anifestum est etiam talem æquationem differentialem inventum iri si data æquatio non Literas tantum s, t, r, n , cum coordinatis, & constantibus, sed & alias harum loco, vel cum illis contineret, quarum valores assignabiles sint in terminis quomodocumque per dx, dy , & coordinatas, & constantes affectis, quales sunt innumeræ, ut AG perpendicularis à vertice ad tangentem (cujus valor est $\frac{ydx - xdy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$) AH perpendicularis per verticem ad

normalē DC (quæ exprimitur $= \frac{y dy + x dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$) intercepta

AE inter tangentem, & verticem in axe conjugato (quæ est $= \frac{ydx - xdy}{dx}$) & complures aliæ functiones

(ut vocant) ipsius curvæ, quæ ex tangentis determinatione cum dependeant, differentialia dx , & dy in suis valoribus præferunt. Nemini puto remoram faciet horum valorum inventio pro Lineis AG, AH, AE. AG eruitur ex triangulorum similium $TBD,$
 C TAG

TAG analògia TD, DB :: TA, AG. Similiter AH, est quarta post CT, TD :: CA, propter similia CTD, CAH. Tandem AE habebitur si fiat TB, BD :: TA, ad quartam, quia similia sunt triangula TBD, TAE.

COROLL. II.

7 **S**I in Æquatione data exprimente relationem Linearum s, t, r, n aut similium, quas præced. Coroll. consideravimus ad constantes, & coordinatas, vel ad quantitates, quæ per constantes, & coordinatas quomodocumque dentur, adessent differentialia $ds, dt, dr, &c.$ est manifestum, æquationem quæ oriretur substitutis pro $s, t, r, &c.$ earum valoribus & pro $ds, dt, dr, &c.$ earum valoribus differentialibus, fore æquationem differentialem quidem, sed non primi gradus, quia $ds, dt, dr, &c.$ includunt differentialia secunda ddx, ddy . Debet igitur data æquatio esse Algebraica, saltem quo ad lineas $t, s, r, &c.$ ut differentialis æquatio quæ sita sit primi gradus, secus fiet altiorum graduum; de æquationibus verò differentialibus secundi, aut altiorum ordinum agere non est animus.

Exemplum.

8 **S**I æquatio $r, s, t, n, \equiv a^4$, productum nempe quatuor Linearum, BC, BT, TD, DC, debeat esse

esse in omni quæsita Lineæ puncto eadem constans a^4 . Substitutis ergò pro r, s, t, n , earum valoribus supra assignatis fiet æquatio $y^4 dy^4 + y^4 dx^4 = a^4 dx dy$, quæ est æquatio differentialis curvæ quæsita. Sanè si quæras hujus lineæ subtangentem ex data hac æquatione differentiali juxtà methodum vulgatam invenies illam $x = 2y^3$. Erit igitur tangens $aa y \sqrt{2}$

(num 5)

(1770)

Subnormalis verò erit $a^4 + \sqrt{a^8 - 4y^8}$, & normalis $= aa \sqrt{a^4 + \sqrt{a^8 - 4y^8}}$, quarum quatuor linearum productum est a^4 prorsus ut debuerat.

Exemplum II.

9 SI fuerit æquatio $r + x = \sqrt{xx + yy}$, ità ut triangulum ACD debeat semper esse Isosceles, & ejus latera AD, AC æqualia, differentialis æquatio erit (substituto $y dy$ pro quantitate r) $\frac{y dy}{dx} + x = \sqrt{xx + yy}$ unde $y dy = dx \sqrt{xx + yy} - x dx$. Si velis r equari ipsi EA, erit $\frac{y dx}{dx} - x dy = \frac{y dy}{dx}$ sive $y dx - x dy = y dy$.

Exemplum III.

(num. 5) **S**I debeat $t \rightarrow n$ esse $= a$, substitutis pro t , & n , earum valoribus $\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$, & $\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$,

erit (demptis irrationalibus) æquatio quæsitæ $yydx^4 + 2yydx^2dy^2 + yydy^4 + 2yydx^3dy + 2yydy^3dx = aady^2dx^2$. Eâdem regula si velis æquationem differentialem curvæ in qua $tt \rightarrow nn \rightarrow yy = aa$ erit illa $yydx^4 + yydy^4 + 3yydx^2dy^2 = aady^2dx^2$. Si porro debeat esse DE, ad EA, in ratione constanti p ad q, invento valore lineæ ED, ex triangulo EFD rectangulo, qui erit $\frac{x\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, erit analogia

$$\frac{x\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}, \frac{ydx - xdy}{dx} :: p, q, \text{ unde æquatio ab om-}$$

ni signo radicali explicita erit $ppyydx^2 + ppxxdy^2 - 2ppyx dx dy = qqxxdx^2 + qqxxdy^2$.

Exemplum IV.

SI jubeatur esse in quæsitæ curva $s^m, x^n :: a^m, b^n$,

fiet æquatio $y^m b^n dx^m = x^n a^m dy^m$, sive $b^{\frac{n}{m}} x^{\frac{-n}{m}} dx = \frac{a^m}{y} dy$. Quod si malis esse $x^n + y^m = s^r$, æqua-

tio erit $x^n dy^r + y^m dy^r = y^r dx^r$. Similiter & si detur æquatio $t^n = y^m a^{n-m}$, post substitutionem, & reductionem ad communem denomi-

na-

natorem, & divisionem æquationis per y^n si extrahatur utrinque radix à numero n denominata, & deinde quadretur utraque æquationis pars, reduce-

tur per antithesim æquatio ad $dx^2 = y^{\frac{2m-2n}{n}} a^{\frac{2n-2m}{n}}$

$dy^2 - dy^2$ undè $dx = dy \sqrt{y^{\frac{2m-2n}{n}} a^{\frac{2n-2m}{n}} - 1}$, quæ erit æquatio curvæ quæsitæ ad simpliciores terminos reducta. Haud aliter, si data æquatio jubeat TB esse quantamcumq; proportionalem post DB & AB si-
vè $s = x^{m-1}$, fiet æquatio $y^{m-1} dx = x^{m-1} dy$. Posita de-

nique æquatione $s^m + r^n = a$ fiet æquatio $y^m dx^{n+m} + y^n dy^{m+m} = a dy^m dx^n$. Hæ omnes æquationes inveniuntur substitutis pro s, r, t , earum valoribus, quos suprà assignavimus, & procedendo deinde circa æquationes inventas per has substitutiones, juxtà notas regulas pro æquationum reductione. (num. 5)

Exemplum V.

12 **S**I datam æquationem ingrediantur etiam quantitates transcendentes, scilicet transcendenter tantum datæ per x , vel y , vel utramque, & constantes, non erit difficilius æquationem obtinere differentialem; Ut si $s = p$, sitque p arcus cujus sinus sit y in circulo cujus radius sit a , data quædam constans; quo in casu p datur transcendenter per y ,
&

& constantem a . Opus erit tantum pro s ponere ydx , & fiet $dx = pdy$ æquatio differentialis quæsitæ in qua primæ tantum differentię reperiuntur cum p sit integrale ex quantitate $\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$, ita ut æqua-

tio $dx = pdy$ scribi possit $dx = dy \int \frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$ æquatio exprimens relationem primorum differentialium coordinatorum quæsitæ curvæ. Et patet quomodo si p non solum detur per y , sed etiam esset quantitas, quæ dari supponerentur per x , & y , quocumque modo imaginari hoc liceat (dummodo non dependeat à differentiis secundis ipsarum coordinatarum, aut ab altiorum graduum differentiis) ad æquationem semper perveniatur pro curva quæsitæ, in qua primæ tantum differentię reperiantur licet signis integralibus implicitæ sint. Dixi mox quantitatem p , sive arcum habentem pro radio a , & pro sinu y esse integrale ex $\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$. Res satis manifesta est.

Si enim sinus est y , sinus complementi erit $\sqrt{aa-yy}$; Iungantur simul quadrata differentialium sinus, & sinus complementi, fietque quadratum differentialis arcus $aady$, unde differentiale arcus $= \frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$, & arcus ipse $= \int \frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$

Pro-

Propositio II

SI detur relatio lineæ BT subtangentis describendæ curvæ AD cujus axis debeat esse linea quævis curva data AB, & ordinatæ perpendiculares ad axem, si detur inquam relatio lineæ BT ad suas coordinatas, vel ad quantitates, quæ quomodocumque dentur per coordinatas, & constantes, invenire æquationem differentialem primi gradus pro tali curva. Fig. 2.

13 Supponatur per quodvis describendæ curvæ punctum D ordinata DB eique infinite proxima db, quæ cum priore in C conveniat puncto evolutæ curvæ AB, voceturque $AB = x$, $BD = y$, BC radius circuli osculantis axim in puncto B sit $= q$. $dG = dy$, $Bb = dx$, producaturque Bb tangens axis donec cum tangente per D coeat in T, est manifestum fore DG quartam post CB, Bb :: CD, unde erit $= \frac{qdx + ydx}{q}$.

Undè propter similia Triangula dGD, DBT erit $BT = \frac{qydx - yydx}{qdy}$. In data igitur æquatione ex-

primente relationem coordinatarum ad BT, pro s, sive pro BT substituatur hic valor, orietur manifestè æquatio differentialis quæsitæ curvæ. Si ponatur curva cadere ad partes E, hoc est ad partes ad quas axis concavus est, subtangens BV facile eruetur $\frac{qydx - yydx}{qdy}$, vel $\frac{yydx - yqdx}{qdy}$.

14 **H**ic quoque si in æquatione data exprimente relationem subtangentis s ad coordinatas, vel ad quantitates, quæ dentur per coordinatas, & constantes adesset ds , æquatio resultans, substituto pro ds ejus valore contineret ddy , vel ddx , undè non esset primi gradus. Et si hîc quoque daretur non quidem subtangentis, sed intercepta inter tangentem, & lineam quæ perpendiculariter ducitur ad EC per C , relatio ad coordinatas, vel ad quomodocumque datas per coordinatas & constantes, semper facile erit ad æquationem pervenire, est enim hæc intercepta $CR = \frac{qydx + y^2dx}{qdy}$, quæ substituta in data æquatione loco literæ r nisi adsit in æquatione dr , orietur quæsitæ æquatio. Idemque de aliis lineis dicendum est, quæ ex tangente dependent, qualis esset perpendicularis à puncto C ad tangentem, & innumerae tales.

Exemplum.

15 **A**D dati circuli AB peripheriam tanquam axem curvam describere, cujus subtangens BT , sit equalis ordinatæ, ità ut sit ubique $s = y$. Si pro s ponas $\frac{qydx + y^2dx}{qdy}$, & pro q ponas a con-

stan-

25

stantem ex natura, circuli fiet æquatio $adx + ydx = a dy$. Si verò ad eundem axem descriptæ curvæ subtangens debeat esse ad y in constanti ratione a , ad b , ità ut $ay = bs$, erit æquatio $abdx + yb dx = aady$. Si esse debeat tangens $DT = t = a$, fiet æquatio (invento valore ipsius t , qui propter triangulum rectangulū DBT est $\sqrt{\frac{aayydx^2 + y^2dx^2 + 2ay^2dx + aayydy^2}{aady^2}}$)

pro curva quæsitæ $dx = dy \sqrt{\frac{a^2 - aay}{ay + yy}}$, aut quod idem est, $dx = dy \sqrt{\frac{a^2 - aay}{ay + yy}}$

Exemplum II.

16 **S**I, existente axe AB curva quavis data, debeat curva ducenda AD abscindere subtangentes BT æquales radiis osculantis circuli in correspondētibz punctis axis, hoc est si debeat esse $s = q$, æquatio erit $dx = \frac{qqdy}{yq + yy}$. Si subtangens debeat efficere $x + y$, sive data æquatio sit $s = x + y$, erit quæsitæ $qydx + ydydx = qydy + qxdy$. Si subtangens s debeat esse ad subtangentem ydx (quam haberet curva quæsitæ, si axis ejus in rectam distenderetur) in ratione constante a ad b , esset æquatio $aqydx = bqydx + byydx$, quo casu (ut in aliis multis qui

D oc-

occurrere possunt) differentialis æquatio statim reducibilis est ad algebraicam, provenit enim, diviso utrobique per ydx , $aq = bq + by$, & $y = \frac{aq - bq}{b}$; debet igitur radius osculi CB produci in D ita ut BD sit ad BC, ut $a - b$ ad b ut sic inveniatur punctum D in curva AD constitutum, cujus subtangens BT, sit ad subtangentem quam haberet si ejus axis AB in rectam abiret (in variata abscissarum quantitate) ut a , ad b .

Propositio III.

Fig. 1.

SI dari supponatur relatio spatii ABD curva quæ sita ejusque coordinatis comprehensi, vel curvæ AD, vel solidi orti ex rotatione curvæ ipsius quæ sita circa axium alterutrum, datamve quomodocumque positione rectam, aut superficiem, quæ ex tali revolutione sit oritura ad spatia quævis, vel lineas, quæ per coordinatas, & constantes quomodocumque dentur, invenire æquationem differentialem primi gradus curvæ quæ sita.

17 Ordinatæ BD, ducatur infinite proxima bd, & DF, infinite proxima df; erit spatiolum DBbd elementum spatii ABD $= ydx$, unde vocando p spatium ABD erit $dp = ydx$. Similiter spatium infinite parvum FDdf, quod est elementum spatii ADF, est $= xdy$, quare, vocando q spatium ADF, erit $dq = xdy$.

Li-

Lineola verò $Dd \sqrt{dx^2 + dy^2}$ erit elementum curvæ AD, quam proinde vocando r , erit $dr = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Si autem ratio radii ad sui circuli integram circumferentiam vocetur ut a ad b , concipiatur autem figura ABD in gyrum ferri circa immotum axem AB, & sic una quævis ordinata BD circulum cujus illa sit radius describere, erit hujus circuli tota circumferentia $= \frac{by}{a}$, quæ ducta in radium dat duplum arcus

circularis, undè hæc area futura est $\frac{byy}{2a}$, ducta au-

tem hac area in altitudinem infinitè exiguam Bb, fit $\frac{byydx}{2a}$ elementum solidi ex rotatione figuræ

ADB circa axem AB geniti, quod solidum vocando s , erit $ds = \frac{byydx}{2a}$. Nec absimiliter reperiemus, quod

vocando t solidum, quod fit ex gyro figuræ AFD circa axem AF, erit futurum ejus differentiale $dt = \frac{bxxdy}{2a}$. Superficies porro orta ex rotatione AD cir-

cà AB habet pro elemento productum ex lineola Dd per totam circuli radium DB habentis peripheriam circulariter ducta, hoc est $by \sqrt{dx^2 + dy^2}$, quare

$du = \frac{by \sqrt{dx^2 + dy^2}}{a}$ si u sit hæc superficies, & eodem

prorsus modo $dv = \frac{bxx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{a}$ si v concipiatur esse

esse superficies orta ex rotatione AD circa AF. Ad
inveniendam igitur æquationem differentialem cur-
væ cum datur relatio quantitatum $p, q, r, \&c.$ ad co-
ordinatas, vel ad quantitates, quæ dantur per coor-
dinatas, differentietur æquatio data exprimens hanc
relationem, & loco differentialium $dp, dq, dr, \&c.$
ponantur mox inventi valores, eritque æquatio dif-
ferentialis primi gradus pro curva quæsitæ.

COROLL.

18 **Æ**quationem igitur datam, ne ingredian-
tur quantitates per dx , vel dy compo-
sitæ, quales sunt subtangens, subnormalis, & reliquæ
quarum determinatio à tangētis determinatione
pendet, quasque prima propositione consideravi-
mus, tunc enim in differentiatione, quæ debet ha-
beri, aderunt ddy, ddx , efficientia æquationem pro
curva quæsitæ, non primi gradus, sed altioris. Sed
& alios casus dari contingit, quibus æquatio per re-
gulam traditam reperta, primum gradum excedat,
ut si æquationem datam ingrediantur quantitatum
 $p, q, \&c.$ altiores potestates pp, p^3 , aut etiam earum
productum $ppq, pt, \&c.$ post quarum quantitatum
differentiationem quantitates ipsas p, q , transcenden-
tes, adhuc in æquatione remanere necesse est, unde
ad tollendas illas, nova sit opus differentiatione. Si
quantitates datæ per ddx , vel ddy æquationem da-
tam

tam ingrediantur, aut quantitates per altioris generis differentialia expressæ, idem succedet, & in pluribus alijs casibus, quos singillatim distinguere longum esset.

Exemplum.

19 **S**olidum quod fit, ex figura quæsitæ AD circum axem AB rotata, debet esse æquale ei quod circum axem conjugatum AF rotata pariter producit, scilicet $t = s$, & $dt = ds$, sive $\frac{yyb dx}{2a} = \frac{xxb dy}{2a}$; ergo dif-

ferentialis æquatio quam quærimus erit $xxdy = yydx$. Si autem solidum ex rotatione figuræ circum axem AB debeat esse æquale solido, quod habeat pro altitudine constantem a , & pro basi planum æquale complemento figuræ quæsitæ, sive æquale spatio AFD, hoc est æquatio data sit $s = aq$, & $ds = a dq$, substitutis pro ds , & dq eorum valoribus orietur $\frac{yyb dx}{2a} = axdy$, & $yyb dx = 2aaxdy$. Si spatium

ABD debeat esse ubique æquale rectangulo constantis in curvam AD, vel $p = ar$, erit $dp = adr$, unde $ydx = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$, & inde $dx = a dy$. Si solidum

aa constantis quadrati in curvam debeat æquare solidum s , sive $aadr = ds$ erit $yyb dx = aa\sqrt{dx^2 + dy^2}$

erit

erit postquam quadrando surdas quantitates redu-
xerimus, & alia de more peregerimus $dx = \frac{2a^3 dy}{\sqrt{y+bb-4a^2}}$.

Exemplum II.

20 **S**I summa cuborum coordinatarum æquare
debeat solidum ex revolutione ABD circà
AB, erit $s = x^3 + y^3$, & ds , sive $yyb dx = 3xx dx +$
 $3yy dy$, vel $yyb dx = 6axx dx + 6yyady$. Quod si
solidum illud s debeat esse ad cylindrum basis cir-
cularis DB altitudinis verò AB ut x , ad y , erit
 $s, byyx :: x, y$, undè facta æquatione $byxx = s$, &
 $bxxdy + 2byxdx = ds = byydx$, & habetur æqua-
tio quæsitæ $xxdy + 2yx dx = yydx$. Si superficies
solidi s , quæ est u ad summam quadratorum ex co-
ordinatis, constantem rationem servare jubeatur
quam a ad c , erit data æquatio $cu = axx + ayy$, un-
dè $cdu = 2axdx + 2aydy$ seu $cby \sqrt{dx^2 + dy^2}$
 $= 2aaxdx + 2aaydy$, & quadrando $ccbbyydx^2 +$
 $ccbbyydy^2 = 4a^4xxdx^2 + 4a^4yydy^2 + 8a^4xydydx$.

COROLL.

21 **E**X methodo quâ utimur ad eruendas has
æquationes differentiales cum datur relatio
spa-

spatii curvæ quæ sita comprehensi ad coordinatas, facile est invenire æquationem differentialem primi gradus etiã in curvis quarum axis sit data quævis curva, quando detur æquatio, quæ spatii magnitudinem, aut curvæ ipsius longitudinem ad coordinatas, vel quantitates, quæ per coordinatas dentur utcumq; referat, dummodò (quod pro lineis ad axes rectos relatis adnotavimus) nō appareant, aut spatiorū, aut curvæ ipsius altiores dimensiones, in equatione data, & non adsint alię quãtitates, quę per dx , & dy dentur, qualis esset subtangens, & aliæ à tangents determinatione pendentes. Si exempli causa velis curvam AD suas correspondentes in axe ordinatas AB $\rightarrow$ BD ex æquare; inventa $DG = \frac{qdx + ydx}{q}$ si (nu. 18.)

(nu. 18.)

Fig. 2.

(nu. 13.)

eius quadrato addas dy^2 erit Dd elementū curvę AD $= \sqrt{\frac{qqdx^2 + yydx^2 + 2qydx + qqdy^2}{q}} = dy + dx$ ex hy-

potesi. Quæ æquatio reducetur ad $dx = \frac{2aady}{yy + 2ay}$, si

curva AB, quæ axis est, jubeatur esse circulus radio a descriptus. Si elementum spatii ABD quæsiveris, erit (subducto $CBb = \frac{qdx}{2}$ ex CDG quod est

$= \frac{qqdx + yydx + 2qydx}{2}$) reliquum trapeziolum

DdbB elementum quæsitum $= \frac{yydx + 2qydx}{2q}$, un-

dè

dè & æquationes eruere in promptu erit cum dabitur proprietas spatii quod quæsitæ curva ad axem curvatum posita debeat continere.

Propositio IV.

Fig. 3.

D Escriptis infinitis Curvis algebraicis similibus, & circa datum axem AT , punctumque in illo A , similiter positis, axemque in uno, pluribusve punctis L secantibus, assumptoque in earum unaquaque LE , LG arcu LE , LG eidem datæ constanti a ubique æquali; quæritur curvæ sic descriptæ BEG æquatio differentialis primi gradus.

22 Quamvis æquationes, differentiales curvarum in gratiam tantum constructionis eruendæ hic consideremus, quem sanè in usum inutile videri posset hic curvæ BEG æquat. differentialem quærerere, cujus constructio, ex hypotesi, assumptis arcubus LE , LG datæ a æqualibus expeditur, inveniendæ nihilominus est hæc æquatio, quæ viam sternit, qua in huiusmodi innumeris casibus ad æquationes inveniendas gradiamur, simulque Theorematum, haud contemnendorum, fons est, & origo.

23 Nomine curvarum similium intelligimus curvas ejusdem nature, in quibus Parametri, sive constantes sunt in eadem ratione. Hinc si curvarum æquatio unam tantum constantem siue parametrum contineat, ut parabola ad axem, & verticem axis relata

lata erunt omnes parabolaë ad unum axem, & axis verticem relatæ invicem similes. Sed si curvarum æquatio duas, vel plures constantes includat, ut ellipsis, erunt similes illæ in quibus singulæ parametri unius, ad singulas parametros homologas alterius eandem servabunt rationem.

24 Assumpto igitur quovis puncto E in data curva BEG, eique infinite proximo G, ducantur per E, & G curvæ genitrices EL, GL, perque punctum A jungatur AE curvæ LG occurrens in F, & per E ducatur EC tangens curvam genitricem EL in E, jungaturque AI parallela ipsi EC, producatunque EG faciecula curvæ BEG donec in T secet axem AB, tangatque sic datam curvam in E, & secet AI productam, si fuerit opus, in H. Data hac tangente, non poterit latere æquatio differentialis curvæ propositæ, ut mox patebit. Ponamus curvas EL, GL, omnesq; reliquas illis similes, ad axem AB, punctumq; in illo A referri, per ordinatas angulum quemvis cum axe facientes. Est igitur per E ordinata EO, assumanturque $AO = x$, $OE = y$ ordinatæ curvæ datæ EG; Subtangens itaque OC curvæ LE in puncto E vocetur s, & tangens EC vocetur t; parameter autem quævis lineæ EL vocetur $= z$, constans quidem respectu diversorum in eadem curva EL punctorum, sed variabilis respectu diversarum curvarum EL, GL. Clarum est, ex natura curvarum similium circa eundem axem, idemque in illo punctum similiter lo-

tarum fore ut parameter una lineæ EL ad homologam parametrum lineæ GL, ita EL, FL, sive z , $z + dz$:: a , ad FL, quæ proinde erit $az + adz$, ex qua de-

mendo $GL = a$, reliquum erit $\frac{adz}{z}$, = GF. AE

verò ponatur = u , & quoniam iterum z , $z + dz$:: AE, AF, erit $AF = uz + u dz$, unde $EF = \frac{udz}{z}$.

Sed triangula EFG, EAH sunt similia, eo quod FG tangens curvæ LF in puncto F (quod puncto E similiter positum est propter rectam AEF) sit parallela tangenti EC, & lineæ HA, igitur $HA = a$, quod constructionem elegantissimam suppeditat, qua in curva BEG per datum punctum E quodvis tangens ducatur, ducta AH per A parallela tangenti quæ per E ad genitricem curvam EL inclinatur, & assumpta $AH =$ constanti datæ a , sic enim junctæ EH tangens erit. Triangula porro ECT, HAT sunt similia, ergo EC, AH :: CT, AT, & dividendo EC - AH, AH :: AC, AT, sive $t = a$, $a :: s - x$, $AT = sa - ax$, unde dempta $OA = x$, reliquum

$OT = \frac{sa - xt}{t - a}$ subtangens curvæ propositæ BEG,

quæ cum ex canone universalis sit $= ydx$, erit $sady - xtdy = tydx - aydx$, in qua æquatione signa pos-

sunt

sunt esse varia, pro varia puncti O positione respectu puncti A . Posito deinde abscissam quamvis curvæ LE esse $PA = q$, & ejus ordinatam PQ in angulo QPA ipsi EOA æquali esse $= r$, invenietur valor subtangents, & tangents pro quovis puncto Q curvæ expressus per q , r , & constantem unam, vel plures inter quas adesse poterit constans z (constantes intelligo respectu diversorum in eadem curva qualis est LE punctorum) in quo valore si pro q , & r ponas x , & y , invenietur valor subtangents, & valor tangents pertinentium specialiter ad punctum E , sive valor linearum OC , EC quos substituemus pro s , & t in æquatione $sady - xtdy = tydx - aydx$, & fiet æquatio quam ingredientur tantum x , y , a , & z cum alijs parametris, si adsint, constantibus quidem pro una quavis linearum EL , GL , sed variabilibus pro diversis punctis curvæ BEG . Iam verò cum omnes curvæ EL , FL similes esse ponantur, erunt parametri homologæ illarum in constanti ratione in omni curva, hoc est sic erit parameter z in curva EL , ad parametrum aliam quamvis curvæ ejusdem, quam dicemus b , ut parameter homologa parametro z in curva GL , ad parametrum homologam parametro b in curva eadem, & sic in reliquis, ita ut posito rationem z ad b esse ut m , ad n , possimus pro b scribere $\frac{nz}{m}$, & n , & m fu-

turæ sint constantes non solum pro una quavis cur-

varum EL seorsim sumpta, sed & pro omnibus ad invicem relatis, quæ ob similitudinem, quam servant, constantem suarum parametrorum relationem habere supponuntur. Non absimilitèr, si adfuerit tertia constans, sive parameter c, pro illa ponemus $\frac{fz}{g}$, eruntque f, g constantissime, sive in omni cur-

va EL, GL eadem. Postquam igitur in æquatione $sady - xtdy = tydx - aydx$ substituerimus pro s, & t earum valores, substituamus ulterius pro b, c &c. earum valores $\frac{nz}{m}$, $\frac{fz}{g}$ &c. & æquatio resul-

tans explicabitur tantum per literas y, x, dx, dy, z, & constantes a, n, m, f, g &c. Tandem & ipsa z tolli poterit ex æquatione, si in equatione pro curvis EL substituamus prius pro b, c, &c. valores $\frac{nz}{m}$, $\frac{fz}{g}$ &c. tunc enim (si algebraica sit æquatio

$\frac{nz}{m}$, $\frac{fz}{g}$ ut supponitur) habebitur valor ipsius z in literas q, r, m, n, f, g, & alias constantes, absque eo quod aut dq, aut dr appareant, unde pro q, & r poterimus ponere x, & y, sicque valorem ipsius z habebimus in x, y, m, n, &c, qui substitutus in equatione $sady - xtdy = tydx - aydx$ restituet demum æquationem differentialem pro curva proposita BEG solis x, y, dx, dy a, m, n, &c. constitutam.

25 **V**ides hanc conditionem, quam addidimus, quod curvæ ordinatim datæ EL , GL sint algebraicæ, ideò apponi, ut per hanc methodum, æquatio differentialis reperiat pro curva BE , per solas coordinatas, earumque differentialia, & constantes expressa. Verùm quo ad methodum ducendi tangentes ad curvam BEG attinet, assumpta juxta regulam $AH = a$, & quo ad valores differentialium EG , FE , hi quidem nullo pacto hac conditione angustantur, sed etiàm si curvæ datæ transcendentes essent æquè benè procedunt, & pro legitimis habendi sunt, cum in eorum inventionem nulla æquationis linearum LE , LG ratio habeatur.

COROLL. II.

26 **S**ivè igitur curvæ LE , LG ad cōmunem axem, punctumque commune A , circa quod similiter positæ sunt, per rectas EO angulum EOA continentes cum axe æquatione algebraicâ, sive transcendente referantur, semper, ducta per quodvis punctum E in quavis ex infinitis curvis ad libitum assumpta LE , tangente EC , ductaque infinitè proxima ad assumptam LE , quæ sit FL , junctaque AE secante FL in F , & ducta AI parallela ad EC , sive ad FG , similia reperientur triangula ECO , IAO unde

dè CO, OE :: AO, OI, sive $s, y :: x, \frac{xy}{s} = OI$, &

reliquum $IE = \frac{ys - xy}{s}$ assumimus enim nunc pro

x , & y non ordinatas ad curvam BEG, sed ad quamvis ex infinitis curvis EL, & pro s , & t , correspondentes subtangente, & tangentem in eadem curva. Triangula iterum EAI, EFK sunt similia, producta OE in K usque ad curvam LF, igitur EA, EI :: EF, EK, & cum AE, EF sint respectivè u , & $\frac{udz}{2}$

erit $EK = \frac{ysdz - xydz}{2}$. Est autem EK differentia-

le ordinatæ OE pertinentis ad lineam EL, posito abscissam AO invariantam remanere, & variari tantum parametros lineæ EL, ita tamen ut eandem semper ad invicem servent proportionem. Linea enim OK est ordinata ad curvam FL curvæ EL infinite proximam eique similem, & circa axem LA punctumque A similiter positam, & pertinens ad abscissam AO, ad quam etiam pertinet ordinata OE in curva LE, quod idem est ac dicere, ordinatam OE, fieri OK, si supponantur variables parametri lineæ EL eundem tamen ad invicem respectum custodientes (quo ipso curva EL in sibi similem infinite proximam FL transit) & abscissa OA constans supponatur; EK igitur est id per quod crescit OE, quando ex ordinata lineæ EL, pertinente ad abscissam

lam OA, sit ordinata curvæ FL priori similis similiterque positæ circà axem AL, punctumque A, sit inquam talis ordinata pertinens ad abscissam eandem OE; uno verbo tandem EK est differentia duarum applicatarum ad eandem abscissam spectantium, sed ad diversas curvas infinitè proximas, & sæpè memoratis legibus descriptas, ordinatarum. Ad inveniendum igitur EK, differentiale cujusvis ordinatæ OE in quavis linea EL algebraica, vel transcendente angulum quemvis cum axe facientis, posito parametros curvæ illius, sive quantitates constantes, quæ valorem ipsius OE quomodocumque componunt, variari semper eandem ad invicem proportionem servantes, & simul abscissam AO stare invariata, utemur suprà invento canone $EK = \frac{ydz - xydz}{x}$, ubi y est ipsa OE differentienda,

s z

s est subtangens curvæ datæ in axe AO, ad quod refertur data curva LE, ad punctum E pertinens, quantitas, autem x, abscissam denotat AO, quam ut constantem in differentiatione ponimus, z verò est parametrorum una ad libitum selecta, nihil enim interest quam potius assumamus. Rem exemplis illustrare non inutile forsan, sed certè nimis longum foret. Assumat unusquisque sibi quantitates unius dimensionis algebraicas ad differentiandum posita x constante, & a, b, c, &c. variabilibus modò variatæ eandem relationem ad invicem retineant, differ-

ren-

rentietque methodo Hospitaliana, invenietq; idem differentiale, quod etiã reperiet hac usus methodo, quam insupèr ad transcendentes quantitates, si-
vè signo integrali suppositas extendere potest. Uni-
cum exemplum esto pro algebraicis lineis, si datæ
curvæ EL, FL, &c. essent totidem circuli, quorum
centra in communi axe AO, talitèr locata essent,
ut distantia singulæ AL, AL, &c. essent quartæ par-
tes diametrorum, hoc est, AL quarta pars diametri
circuli LE, AL verò quarta pars diametri circuli
LF, &c. ordinatæ autèm EO, brevitatis gratia, ad
axem AO perpendiculares assumantur. In hoc casu,
curvæ omnes EL, FL sibi similes erunt, & circà com-
munem axem, & punctum A similiter locabuntur,
æquatio autèm, posito horum circulorum radio
 $= 2z$, abscissa OA x , ordinata OE $= y$ erit y
 $= \sqrt{3zz - xx + 2zx}$. Subtangens OC $= s$ per consuetam
regulam est $= \frac{3zz - xx + 2zx}{z - x}$, undè $s - x = \frac{3zz + 2zx}{z - x}$.

$$\text{quarè EK} = \frac{s - x}{sz} : ydz \text{ erit} = \frac{3zdz + xdz}{\sqrt{3zz + 2zx - xx}} \text{ propor-}$$

tus ut prodit differentiando juxtà consuetas regulas
 $\sqrt{3zz - xx + 2zx}$ posita z variabili, & x constãte. Si cur-
væ LE, LK cõmune punctum habeant L, & ordinatis
existentibus ad axem AO perpendicularibus, posi-
tis AO $= x$, OE $= y$ sit $y = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, & debeat

y differentiari posita x constãte, & a variabili, in-
ve-

41
 veniatur curvæ AE (cujus æquatio est $y = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$,

vel $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$) subtangens OC, eritque OC
 $= s = \frac{y}{a} \sqrt{2ax - xx}$, & proindè $\frac{s - x}{sa} y da$ (quoniàm hic

z interpretatur per a) sivè quæsitum differentia-
 le erit $\frac{y da \sqrt{2ax - xx} - ax da}{a \sqrt{2ax - xx}}$

27 Observare non prætereamus, quod unitas in-
 terdùm locum alterius parametri teneat, ità ut dif-
 ferentianda quantitas plures constantes aliquandò
 includat, licèt una tantum sit manifesta ut si inve-
 niendum sit differentiale quantitatis transcendentis

$\int \frac{x^3 dx + adx}{aax - a^3}$ posita a variabili, & x constante,
 debet membrum adx intelligi bis ductum in unita-
 tem, quam si vocemus b, erit quantitas differentian-
 da $\int \frac{x^3 dx + abbdx}{aax - a^3} = y$ duabus parametris com-

posita quæ proindè constantem ad invicem ratio-
 nem servare debent, ut tradita regula utamur ad
 ejus differentiale reperiendum. Ponamus a, & b
 in constanti proportionem perseverare debere, erit s

$= \frac{aaxy - a^3y}{x^3 + abb}$ undè $\frac{s - x}{sa} y da$ differentiale, quod quæ-
 rebamus erit $= \frac{aaxy da - a^3y da - abbx da - x^4 da}{a^3x - a^4}$

28 Aliud notare convenit, ut regula pro ordinatis differentiandis ad quantitates cujusvis dimensionis possit expandi. Satis enim clarum reor, mox traditam regulam, pro ut tradita est, lineis tantum, sive ordinatis curvarum inservire posse, ut earum differentialia eruantur. Si igitur differentianda proponatur quantitas duarum pluriumve dimensionum, in qua x ut constans, parametri autem ut variabiles censendæ forent, constantem ad invicem respectum habentes, debet illa in quantitatem unius dimensionis permutari, sed hæc ipsa transmutatio negotium facessere posset ei, qui non consideraverit, qua via hoc legitime, & ad intentum utiliter fieri possit. Exempli loco assumamus esse propositam quantitatem $\frac{2aax - x^3}{a + x}$ ad differentiandum posita x con-

stante, a verò variabili; debet illa ad unicam dimensionem reduci, si assignata differentiandi methodo quis uti velit. Si quis scribat igitur $\frac{2aax - x^3}{a + x}$,

& hujus differentiale inveniat per exhibitam methodum, erit illud $= \frac{2aaxda + 2ax^3da - x^4da}{aa + ax}$.

Sed hoc invento non poterit facile ad quesitum differentiale quantitatis $\frac{2aax - x^3}{a + x}$ regredi, cum à dif-

ferentiali quantitatis $\frac{2aax - x^3}{a + x}$, ad differentiale

quan-

quantitatis $\frac{2ax - x^3}{a+x}$ non valeat regressus per sim-

plicem multiplicationem illius per a institutam, quia hic a non ut constans, sed ut variabilis assumitur. Debet igitur quantitas proposita $\frac{2ax - x^3}{a+x}$

reduci ad simplicem lineam per totidem dimensiones ipsius x , quot fuerit necessarium, & deinde quantitatis sic reductę differentiale inveniendum est per superiorem regulam, inventum enim, si multiplicetur, aut dividatur per dimensiones ipsius x per quas dividenda, aut multiplicanda fuit data quantitas ut unius fieret dimensionis, invenietur tutò differentiale propositę quantitatis. Sic ad inveniendum differentiale quantitatis superioris $\frac{2ax - x^3}{a+x}$, quę dua-

rum dimensionum est, posita x constans, scribo prius $\frac{2ax - x^3}{ax+xx} = y$, huiusque differentiale inve-

nio, pro quo est $s = \frac{ax+xx}{2ax-x^3}$, & $s-x y da$
 $= \frac{2aaxx da + x^4 da + 4ax^3 da}{2aax - x^4 + 2ax^3}$ differentiale ex

$\frac{2aax - x^3}{ax+xx}$ posita a variabili, & x constans, quo

iuvento si illud ducatur in x , fiet differentiale ex $\frac{2aax - x^3}{a+x}$ (eo quod x constans esse ponitur)

$= 2axda + x^3 da + 4axxda$ prorsus ut prodit diffe-

$$aa + xx + 2ax$$

rentiando eandem quantitatem Hospitaliana methode, & literam a , non x ut variabilem usurpando. Quod si quantitas differentianda fuisset transcendens plurium dimensionum, ut $\int dx \sqrt{aa - xx}$,

reduxissemus illâ ad unicam scribendo $\frac{\int dx \sqrt{aa - xx}}{x}$

$= y$ sive $\int dx \sqrt{aa - xx} = xy$, cujus curvę valor

subtangenti s est $\frac{xy}{\sqrt{aa - xx}}$, undè valor differen-

tialis $\frac{s - x}{sa} y da = \frac{2yda - da \sqrt{aa - xx}}{a}$, quod pro-

pterea ductum in x dabit quęsitum differentiale

quantitatis $\int dx \sqrt{aa - xx} = \frac{2yxda - xda \sqrt{aa - xx}}{a}$

29. Addo, quod hæc regula differentiandi ordinatas curvarum cum in curvas similes transeunt facillimè fuit ex conoidis cujusdam sectione, cujus basis sit una curvarum similium, vertex verò conoidis in sublimi, ità ut quę à vertice conoidis, ad figurę ipsius, quę pro basi est verticem ducitur recta linea, basis ipsius parametro equalis existat. Si nem-

nempè tale solidum secetur plano lateri coni parallelo, ordinate sectionis erunt etiàm ordinate ad diversas curvas basi similes, communemque abscissam in illis habebunt, distantiam scilicèt sectionis à latere coni, cui parallela est. Ducta igitur talem sectionem tangente, quę facile ducitur, ex illa in promptu est eruere differentialia ordinatarum talis sectionis, & invenientur convenire cum ijs, quę mox tradidimus; nobis tamèn, quibus hæc incidenter tantum occurrunt indicasse sufficiat.

COROLL. III.

30. **C**onsiderando portiones curvarum, quæ interceptiuntur axe LO, & ordinata quavis OK, livè curvarum segmenta EL, KL, & reliqua, oritur alia non inutilis meditatio. Claritatis gratia fiant sequentes denominationes, & hypoteses. Data ponatur in angulo quovis ad axem AO (circa quem, & circa punctum A in illo positum similiter constituta est series similium curvarum EL, KL &c.) quęvis recta OK, auferens à curvarum serie portiones EL, KL &c. quarum minima sit invenienda, livè inter infinitas de serie LE, KL illa seligenda sit curva, cujus arcus inter axem LO, & datam rectam EO sit omnium minimus. Assumatur una ex curvis ad libitum LE, eique infinitè proxima LK, sitque AO data = a, AE = u, curva EL = x, ejusque pa-
ra-

parameter, aut parametronum una ad libitum $= z$,
ponaturque curvę EL equalis portio GL, ductisque
tangentibus EC, FG invicem parallelis, considere-
tur triangula ECO, IAO; est enim $OC = s$, $CE = t$
 $:: AO = a$, $IA = \frac{at}{s}$; deinde propter similia EIA,

EKF erit $EA = u$, $IA = \frac{at}{s} :: EF = \frac{udz}{z}$ ad FK
 $= \frac{tadz}{sz}$; est autem $FG = \frac{xdz}{z}$, unde $FG - FK$
 $= KG = \frac{xsdz - tadz}{sz}$. Sed KG est differentiale ar-

cus EL, quatenus rectis LO, OE intercipitur, cum
sit id per quod arcus infinite proximus KL superat
antecedentem EL, sive GL, ergo differentiale ar-
cus intercepti inter duas lineas AO, OE (arcus in-
quam secundum notas regulas descripti) est qualem
mox repertum habemus $KG = \frac{xsdz - tadz}{sz}$, quod

si æquetur nihilo, proditura est æquatio $x = \frac{ta}{s}$ in-

dicans arcum illum esse minimum ex infinitis FL,
KL &c. qui fuerit quartus post suam subtangentem,
tangentem, & lineam AO. Iam igitur arcum nunc
possumus sic invenire. Per singula puncta L erigan-
tur ad axem OL rectę æquales correspondentibus
curvarum portionibus LE, LK &c. in angulo quo-
vis exempli gratia recto, eruntque extremitates ere-
cta-

ctarum in curva quadam; deindè per singula etiàm puncta L erigantur in eodem angulo quo priùs, putà hic recto, lineæ rectæ æquales quantitibus ta, quæ sci: sint quartæ proportionales post suas

correspondentes OC , CE , & datam AO , secabitque curva, quæ sic fiet curvam priùs constructam, in puncto quodam, per quod ad axem perpendicularis, seu linea in angulo quem cum axe faciunt harum curvarum mox descriptarum ordinatæ ducenda erit, illam secans in L ; Per hoc punctum L ponenda est curva similis curvis EL , KL , & circa axem AO , punctumque A similiter posita ac illæ, eritque hæc illa quam quærimus, cujus arcus axe, & recta OE interceptus minimus erit ex omnibus arcubus curvarum illi similium, ac circa eundem axem OL , punctumque A similiter positarum, rectis AO , & EO interceptis, quia siquidè talis arcus manifestè erit æqualis quantitati correspondenti ta. Alias

constructiones aferri videre possumus pro hoc arcu minimo inveniendò, in idem tamen recidentes. Nos longiori parcimus digressioni, nostramq; rem reassumere properamus.

DEscriptis infinitis curvis similibus, LE, LF, & circa datum axem AB, punctumque in illo A similiter positis, axemque in uno, pluribusve punctis L secantibus, & posito brevitatis tantum gratia, ordinatas quibus ad communem axem AB referuntur nempe ipsas EO, GB &c. esse ad axem perpendiculares, assumptoq; in earum curvarum unaquaque spatio LEO, LGB eidem constanti spatio aa æquali, quaeritur curvæ EG æquatio differentialis primi gradus.

31. Sunt duæ in quaesita curva EG coordinate AO, OE x, & y, quas ad axem normales esse brevitati consulentes nunc supponamus; esto etiam curvæ genitricis LE subtangens OC = s, & juncta recta AE (quæ producta curvam LF ipsi LE infinite proximam fecit in F) vocetur u; & per F sit ordinata Fa; erit itaque propter curvas similes ut quadratum unius parametri curvæ LE, ad quadratum correspondentis parametri curvæ LF, ita spatium LEO ad spatium LFa, unde si vocetur parameter curvæ LE = z, & curvæ LF = z + dz erit $zz, zz + 2zdz + dz^2 :: aa$ ad quartum, unde spatium LFa = $zzaa + 2zaadz + aadz^2$, ex quo si demas spatium

$\frac{zz}{LGB}$, quod ex hypothese est = aa, erit spatiolum FaBG rectangulum ex hypothese = $\frac{2zaadz + aadz^2}{zz}$,

sivè, relicto ultimo membro quod est præcedente incomparabiliter minus, erit spatium rectangulum $Fa BG = \frac{2aadz}{z}$, quod divisum per $BG = y$ dat

$Ba = \frac{2aadz}{zy}$. Est autem etiam par: curvæ LE, ad par:

curvæ LF :: AO, Aa, ergò $Aa = \frac{zx + xdz}{z}$, ex qua

dempta AO = x, remanet Oa = $\frac{xdz}{z}$ undè BO

= $\frac{2aadz}{zy} - \frac{xydz}{z} = dx$, undè eruitur $\frac{dz}{z} = \frac{ydx}{2aa - xy}$;

ducta porro ipsi tangenti EC parallela AI, quæ OE secet in I, erit $OI = \frac{xy}{s}$, & $IE = \frac{ys + xy}{s}$; & quo-

niàm iterùm ut parameter curvæ LE, ad par: curvæ LF :: AE, AF, erit $AF = \frac{uz + udz}{z}$, & dempta AE

= u, erit EF = $\frac{udz}{z}$; sed triangula EAI, EFK sunt

similia, cum propter curvas similes FK, sivè tangens in F sit ipsi EC, sivè IA parallela, ergò EA, EI :: EF, EK, & erit $EK = \frac{ysdz - yxdz}{sz}$, & ducta per G ipsi

BO parallela, & æquali Gi, cum KG sit ipsi FK indirectum erit CO, OE :: IG, iK ergò $iK = \frac{ydx}{s}$,

qua dempta ex EK, reliqua iE sivè Gm erit $\frac{G}{= ysdz}$

$= ysdz - yxdz - yzdx = dy$, in qua æquatione, si po-

nas pro $\frac{dz}{z}$ valorem suprâ inventum $\frac{ydx}{2aa - xy}$, pro-

dibit æquatio solis $x, y, dx, \& dy$, & s constans, & si pro s ponatur valor ejus ex data natura curvarum LE, LF notus, prodibit æquatio differentialis curvæ quæsitæ GE, modò pro z , seu pro valore constantis respectivè ad curvam LE ponatur ejus valor ex æquatione ejusdem curvæ deductus.

32 Undè & illud facili negotio derivatur, quod subtangens BT curvæ EG sit $= \frac{2aas - sxy}{sy - 2aa}$. Quare

ad ducendam in tali curva tangentem opus est tantum rectæ AC aliam AT in directum applicare, ità ut CT ad AT sit ut triangulum CEO, ad spatium LEO.

Propositio VI.

POnamus nunc curvas non ampliùs esse similes, sed tantum ordinatæ OE, OK (quas brevitatis gratia ad axem normales esse fingamus) sint constanter proportionales, & curva EG abscindat spatia LEO, LGB eidem aa æqualia, quæritur hujus curvæ differentialis æquatio primi gradus, hoc est data quavis curva, & datis alijs infinitis, quarum ordinatæ sint ad ordinatas datæ curvæ easdem abscissas ha-

habentes in data ratione constante pro singulis curvis, variabili verò pro omnibus, invenienda est æquatio differentialis primi gradus curvæ EG abscindentis spatia LEO, LGB eidem aa, & invicem æqualia .

33 Omnes tales curvæ habebunt in axe AB commune punctum initij, quod coincidet cum A, unde assumimus abscissas. Assumpta curvarum una LE, atque illi infinitè proxima LF, & ducta ordinata OEK, quam axi AB perpendicularem finge, secante curvas in E, & K, ductaque per E curvam LE tangente EC, tangens curvam LF per K ducta, sive lineola KG, producta ad idem punctum C coincidet, quod est facile demonstratu. Ponatur ordinata Bu ad BG, similiter OE ad OK esse ut z ad $z + dz$, quæ quidem ratio, quo ad diversa curvarum infinitè proximarum LE, LG puncta erit constans; vocentur AO, OE coordinatæ ad curvam EG x , & y , OC verò subtangens puncti E in curva LE sive puncti K, vel F in curva KL sit $= s$, spatium porro constans LEO, LGB $= aa$. Iam verò quoniam ponimus ordinatas singulas OE crescere in eadem ratione z ad $z + dz$, erit spatium LEO ad LKO in eadem ratione z ad $z + dz$, itaq; $LKO = \frac{z}{z} zaa + aadz$,

ex quo si dematur LGB $= aa$ reliquum erit spatium $GEOK = aadz$, quod si brevitatis causa pona-

mus esse rectangulum, opus erit tantum illud dividere per $GB = y$ ad habendam $OB = dx = \frac{a^2 dz}{zy}$,

undè $\frac{dz}{z} = \frac{y dx}{a^2}$. Tota verò KO cum sit $= \frac{yz}{z} + \frac{y dz}{z}$,

erit $EK = \frac{y dz}{z}$, & si fiat CO, OK :: GI, IK, sive in

terminis algebr. s, $\frac{yz}{z} + \frac{y dz}{z} :: dx$, ad $\frac{yz dx}{z} + \frac{y dx dz}{z}$

erit hæc = iK, sive $iK = \frac{yz dx}{z} = \frac{y dx}{s}$, & ex EK

= $\frac{y dz}{z}$ si demas $iK = \frac{y dx}{s}$, reliqua iE, vel Gm

= $\frac{ys dz - yz dx}{s z} = dy$, quare si pro $\frac{dz}{z}$ ponas valo-

rem $\frac{y dx}{a^2}$ prodibit æquatio $yy s dx - a^2 y dx = a^2 s dy$.

Quoniam verò dari ponimus æquationem curvæ, ad quam reliquæ omnes referuntur, habentes suas ordinatas ad illas curvæ data easdem abscissas x habentes ut a ad b, hinc si valor y erutus ex data æquatione multiplicetur per a, & dividatur per b, fiet valor ordinatæ pro quavis curva de serie data ad abscissam x pertinentis, & (posita a constante) erit b constans quidem pro quavis curva, sed variabilis pro diversis curvis de data serie. Exempli loco si data curva esset circulus, series curvarum esset totidem Ellipsium, axem transversum communem

nem, secundarium variabilem, & per b expressum habentium; si data curva esset hyperbola æquilatera, reliquæ essent totidem hyperbolæ axem quidem a transuersum communem, secundarium porro variabilem habentium; cum verò tangentes ad curvas LE , LK in punctis, E , K , & in reliquis aliarum talium curvarum punctis ductæ in eadem ordinata BEK positæ omnes in C sint conventuræ, ac proinde eandem subtangente BC sint habituræ, sequitur, quod si tantum inveniatur valor s pro curva proposita (qui absque litera b certò prodibit) & hic substituatur in æquatione $yysdx - aaydx = aasdy$ fiet æquatio differentialis primi gradus solis x, y , constantibus, & dx , & dy constans pro curva EG .

Exemplo unico res patebit. Esto data curva circulus $y = \sqrt{2ax - xx}$. Iam æquatio pro omnibus curvis seriei LE , LF , &c. erit $y = \frac{a\sqrt{2ax - xx}}{b}$ ad infinitas

ellipses, & b est constans respectu duarum curvarum LE , LF , sed variabilis respectu diversarum. Iam subtangens s curvæ cujusvis erit $\frac{2ax - xx}{a - x}$, eadem ac in circulo, quæ si in locum s substituatur in

æquatione pro curva EG , prodibit æquatio quæ sita differentialis primi gradus pro eadē curva $2axy ydx - xxy ydx - a^3 ydx + aaxydx = 2a^3 xdy - aaxxdy$.

34 Ex æquatione $yysdx - aaydx = aasdy$ erue-

tur

tur $ydx = BT = \frac{aas}{ys - aa}$ subtangens curvæ EG,
 quare facilis constructio.

Propositio VII.

Fig. 4.

Data linea quavis MV, quæ circa datum punctum fixum C in gyrum ferri concipiatur in plano CMV, manentibus iisdem distantijs MC, VC &c. invenire oportet æquationem differentialem curvæ alterius BM, quæ priorem illam circa C rotatam semper in dato constanti angulo sit sectura.

35. Ducta quavis recta per centrum rotationis C ut CA, assumatur portio ad arbitrium CA, qua ut radio, circulus ducatur AG, assumaturque punctum A, ut initium rotationis. Iam concipiatur curva MV pervenisse ad quamvis positionem LB, ibique in B secare quæsitam curvam BM in angulo OBF dato, & constante, quem scilicet continent duæ tangentes, una BO ad curvam datam, altera BF ad quæsitam ductæ in puncto B quo se mutuò secant, jungaturque CB, & ad illam per C perpendicularis CF, secans BO in D, & BF in F, unde ad BO cadat perpendicularis FO. Esto CG = a, sinus rectus anguli OBF, posito radio a, sit = b, sinus verò sui complementi = c. Tum porro AG = x, BC = y, CD = r, BD = t = $\sqrt{yy - rr}$. Quantitas autem r datur per y propter datam curvæ BL, ejusque tangents

na-

naturam. Ducta autem Cg ipsi CG infinite proxima, & arcu infinite parvo bd, si fiat GC, Gg :: CB, $bd = \frac{ydx}{a}$, deinde Bd, db :: BC, CF, $= \frac{yydx}{ady}$, unde

BF propter rectum angulum BCF $= \frac{y\sqrt{yydx^2 + aady^2}}{ady}$

DF vero $= CF - CD = \frac{yydx}{ady} - rady$, & multipli-

cando BC per $\frac{1}{2}$ DF, fiet triangulum DFB æquale $\frac{y^3dx - raydy}{rady}$, quo diviso per $\frac{1}{2}$ BD orietur OF

$= \frac{y^3dx - raydy}{rady}$, cujus quadratum demptum ex qua-

drato BF relinquit quadratū BO, quod erit igitur $= \frac{y^4tdx^2 + ttaayydy^2 - y^6dx^2 - rraayydy^2 + 2ary^4dxdy}{ttaady^2}$,

in quo si substituas pro tt in numeratore valorem $rr + yy$ fiet præcisè quadratum, cujus radix BO $= \frac{yyrdx + ayydy}{rady}$; debet autem BO esse ad OF ut

c ad b, ergò $\frac{yyrdx + ayydy}{rady}$, debet esse ad

$\frac{y^3dx - raydy}{rady}$ ut c ad b, & pro indè erit æquatio

$\frac{yycdx - racdy}{yyc - byr} = \frac{byrdx + byady}{byady + racdy}$, & hinc dx

æquatio differentialis primi gradus pro curva quæsitæ, in qua signa possunt interdum

dum variè esse locata, pro ut duæ tangentes BO, BF ad eandem, vel ad diversas axis partes ceciderint. Hunc valorem differentialis dx nempe quod fit

$$\frac{yyc - byr}{yyc - byr}$$

per cy + br fiet æquatio quæsitæ pro curva BM, dx

$$= \frac{bacyydy + ccarydy + bbarydy + cabrrdy}{ccy^2 - bbr^2}$$

un-

$$\frac{ccy^2 + bby^2 - bbr^2 - bby^2}{ccy^2 + bby^2 - bbr^2 - bby^2}$$

dè ponendo aa pro cc + bb, & tt pro rr + yy, fiet

$$\frac{a^2rydy + ttcabdy}{aay^2 - ttbby^2} = dx. \text{ Si, angulus OBF fuerit re-}$$

$$\frac{aay^2 - ttbby^2}{aay^2 - ttbby^2}$$

ctus, evanescente c fiet dx = $\frac{ady}{r}$, quod manife-

stius apparebit si utamur æquatione superius inven-

$$ta \quad dx = \frac{byady + racdy}{yyc - byr}$$

$$\frac{yyc - byr}{yyc - byr}$$

C O R O L L.

36 **S**I duæ quantitates c, & b, non essent constan-
tes, sed data quavis lege variabiles, dum-
modo datae per y, & constantes quot libuerit, ut si
exempli gratia angulus OBF non constans, sed
æqualis angulo CBO esse deberet, aut etiã ipsius
CBO duplus, vel etiã aliter infinitis modis, sem-
per eadem æquatio locum habet, si per b, & c in-
rel-

telligamus sinum, & sinum secundum anguli OBF, quicumque ille tandem sit, & quamcumque legem servare debeat. Ut si OBF debuisset fuisse æqualis CBO, b & c deberent esse ad invicem ut r ad y, vel si $OBF = 2 CBO$, tunc c ad b fuisset ut $rr - yy$ ad $2yr$, & sic in alijs infinitis casibus.



SECTION II.

*De Constructione Equationum differentialium primi
gradus, quando constet illas esse integrabiles
algebraice.*

PROPOSITIO I.

37



Ostquàm igitur ad æquationem differentialem Lineæ quæsitæ aliqujus, per supra traditas, aut per similes, methodos pervenerimus, & illam integrabilem esse constet, hoc est constet, quod sint invenibiles duæ quantitates algebraicæ, quarum differentialia invicem æquata restituant prius inventam æquationem, tunc vel illæ duæ quantitates algebraicæ invicem æquentur, vel singulis illis constans quædam ad arbitrium addatur, vel dematur (nisi aliqua quæsitæ lineæ data conditio hoc vetuerit) & summæ vel differentiæ invicem etiàm æquentur, utrovis enim modo resultabit æquatio algebraica pro linea quæsitæ, quam proinde Cartesiano more ex alterutra, vel utraque harum æquationum algebraicarum construere licebit.

38 Nàm, reductis singulis æquationis constru-

struendę partibus ad unam dimensionem ope divisionis utrinquę institutę per eandem constantem, positisque AB , Ab abscissis lineę quęsitę, sive cujus differentialis æquatio datur, & posito curvam DA esse talem ut ordinatę DB sint æquales integralibus unius ex partibus datę æquationis (quęcumque tandem sint hæc integralia) similiterque curvam CF talem esse ut ordinatę BF sint æquales integralibus alterius partis æquationis datę, sitque bd ipsi BD infinite proxima, fb verò ipsi BF , erunt (ductis DE , GF axi parallelis) duę lineolę Ed , Gf infinite parvę illę eadem quę per duas æquationis datę partes exprimuntur, quę proinde ubique erunt invicem æquales. Cum enim Ed , fG sint differentialia linearum BD , BF , & cum lineę BD , BF sint integralia duarum partium æquationis construendę, erunt Ed , fG ipsę illę partes æquationis, quam debemus construere, quę cum per hypotesim sint semper ad invicem æquales, erunt ipse Ed , Gf , semper æquales. Adsunt igitur duę quantitatum series BD , bd &c. BF , bf &c. tales ut augmentum unius cujusvis quantitatis bd in prima serie suprā antecedentem BD , sit æquale augmento correspondentis quantitatis bf in secunda serie suprā suam antecedentem BF . Quotiescumque autem habentur duę tales series, quarum termini per æquales differentias augeantur, hoc est terminus quivis unius seriei suprā suum antecedentem æque augeatur ac terminus

correspondens secundæ suprâ suum, quotiescumque dantur inquàm duæ tales series, necessarium est quod unus quivis terminus primæ seriei æqualis sit suo correspondenti in secunda serie, aut quod saltè ab illo differat quadam quantitate constante, quæ porrò eadem, sit etiàm differentia inter quamvis aliam quantitatem primæ seriei, & suam correspondentem in secunda. Quia enim quantitates primæ seriei æque augentur, ac quantitates correspondentes secundæ, si semel tantum quantitas una primæ seriei æqualis sit correspondenti quantitati secundæ, semper æquales erunt quantitates primæ, correspondentibus quantitatibus secundæ seriei, proptèr æquale earum augmentum, aut si semel quantitas una primæ, superaverit correspondentem quantitatem secundæ seriei, vel ab illa defecerit, semper eodem excessu, vel defectu different ab invicem quantitates singulæ prioris, & correspondentes quantitates posterioris seriei. Igitur conditio quam habemus, pro curva construenda, & quæ differentiali æquatione exprimitur, quod Ed sit ubique æqualis Gf , salvatur tam ponendo ubique $BD = BF$, quàm ponendo singulas BD , differre à singulis BF quodam constante valore arbitrario. Sunt autem BD , BF integralia duarum partium datæ æquationis, igitur, vel ponas hæc integralia ad invicem æquari, vel eorum constantem esse arbitriariam quamvis differentiam, quæ salvabis differentialem

æqua-

equationem propositam, hoc est eque obtinebis
quæsitam curvam. Hocque ratiocinium, nullatenus
requirit quod BD , BF sint quantitates algebrai-
cæ, sed cujuscvis sint generis lineæ, semper vim
suam potest obtinere. Consideramus autem hic
peculiaritè integralia algebraica, quia, cum talia
sunt, eorum valores invicem æquati, addita quavis
ad arbitrium constante, algebraicam suppeditant
æquationem juxtà notas regulas construendam,
quod longè alitèr se habet, cum integralia non sunt
algebraica, ut sequentibus sectionibus videre pote-
rimus.

C O R O L L A R I U M.

39 **H**Æc constantis additio, quæ fieri semper
potest post integrationem æquationis,
interdum curvam natura invariata, positione tan-
tùm promover, interdum curvæ ipsius essentiam, &
genus mirum in modum diversificat. Si enim exi-
stentibus x vel y ordinatis rectis invicem parallelis,
æquatio differentialis proposita ad construendum
ab una parte habuerit dx vel dy tantùm, & simul
fuerit algebraicè integrabilis, dum interim x vel y
alteram æquationis partem non ingrediatur, in hoc
casu æquationi, quæ per illius integrationem obti-
nebitur addendo, vel demendo constantem, curva
eadem remanet, ab axe tantùm remotior, vel illi
pro-

proximior facta, per totam quantitatē illius constantis longitudinem. Res erit clarior, & certa si illam exemplo explicemus. Esto æquatio construenda $dy = dx \sqrt{\frac{aa+ax}{a}}$. Hęc si integretur dabit y

$$= \frac{2a+2x}{3a} \sqrt{aa+ax}, \text{ vel } y \pm a = \frac{2a+2x}{3a} \sqrt{aa+ax},$$

quod pro nunc syntheticè poterimus experiri. Harum duarum æquationum prima exprimit quamdam curvam, quæ si sic removeatur ab axe super quo assumuntur abscissæ x , aut ad illum accedat per distantiam a , hoc est singula ejus puncta accedentia ad axem, vel ab illo recedentia, lineas describant ordinatis parallelas, & longitudinis a , jam æquatio, quæ referet curvam sic translata ad eundem axem, ad quem prius referebatur erit $y \pm a = \frac{2a+2x}{3a} \sqrt{aa+ax}$, undè hæc æquatio eandem quam

prior illa curvam exprimit, sed positione tantum diversam. At si æquatio fuisset exempli gratia $ydy = \frac{x^3 dx}{aa}$ in qua nec dy nec dx unam æquationis

partem constituere potest, salva æquationis integrabilitate, tunc constantis additio, curvam maximè variare poterit. Integrando enim æquationem fit $\frac{yy}{2} = \frac{x^4}{4aa}$ vel $\frac{yy}{2} \pm aa = \frac{x^4}{4aa}$, ex quibus

æqua-

63

equationibus oritur vel $y = \frac{xx}{\sqrt{2aa}}$, vel $y = \sqrt{\frac{xx^2 + 4aa}{2aa}}$

qui ordinatæ valor non differt per constantem ab alio valore $\frac{xx}{\sqrt{2aa}}$ vel $\sqrt{\frac{x^2}{2aa}}$. Idem dices si coordi-

natæ x , & y non essent rectæ, aut applicatæ non essent invicem parallelæ, quibus casibus infinitis modis variari potest curvæ natura per simplicem constantis additionem uni equationis parti adhibitam.

COROLL. II.

40 **C**um igitur arbitraria sit constantis hujus additio, poterimus per quodvis datum punctum curvam lineam ducere, dati axis, & verticis quæ salvet datam equationem differentialem, primi gradus algebraicè integrabilem, hac usi methodo, quam clariùs exponi non posse censeo, quâ si illam tradamus exemplo alicui applicatam. Assumamus, equationem differentialem datam esse $ydy = \frac{axdx}{\sqrt{aa + xx}}$, & debeat duci linea satisfaciens

huic equationi differentiali, quæ transeat per datum punctum, per quod exempli gratia ordinata sit $= b$, & abscissa $= c$, cujusvis sint generis coordinate, vel scilicet rectæ, vel curvæ, vel invicem parallelæ, vel à cõmunibus punctis egredientes, vel ad angulos quosvis ad se invicem inclinatæ &c. In-

re-

regretur æquatio proposita, & erit $\frac{yy}{2} = a\sqrt{aa + xx}$.

Nunc querendum est, quænam constans ex infinitis, quæ addi possunt utrique æquationis parti addenda nunc sit, ut curva hæc transeat per punctum cujus coordinatæ sunt b & c , b quidem de serie ipsarum x , c verò ipsarum y . Vocetur hæc constans zz , & erit $\frac{yy}{2} + zz = a\sqrt{aa + xx}$, undè y

$= \sqrt{2a\sqrt{aa + xx} - 2zz}$, debet autem quando x est b , y esse $= c$, ergò si in quantitate $\sqrt{2a\sqrt{aa + xx} - 2zz}$ ponamus b pro x fiet $\sqrt{2a\sqrt{aa + bb} - 2zz} = c$, undè $cc = 2a\sqrt{aa + bb} - 2zz$, & tādē, $zz = \frac{2a\sqrt{aa + bb} - cc}{2}$,

quæ est quantitas constans addenda in integratione æquationis, ut curva per datū punctū transeat, sicque curva quesita erit $\frac{yy}{2} + \frac{2a\sqrt{aa + bb} - cc}{2}$

$= a\sqrt{aa + xx}$, cui competit differentialis æquatio proposita $ydy = \frac{axdx}{\sqrt{aa + xx}}$, quæque simul per datum

punctum transit. Si valor quantitatis zz prodiret imaginarius, quod accidere potest, nulla curva per datum punctum ducibilis foret ad datam æquationem differentialem convenienter in dato axe & vertice.

Exem-

Exemplum.

41 **I**nvenire curvam cujus subtangens aut sit media inter coordinatas x , & y , aut duarum mediarum vel prima, vel secunda, aut uno verbo sit una ex serie continvarum geometricè proportionalium quarum prima sit x , ultima y , & termini sint numero $m + 2$, ut numerus datus exprimens quota sit in hoc ordine vocetur n . Inter x , & y si ponantur m numero mediæ proportionales, fiet series ex qua debet desumi valor subtangentis quæ sitæ curvæ, erit enim series cujus primus terminus x , ultimus y , & terminerunt numero $m + 2$, quia duobus x , & y accedunt alij numero m , qui illis interponuntur. Notum est autem, quod si inter duas x , & y interponantur m numero mediæ proportionales, erit harum mediarum prima, quæ in ordine seriei secundus erit terminus $= x^{\frac{m}{m+1}} y^{\frac{1}{m+1}}$, porro secunda mediarum erit hujus quadratum per x divisum, tertia erit cubus per xx divisus, & quæ mediarum erit (ut ita dicam) $n-1$, exprimetur per potestatem $n-1$ hujus prioris mox expositæ divisam per potestatem $n-2$ litteræ x . Quæ verò mediarum est $n-1$, illa est in ordine seriei n , quæ æquari debet subtangen-

genti ex vi datæ hypotheseos. Fiat igitur talis po-

testas hujus lineæ $x^{\frac{m}{m+1}}$ $y^{\frac{1}{m+1}}$, & dividatur per potestatem lineæ x à numero $n-2$ denominatam,

& erit $x^{\frac{m-n+2}{m+1}}$ $y^{\frac{n-1}{m+1}}$ æqualis subtangenti. Un-

dè $\frac{ydx}{dy} = x^{\frac{n-m-2}{m+1}}$ $y^{\frac{n-m-2}{m+1}}$, undè oritur æquatio

$x^{\frac{n-m-2}{m+1}} dx = y^{\frac{n-m-2}{m+1}} dy$, quæ æquatio est integra-
bilis; omnis enim potestas indeterminatæ in dif-
ferentiale indeterminatæ ejusdem ducta quantita-
tem integrabilem constituit, cujus integrale est ea-
dem potestas ejusdem indeterminatæ unitate tamèn
aucta, & per exponentem ejusdem potestatis unita-
te similiter auctum divisa. Integrale $ex = z' dz$
est $\frac{z^{n+1}}{n+1}$, quod facile experieris syntheticè, & si

differentiationis legem attentè prosequamur, pote-
rimus hoc etiàm à priori, & ex rei natura nobis sua-

dere. Eâdem igitur de causa integrale ex $x^{\frac{n-m-2}{m+1}} dx$

erit $\frac{m+1}{n-1} x^{\frac{n-1}{m+1}}$, & integrale ex $y^{\frac{n-m-2}{m+1}} dy$

erit $\frac{m+1}{n-1} y^{\frac{n-1}{m+1}}$, quæ duo differentialia invicem
æquen-

æquentur, aut addatur quævis constans ad libitum, orientur æquationes algebraicæ pro curva quam

quærimus; & erit vel $\frac{m+1}{n-1} x^{\frac{n-1}{m+1}} = \frac{m+1}{n-1} y^{\frac{n-1}{m+1}}$

vel etiã $\frac{m+1}{n-1} x^{\frac{n-1}{m+1}} \pm a^{\frac{n-1}{m+1}} = \frac{m+1}{n-1} y^{\frac{n-1}{m+1}}$.

Harum duarum æquationum prima reducitur ad $x=y$, secunda verò, factis debitis operationibus, re-

ducitur ad $\frac{m+1}{n-1} y^{\frac{n-1}{m+1}} \pm \frac{n-1}{m+1} a^{\frac{n-1}{m+1}} = x^{\frac{n-1}{m+1}}$,

ex qua extrahendo radicem cujus exponents est $\frac{n-1}{m+1}$,

eruetur valor ipsius x qui erit radix exponentem habens $\frac{n-1}{m+1}$ extracta ex illa quantitate supracitata

$\frac{m+1}{n-1} y^{\frac{n-1}{m+1}} \pm \frac{n-1}{m+1} a^{\frac{n-1}{m+1}}$. Hæ duæ equatio-

nes, si construantur, lineas suppeditant omninò diversas; clarum est enim primam $x=y$ esse rectam in angulo semirecto ad axem, si ordinatæ axi normales ponantur, quæcumque sint potestates n , & m ; at verò aliam æquationem esse pro curva quadam, quæ varia est pro vario numero m mediarum inter x , & y cadentium, & etiã pro varia potestate n .

Exempli gratia, si subtangens debeat esse in quatuor proportionalium serie secunda, sive debeat esse prima duarum mediarum proportionalium, quæ sunt inter x , & y , tunc existente $m = z$, & $n = z$, æquatio invenietur esse $3\sqrt[3]{y} \pm \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{x}$, sive

$$x = 27y \pm 2\sqrt[3]{aay} \pm 27\sqrt[3]{ayy} \pm a.$$

COROLL.

42 **R**egula pro integrandis quibuscvis alicujus indeterminatæ potestatibus, quam mox attulimus, si potestas sit -1 , nõ deducet ad integrale assignabile, quia si habeatur $y^{-1} dy$, quæ sit integranda, & traditam regulam adhibeamus augendo unitate exponentem -1 & dividendo deinde potestatem ipsius y per eundem exponentem -1 unitate auctum, ut præcipit regula allata, fiet integrale $= \frac{y^0}{0}$ sive $= \frac{1}{0}$ quantitas infinita, & inassignabilis. Quare hic tantum casus excludendus venit à regula, quam dedimus, & ab exemplo superius adhibito, quo usq; hoc integrale quantitatis $y^{-1} dy$ diligentè expendamus, quod suo loco sumus facturi.

Exem-

Exemplum II.

43 **C**urva quærat, quæ subtangentem habeat quantitatem $a^{1-m}y^m \pm b^{1-n}y^n \pm c^{1-r}y^r$ &c. quantitatem scilicet compositam ex quorvis membris in quorum singulo y reperiatur ad aliquam dimensionem elevata, per quævis signa invicem junctis; erit æquatio $ydx = a^{1-m}y^m \pm b^{1-n}y^n \pm c^{1-r}y^r$ &c. &

$\frac{dx}{dy} = a^{1-m}y^{m-1} + b^{1-n}y^{n-1} + c^{1-r}y^{r-1}$ quæ æquatio integrabitur, dummodò unicuique membro $a^{1-m}y^{m-1} dy$ applicetur methodus propositionis præcedentis pro integrandis potestatibus indeterminatarum, erit igitur $x = \frac{a^{1-m}y^m}{m} \pm \frac{b^{1-n}y^n}{n} \pm c^{1-r}y^r$ &c. procedendo semper per eadem ve-

stigia, quicumque sit horum membrorum numerus. Quod ut peculiari quodam exemplo illustretur opus est tantum quantitatem $a^{1-m}y^m \pm b^{1-n}y^n$ &c. determinare, determinatis duabus literis m , & n , ut m sit $= 2$, $n = 4$, sicque subtangens esse debet (positis quantitibus a & b esse invicem equalibus, & vocando illas b) $bbyy - y^4$, & æquatio

differentialis $dx = \frac{bbydy - y^3 dy}{b^2}$, undè integrando

$$x =$$

$x = \frac{bbyy}{2b^3} - \frac{y^4}{4b^3}$, vel $x = \frac{2bbyy - y^4}{4b^3}$. Quo pacto

etiã si subtangens debuisset fuisse $\frac{yy}{a} + \frac{y^3}{2a^2}$, aut

$\frac{a^3yy + y^4}{2a^2}$, æquatio per hanc regulam inventa fuisset

$x = \frac{5a^3yy + 2y^4}{10a^2}$. Harum curvarum primam

Fig. 6. exprimit Figura sexta in qua curva EFACD &c. talis est, ut ejus subtangens BT in axe AB sit semper $\frac{bbyy}{b^3} - y^4$, positis AB = x, BD = y. In hac curva

AG maxima x est = $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}AK$, AH verò = $\sqrt{2bb}$. Punctum contrarii flexus est in C per quod ordinata CB = $\sqrt{\frac{1}{2}bb}$, & abscissa AB = $\frac{1}{2}b$. Curvã verò

Fig. 7. alteram nempe $x = \frac{5a^3yy + 2y^4}{10a^2}$ exhibet figura sep-

tima curvæ enim IACGDE tangens IT abscindit ex axe HA subtangentem HT = $\frac{a^3yy + y^4}{a^2}$ ut requi-

rebatur, positis AH = x, HI = y. Habet etiã hæc contrarium flexum in C, posita AB = $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}a^3}$, & CB = $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}a^3}$, est autem AF = a cui competit maxima abscissa x, five GF = $\frac{3}{10}a$. Secat hæc curva axem AD in D, posita AD = $\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3}$.

COROLL.

44 **E**X omnibus potestatibus indeterminatæ y ,
 quæ subtangenti valorem ingrediuntur,
 possunt aliquæ, vel omnes esse etiâ negativæ,
 cum m, n, r , &c. numeros etiâ negativos æquè
 benè ac positivos possint repræsentare. Sed nullum
 adesse debet membrum in quo y non adsit, sive in
 quo exponens literæ y sit 0, quia facta æquatione
 $y dx = a^{1-m} y^m \pm b y^{1-n} y^n$ &c. si vel m , vel n es-
 set 0 in illa reducenda adesset $ay^{-1} dy$, vel $by^{-1} dy$
 quod æquationem non algebraicè integrabi-
 lem redderet, ut in præced. Coroll. notatum est.
 Pro exemplo exponentium negativorum assuma-
 tur curva CBHL, cujus subtangens exprimatur per $Fig. 8,$
 $aay^{-1} - a^3 y^{-2}$, sive per $aay - a^3$, æquatio enim dif-
 ferentialis erit $dx = \frac{aay dy - a^3 dy}{y^3}$, hoc est dx
 $= aay^{-2} dy - a^3 y^{-3} dy$, quæ membra singula per
 allatam regulam integrabuntur, & fiet $x = \frac{-aa}{y} + \frac{a^3}{2yy}$
 $= \frac{a^3 - 2aay}{2yy}$. Curva hæc duas habet partes CBHL,
 & FM, quarum utraque ad asymptotos KN, GD.
 Utriusque autem partis subtangens, tam scilicet GT,
 quàm

quàm ED, optimè exprimuntur, per $\frac{aay - a^3}{yy}$ positis

GB, EF = y, AE = x. Portio autem CBHL asymptotum secat in C, ità ut AC sit futura $\frac{1}{2}a$. Existente AI = a, & IH = $\frac{1}{2}a$; erit punctum H summus vertex, punctum verò L contrarii flexus habet AK = $\frac{1}{2}a$, & KL = $\frac{1}{2}a$.

COROLL. II.

45 **O**Mnes hæ curvæ hujus, & antecedentis exempli sunt ex ijs quarum æquationibus constans addita, positionem tantum earum potest variare, quia dx sola unam æquationis integrabilis partem constituit.

Exemplum III.

46 **Q**uæritur curva cujus subnormalis sit $\frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$; erit igitur æquatio differentialis curvæ quæsitæ $ydy = \frac{xdx\sqrt{aa+xx}}{a}$. Et integrando fiet $\frac{yy^2}{2} = \frac{xx+aa\sqrt{aa+xx}}{3a}$, aut etiàm $\frac{yy^2}{2} = \frac{xx+aa\sqrt{aa+xx}}{3a} +$ quavis constante; hæc constans brevitatis causa sit = aa, erit igitur altera curvæ æquatio differentialis $yy^2 = 2xx$

$= \frac{2xx + 2aa\sqrt{aa + xx} + 6aaa}{3a}$. Si utamur prima æqua-

tionem $yy = \frac{2xx + 2aa\sqrt{aa + xx} + 6aaa}{3a}$, fiet curva GKZ talis, ut Fig. 9.

ejus subnormalis EW in axe AW in quo assumuntur ipsæ x (existentibus scilicet AE = x, EG = y) sit, pro ut postulatur $x\sqrt{aa + xx}$. Curva hæc duas habet par-

tes utrinque ab axe AK sitas sibi que similes, & æquales GK, KZ, & minima y est AK cum x = 0, & AK = $\sqrt{\frac{2}{3}aa}$. Habet etiã ad alteras axis AW partes aliam partem SMQ omninò ipsi GKZ similem, & æqualem, similiterque positam; si verò usi fuissetus æquatione $yy = \frac{2xx + 2aa\sqrt{xx + aa} + 6a^3}{3a}$

curva esset HIY priori GKZ asymptotica minimam ordinatam habens in axe AI ad distantiam AI = $\sqrt{\frac{8}{3}aa}$, haberetque hæc etiã curva partes HI, IY, sibi æquales similesque, & partes etiã saltè HIY, VPR sibi æquales, & similes. Demùm æquatio $\frac{2xx + 2aa\sqrt{aa + xx} + 6a^3}{3a} = yy$, posito semper ut

antè abscissas x sumi ab A in axe AW, suppeditat curvam XDF prioribus etiã asymptoticam, axemque AW secantem in D (unde illa incipit) ut sit AD = $\sqrt[3]{9a^3} - aa$ habentemque, non tantùm portionem XD similem, æqualemq; portioni DF, sed

sed & aliam partem NLO similem æqualemque parti XDF, ità ut omnes curvæ quas in figura nostra ruditer designavimus quæsito sint satisfacturæ, & ducta ordinata EFGH, & tangentibus FB, GC, HT, earum normales FW, GW, HW in uno eodemque axis puncto W sint coituræ ut sit $EW = \frac{x\sqrt{aa - xx}}{a}$. Curva HIY habet sanè aliam portio-

nem, quæ circa axem DL in Ellipsis quasi formam jacet, & à puncto D usquè ad L protenditur, abscindendo in axe IP, ab A versùs I, & similiter ab A versùs P portiones $= \sqrt{\frac{1}{3}aa}$; verùm hanc delineare in figura prætermisimus, quòd illa, licèt equatione eadem, ac portio HIY optimè exprimatur, subnormalis tamèn habeat $-\frac{x\sqrt{aa - xx}}{a}$ non verò $\frac{x\sqrt{aa - xx}}{a}$, ut requirebatur.

47 Est tamèn longè universalius Theorema, quod pro integrandis varijs quantitativis inservit, quodque universaliori exemplo claudemus. Estò curva invenienda cujus subnormalis sit expressa per $\frac{x^{m-1} \sqrt{c^{m+1} + bx^m}}{a}$. Fiet æquatio differentialis ydy

$$= \frac{x^{m-1} dx \sqrt{c^{m+1} + bx^m}}{a}, \text{ quæ erit integrabilis, \&}$$

in-

integrando erit $yy = \frac{n}{2} \frac{c^{m+1} + bx^m \sqrt{c^{m+1} + bx^m}}{m+1+m+1} \dots$
 $\frac{n+1}{2} : m : b : a$

¶ gg si lubeat, quod experiri possumus ut ostendamus; denotant autem m , & n numeros quosvis cujusvis naturæ. Exempli loco sint $m = 3$, $n = 2$, sive subnormalis quæsitæ curvæ sit $xx\sqrt{c+bx}$, æ-

quatio pro curva quæsitæ est $yy = \frac{a^3}{2c+2bx}\sqrt{c+2bx}$

aut si $m = 4$, & $n = 2$, ut subnormalis sit $x^3\sqrt{a^2+x^2}$

(posito omnes c , a , & b esse invicem æquales brevitas gratia) erit æquatio curvæ per traditam regulam derivata $yy = \sqrt{a^2+x^2}$ vel $yy = \sqrt{a^2+x^2} \pm aa$.

Exemplum IV.

48 SI subnormalis quæsitæ curvæ esse debeat $\frac{x^3}{a\sqrt{aa+xx}} = ydy$, erit æqua. $\frac{x^3 dx}{a\sqrt{aa+xx}}$

undè integrando erit $yy = \frac{xx - 2aa}{3a}\sqrt{aa+xx}$. Uni-

versaliùs posita æquatione $ydy = \frac{x^{4n-1} dx}{b^{3n-2}\sqrt{a^{2n}+x^{2n}}}$, erit

integrando $yy = \frac{x^{2n} - 2a^{2n}}{3nb^{3n-2}}\sqrt{a^{2n}+x^{2n}}$. Et demùm
 etiàm

etiàm universalis, si fuerit æquatio proposita $ydy = \frac{x^{4n-1} dx}{b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}} \sqrt{a^{2n} + x^{2n}}}$, integrando invenie-

tur $\frac{yy}{2} = \frac{x^{2n} - ma^{2n}}{m-1} : \frac{a^{2n} + x^{2n}}{b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}}$ plus vel mi-

nus c c si libuerit; at si fuisset æquatio data $ydy = \frac{x^{4n-1} dx}{b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}}$, erit integrando $\frac{yy}{2}$

$= \frac{x^{2n} + ma^{2n}}{m-1} : \frac{x^{2n} - a^{2n}}{b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}}$ = c c, si libuerit.

$$\frac{4mn-2n}{m} b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}$$

Exemplum V.

49 **S**i integranda sit $\frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}} = dx$, erit æquatio integralis (ut ritè experiri possumus) $x = \frac{2y - 2\sqrt{ay} - a}{5a} : \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa}$, sive universa-

lius

lius ad integrandum $dx = y^{2n-1} dy - y^{2n-1} a^n dy$ 77

esset integrale $x = \frac{2y^{2n} - 2y^n a^n - 2a^{2n}}{\sqrt{2y^n - a^n}}$

& si æquatio fuerit $dx = y^{2n-1} dy - y^{2n-1} a^n dy$, erit

$\frac{2n-1+mn}{a} : \frac{1-m}{2y^n - a^n}$

facta integratione æquatio ejus integralis quesita x

$= \frac{2y^{2n} - 2y^n a^n - \frac{1}{m} a^{2n}}{2y^n - a^n} : \frac{m}{m+2n-1}$, & demùm

$\frac{2n+4mn}{a} : \frac{m+2n-1}{2y^n - a^n}$

si æquatio fuerit $dx = y^{2n-1} dy - y^{2n-1} a^n dy$, erit

$\frac{2n-1+mn}{a} : \frac{1-m}{2y^n - a^n}$

æquatio ejus integralis $x =$

$\frac{m+2n-1}{2y^n - a^n} : \frac{m+2n-1}{2y^n - a^n}$

ut si esset exempli loco $dx = y^4 dy - a^3 y^3 dy$, in-

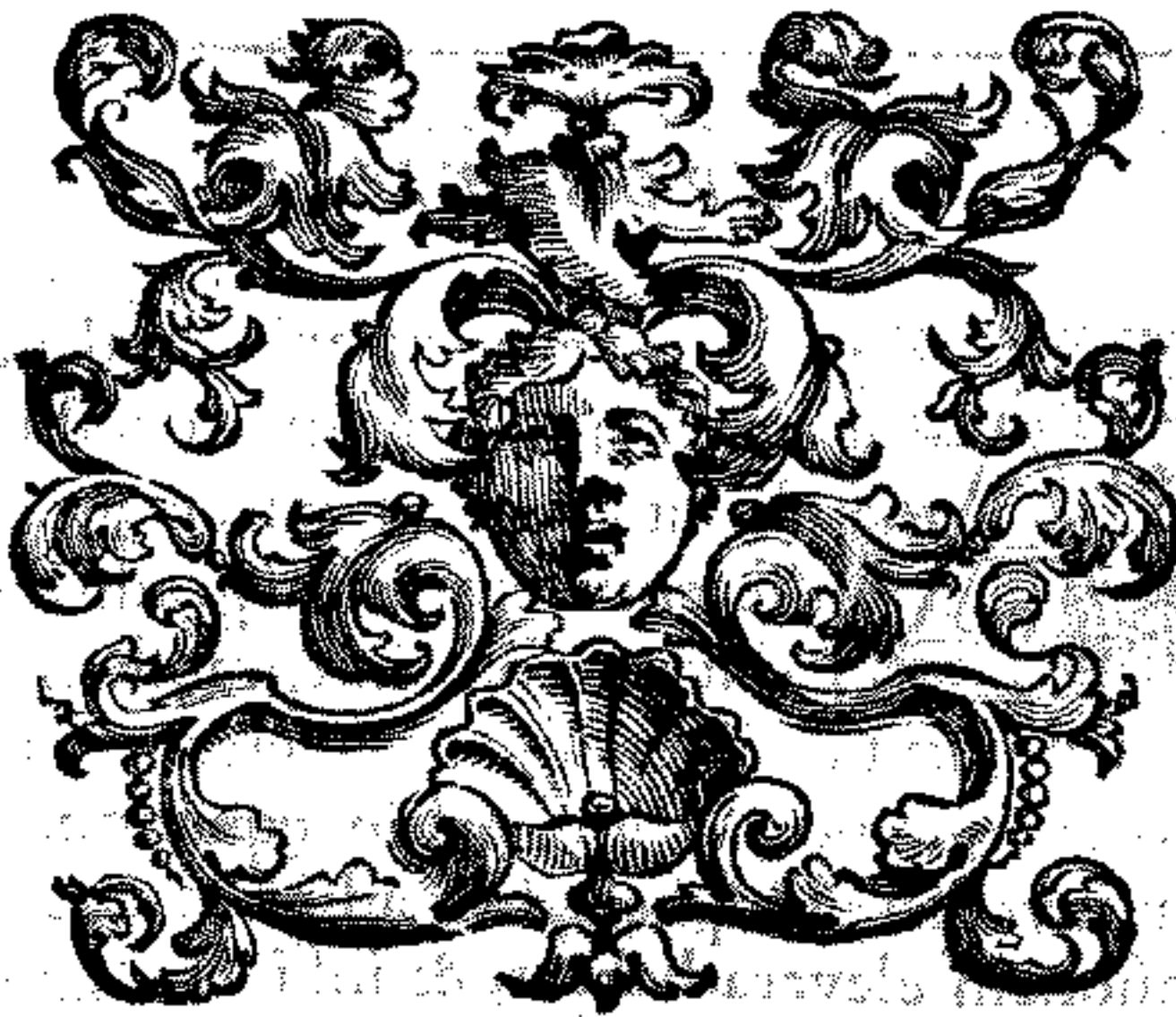
tegrando juxtà hunc ultimum canonem invenire-

mus $x = \frac{250y^5 - 340a^3 y^3 - 102a^6}{5y^3 - a^3}$

$\frac{10000 a^7}{5y^3 - a^3}$

50 **C**onsultò attulimus regulas hasce pro integrandis quantitatibus, quas una tantum ingreditur indeterminata, ut $x^m dx$ & alias hujusmodi, quia magni sunt usus, & valde conducere hos canones, aliasque tales regulas in ordinem aliquem redactas servare, quas tamen unusquisque facile sibi parare potest. Nulla enim hactenus, quod sciam, inventa est methodus, quâ de proposita quavis quantitate (necdum equatione) etiam si unica tantum indeterminata cum suo differentiali illam ingrediatur, tutò pronuntiari possit num illa algebraicè sit integrabilis necne. Unde cum incidimus in quantitates tales, de quibus querendum sit an sint integrabiles, magnum est subsidium ad hos canones recurrere, & scrutari an ulli eorum sit applicabilis quantitas illa. Hoc est unum ex præcipuis, quæ in Analyfi hac adhuc desiderantur, methodus scilicet, quâ dum proponitur quantitas quævis integranda, aut ejus integrale algebraicum assignare, aut impossibilitatem ejus assignandi demonstrare doceamur. Quod si quis invenerit, se tandiù quæsitæ hyperboles, circuli, infinitasque alias quadraturas reperisse sciat, assignato scilicet spatio rectilineo algebraico hyperbolicis, circularibusque spatijs prorsus æquali, aut de-

demonstrara ejus impossibilitate, de qua cum multi multa scripserint, eamque solide se ostendisse præsumpserint, nondum omnem rei difficultatem exhaustam esse dubitamus.



S E C T I O III.

De Constructione Equationum differentialium primi gradus, quando non sint algebraice integrabiles, & præter utriusque indeterminatæ differentialia ad altiore potestatem non elevata, continent alterutram tantum indeterminatarum.

P R O P O S I T I O I.

§ 1



Accidit sæpenumerò, ut data curvæ quam quærimus conditio talis sit, quæ ad æquationem differentialem primi gradus nos deducat non integrabilem algebraicè, sed quæ tamèn utriusque indeterminatæ differentialia (quæ necessarium est in æquatione differentiali inveniri) simplicia, sive ad primam tantum dimensionem elevata habeat, & insuper unam tantum indeterminatarum, altera omninò ex æquatione sejecta, contineat. Quo in casu curvæ quæsitæ constructio independentè à quadratura spatii cujusdam, quod mox inveniemus, haberi non poterit, aut saltèm dependebit ab alterius cujusdam problematis solutione, eandem hanc quadraturam involuente.

§ 2 Om-

§ 2. Omnis æquatio in qua unica tantum indeterminatarum inveniatur, præter utriusque indeterminate differentialia ad majores potestates non elevata ad hanc formam reducibilis erit $dz = qdu$. Voco scilicet z indeterminatam illam, cujus in æquatione differentiale simplex sive ad primam tantum potestatem elevatum reperitur, & præterea nullo modo illa in æquatione apparet; u verò est altera indeterminata, quæ cum suo differentiali æquationem ingreditur. Cum igitur ex omni equatione, cujusvis quantitatis quæ in illa est valor aliquo modo sit eruibilis, maxime autem quantitatis, quæ nullam potestatem altiore nata est, facile erit differentialis dz valorem elicere ex equationibus de quibus nunc sermo est, ac proinde ad hos terminos reducere, ut dz sola unam equationis partem constituat, reliqua verò pars sit productum alterius differentialis du in quandam quantitatem, quam voco q , quæ proinde erit nullo modo per z , sed per u , & constantes promiscuè data; est ergò $dz = qdu$ formula generalis pro omni equatione de qua nunc tractare intendimus. Quantitas autem q , debet esse nullius dimensionis, ut salvetur lex homogeneorum, hoc est tot dimensiones habitura est in denominatore quot in numeratore, nisi unitas subintelligatur.

§ 3. Igitur pro constructione quæsita; curva describatur AC, cujus abscissis AB existentibus $= u$ ordi- Fig. 10

L

di-

ordinate ad axem perpendiculares sint aq , tùm verò spatio ABC , quod continetur curva sic descripta, & duabus quibuscumque in illa coordinatis AB , BC diviso per constantem rectam lineam a ponatur ubique aequalis ordinata BD ad punctum B , eritque D ad quaesitam curvam. Est enim $AB = u$, BC ex hypothesis $= aq$, $BD = z$. Spatii ABC elementum erit $aqdu$, quare spatii hujus divisi per constantem a elementum erit qdu . Igitur omnium qdu summa, sive $\int qdu$, hoc est spatium ABC aequat z ordinatam lineae $AD = z$, unde $z = \int qdu$, & $dz = qdu$, quae est aequatio quam debueramus construere.

C O R O L L.

§ 4 **S**I loco ponendi ordinatam FG aequalem spatio AFE per a diviso, & ordinatam HI aequalem spatio AHK per a item diviso, & sic de ceteris, poneremus FL aequalem spatio $FECB$ per a diviso, & HM aequalem spatio $HKCB$ per a etiam diviso, & sic ubique ordinatae fierent aequales, non correspondentibus spatijs totalibus, sed spatijs inter coordinatas, & constantem ordinatam BC clausis, adhuc de curva sic descripta LMB , eadem differentialis aequatio valeret, ac proinde & illa non minus ac praedescripta $GIDA$ quaesito satisfaceret. Quod
cla-

clarum fit consideranti AF esse $= u$, $FE = aq$ elementum autem spatii $FECB$ esse $aqdu$, idem ac elementum spatii totalis AFE ; unde FL , quæ spatium $EFBC$ per a diviso æqualis facta est, æquè vocari potest $\int qdu$ ac tota FG , quare si tam FL quam GF vocetur z , erit utriusque curvæ $GIDA$, HB eadem differentialis equatio respectu ejusdem axis, & verticis, putà $dz = qdu$. Verùm curva LMB positione tantum differt à curva $GIDA$, quia spatium $EFBC$ differt ubique constante spatio à totali area EFA , unde & linea FG differet ubique, constanti eadem differentia à linea FL . Quare linea LMB , eadem est ac GID , quæ motu sibi ipsi parallela accessit ad axem per distantiam LG , & proindè positione tantum differt à curva GIB .

COROLL. II.

Possunt verò innumeræ assignari regulæ pro talium curvarum constructione, quas tamen omnes in idem recidere opus est, sicut pro inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas quidquid tenemus, semper in parabolæ descriptionem, aut analogum quid collimabit. Sic si dividatur quantitatis qdu quadratum $qqdu^2$ in duo quadrata $ppdu^2$, & $rrdu^2$, quorum radices pdu , rdu (si fieri possit, hoc est si quadratum quidem

L 2

pp-

ppdu' talis divisionis sit capax) sint integrabiles, clarum est, quod constructa curva, cujus coördinatae sint hæc integralia quantitatum pdu, & rdu, erit longitudo curvæ sit descriptæ = z ratio est, quod si ponatur talis curva cujus abscissæ sint integrales rdu, & ordinatæ inregraes pdu, erit elementum curvæ $= \sqrt{rrdu^2 + ppdu^2}$, cumq; ex hypothefi $rrdu^2 + ppdu^2$ faciant qqdu', erit elementum talis curvæ = qdu, ergò = dz, quare reddit dz = qdu proposita æquatio. Sed hæc regula, & quæcumque afferri possit pro constructione curvæ dz = qdu, semper primæ constructioni æquivalet, quia curvæ longitudo hac methodo adhibita, æquivalet spatio, quod secundum priorem methodum quadrare debemus; præterquamquod non apparet adhuc regula, qua omne quadratum qqdu' possit dividi in duo quadrata integrabiles radices habentia, quod tamèn si fieri posse quandoque constet in praxi est præeligendum, & constructio per rectificationes curvarum algebraicarum constructioni per quadraturas anteponenda est, quia practicè filo curvas facile metimur, spatia verò non itèm. Iàm igitur ad exempla descendamus.

Exemplum.

§ 6 **S**it invenienda curva, cujus subtangens sit constans. Ergò $ydx = a$, & $dx = \frac{ady}{y}$. Frustrà

autem tentabimus quantitatem hanc integrare algebraicè; licet enim scribendo $ay^{-1}dy$, hæc quantitas contineatur sub canone $y^n dy$, attamen, si regulâ illâ utamur quæ assignat $y^{\frac{n+1}{n+1}}$ pro integrali ex (nu. 41)

$y^n dy$, inveniemus in hoc casu quo $n = -1$ integrale esse $\frac{ay^0}{0}$ sive $\frac{a}{0}$ quantitatem infinitam. Unde

iàm alia via opus erit constructionem moliri. Continetur autem hæc æquatio $dx = \frac{ady}{y}$ sub canoni-

ca æquatione $dz = qdu$, quia quæ ibi est z hîc est x , & quæ ibi u hîc y , & quæ ibi q hîc est $\frac{a}{y}$. Con-

struenda est igitur curva IHFE, cujus abscissis CD existentibus y , sint ordinatæ $DE = \frac{ay}{y}$. Erit ergo

curva IHFE sic constructa hyperbola æquilatera, asymptotos habens axem CD, & lineam CK axi perpendicularem per C, & cujus quadratum CAF sit aa . Quoniam autem curvæ quæsitæ ordinata est equalis spatio curva hac contento per a diviso, opus erit spatio totali asymptoto CK, curvâ, coordinatisque CD, DE comprehenso divisoque per a equalem ponere ordinatam quæsitæ curvæ. Verum spatium hoc infinitæ magnitudinis esse scimus. Ne igitur constructio frustretur, cum dixerimus posse ab hoc spatio constans spatium semper tolli, assum-

manus pro hoc spatio constante infinitum spatium quod asymptoto KC , curva, duabusque invicem æqualibus coordinatis a sive CA , AF clauditur, nec ponamus ordinatam curvæ quam querimus æqualem spatio quod asymptoto CK , curva, & duabus quibuslibet coordinatis clauditur per a diviso, sed spatiorantum, quod determinatur ordinata FA , curva, & duabus quibuslibet coordinatis CD , DE , quale esset spatium $FADE$. Huic igitur spatio per a diviso fit æqualis recta DB , eritque punctum B ad curvam, cujus subtangens in axe CK erit data constans a . Est manifestum quod, spatio $FADE$ evanescente, quando CD reperietur esse $= CA = a$, tunc erit $DB = 0$, punctumque a in curva quesita. Deinceps si assumatur abscissa ut CL minor quam a , spatium $FALH$ respectu spatii $AFED$ est negativum, unde jam ordinatæ LG fient negativæ, curvaque BAG quesita axem secabit in A , & utrinque ab illo diverget in infinitum, ad partes verò G , non ultra asymptotum CK hyperbolæ protendetur.

COROLL.

57 **N** Emini dubium est quin curva GAB sic descripta, ut ejus subtangens in axe, seu asymptoto CK sit constans, sit ipsa Logarithmica. Erunt igitur lineæ x , sive ordinatæ DB ipsarum y , sive DC logarithmi. Sunt autem eadem DC

$= f$

$= \int \frac{ady}{y}$, ergò $\int \frac{ady}{y} = ly$, hoc est integrale ex

$\frac{ady}{y}$ erit ipse logarithmus quantitatis y sumptus in

logistica cujus subtangens sit $= a$. Deinceps igitur, cum integranda fuerit quantitas aliqua $\frac{ady}{y}$, scri-

bemus pro suo integrali ly , sive logarithmum ex y , advertendo debere logarithmum assumi in logarithmica CAB cujus subtangens sit $= a$, & eadem de causa integrale ex $\frac{ady}{a+y}$ erit $l(a+y)$. Aut vicever-

sa, cum differentiandus fuerit ly , assumptus in logarithmica, cujus subtangens, vel parameter sit data quævis a , scribemus pro differentiali $\frac{ady}{y}$. Hinc me-

thodus differentiandi ly^n , sive potestatem quamvis (pro cuius indice pono n) logarithmi indeterminatæ y , erit enim differentiale $\frac{n ly^{n-1} ady}{y}$, ex regulis

calculi differentialis communibus, dummodò tantum ubi deberet poni differentiale logarithmi, ponatur $\frac{ady}{y}$. Sic novas curvas, curvarumque species

excogitare jam potes, quarum tangentes invenire, evolutasque describere, ex hac methodo poterimus,

ut si fuerint curvæ $x = ly^{\frac{m}{n}}$ ubi n , & m quosvis

$\frac{n-m}{m}$
a

nu-

numeros integros designent, erit $dx = \frac{a}{m} ly^{\frac{n-m}{m}} dy$,

undè subtangens $= \frac{\frac{a}{m} ly^{\frac{n-m}{m}}}{\frac{a^{\frac{n-2m}{m}} y^{\frac{n-m}{m}}}{mly}} = max = \frac{mx^{\frac{n-m}{m}} a^{\frac{m}{m}}}{m}$,

punctum verò flexus contrarii reperietur ubi $ly = \frac{n-m}{m} a$. Harum curvarum notabilis positio, quæ

pro varia numerorum n , & m habitudine mirabiliter variata reperitur concipere jubet spem, haud grave lectori fore, si non inutili fortè digressionē paulisper ipsis contemplandis immoremur.

§ 8 Porro triplex distinguendus est casus, qui accidere potest, posito semper logarithmos ipsarum y sumi in logistica, quam modo descripsimus, cujus a sit subtangens, ita ut logarithmus ex a sive ICA sit $= 0$. Vel enim numerator n est impar existente denominatore m pari, vel n est par existente m impari, vel demùm n , & m ambo simul sunt impares. Quo ad primum casum, cum n est impar, & m par, si y sumatur minor quam a , erit iam ly negativa quantitas, undè ly^m erit negativa, quia potestas impar quantitatis negativæ est negativa, sed $ly^{\frac{m}{m}}$, hoc est radix (ut ita dicam) m^{esima} negativæ ly^m erit imaginaria, quia radix par ex quantitate negativa est tantum imaginaria, igitur x erit imagi-

na-

naria, & in hoc casu curva incipiet ab A, & nullam abscissam minorem quam a sortietur. Verùm si y assumatur equalis a, tunc $ly = 0$ undè si $\frac{n}{m}$ sit nume-

rus positivus erit $x = 0$, quia omnis potestas positiva ex 0 est 0, si sit negativus erit x infinita, quia potestas negativa ex 0 est infinitum quid, & tunc AL normalis ad CD per A erit asymptotus talis curvæ. Assumpta deindè y majore, atque majore quam a in infinitum, semper ly erunt positivi, crescentque in infinitum, undè ordinatæ curvæ nostræ crescent in infinitum siquidem $\frac{n}{m}$ fuerit positivus, minuen-

tur tamèn in infinitum si fuerit negativus, quo in casu evanescent omninò cum fuerit ly infinitus, sive y infinita, quare & CA in illo casu est curvæ asymptotus. Transferantur lineæ AC, AL, KC in figuram 12, & curva MN repræsentabit primum. (fig. 12.)

casum, nempe curvam $x = ly^{\frac{n}{m}}$ quando, exi-

stente n impari, & m pari, fuerit $\frac{n}{m}$ negativus. Cur-

va hæc in qua $CD = y$, $DN = x$ nullam sortitur y minorem quam AC quæ est a, estque ad asymptotos AL, AC illis perpetuò convexitatem ostendens, nullo enim contrarii flexus puncto insignis est, quia, existente $\frac{n}{m}$ negativa, erit $\frac{n}{m} - 1$, sive $\frac{n-m}{m}$ negativa,

M

un-

undè $\frac{n-m}{m} a$, hoc est ly in puncto contrarii flexus

erit negativus, undè y minor quam a, sed nulla est in his curvis y minor quam a, ergò nullum erit flexus contrarii punctum. Figura autem 13. ostendit

curvam MN quando $\frac{n}{m}$ æquationis $x = \frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$

est positivus unitate minor, posito n impari, & m pari. Nulla in illa CD, sive y potest esse minor quam a; cæterum transit illa per A, versùs AD semper concava, nec flexum contrarium, nec maximam minimamve ordinatam sortitur, tangitque illam AL in A. Dixi nullum adesse contrarii flexus punctum quia si $\frac{n}{m}$ minor est quam 1, erit $\frac{n-m}{m}$ negativa, & proindè,

ut factum est suprà pro figura 12. ostendetur nullum reperiri hic posse flexum. Tertium casum, quando in æquatione $x = \frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$, existente n impari,

m pari fuerit $\frac{n}{m}$ positivus unitate major ostendit fi-

(fig. 14.) gura 14. in qua curva NM, quæ nullam abscissam habet minorem quam a tangitur ab axe AD in A, & cum priùs versùs illum convexa sit, flectitur deindè, & versùs eundem sit concava, quia in hoc casu $\frac{n}{m}$ exi-

sten-

stente majore quam 1 erit $\frac{n}{m} - 1$ vel $\frac{n-m}{m}$ positiva,
 & hinc $\frac{n-m}{m} a$ positiva, quæ cum sit ly in puncto
 contrarii flexus, erit hic ly positivus, undè y major
 quam a, hoc est abscissa puncti contrarii flexus ma-
 jor quam AC, undè reverà, & non imaginariè tantum
 reperibile erit in hac curvarum specie.

59 Quando autem, existente n pari, fuerit m im-
 par numerus, tunc vel existat y major, vel minor
 quam a, ità ut vel ly sit positivus vel negativus, sem-
 per lyⁿ erit positivus quia n est numerus par, & exi-
 stente lyⁿ positivo, erit ly $\frac{n}{m}$ etià non modò realis
 sed positiva quantitas, undè & x, quæ est ly $\frac{n}{m}$ erit

$$\frac{\frac{n-m}{m}}{a \frac{n}{m}}$$

realis, & positiva, vel y assumatur minor, vel assu-
 matur major quam a. Posita porrò y = a, cum sit
 ly = 0 erit tunc ly $\frac{n}{m}$ infinita, cum $\frac{n}{m}$ fuerit ne gati-
 vus exponens, undè AL est asymptotus curvæ hujus
 in figura 15. nec erit ly $\frac{n}{m}$ æqualis nihilo, nisi fue- (fig. 15.)

$$\frac{\frac{n-m}{m}}{a \frac{n}{m}}$$

rit ly infinita, quod cum accadat, & posita y infinita,
 & posita y = 0, sequetur curvam hanc in infinita di-

stantia à puncto C secturam esse axem AC, eundem-
que etiàm secare cum y est 0 sive in ipso puncto C;
habet igitur curva hæc duas partes, MN unam ad a-
symptotos AD, AL positam, PO alteram, ad asym-
ptotum AL, proinde asymptoticam & ipsam parti
MN, & quæ secat AC in ipso sui initio C, secatq; ad
rectos angulos, ita ut KC tangat illam, suntque ambæ
hæ partes ad eandem axis AC partes; contrarium
flexum habet in parte PO, quia $\frac{n}{m}$ cum sit negativa,

relinquet negativam quantitatem $\frac{n}{m} - 1$ sive $\frac{n-m}{m}$,
undè $\frac{n-m}{m} a$ sive ly in puncto flexus contrarii est ne-

gativus, quod indicat abscissam y puncti illius esse mi-
norem quam a , & punctum tale cadere in portione
CPO. Si verò, n existente pari, m impari, & $\frac{n}{m}$ posi-

tivo, fuerit ille minor quam 1, curvam æquationis

(fig. 16) $ly^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{n-m}}{a^m}$ ostendet figura 16. In hac curva quæcum-

que abscissa y assumatur etiàm si minor sit quam a ,
competet illi sua realis & positiva x , ut suprà diximus

de curva figuræ 15. Porro si ly infinita, erit & $ly^{\frac{n}{m}}$,
& proinde x infinita, igitur in puncto C & in puncto
axis infinite distante à puncto C erit ordinata infinita.

Si verò $y = a$, $ly = 0$, erit $ly^{\frac{n}{m}} = x = 0$, transit ergò per A curva hæc, quæ ad asymptotum CK esse debet ex visis, duasque habet portiones in communi illo puncto invicem junctas APO, AMN & communem tangentem AL, & ad eandem axis AC partem locatæ sunt. Portio AMN est versus axem semper concava, sed portio APO, cum primò versus AC concava sit, flectitur ad alteras partes, & fit convexa, & ad asymptotum KC constituta in infinitum inter KC & AL protenditur. Ratio est quia $\frac{n}{m} - 1$ est ne-

gativus numerus sive $\frac{n-m}{m}$ a negativa quantitas quæ cum sit ly pertinentis ad punctum contrarii flexus, erit y minor quam a , undè &c. Tandem si n fuerit par, m impar, $\frac{n}{m}$ positivus & major quam 1, figura

17. utendum erit. Posita y minore quam a , sive ly (fig. 17)

negativa, positiva tamèn erit $ly^{\frac{n}{m}}$ sive x , & quidèm infinita quoties ly sit infinita sive y infinita sit vel sit 0, quandoquidèm $\frac{n}{m}$ exponens positivus esse suppo-

nitur. Si ly sit 0, erit & $x = 0$, undè curva trāsīt per punctum A in quo ly est 0, & y est a . Tangitur autèm ibi curva ab axe AC, & duas partes format quæ ad eandem axis AC partes locantur quarum una APO, versus AC continuò convexa reperietur, & ad asymptotum KC posita, altera AMN primò quidèm versus axem

axem illum convexitatem obvertit, mōx verò concavitatem, quia flexum habet ex eo quod $\frac{n-m}{m} a$, qui est logarithmus ex abscissa puncti contrarii flexus est positivus (propter $\frac{n}{m}$ maiorem quā 1 hoc est $\frac{n}{m} - 1$ positivam, & $\frac{n-m}{m}$ & $\frac{n-m}{m} a$ positivam) undè y major quam a ; deinde curvæ portio AMN in infinitum ab axe AC versùs illum concava elongatur.

60 Tertius casus est, cum n & m ambo simul numeri sunt impares. Et primò quidem est manifestum, quod si ly sit negativus, vel y minor quam a , $ly^{\frac{n}{m}}$ erit negativa, quia n est impar numerus, erit verò positiva si ly sit positivus; $ly^{\frac{n}{m}}$ autem erit vel positivus, vel negativus pro ut $ly^{\frac{n}{m}}$ fuerit vel positivus, vel negativus, quia radix impar potestatis imparis, est positiva, si quantitas illa sit positiva, negativa, si illa sit negativa, sed semper realis. Considerando igitur primò casum quo n & m existentibus imparibus sit $\frac{n}{m}$ negativa, representare illum poterimus per figuram 18.

(fig. 18.) Posito enim in hoc casu ly esse infinitam, erit $ly^{\frac{n}{m}} = 0$, undè in puncto C, in quo cum y sit 0 est ly infinita, & in alio puncto in axe AC infinite distante à puncto C erit $x = 0$ tran-

transit igitur curva per C, & est ad asymptotum

AC. Porro si $ly = 0$, erit $ly^{\frac{n}{m}}$ infinita; ergo in puncto A x erit infinita, & curva est ad asymptotum etiam AL. Habet porro curva hæc duas partes unam COP ad partes K axis AC locatam, per C transeuntem, adque rectum angulum axi AC insistentem, ad asymptotum autem AL existentem, punctoque contrarii flexus affectam, quia si $\frac{n}{m}$ est

negativa, erit & $\frac{n}{m} - 1$ & $\frac{n-m}{m}$, & $\frac{n-m}{m} a$, proin-

dè & ly negativa, & y minor quam a; altera pars MN curvæ hujus est ad alteras axis AC plagas describenda, ad asymptotos AC, AL, semper versùs illas convexa, ut ostendit figura. Quando fuerit $\frac{n}{m}$

positivus, sed unitate minor, existentibus interim utroque n, & m impari, tunc figura 19. exprimet (fig. 19)

curvam æquationis $x = \frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{m-n}{m}}}$ duas partes habē-

tem. Pars AMN quæ respectu axis AC ad plagam L jacet, semper concava est versùs axem illum, & ab illo in infinitum digreditur, tangiturque ab axe coniugato AL in puncto A per quod transit, eo quod cum $\frac{n}{m}$ sit positivus existente $ly = 0$ sive $y = a$, erit

ly

$ly^{\frac{n}{m}}$ sive $x = 0$. Pars verò AOP, quæ ad alias

$a^{\frac{n-m}{m}}$ respectu axis AC partes cadit quam alia portio MN, à puncto A exit, priusque versus AC concavam se facit, deindè flectitur, & convexa fit, ad asymptotum KC se disponens; quod debeat esse ad talem asymptotum patet quia cum ly est infinita, ut in

puncto C, debet esse infinita & $ly^{\frac{n}{m}}$ sive x , quod contrarium flexum habeat patet quia $\frac{n-m}{m}$ sive $\frac{n}{m} - 1$

existente negativa (cum 1 major sit quam $\frac{n}{m}$) est

$\frac{n-m}{m}$ a sive ly negativa, & y minor quam a , ergò

contrarius flexus pertinet ad curvæ portionem AOP
cujus abscissæ minores sunt quam a . Consideremus
ulteriùs casum quo $\frac{n}{m}$ statuitur positivus unitate ma-

jor cum existant n , & m impares. Casum designat
(fig. 20.) figura 20. curva duabus, & illa portionibus compo-
nitur utrinquè ab axe constitutis, quem secat, & tan-
git in A. Portio AOP est ad axem convexa, & ad
asymptotum KC, portio AMN, primò ad eundem
axem convexa est, deindè concava, cum punctum
flexus contrarii habeat. Reliquas curvarum proprie-
tates, ex æquatione erues, has solùm attigisse juvat,
ut appareat quam diversis figurâ curvis eadem equa-
tio competere possit.

CO-

COROLL. II.

61 **S**icuti ex hac propositione methodus eruitur pro differentiandis quantitatibus, quas ingrediatur quantitas logarithmica, ita & calculi integralis complures regulæ derivari possunt, quibus vice versa quantitates multas, quas logarithmica quantitas ingrediatur, poterimus integrare. In primis enim $\frac{ly^n dy}{y}$ est integrabilis, & integrale est $\frac{ly^{n+1}}{n+1}$, posi-

ta a subtangente logarithmicæ in qua assumuntur ly . Sic & integrabilis est $\frac{ly dy \sqrt{aa + ly^2}}{y}$, & integrale est $\frac{aa + ly^2}{3a}$. Uno autem verbo omnes cano-

nes pro integrandis quantitatibus ordinarijs differentialibus quales sunt, quos tradidimus in præcedenti sectione, valent etiam si pro indeterminata, quæ in illis reperitur, ponatur quantitas logarithmica simplex ly , vel lx , dummodò quantitas dividatur deindè per y , vel x prout ly vel lx adfuerit in quantitate integranda. Sic quoniam $y^{m-1} dy$ est inte- (nu. 45.)

grabilis, erit & integrabilis $\frac{ly^{m-1} dy}{y \sqrt{a^{2n} + ly^{2n}}}$, substituen-

do ly pro y , & dividendo deindè quantitatem per

N

y;

y; quia, cum y sit quantitas quævis indeterminata, si ejus loco ponatur alia quævis, & pro dy ponatur deinde hujus alterius differentiale, adhuc integrabilitas servari debet in quantitate proposita, igitur ponendo pro y aliam indeterminatam lx, vel lz, vel etiam ly, & pro dy deinde differentiale ipsius ly, quod est dy (posita brevitatis gratia pro sub-

(nu. 49.) $\frac{y^{m-1} dy}{\sqrt{a^{2n} + y^{2n}}} \text{ est } \frac{a^{2n} + y^{2n}}{m+1} : a^{2n} + y^{2n} \frac{m-1}{m} \text{ ita in-}$

tegr. ex quant. ly^{m-1} dy erit $\frac{a^{2n} + ly^{2n}}{m+1} : a^{2n} + ly^{2n} \frac{m-1}{m}$

substituta tantum in priori integrali, loco litteræ y, quantitate ly.

His addenda est regula pro integrando ly^m dy, vel universalius y^m lyⁿ dy, quæ ut in progressu patebit, eximium habet usum.

62. Propositum est igitur, quoniam de integrandis quantitatibus logarithmicis sermo est, omnium simplicissimam ly^m dy, vel universalius y^m dy dy in-

regrate; ponamus integrale quæsitum esse $y^{m+1} ly^n$,

$m \rightarrow 1$

quale esset nisi ly^n esset quantitas variabilis; vel igitur $y^{m+1} ly^n$ differentiata restituet $y^m ly^n dy$, vel

$m \rightarrow 1$

non; si restituer, iam erit illius integrale, & satisfactum erit quæstioni, assignato nempe quæsito integrali. Sed nisi restituat, & ejus differentiale præter quantitatem $y^m ly^n dy$, quid aliud contineat, quod vocetur du , signum erit quod assumpta quantitas $y^{m+1} ly^n$ non est integrale ex $y^m ly^n dy$, sed

$m \rightarrow 1$

excedit integrale quod quærimus ex proposita quantitate $y^m ly^n dy$, per totum integrale quantitatis du , quod est u . Et profectò differentiando $y^{m+1} ly^n$, oritur $y^m ly^n dy + n y^m a ly^{n-1} dy$ (po-

$m \rightarrow 1$

$m \rightarrow 1$

sito a esse subtangentem logistica) quod excedit propositam quantitatem $y^m ly^n dy$ per totam quantitatem $n y^m a ly^{n-1} dy$, cujus proinde integrale de-

$m \rightarrow 1$

mendum est ex quantitate $y^{m+1} ly^n$ ut habeatur

$m \rightarrow 1$

verum integrale quantitatis $y^m ly^n dy$. Ut autem habeatur quantitatis $n y^m a ly^{n-1} dy$ integrale, quod

$m \rightarrow 1$

demendum esse mox vidimus ex quantitate $y^{m+1} ly^n$

$m \rightarrow 1$

ponamus illud esse $\frac{ny^{m+1} a ly^{n-1}}{m+1}$ (quale esset nisi

potestas ly^{n-1} esset differentiabilis) & si reperiamus
reverà quantitatem $\frac{ny^{m+1} a ly^{n-1}}{m+1}$ esse integrale ex

$\frac{ny^m a ly^{n-1}}{m+1} dy$, dememus illam ex quantitate

$\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1}$ pro ut faciendum esse mox ostendimus, &

reliquum $\frac{y^{m+1} a ly^n}{m+1} - \frac{ny^{m+1} a ly^{n-1}}{m+1}$ erit inte-

grale ex $y^m ly^n dy$; at nisi $\frac{ny^{m+1} a ly^{n-1}}{m+1}$ sit inte-

grale ex $\frac{ny^m a ly^{n-1}}{m+1} dy$, sed ejus differentiale ex-

cesserit quantitatem hanc aliqua quantitate du, jam
est certum, quod nimis demptum est ex $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1}$

demendo quantitatem $\frac{ny^{m+1} a ly^{n-1}}{m+1}$, ac proinde

addi debere id quod insupèr subtraximus, quod est
u integrale ex illo excessu du quo differentiale quan-
tatis subtractæ $\frac{ny^{m+1} a ly^{n-1}}{m+1}$ superat quantitatem

$\frac{ny^m a ly^{n-1}}{m+1} dy$. Differentiando $\frac{ny^{m+1} a ly^{n-1}}{m+1}$ pro-

dit

dit $\frac{ny^m}{m+1} a ly^{n-1} dy + \frac{n : n-1 : y^m}{m+1} aaly^{n-2} dy,$

quod excedit $\frac{ny^m}{m+1} aly^{n-1} dy$ integra quantitate

$\frac{n : n-1 : y^m}{m+1} aaly^{n-2} dy = du,$ hujus igitur du inte-

grale (ut ostendimus) addendum est ad $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1}$

$-\frac{ny^{m+1} aly^{n-2}}{m+1},$ ut habeatur exactum integrale

quantitatis propositæ ad integrandum $y^m ly^n dy.$ Quantitatem porro du vel $\frac{n : n-1 : y^m}{m+1} aaly^{n-2} dy$

integraturi, ut ejus integrale quantitati $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1}$

$-\frac{n : y^{m+1} a ly^{n-2}}{m+1}$ addamus, fiat iterum, supposi-

tio, quod ejus integrale sit illud quod scimus fore futurum si ly^{n-2} non differentietur, ponamus nempe integrale ex $\frac{n : n-1 : y^m}{m+1} aaly^{n-2} dy$ esse

$\frac{n : n-1 : y^{m+1} aaly^{n-2}}{m+1},$ & si reverà fuerit, hoc in-

tegrale addendum est ad quantitatem $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1}$

$-n : y^{m+1} a ly^{n-1}$, & fiet exactum quantitatis

$y^m ly^n dy$ integrale $y^{m+1} ly^n - n : y^{m+1} a ly^{n-1}$

$+ n : n-1 : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}$, sed nisi fuerit, & differen-

tiale ex $n : n-1 : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}$ excefferit quantita-

tem integrandam $n : n-1 : y^m aa ly^{n-2} dy$ quanti-

tate du, debebit iterum u integr. illius excessusdemi ex

ferie illa $y^{m+1} ly^n - n : y^{m+1} a ly^{n-1} + n : n-1 : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}$

ad habendum verum quantitatis $y^m ly^n dy$ integra-

le; experiamur igitur iterum an $n : n-1 : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}$

sit integrale ex $n : n-1 : y^m aa ly^{n-2} dy$. Reperio dif-

ferentiale ex $n : n-1 : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}$ esse quantitatem

$n : n-1 : y^m aa ly^{n-2} dy + n : n-1 : n-2 : y^m a^3 ly^{n-3} dy,$

ac proinde continere $n : n-1 : n-2 : y^m a^3 ly^{n-3} dy$

plus

plùs justo, quare hujus quantitatis integrale erit demendum iterùm ex serie ut verum integrale quantitatis $y^m ly^n dy$ habeatur. Si iterùm pro integrali ex $n : n-1 : n-2 : y^m a^3 ly^{n-3} dy$ scribatur

$$\frac{n : n-1 : n-2 : y^{\frac{m+1}{3}} a^3 ly^{n-3}}{\frac{m+1}{3}} \text{ (pro ut verè esset nisi}$$

differentialis ex ly^{n-3} habenda esset ratio) atque sic procedamus in infinitum eadem lege quam hùc usque servavimus demendo scilicèt ex serie quantitatem hanc $n : n-1 : n-2 : y^{\frac{m+1}{3}} a^3 ly^{n-3}$, quam po-

$$\text{nimus legitimum integr. ex } \frac{n : n-1 : n-2 : y^{\frac{m+1}{3}} a^3 ly^{n-3} dy}{\frac{m+1}{3}},$$

deindè addendo integrale excessus quo differentiale ex $n : n-1 : n-2 : y^{\frac{m+1}{3}} a^3 ly^{n-3}$ superat

$$\frac{n : n-1 : n-2 : y^{\frac{m+1}{3}} a^3 ly^{n-3} dy}{\frac{m+1}{3}}, \text{ pro quo integrali}$$

semper supponenda est hypothesis potestatem ex ly , quam in quantitate integranda inveniemus, esse constantem, si inquam hoc fiat, reperietur integrale completum ex $y^m ly^n dy$ per seriem infinitam.

$$\text{exprimi putà } \int y^m ly^n dy = \frac{y^{\frac{m+1}{3}} ly}{\frac{m+1}{3}} - \frac{n : y^{\frac{m+1}{3}} a ly^{n-1}}{\frac{m+1}{3}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n : n-1 : y^{m+1} a aly^{n-2}}{m+1} - \frac{n : n-1 : n-2 : y^{m+1} a^2 ly^{n-3}}{m+1} \\
& + \frac{n : n-1 : n-2 : n-3 : y^{m+1} a^3 ly^{n-4}}{m+1}, \text{ \& sic in infi-}
\end{aligned}$$

nitum eo ordine, quem unusquisque facile perci-
piet.

63 Addam demonstrationem syntheticam hu-
jus inventi, cum via analytica supra exposita
difficilior, & longa nimis videri possit. Demon-
strandum est igitur integrale ex quantitate $y^m ly^n dy$
esse seriem infinite productam supra inventam; po-
natur $z = ly$ & $ady = dz$, erit $y^m ly^n dy = y^m z^n dy$;

$$\begin{aligned}
& \text{est autem } y^m z^n dy = y^m z^n dy + \frac{n}{m+1} y^{m+1} z^{n-1} dz \\
& - \frac{n}{m+1} y^m z^{n-1} ady = \frac{n : n-1}{m+1} y^{m+1} z^{n-2} adz \\
& + \frac{n : n-1}{m+1} y^m z^{n-2} aady \text{ \&c. in infinitum, quia sic}
\end{aligned}$$

omnes termini à primo destruuntur ab immediate
sequentibus, qui iidem sunt cum illis propter dz
 $= \frac{ady}{y}$. Sic secundus terminus seriei, qui est

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{m+1} y^{m+1} z^{n-1} dz \text{ destruitur à tertio termino} \\
& - \frac{n}{m+1} y^m z^{n-1} ady \text{ propter } dz = \frac{ady}{y}, \text{ \& eodem}
\end{aligned}$$

mo-

modo quartus destruetur à quinto, sextus à septimo &c. superstitie tantum primo termino $y^m z^n dy$. Est autem hæc series infinita integrabilis, primus enim terminus cum secundo simul sumpti integrabiles sunt, tertius cum quarto, quintus cum sexto, & sic omnis terminus in loco impari, cum suo immediate sequente est integrabilis. Facta porrò hac integratione, reperietur integrale hujus seriei, sive quantitatis $y^m z^n dy$, quæ illi æquivalet $y^{m+1} z^n - n: y^{m+1} z^{n-1} a$

$$+ \frac{n:n-1: y^{m+1} z^{n-1} a a}{m+1} - \frac{n:n-1:n-2: y^{m+1} z^{n-2} a^2}{m+1} \&c.$$

in infinitum ubi si pro z ponas ly , invenies ut supra integrale ex $y^m ly^n dy = y^{m+1} ly^n - n: y^{m+1} ly^{n-1} a a$

$$+ \frac{n:n-1: y^{m+1} ly^{n-1} a a}{m+1} - \frac{n:n-1:n-2: y^{m+1} ly^{n-2} a^2}{m+1}$$

&c. quod ad demonstrandum fuerat assumptum.

64 Hinc, si n fuerit numerus integer positivus, patet quantitatem $y^m ly^n dy$ fore integrabilem per seriem finitam, hoc est seriem mox expositam, licet in abstracto considerata, sive pro quocumque n sit infinita, tamen in his casibus, cum n est positivus integer numerus rationalis ad finitam reduci. Exempli loco sit $n = 2$; vides in termino quarto seriei $-n: n-1: n-2: y^{m+1} ly^{n-2} a^2$ adesse primò

$$\frac{m+1}{m+1}$$

O

coc-

coefficientem numerum $n - 2$ ac pro inde (cum debeat terminus per $n - 2$ multiplicari) terminum hunc evanescere; sed & evanescunt omnes deinceps termini, quia omnes coefficiente habent $n - 2$, unde series, ceteroquin infinita, fit finita, cum $n = 2$. Sic & si $n = 3, n = 4$ &c. quia in seriei progressu terminus aderit qui per $n - 3, n - 4$ &c. multiplicandus veniet, & deinceps omnes, post illum, qui proinde evanescunt omnes, solis remanentibus ijs qui præcedunt in Ordine seriei, quos quidem numero finitos esse oportet. Ponamus loco exempli $n = 2, m$ verò $= 1$ ita ut integranda, sit $y \cdot ly' dy$. in serie pones 2 pro n , 1 pro m , & omnibus terminis seriei à tertio abiectis, fiet hoc integrale $\frac{yyly^2}{2} - \frac{yyaly}{2} + \frac{yyaa}{4}$ vel $\frac{2yyly^2 - 2ayyly + aayy}{4}$. Si $m = -1$, series hæc

(nu. 61.) inutilis redditur, quia $m + 1$ tunc $= 0$, quod terminos singulos seriei infinitos reddit: sed tunc hæc serie non est opus cum alibi doceamur tales quantitates $ly^m dy$ nullius seriei adminiculo integrare.

(nu. 58. & seq.) 65 Patet igitur quænam ex curvis suprâ descriptis spatium huius seriei ope quadrabile contineat.

Cum enim illarum curvarum equatio sit $ly^{\frac{n}{m}}$

$= x$

$= x$, sive $ly' = x$ (ponendo r pro $\frac{n}{m}$) erit spatij (quod

ad axem in quo y assumuntur adiacet) elementum $x dy = \frac{ly' dy}{r-1}$ quæ quantitas per seriem finitam non

est integrabilis nisi r sit numerus integer positivus. Figure 12, 13, & 14 non possunt habere r numerum integrum, cum ponant $\frac{n}{m}$ fractionem habentem denominatorem parem, & si denominator est par, (loquor de fractione prima) numerus non est integer. Figura 15. habet r negativum, Figura 16. habet positivum sed unitate minorem, ergo non integrum. Figura quidem 17. in qua $\frac{n}{m}$ suæ æqua- (fig. 17)

tionis est factio numeratorem habens ~~im~~parem, potest esse de genere earum curvarum, quæ per finitam seriem quadrantur. Si enim denominator sit 1, erit $\frac{n}{m}$ seu r numerus positivus integer, debet autem esse par, ex vi Hypotesis, qua curva OPAMN descripta est. Ponamus $r = 2$, erit, posita $CD = y$, $DM = x$, æquatio $ly^2 = x$ unde $x dy = \frac{ly^2 dy}{2}$. Series

supra inventa numero præced. dat integrale ex $ly^2 dy$
 $= yly^2 - 2ayly + 2aay$. Sed querendum est an ali-

qua constans addenda sit, vel demenda, ad hoc ut
 O 2 hoc

hoc integrale exprimat valorem spatij ARMDA, aut ASP &c. ; sæpè enim addendæ sunt quædam constantes integralibus inventis, ut quantitatesque sitæ per illa exprimantur. Nunc quæro an ad hoc ut integrale inventum $yly^2 - 2ayly + 2aay$ expri-

mat spatium ARMDA, aliqua debeat addi, vel demi constans. Spatium indeterminatum ARMDA evanescit si vè fit = 0 quando $y = a$, & $ly = 0$; sed tunc inventum integrale, non evanescit, sed fit = $2aa$, ergò ubique demenda est constans $2aa$, ut spatium ARMDA perfectè exprimatur per illud integrale, eritque hoc spatium nō quidem ut traditum est $yly^2 - 2ayly + 2aay$ sed $yly^2 - 2ayly + 2aay - 2a^2$.

Eâdem de causa spatium ASP &c. est quantitas $-yly^2 + 2ayly - 2aay + 2a^2$, quæ est eadem ac alia

sed mutatis signis, quia hîc aucta x , minuitur y , ac proindè differentiale spatij ASP &c, est $-x dy$ non $x dy$. Si quæras igitur spatium quod asymptoto CK, curva ASPO, & ordinata clauditur, pone $y = 0$, & invenies esse = $2aa$, undè & si spatij hac curva clausi quadratura generalis non detur algebraicè quia valorem talis spatij ingreditur quantitas ly , tamèn spatium quod asymptoto, & curva continetur algebraicè quadratur, & est $2aa$. Sic, si r fuisset = 4, spatium CASPO &c. NC fuisset $24aa$, & universalitèr erit
sem-

semper spatium illud (quoties r fuerit numerus positivus integer par) = caa , posito c esse productum ex omnibus numeris ab unitate usq; ad r inclusivè dispositis, quod nimis longum esset explicare, & cōsiderando seriē propositā satis clarum fiet. Figura deindè 18, non potest habere $\frac{n}{m}$ sive r positivum, Figura 19. non potest habere integrum cum debeat esse $\frac{n}{m}$ unitate minor. Figura tandè 20. habere potest integrum, & positivum, & de curva POA-MN quę in illa designatur potest idē proportionālītēr dici ac de Figura 17. dictum est, & spatia eius per propositam seriē quadrati, & inveniri algebraicè spatiū asymptoto & curvis huius figurę clausum. Nobis tandè ad nos redendum est, nèc diutiùs extrà propositum nostrum licet divagari.

Exemplum 11.

66 **D** Escribenda sit Curva ICDH subtangentem BO habens = $\frac{y\sqrt{aa+yy}}{a}$, unde $dx = \frac{dy\sqrt{aa+yy}}{a}$. Igitur opus est Curvam describere

AE, quę habeat ordinatam ME = $\sqrt{yy+aa}$, spatioque CMEAC per a diviso ponere æqualem ordinatam MD. Curva autem AE erit hyperbola equilatera centrum habens C, axem verò transversum, CA = a .

67 Poterit hæc constructio tentari, & per logarithmicam, quam in exemplo superiore descripsimus; spatium enim ACMEA est æquale spatio ANKE — PKE + CMP + ANC, quare ad quadrandum spatium ACMEA ponemus rectangulum ex CN = $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ in logarithmum CK, & deinde ad-

demus spatium rectilineum CMP + CNA — PKE, summaque divisa per a dabit quæsitam ordinatam MD.

(nu. 55.) 68 Si velimus hanc constructionem moliri per rectificationem curvæ algebraicæ hoc exequemur per regulam suprâ traditam. Nam quadratum quantitatis $dy\sqrt{aa+yy}$ divisibile est in duo quadra-

ta dy^2 , & $\frac{yydy^2}{aa}$, quorum radices dy, & $\frac{ydy}{a}$ sunt

integrabiles, & integralia sunt y, & $\frac{yy}{2a}$ quapro-

pter describenda est curva CF, cujus abscissis CM si-
vè QF existentibus y, sint ordinatæ MF vel CQ
= $\frac{yy}{2a}$, quæ erit parabola cõmunis parametro 2CA,

Axe CB, vertice C descripta. Igitur assumptâ ordi-
natâ MD æquali curvæ CF, erit punctum D in opta-
ta curva. Et cum spatium ANKE si-
vè $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ CK
additum quantitati ANC + PMC — EKP faciat

AC-

ACME, hoc est faciat rectangulum ex MD in a, si-
vè rectangulum ex CF in a erit curva CF; si vè MD

$$= \text{ANC} + \text{PMC} - \text{EKP} + \sqrt{\frac{aa}{2}} : \text{CK}, \text{ vel algebr.}$$

$$= \frac{y \sqrt{yy+aa}}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2}} : \log. \frac{\frac{aa}{2}}{\sqrt{4yy+2aa} - 4y \sqrt{\frac{yy+aa}{2}}}, \text{ vel}$$

$$\frac{y \sqrt{yy+aa}}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2}} : \log. \sqrt{\frac{aa+yy}{2}} + \sqrt{\frac{yy}{2}}, \text{ sumptis}$$

logarithmis in logistica cuius NC si vè $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ sit sub-
tangens; uno tandem verbo, integrale ex $\frac{dy \sqrt{aa+yy}}{a}$

est $\frac{y \sqrt{yy+aa}}{2a}$ plus rectangulo ex $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ in logarith-

um fractionis $\frac{\frac{aa}{2}}{\sqrt{4yy+2aa} - 4y \sqrt{\frac{yy+aa}{2}}}$ diviso per

a, vel in logarithmum quantitatis $\sqrt{\frac{aa+yy}{2}} + \sqrt{\frac{yy}{2}}$

(idem enim est) sumptis logarithmis habentibus
 $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ pro subtangente.

Exemplum III.

69 **Q**uotiescumque æquatio ad quam pervene-
rimus fuerit $dy = \frac{ax^{m-1} dx}{a^m + x^m}$ erit integran-

do

do $y = l \sqrt[m]{a^m + x^m}$ posita a subtangente. Sic si fuisset $dx = ax dx$ integrando provenisset æquatio

$$y = l \sqrt[m]{a^m + x^m} . \text{ Posset primò intuitu videri aliquid implicans in hoc canone contineri quò } \frac{ax^{m-1} dx}{a^m + x^m}$$

(nu. 47.) per logarithmicam integratur, cum tamèn hæc quantitas contineatur in canone universaliori quem suprà tradidimus. Ibi enim notavimus $x^{m-1} dx$ $\sqrt[n]{c^{m+1} + bx^m}$ esse in integrabilem, & cum hæc quantitas, posito $c = a$, $n = -1$, $b = a$ proveniat $\frac{x^{m-1} dx}{a^m + x^m}$, est manifestum hanc in illa tanquam

casum peculiarem contineri, ac proindè integrabilem esse, & illam algebraicè, sicuti canon ipse universalis, algebraicè integrabilis est. Verùm cum integrale ex $x^{m-1} dx \sqrt[n]{c^{m+1} + bx^m}$ notetur ibi esse quantitas $\frac{n : c^{m+1} + bx^m}{n+1 : m : b} \sqrt[n]{c^{m+1} + bx^m}$, patet hoc

integrale fieri infinitam quãtitatẽ quando $n = -1$, ac proindè tunc ejus valorem determinari non posse, & sic inutilem reddi hanc regulam, & hac alia nobis utendum esse, si valorem hujus integralis tunc determinare velimus. Recurrendum igitur est ad logarithmos & scribendum $l \sqrt[m]{a^m + x^m}$ pro integrali canonis $\frac{ax^{m-1} dx}{a^m + x^m}$ sumptis logarithmis in logistica

sub-

subtangente a habente, addita insuper, vel dem-
pta arbitraria constante b, si libuerit. Si etiã fue-
rit integranda $a^{n+2}x^{n-1}dx$, erit integrale rectangu-

lum ex $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ ductum in logarithmum quantitatis

$\frac{a^n + x^n}{a^n - x^n} \sqrt{\frac{1}{2}aa}$ divisum per n , & sumptum in lo-

gistica cuius sit subtangens $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ à puncto per
quod ipsa subtangens est ordinata.

Exemplum IV.

70 **S**it æquatio construenda $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; di-

videtur quadratum partis $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ in duo quadrata

dx^2 , & $\frac{aadx^2 + xxdx^2 - 2axdx^2}{\sqrt{2ax - xx}}$, quorum radi-

ces dx , & $\frac{2ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$ sunt integrabiles habentq; in-

tegralia x , & $\sqrt{2ax - xx}$. Igitur, descripta curva cu-

ius abscissa existente x , sit ordinata $\sqrt{2ax - xx}$ (quæ
circulus erit radio a) portio curvæ quæ ad quam-
vis abscissam x pertinet, erit quæsitæ y . Hac viâ
facilius apparet connexio propositæ curvæ cum cir-

P

cu-

culari quadratura, vel rectificatione, quàm si descripsissemus curvam cuius ordinata sit $\sqrt{aa - xx}$, ut

docet regula huius sectionis. Similiter si fuisset $dy = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, curva cuius hæc est æquatio nos de-

duxisset ad circuli quadraturam, quia descripta curva cuius abscissa sit x , & ordinata $\sqrt{aa - xx}$ (quæ est circulus radio a , sumptis abscissis à centro) spatium circulare cuius abscissæ correspondens per a divisum quæsitæ curvæ ordinatam suppeditasset. Reducitur ad quadraturam circuli etiã adx si sit inte-

granda, quia eius quadratum $\frac{a^2 dx^2}{aa - xx}$, dividitur in

partes dx^2 , & $\frac{xx dx^2}{aa - xx}$, quarum radices dx , &

$-\frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}}$ integratæ dant integralia x , & $\sqrt{aa - xx}$.

Igitur curva algebraica, abscissam x , & ordinatam habens $\sqrt{aa - xx}$ (quæ circulus est ad centrum tamquam initium abscissarum relatus) si rectificetur dabit integrale ex quantitate adx .

71. Universalis $\frac{x^{n-1} dx \sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}{a^{2n-2}}$ reducitur ad

cir-

cularem quadraturam. Descripto enim circulo radius a habente, à centro extendatur per eius unam diametrum portio quæ sit $\frac{x^n}{a^{n-1}}$, erit ordinata il-

li competens ex circuli natura $= \frac{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}{a^{n-1}}$, quæ si

ducatur in datæ abscissæ $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ differentiale dabit

$n : x^{n-1} dx \sqrt{a^{2n} - x^{2n}}$, cuius integrale est spatium

correspondens circulare. Igitur integrale quæsitum ex $\frac{x^{n-1} dx \sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}{a^{2n-1}}$, erit huius spatii pars n^{esima} .

72 Similiter $\frac{ax^{n-1} dx}{\sqrt{2a^n x^n - x^{2n}}}$ habet pro integrali ar-

cum circulem radio a ductum, & abscissam habentem à vertice $= \frac{x^n}{a^{n-1}}$ sed tamen hunc arcum

per n divisum, ut facile erit synthetica methodo experiri. Alios canones non absimiles excogitabis pro internoscendis quantitatibusque inter integrandum occurrere possunt, vel quæ in æquationibus differentialibus possunt inveniri, & quarum integrale, sive quæsitarum curvarum descriptio, à circuli quadratura dependet. Per has suprà allatas regulas

$\frac{xdx\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$, $\frac{x^2dx\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$ haud aliter etiã

$\frac{xdx}{a^2}$, $\frac{xxdx}{a^2}$, & tales per circularia spa-

$\sqrt{2a^2x^2-x^4}$ $\sqrt{2a^2x^2-x^4}$
tia integrantur, & infinitæ alię hujusmodi, eandem
à circuli quadratura suscipiunt dependentiam.

73 Itẽm $\frac{a^{n+1}x^{n-1}dx}{a^{2n}+x^{2n}}$ est integrabilis per cir-

culum, est enĩ eius integrale sector per n divisus,
qui habeat sui dimidii tangentem ipsi $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ equalem;

Si enĩ tangens dimidij arcus sit $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ erit sinus ar-

cus totius = $\frac{2x^na^{n+1}}{a^{2n}+x^{2n}}$, & eius abscissa erit = $\frac{2ax^n}{a^{2n}+x^{2n}}$,

quorum si fiant differentialia, & differentialium
quadrata, & quadratorum summa, & summe radix
quadrata, erit illa elementum arcus, quod invenie-
tur esse = $\frac{2na^{n+1}x^{n-1}dx}{a^{2n}+x^{2n}}$, quod elementum in $\frac{a}{2}$

ductum dat elementum sectoris circularis quęsitum
= $\frac{na^{n+1}x^{n-1}dx}{a^{2n}+x^{2n}}$, unde propositum elementum quod

est huius sub n plurẽ erit elementum talis sectoris per
 n divisi. Quare iam quotiescumque integranda

fit

fit $\frac{xa^4 dx}{a^4 + x^4}$, vel $\frac{xxa^3 dx}{a^4 + x^4}$, & similia, res erit ad

sectorem circuli radium a habentis, & cuius dimidii tangens fit $\frac{x^2}{a}$, vel $\frac{x^3}{aa}$, sed per 2, vel 3 res-

pective divisū. Sic $\frac{a^{\frac{5}{2}} dx}{\sqrt{aax + x^3 + 2axx}}$ est integrabi-

lis per circulum, hic enim est casus propositi canonis ubi $n = \frac{1}{2}$.

Exemplum V.

74 **P**RO constructione curvæ BM secantis datam (fig. 4.)
 quamvis curvam MV circa fixum punctum
 in gyrum motam in angulo quovis dato, de qua
 alibi actum est, cum ibi invenerimus, quod posita (nu. 35.)
 $AG = x$, $BC = y$, $CD = r$, radio $CG = a$, sinu recto
 dati anguli in radio a , $= b$, & sinu complementi
 $= c$, habetur æquatio $dx = \frac{byady + crady}{cyy - byr}$, curva

construi potest cuius abscissæ in axe recto $= y$, ordi-
 natæ verò similiter rectæ sint $\frac{aaby + aacr}{cyy - byr}$, datur

enim r per y , & a est constans, b verò & c , vel &
 ipsæ constans, sunt (ut in casu quem hic ponimus,
 quo angulus cuius sunt sinus cōstans sit) vel & ipse

dan-

dantur per y , ut ibi etiã evenire posse notavimus. Hac curva descripta, spatijs quæ illa cum suis coordinatis comprehendit per a divisibiles, æquales esse debent abscissæ x curvæ quæsitæ BM , sive arcus AG æquales debent poni rectis illis, quæ spatia hæc per a divisibilia exæquaverint. Verum & si describeremus ad circulum AG tanquam axem lineam, assumendo arcus à puncto $A = y$, & ordinatas correspondentes à centro usque ad curvam $= a \sqrt{\frac{2bay + 2car}{cyy - byr}}$

possemus etiã spatijs quæ intèr centrum, & talem curvam, dualq; ordinatas qualvis clauduntur per a divisibiles ponere æqualem abscissam AG , cui ordinata correspondeat $= y$, sic enim punctum reperietur in optata curva BM , quia si addit curva ad axem circulare AG , cuius abscissa in hoc axe existente y , ordinata a centro sit $a \sqrt{\frac{2bay + 2acr}{cyy - byr}}$, erit elemen-

tum spatij intèr hanc curvam, & centrum, per quavis ordinatam à centro abscissi & per a divisi $= \frac{byady + crady}{cyy - byr} = dx$. igitur x quæsitæ curvæ æqua-

lis est huic spatio per a , ut suprà dictum est, divisio. Addidimus hanc constructionem per quadraturam curvæ ad axem circulare relatæ, quod videatur naturæ problematis magis congrua, cum hic de lineis agamus ad tales axes constitutis. Utraque tamen harum constructionum pro legitima est reputanda.

SE-

SECTIO QUARTA.

De constructione æquationum differentialium primi gradus, quando constet non esse algebraicè integrabiles, & præter utriusque indeterminatæ differentialia ad quamvis potestatem elevata, continent alterutram tantum indeterminatarum.

PROPOSITIO PRIMA.

75



Equatio differentialis primi gradus ad quam pervenitur pro quæsitâ aliqua linea est interdum talis ut differentialia utriusq; indeterminatæ ad potestatem quamvis elevata habeat unicam tantum indeterminatam cæteroquin continens; tuncque, si loco differentialis indeterminatæ illius, quæ æquationem non ingreditur, substituatur zdt , hoc est indeterminata quædam z per constan-

^atem divisa, & in differentiale dt alterius indeterminatæ, quæ æquationem inventam ingreditur multiplicata, habebimus æquationem alicuius curvæ, cuius spatia quæ sunt ad abscissas t per a divisa erunt ordinatis quæsitæ. Lineæ æqualia easdem abscissas t habentibus.

76 Nàm, posito indeterminatam, quæ æquationem non ingreditur esse u , adesse autem tantum du , & verò ut suprà dictum est esse aliam, cuius non solum differentiale in equatione apparet, sed & præterea ipsa extrà differentiale signum in illa reperitur, cum loco du iste valor zdt sit ubiq; substituendus,

& loco du^2 substituendum sit $\frac{zzdt^2}{a^2}$, & $\frac{z^3dt^3}{a^3}$ loco du^3 ,

(m. 4.) & sic de cæteris ipsius du potestatibus, est clarum in unoquoque membro equationis post substitutionem tot ipsius dt dimensiones esse adfuturas, quot priùs aderant differentialis du potestates, additis insuper dimensionibus, quas in quovis termino eadem dt antè substitutionem habuerat. Et cum in quavis æquatione, du , & dt simul sumptæ æqualem in omni membro dimensionum numerum habeant, sequetur quod in hac etiàm æquatione, substitutione peracta, dt ubique eandem dimensionem obtinebit, undè divisibilis erit æquatio per illam ipsius dt dimensionem, & sic omnia differentialia omninò tollentur ex æquatione, quæ algebraica fiet, & relationem indeterminatarum t, z determinans curvam aliquam algebraicam indigitabit. Descripta porrò hac curva, cum debeat esse $du = \frac{zdt}{a}$, debemus

spatijs quæ illa claudit cum axe, & coordinatis (cum axe inquam in quo t assumuntur) per a divisiles

les ponere lineas u , quæ erunt ordinatæ curvæ construendæ, ad abscissas t pertinentes. Est enim zdt hujus spatij, $\frac{zdt}{a}$ verò eiusdem per a divisi elementum,

quod elementum du ordinatæ u (quæ ad abscissam t in quæsitâ curva pertinet ex Hypotefi) debet æquare, undè si elementa sunt continuò invicem æqualia, æqualia erunt & integralia elementorum.

C O R O L L.

77. zdt non solùm est elementum spatij quod claudit axis, ordinata z , & Curva cuius abscissa sit t , & z applicata, sed est etiàm elementum spatij illius constante quovis spatio aucti. Itaque u , sive quæsitâ ordinata non æqualis tantùm censenda est spatio quod superiùs determinavimus, & curvâ duabusque coordinatis circumscripsimus, per a diviso, sed addito etiàm quovis constanti spatio per a diviso, sive quavis constante recta, erit adhuc ordinata quæsitæ curvæ; additio hæc constantis curvam positione tantùm, non natura, variare potest. Facile per datum punctum duci poterit curva quæcumq; per hoc æquationum genus expressa, quod cum nullâ possit impediri difficultate, ulteriùs explicare negligimus.

Q

Exem-

78 **S**I relatio inter quatuor lineas tangentem, subtangente, normalem, & subnormalem quęsitę lineę, sive t, s, n, r , æquatione quavis exprimaturs nullam constantem continente, ita ut in omni æquationis huius termino dimensiones literarum t, s, n, r simul sumptę eundem numerum efficiant, tunc æquatio erit per unam eandemque ordinatę y dimensionem divisibilis, evanescente sic omnino y ex æquatione; est enim $t = y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dy}}$,
 (nn. 5.) $s = y \frac{dx}{dy}$, $n = y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx}}$, $r = y \frac{dy}{dx}$, undę harum Linearum unaquavis per eandem ordinatę y (primam nempe) potestatem afficitur, quare si ex his quatuor Lineis ad quamcumque potestatem elevatis fiat quodcumque productum, tot erunt in producto dimensiones indeterminatę y , quot fuerint omnes dimensiones producti, ut in producto $t^3 s^3 n^3 r^3$ aderunt undecim dimensiones lineę y , quia undecim dimensionum est productum; æquatio autem, quę ipsarum t, r &c. relationem continet, debet ubique eundem dimensionum numerum sortiri, & solis t, r &c. constare, quia nullam constantem admittere debet, quare divisibilis erit per tantam ipsius y potestatem quantus erit hic dimensionum numerus, ut si æquatio foret $s^3 - t^3 = rnn - n^3$, æquatio di-

divisibilis esset per y^3 , & sic de singulis. Per hanc porro divisionem tolleretur omnino y ex æquatione, & solæ dy , dx superstites erunt. Applicemus regulam, & ponamus quod $sr - rn = ts$, sive $yydx^3dy^3$ sit $= \frac{yydx^3 + yydy^3}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, iam æquatio divisibilis est per yy , nec post divisionem reliquum est quidquam in æquatione præter dx , & dy , nam æquatio à signis radicalibus liberata est $dx^3 + dx^2dy^2 + 2dx^3dy^2 - dx^2dy^3 + 2dx^3dy^3 + dy^6dx^2 + dy^3 = 0$ substituenda est iam zdy in lo- (nu. 75)

cum dx , unde æquatio $z^3 + z^2aa + 2z^3a^3 - z^2a^4 + 2z^3a^4 + 2za^5 + a^6 = 0$ Patet autem hanc æquationem non esse ad lineam quandam, sed ad punctum, vel puncta numero finita, hoc est z est constans, non verò variabilis, quia ex hac æquatione patet z dari per constantem a . Cum igitur z sit quædam constans, & sit $dx = zdy$ & proinde $dx, dy :: z, a$, erit dx ad dy in

ratione constante; igitur recta est linea quæsitæ, & talis ut cum axe angulum contineat, cuius sinus complementi ad sinum rectum sit ut a ad z radicem mox inventæ æquationis. Quare patet quomodo sit instituenda constructio, & duci debeat quæsitæ linea.

Q 2

CO-

79 **S**imiliter quoties æquatio inventa pro construenda linea solis dx , & dy constiterit, ostendetur lineam ipsam rectam fore, cum axe dato, atque ad punctum in illo datum vel assumptum angulum constituens, cuius sinus complementi ad sinum sit ut a recta quædam ad arbitrium assumpta ad z radicem equationis inventæ per substitutionem quantitatis $\frac{zdy}{a}$ loco dx . Quæ substitutio in

his casibus brevius supplebitur si pro dx ubique ponamus z , & pro dy ponamus a , cum z , & a ipsis dx , dy proportionales existant, vi hypothesis $dx = \frac{zdy}{a}$

Exemplum II.

80 **C**urva ponatur construenda, cuius abscissæ potestas quævis data, sit æqualis cuivis potestati ipsius curvæ, sive cuius æquatio sit $t^m = x^n$, $a^{\frac{n-m}{m}}$

& proinde $t = x^{\frac{n}{m}}$ unde $dt = \frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx$, & pro dt $\frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}}$

ponendo $\sqrt{\frac{dx^2}{a^m} + \frac{dy^2}{a^m}}$ erit quadrando deinde & reducendo equationem ad eundem denominatorem

$\frac{2n-2m}{a^m} dx^2 + \frac{2n-2m}{a^m} dy^2 = \frac{2n}{m^2} x^{\frac{2n-2m}{m}} dx^2$. Sive in hac equa-

æquatione substituamus zdx loco dy iuxta regulam traditam, sive seperando dy eius valorem eruamus $= dx$

$$\sqrt{\frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}} \times \frac{\frac{2n-1}{m}}{\frac{2n-1}{m}} - a^{\frac{2n-1}{m}}}, \text{ in idem.}$$

recidet constructio, in quadraturam scilicet spatii

$$\text{cuius æquatio sit } z = a \sqrt{\frac{\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}} \times \frac{\frac{2n-1}{m}}{\frac{2n-1}{m}} - a^{\frac{2n-1}{m}}}$$

Quando spatia hæc fuerint algebraicæ quadraturæ capacia tunc curva quæsitæ erit & ipsa algebraica, secus erit tantum transcendens.

Exemplum III.

§1 **P**roponatur describenda ad axem AB curva (fig. 22.) CG , dato puncto fixo extra axem D , talis ut ducta quavis tangente CE , & ordinata CB per punctum contactus, & per D ipsi CE parallela DF , sit ubique $cAD^n AF^m$, $DF^n :: DF, BC$, posito c esse numerum quemvis datum constantem. Ponatur $AD = a$, $AB = x$, $BC = y$, invenienturque $AF = \frac{adx}{dy}$, & $DF = \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, & debet esse ana-

$$\text{logia } \frac{c : a^{\frac{n+m}{m}} dx^{\frac{n}{m}}}{dy^m} : \frac{a^{\frac{n}{m}} : dx^{\frac{n}{m}} + dy^{\frac{n}{m}}}{dy^{\frac{n}{m}}} :: a^n$$

$a' : dx^2 + dy^2$, y' ; unde æquatio $cy' dx^n dy^{n-1}$

$$= a' dx^2 + dy^2, \text{ undè quadrando invenietur}$$

city of $dx, dy = a \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & extra-
cta radice cuius index fit $m + n + r$ erit æquatio

$$c \frac{2}{27+27+27} y \frac{2}{27+27+27} dx \frac{2}{27+27+27} dy \frac{2}{27+27+27} = a \frac{27}{27+27+27} dx^2 +$$

a $\frac{2r}{r^2 + 1}$ dy. Ponamus iam zdy loco dx, & qua-

vis potestas illius loco homologue potestatis huius,
& peracta substitutione, & diviso ubique per dy &
reducta æquatione ad eandem denominationem.

$$\text{fiet } c = \frac{2}{x^2 + 2x + 1} \quad z = \frac{2x}{x^2 + 2x + 1} \quad y = \frac{2x^2}{x^2 + 2x + 1} = a \quad \frac{2x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1} = a \quad \frac{2x^2}{x^2 + 2x + 1} = a \quad zz;$$

undè $y = a^{\frac{2r}{m+n+r}} + a^{\frac{2r}{m+n+r}}$ zz, & tandem,

2 270

C 77-1-10-1-2 Z 77-1-10-1-1

extracta radice indicem habente 2r, erit y

OLYMPIAN, v. 28, p. 57, 1957.

$$= a^{23+23} + a^{23+23} \quad \text{ZZ} \quad \text{aquario curve con-}$$

Struen-

struendæ, qua constructa spatijs, quæ adiacent abscissis per a divisis æquales ponantur rectæ lineæ, hæc erunt ordinatæ x pertinentes ad abscissas y in curva quæsitæ.

COROLL.

82 **M** Vltotiès evenit curvam hanc quadratricem quæsitæ curvæ (hoc est cuius spatiorum quadratura manifestat ordinatas curvæ quæsitæ) esse algebraicè quadrabilem, tuncque quæsitæ curva erit etiàm algebraica, quia quæsitæ curvæ ordinatæ sunt spatijs huius, quam quadratricem voco proportionales. Ut autèm clariùs distinguamus quosdam casus in quibus curva hæc quadratrix est

algebraicè quadrabilis vocemus $a^{\frac{m+n+r}{2r+2m}} = b$, & $a^{\frac{m+n+r}{2r+2m}} = e$; eritque proindè æquatio curvæ quadratricis y

$= b + e z z$. Quotiescumque autèm integrabilis fuerit $dz : b + e z z$ sive ydz, erit & integrabilis zdy, quia $\int zdy + \int ydz = yz$, ac proindè

de

dè $\int zdy = yz - \int ydz$. Cum autem $\int \frac{zdy}{a}$ sit
ordinata curvæ quæsitæ, sequetur hanc ordinatam

$$\text{fore algebraicam quotiès } dz : \frac{b + ezz^{\frac{m}{r}}}{c^{\frac{1}{r}} z^{\frac{m}{r}}} \text{ fuerit}$$

integrabilis.

§ 3. Et primò quidè, si numerus qui decoratur
per $\frac{m+n+r}{2r}$ fuerit integer, & positivus, clarù est,

quantitatem $b + ezz$ elevandam fore ad aliquam
positivam integram potestatem, quæ quidè (quæ-
cumque sit illa) non posset non integrabilem effi-
cere quantitatem $dz : \frac{b + ezz^{\frac{m}{r}}}{c^{\frac{1}{r}} z^{\frac{m}{r}}}$ nisi obstaret $z^{\frac{m}{r}}$

posita in denominatore. Nisi enim adesset omni-
nò z in denominatore satisdarum est quamvis inte-
gram positivamque quantitatis $b + ezz$ potestatem
in dz ductam, integrabile quid effecturam, quia si
debeat $b + ezz$ elevari exempli loco ad tertiam po-
testatem, habebit z in uno membro nullam, in alio
duas, in tertio quatuor in alio demù sex dimensiones,
quæ omnia igitur membra in dz , ducta facient in-
tegrabiles quantitates. Et universaliùs, ad quamvis
potestatem integram positivamque elevanda sit
 $b + ezz$, in uno semper membrorum nullam, in
se-

secundo duas, in tertio quatuor, in quarto sex dimensiones est habitura, quousque maxima ipsius z dimensio sit exponentis $\frac{m+n+r}{2r}$ dupla, vel sit

$\frac{m+n+r}{r}$, & nullibi ad potestatem imparem poterit elevari, sed omnis quidem numerus par qui maior non sit quam $\frac{m+n+r}{r}$ erit exponens literę

z in aliquo membro. Verum cum denominator ducatur in ipsius z potestatem $\frac{m}{r}$ debebit hæc potestas subtrahi, ex omni numeratoris membro,

quod sanè integrabilitatem non potest tollere, nisi alicubi exponens potestatis reliquę ipsius z sit $= -1$.

Ex quavis nempe potestate, quam habeat z in quocumque membro cuiusvis potestatis integrę, & positivę $\frac{m+n+r}{2r}$ ad quam $b+ezz$ elevetur, tollendo

potestatem $\frac{m}{r}$, reliquum est alia ipsius z potestas,

quę proinde in dz ducta erit adhuc integrabilis ut prius, dummodò hæc potestas nullibi sit -1 , quo in casu integrabilem non esse alibi ostensum est. (m. 42.)

Si igitur, existente semper $\frac{m+n+r}{2r}$ positivo, & inte-

gro, fuerit $\frac{m}{r}$ negativus (vel integer vel factus nihil

inter est) debebit potestatibus quas habet z in nu-

R

me-

meratore, non demi quidè, sed addi aliquid positivum. Sed addendo aliquid cuivis numero positivo aut etià addendo aliquid ad nihil, nunquàm potest provenire negativus numerus -1 ; quare in hoc casu nunquàm poterimus incidere in membra non admittentia integrationem algebraicam. Pronunciemus igitur quod quoties, existente $\frac{m+n+r}{2r}$

positivo integro, $\frac{m}{r}$ simul fuerit quomodocumquè

negativus, curva quadratrix erit quadrabilis, & curva quæsita consequenter algebraica. Exemplum esto $r=2$, $m=-2$, $n=4$, quo in casu si ponatur $c=1$ erit $b+ezz$ (restitutis pro b , & e eorum valoribus) $= \frac{aa}{aa} + zz$, & applicando debite valores expo-

(fig. 23.) nentium m, n, r , erit æquatio curvæ quadratricis, positæ $HI = z$, $IK = y$, $y = \frac{aaz + z^3}{aa}$. Undè yz

$= \frac{aazdz + z^3dz}{aa}$, & spatium HIK quod adiacet axi su-

pèr quem assumuntur z erit integrando $\frac{2aazz + z^4}{4aa}$,

quod cum evanescat evanescente, z nihil constans addi debet ad exprimendum spatium HIK . Cum autem opus habeamus spatii HLK , quod est $\int zdy$, in veniemus illud demendo ex yz , sive ex quâtitate

$$\frac{aazz + z^4}{aa} \text{ mox inventum spatium HKL } \frac{2aazz + z^4}{4aa}$$

$$\& \text{ reliquum erit } \int zdy, \text{ vel HKL} = \frac{2aazz + 3z^4}{4aa}$$

$$\text{undè } \int \frac{zdy}{a} \text{ sive quæsitæ } x = \frac{2aazz + 3z^4}{4aa}. \text{ Cur-}$$

$$\text{va igitur quæsitæ est talis ut, eius abscissa existente } y \text{ sive } \frac{aaz + z^3}{aa}, \text{ ordinata } x \text{ sit } \frac{2aazz + z^4}{4aa}.$$

84 Sed etiã si m sit positivus, modò sit fractus

numerus, poterimus certiores esse curvam quæsitam algebraicam futuram in hypotheli semper quod $\frac{m+n+r}{2r}$ sit integer, & positivus; quia nempe

numerus fractus ab integris demptus (quales sunt omnes exponentes potestatum litteræ z in numeratore in hoc casu, quo $\frac{m+n+r}{2r}$ est positivus in-

teger) numquam integrum -1 potest relinquere, loquor de fractis irreducibilibus. Undè si fuerit $m = 1, n = 1, r = 2$, erit, posito $c = 1$, æquatio quadratricis LMK, positis $HO = z, OL = y$, (fig. 24.) $y = aa + zz$, undè $ydz = \frac{aadz + zzdz}{\sqrt{az}}$ sive etiã

$$= \frac{aaz^{-\frac{1}{2}}dz + z^{\frac{3}{2}}dz}{\sqrt{a}} \text{ undè integrando erit } \int ydz$$

$\frac{10aaz + 2z^3}{\int \sqrt{az}}$ æquale spatio ordinatâ quavis OL,

suâ abscissâ OH, curvâ, & asymptoto HR circumscripto, quod cum evanescat evanescende z prorsus ut debet, signum est, huic integrali $\frac{10aaz + 2z^3}{\int \sqrt{az}}$

nullam constantem esse addendam ut exprimat spatum illud. Habito spatio ad axem OH, ad obtinenda spatia ad alium axem, quæ sunt horum complementa, & quorum indigenus, assumatur $HP = \sqrt{\frac{a}{z}}$, ductaq; ordinata PM, quæ erit $4a$

eritque omnium ordinatarum minima, invenietur spatum abscissâ PH, ordinatâ PM, curvâ, & asymptoto HR clausum $= \frac{32}{5} aa \sqrt[243]{\frac{1}{z}}$ rectangulum autem MNHP erit $4aa \sqrt[243]{\frac{1}{z}}$, ergo eorum

differentia, spatum infinitè longum quod ordinatâ MN, curvâ, & asymptoto NR definitur erit $\frac{12}{5} aa \sqrt[243]{\frac{1}{z}}$. Si igitur z est major quàm $\sqrt[243]{\frac{aa}{5}}$

dempto spatio infinitè longo RNMKR, quod est $\frac{12}{5} aa \sqrt[243]{\frac{1}{z}}$ ex indeterminato spatio RHOLMKR

quod est $\frac{10aaz + 2z^3}{\int \sqrt{az}}$, reliquum erit spatum

NH.

NHOLMN, quod est igitur $= \frac{10aaz + 2z^3}{5\sqrt{az}}$

$\frac{12}{5}a^2 V\sqrt{\frac{1}{2+3}}$, quod spatium demptum ex yz re-
ctangulo QLOH, quod est $\frac{aaz + z^3}{\sqrt{az}}$ reliquum fa-

cit quæsitum spatium NMLQ $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5\sqrt{az}}$

$\frac{12}{5}aa V\sqrt{\frac{1}{2+3}}$, quod per a divisum dabit, in casu,
quo z major sit quam $\sqrt{\frac{aa}{3}}$, quæsitam ordinatam
curvæ, quam quærebat $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5a\sqrt{az}}$

$\frac{12}{5}a V\sqrt{\frac{1}{2+3}}$. Eodem prorsus modo si z sit minor
quam $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ ut HS, ex spatio infinitè longo R-HSKR,
quod est etiã hic $\frac{10aaz + 2z^3}{5\sqrt{az}}$ opus est demere

rectangulum yz sive QHSK sive $\frac{aaz + z^3}{\sqrt{az}}$, & reli-

quum erit spatium infinitæ longitudinis RQKR
 $= \frac{5aaz - 3z^3}{5\sqrt{az}}$, & tunc, dempto hoc spatio ex spatio

constante infinitè longo RNMKR, quod ex visis
est $\frac{12}{5}aa V\sqrt{\frac{1}{2+3}}$, erit reliquum quæsitum spatium
QN.

$$QNMK = \frac{3z^3 - 5aaz}{5\sqrt{az}} + \frac{12}{5} aa \sqrt[12]{\frac{1}{243}}, \text{ quo di-}$$

viso per a , erit ordinata quęsitę curvę etiã cum fuerit z minor quam $\sqrt[12]{\frac{243}{5}}$, æqualis $\frac{3z^3 - 5aaz}{5a\sqrt{az}}$

$\frac{12}{5} a \sqrt[12]{\frac{1}{243}}$. Cum verò omni y duplex compe-
tat z , una major, altera minor quàm $\sqrt[12]{\frac{243}{5}}$ (modò

non sit y minor quàm PM sive quàm $4a \sqrt[12]{\frac{1}{27}}$,
secùs nulla realis z illi competere potest) hinc est
quod, assumpta ad libitum y sive HQ abscissa quę-
sitę curvę, duplex in ipsa quęsita curva illi compe-
tet ordinata, altera quidẽm = $\frac{3z^3 - 5aaz}{5a\sqrt{az}}$.

$\frac{12}{5} a \sqrt[12]{\frac{1}{243}}$ (posita QL pro z) altera porrò erit
ejusdem valoris, sed posita KQ pro z .

85 Ad sunt etiã casus quibus, existente $\frac{m+n+r}{2r}$
intero positivo, & simul $\frac{m}{r}$ positivo, & intero,
adhuc curva quadratrix quęsitę lineę algebraicę po-
test esse quadrabilis. Si enim m sit positivus integer

sed

sed par, erit illa quadrabilis, quia cum in potestate
 $\frac{m + n + r}{2r}$ integra, & positiva quantitatis $b + czz$

non possit, ex prænotatis z habere nisi pares dimen-
 sionum numeros, si ex singulis harum dimensio-
 num exponentibus paribus, par numerus m demi-

debeat, nunquam poterit remanere impar $- 1$ pro
 exponente reliquæ potestatis ipsius z . Itaque exi-
 stente $r = 1$, $n = 1$, $m = 2$, & $c = 1$, curva quadratrix
 quæsitæ lineæ, quæ per equationē $y = \frac{a^4 + 2aazz + z^4}{azz}$,

& per KML representatur erit algebraicè quadra- (fig. 25)
 bilis. Integrale enim ex $\frac{a^4 dz + 2aazzdz + z^4 dz}{azz}$

sivè $\int ydz$ est $= \frac{6aazz + z^4 - 3a^4}{3az}$, quæ quidē

quantitas, cum fiat infinitæ magnitudinis in casu
 quo $z = 0$, sequetur infinitam magnitudinem con-
 stantem addendam esse huic integrali, ut habeatur
 spatium, quod asymptoto HR, axe, ordinata qua-
 vis LO, & curva clauditur. Satiùs igitur erit pro

$\int ydz$ non spatia infinitè longa RHOLMK &c. in-
 terpretari, sed alia spatia, quæ ordinatis, axe, cur-
 vâ, & ordinatâ constante quavis terminantur, ut
 LOPM, assumpta PM pro ordinata constante, quæ
 (brevitatis gratia) sit omnium minima, cujus qui-
 dē

dè m abscissa HP in hac curva est $= a$, & ipsa ordinata est $= 4a$. Posito igitur $\int ydz$ spazia OLMP designare, debebit ab integrali $\frac{6aazz + z^4 - 3a^4}{3az}$

tolli $\frac{4aa}{3}$ ad hoc ut z existente $= a$ evanescat illud,

ut debet ³ reverà evanescere. Sicque dicemus esse

$\int ydz = \text{LOMP} \frac{6aazz + z^4 - 3a^4 - 4a^3z}{3az}$. Sed re-

ctangulum PMNH est $= 4aa$, quod additum ad mox inventum spatium faciet aream NHOLMN $= \frac{6aazz + z^4 - 3a^4 + 8a^3z}{3az}$, qua dempta ex rectan-

gulo QLOH quod est $\frac{a^4 + 2aazz + z^4}{az}$, reliquum

est quæsitum spatium MNQLM $= \frac{6a^4 + 2z^4 - 8a^3z}{3az}$,

quo per a diviso, erit quotiens $x = \frac{6a^4 + 2z^4 - 8a^3z}{3aaz}$,

& cum duplex z hîc quoque competat unicuique y , duplex erit etià ipsius x valor mox inventus.

86 Sed etià si existente $\frac{n + m + r}{2r}$ numero in-

tegro, & positivo, sit m numerus positivus integer

impar, modò sit major quàm $\frac{n + m + 2r}{r}$, semper

cur-

curva quadratrix claudet spacia algebraicè quadrabilia, ac proindè quæſita curva erit algebraica; quia enim in poteſtate integra, & poſitiva $\frac{n+m+r}{2r}$

quantitatis $b+ezz$, indeterminata z nullam poteſtatem habere poteſt majorem quàm $\frac{n+m+r}{r}$,

immò omnis exponens indeterminatæ z in quovis membro hujus poteſtatis, niſi ſit $\frac{n+m+r}{r}$, erit ſal-

tèr binario minor quàm $\frac{m+n+r}{r}$; hinc ſi ab uno

quovis horum exponètium debeat ſubtrahi m ma-

jor quàm $\frac{m+n+r}{r}$ (utpotè major quàm $\frac{m+n+2r}{r}$)

reliquum erit quidèr ſemper quid negativum, ſed nunquàm erit -1 , excepto ſolùm caſu quo m eſſet

unitate tantùm major quàm $\frac{n+m+r}{r}$ hoc eſt eſ-

ſet $\frac{n+m+2r}{r}$, tunc enim hic exponens demptus à

maximo exponente $\frac{n+m+r}{r}$ relinqueret -1 . Vn-

dè ſi m ſit etiàm major quàm $\frac{n+m+2r}{r}$ nunquàm

poterit haberi -1 pro exponente indeterminatæ z

in ullo terminorum, etiã si m sit numerus impar.

Estò exemplum $m=7$, $n=-4$, & $r=1$, c verò $=1$,
 (fig. 26.) $a^8 + a^4 z^4 + 2a^6 zz$, quæ repræsentatur per MK, positis

$HS = z$, $SK = y$; spatium $\int ydz$, quod asympto-
 tus HN, curva, axis, & quævis ordinata claudunt
 est $-a^8 - 3a^6 zz - 3a^4 z^4$, undè infinitum est si $z = 0$.

Ducamus igitur ordinatam quamvis MP, sitq; bre-
 vitatis gratia ordinata MP, quæ pertinet ad abscissã
 PH $= a$, ita ut PM $= 4a$. Sumanturque ab ordina-
 ta PM deinceps spatia, quæ per $\int ydz$ denotantur.
 Si ergò velimus, quod, z existente a , sint hæc spatia
 $= 0$, debet addi constans $\frac{7}{6}aa$, & erunt $\int ydz$,
 spatia PSKM $= \frac{7aaz^6 - a^8 - 3a^6 zz - 3a^4 z^4}{6z^6}$. Undè

facile innotescit, spatium quod curvâ, asymptoto
 HN, coordinatisque MP, PH est clausum, esse infi-
 nitum, cum quantitas mòx inventa, quæ spatiorum
 mensuram exhibet fiat infinita cum z est $= 0$, spa-
 tium verò asymptoto altera PL, curvâ, & ordinatâ
 PMcircumscriptum, esse $= \frac{7}{6}aa$, quia, posita z infi-

nita, omnes termini a^8 , $3a^6 zz$, $3a^4 z^4$ evanescent, cum
 re-

reliquo $7aaz^6$ sint infinite minores, sicque superest
 solus $\frac{7aaz^6}{6z^6}$, sive $\frac{7aa}{6}$ pro spatii huius mensura.

Invento igitur spatio MP SK, dematur hoc ex spatio
 infinite longo MPLM, quod ex visis est $= \frac{7}{6} aa$, &

reliquum erit spatium infinite longum KS LK
 $= \frac{a^8 + 3a^6zz + 3a^4z^4}{6z^6}$, quod additum ad yz rectan-

gulum HSKQ quod est $= \frac{a^8 + 2a^6zz + z^4a^4}{z^6}$, sum-

mam facit spatium infinite longum HQKLH
 $= \frac{7a^8 + 15a^6zz + 9a^4z^4}{6z^6}$, $\int zdy$; quare ordinata

demum curvæ quæsitæ x est $= \frac{7a^7 + 15a^5zz + 9a^3z^4}{6z^6}$,

existente $y = \frac{a^8 + 2a^6zz + a^4z^4}{z^6}$.

87 Quoties tandem, existente $\frac{m + n + r}{2r}$ po-
 sitivo, & integro, fuerit $\frac{m}{r}$ integer positivus
 impar, sed non major quam $\frac{m + n + 2r}{r}$, cur-

va quadratrix non erit algebraicè quadrabilis, sed
 tantum opè Logarithmicæ. Quoniam enim $\frac{m}{r}$ est
 numerus impar, assumatur par proximè minor, qui

unitate tantum differet à numero $\frac{m}{r}$, hic erit ne-

cessario exponents literæ z in aliquo termino nu-

meratoris, quia cum $\frac{m}{r}$ non sit maior ex Hypotesi

quam $\frac{m+n+2r}{r}$, neque $\frac{m}{r} - 1$ (numerus par

proxime minor impare $\frac{m}{r}$) erit ideo maior quam

$\frac{m+n+2r}{r} - 1$ sive $\frac{m+n+r}{r}$; sed omnis nume-

rus par non maior quam $\frac{m+n+r}{r}$ est exponents

literæ z in aliquo termino quantitatis $b + ezz$ quæ

elevatur ad integram positivamque potestatem

$\frac{m+n+r}{2r}$, igitur erit necessarium inveniri in nume-

ratore aliquem terminum, in quo exponents literæ z sit

$\frac{m}{r} - 1$, ex quo demendo postea $\frac{m}{r}$ exponentem li-

teræ z in numeratore, reliquum erit -1 exponents

literæ z , unde ad Hyperbolæ quadraturam eri-

mus deducti; res erit clarior exemplis; ponamus

$n=2$, $m=1$, $r=1$, c verò $=4$, tunc æquatio ad cur-

vam, quam nunc vocamus quadratricem erit $y =$

(fig. 57.) $\frac{a^4 + z^4 + 2aazz}{4aaz}$, quam designat LMK habentem

abscissas z in axe HO, & ordinatas y in axe HR;

ad quadranda porro spatia huius curvæ, sive ad in-

te-

tegrandam quantitatem $\frac{a^4 dz + 2aazdz + z^4 dz}{4aaz}$, si

dividamus illam in partes $\frac{aadz}{4z} + \frac{zdz}{2} + \frac{z^3 dz}{4aa}$, in-

veniemus integrale $\frac{zz}{4} + \frac{z^4}{16aa} + \frac{alz}{4}$, sumptis loga-

rithmis in logarithmica habente a pro subtangen-
te, à quocumque postea puncto eius asymptoti in-
cipiant. Verum posito $z = 0$ spatium hoc infini-
tum est, quia tunc lz est infinita, ut igitur in quan-
titatibus assignabilibus versemur, assumemus spatia

$\int ydz$ ab ordinata minima MP, quæ ad abscissam PH
spectat æqualem $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ estque ipsa $MP = \frac{4aa}{9\sqrt{\frac{aa}{3}}}$. Sub-

stituto igitur $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ pro z in valore spatii mox in-

vento, erit tunc spatium RHPMKR $= \frac{aa}{144} + \frac{aa}{12} +$

$a \int \sqrt{\frac{aa}{3}}$, quod quidem ut fiat $= 0$, poterimus facere

$1 \int \sqrt{\frac{aa}{3}} = 0$, sive sumere logarithmos in logistica

cujus a sit subtangens, à puncto per quod ordina-
tur linea $\sqrt{\frac{aa}{3}}$, & deindè debemus insuper demere

constantem $\frac{13aa}{144}$, sicque spatium quod interjacet

ordinatā constantem MP omnium minimam, cur-
vam LM, ordinatam quamvis LO, & axem erit

$$= \frac{z^4}{16aa} + \frac{zz}{4} - \frac{13aa}{144} + \frac{alz}{4}, \text{ sumptis logarithmis}$$

in logarithmica habente parametrum a, à puncto
per quod ordinata est $\sqrt{\frac{aa}{z}}$. Quo spatio invento, si

addamus illi constans rectangulum ex PH $\sqrt{\frac{aa}{z}}$ in

MP $\frac{4aa}{9}$ quod est $\frac{4}{9}aa$ fiet indeterminatum spa-

tium NHOLMN = $\frac{9z^4 + 36aazz + 36a^3lz + 51a^4}{144aa}$,

quo dempto ex rectangulo QHOL quod est yz seu

$\frac{a^4 + 2aazz + z^4}{4aa}$ reliquum est $\int zdy$ spatium NMLQ

= $\frac{zz}{4} + \frac{3z^4}{16aa} - \frac{lz}{4} - \frac{5aa}{48}$, quod divisum per a, dat

x ordinatam quæsitæ curvæ = $\frac{zz}{4a} + \frac{3z^4}{16a^2} - \frac{lz}{4} - \frac{5a}{48}$.

Cumque, assumpta ad arbitrium y (modo sit major
quàm $\frac{4aa}{9}$, secùs enim omnis z foret imagi-

naria) duplex habeatur z, QL, & QK, duplex erit
valor ordinatæ quæsitæ curvæ cuius abscissæ y de-
bitus. Hæc curva per hanc quadraturam sic con-
structa est illa quam vocant minimæ resistantiæ,

rotata enim circa axem in quo ipsæ x assumuntur solidum gignit, quod minimè omnium ejusdem longitudinis, & latitudinis resistantiam patitur à fluido in quo per sui axis directionem moveatur, quod tamen hoc loco ostendere nostrum non est.

Ne autem digressio hæc, quæ jam modum excessisse videri poterit, ulterius producat, alios casus quibus quadratrix algebraicè quadrari possit, aut nequeat distinguere negligimus quod etiam factum difficile, ac vix quidem possibile arbitror, si regulam unicam generalem requiramus satis ostendentem.

$$\frac{2x^{m+1} + 2x^m}{2x^{m+1} + 2x^m} = \frac{2x^{m+1} + 2x^m}{2x^{m+1} + 2x^m}$$

quando nam quantitas $dz : a^{\frac{m+1}{m}} + a^{\frac{m+1}{m}} z^{\frac{m}{m}}$

$$c^{\frac{1}{m}} z^{\frac{m}{m}}$$

fit algebraicè quadrabilis, quò semper reducitur quadratura curvæ quadratricis, sive inventio ordinatæ quæsitæ.

Exemplum IV.

Quando describenda sit curva, cujus subtangentis data quævis potestas m , addita datæ potestati subnormalis n , datam potestatem r logarithmi ordinatæ semper efficere debeat, æquatio erit $\frac{y^m dx^m}{dy^m} + \frac{y^n dy^n}{dx^n} = ly^r$, qua propter $y^m dx^{m+n} +$

y^n

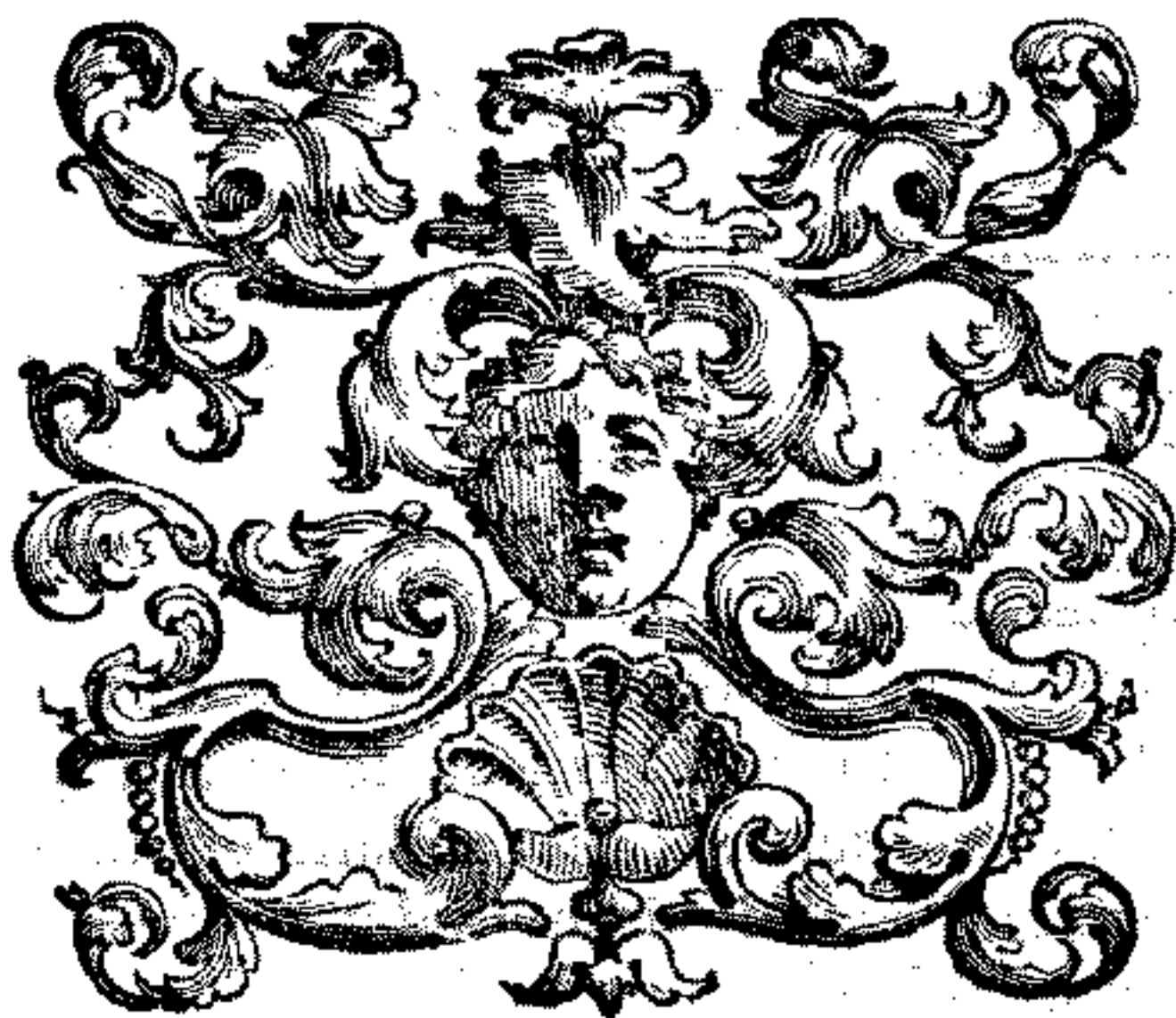
$y^n dy^{m+r} = ly^r dy^m dx^n$, ubi unitas subintelligitur implere dimensiones quæ defunt, si alicubi defint: pono nunc $dx = zdy$ (subintellige unitatem, quæ dividat zdy) & erit æquatio curvæ quadratricis $y^m z^{n+m} + y^n = ly^r z^n$. Constructa igitur curva in qua coordinatæ sint z , & y , quæque salvet hanc æquationem, si spatij ad axem in quo ordinatæ y assumuntur divisus per constantem 1 ponantur æquales lineæ rectæ, illæ erunt ordinatæ pro curva quæsitæ spectantes ad abscissas y .

C O R O L L.

Quoties $m = 1$, $n = 0$, & r fuerit numerus quilibet, quadratura curvæ quadratricis dependet tantum à logarithmis, æquatio enim erit (posito ex. gratia $r = 3$) $yz + 1 = ly^3$ & supplendo per literam a dimensiones quæ defunt, ut omnes termini æquales habeant dimensiones, sive vocando a quam vocavimus 1, erit æquatio $ayz + a^3 = ly^3$, unde $z = \frac{ly^3 - a^3}{ay}$; ergò $zdy = \frac{ly^3 dy}{ay} - \frac{a^2 dy}{y}$. Terminus autem $\frac{ly^3 dy}{ay}$ est integrabilis, & (nn. 61.) $\frac{a^2 dy}{y}$ est integrale $\frac{ly^4}{4aa}$, integrale etiã ex $-\frac{a^2 dy}{y}$ est $-aly$ in Logistica cuius parameter sit a ; ergò spatium $\int zdy$ erit

erit $\frac{ly^4 - 4a^3 ly}{4a^2}$, & ordinata quæſita $\frac{ly^4 - 4a^3 ly}{4a^3}$

$=x$ æquatio quæſitæ curvæ. Dantur & alij caſus, quibus per ſolam logarithmicam quadratur curva quadratrix, quos ſingulos proſequi nec eſt animus, nec fortè poſſibile foret.



SECTIO QUINTA.

De constructione æquationum differentialium primi gradus, quas constet non esse algebraicè integrabiles, & cum ambæ indeterminatæ illas ingradientur, sunt tamèn cum suis differentialibus ab invicèm separabiles.

PROPOSITIO PRIMA.

88



T plurimùm tamèn, æquatio differentialis ad quam pervenitur pro quæsita linea, talis est ut utraq; indeterminatarum illam ingradientur cum suis differentialibus, & hoc quidèm casu, si indeterminatæ cum suis differentialibus ab invicèm sint separabiles, constructur æquatio per mòx afferendam regulam. Esse autèm separabiles ab invicèm indeterminatas cum suis differentialibus hoc tantùm importat, quod æquatio sit ad talè formam (ope consuetarum operationem Antithesis, multiplicationis, divisionisve legitimè adhibitarum) reducibilis, ut ab una parte, sola indeterminatarum alterutra u , cum du , & constantibus reperiat, & simul ab altera parte sola adsit reliqua indeterminata t cum sua dt , & constanti-

tibus. Sicque omnis æquatio differentialis primi gradus, in qua hæc indeterminatarum cum suis differentialibus separatio facta sit, reducetur ad hanc formam $qdt = pdu$, ubi duæ indeterminatæ sunt t , & u , & q est quantitas quomodocumque data per t , & constantes, p verò data per u & constantes.

89 Methodus igitur pro construenda æquatione generali sive canonica $qdt = pdu$ talis esto. Fiat curva cuius ordinata sic detur per abscissam, ut p datur per u , quam vocabimus primam. Deinde fiat alia curva quam dicemus secundam, cuius ordinatæ per suas abscissas taliter dentur, qualiter q datur per t . Debet porro hic unitas subintelligi, quæ quantitates p , & q unius dimensionis esse faciat per multiplicationem, aut divisionem. Tum describatur tertia quædam curva quam quadratricem primam appellare possumus, cuius abscissæ sint eadem ac abscissæ primæ curvæ, ordinatæ vero sint spatijs, quæ prima curva continet proportionales, sive sint æquales spatijs, quæ axe, curva, & coordinatis primæ curvæ clauduntur divis per constantem illam, quam vocavimus unitatem. Haud absimili modo debet construi quarta curva, quæ est quadratrix secunda, & eius quidem abscissæ abscissis secundæ æqualibus positæ, ordinatæ erunt æquales correspondentibus spatijs secundæ divis per unitatem. Quibus quatuor curvis prædescriptis ad descriptionem quæsitæ poterimus descendere. Assumpta enim in quadratrice

(fig. 28.) prima abscissa arbitraria u , transferatur eius ordinata in axem coniugatum lineę quadratricis secundę, & ei competens abscissa in eadem quadratrice secunda erit ordinata quęsitę lineę quam abscissę u debemus. Ut exempli gratia descripta curva prima AB ad axem AC tali, ut ordinata eius CB sic detur per abscissam AC ut p datur per u , esto curva AD quadratrix prima talis, ut ordinatę eius CD , ad easdem abscissas AC attinentes, sint æquales spatijs ACB per constantem 1 divisis. Deindę descripta alia curva secunda EF ad axem EG , axemque coniugatum EI , cuius ordinatę GF sic dentur per abscissas EG , ut q datur per t , ponatur quadratrix secunda EK , habens ordinatas KG , ad easdem abscissas EG spectantes æquales spatijs EGF divisis per constantem 1 . Tandem assumpta adlibitum abscissa AC sive LM in curva prima, aut in quadratrice prima, eius ordinata DC transferatur in EI axem coniugatum quadratricis secundę, & ducta ordinata HI huic fiat æqualis NM , eritque N in optata curva.

90 Cum enim CB sic detur per AC ut p datur per u , aut (quod idem est) AC , sic ingrediatur compositionem ipsius CB ut u ingreditur compositionem ipsius p , sequetur quod si AC sit $= u$, erit $CB = p$, & proindę $DC = \int pdu$. Eodem modo cum GF sic detur per GE ut q datur per t , aut EG sic componat GF , ut t componit q , si fuerit $EG = t$, erit GF

$= q$,

$=q$, & proindè $KG = \int qdt$, & si viceversa fuerit $GF = q$, erit $EG = t$, aut etiàm si fuerit $KG = \int qdt$, erit $GE = t$, vel si fuerit HO , aut $IE = \int qdt$, erit EO aut $IH = t$. Assumpta igitur arbitraria $AC = LM = u$, erit $DC = \int pdu = IE$, sed est $\int pdu = \int qdt$, erit ergò $IE = \int qdt$, igitur $IH = NM = t$. Curva igitur LN sic descripta, habet coordinatas t , & u verificantes æquationem $qdt = pdu$.

C O R O L L.

91 **S**olita constantium additio, aut detractio potest & hinc adhiberi, ut si curva quadratrix prima, non haberet ordinatas proportionales spatijs ACB , sed æquales illis spatijs constante spatio auctis, quod lineam quadratricem AD cæteroquin invariantam promoveret tantum in OP , remanentibus tamen adhuc ordinatis $CP = \int pdu$. Similiter, & si secunda quadratrix EK , non ampliùs ordinatas KG spatijs EGF , sed illis spatijs constante spatio auctis proportionales haberet, quod lineam EK transferret aliorsum ut in QR , remanentibus tamen $GR = \int qdt$. Quæ nihilominus curvarum licet positio-

nis

nis tantum varietates, curvam quaesitam insigniter possent mutare, salva adhuc æquatione differentiali $qdt = pdu$. Igitur per datum punctum N, dato etiam vertice L ad datum axem LM poterit duci curva ad datum equationem $pdu = qdt$ convenienter. Ducta enim normali NM assumatur ei æqualis IH ordinata in quadratrice secunda, deinde assumpta $AC = LM$, siquidem spatium ACB per datam constantem divisum æquetur lineæ IE, nulla constantis additione opus erit, & curva descripta adamussim per methodum traditam, transitura est per N. Sed nisi hoc spatium ACB divisum per datam illam constantem sit æquale inventæ IE, multiplicetur IE per illam constantem datam quæ est unitas, spatiumque IEI dematur ex spatio ACB, & reliquum erit constans illud spatium, quod spatiis indeterminatis AGB ubique addendum, vel demendum venit pro describenda quadratrice prima AD, quâ deinde uti debemus ad quaesitæ LN descriptionem, & qua porro si utamur, linea quam ducemus certò certius per N est transitura.

Exemplum.

(fig. 29.) 92 **D**ata quavis curva FC ad axem AB, debeat ad eundem axem describi ED, talis, ut si ducatur quævis ordinata BD, & producat ad curvam datam in C, sit subtangens puncti D in cur-

curva ED æqualis ordinatæ CB in data curva. AB vocetur x , BD $= y$, CB verò $= q$. Patet igitur quod q dabitur per x , propter datam curvam FC, sive propter datam ejus æquationem, quæ exprimet quomodo CB dependeat ab AB. Quapropter æquatio $ydx = q$ sive $\frac{dx}{q} = \frac{dy}{y}$, ad quam pervenietur est ex

illis in quibus indeterminatæ cum suis differentialibus ab invicem sunt separabiles. Multiplicemus per aa , & erit $\frac{aadx}{q} = \frac{aady}{y}$. Iam ergo curva est con-

struenda cujus ordinata detur per suam abscissam ut $\frac{aa}{y}$, datur per y , sive cujus æquatio sit $z = \frac{aa}{y}$, quæ

est hyperbola. Altera curva erit illa, cujus æquatio sit $z = \frac{aa}{q}$, sive cujus ordinata z sic detur per suam abscissam, ut $\frac{aa}{q}$ datur per x , aut brevius, cujus or-

dinatæ sint ipsis q ordinatis datæ curvæ reciprocè proportionales. Harum curvarum ope, & ope suarum quadratricum, ut jam dictum est quæsitæ curva DE poterit describi. Sed est diligentè advertendum, quod cum spatia, quæ hyperbolem intèr & asymptorum jacent sint infinitè omninò magnitudinis, hinc quadratrix prima esset linea cujus omnis ordinata infinitæ foret longitudinis, nec proinde esset linea assignabilis, & quam possemus descri-

be-

(fig. 11.) bere, aut adhibere. Hinc quadratrix prima talitèr erit ducenda ut ejus ordinatæ, non spatijs totalibus hyperbolicis sint proportionales, sed spatijs, constante quadam ordinata terminatis, quam arbitrium est seligere. Ut si HE concipiatur esse hyperbola descripta juxtà equationē $z = \frac{aa}{y}$, cujus qua-

dratrix sit ducenda, jam non opus est totalibus spatijs CKIHFEDC per constantem datam a divisis, æquales ponere ordinatas quæsitæ quadratricis (quod quidè in praxi impossibile esset, ob infinitam horum spatiorum magnitudinem) sed cum constans spatium possimus his spatijs addere, aut demere, ducamus ordinatam ad arbitrium AF (sitque brevitas ergo $AF = AC$) & ponamus quadratricis ordinatas æquales spatijs AFED, aut AFLM per constantem a divisis; sic enim idem efficimus ac si totalia spatia assumeremus sed mulctata constante infinito spatio CKIHFAC, quod fieri posse prænotavimus. Quod si fiat, quadratrix AB sic descripta erit logarithmica ut aliàs observavimus, ejusque subtangens $AC = a$. Patet igitur quomodo quæsitæ curva $\frac{dx}{q} = \frac{dy}{y}$ construatur, & simul logarithmos

(fig. 29.) ejus ordinarum esse proportionales spatijs eisdem abscissas habentibus in curva, cujus ordinatæ sint datæ curvæ ordinatis q reciprocè proportionales. Nec absimilitèr si debeat curva CF talis esse ut, ducta qua-

quavis ordinata CB, quæ producta datam curvam DE secet in D, sit ordinata BD æqualis subnormali curvæ quæsitæ CF, undè æquatio sit $ydy = q \frac{dx}{dx}$, erit ydy

$= qdx$. Curva igitur prima erit cujus ordinatæ sic dentur per suas abscissas ut y datur per y hoc est, erit non curva, sed recta angulum cum axe semirectum constituens, ejusque quadratrix proindè erit parabola communis. Curva porro secunda erit ipsa DE, quia ejus abscissis existentibus x , debent ordinatæ esse q . Ex propositæ igitur lineæ DE quadratrice, & ex communi parabola constructur quæsitæ linea; cujus æquatio $ydy = qdx$ brevius reduci potuisset integrando primam partem, quæ est integrabilis & fiet $yy = 2 \int qdx$, undè quadrata quæsitæ ordinatarum BC dupla esse reperientur spatiorum correspondentium ABDE in proposita curva.

C O R O L L.

93 **H**oc exemplum maxime est universalitatis, quotiescumque enim valor subtangentis curvæ describendæ talis est, ut ordinata y illum non intret, sed per solam abscissam x exprimatur, semper casus erit hujus exempli, poterimus nempe semper, valorem illum subtangentis concipere tamquam ordinatam curvæ alicujus datæ, & vocare q , undè

V quæ.

quæsitio semper reducta erit ad illam quam superius solvimus, idemque valet de subnormali si exprimatur & ipsa per valorem, quem ordinata y nullatenus ingrediatur.

Exemplum II.

(fig. 2.) 94 **D** Escribenda sit curva AD habens pro axe circuli peripheriam AB centrum habentem in C, cujus curvæ subtangens BT sit quomodocumque data per abscissam AB. Valor subtangentis BT in curva AD habente pro axe quamvis lineam AB
(nu. 16.) est $\frac{yqdx + yydx}{qdy}$ positis AB = x , BD = y , & q ra-

dio osculi pertinente ad punctum B axis. Cum igitur in hoc casu axis supponatur esse linea circularis, ejus radius q erit constans = a semidiameter ipsius axis; quare subtangens = $\frac{yadx + yydx}{ady}$, quæ deber

æquare quantitatem p datam quomodocumque per x , unde $yadx + yydx = apdy$, sive $\frac{dx}{ap} = \frac{dy}{ay + yy}$ vel

$\frac{adx}{p} = \frac{aady}{ay + yy}$, unde eruere est constructionē hanc

(fig. 30.) traditæ regulæ conformem. Primò curva describatur KI, ejusque ordinata MI talitèr detur per suam abscissam LM ut $\frac{a^2}{ay + yy}$ datur per y , hoc est æqua-

tio

rio curvæ KI esto $u = \frac{a^3}{ay+yy}$. Fiat porro ejus qua-

dratrix WNO talis scilicet ut ejus ordinata MN spatiis WÆMI per constantem a divisus sit æqualis (summo spatia WÆMI, quæ constante ordinata WÆ terminantur, quia spatia totalia inter curvam, & asymptotum EL infinitæ sunt magnitudinis) quæ quidem erit qualem representat figura, & erit ad asymptotum EL, ac ad aliã EZ, quæ sit axi WL parallela in distantia $EL = 12a$ in logistica cujus a sit subtangens, & $1a = 0$. Construatur postea secunda quædam curva SQ, in qua ordinatæ PQ sic dentur per suas abscissas PS ut $\frac{aa}{p}$ datur per x, & spatiis SPQ

ad constantem a applicatis, æquales ponantur ordinatæ PY novam constituentes curvam SY quadratricem ipsius SQ. Tum, assumpta LM = y, ordinatæ correspondenti NM sic curva WNO æqualis abscindatur SX ex axe conjugato lineæ SY, & ducta ordinata XY hæc erit quæsitæ x; unde jam poterimus, facto centro C, radio a describere circulum, assumptaque portione AB = mox inventæ x, ducere (fig. 2.) deinde BD = assumptæ y, sive LM figuræ 30, eritque punctum D in curva quæsitæ.

95. Potuissimus etiã equationem $\frac{adx}{p}$ integrare saltẽm logarithmicẽ, quia integrale ex $\frac{aady}{ay+yy}$ est

est $\log y - \log a + y$, undè equatio integrata fuisset
 $\int \frac{adx}{a} = \log y - \log a + y + \log 2a$, quam constantem.

(fig. 30.) addo ut posita $y = a$ sit ordinata NM quadratricis
 $= 0$, sicque constructio coincidat cum ea quam
superius tradidimus, idem enim est curvam NW de-
scribere quadratricem lineæ LÆ ac ordinatam NM
ponere equalem ubiq; quantitati $\log y - \log a + y + \log 2a$,
posito logarithmos sumi in logarithmica cujus a sit
subtangens & $\log a = 0$, cum spatium WÆMI per a
divisum, sive integrale ex $\frac{aady}{ay+yy}$ nil aliud sit quàm

$\log y - \log a + y + \log 2a$, undè spatium infinitè longum
inter WÆ, & curvam & asymptotum WM est $a \log 2a$.

Exempla hæc sufficere posse judico, cum reliqua,
quæ referri possent per applicationem traditæ regu-
læ resolvi facile possint; quare satius fuerit his di-
missis, ad ultimam sectionem omnium utilissimam
properare.



SECTIO ULTIMA.

Constructio variarum æquationum differentialium primi gradus in quibus ambæ indeterminatæ cum suis differentialibus reperiuntur, nec tamen sunt ab invicem separabiles, non existente æquatione algebraicè integrabili.

96



Andem considerandæ sunt reliquæ æquationes, quæ præmissis sectionibus non clauduntur, suntq; omnes æquationes differentiales primi gradus algebraicè non integrabiles in quibus ambæ indeterminatæ reperiuntur cû suis differentialibus, nec apparet quomodo ab invicem possint separari. Si enim per consuetas operationes antithesim, scilicet aut multiplicationem divisionemve æquationis, via reperiatur qua ab invicem illæ dispareretur, æquatio reducta erit ad formam præcedentis sectionis, constructurq; per regulas ibi traditas. Sed quando per nullam harum operationum separatio obtineri possit, & opus sit substitutione aliqua, sive ut assumatur aliæ indeterminatæ ab ijs, quas assumpsimus ad faciliorem redendam separationem, vel ad quomodocumque commodiorem præparandam æquationem, tunc via aperienda esset qua his
sub-

substitutionibus, & denominationibus oportune, & efficaciter semper uti possimus.

97 Sciendum est autem, quod quamvis multæ inventæ sint, & plures etiã inveniri possint regulæ, pro construendis quibusdam ex his æquationibus quarum indeterminatæ non sunt per communes algorithmicas operationes ab invicem extricabiles, nulla tamèn adhuc tradita est regula universalis omnes tales æquationes complea, ità ut statim ac æquationem invenerimus possimus ope canonis alicujus ad ejus effectiõnem certò manuduci. Quod si repertum esset, nihil ampliùs circa æquationes differentiales primi gradus desiderandum foret, seu circa methodum tangentium inversam, sive ut vocant subtangentialem. Cùm enim, data tangentis proprietate, per Sectionis primæ regulas ad æquationẽ statim quæsitæ curvæ differentialem primi gradus deducamur, si harum deindè æquationum nulla non posset per notas regulas effici, jam curvam ipsam cujus data est proprietas in potestate esse confiderè possemus pronunciare, siquidè data tangentis conditio talis esset, ut æquationem differentialem primi gradus suppeditaret.

98 Hæc igitur duo præcipuè defunt perfectioni totius Theoriæ æquationum differentialium primi gradus. Primò (quod Sectione secunda prænotavimus) methodus indicans an quævis proposita æquatio sit algebraicè integrabilis, & detegens ejus integra-

grale algebraicum, si possibile sit; seu modus (idem enim est) cognoscendi integrale algebraicum, si de-
 rur, cujusvis quantitatis differentialis primi gradus,
 aut ejus impossibilitatem evincendi. Huc pertinent
 quadraturæ spatiorum curvilinearum, rectificatio
 item curvarum, solidorum, & superficierum dimen-
 siones, inventiones centri gravitatis, & complura
 hujusmodi. Alterum autem quod adhuc desidera-
 tur, est constructio universalis omnium æquatio-
 num primi gradus indeterminatas inseparabiles clau-
 dentium, hoc est via regia infallibilis perducens ad
 constructionem curvæ quæsitæ quotiès inventa sit
 ejus differentialis æquatio primi gradus, licet in illa
 indeterminatæ cum suis differentialibus sint ab invi-
 cem inseparabiles.

Sicuti igitur in secunda Sectione ex defectu re-
 gulæ universalis, plures particulares regulas congef-
 simus, easque ut canones tradidimus, quibus sæpè def-
 ectum universalis regulæ suppleri accidit, ita & in
 præsentī exponemus solum quasdam regulas pro
 certis æquationibus, duplicem inde fructum colle-
 cturi, & ut hos canones in multam universalitatem
 expansos pro usu servemus, & ut semitam simul ape-
 riamus qua in multis similibus casibus æquationum
 præparatio, & constructio sit tentanda.

Quamvis tamē is optimè de subtangentiali me-
 thodo meritis censendus sit, qui plures harum re-
 gularum collegerit, & in ordinem redactas publico
 fue-

fuerit impertitus, nos nihilominus ad finem festinantes paucas assumemus, easque ad hunc finem præcipuè accomodabimus ut ijs, quibus egregia celeberrimorum Virorum inventa abscondita nimis videantur facem præferamus, inventisque ipsis omnem cuius capaces sunt universalitatem conciliemus.

Propositio I.

(fig. 31.) 99 **S**it primò curva AHEC describenda, cujus ordinata quævis BC sit ad portionem AD subtangentis inter verticem, & tangentem in ratione constante data 1 ad n . Erit igitur proportio y , $ydx - xdy$:: 1, n , & æquatio $ydx - xdy = nydy$,
dy

in qua æquatione quantumvis transferas ab una ad alteram partem terminos, aut divides, multiplicesve totam æquationem per quamcumque quantitatem, nunquam sic poteris reducere, ut y cum dy constituat unam æquationis partem, quam nullatenus x , nec dx afficiat. Uno verbo æquatio non est ex ijs quarum indeterminatæ cum suis differentialibus sint separabiles ab invicem. Videamus igitur quomodo nam $ydx - xdy = nydy$ possit reddi construibilis. Quo ad membrum $nydy$, illud sanè est integrabile, sed pars $ydx - xdy$ non erit integrabilis. Si scriptum esset $ydx + xdy$, manifestè integrabilis foret etiàm hæc æquationis pars, & integrale esset xy ,
ha-

haberemus itaque integrando æquationem $xy = \frac{n}{2}yy$, sive $xy + aa = \frac{n}{2}yy$. Id ostendit quod si

quæsissemus lineam, cujus subtangentis summa cum abscissa haberet ad ordinatam rationem datam, incidissemus utique in æquationes satisfaciennes $xy = \frac{n}{2}yy$ (sive $x = \frac{n}{2}y$) & $xy + aa = \frac{n}{2}yy$, quia

tunc æquatio esset $ydx + xdy = nydy$. Verum in casu nostro, cum æquatio sit $ydx - xdy = nydy$, non possumus eadem methodo procedere. Sicuti autem $ydx + xdy$ habet integrale xy , ita $ydx - xdy$ statim suspicionem facit num forte haberet $\frac{x}{y}$, & sanè ha-

beret si scriptum esset $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Dividatur igitur

æquatio inventa $\frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{nydy}{y}$ utrinque per yy , & erit $ydx - xdy = \frac{n}{y}ydy$; multiplicemus tantum per

a æquationem (si lubeat) & erit $\frac{aydx - axdy}{yy} = \frac{nady}{y}$, quæ integratur, & erit $\frac{ax}{y} = \frac{nly}{a}$, unde $x = \frac{nly}{a}$. Cur-

va secundum hanc æquationem constructa est qualem exponimus in figura casu quo $n = 1$, AE a, AB = x, BC = y, la = 0. Maxima HG est cum fuerit ly = -a, hoc est logarithmus suæ abscissæ GA debet esse = -a. Spatiū quodvis AGH est = $\frac{2nyyly - nyya}{X}$

undè in casu figuræ quo $n = 1$ erit spatium quodvis
 $AGH = \frac{2yyly - ayy}{4a}$, sive tunc spatium AEHA

$= \frac{aa}{4a}$ quadrato ex dimidia AE. Solidum ex revo-
 lutione figuræ EHA circa axem EA est ad cylin-
 drum cujus basis sit circulus radio EA, & altitudo
 æqualis radio, ut $2nn$ ad 27 , & si n fuerit 1 , erunt
 solidum & cylindrus ut 2 & 27 . Vocando enim b
 semiperipheriam circuli cujus a sit radius, erit cir-
 culus cujus quævis HG sive x , sive $\frac{nyly}{a}$ sit radius

$= \frac{nbbyly^2}{a^3}$, & elementum solidi ex revolutione fi-

guræ cujusvis AGH circa AG erit $\frac{nbbyly^2 dy}{a^3}$,

(nu. 62.) ergò solidum illud hujus quantitatis integrale erit
 æquale quantitati $\frac{9nbby^3ly^2 - 6nnaby^3ly + 2nnaaby^3}{27a^3}$

nec aliquid constans addendum est, cum evanescat
 evanescente y . Posito igitur $ly = 0$, & $y = a$ erit so-
 lidum ex revolutione totius figuræ AHGEA circa
 AE $= \frac{2nmbaa}{27}$, & cū cylindrus radiū basis, & altitudi-

nem habens a sit aab , erit solidum illud ad cylindrum
 hunc, ut $2nn$ ad 27 .

Propositio 11.

100 **S**I ratio ordinatæ CB ad resectam AD non
 sit constans, sed sit illa quam habet 1 ad
 quan-

quantitatem n quomodocumq; datam per y , eadem erit æquatio, sed jam n non erit constans sed variabilis, & data per y . Undè, facta operatione quæ suprà, invenietur $\frac{ax}{y} = \int \frac{nady}{y}$, undè $x = y \int \frac{nady}{y}$

vel $x = y \int \frac{ndy}{y}$. Construenda igitur est curva (assumpta ad arbitrium AI, vel $CB = y$) cujus ordinatæ sint $\frac{n}{y}$ (positis y abscissis), tùm fiat, ut constans quam vocavimus 1 ad y :: ità spatium quod curva hæc cum axe suo claudit, divisum per eandem 1 ad quartam, quæ quarta erit x quæsitæ, erit enim manifestè $= y \int \frac{ndy}{y}$.

101 Hoc idem quæsitum sic aliter exponetur: Data curva AK, alia describatur AHEC, talis ut, si quævis prioris curvæ ordinata IK producaturs usquè ad quæsitam lineam in C, ducaturque per C tangens CD, axem alium AD priori coniugatum secans in D, portio AD tangentem hanc & verticem A intercepta, sit ad abscissam IA, ut ordinata IK ad constantem. Hinc si AK fuerit cujusvis gradus m parabola, cujus siquidè ordinatæ IK sive n æquentur potestatibus ab m denominatis abscissarum correspondentium IA, erit curva quæsitæ parabola generis uno gradu altioris sive exponentis

X^2

$m+1$

(nu. 57. & seq.) $m \rightarrow 1$, cujus parameter sit ad parametrum propositæ ut 1 ad m . Si AK sit una ex curvis quas suprâ consideravimus, ita ut IK sit quævis potestas logarithmi suæ abscissæ IA, sic ut $n = ly'$, erit IC $= y \int \frac{ly' dy}{y}$. Est autem semper $\frac{ly' dy}{y}$ integrabi-

(nu. 61.) lis, & integrale est $\frac{ly^{r+1}}{r+1}$ (posita subtangente logarithmicæ pro unitate) undè x sive IC $= \frac{yly^{r+1}}{r+1}$.

Nec plura addimus rem satis explicatam ducentes.

Propositio III.

(fig. 32.) 102 **D**Ebeat describere curva AC hanc ubique servans proprietatem ut, ducta per quodvis in ea punctum C tangente, quæ axem in D secet, intercepta AD, sive ut vocant, subtangentalis habeat ad tangentem DC constantem rationem. Si ratio hæc supponatur esse quæ q ad p incidemus in æquationem alibi allatam $ppyydx^2 + ppxxdy^2 - 2ppyxdydx = qqxxdx^2 + qqxxdy^2$, vocando EA = x, & EC = y. Sed æquatio hæc nimis implicita est, ita ut per illam ad constructionem quæsitæ lineæ non facile deducendi simus. Tentandum erit igitur nûm, assumendo pro indeterminatis alias lineas ab ipsis AE, EC, equatio resultans faciliùs sit extricabilis.

Ma-

Maximè interest in problematum solutione quando ex data tangentis proprietate indaganda est linea cui competit, quænam pro indeterminatis seligantur, mirum enim in modum variantur equationes si hæ, vel illæ potius quàm aliæ coordinatæ fuerint assumptæ. Nec tamèn datur regula docens, quænam indeteterminatæ sint præeligendæ, ut simplicissimam obtineamus æquationem, quæque maximè omnium capax sit constructionis, casu enim potius quàm industria ad illas pervenitur, utpotè quod optioni fortuitæ, & arbitrariæ unicè sit tribuendum.

103 Non rarò tamèn evenit, quod si pro coordinatis curvæ quæsitæ assumantur illæ eædem lineæ, quæ ex vi datæ proprietatis, seu conditionis apparent habere ad invicem simplicissimam velut relationem, ad æquationem perveniatur constructioni magis accomodam, quia scilicet illæ lineæ, quarum relatio omnium simplicissima censetur ut plurimum etiàm æquationem (qua illa relatio est tantum exprimenda) simplicissimam continebunt, ac proinde faciliùs tractabilem, & faciliùs construibilem. Quæ tamen regula, ut apparet, non pro axioma quodam haberi debet universali, atq; infallibili, sed tantum inservire debet ad hoc ut, postquam per alias vias tentaverimus constructionem equationum, etiàm per hanc periculum faciamus, sæpè enim inveniemus rem feliciter succedere.

104 In casu propositi problematis, res ita se habet. Conditio est, ut DC ad AD, habeat rationem constantem, quam vocabimus unitatis ad n . Assumemus igitur ipsam DC pro una indeterminatarum, quia simplicissima est ipsius DC proprietas quæ datur. Vocabimus igitur $DC = x$, unde $AD = nx$, ex data proprietate. Ad determinandum autem punctum curvæ C non sufficit assumpsisse $AD = nx$, & $DC = x$ nisi simul determinetur quonam angulo DC debeat ad axem inclinari; non enim sufficit harum linearum longitudo, nisi simul, & ipsius DC positio determinetur; opus est igitur aliam indeterminatam assumere y , progressu operationis per assumptam x , & nx notificandam. Linea quæ simplicissimè positionem ipsius DC determinet est CB, vel BD, vocemus ergo exempli gratia $BC = y$, unde $BD = \sqrt{xx - yy}$. His denominationibus institutis, conditio ad æquationem nos ducens erit hæc; quod DC ubiquè sit tangens, sive quod differentiale ordinatæ CB y , ad differentiale abscissæ AB $nx + \sqrt{xx - yy}$ sit ut ipsa ordinata y ad BD $\sqrt{xx - yy}$. Factis igitur horum differentialium valoribus, erit proportio $dy, \frac{ndx\sqrt{xx - yy} + xdy - ydy}{\sqrt{xx - yy}} :: y, \sqrt{xx - yy}$,

ex qua eruetur æquatio sed quæ tamèn æquè ac illa, quam initio attulimus non est manifestè integrabilis. Ratio autem quare sit adeò implicita æqua-

tio

rio ad quam per hanc viam devenitur est, quod postquam per multiplicationem extremorum, & mediorum ex quatuor terminis huius analogiæ obtinuerimus æquationem, opus est illam quadrare ad eliminandas quantitates surdas, quia signum radicale continet utramque indeterminatam, ac pro inde ut earum separatio tentetur, opus est signa radicalia tollere, unde fit ut æquatio magis magisque difficilis fiat, miscentur enim sic melius ad invicem x , & y .

105 Verum quidem est, quod si vocaverimus non CB , sed $BD = y$, invenissemus æquationem minus compositam; erit nempe $AB = nx + y$, $CB = \sqrt{xx - yy}$; unde assumptis harum differentialibus, proportionales erunt $\frac{xdx - ydy}{\sqrt{xx - yy}}$, $ndx + dy ::$

$\sqrt{xx - yy}$, y , & facta æquatione, opus tantum erit illam reducere ad communem denominatorem, ut signa radicalia omnino tollantur, & æquatio proveniet $nxxdx - ny ydx + xxdy = xydx$; sed tamen hæc eadem æquatio non apparet quomodo construibilis sit, neque enim videmus quomodo illam integremus, nec quomodo indeterminatas ab invicem separemus.

106 Satiùs igitur est ut curemus irrationales quantitates evitare denominando taliter ut $\sqrt{xx - yy}$ sit quantitas rationalis, sive ut $xx - yy$ sit quadratum;

notum est autem, quod formula omnium simpli-
cissima pro efficiendo ut $xx - yy$ sit quadratum est
si ponatur $xx - yy = xx - 2yxz + yzzz$. sic enim
invenietur $y = \frac{2xz}{zz + 1}$ quod indicat, lineam CB, quam

vocabamus y debere vocari $\frac{2xz}{zz + 1}$, ad hoc ut $xx - yy$

fit aliquod quadratum, & $\sqrt{xx - yy}$ fit quantitas ra-
tionalis. Sanè si ex xx demas quadratum quantita-
tis $\frac{2xz}{zz + 1}$ reliquum erit quadratum cuius radix erit

$$\frac{zzx - x}{zz + 1} \text{ vel etiam } \frac{x - zzx}{zz + 1}.$$

107 Denominemus igitur tandem $DC = x$, AD
 nx , & $CB = \frac{2zx}{zz + 1}$, cuius differentiale invenietur

esse $\frac{2z^3dx + 2zdx + 2xdz - 2zzxdz}{z^4 + 2zz + 1}$. Erit ergò DB

$\frac{x - zzx}{zz + 1}$, quæ addita ad AD quæ est nx facit AB

$\frac{nzx + nx + x - zzx}{zz + 1}$, cuius differentiale erit

$\frac{nz^4dx + 2nzzdx - z^4dx + ndx + dx - 4zxdz}{z^4 + 2zz + 1}$, un-

dè analogia ex proprietate tangentis petita sic ex-
plicabitur $\frac{2z^3dx + 2zdx + 2xdz - 2zzxdz}{z^4 + 2zz + 1}$,

$\frac{nz^4dx + 2nzzdx - z^4dx + ndx + dx - 4zxdz}{z^4 + 2zz + 1} :: \frac{2zx}{zz + 1}$,

$x - \frac{zzx}{zz+1}$, quæ suppeditat equationem $nz'dx + 2nz'dx$

$\rightarrow nz'dx - xz^2 dz - 2xzzdz - xdz = 0$, quæ divisa
per $z^2 + 2zz + 1$ dat $\frac{nz'dx}{x} = \frac{xdz}{z}$, undè $ndx = dz$, &

integrando $nx = lz$, posita unitate pro subtangen- (nu. 57.)
te, aut etiàm quavis alia constante ad arbitrium; &
abiectis logarithmis, sive assumptis quantitatibus,
quarum ambo equationis membra sunt logarithmi,
erit $x'' = z$, est autèm $CB = \frac{2zx}{zz+1}$, ergò, posito pro

z valore x'' , erit $CB = \frac{2x^{m+1}}{1+x^{2m}}$.

108 Si loco ponendi CB, posuissimus $DB = \frac{2zx}{zz+1}$,

& $CB = \frac{x - \frac{2zx}{zz+1}}{zz+1}$, æquatio ad quam peruentum fuif-

set, eandem curvam restituisset; inventis scilicèt dif-
ferentialibus ex BC, & AB, si æquatio instituatür,
invenietur esse $nz'dx + nz'dx - 2xz^2 dz - nzzdx - ndx$
 $- 2xdz - 4zzxdz = 0$, quæ divisa ut suprà per
 $z^2 + 2zz + 1$ dedisset $nzzdx = ndx + 2xdz$, sive $\frac{ndx}{x}$

$= \frac{2dz}{zz+1}$, cumque fractio hæc $\frac{2dz}{zz+1}$ sit æqualis fra-

ctionibus $\frac{dz}{z-1} - \frac{dz}{z+1}$, esset $\frac{ndx}{x} = \frac{dz}{z-1} - \frac{dz}{z+1}$,

& integrando $nx = l \frac{z-1}{Y} - l \frac{z+1}{Z+1}$, & abiectis lo-
ga-

garithmis $x'' = \frac{z-1}{z+1}$, quod explicari non indiget,

notum est enim quod differentia duorum logarithmorum ex duabus quantitatibus est logarithmus quotientis ex divisione unius per alteram ex illis. Ex hac porro æquatione erues $\frac{x''+1}{1-x''} = z$, & cum

CB sit $\frac{x-zzx}{zx+1}$, invenietur esse $CB = \frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$ pror-

sus ut inveneramus etiã per præcedentem denominationem. Quod indicasse sufficiat, ut unusquisque possit, si calculi molestiam ferre velit, à se ipso experiri.

109 Patet itaque æquationem ipsam $xxdy = nydx\sqrt{xx-yy} + xydx$, quæ eruitur ex analogia dy ,
 (n. 104.) $\frac{ndx\sqrt{xx-yy} + xdx-ydy}{\sqrt{xx-yy}} :: y, \sqrt{xx-yy}$, fuisse integrabi-

lem, quod si inito statim licuisset animadvertere, jam per has substitutiones non opus fuisset ipsius y valorem derivare. Est igitur, ut brevius innuam, ipsius æquationis $xxdy - nydx\sqrt{xx-yy} - xydx = 0$; æquatio integralis $\frac{x - \sqrt{xx-yy}}{yx^n} = 1$ vel ad salvan-

dam terminorum homogeneitatem erit, si lubeat, $\frac{xa^n - a^n\sqrt{xx-yy}}{y} = x^n$ undè eruitur $y = \frac{2x^{n+1}a^n}{2^{2n}+x^{2n}}$ prorsus ut supra inveneramus.

110 Ad obtinendum igitur valorem lineæ CB si n fuerit numerus rationalis, vel integer, vel fractus, vel positivus, vel negativus, opus erit tantum assumere $AE =$ quantitati inventæ $\frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$, quæ tunc

erit algebraica, quia assumpta x datur ejus quævis potestas $n+1$, vel $2n$, vel quævis alia, cujus exponents sit in ratione effabili ad unitatem, datur scilicet ope paraboloidis ejusdem gradus $n+1$, vel $2n$, & mille alijs modis. Sed si n esset numerus irrationalis, ad inveniendum x^{n+1} , vel x^{2n} , recurrendum est ad logistricam, in qua ordinando ad asymptotum x , & deinde ejus logarithmum summendo $n+1$ vel $2n$ vicibus, haberemus logarithmos x^{n+1} , x^{2n} , unde quantitatem $\frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$ facile possemus componere, qua

super axe AE assumpta, ducatur per E ipsi AB parallela, tum assumpta $AD = nx$, cetro D intervallo $DC = x$ circulus ducatur sectuturus, ductâ EC in C puncto curvæ cujus semper ipsa CD tangens erit, ac proinde tangens erit ad portionem AD, quam ab axe rescindit ut n ad 1; quod erat faciendum. Si n sit $= 2$, erit (posita a pro unitate) $CB = \frac{2aax^3}{a^2+x^4}$.

Propositio IV.

111 **P**osumus in multis alijs casibus uti eadem denominandi regula, qua superius usi sumus.

mus. Ut si jubeamur curvam AC describere cujus ea sit lex, ut ducta tangente ad quodvis in ea punctum C, sit quævis potestas data m hujus tangentis CD, ad quamvis potestatem r refectæ AD, ut 1 ad n (undè vocando $DC = x$, sit $AD = n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}}$) utile erit si vocemus CB ut suprâ $= \frac{2zx}{2z+1}$, undè BD

$$= x - \frac{2zx}{2z+1}, \text{ \& } AB = \frac{n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}} 2z}{2z+1} + \frac{n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}}}{2z+1} + x - \frac{2zx}{2z+1},$$

$$\text{cujus differentiale } \frac{m n^{\frac{1}{r}} z^{\frac{m-r}{r}} x^{\frac{m}{r}}}{r} dx + \frac{2m n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}}}{r} z dx$$

$$\frac{z^{\frac{1}{r}} + 2zz^{\frac{1}{r}} + 1}{r}$$

$$+ \frac{m n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}}}{r} dx + dx - 4zxdz - z^{\frac{1}{r}} dx, \text{ facta deindè}$$

analogia intèr differentiale CB, differentiale AB ::

$$CB, \text{ \& } BD, \text{ orietur æquatio } \frac{m n^{\frac{1}{r}} z^{\frac{m-r}{r}} x^{\frac{m}{r}}}{r} dx$$

$$+ \frac{2m n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}}}{r} z^{\frac{1}{r}} dx + \frac{m n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}}}{r} z dx - z^{\frac{1}{r}} x dz$$

$$- 2zzxdz - xdz = 0, \text{ quã dividamus per } z^{\frac{1}{r}} + 2zz^{\frac{1}{r}} + 1,$$

$$\text{\& habebimus } \frac{m n^{\frac{1}{r}} z x^{\frac{m-r}{r}}}{r} dx = x dz, \text{ seù } \frac{m n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}}}{r} dx = dz$$

$= dz$, & integrando $\frac{m}{z} n' x^{\frac{z}{m-r}} = lz$. Constructur (nu. 574)

igitur curva quæ sita sit, descripta logarithmica cujus
1 sit subtangens, & assumpta ad arbitrium x , abscin-

datur ex ejus axe portio $= \frac{m}{m-r} n' x^{\frac{z}{m-r}}$ (quæ erit

algebraica si m , & r fuerint numeri commensura-
biles) & per ejus extremum ducatur ordinata usque
ad logarithmicam, quæ erit z , tunc verò fiat, ut quadratum
tangens, quæ per punctum sic inventum logisti-
cæ ducitur, ad rectangulum xz , ita duplum subtan-
gentis ad quartam, quæ erit $\frac{2zx}{2z+1}$ ipsa scilicet CB ,

qua assumpta in AE , ductaque axi AB parallela
 AC , & extensa $AD = nx$, si centro D radio x cir-
culus ducatur, hic secabit rectam EC in quæ sitæ
curvæ puncto C .

Propositio V.

112 **M** Ultoties etiam post inventam equatio-
nem, quæ quomodo construibilis sit
non constet, ope substitutionis alicuius, reducitur il-
la ad faciliores terminos, absque eo quod totam de-
nominationem mutando, ut in anteced. Proposit:
illam funditus evertere, ac variare necessum sit.

Esto

(fig. 33.)

Esto construenda curua AC, cujus ordinata BC, sit ad subtangentem BT, ut constans AG, ad differentiam coordinatarum AB, BC, sive ad portionem NC, posito rectam AN efficere angulum BAN graduum 45. ita ut $y, \frac{ydx}{dy} :: a, y-x$; erit-

que æquatio $adx = ydy - xdy$. Hanc æquationē diligentè consideranti non erit difficile invenire, quæ nam substitutiones fieri debeant, ut in determinatæ ab invicem separabiles reddantur. Cum enim in æquatione adsit ydy quantitas per se ipsam integrabilis, reliquum est ut quæramus, quomodo-nam (salva integrabilitate termini ydy , & æquatione $adx + xdy = ydy$) reliqui duo termini adx , & xdy simul sumpti possint quid integrabile efficere. Membrum porro xdy non est integrabile nisi adsit suum correspondens ydx , tunc enim hi duo termini simul juncti integrale habent xy . ad hoc igitur ut hi duo termini $xdy + adx$ sint integrabiles opus est ut quantitas, cujus differentiale in primo termino invenitur ductum in x sit illa eadem, quæ multiplicet dx in secundo. Ideò enim $udt + tdu$ est integrabilis quantitas, quia litera t cujus differentiale in primo termino udt multiplicat u , est illa eadem quæ in secundo multiplicat du . Debebit igitur pro dy poni $\frac{adz}{z}$, sive pro y poni lz , sic enim

quantitas adz multiplicabit x (cum debeat illa poni
ni

ni pro dy in termino xdy) & quantitas z , quę est in denominatore multiplicabit adx alium terminũ, siquidẽm æquatio reducat̃ur ad communem denominatorem, remanente ad hũc termino ydy , post substitutionem, & reductionem æquationis ad cõmunem denominatorem, saltẽm transcendenter integrabili.

113 Facta porrò substitutione lz pro y , & $\frac{adz}{z}$ pro dy , æquatio erit $adx + \frac{xadz}{z} = \frac{lzadz}{z}$, sive $zadx + xadz = lzadz$, cujus æquationis divisæ (si lubeat) utrinquẽ per a integralis æquatio est $xz \pm aa = zlz - az$, vel etiã $xz = zlz - az$. Ex hac deducitur $x = lz - a$, sive $x = y - a$, sed ex illa eruitur $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, ex quibus valoribus describetur linea quęsit̃a duplex, altera recta, ex æquatione $x = y - a$, altera curvã $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, sive $x = y - a \pm \frac{aa}{z}$. At si posuissẽmus $y = -lz$, & pro dx , $-\frac{adz}{z}$, æquatio $adx = ydy - xdy$, mutata fuisset in $zdx - xdz = lzdz$, pro qua integranda est opus dividere per zz , nam $zdx - xdz$ non est integrabilis nisi dividatur per zz . erit igitur æquatio $\frac{zdx - xdz}{zz} = lz -$

$\frac{1}{z} dz$, cujus integrale $x = -\frac{1}{z} - a$ sive $x = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} - a$. Harum æquationum prima dat $x = -\frac{1}{z} - a$, sive $x = -\frac{1}{z} - a$, secunda porro dat $x = -\frac{1}{z} - a + z = y - a + z$.

COROLL.

114 **H**inc illud manifestum fit, quomodo eadem differentialis æquatio possit varijs lineis non genere tantum diversis quadrare, sed alteri algebraicæ, alteri transcendenti æquè satisfacere. Æquatio enim superior $adx = ydy - xdy$, æquè quadrat rectæ $x = y - a$, ac transcendentibus curvis $x = \frac{1}{z} - a + \frac{aa}{z}$, & $x = -\frac{1}{z} - a + z$, posito $\frac{1}{z}$

ibi, hinc verò $-\frac{1}{z} = y$, hocque fit, vi constantis illius, quæ si negligatur in integratione æquationis, poterit hæc dividi, vel multiplicari per z , evanescere sic omnino z , & sola remanente arbitraria $\frac{1}{z}$, cum aliàs si constans illa adiungatur, remansura sit z cum suo $\frac{1}{z}$, ac proinde curva algebraica non erit, sed tantum transcendens.

COROLL. II.

115 **V**elim etiã duo diligentèr adnotari. Unum est æquatio $x = \frac{1}{z} - a$, quæ licet con-

contineat logarithmicam quantitatem nullo modo est ad curvam transcendente[m], sed ad rectam nullius logarithmicæ indigentem ut ducatur. Quantitas siquidè[m] lz in se est quantitas ordinaria quin & arbitraria, sed tantum est transcendens respectu quantitatis z quia data lz , invenire z , vel data z invenire lz problema est transcendens; invenire autem simpliciter lz , sive logarithmum arbitrariæ z adeo ab omni difficultate liberum est, ut arbitraria tantum linea sit assumenda, quia unaquævis linea, quæ assumatur, est logarithmus alterius lineæ. Igitur lz in omni equatione pro aliqua curva in qua equatione z non compareat non debet censer[is] quantitas transcendens, sed ordinaria, & æquatio illa, non ad curvam transcendente[m], sed ad algebraicam, nisi aliud adsit, quod æquationem illam transcendente[m] efficere possit.

116 Alterum, quod observare conducit est, duas æquationes $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, & $x = -lza - a \pm z$, licet

diversæ videantur, eandem tamèn curvam restitue-
re, sive prima equatione, sive secunda uti malimus. Iubet enim posterior hæc æquatio, ut si curvam AC describere velimus cujus ordinata BC sit ad subtangentem BT ut constans AG ad differentiam qua BC excedit AB, descripta ad asymptotum KD logistica (est autem KD ad GB normalis per A) cujus ipsa AG sit subtangens, quæque ad asymptotum accedat

Z

ad

ad partes D, qualis est IGE, & cujus initium fiat in A, assumatur quævis $AD = -lz = y$, erit enim $DE = z$; tùm additis duabus AD, DE, ex earum summa dematur a, reliquumque applicetur in DC, & sic punctum C erit in optata curva. Prior autem æquatio iubet describi logisticam quidèm eiusdem subtangentis AG, sed quæ accedat ad axem ad partes K, qualis est FGH tùm, assumpta arbitraria $AD = lz$, & ducta ordinata DF, quæ erit z, iubet inveniri tertiam post FD, & GA, eamque addi ad AD, & ex summa tolli a, sicque ordinatam DC inventum iri docet. Patet autem si logistica GE producat in I, summaturque $AK = AD$, futuram $KI = DF$, sed cum sint DA, AK æquales, erit ex logisticæ proprietate $ED, AG :: AG, KI$ sive FD , est ergò FD tertia post DE, & AG, sive viceversa, ED tertia post FD, & AG; cum igitur debeamus ex vi æquationis $x = lz - a + \frac{aa}{z}$

hanc tertiam addere ad AD, & hæc tertia sit ipsa DE, manifestum sit, hanc constructionem eandem esse cum constructione æquationis $x = -lz - a + z$, eandemque numero curvam subministrare.

117 Æquatio altera $x = y - a$ est ad rectam GL, tangentem logisticam GE in G, sive angulum 45. graduum facientem ad punctum G cum recta AG. Hæc recta, quæ & ipsa satisfacit quæsito asymptotus est curvæ AC per expositam constructionem prædescriptæ; posita $AD = -lz$, cū sit $DC = -lz - a + z$, si de-

si demas ex hac lineam DM, reliquum MC erit $= z$, quia DM sive illi equalis DL est $= lz - a$. Auctis autem per equalia intervalla lineis AD, est certum, & correspondentes GM per equalia intervalla augeri, quibus cum ordinatę MC $= z$ competant, quę geometricz decreſcunt, patet curvam AC fore logarithmicam quandam ad asymptotum GM, ordinatas tamē ad illum habentem in angulo ſemirecto inclinatas.

Propoſitio VI.

118 **P**roblema præcedentis propoſitionis non multum variabitur ſi curva ſit deſcribenda in qua reciprocę applicata ſit ad ſubtangente ut portio NC ad conſtante. Verum ſi pro recta AN figurę 33. ſubſtituatur curva quęvis AC, ita ut (fig. 34.) curva quęſita ED hanc habeat proprietate ut eius ordinata ita ſit ad ſubtangente, ut differentia inter datam ordinatam BC curvę datę AC, & quęſitam BD, ad conſtante a , æquatio ad quam pervenietur, erit quidē magis compoſita, ſed per eandem tamē regulam poterit reduci, qua ſuperiore propoſitione ſumus uſi. Vocando igitur $AB = x$, $BD = y$, $BC = q$ manifeſtum eſt q dari per x , nil aliud enim importat dari curvam AC quam notum eſſe quomodo ordinata quęvis CB dependeat à ſua abſciſſa AB. Proprietate porro curvę ED importat ut $y, \frac{ydx}{dy} :: y - q, a$; unde $ady = ydx - qdx$. Eſt autem

(n. 112.) tẽm hĩc eodem ratiociniũ utendum quo supra uſi ſumus . Cum enim qdx ſit tranſcendentẽ ſaltẽm integrabile membrum, reliquum eſt ut talis ſubſtitutio adhibeatur loco dx ut duo membra ady , ydx in æquatione $qdx = ydx - ady$ integrabilia exiſtant; inuenietur itaque ſubſtitui poſſe $dx = \frac{adz}{z}$, undẽ x

$= lz$. Facta ſubſtitutione erit $qadz = yadz - azdy$, ubi q datur per z , quia cum notum ſit quomodo q detur per x , & cum x ſit $= lz$, notum etiã erit quomodo q detur per lz , ac proindẽ etiã quomodo detur per z . Dividendo deindẽ equationem hanc per zz erit $\frac{qdz}{zz} = \frac{ydz}{zz} - \frac{zdy}{zz}$, undẽ integran-

do $\int \frac{qdz}{zz} = -\frac{y}{z}$, aut $\int \frac{qdz}{zz} + 1 = -\frac{y}{z}$, undẽ vel

erit y abſolutẽ $= -z \int \frac{qdz}{zz}$, vel erit $y = -z \int \frac{qdz}{zz}$

$+ z$. Si poſuiſſemus $x = -lz$, & $dx = -\frac{adz}{z}$, equa-

rio fuiſſet $qdz = ydz + zdy$, quæ integrata dediffet $\int qdz = yz$, vel $\int qdz = yz + aa$, & ſic $y = \frac{\int qdz}{z}$

vel $y = \frac{\int qdz}{z} + \frac{aa}{z}$.

119 Conſtructio igitũ talis erit ad primam æquat. $y = -z \int \frac{aqdz}{zz}$; fiat ad aſymptotum AB lo-

gistica, cujus (exemp. gratia) AF ordinata per A sit
subtangenti æqualis, quæque producta ab asymptoto
discedat ad partes B. Tum assumpta quavis or-
dinata BG = z, erit AB = lz = x, & CB = q; tum fiat
z, a :: q, ad $\frac{aq}{z}$, cui æqualis ponatur BH, fietque

sic curva quædam AH. Elementum spatii ABH,
erit ipsa BH ducta in differentiale ex AB, sive ex lz,
quod differentiale est $\frac{adz}{z}$. Igitur hoc elementum

erit $\frac{aaqdz}{zz}$, & spatium ABH erit $\int \frac{aaqdz}{zz}$, quod
spatium divisum per a dat $\int \frac{aqdz}{zz}$; iam fiat ut a,

ad z, ita hoc spatium per a divisum $\int \frac{aqdz}{zz}$ ad quar-

tã $z \int \frac{aqdz}{zz}$, quæ dematur ex z, & erit $\frac{z - z \int \frac{aqdz}{zz}}{a}$,

quantitas, quæ ex vi inventæ æquationis est = y.
Aut etiã sufficet simpliciter quantitatis ipsius
 $z \int \frac{aqdz}{zz}$ negativum absque ulla quantitatis z ad-

ditione applicare in BD punctum enim D etiã
sic inventum erit in quæsita curva, cum sit etiã
ex visis $y = -z \int \frac{aqdz}{zz}$.

a

CO.

120 **C**Urva sic descripta multis in casibus poterit esse algebraica; & spectatim cum curva data AC fuerit de numero paraboloidum, siue fuerit $q = x^n$, posito tamen n esse numerum integrum, & positivum. Cum enim q sit $= x^n$ siue $= lz^n$ quantitas $\frac{aqdz}{zz}$, siue $az^{-2} lz^n dz$, erit ex vi sæpè

(III. 62.) memoratæ seriei, integrabilis & quidè talitè ut ejus integrale, præter simplicem z , quæ totum illud dividet, nulla z prætereà ingrediatur, sed solum lz . Cum autè integrale hoc debeat deindè ad obtinendam y multiplicari per z , dividi verò per a , evanescet omninò z ex quantitate $-\frac{z}{a} \int \frac{aqdz}{zz}$, siue ex

valore ipsius y , sola remanente lz , pro qua ponendo x , orietur inter x , & y æquatio purè algebraica, naturam quæsitæ curvæ ED determinans. Exemplum sit casus, quo AC sit paraboloidis expressa per $q = x^3$, siue $= lz^3$. In quo casu $\frac{aqdz}{zz}$ erit $= \frac{z^{-2} lz^3 dz}{a}$.

Hujus quantitatis integrale subministrat sæpè citata series, estq; $\int \frac{z^{-2} lz^3 dz}{a} = -\frac{lz^3}{3a} - \frac{3alz^2}{2a^2} - \frac{6aalz}{a^3} - \frac{6a^3}{a^4}$, igitur $-\frac{z}{a} \int \frac{aqdz}{zz}$ erit $= \frac{lz^3}{3a} + \frac{3alz^2}{2a^2} + \frac{6aalz}{a^3} + \frac{6a^3}{a^4} = y$

$$= y \text{ (si velimus uti æquatione } y = -z \int \frac{a q dz}{z z} \text{) tunc-}$$

que substituendo x pro lz erit æquatio purè algebraica $x^3 + 3axx + 6aax + 6a^3 = aay$ pro curva quæsita.

At si utamur alia æquatione $y = z - z \int \frac{a q dz}{z z}$

curva non erit algebraica frustrà enim fit substitutio in quantitate $lz^3 + 3alz^2 + 6aalz + 6a^3$ literæ x pro lz , cum deindè adiungi debeat z , sicque non omninò tolli possit litera z , quo fit ut quantitas x sit purè transcendens, logarithmus nempe ex ipsa z .

Reddit igitur casus, quo eadem æquatio differentialis $ady = ydx - qdx$ duabus communis sit curvis, uni quidè algebraicæ, alteri transcendenti, quod & præcedente Propositione interdum accidere notaveramus. (7.114.)

C O R O L L. II.

121 **E**odem porrò processu patet quod si q constiterit ex quotvis terminis, quorum singuli habeant x ad quamvis potestatem integram, & positivam, erit curvarum quæsito nostro satisficientium altera algebraica, altera transcendens. Quod ostendetur faciliè, applicando cuivis ex his terminis demonstrationem quam de unico termino x^n mox at-

attulimus exemplum sit, posito $q = \frac{xx}{a} + x$, siue q
 $= \frac{xx}{a} + ax$; tunc enim, quantitate $\frac{aqdz}{zz}$ existente
 $= z^{-\frac{a}{2}} lz^{\frac{a}{2}} dz + az^{-\frac{a}{2}} lz dz$, ejus integrale $\int \frac{aqdz}{zz}$
 erit $-\frac{lz^{\frac{a}{2}} - 3alz - 3aa}{z}$, & quantitas $-z \int \frac{aqdz}{zz}$ erit
 $\frac{lz^{\frac{a}{2}} + 3alz + 3aa}{a}$; hinc æquatio quæsitæ curvæ erit
 $\frac{lz^{\frac{a}{2}} + 3alz + 3aa}{a} = y$, aut $\frac{lz^{\frac{a}{2}} + 3alz + 3aa}{a} + az = y$,
 quarum prior per substitutionem x loco lz in alge-
 braicam vertitur $xx + 3ax + 3aa = ay$.

Propositio VII.

122 **C**onstruximus præcedenti propositione
 æquationem $ady = ydx - qdx$, eadem-
 que lege constructur $ady = ydx + qdx$. Nunc re-
 gulam universaliorē reddendo, constructionem
 molimur æquationis $aady = bqdx + pydx$, ubi q ,
 & p intelliguntur dari quomodocumque per x ; ap-
 posui constantes aa , & b ut dimensionum nume-
 rus ubique idem servetur. Pro huius æquationis re-
 solutione, siue indeterminatarum separatione, cum
 $bqdx$ sit per se (transcendentèr saltè) integrabilis,
 re-

reliquum est, ut membra $aady$, $pydx$ simul sumpta integrabilia fiant, salua æquatione $aady = bqdx + pydx$. hoc obtinebimus dummodò pro $\frac{pdx}{a}$ po-

namus $\frac{adz}{z}$, sive $lz = \int \frac{pdx}{a}$. sic enim $dx = \frac{aadz}{pz}$,

& $pdx = \frac{aadz}{z}$. substituto igitur pro pdx ejus va-

lore, & pro dx alio etiàm ejus valore, erit æqua-

tio $aady = \frac{bqaadz}{pz} + \frac{aaydz}{z}$ vel $\frac{zdy - ydz}{z} = \frac{bqdz}{pz}$,

& $\frac{zdy - ydz}{zz} = \frac{bqdz}{pzz}$, undè integrando $\frac{y}{z} = \int \frac{bqdz}{pzz}$

vel $\frac{y}{z} \pm 1 = \int \frac{bqdz}{pzz}$, quare vel $y = z \int \frac{bqadz}{pzz}$ vel

$y = z \int \frac{bqadz}{pzz} \pm z$. Hæc æquatio jam construi

potest, quia assumpta x ad libitum, dabitur saltèm transcendentèr $\int \frac{pdx}{a}$ sive lz ; data lz , datur & z

per logarithmicam; data porrò z , datur $\int \frac{bqdz}{zz}$, &

omnes reliquæ quãtitates dantur, quas æquatio continet.

123 Erit igitur talis constructio. Assumatur arbitraria x , qua assumpta jam dantur p , & q , qua-

A a

rum

(fig. 35.

rum utraque datur per x . Fiat proindè primò curva AC, cujus abscissis AB existentibus x , sit $CB = p$. Tùm porrò spatio ABC ubiquè per a diviso equalis abscindatur DG ex asymptoto DG logisticè EF subtangentem habentis $ED = a$; tùm ducatur applicata GF, quæ erit $= z$ quia ejus logarithmus $DG = \int \frac{pdx}{a}$.

Tùm alia curva HK construatur, in qua abscissæ quidè $HI = DG = lz$, ordinatæ verò IK sint $\frac{pz}{a}$;

deindè fiat ut aa , ad spatium HIK (quod erit $\int \frac{a abqdz}{pzz}$) ità z ad quartam $\int \frac{bqdz}{pzz}$, quarta hæc

proportionalis erit quæsitæ y , vel etiàm si illi addatur vel dematur z , fiet quæsitæ ordinata y , quæ si applicetur in NM, ità ut ejus abscissa LM sit $= x$, erit LN quæsitæ curva.

C O R O L L.

124 **C**urva sic descripta interdum poterit esse algebraica. Nam si p sit potestas quævis ipsius x , ut si fuerit $p = x^m$, undè quantitas

$$\int \frac{pdx}{a} \text{ fuerit } \frac{x^{m+1}}{m+1} = lz, \text{ \& } x = \frac{a^{\frac{1}{m+1}}}{a^{\frac{1}{m+1}}} \frac{1}{lz}$$

fuerit autem et unà simul q quævis potestas ipsius

sius x , ut $q = \frac{x^n}{a^{n-1}}$, undè $= \frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} \frac{1}{z^{m+1}}$,

in hoc inquàm casu $\frac{bqdz}{pzz}$ invenietur esse quãtitas

$$\frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} b \frac{1}{z^{m+1}} dz, \text{ \& substinendo pro } p$$

valorem $\frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} \frac{1}{z^{m+1}}$, erit etiàm $\frac{bqdz}{pzz}$

$$= \frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} b \frac{1}{z^{m+1}} dz, \text{ undè ejus integrale}$$

$\int \frac{bqdz}{pzz}$ invenietur (modò $\frac{n-m}{m+1}$ sit numerus integer positivus) & integrale hoc, præter simplicem z , quæ erit in denominatore nullam aliam z habebit, sed tantùm $1z$; hincq; fit ut hoc integrale per z multiplicatum (qui est valor incognitæ y) nullatenùs literam z sit habiturum, sed tantùm $1z$; pro $1z$ verò ponendo ejus valorem $\frac{x^{m+1}}{a^{m+1}}$ erit æquatio y

$= z \int \frac{bqdz}{pzz}$ purè algebraica, cum interim alia equa-

tio $y = z \int \frac{bqdz}{pzz} \pm z$ sit tantùm transcendens, cum

utramque z , & lz contineat. Ad hoc igitur ut, existentibus p , & q potestatibus ipsius x , linea descripta secundum æquationem $aady = bqdx + pydx$ esse possit algebraica, debet exponens potestatis literæ x in quantitate q multiplicatus simili exponente quantitatis p , & divisus per eundem exponentem literæ x in quantitate p unitate auctum, quotientem præbere integrum, & positivum. Sit exempli loco $n = -4$, $m = -2$, erit tunc $\frac{a^2 bqdz}{pzz} = \frac{blz^2 dz}{zz}$, cu-

jus integrale $-\frac{blz^2}{z} - 2balz - 2baa$, quod integrale

per aa divisum, & per z multiplicatum dabit $z \int \frac{bqdz}{pzz} = y = -\frac{blz^2}{z} - 2balz - 2baa$, vel etiam

$y = \frac{\pm aaz - blz^2 - 2balz - 2baa}{aa}$ propter y quæ est

$= z \int \frac{bqdz}{zz} \pm z$. Harum æquationum prior est al-

gebraica, quia, posito pro lz ejus valore $-\frac{aa}{x}$, & pro

lz^2 , $\frac{a^2}{xx}$, æquatio illa fiet $2bax - 2bxx - baa = xxy$.

Igitur etiam æquatio $aady = bqdx + ypdx$ interdum curvæ algebraicæ quadrare potest, dum simul transcendente aliam æquebene repræsentat.

COROLL. II.

125 **S**ed etiam si q non sit una quantitatis x potestas, sed componatur ex pluribus terminis, quorum unum quemque ingrediatur x ad quamvis potestatem elevata, reperietur algebraicam posse esse lineam æquationis $aady = bqdx + ypdx$. Sit enim q quantitas talis, qualem nunc diximus, & p potestas quævis ipsius x prorsus ut in præcedenti Corollario, exempli gratia sit $p = \frac{x^m}{a^{m-1}}$, undè x

$$= \frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} a^{\frac{m}{m+1}} lz^{\frac{1}{m+1}} \text{ ut supra inventum est ; } q \text{ verò sit } = \frac{x^n}{a^{n-1}} + \frac{x^r}{a^{r-1}} \&c. \text{ sicque invenietur esse } q$$

$$= \frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} a^{\frac{1+m-n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}} + \frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} a^{\frac{1+m-r}{m+1}} lz^{\frac{r}{m+1}}$$

$$\&c. \text{ undè erit } bqdz = \frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} ba^{\frac{n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}} dz +$$

$$\frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} ba^{\frac{r}{m+1}} lz^{\frac{r}{m+1}} dz \&c. \& \text{ ponendo pro } p$$

$$\text{valorem } \frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} a^{\frac{1}{m+1}} lz^{\frac{1}{m+1}}, \text{ fiet etiam } bqdz$$

$$= \frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} ba^{\frac{n-m}{m+1}} lz^{\frac{n-m}{m+1}} dz + \frac{1}{m+1} \frac{1}{a^{m+1}} ba^{\frac{r-m}{m+1}} lz^{\frac{r-m}{m+1}} dz$$

zz &c.

(nu. 62.) &c. quæ etiã quantitas erit integrabilis si $\frac{n-m}{m+1}$,

$\frac{r-m}{m+1}$ &c. sint numeri integri, & positivi; cumque

in hac æquatione adsit zz in denominatore sive z^{-2} in numeratore, aderit in integrali z^{-1} , sive z in denominatore, quare multiplicato integrali per z , evanescet z , & sola remansura est lz in quantitate $z \int \frac{bqdz}{pzz}$, quæ quantitas, vel est y (tuncq; igitur

erit y algebraica) vel erit illi addenda, demenda-
ve z ad efficiendam y , quæ tunc proindè erit tran-
scendens. Discursus idem est quo in Coroll. præ-
ced. usi sumus. Exemp. sit quãdo $m=2, r=1, n=8$;
quantitas p erit $\frac{xx}{a}$, vnde $\int \frac{pdx}{a} = \frac{x^2}{2a}$. Dein-

dè quantitas $\frac{bqdz}{pzz}$ erit $\frac{9balz^2 dz + 27blz^3 dz}{aazz}$, cujus

(nu. 62.) integr. erit $\frac{-27blz^3 - 9obalz^2 - 18obaalz - 18oba^3}{aaz}$

$= \int \frac{bqdz}{pzz}$. Hoc integrale ductum in z , & divisum

per a dat $\frac{-27blz^3 - 9obalz^2 - 18obaalz - 18oba^3}{a^3}$,

vnde vel y erit æqualis huic quantitati, vel eidem
additâ demptâve z , habebitur y ; tuncq; æquatio erit
transcendens, cum tamèn nisi addatur, vel dema-
tur z æquatio sit algebraica; substituto nempe pro
 lz

Iz valore $\frac{x^3}{3aa}$ erit æquatio $a^2y + x^2b + 10a^2bx^2 + 60a^2bx^3 + 180a^2b^2x^4 = 0$.

COROLL. III.

126 **V** Idimus præcedentibus duobus Corollarijs quomodo curva equationis $aady = bqdx + pydx$ possit esse algebraica, propterea quod quantitas $\int \frac{pdx}{a}$ sit algebraica. Sed etiam si hæc quantitas $\int \frac{pdx}{a}$ non sit algebraica, adhuc tamen in varijs casibus curva per præcedentem equationem indicata esse poterit algebraica; ut si fuerit $\int \frac{pdx}{a}$ quantitas simplex logarithmica, hoc est $p = aax^{-1}$ unde $\frac{pdx}{a} = \frac{adx}{x}$ & $\int \frac{pdx}{a} = lz = lx$, unde $x = z$ nunc enim quantitas $\int \frac{baqdz}{pzz}$ erit integrabilis modo q simul & semel constet quotvis terminis quorum singulos x vel z ingrediatur ad quamvis potestatem elevata, & nullus sit terminus in ipsius q valore, quem z, vel x, quæ jam unum idemque sunt, nõ ingrediatur, cum enim p sit aaz^{-1} , erit $pzz = aaz$ unde $\frac{baqdz}{pzz}$ erit semper, quotcumque tandem termini-

minorum sit q , quantitas integrabilis, modò in nullo terminorum ipsam q constituentium absit quantitas z . Si autem $\frac{baqdz}{pzz}$ est algebraicè integrabi-

lis, erit etiàm $z \int \frac{\frac{baqdz}{pzz}}{\frac{pzz}{a}} = z$ quantitas algebrai-

ca, cum z sit ipsa x , & proindè etiàm y erit quantitas algebraica. Atque tunc quidem nulla esse potest difficultas, siquidem posito $p = \frac{aa}{x}$ equatio mu-

ratur in $aady = bqdx + \frac{aaydx}{x}$, & ducta æquatione

in x , & facta transpositione $xaady - yaadx = bxqdx$, & divisio per xx , deindè facta integratione $\frac{aay}{x}$

$= \int \frac{baqdx}{x}$, unde erit $y = x \int \frac{baqdx}{\frac{aa}{x}}$ prorsùs ut

prodit per regulam hujus propositionis substituto tantùm pro p valore $\frac{aa}{x}$.

127 At si p non quidè $\frac{aa}{x}$ supponeretur, sed $\frac{naa}{x}$, posito n esse numerum quemvis, esset $\frac{pdx}{a}$
 $= \frac{nadx}{x} = \frac{adz}{z}$, undè sumpto utroque logarithmo in

logarithmica cujus eadem a sit subtangens, erit $nlx = lz$, undè, abiectis logarithmis, $x^n = z$; undè y sive z $\int \frac{baqdz}{pzz} = x^n \int \frac{bqx^{-n} dx}{a} + \text{vel} - x^n$, si libue-

rit. Quare tunc etiàm curva erit algebraica, modò q constet ex quotvis terminis quorum singuli ipsam x contineant elevatam ad quamvis potestatem, excepta tantummodò potestate cujus index sit $n - 1$.

Propositio III.

128 **A** Quatio $b^{n+1} dy = pyb^{n-1} dx + qy^n dx$ reducetur ad æquationē ejusdem formæ cum illa, quam præcedenti propositione construximus; substituamus enim loco literæ y valorem

$$\frac{u^{\frac{1}{1-n}}}{b^{\frac{n}{1-n}}}, \text{ \& pro } dy \frac{1}{b^{\frac{n}{1-n}}} u^{\frac{1}{1-n}} du, \text{ pro } y^n \text{ verò } \frac{u^{\frac{n}{1-n}}}{b^{\frac{nn}{1-n}}},$$

& facta substitutione, divisq; æquatione per $u^{\frac{1}{1-n}}$ dabitur æquatio $\frac{1}{n-1} bbdu = pudx + bqdx$. Hæc æ-

quatio est ejusdem formæ ac $aady = pydx + bqdx$, quam supra construximus, nam quæ quantitas in æquatione prop. anteced. vocabatur a , hic est $\sqrt[n]{\frac{bb}{1-n}}$

B b

&

& quæ ibi erat y nunc vocatur u , reliquis deinde denominationibus invariatis, ita ut jam possimus hanc æquationem construere secundum regulas ibi traditas; & postquam construxerimus, & invenimus quantitatem u , ad inveniendam deinde quæsitam y debet tantum u elevatum ad potestatem

$\frac{1}{1-n}$ dividi per $b^{\frac{1}{1-n}}$, quotiens enim erit quæsitæ ordinatæ y curvæ $b^{m+1} dy = pyb^{m-1} dx + qy^n dx$.

129 Cum valor u æquationis $\frac{1}{1-n} b b du = p u dx + b q dx$ sit $z \int \frac{b q dz}{p z z}$, vel etiam $z + z \int \frac{b q dz}{p z z}$, erit y æqualis utrivis, vel utrique harum quantitatum ad potestatem $\frac{1}{1-n}$ elevata, & deinde per $b^{\frac{1}{1-n}}$ divisæ.

C O R O L L.

130 **Q**Uando in æquatione $b^{m+1} dy = pyb^{m-1} dx + qy^n dx$ sit p quævis ipsius x potestas m , & simul q constiterit ex quorvis terminis in quorum unoquoque quantitas x reperiatur ad potestates elevata quarum indices $r, s, \&c.$ singuli numero m minuti divisibiles sint per $m+1$, & insuper n fuerit numerus rationalis, curva per hanc æquationem expressa poterit esse algebraica. Facta enim

enim substitutione, & reductione equationis ad simpliciores $\frac{1}{1-n} b b d u = p u d x + q d x$, hujus equationis

radix u valorem unum algebraicum obtinet ex supra visis; quare, si elevetur ad potestatem exponentis rationalis $\frac{1}{1-n}$ (erit autem rationalis expo-

nens, quoties n fit numerus rationalis) & dividatur

per algebraicam quantitatem $b^{\frac{n}{1-n}}$, fiet valor unus literę y algebraicus. Secus verò si utamur alio valore literę u transcendente, quo ad valorem ipsius y etiam transcendente perducemur: ponamus exempli vice $m = 1$, sive $p = x$, r verò = 3, & $s = 5$, hoc est $q = \frac{2bbx^3 - x^5}{4b^4}$, n verò = $\frac{1}{2}$; ita æqua-

tio $b^{n+1} dy = p y b^{n-1} dx + q y^n dx$ mutabitur in $b^{\frac{1}{2}} dy = x y b^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{2bb y^{\frac{1}{2}} x^3 dx - x^5 y^{\frac{1}{2}} dx}{4b^4}$; ponendo igitur pro y valorem $\frac{uu}{b}$, equatio fiet $2bbdu$

$= u x dx + \frac{2x^3 b b dx - x^5 dx}{4b^3}$, quę est æquatio ejusdem

formę ac $aady = y p dx + q b dx$; quę enim hęc est (n. 122.) aa ibi est 2bb, quę hęc y ibi u, & quę hęc b ibi etiam b vocatur, quę verò hęc p, & q, ibi x, &

$2x^3bb - x^5$ audiunt. Resolvamus igitur equationem

$$\frac{2x^3bb - x^5}{4b^4} = uxdx + \frac{2x^3bbdx - x^5dx}{4b^4}; \text{erit porro } \int \frac{pdx}{a}$$

$$\text{five } \int \frac{xdx}{\sqrt{2bb}} \text{ hoc est } \frac{xx}{2\sqrt{2bb}} = lz, \text{ undè erit } x$$

$$= \sqrt{2lz\sqrt{2bb}}, \text{ \& } \frac{qbdz}{pzz} = \frac{lzdz\sqrt{2bb} - 2lz^2dz}{bzz}$$

quantitatis huius integrale $\int \frac{qbdz}{pzz}$ (posito loga-

tithmos sumi in logarithmica, cuius $\sqrt{2bb}$ fit subtran-
gens) est $\frac{2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb}{bz}$, ac proindè $\int \frac{qbdz}{pzz}$

$$\text{erit } \frac{2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb}{b} = u, \text{ vel etiàm } u =$$

$$\frac{bz + 2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb}{b}. \text{ Horum valorum prior}$$

est algebraicus, substituto tantùm pro lz valore

$$\frac{xx}{2\sqrt{2bb}} \text{ fitque equatio } \frac{x^4 + 6bbxx + 24b^4}{4b^3} = u; \text{ cum}$$

autèm $\frac{uu}{b}$ fit y æquationis propositæ, erit tan-

$$\text{dèm quæfita curvæ æquatio tantùm algebraica}$$

$$y = x^9 + 84b^4x^8 + 576b^5x^7 + 12bbx^6 + 288b^6xx,$$

$$\text{Interim si ex alio valore } \frac{2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb + bz}{b}$$

erua-

eruemus valorem quæsitæ y , habituri sumus equat.
 $b^3 y = 4lz^4 + 36b^4 + bbzz + 12lz^3 \sqrt{2bb} + 42lz^2 bb$
 $+ 4lz^2 bz + 36lzb\sqrt{2bb} + 6lzbz \sqrt{2bb} + 12b^3 z$ trā-
 scendentem curvæq; transcendentem inservientem.

Exemplum hic afferam non sanè iniucundum,
 ut appareat interdum ope hujus, & similium re-
 gularum ad curvas nos deductum iri, quas algebrai-
 cas certè non existimabamus, & proindè integra-
 biles esse quasdam æquationes inveniemus quastan-
 quam non integrabiles antè reieceramus.

131 Fingamus nobis curvas MQ, PR esse para-
 bolas quarum parametri ipsius quidè MQ sit AM, (fig. 9.)
 PR verò sit PA, & sic infinitæ aliæ ad eundem axem
 AP parabolæ intelligantur, quarum parametri res-
 pectivis à fixo puncto A verticum distantijs æqua-
 les sint, ducenda sit curva omnes tales parabolas ad
 angulos rectos secans. Esto in quæsitæ curva pun-
 ctum Q, & per illud ducta intelligatur parabola
 genitrix MQ ita ut MA sit ejus parameter, & voce-
 tur abscissa curvæ quæsitæ à puncto A in axe AP
 $= x$ & ejusdem curvæ ordinata $= y$, itaque ejus sub-
 normalis erit $= \frac{ydy}{dx}$ debet autè propter normali-

tatem curvarum esse hæc subnormalis ipsa subtan-
 gens puncti Q in curva MQ, ergò, vocando MA
 parametrum ipsius parabolæ MQ $= u$, & reliquum
 abscissæ $= x - u$, & ejus duplum, subtangens scilicèt
 puncti Q in parabola MQ $= 2x - 2u$, erit hæc sub-
 Bb 3 tan-

tangens $2x - 2u = - \frac{ydy}{dx}$, est autem abscissa in

parabola hoc est $x - u$ in parametrum u ducta,
 $= yy$, ergo $xu - uu = yy$ & indè fiet $u = \frac{1}{2} x +$

$\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$, quo valore in locum u substituto in
 æquatione $- \frac{ydy}{dx} = 2x - 2u$ superiùs inventa, erit

$- \frac{ydy}{dx} = x - 2 \sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$ æquatio pro curva quæ-

sita, quam quidè, si integrabilis esset, integraremus
 utiquè, & curvam quæsitam purè algebraicam e-
 rueremus. Verùm non constat esse integrabilem,
 nec qua via possint indeterminatæ cum suis diffe-
 rentialibus ab invicem separari, qua propter ad tol-
 lenda signa radicalia pono $\frac{1}{4}xx - yy$ esse quadra-
 tum, & invenio $x = \frac{tt + yy}{t}$, & $\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$

$= \frac{yy - tt}{2t}$, undè æquatio proposita mutabitur in

hanc pro curva quæsitæ æquationem $2ttdt + 5tydy$
 $- 2yydt = 0$ & $dy = \frac{2}{5}t^{-1}ydt - \frac{2}{5}ty^{-1}dt$, in

(n. 128.) qua si pro y ponamus $\sqrt{r}$ & pro dy ponamus
 $\frac{dr}{2\sqrt{r}}$ fiet æquatio $dr = - \frac{4}{5}t dt + \frac{4}{5}t^{-1}r dt$

cius-

ejuldem formæ ac superius hac propositione considerata æquatio $aady = bqdx + pydx$, quæ enim in æquatione canonica est aa hîc est $= 1$, quæ ibi est y hîc est $= r$, quæ ibi $= b$ hîc $= 1$, quæ ibi x hîc est $= t$, quæ ibi q hîc est $= -\frac{4}{5}t$, & quæ tandem

ibi est $= p$ hîc est $= \frac{4}{5}t^{-1}$. Itaque, si ponamus

$\frac{pdx}{a} = \frac{adz}{z}$, sive $\frac{4}{5}t^{-1}dt = \frac{dz}{z}$, sive $\frac{4}{5}lt = lz$ in subtangente 1, invenietur, abiectis logarithmis, $t^{\frac{4}{5}} = z$, & $dz = \frac{4}{5}t^{-\frac{1}{5}}dt$. Est autem in æquatione

$aady = bqdx + pydx$ quantitas $y = z \int \frac{bqadz}{pzz}$

vel $y = z \int \frac{bqadz}{pzz} + z$, ergò, si pro z & dz substituas valores mòx assignatos, & deindè pro a , b , q , & p etiàm suos valores, habebis r in æquatione

$dr = -\frac{4}{5}tdt + \frac{4}{5}t^{-1}r dt = t^{\frac{4}{5}} \int -\frac{4}{5}t^{\frac{1}{5}}dt$ vel

$= t^{\frac{4}{5}} \int -\frac{4}{5}t^{\frac{1}{5}}dt + t^{\frac{4}{5}}$; est autem $\int -\frac{4}{5}t^{\frac{1}{5}}dt$

$= a$

$$= a^{\frac{6}{5}} - \frac{2}{3} t^{\frac{6}{5}} \quad (\text{addita constante ad libitum } a^{\frac{6}{5}})$$

itaq; hoc integrali in $t^{\frac{4}{5}}$ ducto, fiet $r = a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} t t$.

Hic additio ipsius z , vel $t^{\frac{4}{5}}$ esset frustranea cum

solum membrum $a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}}$ possit augere. Inventa itaque r , ad habendam y erit opus ipsius r , seu

$a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} t t$ radicem eruere, eritque hæc radix

$$y = \sqrt{a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} t t}, \text{ \& cum sit } x = t t + \frac{y y}{t}, \text{ in-}$$

venietur $x = a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{1}{3} t$; itaq; assumpta t ad

libitum, & abscissa quantitate $x = a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{1}{3} t$

si fiat $y = \sqrt{a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} t t}$ erit punctum in opta-

ta curva, & si rem syntheticè nunc experiamur in-
veniemus curvam sic constructam habere suam sub-
normalem æqualem subtangenti parabolæ genitri-

cis MQ. Quod si ex æquat. $x = tt + yy$ eruatur

valor $t = \frac{1}{2} x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$, & hinc deindè substituaturnitè in equatione $x = a^2 t^2 + \frac{1}{4} t$ fiet æ-

quatio pro curva quæsitæ algebraica quidè erit-
que factis debitis præparationibus, & operationibus

$$\frac{5}{2}x - \sqrt{\frac{1}{4}xx - yy} : \sqrt{\frac{1}{2}a^2x + a^2\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}} = aa.$$

Cum verò superiùs invenerimus hujus curvæ equationem differentialem esse $-\frac{ydy}{dx} = x - 2\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$

sequitur hanc equationem, si integretur, restituere illam quam modo invenerimus, quod si experiamur, differentiando superiùs allatam, inveniemus optimè succedere, quare patet, & equationem $aady = bqdx + pydx$ interdum curvam tantum algebraicam representare, nullam simul admittens transcendente, quæ satisfaciatur quæsito.

F I N I S .

DD.

*DD. Rondellus, & Verzalia præ-
sentis Operis de Constru-
ctione Æquationum diffe-
rentialium primi gradus
in Philosophica Inquietorum
Academia Censores electi, om-
nia in ipso contenta ejusdem
Academiæ legibus, atque In-
stitutis conformia esse retule-
runt.*

V.F. Stancarius à Secretis.

V. D. Franciscus Aloysius Barelli Cler. Reg. Cong.
S. Pauli, & in Metropol. Bononien. Pœnitentia-
rius pro Eminentissimo, & Reverendissimo Dom.
D. Cardinali Iacobo Boncompagno Archiepisco-
po, & Principe.

CUm ego infra scriptus Sanctissimæ Inquisitio-
nis Revisor Ordinarius legerim librum intcri-
ptum *De Constructione Equationum differentialium*
primi gradus, Authore Gabriele Manfredio, ipsum-
que observaverim dumtaxat firmam, perutilem-
que scientiam continere, hac de causa publici ju-
ris fieri posse dijudicavi.

Hiemynianus Rondelli.

Stante præfata Attestatione

Imprimatur.

F. Antonius Leonius Inquisitor Bononiæ.

Monitum ad Lectorem.

Pag. 166. lin. 23. in quantitate $\frac{x dx \sqrt{xx - yy} + x dy - y dy}{\sqrt{xx - yy}}$

pro termino $x dy$ lege $x dx$. Reliqua Orthographica vel alius generis sphalmata benignus Lector facile, ut puto, advertet, corriget, atque ignoscat.

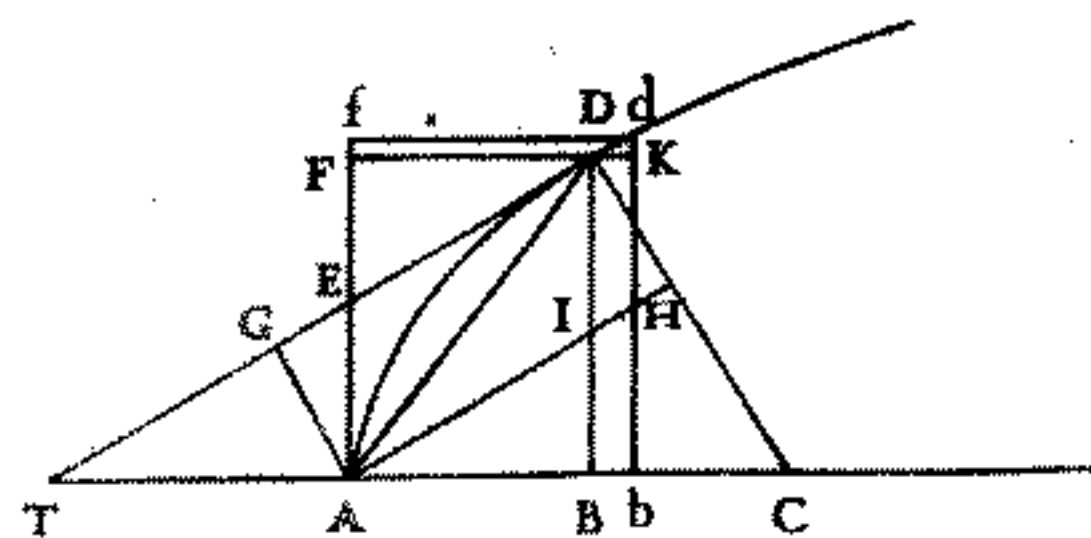
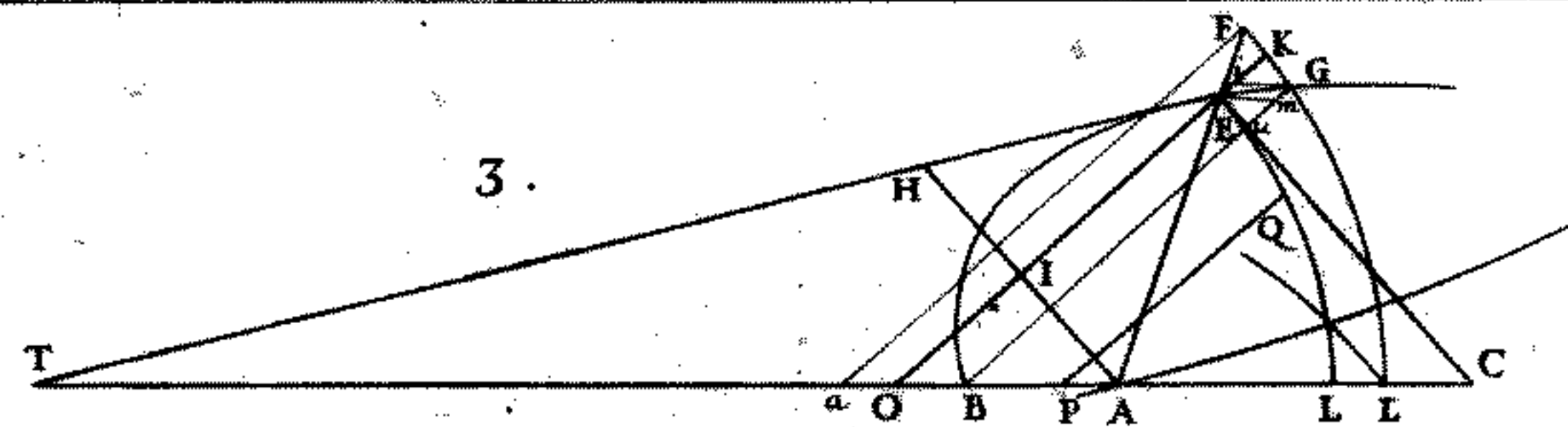
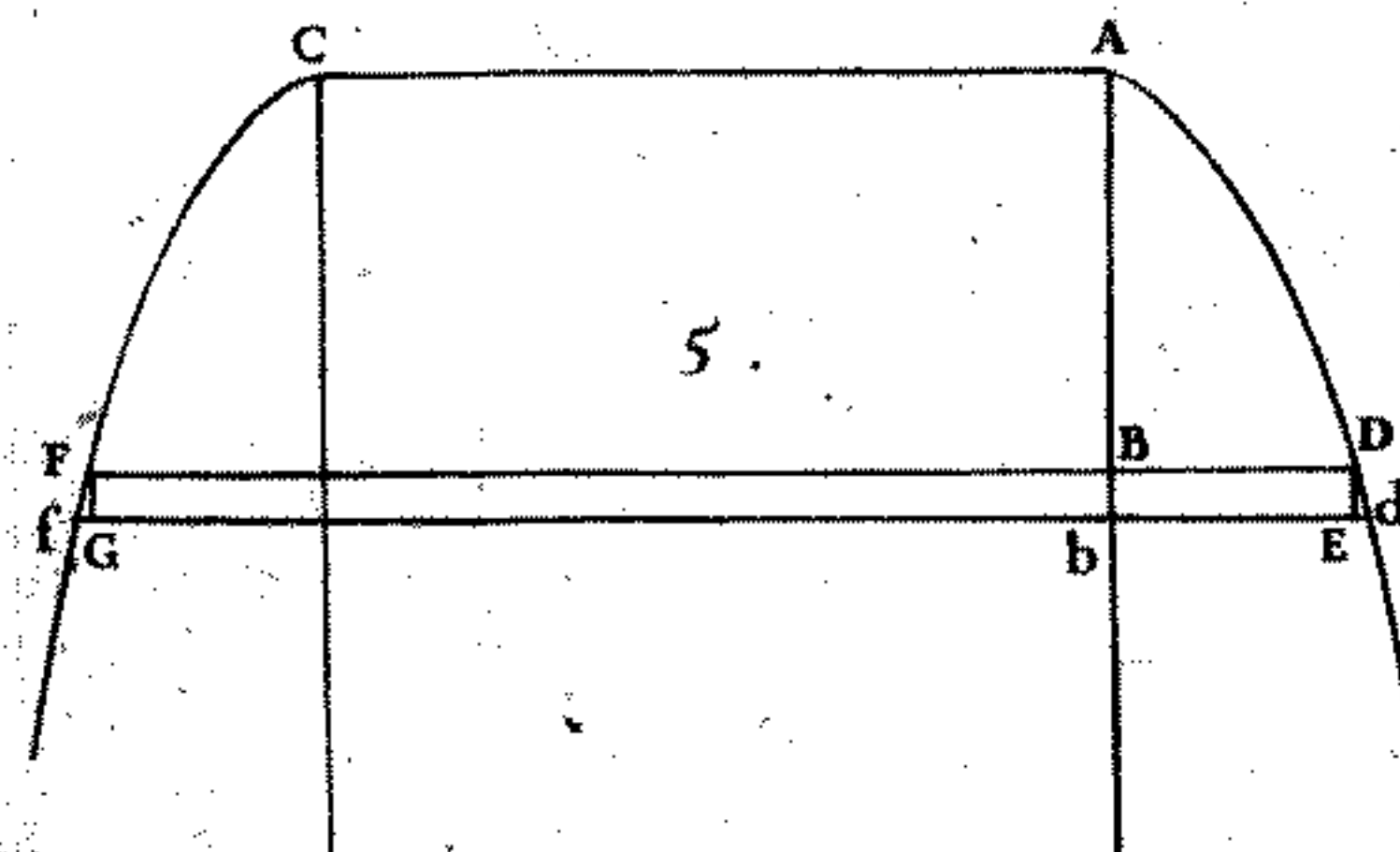


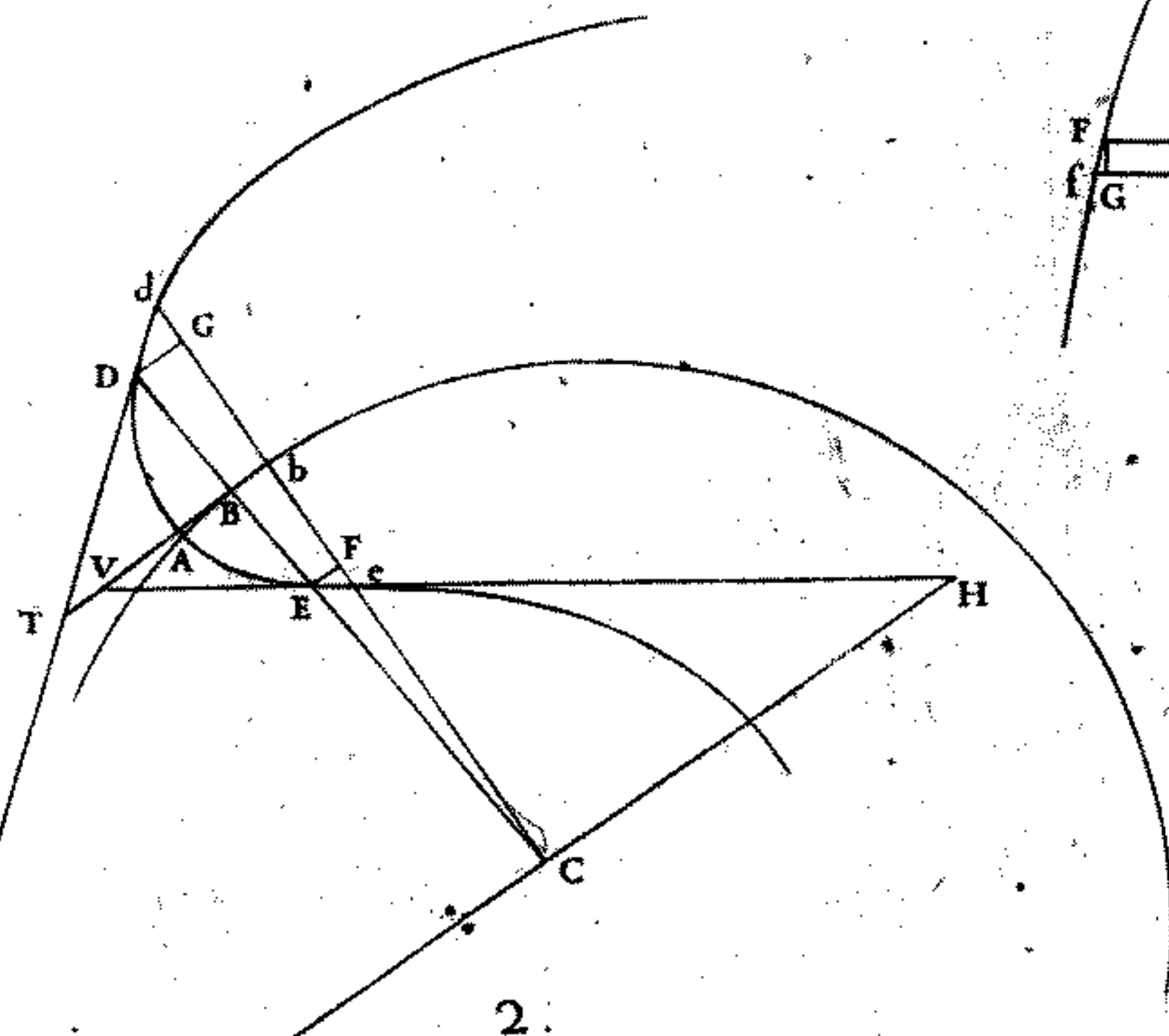
fig. 1.



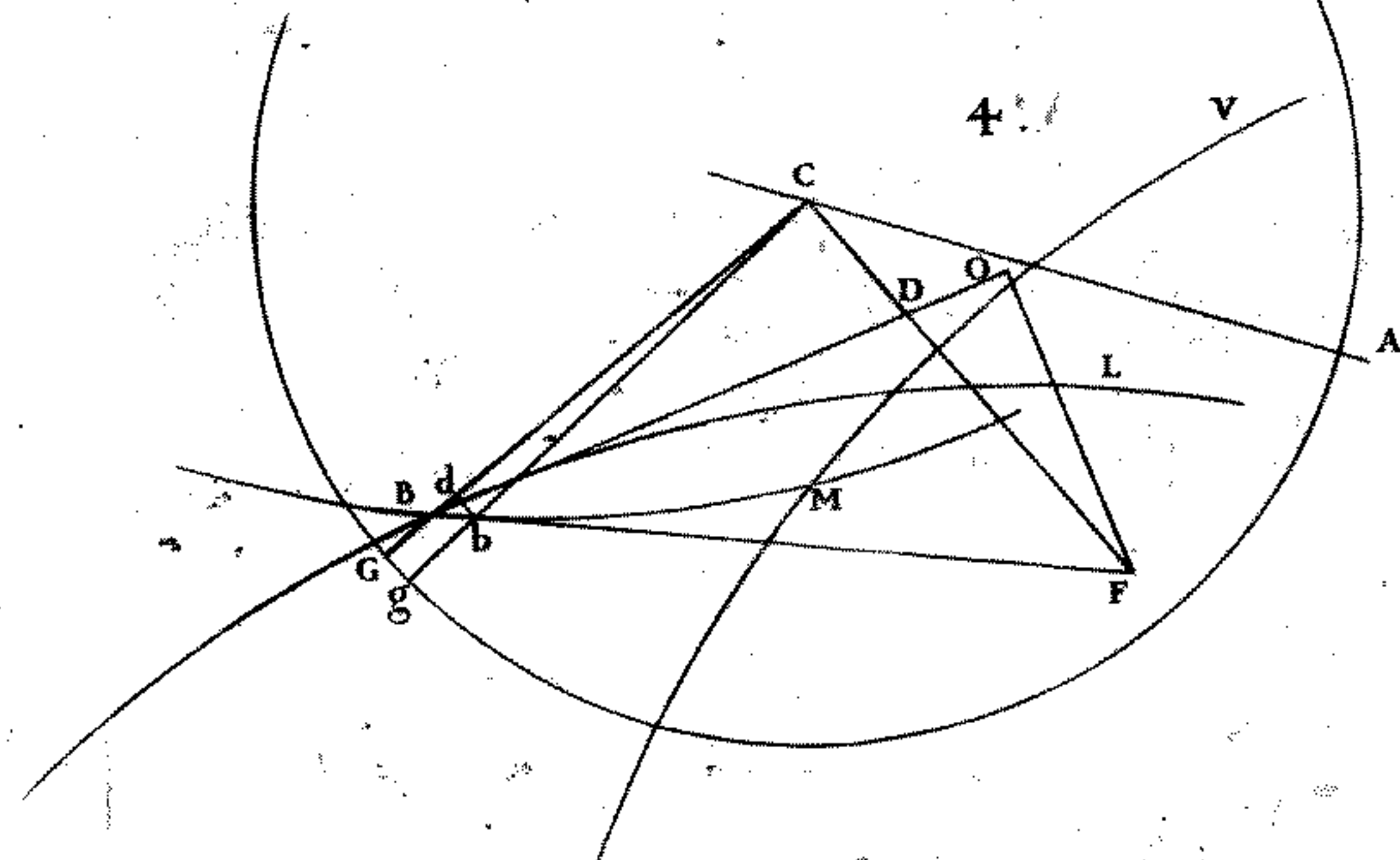
3.



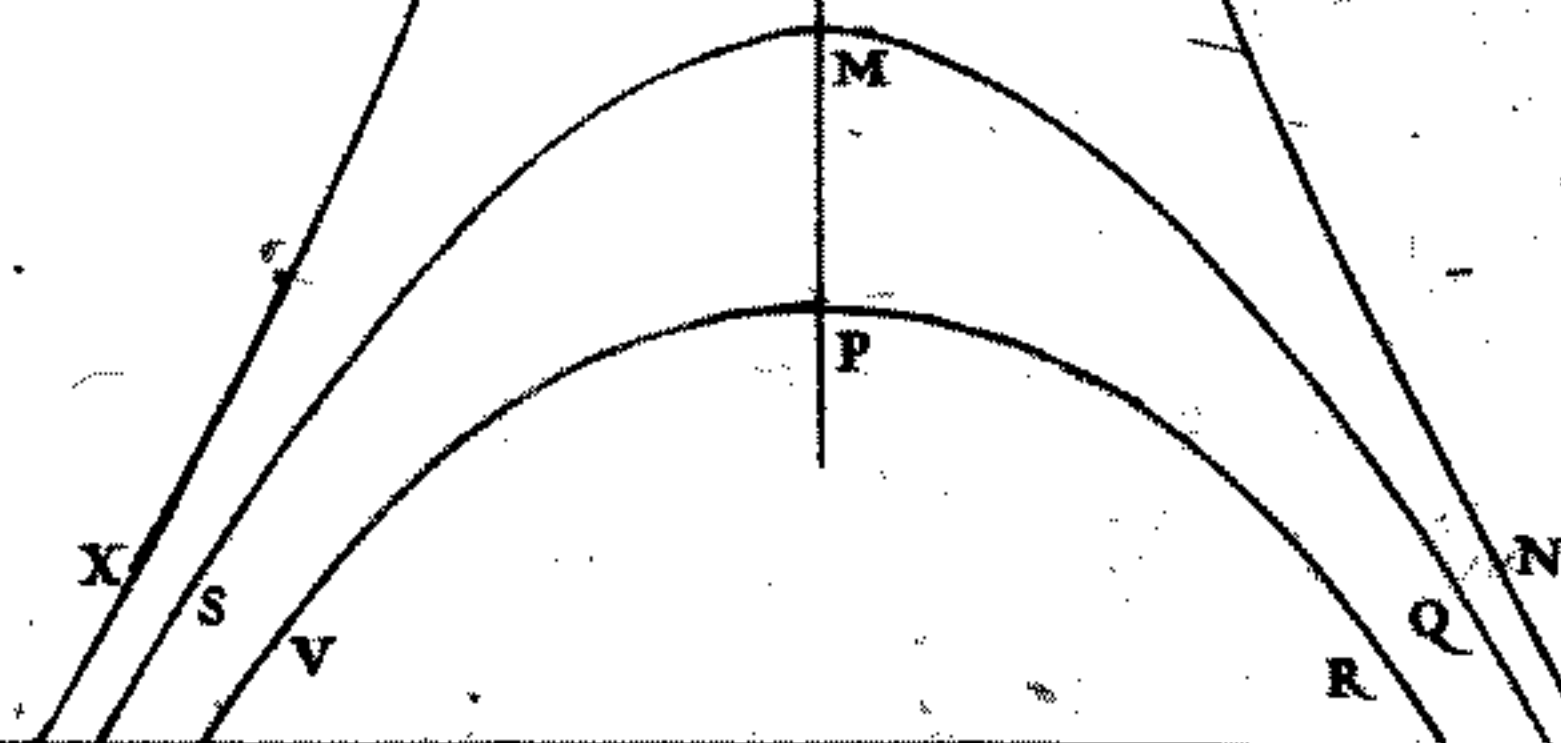
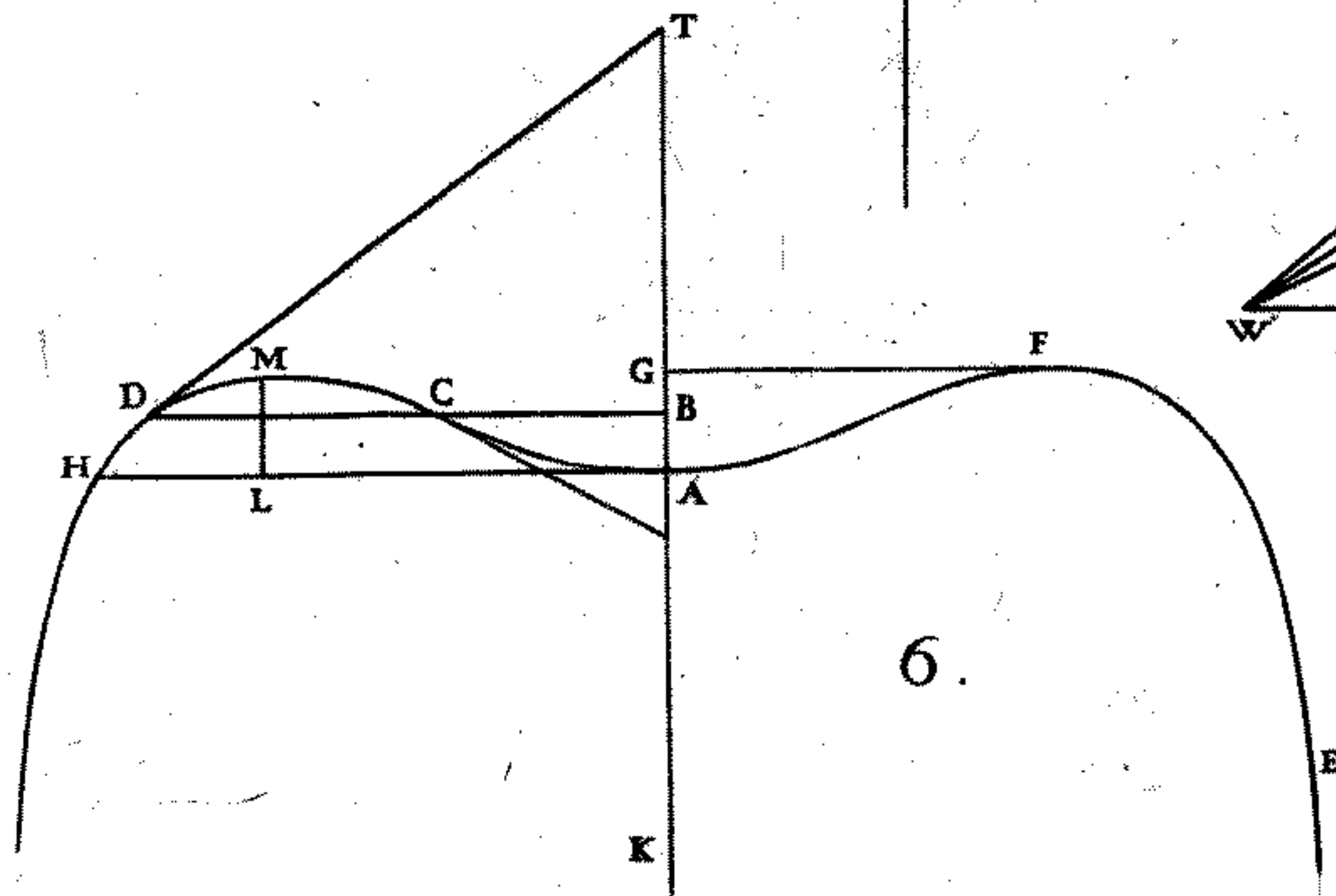
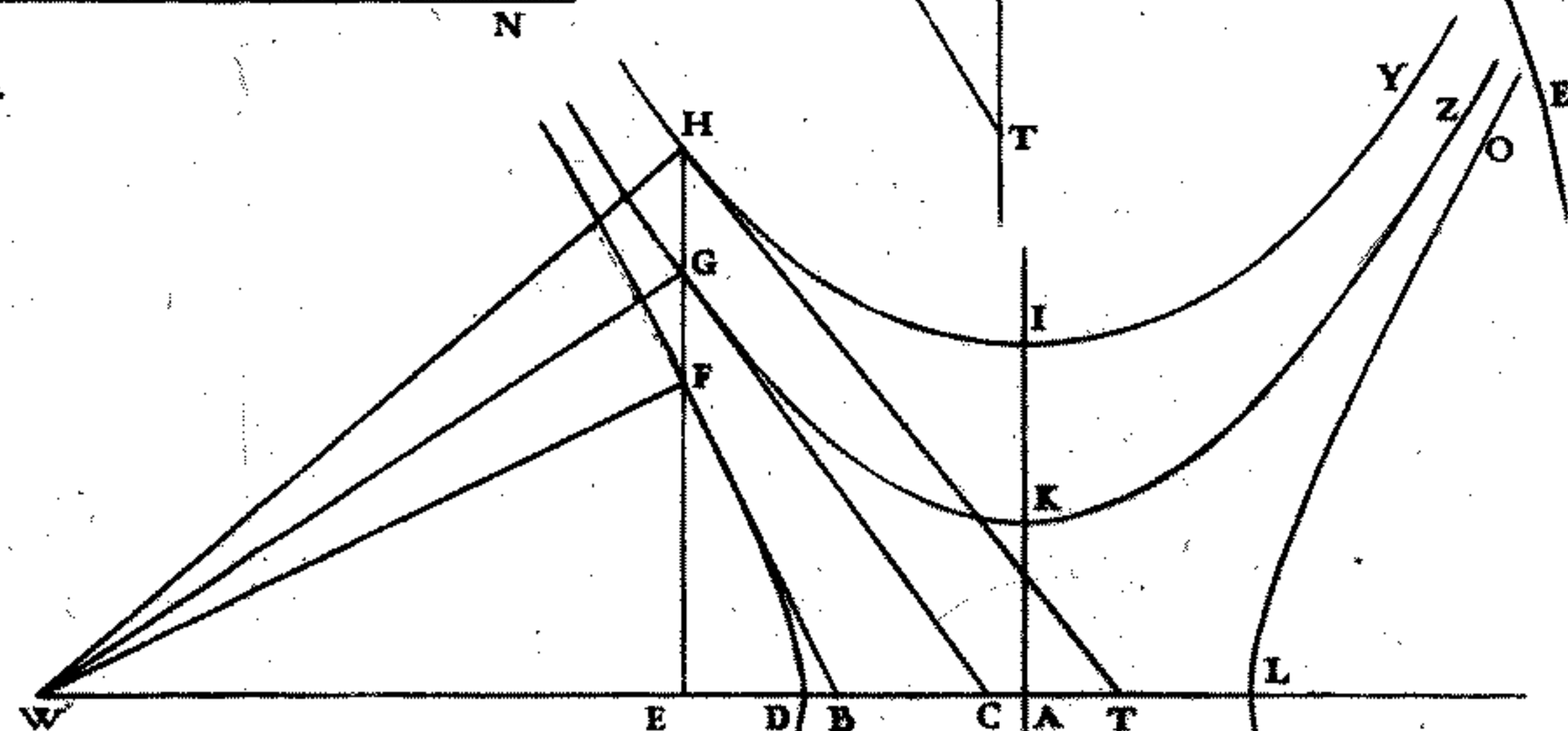
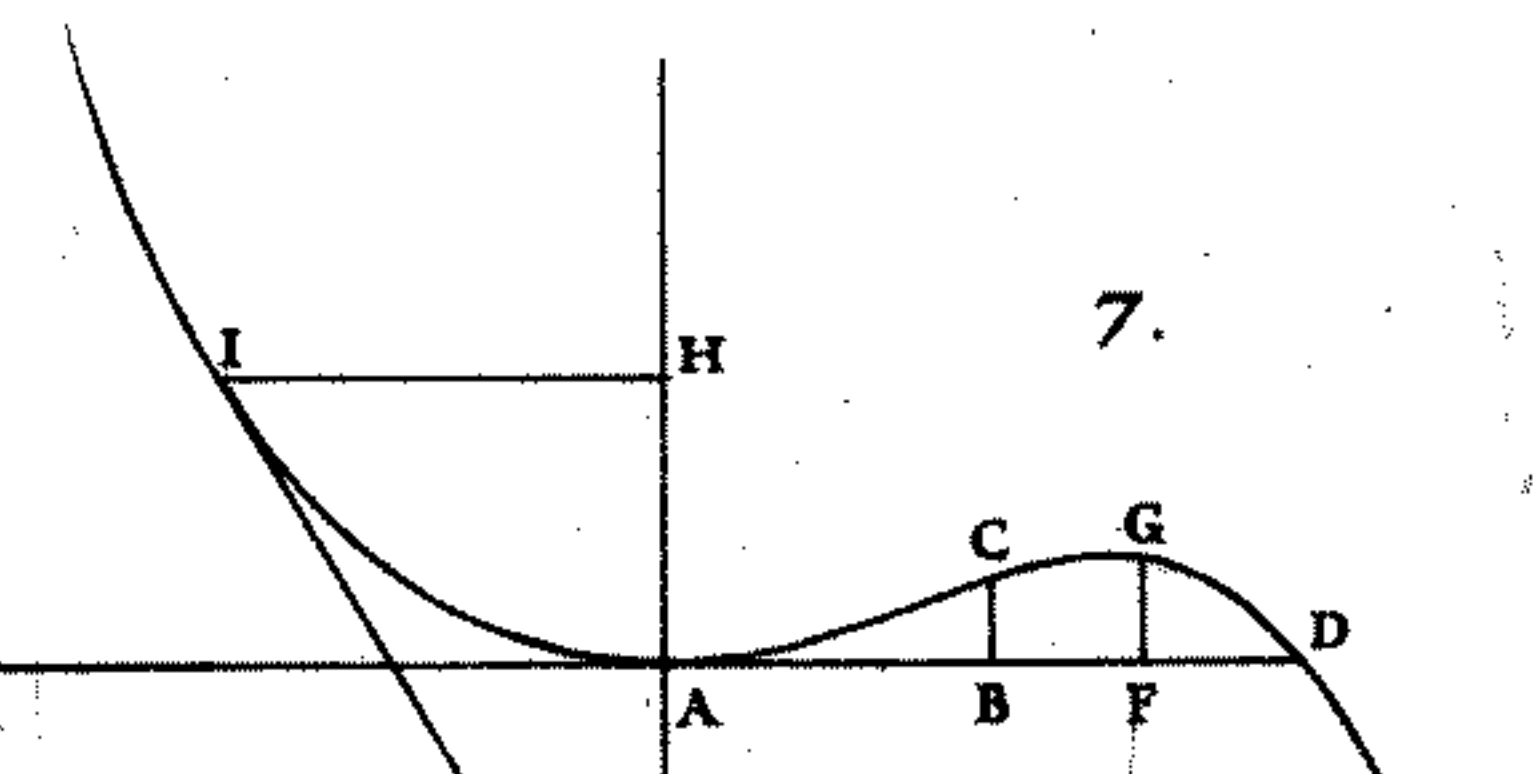
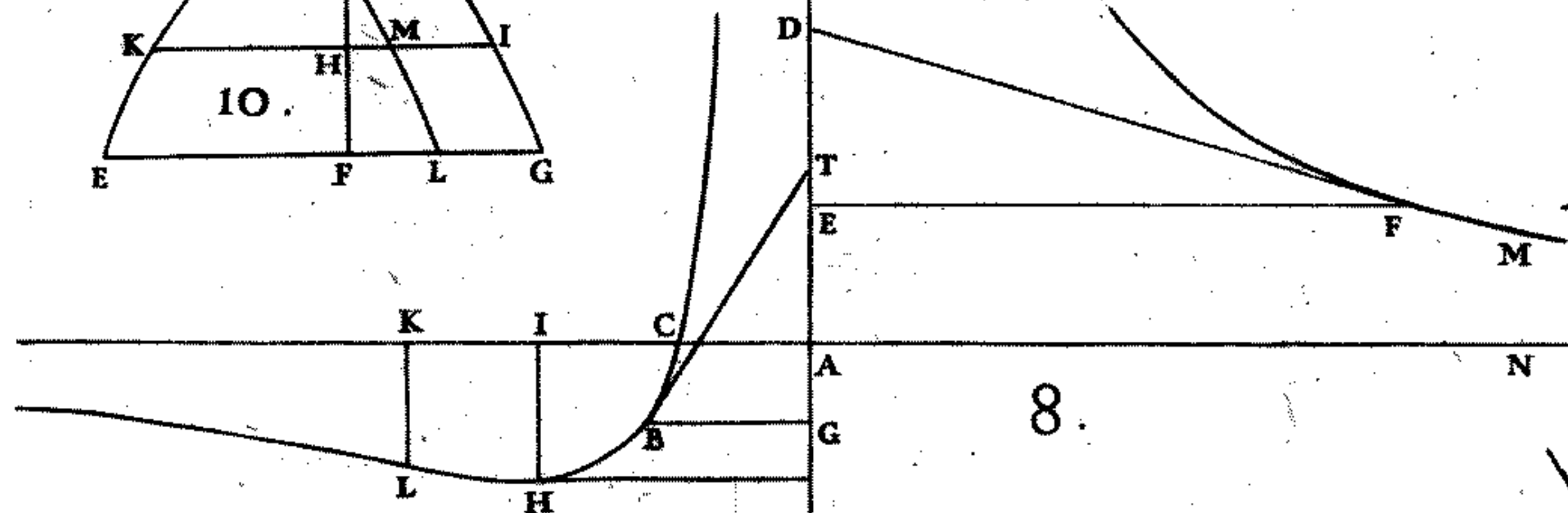
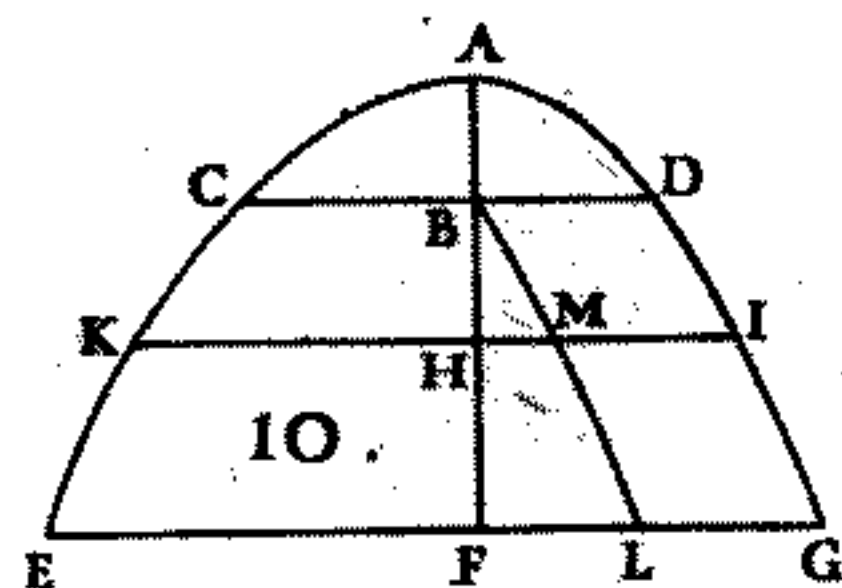
5.



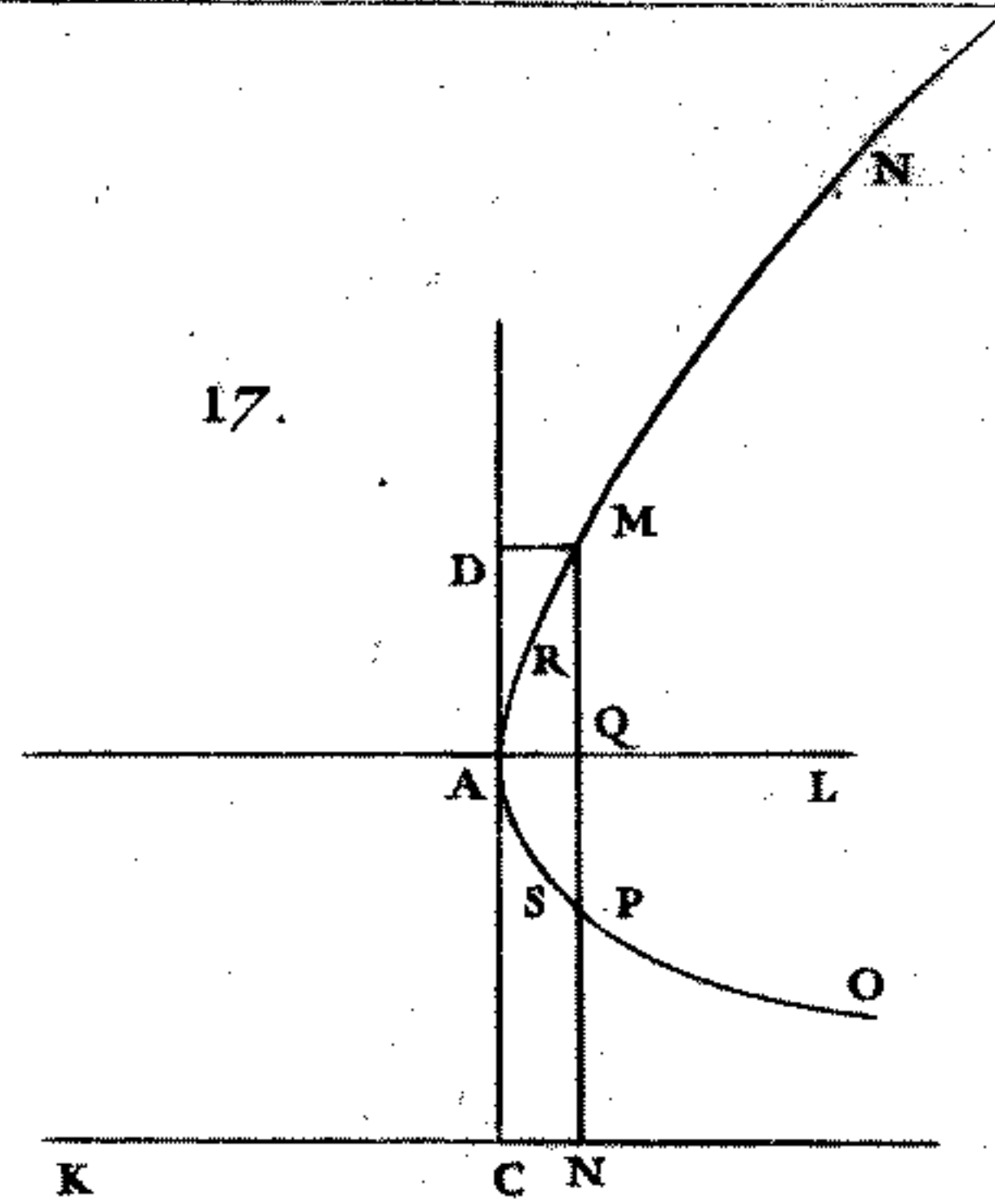
2.



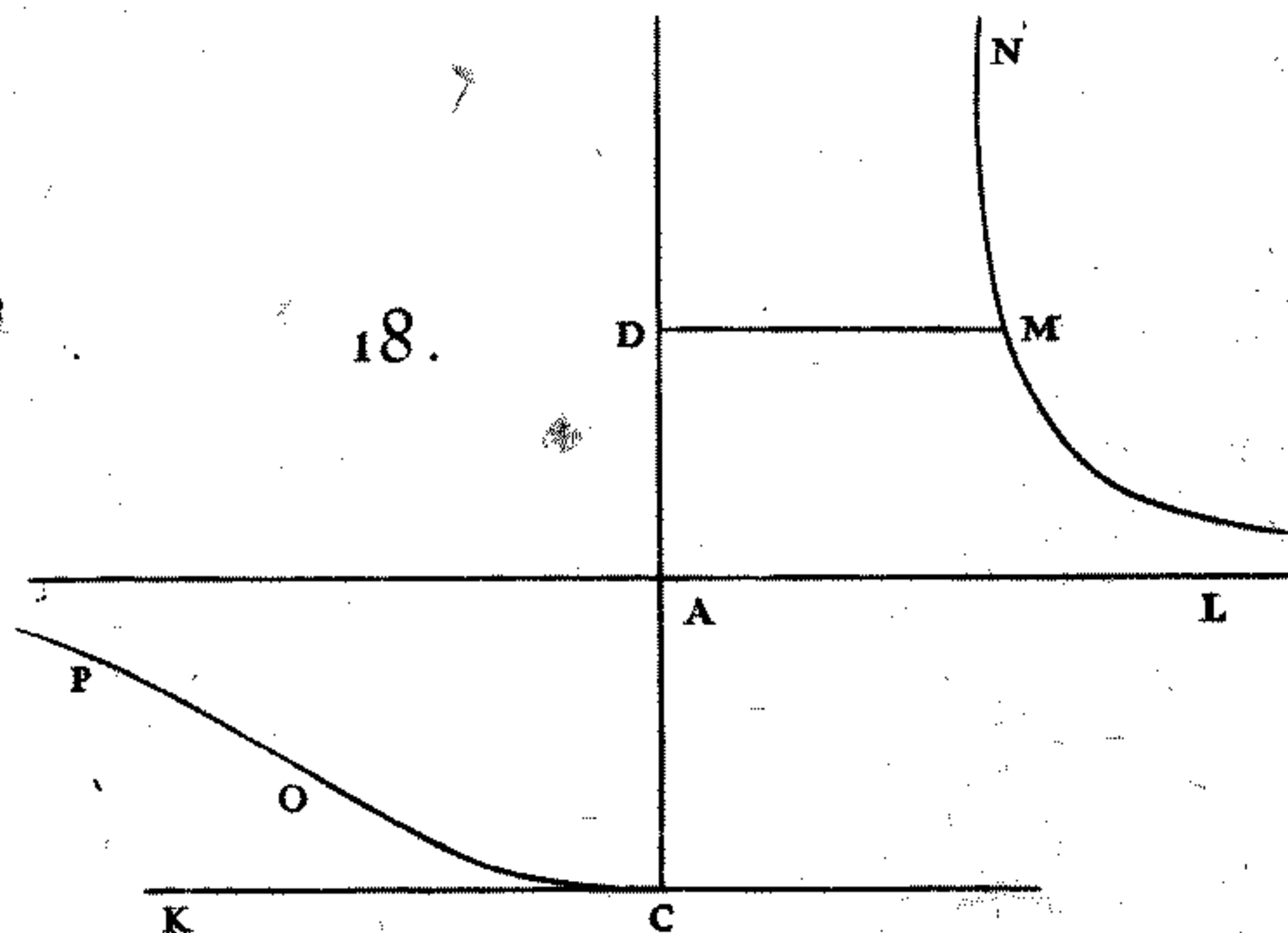
4.



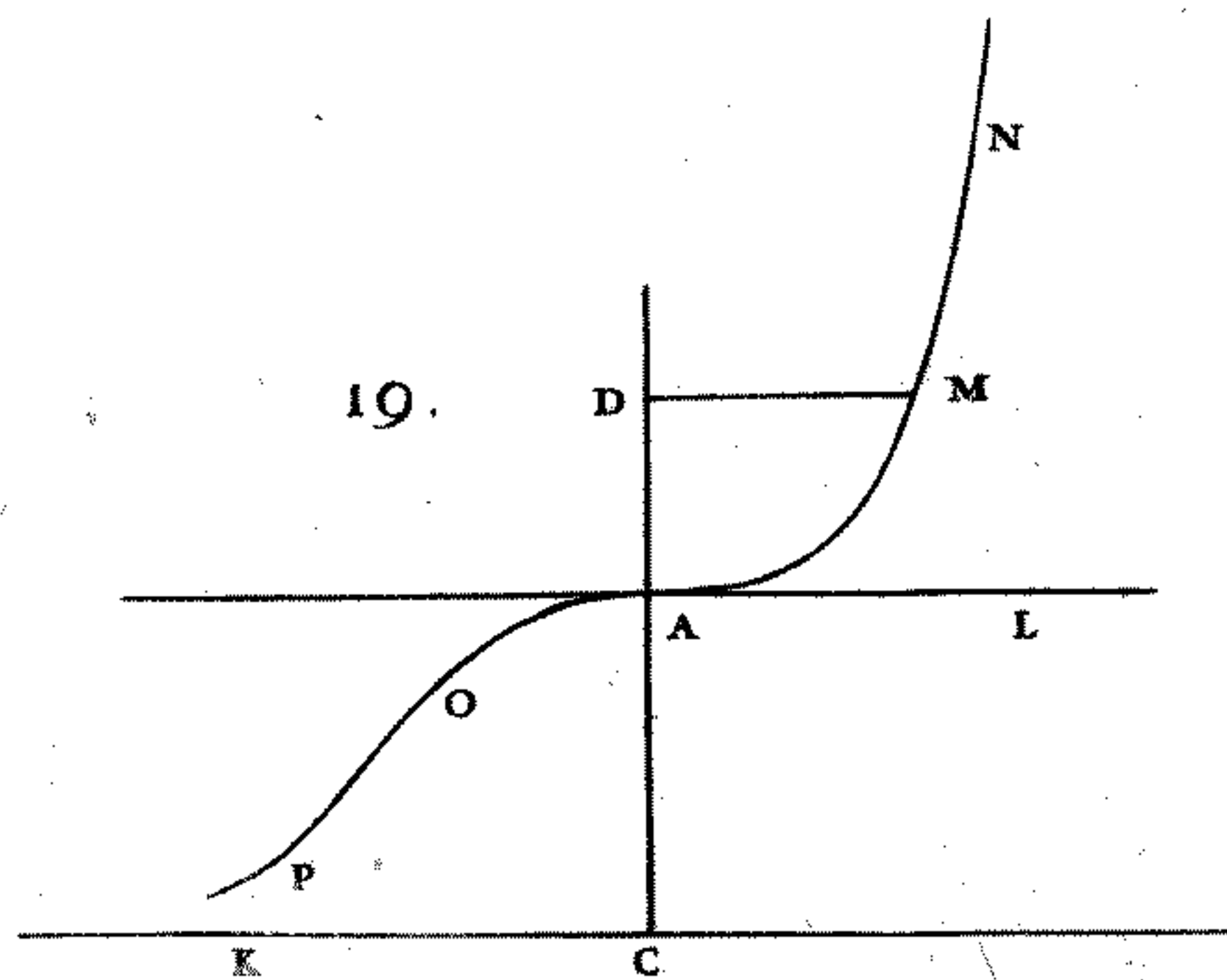
17.



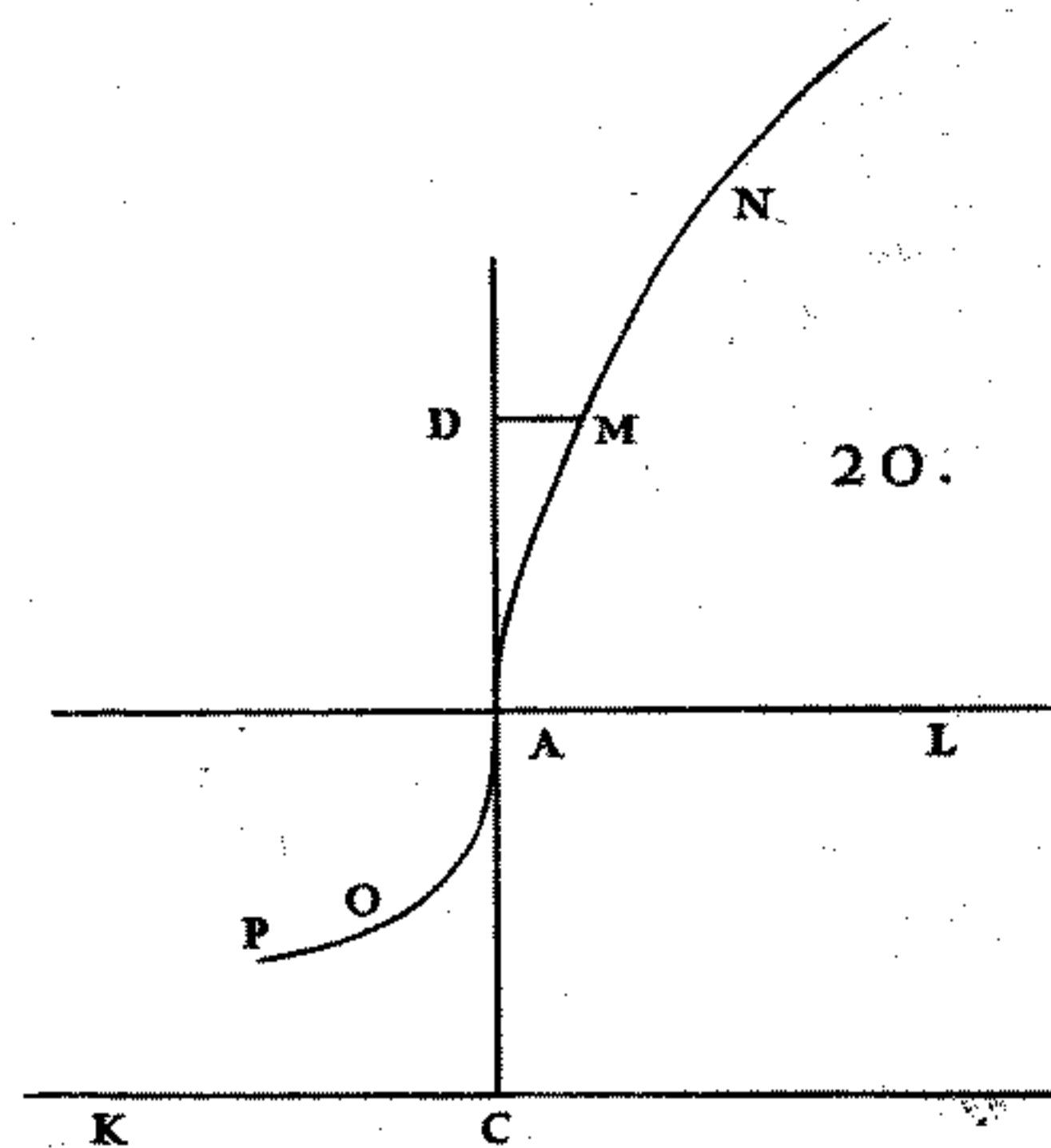
18.

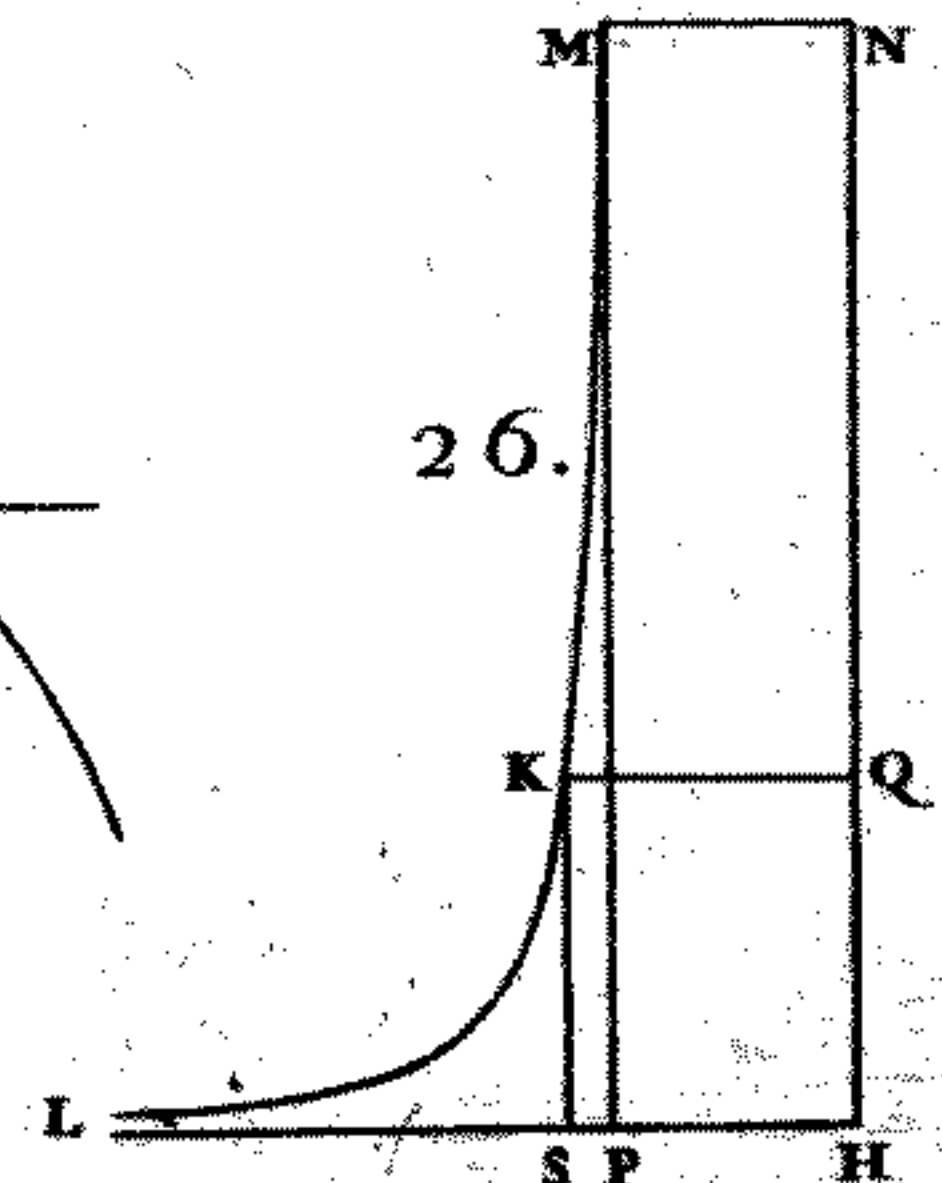
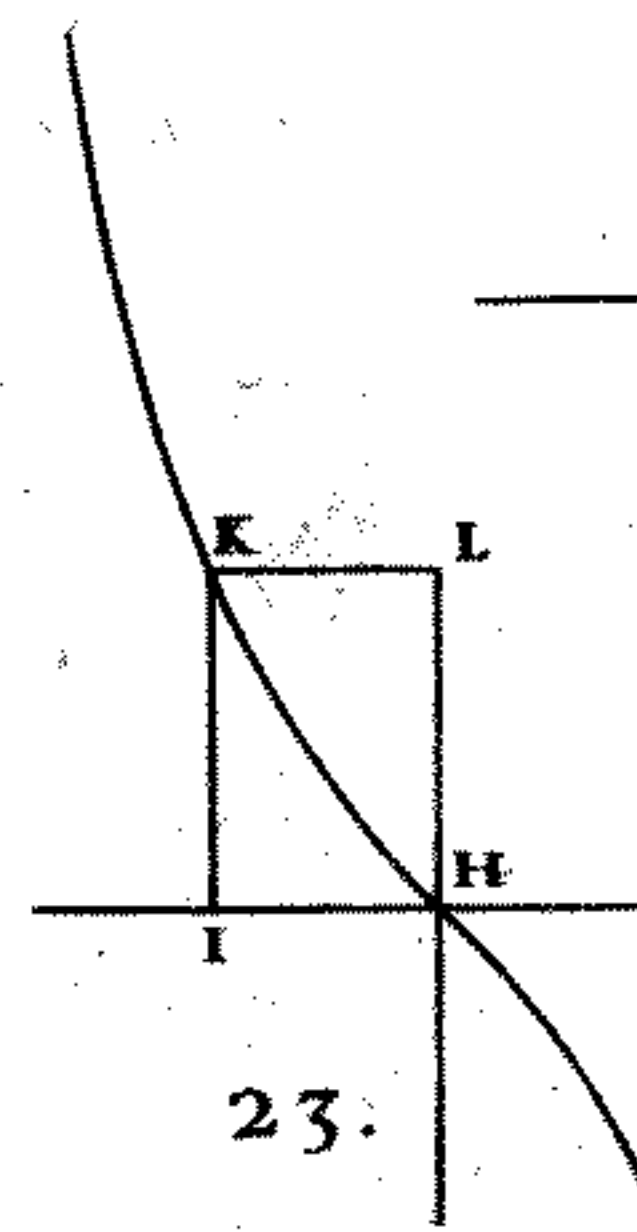
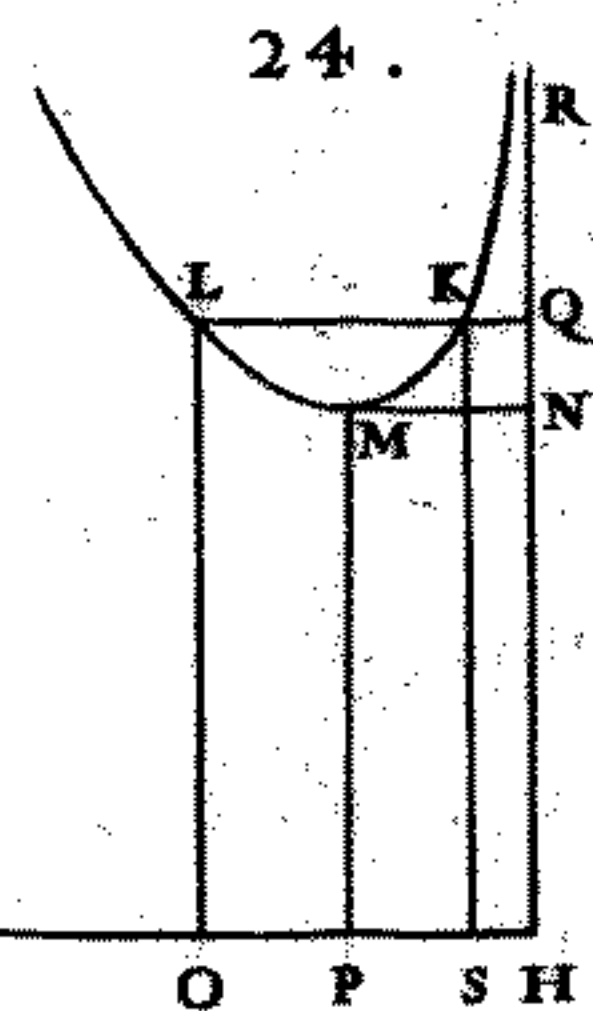
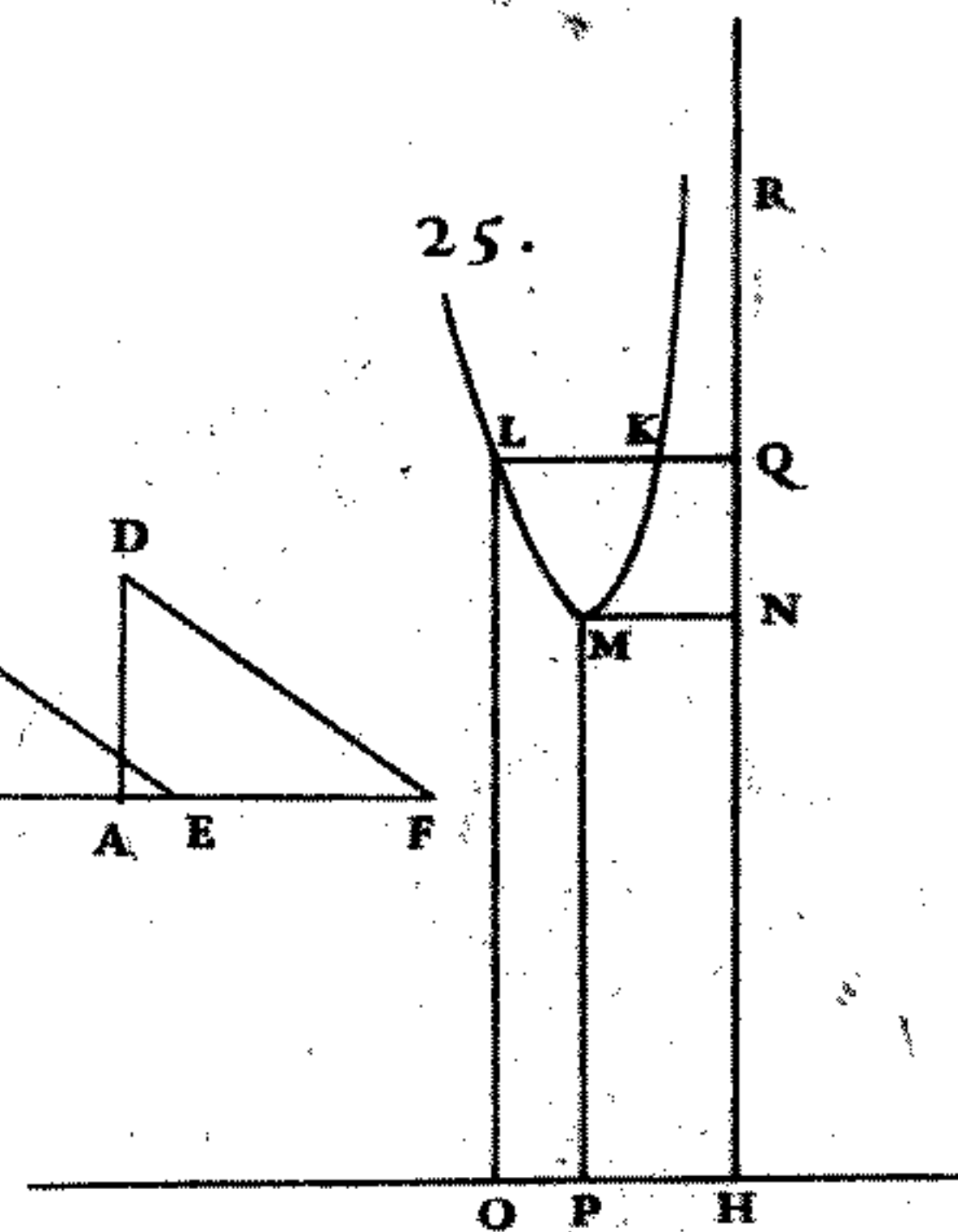
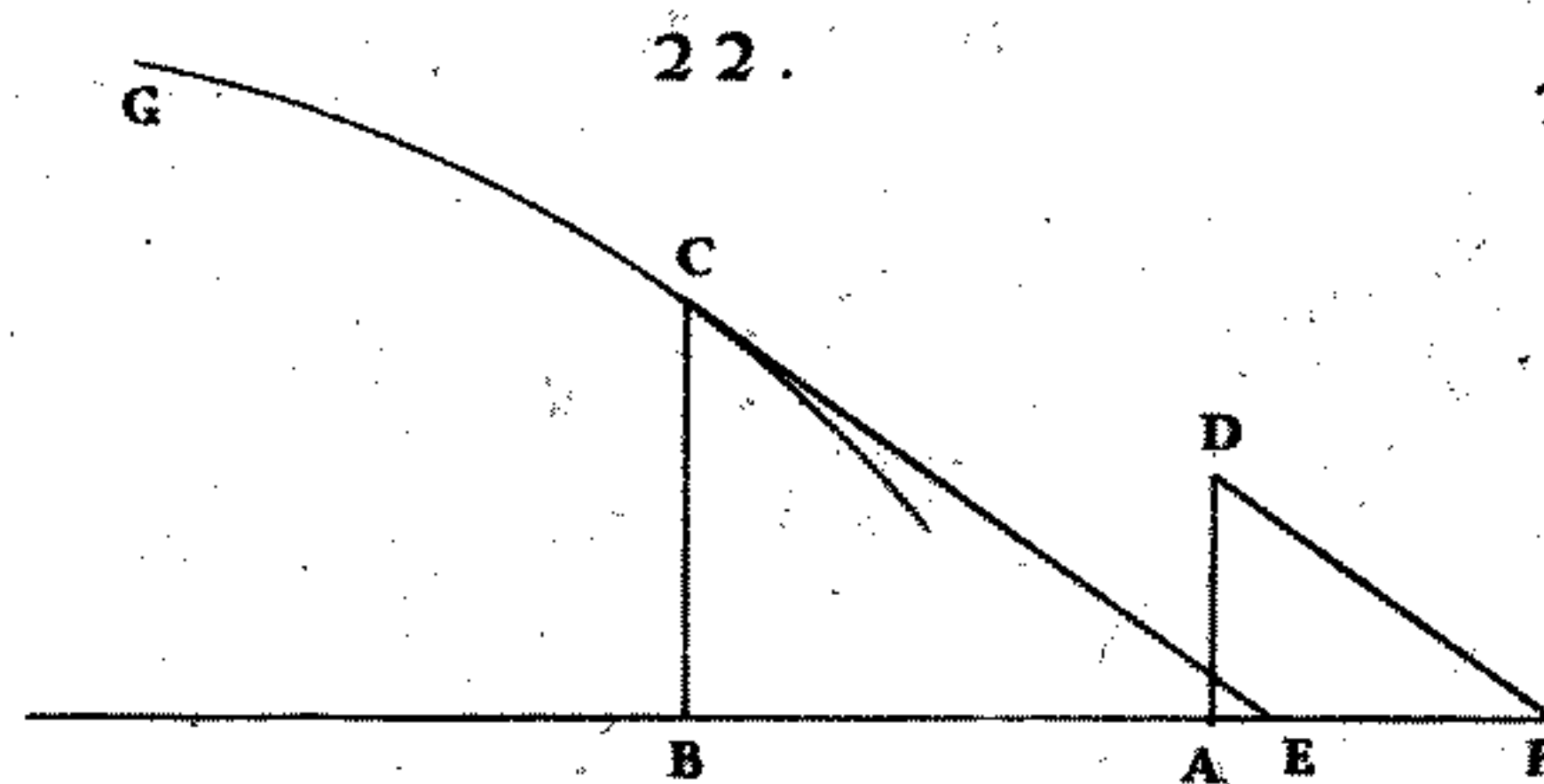
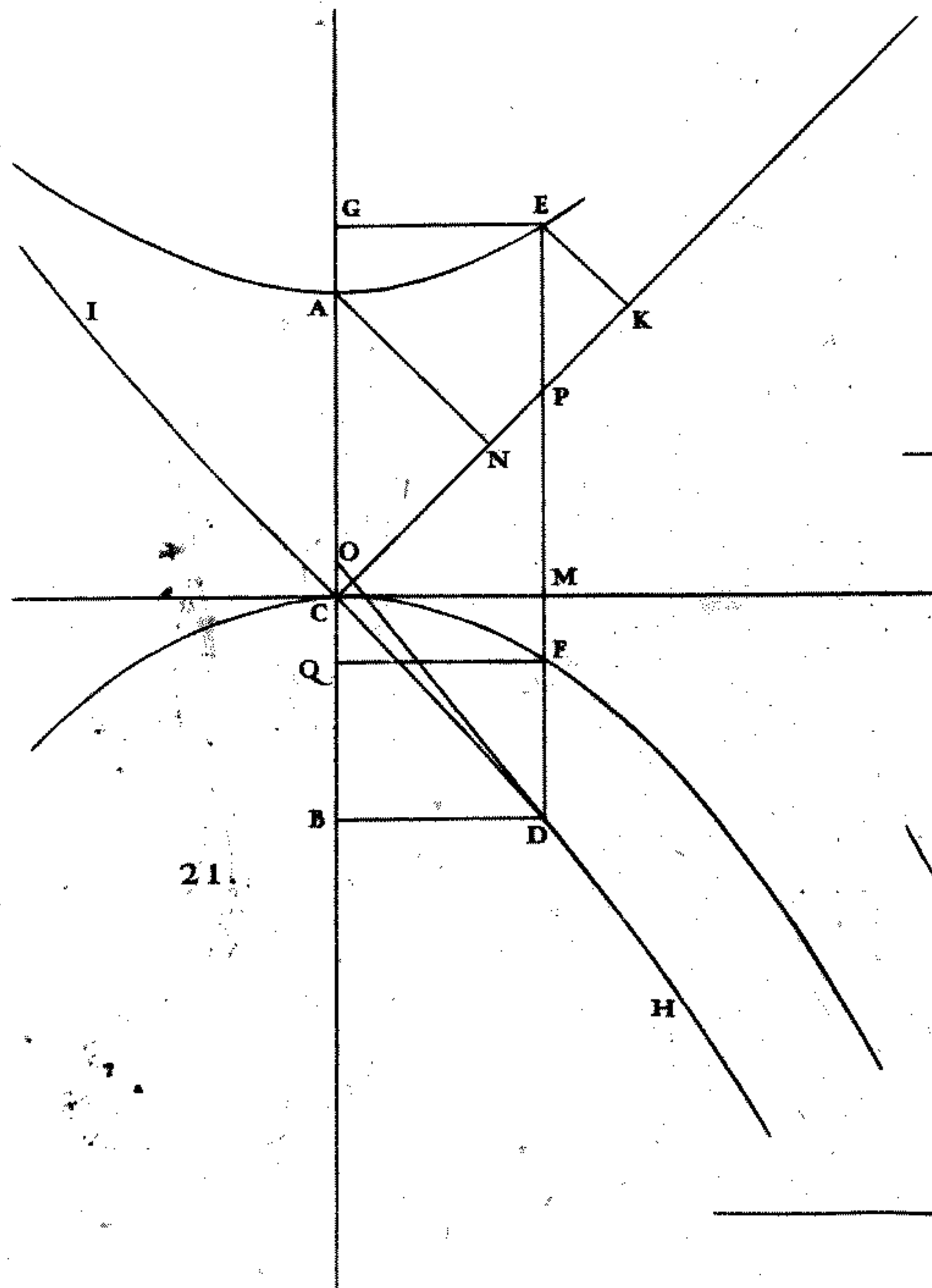


19.

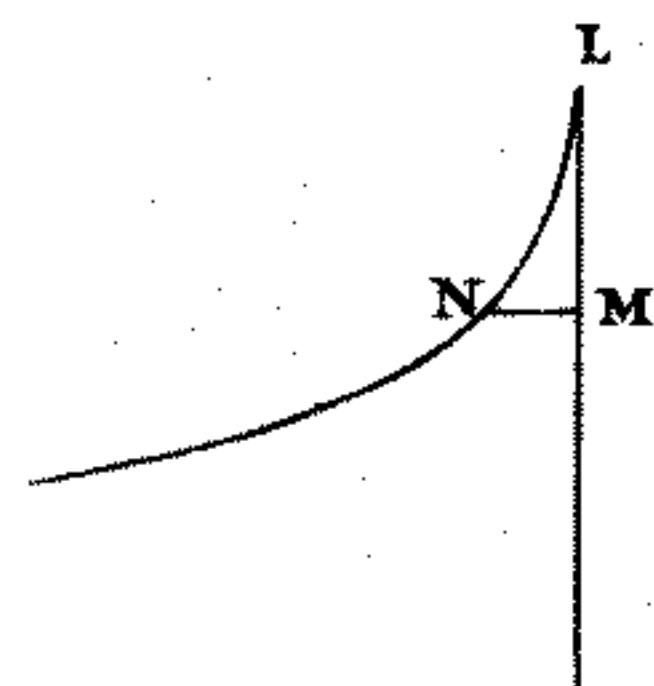
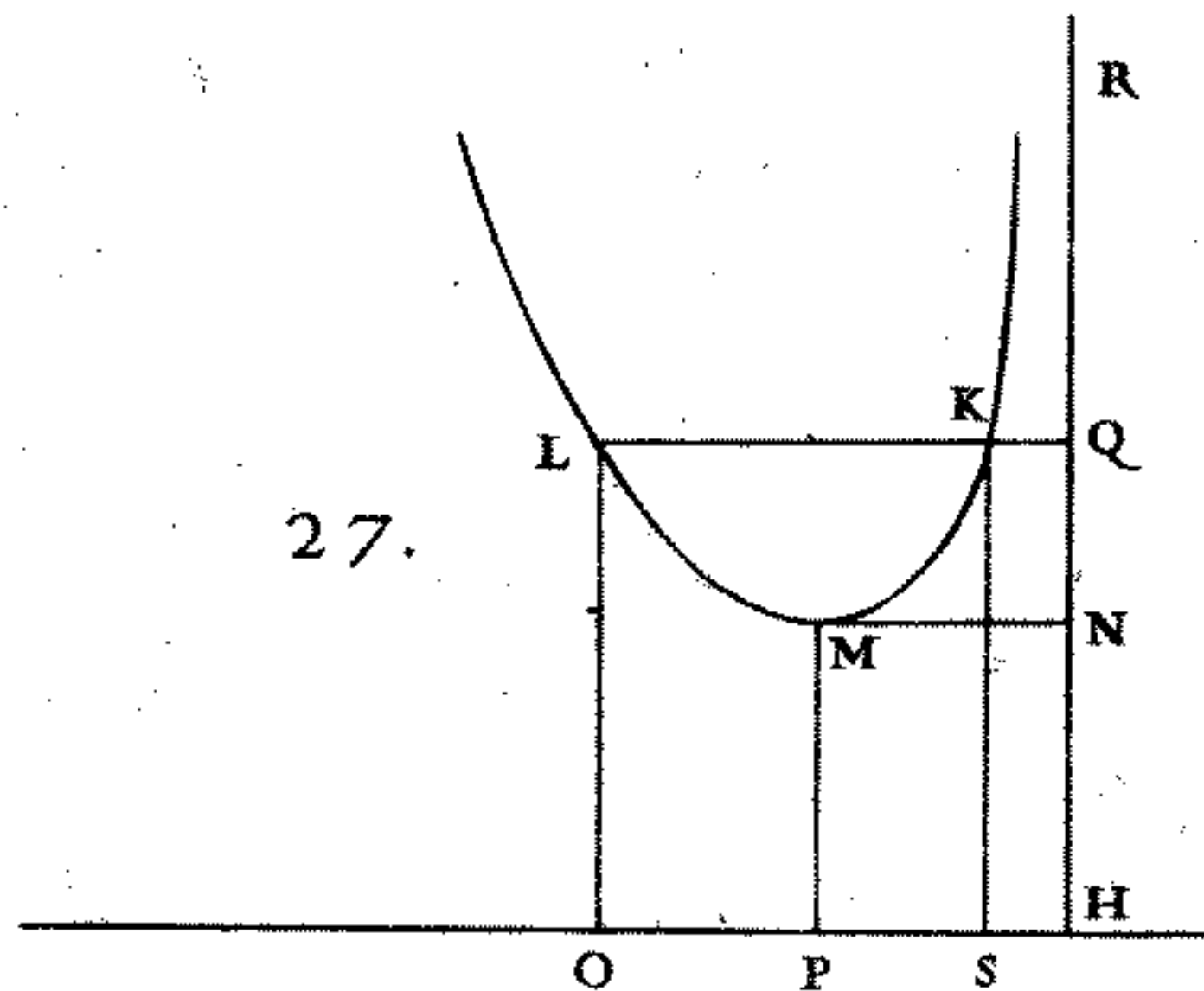


20.

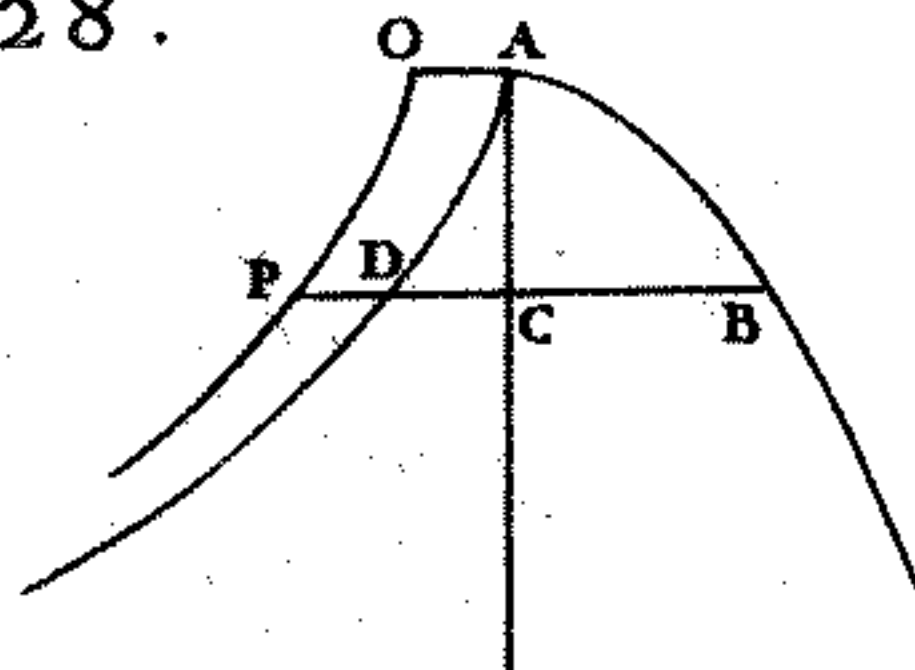
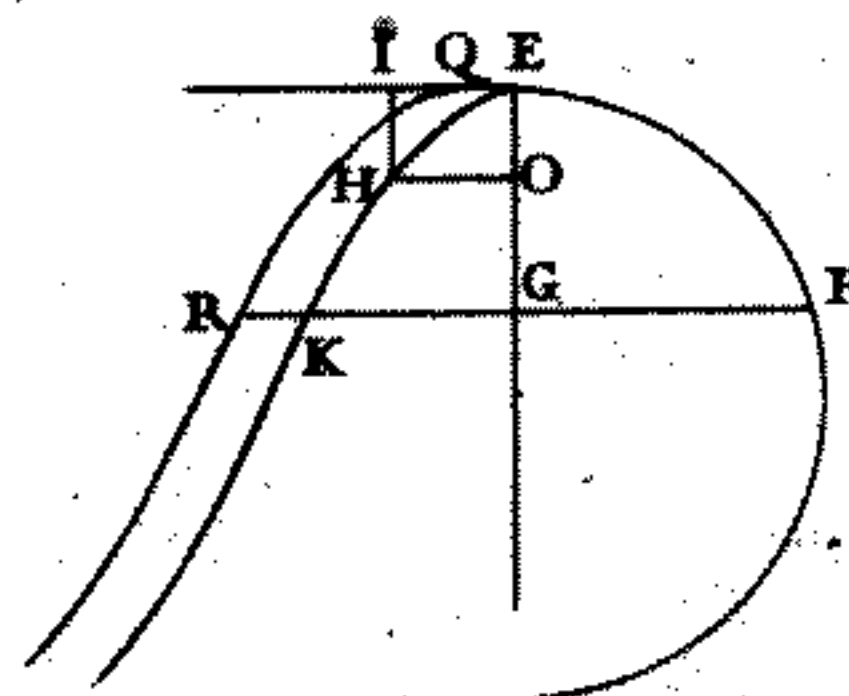




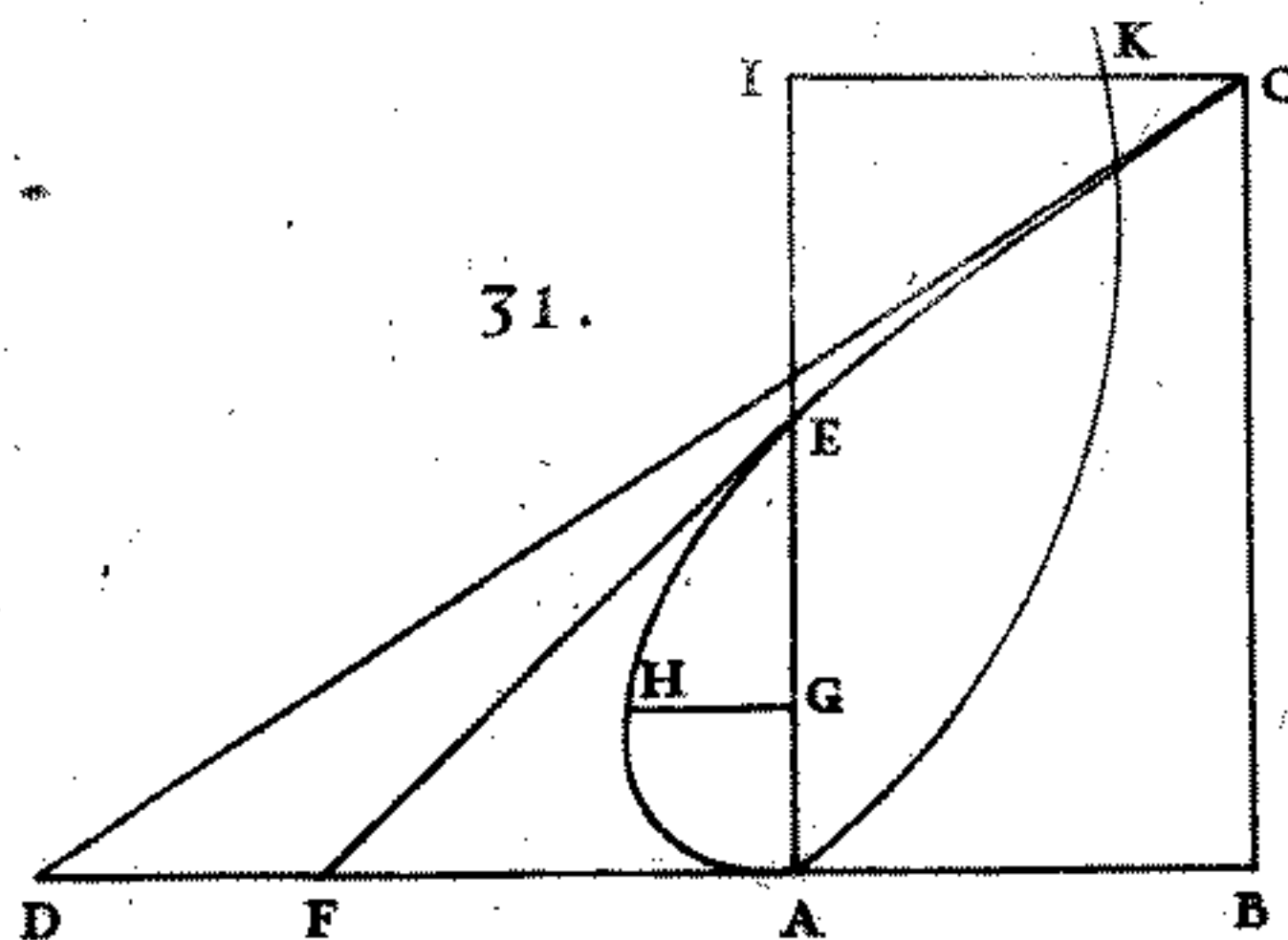
27.



28.

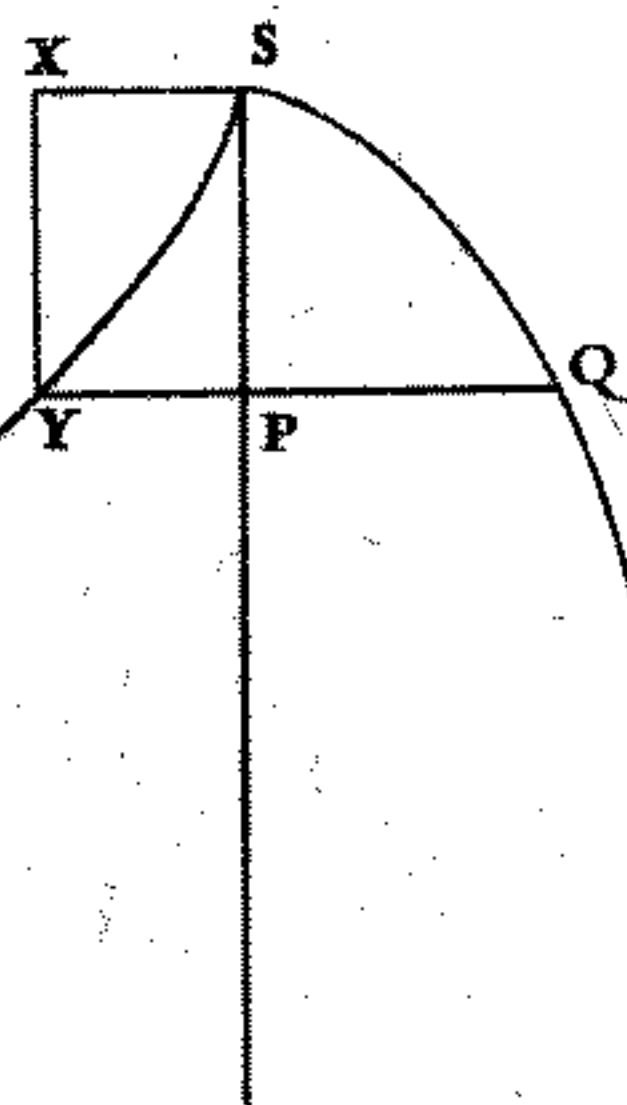
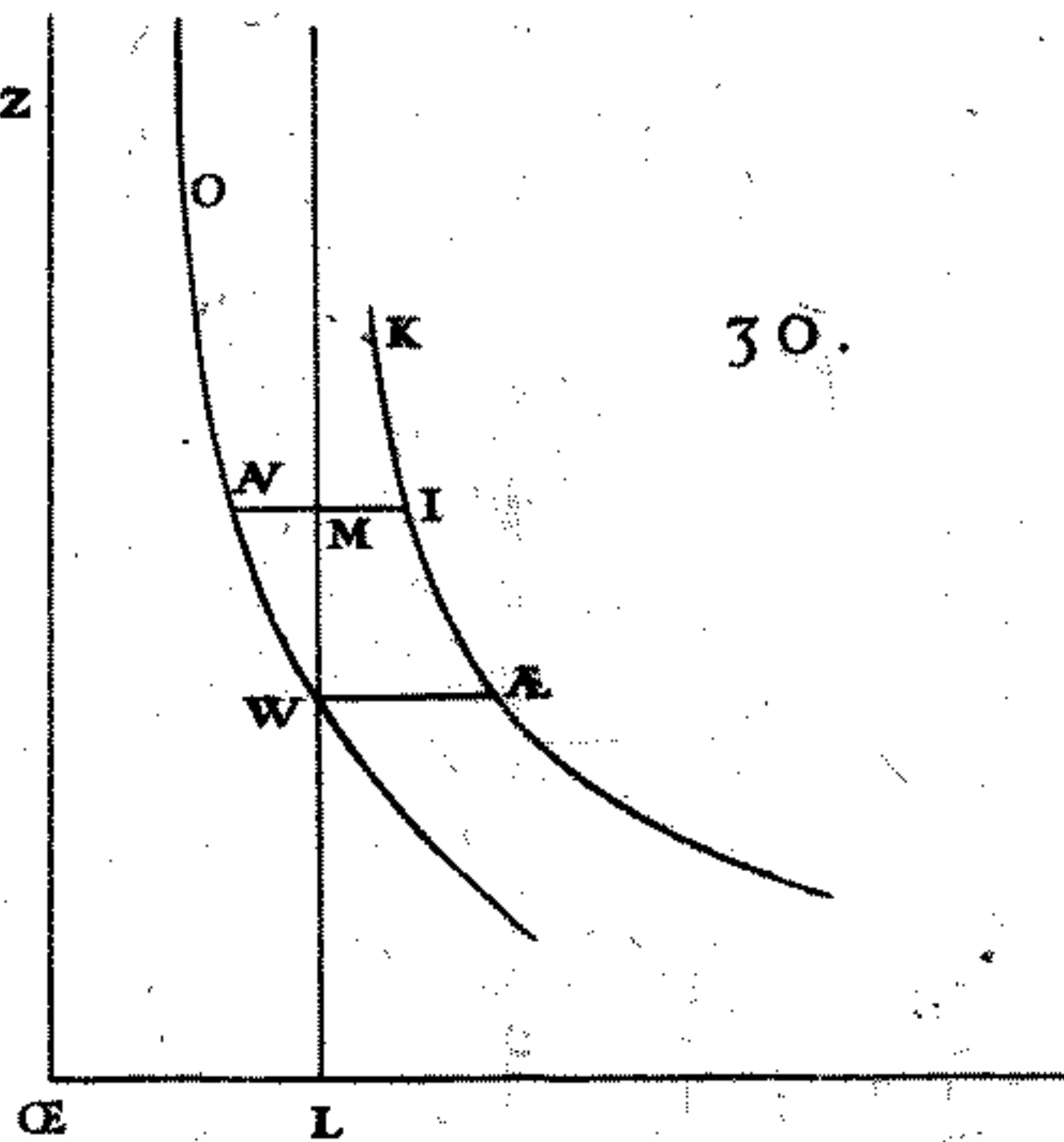


31.

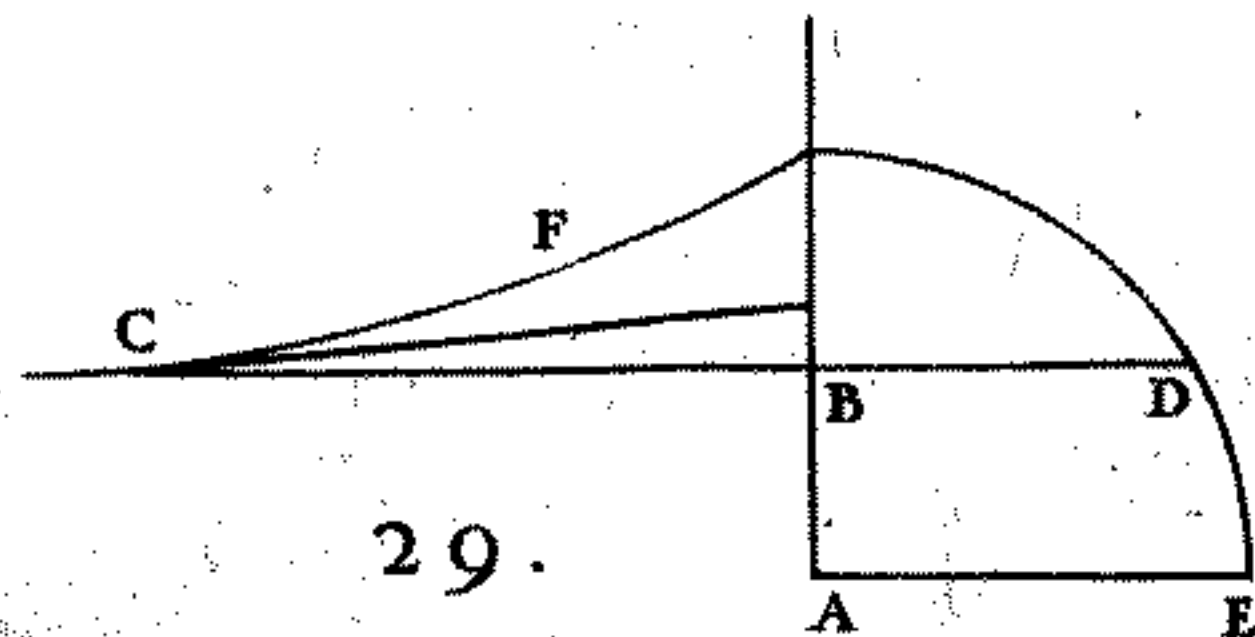


z

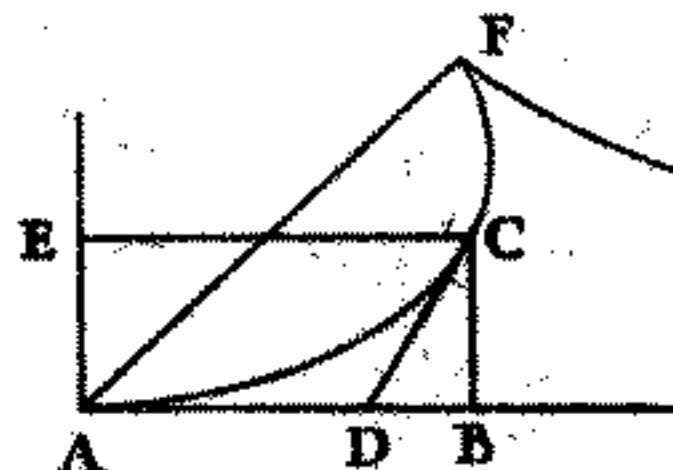
30.

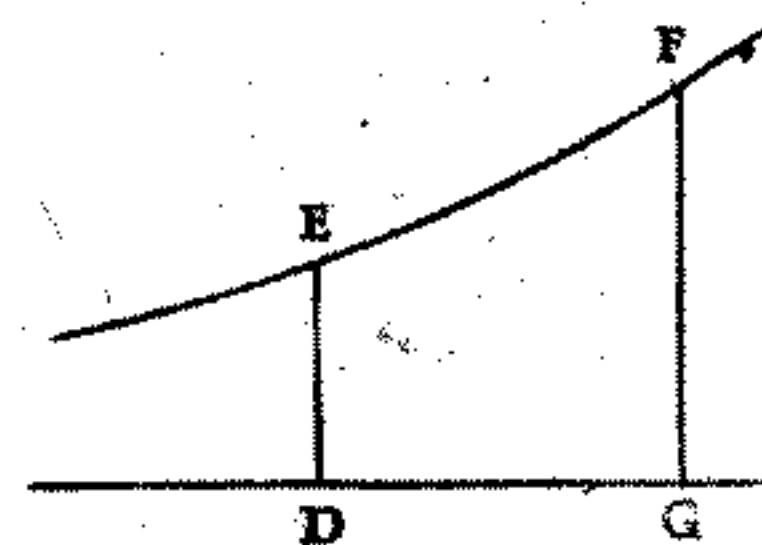
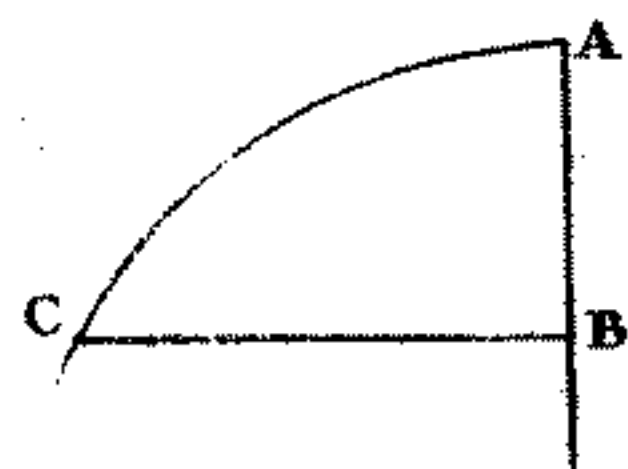
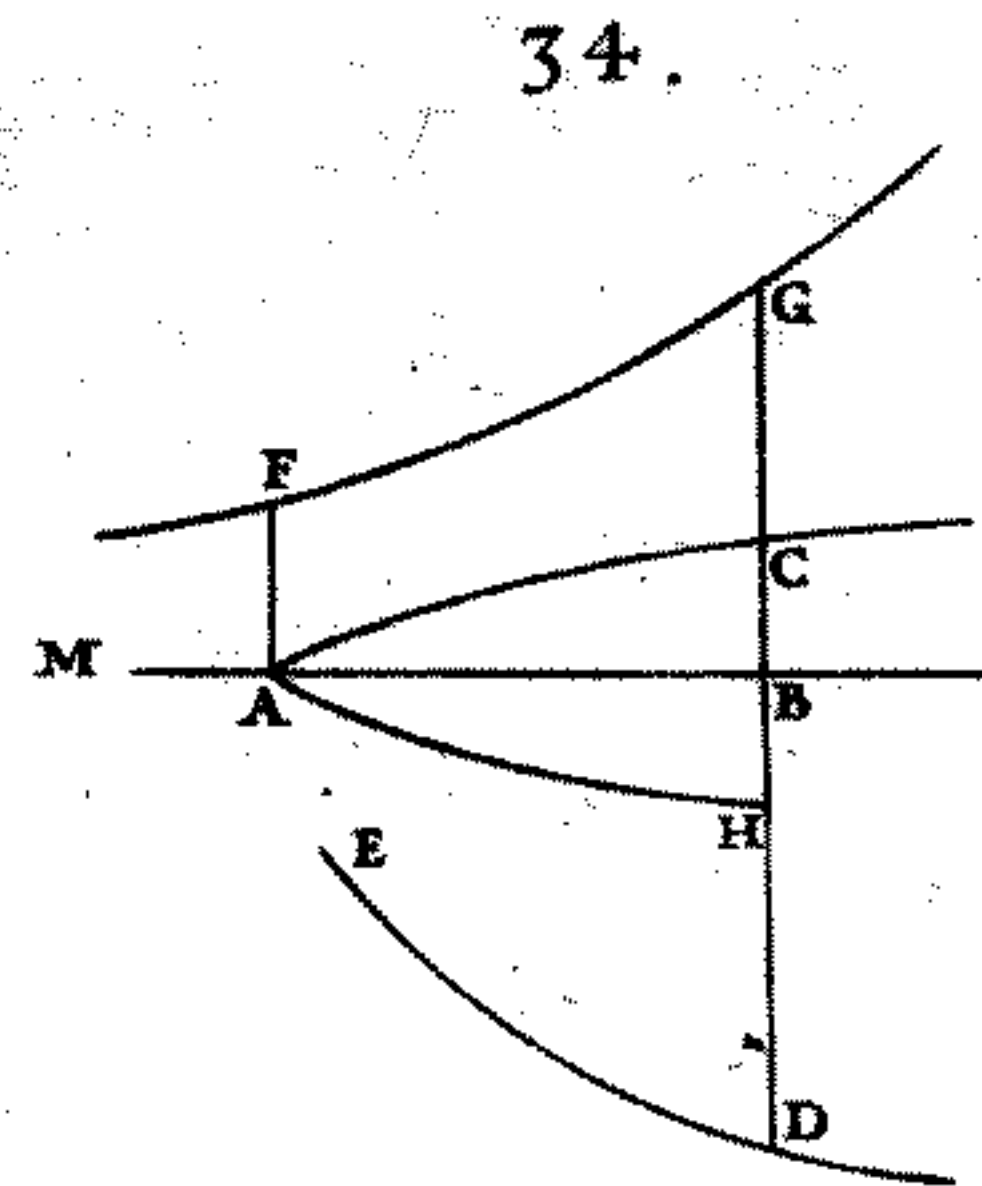
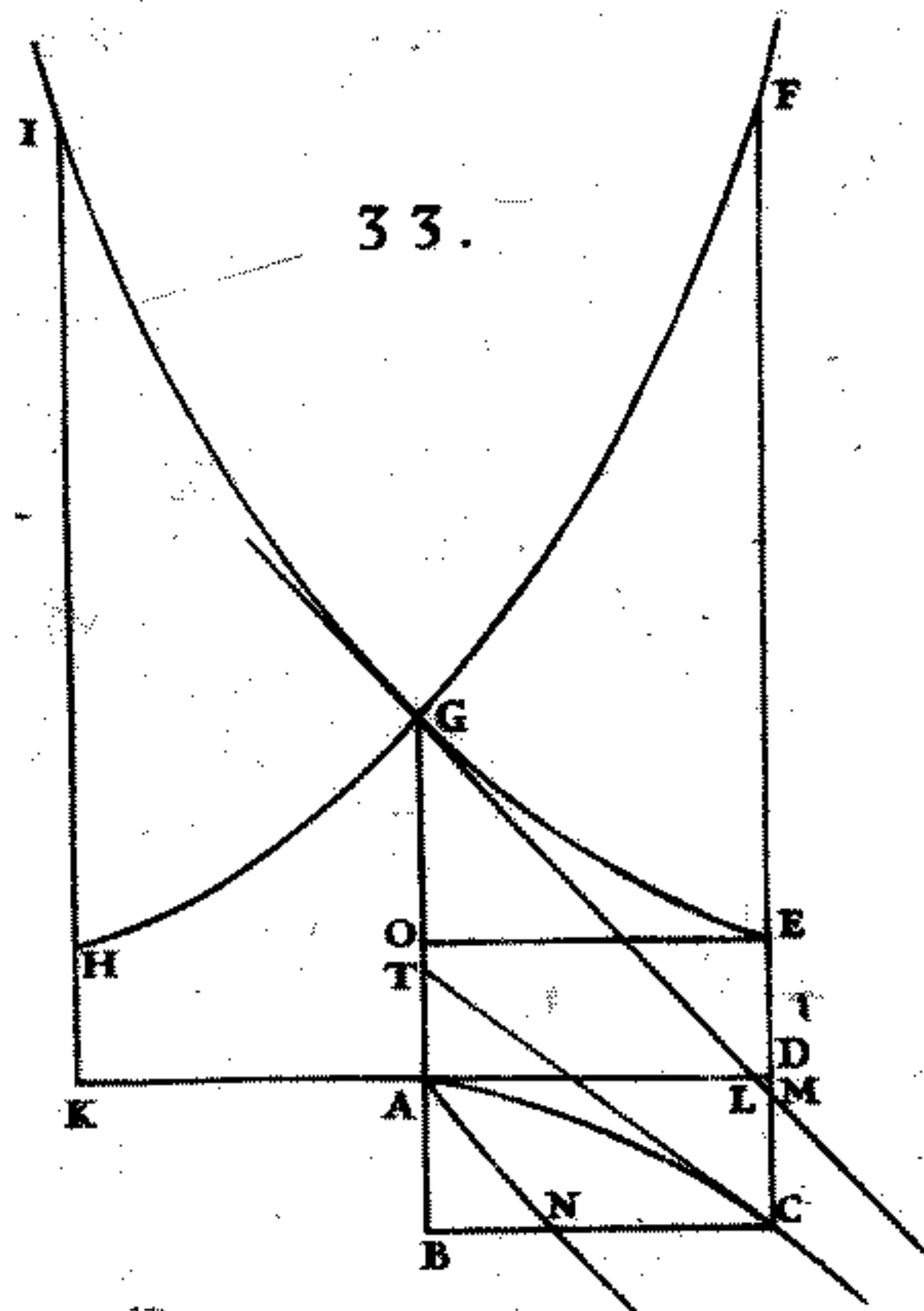


29.



32.





35.

