MATHEMATICÆ
NOVELLÆ
ALGEBRA

TOMO
III

# CORSO
## DI
# MATEMATICHE

### AD USO DEGLI ASPIRANTI
### Alla Scuola d' Artiglieria, e Genio di Modena

*TOMO TERZO*

*Contenente l' Algebra Elementare del Dottor PAOLO RUFFINI Professore di Matematica sublime nella Scuola medesima e nel Liceo di Modena, Membro della Legion d' Onore, e dell' Istituto Nazionale, Uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze ec.*

MODENA
Presso la Società Tipografica
MDCCCVII.

*A SUA ALTEZZA IMPERIALE*

*EUGENIO NAPOLEONE*

**DI FRANCIA**

VICERE D' ITALIA

ARCICANCELLIERE DI STATO DELL' IMPERO FRANCESE

PRINCIPE DI VENEZIA

ec. ec. ec.

# ALTEZZA IMPERIALE

L' eccelso munificentissimo Favore, che l' Altezza Vostra Imperiale compiacesi d'accordare alle Scienze, e l' alta Protezione, che si degna concedere a questa Reale Scuola del

Genio, e d' Artiglieria, mi fanno ardito a offerire all' Altezza Vostra il presente tenuissimo lavoro. Esso quantunque non si estenda oltre i semplici Elementi, ed opera sia di troppo debole Autore, e quantunque lo precedano nel Corso per gli Aspiranti alla Scuola l' Aritmetica, e la Geometria pure ha il vanto di potersi dire in esso Corso il primo Volume composto ad uso di questo Reale Stabilimento, poichè i due antecedenti contengono Opere già preesistenti, e al nostro Idioma ridotte. Ecco da ciò un nuovo titolo, per cui quest'Opuscolo si reputa in dovere di consacrarsi a Vostra Altezza Imperiale, crede, che a preferenza de' Volumi precedenti possa da lui solo aspirarsi a un tanto onore, e si lusinga, che la Clemenza dell'Altezza Vostra non isdegnerà di accordarglielo. Ornato esso così dell' Augusto Glorioso Nome di Eugenio Napoleone acquisterà quel pregio, che da sè medesimo non avrebbe ottenuto giammai, e i Giovani Aspiranti persuasi così

del beneficentissimo Patrocinio, con cui si degna l' Altezza Vostra di onorar questa Scuola, con più vivo ardore, e con attenzione più intensa percorreranno la carriera, che ad essa li conduce. Nella sicura speranza, che il generosissimo Cuore di Vostra Altezza non avvezzo che a beneficare si degnerà concedere tanta Grazia, fommi coraggio di umiliare ai Piedi dell' Altezza Vostra Imperiale le più sincere proteste di profondissimo rispetto, e della più sommessa venerazione.

Dell' Altezza Vostra Imperiale

*Umilissimo Ossequiosissimo Devotissimo Servitore*

Paolo Ruffini.

# DISCORSO PRELIMINARE.

L'esposizione delle sei Operazioni dell' Algebra e l' applicazione loro alla soluzione generale delle Equazioni de' primi quattro gradi formano il principal soggetto della presente *Algebra Elementare*. Siccome però il fine, a cui mirano precipuamente e queste operazioni, e la soluzione delle Equazioni, quello si è di metterci a portata, onde sciogliere i Problemi pratici, e onde riconoscere e scuoprire le proprietà più sublimi della Quantità; quindi è, che a me è sembrato assai conveniente, ed anzi necessario di accompagnare questi principj con que' mezzi, che sono atti al conseguimento dell' accennato fine. Ora ognun sa, che tra simili mezzi devonsi bensì annoverare i precetti, e le regole, per cui le operazioni di Calcolo, e le Equazioni si applicano allo scioglimento de' Quesiti pratici, ed allo scuoprimento delle ulteriori proprietà matematiche; ma assai più che questi precetti, e queste regole giova all' intento quell' abitudine,

che acquista l' Anima, mentre si applichi attualmente e replicatamente alla soluzione delle Quistioni, e mentre cominci fin da principio ad esaminare i diversi oggetti, che le si presentano, e si assuefaccia a meditar su di loro, e ad analizzarli. Ecco il perchè alle regole ed ai precetti ho nel presente Corso misti degli esempj frequenti, il perchè ho procurato giusta il metodo di *Clairaut* di dedurre dagli esempj medesimi la necessità delle operazioni algebriche, ed il perchè sì a queste, che a quelli unisconsi di quando in quando delle riflessioni atte a far meglio conoscere la loro giustezza, l' indole loro, e i diversi accidenti. Per simile guisa può il Giovine studente conoscere fin dai primi momenti lo spirito della Scienza: si evita a Lui d' incontrare quella noja, che troppo agevolmente lo sorprende, mentre è obbligato ad imparare una lunga Serie di precetti, e di operazioni, delle quali non vede mai alcun uso, nè alcuna applicazione; e addestrato infine ad esaminare, e a cercare con esattezza la verità, in seguito potrà meglio apprendere le parti della Scienza più elevate, e potrà meglio difendersi dagli equivoci

dagli errori nelle più profonde indagini Matematiche. Mi lusingo, che nel corso dell' Opera si riscontreranno delle riflessioni non affatto prive di novità, e che nuovi, se non erro, potranno dirsi un metodo generale di estrarre le radici numeriche di qualunque grado (n. 269, 271); la determinazione di alcune proprietà dei numeri (XI...XXI n. 92); una maniera, onde sciogliere le Equazioni indeterminate di 1.° grado aventi più di due incognite (n. 156...159); e qualche metodo di facilitazione nella pratica di alcune delle operazioni.

Doveva l' illustre mio Maestro, e Predecessore il Professore *Paolo Cassiani*, la cui Memoria più tenera e riconoscente rimarrà sempre mai scolpita nel più profondo del mio cuore, e la cui perdita risenton cotanto le Scienze, la Patria, ed i Buoni, per l' estensione e la profondità delle cognizioni, per l' Ingegno sommo, e per l' aureo Carattere, che lo adornavano: doveva Egli, dissi, per destinazion del Governo dare in luce un Corso d' Algebra elementare per gli Aspiranti a questa Reale Scuola del Genio, e d' Artiglieria; ma pel fatale Decreto, che tutti comprende irrevocabil-

mente i Mortali, essendo stato a Lui tolto di p
ter ciò eseguire, il Governo ha graziosamente surrogato a quello il Corso presente. Troppo, il confesso, e pel Pubblico, e per gli Aspiranti è di danno un simile cambio; ma ai difetti, che accompagnano questi Elementi, e che si deggiono alla mediocrità dell' Autore, ed alla sollecitudine, con la quale in alcune parti sono stati formati, supplirà la voce dell' abile Precettore, che si compiacerà d' insegnarli. In essi si contengono articoli, i quali si giudicano non così necessarj a quelli, che si presenteranno alla Reale Scuola del Genio: vengono questi perciò marcati nell' Indice con degli asterischi, acciocchè gli Aspiranti, mentre lo vogliano, li possano tralasciare, avvertendo però, che, quando ciò facciano, gioverà poi loro riprenderne lo studio in appresso. Siccome poi agli Aspiranti stessi necessario è di conoscere le prime applicazioni dell' Algebra alla Geometria, le serie algebriche, e le nozioni prime de' Logaritmi; verranno queste cose esposte in un'Appendice, che in altro Volume seguirà la presente Algebra Elementare.

# Della Quantita', e del Numero

## in generale.

1. *Def.* 1. Col nome di *Quantità* intendesi tutto quello, che è composto di parti: i numeri perciò, la estensione non sono che quantità.

2. *Cor.* Essendo la quantità composta di parti, è evidente, che potrà sempre diminuirsi, col toglierle alcuna delle parti, che la compongono, e potrà al contrario aumentarsi con l'aggiungerlene delle nuove. È dunque la quantità capace di aumento, e di diminuzione.

3. *Def.* 2. Qualunque quantità o si considera come divisa attualmente in parti, o no. Nel primo di questi due casi essa dicesi quantità *discreta*, e *continua* nel secondo. La quantità per esempio nove metri è una quantità discreta, perchè si considera come divisa attualmente in nove parti, ciascuna delle quali è un metro; l'ampiezza di un campo non diviso in alcun luogo, somministra evidentemente l'esempio di una quantità continua.

4. *Def.* 3. Fra tutte le quantità di una medesima natura una sempre ne stabiliscono i Matematici di grandezza costante, e determinata, a cui riferiscono tutte le altre. Ora questa quantità di grandezza costante e determinata già scelta a principio, alla quale le altre tutte della stessa natura si riferiscono, essa è che denominano *unità*.

5. *Scol.* 1. Poichè questa quantità, che abbiamo ora detta unità non va soggetta ad altre condizioni, se non se a quella di essere costante, e determinata, ed all'altra di essere della stessa natura con le altre quantità, che a lei si rapportano;

quindi ne segue, che la determinazione della sua grandezza è arbitraria. Stabilita essa però una volta deve conservarsi costantemente la medesima, quando mai le circostanze non ne esigessero un cangiamento, cangiamento per altro, il quale non potrebbe mai eseguirsi senza avvertirne precedentemente. Da questo arbitrio dipende la varietà grande delle unità rapporto per esempio alla estensione, ai pesi, ec. fra le Nazioni diverse.

6. *Def.* 4. *Parte aliquota*, o *misuratrice* di una quantità dicesi quella, la quale replicata più volte esatte la uguaglia; in caso diverso si chiama *Parte aliquanta*. Così il tre è parte aliquota del dodici, e il cinque parte aliquanta del nove.

7. *Cor.* Potendosi una quantità qualunque spezzare in quante si vogliono parti uguali fra loro, ed essendo evidentemente ciascuna di queste parti una aliquota della quantità data: quindi ne viene, che una quantità qualsivoglia, e però ancora l'unità (n. 4) può sempre considerarsi come l'aggregato di tante parti aliquote. Così consideriamo l'unità Metro come l'aggregato di dieci di quelle sue parti aliquote, che diconsi Palmi.

8. *Def.* 5. Col nome di *Numero* intendiamo l'espressione del rapporto geometrico, che ha una quantità data a quell'altra a lei omogenea, che si è presa per unità (n. 4) ossia l'espression delle volte, che questa seconda quantità, od una delle sue parti aliquote contienesi nella prima. Se la quantità data contiene l'unità un numero esatto di volte, allora il numero corrispondente dicesi *intero*. Che se abbiasi un'espressione, dalla quale s'indichi quante volte una quantità contiene una delle parti aliquote dell'unità, essa chiamasi *Frazione*, oppure Numero *rotto*, o *fratto*.

9. *Scol.* 2. Mentre si determina quante volte l'unità, od una delle sue parti aliquote contienesi

in una quantità data, è chiaro, che questa quantità viene nel tempo stesso a dividersi attualmente in tante parti corrispondenti: ma l' indicata determinazione quella si è, da cui dipende il Numero (*n. prec.*), e l' attual corrispondente divisione costituisce la quantità discreta (n. 3). Dunque i Numeri esprimono sempre delle quantità discrete.

10. *Def.* 6. Quando insieme coi numeri pronunciansi quelle particolari determinate unità (1. 4), da cui essi dipendono; allora i numeri appellansi *concreti*. Che se si pronunciano, facendo astrazione dalle unità indicate, allora essi chiamansi *astratti*. Sarà perciò astratto il numero assoluto cinque, saranno concreti i due, cinque libbre, sette uomini. Se due o più numeri si rapportano ad unità della medesima specie, appellansi *omogenei* fra loro; in caso diverso diconsi *eterogenei*.

11. *Scol.* 3. Per rappresentare i Numeri, son necessarii dei segni. Ora possono i numeri avere valori particolari e determinati, come chi dicesse sei cavalli, otto volte, e possono esprimere dei valori indeterminati, ed essere considerati in generale, come chi dicesse un certo numero d' uomini, un qualunque numero di braccia. Nel primo di questi casi è necessario rappresentare i numeri con segni, ai quali siasi attribuito un valore determinato, e costante, quali sono le cifre numeriche a tutti note. Nel caso secondo, esprimendosi dei numeri dei valori indecisi, e generali, converrà, che vengano rappresentati con segni, ai quali non abbiasi attribuito alcun valore particolare, e determinato: a tal fine servonsi i Matematici delle lettere dell' alfabeto, come quelle, che tutti conoscono, che facili sono ad usarsi, e che per se non esprimendo alcun valore determinato, tutti li possono rappresentare indistintamente.

12. *Def.* 7. Chiamasi *Matematica* la Scienza del-

le quantità ( n. 1 ). Quella parte poi della Matematica che tratta dei Numeri, ne esamina le proprietà, e insegna la maniera di rappresentarli, e insiem combinarli, dicesi *Aritmetica*; e l'Arte finalmente di combinare insieme tai numeri col mezzo de' segni corrispondenti (*n. prec.*) dicesi *Calcolo*.

13. *Def.* 8. Se i numeri, che si considerano, sono presi generalmente, e non avendo valore determinato, vengano espressi dalle lettere ( n. 11 ); l' Aritmetica allora acquista il nome d'Aritmetica *Universale*, o di *Algebra*, e il Calcolo dicesi *letterale*: questo poi appellasi *numerico*, e quella ritiene il nome semplice di *Aritmetica*, se i numeri, che si considerano, sono determinati.

14. *Scol.* 4. Supponghiamo per un momento di non conoscere il modo, con cui attualmente esprimonsi dagli Aritmetici i numeri determinati, e di voler noi cercare come possa ciò eseguirsi.

I. Il primo metodo, che naturalmente presentasi all' animo, quello si è di attribuire a ciascun numero determinato un segno particolare, e d' inventare perciò tanti segni diversi, quanti sono i numeri; ma questi numeri possono essere infiniti, perchè può difatti l' unità, e possono le sue parti aliquote replicarsi all' infinito; dunque, seguendo questo primo metodo, converrebbe inventare infiniti segni diversi: ma ciò è a noi impossibile di effettuare, e molto più ci sarebbe impossibile di tutti conoscer questi segni, e insieme combinarli. Dunque non potendo questo primo metodo servire, converrà abbandonarlo, e rivolgersi a qualche altro artifizio.

II. Sia un solo segno, che porrò essere la cifra 1, e sia quì sotto in (I) nella prima linea orizzontale una serie di punti indefinita. Supponghiamo, che ponendo questa cifra 1 sopra il primo dei supposti punti a destra significhi uno; che sovrapposta

al punto secondo significhi il doppio di uno, cioè due, che collocata sul terzo, significhi il doppio di due ossia quattro, che collocata sul quarto rappresenti il doppio di quattro, cioè otto, e in generale che posta sopra uno qualunque degl' indicati punti rappresenti il doppio di quello, che significherebbe collocato sopra il punto prossimo a destra. In conseguenza di questa supposizione con la sola cifra I tutti potremo rappresentare i numeri interi possibili. Difatti nella seconda e nella terza delle righe (I) abbiam già espressi l' uno e il due: nella riga quarta, rappresentandosi dal supposto carattere I sopra del primo punto uno, e sopra del secondo due, verrà evidentemente espresso il numero tre; nella quinta riga sarà rappresentato il quattro, nella sesta il cinque, nella settima il sei, e così di seguito.

(I)

. . . . . ...
. . . . . ..I
. . . . . .I.
. . . . . .II
. . . . . I..
. . . . . I.I
. . . . . II.
. . . . . III

ec.

Ora tutti i punti, che nelle precedenti espressioni rimangono alla sinistra dell' ultimo I, sono inutili; possonsi dunque tralasciare, e quelle espressioni si cangeranno così nelle altre più semplici I, I., II, I.., I.I, II., III, ec.; le quali significheranno lo stesso. Inoltre i punti che restano alla destra potendo per la lor piccolezza far qualche confusione, converrebbe ingrandirli; ma siccome così facendo, potrebbe per la troppa abbondanza dell' inchiostro darsi agevolmente luogo alle cancellature,

sarà meglio scrivere bensì gli stessi punti ingranditi, ma scriverli vacui nel mezzo, e dar quindi loro la forma o. Quantunque l'origine quivi indicata della cifra o apparisca semplice e naturale; pure protesto di essere ben lontano dall'asserire, che simile cifra siasi realmente inventata nel modo accennato. Questa cifra o è già conosciuta col nome di *zero*, ed essa non fa, se non ciò che fanno i punti, cioè che indicare qual luogo, o, come dicesi, qual *classe* occupi il carattere 1, onde rappresentare il dovuto valore. I numeri precedenti si scriveranno perciò così 1, 10, 11, 100, 101, 111, ec.

III. Abbiansi ora le tre cifre o, 1, 2, esprimendosi dalle ultime due i numeri uno, due, e dalla prima lo zero (*prec.* II). Supponghiamo che collocata una di queste 1, 2 nella prima classe a destra abbia il valore, che le si è già attribuito, che promossa nella classe seconda rappresenti un valore triplo di quello che esprimeva nella classe prima, che posta nella terza significhi il triplo di quello, che significava nella seconda, e così in progresso. Anche in questa ipotesi potremo esprimere col mezzo delle tre cifre inventate tutti i numeri determinati: e in realtà i numeri uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, ec. verranno giusta l'accennata regola rappresentati dalle espressioni, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, ec.

IV. Suppongansi le quattro cifre o, 1, 2, 3, e fra queste le ultime tre significhino i numeri uno, due, tre. Se tali cifre dispongansi orizzontalmente in modo, che passando dalla destra alla sinistra esprimano dei valori sempre quattro volte maggiori; in questa supposizione ancora tutti si potranno rappresentare i numeri proposti, così oltre i tre primi significati delle cifre 1, 2, 3, la espressione 10 rappresenterà il quattro, l'altra 11 esprimerà il cinque,

la 12 il sei, la 13 il sette, la 20 l'otto, e così di seguito.

V. Se i segni fossero i cinque 0, 1, 2, 3, 4; supponendo, che col promuoversi essi dalla destra alla sinistra esprimano sempre dei valori quintupli, col lor mezzo rappresenteremo egualmente i numeri tutti. Così pure potremo fare, se s' inventino sei, oppur sette, ec. cifre, mentre si stabilisca, che nel passare dalla destra alla sinistra si esprimano sempre ad ogni passo dei valori tante volte più grandi, quanto è il numero delle cifre inventate.

VI. Affine presentemente di determinare il perchè, seguendo la regola ora stabilita, tutti possiamo rappresentare i numeri interi, che possono venire proposti, prendiamo a considerare una delle supposizioni accennate (*prec.* II, III, IV, V), giacchè quel che dicesi di una, dicesi delle altre ancora, e supponghiamo perciò, che le cifre inventate siano le dieci 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 esprimenti lo zero, ed i primi nove numeri uno, due, tre, ec., e che quindi promuovendosi esse dalla destra alla sinistra acquistino sempre pel (*prec.* V) un valore dieci volte più grande. In conseguenza di queste supposizioni le nove cifre 1, 2, 3, ec. 9 ora supposte ci esprimeranno collocate successivamente nella prima classe a destra i primi nove numeri; promosse queste nella seconda classe ci daranno i numeri dieci, venti, trenta, e così fino a cento esclusivamente; poste nella terza significheranno i numeri cento, duecento, trecento, ec. sino a mille esclusivamente; nella quarta ci esprimeranno i numeri mille, duemila, tremila ec. insino a diecimila esclusivamente, e così di seguito. Ciò posto combinando i primi nove numeri espressi nella prima classe, ai quali sogliono gli Aritmetici dare il nome di unità, con le diecine espresse nella seconda, è chiaro che tutti rappresentar potremo i numeri dall'uno sino al cento;

combinando le unità, e le diecine con le centinaja, ossia coi numeri espressi nella terza classe, otterremo, oltre i precedenti, i numeri tutti sino al mille: tenendo conto dei numeri significati nella quarta classe, otterremo i numeri tutti sino a diecimila; e così proseguendo vedesi agevolmente, che tutti potranno esprimersi i numeri interi, che ponno venire proposti.

15. *Def.* 9. Quella legge, che si è accennata nei (II, III, ec. *n. prec.*), per cui con poche cifre possiamo rappresentare tutti i numeri interi determinati, chiamasi *Istituzione Aritmetica:* essa nella ipotesi del (II, *n. prec.*) appellasi *diadica*, perchè non usa che due soli segni; *triadica* dicesi quella del (III, *n. prec.*), perchè ne usa tre; *tetradica* l'altra del (IV.*n. prec.*), usandone quattro, e così di seguito; onde la Istituzione considerata sull'ultimo del citato (*n. prec.*) ha il nome di *decadica*, servendosi essa di dieci caratteri.

16. *Scol.* 5. Vogliasi esprimere un dato numero per esempio trenta cinque col mezzo di tutte queste diverse istituzioni aritmetiche: la diadica ci darà per questo l'espressione 100011 (II n. 14); dalla triadica ne verrà l'espressione 1022 (III n. 14); la tetradica darà l'altra 203 (IV n. 14) ec.; e la decadica (VI n. 14) darà l'espressione 35. Vedesi da questo, che quanto è maggiore il numero dei caratteri inventati, minor numero si richiede di classi ad esprimere un numero dato: quindi fra tutte le istituzioni ora mentovate la decadica riescirà più comoda.

17. *Scol.* 6. Fra tutte le Istituzioni aritmetiche la decadica è quella, della quale servonsi attualmente gli Aritmetici, e che per conseguenza dovremo Noi pure anteporre alle altre. Essa poi oltre il vantaggio, che si è accennato sul fine del (n. prec.), ha gli altri ancora di non indur confusione con troppi

segni, e di seguire perfettamente l'andamento delle voci, delle quali ci serviamo a denominare i numeri. Converrebbe presentemente determinare, come queste voci corrispondano alle classi della decadica; ma spettando ciò più propriamente all' Aritmetico semplice, Noi contenti di aver esposto le nozioni generali de' numeri determinati, passeremo senza più a considerare la natura delle diverse operazioni di calcolo (n. 12), ed a vederne l' attuale applicazione nel calcolo letterale (n. 13).

# PARTE I.

## DELLE PRIME QUATTRO OPERAZIONI DI CALCOLO FRA LE QUANTITA' LETTERALI.

### *CAPO I.*

### *Della Addizione, e della Sottrazione.*

18. *Def.* 1. L'*Addizione* è quella operazione di calcolo, per cui una, o più quantità unisconsi nello stato, in cui si truovano ad una quantità data. L' operazione opposta chiamasi *Sottrazione*. Nella prima di queste operazioni le quantità date diconsi le *Parti:* il risultato che si ottiene, nell' Addizione si denomina *Somma* o *Aggregato*, o *Tutto*; nella Sottrazione appellasi *Avanzo*, *Residuo*, o *Differenza*.

19. *Scol.* 1. Come tutte le operazioni di calcolo, così l' Addizione, e la Sottrazione hanno i loro segni particolari: tali sono i due $+$, $-$, il primo de' quali serve all' Addizione, leggesi *più*, e si antepone alle quantità, che si aggiungono; e il secondo serve alla Sottrazione, leggesi *meno*, e si premette alle quantità che si sottraggono. Il segno $=$ rappresenta lo stato d' uguaglianza, leggesi *uguale*, e

e si pone tra le quantità, che sono uguali fra loro: perciò avremo $6+3=9$, $7-2=5$; ed il segno $>$ indica disuguaglianza, ponendosi la sua apertura verso la quantità più grande, l'apice verso la più piccola, onde volendo indicare, che $7+3$ è maggiore di 8, scrivesi $7+3>8$, oppure $8<7+3$, e nel primo caso si legge $7+3$ *maggiore* di 8, nel secondo 8 *minore* di $7+3$.

20. *Scol.* 2. I Problemi di pratica ne' quali non si richiede, che di unire insieme delle parti cognite, e determinate, o di togliere delle quantità cognite, e determinate da altre parimenti cognite e determinate, scioglier tutti si possono col mezzo delle regole stabilite dall' Aritmetica semplice; ma se tra le quantità, che devono fra loro unirsi, o sottrarsi, esistono delle incognite, o delle indeterminate, di qual artifizio ci servirem noi inallora? Veggiamone gli esempj seguenti.

21. *Esempio* 1. Ritrovare un numero tale, che il suo doppio unito a 15 sia uguale a 40 aumentato del numero che si cerca.

*Sol.* Il numero, che si domanda, essendo incognito, e dovendo frattanto avere una qualche denominazione, onde possa unirsi al 40, e il suo doppio al 15, e istituirsene inseguito il paragone; io chiamerò, secondo ciò che si è detto nel (n. 11), $x$ un tal numero, ed essendo evidentemente $2x$ il suo doppio; avremo per le condizioni del Problema $2x+15=40+x$. Ora da cose uguali togliendo porzioni uguali, i risultati sono uguali; dunque di quà, e di là dal segno di uguaglianza togliendo una $x$, ne verrà $x+15=40$, e togliendo poscia il 15, ne verrà $x=40-15=25$: ma $x$ rappresenta il numero richiesto; dunque un tal numero sarà il 25; e in realtà il suo doppio, ossia 50 unito a 15 dando 65 sarà $=40+25=65$, come era stato richiesto.

22. *Esempio* 2. Dividere 350 lire a tre Persone

A, B, C, per modo che B abbia 20 lire più di A, e C 10 lire più di B: cosa toccherà a ciascheduno?

*Sol.* Chiamata, come precedentemente, $x$ la porzione, che deve darsi ad A, a B toccheranno $x+20$ lire, ed a C lire $x+30$. Dunque sarà

$$\left.\begin{array}{l} x+ \\ x+20+ \\ x+30 \end{array}\right\} = 350,$$

ossia $3x+50=350$, e togliendo il 50 d'ambe le parti, ne verrà $3x=350-50=300$; ma se due quantità sono uguali fra loro, son anche fra loro uguali le terze parti; dunque avendosi $3x=300$, sarà $x=100$, e però ad A dovranno darsi lire 100; a B lire $100+20=120$; ed a C lire $120+10=130$, le quali insieme unite danno appunto le lire 350.

23. *Cor.* È dunque necessario nella soluzione de' Problemi considerare, esprimere, e calcolare delle quantità indeterminate (*n. prec.* 11): ma queste non esprimendosi con le solite cifre aritmetiche, cader non possono sotto le regole dell'Aritmetica semplice: è dunque necessario il formare per essi un calcolo loro proprio; e tale appunto è il calcolo algebraico, o algebrico, o letterale, di cui per conseguenza or cominceremo a stabilire i precetti.

24. *Def.* 2. Una espressione, la quale rappresenti l' eguaglianza fra due quantità diversamente denominate, quali sono le due $2x+15=40+x$ (n. 21), $3x+50=350$ (n. 22) dicesi *Equazione*. Il segno $=$ divide ciascuna Equazione in due parti, che diconsi *Membri*.

25. *Def.* 3. Se una quantità si considera come aggiunta ad un' altra, essa inallora chiamasi *positiva*; che se si considera come levata, le si dà il nome di *negativa*.

Supponghiamo al numero 10 di aggiungere il 4, ne verrà $10+4=14$, e il 4 in questo stato dicesi quantità positiva; ma se il 4 medesimo si tolga dal 10, cosicchè risulti $10-4=6$, la quantità $-4$ chia-

masi negativa. Parimenti se supponghiamo di unire alla retta DA (II) l' altra AB, cosicchè risulti DA + AB = DB; la retta + AB considerata in questo stato appellasi positiva: e se al contrario dalla stessa DA tolgasi la AC (III), ne viene DA — AC = DC, e la AC si dice quantità negativa. Finalmente di due uomini se uno abbia un credito, e l' altro tutto al contrario un debito di 1000 zecchini, nel primo caso i mille zecchini considerandosi come quantità aggiunta allo stato del Creditore, formeranno una quantità positiva, e nel secondo dovendosi i mille zecchini togliere dallo stato del debitore costituiranno rapporto all' asse del debitore una quantità negativa.

(II)
D A B

(III)
D C A

26. *Scol.* 3. Quantunque le quantità positive debbano sempre considerarsi come aggiunte ad un' altra, e le negative come tolte (*n. prec.*); pure essendo queste indipendenti dalla quantità, con cui si uniscono, o da cui si levano; quindi ne viene, che si possono esse considerare, e si considerano difatti sovente nel calcolo da se sole, fatta astrazione dalla quantità, con cui devonsi aggiungere, o da cui togliere. Per tal modo il Geometra astrae la linea, e la superficie dal corpo, e queste considera da se sole; il Creditore perciò dei 1000 zecchini può considerare il suo credito indipendentemente dal proprio asse, con cui deve questo unirsi, e può egualmente il debitore considerare il suo debito dei 1000 zecchini, astrazione facendo dal proprio asse, da cui questi 1000 zecchini infine devonsi togliere. Così possiamo fissare l' attenzione su della sola retta + AB positiva, o sull' altra negativa — AC, facendo astrazione dalla DA, a cui la prima si aggiunge, e da cui la seconda si leva.

Ogniqualvolta venga data una quantità sola, questa tacitamente suol considerarsi come aggiunta ad un' altra qualunque già preesistente, oppure come unita allo zero. Dunque tal quantità ve-

nendo in simile guisa considerata, come in istato di unione, la diremo positiva (n. 24). Venga per esempio dato il numero concreto 8 zecchini: o questi 8 zecchini supponganSi consegnati a qualcuno, e allora essi si considerano tacitamente come aggiunti al Patrimonio di questo tale, o supponganSi esistere indipendentemente da qualunque persona, e in tal caso la stessa supposta loro esistenza li determina come aggiunti allo zero. Dunque sì nell' un caso, che nell' altro essendo i nostri 8 zecchini considerati come in istato d' unione, dovran dirsi quantità positiva.

27. *Scol.* 4. Supponghiamo date due quantità per esempio i due numeri 10, 6, e supponghiamo di unire il secondo di questi al primo nello stato in cui si trova; ne verrà il risultato $10+6=16$. Ora questo numero $+6$ è una quantità positiva, ed è nel tempo stesso una quantità per la ipotesi sommata ad un' altra (n. 18): dunque la quantità positiva potrà considerarsi come una quantità in istato di somma. Supponghiamo al contrario, che dal 10 tolgasi il 6, cosicchè ne venga $10-6=4$: questo $-6$ sarà quantità negativa, ma questa seconda operazione essendo opposta alla prima non è che una sottrazione (n. 13). Dunque la quantità negativa potrà riguardarsi come una quantità in istato di sottrazione. Quindi è che volendo i Matematici indicare con qualche segno lo stato positivo, e il negativo delle quantità, servonsi dei segni dell' addizione, e della sottrazione, cioè dei segni $+$, $-$ (n. 19), anteponendo il primo alle quantità positive, il secondo alle negative; e così difatti abbiam praticato negli esempi precedenti, e così faremo in avvenire. Avvertasi però, che la quantità positiva allorchè è sola, o quando è sul principio di una espression numerica suol anche scriversi per maggiore semplicità senza alcun segno sottintendendosi il $+$.

28. *Scol.* 5. Essendo lo stato negativo direttamente opposto al positivo, ne viene, che lo stato, e il senso indicato dal segno + sarà opposto a quello indicato dal segno —; e il primo di questi accennerà doversi prendere la quantità, a cui si riferisce, nello stato, in cui si trova, il secondo nello stato contrario.

29. *Scol.* 6. Supponghiamo, che il creditore dei 1000 zecchini vada ritirando a poco a poco i denari del suo credito, e gli spenda fino ad estinguere affatto il credito, ed a consumarlo. Inoltre supponghiamo, che cominci costui a fare dei debiti, e giunga a farne uno insino di 1000 zecchini. In tal caso il credito del nostro Uomo, ossia la quantità positiva dei 1000 zecchini va gradatamente scemando fino a distruggersi totalmente, e divenire zero; e poscia cominciano a nascere le quantità negative, cioè i debiti, le quali giungono sino ai 1000 zecchini. In questa supposizione vedesi, che noi gradatamente ci portiamo da una serie di quantità positive ad una di negative, e ciò facciamo passando per lo zero.

Supponghiamo che scorrendo il punto B verso A (IV) vada scemandosi la lunghezza della AB, ossia della quantità positiva, che abbiam considerata aggiunta alla DA, quando questo punto scorrendo arriverà in A, allora la quantità aggiunta diverrà zero. Supponghiamo di più che il punto supposto seguiti a scorrere verso C, cominceranno così a formarsi delle quantità negative, le quali diminuiranno la lunghezza della DA, e lo zero frattanto sarà termine fra le quantità positive AB, e le negative —AC.

(IV)

D C A B

Nel modo medesimo in $10+6=16$ se vogliasi che il 6, scemando continuatamente, passi dallo stato positivo al negativo; nel punto, ove succede il passaggio, nulla dovendosi aggiungere, nè levare, verrà al 10 ad unirsi lo zero, e perciò lo zero sarà un

confine tra queste quantità positive, e negative.

Quanto abbiamo detto in questi tre casi, dicendosi evidentemente in egual modo di tutte le quantità positive, e negative, ne viene, che mentre si voglia, col diminuire continuatamente una quantità, passare dal suo stato positivo al negativo, si dovrà sempre passar per lo zero, e quindi lo zero è sempre un termine collocato tra le quantità positive, e le negative.

30. *Scol.* 7. Sogliono i Matematici chiamare le quantità positive maggiori dello zero, e le negative minori. Può questo a prima vista sembrare un assurdo, ma ciò vedremo esser vero nella seguente maniera. Unendo un dato numero positivo ad un altro può questo aggiungersi nello stato, in cui si trova, ossia in istato di somma, e può al contrario aggiungersi nello stato opposto, cioè in quello di sottrazione (n. 18); ora quest' ultima maniera di unire nel modo comun di parlare suol piuttosto dirsi togliere; ritenendo però i Matematici soltanto l'idea di aggiungere, sia nello stato di somma, o in quello di sottrazione; egli è in questo senso, che si verifica la loro sovraccennata maniera di dire. Uniamo infatti successivamente al numero 8 gli altri 3,2,1,0.—1.—2.—3. ec., ne verranno i risultati $8+3=11$, $8+2=10$, $8+1=9$, $8+0=8$, $8-1=7$, $8-2=6$, $8-3=5$, ec. Ora se a un dato numero altri se ne aggiungano, tanto saranno questi ultimi minori, quanto sarà minore la somma, che ne risulta. Dunque avendosi $11>10>9>8>7>6>5>$ ec., ne verrà ancora $3>2>1>0>-1>-2>-3$ ec.; e per conseguenza le quantità positive 1,2,3, ec. saranno $>0$, e le negative $-1,-2,-3$, ec. $<0$, anzi mentre le quantità positive divengono sempre maggiori, quanto più si scostano dallo zero, le negative all' incontro, quanto più si allontanano dallo zero, diventan sempre minori.

31. *Scol.* 8. Abbiansi più numeri fra loro som-

mati, o sottratti: possono questi essere determinati, ed indeterminati; se sono determinati come per esempio i numeri dell' espressione $10-8+7$, possono sempre ridursi ad un numero solo, e infatti essendo $10-8=2$, e $2+7=9$, sarà $10-8+7=9$: ma non succederà già così, se i numeri siano indeterminati, se vengono espressi con lettere (n. 11). Invece dei numeri 10,8,7 esistano nell' esempio precedente le lettere $a$, $b$, $c$, ne risulterà la quantità $a-b+c$ evidentemente non riducibile ad un solo numero. Quindi nasce per la massima parte la differenza del calcolo numerico dal calcolo letterale, e quindi alcune denominazioni delle quantità algebraiche.

32. *Def.* 4. Qualunque espressione di quantità fatta con lettere dicesi *Quantità algebraica*, o *algebrica*, o *letterale*; tale è la espressione $3ax-bc+d$, e qualunque parte di questa compresa tra i segni $+$, $-$ chiamasi *Termine*.

Qualunque quantità poi algebraica formata di un solo termine, come la $ab$, o l' altra $-4bx$ dicesi *semplice*, *incomplessa* o *Monomio*; e chiamasi *composta*, *complessa*, o *Polinomio*, se costa di più termini: tali sono le quantità $a-b$, $3ac+bm-cd$. Il Polinomio finalmente si dice particolarmente *Binomio*, *Trinomio*, *Quadrinomio*, ec. secondo che è formato di due, di tre, di quattro, ec. termini. Ciascun termine positivo è affetto del segno $+$, e ciascun negativo del segno $-$ (n. 27); i termini positivi posti sul principio delle quantità soglionsi però scrivere senz' alcun segno (*cit. n.* 27), come vedesi negli esempj precedenti.

33. *Probl.* 1. Sommare due, o più quantità algebraiche fra di loro.

*Sol.* Altro non essendo il sommare una quantità con un' altra, che l' unire la prima con questa nel senso, in cui si trova (n. 18); ne viene, che otterrò la somma cercata, unendo insieme le da-

date quantità con i segni loro naturali. Se le quantità da sommarsi siano le due $a$, $b-c$, l'aggregato sarà $a+b-c$, e se siano le due $3ab-4cd+5ax$, $7ab-3ax-2cd$, l'aggregato sarà $3ab-4cd+5ax+7ab-3ax-2cd$.

A maggiore rischiarimento consideriamo la somma delle prime due quantità $a$, $b-c$. Unendo $b$ ad $a$, è chiaro che si ottiene $a+b$ (n. 19); ma aggiungendo il solo numero $b$, aggiungo più del dovere, poichè aggiunger devo $b$ diminuito di $c$; dunque da $a+b$ dovrò togliere $c$, onde avere l'aggregato che si domanda; e però questo sarà $a+b-c$. Il discorso medesimo si potrà egualmente fare in qualunque altro caso.

Se le quantità da sommarsi fossero più di due, la operazione è sempre la medesima.

34. *Probl.* 2. Sottrarre una qualunque quantità algebraica da un'altra.

*Sol.* Essendo la sottrazione un'operazione affatto opposta all'addizione (n. 18); se questa si eseguisce, unendo la quantità da sommarsi con l'altra nel senso, in cui è (*n. prec.*), quella dovrà eseguirsi, unendo la quantità da sottrarsi alla prima, prendendola nel senso contrario: otterrò dunque la differenza, che si ricerca, unendo insieme le due quantità date, dopo aver mutati i segni alla quantità da sottrarsi. Sia da sottrarsi la quantità $b-c$ dall'altra $a$, ne verrà il residuo $a-b+c$, e se sia da sottrarsi la quantità $3ab-2ax+5bx$ dall'altra $5ab+3ac-5bx$, ne risulterà per la differenza la quantità $5ab+3ac-5bx-3ab+2ax-5bx$.

Considerando, per maggiore chiarezza, la sottrazione di $b-c$ da $a$; se io voglio sottrarre da $a$ la sola quantità $b$, ne verrà chiaramente il risultato $a-b$ (n. 19); ma sottraendo la sola $b$, sottraggo più del dovere, poichè non devo già sottrarre $b$, ma $b$ diminuito di $c$; dunque aggiungendo questa

quantità $c$, che manca, ne verrà $a-b+c$ per la differenza richiesta. Lo stesso si dice qualunque sia la quantità da sottrarsi.

35. *Scol.* 9. I. Preso un Polinomio qualunque, per esempio il Polinomio $2a+7b-5c$, osservo non altro rappresentarsi da questo, che quella somma, la quale risulta dalla unione delle parti $2a$, $7b$, $-5c$ (n. 33). Ora anche l' espressione $7b+2a-5c$ rappresenta la somma delle stesse parti, e così l' altra $-5c+2a+7b$, così la terza $7b-5c+2a$, ec. Dunque tutte queste espressioni $2a+7b-5c$, $7b+2a-5c$, $-5c+2a+7b$, $7b-5c+2a$, ec. rappresentando una medesima quantità, sarà indifferente lo scrivere l' una invece dell' altra, ossia sarà nel dato Polinomio indifferente lo scrivere prima un suo termine, piuttosto che l' altro: ma ciò stesso si dice evidentemente di tutti gli altri Polinomj. Dunque in tutte le quantità complesse potremo dare ai termini quell' ordine, che si vuole. Gli Algebristi però amano, per sola semplicità, porre sul principio un termine positivo, quando vi sia, e quando il calcolo, ed i raziocinii non esigano il contrario.

II. Prendasi la quantità $3ab-4cd+5ax+7ab-3ax-2cd$, ottenuta nel (n. 33), e in conseguenza del (*prec.* I) scrivasi il termine $7ab$ presso $3ab$, l' altro $-2cd$ presso $-4cd$, e $-3ax$ vicino a $5ax$; onde si abbia $3ab+7ab-4cd-2cd+5ax-3ax$. Ciò fatto osservo, che $3ab+7ab=10ab$, $-4cd-2cd=-6cd$, $5ax-3ax=2ax$. Dunque sostituendo questi valori uguali, l' indicata somma si ridurrà alla espressione più semplice $10ab-6cd+2ax$. In eguale maniera ridurrassi la differenza $5ab+3ac-5bx-3ab+2ax-5bx$, ottenuta nel (n. 34), alla $2ab+3ac-10bx+2ax$, e il polinomio $9a-7ax+4a-3ab+7ax-2a$ all' espressione $11a-3ab$.

36. *Def.* 5. I termini, come i precedenti, $9a$, $4a$, $-2a$, $5ab$ $-3ab$, ec., i quali sono composti delle

stesse, e dello stesso numero di lettere, diconsi termini *simili*. I numeri poi che posti nei termini innanzi alle lettere indicano quante volte vengono esse ripetute, diconsi *coefficienti numerici*, perciò il 7 dicesi coefficiente del termine $7ab$, e il coefficiente del termine $cz$ = una volta $cz$ si è 1.

37. *Cor.* I. I termini simili per quanto si è detto nel (n. 36) potranno sempre ridursi a un termine solo.

II. A cagione di questa proprietà dei termini simili si potranno facilitare le operazioni dell'Addizione, e della Sottrazione, scrivendo nelle stesse linee verticali i termini simili, come apparisce nei due esempi sottoposti

$$\begin{array}{rl} & 9ab+4cd+5axz-6bd \\ & 4ab-3cd \qquad +6bd-5mn \\ & 2ab+2cd+4axz \qquad +3mn-5x \\ \text{Som.} & 15ab+3cd+9axz \;*\; -2mn-5x \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 7mn-5mx-3ny+4amy \\ - & 5mn-5mx+2ny \qquad +4mny \\ \text{Diff.} & 12mn \;*\; -5ny+4amy-4mny \end{array}$$

III. Nell'addizione di una quantità negativa ritenendo questa il segno — (n. 33), e nella sottrazione il segno — cangiandosi in + (n. 34), vedesi, che il sommare una quantità negativa equivale al togliere il valore della quantità medesima, ed il sottrarla equivale all'aggiungere il valore indicato.

38. *Esempio* 3. Trovare due numeri tali, che la loro somma sia 35, e la differenza 11.

*Sol.* Chiamati $x$, $y$ i due numeri richiesti, sarà per la ipotesi $x+y=35$, $x-y=11$: ma se a due quantità uguali si aggiungano, o tolgano due quantità uguali, i risultati sono uguali; dunque aggiun-

gendo, e togliendo successivamente alle due quantità $x+y$, 35 le altre due $x-y$, 11 si avrà

$$\begin{array}{rr} x+y=35 & x+y=35 \\ \underline{x-y=11} & \underline{x-y=11} \\ 2x \quad =46 & 2y=24 \end{array}$$

e per conseguenza dovendo essere anche uguali le metà di questi risultati sarà $x=23$, $y=12$, e però i due numeri richiesti saranno i due 23, 12.

39. *Scol.* 10. Invece di supporre 35 la somma, e 11 la differenza de' due numeri domandati $x$, $y$; potevasi egualmente supporre, che la somma, e la differenza data fossero altri due numeri qualunque, per esempio 47, 13; 28, 10; ec., e in generale che la somma fosse $a$, e la differenza $b$: avendosi in questo caso $x+y=a$, $x-y=b$, sommando, e sottraendo come nel (*n. prec.*) ne verrà $2x=a+b$, $2y=a-b$. Da queste due espressioni avremo la soluzione del Problema in qualunque caso: di fatti se $a=47$, e $b=13$, sarà $2x=47+13=60$, $2y=47-13=34$, e però $x=30$, $y=17$: se $a=28$, $b=10$, ne verrà $2x=28+10=38$, $2y=28-10=18$, e quindi $x=19$, $y=9$, ec.

40. *Cor.* Da ciò si vede, che si possono nelle Equazioni introdurre altre lettere oltre le incognite, e in conseguenza di questo si è convenuto tra i Matematici di segnare le quantità incognite con le ultime lettere dell' alfabeto $t$, $u$, $x$, $y$, $z$; e le altre con le prime $a$, $b$, $c$, ec.

41. *Esempio* 4. Di due persone A, B la prima dice alla seconda; se voi mi date 4 dei vostri scudi, io allora avrò tanti scudi, quanti ne restano a voi; e B risponde ad A: e se voi ne date a me 10 dei vostri, i miei scudi divengono il triplo di quanti ne avete presentemente. Si domanda quanti scudi abbia ciascuno.

*Sol.* Siano $x$ gli scudi di A, ed $y$ quelli di B. Poichè dando B 4 dei suoi $y$ scudi ad A, questi

viene ad avere tanti denari, quanti ne restano a quello, sarà $y-4=x+4$. Inoltre mentre B riceve da A 10 scudi, poichè egli viene ad avere il triplo dei denari di questo; ne segue evidentemente che dovrà essere $y+10=3x$. Avendosi dunque

$$y+10=3x$$

ed

$$y-4=x+4$$

sarà sottraendo

$$14=2x-4$$

e aggiungendo il 4 da amendue le parti, sarà $14+4=2x$, ossia $18=2x$, e, presene le metà, $x=9$. Ora le cose uguali si possono sostituire; ponendo dunque in $y-4=x+4$ in luogo di $x$ il 9, ne verrà $y-4=9+4=13$, e aggiunto da amendue le parti il 4 avremo $y=17$. Gli scudi pertanto di A sono 9, e quelli di B 17, come si può agevolmente verificare.

42. *Cor.* Considerando l'equazione $14=2x-4$ ottenuta nel (*n.prec.*), come l'altra pure $y-4=13$, vedesi che abbiamo trasportato da un membro all' altro il numero 4, e cangiando semplicemente il segnò $-$ in $+$ ne abbiam ottenute le Equazioni, $14+4=2x$, $y=13+4$; e nei (*n.* 21, 22) abbiam trasportato nell' Equazione $x+15=40$ il 15, e nell'altra $3x+50=150$ il 50 nel secondo membro, mutando il segno $+$ in $-$, e ne abbiamo ottenute le nuove Equazioni $x=40-15$, $3x=150-50$: frattanto nell' un caso, e nell' altro l' uguaglianza si conserva. Ora si potrà egli, siccome nelle precedenti, trasportare in qualunque Equazione da un membro all'altro i diversi termini, senza turbare l' uguaglianza? Rispondo, che sì; purchè nei termini, che si trasportano, si cangino i segni, cioè il $+$ si cambi in $-$, ed il $-$ in $+$. Difatti con tale operazione non facciamo mai che aggiungere, o togliere quantità uguali ad altre uguali, siccome apparisce nei citati (*n.* 21, 22, 41).

43. *Esempio* 5. Date 40, (in generale $a$ ($n.$ 40)), carte da giuoco, formo con queste 5 ( in generale $b$ ) mazzetti con la seguente regola: osservo quanti punti segninsi in una delle carte, colloco questa sulla tavola, e sovrappongo ad essa tante altre carte, quante unità mancano ai punti osservati per giungere al 10; se i punti osservati fossero per esempio 6, aggiungerei 4 carte. Formati in simile guisa i 5, ovvero $b$, mazzetti, e supposto, che ne avvanzino 12 ( in generale $c$ ) carte, domandasi quale sia la somma di tutti i punti, che sono marcati in quelle carte, di tutti i mazzetti, che toccano la tavola.

*Sol.* Chiamata $x$ la somma domandata, suppongasi per un momento, che i punti osservati si considerino come altrettante carte. In questa ipotesi le carte di ciascun mazzetto sarebbero tante di numero, quanto è il numero dei punti + la carta, in cui son marcati i punti medesimi + le carte, che sonosi aggiunte per arrivare al 10. Dunque in ciascun mazzetto entrerebbero 11 carte, come appunto apparisce nel sovraesposto esempio, in cui si ha $6 + 1 + 4 = 11$, e per conseguenza in 5 ovvero $b$ mazzetti entrerebbero corrispondentemente 5 volte $11 = 55$, ovvero $b$ volte 11, che indicherò scrivendo $11b$ carte. Ora in questo risultato 55, oppure $11b$ vengono evidentemente espresse tante carte di più di quelle, che attualmente esistono nei 5, ovvero $b$ mazzetti, quanta è la somma dei punti segnati nelle prime carte de' mazzetti medesimi. Dunque essendosi tal somma chiamata $x$, la quantità $55 - x$, oppure $11b - x$ rappresenterà il numero delle carte realmente impiegate nella formazion de' mazzetti; ma da un simile numero sono per la ipotesi avvanzate 12, ovvero $c$ carte: dunque essendo il numero totale di queste 40, e in generale $a$, avremo l' Equazione $55 - x + 12 = 40$, e in generale $11b - x + c = a$.

Trasporto in queste due Equazioni il numero $x$ nel secondo membro, e rispettivamente i numeri 40, $a$ nel primo; risultandone $55 + 12 - 40 = x$, $11b + c - a = x$ (*n.* 42), avremo per la soluzione del Problema proposto, nel caso particolare $x = 27$, e nel generale $x = 11b + c - a$.

44. *Scol.* 11. I. L' Equazione $x = 27$ ci dice, che essendo 5 il numero dei mazzetti, 40 il total delle carte, e 12 quello delle carte avanzate, il numero dei sovraindicati punti è 27, e nulla ci dice di più: ma l'altra Equazione $x = 11b + c - a$, oltre il somministrarci la soluzione del Problema, come si è accennato nel (*n.* 39), qualunque siasi il numero delle carte tutte, quello dei mazzetti, e quello delle carte avanzate, ci somministra inoltre una regola generale, onde in qualunque caso si possa con sollecitudine indovinare la somma degli accennati punti: per ciò ottenere, dalla $x = 11b + c - a$ si vede, che basta moltiplicare lo 11 pel numero dei mazzetti, aggiungere al prodotto $11b$ il numero delle carte restate, dalla somma $11b + c$ che se ne ottiene, sottrarre il numero total delle carte; e il risultato ultimo $11b + c - a$ esprimerà la somma domandata. Il potere stabilire nella maniera ora indicata delle regole di calcolo, e delle proprietà generali costituisce uno de' più grandi vantaggi, che traggonsi dal calcolo letterale.

II. Riprendasi l' Equazione $11b - x + c = a$ del (*n.* 43), e trasportiamo in essa dal primo al secondo membro i termini $11b$, $c$, ne verrà $-x = a - 11b - c$ (*n.* 42), ossia $-x = -11b - c + a$ (I. *n.* 35); ma paragonando essa con l' Equazione $x = 11b + c - a$ ottenuta sul fine del (*n.* 43), veggo, che i termini di quella non sono che i termini di questa, cambiatine i segni. Dunque se nella $-x = -11b - c + a$ cangierò i segni a tutti i termini, l' uguaglianza non turbasi punto. E facile a vedersi,

che questa proprietà appartiene a tutte l' Equazioni : imperocchè supposta per esempio la Equazione $A-B-C=-D+E$, trasporto i termini del primo membro nel secondo, e quei del secondo nel primo, si otterrà $D-E=-A+B+C$ (*n.* 42); ma egli è evidentemente lo stesso il dire D — E uguaglia —A+B+C, ed il dire —A+B+C uguaglia D — E. Dunque sarà ancora $-A+B+C=D-E$, e per conseguenza avendosi $A-B-C=-D+E$, ed insieme $-A+B+C=D-E$, ne segue che ec.

## *CAPO II.*

### *Della Moltiplicazione.*

45. *Def.* 1. La *Moltiplicazione* è quella operazione, per cui un numero qualunque vien ripetuto quanto, e come viene indicato da un altro. Il primo di questi numeri dicesi *Moltiplicando*, *Moltiplicatore* l' altro, ed amendue insieme i *Fattori*, chiamandosi *Prodotto* il numero, che risulta dalla operazione.

Per indicare la moltiplicazione, tra i fattori si pone un punto, od il seguente segno $\times$, oppure i fattori si pongono fra parentesi; e tali segni si leggono *moltiplicato in:* perciò sarà $4.5=20$, $7\times 8=56$, $9\times(4+2)=54$, $(6+2)5=40$, $(3+2)(6+4)=56$.

46. *Probl.* 3. Determinare nella moltiplicazione di due numeri il segno da prefiggersi al prodotto.

*Sol.* Poichè il moltiplicando deve replicarsi nel senso, che viene indicato dal moltiplicatore (*n.* 45); osservo, quale sia il segno di questo secondo fattore. Se tal segno è positivo, pel (*n.* 24) dovrò nella operazione replicare il moltiplicando, prendendolo nello stato in cui si trova. Dunque il pro-

dotto mi risulterà positivo, o negativo, secondocchè positivo, o negativo è il moltiplicando. Che se il segno del moltiplicatore è negativo: dovendosi pei citati (*n.* 45, 24) ripetere il moltiplicando in un senso contrario a quello, in cui si ritruova, il prodotto che ne viene sarà negativo, se il moltiplicando è positivo, e se questo è negativo, il prodotto sarà positivo.

1° Sia il numero 10, oppur l' altro — 7 da moltiplicarsi per + 4. Essendo il moltiplicatore + 4 affetto del segno +, dovrò prendere il moltiplicando 10, oppure — 7 le volte 4, e di più prenderlo nel senso, in cui è; dunque sarà $10 \times 4 = 40$, $-7 \times 4 = -28$.

2.° Sia — 5 il moltiplicatore, e + 8 il moltiplicando; dovrò in questo caso replicare il numero 8 le volte indicate dal — 5, e di più essendo il moltiplicatore affetto di segno negativo, dovrò prendere il + 8 nel senso contrario al suo proprio; quindi avremo $+8 \times -5 = -40$.

3.° Finalmente sia — 9 il moltiplicando, e — 3 il moltiplicatore: in questa supposizione, essendo il moltiplicatore di segno negativo dovrò prendere il moltiplicando in senso contrario al suo proprio, onde avendosi il moltiplicando di segno negativo, sarà il prodotto di segno positivo, e però sarà $-9 \times -3 = +27$.

A rischiarimento ulteriore osservisi, che nel primo caso prendendo 4 volte la quantità positiva 10, o l' altra negativa — 7, è per se evidente, che il risultato sarà in corrispondenza + 10 + 10 + 10 + 10 = + 40, oppure — 7 — 7 — 7 — 7 = — 28. Nel 2° caso dovendosi negar 5 volte la quantità positiva 8, il prodotto non potrà essere che — 8 — 8 — 8 — 8 — 8 = — 40. Nel 3.° caso finalmente il negare tre volte una quantità negativa essendo evidentemente lo stesso che prenderla tre volte positivamente, ne

verrà il risultato $+9+9+9=27$. Dunque la regola pei segni sarà: che il prodotto dev' essere sempre positivo, mentre i due fattori abbiano lo stesso segno, sia questo $+$, sia $-$; ma quando i fattori hanno segno diverso, il prodotto deve inallora essere sempre negativo.

47. *Cor.* I. Un qualunque prodotto positivo per esempio 35 potrà considerarsi nato egualmente da due fattori positivi, che da due negativi; perciò sarà tanto $35=+7.+5$, quanto $35=-7.-5$, e un prodotto negativo per esempio $-21$ potrà considerarsi tanto $=-3.7$, quanto $=3.-7$.

II. Moltiplicando insieme più numeri, il prodotto sarà sempre negativo, se il numero dei fattori negativi è dispari, e positivo se il numero dei fattori negativi è pari. Così sarà $3.-2.5.-4.-7=-840$, e $4.-5.-6.2=240$.

48. *Teor.* Nella moltiplicazione dei numeri interi qualunque dei due fattori si faccia moltiplicatore, il prodotto è sempre il medesimo.

*Dim.* Rapporto ai segni ciò è evidente dal (*n.* 46). Rapporto poi al valore dei due fattori; sia un intero qualunque, per esempio il 9, da moltiplicarsi per un altro intero qualunque, per esempio, pel 4. Poichè si ha $4=1+1+1+1$, sarà $9\times4=9\times(1+1+1+1)$: ma egli è evidentemente lo stesso prendere un qualsivoglia intero, nel supposto esempio, il 9 una volta, o prendere 1 queste nove volte (*n.* 8). Dunque avendosi $9\times1=1\times9$, sarà tanto $9\times(1+1+1+1)$, quanto $(1+1+1+1)\times9=9+9+9+9=$ [illegible]; ma ciocchè si è detto di questi due interi [illegible] degli altri tutti egualmente. Dunque ec.

49. *Cor.* I. Poichè è indifferente il fare moltiplicatore uno qualsivoglia dei due fattori (*n. prec.*); pel (*n.* 45) [illegible], che il prodotto conterrà sempre uno dei [illegible] quante volte e come vengono

indicate dall' altro, e però se uno dei fattori diventa doppio, triplo, ec. oppure la metà, la terza parte, ec., tale diverrà pur anche il prodotto.

II. Di due quantità uguali dovendo essere fra loro uguali anche i doppj, i tripli, ec., le metà, le terze parti, ec., ne segue, che se queste due quantità vengono moltiplicate per uno stesso numero, ancora i prodotti deggiono risultare uguali fra loro.

50. *Esempio* 6. Un Artefice ha fatte pagare per once 6 d' oro, e 12 d' argento Lir. 816, ed altra volta per 3 oncie d'oro, ed 8 d' argento ha fatte pagare Lir. 424. Si domanda a qual prezzo ha Egli posta l' oncia d' oro, ed a quale quella d' argento.

*Sol.* Sia $x$ il valore dell' oncia d' oro, ed $y$ il valore dell' oncia d' argento. Se un' oncia d' oro costa $x$, 6 once valeranno $6x$, e se il valore di un' oncia d' argento è $y$, quello di 12 once sarà $12y$. Dunque sarà $6x + 12y = 816$. Nella stessa maniera ritrovasi $3x + 8y = 424$. Moltiplicando ora entrambi i membri di questa seconda Equazione per 2 ottienesi $6x + 16y = 848$ (II. *n. prec.*), e togliendo dalle due quantità $6x + 16y$, 848, risultatecci fra loro uguali, le altre due $6x + 12y$, 816 parimenti uguali tra loro

$$\begin{array}{r} 6x + 16y = 848 \\ \underline{6x + 12y = 816} \\ 4y = 32 \end{array}$$

ne viene

Dunque sarà $y = 8$. Pongasi ora in $3x + 8y = 424$ il numero 8 invece di $y$, risulterà $3x + 64 = 424$, quindi $3x = 424 - 64$ (*n.* 42), ossia $3x = 360$, e finalmente $x = 120$. Dunque l'oncia d' oro è stata pagata Lir. 120, e quella d' argento Lir. 8.

51. *Scol.* Come nel (*n. prec.*) potremo sempre, date due Equazioni, con due incognite, trovarne una terza con un' incognita sola.

Siano a cagion d' esempio le due Equazioni

$5x + 8y = 50$, $4x - 6y = 18$, e vogliasene ritrovare una terza, ove non esista che la sola $y$, ossia, come suol dirsi, vogliasi da queste togliere od *eliminare* la $x$. Moltiplico perciò la prima Equazione pel 4 coefficiente della $x$ nella seconda, e pel (II. *n.* 49) ottenutone $20x + 32y = 200$, moltiplico pure la seconda Equazione data pel 5 coefficiente della $x$ nella prima, e il risultato $20x - 30y = 90$ lo scrivo al dissotto dell' altra Equazione ottenuta, e sottratta quella da questa, ne viene la terza Equazione $62y = 110$, ove più non esiste la $x$. Volendo poi dalle date Equazioni eliminare la $y$, moltiplico la prima $5x + 8y = 50$ pel coefficiente 6 della $y$ nella seconda, e moltiplico la seconda $4x - 6y = 18$ pel coefficiente 8 della $y$ nella prima, e sommati insieme i due risultati $30x + 48y = 300$, $32x - 48y = 144$, ne nasce la terza Equazione $62x = 444$ non più contenente la $y$

$$\begin{array}{r} 5x + 8y = 50 \\ \underline{4x - 6y = 18} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20x + 32y = 200 \\ \underline{20x - 30y = \ \ 90} \\ 62y = 110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30x + 48y = 300 \\ \underline{32x - 48y = 144} \\ 62x \quad = 444 \end{array}$$

Qualunque siano le Equazioni date, potremo sempre coll' accennato metodo ottenere la eliminazione di ciascuna delle incognite, avvertendo, ridotte col mezzo del (*n.* 42) amendue le incognite nel primo membro, e ciascuna in un termine solo, e fatte le sovraesposte moltiplicazioni, di sommare insieme le Equazioni, quando l' incognita da eliminarsi ha segno diverso nelle due Equazioni, e di sottrarre l' una dall' altra, quando ha il medesimo segno. Per piccola riflessione che vi faccia può ognuno vedere facilmente da se la ragione di simile operazione.

52. *Probl.* 4. Moltiplicare insieme due quantità semplici algebraiche.

*Sol.* Nella moltiplicazione delle quantità algebraiche converrà aver attenzione ai segni, ai coefficienti, ed alle lettere.

Siano $a$, $b$ le due quantità da moltiplicarsi; poichè per la loro natura non può attualmente replicarsi la quantità $a$ le volte rappresentate da $b$, come può eseguirsi tra le quantità numeriche, si è convenuto fra i Matematici di considerare eseguita la moltiplicazione, colla sola unione delle lettere senza frapporre segni, e però $ab$ rappresenterà il prodotto di $a$ per $b$. Supponghiamo ora, che il fattore $a$ divenga per esempio $3a$; dovendo perciò divenir triplo anche il prodotto (I. *n.* 49), questo diventerà $3ab$: che se il fattore $b$ divenga anch'esso per esempio $5b$, pel citato (I. *n.* 49), il prodotto dovendo farsi quintuplo, si cangierà in $15ab$: il prodotto adunque di $3a$ per $5b$ sarà $15ab$. Ora qualunque siano i coefficienti di $a$, e di $b$, il discorso si fa sempre il medesimo; dunque nella moltiplicazione di due Monomj devesi al prodotto delle lettere premettere il prodotto de' coefficienti.

Finalmente rapporto al segno da prefiggersi al prodotto, dovrà evidentemente seguirsi quanto si è detto al (*n.* 46).

53. *Scol.* 2. I. Pel (*n.* 48) è chiaro essere indifferente lo scrivere nel prodotto $ab$, o $ba$; siam però soliti per sola semplicità scrivere le lettere secondo l'ordine dell'alfabeto.

II. Siano date da moltiplicarsi insieme le quantità $5m$, $-2n$, $-4p$: avendosi $5m \times -2n = -10mn$, e $-10mn \times -4p = +40mnp$, sarà $5m \times -2n \times -4p = -10mn \times -4p = +40mnp$.

III. Debba moltiplicarsi la quantità $a$ per se medesima, il prodotto sarà $aa$; questo si moltiplichi di nuovo per $a$, otterremo il risultato $aaa$; se questo prodotto si moltiplichi nuovamente per $a$, ne verrà la espressione $aaaa$, e così di segui-

to. Per abbreviare queste espressioni, invece di *aa*, *aaa*, *aaaa*, ec. i Matematici sono soliti di scrivere $a^2$, $a^3$, $a^4$, ec. ponendo in capo, e alla destra della quantità, che si moltiplica per se medesima, un numero, che esprima le quante volte vien essa replicata.

54. *Def.* 2. Moltiplicando successivamente una quantità qualunque $a$ per se medesima, i prodotti $a^2$, $a^3$, $a^4$, ec. si dicono *potenze*, o *potestà* della quantità $a$; i numeri 2, 3, 4, ec. si chiamano i loro *esponenti*, o *indici*; e le potenze si dicono del 2.°, del 3.°, del 4° ec. *grado* secondo che gli esponenti sono i numeri 2, 3, 4, ec. ossia secondo che la $a$ nella moltiplicazione è replicata 2, 3, 4, ec. volte. La potenza seconda suole anche dirsi *quadrato*, la terza *cubo*, la quarta *quadrato-quadrato*.

55. *Scol.* 3. I. Una quantità, come la $a$, la quale non abbia esponente espresso, per analogia intendesi che abbia per esponente l' unità, cosicchè $a = a^1$.

II. È facile il conoscere la differenza che passa tra il coefficiente, e l' esponente, quello mostra le quante volte una quantità vien ripetuta sommandosi con se medesima, questo indica quante volte vien replicata tal quantità, mentre si moltiplica con se stessa: sarà $3a = a + a + a$, $a^3 = a.a.a$ e se $a = 4$, sarà $3a = 3.4 = 4 + 4 + 4 = 12$, ed $a^3 = 4^3 = 4.4.4 = 64$.

56. *Probl.* 5. Moltiplicare insieme due potenze qualisivogliano d' una medesima lettera.

*Sol.* Siano $b^2$, $b^5$ le due potenze da moltiplicarsi, otterrò il loro prodotto sovrapponendo alla quantità $b$ la somma dei due esponenti, e sarà, per conseguenza $b^2 \times b^5 = b^{2+5} = b^7$. Difatti il moltiplicare $b^5$ con $b^2$ non è che aggiungere al $b$ replicato 2 volte il $b$ replicato le volte 5; nel prodotto adun-

que venendo il $b$ ad essere ripetuto $2+5=7$ volte, sarà esso $=b^7$. Abbiamo $b^2=bb$, $b^5=bbbbb$ ; dunque sarà $b^2\times b^5=bb\times bbbbb=bbbbbbb=b^7$. Lo stesso si dice qualunque altro esponente pongasi sopra la $b$.

57. *Scol.* 4. Se sia proposta a moltiplicarsi la quantità $-4a^2b^4$ per l' altra $-6a^3b^2c$, il prodotto sarà per quanto abbiamo detto, $24a^5b^6c$.

58. *Probl.* 6. Moltiplicare fra loro due quantità algebraiche composte qualunque.

*Sol.* Scritto un fattore sotto dell' altro; si moltiplichi secondo le regole stabilite nei (n. 52, 56, 57) ciascun termine del primo per ciascun termine del secondo; si sommino insieme tutti i prodotti, che se ne ottengono, facendo giusta il (II. n. 37), la riduzione dei termini simili; ed il risultato totale, che ne viene, altro non essendo, che la somma dei prodotti di tutti i termini del moltiplicando per tutti i termini del moltiplicatore, costituirà il prodotto richiesto. Pel (I. n. 35) possiamo cominciare la operazione o a destra, o a sinistra. Siano gli esempj seguenti

M

$$\begin{array}{r} 6x^2-5ax-8b \\ 9ax \\ \hline 54ax^3-5a^2x^2-72abx \end{array}$$

P

$$\begin{array}{r} x^3+ax^2-a^2x+a^3 \\ x-a \\ \hline x^4+ax^3-a^2x^2+a^3x \\ -ax^3-a^2x^2+a^3x-a^4 \\ \hline x^4\quad *\quad -2a^2x^2+2a^3x-a^4 \end{array}$$

N

$$\begin{array}{r} x+a \\ x-a \\ \hline x^2+ax \\ -ax-a^2 \\ \hline x^2\quad *\quad -a^2 \end{array}$$

O

$$\begin{array}{r} 9b^4-7b^3m+8b^2m^2+5bm^3-m^4 \\ 7b^2-bm-4m^2 \\ \hline 63b^6-49b^5m+56b^4m^2+35b^3m^3-7b^2m^4 \\ -9b^5m+7b^4m^2-8b^3m^3-5b^2m^4+bm^5 \\ -36b^4m^2+28b^3m^3-32b^2m^4-20bm^5+4m^6 \\ \hline 63b^6-58b^5m+27b^4m^2+55b^3m^3-44b^2m^4-19bm^5+4m^6 \end{array}$$

59. *Esempio* 7. In un triangolo, di cui ignoro la lunghezza tanto della base, come della altezza, so che se aumento la base di 5 metri, e l' altezza di 2, la sua area si accresce di 29 metri quadrati, e se accresciuta la base di tre metri, diminuisco l'altezza di 4, so che la sua area, si diminuisce di 16 metri quadrati. Domandasi quali siano l' altezza, la base, e l' area del supposto triangolo.

*Sol.* Chiamato $x$ il valor della base, ed $y$ quello dell' altezza, dai Principj Geometrici sappiamo, che il valore dell' area del supposto triangolo uguaglia la metà del prodotto $xy$. Ora mentre si accresce di 5 metri la base $x$, e di 2 l'altezza $y$, il valore dell' area diviene uguale a tanti metri quadrati, quante unità si contengono nella metà del prodotto $(x+5)\times(y+2)=xy+5y+2x+10$; e così quando la base diventa $x+3$, e l' altezza $y-4$, l' area viene ad uguagliare la metà di $(x+3)(y-4)=xy+3y-4x-12$ metri quadrati. Dunque per le esposte condizioni del Problema dovrà essere $xy+5y+2x+10=xy+58$, $xy+3y-4x-12=xy-30$, e però $5y+2x=48$, $3y-4x=-18$. Col mezzo di queste due Equazioni elimino giusta i (n. 50, 51) prima la $y$, e poscia la $x$, e ottenute in simile guisa le altre due $26x=234$, $26y=156$, poichè abbiamo $234=26.9$, $156=26.6$, ne verrà $x=9$, $y=6$, e però di 9 metri lineari sarà la base, di 6 l' altezza, e di 27 metri quadrati sarà l' area del proposto triangolo, come ognuno può agevolmente verificare da se medesimo.

60. *Esempio* 8. Richiesto quanti muratori io abbia in una fabbrica, che sto facendo, e quanto lavori ciascuno di essi, rispondo; Il numero dei muratori, e il lavoro lor giornaliero è tale, che se aumentansi quelli di un numero $a$, e nel tempo stesso diminuiscasi questo giornalmente di $b$ palmi cubici di muro per ciascun muratore; oppure se si scemi di un numero $c$ il numero dei lavoratori, e nel medesimo tem-

tempo ciascheduno di essi faccia di più per ogni giorno $d$ palmi cubici di muro; il lavoro rimane sempre il medesimo. In conseguenza di ciò quanti sono i muratori, e quanti palmi cubici di fabbrica si costruisce giornalmente da ciascheduno di loro?

*Sol.* Sia $x$ il numero dei muratori, $y$ quello degli accennati palmi cubici di lavoro. Le condizioni del Problema daranno evidentemente le Equazioni $(x+a)(y-b)=xy$, $(x-c)(y+d)=xy$, e però avremo $ay-bx-ab=0$, $dx-cy-cd=0$. Affine di scuoprire il valore delle $x$, $y$, trasporto in queste due Equazioni i termini $ab$, $cd$ nel secondo membro, ed operando quì sotto, come è stato insegnato nei (*n.* 50, 51), elimino prima la $y$, e poscia la $x$, e le due Equazioni $adx-bcx=abc+acd$, $ady-bcy=abd+bcd$, che ne risultano, daranno la soluzione del Problema. Difatti supponghiamo per esempio $a=5$, $b=4$, $c=6$, $d=18$, onde sia $(x+5)(y-4)=xy$, $(x-6)(y+18)=xy$; avendosi quindi $ad=90$, $bc=24$, $abc=120$, $acd=540$, $abd=360$, $bcd=432$, le ultime due Equazioni contenenti la sola $x$, e la sola $y$ diverranno $90x-24x=120+540$, $90y-24y=360+432$, e però $66x=660$, $66y=792$, onde essendo $660=66.10$, $792=66.12$, ne verrà $x=10$, $y=12$, e per conseguenza in questo caso 10 saranno i muratori, e ciascuno d'essi farà giornalmente 12 palmi cubici di muro. Se alle $a$, $b$, $c$, $d$ si fossero attribuiti altri valori, avremmo nello stesso modo ottenute le soluzioni corrispondenti del Problema proposto.

$$\begin{array}{r} ay-bx=ab \\ -cy+dx=cd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} acy-bcx=abc \\ -acy+adx=acd \\ \hline adx-bcx=abc+acd \end{array} \qquad \begin{array}{r} ady-bdx=abd \\ -bcy+bdx=bcd \\ \hline ady-bcy=abd+bcd \end{array}$$

61. *Scol.* 5.° 1. Poichè moltiplicando $ad-bc$ per $x$, ne risulta $adx-bcx$, avremo $adx-bcx=(ad-bc)x$

(*n.°*44); per la stessa ragione si truova essere $ady - bcy = (ad - bc)y$. Dunque le precedenti due Equazioni potranno scriversi $(ad - bc)\ x = abc + acd$, $(ad - bc)\ y = abl + bcd$. Vedremo in seguito essere sovente necessario l'eseguire simili riduzioni.

II. Dall' esempio N del (*n.°*56) apparisce, che, allorquando si moltiplica la somma con la differenza di due quantità; il prodotto che ne viene uguaglia la differenza de' quadrati delle quantità medesime.

## *CAPO III.*

### *Della Divisione.*

62. *Def.* 1. Col nome di *divisione* intendesi quella operazione, per cui si cerca le quante volte, e come un numero si contiene in un altro: il primo di questi numeri dicesi *divisore*, *dividendo* il secondo, e l'altro, che indica il come, e le volte che il divisore contienesi nel dividendo, si chiama *quoto*, o *quoziente*.

Per indicare la divisione ci serviamo di una lineetta orizzontale, sopra della quale si scrive il dividendo, e sotto il divisore, o col mezzo di due punti posti verticalmente, innanzi ai quali si pone il dividendo, e dopo il divisore: così le due espressioni $\frac{12}{3}$, 12 : 3 significano 12 diviso per 3, ed equivalgono al quoziente 4.

63. *Cor.* I. Se il quoto indica le quante volte, e il senso, nel quale il divisore contienesi nel dividendo; ne segue, che col replicare il divisore quante volte, e come viene indicato dal quoziente, se ne otterrà il dividendo. Per conseguenza il dividendo uguaglierà il prodotto del divisore nel quoto.

II. Poichè questo prodotto del divisore nel quoto uguaglia il dividendo; ne viene, che se venga

dato un prodotto, ed uno de' suoi fattori, con la divisione di quello per questo si otterrà l'altro fattore.

64. *Probl.* 7. Determinare il segno da prefiggersi al quoto.

*Sol.* Dovendo il quoziente oltre le quante volte indicare ancora il senso, in cui il dividendo contiene il divisore (*n.°* 62), vedesi, che se questi numeri hanno lo stesso segno, il quoto dovrà essere sempre positivo, poichè allora il divisore si contiene nel dividendo nel modo, in cui si ritruova; che se poi sono il dividendo, e il divisore di segno contrario; il quoziente dovrà essere negativo, poichè deve indicare, che il divisore si contiene nel dividendo in un senso contrario al suo proprio.

Se il dividendo è + 12, e il divisore + 3; oppure se il dividendo è − 12, e il divisore − 3; avendosi nel primo caso + 12 = + 3 + 3 + 3 + 3, e nel secondo − 12 = − 3 − 3 − 3 − 3, vedesi che nell' un caso, e nell' altro il divisore entra nel dividendo nel senso in cui è: ora per indicare che una cosa entra in un' altra nel senso, in cui si ritrova, dobbiamo servirci del segno + (*n.°* 28); dunque al quoziente dovrà premettersi il segno +, e quindi sarà $\frac{+12}{+3} = +4$, $\frac{-12}{-3} = +4$. Che se il dividendo sia + 12, e − 3 il divisore; o − 12 il dividendo, e + 3 il divisore; giacchè abbiamo + 12 = + 3 + 3 + 3 + 3; − 12 = − 3 − 3 − 3 − 3, in amendue i casi il divisore si contiene nel dividendo in un senso al suo contrario; ma per indicar ciò dobbiamo servirci del segno − (*n.°* 23); dunque sarà $\frac{+12}{-3} = -4$, $\frac{-12}{+3} = -4$.

Di più essendo il dividendo, e il divisore dello stesso segno, se il quoziente non fosse sempre positivo, e quelli essendo di segno contrario, se il quoziente non fosse sempre negativo; dovendo il

prodotto del divisore nel quoto uguagliare il dividendo, non più si verificherebbe la regola de' segni stabilita per la moltiplicazione contro il (*n*.46). Se si volesse $\frac{-12}{-3} = -4$, bisognerebbe che fosse $-4 \times -3 = -12$ contro il ( *cit.* *n.*° 46 ).

65. *Scol.* 1.° Un quoziente positivo può esser nato egualmente da un dividendo, e da un divisore positivo, che da un dividendo, e da un divisore negativi; però avendosi tanto $\frac{+15}{+3} = +5$, quanto $\frac{-15}{-3} = +5$, sarà $\frac{+15}{+3} = \frac{-15}{-3}$; e un quoziente negativo può esser nato tanto da un dividendo positivo e da un divisor negativo, che da un dividendo negativo, e da un divisor positivo; per conseguenza avremo $\frac{+15}{-3} = \frac{-15}{+3}$, poichè si $\frac{+15}{-3} = -5$, che $\frac{-15}{+3} = -5$.

66. *Teor.* Se il dividendo, e il divisore sono scomponibili in tanti fattori, il quoziente uguaglierà il prodotto de' quoti, che risultano, col dividere ciascun fattore del dividendo per ciascun fattore corrispondente del divisore.

*Dimos.* Sia la quantità A da dividersi per l'altra B, e supposta A = al prodotto $abc$, B = $lmn$, se dalla divisione dei fattori $a$, $b$, $c$ pei rispettivi $l$, $m$, $n$ se ne ottengono in corrispondenza i quoti $p$, $q$, $r$, cosicchè si abbia $\frac{a}{l} = p$, $\frac{b}{m} = q$, $\frac{c}{n} = r$, io dico, che dovrà essere $\frac{A}{B} = pqr$. Difatti, poichè il prodotto del divisore nel quoto deve uguagliare il dividendo ( I. *n.*° 63 ), avremo $a = lp$, $b = mq$, $c = nr$, e però A = $abc$ = $lpmqnr$ ( *n.*° 52 ) = $lmnpqr$ ( I. *n.*° 53 ) = $lmn \times pqr$ = ( B × $pqr$ ), giacchè per la ipotesi abbiamo $lmn$ = B. Ma se due

cose uguali dividonsi per una stessa quantità, i quozienti, per la natura della divisione (*n.*° 62) devono risultare fra loro uguali; dunque dovrà essere $\frac{A}{B} = \frac{B(pqr)}{B}$; ma essendo B fattore del prodotto (B×*pqr*), il quoto, che nasce dalla divisione di questo (B×*pqr*) per B deve essere l'altro fattore *pqr* (II. *n.*° 63). Dunque avendosi $\frac{(B \times pqr)}{B} = pqr$, sarà $\frac{A}{B} = pqr$; e però ec.

Se sia A = 6930, B = 42. Poichè si ha 6930 = 35.18.11, 42 = 7.6.1, e $\frac{35}{7} = 5$; $\frac{18}{6} = 3$, $\frac{11}{1} = 11$, ne verrà $\frac{6930}{42} = 5.3.11 = 165$, come difatti può verificarsi effettuando la divisione attuale di 6930 per 42.

Se il numero dei fattori delle quantità A, B è diverso dal supposto, è chiaro che ha sempre luogo egualmente la esposta dimostrazione.

67. *Problema* 8. Dividere una quantità semplice algebraica qualunque per un'altra semplice qualunque.

*Sol.* 1. Converrà avere attenzione ai segni, ai coefficienti, alle lettere. Rapporto ai segni seguiremo la regola stabilita al (*n*°. 64), e in quanto ai coefficienti, e alle lettere

I. Sia data la quantità *a* da dividersi per *b*; poichè tal divisione non può effettuarsi, mi contenterò d'indicarla, e il quoziente sarà $\frac{a}{b}$: così il quoto di *mn* per *c* sarà $\frac{mn}{c}$.

II. Abbiasi il monomio 35*abp* da dividersi per l'altro 7*ab*: poichè 35*abp* = 35.*a*.*b*.*p*, e 7*ab* = 7.*a*.*b*.1 (*n.*° 52), e frattanto abbiamo $\frac{35}{7} = 5$, ed abbiamo

$\frac{a}{a}=1, \frac{b}{b}=1, \frac{p}{1}=p$, come difatti apparisce dall' osservazione, che $a=a.1$, $b=b.1$, $p=1.p$. Dunque sarà $\frac{35abp}{7ab} = 5.1.1.p=5p$ (*n.°* 66); ed in realtà $7ab \times 5p$ uguaglia $35abp$. Se sia proposto $-42amnp$ da dividersi per $-21amq$; avendosi $\frac{42}{21}=2, \frac{a}{a}=1, \frac{m}{m}=1$, e il quoto di $np$ per $q = \frac{np}{q}$, ne verrà $\frac{-42amnp}{-21amq}=2.1.1.\frac{np}{q}=\frac{2np}{q}$ (*n.* 64, 66). Donde apparisce, che per eseguire la richiesta divisione degli esposti monomj, scritto il divisore sotto del dividendo, non avremo che da cancellare le lettere, che si ritrovano egualmente e sotto e sopra, ed a queste anteporre il quoto dei coefficienti.

III. Sia proposta una potenza qualunque di $a$, per esempio $a^7$ da dividersi per un' altra qualunque $a^4$: il quoto sarà evidentemente un' altra potenza della $a$, che chiameremo $a^n$; dovrà essere pel (I. *n.* 63) $a^4 \times a^n = a^{4+n}$ (*n.°* 56). Dunque avendosi $a^{4+n}=a^7$, sarà $n+4=7$, e però $n=7-4$. Dunque essendo $\frac{a^7}{a^4} = a^{7-4}=a^3$ vedesi, che otterrò il quoto fra due potenze qualisivogliono di una medesima lettera $a$ dando a questa per esponente la differenza, che risulta dal sottrarre l' esponente del divisore dall' esponente del dividendo.

Essendo proposta la quantità $b^5c^8$ da dividersi per l'altra $b^4c^2$, giacchè $\frac{b^5}{b^4} = b^{5-4}=b^1=b$, e $\frac{c^8}{c^2}$ $=c^6$, sarà $\frac{b^5c^8}{b^4c^2} = bc^6$, e avremo $\frac{32a^4b^3mp}{-2ab^2mq} = -\frac{16a^3bp}{q}$.

68. *Scol.* 2.° I. Vogliasi dividere $a^3$ per $a^3$; per la

riflessione fatta nel (II. *n.° prec.*) dovrà essere $\frac{a^3}{a^3}=1$; ora pel (III. *n.° prec.*) $\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0$, poichè $3-3=0$; dunque sarà $a^0=1$: ma la lettera $a$ può rappresentare una quantità qualunque: dunque qualunque quantità elevata alla potenza o è sempre $=1$.

II. Abbiasi $a^0$ da dividersi per $a^4$, ne verrà $\frac{a^0}{a^4}=a^{0-4}=a^{-4}$ per essere $0-4=-4$; ma $a^0=1$; dunque sarà $a^{-4}=\frac{1}{a^4}$. Dunque, lo stesso dicendosi di tutte le potenze simili, le quali a cagione dell'esponente negativo soglionsi dir *negative*, ne segue che esse saran sempre uguali all' unità divisa per le potenze medesime prese positive. Per ciò sarà ancora $a^{-5}=\frac{1}{a^5}$, $a^{-6}=\frac{1}{a^6}$, e in generale $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

III. Data una quantità algebraica, *ordinerò* questa, come dicesi, per una data lettera, allorchè la scrivo per modo, che esista prima il termine, che contiene la potenza più grande di tal lettera, poscia il termine, in cui esiste la potenza di essa prossimamente minore, in seguito il termine avente la potenza che succede a quest' ultima immediatamente, e così in progresso. Ordinerò la quantità $a^2b-5a^2x+7x^3-9bx^2$ per la $x$, scrivendo, $7x^3-9bx^2-5a^2x+a^2b$.

69. *Probl.* 9.° Dividere una qualunque quantità intera algebraica per un' altra.

*Sol.* Se il dividendo, e il divisore non hanno alcuna lettera comune, la divisione non potrà che indicarsi, perciò il quoziente di $7ad^2-3bc^2$ per $5mp+4nq$ sarà $\frac{7ad^2-3bc^2}{5mp+4nq}$: che se vi sono lettere comuni, come ne' due Polinomj A, B posti quì sotto: ordinati questi per una medesima lettera comune $x$, siccome in C, D, divido il primo termine

del dividendo $a^2x^3$ pel primo del divisore $ax$, e scrivo in E il quoto $ax^2$; moltiplico per questo tutto il divisor C, e scrivo in F il prodotto, e faccio la sottrazione di F da D. Divido il primo termine $-7abx^2$ del residuo G pel primo $ax$ del divisore, scrivo in E il quoto $-7bx$, e moltiplicato per questo termine il divisor C, sottraggo da G il prodotto H: nulla avanzando, la quantità E sarà il quoto richiesto, e fatto in realtà il prodotto di C per E ne verrà il dividendo D.

La ragione di questa operazione, come l' operazione medesima, è la stessa che quella, che riguarda la divisione dei numeri interi determinati, con questa sola differenza, che potendo nella divisione algebraica i residui successivi risultare negativi, il che non si vuole nella divisione numerica, non è necessario ad ogni operazione, che di dividere il primo termine del dividendo pel primo del divisore, senza cercare, come si pratica nella divisione numerica, se il termine primo del divisore si contenga nel termine primo del dividendo tante volte, quante il secondo nel secondo, il terzo nel terzo, ec.

In qualunque altro caso l' operazione è sempre la medesima. Siano i seguenti esempj M, N, P, Q: in Q avvi un avanzo non più divisibile, la cui divisione però s' indicherà, come nei numeri determinati.

A $\quad ax-4b$ , B $\quad 28bx^2+a^2x^3-11abx^2$

C $\quad ax-4b$ | D $\quad a^2x^3-11abx^2+28b^2x$ | E $\quad ax^2-7bx$

F $\quad +a^2x^3-4abx^2$

G $\quad -7abx^2+28b^2x$

H $\quad -7abx^2+28b^2x$

* *

M

Divisore $5am^2 - 3b^2m + ac$

Quoto $7am^2 + 9b^2m - 4ac$

$$35a^2m^4+24ab^2m^3-27b^4m^2-13a^2cm^2+21ab^2cm-4a^2c^2$$
$$+35a^2m^4-21ab^2m^3 \qquad +7a^2cm^2$$
$$*\quad +45ab^2m^3-27b^4m^2-20a^2cm^2+21ab^2cm$$
$$+45ab^2m^3-27b^4m^2 \qquad +9ab^2cm$$
$$*\quad *\quad -20a^2cm^2+12ab^2cm-4a^2c^2$$
$$-20a^2cm^2+12ab^2cm-4a^2c^2$$
$$*\quad *\quad *$$

N

$$y-a \mid y^5-a^5 \mid y^4+ay^3+a^2y^2+a^3y+a^4$$
$$y^5-ay^4$$
$$*\quad ay^4-a^5$$
$$ay^4-a^2y^3$$
$$*\quad a^2y^3-a^5$$
$$a^2y^3-a^3y^2$$
$$*\quad a^3y^2-a^5$$
$$a^3y^2-a^4y$$
$$*\quad a^4y-a^5$$
$$a^4y-a^5$$
$$*\quad *$$

P

$$3x^2-a^2 \mid 12m^2x^3+3cnx^2-4a^2m^2x-a^2cn \mid 4m^2x+cn$$
$$12m^2x^3 \qquad -4a^2m^2x$$
$$*\quad 3cnx^2 \quad *\quad -a^2cn$$
$$3cnx^2 \qquad -a^2cn$$
$$*\quad *$$

Q

$$y^2-3by+2b^2 \mid y^3-7by^2+14b^2y-13b^3 \mid y-4b-\frac{10b^3}{y^2-3by+2b^2}$$
$$y^3-3by^2+2b^2y$$
$$*\quad -4by^2+12b^2y-13b^3$$
$$-4by^2+12b^2y-8b^3$$
$$*\quad *\quad -10b^3$$

70. *Scol.* 3. I. Siccome nel calcolo numerico, così ancora nel letterale la divisione risulta esatta in molti casi, e in moltissimi altri inesatta. In M, N, P, ( *n.° prec.* ) abbiamo esempj di divisioni esatte, ed uno ve n' ha di divisione inesatta in Q.

II. Alcune volte gli Aritmetici dicono il dividendo uguaglia il prodotto del divisore nel quoto, ed altre il dividendo uguaglia il prodotto del divisore nel quoto più l' avanzo. Ora essendo queste due espressioni evidentemente non equivalenti, a scanso di qualunque equivoco, è chiaro, che, lasciata la prima delle esposte espressioni, come si ritrova ( I. n. 63 ), dovrebbe ridursi la seconda all' altra; il dividendo uguaglia il prodotto del divisore nel quoto *esatto* più l' avanzo.

III. Da alcuni suol dirsi, che la moltiplicazione altro non è, che un compendio dell' addizione più volte ripetuta di un dato numero con se medesimo, e la divisione una determinazione abbreviata delle quante volte può sottrarsi un numero da un altro. Così mentre dico $5 . 4 = 20$, non faccio, che determinare in breve il risultato, che proviene dalla somma $5 + 5 + 5 + 5$; e quando dico $\frac{20}{5} = 4$ non faccio che determinare compendiosamente, potersi il 5 sottrarre dal 20 le volte 4. Ma conviene riflettere, che queste asserzioni si verificano bensì, mentre i numeri dati per la moltiplicazione, o per la divisione sono interi, e mentre rapporto alla prima di queste operazioni il moltiplicatore sia positivo, e rapporto alla seconda il divisore, e il dividendo abbiano ugual segno. Che se i numeri dati non sono interi; allora è facile a vedersi che le indicate asserzioni non possono più, almeno rigorosamente, aver luogo: allorchè dico $\frac{3}{7} . \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$,

oppure $\frac{\frac{6}{35}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{5}$, come potrà il $\frac{6}{35}$ esprimere, almeno a rigore di termini, un risultato provenuto dal sommarsi il $\frac{3}{7}$ con se medesimo più volte, e come il $\frac{2}{5}$ potrà indicare le volte, che il $\frac{3}{7}$ si è sottratto dal $\frac{6}{35}$? Ritenuti i due fattori della moltiplicazione interi, pongasi il moltiplicatore negativo. In questo caso la moltiplicazione sarà un compendio non già dell'addizione, ma bensì della sottrazione più volte replicata del moltiplicando: per tal modo $+5 \times -4 = -20 = -5-5-5-5$ è evidentemente il risultato, che nasce non già dal sommare, ma dal sottrarre $+5$ quattro volte. Che se facciamo il dividendo, e il divisore interi, e di segno opposto; il quoziente allora indicherà le quante volte può il divisore non già sottrarsi, ma sommarsi col dividendo: posti $-20$ il dividendo, $+5$ il divisore; se volessi determinare quante volte può il $+5$ sottrarsi dal $-20$, dovendo dire $-20-5=-25$, $-25-5=-30$, $-30-5=-35$, ec. anderei all'infinito; ma se voglio trovare quante volte può col $-20$ sommarsi il $+5$, dirò, $-20+5=-15$, $-15+5=-10$, $-10+5=-5$, $-5+5=0$, e determinerò in simile guisa potersi quest'addizione eseguir quattro volte, come appunto viene accennato dal quoto $-4 = \frac{-20}{+5}$. Questo quoto poi ottienesi negativo; poichè, siccome quando esso risulta positivo, indica, giusta la considerazione presente, sottrazione; perciò allorquando indica addizione, deve pel (n. 28) risultare di segno contrario.

71. *Esempio* 9. Due sorgenti scorrendo unifor-

mente portano le loro acque ad una Vasca della capacità $a$, e la riempiono, scorrendo il primo fonte per un numero di giornate $c$, e il secondo per un numero $d$: in seguito conduco le acque di queste due sorgenti ad un' altra vasca della capacità $b$, e la riempio, facendo scorrere entro la vasca la prima per giorni $f$, e la seconda per giorni $g$. Si domanda quant' acqua sgorghi in una giornata da ciascuno di questi due fonti.

*Sol.* Chiamata $x$ l' acqua che esce dal primo fonte, ed $y$ quella, che sgorga dal secondo in una giornata, $cx$ sarà l' acqua, che somministrerà la prima sorgente in $c$ giornate, e $dy$ l' acqua che escirà dalla seconda in giorni $d$; onde dovendo queste acque insieme unite riempire la prima vasca, sarà $cx+dy=a$. Considerando le acque, che si conducono alla seconda vasca, fatto lo stesso discorso, ne verrà $fx+gy=b$. Elimino (*n.* 50, 51) dalle due Equazioni ottenute prima la $y$, e poi la $x$, e avutene così le Equazioni $(cg-df)\,x=ag-bd$, $(cg-df)\times y=bc-af$ (*n.°* 61), divido queste pel coefficiente $cg-df$ (suol dirsi anche *coefficiente* qualunque quantità moltiplica la $x$, o la $y$, od altra incognita) ed ottengo $x=\frac{ag-bd}{cg-df}$ per l'acqua che sgorga dal primo fonte in una giornata, ed $y=\frac{bc-af}{cg-df}$ per quella che esce dal secondo nel tempo medesimo.

Abbiasi per esempio

$a=126$ metri cubici, $b=70$ metri cubici
$c=18$ giorni, $d=10$ giorni
$f=8$ giorni, $g=6$ giorni.

Risultando perciò $cg-df=28$, $ag-bd=56$, $bc-af=252$, sarà $x=\frac{56}{28}=2$, $y=\frac{252}{28}=9$, e per conseguenza dalla prima sorgente scaturiscono in un giorno 2 metri cubici d'acqua, e dalla seconda 9.

72. *Scol.* 4. I. Ad alcune delle precedenti lette-

re $a$, $b$, $c$, ec. potrebbero attribuirsi dei valori negativi; ma allora il Problema deve considerarsi in aspetto diverso. Sia per esempio $a=224$, $b=96$, $c=16$, $f=12$, $d=-16$, $g=-36$, e quindi $16x-16y=224$, $12x-36y=96$, e però $x=17$, $y=3$. I prodotti $dy$, $gy$ indicano, nel Problema proposto (*n.° prec.*) quelle quantità d'acqua, che entrando nelle due vasche, aggiungonsi alle acque $cx$, $fx$ provenienti dalla sorgente prima; ma se questi prodotti $dy$, $gy$ divengono, come nel posto esempio, negativi; allora le acque da essi rappresentate non vengono già ad aggiungersi, ma bensì a togliersi dalle rispettive $cx$, $fx$, come apparisce dalle Equazioni ottenute $16x-16y=224$, $12x-36y=96$. Dunque l'incognita $y$ invece di appartenere ad una seconda sorgente, che dia alle vasche nuov' acqua, deve riferirsi a degli scoli, che sottraggono l'acqua dalle vasche medesime.

II. Potendosi proporre infiniti altri Quesiti, i quali conducono alle Equazioni $cx+dy=a$, $fx+gy=b$ del (*n.° prec.*); ne segue, che i corrispondenti valori $x=\frac{ag-bd}{cg-df}$, $y=\frac{bc-af}{cg-df}$ potranno servire allo scioglimento d'infiniti Problemi, e che questi Problemi, riguardo al calcolo, non sono infine diversi fra loro, differendo soltanto nell' applicazione, come ognuno può agevolmente vedere, sciogliendo per se medesimo i quesiti seguenti.

*Esempio* 10.° Incontrando una truppa di poveri, parte uomini, e parte donne, somministro a ciascheduno di quelli soldi $c$, ad ognuna di queste soldi $d$, e vengo così ad impiegare $a$ soldi. Che se a ciascuno dei primi avessi dato un numero di soldi $f$, ed un numero $g$ a ciascuna delle seconde, ne avrei impiegato un numero $b$. Cercasi quanti sono gli uni, e quante le altre.

*Esempio* 11.° Con $a$ lire compro in una cantina $c$ some di vino, e $d$ di acquavite: in seguito com-

prando in altra cantina allo stesso prezzo $f$ some del primo, e $g$ del secondo, spendo $b$ lire. Dimandasi quale è stato il prezzo del vino, e quale quello dell'acquavite.

*Esempio* 12.° Un Padre richiesto dal figlio, quanti anni avessero entrambi, risponde: se dal numero $a$ sottraggo il numero de' miei anni replicato $c$ volte, risultano gli anni tuoi replicati le volte $d$; che se sottraggo gli anni tuoi ripetuti $g$ volte dal numero $b$; allora ottengonsi gli anni miei replicati le volte $f$. Quanti sono gli anni del Padre, e quanti quelli del figlio.

73. *Esempio* 13.° Tizio, Sempronio, e Cajo hanno ciascuno un credito: la somma di tali crediti uguaglia Lir. 3348; frattanto Sempronio dice a Tizio, e a Cajo, il mio credito aumentato di Lir. 11854 uguaglia il quintuplo del credito di Tizio, e il quadruplo del credito di Cajo; e Tizio, e Cajo rispondono a Sempronio, la somma de' nostri crediti uguaglia il triplo del credito vostro. Si domanda quanto sia il credito di ciascuno.

*Sol.* Sia $x$ il credito di Tizio, $y$ quello di Sempronio, e $z$ quello di Cajo; per le condizioni del Problema avremo $x+y+z=3348$; $y+11854=5x+4z$; $x+z=3y$; ossia trasportando tutte le incognite ne' primi membri, $x+y+z=3348$; $5x-y+4z=11854$; $x-3y+z=0$. Paragono insieme due di queste Equazioni per esempio le prime due, e come nei (*n.* 50, 51) ne elimino la $z$; faccio lo stesso, paragonando insieme una delle precedenti due Equazioni, per esempio la seconda con la terza, e mi risulteranno le due Equazioni $5y-x=13392$, $11y+x=11854$, dalle quali si ottiene $y=837$, $x=2647$. Sostituisco ora questi valori di $x$, e di $y$ in una delle tre prime Equazioni, per esempio nella prima, e ne verrà $z=3348-y-x=3348-2647-837=-136$. Pertanto il credito di Tizio sarà di Lir. 2647, quello di Sempronio di Lir. 837; e il valore di $z$ final-

mente essendo negativo, Cajo avrà un credito negativo, ossia un debito di Lir. 136 (*n.*° 24).

74. *Scol.* 5. I. Così ogniqualvolta ritrovasi il valore di qualche incognita negativo, dobbiam dire, che la quantità corrispondente, che si ricerca, va presa in un senso contrario all' esposto nel Problema.

II. Mentre un Problema conduce a tre Equazioni con tre incognite, per la sua soluzione si opera sempre come nel (*n.*° *prec.*): che se il Problema conduca a quattro Equazioni con quattro incognite, se ne elimina prima una nel modo sovraccennato, e riducendosi così a tre Equazioni con tre incognite, si opera poscia su queste, come precedentemente, e ottenuti per tal maniera i valori delle tre incognite si ricava colla sostituzione il valor della quarta. Lo stesso si dice qualunque sia il numero delle Equazioni, e il corrispondente delle incognite.

75. *Esempio* 14. Trovare un numero intero determinato composto di quattro cifre, tale, che sommando insieme le prime tre prese nel loro valore semplice, venga a formarsi il numero 16; sommando le prime due con la quarta, si formi 21: sommando la prima con le ultime due, si faccia 20; e dalla somma delle ultime tre, formisi 18.

*Sol.* Se il numero domandato è intero, e composto di quattro cifre, dovrà contenere delle unità, delle decine, delle centinaja, e delle migliaja. Chiamato pertanto $x$ il numero di queste ultime, $y$ il numero delle centinaja, $z$ quello delle decine, ed $u$ quello delle unità; $1000x + 100y + 10z + u$ sarà il numero domandato: $x$, $y$, $z$, $u$ saranno le quattro incognite, e per le condizioni del Problema sarà $x+y+z = 16$, $x+y+u = 21$, $x+z+u = 20$, $y+z+u = 18$. Potremo ora determinare il valore delle $x$, $y$, $z$, $u$ operando come si è detto nel (II. *n.* 74); in questo caso però potremo ritrovare i valori medesimi

più semplicemente nella maniera che segue. Pongo la somma $x+y+z+u=Z$; avendosi da ciò

$$Z-18=x$$
$$Z-20=y$$
$$Z-21=z$$
$$Z-16=u$$

Col sommare ritraggo $4Z-75=x+y+z+u=Z$, e però $3Z-75=0$, $Z=25$. Dunque sarà $x=25-18=7$, $y=25-20=5$, $z=25-21=4$, $u=25-16=9$; e per conseguenza $1000.7+100.5+10.4+9=7549$ sarà il numero dimandato.

## *CAPO IV.*

### *Delle Frazioni in generale, e dei numeri primi, e de' composti.*

76. *Scol.* 1.° I. Sia $\frac{a}{b}=c$; dovrà quindi essere il dividendo $a=bc$ (I. *n.*° 63). Supponiamo ora che $a$ divenga $ma$, e sia $\frac{ma}{b}=x$, avremo parimenti $ma=bx$: ora $ma$ è $m$ volte maggiore di $a$, dunque anche $bx$ sarà $m$ volte maggiore di $bc$, ossia sarà $bx=mbc$, e dividendo per $b$, $x=mc$. Dunque in una divisione se il dividendo diventa un qualunque numero di volte $m$ più grande di prima, tale diverrà anche il quoto.

II. Il divisore $b$ divenga $mb$, e sia $\frac{a}{mb}=x$; sarà $a=mbx$; ma $a=bc$, dunque $mbx=bc$, e fatta la divisione per $mb$, $x=\frac{c}{m}$ (*n.*° 67). Quindi divenendo il divisore $m$ volte maggiore, il quoto si farà viceversa $m$ volte minore.

III. Si cangino $a$, $b$ in $ma$, $mb$, e sia $\frac{ma}{mb}=x$,

ne

ne verrà $ma = mbx$; ma per essere $\frac{a}{b} = c$, abbiamo $a = bc$, e però $ma = mbc$ (II. *n.*° 49), dunque sarà $mbx = mbc$, e diviso per $mb$, $x = c$ (*n.*° 67). Onde se divengano $m$ volte maggiori e il dividendo, e il divisore, il quoto resterà il medesimo.

IV. Divisi i precedenti numeri $a$, $b$ per un numero $n$, siano $h$, $k$, i rispettivi quoti, cosicchè $a = nh$, $b = nk$. Ciò posto, poichè il valore del quoziente $\frac{nh}{b} = \frac{a}{b}$ pel (*prec.* I) è $n$ volte maggiore di $\frac{h}{b}$, poichè $\frac{a}{nk} = \frac{a}{b}$ pel (*prec.* II) è $n$ volte minore di $\frac{a}{k}$, e poichè finalmente pel (*prec.* III) $\frac{nh}{nk} = \frac{a}{b}$ uguaglia $\frac{h}{k}$; ne segue evidentemente, che se il dividendo $a$ diventi $n$ volte minore, cangiandosi perciò il quoto $\frac{a}{b}$ in $\frac{h}{b}$, esso pure diverrà $n$ volte minore: che se si renda $n$ volte più piccolo il divisore $b$, il quoto $\frac{a}{b}$ cambiandosi in $\frac{a}{k}$ diverrà $n$ volte più grande; e finalmente quando e il dividendo, e il divisore si rendono $n$ volte minori, il quoziente $\frac{a}{b}$ diventando $\frac{h}{k}$ rimarrà dello stesso valore.

V. Si moltiplichi un dato numero $p$ per un numero $m$, e il prodotto $mp$ si divida per un altro $n$, ne verrà $\frac{pm}{n}$: inseguito si divida il numero $p$ per $n$, e il quoto $\frac{p}{n}$ si moltiplichi per $m$: per fare una simile moltiplicazione basta replicare il dividendo $p$ le volte $m$ (*prec.* I): dunque il risultato sarà

$\frac{pm}{n}$; ma questo non è che il risultato ottenuto dapprima. Dunque si avrà sempre il medesimo risultato se un dato numero $p$ si moltiplichi prima per un numero $m$, e poi si divida per un altro $n$, o viceversa si divida prima per $n$, e poi si moltiplichi per $m$.

77. *Cor.* I. Sia $p=1$; e questa unità si divida in un numero, per esempio 8, e generalmente $n$ di parti uguali. Suppongasi di replicare una di queste ottave, o *nesime* parti un certo numero di volte, per esempio 5, in generale $m$; il risultato 5 *ottave*, od $m$ *nesime* parti dell' unità, che ne risulta, altro, per la definizione del ( *n.°* 8 ), non sarà, che una frazione. Ora nel determinare questa frazione noi non abbiamo che eseguita relativamente all' unità la seconda delle operazioni, che sonosi fatte nel ( V. *n°. prec.* ) rapporto alla $p$: dunque l' ottenutone risultato 5 *ottave*, ovvero $m$ *nesime* parti dell' unità, pel citato ( V. *n.° prec.* ) sarà uguale all' altro, che nasce, dividendo il numero $1.5=5$, per 8, oppure $1.m=m$ per $n$; e per conseguenza una frazione qualunque $m$ *nesime* parti equivale al quoto della divisione del numero $m$ per $n$; onde potrà indicarsi col segno medesimo della divisione, e scriversi $\frac{m}{n}$.

II. Poichè adunque un numero rotto equivale ad un quoto indicato, e quindi il numeratore della frazione non è che un dividendo, e il denominatore un divisore; ne segue, che dovranno anche ai rotti appartenere quelle proprietà, che relativamente ai quoti sonosi dimostrate nei ( I, II, III, IV. *n.°* 76); e per conseguenza al crescere, ed allo scemare del numeratore, deve nella stessa ragione aumentarsi corrispondentemente, o diminuirsi eziandio il valore del rotto: questo valore al contrario si diminui-

rà, o accrescerà nella stessa ragione, nella quale aumentasi, o si diminuisce il denominatore; ed esso finalmente rimarrà lo stesso, mentre il numeratore, ed il denominatore accresconsi, o si diminuiscono entrambi in egual ragione.

III. Potrà dunque una data frazione acquistare infinite forme diverse, senza punto cambiar di valore, e ciò mentre si moltiplichino, o si dividano il suo numeratore, e il suo denominatore per lo stesso numero: sarà così $\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b} = \frac{4a}{4b} =$ ec., e posto per esempio $a = 7, b = 9$, sarà $\frac{7}{9} = \frac{14}{18} = \frac{21}{27} = \frac{28}{36} =$ ec.

IV. Tra queste espressioni aventi lo stesso valore, vedesi, che la $\frac{7}{9}$, e in generale $\frac{a}{b}$, è la più semplice, o, come suol dirsi, è *ridotta ai minimi termini*, e che essa può sempre determinarsi dalle altre, dividendo il numeratore, e il denominatore di queste per quel numero comune, che li moltiplica: così dalle $\frac{28}{36}, \frac{4a}{4b}$ otterrò le rispettive espressioni più semplici $\frac{7}{9}, \frac{a}{b}$, dividendo sopra e sotto per 4.

78. *Def.* 1. Un numero intero, il quale non sia divisibile esattamente per alcun altro numero intero diverso dall' unità, come p. esempio il 13, si dice *numero primo*, o *semplice*: in caso diverso il numero si denomina *composto*, e tale è il 10, essendo esso divisibile per 2, e per 5 (*a*).

79. *Def.* 2. Due, o più numeri paragonati fra loro, se non hanno divisore esatto comune fuorchè

(*a*) È chiaro, che un numero composto altro mai non è che il prodotto di più numeri semplici.

l'unità, chiamansi *primi fra se, o fra loro*, come i due 16, 9: che se hanno un comun divisore, come i due 15, 10, misurati entrambi dal 5, si nominano *composti fra se, o fra loro*.

80. *Def.* 3. Il fattore più grande comune a due, o più dati numeri interi, dicesi il loro *massimo comun divisore*, e la loro *massima misura comune*. I due numeri 30, 70 son divisibili entrambi per 2, e per 5, ma il massimo loro divisore comune è il 10.

81. *Scol.* 2.° I. Dalle definizioni ora date vedesi agevolmente, qual differenza passa tra i numeri primi semplicemente (*n.°* 78), ed i primi fra se (*n.°* 79), quelli non possono avere assolutamente divisore alcuno $> 1$, questi solamente escludono i divisori comuni; quantunque nè l'uno, nè l'altro dei precedenti 16, 9 sia primo, o semplice, pure paragonati insieme sono primi fra loro.

II. Vedesi altresì, che due numeri primi $> 1$ sono eziandio sempre primi fra se; ma non viceversa due primi fra se sono sempre primi assolutamente.

III. Se una frazione $\frac{a}{b}$ è ridotta ai minimi termini (IV. *n.°* 77), il numeratore $a$, e il denominatore $b$ deggiono essere primi fra se. Imperciocchè se non fossero tali, supposto $a = ph$, $b = pk$ in cui $p > 1$ (*n.°* 79) ne verrebbe $\frac{a}{b} = \frac{ph}{pk} = \frac{h}{k}$ (II. *n.°* 77), e per conseguenza la frazione $\frac{a}{b}$ a cagione di $h < a$, e di $k < b$ non sarebbe più stata ridotta alla più semplice espressione, contro la ipotesi.

IV. Se due dati numeri $a$, $b$ dividonsi pel loro massimo divisor comune, che dirò $m$, i quoti, che ne vengono, deggiono essere primi fra se; imperciocchè se, non volendosi tali, avessero essi un divisor comune $> 1$, che chiamerò $n$, ambedue i dati $a$, $b$

sarebbero divisibili esattamente per $mn$, e però $m$ non sarebbe più, contro la supposizione, il loro massimo divisor comune.

82. *Teor.* 1.° Sia la frazione $\frac{a}{b}$ uguale all' altra $\frac{c}{d}$, in cui $a$, $b$, $c$, $d$ siano tanti numeri interi, e sia la $\frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini. In questa ipotesi io dico, che i due termini $c$, $d$ deggiono essere equimultipli de' corrispondenti $a$, $b$.

*Dim.* Comincio dal riflettere dover essere $c$ non $< a$, oppure $d$ non $< b$; perchè se si volesse tanto $c < a$, come $d < b$, allora la frazione $\frac{a}{b}$ per la ipotesi $= \frac{c}{d}$ non sarebbe più ridotta alla più semplice espressione; ma se si ha $c > a$, anche $d$ deve essere $> b$, perchè altrimenti la frazione $\frac{a}{b}$ sarebbe pel (II. *n.*°77) non già $=$, ma $< \frac{c}{d}$. Dunque avendosi tanto $c$ non $< a$, quanto $d$ non $< b$, ponghiamo $c = ma$, $d = nb$, in cui ciascuno de' numeri $m$, $n$ sia non $< 1$; ne verrà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ma}{nb}$. Si moltiplichi l' Equazione $\frac{a}{b} = \frac{ma}{nb}$ per $nb$; per la ragione addotta nel (V. *n.*° 76) si otterrà $\frac{nab}{b} = \frac{mnab}{nb}$, e pel (II. *n.*° 67) $na = ma$; dunque risultando $n = m$, avremo $c = ma$, $d = mb$. Ora io dico, che questo $m$ deve essere un intero: imperciocchè, se ciò si nega, dovrà essere $c$ non divisibile esattamente per $a$, e potrà quindi sempre supporsi $c = pa + h$, in cui $p$, ed $h$ siano due numeri

interi, il primo $< m$, ed il secondo $> 0$, e $< a$; ciò dunque supposto, e supposto $d = pb + k$, risultando $ma = pa + h$, $mb = pb + k$, e però $(m-p)\,a = h$, $(m-p)\,b = k$, avremo $\frac{(m-p)a}{(m-p)b} = \frac{h}{k}$, e per conseguenza $\frac{a}{b} = \frac{h}{k}$; ma questa Equazione è assurda, giacchè, per quanto si è detto poc' anzi, non può essere $h < a$. Dunque essendo $m$ numero intero, ed essendo insieme $c = ma$, $d = mb$, ne segue che ec.

33. *Scol.* 3.° I. Nella supposizione fatta nel (*n.° prec.*) è facile a vedersi, che il precedente $m$ è il massimo comun divisore de' numeri $c$, $d$; e che per conseguenza divisi questi $c$, $d$ per la loro massima comune misura, e ottenuti i quoti $a$, $b$, la frazione $\frac{a}{b}$ altro non sarà, che la $\frac{c}{d}$ ridotta alla più semplice espressione.

II. In una frazione $\frac{a}{b}$ se i termini $a$, $b$ sono primi fra loro, essa è già ridotta alla più semplice espressione.

III. Se due numeri $c$, $d$ divisi per uno stesso numero $m$, somministrano due quoti $a$, $b$ primi fra se; questo $m$ sarà il massimo comun divisore dei supposti $c$, $d$.

34. *Teor.* 2.° Se due numeri $n$, $p$ primi amendue ad un terzo $q$ si moltiplichino fra loro, ancora il prodotto $np$ sarà primo a $q$.

*Dim.* Se ciò si nega, abbiano $np$, $q$ il comun divisore $d$, e sia $np = dr$, $q = ds$, rappresentando $r$, $s$ i quoti rispettivi. I numeri $n$, $d$ saranno primi fra loro, perchè se avessero un divisor comune, l'avrebbero evidentemente ancora $n$, e $ds = q$ contro la supposizione. Ora dividendo $np = dr$ per $pd$, abbiamo $\frac{n}{d} =$

$\frac{r}{p}$ ( II. *n.*° 67 ); ma $\frac{n}{d}$ è pel ( II. *n.*° 83 ) una frazione già ridotta alla più semplice espressione: dunque i due $r$, $p$ saranno equimultipli de' corrispondenti $n$, $d$ ( *n.*° 82 ), e per conseguenza $d$ venendo ad essere divisore esatto di $p$, ed essendolo già di $q$, i due $p$, $q$ non saranno più primi fra loro; ma ciò è contro la supposizione. Dunque ec.

85. *Cor.* Sia nel ( *n.*° *prec.* ) $p = n$, ne verrà $np = n^2$ primo con $q$: quindi per lo stesso ( *n.*° *prec.* ) sarà tale ancora $n.n^2 = n^3$, e però anche $n.n^3 = n^4$, e in seguito $n.n^4 = n^5$, $n.n^5 = n^6$, ec. Dunque se si hanno due numeri $n$, $q$ primi fra se, sarà numero primo con questo $q$ eziandio una potenza qualunque di $n$; e però se $\frac{n}{q}$ è una frazione ridotta ai minimi termini, tale è ancora l'altra $\frac{n^h}{q}$; ed è facile a vedersi tale essere eziandio la terza $\frac{n^h}{q^k}$, esprimendosi dalle $h$, $k$ due interi positivi qualisivogliono.

86. *Teor.* 3.° Abbiasi un numero $n$ divisibile esattamente per altri due $p$, $q$ primi fra loro; e sia $\frac{n}{p} = h$, $\frac{n}{q} = k$; io dico, che il quoto $h$ deve essere divisibile esattamente per $q$, e l'altro $k$ per $p$.

*Dim.* Dalle $\frac{n}{p} = h$, $\frac{n}{q} = k$ ricavatesi le $n = ph$, $n = qk$ ( I. *n.*° 63 ), sarà $ph = qk$, e diviso per $hq$, avremo $\frac{p}{q} = \frac{k}{h}$; ma $p$, $q$ sono per ipotesi primi fra loro; dunque pei ( II. *n.*° 83, *n.*° 82 ) dovranno essere divisori esatti de' rispettivi $k$, $h$, e però ec.

87. *Cor.* I. Essendo il precedente $h$ divisibile esattamente per $q$, faccio $h = ql$; sarà $l$ un numero intero, ed avendosi $n = ph = pql$, ne segue, che se

un dato numero $n$ può dividersi esattamente per altri due $p, q$, primi fra se, sarà divisibile esattamente anche pel loro prodotto $pq$.

II. Sia $n$ divisibile per quantisivogliono numeri $p, q, r, s$, ec. tutti primi fra loro; io dico, che potrà esso $n$ dividersi esattamente anche pel loro prodotto $pqrs$.....Imperciocchè essendo $n$ divisibile per $p$ e per $q$, lo sarà pel loro prodotto $pq$ (*prec.*I), e quindi per $pq$, e per $r$; ma tanto $p$, come $q$ sono per ipotesi primi ad $r$; dunque essendo tale anche il prodotto $pq$ ( *n.*° 84 ), sarà $n$ divisibile ancora pel prodotto $pqr$, e però per $pqr$, e per $s$. Ora essendo tutti e tre i numeri $p, q, r$ primi con $s$, tale è ancora il prodotto $pq$, e tale per conseguenza anche l' altro $pqr$ ( *n.*° 84 ). Dunque pel citato ( *prec.* I) sarà $n$ divisibile eziandio pel prodotto $pqrs$. Così proseguendo vedesi, che ec.

III. Poichè, se i precedenti $p, q, r, s$, ec. sono tanti numeri semplici, deggiono essere primi fra se ( II. *n.*° 81 ); ne viene, che, se io determino tanti numeri primi, ciascuno de' quali sia divisore di un dato $n$; questo $n$ sarà divisibile ancora pel prodotto di due, o di tre, ec., o di tutti questi fattori.

38. *Teor.* 4.° Di due quantità $a$, $b$ aventi un massimo comun divore $m$ se si moltiplichi l' una $a$ per un numero $n$ primo all' altra $b$; anche le due quantità $na, b$ avranno lo stesso massimo divisor comune $m$.

*Dim.* Sia $a = mp$, $b = mq$; fatta la supposta moltiplicazione, avremo il risultato $an = mnp$; ma $n$ essendo primo con $b = mq$, è anche evidentemente primo con $q$, e i due numeri $p, q$ sono già primi fra loro ( IV. *n.*° 81 ). Dunque sarà ancora $np$ primo con $q$ ( *n.*° 84 ), e per conseguenza sarà $m$ il massimo divisor comune di $na = mnp$, e di $b = mq$ ( III. *n.*° 83 ).

89. *Cor.* Supponghiamo dividersi la precedente quantità $a$ per un numero $f$ primo alla $b$: chiamato $c$ il valore del quoto $\frac{a}{f}$, perchè $f$, e $b$ sono primi fra loro, pel ( *n.*° *prec.* ) la massima comune misura tra $c$, e $b$ sarà la stessa, che quella tra $fc$, e $b$, ossia tra $a$, e $b$. Dunque dividendo $a$ per un numero $f$ primo con $b$, il massimo comun divisore tra il quoto $c$, e la quantità $b$ sarà lo stesso che quello tra le due quantità $a$, $b$.

90. *Teor.* 5.° Moltiplicate le precedenti due quantità $a$, $b$ ( *n.*° 88 ), la prima per un numero $n$ primo a $b$, e la seconda per un altro $r$ primo ad $a$, io dico, che tanto la somma $na+rb$, come la differenza $na-rb$, aver dee con $a$, e con $b$ lo stesso massimo comun divisore $m$, che esiste tra $a$, e $b$.

*Dim.* Avendosi $a=mp$, $b=mq$ ( *n.*° 88 ), ne verrà $na+rb=mnp+mrq=m(np+rq)$, $na-rb=mnp-mrq=m(np-rq)$. Ora essendo tanto $r$ per la ipotesi, come $q$ pel ( IV. *n.*° 81 ) primi con $p$, tale è ancora il loro prodotto $rq$ ( *n.*° 84 ), e tale per conseguenza è anche la somma $np+rq$, e tale la differenza $np-rq$, perchè si ha $\frac{np+rq}{p}=\frac{np}{p}+\frac{rq}{p}=n+\frac{rq}{p}$, ed $\frac{np-rq}{p}=n-\frac{rq}{p}$. Dunque poichè i quoti delle divisioni delle quantità $na+rb$, $na-rb$, ed $a$ per $m$ sono rispettivamente $np+rq$, $np-rq$, $p$; ne segue ( III. *n.*° 83 ), che tanto $na+rb$, come $na-rb$ avranno con $a$ il massimo comun divisore $m$. Lo stesso si ritrova paragonando in egual modo queste quantità, $na+rb$, $na-rb$ con $b=mq$. Dunque essendo $m$ il massimo divisor comune tra $a$, e $b$, ne viene che ec.

Se fosse $n=1$, $r=1$, con discorso più semplice troverebbesi essere parimenti $m$ la misura comune

massima tra una delle due quantità $a+b$, $a-b$, e le altre $a$, $b$.

91. *Probl.* 10. Determinare se un dato numero intero determinato sia primo, o composto.

*Sol.* Dividasi il dato numero successivamente per la serie naturale de' numeri 2, 3, 4, 5, ec.; e se la divisione non riesce mai senza residuo, ciò mostra essere il numero primo: altrimenti sarà composto, e ammetterà tanti fattori, quanti sono quei numeri, che lo dividono esattamente.

Se si conoscano i numeri primi inferiori al proposto, potremo pel (n. 78) abbreviare l'operazione, dividendo solamente per questi. Potranno servire pur anche ad agevolare l'operazione medesima le proprietà de' numeri, che siam per esporre nel numero seguente. In qualunque modo però confessar dobbiamo che simile operazione, nei numeri alti, è sempre brigosa, ed è perciò, che gli Aritmetici hanno pensato meglio di formare delle Tavole, nelle quali contengansi i numeri primi, ed i divisori semplici de' composti: una di queste tavole è stata posta sul fine del primo Tomo delle presenti Lezioni, la quale giunge fino al 100000.

92. *Scol.* 4. Chiamate $a, b, c, d, e,$ ec. le cifre componenti un dato numero intero, cosicchè $a$ esprima le unità, $b$ il numero delle decine, $c$ quello delle centinaja, $d$ quello delle migliaja, ec., è chiaro, che qualunque numero intero potrà esprimersi per

$$a+10b+100c+1000d+10000e+\text{ec.}, \tag{V}$$

ove ciascuna delle cifre $a, b, c, d, e,$ ec. ha un valore non $<0$, e non $>9$. Se il numero dato sia per esempio 37504, sarà $a=4$, $b=0$, $c=5$, $d=7$, $e=3$. Con simile maniera di scrivere abbiamo sciolto il Problema del (n. 75). Ciò posto

I. Dividiamo il precedente numero (V) per 2; ne verrà il risultato

$$\frac{a}{2} + 5b + 50c + 500d + 5000e + \text{ec.}$$

II. Dividasi lo stesso numero (V) per 4. Poichè $\frac{100}{4} = \frac{10 \cdot 10}{2 \cdot 2} = 5 \cdot 5 = 25$ (n. 66), e poichè i numeri $100c = 10 \cdot 100$, $10000 = 100 \cdot 100$, ec. sono tanti multipli del 100; ne segue, che tutti i numeri 100, 1000, 10000, ec. saranno divisibili parimenti per 4, e si otterrà il quoto

$$\frac{a + 10b}{4} + 25c + 250d + 2500e + \text{ec.}$$

III. Facciasi la divisione per 8. Avendosi $\frac{1000}{8} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ (n. 66); saranno divisibili per 8 ancora tutti i numeri 10000, ec. e avremo il risultato

$$\frac{a + 10b + 100c}{8} + 125d + 1250e + \text{ec.}$$

IV. In egual modo si vede, che essendo $\frac{10000}{16} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$, tutti i numeri 100000, ec. sono divisibili per 16 esattamente, e dalla divisione del (V) per 16 ottienesi perciò

$$\frac{a + 10b + 100c + 1000d}{16} + 625e + \text{ec.}$$

Potremo nella stessa maniera progredire innanzi, dividendo per 32, per 64, ec.; e da tutto questo apparisce, che se in un intero determinato la prima cifra a destra, cioè quella delle unità, ossia la $a$ è divisibile esattamente per 2, tutto il numero potrà dividersi esattamente per 2 (prec. I); se il numero formato dalle prime due cifre, cioè dalle decine, e dalle unità, ossia $10b + a$ può dividersi esattamente per 4; sarà divisibile per 4 anche tutto il nu-

mero (prec. II); così sarà il dato numero esattamente divisibile per 8, per 16, per 32, ec., mentre sia tale il numero formato dalle ultime tre cifre, ossia $100c + 10b + a$ rapporto all' 8 (*prec.* III), il numero formato dalle ultime quattro cifre, ossia $1000d + 100c + 10b + a$ rapporto al 16 (*prec.* IV.); il numero formato dalle ultime cinque cifre rapporto al 32, e così di seguito.

V. Si divida il dato (V) per 5; giacchè essendo $\frac{10}{5} = 2$, il 10, e tutti i suoi multipli sono divisibili esattamente per 5, e però risulta il quoto

$$\frac{a}{5} + 2b + 20c + 200d + 2000e + \text{ec.},$$

ne segue, che se la cifra delle unità, ossia $a$ può dividersi esattamente per 5, si potrà dividere esattamente per 5 eziandio tutto il numero dato. Saranno quindi divisibili per 5 tutti i numeri, che terminano a destra con un 5, o con lo zero.

VI. È facile a vedersi, che il dato numero (V) ha sempre per divisore esatto il 10, quando sia $a=0$; il 100, quando abbiasi $a=0$, $b=0$; il 1000, quando $a=0$, $b=0$, $c=0$; e così di seguito.

Dati a cagione d' esempio i numeri 146, 1364, 354832, 375, 19000, il primo di essi sarà divisibile esattamente per 2 (*prec.* I), il secondo per 4 (*prec.* II), il terzo per 16 (*prec.* IV), il quarto per 5 (*prec.* V), e l' ultimo per 1000 (*prec.* VI).

VII. Dividasi il proposto (V) per 9. Risultando $\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$, $\frac{100}{9} = 11 + \frac{1}{9}$, $\frac{1000}{9} = 111 + \frac{1}{9}$, $\frac{10000}{9} = 1111 + \frac{1}{9}$, ec. si avrà il quoto

$$b + 11c + 111d + 1111e + \text{ec.} + \frac{a + b + c + d + e + \text{ec.}}{9}.$$

Dunque esso (V) sarà divisibile esattamente per 9, ogniqualvolta sia tale la somma $a+b+c+d+e+$ec.; ma questa non è che la somma delle cifre semplici

componenti il numero (V). Dunque potremo sempre conoscere se il dato numero sia divisibile esattamente per 9, osservando semplicemente, se sia divisibile per 9 la somma delle sue cifre prese nel valore lor naturale. Pertanto dirò, che il 9 divide esattamente 535167, poichè divide esattamente la somma $5+3+5+1+6+7=27$.

VIII. Suppongasi il 9 non divisore esatto dell' indicata somma, e sia $\frac{a+b+c+d+e+\text{ec.}}{9} = m + \frac{n}{9}$, essendo l'avanzo $n<9$. Il precedente quoto diventando con la sostituzione

$$b+11c+111d+1111e+\text{ec.}+m+\frac{n}{9},$$

vedesi che quando il 9 non è fattore esatto di un dato numero (V), si avrà il medesimo avanzo $n$, tanto quando si divida per 9 lo stesso (V), come quando si divida la somma delle cifre $a+b+c+d+e+\text{ec.}$

IX. Poichè il 9 è multiplo del 3, è chiaro, che quello che si è detto nei (*prec.* VII, VIII) rapporto alla divisione per 9, dicesi egualmente riguardo al 3, risultando il quoto di (V) per $3 = b + 33c + 333d + 3333e + \text{ec.} + \frac{a+b+c+d+e+\text{ec.}}{3}$,

ossia $b + 33c + 333d + 3333e + \text{ec.} + p + \frac{q}{3}$, supposto $\frac{a+b+c+d+e+\text{ec.}}{3} = p + \frac{q}{3}$, e $q<3$.

X. Se in un dato numero intero la somma delle cifre $1^a$, $3^a$, $5^a$, $7^a$ ec. uguaglia la somma delle cifre $2^a$, $4^a$, $6^a$, $8^a$, ec., esso numero sarà sempre divisibile esattamente per 11.

Supposto difatti che (V) sia il numero dato, poichè si ha

$\frac{100}{11} = 9 + \frac{1}{11}$, e però $\frac{1000}{11} = \frac{100}{11} \times 10 = 90 + \frac{10}{11}$,

$$\frac{10000}{11} = \frac{100}{11} \times 100 = 900 + \frac{100}{11} = 909 + \frac{1}{11}$$

$$\frac{100000}{11} = \frac{10000}{11} \times 10 = 9090 + \frac{10}{11},$$

$$\frac{1000000}{11} = \frac{10000}{11} \times 100 = 90900 + \frac{100}{11} = 90909 + \frac{1}{11}$$

$$\frac{10000000}{11} = \frac{1000000}{11} \times 10 = 909090 + \frac{10}{11}$$

ec.

ne verrà

$$\frac{a+10b+100c+1000d+10000e+100000f+1000000g+\text{ec.}}{11} =$$

$$9c+99d+999e+9999f+99999g+\text{ec.} +$$

$$\frac{(a+c+e+g+\text{ec.})+10(b+d+f+\text{ec.})}{11}.$$ Sia ora la somma $a+c+e+g+$ec. uguale all'altra $b+d+f+$ec.; il residuo $\frac{(a+c+e+g+\text{ec.})+10(b+d+f+\text{ec.})}{11}$ divenendo perciò $\frac{(a+c+e+g+\text{ec.})11}{11} = a+c+e+g+\text{ec.}$, il precedente quoto diventerà $9c+99d+999e+9999f+99999g+$ ec.$+a+c+e+g+$ ec., e quindi il dato numero (V) sarà divisibile esattamente per 11; ma $a+c+e+g+$ ec. non è che la somma delle cifre $1^a$, $3^a$, $5^a$, $7^a$, ec. e $b+d+f+$ec. non è che la somma delle cifre $2^a$, $4^a$, $6^a$, ec. Dunque ec. Sia 48554 il numero dato, poichè la somma $4+5+4=13$, e l'altra $8+5=13$ sono uguali fra loro; sarà esso divisibile per 11, e difatti ne verrà il quoto 4414.

XI. Sommate in un dato numero fra loro le cifre $1^a$, $4^a$, $7^a$, $10^a$, ec., quindi tra loro le cifre $2^a$, $5^a$, $8^a$, $11^a$, ec. e tra loro finalmente le cifre $3^a$, $6^a$, $9^a$, $12^a$, ec.; se i tre risultati, che ne vengono, sono tra loro uguali; il numero dato sarà divisibile esattamente per 111.

Avendosi $\frac{1000}{111} = 9 + \frac{1}{111}$, e però $\frac{10000}{111} = 90 + \frac{10}{111}$,

$\frac{100000}{111} = 900 + \frac{100}{111}$, $\frac{1000000}{111} = 9009 + \frac{1}{111}$

$\frac{10000000}{111} = 90090 + \frac{10}{111}$, $\frac{100000000}{111} = 900900 + \frac{100}{111}$, ec.;

dalla divisione del numero (V) per 111 risulterà

$9d+90e+900f+9009g+90090h+900900i$ + ec. +

$$\frac{(a+d+g+\text{ec.})+10(b+e+h+\text{ec.})+100(c+f+i+\text{ec.})}{111}$$

Facciasi presentemente $a+d+g+\text{ec.} = b+e+h+\text{ec.} = c+f+i+\text{ec.}$; per questa supposizione il precedente avanzo diventerà $\frac{(a+d+g+\text{ec.})(1+10+100)}{111} =$

$\frac{(a+d+g+\text{ec.})111}{111} = a+d+g+\text{ec.}$, ed il quoto per conseguenza, divenendo $9d+90e+900f+9009g+90090h+900900i+\text{ec.}+a+d+g+\text{ec.}$ il numero (V), in cui succede la supposta uguaglianza tra le somme delle indicate cifre, sarà divisibile per 111. Sia per esempio il numero 750249; essendo in esso $7+2=9$, $5+4=9$, $0+9=9$, potrà effettuarsi esattamente la divisione per 111, e difatti ne viene il quoto 6759.

XII. Con un discorso affatto simile a quello de' (*precedenti* X, XI) troveremo che un numero dato è sempre divisibile esattamente per 1111, ogniqualvolta siano uguali fra loro le quattro somme, che risultano unendo insieme primo le cifre $1^a$, $5^a$, $9^a$, $13^a$, ec., secondo le cifre $2^a$, $6^a$, $10^a$, $14^a$, ec., terzo le cifre $3^a$, $7^a$, $11^a$, $15^a$, ec., e quarto le cifre $4^a$, $8^a$, $12^a$, $16^a$, ec.

In egual modo si troverà esso numero divisibile esattamente per 11111, mentre siano uguali fra loro le cinque somme, che ottengonsi, unendo insieme le cifre primo $1^a$, $6^a$, $11^a$, $16^a$, ec., secondo

$2^a$, $7^a$, $12^a$, $17^a$, ec., terzo $3^a$, $8^a$, $13^a$, $18^a$, ec. quarto $4^a$, $9^a$, $14^a$, $19^a$, e quinto $5^a$, $10^a$, $15^a$, $20^a$, ec.; e così si prosegue rapporto ai divisori IIIIII, IIIIIII, ec.

XIII. Gioverà quivi il riflettere, che quantunque sian vere le proposizioni de' (*prec.* X, XI, XII), pure non son vere le inverse: non ogni volta, che un numero è divisibile per II, o per III, o per IIII, ec., avranno luogo su di esso le proprietà dimostrate nei citati (*prec.* X, XI, XII). Per esempio il numero 63118 è divisibile per **11**, eppure in questo numero non si verifica la regola del (*prec.* X) avendosi 6+1+8=15, 3+1=4: l'altro 8829828 è divisibile per III, quantunque non abbia in esso luogo la regola del (*prec.* XI), essendo 8+9+8=25, 8+8=16, 2+2=4. Potremo però stabilire altre regole, rapporto alle quali io dico, che ogniqualvolta esse si verificano, il numero dato sarà sempre rispettivamente divisibile per II, III, IIII, ec., e viceversa ogniqualvolta questi numeri II, III, IIII, ec. dividono esattamente il dato, sempre in corrispondenza si verificheranno tali regole.

XIV. Rapporto difatti in primo luogo all' II, se venga dato un intero composto di più di due cifre, per esempio il numero 937893: scritto questo in (VI) prendo la sua prima cifra a destra 3, e la pongo sotto della seconda 9, sottraggo quella da questa, e colloco la differenza, che ne viene, 6 sotto della cifra terza 8; sottraggo nuovamente questo 6 dall' 8, e scritto sotto del susseguente 7 l' avanzo 2, sottraggo, e colloco il residuo 5 sotto del 3; sottraggo questo 5 dal 13, e posta la differenza 8 sotto del 9, sottraggo finalmente questo 8 aumentato di 1 per la decina aggiunta disopra al 3, ossia sottraggo 9 dal 9 superiore, ed avendosi infine per residuo zero, io dico, che il dato numero è divisibile esattamente per II, ed il quoto che dee risultarne, altro non è, che il numero 85263 ottenuto con le successive sottrazioni.

mi. Se dalla sottrazione delle ultime due cifre fosse venuto un avanzo diverso dallo zero positivo, o negativo: allora il numero dato non sarebbe stato punto divisibile per 11.

(VI) 937893, 63118, 75892
085263 05738 34172

Così sarà divisibile esattamente per 11 il precedente 63118 venendone il quoto 5738, ma non lo sarà il 75892, poichè dalla sottrazione del 4 dall' ultima sovrapposta cifra 7 risulta l' avanzo 3.

XV. Per determinare se il dato numero sia divisibile per 111, supposto essere questo formato di un numero di cifre >3, ed essere peresempio 41586483, scrivo come precedentemente in (VII) la prima cifra a destra 3 sotto della seconda 8, e avuto l' avanzo 5, lo pongo sotto il susseguente 4: faccio quindi la somma delle due cifre ottenute, e sottraggo il risultato 5+3=8 dal sovrapposto 4 aumentato per le regole della sottrazione di 10, ossia da 14, e posto sotto del 6 il residuo 6, aggiungo a questo un' unità che porto, ed il 5 che gli è prossimo alla destra, e sottraggo la somma 6+1+5=12 dal 16; scrivo l' avanzo 4 sotto dell' 8, unisco con questo 4 l' unità che porto, il prossimo numero a destra 6, e sottratto lo 11, che ne viene, dal sovrapposto 18, colloco sotto del 5 il 7; prosieguo sottraendo la somma 7+1+4=12 dal 15, e scritta sotto dello 1 la differenza 3, sottraggo 3+1+7 dallo 11, e scritto finalmente l' avanzo zero sotto del 4, sottraggo 0+1+3=4 dal 4, e mi risulta un altro zero. Ora ciò essendo io dico, che il dato 41586483 è divisibile esattamente per 111, e che 374653 ne è il quoto, poichè, come vedremo fra poco, ogniqualvolta nell' eseguire l' operazione ora descritta gli ultimi due avanzi sono entrambi zero, il numero proposto è sempre esattamente divisibile per 111, e il numero prodottosi dalle successive sottrazioni, ne è il

quoto; non avendo ciò luogo, quando gli ultimi due residui non siano amendue zero

(VII) 41586483
00374653

XVI. Vogliasi determinare, se un dato numero fornito di più di quattro cifre per esempio 84280 6 sia divisibile esattamente per 1111. Sottratta perciò in (VIII) dalla seconda cifra 4 aumentata di 10 la prima 6 già postavi sotto, colloco il residuo 8 sotto della terza cifra zero; sottraggo quindi la somma $8+1+6=15$ dal sovrapposto zero accresciuto di 2 decine, onde poter eseguire la sottrazione, e scrivo sotto dello 8 l'avanzo 5; unisco a questo 5 il 2 per le due decine aggiunte di sopra; e i due numeri 8, 6 prossimi a destra, e sottratto il risultato $5+2+8+6=21$ dal sovrapposto 8 aumentato di 20, scrivo il residuo 7 sotto del susseguente 2; unisco col 7 ottenuto il 2, che porto per la sottrazione, ed i prossimi due numeri a destra 5, 8, e sottraggo la somma $7+2+5+8=22$ dal sovrapposto 2 accresciuto di 20; scrivo l'avanzo sotto del 4, e proseguo sottraendo $0+2+7+5=14$ dal 4 sovrapposto aumentato di 10, e collocato il residuo zero sotto dello 8, sottraggo $0+1+0+7=8$ dallo 8; e siccome essendo zero anche l'ultimo avanzo, hannosi in fine tre zeri consecutivi, io dico, che il numero dato è in realtà divisibile esattamente per 1111, e che il risultatoci 7586 ne è il quoto. Se gli ultimi tre residui non fossero stati tre zeri, allora il 1111 non sarebbe stato più un divisore esatto del dato numero.

(VIII) 84280046
0007586

XVII. Volendosi cercare se il proposto numero sia divisibile per 11111, o per 111111, ec. si opererà sempre in una maniera simile alle precedenti; avvertendo però che nella divisione per 11111 conviene formare, e sottrarre successivamente la som-

ma non già di due come nel (*prec.* XV), nè di tre come nel (*prec.* XVI), ma di quattro delle cifre, che ottengonsi consecutivamente; nella divisione per 11111 bisogna sottrarre la somma di cinque di simili cifre, e così di seguito; avvertendo inoltre, che nella prima di queste divisioni il dato numero deve avere più di cinque cifre, nella seconda più di sei, ec.; ed affinchè poi la divisione risulti esatta, deggiono nel primo caso ottenersi sul fine quattro zeri consecutivi, cinque nel secondo, e così in progresso.

Per dimostrare i metodi de' (*precedenti* XIV, XV, ec.) rapporto in primo luogo al primo di essi scrivasi in (IX) il numero 85263 risultatoci in (VI); sotto di esso pongasi esso medesimo, toltane la prima cifra a destra 3, cioè si ponga il numero 8526 in modo che il 6 corrisponda al 3, il 2 al 6, ec., e se ne faccia la somma. Poichè per la operazione praticata nel (*prec.* XIV) il 6 non è nell' esempio (VI), che la differenza fra 3 e il sovrapposto 9, il 2 che la differenza tra 6 e il sovrapposto 8, ec. cosicchè tutto lo 8526 non è che la differenza tra 85263, e il sovrapposto 93789, ne segue che la somma indicata in (IX, A) altro non dovrà essere che questo 93789. Aggiungasi ora alla destra tanto dello 8526, come del 93789 un 3 (IX, B); il 93789 diverrà perciò lo stesso 937893, che è stato proposto nel (*prec.* XIV), e lo 8526 lo stesso 85263, che si è colà ottenuto; ed il 937893 è evidentemente la somma dei due a lui in (IX, B) sovrapposti; ma ogniqualvolta l'ottenuto 85263 si moltiplica per 11, onde averne il prodotto, altro mai non si fa, come appariace in (XIV, C) che determinare l'indicata somma. Dunque essendo 937893 il prodotto che nasce dalla moltiplicazione di 85263 per 11, ne segue, che questo 85263 sarà appunto il quoto, che nasce dalla divisione per 11 del dato 937893; e però ec.

Passando al metodo del (*prec.* XV), si scriva in

(IX, D) sotto del numero 374653 risultatoci nel citato (*prec.* XV) questo stesso numero in modo, che il 5 esista sotto del 3, il 6 sotto del 5, ec.; poscia si replichi in una terza linea il medesimo numero, ma diminuito della prima cifra a destra 3, e si ponga quì pure in guisa, che il 5 esista sotto la prima cifra 3 della seconda riga, il 6 sotto del 5, ec., e infine facciasi la somma di tutti e tre questi numeri. Osservando attentamente la sottrazione successiva, che si è praticata nel (*prec.* XV), con facilità vedremo, che l' indicata somma altro essere non deve, che il numero proposto nel (*cit.*° *prec.* XV) mancante della prima cifra a destra 3, e aggiunta tal cifra tanto a questa somma, come al terzo dei numeri sovrapposti (IX. E), ne verrà lo stesso numero dato uguale alla somma dei tre, che sonovi di sopra. Ora moltiplicando 374653 per 111, vedesi dal (IX. F), che il prodotto, che ne viene, altro non è che la somma degli stessi tre numeri del (IX.E). Dunque ec.

Replicando mediante l' esposizione dei numeri, e le operazioni praticate in (IX.G,H,I) lo stesso discorso, apparirà la ragione del metodo esposto nel (*prec.* XVI); e così rapporto agli ulteriori

(IX)

| A | B | C |
|---|---|---|
| 85263 | 85263 | 85263 |
| 8526 | 75263 | 11 |
| 93789 | 937893 | 85263 |
| | | 85263 |
| | | 937893 |

| D | E | F |
|---|---|---|
| 374653 | 374653 | 374653 |
| 374653 | 374653 | 111 |
| 37465 | 374653 | 374053 |
| 4158048 | 41580483 | 374653 |
| | | 374653 |
| | | 41580483 |

| G | H | I |
|---|---|---|
| 7586 | 7586 | 7586 |
| 7586 | 7586 | 1111 |
| 7586 | 7586 | 7586 |
| 758 | 7586 | 7586 |
| 842804 | 8428046 | 7586 |
| | | 7586 |
| | | 8428046 |

È facile a vedersi il perchè si è supposto, che il numero dato contenga nel (*prec.* XIV) più di due cifre, nel (*prec.* XV) più di tre, più di quattro nel (*prec.* XVI), e così di seguito. Se esso difatti fosse rispettivamente formato di due, di tre, di quattro, ec. cifre, dovendosi in corrispondenza dividere per 11, 111, 1111, ec. il quoto non potrebbe evidentemente contenere che una sola cifra, e quindi non potrebbero aver più luogo i discorsi, e i metodi sovraindicati. In queste ipotesi però se il numero dato è divisibile esattamente pel corrispondente fra gli accennati 11, 111, 1111, ec. dovranno le cifre, che lo costituiscono, essere tutte uguali fra loro. Difatti, supposto, che il divisore sia per esempio 111, e che $a < 10$ ne sia il quoto; avendosi $111 \times a = a + 10a + 100a$, ne viene evidentemente, che, mentre il numero dato contenga per esempio tre sole cifre, non potrà dividersi esattamente per 111, quando queste tre cifre non siano uguali fra loro.

XVIII. Determinare se un dato numero, per esempio 32338, sia divisibile esattamente per 37, e in caso che sì, truovarne contemporaneamente il quoto, senza effettuare l'ordinaria operazione della divisione.

Moltiplico il dato numero per 3, sopra il prodotto, nel nostro esempio 97014, che ne viene, eseguisco l'operazione esposta nel (*prec.* XV), e allorchè gli ultimi due residui, che ottengonsi nella ope-

razione, sono amendue zero, dirò, che il dato numero è divisibile esattamente per 37, che non è tale, se succede altrimenti; e che nel primo di questi due casi il numero risultato, nell' esempio nostro 874, è il quoto richiesto. La ragione di tuttociò è facile a ritruovarsi, osservando che 37.3 = 111.

XIX. Determinare se un numero dato per esempio 39704 può esattamente dividersi per 7, truovandone, in caso che sì, contemporaneamente il quoto.

Moltiplicato il numero dato per 3, pratico sul prodotto, che ne risulta, nel nostro esempio sopra 119112, l'operazione del (*prec.* XIV), avvertendo però di raddoppiare ciascuna delle cifre, che si sottraggono. Così scritto in (X. A) il precedente 119112, e posto sotto della seconda cifra a destra 1 la prima 2, sottraggo il doppio di questa, cioè 4 dal sovrapposto 11; colloco quindi il residuo 7 sotto la terza cifra 1, e sottraggo il suo doppio 14 aumentato di 1 = 15 dal sovrapposto 21; pongo il residuo 6 sotto la quarta cifra 9, e proseguo così ad operare sino al fine, avvertendo, che il numero dato sarà divisibile esattamente per 7, mentre l' ultimo avanzo sia zero, e che il numero risultatoci, nell' esempio nostro 5672 sarà il quoto corrispondente.

Per determinar la ragione di questa operazione, osservo, che essendo 7.3 = 21, il numero dato, nell' esempio 39704, sarà sempre esattamente divisibile per 7, mentre lo sia per 21 il suo prodotto per 3, nel caso nostro 119112. Ciò posto scrivasi in (X. B) il doppio del numero truovato, nell'esempio 11344, e sotto di questo il numero medesimo in modo, che il 7 esista sotto la prima cifra 4, il 6 sotto la seconda cifra 4, e così di seguito; si sommino questi due numeri, e per quanto si è detto è chiaro, che la somma altro non è che il prodotto del numero dato per 3, ossia 119112; ma se si moltiplichi questo numero dato, ossia 5672 per 21, deve evidentemen-

te risultare lo stesso prodotto 11912. Dunque ec.

(X)

| A | B |
|---|---|
| 39704 | 11344 |
| 3 | 5672 |
| 11912 | 11912 |
| 05672 | |

XX. Potrebbero determinarsi altri numeri particolari, i quali in conseguenza di loro particolari proprietà possono, siccome i precedenti, agevolare, o ridurre ad altre operazioni più semplici le divisioni per loro medesimi, ma il nostro istituto non ci permette di più dilungarci in simile materia, e ci contenteremo di osservare che il numero dato sarà pel (I. *n.*° 87) divisibile esattamente per 6, se rapporto ad esso si verificano le proprietà de' (*prec.* I, XIX) per 15, se quelle de' (*prec.* IX, V,), ec.

XXI. Sonosi alcuni serviti delle proprietà del 9 esposte nei (*prec.* VII, VIII), onde stabilire nelle prime operazioni aritmetiche una regola di verificazione; ma da tutti gli Aritmetici essendosi tal regola riconosciuta, e dimostrata fallace, noi non ne faremo parola. Le proprietà istesse del 9 servono eziandio ad alcuni giuochi di piacere, e tra questi per darne incidentemente un' idea, esporremo il seguente.

Propongo ad un tale, che moltiplichi fra loro due numeri interi scelti da lui medesimo ad arbitrio, con questa condizione, che prima di effettuare la moltiplicazione, mostri a me un solo di questi numeri, e che a me sia lecito aggiungere ad esso una cifra, quindi gli propongo di cancellare dal prodotto, che otterrà una qualunque delle cifre, che lo compongono, purchè diversa dallo zero, di cangiare in seguito comunque a lui piaccia, l'ordine delle cifre, che rimangono; ed esibitomi il risultato, voglio indovinare, quale è il valore della cifra, che ha Egli cancellata.

Per ciò eseguire, allorchè la persona supposta

mostrami uno dei numeri da lei immaginati, faccio sollecitamente entro me la somma delle cifre, che lo formano, prendendole nel valor suo naturale, osservo quindi se questa somma è divisibile esattamente per 9, e se non lo è, vi aggiungo una cifra, che lo renda tale, cifra, la quale è chiaro, che dovrà essere $<9$. Ciò fatto, ed eseguita poscia la moltiplicazione, mentre vienemi esibito il prodotto già alterato nel sovraesposto modo, faccio anche in questo, come precedentemente, la somma delle cifre, e osservo quanto manca da questa per giugnere al primo numero di lei maggiore, che è divisibile per 9 esattamente; il numero esprimente tal differenza sarà il cancellato. La ragione di questa operazione è facile a dedursi dall' osservare, che per l' aggiunta da me fatta ad uno dei fattori, dovendo essere questo fattore pel (*prec.* VII) esattamente divisibile per 9, tale deve essere anche il prodotto, e quindi anche la somma delle sue cifre prese nel lor valore naturale.

Siano per esempio 732, 85 i numeri immaginati dalla supposta persona, e vengami mostrato il primo 732; poichè la somma $7+3+2=12$ non può dividersi esattamente per 9, vi aggiungo il 6 numero capace di renderlo tale, giacchè $7+2+3+6=18$. Fatta la moltiplicazione dei due 7326, 85, e ottenuto il prodotto 622710, venga da questo cancellato per esempio il 7, e alterato l'ordine delle cifre, che restano, mi venga esibito il numero 26120. Eseguito in questo la somma delle cifre semplici, e poichè dal risultato $2+6+1+2+0=11$ manca 7 per giungere al numero che è immediatamente superiore, e divisibile esattamente per 9, cioè al 18, dirò che 7 è il numero cancellato, come in realtà è stato fatto.

93. *Probl.* 11.° Truovare tutti i divisori esatti di un dato numero intero.

Chiamato A il numero dato, ritruovo il suo più piccolo divisor semplice > 1, che denomino $a$, e lo pongo quì sotto in (XI) alla destra di A separandolo con una verticale; divido per questo $a$ il dato numero A, e supposto $\frac{A}{a} = B$, pongo B sotto di A, e cerco il minimo divisore > 1 di B, e chiamato questo $b$, lo colloco sotto $a$. Supposto in seguito $\frac{B}{b} = C$, e supposto che $c$ sia il minimo divisore > 1 di C, scrivo rispettivamente sotto dei due B, $b$ i due C, $c$. Denominato in simile maniera D il quoto di C per $c$, e chiamato $d$ il più piccolo divisore > di 1 di D, pongo questi D, $d$ sotto rispettivamente ai due numeri C, $c$; e proseguo ad operare sempre così, finchè si giunga ad un quoziente = 1. Ciò fatto, moltiplico il fattore $a$ per l'altro $b$, e scrivo il prodotto $ab$ alla destra di $b$; moltiplico per $c$ i sovrapposti $a$, $b$, $ab$, e colloco alla destra di $c$ i prodotti $ac$, $bc$, $abc$; moltiplico per $d$ tutti i risultati, che gli sono di sopra, e posti alla sua destra tutti i prodotti, che ne vengono, seguito così a moltiplicare sino all'ultimo fattore. Eseguite queste operazioni, i numeri, che esistono in colonna alla destra e presso la retta, sono tutti i fattori primi, e gli altri tutti i divisori composti di A.

Sia per esempio A=210: ne verrà $a$=2, B=105, $b$=3, C=35, $c$=5, D=7, $d$=7, E=1, $e$=1, e ripetuta con questi numeri la precedente operazione in (XI), avremo quivi i numeri 2, 3, 5, 7, 1, che saranno tutti i divisori semplici, e gli altri 6, 10, 15, ec., i quali saranno tutti i composti del 210.

Per determinare la ragione di questa operazione, osservo, che avendosi $\frac{A}{a} = B$, $\frac{B}{b} = C$, $\frac{C}{c} = D$, $\frac{D}{d} = E$, ec., dovrà essere $A = aB$, $B = bC$, $C = cD$,

D=*d*E, ec.; ma finchè i numeri A, B, C, D, E, ec. sono > 1, ciascuno dei divisori *a*, *b*, *c*, *d*, ec. deve per la ipotesi essere > 1. Dunque dovendo essere A>B>C>D>E> ec., ed essendo A un intero dato, ed i numeri *a*, *b*, *c*, *d*, ec. tutti divisori esatti, dovremo giungere necessariamente ad un quoziente = 1, e però l'operazione dovrà aver termine. Ora sostituendo in vece delle quantità B, C, D, ec. i corrispondenti valori, ne viene A = *a*B = *ab*C = *abc*D = *abcd*E = ec. Dunque proseguito così fino all' ultimo quoto, perchè quest' ultimo quoto è l' unità, avremo A = *abcd* . . . . . 1; ma questi *a*, *b*, *c*, *d*, ec. sono per la ipotesi, e pel (*n.*° 78) tanti numeri primi; dunque essi *a*, *b*, *c*, *d*, ec. costituiranno tutti i divisori semplici di A (II. *n.*° 87); ma gli altri numeri *ab*, *ac*, *bc*, ec. si sono trovati facendo i prodotti tutti de' precedenti *a*, *b*, *c*, *d*, ec. a due, a tre, a quattro ec. Dunque essendo questi prodotti tutti i divisori composti di *abcd* . . . . 1, lo saranno ancora del dato A.

(XI)

| | |
|---|---|
| A | *a* |
| B | *b*, *ab*, |
| C | *c*, *ac*, *bc*, *abc* |
| D | *d*, *ad*, *bd*, *cd*, *abd*, *acd*, *bcd*, *abcd* |
| E | *e*, *ae*, *be*, *ce*, *de*, *abe*, *ace*, *ade*, *bce*, *bde*, |
| ec. | ec. ec. *bce*, *cde*, *abce*, *abde*, *acde*, *bcde*, *abcde* |
| 210 | 2 |
| 105 | 3, 6 |
| 35 | 5, 10, 15, 30 |
| 7 | 7, 14, 21, 35, 42, 70, 105, 210 |
| 1 | 1 |

## CAPO V.

### *Del Calcolo dei Rotti.*

94. *Probl.* 12.° Date più frazioni, ridur queste ad altre loro uguali, che abbiano un medesimo denominatore.

*Sol.* Moltiplico i termini di ciascuna delle frazioni date per tutti i divisori delle altre, e le frazioni, che ne risultano, saranno le domandate. Se i rotti dati siano per esempio $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, gli altri $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$ saranno i richiesti. Difatti con l'accennata operazione non si fa che moltiplicare il numeratore, e il denominatore di ciascheduna frazione per uno stesso numero, il che pel (II. *n.*° 77) non altera punto il suo valore; e frattanto lo stesso prodotto dei denominatori nei rotti dati serve di denominator comune nelle frazioni ottenute.

95. *Scol.* 1.° I. Se i denominatori delle frazioni proposte hanno una comune misura potremo semplificare i risultati, moltiplicando i termini di ciascun rotto pei quoti, che si ottengono dal dividere per la supposta comune misura i denominatori delle altre frazioni. Dati per ciò i rotti $\frac{a}{mp}$, $\frac{b}{mq}$, $\frac{c}{mr}$, saranno essi ridotti allo stesso denominatore negli $\frac{aqr}{mpqr}$, $\frac{bpr}{mpqr}$, $\frac{cpq}{mpqr}$.

II. Mediante la soluzione del Problema precedente potremo determinare, quale di due rotti dati sia il maggiore. Imperciocchè ridotte le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ alle $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, se vedrò essere $ad >$

$bc$, è chiaro, che dovrò conchiudere essere ancora $\frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd}$, e però $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

III. Avendosi pel (II. *n.*° 67) un intero qualunque $g = \frac{gn}{n}$, e ciò qualunque siasi $n$; e posto $n = bdf$, essendo $g = \frac{bdfg}{bdf}$: ne segue, 1.° che per ridurre un intero alla forma di rotto avente un determinato denominatore, non avremo che da moltiplicare questo intero pel denominatore proposto, e sottoporre al prodotto il denominatore medesimo; 2.° che se venga dato l'indicato intero $g$ con le precedenti frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ridurremo esso pure con queste $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, a frazioni aventi un medesimo denominatore, moltiplicandolo pel prodotto $bdf$ di tutti i denominatori, e al risultato, che ne viene, sottoponendo il prodotto medesimo.

96. *Probl.* 13.° Sommare, e sottrarre fra loro due, o più frazioni date.

*Sol.* Riducansi le date frazioni allo stesso denominatore ( *n.*° 94 ); quindi si sommino, o si sottraggano fra loro i numeratori delle frazioni risultate; finalmente alla somma, od alla differenza, che rispettivamente se ne ottiene, si sottoscriva il nuovo denominatore; e sarà per tal modo evidentemente sciolto il Problema. Date perciò le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, ne verrà $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$, ed $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$.

97. *Esem.* 15.° Determinare quali siano i Poliedri, ne' quali ciascun angolo solido è formato di $m$

angoli rettilinei, e ciascun piano è un poligono di $a$ lati. *

*Sol.* Chiamato $x$ il numero dei piani, che circondano uno de' cercati Poliedri, per la supposizione fatta $ax$ sarà il numero totale degli angoli rettilinei, che concorrono alla formazione di tutti gli angoli solidi del Poliedro medesimo; ma ciascheduno di questi angoli solidi è per la ipotesi formato da $m$ angoli rettilinei; dunque il numero totale degli stessi angoli solidi sarà $\frac{ax}{m}$. Inoltre ad ogni due lati dei Poligoni corrisponde un lato del Poliedro; dunque la somma di questi secondi lati sarà $\frac{ax}{2}$. Ora dalla Geometria si sa, che in un solido rettilineo la somma dei piani che lo circondano, e la somma dei suoi angoli solidi prese insieme superano di due unità il numero dei lati del Poliedro medesimo. Dunque dovrà essere $x + \frac{ax}{m} = \frac{ax}{2} + 2$. Riduco ora tutti i termini della presente Equazione allo stesso denominatore, e li sommo, ne verrà $\frac{2mx + 2ax}{2m} = \frac{amx + 4m}{2m}$ (n.° 94, III. 95, 96); moltiplico l'un membro, e l'altro di quest'ultima Equazione pel comun divisore $2m$, e avutane così la terza $2mx+2ax = amx+4m$ (I. n.° 63) la riduco alla $(2m+2a-am)x = 4m$ (n.° 61), e finalmente ottenuto $x = \frac{4m}{2m+2a-am}$, questa espressione $\frac{4m}{2m+2a-am}$ indicando il numero delle facce, che circondano il solido supposto, e però il genere de' Poliedri a' quali esso appartiene,

(*) Lhuilier Elémens raisonnés d'Algébre §. 24.

sciogliera il proposto Problema, ove frattanto conviene osservare, che il valore della $x$, come i valori delle $a$, $m$ devono essere evidentemente tanti numeri interi, positivi, e determinati.

Sia per esempio $a=3$, onde i Poligoni che circondano il solido siano tanti triangoli: ne verrà $x = \frac{4m}{6-m}$; ma nella formazione di un angolo solido esigonsi per lo meno tre angoli rettilinei; dunque supponendo successivamente $m=3, 4, 5, 6, 7, 8$, ec. poichè ci risulta $x$ corrispondentemente $=4, 8, 20, \frac{24}{0} - 28, -16$, ec., ne segue che nella ipotesi fatta con dei triangoli possonsi bensì formare dei Tetraedri, degli Ottaedri, e degli Icosaedri, e ciò quando sia $m$ rispettivamente $=3, 4, 5$, ma non può formarsi alcun altro Poliedro. Pongasi $m=4$, onde $x = \frac{2m}{4-m}$. Poichè col fare successivamente $m=3, 4, 5, 6$, ec. ottienesi in corrispondenza $x=6, \frac{8}{0}, -10, -6$, ec.; vedesi, che con dei quadrilateri non possonsi nella nostra supposizione formare, che degli Esaedri; e nel caso di $a=5$ la nostra equazione divenendo $x = \frac{4m}{10-3m}$ ci mostra che con dei pentagoni non possonsi nella solita supposizione costruire che dei Dodecaedri.

Sia nella $x = \frac{4m}{2m+2a-am}$ la $m=3$. Dal valore $x = \frac{12}{6-a}$, che quindi si ottiene, vedesi che qualunque valore intero $>5$ attribuiscasi alla $a$, non mai ci risulta alcun valore della $x$ intero, positivo, e determinato. Dunque nella ipotesi fatta non potendosi formar de' Poliedri, nè con degli Esa-

goni, nè con degli Ottagoni ec., ne segue che in simile supposizione con dei Poligoni del medesimo genere, sieno essi regolari, o irregolari, non possonsi formare che i cinque generi di solidi, che sonosi ora determinati.

98. *Scol.* 2.° I. Nelle precedenti determinazioni sono risultate delle frazioni, cioè le $\frac{24}{0}$, $\frac{8}{0}$, le quali hanno per denominatore lo zero: ora quale è il valore di somiglianti rotti, quale in generale è il valore della frazione $\frac{a}{0}$, in cui $a$ sia diverso dallo zero? Posto $\frac{a}{0}=x$ venendone $a=0\times x$ (I. n.° 63), non potrà $x$ essere nè zero, nè quantità finita, perchè se ciò fosse, avendosi $0\times x=0$, ne verrebbe $a=0$ contro la ipotesi. Affine però di determinare che possa significare una simile espressione, suppongasi il rotto $\frac{a}{b}$, in cui tanto $a$, come $b$ siano quantità positive, e supposto $\frac{b}{2}=c$, $\frac{b}{4}=d$, $\frac{b}{8}=e$, $\frac{b}{16}=f$, ec., si formino le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$, $\frac{a}{e}$, $\frac{a}{f}$, ec.

Pel (II. n.° 77) dovrà essere $\frac{a}{c}=2\frac{a}{b}$, $\frac{a}{d}=4\frac{a}{b}$, $\frac{a}{e}=8\frac{a}{b}$, $\frac{a}{f}=16\frac{a}{b}$, ec. Ora i denominatori $b, c, d, e, f$, ec. diminuendosi successivamente sempre della metà, possono impiccolirsi oltre qualunque quantità venga assegnata, e nel tempo stesso oltre qualunque differenza data avvicinansi allo zero, senza però poterlo mai raggiungere. Dunque le precedenti frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, ec., aumentandosi in

corrispondenza sempre del doppio, potranno giungere a superare qualunque quantità si assegni grande quanto si vuole, e nel tempo medesimo accostarsi oltre qualunque distanza data alla espressione $\frac{a}{o}$, senza poterla mai arrivare. In conseguenza di ciò siccome questa $\frac{a}{o}$ rappresenta il limite di una serie di quantità, le quali possono aumentarsi senza fine, hanno i Matematici convenuto di chiamarla *Quantità infinitamente grande*, od *infinita*.

II. Suppongasi, che nella precedente $\frac{a}{b}$, il denominatore $b$ già positivo vada continuamente scemando fino a diventar negativo. I valori della $\frac{a}{b}$ andranno corrispondentemente sempre crescendo (II. n.° 77), e quando $b$ diventa $-b$, la frazione divenendo $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ (n.° 65), si farà essa pur negativa. Ora $b$ scemandosi continuamente non può diventar negativo, senza passare per lo zero (n.° 29). Dunque il rotto $\frac{a}{b}$ mentre in corrispondenza si accresce, non potrà diventare di valor negativo senza passare per $\frac{a}{o}$, ossia, in conseguenza della denominazione data nel (*prec.* II), per un valore infinito. Dunque se una quantità, qualunque siasi, variando continuamente, giunge dallo stato positivo al negativo, non potrà far ciò, che passando per lo zero, o per l'infinito: passerà per lo zero, se la quantità data si va sempre diminuendo, per l'infinito se va aumentandosi.

III. Quale sarà il valore della frazione, se in essa sia zero non solamente il denominatore, ma an-

ancora il numeratore, ossia quale è il valore della espressione $\frac{0}{0}$? Pongasi perciò $\frac{0}{0} = x$, ne verrà $0 = 0 \times x$, ma qualunque valore finito si dia attualmente alla $x$, sempre risulta $0 \times x = 0$. Dunque questa Equazione, e però l'altra $\frac{0}{0} = x$ verificandosi sempre, qualunque siasi la $x$, ne segue, che l'espressione $\frac{0}{0}$ potrà uguagliare una quantità qualunque, e quindi sarà di un valore indeterminato.

IV. Rapporto a quanto abbiamo asserito nel (*prec.* III) conviene fare una eccezione, essendovi de' casi, ne' quali il valore della precedente $x = \frac{0}{0}$ non è altrimenti indeterminato. Per riconoscere questi casi, osserviamo poter accadere, che il numeratore, e il denominatore di un fratto divengano entrambi essenzialmente zero per la natura del rotto medesimo, e potere accadere, che gli accennati termini divengano zero, per così dire accidentalmente, in conseguenza cioè di nuove quantità introdottevi. Del primo genere sono i due rotti $\frac{z-z}{u-u}$, $\frac{z-a}{u-b}$, il primo de' quali è essenzialmente $= \frac{0}{0}$, qualunque siansi le incognite fra loro indipendenti $z$, $u$; ed il secondo è essenzialmente tale, mentre le $z$, $u$ indipendenti fra loro siano la prima $= a$, e la seconda $= b$. Del secondo genere poi sono i due rotti $\frac{z^2-z^2}{az-az}$, $\frac{z^4-a^4}{bz^2-ba^2}$; poichè riducendosi il primo di essi all'altro $\frac{z(z-z)}{a(z-z)}$, ed il secondo all'altro

$\frac{(z^2+a^2)(z^2-a^2)}{b(z^2-a^2)}$ (II. *n.*° 61) divengono bensì $\frac{0}{0}$, il primo qualunque sia la $z$, ed il secondo quando facciasi $z=a$; ma diventano tali per l' accidentale moltiplicazione del numeratore e del denominatore per $z-z$ rapporto al primo, e per $z^2-a^2$ rapporto al secondo; cosicchè, tolto questo fattor comune, fattore il quale dal ( III. *n.*° 77 ) apparisce essere estraneo al valor vero della frazione, non possono più acquistare la forma $\frac{0}{0}$, divenendo il primo $=\frac{z}{a}$, ed il secondo $=\frac{z^2+a^2}{b}$.

Ciò posto, o il rotto, che acquista la forma $\frac{0}{0}$, l' acquista per la prima delle ragioni ora indicate, oppure per la seconda: se per la prima, allora avrà sempre luogo il dimostrato nel ( *prec.* III. ), ed il rotto, per conseguenza, avrà sempre un valore indeterminato: se lo acquista per la ragione seconda; allora tolta la causa accidentale, che rendeva il numeratore, e il denominatore zero, non avrà evidentemente più luogo, quanto si asserisce nel (*prec.* III. ), e quindi la frazione non potrà più essere, come l'altra, indeterminata. Perciò delle due frazioni $\frac{z-z}{u-u}$, $\frac{z^2-z^2}{az-az}$, la prima è essenzialmente indeterminata, la seconda è determinatamente $=\frac{z}{a}$, e delle altre due $\frac{z-a}{u-b}$, $\frac{z^4-a^4}{bz^2-ba^2}$, quando si faccia $z=a$, $u=b$, la prima è necessariamente indeterminata, e la seconda acquista il valore determinato $\frac{2a^2}{b}$.

99. *Scol.* 3.° Nello sciogliere il Problema del

(n.° 97) ritruovata l'Equazione $x + \frac{ax}{m} = \frac{ax}{2} + 2$ avente delle frazioni, abbiamo quindi dedotta l'altra $2mx + 2ax = amx + 4m$ priva pienamente di rotti. Ora questa operazione, per cui una, o più Equazioni date si liberano dalle frazioni, se mai ne contengono, e che il più delle volte è necessario di fare prima di risolvere le Equazioni date, eseguiscesi sempre, siccome nel (n.° 97), riducendo tutti i termini di ciascuna Equazione al medesimo denominatore, e poscia togliendo, oppure più semplicemente non ponendovi punto il denominatore comune. Se sia data per esempio l'Equazione $\frac{ax}{b} + \frac{b}{c} = x - \frac{ac}{d}$, sarà essa liberata dai rotti nella $acdx + b^2d = bcdx - abc^2$.

100. *Probl.* 14.° Moltiplicare una frazione data per un'altra.

*Sol.* Si moltiplichino fra loro rispettivamente i numeratori, e i denominatori delle frazioni date, e la frazion che ne viene, sarà il prodotto richiesto. Difatti volendosi moltiplicare $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$, osservo, che $\frac{ac}{b}$ non è che il prodotto di $\frac{a}{b}$ per $c$ (II. n.° 77), ma $\frac{ac}{b}$ è un prodotto $d$ volte maggiore del domandato, perchè $\frac{a}{b}$ deve moltiplicarsi, non già per $c$, ma per $\frac{c}{d}$; dunque il prodotto richiesto dovendo essere $d$ volte minore di $\frac{ac}{b}$, l'otterrò moltiplicando per $d$ il denominatore $b$ (II. n.° 77), e sarà per conseguenza $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

101. *Teor.* Nella moltiplicazione delle frazioni il prodotto è sempre lo stesso, qualunque dei due fattori facciasi moltiplicatore.

*Dim.* Ciò è già noto dal (n.° 46) riguardo ai segni; riguardo poi al valore dei due fattori, potendo essere fratto uno solo di essi, e l'altro intero, e potendo essere rotti entrambi

I. Abbia luogo il primo di questi due casi, e sia per esempio l'intero 6 da moltiplicarsi pel rotto $\frac{3}{5}$. Per la natura delle frazioni abbiamo $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=3$, e pel (n.° 48) abbiamo $6\times3=3\times6$; dunque sarà ancora $6(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5})=(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5})\times6$, e però $6\times\frac{3}{5}+6\times\frac{3}{5}+6\times\frac{3}{5}+6\times\frac{3}{5}+6\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times6+\frac{3}{5}\times6+\frac{3}{5}\times6+\frac{3}{5}\times6+\frac{3}{5}\times6$. Or dalla forma istessa dei due membri di quest'ultima Equazione si vede, che $6\times\frac{3}{5}$ è una quinta parte del primo membro, e che $\frac{3}{5}\times6$ è una quinta parte del membro secondo. Dunque, di due cose uguali dovendo essere fra loro uguali anche le parti quinte, ne verrà $6\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times6$; e però ec.

II. Siano fratti tanto il moltiplicando, come il moltiplicatore, e siano questi per esempio i due $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{3}$. Per la natura de' rotti si ha $\frac{8}{3}+\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=8$, e per (*prec.* I) abbiamo $\frac{5}{7}\times8=8\times\frac{5}{7}$; dunque essen-

do ancora $\frac{5}{7}\times(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}+\frac{8}{3})=(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}+\frac{8}{3})\times\frac{5}{7}$, $\frac{5}{7}\times\frac{8}{3}+\frac{5}{7}\times\frac{8}{3}+\frac{5}{7}\times\frac{8}{3}=\frac{8}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{8}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{8}{3}\times\frac{5}{7}$, ne verrà $\frac{5}{7}\times\frac{8}{3}=\frac{8}{3}\times\frac{5}{7}$, perchè questi due risultati non sono rispettivamente, che le terze parti dei due membri nella Equazione ottenuta. Dunque ec.

Ciocchè si è dimostrato nei precedenti due casi, dimostrasi evidentemente in egual modo, qualunque siansi i fratti, che propongonsi a moltiplicare. Dunque ec.

102. *Scol.* 4.° I. Moltiplicata una qualsivoglia quantità per un rotto $\frac{a}{b}$, dalla natura della operazione (n.° 45) è facile a vedersi, che il prodotto $\frac{am}{b}$, nel caso di $a>b$, è $>m$, nel caso di $a=b$ risulta $=m$, e mentre $a<b$, diviene $<m$.

II. Potranno quindi ridursi le frazioni di frazioni a frazioni semplici. Dato per esempio il rotto di rotto $\frac{c}{d}$ di $\frac{a}{b}$ di una data quantità, poichè $\frac{1}{d}$ di $\frac{a}{b}$ non è che la *desima* parte di $\frac{a}{b}$, sarà $=\frac{a}{bd}$ (II. *n.°* 77); ora $\frac{c}{d}$ è un numero $c$ volte maggiore di $\frac{1}{d}$; dunque sarà $=\frac{a}{bd}\times c=\frac{ac}{bd}$ (II. n.° 77). Per conseguenza moltiplicando insieme i rotti, che formano una frazione di frazione, il prodotto che ne viene, sarà la corrispondente frazione semplice.

103. *Probl.* 15.° Dividere una data frazione per un' altra.

*Sol.* Scritto il divisore sotto del dividendo col porre tra loro la solita lineetta transversale, moltiplico nella frazione frazionaria, che se ne ottiene, gli estremi, ed i medj, pongo questo secondo prodotto sotto del primo, e la frazione risultata sarà il quoziente cercato. Volendo dividere $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ scrivo $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, ed eseguite le accennate moltiplicazioni, il quoto sarà $\frac{ad}{bc}$. Se fosse difatti proposto a dividersi $\frac{a}{b}$ per $c$, se ne ha il risultato $\frac{a}{bc}$ (II. n.° 77); ma dovendosi dividere $\frac{a}{b}$ non già per $c$, ma per $\frac{c}{d}$, il quoto $\frac{a}{bc}$ è $d$ volte minore del dovere; dunque il richiesto sarà $= \frac{a}{bc} \times d = \frac{ad}{bc}$ (II. n.° 77). Dunque ec.

104. *Scol.* 5.° I. Le frazioni frazionarie, quali sono le $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \frac{\frac{a}{c}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}}, \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}$, non essendo, che quozienti indicati di rotti divisi per rotti, si ridurranno coll'operazione del (n. *prec.*) a frazioni semplici, e le ora supposte saranno per conseguenza rispettivamente $= \frac{ad}{bc}, \frac{ad}{c}, \frac{a}{bc}$.

II. Data una frazione per esempio la $\frac{a}{b}$ potremo quindi ridur questa ad un' altra o semplice, o frazionaria, che abbia un dato denominatore per e-

sempio $n$; e ciò otterremo moltiplicando per questo $n$ il numeratore $a$, e al prodotto $\frac{an}{b}$ sottoscrivendo lo stesso $n$, onde sarà evidentemente $\frac{a}{b} = \frac{\frac{an}{b}}{n}$. Se $an$ è divisibile esattamente per $b$, chiamatone $m$ il quoto esatto, la frazione $\frac{m}{n}$, a cui riducesi la data $\frac{a}{b}$, sarà semplice, altrimenti sarà frazionaria. La soluzione di questo Problema tutti gli Aritmetici sanno essere necessaria per ridurre delle parti aliquote dell'unità medesima.

105. *Esempio* 16.° Domandasi quali siano i Poliedri, in cui ciaschedun angolo solido è formato con $m$ angoli rettilinei di tanti Poligoni, che abbiano $a$ lati per ciascuno, più $n$ angoli rettilinei di tanti Poligoni aventi per ciascheduno $b$ lati.

*Sol.* Siano $x$ i Poligoni di $a$ lati, ed $y$ quelli di $b$ lati. Tutti gli angoli, siccome tutti i lati di questi Poligoni sono $ax + by$: dunque $\frac{ax+by}{2}$ saranno tutti i lati del Poliedro domandato, e ciascun angolo solido contenendo per la ipotesi $m$ dei primi $ax$ angoli rettilinei, ed $n$ dei secondi $bx$, la somma di tutti gli angoli solidi dell'accennato Poliedro sarà rappresentata tanto da $\frac{ax}{m}$, come da $\frac{by}{n}$. Dunque avremo $\frac{ax}{m} = \frac{by}{n}$, e pel principio geometrico che si è indicato nel (n.° 97), avremo $x + y + \frac{ax}{m} = \frac{ax+by}{2} + 2$. Tolti da queste Equazioni i rotti,

e ottenute così le $anx = bmy$, $(2m + 2a - am)x = bm - 2m)y + 4m$, converrà per la loro soluzione passare alla eliminazione delle incognite. Potremmo a tal fine servirci del solito metodo (n.° 51); non sarà però inconveniente l'indicarne qualche altro. Prendasi pertanto da amendue le ricavate Equazioni il valore di una delle incognite, per esempio della $x$, come se gli altri termini fossero tutti cogniti, e avuti così nel nostro caso i due risultati $x = \frac{bmy}{an}$, $x = \frac{(bm-2m)y+4m}{2m+2a-am}$, osservo, che siccome due cose uguali ad una terza deggiono essere uguali fra loro, simili risultati dovranno fra loro uguagliarsi, e porrò quindi $\frac{bmy}{an} = \frac{(bm-2m)y+4m}{2m+2a-am}$.

Questa è un'Equazione, come si vede, priva della $x$; ne tolgo i rotti, la risolvo, e ottenuto il valore della $y = \frac{4amn}{2m^2b-abn^2+2abm-abmn+2amn}$, ossia $y = \frac{4an}{2bm+2an-ab(m+n)+2ab}$, lo sostituisco nella $x = \frac{bmy}{an}$, ossia $x = \frac{bm}{an} \times y$, ed effettuata la divisione per $an$, ne verrà $x = \frac{4bm}{2bm+2an-ab(m+n)+2ab}$.

Se sia $a=3$, $m=2$, $b=4$, $n=2$, trovandosi con le sostituzioni $x=8$, $y=6$, ne segue che potrà formarsi un Poliedro con 8 triangoli, e 6 quadrilateri, e però di $8+6=14$ piani, in cui ciascun angolo solido contenga due angoli de' triangoli, e due dei quadrilateri. In egual modo poichè, posto $a=6$, $m=1$, $b=5$, $n=2$, ne viene $x=5$, $y=12$, potrò con cinque Esagoni, e 12 Pentagoni formare un Poliedro di 17 piani, nel quale ciascun angolo solido contenga un angolo dell' Esagono, e due del

Pentagono. Quì pure ogniqualvolta i valori delle $x$, $y$ risultino negativi, o fratti, i Poliedri corrispondenti saranno impossibili.

106. *Scol.* 6.° I. Il precedente metodo di Eliminazione consiste in generale nel determinare da entrambe le Equazioni il valore di una stessa incognita per esempio $x$, considerando come noti tutti gli altri termini, nell' uguagliare fra loro i due risultati, che ne vengono, aventi solamente l' altra incognita $y$, e trovato da quest' ultima Equazione il valore della $y$, nel sostituirlo in una delle due Equazioni precedenti. Oltre il presente, ed oltre quello del (n.° 51) esistono ancora altri metodi di eliminazione, e tali sono i due seguenti, che sarà bene l' esporre, affinchè poi nei diversi casi particolari possa scegliersi quello, che secondo le circostanze vedesi più comodo, e più opportuno.

II. Siano perciò le due Equazioni $ax+by=c$, $gx+hy=k$; cerco il valore della $x$ dalla prima, ed avuto $x=\frac{c-by}{a}$, lo sostituisco nella seconda, ci verrà $\frac{cg-bgy}{a}+hy=k$, ossia $(ah-bg)y=ak-cg$, ed ecco un' Equazione mancante della $x$. Truovo da questa $y=\frac{ak-cg}{ah-bg}$, sostituisco nella $x=\frac{c-by}{a}$, ossia $x=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\times y$, ed avremo $x=\frac{c}{a}-\frac{abk-bcg}{a^2h-abg}$, e però $x=\frac{a^2ch-abcg-a^2bk+abcg}{a^3h-a^2bg}$, e finalmente $x=\frac{ch-bk}{ah-bg}$.

Questo metodo adunque consiste nel cercare, come precedentemente, da una sola delle Equazioni date il valore di una delle incognite, per esempio della $x$, nel sostituire questo valore nell' Equazione seconda, la quale perciò non conterrà più, che un' incognita sola, nel nostro caso la sola $y$; e deter-

minato da questa il valore della $y$, nel sostituirlo, come di sopra, in una delle Equazioni precedenti.

III. Si moltiplichi la seconda delle due Equazioni $ax+by=c$, $gx+hy=k$ per una quantità indeterminata, che dirò $m$, e si sommi con la prima Equazione il risultato $gmx+hmy=km$; otterremo

$$(a+gm)x+(b+hm)y=c+km.$$

Vogliasi ora eliminare la $x$; siccome la $m$ è di un valore indeterminato, la determino in modo, che sia $a+gm=0$; la Equazione ottenuta per questa supposizione diverrà $(b+hm)y=c+km$; ma dalla $a+gm=0$ ottienesi $m=-\frac{a}{g}$. Dunque sostituendo ne verrà

$(b-\frac{ah}{g})y=c-\frac{ak}{g}$, ossia $(bg-ah)y=cg-ak$, ed ecco così un' Equazione avente la sola $y$. Vogliasi dalle Equazioni date eliminare la $y$; invece di $a+gm$ pongo $b+hm=0$, e però $m=-\frac{b}{h}$; la Equazion precedente diventando perciò $(a+gm)x=c+km$, con la sostituzione otterremo $(a-\frac{bg}{h})x=c-\frac{bk}{h}$, ossia $(ah-bg)x=ch-bk$, Equazione avente la sola $x$.

IV. Tutti questi metodi hanno luogo eziandio se le Equazioni date, e le incognite loro siano più di due. Abbiansi difatti le tre Equazioni generali

(XII) $ax+by+cz=d$, $ex+fy+gz=h$, $ix+jy+kz=l$, ed in particolare le $\begin{cases} 3x-10y-8z=3, \\ 2x-9y+4z=-47, \\ 7x-5y+9z=-12, \end{cases}$

e vogliasene trovare rispettivamente un' altra, la quale non contenga che la sola $z$. Servendomi del primo dei sovraccennati metodi truovo da tutte e tre

le (XII) il valore della $x$, ed avuto nel caso generale $x = \frac{d-by-cz}{a}$, $x = \frac{h-fy-gz}{e}$, $x = \frac{l-jy-kz}{i}$, e nel particolare $x = \frac{3+10y+8z}{3}$, $x = \frac{-47+9y-4z}{2}$, $x = \frac{-12+5y-9z}{7}$, uguaglio il primo di questi risultati col secondo, e col terzo, e formo le Equazioni $\frac{d-by-cz}{a} = \frac{h-fy-gz}{e}$, $\frac{d-by-cz}{a} = \frac{l-jy-kz}{i}$; e le altre, $\frac{3+10y+8z}{3} = \frac{-47+9y-4z}{2}$, $\frac{3+10y+8z}{3} = \frac{-12+5y-9z}{7}$, e però le $(af-be)y+(ag-ce)z = ah-de$, $(aj-bi)y+(ak-ci)z = al-di$; e le $7y-28z = 147$, $55y+83z = -57$. Avendosi così ottenute due Equazioni con le sole due incognite $y$, $z$, elimino da queste con una delle maniere già cognite la $y$, e si avrà infine la domandata Equazione in $z$.

V. Volendo far uso del metodo del (*prec.* II) determino dalla prima delle (XII) il valore $x = \frac{d-by-cz}{a}$, $x = \frac{3+10y+8z}{3}$, e lo sostituisco nelle altre due, e risultandoci perciò le due Equazioni $\frac{de-bey-cez}{a} + fy + gz = h$, $\frac{di-biy-ciz}{a} + jy + kz = l$; $\frac{6+20y+16z}{3} - 9y+4z = -47$, $\frac{21x+70y+56z}{3} - 5y + 9z = -12$; e quindi le precedenti due $(af-be)y+(ag-ce)z = ah-de$, $(aj-bi)y+(ak-ci)z = al-di$; e le precedenti $7y-28z = 147$, $55y+33z = -57$, da esse ritrarrò, come sopra, l'Equazione con la sola $z$.

VI. Seguendo finalmente il metodo del (*prec.* III), moltiplico la seconda delle (XII) per l'indeterminata $m$, la terza per l'indeterminata $n$, e sommo con l'Equazione prima le due $emx+fmy+gmz = hm$,

$imx+jny+knz=ln$, e nel caso particolare le $2mx-9my+4mz=-47m$, $7nx-5ny+9nz=-12n$, che ne vengono. Avuta così la $(a+em+in)x+(b+fm+jn)y+(c+gm+kn)z=d+hm+ln$, e la $(3+2m+7n)x-(10+9m+5n)y-(8-4m-9n)z=3-47m-12n$, poichè si vuole un' Equazione con la sola $z$, pongo $a+em+in=0$, $b+fm+jn=0$, $3+2m+7n=0$, $10+9m+5n=0$; determino da queste con uno dei metodi già noti i valori delle incognite $m$, $n$; li sostituisco, e l' Equazione $(c+gm+kn)z=d+hm+ln$; e la $-(8-4m-9n)z=3-47m-12n$, ossia, (giacchè nel caso generale truovasi $m=\frac{bi-aj}{ej-fi}$, $n=\frac{af-be}{ej-fi}$, e nel particolare $m=-\frac{55}{53}$, $n=-\frac{7}{53}$), la Equazione $(cej-cfi+bgi-agj+afk-bek)z=dej-dfi+bhi-ahj+alf-bel$, e la $707z=-2828$, che ne risulta, sarà la richiesta. Se si avesse voluto che l' Equazione finale contenesse la sola $x$, oppure la sola $y$, avrei nel primo caso uguagliati allo zero i coefficienti delle $y$, $z$, e nel secondo i coefficienti delle $x$, $z$, determinando così opportunamente i valori delle $m$, $n$.

VII. Scrivansi le due Equazioni supposte per la eliminazione nel (*prec.* II) con dei coefficienti alle $x$, $y$ accennati nel modo, che segue

$$a'x+b'y=g'$$
$$a''x+b''y=g''.$$

Applicando a queste il metodo di eliminazione del (*prec.* III) veggo, che, avuta l' Equazione $(a'+a''m)x+(b'+b''m)y=g'+g''m$, quando voglio toglierne la $x$ mi risulta $a'+a''m=0$, e però $(b'+b''m)y=g'+g''m$, e finalmente $y=\frac{a'g''-g'a''}{a'b''-b'a''}$, e quando si vuol togliere la $y$, ottienesi $b'+b''m=0$, e però $(a'+a''m)x=g'+g''m$, e finalmente $x=\frac{b'g''-g'b''}{b'a''-a'b''}$. Ora parago-

nando le Equazioni $a'+a''m=0$, $(b'+b''m)y=g'+g''m$ con le altre $b'+b''m=0$, $(a'+a''m)x=g'+g''m$; veggo, che prescindendo dalle incognite $x$, $y$, le prime divengono le seconde, col semplice cangiarsi delle $a'$,$a''$ nelle rispettive $b'$, $b''$, e delle $b'$, $b''$ nelle $a'$, $a''$. Dunque se nel valore $\frac{a'g''-g'a''}{a'b''-b'a''}$ della $y$ si eseguisca tale cangiamento, dovrà risultarne il valore della $x$, come difatti accade, risultando $\frac{b'g''-g'b''}{b'a''-a'b''}=x$. In conseguenza di questa osservazione, potremo, mentre si voglia il valore delle due incognite $x$, $y$, abbreviare il calcolo; imperciocchè ottenuto il valore della $y$, non avremo, che da cambiare in questo $a'$ in $b'$, e $b'$ in $a'$, $a''$ in $b''$, e $b''$ in $a''$, e simile permutazione produrrà il valore della $x$ senza operazioni ulteriori.

VIII. Le tre Equazioni supposte nel (*prec.* IV) si scrivano con i coefficienti accennati come segue

$$a'x+b'y+c'z=g',$$
$$a''x+b''y+c''z=g'',$$
$$a'''x+b'''y+c'''z=g'''.$$

Pel metodo di eliminazione del (*prec.* VI) ottenuta l' Equazione $(a'+a''m+a'''n)x+(b'+b''m+b'''n)y+(c'+c''m+c'''n)z=g'+g''m+g'''n$, osservo che quando voglionsi eliminare le $x$, $y$, si formano le Equazioni $a'+a''m+a'''n=0$, $b'+b''m+b'''n=0$, e però la $(c'+c''m+c'''n)z=g'+g''m+g'''n$: quando si vogliono togliere le $x$, $z$, fannosi le Equazioni $a'+a''m+a'''n=0$, $c'+c''m+c'''n=0$, e però la $(b'+b''m+b'''n)y=g'+g''m+g'''n$; e mentre voglionsi fare scomparire le $y$, $z$, si pone $b'+b''m+b'''n=0$, $c'+c''m+c'''n=0$, e però si ha $(a'+a''m+a'''n)x=g'+g''m+g'''n$. Ora veggo che il secondo di questi casi nasce dal primo, mentre si cambino le $b'$, $b''$, $b'''$ corrispondentemente nelle $c'$, $c''$, $c'''$, e queste nelle $b'$, $b''$, $b'''$, lasciate le altre

lettere al suo luogo; e dallo stesso primo producesi il caso terzo, mentre si mutino le $a'$, $a''$, $a'''$ nelle $c'$, $c''$, $c'''$, e le $c'$, $c''$, $c'''$ nelle $a'$, $a''$, $a'''$, lasciato il restante, come si trova. Dunque ottenuto il valore della $z$, per avere gli altri della $y$, e della $x$, senza eseguire nuovi calcoli, non dovremo che eseguire sul valore di essa $z$ le permutazioni fra le lettere poc' anzi indicate; ma effettuato giusta i (*prec.* VI, VII) del primo di questi tre casi il calcolo, truovasi

$$z = \frac{(a'g''-a''g')b'''-(a'g'''-a'''g')b''+(a'g'''-a'''g')b'}{(a'c''-a''c')b'''-(a'c'''-a'''c')b''+(a''c'''-a'''c'')b'}$$ ; dunque permutate le $b'$, $b''$, $b'''$ con le $c'$, $c''$, $c'''$, avremo

$$y = \frac{(a'g''-a''g')c'''-(a'g'''-a'''g')c''+(a''g'''-a'''g'')c'}{(a'b''-a''b')c'''-(a'b'''-a'''b')c''+(a''b'''-a'''b'')c'}$$, e cambiate nel valore della $z$ le $c'$, $c''$, $c'''$ con le $a'$, $a''$, $a'''$, sarà $x = \frac{(c'g''-c''g')b'''-(c'g'''-c'''g')b''+(c''g'''-c'''g'')b'}{(c'a''-c''a')b'''-(c'a'''-c'''a')b''+(c''a'''-c'''a'')b'}$.

IX. Onde indicare delle quantità diverse, giova molte volte nel calcolo il servirsi, siccome nei (*prec.* VII, VIII), delle medesime lettere distinte fra loro con diverso numero d'apici; col mezzo di queste apparisce frequentemente più chiara la forma, e più evidente l'analogia, che hanno fra di loro i risultati, che se ne ottengono, e quindi il calcolo può rendersi, come ne' precedenti casi, più agevole, e più breve.

X. Osservando la forma dei valori delle $x, y, z$ ottenuti nei (*prec.* VII, VIII), potremo stabilire una regola pratica, onde date due, o tre Equazioni con altrettante incognite, si potrà tosto determinare il valore di ciascuna di queste, senza eseguire attualmente le accennate operazioni di eliminazione.

1.° Cominciamo dal supporre, che siano due le Equazioni date, e tali siano le supposte nel (*prec.* VII). Volendosi dapprima il valore della $y$, trascuro nel-

le Equazioni la colonna delle $y$, moltiplico quindi il coefficiente $a'$ della $x$ nell' Equazion prima pel termine cognito $g''$ della Equazione seconda; moltiplico il coefficiente $a''$ della $x$ in questa pel termine cognito $g'$ in quella, cambiandone il segno; unisco i due prodotti $a'g'', -a''g'$, cangio le quantità $g', g''$ nei coefficienti $b', b''$ della $y$, e diviso il risultato $a'g'' - a''g'$ per l' altro $a'b'' - a''b'$, sarà $y = \frac{a'g'' - a''g'}{a'b'' - a''b'}$. Per ottenere il valore dalla $x$, opero nella stessa maniera, trascurando la colonna delle $x$, moltiplicando $b'$ per $g''$, $b''$ per $-g'$, dividendo il risultato $b'g'' - b''g'$ pel precedente denominatore $a'b'' - a''b'$ cambiato di segno, e dicendo $x = \frac{b'g'' - b''g'}{b'a'' - b''a'}$.

Se per esempio

$$7x + 4y = 44$$
$$5x + 9y = 13$$

siano le Equazioni date; per la regola ora stabilita avremo

$$y = \frac{7.13 - 5.44}{7.9 - 5.4} = \frac{91 - 220}{63 - 20} = \frac{-129}{43} = -3,$$

$$x = \frac{4\,13 - 9.44}{-43} = \frac{52 - 396}{-43} = \frac{-344}{-43} = 8.$$

2.° Tre siano le Equazioni proposte, e siano le tre del (*prec.* VIII). In questo caso, mentre si voglia il valore della $z$, trascurata la colonna delle $z$, combino la prima delle tre Equazioni con la seconda, e determino quindi, come nel (*prec.* 1°) la quantità $a'g'' - a''g'$, e moltiplico questa per $b'''$ coefficiente della $y$ nella Equazione terza; combinando poscia la prima con la Equazione terza determino nella stessa guisa la $a'g''' - a'''g'$, e moltiplico questa per $-b''$ coefficiente della $y$ nella Equazione seconda preso con segno contrario; dalla combinazio-

ne infine delle Equazioni seconda, e terza truovata $a''g'''-a'''g''$, moltiplico per $b'$ coefficiente della $y$ nella Equazione prima. Ciò fatto nel risultato che nasce dalla somma di questi tre prodotti, cangio le quantità $g', g'', g'''$ rispettivamente nelle $c', c'', c'''$ coefficienti della $z$, e diviso il primo di tali risultati pel secondo, il quoto che ne proviene altro non sarà che il valore della z, come si vede nel (*prec.* VIII). Per ottenere il valore della $y$, tralascio la colonna, che contiene questa incognita; operando, come precedentemente, moltiplico i tre risultati $a'g''-a''g'$, $a'g'''-a'''g'$, $a''g'''-a'''g''$, che mi nascono, rispettivamente per $c''', -c'', c'$, li sommo, e otterrò, come apparisce dal (*prec.* VIII), il valore della $y$ col dividere questa somma pel denominatore nel valore della $z$ preso col segno contrario. Rapporto finalmente al valore della $x$, trascuratane la colonna, combino nella solita maniera i coefficienti $b', b'', b'''$ della $y$ con le quantità cognite, e moltiplicate le quantità $b'g''-b''g', b'g'''-b'''g', b''g'''-b'''g''$ corrispondentemente per $c''', -c'', c'$, sommo i prodotti, e divisa questa somma pel solito denominatore della $z$ preso col suo segno, otterrò il valore della $z$ (*prec.* VIII). Avuto il valore della $z$, si potrebbero ancora ricavare da questo i valori delle $y$, $x$, come nel citato (*prec.* VIII). Eseguendo simili operazioni sulle tre Equazioni particolari del (*prec.* IV), otterremo

$$z = \frac{(3.-47-2.3)\times-5-(3.-12-7.3)\times-9+(2.-12-7.-47)\times-10}{(3.4-2.-8)\times-5-(3.9-7.-8)\times-9+(2.9-7.4)\times-10}$$

$$= \frac{735-513-3050}{-140+747+100} = \frac{-2828}{707} = -4,$$

$$y = \frac{(3.-47-2.3)9-(3.-12-7.3)4+(2.-12-7.-47)\times-8}{-707}$$

$$= \frac{-1323+228-2440}{-707} = \frac{-3535}{-707} = 5.$$

$x =$

$$x = \frac{(-10.-47+9.3)9-(-10.-12+5.3)4+(-9.-12+5.-47)\times-8}{707}$$

$$= \frac{4473-540+1016}{707} = \frac{4949}{707} = 7.$$

Denominiamo A', A'', A''' le quantità $a'b''-a''b'$, $a'b'''-a'''b'$, $a''b'''-a'''b''$, e chiamisi B' il numeratore della $z$ nel caso 2.°. Vedesi, che A rappresenta il numeratore del valore della $y$ nel caso 1.°, e che $B' = A'b'''-A''b''+A'''b'$. Si potrebbero eseguire delle osservazioni simili ancora allorquando le Equazioni date, e le corrispondenti incognite fossero più di tre; ma rapporto a quest'argomento basterà quanto si è detto fin quì.

Se le Equazioni date fossero quattro, cinque, sei, ec. ed altrettante le incognite, gli stessi metodi opportunamente replicati potranno sempre servire.

107. *Esem.* 17.° Cercasi quali sono i Poliedri, in cui ciascun angolo solido contiene $m$ angoli rettilinei di tanti Poligoni aventi $a$ lati, più $n$ angoli di tanti Poligoni di $b$ lati, più $p$ angoli di tanti Poligoni di $c$ lati, più $q$ angoli di tanti Poligoni, i quali abbiano $d$ lati, più ec.

*Sol.* Chiamato $x$ il numero de' Poligoni di $a$ lati, $y$ il numero de' Poligoni di $b$ lati, $z$ il numero di quelli, che hanno $c$ lati, $t$ il numero di quelli di $d$ lati, ec., con lo stesso discorso dei precedenti (*n.* 97, 105) si troveranno le Equazioni $\frac{ax}{m} = \frac{by}{n}$, $\frac{ax}{m} = \frac{cz}{p}$, $\frac{ax}{m} = \frac{dt}{q}$, ec., $x+y+z+t+$ ec. $+\frac{ax}{m} = \frac{ax+by+cz+dt+\text{ec.}}{2} + 2$. Ridotta l'ultima di queste alla $(2m-am+2a)x+(2m-bm)y+(2m-cm)z+(2m-dm)t+$ ec. $=4m$, cercherò di eliminare tutte le incognite $y, z, t,$ ec., e per ciò fare, servendomi del metodo del

(II. n. 106), come del più opportuno nel caso presente, determino dalle Equazioni prime i valori $y = \frac{anx}{bm}, z = \frac{apx}{cm}, t = \frac{aqx}{dm}$, ec. li sostituisco nell' ultima, ed avendosi quindi $(2m - am + 2a)x + \frac{(2-b)anx}{b} + \frac{(2-c)apx}{c} + \frac{(2-d)aqx}{d} + \text{ec.} = 4m$, ossia $\Big((2-a)mbcd\ldots + (2-b)nacd\ldots + (2-c)pabd\ldots + (2-d)qabc\ldots + \text{ec.} + 2abcd\ldots\Big)x = 4mbcd\ldots$ sarà $x = \frac{4mbcd}{(2-a)mbcd.. + (2-b)nacd.. + (2-c)pabd.. + (2-d)qabc.. + \text{ec.} + 2abcd..}$ e però chiamato per maggior brevità Q quest' ultimo denominatore, sarà $x = \frac{4mbcd..}{Q}$, $y = \frac{4nacd..}{Q}$, $z = \frac{4pabd..}{Q}$, $t = \frac{4qabc..}{Q}$, ec. onde i Poliedri richiesti saranno dell' ordine $x + y + z + t + \text{ec.} = \frac{4(mbcd\ldots + nacd\ldots + pabd\ldots + qabc\ldots + \text{ec.})}{Q}$ ossia conterranno tanti piani, quanti vengono indicati da quest' ultimo valore. Quì pure dovendo tutte le $x, y, z, t$, ec. esprimere tanti numeri interi, e positivi; ogniqualvolta per qualcuna di esse risulti un valore rotto, o negativo, sarà impossibile l' esistenza del Poliedro corrispondente.

108. *Scol.* 7.° Essendosi nell' esposto Esempio preso indeterminato il numero delle $x, y, z, t$, ec., il Problema rimane sciolto, qualunque sia il numero dei diversi generi di Poligoni, che entrano nella formazione di Poliedri supposti; ossia rimane sciolto, come dicesi, in generale. Se il solido si vuol formato di un sol genere di piani, di quelli per esempio, che corrispondono alla $x$; allora ciascuno dei numeri $n, p, q$, ec, diverrà evidentemente $= 0$,

e ciascuno dei $b, c, d$, ec. diventerà $= 1$, ed avendosi però $Q=(2-a)m+2a$, la $x=\frac{4m}{(2-a)m+2a}$ scioglierà il Problema. Se due generi di piani debbono costituire il solido, essendo allora zero ciascuno dei $p, q$, ec.; ed essendo $=1$ ciascuno dei $c, d$, ec., ne verrà

$$x=\frac{4mb}{(2-a)mb+(2-b)na+2ab}, \quad y=\frac{4na}{(2-a)mb+(2-b)na+2ab};$$

e così di seguito. I Problemi de' (n.i 97, 105) vedesi quindi non essere, che due casi particolari di questo generale, e che però da esso vengon compresi.

109. *Probl.* 16.° Determinare il massimo comune divisore fra due numeri dati.

*Sol.* Siano A, B i due numeri proposti, siano amendue positivi, e sia A non $<$B. Divido il primo di questi pel secondo; e chiamato $a$ il quoto che ne viene, e C il residuo, onde si abbia $A=aB+C$, e $C<B$; divido nuovamente il primo divisore B per l'avanzo C; e supposto che $b$, D ne siano i corrispondenti quoziente, e residuo, onde $B=bC+D$, e $D<C$, proseguo a dividere per questo secondo avanzo D il primo B, che ha già servito di divisore; e supposto $C=cD+E$, ed $E<D$ seguito così ad operare, facendo sempre l'ultimo residuo, che si ottiene, divisore, e l'antepenultimo dividendo; e quello finalmente tra i successivi avanzi per cui riesce esatta la divisione, sarà esso il massimo comun divisore richiesto. Siano per esempio 6244, 868 i due numeri dati, avendosi A=6244, B=868, e però, come apparisce dalla operazione eseguita quì sotto, essendo $a=7$, C=168, $b=5$, D=28, $c=6$, E=0, il massimo comun divisore dei dati 6244, 868 sarà 28.

Posti A, B due numeri interi positivi determinati, e però di valore finito, poichè i successivi residui C, D, E, ec. sono essi pure tanti interi po-

sitivi di valore finito, i quali vanno continuamente decrescendo; ne segue che col proseguire della operazione, dovremo necessariamente arrivare ad uno di questi residui, il quale sarà zero. Tale pertanto supposto, che sia l'avanzo, il quale viene dalla divisione del numero D per E, cosicchè quest'ultima divisione risulti esatta, ed abbiasi quindi $D = dE$; osservo che questo E essendo divisore esatto di se medesimo, ed essendolo per la ipotesi di $D = dE$, tale sarà ancora della somma $cD + E$, e però del numero C. Ora $B = bC + D$; dunque E il quale divide esattamente tanto D, come C, dividerà esattamente anche B; ma $A = aB + C$; dunque lo stesso E contenendosi esattamente in C, ed in B, si conterrà esattamente anche in A, e sarà esso E per conseguenza divisor comune dei dati numeri A, B. Aggiungo poi che ne deve essere il divisore massimo. Imperocchè se, ciò negandosi, si volesse, che tanto A, come B fossero divisibili esattamente per un altro numero, che dirò G, $> E$; osservo, che dovrebbe essere divisibile esattamente per G anche la differenza $A - aB$, e però il numero C; quindi dovrebbe esserlo anche l'altra $B - bC$, e però l'avanzo D, e finalmente anche la terza $C - cD$, e però il residuo E; ma ciò è impossibile, perchè avendosi per la supposizione $G > E$, non può un numero minore essere esattamente divisibile per un maggiore. Dunque essendo ancora impossibile, che esista un numero $> E$, il quale contengasi esattamente in entrambi i numeri A, B, ne segue, che questo E ne sarà il massimo divisor comune. Ho supposto zero il residuo dalla divisione per E, ma se fosse stato tale il residuo dalla divisione per F, o per G, ec.; allora non più E, ma F, oppure G, ec. sarebbe stato in corrispondenza il comune massimo divisore, e la dimostrazione è sempre la medesima. Che se uno, od amendue i dati A, B fossero negativi, li ridurrei positivi, e quel

numero, il quale con l' indicato metodo troverei massimo comun divisore di questi positivi, è chiaro che sarebbe tale ancora dei supposti A, B forniti del primo lor segno.

$$\begin{array}{r|l|l} 868 & 6244 & 7 \\ & 2071 & \\ \hline 168 & 868 & \\ & 840 & 5 \\ \hline 28 & 168 & \\ & 168 & 6 \\ \hline & * & \end{array}$$

110. *Scol.* 8.° I. Se nella precedente operazione riesca esatta la prima divisione, quella cioè di A per B; allora esso B sarà il massimo comun divisore. Che se l' ultimo residuo, quello cioè per cui la divisione risulta esatta, è l' unità; essendo allora 1 la massima comune misura tra A, e B; saranno questi A, B primi fra loro.

II. Vogliasi il massimo comun divisore fra i tre numeri A, B, C. Lo cerco in primo luogo col precedente metodo fra i due A, B, e chiamato questo $m$, lo cerco in seguito tra i due $m$, C. L' ultimo risultato, che ne viene, essendo massimo comun divisore fra i due $m$, C, sarà ancora evidentemente il massimo comun divisore dei tre A, B, C. Se i numeri dati sono più di tre, siano per esempio i cinque A, B, C, D, E. Allora, trovato il massimo divisore $m$ dei due A, B, e poscia il massimo dei due $m$, C, che dirò $n$, proseguo a cercare la massima misura comune tra i numeri $n$, D, e chiamata questa $p$, la cerco finalmente tra i due $p$, E; e il risultato, che finalmente se ne ricava, sarà il massimo comun divisore tra le cinque quantità date.

III. *Probl.* 17.° Vogliasi il massimo comun divisore fra due dati Polinomj.

*Sol.* Siano qui sotto in (XIII) L, M i due Polinomj dati. Ordinati questi per una lettera loro co-

mune, nel nostro caso per la $x$, comincio dal fare divisore quello tra essi, che ha il massimo esponente della $x$ più piccolo, ossia nell'esempio nostro M, e dividendo l'altro, ossia L. Ora mentre mi pongo ad eseguire l'operazione, veggo nel caso presente, che siccome il 3 non è divisibile per 4, la divisione del primo termine $3x^3$ pel primo $4x^2$ riescirebbe inesatta: per evitare adunque un simile inconveniente, prima di dividere, moltiplico L per 4, sicuro pel (n.° 88) di non turbare il massimo comun divisore richiesto, perchè M non è divisibile nè per 4, nè per alcun fattore del 4; ed ottenuto così il'prodotto N, divido questo per M, e pongo in P il quoziente $4x$. Sottratto in seguito da N il prodotto di M per $4x$, nella differenza che risulta Q, osservo, che esiste il fattore $y$, il quale è primo ad M, e osservo che il primo coefficiente 3 non è divisibile per 4; dunque potrò pei (n. 89, 88) dividere Q per $y$, e moltiplicarlo per 4 senza turbare il massimo comun divisore tra M, e Q; ma essendo evidentemente $Q=N-3xM$, e però $Q=4L-3xM$, il massimo divisor comune tra M, e Q è lo stesso che quello tra L, ed M (n.° 90). Dunque per l'accennata divisione di Q per $y$ e la successiva sua moltiplicazione per 4 non turbandosi la massima comune misura tra L, ed M, eseguirò successivamente queste due operazioni in R, ed S. Ciò fatto, avendosi per la divisione di S per M il quoto 3, lo scrivo in P, e fatta quindi la sottrazione da S del prodotto di M in 3, poichè il residuo T, che se ne ha, e divisibile esattamente per $19y$, eseguisco pel citato (n. 89) tal divisione, e posto il risultato in V, osservo, che in questo avanzo l'esponente della $x$ è divenuto minore di quello che sia in M; faccio perciò V divisore, ed M dividendo, e riescendo la divisione di queste due quantità esatta, sarà V, ossia $x-y$, il comune divisor domandato.

(XIII)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | L | | M |
| | $y^2x-3yx^2-y^3+3x^3$ | | $4x^2+y^2-5yx$ |
| | M | L | P |
| | $4x^2-5yx+y^2$ | $3x^3-3yx^2+y^2x-y^3$ | $3x+3$ |
| | N | $12x^3-12yx^2+4y^2x-4y^3$ | |
| | | $12x^3-15yx^2+3y^2x$ | |
| | Q | $3yx^2+y^2x-4y^3$ | |
| | R | $3x^2+yx-4y^2$ | |
| | S | $12x^2+4yx-16y^2$ | |
| | | $12x^2-15yx+3y^2$ | |
| | T | $19yx-19y^2$ | |
| | | M | |
| | V | $x-y$ $4x^2-5yx+y^2$ | $4x-y$ |
| | | $4x^2-4yx$ | |
| | | $-yx+y^2$ | |
| | | $-yx+y^2$ | |
| | | * * | |

112. *Scol.* 9.° Se dopo le successive divisioni scomparisca nella precedente operazione la lettera comune, per cui le due quantità furono ordinate, rimanendo un avanzo; ciò mostra, che tal lettera non entra nel massimo comun divisore: conviene adunque tentar di nuovo tutta l' operazione, ordinando per un' altra lettera loro comune le quantità date; se neppure dopo questo riesce l' operazione esatta, bisogna reiterarla, ordinando per altre lettere comuni; e se tentati tutti i casi l' operazione riesce sempre inesatta, diremo allora, che le proposte quantità sono prime fra loro.

113. *Probl.* 18.° Ridurre una frazione qualunque $\frac{A}{B}$ alla sua più semplice espressione.

*Sol.* Truovato il massimo comun divisore tra A, e B, pel (1. n.° 83) non avremo che da dividere

per esso i due termini A, B, e il rotto formato con i due quoti, che ne risultano sarà il domandato.

114. *Scol.* 10.° I. Dopo avere eseguita l' operazione del (n.° 109), potremo sciogliere il Problema del (n.° *prec.*) in altro modo, senza cioè effettuare la divisione di A, e di B per la loro massima comune misura. Ritenute difatti le supposizioni del (n.° 109), onde A, B siano amendue positivi, e sia $A=aB+C$, $B=bC+D$, $C=cD+E$, $D=dE+F$, $E=eF$. Si collochino in luogo delle quantità B, C, D, ec. i valori che si ricavano da queste Equazioni, avremo evidentemente per A, e per B i successivi valori

$$A=(ab+1)C+aD,$$
$$B=bC+D,$$
$$A=(abc+c+a)D+(ab+1)E,$$
$$B=(bc+1)D+bE,$$
$$A=(abcd+cd+ad+ab+1)E+(abc+c+a)F,$$
$$B=(bcd+d+b)E+(bc+1)F$$
$$A=(abcde+cde+ade+abe+e+abc+c+a)F,$$
$$B=(bcde+de+be+bc+1)F,$$

e per conseguenza sarà

$$\text{(XIV)}\quad \frac{A}{B}=\frac{(ab+1)C+aD}{bC+D},\quad \frac{A}{B}=\frac{(abc+c+a)D+(ab+1)E}{(bc+1)D+bE},\quad \frac{A}{B}=\frac{(abcd+cd+ad+ab+1)E+(abc+c+a)F}{(bcd+d+b)E+(bc+1)F},\quad \frac{A}{B}=\frac{(abcde+cde+ade+abe+e+abc+c+a)F}{(bcde+de+be+bc+1)F}$$

II. Ciò posto, scrivansi quì sotto in (XV) in una linea orizzontale i precedenti quoti $a, b, c, d, e$; poscia sotto del primo $a$ pongasi l'unità, e si scri-

va in una seconda linea l'espressione $\frac{a}{1}$; si moltiplichino il numeratore, e il denominatore di questa $\frac{a}{1}$ pel secondo quoto $b$, e aggiunta un' unità al numeratore, si collochi nella seconda riga il risultato $\frac{ab+1}{b}$. Si moltiplichino pel terzo numero $c$ il numeratore e il denominatore della frazione $\frac{ab+1}{b}$, e aggiunti al prodotto $abc+c$ il numeratore $a$, e all'altro $bc$ il denominatore 1 della frazione precedente $\frac{a}{1}$, si ponga nel terzo luogo della riga seconda il rotto $\frac{abc+c+a}{bc+1}$. Si prosegua, moltiplicando il numeratore, e il denominatore di quest' ultimo fratto pel quarto quoziente $d$, e ai prodotti, che vengono, aggiunti corrispondentemente il numeratore, e il denominatore della precedente frazione $\frac{ab+1}{b}$, scrivasi nel quarto luogo il risultato $\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}$. Si moltiplichino in egual modo i termini di quest' ultimo rotto pel quinto quoziente $e$, e ai risultati che se ne ottengono, uniti rispettivamente i termini del rotto, che precede, si ponga la frazion, che ne viene, nel luogo quinto; e se vi fossero dei quoti ulteriori, si seguiterebbe sempre ad operare nella maniera medesima.

$$a, \quad b, \quad c \quad d,$$

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{ab+1}{b}, \quad \frac{abc+c+a}{bc+1}, \quad \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}, \quad e \quad ec.$$

(XV)

$$\frac{abcde+cde+ade+abe+e+abc+c+a}{bcde+de+be+bc+1} \quad ec.$$

III. Si paragonino ora queste frazioni con le successive frazioni (XIV), ciascuna delle quali uguaglia $\frac{A}{B}$, e vedremo, che il numeratore, e il denominatore della seconda delle (XV), cioè della $\frac{ab+1}{b}$, altro non sono se non che i numeri, i quali nel primo dei rotti (XIV) moltiplicano C; che il numeratore, e il denominatore della terza delle frazioni (XV) altro non sono che i coefficienti di D nel quarto dei rotti (XIV); che in egual modo i termini della frazione quarta in (XV) altro non sono che i coefficienti di E nella frazione quinta in (XIV); e così di seguito sino ai rotti ultimi di amendue le serie (XIV), (XV); ma l' ultimo dei rotti (XIV) non contiene mai che una sola delle quantità C, D, E, ec., nel caso nostro la sola F, dunque i coefficienti di quest' ultima lettera, nel nostro caso della F, altro non essendo, che il numeratore, e il denominatore dell' ultima delle frazioni (XV), ossia quest' ultimo rotto altro non essendo che l' ultimo dei (XIV), diviso il suo numeratore e denominatore per F, ed essendo insieme questa ultima quantità F il massimo divisor comune delle due A, B; ne segue che l' ultima delle frazioni (XV) sarà appunto quella che si cerca, cioè sarà la frazione $\frac{A}{B}$ ridotta ai minimi termini.

Dunque per ottenere questa riduzione, e però lo scioglimento del proposto Problema, senza l' attual divisione delle quantità A, B, basterà determinare nel modo sovraccennato l' ultima delle frazioni (XV). Vogliasi per esempio ridurre alla più semplice espressione la frazione $\frac{6294}{868}$; determino nel (*n.°* 109) i quoti 7, 5, 6, gli scrivo in una linea orizzontale

qui sotto, e operato come nel ( *prec.* II ) l' ultimo rotto $\frac{223}{31}$ sarà il ricercato

$$\begin{matrix} 7, & 5, & 6 \\ \frac{7}{1}, & \frac{36}{5}, & \frac{223}{31}. \end{matrix}$$

IV. Si è nel ( *n.°* 109 ) supposto A non $<$ B, e però la parte intera del quoziente $\frac{A}{B}$, cioè $a > 0$. Vogliasi ora $A < B$: in questo caso $a$, ossia la parte intera del quoto $\frac{A}{B}$ sarà zero; ciò non ostante, posto in luogo di $a$ nelle frazioni (XV) lo zero, si otterrà anche nella presente ipotesi con le stesse precedenti operazioni l' ultima delle accennate frazioni uguale al rotto vero $\frac{A}{B}$.

Ho volentieri esposta la precedente seconda maniera di ridurre un dato rotto ai minimi termini, perchè oltre il riescire essa in pratica sovente più agevole della prima, come apparisce nell' addotto esempio, apporta poi un notabil vantaggio nella soluzione del Problema seguente.

115. *Probl.* 19.° Supposti i termini A, B della frazione $\frac{A}{B}$ amendue positivi, e supposto, che questa $\frac{A}{B}$ ridotta ai minimi termini divenga $\frac{m}{M}$ vogliansi determinare dei rotti di valore diverso dal valore della $\frac{A}{B} = \frac{m}{M}$, ciascuno dei quali abbia il numeratore, e il denominatore rispettivamente minori del numeratore, e del denominatore della $\frac{m}{M}$, e frattanto sia così prossimo al valore di questa $\frac{m}{M}$, e

però della $\frac{A}{B}$, che non esista alcun' altra frazione avente un denominatore più piccolo, il cui valore si avvicini di più, od egualmente al valore della stessa $\frac{A}{B}$.

*Sol.* Eseguiscasi sulla $\frac{A}{B}$ l'operazione esposta nel ( *n.*° 109 ), e nel ( II. *n.*° 114 ), e le frazioni (XV) saranno le richieste. Affine di dimostrare questa proposizione, converrà da prima esporre alcune importanti proprietà degli indicati rotti (XV); e per ciò fare, chiamati $a$, $h$, $i$, $k$, $l$, $m$, ec. i dividendi 1, H, I, K, L, M, ec. i divisori di simili rotti, cosicchè abbiasi

$h=ab+1$, $i=abc+c+a$, $k=abcd+cd+ad+ab+1$, ec.
$H=b$, $I=bc+1$, $K=bcd+d+b$, ec.

ossia pel ( II. *n.*° 114 )

(XVI) $h=ab+1$, $i=ch+a$, $k=di+h$, $l=ek+i$, $m=fl+k$, ec.
$H=b$, $I=cH+1$, $K=dI+H$, $L=eK+I$, $M=fL+K$, ec.,

e le frazioni (XV) istesse esprimansi per le

(XVII) $\frac{a}{1}$, $\frac{h}{H}$, $\frac{i}{I}$, $\frac{k}{K}$, $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$, ec.;

si sottraggano queste successivamente l'una dall'altra; avremo quindi

$$\frac{h}{H}-\frac{a}{1}=\frac{h-aH}{H},\ \frac{i}{I}-\frac{h}{H}=\frac{iH-hI}{HI},\ \frac{k}{K}-\frac{i}{I}=\frac{kI-iK}{IK},$$
$$\frac{l}{L}-\frac{k}{K}=\frac{lK-kL}{KL},\ \frac{m}{M}-\frac{l}{L}=\frac{mL-lM}{LM},\ \text{ec. } (n.^{o}\ 96);$$

ma sostituendo in luogo delle $h$, $i$, ec. H, I, ec., i loro valori, ottienesi

(XVIII) $h-aH=1$, $iH-hI=-1$, $kI-iK=1$, $lK-kL=-1$,
$mL-lM=1$, ec.

Dunque sarà

(XIX) $\frac{h}{H}-\frac{a}{1}=\frac{1}{H}$, $\frac{i}{I}-\frac{h}{H}=-\frac{1}{HI}$, $\frac{k}{K}-\frac{1}{I}=\frac{1}{IK}$, $\frac{l}{L}$
$-\frac{k}{K}=-\frac{1}{KL}$, $\frac{m}{M}-\frac{l}{L}=\frac{1}{LM}$, ec.

Supposto ora che $\frac{m}{M}$ sia l' ultima delle frazioni (XVII), e però delle (XV), cosicchè abbiasi $\frac{m}{M} = \frac{A}{B}$ ( III. *n.*° 114), si sommino fra loro delle Equazioni (XVII) prima le ultime due, quindi le ultime tre, poscia le ultime quattro, e così di seguito: da tali operazioni è chiaro, che ci risulterà

$$\text{(XX)} \begin{cases} \frac{m}{M} - \frac{l}{L} = \frac{1}{LM}, \\ \frac{m}{M} - \frac{k}{K} = \frac{1}{LM} - \frac{1}{KL}, \\ \frac{m}{M} - \frac{i}{I} = \frac{1}{LM} - \frac{1}{KL} + \frac{1}{IK}, \\ \frac{m}{M} - \frac{h}{H} = \frac{1}{LM} - \frac{1}{KL} + \frac{1}{IK} - \frac{1}{HI}, \\ \frac{m}{M} - \frac{a}{1} = \frac{1}{LM} - \frac{1}{KL} + \frac{1}{IK} - \frac{1}{HI} + \frac{1}{H}. \end{cases}$$

Ciò posto

I. Io dico che ciascuna delle frazioni (XVII), e però delle (XV) è già ridotta ai minimi termini. Imperciocchè, se si volesse, che una di esse, per esempio la $\frac{k}{K}$, non fosse tale, e che però i numeri $k$, K avessero un comun divisore, che dirò $r$, $> 1$, dovrebbero per questo $r$ essere divisibili anche i prodotti $kI$, $iK$, e quindi essendolo la quantità $kI - iK$, lo dovrebbe essere per le Equazioni (XVIII) ancora la unità, il che è impossibile.

II. Essendo i numeri A, B entrambi positivi, e però positivi tutti i quozienti $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, ec. nelle Equazioni (XVI) apparisce dover essere $a < h < i < k < l < m$, $H < I < K < L < M$, ed essere tutti questi numeri interi, e positivi.

III. In conseguenza di ciò dovrà essere $H < HI$

$< IK < KL < LM$, e però $\frac{1}{H} > \frac{1}{HI} > \frac{1}{IK} > \frac{1}{KL} > \frac{1}{LM}$ ( II. *n.*° 77 ). Dunque la differenza tra i rotti $\frac{a}{1}$, $\frac{h}{H}$ sarà per le Equazioni (XIX) maggiore della differenza fra gli altri $\frac{h}{H}$, $\frac{i}{I}$; così la differenza tra questi più grande che la differenza tra i susseguenti $\frac{i}{I}$, $\frac{k}{K}$, la differenza tra $\frac{i}{I}$, e $\frac{k}{K}$ maggiore che la differenza tra $\frac{k}{K}$, ed $\frac{l}{L}$, e quest' ultima finalmente maggiore della differenza tra $\frac{l}{L}$, ed $\frac{m}{M}$. Siccome poi queste differenze per le citate Equazioni (XIX) si alternano di segno, sarà $\frac{h}{H} > \frac{a}{1}$, $\frac{i}{I} < \frac{h}{H}$, $\frac{k}{K} > \frac{i}{I}$, $\frac{l}{L} < \frac{k}{K}$, $\frac{m}{M} > \frac{l}{L}$.

IV. Essendo $\frac{1}{LM} < \frac{1}{KL}$, ne verrà $\frac{1}{LM} - \frac{1}{KL} < 0$: inoltre poichè $\frac{1}{KL} < \frac{1}{IK}$, e però $\frac{1}{IK} - \frac{1}{KL} > 0$, avremo $\frac{1}{LM} + \left(\frac{1}{IK} - \frac{1}{KL}\right) > \frac{1}{LM}$. A cagione di $\frac{1}{IK} < \frac{1}{HI}$ avendosi $\frac{1}{IK} - \frac{1}{HI} < 0$, sarà $\frac{1}{LM} - \frac{1}{KL} + \left(\frac{1}{IK} - \frac{1}{HI}\right) < \frac{1}{LM} - \frac{1}{KL}$. Finalmente essendo $\frac{1}{HI} < \frac{1}{H}$, e però $\frac{1}{H} - \frac{1}{HI} > 0$, si avrà $\frac{1}{LM} + \left(\frac{1}{IK} - \frac{1}{KL}\right) + \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{HI}\right) > \frac{1}{LM} + \left(\frac{1}{IK} - \frac{1}{KL}\right)$. Ma queste quantità $\frac{1}{LM}$, $\frac{1}{LM} - \frac{1}{KL}$, $\frac{1}{LM}$

$+\left(\frac{1}{IK}-\frac{1}{KL}\right)$, $\frac{1}{LM}-\frac{1}{KL}+\left(\frac{1}{IK}-\frac{1}{HI}\right)$, $\frac{1}{LM}+\left(\frac{1}{IK}-\frac{1}{KL}\right)+\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{HI}\right)$ altro non sono, che i secondi Membri delle Equazioni (XX), e però le differenze che passano tra $\frac{m}{M}$, e i successivi rotti $\frac{l}{L}$, $\frac{k}{K}$, $\frac{i}{I}$, $\frac{h}{H}$, $\frac{a}{1}$. Dunque avendosi $\frac{1}{LM} > 0$, ed $\frac{1}{LM}-\frac{1}{KL} < 0$, il rotto $\frac{m}{M}$ ossia $\frac{A}{B}$ sarà maggiore di ciascuno degli altri $\frac{l}{L}$, $\frac{i}{I}$, $\frac{a}{1}$, e minore di ciascuno dei $\frac{k}{K}$, $\frac{h}{H}$; e tanto le prime di queste frazioni cioè le $\frac{a}{1}$, $\frac{i}{I}$, $\frac{l}{L}$, come le seconde, cioè le $\frac{h}{H}$, $\frac{k}{K}$ si accostano sempre più le une da una parte, e le seconde dall' altra, al valore della $\frac{m}{M}$.

Sia ora una nuova frazione, che dirò $\frac{t}{T}$, e se essa si vuole $< \frac{m}{M}$, sia più vicina a questo rotto di quel che siano uno o più dei rotti $\frac{a}{1}$, $\frac{i}{I}$, $\frac{l}{L}$; che se vuolsi $\frac{t}{T} > \frac{m}{M}$, si accosti essa $\frac{t}{T}$ alla $\frac{m}{M}$ più di quello che fanno una o più delle frazioni $\frac{h}{H}$ $\frac{k}{K}$. Supponendo il primo di questi casi, onde $\frac{t}{T} < \frac{m}{M}$, abbiasi per esempio $\frac{t}{T} > \frac{i}{I}$. In conseguenza di ciò

venendo essa $\frac{t}{T}$ ad essere collocata tra le due frazioni $\frac{i}{I}$, $\frac{m}{M}$, o vuolsi che uguagli qualcuna delle frazioni $\frac{l}{L}$ tra loro esistenti, o non si vuole: se sì, supposto per esempio $\frac{t}{T} = \frac{l}{L}$, poichè la $\frac{l}{L}$ pel (*prec.* I) è già ridotta alla più semplice espressione, dovrà essere T non $<$ L (IV. *n.°* 77); ma L pel (*prec.* II) è $>$ I; dunque sarà ancorà T $>$ I. Ritenuto il rotto $\frac{t}{T} > \frac{i}{I}$, e $< \frac{m}{M}$, sia esso in secondo luogo diverso da tutti gli accennati $\frac{l}{L}$. Poichè per la ipotesi deve già essere $\frac{t}{T} < \frac{m}{M}$, e poichè pel (*prec.* IV) $\frac{m}{M} < \frac{k}{K}$, sarà ancora $\frac{t}{T} < \frac{k}{K}$, e però questo $\frac{t}{T}$ sarà contenuto in mezzo ai due rotti contigui $\frac{i}{I}$, $\frac{k}{K}$, onde le due differenze $\frac{t}{T} - \frac{i}{I} = \frac{tI - iT}{IT}$, $\frac{k}{K} - \frac{t}{T} = \frac{KT - tK}{TK}$ saranno amendue positive. Pongansi $tI - iT = p$, $KT - tK = q$, e però $\frac{t}{T} - \frac{i}{I} = \frac{p}{IT}$, $\frac{k}{K} - \frac{t}{T} = \frac{q}{TK}$; sommando queste due Equazioni, ottienesi $\frac{k}{K} - \frac{i}{I} = \frac{q}{TK} + \frac{p}{IT}$, e quindi $\frac{k}{K} - \frac{i}{I} = \frac{qI + pK}{IKT}$; ma per le Equazioni (XIX) si ha $\frac{k}{K} - \frac{i}{I} = \frac{1}{IK}$: dunque sarà $\frac{qI + pK}{IKT} = \frac{1}{IK}$, e

però

però avendosi $\frac{1}{IK} = \frac{T}{IKT}$, sarà $qI + pK = T$. Ora per quanto abbiam detto, tutte, e quattro le quantità $q$, I, $p$, K sono intere, e positive; dunque essendo $qI + pK > I$, ancora in questo secondo caso avremo $T > I$. Dunque ogniqualvolta vogliasi $\frac{t}{T} < \frac{m}{M}$, e più vicino a questo rotto di quel che sia $\frac{i}{I}$, dovrà essere sempre $T > I$. In egual maniera se $\frac{t}{T}$ restando $< \frac{m}{M}$, si voglia a lui prossimo di un altro qualunque di quelli tra i rotti (XVII), che pel (*prec.* IV) sono $< \frac{m}{M}$, se si voglia più prossimo per esempio di $\frac{l}{L}$, si troverà dover essere $T > L$. Che se ponendosi $\frac{t}{T} > \frac{m}{M}$, si voglia, che $\frac{t}{T}$ si accosti ad $\frac{m}{M}$ più della frazione $\frac{h}{H}$, o dell'altra $\frac{k}{K}$, ec.; con un discorso perfettamente uguale al precedente troveremo, dover essere in corrispondenza $T > H$, oppure $> K$, ec.; ma per la supposizione da noi fatta $\frac{m}{M} = \frac{A}{B}$. Dunque qualunque frazione, che posso sempre esprimere per la precedente $\frac{t}{T}$, vogliasi esistente tra $\frac{A}{B}$, ed una qualsivoglia delle frazioni (XVII), ossia delle (XV), dovendo avere il denominatore T più grande del denominatore di questa frazione ultima, ne segue, che tali

frazioni (XV) sono quelle appunto, che sciolgono il proposto Problema; *c. d. d.*

116. *Cor.* I. Le frazioni (XV) adunque sono quelle, le quali con termini più semplici avvicinansi di più al valore della data frazione $\frac{A}{B}$.

II. Preso uno qualunque dei fratti (XVII) per esempio il fratto $\frac{i}{I}$, osservo che per le Equazioni (XIX) si ha $\frac{k}{K} - \frac{i}{I} = \frac{1}{IK}$; ma $\frac{i}{I} < \frac{A}{B}$, $\frac{k}{K} > \frac{A}{B}$ ( IV. *n.°* *prec.* ); dunque la differenza tra $\frac{i}{I}$, ed $\frac{A}{B}$ sarà $< \frac{1}{IK}$. Inoltre essendo $I < K$ ( II. *n.°* *prec.* ) abbiamo $I^2 < IK$, e però $\frac{1}{I^2} < \frac{1}{IK}$. Dunque la quantità $\frac{i}{I}$ differisce dall'altra $\frac{A}{B}$ meno del valore $\frac{1}{I^2}$. In egual maniera si truova, che ancora tutte le altre frazioni $\frac{h}{H}$, $\frac{k}{K}$, $\frac{l}{L}$, ec. differiscono dalla $\frac{A}{B}$ rispettivamente meno dei valori $\frac{1}{HI}$, $\frac{1}{KL}$, $\frac{1}{LM}$, e però dei $\frac{1}{H^2}$, $\frac{1}{K^2}$, $\frac{1}{L^2}$, ec.

III. Dalla soluzione del precedente Problema ( *n.°* 115 ) potremo ritrarre un notabilissimo vantaggio per l' uso pratico. Suppongasi, che la frazione $\frac{A}{B}$ non ammettendo ulterior riduzione ( II. *n.°* 83 ), o se l'ammette, che il rotto $\frac{m}{M}$ ( *n.°* *prec.* ), che

ne risulta, abbia i termini troppo alti, e però incomodi nel calcolo. In questo caso, truovate le frazioni (XV), potremo alla $\frac{A}{B}$ sostituire una di queste tutte di lei più semplici, scegliendola secondo le circostanze, in guisa, che ne sorga un errore, il quale nell' uso pratico possa con tutta sicurezza trascurarsi.

*Esempio* 18.° Per passare ad un esempio, osservo sapersi dalla Geometria superiore, che, chiamato 1 il diametro di un cerchio, la sua circonferenza viene espressa con una somma approssimazione dal decimale 3, 1415926, ossia dal rotto $\frac{31415926}{10000000}$. Vogliansi ora delle altre frazioni, le quali siano più semplici della proposta, e le quali differiscano bensì più di essa dal vero valore della circonferenza, ma che però sian tali, che simile differenza possa nella pratica trascurarsi.

Eseguita perciò sulla $\frac{31415926}{10000000}$ l'operazione del (*n.*° 109), e ottenuti così i successivi quoti 3, 7, 15, 1, 243, 1, 1, 9, 1, 1, 4, eseguisco con essi l'operazione accennata nel (II. *n.*° 114), e avute le frazioni $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{86598}{27565}$, $\frac{86953}{27678}$, $\frac{173551}{55243}$, $\frac{1648912}{524865}$, $\frac{1822463}{580108}$, $\frac{3471375}{1104973}$, $\frac{15707963}{5000000}$, l' ultima di queste sarà la stessa $\frac{31415926}{10000000}$ ridotta ai minimi termini (III. *n.*° 114), e le altre corrispondendo alle (XVII) saran tali, che tutte le $\frac{3}{1}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{86598}{27565}$, ec. saranno minori del valore della frazion data, e però di quello della circonferenza, e le altre $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{86953}{27678}$,

ec. ne saranno maggiori; ciascuna poi di esse differirà dalla frazione ultima, e però dalla circonferenza, di una quantità minore del rotto che producesi, dividendo l'unità pel prodotto del proprio nel denominatore della frazione prossima susseguente (*prec.* II): perciò il rotto $\frac{22}{7}$ supererà il valore della data periferia meno di $\frac{1}{7.106} = \frac{1}{742}$; l'altro $\frac{355}{113}$ lo supererà meno di $\frac{1}{113 \times 27565} = \frac{1}{3114845}$, e così di seguito: gli altri rotti poi $\frac{3}{1}$, $\frac{333}{106}$, ec. saranno inferiori al valore della circonferenza, il primo meno di $\frac{1}{1.7} = \frac{1}{7}$, il secondo meno di $\frac{1}{106 \times 113} = \frac{1}{11978}$; e così in progresso. Dunque allorchè nella pratica non abbisogno di molta esattezza, potrò per esprimere la supposta periferia far uso della frazione $\frac{22}{7}$, sicuro che ciò facendo, non erro, che di una quantità minore di $\frac{1}{742}$; e se abbisogno di un'esattezza molto maggiore, mi servirò della $\frac{355}{113}$, sapendo di non commetter con questa un errore $> \frac{1}{3114845}$. Se tenessi conto della penultima frazione, cioè della $\frac{3471375}{1104973}$, differendo essa dalla data $\frac{31415926}{10000000}$ in punto della quantità $\frac{1}{552486500000}$, vedesi quanto questa differenza è minima, e come per conseguenza l'una può in pratica sostituirsi all'altra con sicurezza.

117. *Scol.* 11.° Dalle Equazioni $A = aB + C$, $B = bC + D$, $C = cD + E$, $D = dE + F$, ec. del

(I. *n.*° 114) avendosi $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$, $\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$, $\frac{C}{D}$ $= c + \frac{E}{D}$, $\frac{D}{E} = d + \frac{F}{E}$, ec. e però $\frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}}$, $\frac{D}{C} =$ $\frac{1}{c + \frac{E}{D}}$, $\frac{E}{D} = \frac{1}{d + \frac{F}{E}}$, ec., ne verrà sostituendo successivamente $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$,

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}},$$

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{E}{D}}},$$

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{F}{E}}}}, \text{ ec.}$$

e se F sia l'ultimo divisore esatto, e sia $E = eF$; ne verrà

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}.$$

Data una di queste frazioni, a cui per l'andamento si dà il nome di *Frazioni continue*, è chiaro dai (I, II, III. *n.*° 114), che se ne otterrà il valore $\frac{A}{B}$, raccogliendo i termini $a$, $b$, $c$, $d$, ec., ed operando su' loro, come è stato indicato nel cit.° (II. *n.* 114).

## CAPO VI.

### *Delle ragioni, e delle proporzioni aritmetiche, geometriche, ed armoniche.*

118. *Def.* 1.ª Nel paragonarsi fra di loro due quantità omogenee, o si domanda di quanto l' una superi l' altra, o cercasi quante volte, e come una contenga l'altra. Nel primo di questi due casi dicesi cercare la *ragione*, o il *rapporto aritmetico*, nel secondo il *rapporto*, o la *ragione geometrica*. Le quantità poi, che paragonansi insieme, chiamansi i *termini* della ragione, dicendosi *antecedente* il primo di essi, *conseguente* il secondo. La quantità finalmente, o il numero, che esprime di quante nella ragione aritmetica l' antecedente sia maggiore del conseguente, e nella geometrica quanto questo contengasi in quello, appellasi *Esponente* della ragione.

119. *Scol.* 1.° Per indicare la ragione geometrica, si sa dalla Geometria, che usansi due punti, innanzi ai quali ponesi l'antecedente, e dopo il conseguente della ragione. Per indicare poi il rapporto aritmetico tra i suoi due termini ponesi nel modo istesso un punto solo. Così mentre l' espressione 8:2 rappresenta la ragione geometrica fra 8, e 2, l' altra 8.2 ne indica la ragione aritmetica.

120. *Cor.* I. Dalla definizione data è chiaro, che il cercare la ragione aritmetica fra due quantità equivale al cercarne la differenza; ed il chiedere la loro ragione geometrica equivale al domandare il quoto dell' antecedente diviso pel conseguente.

II. Chiamato $d$ l' esponente della ragione aritmetica fra le due quantità $a$, $b$, ed $m$ esponente

del loro rapporto geometrico, poichè questi $d$, $m$ non sono rispettivamente, che i valori già determinati dalle due ragioni aritmetica, e geometrica (*n.*° 118), e poichè le due espressioni $a.b$, $a:b$ non fanno che indicare le ragioni medesime (*n.* 119) non per anche determinate; ne segue, che dovrà essere $a.b = d$, $a:b = m$, e pel (*prec.* I) sarà $a.b = a - b = d$, $a:b = \frac{a}{b} = m$.

121. *Def.* 2.ª Date le ragioni $a.b$, $a:b$, se si rovesci il paragone, le nuove ragioni $b.a$, $b:a$ chiamansi *inverse*, o *reciproche* rispettivamente delle prime, le quali in confronto di queste si appellano *dirette*.

122. *Scol.* 2.° Avendosi $a.b = a-b$, $a:b = \frac{a}{b}$ ne verrà $b.a = b - a$, $b:a = \frac{b}{a}$; ma posto $a - b = d$, $\frac{a}{b} = m$, si ottiene $b - a = -(a-b) = -d$, $a = bm$, e però $\frac{b}{a} = \frac{1}{m}$. Dunque mentre si abbia $a.b = d$, $a:b = m$, inversamente risulterà $b.a = -d$, $b:a = \frac{1}{m}$.

123. *Def.* 3.ª L' uguaglianza fra due ragioni chiamasi *Proporzione*. Essa poi si dice *aritmetica*, se le due ragioni uguali sono aritmetiche, *geometrica* se geometriche.

124. *Def.* 4.ª Essendo una proporzione evidentemente composta di quattro termini, il primo, e l' ultimo di questi diconsi gli *estremi*, il secondo ed il terzo i *medii*. Quando poi i due termini di mezzo sono uguali fra loro, considerandosi essi siccome un termine solo replicato due volte, gli si dà il nome di *Medio proporzionale*, e la proporzione in questo caso chiamasi *continua*; mentre nell' altro in cui i

termini medii sono disuguali fra loro appellasi *discreta*.

125. *Scol.* 3.° Nello scrivere una proporzione ponesi tra le ragioni uguali il segno di uguaglianza, ovvero pongonsi due punti quando la proporzione è aritmetica, e se ne pongono quattro, quando è geometrica, come si vede nei seguenti due esempj 7.4:9.6, 12.3::20:5. Che se le proporzioni sono continue; allora per brevità maggiore le aritmetiche scrivonsi così $\div$ 10, 12, 14, e le geometriche $\div\div$ 4,6,9.

126. *Teor.* 1.° In una proporzione aritmetica la somma degli estremi uguaglia quella dei medii.

*Dim.* Sia $a.b:f.g$ la proporzione: pel (I. *n.*° 120) avendosi $a.b=a-b$, $f.g=f-g$, sarà $a-b=f-g$, e però $a+g=b+f$. Dunque ec.

127. *Scol.* 4.° I. Se uno dei termini della proporzione, per esempio l'ultimo $g$, sia incognito, dalla precedente Equazione troveremo il suo valore; nel nostro esempio troveremo $g=b+f-a$.

II. Se sia $f=b$, onde la proporzione data sia continua, avremo $a+g=2b$, e però risultando $b=\frac{a+g}{2}$, la media proporzionale aritmetica uguaglierà la semisomma dei due estremi.

128. *Esempio* 19.° Un viaggiatore vuole arrivare al suo termine in tre giorni, percorrendo nel primo 33 miglia, e nel terzo 41, e vede che deve nel terzo giorno fare tanto viaggio più del secondo, quanto nel secondo ne fa più del primo. Si domanda quante miglia dovrà egli percorrere nel secondo giorno.

*Sol.* Le tre giornate del supposto viaggiatore costituiscono evidentemente una proporzione aritmetica continua, di cui il termine di mezzo è l'incognita, ossia il viaggio del secondo giorno: chiamato adunque questo $x$, sarà $\div 33,x,41$, e però $x=\frac{33+41}{2}=37$. Dunque ec.

129. *Def.* 5. Avendosi quante si vogliono ragioni geometriche $a:b$, $c:d$, $e:f$, ec., fatto il prodotto degli antecedenti, e quello dei conseguenti, la ragione del primo prodotto *ace*... al secondo *bdf*... dicesi *composta* delle date $a:b$, $c:d$, $e:f$, ec., le quali per conseguenza diconsi *componenti*.

130. *Teor.* 2.° Se si hanno quante, e qualisivogliono quantità $a, b, c, d, e$ fra loro omogenee, la prima di esse sta all' ultima nella composta di tutte le intermedie, ossia la ragione di $a : e$ uguaglia la composta delle $a:b, b:c, c:d, d:e$.

*Dim.* La composta delle $a:b, b:c, c:d, d:e$ non è che $abcd:bcde$ (n.° *prec.*); ma $abcd:bcde = \frac{abcd}{bcde}$ (I. n. 120) ed $\frac{abcd}{bcde} = \frac{a}{e}$ (II. n.° 77): dunque essendo $\frac{a}{e} = a:e$, ne verrà $a:e = abcd:bcde$, e però ec.

131. *Scol.* 5.° Sia $m$ l' esponente della ragione $a:b$, e siano tutte le $a:b$, $b:c$, $c:d$, $d:e$, ec. uguali fra loro. Pel (II. n.° 120) avendosi $\frac{a}{b} = m$, e quindi $\frac{b}{c} = m$, $\frac{c}{d} = m$, $\frac{d}{e} = m$, ec. sarà $\frac{ab}{bc} = m^2$, $\frac{abc}{bcd} = m^3$, $\frac{abcd}{bcde} = m^4$, e però $\frac{a}{c} = m^2$, $\frac{a}{d} = m^3$, $\frac{a}{e} = m^4$, ec. ma dalla $\frac{a}{b} = m$, risulta ancora $\frac{a^2}{b^2} = m^2$, $\frac{a^3}{b^3} = m^3$, $\frac{a^4}{b^4} = m^4$, ec. Dunque avremo $\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a}{e} = \frac{a^4}{b^4}$, ec., ossia $a:c::a^2:b^2$, $a:d::a^3:b^3$, $a:e::a^4:b^4$, ec.; e per conseguenza se

si hanno più quantità $a, b, c, d, e$, ec. in continua proporzione geometrica, la prima starà alla terza, come la seconda potenza della prima alla seconda potenza della seconda; la prima alla quarta, come la terza potenza della prima alla terza della seconda; la prima alla quinta come la quarta potenza della prima alla quarta della seconda, e così di seguito; ossia in altri termini si avrà $a:c, a:d, a:e$, ec. nella ragione rispettivamente *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, ec. di $a:b$.

132. *Teor.* 3.° In qualunque proporzione geometrica il prodotto degli estremi uguaglia quello dei medj.

*Dim.* Sia la proporzione $a:b::c:d$. Poichè $a:b=\frac{a}{b}$, $c:d=\frac{c}{d}$ (n.° 120), e per la ipotesi $a:b=c:d$, avremo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, e però $ad=bc$. Dunque ec.

133. *Cor.* 1. Se uno dei termini supposti sia incognito, e diverso dagli altri, se tale sia per esempio l'ultimo $d$, lo potremo dalla precedente Equazione agevolmente determinare, avendosi nel posto esempio $d=\frac{bc}{a}$. É a ciò appoggiata la famosa *regola aurea*, o *del tre* degli Aritmetici; poichè per essa non mai si determina, che il quarto, o il terzo termine di una proporzione geometrica, cogniti essendo gli altri tre. Se dati i tre $a, b, c$, cercasi il quarto $d=\frac{bc}{a}$, la regola dicesi *diretta*, che se dati gli $a, b, d$ cercasi il terzo termine $c=\frac{ad}{b}$, allora la regola chiamasi *inversa*.

II. Se la proporzione del (*n.° prec.*) sia continua, cioè se sia $c=b$, ne verrà $ad=b^2$.

III. Mentre sia $a = c$, dalla Equazione $ad = bc$ vedesi, che dovrà essere anche $b = d$; e viceversa dovrà essere $a = c$, mentre vogliasi $b = d$. Dunque in una proporzione se sono fra loro uguali gli antecedenti, tali saranno ancora i conseguenti, e viceversa dall' uguaglianza di questi risulta l' uguaglianza di quelli.

134. *Esemp.* 20. Dato un cilindro retto, di cui chiamo $a$ l' altezza, e $b$ il diametro della base, determinare una sfera tale, che le solidità di questi due Corpi stiano fra di loro come le superficie.

*Sol.* Chiamo $x$ il diametro della sfera domandata, e nel cerchio, il cui diametro è 1, denomino $p$ il valore della circonferenza. Pei principj geometrici la quarta proporzionale dopo le quantità $1, b, p$, deve essere il valore della circonferenza della base del cilindro dato, e la quarta dopo $1, x, p$, deve essere il valore della periferia di un circolo massimo della sfera. Dunque venendo quella espressa da $bp$, e questa da $px$ (I. *n.*$^{o}$ *prec.*), il valor della base nel cilindro sarà $bp \times \frac{b}{4} = \frac{b^2p}{4}$; e $\frac{px^2}{4}$ il valore del Circolo massimo; e quindi ritrarremo essere $\frac{ab^2p}{4}$, $\frac{px^3}{6}$ le due solidità; $abp$, $px^2$ le due superficie. Ma per la condizione del Problema esser deve $\frac{ab^2p}{4} : \frac{px^3}{6} :: abp : px^2$. Dunque sarà $\frac{abp^2x^3}{6} = \frac{ab^2p^2x^2}{4}$, e per conseguenza avendosi $x = \frac{3b}{2}$, la sfera, che ha per diametro una retta tripla del raggio della base del Cilindro scioglierà il Problema.

Vengano domandati i valori della solidità, e della superficie di questa sfera. Avendosi $px^2 = \frac{9b^2p}{4}$, $\frac{px^3}{6}$

$= \frac{27b^3p}{48}$, otterremo simili valori esattamente, se si conoscesse l'esatto valore della $p$; ma questa $p$ sappiamo non essere determinabile, che per approssimazione; dunque ancora la superficie e la solidità ora richieste non potranno determinarsi che per valori approssimantisi ai veri, e questi pel (III. n.° 117)

otterremo, ponendo nelle $\frac{9b^2p}{4}$, $\frac{9b^3p}{16}$ invece della $p$ quella tra le frazioni colà ritrovate, che si vedrà più opportuna pel grado di accostamento, che si desidera.

135. *Esem.* 21.° In un orologio sul mezzo giorno, ossia alle ore 12 la freccia più lunga, cioè quella dei minuti sta sopra alla più breve, ossia a quella delle ore. Si domanda a qual ora vi ritornerà.

*Sol.* Il moto delle due freccie sappiamo essere uniforme, e mentre la freccia delle ore percorre un' ora, quella dei minuti percorrendone 12, la velocità della prima starà alla velocità della seconda :: 1 : 12. Ciò posto, passato il mezzo giorno la freccia più lunga non può nuovamente incontrare la più breve, se non per lo meno dopo un' ora; chiamato adunque $x$ il tempo, che oltre l' ora deve passare innanzi che succeda il richiesto incontro; $1+x$ sarà lo spazio percorso dalla freccia più breve, e $12+1+x=13+x$ lo spazio descritto dalla più lunga, dopo il mezzogiorno sino al loro nuovo incontro; ora questi spazj vengono percorsi nel medesimo tempo, e nel moto uniforme gli spazj descritti in tempi uguali stan fra di loro come le velocità; dunque avremo $1+x : 13+x :: 1 : 12$, e per conseguenza $12+12x=13+x$ ( n.° 132 ), d' onde ricavandosi $x = \frac{1}{11}$, si vede che le due freccie s'incon-

treranno dopo un' ora e $\frac{1}{11}$, e gettata questa frazione in sessagesimali, dopo 1 ora 5′ 27″ prossimamente.

Inoltre osservo, che le due freccie tornano sempre di nuovo a sovrapporsi dopo ciascun' ora; se dunque venga domandato di determinare tutti questi punti d' incontro, affin di tutti ottenerli nel medesimo tempo, cerchiam di ritrovare qual sarà un simile punto, trascorse $m$ ore dopo il mezzogiorno; supposto perciò, come precedentemente, $x$ lo spazio, che oltre le $m$ ore deve trascorrere la freccia più breve prima d' essere raggiunta dalla più lunga; è chiaro che, mentre quella dopo il mezzodì ha percorso lo spazio $m+x$, questa deve avere descritto lo spazio $12m+m+x$, e quindi per la sovraccennata ragione sarà $m+x : 12m+m+x :: 1 : 12$, dalla qual proporzione ottenendosi $12m+12x=13m+x$, e però $x=\frac{m}{11}$, vedesi che il ricercato incontro si farà in generale dopo le ore $m+\frac{m}{11}$. Se $m=1$, l' incontro succederà alle ore $1\frac{1}{11} = 1$ ore 5′ 2″ come di sopra. Se $m=2$, esso succederà alle ore $2\frac{2}{11} = 2$ ore 10′ 55″ prossimamente. Se $m=3$, questo si farà alle ore $3\frac{3}{11} = 3$ ore 16′ 22″ incirca, e così di seguito.

136. *Teorem.* 4.° Se si hanno quattro quantità $a, b, c, d$ tali che sia $ad=bc$, saranno queste in proporzione per modo che $a : b :: c : d$.

*Dim.* Divisa la supposta Equazione $ad=bc$ per $bd$ otterremo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ma $\frac{a}{b} = a : b$, $\frac{c}{d} = c : d$;

dunque sostituendo sarà $a : b = c : d$. Dunque ec.

137. *Cor.* I Come una proporzione geometrica può cangiarsi in Equazione facendo fra loro uguali i prodotti degli estremi, e dei medj (n.° 132); così può un'Equazione cangiarsi in una proporzione geometrica facendo estremi i fattori di un membro dell'Equazione, e medj i fattori dell'altro. Lo stesso si dice delle proporzioni aritmetiche, cangiando semplicemente il nome di prodotto in quello di somma.

II. Data la proporzione $a : b :: c : d$ venendone $ad = bc$, quindi pel (n.° 136) ricaveremo tanto $b : a :: d : c$, come $a : c :: b : d$. Inoltre essendo $ad+bd = bc+bd$, ossia $(a+b)\,d = (c+d)b$, ne verrà $a+b : b :: c+d : d$ (*n.° prec.*), e nel modo medesimo si ritrova $a-b : b :: c-d : d$. Quindi vedesi che dipendono tutte quelle argomentazioni, che si fanno dai Geometri *invertendo*, *alternando*, *componendo*, e *dividendo*.

III. Abbiasi $a : b = m$, $a : d = n$; venendone $\frac{a}{b} = m$, $\frac{a}{d} = n$, e però $a = bm$, $a = dn$, sarà $bm = dn$, e per conseguenza $m : n :: d : b$. Che se sia $a : b = m$, $c : b = n$; risultando da ciò $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{b} = n$, e quindi $\frac{1}{b} = \frac{m}{a}$, $\frac{1}{b} = \frac{n}{c}$, avremo $\frac{m}{a} = \frac{n}{c}$, e però $m : n :: a : c$.

Dunque in due ragioni se gli antecedenti sono uguali fra loro, gli esponenti deggiono essere fra loro nella ragione inversa dei conseguenti, e se sono tra loro eguali i conseguenti, gli esponenti seguono la ragione diretta degli antecedenti.

IV. Se i termini di una proporzione $a : b :: c : d$ si moltiplicano, o si dividono pei termini corrispondenti di un' altra $f : g :: h : k$, anche i prodotti, o i quoti formeranno una nuova proporzione. Imperciocchè avendosi $ad = bc$, $fk = gh$, moltiplicando, e dividendo fra loro queste due Equazioni, otterremo

$adfk = bcgh$, e $\frac{ad}{fk} = \frac{bc}{gh}$, e però $af : bg :: ch : dk$; $\frac{a}{f} : \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} : \frac{d}{k}$.

V. Avendosi due ordini di quantità come quì sotto

$a, b, c, d$

$b, e, d, f$ e tali che $a:b::c:d, b:e::d:f$, ne verrà, come suol dirsi, per *ugualità ordinata* $a : e :: c : f$. Difatti essendo $ad = bc$, $bf = ed$, moltiplicando tra loro queste Equazioni otterremo $abfd = bced$, e diviso pel fattore comune $bd$, risultando $af = ce$, quindi ne risulterà $a : e :: c : f$.

VI. Nella maniera stessa si dimostra, che se si hanno due ordini di quantità come le sottoposte

$a, b, c, d$

$b, e, f, c$, in cui $a : b :: c : d, b : e :: f : c$, si otterrà come dicono per *ugualità perturbata*, $a : e :: f : d$.

VII. Se sia

$$a : b :: c : d$$
$$a : e :: c : f$$

io dico, che dovrà essere $a : b + e :: c : d + f$. Imperciocchè dalle proporzioni supposte avendosi $ad = bc$, $af = ec$, ne verrà $ad + af = bc + ec$, ossia $a(d + f) = (b + e)c$, e per conseguenza $a : b + e :: c : d + f$.

VIII. Abbiansi quantesivogliono ragioni $a : b$, $c : d$, $e : f$, $g : h$, ec. tutte eguali fra loro. Essendo perciò $a : b :: c : d$, $a : b :: e : f$, $a : b :: g : h$, ec. avremo la serie di Equazioni

$$ab = ba$$
$$ad = bc$$
$$af = be$$
$$ah = bg$$
ec.

ma dalla somma di queste risulta $a(b + d + f + h + \text{ec.}) = b(a + c + e + g + \text{ec.})$; e però si ha $a + c + e + g + \text{ec.} : b + d$

$+f+h+$ec. $::a:b$ . Dunque mentre esistono quante si vogliono ragioni geometriche uguali fra loro, la somma de' loro antecedenti sta sempre alla somma de' conseguenti, come un solo antecedente al suo conseguente.

138. *Scol.* 6.° Le *Regole di falsa posizione* degli Aritmetici sì *semplice* che *doppia* dipendono esse pure dalla natura delle proporzioni geometriche, e non sarà quivi fuor di proposito il mostrare quali siano i Problemi, che si possono col loro mezzo risolvere, e per qual ragione col mezzo loro si ottengono simili soluzioni.

I. Dato un Problema, prendo un numero determinato ad arbitrio, che chiamerò $m$, eseguisco su di esso le operazioni, e le combinazioni assegnate dal Quesito, e se truovo che questo $m$ soddisfa alle condizioni proposte, dirò, che è il numero domandato. Che se non vi soddisfa, faccio la seguente proporzione: come il risultato ottenutosi da $m$ sta al risultato vero, che dovrebbe ottenersi, così esso $m$ ad una quarta proporzionale, e questa potrà essere il numero che si domanda. Ognun sa che il presente metodo altro non è che la regola di falsa posizione semplice: volendo ora cercare a quali quistioni possa ella servire, comincio dal riflettere, che una sola essendo la quantità, che se ne determina; ed altro questa non essendo che una quarta proporzionale geometrica, non potrà tal regola servire che a' Problemi, i quali siano della natura di quelli, che sonosi considerati finora, e la soluzione de' quali dipenda, o possa ridursi a dipendere da una sola incognita. Chiamata pertanto $x$ questa incognita, cosicchè $x$ rappresenti il numero, che si cerca, proseguo a riflettere, che qualunque sia il Quesito proposto, mentre sia esso simile ai precedenti, e solubile con un' incognita sola, deve condurre ad un' Equazione $ax+b=Q$, in cui ciascuna delle quantità

$a$,

$a$, $b$, Q sia cognita, e può ciascuna essere intera, o fratta, positiva, o negativa, monomia, o polinomia. Posto finalmente in $ax+b$ invece di $x$ il sovraindicato valore $m$, e chiamato M il risultato che ne viene, cosicchè $am+b=M$, rifletto, che avremo $a+\frac{b}{x}=\frac{Q}{x}$, $a+\frac{b}{m}=\frac{M}{m}$. Ora per la regola sovraesposta deve evidentemente aversi la proporzione M:Q::$m$:$x$; dunque tal regola esige, che sia $\frac{Q}{x}=\frac{M}{m}$; ma dalle Equazioni $a+\frac{b}{x}=\frac{Q}{x}$, $a+\frac{b}{m}=\frac{M}{m}$, vedesi che mentre non sia $x=m$, non può essere $\frac{Q}{x}=\frac{M}{m}$ se non nel caso, in cui $b=0$. Dunque la regola di falsa posizione semplice non può servire, se non allorquando il Problema dipenda da un' Equazione della forma $ax=Q$, e però che dipenda da condizioni, per le quali la quantità cognita Q uguagli il prodotto della incognita $x$ con una o più quantità note espresse dalla sola $a$, siano esse poi intere, o fratte, positive, o negative.

*Esem.* 22. Sotto un turbine che si replicò per tre giorni cadde nel primo la terza parte degli alberi d'una possessione, nel secondo ne cadde la quarta parte, e cadutane nel terzo la decima, restarono in piedi 190 alberi. Si domanda quanti alberi erano nella possessione prima del turbine.

*Sol.* Pel numero totale di questi alberi ne immagino uno a piacimento, ma per maggiore facilità lo immagino divisibile esattamente per 3, per 4, e per 10, quale appunto si è 3.4.10 = 120. Ora se gli alberi fossero 120 sottraendone il terzo, il quarto, ed il decimo, il residuo 38 dovrebbe per le condizioni del Problema esprimere il numero degli alberi rimasti; ma ciò non è perchè gli alberi rimasti

sono 190; dunque farò 38:190::120: una quarta, che sarà 600, e questo 600 esprimerà difatti il numero domandato. Se tal numero si fosse chiamato $x$, dalle condizioni del Problema avendosi $x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{10} = 190$, e però $\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right) x = 190$ ne veniva un' Equazione della precedente forma $ax = Q$, essendo $a = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10}$, $Q = 190$; ed è perciò che il presente Quesito viene coll' indicata regola risoluto.

II. Sia nella Equazione $ax+b=Q$ (*prec.*II) $b$ non $=0$. Sottraggo in questo caso dalla $ax+b = Q$ l'altra $am+b = M$, e ne verrà $a(x-m)=Q-M$, Equazione in cui più non esiste la $b$. Immagino ora un altro numero $n$, e chiamato N il risultato $an+b$, sottraggo dalla stessa $ax+b = Q$ la $an+b = N$, ed avuta la differenza $a(x-n) = Q-N$, paragonando questa con la precedente $a(x-m) = Q-M$, formo la proporzione $Q-M : Q-N :: x-m : x-n$, ossia supposto $Q > M$, e $> N$, e quindi $Q-M=p$, $Q-N=q$, formo la $p : q :: x-m : x-n$, e truovo da ciò $x = \frac{np-mq}{p-q}$. Se fosse stato $Q < M$, $< N$, onde $Q-M=-p$, $Q-N=-q$, sarebbesi per $x$ ottenuto lo stesso risultato: che se si fosse truovato Q maggiore dell' una, e minore dell' altra delle quantità M, N, cosicchè $Q-M=p$, e $Q-N=-q$, oppure $Q-M=-p$, $Q-N=q$, allora sarebbeci venuto $x = \frac{np+mq}{p+q}$. Dunque le due espressioni $\frac{np-mq}{p-q}$, $\frac{np+mq}{p+q}$, quantunque non contengano nè il coefficiente $a$, nè l' altro $b$, almeno apparentemente, pure soddisfanno alla Equazione $ax+b=Q$, la prima, quando le differenze $Q-M$, $Q-N$ sono di ugual segno, la seconda, quando simili differenze son di se-

gno contrario. Ora le accennate espressioni si ottengon coll' effettuare le seguenti operazioni, 1.° suppongonsi due numeri $m$, $n$ ad arbitrio; 2.° si praticano su ciascuno di essi le condizioni del Problema; 3.° se nè l' uno, nè l' altro vi soddisfa, sottraggonsi i risultati, che ne vengono, M, N dal risultato Q, che ne dovrebbe venire; 4.° si moltiplica la differenza, o come dicesi, l' errore primo $Q-M=p$ pel numero secondo $n$, l' errore secondo $Q-N=q$ pel numero primo $m$; 5.° finalmente la differenza di questi due prodotti, cioè $np-mq$ dividesi, quando i due errori $p, q$ sono di egual segno, per la differenza $p-q$ degli errori medesimi; e quando tali errori $p$, $q$ sono di segno uguali, la somma dei prodotti cioè $np+mq$ dividesi per la somma $p+q$. Dunque coll' eseguire tutte queste successive operazioni, dalle quali sappiamo, che viene costituita *la regola di falsa posizione doppia*, l' ultimo risultato che ne viene, soddisfacendo all' Equazione $ax+b=Q$, scioglierà il Problema, che ne dipende, e lo scioglierà, sia, o no $b=0$. Ora tutti i Problemi simili ai precedenti, i quali dipendono, o possonsi ridurre a dipendere da un' incognita sola, conducono ad un' Equazione $ax+b=Q$. Dunque tutti questi Problemi potranno risolversi con la regola ora accennata.

III. Aggiungo non essere che questi Problemi i quali si possono con tal regola risolvere. Difatti la Equazione $x=\frac{np-mq}{p-q}$ equivale alla proporzione $p:q::x-m:x-n$, ossia alla $Q-M:Q-N::x-m:x-n$; e però alla $Q-M:x-m::Q-N:x-n$; e per le regole stabilite i numeri $m$, $n$ sono arbitrarj, e però ponno essere qualunque. Dunque supposto $a$ l' esponente della ragione $Q-M:x-m$, e perciò $Q-M=a(x-m)$, dovrà essere ancora, qualunque siasi $n$, $Q-N=a(x-n)$, e per conseguenza que-

sto $a$ rimanendo costantemente lo stesso, qualunque valore $m$, $n$, ec. s' immagini, e si sostituisca nelle condizioni del Problema invece del valor vero, non dovrà esso $a$ contener punto in se medesimo la $x$. Ora dalla Q esprimendosi il risultato cognito, che si dovrebbe ottenere pei dati, e per le condizioni del Problema, ed esprimendosi dalla M il risultato, che attualmente si ottiene nell' eseguire le condizioni medesime sopra il numero immaginato $m$; queste Q, M altro non sono, che i secondi membri delle rispettive Equazioni in $x$, ed $m$. Dunque Q—M essendo la differenza fra gl' indicati secondi membri, l' altra quantità $a(x-m)$ non potrà essere, che la differenza dei membri primi; ma per le leggi stabilite dal sovraesposto metodo è facile a vedersi, che questi due primi membri deggiono essere affatto simili fra di loro, e che in uno di essi deve entrare la $x$, e non la $m$, e nell' altro la $m$, e non la $x$. Dunque essendo $ax-am$ la differenza loro, essi medesimi non potranno avere che la forma $ax+b$, $am+b$, esprimendosi dalla $b$ quella quantità, la quale svanisce con la sottrazione, e la quale dovendo svanire sempre, qualunque siansi le quantità $m$, $n$, che si pongono invece della $x$, dovrà essere, come si è detto della $a$ costantemente la stessa, e però non contenere in se la $x$ medesima. Dunque l' Equazione $ax+b=Q$, in cui $a$, $b$, Q non contengono in se medesimi la $x$, e però sono cogniti, sarà quella, a cui soddisfa il precedente valore $x=\frac{np-mq}{p-q}$; ma lo stesso discorso si eseguisce ancora rapporto all' altro valore che può risultare, $x=\frac{np+mq}{p+q}$. Dunque la regola di falsa posizione doppia non potrà servire che alla soluzione de' Problemi, i quali dipendono, o posso-

no ridursi a dipendere dalla precedente Equazione $ax+b=Q$.

*Esemp.* 23.° Determinare quante carte da giuoco devo prendere; affinchè possa formare tre mazzetti, il primo con la metà delle carte prese più una, il secondo con la metà delle carte che avanzano dal mazzetto primo più una, il terzo con la metà delle carte che restano dal secondo più una, e dopo ciò rimanga a me in mano una carta sola.

*Sol.* Servendomi per la soluzione di questo Problema della precedente regola di falsa posizione doppia, immagino che 30, oppure 18 siano le carte da prendersi; ciò essendo, dopo il primo mazzetto mi rimarranno rispettivamente 14, od 8 carte, quindi dopo del secondo me ne rimarranno 6, o 3, e finalmente 2, oppure $\frac{1}{2}$ dopo del terzo; ma per le condizioni del Quesito me ne deve restare una; dunque sottratti dallo 1 i precedenti 2, $\frac{1}{2}$, ed ottenuti gli errori $1-2=-1$, $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, li moltiplico corrispondentemente per le posizioni 18, 30, divido la somma de' prodotti che ne vengono presi positivi, cioè 33, per la somma degli errori presi parimenti positivi, cioè per $\frac{3}{2}$, e il quoto 22 sarà il numero delle carte domandato.

139. *Scol.* 7. Oltre delle accennate sappiamo che gli Aritmetici usano nella pratica di altre regole ancora, e tali sono la così detta Regola *aurea composta*, quella *di Compagnia*, l' altra *di Alligazione*.

I. La prima di queste regole consistendo nel determinare dagli altri termini già cogniti il quarto, o il terzo termine di una proporzione, nella quale la prima ragione è composta (n.° 129) di due, o più ragioni semplici; e la regola seconda consistendo nel determinare in egual modo il quarto, o il terzo termine di una proporzione, nella quale l' antecedente, e il conseguente della prima ragio-

ne uguagliano rispettivamente la somma degli antecedenti, e dei conseguenti ( VII. n.° 137 ) di due o più altre ragioni semplici, o composte, uguali fra loro; vedesi agevolmente, che la dimostrazione di queste regole dipende dai (n. 129, I. 133, VII. 137), e vedesi eziandio quali siano i casi, ne' quali possono esse aver luogo.

II. Abbiansi due sostanze miscibili fra di loro per esempio due Metalli, oppure due fluidi, ec., che dirò M, N; siano $m$, $n$, i loro prezzi specifici; cosicchè la sostanza M costi per ogni libbra $m$ lire, e l'altra N ne costi $n$. Prendasi dalla M una porzione $a$, se ne prenda una $b$ dalla N, e combinate queste due porzioni $a$, $b$ fra loro risulti una terza sostanza, cioè un terzo metallo, un terzo fluido, ec., che dirò P, il cui prezzo specifico sia $p$, ec., e $c$ ne sia la porzione attualmente ottenuta. Per le cose finora supposte potranno stabilirsi le due Equazioni $a+b=c$, $am+bn=cp$.

III. Ora se venga dimandato il valore di $p$, cioè qual sia il prezzo specifico della terza sostanza P; avendosi dalle due Equazioni precedenti $p=\frac{am+bn}{a+b}$, scioglieremo il Quesito, dividendo per la somma delle porzioni $a$, $b$ delle due sostanze M, N la somma dei rispettivi loro prezzi $am$, $bn$.

IV. Che se sia domandato quanta porzione debba io prendere dalla M, e quanta dalla N onde formare una quantità $c$ della terza sostanza P avente il prezzo specifico $p$. Ottenendosi dalle precedenti Equazioni le altre $a=\frac{c(p-n)}{m-n}$, $b=\frac{c(m-p)}{m-n}$; e però le proporzioni $m-n : p-n :: c : a$, $m-n : m-p :: c : b$, si stabilirà una regola di sciogliere il Problema, operando come segue. Siccome il prezzo $p$ deve evidentemente essere medio fra gli altri due $m$, $n$, cosicchè posto $m>n$, ne verrà $m>p>n$, sottraggo dal

prezzo massimo $m$ gli altri due $n$, $p$, sottraggo dal medio $p$ il minimo $n$, e avute le differenze $m-n$, $m-p$, $p-n$, con la regola del tre truovo due quarte proporzionali la prima dopo i termini $m-n, p-n, c$, la seconda dopo gli altri $m-n$, $m-p$, $c$, e queste quarte altro non essendo per quanto si è detto poc' anzi, che i valori $a$, $b$ domandati, daranno la soluzione del Quesito. La quantità $m-n$ primo termine delle due proporzioni accennate, ottienesi ancora, se, come si pratica dagli Aritmetici, si sommino insieme le due $m-p$, $p-n$, poichè $m-p+p-n=m-n$.

V. Le regole pratiche, che abbiamo ora esposte, e insiem dimostrate, onde sciogliere i due Problemi dei (*prec.* III. IV) quelle sono, le quali per l' uso, a cui servono, appellansi *di Alligazione*. Sogliono gli Aritmetici estendere le regole medesime ancora ai casi, ne' quali le sostanze, che si mescolano fra loro, siano più di due: ma in questa supposizione il Problema del (*prec.* IV) merita alcune riflessioni, che faremo in seguito; il Problema poi del (*prec.* III) si risolverà nel modo stesso, che si è indicato, poichè supposto, che uniscansi insieme tante porzioni $a$, $b$, $d$, $e$, ec. delle corrispondenti sostanze M, N, Q, R, ec. aventi rispettivamente i prezzi $m$, $n$, $q$, $r$, ec., e supposto, che quindi risulti una quantità $c$ della nuova sostanza P avente il prezzo $p$, venendone le due Equazioni

$$a+b+d+\text{ec.}=c\,,\quad am+bn+dq+er+\text{ec.}=cp\,,$$

sarà il prezzo cercato $p=\dfrac{am+bn+dq+er+\text{ec.}}{a+b+d+e+\text{ec.}}$.

VI. Se invece del prezzo $p$ si fosse supposto incognito uno degli altri $m$, $n$, ec. per esempio $m$, dedurremo egualmente il metodo, onde determinarlo, osservando, che sarà

$m=\dfrac{(a+b+d+e+\text{ec.})p-(bn+dq+er+\text{ec.})}{a}$. Se nel (*pre-*

*cedente* IV) sia nota la porzione $a$, e siano ignote le $b$, $c$, risultando $c = \frac{a(m-n)}{p-n}$, $b = \frac{a(m-p)}{p-n}$ potremo quindi stabilire il metodo onde scuoprirne il loro valore, e così si dica degli altri casi, che si possono supporre.

VII. Pongasi, che le lettere $m, n, p$, ec. esprimano i pesi specifici delle sostanze M, N, P, ec., e che $a$, $b$, $c$, ec. ne esprimano i volumi. Se dalla miscela dei due volumi $a$, $b$ delle sostanze M, N risulti un volume $c$ della sostanza P, poichè $am$, $bn$, $cp$ ne sono i pesi rispettivi, si avranno quì pure le Equazioni $a+b=c$, $am+bn=cp$; onde risultando $p = \frac{am+bn}{a+b}$, si otterrà il peso specifico della nuova sostanza P dividendo la somma dei due pesi $am$, $bn$ per la somma dei due volumi $a, b$; ed avendosi viceversa $am = \left(\frac{c(p-n)}{m-n}\right) m$, $bn = \left(\frac{c(m-p)}{m-n}\right) n$, si otterranno i pesi $am$, $bn$ delle due porzioni $a$, $b$ delle due sostanze M, N, determinando da prima come nel (*prec.* IV) le due quantità $\frac{c(p-n)}{m-n}$, $\frac{c(m-p)}{m-n}$, e poscia moltiplicando quella per $m$, e questa per $n$. In questa maniera si scioglierà agevolmente il famoso Problema della corona del Re Gerone, conosciuti già innanzi i pesi specifici dell'oro, dell'argento, e della corona medesima, e conosciuto il volume di quest'ultima.

Giova quivi avvertire, che le soluzioni de' Problemi, che consideransi presentemente, non sempre corrispondono con esattezza ai risultati, che realmente ottengonsi in natura; e ciò perchè allorquando due, o più sostanze, per esempio due, o più metalli, si uniscono fra di loro, per affinità di composizione il volume della sostanza terza, nell'esem-

pio il volume del terzo metallo, che ne risulta, suole non uguagliare la somma de' volumi delle sostanze, dei metalli componenti, onde nel caso per esempio di due metalli suol divenire inesatta l' Equazione $a+b=c$. Però se col mezzo dell' esperienza si potesse conoscere il rapporto del volume $c$, con gli altri $a$, $b$, ec. e si conoscesse quindi essere per esempio nel caso precedente $a+b=hc$; allora servendoci di questa nuova Equazione invece dell' altra $a+b=c$, potremo col calcolo ottenere un risultato, che corrisponde esattamente a quello, che ottienesi in Natura.

140. *Def.* 5.ª Se si hanno quattro quantità tali, che la differenza tra la prima, e la seconda stia alla differenza, tra la terza, e la quarta, geometricamente, come la quantità prima alla quarta; esse formano una proporzione, che dicesi *Armonica*; e se le accennate differenze stanno fra loro, come la quantità quarta alla prima, la proporzione appellasi *contrarmonica*. Sarà però armonica fra le quantità $a$, $b$, $c$, $d$, la proporzione $a-b : c-d :: a : d$; contrarmonica l'altra $a-b : c-d :: d : a$. Sì l' una che l' altra di queste proporzioni si diranno *continue*, se essendo tre soli i termini dati, la differenza del primo, e del secondo stia geometricamente alla differenza tra il secondo e il terzo, come nell'armonica il termine primo sta al terzo; e nella contrarmonica come il terzo al primo. Saranno quindi continue le due $a-b : b-c :: a : c$, $a-b : b-c :: c : a$.

141. *Scol.* 8.° I. Date le tre quantità $a$, $b$, $c$, se ne venga richiesta la quarta proporzionale armonica, non avrò evidentemente, che a denominare per esempio $d$ questa quarta, e formate le proporzioni del (*n.° prec.*), dedurre il valore $d = \frac{ac}{2a-b}$; che se sia $b = c$ ne verrà la terza proporzionale armonica $= \frac{ab}{2a-b}$.

II. Date due quantità $a$, $c$ vogliasene sì la media proporzionale armonica, che la contrarmonica. Chiamata questa $b$, dalle proporzioni ultime del (*n.° prec.*) ne verrà rispettivamente nel primo caso $b = \frac{2ac}{a+b}$, e nel secondo $b = \frac{a^2+c^2}{a-c}$.

## CAPO VII.

### *Dell' analisi matematica.*

Prima di passare alle altre operazioni di calcolo consideriamo i metodi, che abbiam finora seguiti nella soluzione dei Problemi pratici, e la natura dei Problemi medesimi, affine di stabilirne delle leggi costanti, e metterci quindi a portata di sciogliere tutte le quistioni di simil natura.

142. *Def.* 1.° Col nome di *Quesito*, *Quistione*, o *Problema* intendesi una proposizione, nella quale si ricercano una, o più cose incognite col mezzo di altre cose, e quantità note, e di certe condizioni date. *Sciogliere* la quistione, od il quesito, o il problema, altro non è che ritrovare attualmente le cose richieste. L' arte poi di sciogliere i problemi col mezzo dell' Algebra, essa è che propriamente chiamasi *Analisi Matematica*: che se la quistione si sciolga col semplice raziocinio, senza aver ricorso ai segni matematici, allora l' analisi dicesi piuttosto *logica*.

143. *Scol.* 1.° Il metodo, che abbiamo seguito finora, e che devesi seguire in generale nello sciogliere i Problemi con analisi matematica, quello si è 1.° di denominare le quantità, e di ridurre le condizioni della quistione in Equazioni; 2.° di risolvere le Equazioni ottenute.

I. Per eseguire in pratica la prima di queste operazioni, è necessario, espresse colle cifre nume-

riche, o colle prime lettere dell' alfabeto le quantità cognite, e con le ultime le incognite, operando su queste, come se il Problema già sciolto volesse verificarsi, è necessario, dissi, eseguire da prima tutte quelle operazioni di calcolo, che vengono richieste dal Problema; quindi considerando le condizioni ad una ad una, acciocchè nessuna ne sfugga, determinare i rapporti, che esse richieggono, tra le quantità note, e le incognite, come se tutte fossero già conosciute, e mentre questi rapporti si effettuano, tra loro paragonando le quantità tutte della quistione, essi medesimi ci condurranno alla determinazione delle Equazioni. Considerando i molti esempi finora addotti, vedremo agevolmente essersi sempre seguita questa via nel ridurre le condizioni del Problema in Equazioni. Dobbiamo però confessare non essere sempre cosa facile il trovare dalle condizioni le Equazioni corrispondenti, e dipendere ciò bene spesso dall' ingegno dell'Analista, e da una certa pratica, per cui ho pensato bene in questi Elementi proporre successivamente diversi esempj, poichè questi possono assuefare l' intelletto a quei raziocinii, che sono a ciò necessarii.

II. Ritrovate le Equazioni conviene risolverle. Se la Quistione conduca con un' incognita ad una sola Equazione simile alle precedenti, noi sapremo sempre scioglierla col mezzo dei (*n.* 33, 34, 42, 44, 52, 58, 61, 67, 69, 71); che se conduca a più Equazioni simili alle precedenti con altrettante incognite, convien prima eliminare ciascun' incognita con uno dei metodi stabiliti nei (*n.* 50, 51, 105,), e quindi risolvere mediante i (*num. cit.*) ciascuna Equazione, che ne risulta; oppure servendoci del metodo esposto nel (X. *n.*° 105), determinare immediatamente il valore di ciascheduna delle incognite.

III. In tutti i Problemi, che abbiamo risolti fi-

nora,' tante sono state sempre le Equazioni quante le incognite. Ora può egli accadere, che quelle siano in un numero maggiore, o minore di queste? e ciò accadendo di qual natura sarà il Problema? veggiamolo.

144. *Esem.* 24.° I. Incontrando una truppa di poveri voglio distribuir loro dei denari; dando per ciascuno 6 soldi, me ne avanzano 14; dandone 8, me ne avanzano 12, e frattanto veggo, che il numero dei soldi diminuito di un' unità uguaglia il numero dei poveri moltiplicato per 7. Si domanda quanti sono i poveri, e quanti i denari.

*Sol.* Essendo $x$ i poveri, $y$ i denari: dalla prima condizione avremo $6x+14=y$, dalla seconda $8x-12=y$, e dalla terza $y-1=7x$: sciogliendo le prime due Equazioni ne verrà $x=13$, $y=92$; si sostituiscano questi due valori nella terza, e avremo $92-1=7.13$, $91=91$, Equazione la quale essendo identica nulla ci dice di più delle prime due, e per conseguenza è inutile; onde diremo che i poveri sono 13, e 92 i soldi.

*Esemp.* II. Dopo 7 ore, che è partito da una Città un Corriere, che fa 5 miglia l'ora, ne viene spedito dietro a lui un altro, che percorre 7 miglia e $\frac{1}{2}$ l' ora. Avendo il secondo Corriere arrivato il primo, gli dice: dalla mia partenza fin quì ho percorso il quadruplo della strada che avete voi trascorsa nel medesimo tempo. Si domanda a qual distanza avrà il secondo sopraggiunto il primo Corriere.

*Sol.* Chiamata $x$ la strada totale percorsa dai due Corrieri; allorchè parte il secondo, vedesi che il primo avea già scorse 35 miglia, onde innanzi d'essere arrivato, ne dovrà avere percorse $x-35$; scorrendo adunque nel tempo stesso il secondo Corriere $x$ miglia, e il primo $x-35$, ne verrà $x:x-35::7\frac{1}{2}:5::\frac{15}{2}:5$, poichè nel moto uniforme in

tempi uguali gli spazj devono stare come le velocità; e però avremo $5x = \frac{15x}{2} - \frac{525}{2}$ ( *n.°* 132 ): dalla seconda condizione poi nascerà $x = 4(x-35)$, ossia $x = 4x - 140$. La prima Equazione ci dà $x = 105$; sostituisco questo valore nella seconda, e otterremo $105 = 420 - 140 = 280$. Or questa Equazione è assurda; dunque assurdo sarà pure il Problema, il qual deve soddisfare ad una condizione impossibile: tolta la quale, il secondo Corriere arriverebbe il primo dopo 105 miglia.

145. *Sol.* 2.° Nel secondo dei precedenti Esempj ( *n.°* 144) vedesi, che abbiamo con un'incognita due Equazioni, e nell' Esempio primo con due incognite abbiamo tre Equazioni. Dunque ponno benissimo venir proposti dei Quesiti, nel cercare la soluzione de' quali il numero delle Equazioni risulti maggiore di quello delle incognite. Sia pertanto in generale $m$ il numero di queste, $m+n$ il numero delle Equazioni. Con $m$ Equazioni abbiam veduto in passato, che si possono sempre determinare i valori di $m$ incognite: supposto adunque che nel nostro caso siasi ciò eseguito, rimarranno altre $n$ Equazioni, nelle quali non esistendo altre incognite se non se le già determinate, potrò in loro vece sostituire i valori ritrovati. Eseguite simili sostituzioni, o ciascuna di queste $n$ Equazioni si verifica, come si è veduto nell' Esempio I del ( *n.°* 144) rapporto alla $y - 1 = 7x$ a cagione dei valori $x = 13$, $y = 92$ divenuta $92 - 1 = 7.13$, e però $91 = 91$; oppure non si verifica, come abbiam veduto nell' Esempio II del citato ( *n.°* 144 ) accadere riguardo alla $x = 4(x - 35)$ pel valore $x = 105$ divenuta $105 = 4(105 - 35)$, e però $105 = 280$. Nel primo di questi casi il Problema è possibile, ma le $n$ condizioni, da cui somministransi le $n$ Equazioni ulteriori, è chiaro che dovranno essere identiche con

le precedenti, od essere in esse incluse, e però inutili a proporsi; nel caso secondo poi il Problema, come viene proposto, è impossibile, ossia le condizioni, rapporto alle quali produconsi le Equazioni assurde sono in contraddizione con le altre.

146. *Scol.* 3.° Supponiamo che per la soluzione di un Problema ottengansi le due Equazioni $ax + by = c$, $dx + ey = f$, e che, avutasi con la eliminazione $x = \frac{ce-bf}{ae-bd}$, $y = \frac{cd-af}{ae-bd}$, il denominatore $ae - bd$ risulti $= o$, e però $x = \frac{ce-bf}{o}$, $y = \frac{cd-af}{o}$. In questo caso, poichè dalla $ae - bd = o$ ottienesi $\frac{b}{a} = \frac{e}{d}$, supposto $e = mb$, dovrà essere ancora $d = ma$, e però la seconda delle precedenti Equazioni diverrà $max + mdy = f$, e quindi $ax + by = \frac{f}{m}$. Ora la quantità $\frac{f}{m}$ o è uguale all' altra $c$, o ne è disuguale; se si ha $\frac{f}{m} = c$, le due Equazioni supposte altro non essendo che le $ax + by = c$, $max + mby = mc$, la condizione del Quesito che somministra l' una di esse sarà identica, od inclusa nell' altra. Che se $\frac{f}{m}$ si truova disuguale da $c$; allora le due Equazioni $ax + by = c$, $ax + by = \frac{f}{m}$ avendo lo stesso primo membro $ax + by$, saranno contraddittorie, e però se ha luogo una delle condizioni del Problema, non può avere contemporaneamente luogo l'altra.

147. *Esem.* 25.° Tizio ha cambiata della Tela con del Panno, e vi ha aggiunte $a$ lire; il Panno vale per

ogni metro $b$ lire, e la Tela, essendo stata misurata col braccio mercantile Modenese, vale per ogni braccio lire $c$. Dimandasi quanti metri di tela ha Egli dati, e quanti ne ha ricevuti di Panno.

*Sol.* Denominato $x$ il numero di quelli, $y$ il numero di questi, poichè il rapporto del braccio mercantile Modenese al metro esprimesi dalla 0,6332: 1,0000 il prezzo totale della Tela sarà $\frac{10000cx}{6332} = 1,5793cx$ prossimamente, ed essendo $by$ quello del Panno, avremo $by = 1,5793cx + a$. Non avendosi nel quesito altra condizione, non se ne potrà ritrarre altra Equazione, ed una sola per conseguenza ne somministrano i dati del Problema, quantunque le incognite siano due. Ora quale sarà il valore delle $x$, $y$ in questo caso, nel quale il numero delle incognite supera quello dell' Equazioni? Il valore della $y$ vedesi che dipende dal valore della $x$; ma quale è il valore della $x$? Non essendo questa incognita soggetta ad alcuna condizione, che la determini, è chiaro che potrà avere un valore qualunque. Secondo poi i diversi valori che ad essa si attribuiscono, venendo la $y$ determinata in altrettante maniere diverse; ne segue, che il Problema verrà in questo caso ad avere un' infinità di soluzioni.

Sia per esempio $a = 100$, $b = 50$, $c = 14$, onde $50y = 1,5793 \times 14x + 100$, e però $50y = 22,1102x + 100$. Venendone $y = 0,4422x + 2$, se faremo successivamente $x = 0$, $= 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$, ec. si otterrà in corrispondenza $y = 2$, $= 2,4422$, $= 2,8844$, $= 3,3266$, $= 3,7688$, ec. Avvertasi che volendosi esprimere soltanto i metri, i palmi, i diti, e gli atomi, basta nei risultati ottenuti, che i decimali siano esatti fino alla terza cifra.

148. *Esempio* 26.° Suppongasi, che nel (V. *n.*° 139) tre siano le sostanze M, N, Q date aventi i rispettivi prezzi specifici $m$, $n$, $q$, e dalla miscela

delle rispettive loro porzioni $a$, $b$, $d$ nascendo la porzione $c$ della sostanza P avente il prezzo specifico $p$ abbiansi le due Equazioni $a+b+d=c$, $am+bn+dq=cp$. In questa ipotesi poste incognite le porzioni $a$, $b$, $d$, se ne cerca il loro valore.

*Sol.* Due nel presente Problema sono le Equazioni, e tre le incognite: eliminata una di queste, per esempio la $d$, risultandoci con le altre due $a$, $b$ la sola Equazione $(m-q)a+(n-q)b=(p-q)c$; il Problema avrà infinite soluzioni diverse, ed una delle incognite, per esempio la $a$, rimarrà arbitraria, avendosi poi l'altra $b=\frac{(p-q)c-(m-q)a}{n-q}$, e la terza $d=\frac{(m-n)a-(p-n)c}{n-q}$.

Esprimansi per esempio dalle M, N, Q tre qualità d'argento, i cui prezzi specifici siano 8, 7, 6, e se ne voglia formare una terza del prezzo $7\frac{1}{2}$. Avendosi quindi $m=8$, $n=7$, $q=6$, $p=7\frac{1}{2}$, dalle precedenti Equazioni con la sostituzione otterremo $b=\frac{3c-4a}{2}$, $d=\frac{2a-c}{2}$, e supposto $c=1$ lib., sarà $b=\frac{3-4a}{2}$, $d=\frac{2a-1}{2}$. Sia per esempio $a=\frac{5}{8}$, ne verrà $b=\frac{2}{8}$, $d=\frac{1}{8}$: sia $a=\frac{6}{10}=6$ once, otterremo $b=3$ once, $d=1$ oncia.

149. *Scol.* 4.° I. Conviene quivi riflettere, che quantunque la $a$ nel Problema del (n.° *prec.*) rimanga indeterminata, pure il Problema non ammette quella estensione di soluzioni, che ammettesi dal Quesito del (n.° 147). Nel (n.° 148) le condizioni del Problema esigono, non solo che il prezzo $p$ sia medio tra il massimo $m$, e il minimo $q$, ma ancora che i tre numeri $a$, $b$, $d$ siano tutti e tre positivi. Ora per quest' ultimo requisito risulta $a>0$,

$> o$, $\frac{(p-q)c-(m-q)a}{n-q} > o$, $\frac{(m-n)a-(p-n)c}{n-q} > o$, e però a cagione di $m > n > q$, si ha $(p-q)c > (m-q)a$, $(m-n)a > (p-n)c$. Dunque essendo $a < \frac{(p-q)c}{m-q}$, $a > \frac{(p-n)c}{m-n}$ a questa non si potranno attribuire già dei valori, benchè positivi, a piacimento, siccome alla $x$ del (n.° 147), ma le si potranno dare soltanto quei valori, che esistono fra i limiti $\frac{(p-q)c}{m-q}$, $\frac{(p-n)c}{m-n}$, valori i quali sono per vero dire infiniti, ma però di un' estensione infinitamente minore di quella dei valori, che possonsi dare alla $x$ nel citato (n.° 147). Sia $p > n$, e però $p-n > o$, con l' attual sottrazione dei due precedenti limiti della $a$ truovandosi $\frac{(p-q)c}{m-q} - \frac{(p-n)c}{m-n} = \frac{(m-p)(n-q)c}{(m-q)(m-n)}$; questa differenza esprimerà nel caso di $p > n$ l' estensione dei valori della $a$, e sarà quindi $a = \frac{(p-n)c}{m-n} + h$, posto $h$ non $< o$, e non $> \frac{(m-p)(n-q)c}{(m-q)(m-n)}$. Che se sia $p < n$, onde $p-n < o$; allora il valore $\frac{(p-n)c}{m-n}$ essendo negativo, i valori della $a$ saranno tra lo zero, e $\frac{(p-q)c}{m-q}$, e questa $\frac{(p-q)c}{m-q}$ ne determinerà l' estensione.

Nell' esempio del (*n.° prec.*) avendosi $b = \frac{3c-4a}{2}$, $d = \frac{2a-c}{2}$, dovrà essere $a < \frac{3c}{4}$, $a > \frac{c}{2}$; e però $\frac{c}{4} = \frac{3c}{4} - \frac{c}{2}$ misurerà l' estensione dei valori della $a$, onde

posto $a = \frac{c}{2} + h$, converrà alla $h$ attribuire quei valori, che sono non $< 0$, e non $> \frac{c}{4}$. Nel caso di $c=1$ i precedenti valori $a = \frac{5}{8}$, $a = \frac{6}{10}$ vedesi agevolmente che soddisfanno alle accennate condizioni.

II. Conduca una Questione qualunque a due Equazioni con tre incognite, le quali risolte ci diano in generale $y = A - Bx$, $z = Cx - D$, e debbano le $y, z$ essere amendue intere. In conseguenza di ciò dovendo essere $A - Bx > 0$, $Cx - D > 0$, come nel (*prec.* I) troveremo $x < \frac{A}{B}$, $x > \frac{D}{C}$, e quindi si vede qual metodo debba sempre seguirsi, onde ritruovare il limite, o i limiti entro de' quali contengonsi i valori della $x$.

III. Siano nelle precedenti due Equazioni positivi gli ultimi due termini, onde abbiasi $y = A + Bx$, $z = Cx + D$. In questo caso i due rapporti $A + Bx > 0$, $Cx + D > 0$ dandoci $x > -\frac{A}{B}$, $x > -\frac{D}{C}$, ne viene che i valori della $x$ non hanno che un solo limite, cioè se sia $\frac{A}{B} < \frac{D}{C}$, il limite $-\frac{D}{C}$, o l'altro $-\frac{A}{B}$ se sia $\frac{A}{B} < \frac{D}{C}$, onde al disotto di questa $-\frac{D}{C}$, oppure della $-\frac{A}{B}$ la $x$ non può avere alcun valore, ma potrà averli tutti senza alcun limite al disopra. Se $z = Cx - D$ sia l' Equazion seconda, i valori della $x$ non avranno che al disotto sempre il limite $\frac{D}{C}$.

IV. Vogliasi nel (*prec.* II), che tanto il valore della $y$ come quello della $z$ siano negativi. Avendosi in questo caso $A-Bx<0$, $Cx-D<0$, ne verrà $x > \frac{A}{B}$, $x < \frac{D}{C}$. Ora o si vuole $\frac{A}{B} > \frac{D}{C}$, o se ne vuole minore, o gli si vuole uguale: nel primo di questi casi non potendo darsi alla $x$ alcun valore, che sia contemporaneamente $> \frac{A}{B}$, e $< \frac{D}{C}$, il Problema sarà impossibile, e quei valori della $x$, i quali rendono $y = A-Bx$ negativo, renderanno positivo $z = Cx - D$, e quei che fanno negativo $z$, faranno negativo $y$. Nel caso secondo il presente Quesito sarà possibile, ma non potrà evidentemente esser tale quello del (*prec.* II). Allorchè finalmente $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$, saranno impossibili entrambi, non potendo evidentemente essere nello stesso tempo $x < \frac{A}{B}$, ed $x > \frac{D}{C}$, oppure $x > \frac{A}{B}$, ed $x < \frac{C}{D}$. Che se i valori delle $y$, $z$ voglionsi amendue negativi nel (*preced.* III); allora è facile a vedersi che si potrà sempre soddisfarvi, e se ne avranno in corrispondenza infiniti valori.

150. *Esem.* 27.° Con 20 soldi vorrei comprare 20 uccelli, cioè Tordi a 3 soldi l'uno, Merli a 2 soldi l'uno, e Passere a $\frac{1}{2}$ soldo l'una, quanti uccelli dovrò prendere di ciascuna specie?

*Sol.* Siano $x$ i Tordi, $y$ i Merli, le Passere saranno $20-x-y$; e in conseguenza de' prezzi stabiliti avremo la sola Equazione $3x+2y+\frac{20-x-y}{2} = 20$, ossia $5x+3y=20$, da cui si ricava $x = \frac{20-3y}{5} =$

$4-\frac{3y}{5}$. Nel presente Problema i valori delle $x$, $y$ deggiono evidentemente essere non solo positivi, ma ancora interi; in esso adunque conviene soddisfare ad un' ulteriore condizione, il che si otterrà operando come segue. Avendosi $x=4-\frac{3y}{5}$, acciocchè $x$ sia intero, è chiaro, che dovrà essere intero $\frac{3y}{5}$: supposto perciò $\frac{3y}{5}=m$, ne verrà $3y=5m$, e però $y=\frac{5m}{3}=m+\frac{2m}{3}$; e se $y$, ed $m$ sono numeri interi, tale esser dovrà anche $\frac{2m}{3}$: suppongo pertanto $\frac{2m}{3}=n$, e quindi $m=\frac{3n}{2}=n+\frac{n}{2}$; perchè $m$ sia intero dovendo essere intero ancora $\frac{n}{2}$, faccio $\frac{n}{2}=p$, e venendone $n=2p$ senza rotti, sostituisco questo valor $2p$ nelle successive Equazioni superiori, e avremo

$$m=\frac{3n}{2}=\frac{6p}{2}=3p$$

$$y=\frac{5m}{3}=\frac{15p}{3}=5p$$

$$x=4-\frac{3y}{5}=4-\frac{15p}{5}=4-3p,$$

ove si vede, che qualunque valore intero attribuiscasi a $p$, e la $x$, e la $y$ saranno sempre numeri interi; ma dovendo di più essere positivi (n.° 30), ne verrà $5p>0$, $4-3p>0$, donde si deduce $p>0, p<\frac{4}{3}$.

Dunque dovendo $p$ essere $>0$, e $<1\frac{1}{3}$ poichè $\frac{4}{3}$

$= 1\frac{1}{3}$, e dovendo di più rendere interi i numeri $y$, $x$, non potrà che uguagliare l' unità, e quindi fatto $p=1$, avremo $y=5$, $x=4-3=1$. Dunque non potrò nell' ipotesi fatta che prendere 1 tordo, 5 merli, e $20-5-1=14$ passere.

151. *Scol.* 5.° Conduca un proposto Problema all' Equazione generale $Ax+By=P$, ove $x$, $y$ debbano essere numeri interi: sia F il massimo comun divisore delle quantità note A, B, P, cosicchè $A=Fm$, $B=FM$, $P=FQ$; sostituendo verrà $Fmx+FMy=FQ$, e dividendo per F, $mx+My=Q$, ove i tre numeri $m$, M, Q sono primi tra loro (IV. n.° 81). Ora io dico, che se i due numeri $x, y$ debbono essere interi, i due coefficienti $m$, M non possono avere alcun divisore comune. Imperciocchè se si volesse che avessero un divisore $k$, supposto $m=fk$, $M=gk$, ne verrebbe, sostituendo $fkx+gky=Q$, e dividendo per $k$, $fx+gy=\frac{Q}{k}$: ma Q non può essere divisibile per $k$, poichè i tre numeri $fk=m$, $gk=M$, Q sono primi fra loro; dunque ne verrebbe la quantità intera $fx+gy=$ ad un rotto $\frac{Q}{k}$, il che è impossibile. Dunque se un Problema, ove i valori delle incognite richieggonsi interi, conduca ad un' Equazione, come la seguente $12x+15y=19$, in cui i coefficienti 12, 15 hanno amendue un divisor 3 non comune al 19, ne sarà impossibile la soluzione.

152. *Esem.* 28.° Due Poligoni hanno, presi insieme, 100 lati: frattanto se numero i lati dell' uno, prendendoli ad otto ad otto, me ne avanzano 7, e lo stesso avanzo di 7 mi risulta mentre numero i lati dell' altro a dieci a dieci. Quanti sono i lati dell' uno, e quanti quelli dell' altro Poligono?

*Sol.* Chiamato $x$ il numero delle volte che lo

8 entra nella somma dei lati del primo poligono, ed $y$ il numero delle volte, che entra il 10 nella somma dei lati dell'altro; essendo $8x+7$ i lati del primo, e $10y+7$ quelli del secondo poligono, ne verrà $8x+7+10y+7=100$, ossia $8x+10y=86$, e dividendo per 2, $4x+5y=43$. Operando come nel (n.° 150), ricavo $y=\frac{43-4x}{5}=8+\frac{3-4x}{5}$; faccio $\frac{3-4x}{5}=m$, e ne ottengo $x=\frac{3-5m}{4}=-m+\frac{3-m}{4}$; suppongo di nuovo $\frac{3-m}{4}=n$, e venendone $m=3-4n$ senza rotti, ritorno indietro sostituendo, e ne risulta

$$x=\frac{3-5m}{4}=\frac{3-15+20n}{4}=5n-3$$

$$y=\frac{43-4x}{5}=\frac{43-20n+12}{5}=11-4n.$$

Poichè $x$, ed $y$ devono essere positivi, sarà $5n-3>0$, $11-4n>0$, e quindi risultando $n>\frac{3}{5}$, $n<\frac{11}{4}$, i valori di $n$ saran contenuti tra i limiti $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{4}$, e dovendo di più esser numeri interi, non potranno che essere i due 1, 2. In questo caso pertanto avremo due soluzioni.

1.° Mentre $n=1$, ne viene $x=5-3=2$, $y=11-4=7$, e però $8x+7=16+7=23$; $10y+7=70+7=77$.

2.° Mentre $n=2$ ne viene $x=10-3=7$, $y=11-8=3$, e però $8x+7=56+7=63$; $10y+7=30+7=37$.

153. *Esem.* 29.° Determinare un numero intero, tale, che moltiplicato per 5, e sommatone il prodotto con 10 dia un risultato divisibile esattamente per 9, e moltiplicato per 8 dia un prodotto, il quale diminuito di 1 sia esattamente divisibile per 11.

*Sol.* Chiamo $x$ il numero che si cerca, poichè per la condizione del Quesito $\frac{5x+10}{9}$, $\frac{8x-1}{11}$ devono essere due numeri interi, pongo $\frac{5x+10}{9}=y$, $\frac{8x-1}{11}=z$. Dalla prima di queste Equazioni cerco, come nei (*prec.* n. 150, 152) in numeri interi i valori delle $x$, $y$; e ritrovato $x=9n-2$, $y=5n$, essendo $n$ un intero qualunque, sostituisco il valore $9n-2$ in vece della $x$ nella seconda Equazione $\frac{8x-1}{11}=z$. Avuta così l' altra Equazione $72n-17=11z$, considero in essa come incognite le $n$, $z$, ne cerco quindi, come di sopra, i valori in numeri interi, e ottenute $n=11t+1$, $z=72t+5$, in cui $t$ rappresenta un intero qualunque, colloco nella $x=9n-2$ invece della $n$ il suo valore $11t+1$. Avendosi da ciò $x=99t+7$, $y=55t+5$, $z=72t+5$, apparisce che i valori della $x$, i quali sciolgono il Quesito, sono infiniti, essendo essi tutti contenuti nella espressione $99t+7$, in cui alla $t$ possonsi dare tutti gl' infiniti valori 0, 1, 2, 3, 4, ec., e che gli altri $55t+5$, $72t+5$ somministrano i corrispondenti infiniti valori delle $\frac{5x+10}{9}=y$, $\frac{8x-1}{11}=z$. Se sia $t=0$, ne verrà $x=7$, e però $y=5$, $z=5$, se $t=1$, avremo $x=106$, $y=60$, $z=77$; se $t=2$ risulterà $x=205$, ed $y=115$, $z=149$, e così di seguito.

Se oltre le precedenti $\frac{5x+10}{9}=y$, $\frac{8x-1}{11}=z$ si fosse supposta anche una terza Equazione, per esempio $\frac{4x+6}{17}=u$, a cui la $x$ dovesse soddisfare, essendo $u$ numero intero, porrei allora in questa invece della $x$ il trovato valore $99t+7$; e sciolta in seguito in interi l' Equazione $\frac{396t+34}{17}=u$, e trovato così $t=17k$,

$t = 396k + 2$, esprimendosi dalla $k$ un intero qualsivoglia, porrei nelle precedenti $x = 99t + 7$, $y = 55t + 5$, $z = 72t + 5$ invece della $t$ il valore $17k$; ed il valore $x = 1688k + 7$, soddisfarebbe a tutte le condizioni, risultando in corrispondenza $y = 935k + 5$, $z = 1224k + 5$, $u = 396k + 2$. Ponendo successivamente $k = 0, 1, 2$, ec. si otterrà in corrispondenza $x = 7$, 1690, 3373, ec., e quindi $y = 5$, 940, 1875, ec. $z = 5$, 1229, 2453, ec. ed $u = 2$, 398, 794, ec.

1683k

Se oltre alle tre accennate dovesse la $x$ soddisfare ancora ad una quarta Equazione simile alle precedenti, sostituirei in quest'ultima invece della $x$ il trovato valore $1683k + 7$, e proseguirei ad operare come precedentemente; e così proseguirei sempre, se la $x$ dovesse soddisfare ancora ad una quinta, ad una sesta ec. Equazione.

154. *Probl.* 20. Risolvere in numeri interi l' Equazione $Ax + By = P$, essendo interi i coefficienti A, B, P.

*Sol.* Determino il massimo comun divisore fra i due numeri A, B (*n.*° 109), e chiamato questo F, osservo se $\frac{P}{F}$ è un numero intero; se non lo è, pel (*n.*° 151) sarà il Problema impossibile; che se lo è, potrò ottenere la soluzion domandata, eseguendo le operazioni, che sonosi indicate nei (*n.* 150, 152, 153). L'operazione istessa però, per cui si è determinato il massimo divisor comune fra le A, B, e l' operazione del (II. *n.*° 114) potranno darci assai più brevemente, e più semplicemente la soluzione medesima. Posto difatti $\frac{P}{F} = Q$, determinati quindi nel determinare F pel (*n.*° 109) i successivi quoti $a$, $b$, $c$, $d$, ec. e chiamati $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$ le ultime due frazioni, che si ottengono praticando su di essi le operazioni del

(II. *n.*° 114); io dico, che, se questi quoti $a, b, c, d,$ &c. sono di numero dispari, sarà $x = Mr - LQ$, $y = lQ - mr$, esprimendosi con la $r$ un intero qualunque, e se il numero degl' indicati quozienti è pari, sarà $x = -Mr + LQ$, $y = -lQ + mr$, ossia riducendo, come suol dirsi dagli Algebristi, queste due Equazioni ad una sola, avremo $x = \pm Mr \mp LQ$, $y = \pm lQ \mp mr$, prendendo i segni superiori, quando il numero degli esposti quoti è dispari, e gl' inferiori, quando è pari. Per isciogliere adunque il nostro Problema ritrovate le precedenti frazioni $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$, non avremo che da moltiplicare pei denominatori M, L le rispettive quantità $r$, Q, sottrarre l' un prodotto dall' altro, e si otterrà così il valore della $x$, quindi moltiplicare le stesse Q, $r$ rispettivamente pei numeratori $l, m$, e sottratto in egual modo l' un prodotto dall' altro, ne verrà il valore della $y$. La regola poi precedentemente accennata dei segni indicherà evidentemente quale dei prodotti debbasi sottrarre.

Sia per esempio $111x + 81y = 195$ l' Equazione data. Cerco fra 111, ed 81 il massimo comun divisore, e con l' operazione del (*n.*° 109) truovati i quoti 1, 2, 1, 2, 3, ed il loro massimo divisore comune 3, osservo che $\frac{195}{3}$ essendo $= 65$, è un numero intero. Esistendo adunque numeri interi, che sciolgono la data Equazione, determino con gli esposti Quozienti, giusta il (II. *n.*° 114), le frazioni $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{37}{27}$; e giacchè dispari in questo caso è il loro numero, ed $\frac{11}{8}$, $\frac{37}{27}$ sono le ultime due frazioni; per le regole poc' anzi stabilite sarà $x = 27r - 8.65$, $y = 11.65 - 37r$, ossia $x = 27r - 520$, $y = 715 - 37r$, rappresentandosi dalla $r$ un intero qualunque. Mentre in questo esempio si faccia $27r -$

$720 > 0$, $715 - 37r < 0$, risultandone $r > 19\frac{7}{37}$, $r < 19\frac{12}{37}$, ne segue che fra i numeri interi, i quali soddisfanno alla Equazione data niuno ve n'à positivo. Se le Equazioni date fossero le $5x + 3y = 20$, $8x + 10y = 36$, dei precedenti (*n.* 150, 152) col metodo presente troveremo nel primo caso $x = 3r - 20$, $y = 40 - 5r$, e nel secondo $x = 5r - 43$, $y = 43 - 4r$. Questi risultati, quantunque sembrino diversi dai ritrovati negli esposti (*n.* 150, 152); pure è facile a vedersi, che sono gli stessi, mentre però alla $r$ in questo, ed alle $p$, $n$, $t$ nei (*n. cit.*) si diano i valori opportuni. Rapporto per esempio alla Equazione $5x + 3y = 20$ del (*n.°* 150), acciocchè $x = 3r - 20$, $y = 40 - 5r$ siano numeri interi, dovrà essere $r > 6\frac{2}{3}$, $r < 8$, e però $r = 7$, onde $x = 1$, $y = 5$, ed il valore 7 di $r$ corrisponderà al valore 1 di $p$ nel (*n.°* 150).

Per dimostrare l' esposto metodo, osservo, che avendosi $Q = \frac{P}{F}$, $m = \frac{A}{F}$, $M = \frac{B}{F}$ (I, II, III, *n.°* 114), l' Equazione $Ax + By = P$ sarà la stessa che la $mx + My = Q$. Ora a questa Equazione io soddisfo sempre, e con tutta la dovuta generalità, ogniqualvolta ponga in luogo delle $x$, $y$ due espressioni aventi una indeterminata comune, che dirò $r$, le quali rendano il suo primo membro $= Q$; dunque le due espressioni $x = \pm Mr \mp LQ$, $y = \pm lQ \mp mr$ vi soddisfaranno completamente, mentre per esse si compia all' indicata condizione. Posti pertanto in primo luogo di numero pari i quoti $a$, $b$, $c$, $d$, ec., si sostituiscano nel primo membro della $mx + My = Q$ i valori $x = -Mr + LQ$, $y = -lQ + mr$, ne verrà $-mMr + mLQ - lMQ + mMr = (mL - lM)Q$; ma dalle quantità (XVIII) del (*n°.* 115) apparisce, che quando gli esposti quozienti son di numero pari, allora $mL - lM = 1$. Dunque avendosi $(mL - lM)Q = Q$, rimarrà in questo primo caso soddisfatto alla condizione accennata. Che

dispari è il numero dei quoti $a$, $b$, $c$, $d$, ec.; apparendo dalle citate quantità (XVIII) essere $m\mathrm{L} - l\mathrm{M} = -1$, e però $l\mathrm{M} - m\mathrm{L} = 1$, e per la sostituzione in $mx + \mathrm{M}y$ de' valori $x = \mathrm{M}r - \mathrm{LQ}$, $y = l\mathrm{Q} - mr$ risultando quindi $m\mathrm{M}r - m\mathrm{LQ} + l\mathrm{MQ} - m\mathrm{M}r = (l\mathrm{M} - m\mathrm{L})\,\mathrm{Q} = \mathrm{Q}$, la stessa condizione sarà ancora in questo secondo caso adempiuta. Dunque ec. Osservisi poi non potersi dalla indeterminata $r$ esprimere giammai numeri fratti. Imperocchè se si volesse per esempio $r = \frac{p}{q}$, essendo questa frazione ridotta ai minimi termini, ne verrebbe $x = \pm\frac{\mathrm{M}p}{q} \mp \mathrm{LQ}, y = \pm l\mathrm{Q} \mp \frac{mp}{q}$, e quindi essendo LQ, $l$Q, $x$, $y$ numeri interi, dovrebbero le due quantità $\mathrm{M}p$, $mp$, e però le M, $m$ essere divisibili esattamente per $q$; ma essendo questi numeri M, $m$ primi fra loro, tale divisione non può aver luogo. Dunque ec.

155. *Scol.* 6.° I. Che se l' Equazion data sia la $\mathrm{A}x - \mathrm{B}y = \mathrm{P}$, ritenute le supposizioni, e fatte le considerazioni del ( *n.° prec.* ) troveremo dover essere $x = \pm\mathrm{M}r \mp \mathrm{LQ}$, $y = \pm mr \mp l\mathrm{Q}$, prendendosi i segni come nel numero ora citato. In questo caso adunque avremo i valori delle $x$, $y$ col moltiplicare le quantità $r$, Q rispettivamente pei denominatori M, L, quindi pei numeratori $m$, $l$; e ritenuta la regola de' segni accennata, la differenza dei primi due prodotti formerà il valore della $x$, la differenza dei secondi il valore della $y$.

II. Da quanto si è detto nel ($n.°$ 154), e nel (*prec.* I) vedesi potersi sempre asserire che quando nella Equazione $\mathrm{A}x \pm \mathrm{B}y = \mathrm{P}$ il coefficiente P può dividersi esattamente pel massimo divisore dei due A, B; allora esistono sempre dei numeri interi, i quali sostituiti contemporaneamente in luogo delle $x$, $y$, verificano l' Equazione proposta.

156. *Probl.* 21.° Risolvere in numeri interi l' Equazione $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{P}$.

*Sol.* Determinato il massimo comun divisore, che dirò F, tra i due coefficienti A, B, osservo se pure esso è divisibile esattamente tanto il coefficiente C, come l'altro P; se essendolo C, veggo che non lo è P, per un discorso uguale a quello del (*n.*° 151) dirò che la soluzione domandata è impossibile: che se ciò non succeda

I. Cominciam dal supporre amendue questi numeri C, P divisibili esattamente per F. In tale ipotesi, posto $C=FN$, $P=FQ$, e ritenute le supposizioni del (*n.*° 154) rapporto alle frazioni $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}=\frac{A}{B}$, io dico, che osservando la regola dei segni, che abbiamo replicatamente indicata (*n.* 154, 155) dovrà essere $x=\pm Mr\mp L(Q-Nz)$, $y=\mp mr\pm l(Q-Nz)$, (XXI) e ciò chiaramente apparisce dal riflettere, che l'Equazione $Ax+By+Cz=P$ equivale all'altra $mx+My+Nz=Q$, e però alla $mx+My=Q-Nz$; ma quest'ultima Equazione corrisponde perfettamente alla $mx+My=Q$ del (*n.*° 154), mentre in luogo di Q pongasi $Q-Nz$. Dunque nelle espressioni de' valori delle $x$, $y$ del citato (*n.*° 154) rimanendo la Q immutata, se porrò in sua vece la $Q-Nz$, ne verranno per $x$, ed $y$ due valori, che soddisferanno all'Equazione $mx+My=Q-Nz$, e però alla $Ax+By+Cz=P$. Dunque ec.

II. Non sia F divisore esatto di C; determino in questa ipotesi il massimo comun divisore tra F, e C, e chiamato esso G, osservo, se $\frac{P}{G}$ è numero intero; se non lo è, dirò nuovamente essere la cercata risoluzione della Equazione impossibile, e facilmente, come nel (*n.*° 151) se ne vedrà la ragione: che se si può P esattamente dividere per G, supposto $F=nG$, $\frac{P}{G}=R$, $\frac{C}{G}=N$, la $Ax+By+Cz=P$ si ridurrà alla

$\ldots + \mathrm{M}ny + \mathrm{N}z = \mathrm{R}$, e però avendosi $mx + \mathrm{M}y = \frac{\mathrm{R}-\mathrm{N}z}{n}$, la $z$ dovrà esser tale, che renda $\mathrm{R}-\mathrm{N}z$ divisibile esattamente per $n$. Supposto pertanto $\frac{\mathrm{R}-\mathrm{N}z}{n} = u$, la data diverrà $mx+\mathrm{M}y = u$; ma dalla $\frac{\mathrm{R}-\mathrm{N}z}{n} = u$, avendosi $nu + \mathrm{N}z = \mathrm{R}$, ed essendo N, $n$ primi fra loro, pel (II. $n.^{\circ}$ 155) esistono sempre degli interi, che sciolgono quest' ultime Equazioni; dunque potendo essere sempre interi e la $z$, e la $u$, tali in corrispondenza potranno essere ancora e la $x$, e la $y$ dipendentemente dalla $mx + \mathrm{M}y = u$, e per conseguenza sarà nel presente caso sempre solubile in numeri interi la data $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{P}$. Ora operando come nel ($n.^{\circ}$ 154) dalla $mx + \mathrm{M}y = u$ abbiamo $x = \pm \mathrm{M}r \mp \mathrm{L}u$, $y = \pm lu \mp mr$, e ridotta la $\frac{n}{\mathrm{N}}$ in frazioni simili alle (XV, XVII) dei (II. $n.^{\circ}$ 114, $n.^{\circ}$ 115), delle quali $\frac{l'}{\mathrm{L}'}$, $\frac{n}{\mathrm{N}}$ siano le ultime due, per lo stesso ($n.^{\circ}$ 154) abbiamo $u = \pm \mathrm{N}q \mp \mathrm{L}'\mathrm{R}$, $z = \pm l'\mathrm{R} \mp nq$, esprimendosi con la $q$ un intero qualunque, e prendendosi i segni secondo le solite regole. Dunque sostituito in luogo della $u$ il suo valore, le tre Equazioni $x = \pm \mathrm{M}r \mp \mathrm{L}(\pm \mathrm{N}q \mp \mathrm{L}'\mathrm{R})$, $y = \mp mr \pm l(\pm \mathrm{N}q \mp \mathrm{L}'\mathrm{R})$, $z = \mp nq \pm l'\mathrm{R}$ daranno in interi i valori domandati delle $x$, $y$, $z$. Se non si fosse eseguita la indicata sostituzione del valore della $u$, la soluzione della proposta $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{P}$ sarebbesi contenuta nelle quattro Equazioni $x = \mp \mathrm{M}r \mp \mathrm{L}u$, $y = \mp mr \pm lu$, $u = \pm \mathrm{N}q \mp \mathrm{L}'\mathrm{R}$, $z = \mp nq \pm l'\mathrm{R}$. (XXII)

III. Se l'Equazione data sia la $\mathrm{A}x - \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{P}$; dal (I. $n.^{\circ}$ 155) è facile a vedersi, che le formole esprimentine la soluzione saranno nel caso del (*prec.* I) $x = \pm \mathrm{M}r \mp \mathrm{L}(\mathrm{Q} - \mathrm{N}z)$, $y = \pm mr \mp l(\mathrm{Q} - \mathrm{N}z)$, e nel caso del (*prec.* II) saranno $x = \pm \mathrm{M}r \mp \mathrm{L}(\pm \mathrm{N}q$

$\mp L'R$), $y = \pm mr \mp l$ ($\pm Nq \mp L'R$), $z = \mp nq \pm l'$ Che se essa Equazione sia $Ax - By - Cz = P$, al ra rapporto al (*prec.* I.) avremo $x = \pm Mr \mp L(Q + Nz)$, $y = \pm mr \mp l(Q + Nz)$, e nel (*prec.* II) l'Equazione tra le $z$, $u$ divenendo $nu - Nz = R$, onde $u = \pm Nq \mp L'R$, $z = \pm nq \mp l'R$, si otterrà $x = \pm Mr \mp L(\pm Nq \mp L'R)$, $y = \pm mr \mp l(\pm Nq \mp L'R)$, $z = \pm nq \mp l'R$.

Siano date ad esempio le tre Equazioni $51x + 24y + 21z = 105$, $24x + 56y + 20z = 168$, $132x - 84y - 15z = 102$. Rapporto alla prima, poichè il massimo divisore 3 dei primi due coefficienti 51, 24 divide esattamente ancora gli altri due 21, 105, mi servirò del metodo del (*prec.* I) e troverò così $x = -8r + (35 - 7z)$, $y = 17r - 2(35 - 7z)$.

Il numero 8 massimo divisore dei due coefficienti 24, 56 nella Equazione seconda non divide esattamente il terzo coefficiente 20. Non potendo adunque per la soluzione di questa Equazione servire il metodo del (*prec.* I), a quello ricorro del (*prec.* II), e cercato quindi il divisore massimo tra 8, e 20, poichè vedo, che il 4, che ne risulta, divide esattamente il coefficiente ultimo 168, dirò che la chiesta risoluzione è possibile, ed operando, come si è esposto nel citato (*prec.* II), si troverà essere difatti $x = 7r - 2(5q - 84)$, $y = (5q - 84) - 3r$, $z = 42 - 2q$. Nella terza finalmente delle Equazioni proposte essendo negativi due termini del primo membro, mi servirò della regola stabilita nel (*prec.* III), ed otterrò $x = -7r + 2(5q - 34)$, $y = -11r + 3(5q - 34)$, $z = 4q - 34$. Con la sostituzione di questi valori nelle respettive Equazioni, vedremo che esse difatti si verificano, e ciò riguardo alla prima, qualunque valore intero attribuiscasi alla $z$, e riguardo alle altre due, qualunque valore intero si dia tanto alla $r$, come alla $q$.

157. *Probl.* 22.° Vogliansi i valori delle $x$, $y$, $z$

lla precedente $Ax+By+Cz=P$ non solo interi, ma ancora positivi.

I. Prendasi il caso del (I. *n.° prec.*), in cui A, B, C sono tutte quantità positive, ed ove essendo il massimo comun divisore F delle A, B divisore esatto ancora delle C, P, onde $A=Fm$, $B=FM$, $C=FN$, $P=FQ$, ottengonsi le Equazioni (XXI). In questo caso io dico primieramente che mentre si vogliano i valori delle $x$, $y$, $z$ positivi, e interi, deve essere ancora $r$ intero, e positivo. Rapporto difatti al suo essere d'intero ciò si dimostra, come sul fine del (*n.° 154*). Rapporto poi all' essere di positivo, suppos[illegible] primo luogo, che il numero dei quozienti $a$, $b$, $c$, $d$, ec. nella ricerca del divisor massimo fra le A, B sia dispari (*n.°* 154) e però che nelle (XXI) debba tenersi conto dei segni superiori, osservo che per la condizione del presente Problema avrassi $Mr-LQ+LNz>0$, $-mr+lQ-lNz>0$, ossia posto, se così si vuole, in luogo della $r$ il valore negativo $-r'$, avrassi $-Mr'-LQ+LNz>0$, $mr'+lQ-lNz>0$, e però $z>\frac{LQ+Mr'}{LN}$, $z<\frac{lQ+mr'}{lN}$, ovvero $z>\frac{Q}{N}+\frac{Mr'}{LN}$, $z<\frac{Q}{N}+\frac{mr'}{lN}$; dunque sarà $\frac{Q}{N}+\frac{Mr'}{LN}<\frac{Q}{N}+\frac{mr'}{lN}$, $\frac{Mr'}{LN}<\frac{mr'}{lN}$, e però a cagione delle A, B, C positive, essendo positive ancora tutte le quantità $l$, L, $m$, M, N, sarà $mL-lM>0$; ma ciò non può essere, perchè essendo dispari il numero dei quozienti $a$, $b$, $c$, $d$, ec. deve pel (*n.* 115) risultare $mL-lM=-1$. Dunque non potrà neppur essere, che la $r$ abbia un valor negativo. Lo stesso si dimostra, se il numero de' quoti $a$, $b$, $c$, $d$, ec. sia pari, poichè posto $-r'$ invece della $r$ ne verrebbe $mL-lM<0$, il che non può essere, avendosi in questo caso $mL-lM=1$ (*n.° 115*). Ora dal Problema richiedesi, che sia an-

cora $z > 0$, e allorquando gl' indicati quozienti $a$, $e, d$, ec. sono dispari, abbiamo $z < \frac{lQ - mr}{lN}$, e mentre essi sono pari, abbiamo $z < \frac{LQ - Mr}{LN}$ : dunque nel primo di questi casi avendosi $lQ - mr > 0$; e nel secondo $LQ - Mr > 0$, sarà in corrispondenza $r < \frac{lQ}{m}$, ed $r < \frac{LQ}{M}$, e però i valori della $r$ opportuni all' intento saranno tutti gli interi, compresi tra lo zero, ed $\frac{lQ}{m}$ nel caso primo, ed $\frac{LQ}{M}$ nel caso secondo. Sia $r'$ uno di questi interi, si sostituisca, e poichè nel primo degli accennati casi risulta $z > \frac{LQ - Mr'}{LN}$, $z < \frac{lQ - mr'}{lN}$, e nel secondo $z > \frac{lQ - mr'}{lN}$, $z < \frac{LQ - Mr'}{LN}$; tutti gl' interi positivi, che vengono compresi tra i limiti $\frac{LQ - Mr'}{LN}$, $\frac{lQ - mr'}{lN}$ saranno tanti valori corrispondenti della $z$, e questi sostituiti unitamente ad $r'$ nelle Equazioni (XXI) daranno i rispettivi valori interi, e positivi delle $x$, $y$. Lo stesso si dice degli altri valori opportuni della $r$.

*Esem.* 30.° Dato sia ad esempio il seguente Quesito. Esistono in un giardino delle piazze di figura regolare, le une pentagone, le altre quadrate, e le terze triangolari; ciascun lato di ciascuna di queste piazze è di tre metri, e la somma di tutti i loro contorni dà metri 87. Domandasi, quante sono le prime, quante le seconde, e quante le terze delle accennate piazze.

Chiamato $x$ il numero delle pentagone, $y$ quello delle quadrate, e $z$ quello delle triangolari, ne verrà evidentemente l' Equazione $15x + 12y + 9z = 87$,

87, ed in questa $x$, $y$, $z$ dovranno essere necessariamente numeri interi, e positivi. Sciogliendola pertanto giusta il ( I. *n.°* 156 ) avremo $x = -4r + (29-3z)$, $y = 5r - (29-3z)$; ora $x$, $y$, $z$ si vogliono non solamente interi; ma ancora maggiori dello zero; dunque per la regola precedentemente stabilita, dovrà essere $r < \frac{29}{4}$, $r > 0$, e $z < \frac{29-4r}{3}$, $z > \frac{29-5r}{3}$, ossia $r < 7\frac{1}{4}$, $r > 0$, $z < 9 - r + \frac{2-r}{3}$, $z > 9 - r + \frac{2-2r}{3}$. Potendo per conseguenza la $r$ avere tutti i valori intieri, che estendonsi dallo zero esclusivamente, fino inclusivamente al 7, li suppongo successivamente, e col sostituirli nei limiti della $z$ ci verrà

$r = 1$, $z < 8\frac{1}{3}$, $z > 3$
$r = 2$, $z < 7$, $z > 6\frac{1}{3}$
$r = 3$, $z < 5\frac{2}{3}$, $z > 4\frac{2}{3}$, $z = 5$
$r = 4$, $z < 4\frac{1}{3}$, $z > 3$, $z = 4$
$r = 5$, $z < 3$, $z > 1\frac{1}{3}$, $z = 2$
$r = 6$, $z < 1\frac{2}{3}$, $z > -\frac{1}{3}$, $z = 1$
$r = 7$, $z < \frac{1}{3}$, $z > -2$.

Da questi risultati apparisce essere quattro soltanto i valori della $z$ interi e maggiori dello zero, quelli cioè che esistono nell' ultima colonna corrispondenti ai valori 3, 4, 5, 6 della $r$. Sostituisco pertanto simili valori unitamente ai rispettivi della $r$ nelle $x = -4r + (29-3z)$, $y = 5r - (29-3z)$, e risultandoci in corrispondenza

$z = 5$, $x = 2$, $y = 1$;
$z = 4$, $x = 1$, $y = 3$;
$z = 2$, $x = 3$, $y = 2$;
$z = 1$, $x = 2$, $y = 4$;

dirò che il dato quesito ha quattro soluzioni, e che però le supposte piazze possono essere in tutto di numero 8 ne' primi due casi, 7 negli altri due, e deggiono combinarsi fra loro a norma de' valori ora ritrovati delle $x$, $y$, $z$.

Se l' Equazione proposta a risolversi in numeri interi, e positivi fosse stata la prima delle tre supposte ad esempio nel ( *n.°* 156 ), avrebbesi con queste operazioni truovato , che essa non ha soluzione veruna.

II. Consideriamo il caso del ( II. n. *prec.* ). Ridotta in questo la data $Ax+By+Cz=P$ nelle due Equazioni $mx+My=u$ , $um+Nz=R$ , ed ottenute quindi le quattro (XXII), pongasi , che nelle prime due di queste ultime si debba tener conto dei segni superiori , e nelle altre due degl' inferiori , onde esse divengano

$x=Mr-Lu$ , $y=-mr+lu$ , $u=-Nq+L'R$ , $z=nq-l'R$ .

Pel richiesto dal Problema dovendo essere i valori delle $x, y, z$ interi e positivi , e a cagione dei coefficienti $m$ , M parimenti interi , e positivi , essendo intero , e positivo anche $u$ , avremo

$Mr-Lu>0$ , $-mr+lu>0$ , $-Nq+L'R>0$ , $nq-l'R>0$ ,

e però $q>\frac{l'R}{n}$, $q<\frac{L'R}{N}$ , $r<\frac{lu}{m}$ , $r>\frac{Lu}{M}$ ; ma a cagione di $m$ primo con M , e di $n$ primo con N (II. n.° *prec.* ), come sul finè del (n.° 154) , apparisce dover essere $q$ , ed $r$ numeri interi . Dunque trovati gl' interi , i quali esistono fra i due limiti $\frac{l'R}{n}$, $\frac{L'R}{N}$, sostituisco ciascuno di questi nelle Equazioni $u=-Nq+L'R$, $z=nq-l'R$, ed avuti così i valori della $z$, e quelli della $u$, li colloco successivamente nelle $\frac{lu}{m}$ , $\frac{Lu}{M}$ , prendendo gl' interi , che rimangono fra questi due limiti , li sostituisco in luogo della $r$ insieme col valore corrispondente della $u$ nelle $x=Mr-Lu$, $y=-mr+lu$ , ed avremo così i richiesti valori delle incognite . Se nei valori delle $x$ , $y$ , $u$ , $z$ invece dei supposti avessero esistito gli altri segni ; con discorsi affatto simili agli accennati si sarebbero determinati i valori delle $r$ , $u$ , e quindi quelli delle $x$ , $y$ , $z$ .

Presa ad esempio la seconda delle Equazioni supposte nel (n.° 156), cioè la $24x+56y+20z=168$, riduco questa alle due $3x+7y=u$, $2u+5z=42$, e ricavato da esse $x=7r-2u$, $y=-3r+u$, $u=5q-84$, $z=42-2q$, faccio $5q-84>0$, $42-2q>0$, $-3r+u>0$, $7r-2u>0$, e veggendo perciò dover essere $q>\frac{84}{5}=16\frac{4}{5}$, $q<21$, $r>\frac{2u}{7}=\frac{10q-168}{7}$, $r<\frac{u}{3}=\frac{5q-84}{3}$, dò successivamente alla $q$ i valori 17, 18, 19, 20, e venendomi

$$q=17, \quad r>\frac{2}{7}, \quad r<\frac{1}{3}$$

$$q=18, \quad r>\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}, \quad r<\frac{6}{3}=2,$$

$$q=19, \quad r>\frac{22}{7}=3\frac{1}{7}, \quad r<\frac{11}{3}=3\frac{2}{3},$$

$$q=20, \quad r>\frac{32}{7}=4\frac{4}{7}, \quad r<\frac{16}{3}=5\frac{1}{3},$$

dirò, che $r$ non può avere, che il valore 5, e questo corrispondentemente a $q=20$, onde avendosi $u=16$, sarà $x=3$, $y=1$, $z=2$.

*Esempio* 31.° Con quattro specie di frumento, l'uno del prezzo di Lir, 47 per soma, il secondo di Lir. 41, il terzo di Lir. 44, e il quarto di Lir. 29 vorrei formare 105 some di un frumento, il cui prezzo sia di Lir. 45 per soma. Dimando quante some intere deggio prendere da ciascuno dei frumenti supposti, onde ottenere il richiesto. È questo un quesito della natura di quelli di alligazione (n.° 130), la soluzione completa del quale ottienesi evidentemente col metodo ora accennato,

III. Che se la Equazione data sia la $Ax+By+Cz=P$, oppure la $Ax-By-Cz=P$ (III. *n.* 156); con dei raziocinj non dissimili dai precedenti, potremo truovare quai valori deggionsi attribuire alle inde-

terminate $r$, $q$, onde avere interi e positivi i valori delle $x$, $y$, $z$: per amore di brevità lascerò al leggitore l' eseguire somiglianti raziocinii, contentandomi di riflettere, che siccome tanto nel valore della $x$, come in quello della $y$, il termine contenente la $r$ è dotato dello stesso segno, perciò non avendosi corrispondentemente, che un solo limite, siccome abbiam veduto accadere nel (III. n.° 149) le $x$, $y$, $z$ potranno acquistare infiniti valori diversi.

158. *Probl.* 23.° Sia $Ax+By+Cz+Du=P$ l' Equazione data, e vogliasene la soluzione in numeri interi.

*Sol.* Chiamato F il massimo comun divisore dei due coefficienti A, B, abbiasi come di sopra $A=mF$, $B=MF$, e

I. Supponghiamo che F sia divisore esatto di tutti gli altri coefficienti C, D, P, risultandone $C=NF$, $D=N_1F$, $P=QF$. In questa ipotesi il Problema sarà solubile, e da quanto si è detto nei (*prec.* n. 154, 155, 156) è chiaro, che si otterrà:

(XXIII) $x=\pm Mr\mp L(Q-Nz-N_1u)$, $y=\mp mr\pm l(Q-Nz-N_1u)$

prendendosi i segni con la solita regola, attribuendosi alle $l$, L i valori loro attribuiti nei citati (*l. prec.*), e potendosi dare alle indeterminate $r$, $z$, $u$ dei valori interi quali si vogliono.

II. Se essendo divisibili esattamente per F tutti i coefficienti A, B, C, D, tale non sia P; come nel (*n.°* 151), vedremo essere la soluzione del Problema impossibile.

III. Non sia divisibile per F il coefficiente D, essendolo gli altri A, B, C; chiamato in questo caso G il massimo comun divisore tra F, e D, osservo, se G contienesi esattamente in P; se no, dirò nuovamente, come nel (II. n.° 156) impossibile la soluzion del Problema; se sì, abbiasi $\frac{F}{G}=n$, $\frac{D}{G}=$

$N_1$, $\frac{P}{G} = R$, e l' Equazione data diverrà evidentemente $mnx+My+Nnz+N_1u=R$. Faccio ora $\frac{R-N_1u}{n} = t$, e ridotta così questa Equazione alle due $mx+My+Nz=t$, $nt+N_1u=R$, poichè i numeri $m$, $n$ sono rispettivamente primi con i due M, $N_1$, avremo, sciogliendo

$$x = \pm Mr \mp L(t-Nz), \quad y = \mp mr \pm l(t-Nz),$$
$$u = \mp nq \pm l'R, \quad t = \pm N_1q \mp L'R \qquad \text{(XXIV)}$$

(n.° 154, I. n.° 156) espresse con le $l'$, L' delle quantità simili a quelle del (II. n.° 156), e da questi quattro risultati tutti avrannosi evidentemente i valori interi delle $x$, $y$, $z$, $u$.

IV. Vogliasi non divisibile per F il coefficiente C, è chiamato G il massimo comun divisore tra F, e C, vogliasi $\frac{D}{G}$ numero intero. In tale supposizione anche $\frac{P}{G}$ dovrà essere intero, altrimenti il Problema sarebbe impossibile. Posto adunque $\frac{F}{G} = n$, $\frac{C}{G} = N$, $\frac{D}{G} = N_1$, $\frac{P}{G} = R$, onde la Equazion data divenga $mnx + My + Nz + N_1u = R$ faccio $\frac{R-Nz-N_1u}{n} = t$, e ottenute così le due $mx+My=t$, $nt + Nz + N_1u = R$, poichè $m$ è primo ad M, ed $n$ primo ad N; le espressioni

$$x = \pm Mr \mp lt, \quad y = \mp mr \pm lt$$
$$z = \mp nq \pm l'(R-N_1u), \; t = \pm Nq \mp L'(R-N_1u) \qquad \text{(XXV)}$$

ci scioglieranno evidentemente il Quesito.

V. Ritenuto C non divisibile esattamente per F, e fra questi numeri F, C ritenuto G massimo divisor comune, sia per G non divisibile il coefficiente D. Denomino in questo caso H il massimo

divisor comune dei due numeri G, D, e poichè osservo dover essere $\frac{P}{H}$ numero intero, onde la risoluzion del Problema sia possibile; pongo $\frac{G}{H} = n_1$, $\frac{D}{H} = N_1$, $\frac{P}{H} = S$. La Equazione data per questo diverrà $mnn_1x + Mnn_1y + Nn_1z + N_1u = S$, ossia $mx + My = t$, posto $\frac{S - Nn_1z - N_1u}{nn_1} = t$, e però $nn_1t + Nn_1z + N_1u = S$, e fatto nuovamente $\frac{S - N_1u}{n_1} = v$, essa si ridurrà evidentemente alle tre Equazioni

$$mx + My = t, \quad nt + Nz = v, \quad n_1v + N_1u = S,$$

dalle quali, essendo $m$ primo con M, $n$ primo con N, ed $n_1$ primo con $N_1$, otterremo con le solite regole, e le solite denominazioni

$$x = \pm Mr \mp Lt, \qquad y = \mp mr \pm lt,$$
$$t = \pm Nq \mp L'v, \qquad z = \mp nq \pm l'v, \qquad \text{(XXVI)}$$
$$v = \pm N_1p \mp L''S, \qquad u = \mp n_1p \pm l''S,$$

risultati, i quali col dare alle $r$, $q$, $r$ dei valori interi qualisivogliono, ci daranno agevolmente i richiesti valori interi delle $x$, $y$, $z$, $u$.

VI. Se uno o più dei coefficienti della Equazione data voglionsi negativi, basterà nei risultati, che sonosi ottenuti, cangiare i segni nei termini corrispondenti.

159. *Probl.* 24.° I valori delle $x$, $y$, $z$, $u$ nella precedente $Ax + By + Cz + Du = P$ domandansi interi, e positivi.

*Sol.* Cerco in primo luogo con le regole stabilite nel (n.° *prec.*) di determinarne i valori interi, e nel ciò eseguire, supponghiamo, che posti i coefficienti A, B, C, D, P tutti interi, e positivi

I. Succeda il primo de' casi considerati nel citato (n.° *prec.*). Ciò essendo, facciasi nelle Equa-

zioni (XIII) $Nz+N_1u=t$; ne verrà $x=\pm Mr\mp L(Q-t)$, $y=\mp mr\pm l(Q-t)$. Denominato ora $g$ il massimo comun divisore dei numeri N, $N_1$, abbiasi $N=hg$, $N_1=Hg$, onde $\frac{h}{H}$ sia l'ultima delle frazioni, che nascono, eseguendo le operazioni del (II. n.° 114) sopra dei quoti ottenutisi nella ricerca del supposto massimo divisore $g$, ed $\frac{i}{I}$ sia tra le indicate la prima frazione che precede la $\frac{h}{H}$. La $t$ avrà evidentemente un valor intero, e positivo, le $z$, $u$ non potranno avere valore intero, quando $t$ non sia divisibile esattamente per $g$ (n.° 151), e sciogliendo giusta il (n.° 154) la $Nz+N_1u=t$, risulterà

$$z=\pm Hq\mp It,\quad u=\mp hq\pm it.$$

Poichè per le condizioni del Problema si ha $x>0$, $y>0$, $z>0$, $u>0$, supposto, che nei valori di queste lettere debbasi tener conto dei segni superiori, ne verrà $Mr-LQ+Lt>0$, $-mr+lQ-lt>0$, $Hq-It>0$, $-hq+it>0$, e però $t>\frac{LQ-Mr}{L}$, $t<\frac{lQ-mr}{l}$, $q>\frac{It}{H}$, $q<\frac{it}{h}$; ma $t>0$; dunque ancora $\frac{lQ-mr}{l}>0$, e quindi $r<\frac{lQ}{m}$. Non potendo essere $r$ nè fratto (n.° 154), nè negativo (I. n.° 157), il rapporto $r<\frac{lQ}{m}$ tutti ci darà i valori di $r$; questi sostituiti successivamente nei rapporti $t>\frac{LQ-Mr}{L}$, $t<\frac{lQ-mr}{l}$ tutti somministreranno i valori di $t$; fra i valori di $t$ tenendo conto, per quanto si è detto poc' anzi, solamente dei divisibili esattamente per $g$, sostituiscansi essi in $q>\frac{It}{H}$, ed in $q<\frac{it}{h}$, e con ciò ottenuti i

corrispondenti di $t$, e di $r$ nelle precedenti espressioni, a cui si uguagliano le $x$, $y$, $z$, $u$, e avremo così i richiesti loro valori interi, e positivi. Delle operazioni affatto simili alle esposte dovrebbero praticarsi, se nelle indicate espressioni delle $x, y, z, u$ si dovesse tener conto de' segni inferiori.

Sia per esempio $7x+5y+8z+4u=39$ l' Equazione data. Fatto $8z+4u=t$; poichè ne viene $x=5r-2(39-t)$, $y=-7r+3(39-t)$, avremo $t>39-\frac{5r}{2}$, $t<39-\frac{7r}{3}$, e però $39-\frac{7r}{3}>0$, onde $r<16\frac{5}{7}$.

Dunque potranno essere valore di $r$ tutti gl' interi, che estendonsi dall' uno inclusivamente fino inclusivamente al 16. Dalla $8z+4u=t$ vedesi dover essere tutti i valori opportuni di $t$ divisibili esattamente per 4; dunque tra i valori di essa $t$, che corrispondentemente ai valori di $r$ ottengonsi dai rapporti $t>39-\frac{5r}{2}$, $t<39-\frac{7r}{3}$ non saranno atti alla soluzion del Problema, che i due 20,8 corrispondenti ai due 8,13 di $r$. Ora essendo lo stesso coefficiente 4 di $u$ divisore esatto del coefficiente 8 di $z$, potrò in quest' esempio operare più semplicemente che nel caso generale, poichè avendosi $u=\frac{t}{4}-2z$, faccio $\frac{t}{4}-2z>0$, e quindi $z<\frac{t}{8}$: ma $t$ non può acquistare che i due valori 20,8; dunque trovandosi in corrispondenza $z<\frac{20}{8}=2\frac{1}{2}$, $z<\frac{8}{8}=1$, e dovendo essere $z>0$, non potrà essa $z$ avere che i valori 1, 2, e questi corrispondenti entrambi al solo valore 20 di $t$, ed al solo 8 di $r$. Sostituiti adunque nei valori delle $x$, $y$, $u$ lo 8 invece di $r$,

il 2.° invece di $t$, e successivamente 1, 2 invece di $z$, avremo due soluzioni del nostro Problema, cioè le dipendenti dai valori 1°. $x=2$, $y=1$, $z=1$, $u=3$; 2.° $x=2$, $y=1$, $z=2$, $u=1$.

II. Accadendo il caso del (III. n.° 158), pongasi che nelle Equazioni (XXIV) già ritrovate debbasi tener conto dei segni superiori, poichè ciocchè dicesi di essi, dicesi poi egualmente dei segni inferiori. In conseguenza di ciò dovendo essere $Mr-Lt+LNz>0$, $-mr+lt-lNz>0$, $-nq+l'R>0$, $N_1q-L'R>0$, otterremo

$$q<\frac{l'R}{n},\ q>\frac{L'R}{N_1},\ z>\frac{Lt-Mr}{LN},\ z<\frac{lt-mr}{lN},$$

e a cagione di $z>0$ avendosi $lt-mr>0$, sarà $r<\frac{lt}{m}$. Dai primi due di questi rapporti si avranno i valori della $q$; simili valori sostituiti nelle (XXIV) ci daranno i valori delle $u$, $t$; dai valori di $t$ mediante i rapporti $r<\frac{lt}{m}$, $r>0$ (I. n.° 157) avremo i valori della $r$, che pel (n.° 154) devono essere interi; col mezzo di questi valori di $r$ uniti ai rispettivi della $t$, otterremo, servendoci dei precedenti limiti della $z$ i valori della $z$ medesima, e questi finalmente insieme con quelli di $t$, e di $r$ posti nelle (XXIV) ci daranno i chiesti valori delle $x$, $y$.

III. Abbia luogo il caso del (IV. n.° 158). Ritenuti quì pure nelle Equazioni (XXV) per la ragione poc'anzi accennata, i soli segni superiori, dovrà essere
$Mr-Lt>0$, $-mr+lt>0$, $-nq+l'R-l'N_1u>0$, $Nq-L'R+L'N_1u>0$, e però

$$u<\frac{l'R-nq}{l'N_1},\ u>\frac{L'R-Nq}{L'N_1},\ r>\frac{Lt}{M},\ r<\frac{lt}{m}.$$

Ora essendo $u>0$, dev'essere ancora $l'R-nq>0$,

e quindi $q < \frac{l'R}{n}$: dunque avendosi eziandio $q>0$, ed intero (I. n.° 157, n.° 154), potremo da ciò determinare i valori della $q$. Col mezzo di questi, e dei precedenti limiti della $u$, otterremo i valori della $u$ stessa; sostituendo in seguito nelle (XXV) in vece delle $q$, $u$ i valori truovati, ne verranno i valori delle $z$, $t$; dipendentemente dai valori ottenuti della $t$, e dai precedenti limiti della $r$, avremo i valori di essa $r$, e questi ultimi uniti ai rispettivi della $t$ ci daranno finalmente nelle (XXV) i valori delle $x$, $y$.

IV. Nel caso del (V. n.° *prec.*) ottenute le Equazioni (XXVI), e ritenuti i segni superiori, dovrà per le condizioni del Problema essere $r > \frac{Lt}{M}$, $r < \frac{lt}{m}$, $q > \frac{L'v}{N}$, $q < \frac{l'v}{n}$, $p > \frac{L''S}{N_1}$, $p < \frac{l''S}{m}$. Dai limiti della $p$ avremo i suoi valori; questi collocati nelle ultime due delle Equazioni (XXVI) daranno i rispettivi valori delle $v$, $u$. Sostituiti in seguito nei limiti della $q$ i valori della $v$, avremo i valori corrispondenti della $q$ medesima, e quindi mediante le (XXVI) quelli delle $t$, $z$. Finalmente i valori della $t$ posti nei limiti della $r$, ne daranno i valori, e col mezzo delle $r$, $t$ già determinate, e delle (XXVI) avremo i valori delle $x$, $y$.

V. Allorchè uno, o più dei coefficienti A,B,C,D,P voglionsi negativi, le operazioni da eseguirsi per la soluzione del Problema proposto, possonsi facilmente dedurre da quanto abbiam detto finora, avvertendo, che, come nel (III. n.° 157), il numero delle soluzioni sarà in questo caso sempre infinito. Se nei precedenti Problemi (n.i 157, 159) si avesse voluto che i valori delle $x$, $y$, $z$, ec. potessero essere ancora zero; allora è chiaro, che il numero delle soluzioni sarebbe stato maggiore, e si avrebbero ot-

tenute queste ulteriori soluzioni, ponendo le espressioni, a cui le $x, y, z$, ec. si uguagliano, non $<0$.

VI. Quanto abbiam detto finora, mostra abbastanza, come dobbiam comportarci, allorquando l' Equazione, che deve risolversi in numeri intieri, oppure in intieri, e positivi è della natura delle precedenti, e frattanto contiene più di quattro incognite.

Propongonsi a risolvere in numeri interi, e positivi le tre Equazioni $30x+20y+5oz+15u=375$, $84x+10y+14z+49u=364$, $264x+48y+3oz+21u=669$.

160. *Probl.* 25.° Risolvere in numeri interi, e positivi l' Equazione $ax-bxy+cy=p$.

*Sol.* Ottenuto da essa $y=\frac{ax-p}{bx-c}$. Si moltiplichi questa Equazione per $b$, onde risulti $by=\frac{abx-bp}{bx-c}$; dividasi attualmente il numeratore $abx-bp$ pel denominatore $bx-c$, e venendone $\frac{abx-bp}{bx-c}=a+\frac{ac-bp}{bx-c}$, sarà $by=a+\frac{ac-bp}{bx-c}$. Ciò fatto, siccome $by$, ed $a$ sono numeri interi, tale dovrà essere ancora $\frac{ac-bp}{bx-c}$, e quindi $bx-c$ sarà divisore esatto della quantità nota $ac-bp$. Truovati pertanto tutti i fattori del numero $ac-bp$, e chiamato $d$ uno di questi, faccio $bx-c=d$, e pero $x=\frac{c+d}{b}$. Dovendo $x$ essere numero intero, osservo se $c+d$ è attualmente divisibile esattamente per $b$; se no, lo escludo, se sì, pongo $\frac{c+d}{b}=e$, onde $x=e$, e fatto $\frac{ac-bp}{d}=g$, poichè risulta $y=\frac{a+g}{b}$, ed $y$ esser deve numero intero, osservo, se $a+g$ ha per divisore esatto $b$; se

no, sarà inutile la precedente supposizione di $bx-c=d$, e converrà uguagliare questa $bx-c$ ad un altro de' divisori esatti di $ac-bp$; se poi $a+g$ è divisibile esattamente per $b$, posto $\frac{a+g}{b}=h$, sarà $x=e$, $y=h$. Replico le stesse operazioni, ed osservazioni sopra tutti i fattori di $ac-bp$, e quelli tra questi, che somministrano per mezzo delle espressioni $\frac{c+d}{b}$, $\frac{a+g}{b}$ dei quoti esatti, e positivi, tutte daranno le soluzioni del Problema.

*Esem.* 32.° Con i valori di uno, o più degli angoli interni d' un Poligono regolare uniti insieme voglio formare una somma di $a$ gradi. Dimando quali tra i Poligoni regolari debbo sciegliere, ed in esso quanti angoli debbo prendere pel mio intento.

*Sol.* Sia $x$ il numero dei lati del Poligono, ed $y$ il numero in esso degli angoli interni, che presi insieme deggiono formare la somma di $a$ gradi. Pei noti principj di Geometria ciascun angolo interno del supposto Poligono regolare vale $180^\circ - \frac{360^\circ}{x}$. Dunque sarà $\left(180 - \frac{360}{x}\right)y=a$, e però $ax-180xy+360y=0$. Paragono questa Equazione con la generale poc' anzi supposta, e avendosi $a=a$, $b=180$, $c=360$, $p=0$, ne verrà $180y=a+\frac{360a}{180a-360}$ ossia $180y=a+\frac{2a}{x-2}$.

Sia $a=360$; risultandomi quindi $y=2+\frac{4}{x-2}$, cerco tutti i divisori esatti del 4, ed essendo que-

sti 1, 2, 4 faccio successivamente $x-2=1$, $x-2=2$, $x-2=4$, e poichè da ciò ricavo $x=3$, $x=4$, $x=6$, ed in corrispondenza $y=6, y=4, y=3$; dirò che nella ipotesi presente tre solamente sono le soluzioni del Quesito, e che soltanto il triangolo equilatero con sei, il quadrato con quattro, e l' esagono regolare con tre de' suoi angoli sommati insieme ponno formare un risultato di 360°.

Pongasi $a=60°$. La precedente $180y = a + \frac{2a}{x-2}$ divenendo perciò $3y = 1 + \frac{2}{x-2}$; suppongo successivamente $x-2=1$, $x-2=2$, e da queste ipotesi avendo in corrispondenza $3y=3$, $3y=2$, e però $y=1$, $y=\frac{2}{3}$; il quesito non avrà in questo caso che una sola soluzione, cioè la dipendente dalla $x-2=1$, dalla quale apparisce, che solamente prendendo un solo angolo di un triangolo equilatere, può aversi il risultato di 60°.

Se si fosse supposto $a=37°$, avrebbesi veduto che il problema non ha soluzione veruna.

161. *Def.* 2.ª Da quanto abbiamo detto finora (*n.* 144, e seg.) apparisce di qual natura siano i Problemi, allorchè il numero delle Equazioni non uguaglia quello delle incognite. Se poi il numero delle Equazioni supera l'altro delle incognite; il Problema corrispondente dicesi *piucchè determinato*; se al contrario ne è minore, il Problema chiamasi *indeterminato*; e appellasi esso *determinato*, se il primo degli accennati numeri uguaglia il secondo. I Problemi indeterminati allorchè contengono delle condizioni, siccome quelle de' (*n.* 149, *e seg.*), le quali non sono esprimibili per Equazioni, ma che però restringono il numero delle soluzioni, soglionsi anche chiamare *semideterminati*.

Ancora le Equazioni soglionsi distinguere in *determinate*, e *indeterminate*. Equazione *determinata*

è quella, la quale non contiene che un' incognita sola, *indeterminata* quella, che ne contiene due, o più.

162. *Def.* 3.ª In un termine qualunque di un' Equazione, o di un' espressione algebraica, il quale abbia forma intera, la somma degli esponenti delle incognite in esso contenute costituisce le così dette *dimensioni* del termine istesso. Perciò nella Equazione $7x^3y^4z - 5x^4 + 6axyz + abz = 0$ la somma $3 + 4 + 1 = 8$ degli esponenti 3, 4, 1 delle tre incognite $x, y, z$ esistenti nel primo termine $7x^3y^4z$ costituirà le dimensioni del medesimo termine, ed esso per conseguenza si dirà di 6 *dimensioni*; e così si dirà di 4 *dimensioni* il termine secondo $5x^4$, di 3 il terzo $6axyz$, e di una l' ultimo $abz$,

163. *Def.* 4.ª Le Equazioni algebraiche distinguonsi in *diversi gradi*; e questi gradi vengono stabiliti dal termine, che contiene il massimo numero di dimensioni. Se questo massimo numero è 1, l' Equazione corrispondente sarà di 1.° *grado*, se esso è 2, l' Equazione sarà di 2.° *grado*; di 3.°, se l' accennato numero sia 3; e così di seguito; l' Equazione perciò del (*n.° prec.*) sarà, in conseguenza del termine $7x^3y^4z$, dell' ottavo grado.

164. *Cor.* 1.° Se l' Equazione è determinata, ossia non contiene che una sola incognita (*n.°* 161), il suo grado verrà determinato dal massimo esponente dell' incognita medesima. La prima perciò delle Equazioni $ax + b = 0$, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ sarà di primo grado, la seconda di 3.°.

II. Tutte di primo grado sono le Equazioni considerate finora, a riserva della ottenuta nel (*n.°* 160), la quale per (*n.°*164) può dirsi del 2.° Ora i metodi di soluzione per quelle non sono sufficienti per lo scioglimento delle Equazioni di più alto grado. Volendo adunque stabilire dei mezzi, per cui possiamo isciogliere, o almeno approssimarci alla soluzione di que' Problemi, i quali conducono a quest' ultime Equazioni;

converrà, che prendiamo nella parte, che segue, a conoscere altre due operazioni di Calcolo, alle quali gl'indicati mezzi principalmeute si appoggiano. Tra le Equazioni però di più alto grado il nostro Istituto non ci permette di considerare presentemente, che le determinate, e queste soltanto fino al 4.° grado inclusivamente.

# PARTE II.

## DELLE ULTIME DUE OPERAZIONI ALGEBRAICHE.

## *CAPO I.*

### *Della Elevazione a potenza, e della Estrazione della Radice da un qualunque Monomio algebraico.*

165. *Def.* 1.ª *Elevare a potenza* una data quantità altro non significa, che moltiplicare la data quantità per se medesima un certo numero di volte, e questo numero il quale indica le volte che vien ripetuta in forma di moltiplicazione la data quantità, si chiama *indice*, o *esponente* della potenza. Eleverò così alla 3.ª potenza la quantità $a$ dicendo $a.a.a = a^3$ (III. *n.*° 53); eleverò alla 5.ª la quantità $3b^2$, facendo $3b^2.\ 3b^2.\ 3b^2.\ 3b^2.\ 3b^2 = 243\,b^{10}$ (*n.*° 56); ed eleverò finalmente alla 4.ª potenza la quantità $-2a^3b$ dicendo $-2a^3b.-2a^3b.-2a^3b.-2a^3b = 16a^{12}b^4$, e gl'indici di queste potenze saranno 3, 5, 4.

166. *Def.* 2.ª Una quantità dicesi *radice* di un'altra, mentre moltiplicata per se medesima un certo numero di volte la restituisce, e dicesi essa di 2.°, di 3.°, di 4.°, ec. grado secondo che devesi replicare due, tre, quattro, ec. volte. Così $a$ sarà radice 3.ª di $a^3$, sarà $3b^2$ radice 5.ª di $243b^{10}$, e $-2a^3b$ sarà radice 4.ª di $16a^{12}b^4$ (*n.*° *prec.*). Il determinar

poi queste radici $a$, $3b^2$, $-2a^3b$ ciò è che dicesi *estrarre la radice* dalle date quantità, o potenze $a^3$, $243b^6$, $16a^{12}b^4$.

167. *Scol.* 1.° Per indicare le potenze ci serviamo degli esponenti (*n.°* 165), racchiudendo la quantità da elevarsi a potenza tra due parentesi, o a questa sovrapponendo una lineetta trasversale; così la potenza 5.ª di $3b^2$ s' indicherà per $(3b^2)^5$, oppure $\overline{3b^2}^5$, e la potenza seconda di $a^3+b^3$ s' indicherà scrivendo $(a^3+b^3)^2$, ovvero $\overline{a^3+b^3}^2$. Per indicar poi le radici, ci serviamo del segno $\surd$, il qual rappresenta in certo modo un $r$, e si antepone alla quantità, da cui deve estrarsi la radice, e sopra di lui ponesi il numero che indica il grado della radice medesima. Per tal modo $\sqrt[3]{343b^6}$ esprimerà la radice 3.ª di $343b^6$, e sarà quindi $=7b^2$: $\sqrt[5]{(a^5-b^{10})}$ rappresenterà la radice 5.ª di $a^5-b^{10}$, e così di seguito.

168. *Def.* 3.ª Queste quantità $\sqrt[3]{243b^6}$, $\sqrt[5]{(a^5-b^{10})}$ soglionsi dire *radicali*, come *segno* o *vincolo radicale* dicesi il supposto $\surd$, e *indici*, o *esponenti* della radice si chiamano i numeri, che sovrapposti al segno $\surd$ indicano il grado della radice. La radice seconda suole anche dirsi *quadrata*, *cuba* la terza, e *quadrataquadrata* la quarta. Allorchè poi si vuole indicare una radice di 2.° grado, ossia quadrata, invece di $\sqrt[2]{}$ sogliono più comunemente i Matematici scrivere il segno $\surd$ senza alcun numero sopra: così $\surd a^6$ indica la radice seconda di $a^6$, cioè $a^3$.

169. *Cor.* I. L'estrazione della radice è un'operazione affatto opposta all' elevazione a potenza, come la sottrazione è opposta alla addizione, e la divisione è opposta alla moltiplicazione. Innalzando alla 3.ª potenza la quantità $a$, ottengo $a^3$; estraendo da $a^3$ la radice 3.ª, distruggo ciocchè ho fatto coll'elevare a potenza, ed ho la prima quantità $a$.

II. Come l' elevazione a potenza non è che una molti-

moltiplicazione ripetuta di una quantità per se medesima (*n.*° 165), così l'estrazione della radice non sarà alla fine che una replicata divisione per una quantità istessa, in cui l' ultimo quoto uguaglia il divisore costante.

III. Come $a$ si dice potenza prima di $a$ (I.° *n.*° 55), potrà così dirsi egualmente radice prima di se medesima.

170. *Scol.* 2.° Vogliasi elevare alle potenze 2.ª, 3.ª, 4.ª, ec. la quantità $a$; pei (*n.* 165, III. 53) otterremo i risultati $a^2$, $a^3$, $a^4$, $a^5$, $a^6$, ec.. S' innalzi ora a queste potenze la quantità negativa $-a$, pei (*n. cit.*) ne verranno i risultati $a^2$, $-a^3$, $a^4$, $-a^5$, $a^6$, ec. Dunque le potenze pari $a^2$, $a^4$, $a^6$, ec. potranno nascere tanto da una quantità positiva $a$, quanto da una negativa $-a$, e quindi una quantità qualunque sia essa positiva, o negativa elevandosi a potenza pari, darà sempre un risultato positivo; ma le potenze $a^3$, $a^5$, ec. nascendo da $+a$, e le $-a^3$, $-a^5$, ec. da $-a$ mostrano, che innalzando a potenze dispari una qualsivoglia quantità, se questa è positiva, i risultati sono sempre positivi, e se essa è negativa, i risultati sono negativi. Mentre in somma le potenze pari risultano sempre positive, le dispari ritengono il segno della quantità che si eleva a potestà.

171. *Scol.* 3.° Data l'espressione $-a^m$, può questa indurre equivoco, se cioè indichi la quantità $-a$ elevata alla potenza $m$, o se indichi la quantità $a^m$ in istato di sottrazione. Per evitare ciò, sogliono gli Algebristi nel caso di $-a$ innalzato alla potestà $m$, scrivere $(-a)^m$, oppure $\overline{-a}^m$ (*n.*° 167), intendendo poi per $-a^m$ la quantità $a^m$ presa negativamente. Allorchè però $m$ è dispari, essendo pel (*n.*° *prec.*) $(-a)^m = -a^m$, potremo scrivere egualmente $-a^m$, $(-a)^m$ per esprimere la potenza mesima di $-a$; ma se $m$ è pari, avendosi $(-a)^m = a^m$, non

potremo, per indicare simile potenza, scriver giammai $-\mathring{a}^m$ quantità ben diversa da $a^m$.

172. *Cor.* I. Se si ricerchi la radice dispari da una quantità data, è chiaro dal (*n.°* 170), che sarà questa positiva, se la proposta quantità è positiva; e negativa, se la quantità data è negativa; così la radice 5.ª di $+a^5$ sarà $+a$, la radice 7.ª di $-a^7$ sarà $-a$.

II. Se si ricerchi la radice pari da una quantità positiva, per esempio la 4.ª da $a^4$, potendo tanto essere $a^4=(a)^4$, che $a^4=(-a)^4$, potrà la richiesta radice esser tanto positiva che negativa, cioè tanto $+a$, che $-a$ (*n.* 170, 171); quindi è che le radici pari ponno avere due valori, un positivo, negativo l'altro; perciò i Matematici affin di esprimerli amendue nel tempo medesimo, sogliono anteporre alla radice il doppio segno $\pm$; sarà per conseguenza $\sqrt[4]{a^4}=\pm a$; $\sqrt[6]{b^{12}}=\pm b^2$; $\sqrt{9a^{10}}=\pm 3a^5$.

III. Che se venga proposta una quantità negativa, e vogliasi di questa una radice pari; se vogliasi per esempio la radice seconda di $-a^2$, cioè il valore di $\sqrt{-a^2}$; poichè non esiste alcuna quantità nè positiva, nè negativa, la quale elevata a potenza pari dia un risultato negativo $-a^2$ (*n.°* 160); è chiaro che il valore di $\sqrt{-a^2}$ sarà un valore non esistente, impossibile, assurdo. E quindi è che a simili espressioni, alle radici cioè pari di quantità negative, il nome si dà di quantità *assurde*, *impossibili*, *immaginarie*. Tali saran pure le espressioni $\sqrt[4]{-a^4}$, $\sqrt[6]{-a^2}$, ec. A differenza di queste, le altre quantità quali sono le $\sqrt[6]{b^{12}}=\pm b^2$, $\sqrt[3]{-a^6}=-a^2$, ec., che sono possibili, od esistono attualmente, appellansi *reali*.

173. *Probl.* 26.° Elevare a potenza un dato Monomio qualunque.

*Sol.* Chiamato $m$ in generale il grado della potenza, a cui vuole elevarsi il dato monomio, non

avremo perciò che a moltiplicare per $m$ gli esponenti delle lettere in esso contenute; moltiplicare le volte $m-1$ per se medesimo il suo coefficiente, e al risultato anteporre il segno istesso del monomio dato, se $m$ è dispari; e sempre il segno $+$, se $m$ è pari.

Così eleveremo alla 5.ª potenza il monomio $+3a^2b^7$, moltiplicando gli esponenti 2, 7 per 5, moltiplicando il coefficiente 3 per se medesimo le volte $5-1=4$, ed al risultato anteponendo il segno $+$: sarà perciò $(+3a^2b^7)^5=+243a^{10}b^{35}$, e nel modo istesso ritroveremo $(-5a^2b)^3=-125a^6b^3$, $(-5p^3q)^4=+625p^{12}q^4$.

Difatti per elevare il dato monomio, per esempio $+3a^2b^7$ alla potestà $m$, ossia alla 5.ª, altro non dobbiamo, che replicare esso in forma di moltiplicazione le volte 5, ossia non abbiamo che a moltiplicarlo per se medesimo le volte 4 (*n.°* 165); sarà dunque $(+3a^2b^7)^5=+3a^2b^7\times+3a^2b^7\times+3a^2b^7\times+3a^2b^7\times+3a^2b^7$. Ora $a^2\times a^2\times a^2\times a^2\times a^2=a^{2+2+2+2+2}=a^{2.5}=a^{10}$, $b^7.b^7.b^7.b^7.b^7=b^{7+7+7+7+7}=b^{7.5}=b^{35}$ (*n.°* 56), e $3.3.3.3.3=243$. Dunque avremo $(3a^2b^7)^5=243a^{10}b^{35}$. La stessa dimostrazione è chiaro, che si applica egualmente a tutti gli altri casi; la regola poi dei segni ora stabilita si deduce facilmente dal (*n.°* 170).

174. *Scol.* 4.° Se data sia una semplice quantità numerica da elevarsi a potenza, basta effettuar la moltiplicazione di questa per se medesima le volte indicate dall' esponente della potenza meno una; così la potestà 3.ª di 34 si otterrà dicendo . . . . $34.34.34=39304$.

II. Se venga proposta una frazione, non avremo che ad innalzare alla domandata potenza il numeratore, ed il denominatore giusta le regole del (*n.° prec.*). Per tal modo avremo $\left(\frac{5a^3}{4b^2}\right)^2=\frac{25a^6}{16b^4}$; poi-

chè $\frac{25a^6}{16b^4} = \frac{5a^3}{4b^2} \times \frac{5a^3}{4b^2}$ .

III. Una quantità, come $a^6$, potrà considerarsi egualmente come la 6.ª potenza di $a$, o di $-a$, la potenza terza di $a^2$, la 2.ª di $a^3$, o di $-a^3$, la 1.ª di $a^6$; poichè in ciaschedun caso ne vien sempre il medesimo risultato $a^6$.

175. *Scol.* 5.° I. Se l' esponente $m$ (*n.°* 173) della potenza, a cui vuole elevarsi la data quantità, sia negativo, chiamata A questa quantità avremo il risultato $A^{-m}$; ora $A^{-m} = \frac{1}{A^m}$ ( II. *n.°* 68 ). Dunque per elevare una quantità data a potestà negativa non avremo che a dividere la unità per la potestà medesima presa positivamente. Perciò se $A = 2a^3$, e vogliasi $m = 4$, sarà $A^{-m} = (2a^3)^{-4} = \frac{1}{16a^{12}}$; e se $A = \frac{3p^2}{4q}$, ed $m = 2$, sarà $A^{-m} = \left(\frac{3p^2}{4q}\right)^{-2} = \frac{1}{\frac{9p^4}{16q^2}} = \frac{16q^2}{9p^4}$.

II. Che se $m = 0$; poichè $A^0 = 1$ (I. *n.°* 68), ne viene che elevando una quantità qualsivoglia alla potenza zero, essa diverrà sempre l' unità; però $\left(\frac{3p^2}{4q}\right)^0 = 1$, $(7ab)^0 = 1$.

176. *Cor.* I. Quindi ridur potremo a forma d' intero una data frazione, senza turbare il suo valore; data per esempio la frazione $\frac{5a^2b}{cd^2}$, poichè questa è uguale a $5a^2b \times \frac{1}{cd^2}$ (II. *n.°* 77), e pel ( I. *n.°* *prec.* ) nella supposizione di $m = -1$, abbiamo $(cd^2)^{-1} = c^{-1} d^{-2} = \frac{1}{cd^2}$, ne verrà sostituendo $5a^2b \frac{1}{cd^2} =$

$5a^2bc^{-1}d^{-2}$, e però $\frac{5a^2b}{cd^2} = 5a^2bc^{-1}d^{-2}$, quantità, come vedesi, ridotta a forma d' intiero. In egual modo operar potremo per le altre frazioni elevando il denominatore alla potenza — 1.

II. Poichè la somma degli esponenti delle incognite contenute in un dato termine di forma intera costituisce le dimensioni del termine istesso (*n.*° 162), e poichè pel (*prec.* I) abbiamo per esempio il termine $\frac{ax^my^nz^p}{u^qv^r} = ax^my^nz^pu^{-q}v^{-r}$, ne segue che le dimensioni di questo termine verranno determinate dalla somma $(m+n+p)-(q+r)$; ma $m+n+p$ è la somma degli esponenti delle incognite nel numeratore del dato rotto, $q+r$ è la somma degli esponenti delle incognite nel denominatore. Dunque le dimensioni di un termine fratto si determineranno sottraendo dalla prima di queste somme la seconda.

177. *Probl.* 27.° Estrarre la radice da un monomio proposto.

*Sol.* Avendosi nel dato monomio a considerare il segno, il coefficiente, e le lettere; primieramente in quanto al segno osservo, che se questo è negativo, e l' esponente della radice è pari, inallora essendo tal radice assurda (III. *n.*° 172), ne sarà impossibile la estrazione; se essendo pari il grado della radice, sia positivo il monomio, dovremo alla radice estratta anteporre il doppio segno $\pm$ (II. *n.*° 172): che se finalmente l' esponente della radice sia dispari, pel (I. *n.*° 172) dovremo al valore della radice anteporre il segno medesimo, di cui è affetto il dato monomio.

Riguardo in secondo luogo al coefficiente vedremo in seguito come debba operarsi, e lo vedremo laddove si esporrà il modo di estrarre le radici dalle quantità numeriche.

Finalmente rapporto alle lettere, essendo l' estrazione della radice affatto opposta all' innalzamento a potenza (I. n.° 169); se questa seconda operazione si fa moltiplicando per l' indice della potenza gli esponenti delle lettere (n.° 173) la prima si effettuerà con l' operazione opposta alla moltiplicazione, cioè con la divisione: divideremo perciò gli esponenti delle lettere per l' indice della radice.

Volendosi quindi la radice 3.ª di $a^6$, sarà $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$. La radice 4.ª di $-a^8$, ossia il valore di $\sqrt[4]{-a^8}$ sarà impossibile. Il valore di $\sqrt[5]{-32p^{10}q^5}$ sarà $= -2p^{\frac{10}{5}}q^{\frac{5}{5}} = -2p^2q$. Il valore di $\sqrt[2]{64a^6b^2c^4}$ sarà $= \pm 8a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{2}{2}}c^{\frac{4}{2}} = \pm 8a^3bc^2$.

178. *Scol.* 6° Nelle Frazioni, poichè si alzano esse a potestà coll' elevare a potenza separatamente il loro numeratore, e il denominatore (II. n.° 174): così nell' estrazione delle radici da queste è chiaro che dovremo estrar separatamente la radice dal numeratore, e dal denominatore: perciò avremo

$$\sqrt[3]{\frac{27a^{12}}{8c^3}} = \frac{\sqrt[3]{27a^{12}}}{\sqrt[3]{8c^3}} = \frac{3a^{\frac{12}{3}}}{2c^{\frac{3}{3}}} = \frac{3a^4}{2c}, \text{ e } \sqrt{\frac{100m^2}{81n^4}} = \pm\frac{10m}{9n^2}.$$

II. Vogliasi la radice 5.ª di $a^3$: pel (*n.° prec.*) otterremo $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$, risultato in cui $\frac{3}{5}$ non può ricevere ulteriore riduzione. Possono adunque esistere dei termini, quale è appunto il precedente $a^{\frac{3}{5}}$, in cui si hanno nel luogo degli esponenti dei numeri rotti. Anche a simili quantità per ragion

di analogia si dà il nome di potenza, ma di potenza con esponente fratto.

179. *Scol.* 7.° I. Se due quantità sono fra loro uguali, è facile il dedurre dal (II. *n.°* 49), che saranno anche uguali fra loro tutte le loro potenze corrispondenti; quindi se $m=n$, sarà ancora $m^2=n^2$, $m^5=n^5$, ec.

II. Da ciò è facile il vedersi che essendo uguali fra loro due quantità, saranno anche fra loro uguali le radici corrispondenti; perciò se $m^2=n^2$, anche $m=n$.

180. *Esempio* 33.° Trovare una media proporzionale tra i due numeri 3, 75.

*Sol.* Chiamata $x$ questa media, sarà $3:x::x:75$, e però $x^2=3.75=225$ (II. n.° 133), e quindi $\sqrt{x^2}=\sqrt{225}$, (II. n.° *prec.*). Ora $\sqrt{x^2}=\pm x$ (n.° 177), e $\sqrt{225}=\pm 15$, perchè $15.15=225$. Dunque sarà $\pm x=\pm 15$; ma $\pm x=\pm 1\times x$, onde risulta $\pm 1\times x=\pm 15$; dunque dividendo per $\pm 1$, avremo $x=\frac{\pm 15}{\pm 1}$. Ora e il 15, e lo 1 sono affetti del doppio segno $\pm$, cioè e al 15, e allo 1 posso premettere indifferentemente, e il segno $+$, e il segno $-$; ciò eseguendo adunque ossia facendo fra gl' indicati segni le combinazioni tutte, ne verranno i risultati

$$x=\frac{+15}{+1}=15,\quad x=\frac{-15}{-1}=15,\quad x=\frac{+15}{-1}=-15,$$

$$x=\frac{-15}{+1}=-15,$$ de' quali il primo, e il secondo sono uguali fra loro, e sono uguali fra loro il terzo, e il quarto. Dunque potendo essere $x=+15$, ed $x=-15$, ossia avendosi $x=\pm 15$, ne segue, che dalla soluzione dell' Equazione $x^2=225$, risulteranno due valori della incognita cioè i valori $+15, -15$; e però esisteranno due medie proporzionali tra i due numeri 3, 75; sarà cioè $3:15::15:75$, $3:-15::-15:75$.

181. *Scol.* 8.° Come sciolta abbiamo l' Equazione di secondo grado $x^2 = 225$, potremo egualmente sciogliere una qualunque altra della forma $ax^2 = b$: imperciocchè divisa questa per $a$, avremo $x^2 = \frac{b}{a}$, ed estratta la radice seconda, e fatto lo stesso discorso del (*n.° prec.*), otterremo $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$; se $b = 169$, $a = 81$, sarà $x = \mp\sqrt{\frac{169}{81}} = \pm\frac{13}{9}$. Dunque in queste Equazioni del 2.° grado potrà $x$ avere due valori uno positivo, e l' altro negativo. I problemi per conseguenza, che conducono a simili Equazioni, riceveranno due soluzioni, come abbiam veduto accadere nell' esempio del (*n.° prec.*).

182. *Esem.* 34.° Ritruovare un numero, il cui quadrato moltiplicato per $-4$ sia $= 25$.

Essendo $x$ il numero domandato, ne verrà $-4x^2 = 25$, e però $x^2 = -\frac{25}{4}$. Ora sciogliendo l' Equazione abbiamo $x = \pm\sqrt{-\frac{25}{4}}$; dunque essendo il valore di $\sqrt{-\frac{25}{4}}$ immaginario (III. n.° 172); i valori di $x$ saranno assurdi, e quindi impossibile la soluzione del proposto Problema. Così

In qualunque altra quistione; se essa conduca ad un' Equazione della forma $x^2 = -A$, risultando i valori di $x = \pm\sqrt{-A}$ assurdi, ne sarà sempre impossibile la soluzione, essendo perciò assurda la domanda.

183. *Scol.* 9.° Vogliasi estrarre la radice 2.ª dalla quantità $ab$, ove $a$, $b$ siano numeri interi, e positivi; dovendosi a tal fine dividere gli esponenti per 2 (*n.° 177*); tralasciato per comodo il

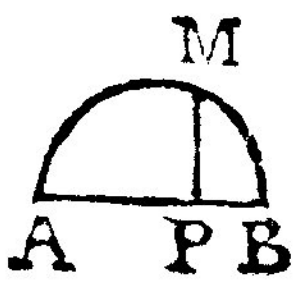
doppio segno $\pm$, sarà $\sqrt{ab} = \sqrt{a^1 b^1} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$. Ora lo 1 non può attualmente dividersi per 2; che valore adunque significherà l'espressione $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$? Non può questa certamente rappresentare un rotto qualsivoglia; poichè supposto, se è possibile, $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{q}$, essendo $\frac{p}{q}$ una frazione ridotta ai minimi termini, e $q > 1$, ne verrebbe quadrando $ab = \frac{p^2}{q^2}$ (*n.°* 173); ma avendosi il numerò $p$ primo con $q$, ancora $p^2$ è primo con $q^2$ (*n.°* 185), onde $p^2$ non può essere divisibile esattamente per $q^2$. Dunque un intero, cioè $ab$ uguaglierebbe un numero necessariamente rotto, cioè $\frac{p^2}{q^2}$, il che è impossibile. Questa espressione $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ non può neppure in generale uguagliare un intero; imperciocchè chiamato $x$ un intero qualunque, ed $x+1$ il prossimo susseguente, essendo $x^2$ il quadrato del secondo; se sia $ab > x^2$, ed $ab < x^2+2x+1$, dovrà evidentemente la radice 2.ª di $ab = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ essere maggiore della radice di $x^2 = x$, e minore della radice di $x^2+2x+1 = x+1$. Ora tra $x$, ed $x+1$ non può esistere alcun numero intero; dunque nella presente ipotesi non potrà essere intero nemmeno il valore di $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$, essendo esso compreso tra $x$, ed $x+1$.

Sia a cagion d'esempio $a = 3$, $b = 6$, e però $ab = 3.6 = 18$; avremo $\sqrt{18} = 18^{\frac{1}{2}}$. Supposto $18^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{q}$, ne verrà $18 = \frac{p^2}{q^2}$, e quindi se potesse $18^{\frac{1}{2}}$

uguagliare un fratto $\frac{p}{q}$, ne verrebbe l'assurdo, che l'intero 18 sarebbe = alla frazione $\frac{p^2}{q^2}$. Considerando poi il secondo caso, sia $x=4$, onde $x+1=5$, $x^2=16$, $(x+1)^2=25$; il supposto numero 18 è compreso tra il 16, e il 25; dunque la sua radice 2.ª sarà compresa tra le radici seconde del 16, e del 25, cioè tra il 4, e il 5. Dunque il valore di $\sqrt{18}=18^{\frac{1}{2}}$ non potrà essere un numero intero; poichè tra il 4, e il 5 non esiste alcun numero intero.

184. *Scol.* 10.° Se il valore di $\sqrt{ab}$ non può essere nè intero nè fratto (*n. prec.*), sarà esso adunque, come il valore di $\sqrt{-a^2}$ (III. *n.*° 172) immaginario, impossibile? Non già: difatti se in (XXVII) la retta AP sia $=a$, la PB $=b$, descritto sopra AB il semicircolo AMB, ed innalzata da P la perpendicolare PM sarà per la natura del Circolo AP : PM :: PM : PB, ossia $a$ : PM :: PM : $b$, e però avendosi $\overline{PM}^2=ab$, sarà PM $=\sqrt{ab}$ (*n.* 181). Ora di qualunque lunghezza siano le AP $=a$, PB $=b$, può sempre farsi il precedente discorso; dunque esisterà sempre una quantità PM $=\sqrt{ab}$, e per conseguenza qualunque siano le quantità positive $a$, $b$, non sarà mai assurdo il valore di $\sqrt{ab}$; questo anzi non esprimerà che la media proporzionale tra $a$, e $b$. Così $\sqrt{18}$ rappresenterà la media proporzionale fra 3, e 6.

(XXVII)




185. *Cor.* È facile a vedersi, che il valore di $\sqrt{ab}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, e di $\sqrt{18}=18^{\frac{1}{2}}$ non potendo essere espresso nè da un intero, nè da una frazione, non potrà esprimersi neppure da un aggregato finito di termini intieri, o di rotti; poichè effettuando la somma di questi termini sempre potremo ridurre il

supposto aggregato ad un termine solo intero, o fratto. Non potendo, noi dunque esprimere nè per interi, nè per rotti il richiesto valore, quantunque sia desso reale, giammai nol potremo ottenere esattamente per mezzo di numeri, interi sieno essi, o fratti.

186. *Scol.* II.° Ciocchè abbiamo ne' (*prec.i n.i*) dimostrato del valore di $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$, si dice egualmente di qualunque altro radicale, allorchè gli esponenti del Monomio dato non sono divisibili esattamente per l' indice della radice. Per tal modo non potremo esprimere in numeri finiti i valori di $\sqrt[3]{ab^2} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$, di $\sqrt[5]{7a^3b^4} = 7^{\frac{1}{5}} a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}$, ec., benchè essi pure siano reali.

187. *Def.* 4.ª. A questi radicali, il cui valore non è esprimibile attualmente per alcun numero, o intero, o fratto, il nome si dà di quantità *sorde*, *irrazionali*, *incommensurabili;* e difatti non potendosi queste esprimere per numeri interi, o rotti, non potremo truovare alcuna parte aliquota (*n.*° 6), che li misuri, o ne determini attualmente la ragione. Gli altri numeri poi, de' quali sia sempre determinabile attualmente una parte aliquota intera, o fratta, diconsi, al contrario dei precedenti, *razionali*, o *commensurabili*.

188. *Scol.* 12.°. Riescendo sovente più comodo l' indicare tali quantità col segno radicale, che con gli esponenti fratti; come più semplice egli è lo scrivere $\sqrt[7]{9a^3b^5c}$, che non $9^{\frac{1}{7}} a^{\frac{3}{7}} b^{\frac{5}{7}} c^{\frac{1}{7}}$, sogliono quindi i Matematici ritenere nel calcolo questi radicali, e rendesi quindi necessario, il sapere come si debbano essi calcolare.

189. *Probl.* 23.°. Ridurre più radicali allo stesso esponente.

*Sol.* Siano $\sqrt[m]{A^g}$, $\sqrt[n]{B^h}$ i dati radicali: giacchè $\sqrt[m]{A^g} = A^{\frac{g}{m}}$, $\sqrt[n]{B^h} = B^{\frac{h}{n}}$ (*n.°* 177), e ridotte le frazioni $\frac{g}{m}$, $\frac{h}{n}$ allo stesso denominatore, abbiamo $\frac{g}{m} = \frac{gn}{mn}$, $\frac{h}{n} = \frac{hm}{mn}$, e però $A^{\frac{g}{m}} = A^{\frac{gn}{mn}}$, $B^{\frac{h}{n}} = B^{\frac{hm}{mn}}$, sarà $\sqrt[m]{A^g} = A^{\frac{gn}{mn}}$, $\sqrt[n]{B^h} = B^{\frac{hm}{mn}}$; ma $A^{\frac{gn}{mn}} = \sqrt[mn]{A^{gn}}$, $B^{\frac{hm}{mn}} = \sqrt[mn]{B^{hm}}$, dunque avremo i due radicali $\sqrt[m]{A^g}$, $\sqrt[n]{B^h}$ uguali corrispondentemente ai due $\sqrt[mn]{A^{gn}}$, $\sqrt[mn]{B^{hm}}$, i quali hanno, come richiedevasi, sopra del vincolo lo stesso esponente $mn$. Se i radicali fossero stati $\sqrt[m]{A^g}$, $\sqrt[n]{B^h}$, $\sqrt[p]{C^i}$, $\sqrt[q]{D^k}$, ec.; avendosi $\frac{g}{m} = \frac{gnpq\ldots}{mnpq\ldots}$, $\frac{h}{n} = \frac{hmpq\ldots}{mnpq\ldots}$, $\frac{i}{p} = \frac{imnq\ldots}{pnmq\ldots}$, $\frac{k}{q} = \frac{kmnp\ldots}{qmnp\ldots}$, ec., con un discorso perfettamente uguale al precedente, vedremo risultarci $\sqrt[m]{A^g} = \sqrt[mnpq\ldots]{A^{gnpq\ldots}}$, $\sqrt[n]{B^h} = \sqrt[mnpq\ldots]{B^{hmpq\ldots}}$, $\sqrt[p]{C^i} = \sqrt[mnpq\ldots]{C^{imnq\ldots}}$, $\sqrt[q]{D^k} = \sqrt[mnpq\ldots]{D^{kmnp\ldots}}$, ec. Dunque si otterrà la riduzione domandata, moltiplicando in ciascun radicale l' esponente di ciascheduna quantità per gl' indici di tutti gli altri radicali, e sopra il vincolo ponendo il prodotto di tutti gl' indici de' radicali medesimi.

Se voglionsi perciò ridurre allo stesso indice i radicali $\sqrt[5]{5ab^3}$, $\sqrt[4]{3a^2c^5}$, $\sqrt[3]{b^2}$, seguendo la regola ora stabilita, si otterrà $\sqrt[5]{5ab^3} = \sqrt[60]{5^{12}a^{12}b^{36}}$, $\sqrt[4]{3a^2c^5} = \sqrt[60]{3^{15}a^{30}c^{75}}$, $\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[60]{b^{40}}$.

190. *Scol.* 13.° I. Poichè la riduzione dei radicali ad uno stesso indice dipende dalla riduzione dei rotti ad uno stesso denominatore, ne segue che se gl' indici dei radicali proposti hanno un comun divisore > 1, potremo come nel (I. *n.*° 95) semplificare i risultati, servendoci nelle moltiplicazioni dei quozienti, che si ottengono dal dividere gl' indici per la supposta comune misura. Così ridurrò i due radicali $\sqrt[mp]{A^g}$, $\sqrt[np]{B^h}$ ad indice comune nei due $\sqrt[mnp]{A^{gn}}$, $\sqrt[mnp]{B^{hm}}$.

II. Data una quantità razionale, per esempio la C, poichè si ha $i = \frac{mi}{m}$, e però $C^i = C^{\frac{mi}{m}} = \sqrt[m]{C^{mi}}$, (*n.*° 177); potremo ridurre questa a forma di radicale di un dato grado $m$, moltiplicando per $m$ il suo esponente $i$, e ponendo lo stesso $m$ sopra del vincolo.

III. L' operazione sopra indicata potrà servirci a determinare quale di due radicali sia il maggiore. Se $\sqrt[m]{A^g}$, $\sqrt[n]{B^h}$ siano per esempio i radicali proposti, li riduco allo stesso indice, e se nei risultati $\sqrt[mn]{A^{gn}}$, $\sqrt[mn]{B^{hm}}$ veggo essere $A^{gn} > B^{hm}$, dirò

evidentemente, che ancora $\sqrt[m]{A^g} > \sqrt[n]{B^h}$.

191. *Probl.* 29.° Moltiplicare e dividere fra loro le quantità radicali.

*Sol.* I. Sia $\sqrt[m]{A^g}$ da moltiplicarsi per $\sqrt[m]{B^h}$; avendosi $\sqrt[m]{A^g} = A^{\frac{g}{m}}$, $\sqrt[m]{B^h} = B^{\frac{h}{m}}$, sarà $\sqrt[m]{A^g} \times \sqrt[m]{B^h} = A^{\frac{g}{m}} \times B^{\frac{h}{m}} = A^{\frac{g}{m}} \; B^{\frac{h}{m}}$; ma $A^{\frac{g}{m}} \; B^{\frac{h}{m}} = \sqrt[m]{A^g \, B^h}$ (*n*° 177): dunque otterremo $\sqrt[m]{A^g} \times \sqrt[m]{B^h} = \sqrt[m]{A^g \, B^h}$. Pertanto moltiplicheremo insieme due o più radicali aventi lo stesso indice $m$, moltiplicando tra loro le quantità poste sotto il segno, e al prodotto premettendo il supposto vincolo comune $\sqrt[m]{\;}$.

II. Che se vogliasi dividere $\sqrt[m]{A^g}$ per $\sqrt[m]{B^h}$, ritroveremo, come precedentemente, $\frac{\sqrt[m]{A^g}}{\sqrt[m]{B^h}} = \sqrt[m]{\frac{A^g}{B^h}}$, il che si deduce ancora dal (*n.*° 178).

III. Finalmente se i radicali proposti sono fra loro diversi, li ridurrò prima pel (*n.*° 189) allo stesso esponente, e poi li moltiplicherò, o dividerò nel modo accennato. Per tal guisa se

vogliansi moltiplicare fra loro le quantità $\sqrt[3]{2xy}$, $\sqrt[5]{4y^3}$; ridotte queste alle espressioni $\sqrt[15]{2^5x^5y^5}$ $=\sqrt[5]{32x^5y^5}$, $\sqrt[15]{4^3y^6}=\sqrt[15]{64y^6}$, sarà $\sqrt[15]{2xy}$ $\times\sqrt[15]{4y^2}=\sqrt[15]{32x^5y^5}\times\sqrt[15]{64y^6}=\sqrt[15]{2048x^5y^{11}}$; e in egual modo ritroveremo $\frac{\sqrt[3]{8x}}{\sqrt[3]{10x}}=\sqrt[6]{\frac{512x^3}{100x^2}}$ $=\sqrt[6]{\frac{128}{25}x}$.

192. *Scol.* 14.° I. Sia da moltiplicarsi la quantità $\sqrt[n]{A^g B^h}$ per l'altra $A^i$, potremo scrivere $A^i\sqrt[n]{A^g B^h}$; ma essendo $A^i=\sqrt[n]{A^{ni}}$ (II. *n.°* 190), ne viene $A^i\sqrt[n]{A^g B^h}=\sqrt[n]{A^{ni}}\times\sqrt[n]{A^g B^h}=\sqrt[n]{A^{g+ni} B^h}$. Dunque se venga data una quantità, come la precedente $A^i\sqrt[n]{A^g B^h}$, potremo in questa trasportare sotto del vincolo radicale la quantità A, che è fuori, moltiplicando per l'indice $n$ il suo esponente $i$, e il risultato $A^{ni}$ unendolo colla moltiplicazione alle quantità esistenti sotto del vincolo: *Ciocchè dicesi liberare un dato radicale dal suo coefficiente*. Così dato il radicale $2m\sqrt[4]{5m^2n^3}$ sarà questo eguale $\sqrt[4]{80m^6n^3}$.

II. Viceversa avendosi $\sqrt[n]{A^{g+ni}B^h} = A\sqrt[n]{A^g B^h}$, apparisce che quando l' esponente di una o più lettere esistenti sotto del segno, può dividersi per l' indice del radicale, simili lettere possono sempre o in tutto, o in parte cavarsi fuori dal vincolo. Per tal modo nel radicale $\sqrt[5]{7a^{15}b^{22}c^3}$ rapporto alla lettera $a$ essendo $\frac{15}{5} = 3$, e rapporto alla $b$ essendo $\frac{22}{5} = 4 + \frac{2}{5}$, esso si ridurrà all' espressione $a^3b^4\sqrt[5]{7b^2c^3}$.

III. L' operazione ora accennata potrà far conoscere se due radicali dati siano, o nò, termini fra loro simili (*n.°* 36). Siano per esempio i due radicali $4\sqrt[3]{a^7b^{10}c^2}$, $a^2b\sqrt[3]{ab^7c^2}$. Riducendosi questi pel (*prec.* II) agli altri $4a^2b^3\sqrt[3]{abc^2}$, $a^2b^3\sqrt[3]{abc^2}$, saranno evidentemente termini simili fra di loro.

IV. Dati più radicali da sommarsi, o sottrarsi fra loro, le operazioni pratiche non sono diverse dalle stabilite nei (*n.* 33, 34). Volendosi però semplificare i risultati con la riduzione, siccome nel (II. *n.°* 37), dei termini simili ad un termine solo; converrà prima pel (*prec.* III) sopra i radicali dati eseguire l' operazione del (*prec.* II). Così mentre si vogliono sommare, e ridurre insieme i termini simili delle due quantità $5\sqrt{ab^3} - 9\sqrt[4]{a^5c^4} + a\sqrt{bc^2} + \sqrt[4]{a^5b^5}$,

$15b\sqrt{ab} + 7ac\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{a^3bc^2} + a\sqrt[4]{a^3b}$, le riduco prima pel (*prec.* II) alle $5b\sqrt{ab} - 9ac\sqrt[4]{a} + a\sqrt[4]{bc^2} + b\sqrt[4]{a^3b}$, $15b\sqrt{ab} + 7ac\sqrt[4]{a} - a\sqrt[4]{bc^2} + a\sqrt[4]{a^3b}$, e quindi sommando si otterrà il risultato $20b\sqrt{ab} - 2ac \times \sqrt[4]{a} + (a+b)\sqrt[4]{a^3b}$.

193. *Scol.* 15.°. In conseguenza della proprietà delle frazioni, che si è esposta nel (III. *n.*° 77) potremo alcune volte togliere i radicali dal denominatore, o dal numeratore di un rotto, che ne contenga. Difatti

I. Se venga dato il rotto $\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[n]{B}}$, e voglia togliersi il radicale del denominatore, moltiplico sopra e sotto per $\sqrt[n]{B^{n-1}}$, e ci risulterà $\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \frac{\sqrt[m]{A} \times \sqrt[n]{B^{n-1}}}{\sqrt[n]{B^n}}$

$= \frac{\sqrt[mn]{A^n B^{m(n-1)}}}{B}$ (n.° 139). Se avesse voluto togliersi il radicale dal numeratore, avrei moltiplicato sopra e sotto per $\sqrt[m]{A^{m-1}}$, e sarebbe in egual modo risultato $\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \frac{A}{\sqrt[mn]{A^{n(m-1)} B^m}}$. Sia per esempio $m=3$, $n=2$, avendosi quindi $m-1=2$, $n-1=1$, converrà nel primo caso moltiplicare per $\sqrt{B}$, e nel secondo moltiplicare per $\sqrt[3]{A^2}$, onde si avrà $\frac{\sqrt[6]{A}}{\sqrt{B}} = \frac{\sqrt[6]{A^2B^3}}{B} = \frac{A}{\sqrt[6]{A^4B^3}}$. Se la frazione data sia la

$\frac{B}{\sqrt[m]{B}}$. Avendosi $B = \sqrt[m]{B}\,\sqrt[m]{B}$ (II. *n.°* 190) $= \sqrt[m]{B^{m-1}} \times \sqrt[m]{B}$, (*n.°* 191) ne verrà $\frac{B}{\sqrt[m]{B}} = \frac{\sqrt[m]{B^{m-1}} \times \sqrt[m]{B}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{B^{m-1}}$.

II. Sia $\frac{G}{h\sqrt{A}+k\sqrt{B}}$ un rotto dato, in cui si vogliano togliere i radicali dal denominatore. Moltiplico perciò sopra e sotto per $h\sqrt{A}-k\sqrt{B}$, e verrà $\frac{G}{h\sqrt{A}+k\sqrt{B}} = \frac{G(h\sqrt{A}-k\sqrt{B})}{h^2A-k^2B}$ (II. *n.°* 61).

III. Supponghiamo che $\frac{G}{h\sqrt{A}+k\sqrt{B}+g\sqrt{C}}$ sia la frazione proposta. Faccio $h\sqrt{A}+k\sqrt{B}=M$, e ridotta così essa alla $\frac{G}{M+g\sqrt{C}}$, moltiplico per $M-g\sqrt{C}$ avremo $\frac{G(M-g\sqrt{C})}{M^2-g^2C}$; ma dalla moltiplicazione della $h\sqrt{A}+k\sqrt{B}=M$ per se medesima ottienesi $h^2A+k^2B+2hk\sqrt{AB}=M^2$. Dunque posto $h^2A+k^2B-g^2C=N$, il rotto dato si ridurrà all'altro $\frac{G(M-g\sqrt{C})}{N+2hk\sqrt{AB}}$, e moltiplicando per $N-2hk\sqrt{AB}$, all'altro $\frac{G(M-g\sqrt{C})(N-2hk\sqrt{AB})}{N^2-4h^2k^2AB}$, e posti invece delle M, N i suoi valori, al rotto $\frac{G(h\sqrt{A}+k\sqrt{B}-g\sqrt{C})(h^2A+h^2B-g^2C-2hk\sqrt{AB})}{(h^2A+k^2B-g^2C)^2-4h^2k^2AB}$ (*n.°* 167), il quale non ha più alcun radicale nel denominatore. Sia per esempio $\frac{5}{3\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ il rotto dato; paragonandolo col precedente generale, poichè ab-

biamo G=5, $h$=3, A=7, $k$=−1, B=5, $g$=−2, C=2, si toglieranno dal suo denominatore i radicali, riducendo all' altro $\frac{5(3\sqrt{7}-\sqrt{5}+2\sqrt{2})(9.7+1.5-4.2+2.3.1\sqrt{7.5})}{(9.7+1.5-4.2)^2-(4.9.1.7.5)}$

$= \frac{5(3\sqrt{7}-\sqrt{5}+2\sqrt{2})(60+6\sqrt{35})}{2340}$.

IV. Sia $\frac{G}{h\sqrt{A}+k\sqrt{B}+g\sqrt{C}+i\sqrt{D}}$ la frazione proposta. Per renderne razionale il denominatore, moltiplico questo, ed il numeratore per $(h\sqrt{A}+k\sqrt{B})-(g\sqrt{C}+i\sqrt{D})$, e risultandoci $\frac{G(h\sqrt{A}+k\sqrt{B}-g\sqrt{C}-i\sqrt{D})}{h^2A+k^2B-g^2C-i^2D+2hk\sqrt{AB}-2gi\sqrt{CD}}$ considero le tre parti $h^2A+k^2B-g^2C-i^2D$, $2hk\sqrt{AB}$, $-2gi\sqrt{CD}$, che formano il denominatore di questo rotto siccome le tre $h\sqrt{A}$, $k\sqrt{B}$, $g\sqrt{C}$ formanti il denominatore supposto nel (*prec.* III), e quindi col rinnovare le operazioni ivi accennate, otterremo la domandata razionalità del divisore nella frazione ora proposta.

V. Abbiasi la frazione $\frac{G}{h\sqrt{A}+k\sqrt{(B+g\sqrt{(C+i\sqrt{D})})}}$.

Pongo $B+g\sqrt{(C+i\sqrt{D})}=M$, e moltiplico sopra, e sotto per $h\sqrt{A}-k\sqrt{M}$; essa frazione diverrà $\frac{G(h\sqrt{A}-k\sqrt{M})}{h^2A-k^2M}=\frac{G(h\sqrt{A}-k\sqrt{M})}{h^2A-k^2B-gk^2\sqrt{(C+i\sqrt{D})}}$. Faccio $h^2A-k^2B=N$, $C+i\sqrt{D}=P$, e moltiplico, come precedentemente, per $N+gk^2\sqrt{P}$; cangiatasi perciò la frazione nella $\frac{G(h\sqrt{A}-k\sqrt{M})(N+gk^2\sqrt{P})}{N^2-g^2k^4P}=$

$\frac{G(h\sqrt{A}-k\sqrt{M})(N+gk^2\sqrt{P})}{(h^2A-k^2B)^2-g^2k^4(C+i\sqrt{D})}$. Pongo finalmente $(h^2A-k^2B)^2-g^2k^4C=Q$, e moltiplicato al solito per $Q+g^2k^4\sqrt{D}$, otterremo per ultimo risultato

$$\frac{G\ (h\sqrt{A}-k\sqrt{M})(N+gk^2\sqrt{P})(Q+g^2k^4i\sqrt{D})}{Q^2-g^4k^8i^2D} =$$

$$\frac{G(h\sqrt{A}-k\sqrt{M})(N+gk^2\sqrt{P})(Q+g^2k^4i\sqrt{D})}{((h^2A-k^2B)^2-g^2k^4C)^2-g^4k^8i^2D}$$ frazione mancante di radicali nel denominatore, ed uguale alla data. Replicando questo stesso metodo, quanto è necessario, è facile a vedersi, che potremo rendere sempre commensurabile il denominatore della frazione data, qualunque siasi il numero dei successivi radicali, che nel modo ora supposto unisconsi a formare la quantità $k\sqrt{}$ ec. Lo stesso non può dirsi delle frazioni considerate nei (*prec.* II, III, IV), poichè se in esse il numero dei radicali contenuti nel denominatore supera il 4, il metodo non ha più luogo. In tutti i casi però i coefficienti $h, k, g, i$ ponno essere tanto positivi che negativi.

VI. Sia $\frac{G}{\sqrt[m]{(A\mp\sqrt{(A^2+B^m)})}}$ la frazione proposta: moltiplico il suo numeratore, e il suo denominatore per $\sqrt[m]{\left(A\mp\sqrt{(A^2+B^m)}\right)}$, e ci risulterà

$$\frac{G\sqrt[m]{\left(A\mp\sqrt{(A^2+B^m)}\right)}}{\sqrt[m]{(A^2-A^2+B^m)}} (n.^\circ 191) = \frac{G\sqrt[m]{\left(A\mp\sqrt{(A^2+B^m)}\right)}}{B}.$$

VII. Vogliansi togliere i radicali dalla frazione $\frac{G}{\sqrt[m]{A}+\sqrt[m]{B}}$. Moltiplico sopra, e sotto per

$$\sqrt[m]{A^{m-1}} - \sqrt[m]{A^{m-2}B} + \sqrt[m]{A^{m-3}B^2} - \sqrt[m]{A^{m-4}B^3} + \text{ec.}$$
$$\mp\sqrt[m]{AB^{m-2}} \pm\sqrt[m]{B^{m-1}}$$, prendendo il segno superio-

re quando $\sqrt[m]{B^{m-1}}$ occupa un luogo dispari, e l'inferiore quando ne occupa un pari; e dalla moltiplicazione attuale di questo polinomio pel denominatore $\sqrt[m]{A}+\sqrt[m]{B}$, risultando $A-B$ ne verrà

$$\frac{G}{\sqrt[m]{A}+\sqrt[m]{B}} = \frac{G(\sqrt[m]{A^{m-1}} - \sqrt[m]{A^{m-2}B} + \text{ec.} \pm \sqrt[m]{B^{m-1}})}{A-B}.$$

Se il rotto proposto fosse stato $\frac{G}{\sqrt[m]{A}-\sqrt[m]{B}}$, avrei nel polinomio presi tutti i termini positivi, e sarebbemi risultato

$$\frac{G}{\sqrt[m]{A}-\sqrt[m]{B}} = \frac{G(\sqrt[m]{A^{m-1}} + \sqrt[m]{A^{m-2}B} + \text{ec.} + \sqrt[m]{B^{m-1}})}{A+B}.$$

Che se finalmente $\frac{G}{\sqrt[p]{a}\pm\sqrt[q]{b}}$ fosse il rotto dato, lo ridurrei all'altro $\frac{G}{\sqrt[pq]{a^q}\pm\sqrt[pq]{b^p}}$, e posto $pq=m$, $a^q=A$, $b^p=B$, opererei come precedentemente.

194. *Probl.* 30.° Elevare a potenza un qualunque radicale monomio, ed estrarre da un qualunque radicale monomio la radice.

*Sol.* I. Vogliasi elevare alla potestà $p$ un qualsivoglia radicale per esempio $\sqrt[m]{A^g B^h}$. Suppongo $\sqrt[m]{A^g B^h}=z$, ed elevo questa Equazione alla potenza $m$, ne verrà $z^m = A^g B^h$: innalzo tanto $z$, co-

me $A^{g}\,B^{h}$ alla potenza $p$, ed ottenuta così l'Equazione $z^{mp} = A^{gp}\,B^{hp}$, ne estraggo la radice *mesima*, e ci verrà $z^{\frac{gp}{m}}_{p} = A^{\frac{hp}{m}}\,B = \sqrt[m]{A^{gp}\,B^{hp}}$ (*n.°* 177). Ora essendo $z^{p} = \left(\sqrt[m]{A^{g}\,B^{h}}\right)^{p}$, risulta $\left(\sqrt[m]{A^{g}\,B^{h}}\right)^{p} = \sqrt[m]{A^{gp}\,B^{hp}}$. Dunque onde innalzare ad una qualsivoglia potenza *pesima* un proposto radicale monomio, non si avrà, che a moltiplicare per $p$ gli esponenti delle quantità poste sotto del vincolo. Sarà quindi $\sqrt[5]{a^3 b^2 c^7)^4} = \sqrt[5]{a^{12} b^8 c^{28}}$.

II. Dallo stesso radicale $\sqrt[m]{A^{g}\,B^{h}}$ vogliasi estrarre la radice *qesima*. Ritenuto $\sqrt[m]{A^{g}\,B^{h}} = z$, poichè si ha $z^{m} = A^{g}\,B^{h}$ coll'estrarre la radice *mqesima*, otterremo $z^{\frac{m}{mq}} = z^{\frac{1}{q}}_{q} = \sqrt[mq]{z} = A^{\frac{g}{mq}}\,B^{\frac{h}{mq}} = \sqrt[mq]{(A^{g}\,B^{h})}$, e per conseguenza $\sqrt[q]{(\sqrt[m]{A^{g}\,B^{h}})} = \sqrt[mq]{A^{g}\,B^{h}}$. Dunque si avrà la radice *qesima* di un dato radicale monomio, moltiplicando per $q$ l'indice posto sopra del vincolo. Avremo perciò $\sqrt[4]{(\sqrt[5]{a^3 b^2 c^7})} = \sqrt[20]{a^3 b^2 c^7}$.

195. *Cor.* I. Se si voglia elevare alla potenza *mesima* una quantità $\sqrt[m]{A}$, venendone $(\sqrt[m]{A})^{m} = \sqrt[m]{A^{m}} = A$, ne segue, che basterà togliere il vincolo radicale.

II. Poichè tanto $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})}$, come $\sqrt[n]{(\sqrt[m]{A})}$ uguagliano $\sqrt[mn]{A}$ (II. *n.° prec.*), ne segue, che sarà $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$

$= \sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}$; e però avremo $\sqrt[6]{ab} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{ab}} = \sqrt[3]{\sqrt{ab}}$.

III. Avremo ancora $\sqrt[mnp]{A} = \sqrt[m]{(\sqrt[np]{A})} =$ $\sqrt[n]{(\sqrt[mp]{A})} = \sqrt[p]{(\sqrt[mn]{A})}$; ma $\sqrt[np]{A} = \sqrt[n]{(\sqrt[p]{A})} =$ $\sqrt[p]{(\sqrt[n]{A})}$, $\sqrt[mp]{A} = \sqrt[m]{(\sqrt[p]{A})} = \sqrt[p]{(\sqrt[m]{A})}$; $\sqrt[mn]{A}$ $= \sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{A})}$. Dúnque sostituendo ne verrà $\sqrt[mnp]{A} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{(\sqrt[p]{A})})} = \sqrt[m]{(\sqrt[p]{(\sqrt[n]{A})})} =$ $\sqrt[n]{(\sqrt[m]{(\sqrt[p]{A})})} = \sqrt[n]{(\sqrt[p]{(\sqrt[m]{A})})} = \sqrt[p]{(\sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})})} =$ $\sqrt[p]{(\sqrt[n]{(\sqrt[m]{A})})}$; d' onde apparisce, che, quando l' indice di un radicale è composto, può sempre ridursi ad un radicale di radicale avente tanti vincoli quanto è il numero dei fattori dell' indice, e che gl' indici dei radicali nuovi possono fra loro permutarsi a piacimento.

196. *Teor.* Nella moltiplicazione di due radicali, qualunque di essi facciasi moltiplicatore, il prodotto è sempre il medesimo.

*Dim.* I. Sia da moltiplicarsi $\sqrt[m]{A^g}$ per $\sqrt[n]{B^h}$, in cui $A^g$, $B^h$ siano quantità razionali (*n.*° 187) ne verrà $\sqrt[m]{A^g} \times \sqrt[n]{B^h} = \sqrt[mn]{A^{gn} B^{hm}}$ (*n.*° 191); ma abbiamo ancora $\sqrt[n]{B^h} \times \sqrt[m]{A^g} = \sqrt[mn]{B^{hm} A^{gn}}$, e frattanto pei (*n.*i 48, 101)

$A^{\frac{gn}{hm}} B = B^{\frac{hm}{gn}} A$, ed $mn=nm$. Dunque sarà eziandio $\sqrt[m]{A^g} \times \sqrt[n]{B^h} = \sqrt[n]{B^h} \times \sqrt[m]{A^g}$.

II. Siano $\sqrt[m]{a\sqrt[p]{A^g}}$, $\sqrt[n]{b\sqrt[q]{B^h}}$ i due fattori, e siano le quantità $a, b, A^{\frac{g}{h}}, B$ tutte commensurabili; ne verrà $\sqrt[m]{a\sqrt[p]{A^g}} \times \sqrt[n]{b\sqrt[q]{B^h}} = \sqrt[mn]{\left(a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{q}} A^{\frac{gn}{hm}} B^{\frac{q}{p}}\right)} = \sqrt[mn]{\left(a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{pq}{mp}} A^{\frac{gnq}{hmp}} B\right)}$ (*n.i* 187, 191, 194), ed avremo $\sqrt[n]{b\sqrt[q]{B^h}} \times \sqrt[m]{a\sqrt[p]{A^g}} = \sqrt[nm]{\left(b^{\frac{n}{m}} a^{\frac{qp}{mp}} B^{\frac{hmp}{gnq}} A\right)}$; ma pei citati (*n.i* 48, 101) si ha $A^{\frac{gnq}{hmp}} B = B^{\frac{hmp}{gnq}} A$, $a^{\frac{n}{m}} b = b^{\frac{m}{n}} a$, $mn=nm$, $pq=qp$. Dunque ancora in questo secondo caso sarà $\sqrt[m]{a\sqrt[p]{A^g}} \times \sqrt[n]{b\sqrt[q]{B^h}} = \sqrt[n]{b\sqrt[q]{B^h}} \times \sqrt[m]{a\sqrt[p]{A^g}}$.

III. Se i radicali dati fossero $\sqrt[m]{a\sqrt[p]{c\sqrt[r]{A^g}}}$, $\sqrt[n]{b\sqrt[q]{d\sqrt[s]{B^h}}}$, ne' quali le quantità $a, b, c, d, A^{\frac{g}{h}}, B$ siano tutte razionali; troveremo con lo stesso precedente discorso verificarsi il posto Teorema, risultandoci dalla moltiplicazione del primo col secondo la quantità $\sqrt[mn]{\left(a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{pq}{nq}} c^{\frac{mp}{rs}} d^{\frac{gnqs}{hmpr}} A B\right)}$, e dalla moltiplicazione del secondo col primo l'altra $\sqrt[nm]{\left(b^{\frac{n}{m}} a^{\frac{qp}{mp}} d^{\frac{nq}{sr}} c^{\frac{hmpr}{gnqs}} B A\right)}$, quantità pei (*n.i* 48, 101) uguali fra loro.

Ora qualunque siansi i radicali, che consideriamo presentemente, è chiaro, che le quanti-

tà, le quali in essi contengonsi sotto tutti i suoi diversi vincoli, deggiono siccome le precedenti $a$, $b$, $c$, $d$, $A^{\frac{g}{h}}$, B, ec. essere sempre commensurabili. Dunque nella moltiplicazione dei radicali supposti, riducendosi sempre pel (*n.* 191) allo stesso esponente i vincoli corrispondenti, e quindi moltiplicandosi sempre fra loro le accennate quantità razionali, che ne sono comprese, ne segue, che sopra i prodotti, che ne vengono, avrà sempre luogo quanto si è detto nei (*prec.* I, II, III), e però che è sempre vera la esposta Proposizione.

197. *Scol.* 16.° I. Potrebbero i radicali proposti a calcolarsi essere immaginarii (III. *n.* 172). Ora dovremo noi in tal caso tenerne conto? certamente che sì: imperciocchè quantunque il loro valore sia impossibile, pure dalla combinazione loro potendo risultare dei valori reali non si possono trascurare. Nel calcolo però di queste quantità produconsi delle variazioni dipendenti dalla natura loro, le quali troppo è necessario l'esporre.

II. Pertanto sia $x^2=-1$, ne verrà $x=\sqrt{-1}$: come $x^2$ è il quadrato di $x$, così $-1$ sarà il quadrato di $\sqrt{-1}$, e avremo per conseguenza $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$.

III. Vogliasi il prodotto di $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b}$. Supposto $a=c^2$, $b=d^2$, e quindi $c=\sqrt{a}$, $d=\sqrt{b}$, avremo $\sqrt{-a}=\sqrt{-c^2}$, $\sqrt{-b}=\sqrt{-d^2}$: ora pel (II. *n.* 192) $\sqrt{-c^2}=c\sqrt{-1}$, $\sqrt{-d^2}=d\sqrt{-1}$; dunque essendo $\sqrt{-a}=\sqrt{-1}$, $\sqrt{-b}=d\sqrt{-1}$, ne verrà il cercato prodotto $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=c\sqrt{-1}\times d\sqrt{-1}$ $=c\times d\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$; ma $c\times d=\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (*n.*° 191), e $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$ (*prec.* II); dunque risultando con la sostituzione $c\times d\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ $=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}$; sarà $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$.

IV. Siano proposte a moltiplicarsi le quantità $-\sqrt{-a}$, $\sqrt{-b}$. Avendosi $-\sqrt{-a}=-1\times\sqrt{-a}$, sarà

$-\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-1\times\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$; ora $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$ (*prec.* IV): dunque avremo $-\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-1\times-\sqrt{ab}=+\sqrt{ab}$.

V. Nella maniera medesima troveremo $-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$, e $\sqrt{-a}\times-\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$. Dunque se due quantità immaginarie, quali sono le supposte nei (*prec.i* II, III, IV, V) sono amendue affette del segno medesimo, il prodotto sarà sempre negativo, e se affette sono di segno contrario, il prodotto sarà sempre positivo; proprietà affatto opposta a quella delle quantità reali.

198. *Cor.* Poichè pel (III. *n.° prec.*) $\sqrt{-a}=c\sqrt{-1}$, essendo $c=\sqrt{a}$; supporremo, che qualunque quantità immaginaria della forma $\sqrt{-a}$ esprimasi per $c\sqrt{-1}$.

I. Ciò posto; vogliasi eseguire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione fra le due quantità $m+n\sqrt{-1}$, $p+q\sqrt{-1}$, la prima delle quali denominerò M, e la seconda P, ne verrà evidentemente

$$\mathrm{M}+\mathrm{P}=(m+p)+(n+q)\sqrt{-1},$$
$$\mathrm{M}-\mathrm{P}=(m-p)+(n-q)\sqrt{-1},$$
$$\mathrm{MP}=(mp-nq)+(mq+np)\sqrt{-1},$$
$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}=\frac{m+n\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}}=\frac{(m+n\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})}{(p+q\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})}=$$
$$\frac{(mp+nq)+(np-mq)\sqrt{-1}}{p^2+q^2}=\left(\frac{mp+nq}{p^2+q^2}\right)+$$
$$\left(\frac{np-mq}{p^2+q^2}\right)\sqrt{-1}.$$

Ora in tutti questi risultati esiste una parte affatto reale, ed una immaginaria contenente il radicale $\sqrt{-1}$ moltiplicato per un coefficiente reale. Dunque denominata in generale A l'accennata parte reale, e B il coefficiente reale, che moltiplica $\sqrt{-1}$, qualunque delle esposte operazioni si eseguisca su

delle $m+n\sqrt{-1}$, $p+q\sqrt{-1}$, ne verrà sempre un risultato della forma $A+B\sqrt{-1}$.

II. Sia $m=0$, $p=0$. I precedenti quattro valori divenendo perciò $M+P=(n+q)\sqrt{-1}$, $M-P=(n-q)\sqrt{-1}$, $MP=-nq$, $\frac{M}{P}=\frac{n}{q}$, vedesi, che l'addizione, e la sottrazione delle quantità $n\sqrt{-1}$, $q\sqrt{-1}$ daranno due risultati immaginarj, la moltiplicazione, e la divisione ne daranno due reali.

III. Pongasi $n=0$. Risultando da ciò $\frac{M}{P}=\frac{m}{p+q\sqrt{-1}}=\frac{mp-mq\sqrt{1}}{p^2+q^2}$, ne segue, che una frazione della forma $\frac{m}{p+q\sqrt{-1}}$ avente l'immaginario $q\sqrt{-1}$ nel denominatore, può sempre ridursi ad un'altra $\frac{mp-mq\sqrt{-1}}{p^2+q^2}$ nella quale l'immaginario esiste nel numeratore, ed il denominatore è affatto reale.

## CAPO II.

### *Della elevazione a potenza d'un qualunque Polinomio, e della Formola Nevvtoniana.*

199. *Probl.* 31.° Elevare a potenza una data quantità composta qualunque.

*Sol.* Per la definizione esposta nel (*n.*° 165) otterrò evidentemente la potenza cercata, moltiplicando per se medesima la quantità proposta tante volte meno una, quante vengono indicate dall'esponente della potenza istessa.

Sia pertanto $a+x$ la quantità data, e vogliansene le successive potenze 2, 3, 4, 5, ec. Operando come quì sotto si otterrà

$$(a+x)^1 = a+x$$

$$\begin{array}{r} a+x \\ \hline a^2+ax \end{array}$$

$$(a+x)^2 = a^2+2ax+x^2$$

$$\begin{array}{r} a+x \\ \hline a^3+2a^2x+ax^2 \\ +a^2x+2ax^2+x^3 \end{array}$$

(XXVIII) $$(a+x)^3 = a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

$$\begin{array}{r} a+x \\ \hline a^4+3a^3x+3a^2x^2+ax^3 \\ +a^3x+3a^2x^2+3ax^3+x^4 \end{array}$$

$$(a+x)^4 = a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$$

$$\begin{array}{r} a+x \\ \hline a^5+4a^4x+6a^3x^2+4a^2x^3+ax^4 \\ +a^4x+4a^3x^2+6a^2x^3+4ax^4+x^5 \end{array}$$

$$(a+x)^5 = a^5+5a^4x+10a^3x^2+10a^2x^3+5ax^4+x^5$$

ec.

200. *Scol.* 1.° I. Supposto $a+x=A$, poichè ne viene $(a+x)^3 = A^3$, $(a+x)^4 = A^4$, ed è $A^3 \times A^4 = A^7$ (*n.°* 56), avremo, sostituendo, $(a+x)^3 \times (a+x)^4 = (a+x)^7$; e però volendosi del supposto binomio $a+x$ una potenza superiore, per esempio la settima, potremo ottenerla, moltiplicando fra loro le sue potenze terza, e quarta, senza passare per le successive potenze quinta, e sesta. È chiaro che lo stesso dicesi ancora delle altre potenze.

II. Ciò che si è detto del precedente binomio $a+x$, dicesi egualmente di un polinomio qualunque.

III. Se la quantità data sia una frazione, il numeratore, e il denominatore della quale siano quan-

tità composte; se essa sia un radicale avente fuori, e sotto del vincolo dei polinomj; ne avremo rispettivamente le diverse potenze, innalzando nel modo accennato a potenza separatamente il dividendo, e il divisore rapporto alla frazione, le quantità poste sotto, e fuori del vincolo rapporto al radicale. Sarà perciò

$\left(\frac{a+b}{a-c-d}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{(a-c-d)^2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ac-2ad+c^2+2cd+d^2}$, e sarà

$\left((a+x)\sqrt[4]{p-q}\right)^3=(a+x)^3\sqrt[4]{(p-q)^3}=(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)$

$\sqrt[4]{(p^3-3p^2q+3pq^2-q^3)}$; $\left((b+t)\sqrt{p+r}\right)^2=(b+t)^2\times$

$(p+r)=(b^2+2bt+t^2)(p+r)$ ( I. *n.°* 195 ).

201. *Teor.* 1°. Posta un' Equazione di un grado qualunque avente tutti i suoi termini nel primo membro, se essa debba verificarsi, qualunque valore si attribuisca all' incognita, io dico, che ciascuno de' suoi coefficienti deve essere uguale allo zero.

*Dim.* Sia

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{ec.}+Vz^m=0 \qquad \text{(XXIX)}$$

l' Equazione supposta, Equazione, che ho scritta, ordinandola al rovescio, e debba essa verificarsi qualunque valore diasi alla $z$. In conseguenza di questa ipotesi, dovendo la (XXIX) essere vera, anche allorquando si dia il valore zero, facciasi attualmente $z=0$. Sotto questa supposizione la (XXIX) diverrà $A=0$; ma nel valore del coefficiente A non contenendosi punto la $z$, se esso è zero sotto un certo valore della $z$ medesima, è chiaro, che non alterandosi al cangiarsi della $z$, deve rimanere zero sempre, qualunque altro valore si dia a questa incognita. Dunque qualsivoglia valore attribuiscasi alla $z$, dovendo essere sempre $A=0$, la (XXIX) di-

verrà $Bz+Cz^2+Dz^3+$ ec. $+Vz^m=0$, ossia diviso tutto per $z$ diventerà

(XXX) $$B+Cz+Dz^2+\text{ec.}+Vz^{m-1}=0\,.$$

Questa Equazione (XXX) altro non essendo, che la (XXIX) dovrà essa pure verificarsi, qualunque sia il valore che si dà alla $z$; ma quando si fa $z=0$, essa diviene $B=0$, e il valore del coefficiente B non può per la ragione addotta riguardo ad A, cangiarsi sotto le variazioni della $z$. Dunque qualunque siansi i valori della $z$, rimanendo costantemente $B=0$, la (XXX) diventera $Cz+Dz^2+\text{ec.}+Vz^{m-1}=0$, e però

$$C+Dz+\text{ec.}+Vz^{m-2}=0\,.$$

Nella stessa maniera da quest' ultima Equazione ricaveremo dover essere $C=0$; e quindi col replicare il raziocinio medesimo, troverem successivamente essere $D=0$, $E=0$, ec. fino a $V=0$. Dunque ec.

202. *Cor.* I. Abbiasi un' Equazione della forma

$$a+bz+cz^2+dz^3+\text{ec.}=n+pz+qz^2+rz^3+\text{ec.}$$

la quale debba, siccome la precedente (XXIX), essere vera, qualsivoglia valore si dia alla $z$. Ciò essendo, io dico, che dovrà essere $a=n$, $b=p$, $c=q$, $d=r$, ec., e in generale il coefficiente d' una potenza qualunque della $z$ nel primo membro dovrà uguagliare il coefficiente della potenza medesima nel membro secondo.

Trasportati difatti nell' Equazione supposta dal secondo nel primo membro tutti i termini, essa diverrà $(a-n)+(b-p)z+(c-q)z^2+(d-r)z^3+\text{ec.}=0$; ma essendo zero il secondo membro di quest' ultima Equazione, i coefficienti in essa di tutte le diverse podestà della $z$ devono essere zero (*n.° prec.*). Dunque dovendo essere $a-n=0$, $b-p=0$, $c-q=0$, $d-r=0$, ec., ne verrà $a=n$, $b=p$, $c=q$, $d=r$, e però ec.

II. Le proposizioni medesime (*n.*° 201, *prec.* I) si verificano ancora, 1.° quando nella Equazione proposta i successivi esponenti della $z$ non formano la serie naturale 1, 2, 3, 4, ec. de' numeri interi; 2.° quando tra gli esponenti ne esistono dei negativi; e 3.° quando ve ne hanno dei fratti, ossia quando esistono nella Equazione dei radicali della $z$. Difatti rapporto al 1.° di questi casi, se $A+Bz^3+Cz^7+Dz^8+$ec. $=o$ sia per esempio l' Equazione data, dimostro, come nel (*n.*° 201) dover essere quì pure $A=o$, e ridursi quindi la data alla $Bz^3+Cz^7+Dz^8+$ec. $=o$, divido tutto per $z^3$, e ne verrà $B+Cz^4+Dz^5+$ec. $=o$. Trovato in egual modo dover essere $B=o$, onde ridotta nuovamente la proposta alla $Cz^4+Dz^5+$ec. $=o$, divido per $z^4$, e avuta così la $C+Dz+$ec. $=o$, proseguo avanti il discorso sempre nella stessa maniera.

Relativamente al 2.° degli indicati casi sia per esempio $Az^{-3}+Bz^{-1}+Cz^2+Dz^7+$ec. $=o$ la data Equazione. Poichè questa riducesi alla $\frac{A}{z^3}+\frac{B}{z}+Cz^2+Dz^7+$ec. $=o$, e però all'$A+Bz^2+Cz^5+Dz^{10}+$ec. $=o$, vedesi che il caso presente si riduce infine al precedente 1.°.

Rapporto finalmente al caso 3.° supposto che per esempio
$A+B\sqrt{z}+Cz+Dz^2+E\sqrt[3]{z^7}+$ec. $=o$ sia l'Equazione data, riduco tutte le potenze della $z$ a forma radicale avente lo stesso indice (*n.*° 189, II. *n.* 190), e ottenuta così la $A+B\sqrt[6]{z^3}+C\sqrt[6]{z^6}+D\sqrt[6]{z^{12}}+E\sqrt[6]{z^{14}}+$ec. $=o$, pongo $\sqrt[6]{z}=u$. Risultandoci da ciò $A+Bu^3+Cu^6+Du^{12}+Eu^{14}+$ec. $=o$, osservo, che siccome la $z$ può acquistare un valore qualunque, dovrà perciò poterlo acquistare ancora la $u$, e per conseguenza che applicato all' ottenuta Equazione in $u$ il discorso del precedente caso 1.°, ancor quivi risulterà dover essere $A=o$, $B=o$, $C=o$, ec.

203. *Probl.* 32.° Determinare quella serie, a cui si uguaglia una potenza qualunque algebraica del grado $m$ del precedente binomio $a+x$ (*n.°* 199).

*Sol.* Poichè le serie (XXVIII) determinate nel (*n.°* 199) esprimenti le prime cinque potenze del binomio $a+x$ sono tutte nel primo termine mancanti della $x$, nel termine secondo contengono la $x$ alla potenza prima, nel termine terzo contengono la $x^2$, nel quarto la $x^3$, e così di seguito; e poichè pel modo, con cui si effettuano le successive moltiplicazioni per $a+x$ (*cit.°* *n.°* 199) anche le serie esprimenti le podestà ulteriori deggiono evidentemente seguire la stessa regola, porrò in generale

$$(a+x)^m = p+qx+rx^2+sx^3+tx^4+ux^5+ \text{ec.}, \qquad \text{(XXXI)}$$

esprimendosi dalle $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, ec. i coefficienti delle successive potenze della $x$. Se fosse per esempio $m=3$, la (XXXI) coinciderebbe con la terza delle Equazioni (XXVIII), e avrebbesi quindi $p=a^3$, $q=3a^2$, $r=3a$, $s=1$, $t=0$, $u=0$, ec.; se $m=5$, la (XXXI) coinciderebbe con la quinta delle (XXVIII), e sarebbe però $p=a^5$, $q=5a^4$, $r=10a^3$, $s=10a^2$, $t=5a$, $u=1$, $v=0$, ec. Avremo per conseguenza risolto il Problema, quando rimanendo la $m$ indeterminata, e però capace di un valore qualunque, saranno si ritruovati i corrispondenti valori degl' indicati coefficienti $p$, $q$, $r$, $s$, ec. Prima però di cominciare questa ricerca, osservo, che come il secondo membro della Equazione (XXXI) altro non è che il primo $(a+x)^m$ sviluppato, dovrà essergli identico, e però l' accennata Equazione dovrà verificarsi, qualsivoglia valore attribuiscasi alla $x$.

I. In conseguenza di ciò cominciamo dal porre $x=0$. In tal ipotesi l'Equazione (XXXI) diverrà evidentemente $a^m=p$; ma se $p$ ha il valore $a^m$ nel caso di $x=0$; per la ragione addotta sul principio della dimostrazione del (*n.°* 201), deve averlo sempre, qualun-

lunque altro valore diasi alla $x$. Dunque sarà il primo coefficiente della supposta serie, cioè

$$p=a^m$$

II. Per la determinazione del coefficiente secondo $q$, osservo se l' esponente $m$ sia positivo, o negativo, intero, o fratto, e

1.° Comincio dal supporlo intero, e positivo; e in questa supposizione faccio $a+x=y$. Avendosi da ciò $(a+x)^m = y^m$, ed $x=y-a$, la (XXXI) con la sostituzione diventerà

$$y^m=a^m+q(y-a)+r(y-a)^2+s(y-a)^3+t(y-a)^4+\text{ec.}$$

ossia trasportato nel primo membro il termine $a^m$, e diviso tutto per $y-a$, diventerà

$$\frac{y^m-a^m}{y-a}=q+r(y-a)+s(y-a)^2+t(y-a)^3+\text{ec.}$$

Ora se si moltiplichi la quantità $y^{m-1}+ay^{m-2}+a^2y^{m-3}+a^3y^{m-4}+\text{ec.}+a^{m-2}y+a^{m-1}$ per l' altra $y-a$, ne risulta il prodotto $y^m-a^m$. Dunque essendo

$$\frac{y^m-a^m}{y-a}=y^{m-1}+ay^{m-2}+a^2y^{m-3}+a^3y^{m-4}+\text{ec.}$$

$$+a^{m-2}y+a^{m-1}, \text{ avremo}$$

$$y^{m-1}+ay^{m-2}+a^2y^{m-3}+a^3y^{m-4}+\text{ec.}+a^{m-2}y+ \quad \text{(XXXII)}$$

$$a^{m-1}=q+r(y-a)+s(y-a)^2+t(y-a)^3+\text{ec.}$$

Or facciasi $x=0$, e però $y=a$, la (XXXII) diventerà $a^{m-1}+a^{m-1}+a^{m-1}+a^{m-1}+\text{ec.}+a^{m-1}+a^{m-1}=q$, ma il primo membro di quest' ultima equazione altro non è che la quantità $a^{m-1}$ ripetuta le volte $m$, poichè nel primo membro della (XXXII) contenendosi tutte le successive $m-1$ potenze $y^{m-1}, y^{m-2}, y^{m-3}$, ec., $y$, e di più il termine $a^{m-1}$ mancante della $y$, si contengono appunto $m$ termini, ciascuno de'

quali nella ipotesi fatta di $y=a$, diviene $a^{m-1}$. Dunque mentre $x=0$, risultando $q=ma^{m-1}$, e questo valore di $q$ dovendo per la solita ragione conservarsi sempre lo stesso sotto tutti i valori della $x$, ne segue, che in questo caso 1.° si avrà nella serie (XXXI) il secondo coefficiente $q=ma^{m-1}$.

2.° Sia l'esponente $m$ un numero intero, e negativo, e ponghiamo perciò $m=-n$; la quantità $(a+x)^m$ diverrà $(a+x)^{-n}$, e ritenuto $a+x=y$, l'altra $\frac{y^m-a^m}{y-a}$ diverrà $\frac{y^{-n}-a^{-n}}{y-a}$. Ora essendo $y^{-n}$ $=\frac{1}{y^n}$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ (II. n.° 63), ed $y^{-n}-a^{-n}=$ $\frac{1}{y^n}-\frac{1}{a^n}=\frac{a^n-y^n}{a^n y^n}$ (n.° 94.) $=-\frac{1}{a^n y^n}\times$ $(y^n-a^n)$, abbiamo

$$\frac{y^{-n}-a^{-n}}{y-a}=-\frac{1}{a^n y^n}\left(\frac{y^n-a^n}{y-a}\right)=-\frac{1}{a^n y^n}\left(y^{n-1}+ay^{n-2}+a^2y^{n-3}+a^3y^{n-4}+\text{ec.}+a^{n-2}y+a^{n-1}\right).$$

Dunque sostituendo, otterremo

$$-\frac{1}{a^n y^n}\left(y^{n-1}+ay^{n-2}+a^2y^{n-3}+a^3y^{n-4}+\text{ec.}+a^{n-2}y+a^{n-1}\right)=q+r(y-a)+s\times(y-a)^2+t(y-a)^3+\text{ec.}$$

Pongasi presentemente $x=0$, e però $y=a$. Nel secondo membro di questa Equazione non rimane, che il termine $q$, ed il membro primo diventa

$$-\frac{1}{a^{2n}}\left(a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\text{ec.}+a^{n-1}+a^{n-1}\right)$$

$$=-\frac{na^{n-1}}{a^{2n}}=-\frac{n}{a^{n+1}}=-na^{-n-1}$$ . Dunque nel presente caso avremo il coefficiente secondo della (XXXI), cioè $q=-na^{-n-1}=-\frac{n}{a^{n+1}}$.

3.° Abbiasi finalmente $m$ uguale ad un rotto razionale, positivo esso siasi, o negativo, e sia quindi $m=\frac{h}{k}$. Fatto in questa ipotesi $qx+rx^2+\text{ec.}=X$, la Equazione (XXXI) diverrà $(a+x)^{\frac{h}{k}}=p+X$, in cui $p=a^m=a^{\frac{h}{k}}$ (*prec.* I) e però elevando alla potenza *kesima*, sarà $(a+x)^h=(p+X)^k$. Ora essendo $h, k$ amendue numeri interi, chiamati $r'$, ec, i coefficienti delle potenze 2.ª ec. della $x$ in $(a+x)^h$, ed R', ec. i coefficienti delle potenze 2.ª ec. della X in $(p+X)^k$, pei (*prec.* I 1.° , 2.° II) e per la (XXXI) si ha $(a+x)^h=a^h+ha^{h-1}x+r'x^2+\text{ec.}$, $(p+X)^k=p^k+kp^{k-1}X+R'X^2+\text{ec.}$, e posto invece di $p$ il suo valore $a^{\frac{h}{k}}$, e invece di X il suo $qx+rx^2+\text{ec.}$, risulta $(p+X)^k=a^h+ka^{\frac{h(k-1)}{k}}(qx+rx^2+\text{ec.})+R'(qx+rx^2+\text{ec.})^2+\text{ec.}$, e però $(p+X)^k=a^h+ka^{\frac{hk-h}{k}}qx+(ka^{\frac{hk-h}{k}}r+R'q^2)x^2+\text{ec.}$ Dunque

collocati invece delle espressioni $(a+x)^h$, $(p+X)^k$ i loro valori ora determinati risulterà

$$a^h + ha^{h-1}x + r'x^2 + \text{ec.} = a^h + ka^{\frac{hk-h}{k}}qx + (ka^{\frac{hk-h}{k}}r + R'q^2)x^2 + \text{ec.};$$

ma l'Equazione (XXXI), e però l'altra $(a+x)^h = (p+X)^k$, e quindi l'ultima ottenuta, deggiono sempre verificarsi, qualunque sia il valore della $x$. Dunque quel termine, che contiene nel primo suo membro la prima potenza della $x$, dovendo pel (I. $n.^o$ 202) uguagliare l'altro, che nel secondo membro contiene la potenza medesima, avremo

$$ha^{h-1} = ka^{\frac{hk-h}{k}}q, \text{ e per conseguenza } q = \frac{ha^{h-1}}{ka^{\frac{hk-h}{k}}}$$

$$= \frac{ha^{\frac{hk-k}{k}}}{ka^{\frac{hk-h}{k}}} = \frac{h}{k}a^{\frac{h-k}{k}}, \text{ e finalmente}$$

$$q = \frac{h}{k}a^{\frac{h}{k}-1}.$$

Dunque qualunque siasi il numero razionale $m$, positivo, o negativo, intero o fratto, il coefficiente del secondo termine della serie (XXXI) acquisterà sempre la forma $ma^{m-1}$, ossia avremo in generale

$$q = ma^{m-1}$$

III. Passando ora alla determinazione degli altri coefficienti $r$, $s$, $t$, $u$, ec.; ritengasi $a+x=y$,

e si aumenti la $x$ di una quantità indeterminata $z$; avendosi perciò $a+x+z=y+z$, e quindi $(a+x+z)^m = (y+z)^m$ la (XXXI) diverrà

$$(y+z)^m = p+q(x+z)+r(x+z)^2+s(x+z)^3+t(x+z)^4 + u(x+z)^5+ \text{ec.};$$

ma, sviluppate le potenze $(y+z)^m$, $(x+z)^2$, $(x+z)^3$, $(x+z)^4$, ec. pei (*prec.i* I, II) abbiamo

$(y+z)^m = y^m + my^{m-1}z+\text{ec.}$, $(x+z)^2 = x^2+2xz+\text{ec.}$ ec.

$(x+z)^3 = x^3+3x^2z+\text{ec.}$ $(x+z)^4 = x^4+4x^3z+\text{ec.}$

Dunque sostituendo sarà

$$y^m + my^{m-1}z+\text{ec.} = p+qx+rx^2+sx^3+tx^4+ux^5+\text{ec.}+ (q+2rx+3sx^2+4tx^3+5ux^4+\text{ec.})z, + \text{ec.}$$

Sottraggasi da questa l'Equazione (XXXI): a cagione di $(a+x)^m = y^m$ ne verrà

$$my^{m-1}z+\text{ec.} = (q+2rx+3sx^2+4tx^3+5ux^4+\text{ec.})z+\text{ec.},$$

ma la $z$ per la ipotesi è indeterminata, e però quest' ultima Equazione deve verificarsi, qualunque sia la $z$; dunque pel (I. *n.°* 202) avremo

$my^{m-1} = q+2rx+3sx^2+4tx^3+5ux^4+\text{ec.}$, e moltiplicato per $y=a+x$, avremo

$my^m = aq+(2ar+q)x+(3as+2r)x^2+(4at+3s)x^3 + (5au+4t)x^4+\text{ec.}$

e però essendo

$mp+mqx+mrx^2+msx^3+mtx^4+\text{ec.} = aq+(2ar+q)x+ (3as+2r)x^2+(4at+3s)x^3+(5au+4t)x^4+\text{ec.}$,

pel (I. *n.°* 202) risulterà $aq=mp$, $2ar+q=mq$, $3as+2r=mr$, $4at+3s=ms$, $5au+4t=mt$, ec., e per conseguenza

$$q=\frac{mp}{a},\ r=\frac{(m-1)q}{2a},\ s=\frac{(m-2)r}{3a},\ t=\frac{(m-3)s}{4a},$$

$$u=\frac{(m-4)t}{5a},\ \text{ec.};$$

ma $p=a^m$ (*prec.* I). Dunque col fare le successive sostituzioni otterremo

$$p = a^m \,,\; q = ma^{m-1} \,,\; r = \frac{m\,(m-1)a^{m-2}}{2} \,,$$

$$s = \frac{m(m-1)(m-2)a^{m-3}}{2\,.\,3} \,, t = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)a^{m-4}}{2\,.\,3\,.\,4} \,,$$

$$u = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)a^{m-5}}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \,, \text{ ec.,}$$

e però

$$\text{(XXXIII)} \quad (a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m\,(m-1)}{2}a^{m-2}x^2 +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}a^{m-3}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}a^{m-4}x^4$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}a^{m-5}x^5 + \text{ec.,}$$

come era stato richiesto.

È questa la famosa *Formola Newtoniana* così detta pel suo Inventore, e perchè la forma ci dimostra di una qualsivoglia potenza di un binomio $a+x$: Formula, di cui massimo è l'uso nelle Matematiche.

204. *Scol.* 1.° I Suppongasi, che con la lettera Greca $\pi$ venga indicato il coefficiente del termine $n+1$ *esimo* della serie (XXXI), e con la $\varphi$ il coefficiente del termine *nesimo*: pel dimostrato nel (III. *n.° prec.*) dovrà essere

$$\pi = \frac{(m-(n-1))\varphi}{na} \,.$$

II. Supponghiamo $p = Aa^m$, $q = Ba^{m-1}$, $r = Ca^{m-2}$, $s = Da^{m-3}$, $t = Ea^{m-4}$, $u = Fa^{m-5}$, ec. $\varphi = Pa^{m-(n-1)}$, $\pi = Qa^{m-n}$, esprimendosi con le A, B, C, ec. quantità da determinarsi opportunamente. Si sostituiscano queste espressioni nella (XXXI), essa diverrà

$$(a+x)^m = Aa^m + Ba^{m-1}x + Ca^{m-2}x^2 + Da^{m-3}x^3 \quad \text{(XXXIV)}$$
$$+ Ea^{m-4}x^4 + Fa^{m-5}x^5 + \text{ec.} + Pa^{m-(n-1)}x^{n-1}$$
$$+ Qa^{m-n}x^n + \text{ec.}$$

Pongansi le espressioni medesime nei valori truovati nel ( III. *n. prec.* ) ; risultandoci quindi

$$q = mAa^{m-1},\ r = \frac{(m-1)B}{2}a^{m-2}\quad s = \frac{(m-2)C}{3}a^{m-3},$$

$$t = \frac{(m-3)D}{4}a^{m-4},\ u = \frac{(m-4)E}{5}a^{m-5},\ \text{ec.}$$

$\pi = \frac{(m-(n-1))P}{n}a^{m-n}$, sarà

$$B = mA,\ C = \frac{(m-1)B}{2},\ D = \frac{(m-2)C}{3},\ E = \frac{(m-3)D}{4},$$

$F = \frac{(m-4)E}{5}$ ec. $Q = \frac{(m-(n-1))P}{n}$, avendosi poi a cagione di $p = a^m$ ( I. *n°. prec.*) $A = 1$ .

Da tutto questo apparisce , che i termini della Formula Nevvtoniana hanno un andamento costante , e regolare , per cui agevole riesce il determinarli successivamente : vedesi , che in essi mentre le potenze della $x$ cominciando nel primo termine dalla $x^0$ , giacchè $Aa^m = Aa^m x^0$ , vanno successivamente crescendo , quelle al contrario della $a$ cominciano nel primo termine della $a^m$ , e vanno sempre corrispondentemente decrescendo , ed i coefficienti A , B , C , ec. son tali , che uno qualunque di essi in generale Q deducesi dal termine che lo precede , col moltiplicare il coefficiente P di questo per l'esponente $m-(n-1)$ della $a$ in esso contenuta , e col dividere il prodotto $(m-(n-1))P$ , che ne viene , pel numero $n$ indicante il luogo *nesimo* , che lo stesso termine occupa nella serie .

III. In conseguenza di ciò, denominati N, M, L, ec. i coefficienti del termine $n-1$ *esimo*, $n-2$ *esimo*, $n-3$ *esimo*, ec., della serie ( XXXIV ), avremo

$$Q=\frac{(m-(n-1))P}{n},\ P=\frac{(m-(n-2))N}{n-1},\ N=\frac{(m-(n-3))M}{n-2},$$

$$M=\frac{(m-(n-4))L}{n-3},\ \text{ec.}$$

e però sostituendo

$$Q=\frac{(m-(n-2))(m-(n-1))N}{(n-1)n}$$

$$Q=\frac{(m-(n-3))(m-(n-2))(m-(n-1))M}{(n-2)(n-1)n}$$

$$Q=\frac{(m-(n-4))(m-(n-3))(m-(n-2))(m-(n-1))L}{(n-3)(n-2)(n-1)n}.$$

Ora queste sostituzioni possono eseguirsi, retrocedendo fino ai coefficienti primi

$D=\frac{(m-2)C}{3}$, $C=\frac{(m-1)B}{2}$, $B=mA$, $A=1$. Ciò fatto adunque sino al primo di tutti $A=1$, risulterà evidentemente

(XXXV) $$Q=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-4))(m-(n-3))(m-(n-2))(m-(n-1))}{1.2.3\ldots(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

ossia $$Q=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)n}$$

indicandosi con i punti tutti i termini intermedj.

IV. Dipendentemente dal valore ora truovato del coefficiente Q tutti potremo determinare i valori degli altri coefficienti, B, C, D, ec. coll' attribuire semplicemente alla lettera *n* gli opportuni valori particolari, e coll' osservare, che i fattori costituenti il numeratore di Q cominciando da *m* vanno sempre successivamente decrescendo di un' unità sino al fattore $m-n+1$, il quale è l' ultimo, ed i fattori costituenti il denominatore cominciando da uno vanno sempre aumentandosi di un' unità sino all' ultimo *n*. Facciasi *n* successivamente $=1,2,3,4,$ ec.

onde la Q diventi in corrispondenza B, C, D, E, ec. : l' espressione $m-n+1$ divenendo perciò rispettivamente $m-1+1=m$, $m-2+1=m-1$, $m-3+1=m-2$, $m-4+1=m-3$, dipendentemente dalla (XXXV) otterremo $B=m$, $C=\frac{m(m-1)}{1.2}$, $D=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, $E=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$, ec.

Nell' ipotesi di $m$ numero intero, e positivo, chiamati V, T, S, ec. i coefficienti nella (XXXIV) dei termini *mesimo*, *m—1esimo*, *m—2esimo*, ec., pongasi $n$ successivamente $=m$, $m-1$, $m-2$, ec. e si sostituiscano questi valori nella espressione generale (XXXV). Avendosi $1.2.3...(n-1)n=n(n-1)...3.2.1$, ed essendo $(m-m+2)=2$, $(m-m+1)=1$, $(m-(m-1)+2)=3$, $(m-(m-1)+1)=2$, $(m-(m-2)+2)=4$, $(m-(m-2)+1)=3$, ec. per le indicate sostituzioni, dal valore generale di Q otterremo

$$V=\frac{m(m-1)(m-2)....2.1}{m(m-1)(m-2)....2.1}=1,\quad T=\frac{m(m-1)(m-2)...3.2}{(m-1)(m-2)...3.2.1}=m$$

$$S=\frac{m(m-1)(m-2)....4.3}{(m-2)...3\ \ 2.1}=\frac{m(m-1)}{1.2},\ \text{ec.}$$

Facciamo nella (XXXV) $n$ successivamente $=m+1$, $m+2$, $m+3$, ec. Avendosi quindi in corrispondenza $m-n+1=m-m-1+1=0$, $m-n+2=m-m-2+2=0$, $m-n+3=m-m-3+3=0$, ec. uno dei fattori del valore di Q, e però esso Q diverrà in queste ipotesi sempre zero. Dunque nel caso di $m$ numero intero e positivo, non esistendo nella serie (XXXIII), ovvero (XXXIV) alcun termine oltre lo *mesimo*, ne segue, che essa sarà sempre finita, e questo *mesimo* ne sarà l' ultimo termine. I coefficienti poi dei termini ultimi pel detto poc' anzi, si uguaglieranno ai coefficienti dei primi, cosicchè sarà $V=A=1$, $T=B=m$, $S=C=\frac{m(m-1)}{2}$, $R=D=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$, ec. Tale uguaglianza vedesi difatti nelle serie (XXVIII)

corrispondenti alle ipotesi di $m = 1, 2, 3, 4, 5$, ec.

V. Sia $m =$ ad un numero intero e negativo, che dirò $-h$. Pei ( I. 2.°, II, III, n.° 203 ) verificandosi ancora in questo caso l' Equazione (XXXIII), e però la (XXXIV), ed avendosi pel coefficiente generale Q lo stesso valore (XXXV); posto $-h$ in vece di $m$, dalla (XXXIV) ci verrà

$$(a+x)^{-h} = Aa^{-h} + Ba^{-h-1}x + Ca^{-h-2}x^2 + Da^{-h-3}x^3 + Ea^{-h-4}x^4 + Fa^{-h-5}x^5 + \text{ec.} + Pa^{-h-(n-1)}x^{n-1} + Qa^{-h-n}x^n + \text{ec.}$$

e però pel ( II. n.° 68 )

$$\frac{1}{(a+x)^h} = \frac{1}{a^h}\left(A + \frac{Bx}{a} + \frac{Cx^2}{a^2} + \frac{Dx^3}{a^3} + \frac{Ex^4}{a^4} + \frac{Fx^5}{a^5} + \text{ec.} + \frac{Px^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{Qx^n}{a^n} + \text{ec.}\right)$$

e dalla (XXXV) otterremo

$$Q = \frac{-h(-h-1)(-h-2)(-h-3)\ldots(-h-n+2)(-h-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)n},$$

e quindi

$$Q = \pm\frac{h(h+1)(h+2)(h+3)\ldots(h+n-2)(h+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)n}$$

prendendosi il segno + quando il numero dei fattori componenti il numeratore, e però il numero $n$, è pari, e prendendosi il segno −, quando lo stesso numero è dispari. Facciamo ora $n$, come nel ( *prec.* IV ), successivamente $= 1, 2, 3, 4, 5$, ec., dall' ottenuto valor generale di Q, avremo in corrispondenza $B = -h$, $C = \frac{h(h+1)}{1.2}$, $D = -\frac{h(h+1)(h+2)}{1.2.3}$, $E = \frac{h(h+1)(h+2)(h+3)}{1.2.3.4}$, $F = -\frac{h(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)}{1.2.3.4.5}$ ec.

e per conseguenza, essendo poi $A = 1$ ( *prec.* II ), con la sostituzione ci risulterà

(XXXVI)
$$(a+x)^{-h} = \frac{1}{(a+x)^h} = \frac{1}{a^h}\left(1 - \frac{hx}{a} + \frac{h(h+1)x^2}{1.2a^2} - \frac{h(h+1)(h+2)x^3}{1.2.3.a^3} + \frac{h(h+1)(h+2)(h+3)x^4}{1.2.3.4a^4} - \frac{h(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)x^5}{1.2.3.4.5a^5} + \text{ec.}\right)$$

È facile a vedersi, che qualunque siasi l'intero $h$, la serie (XXXVI) si protrae sempre all'infinito senza aver termine. Sia per esempio $h=1$, essa diverrà

$$(a+x)^{-1}=\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}-\frac{x^5}{a^5}+\text{ec.}\right)$$

e se $h=2$, avremo

$$(a+x)^{-2}=\frac{1}{(a+x)^2}=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{3x^2}{a^2}-\frac{4x^3}{a^3}+\frac{5x^4}{a^4}-\frac{6x^5}{a^5}+\text{ec.}\right).$$

VI. Abbiasi $m=\frac{h}{k}$. In conseguenza dei (I, 3.° II, III. *n.°* 203) pongo nelle (XXXIV), (XXXV) in vece di $m$ il valore supposto. Risultando da ciò

$$(a+x)^{\frac{h}{k}}=Aa^{\frac{h}{k}}+Ba^{\frac{h}{k}-1}x+Ca^{\frac{h}{k}-2}x^2+Da^{\frac{h}{k}-3}x^3+$$

$$Ea^{\frac{h}{k}-4}x^4+Fa^{\frac{h}{k}-5}x^5+\text{ec.}+Pa^{\frac{h}{k}-(n-1)}x^{n-1}+Qa^{\frac{h}{k}-n}x^n$$

$$+\text{ec.}$$

$$Q=\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)\left(\frac{h}{k}-2\right)\left(\frac{h}{k}-3\right)\ldots\left(\frac{h}{k}-n+2\right)\left(\frac{h}{k}-n+1\right)}{1.2.3\ldots(n-1)n}$$

facilmente apparisce che otterremo

$$(a+x)^{\frac{h}{k}}=a^{\frac{h}{k}}\left(A+\frac{Bx}{a}+\frac{Cx^2}{a^2}+\frac{Dx^3}{a^3}+\frac{Ex^4}{a^4}+\frac{Fx^5}{a^5}+\text{ec.}+\frac{Px^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{Qx^n}{a^n}+\text{ec.}\right)$$

$$Q=\frac{h(h-k)(h-2k)(h-3k)\ldots(h-(n-2)k)(h-(n-1)k)}{k.2k.3k.4k.\ldots(n-1)k.nk},$$

ossia

$$Q=\pm\frac{h(k-h)(2k-h)(3k-h)\ldots((n-2)k-h)((n-1)k-h)}{k.2k.3k.4k.\ldots(n-1)k.nk}$$

prendendosi il segno $+$, quando il numero dei fattori $k-h$, $2k-h$, ec.e però $n-1$ è pari, e il segno

—, quando l'indicato numero di fattori è dispari.

Ora abbiamo $(a+x)^{\frac{h}{k}} = \sqrt[k]{(a+x)^h}$, $a = \sqrt[k]{a^h}$, e fatto nel valore di Q successivamente $n = 1, 2, 3, 4, 5,$ ec. ottienesi in corrispondenza $B = \frac{h}{k}$, $C = -\frac{h(k-h)}{k.2k}$, $D = \frac{h(k-h)(2k-h)}{k.2k.3k}$, ec. Dunque sostituendo avremo pel (*n.°* 177)

$$(a+x)^{\frac{h}{k}} = \sqrt[k]{(a+x)^h} = \sqrt[k]{a^h}\left(1+\frac{hx}{ka}-\frac{h(k-h)x^2}{k.2ka^2}+\frac{h(k-h)(2k-h)x^3}{k.2k.3ka^3}\right. \quad \text{(XXXVII)}$$
$$\left.-\frac{h(k-h)(2k-h)(3k-h)x^4}{k.2k.3k.4ka^4}+\frac{h(k-h)(2k-h)(3k-h)(4k-h)x^5}{k.2k.3k.4k.5ka^5}-\text{ec.}\right)$$

Serie la quale prolungasi evidentemente all' infinito. Sia $h = 1$, essa diverrà

$$(a+x)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{(a+x)} = \sqrt[k]{a}\left(1+\frac{x}{ka}-\frac{(k-1)x^2}{k.2ka^2}+\frac{(k-1)(2k-1)x^3}{k.2k.3ka^3}\right.$$
$$\left.-\frac{(k-1)(2k-1)(3k-1)x^4}{k.2k.3k.4ka4}+\frac{(k-1)(2k-1)(3k-1)(4k-1)x^5}{k.2k.3k.4k.5ka^5}-\text{ec.}\right)$$

e facendo $k = 2$, 3, ec. otterremo in corrispondenza

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a+x)} = \sqrt{a}\left(1+\frac{x}{2a}-\frac{1.x^2}{2.4a^2}+\frac{1.3x^3}{2.4.6a^3}-\frac{1.3.5x^4}{2.4.6.8a^4}\right.$$
$$\left.+\frac{1.3\,5.7x^5}{2.4.6.8.10a^5}-\text{ec.}\right),$$

$$(a+x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(a+x)} = \sqrt[3]{a}\left(1+\frac{x}{3a}-\frac{2x^2}{3.6a^2}+\frac{2.5x^3}{3.6.9a^3}-\frac{2.5.8x^4}{3.6.9.12a^4}\right.$$
$$\left.+\frac{2.5.8.11x^5}{3.6.9.12.15a^5}-\text{ec.}\right)$$

ec.

Vogliasi $h = -i$. Sostituito questo valore nella prima delle serie (XXXVII), da essa avremo evidentemente

$$(a+x)^{-\frac{i}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{(a+x)^i}} = \frac{1}{\sqrt[k]{a^i}}\left(1-\frac{ix}{ka}+\frac{i(k+i)x^2}{k.2ka^2}-\frac{i(k+i)(2k+i)x^3}{k.2k.3ka^3}\right. \quad \text{(XXXVII}$$

$$\left.+\frac{i(k+i)(2k+i)(3k+i)x^4}{k.2k.3k.4ka^4}-\frac{i(k+i)(2k+i)(3k+i)(4k+i)x^5}{k.2k.3k.4k.5ka^5}+\text{ec.}\right)$$

e fatto quivi $i=1$, risulterà

$$(a+x)^{-\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{(a+x)}} = \frac{1}{\sqrt[k]{a}}\left(1-\frac{x}{ka}+\frac{(k+1)x^2}{k.2ka^2}-\frac{(k+1)(2k+1)x^3}{k.2k.3ka^3}\right.$$

$$\left.+\frac{(k+1)(2k+1)(3k+1)x^4}{k.2k.3k.4ka^4}-\text{ec.}\right)$$

VII. Finalmente pongasi nella (XXXIII) invece dell' esponente $m$ l' altro $mp$, ne verrà

$$(a+x)^{mp} = a^{mp}+mpa^{mp-1}x+\frac{mp(mp-1)}{1.2}a^{mp-2}x^2+\frac{mp(mp-1)(mp-2)}{1.2.3}a^{mp-3}x^3+\text{ec.},$$

ma $(a+x)^{mp}=((a+x)^m)^p$ (n.° 173). Dunque avendosi

$$\left(a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3\right.$$

$$\left.+\text{ec.}\right)^p = a^{mp}+mpa^{mp-1}x+\frac{mp(mp-1)}{1.2}a^{mp-2}x^2+\frac{mp(mp-1)(mp-2)}{1.2.3}a^{mp-3}x^3+\text{ec.}$$

ne segue, che mentre si voglia elevare ad una potenza $p$ la serie (XXXIII), basterà scrivere nella serie medesima invece di $m$ il prodotto $mp$.

205. *Scol.* 2.° Considerate nel (*n.° prec.*) le variazioni, che presenta la formula Newtoniana, per le variazioni dell'esponente, passiamo ora a determinare le variazioni ch' essa medesima riceve pei diversi valori, che possonsi attribuire alle lettere $a$, $x$ formanti il binomio $a+x$.

I. Cominciamo perciò dal supporre $x=-z$. Avendosi $x^2=z^2$, $x^3=-z^3$, $x^4=z^4$, $x^5=-z^5$, ec.,

sostituisco questi valori nelle serie, (XXXIII), (XXXVI), (XXXVII), (XXXVIII), e ci verrà

$$(a-z)^m = a^m - ma^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}z^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\times$$
$$a^{m-3}z^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}z^4 - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\,m-4}{1.2.3.4.5}$$
$$\times a^{m-5}z^5 + \text{ec.}$$

$$(a-z)^{-h} = \frac{1}{(a-z)^h} = \frac{1}{a^h}\left(1 + \frac{hz}{a} + \frac{h(h+1)z^2}{1.2a^2} + \frac{h(h+1)(h+2)z^3}{1.2.3a^3} + \right.$$
$$\left. \frac{h(h+1)(h+2)(h+3)z^4}{1.2.3.4a^4} + \frac{h(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)z^5}{1.2.3.4.5a^5} + \text{ec.}\right)$$

(XXXIX)
$$(a-z)^{\frac{h}{k}} = \sqrt[k]{(a-z)^h} = \sqrt[k]{a^h}\left(1 - \frac{hz}{ka} - \frac{h(k-h)z^2}{k.2ka^2} - \frac{h(k-h)(2k-h)z^3}{k.2k.3ka^3} - \right.$$
$$\left. \frac{h(k-h)(2k-h)(3k-h)z^4}{k.2k.3k.4ka^4} - \frac{h(k-h)(2k-h)(3k-h)(4k-h)(5k-h)z^5}{k.2k.3k.4k.5ka^5} \right.$$
$$\left. - \text{ec.}\right)$$

$$(a-z)^{-\frac{i}{k}} = \sqrt[k]{\frac{1}{(a-z)^i}} = \frac{1}{\sqrt[k]{a^i}}\left(1 + \frac{iz}{ka} + \frac{i(k+i)z^2}{k.2ka^2} + \frac{i(k+i)(2k+i)z^3}{k.2k.3k.a^3} \right.$$
$$\left. + \frac{i(k+i)(2k+i)(3k+i)z^4}{k.2k.3k.4ka^4} + \frac{i(k+i)(2k+i)(3k+i)(4k+i)z^5}{k.2k.3k.4k.5ka^5} + \text{ec.}\right)$$

Ora paragonando queste con le rispettive serie del (*n.° prec.*) vedesi, che mentre la (XXXIII) ha tutti i suoi termini positivi, la prima delle (XXXIX) gli ha alternativamente positivi, e negativi; e che mentre una simile alternazione di segni ha luogo nelle (XXXVI), (XXXVII), (XXXVIII), essa non succede nelle corrispondenti seconda, terza, e quarta delle (XXXIX), essendo i termini della seconda, e quarta risultati tutti positivi, e quelli della [illegible]a tutti negativi a riserva del primo 1.

II. Facciasi $a=-b$, $x=-z$. In tale ipotesi, osservo se nelle (XXXIII), (XXXVI) gli esponenti $m$, $h$ sono pari,

o dispari: se sono pari, risultando $(-b-z)^m = (b+z)^m$, $\frac{1}{(-b-z)^h} = \frac{1}{(b+z)^h}$, le due serie si conserveranno evidentemente le stesse, cangiate semplicemente le lettere $a$, $x$ nelle $b$, $z$. Che se $m$, $h$ sono dispari, poichè allora si ha $(-b-z)^m = -(b+z)^m$, $\frac{1}{(-b-z)^h} = -\frac{1}{(b+z)^h}$, le due serie cambieranno di segno in tutti i termini. Rapporto poi alle (XXXVII), (XXXVIII) conviene osservare se sono pari, o dispari i due numeri, rapporto alla prima $h$, $k$, e rapporto alla seconda $i$, $k$. Se posti $h$, $i$ dispari, sia $k$ pari, avremo $(-b-z)^{\frac{h}{k}} = \sqrt[k]{(-b-z)^h}$, $(-b-z)^{-\frac{i}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{(-b-z)^i}}$ quantità immaginarie: che se $k$ sia dispari; allora amendue le $(-b-z)^{\frac{h}{k}}$, $(-b-z)^{\frac{i}{k}}$ saranno reali, e le rispettive serie o conserveranno con le (XXXVII), (XXXVIII) lo stesso segno in tutti i termini, o in tutti i termini lo cambieranno, secondochè $h$, $i$ sono pari, o dispari. Se finalmente tanto $h$, $i$, come $k$ sono pari; allora dovendo aver riguardo al binomio $-b-z$ che viene dato negativo, ed a cui in $(-b-z)^{\frac{h}{k}}$ l'esponente $\frac{h}{k}$, ed in $(-b-z)^{-\frac{i}{k}}$ l'esponente $-\frac{i}{k}$ si riferiscono, converrà ridurre simili esponenti fratti alla loro più semplice espressione, e supposto quindi $\frac{h}{k}$, oppure $\frac{i}{k} = \frac{p}{q}$, in cui $p$, $q$ siano primi fra loro, le potenze date equivarran-

$\frac{p}{q}$ $\quad -\frac{p}{q}$

no alle $(-b-z)$ , $(-b-z)$ ; ma per essere questi $p$, $q$ numeri primi fra loro, uno per lo meno di essi deve essere dispari. Ciò dunque essendo, quest'ultimo caso si ridurrà infine ad uno dei due precedenti, al primo se $q$ è pari, al secondo, se $q$ è dispari.

III. Ponghiamo $x$ nella (XXXIII), e $z$ nella prima delle (XXXIX) $= t\sqrt{-1}$. Avendosi pel (*n.°* 197)

$$(t\sqrt{-1})^2 = -t^2,\ (t\sqrt{-1})^3 = -t^3\sqrt{-1},\ (t\sqrt{-1})^4 = t^4,$$
$$(t\sqrt{-1})^5 = t^5\sqrt{-1},\ \text{ec.}$$

dalle indicate due serie otterremo

$$(a+t\sqrt{-1})^m = a^m + ma^{m-1}t\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}t^2 -$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}t^3\sqrt{-1} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}t^4$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}a^{m-5}t^5\sqrt{-1} - \text{ec.}$$

$$(a-t\sqrt{-1})^m = a^m - ma^{m-1}t\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}t^2 +$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}t^3\sqrt{-1} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}t^4$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}a^{m-5}t^5\sqrt{-1} + \text{ec.}$$

e per conseguenza raccogliendo separatamente tutti i termini reali, e tutti gli immaginarj, sarà

$$(a+t\sqrt{-1})^m = \left(a^m - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\times\right.$$
$$\text{(XL)}\quad \left.a^{m-4}t^4 - \text{ec.}\right) + \left(ma^{m-1}t - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}t^3 +\right.$$
$$\left.\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}a^{m-5}t^5 - \text{ec.}\right)\sqrt{-1}$$

$(a-t\sqrt{-1})^m$

$$(a-t\sqrt{-1})^m=\left(a^m-\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}t^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\times\right.$$

$$\left.a^{m-4}t^4-\text{ec.}\right)-\left(ma^{m-1}t-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}t^3+\right.$$

$$\left.\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}a^{m-5}t^5-\text{ec.}\right)\sqrt{-1}\,.$$

IV. Cambiata nelle serie (XXXIX) la $z$ nella $x$, somminsi esse rispettivamente con le (XXXIII), (XXXVI), (XXXVII), ne verrà

$$(a+x)^m+(a-x)^m=2\left(a^m+\frac{m(m-1)a^{m-2}x^2}{1.2}+\right.$$

$$\left.\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)a^{m-4}x^4}{1.2.3.4}+\text{ec.}\right)$$

$$\frac{1}{(a+x)^h}+\frac{1}{(a-x)^h}=\frac{2}{a^h}\left(1+\frac{h(h+1)x^2}{1.2a^2}+\frac{h(h+1)(h+2)(h+3)x^4}{1.2.3.4a^4}\right.$$

$$\left.+\text{ec.}\right)$$

$$\sqrt[k]{(a+x)^h}+\sqrt[k]{(a-x)^h}=2\sqrt[k]{a^h}\left(1-\frac{h(k-h)x^2}{k.2ka^2}-\right.$$

$$\left.\frac{h(k-h)(2k-h)(3k-h)x^4}{k.2k.3k.4ka^4}-\text{ec.}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt[k]{(a+x)^i}}+\frac{1}{\sqrt[k]{(a-x)^i}}=\frac{2}{\sqrt[k]{a^i}}\left(1+\frac{i(k+i)x^2}{k.2ka^2}+\frac{i(k+i)(2k+i)(3k+i)x^4}{k.2k.3k.4ka^4}+\text{ec.}\right)$$

e sommando insieme le (XL), otterremo

$$(a+t\sqrt{-1})^m+(a-t\sqrt{-1})^m=2\left(a^m-\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}t^2+\right.$$

$$\left.\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}t^4-\text{ec.}\right).$$

Che se le indicate serie sottraggansi fra di loro, risulterà

$$(a+x)^m-(a-x)^m=2\left(ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)(m-2)a^{m-3}x^3}{1.2.3}+\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)a^{m-5}x^5}{1.2.3.4.5}+\text{ec.}\right)$$

$$\frac{1}{(a+x)^h}-\frac{1}{(a-x)^h}=-\frac{2}{a^h}\left(\frac{hx}{a}+\frac{h(h+1)(h+2)x^3}{1.2.3a^3}+\right.$$

$$\left.\frac{h(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)x^5}{1.2.3.4.5a^5}+\text{ec.}\right)$$

$$\sqrt[k]{(a+x)^h}-\sqrt[k]{(a-x)^h}=2\sqrt[k]{a^h}\left(\frac{hx}{ka}+\frac{h(k-h)(2k-h)x^3}{k.2k.3ka^3}+\right.$$

$$\left.\frac{h(k-h)(2k-h)(3k-h)(4k-h)x^5}{k.2k.3k.4k.5ka^5}+\text{ec.}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt[k]{(a+x)^i}}-\frac{1}{\sqrt[k]{(a-x)^i}}=-\frac{2}{\sqrt[k]{a^i}}\left(\frac{ix}{ka}+\frac{i(k+i)(2k+i)x^3}{k.2k.3ka^3}+\right.$$

$$\left.\frac{i(k+i)(2k+i)(3k+i)(4k+i)x^5}{k.2k.3k.4k.5ka^5}+\text{ec.}\right)$$

$$(a+t\sqrt{-1})^m-(a-t\sqrt{-1})^m=2\left(ma^{m-1}t-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.}a^{m-3}t^3\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}a^{m-5}t^5+\text{ec.}\right)\sqrt{-1}\,.$$

V. L' andamento costante, con cui procedono tutte le serie finora determinate, fa sì, che potremo agevolmente protraerle quanto fa d' uopo, l' un termine deducendo dall'altro, giusta la regola stabilita dall' andamento medesimo. Allorchè $m$ è numero intero e positivo; quanto si è detto nel (II.$n.^{\circ}$204) ci somministra bensì un metodo facile, onde ottenere lo sviluppo della potenza $(a+x)^m$; ma se $a$, ed $m$ sono numeri determinati, potremo più agevolmente ancora ottenere lo sviluppo medesimo nella maniera seguente.

206. *Probl.* 33.° Esporre un metodo pratico, onde ottenere con facilità lo sviluppo della espressione, per esempio $3(x+2y)^5$.

*Sol.* Scritto in (A. XLI) il coefficiente 2 del ter-

mine $2p$, pongo alla sua destra il numero 3, che moltiplica $(x+2p)^5$, separandolo dal 2 con una lineetta verticale; quindi moltiplico il 3 per 2, e scrivo il prodotto 6 in linea orizzontale e alla destra del 3: moltiplico questo 6 per lo stesso 2, e alla destra del 6 posto il prodotto 12, moltiplico il 12 pel solito 2, e colloco il prodotto 24 alla sua destra. Proseguo così ad operare, moltiplicando successivamente per 2, finchè nella prima riga ottengonsi tanti risultati 6, 12, 24, 48, 96, quante unità si contengono nell'esponente del binomio dato, nel nostro caso cinque. Ciò fatto, scrivo di nuovo il 3 in una seconda linea, e nella seconda colonna, cioè sotto del 6, lo moltiplico nuovamente per 2, e sommato il prodotto, che ne viene, 6 col numero, che gli è di sopra, cioè con l'altro 6, pongo alla destra nella istessa linea il risultato che ne nasce, cioè il 12. Moltiplico questo 12 per 2, ne sommo il prodotto 24 col sovrapposto 12, e colloco nella colonna quarta il risultato 36. Moltiplicato il 36 per 2, e sommatone il prodotto 72 col sovrapposto 24, scrivo il risultato 96 nella quinta colonna, e pongo finalmente nell'ultima il *n.°* 240 nato dal sommare col 48 il prodotto del 96 per 2. In seguito posto il solito 3 in una terza linea e nella terza colonna sotto del 12 opero su di esso come precedentemente, lo moltiplico cioè per 2, e sommato il prodotto 6 col sovrapposto 12, scrivo nella quarta colonna sotto del 36 il 18, che ne viene; colloco sotto del 96 il risultato 72, che ottienesi dalla unione del sovrapposto 36 con il prodotto del 18 per 2, e moltiplicato infine il 72 per 2, pongo la somma $72.2 + 96 = 240$ nella colonna ultima. Replicato poscia il 3 in una quarta riga, e nella quarta colonna, seguito ad operare nella solita maniera, e scrivo nella quinta, ed ultima colonna i successivi risultati 24, 120, che ne nascono.

In una quinta linea e nella quinta colonna pongo il 3, e ne determino coll' accennato metodo nella colonna ultima il 30; e in questa colonna ultima finalmente scrivo in una stessa riga il solito 3.

Ciò fatto, prendo i numeri dell' ultima colonna, e appresso al 3 scritta la potenza $x^5$, appresso al 30 il prodotto $px^4$, appresso il 120 l' altro $p^2x^3$, e così di seguito, coll' aumentare sempre di 1 gli esponenti della $p$, e diminuire di 1 quelli della $x$, avremo pel richiesto sviluppo

$$3(x+2p)^5=3x^5+30px^4+120p^2x^3+240p^3x^2+240p^4x+96p^5.$$

Se le espressioni date siano le $(x+7)^4$, $(x-\frac{5}{9})^6$, opererò in (B, C XLI) nella maniera medesima, avvertendo, che in questi due casi, avendosi $(x+7)^4=1\times(x+7)^4$, $(x-\frac{5}{9})^6=1\times(x-\frac{5}{9})^6$, deve porsi 1, laddove in (A.XLI) si pose il 3, e che nel primo di essi si ha $p=1$, e nel secondo $p=-\frac{1}{9}$. Dunque sarà

$$(x+7)^4=x^4+28x^3+294x^2+1372x+2401,$$

$$(x-\frac{5}{9})^6=x^6-\frac{30}{9}x^5+\frac{375}{9^2}x^4-\frac{2500}{9^3}x^3+\frac{8375}{9^4}x^2-\frac{18750}{9^5}x+\frac{15625}{9^6}.$$

Vedremo in luogo più opportuno la ragione di questa operazione

(XLI)

| A | B |
|---|---|
| 2\|3, 6, 12, 24, 48, 96 | 7\|1, 7, 49, 343, 2401 |
| 3, 12, 36, 96, 240 | 1, 14, 147, 1372 |
| 3, 18, 72, 240 | 1, 21, 294 |
| 3, 24, 120 | 1, 28 |
| 3, 30 | 1 |
| 3 | |

C

5|1, 5, 25, 125, 625, 3125, 15625
1, 10, 75, 500, 3125, 18750
1, 15, 150, 1250, 8375
1, 20, 250, 2500
1, 25, 375
1, 30
1.

207. *Scol.* 3.° La formola Newtoniana serve eziandio per elevare a potenza un Polinomio qualunque. Volendosi difatti innalzare alla podestà $m$ il trinomio $a+b+z$, faccio $b+z=x$, e invece della $x$ colloco nella (XXXIII), o per iscrivere più brevemente nella (XXXIV), questo valore, ne verrà $(a+b+z)^m = a^m + Ba^{m-1}(b+z) + Ca^{m-2}(b+z)^2 + Da^{m-3}(b+z)^3 +$ ec.; trovo col mezzo della Formola stessa le potenze 1.ª, 2.ª, 3.ª, ec. del binomio $b+z$; le sostituisco, e ci risulterà il cercato sviluppo di $(a+b+z)^m$. Se la quantità da elevarsi alla potenza *mesima* fosse un quadrinomio; per esempio il quadrinomio $a+b+c+z$, posta nella (XXXIV) in vece della $x$ l' espressione $b+c+z$, ed ottenuto così

$$(a+b+c+z)^m = a^m + Ba^{m-1}(b+c+z) + Ca^{m-2}(b+c+z)^2 + Da^{m-3}(b+c+z)^3 + \text{ec.}$$

col metodo ora indicato troverei le potenze 1.ª, 2.ª, 3.ª, ec. del trinomio $b+c+z$, le sostituirei, e ne verrebbe così la richiesta potenza del quadrinomio dato. È chiaro che lo stesso si dice, e si pratica se la quantità data sia composta di cinque, di sei, ec. termini. Siccome però questo metodo suol essere assai lungo, e brigoso, non sarà inconveniente lo stabilire una regola generale, e semplice, per cui potremo sempre innalzare ad una qualsivoglia potenza un dato polinomio qualunque.

208. *Probl.* 34.° Supposta la potenza

(XLII) $(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{ec.}+ux^h)^m = \text{L}+\text{M}x+\text{N}x^2+\text{P}x^3+\text{Q}x^4+\text{ec.}$,

in cui $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, ec. siano tante quantità determinate, la $x$ indeterminata, e l'esponente $m$ sia intero o fratto, positivo o negativo, cercasi il valore dei coefficienti L, M, N, P, Q, ec.

*Sol.* Facciasi $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{ec.}=y$, ed aumentata la $x$ di una quantità indeterminata $z$, supponghiamo, che perciò la $y$ divenga $y+\text{Z}$, onde si abbia

$$y+\text{Z}=a+b(x+z)+c(x+z)^2+d(x+z)^3+e(x+z)^4+\text{ec.}=$$
$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{ec.}$$
$$+(b+2cx+3dx^2+4ex^3+\text{ec.})z+\text{ec.}$$

(III. $n.$ 203), e però $\text{Z}=(b+2cx+3dx^2+4ex^3+\text{ec.})z+\text{ec.}$ Sarà ancora

$$(y+\text{Z})^m=\text{L}+\text{M}(x+z)+\text{N}(x+z)^2+\text{P}(x+z)^3+\text{Q}(x+z)^4+\text{ec.}$$
$$=\text{L}+\text{M}x+\text{N}x^2+\text{P}x^3+\text{Q}x^4+\text{ec.}+(\text{M}+2\text{N}x+3\text{P}x^2+4\text{Q}x^3+\text{ec.})z+\text{ec.},$$

e quindi, sviluppata la $(y+\text{Z})^m$, avremo

$$my^{m-1}\text{Z}+\text{ec.}=(\text{M}+2\text{N}x+3\text{P}x^2+4\text{Q}x^3+\text{ec.})z+\text{ec.};$$

e posto invece della Z il suo valore, risulterà finalmente pel (I. $n.^o$ 202)

$$my^{m-1}(b+2cx+3dx^2+4ex^3+\text{ec.})z=(\text{M}+2\text{N}x+3\text{P}x^2+4\text{Q}x^3+\text{ec.})z.$$

Divisa ora quest' ultima Equazione per $z$, e moltiplicata per $y$, pongansi invece delle $y$, $y^m$ i valori corrispondenti; otterremo

$$m(\text{L}+\text{M}x+\text{N}x^2+\text{P}x^3+\text{Q}x^4+\text{ec.})(b+2cx+3dx^2+4ex^3+5fx^4+\text{ec.})=(\text{M}+2\text{N}x+3\text{P}x^2+4\text{Q}x^3+5\text{R}x^4+\text{ec.})(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{ec.})$$

ed effettuata la moltiplicazione, sarà

$$m\text{bL}+m(b\text{M}+2c\text{L})x+m(b\text{N}+2c\text{M}+3d\text{L})x^2+m(b\text{P}+2c\text{N}+3d\text{M}+4e\text{L})x^3+m(b\text{Q}+2c\text{P}+3d\text{N}+4e\text{M}+5f\text{L})x^4+\text{ec.}=a\text{M}+(2a\text{N}+b\text{M})x+(3a\text{P}+2b\text{N}+c\text{M})x^2+(4a\text{Q}+3b\text{P}+2c\text{N}+d\text{M})x^3+(5a\text{R}+4b\text{Q}+3c\text{P}+2d\text{N}+e\text{M})x^4+\text{ec.}$$

Dunque per la supposta indeterminazione della $x$,

e pel (I. *n.°* 202) avremo le Equazioni

$$aM = mbL\,,\quad 2aN + bM = m(bM + 2cL)\,,$$
$$3aP + 2bN + cM = m(bN + 2cM + 3dL)\,,$$
$$4aQ + 3bP + 2cN + dM = m(bP + 2cN + 3dM + 4eL)\,,$$
$$5aR + 4bQ + 3cP + 2dN + eM = m(bQ + 2cP + 3dN + 4eM + 5fL)\,,$$

ec.

dalle quali avendosi (XLIII)

$$aM = mbL\,,$$
$$2aN = (m-1)bM + 2mcL\,,$$
$$3aP = (m-2)bN + (2m-1)cM + 3mdL\,,$$
$$4aQ = (m-3)bP + (2m-2)cN + (3m-1)dM + 4meL\,,$$
$$5aR = (m-4)bQ + (2m-3)cP + (3m-2)dN + (4m-1)eM + 5mfL$$

ec.

ed avendosi $L = a^m$, come apparisce dal porre nell' Equazione (XLII) $x = 0$, potremo ottenere successivamente il valore cercato de' coefficienti M, N, P, Q, ec. e ci risulterà difatti

$$L = a^m\,,$$
$$M = ma^{m-1}b\,,$$
$$N = \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + ma^{m-1}c\,,$$
$$P = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3 + m(m-1)a^{m-2}bc + ma^{m-1}d\,,$$
$$Q = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}a^{m-4}b^4 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2}a^{m-3}b^2c$$
$$+ m(m-1)a^{m-2}bd + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}c^2 + ma^{m-1}e\,,$$
$$R = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}a^{m-5}b^5 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}$$
$$a^{m-4}b^3c + \frac{m(m-1)(m-2)}{2}a^{m-3}b^2d + \frac{m(m-1)(m-2)}{2}a^{m-3}bc^2$$
$$+ m(m-1)a^{m-2}be + m(m-1)a^{m-2}cd + ma^{m-1}f,$$

(XLIV)

ec.

209. *Scol.* 3.° I. Osservando l' andamento delle Equazioni (XLIII), vedesi, che chiamato $Vx^k$ il ter-

mine generale della serie, a cui si uguaglia il Polinomio supposto (XLII), chiamati $Ux^{k-1}$, $Tx^{k-2}$, $S.c^{k-3}$, ec. i termini che lo precedono, e chiamati $zx^k$, $vx^{k-1}$, $tx^{k-2}$, $sx^{k-3}$, ec. i termini corrispondenti del Polinomio, dovrà essere

$$kaV=(m-(k-1))bU+(2m-(k-2))cT+(3m-(k-3))dS+\text{ec.}$$
$$+((k-3)m-3)sP+((k-2)m-2)tN+((k-1)m-1)vM+kmzL.$$

Se i termini $zx^k$, $vx^{k-1}$, ec. manchino nel Polinomio dato, basterà nella Equazione ora truovata porre in corrispondenza $z=0$, $v=0$, ec.

II. Osservando poi le (XLIV), truovasi che si conserva in esse un andamento costante, per cui potremo tostamente determinare i coefficienti successivi L, M, N, ec., senza dovere sciogliere le Equazioni (XLIII); truovasi difatti che uno qualsivoglia di tali coefficienti, per esempio V si determina 1.°, col moltiplicare ciascuno dei termini, che formano il coefficiente che lo precede U, per l'esponente della $a$, diminuire l'esponente medesimo di un'unità, moltiplicare tutto per $b$, e dividere ciascuno dei termini per l'esponente, che in esso acquista la $b$: 2.° col moltiplicare nel coefficiente antiprecedente T ciascuno dei termini, che è mancante della $b$ per l'esponente della $a$, diminuire questo esponente di uno, moltiplicare per $c$, e dividere per l'esponente, che acquista la $c$: 3.° coll'eseguire in S le stesse moltiplicazioni per gli esponenti della $a$, e le stesse diminuzioni di un'unità su tutti i termini, che sono mancanti di amendue le $b$, $c$, moltiplicando per $d$, e dividendo rispettivamente per gli esponenti, che acquista essa $d$: 4.° col ripetere le moltiplicazioni e diminuzioni medesime degli esponenti della $a$ su tutti i termini precedenti ad S, i quali son privi di tutte e tre le $b$, $c$, $d$, moltiplicando poscia per $e$, e dividendo per gli esponenti della stessa $e$: 5.° col proseguire sempre simili operazioni finchè si giunga al

coefficiente primo della serie, cioè ad L, od all'ultimo del polinomio dato: 6.° e finalmente col sommare insieme tutti i risultati, che operando nella guisa indicata, sonosi ottenuti.

210. *Probl.* 35.° Esporre il metodo pratico, onde ottenere speditamente i valori dei coefficienti L, M, N, ec. nella (XLII).

*Sol.* In conseguenza di quanto si è detto nel (II.*n.°prec.*) scritta in (XLIV) in una prima riga l'Equazione $L=a^m$, moltiplico il termine $a^m$ per l'esponente $m$, diminuisco questo $m$ di 1, moltiplico per $b$, e pongo il risultato $ma^{m-1}b$, che ne viene, nella seconda linea $=M$. Moltiplico il termine $ma^{m-1}b$, a cui si uguaglia M, per l'esponente $m-1$ della $a$, diminuisco di 1 questo esponente, moltiplico per $b$, e giacchè $b$ acquista perciò l'esponente 2, divido per 2 il termine risultato. Poscia moltiplico per $m$ il termine $a^m=L$, scemo di 1 l'esponente, e moltiplico il risultato per $c$, pongo la somma $\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2+ma^{m-1}c$ in una terza riga $=N$. Moltiplico amendue i termini di N rispettivamente per gli esponenti $m-2$, $m-1$ della $a$, diminuisco gli esponenti stessi di 1, e moltiplicato per $b$, poichè il primo di questi termini viene a contenere $b^3$, ed il secondo $b$, divido quello per 3, e questo per 1. In seguito tralasciato il valore di M, giacchè in esso non avvi alcun termine mancante di $b$, mi porto al valore di L, e ridotto questo per la solita regola ad $ma^{m-1}$, lo moltiplico per $d$, ed in una quarta riga colloco uguale a P la somma $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\times a^{m-3}b^3+m(m-1)a^{m-2}bc+ma^{m-1}d$. Così proseguo sempre giusta il (II. *n.°prec.*) ad operare finchè truovansi delle lettere $a$ nei termini successivi, ed in tal guisa otterremo, come è stato richiesto, i valori di tutti i coef-

ficienti L, M, N, ec. I seguenti due esempj rischiareranno maggiormente la cosa.

Vogliasi la terza potenza del quintinomio $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$, e la potenza quinta del quadrinomio $a+bx+cx^2+dx^3$. Posto nel primo di questi due casi $(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)^3 = L+Mx+$ ec. otterrò

$L=a^3$
$M=3a^2b$
$N=3ab^2+3a^2c$
$P=b^3+6abc+3a^2d$
(XLV) $Q=3b^2c+6abd+3ac^2+3a^2e$
$R=3b^2d+3bc^2+6abe+6acd$
$S=3b^2e+6bcd+c^3+6ace+3ad^2$
$T=6bce+3bd^2+3c^2d+6ade$
$V=6bde+3c^2e+3cd^2+3ae^2$
$U=3be^2+6cde+d^3$
$X=3ce^2+3d^2e$
$Y=3de^2$
$Z=e^3$

e fatto nel secondo caso $L+Mx+$ec. $=(a+bx+cx^2+dx^3)^5$, ci verrà

$L=a^5$
$M=5a^4b$
$N=10a^3b^2+5a^4c$
$P=10a^2b^3+20a^3bc+5a^4d$
(XLVI) $Q=5ab^4+30a^2b^2c+20a^3bd+10a^3c^2$
$R=b^5+20ab^3c+30a^2b^2d+30a^2bc^2+20a^3cd$
$S=5b^4c+20ab^3d+30ab^2c^2+60a^2cdb+10a^2c^3+10a^3d^2$
$T=5b^4d+10b^3c^2+60ab^2cd+20abc^3+30a^2bd^2+30a^2c^2d$
$V=20b^3cd+10b^2c^3+30ab^2d^2+60abc^2d+5ac^4+30a^2cd^2$
$U=10b^3d^2+30b^2c^2d+5bc^4+60abcd^2+20ac^3d+10a^2d^3$
$X=30b^2cd^2+20bc^3d+20abd^3+c^5+30ac^2d^2$
$Y=10b^2d^3+30bc^2d^2+5c^4d+20acd^3$
$Z=20bcd^3+10c^3d^2+5ad^4$
$A=5bd^4+10c^2d^3$
$B=5cd^4$
$C=d^5$ .

211. *Scol.* 4.° I. Supposti nel polinomio (XLII) amendue i numeri $m$, $h$, interi e positivi, è chiaro, che la serie $L+Mx+Nx^2+$ ec. giungerà fino al termine che contiene $x^{mh}$, e però che $mh+1$ sarà il numero totale de' coefficienti L, M, N, ec. Così nel primo dei precedenti esempi avendosi $h=4$, $m=3$, il numero di tali coefficienti si è $4.3+1=13$, e nell' esempio secondo poichè $h=3$, $m=5$, il numero istesso si è $5.3+1=16$. Quando poi tanto $m$, come $h$ sono dispari, essendo $mh$ dispari, l' accennato numero $mh+1$ de' coefficienti sarà pari, e sarà questo dispari, quando, o entrambi gli $m$, $h$, od uno di essi sia pari. Ciò vedesi attualmente negli esempj indicati.

II. Chiamati nella (XLII) $ux^h$, $vx^{h-1}$, $sx^{h-2}$, ec. gli ultimi termini del Polinomio, e $Zx^{mh}$, $Yx^{mh-1}$, $Xx^{mh-2}$, ec. gli ultimi termini della serie corrispondente, pongasi $x=\frac{1}{t}$, la (XLII) diverrà perciò

$$\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\text{ec.}+\frac{s}{t^{h-2}}+\frac{v}{t^{h-1}}+\frac{u}{t^h}\right)^m=L+\frac{M}{t}+\frac{N}{t^2}+\text{ec.}+\frac{X}{t^{mh-2}}+\frac{Y}{t^{mh-1}}+\frac{Z}{t^{mh}}$$

e moltiplicato tutto per $t^{mh}$, otterremo

$$(at^h+bt^{h-1}+ct^{h-2}+\text{ec.}+st^2+vt+u)^m=Lt^{mh}+Mt^{mh-1}+Nt^{mh-2}+\text{ec.}+Xt^2+Yt+Z,$$

e quindi

$$(u+vt+st^2+\text{ec.}+ct^{h-2}+bt^{h-1}+at^h)^m=Z+Yt+Xt^2+\text{ec.}+Nt^{mh-2}+Mt^{mh-1}+Lt^{mh}.$$

Ora cercando, come nei (*n.i* 208, 209, 210) dipendentemente da quest' ultima Equazione i valori delle quantità Z, Y, X, ec., è chiaro pel *cit.*° (*n.*° 208); che come colà si trovarono i valori (XLIV) delle L, M, N, ec. espressi con i coefficienti $a$, $b$, $c$, ec., così quivi si otterranno i valori delle Z, Y, X, ec.

espressi pei coefficienti $u$, $v$, $s$, ec. onde essendo

$$Z=u^m$$

$$Y=mu^{m-1}v$$

$$X=\frac{m(m-1)}{2}u^{m-2}v^2+mu^{m-1}s$$

ec.

il valore della Z altro non sarà che quello della L cangiato $a$ in $u$; il valore della Y sarà lo stesso che quello della M, cangiate le $a$, $b$ rispettivamente nelle $u$, $v$; il valore della X lo stesso che quello della N, cambiate le $a$, $b$, $c$ corrispondentemente nelle $u$, $v$, $s$, e così di seguito. Ma i coefficienti Z, Y, X, ec., $u$, $v$, $s$, ec. altro infine non sono che gli ultimi coefficienti; quelli della serie, e questi del polinomio supposto in (XLII) (*n.°* 208), e gli altri L, M, N, ec. $a$, $b$, $c$ altro non sono in corrispondenza che i primi. Dunque truovati mediante il (*n.°* 210) i valori dei primi coefficienti L, M, N, ec. in numero di $\frac{mh+1}{2}$ quando tanto $m$, come $h$ sono dispari, e in numero di $\frac{mh}{2}$ in caso diverso (*prec.* I.); otterremo gli ultimi Z, Y, X, ec. in numero di $\frac{mh+1}{2}$, ovvero $\frac{mh}{2}$, cangiando semplicemente le lettere $a$, $b$, $c$, ec. rispettivamente nelle $u$, $v$, $s$, ec. Perciò nel secondo degli esempj del (*n.° prec.*) avendosi nel quadrinomio $a+bx+cx^2+dx^3$ dato, $a$ coefficiente primo, $d$ ultimo, $b$ coefficiente secondo, $c$ penultimo, ottenuti in (XLVI) i valori dei primi $\frac{5.3+1}{2}=\frac{16}{2}=3$ L, M, ec. S, T coefficienti, cangiando semplicemente $a$ in $d$, e $d$ in $a$; $b$ in $c$, e $c$ in $b$, da T ricaveremo il valore di V, da S quello di U, e così in progresso, finchè da L si avrà il valore del coefficiente ultimo

C. Nell'esempio primo poi giacchè nel dato quintinomio $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$, $a$, ed $e$ sono i coefficienti primo, ed ultimo, $b$, e $d$ sono il secondo, ed il penultimo, e $c$ essendo di mezzo non ne ha alcuno corrispondente, avuti i primi $\frac{3.4}{2} = 6$ coefficienti L, M, ec. Q, R, col cangiare $a$ in $e$, ed $e$ in $a$; $b$ in $d$, e $d$ in $b$, e col lasciare $c$ come si truova, da R otterremo T, da Q si avrà V, e così di seguito, avvertendo, che in questo caso, poichè il numero totale $3.4+1=13$ de' coefficienti L, M, ec. Z è dispari, il valore del coefficiente di mezzo, cioè di S converrà ricavarlo colla regola del (*n.°* 210) dal precedente R. È facile poi a vedersi, che sotto quel cambiamento di lettere, per cui dai primi coefficienti ricavansi gli ultimi, il coefficiente di mezzo non cangiasi punto di valore; e quindi che S in (XLV) per la permutazione di $a$ in $e$ ec. rimane lo stesso.

III. Se nel Polinomio dato manchi qualcheduna delle successive potenze della $x$, conviene porre le potenze mancanti tra le parentesi, apponendo loro per coefficiente lo zero. Mentre vogliasi elevare alla potenza per esempio terza il polinomio $a+dx^3+fx^5$, lo ridurrò prima alla forma $a+0\times x+0\times x^2+dx^3+0\times x^4+fx^5$, e poscia opererò come precedentemente su quest'ultima espressione.

IV. Se il Polinomio da innalzarsi alla potenza $m$ sia $a+b+c+d+e+$ ec.; poichè questo altro non è che il considerato finora, mentre si faccia $x=1$, ne segue che otterrò la potenza cercata, operando come di sopra.

V. L'esponente $m$ nella (XLII) se invece d'essere intero, e positivo, sia negativo, o fratto; otterremo pei (*n.* 205, 208, 209) la potenza *mesima* del Polinomio, operando nella maniera medesima.

In questi ultimi due casi però l' operazione non avrebbe fine .

212. *Probl.* 36.° Cercasi la forma generale di ciascheduno dei termini , che compongono il Polinomio (XLII) già sviluppato , ossia si cerca il *termine generale* del Polinomio medesimo .

*Sol.* Sia per maggior chiarezza $(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)^m$ il Polinomio dato. Supposto $bx+cx^2+dx^3+ex^4=z$ onde $(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)^m=(a+z)^m$, l' espressione

$$Qa^{m-n}z^{n}$$

sarà il termine generale della potenza $(a+z)^m_n$ (II. *n.*° 204). Facciasi $cx^2+dx^3+ex^4=z'$, onde $z=(bx+z')^n$, ed $(a+z)^m=(a+bx+z')^m$. Poichè pel citato (II. *n.*° 204) $Q'b^{n-p}x^{n-p}z'^{p}$ esprime il termine generale della $(bx+z')^n$, e poichè abbiamo $Qa^{m-n}z^{n}=Qa^{m-n}(bx+z')^n$, il termine generale della $(a+bx+z')^m$

sarà $$QQ'a^{m-n}b^{n-p}x^{n-p}z'^{p}.$$

Si ponga $dx^3+ex^4=z''$, e quindi $z'^{p}=(cx^2+z'')^p$, $(a+bx+z')^m=(a+bx+cx^2+z'')^m$. Il termine generale della $(cx^2+z'')^p$ esprimendosi da $Q''c^{p-q}x^{2p-2q}z''^{q}$, ed essendo $QQ'a^{m-n}b^{n-p}x^{n-p}z'^{p}=QQ'a^{m-n}b^{n-p}x^{n-p}(cx^2+z'')^p$ il termine generale della $(a+bx+cx^2+z'')^m$

sarà $$QQ'Q''a^{m-n}b^{n-p}x^{n+p-2q}z''^{q}c^{\cdots}$$

Fatto $ex^4=z'''$, e però $z''^{q}=(dx^3+z''')^q$, $(a+bx+cx^2+z'')^m=(a+bx+cx^2+dx^3+z''')^m$ ; dalla espressione $Q'''d^{q-r}x^{3q-3r}z'''^{r}$ venendo rappresentato il termine

generale della potenza $(dx^3+z''')^q$, sarà

$$QQ'Q''Q'''a^{m-n}\,b^{n-p}\,c^{p-q}\,d^{q-r}\,x^{n+p+q-3r}\,z'''^r$$

il termine generale della $(a+bx+cx^2+dx^3+z''')^m$; e collocato in vece della $z'''$ il suo valore $ex^4$, si otterrà finalmente

$$QQ'Q''Q'''a^{m-n}\,b^{n-p}\,c^{p-q}\,d^{q-r}\,e^r\,x^{n+p+q+r} \qquad \text{(XLVII)}$$

pel termine generale della $(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)^m$.

Ciò posto

1.° Sia $m$ numero intero, e positivo. In questa ipotesi si ponga

$1.2.3\ldots.m=\mathrm{A}$, $1.2.3\ldots.n=\mathrm{A}'$, $1.2.3\ldots.p=\mathrm{A}''$, $1.2.3\ldots.q=\mathrm{A}'''$, $1.2.3\ldots.r=\mathrm{A}''''$; pel (III. n.° 204) otterremo

$$Q=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{\mathrm{A}'},\quad Q'=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{\mathrm{A}''}$$

$$Q''=\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{\mathrm{A}'''},\quad Q'''=\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-r+1)}{\mathrm{A}''''}.$$

Ora essendo $m$ numero intero, e positivo dal (IV. n.° 204) è facile a vedersi dover essere $m$ non $<n$, e deve essere $n$ non $<1$ (n.° 204). Dunque risultando $m-n+1$ un numero intero e positivo non $>m$, e non $<1$, si uguaglierà sempre ad uno dei numeri 1, 2, 3, ec., e quindi scrivendo il prodotto $1.2.3\ldots.m$ al rovescio avremo

$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\ldots.3.2.1=\mathrm{A}$,

e per conseguenza essendo $m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)=\frac{\mathrm{A}}{1.2.3\ldots(m-n)}$ sarà $Q=\frac{\mathrm{A}}{1.2.3\ldots(m-n)\mathrm{A}'}$. Nella stessa maniera si ritrova $Q'=\frac{\mathrm{A}'}{1.2.3\ldots(n-p)\mathrm{A}''}$, $Q''=\frac{\mathrm{A}''}{1.2.3\ldots(p-q)\mathrm{A}'''}$, $Q'''=\frac{\mathrm{A}'''}{1.2.3\ldots(q-r)\mathrm{A}''''}$. Dunque risulterà

$$QQ'Q''Q'''=\frac{\mathrm{A}}{1.2.3\ldots(m-n).1.2.3\ldots(n-p).1.2.3\ldots(p-q).1.2.3.(q-r)\mathrm{A}''''}$$

Facciasi $m-n=g$, $n-p=h$, $p-q=i$, $q-r=k$, $r=l$. Da queste Equazioni avendosi $n=m-g$, $p=n-h$, $q=p-i$, $r=q-k=l$, con le successive sostituzioni otterremo $n=m-g$, $p=m-g-h$, $q=m-g-h-i$, $r=m-g-h-i-k$, e per conseguenza $n+p+q+r=4m-4g-3h-2i-k$. Dunque sostituiti questi valori nel termine (XLVII), e collocati invece delle A, A'''' i loro valori, esso diverrà

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m}{1.2.3...g.1.2.3....h.1.2.3...i.1.2.3...k.1.2.3...l}\ g\ h\ i\ k\ l\ 4m-(4g+3h+2i+k)\ a\ b\ c\ d\ e\ x$$

e questo sarà il termine generale della potenza *mesima* del Polinomio dato, ove si avverta, che nell' esponente della $x$ la lettera $m$, e quindi la $g$ deggiono avere un coefficiente, il quale uguagli il numero dei fattori, $a$, $b$, $c$, $d$, ec., che entrano nel termine, diminuito di un' unità.

Sia per esempio $g=3$, $h=1$, $i=2$, entrando nel termine i soli tre fattori $a$, $b$, $c$. Dal precedente termine generale vedremo risultarci in questo caso particolare

$$\frac{1\ 2.3.\ldots\ldots m}{1.2.3.1.2.}\ 3\ 2\ 2m-7\ a\ bc\ x$$

2.° Non sia l'esponente $m$ intero, e positivo. In questa ipotesi quantunque non sia intero e positivo $m$ pure risultando interi, e positivi i numeri $n$, $p$, $q$, ec. (*n.°* 207), avremo, come precedentemente, $n$ non $< p$, $p$ non $< q$, ec., e quindi per Q', Q'' ec. gli stessi precedenti valori; ma $m$ potendo risultare $< n$, dovrà per Q ritenersi il valore (XXXV), e quindi ritenuto $n-p=i$, $q-r=k$, $r=l$, il richiesto termine generale sarà

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,a^{m-n}}{1.2.3.\,.h.1.2.3...i.1.2\,3...k.1.2.3...l}\ h\ i\ k\ l\ 3n-(3h+2i+k)\ b\ c\ d\ e\ x$$

Volendosi $m$ intero, e negativo; posto $m=-t$, pel (V. *n.°* 204) esso termine diverrà

$$\pm\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)\ldots(t+n-1)}{1.2.3...h.1.2.3...k.1.2.3...l\,a^{t+n}}\ h\ i\ k\ l\ 3n-(3h+2i+k)\ b\ c\ d\ e\ x$$

e vo-

e volendosi $m$ positivo, e fratto, posto $m = \frac{s}{t}$, avremo pel termine cercato

$$\frac{s(s-t)(s-2t)(s-3t)\ldots(s-(n-1)t)\sqrt[t]{a^s}}{1.2.3..h.1.2.3...i.1.2.3...k.1.2.3...t.t^n a^n}\ h\ i\ k\ l\ 3n-(3h+2i+k)\ b\ c\ d\ e\ x$$

(VI. $n.°$ 204).

3.° Se il Polinomio dato sia d' un numero di termini diverso da quello del supposto; è chiaro che il discorso è sempre il medesimo, e quindi che il termine generale della sua potenza *mesima* è sempre della stessa forma.

4.° Il termine generale della podestà $(a+b+c+d+e+\text{ec.})^m$ per le formole precedenti sarà evidentemente

$$\frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (m-n+1)}{1.2.3...h.1.2.3....i.1.2.3...k.1.2.3.l...}\ g\ h\ i\ k\ l\ a\ b\ c\ d\ e\ \ldots,$$ oppure

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (m-n+1)}{1.2.3...h.1.2.3...i.1.2.3...k.1.2.3....l....}\ m-n\ h\ i\ k\ l\ a\ b\ c\ d\ e\ \ldots$$

213. *Scol.* 5.° Suppongasi nel Polinomio (XLII) $x=a=b=c=d=\text{ec.}=u=1$. Esso diverrà perciò $(h+1)^m$, poichè contenendo $h+1$ termini viene in questa ipotesi a contenere la unità replicata $h+1$ volte; ma nella supposizione medesima le Equazioni (XLIV) divengono $L=1$, $M=m$, $N=\frac{m(m-1)}{2}+m$, ec., cioè non rimangono in esse, che i soli coefficienti numerici. Dunque risultando $(h+1)^m=1+m+\frac{m(m-1)}{2}+m+\text{ec.}$, ne segue che la somma dei coefficienti numerici nella potenza *mesima* sviluppata di un polinomio avente $h+1$ termini tutti positivi uguaglia la potenza *mesima* del numero $h+1$.

Se $h=1$, onde il Polinomio dato sia un binomio; risultando in corrispondenza $h+1=1+1=2$, si avrà la somma dei coefficienti numerici nella potenza *mesima* di un binomio $=2^m$. Ciò ancora apparisce dalla (XXIII), ponendo ivi $x=a=1$.

Se il Polinomio dato sia un trinomio, oppure un quadrinomio, od un quintinomio, ec. divenendo $h+1$ in corrispondenza $=3, 4, 5$, ec. ne segue, che la somma de' coefficienti numerici della potenza *mesima* di un trinomio, di un quadrinomio, di un quintinomio, ec. mentre abbia tutti i suoi termini positivi, sarà corrispondentemente $=3^m, 4^m, 5^m$, ec.

Facciasi la stessa supposizione di $x=a=1$ nella prima delle Equazioni (XXXIX); ottenendosi quindi $(1-1)^m=1-m+\frac{m(m-1)}{2}-$ ec., ed essendo, allorchè $m$ è positivo $(1-1)^m=0$, e quando $m$ è negativo, essendo $(1-1)^m=\frac{1}{0}=$ infinito (I. *n.*° 98); ne viene che la somma dei coefficienti numerici nella potenza *mesima* del binomio $(a-z)^m$ uguaglierà lo zero, quando $m>0$, e quando $m<0$ uguaglierà l'infinito.

214. *Teor.* 1.° Il terzo coefficiente $\frac{m(m-1)}{2}$ della Formola Newtoniana (XXXIII) uguaglia la somma di tutti gli ambi, cioè delle combinazioni tutte a due a due, che possonsi fare con $m$ quantità.

*Dim.* Supposte $a, b, c, d, e$, ec. le $m$ quantità che devono insieme combinarsi. Nella formazione degli ambi la prima lettera $a$ deve combinarsi con ciascuna delle altre $b, c, d, e$, ec.; dunque verrà essa a ripetersi le volte $m-1$, perchè di numero $m-1$ sono appunto le lettere $b, c, d, e$, ec. La seconda lettera $b$ essendo combinata con la prima $a$, e dovendosi unire con le altre $c, d, e$, ec., che sono di numero $m-2$, verrà essa pure ad essere replicata le volte $m-1$; nello stesso modo la terza quantità $c$ essendo già combinata con le prime due $a, b$, e dovendosi congiungere alle altre $d, e$, ec. le quali sono in numero di $m-3$, verrà ancor essa ripetuta $m-1$ volte. Proseguendo lo stesso discorso rap-

porto alle altre lettere apparisce che nella somma di tutte le combinazioni a due a due ciascuna lettera, e quindi tutte vengono replicate le volte $m-1$; ma le supposte quantità $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, ec. son di numero $m$; dunque in tutti gli ambi tra uguali, e disuguali entreranno $m(m-1)$ lettere: ora ciascun ambo essendo formato di due lettere, è chiaro, che il numero degli ambi uguaglia la metà del numero delle lettere, che in essi entrano. Dunque il numero delle combinazioni a due a due che far si possono con $m$ quantità sarà $=\frac{m(m-1)}{2}=$ difatti al coefficiente del terzo termine della Formola Newtoniana (XXXIII); *c.d.d.*

215. *Teor.* 2.° Il numero dei terni, ossia delle combinazioni a tre a tre, che si possono fare con $m$ quantità uguaglia il coefficiente quarto $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$ della Formola Neutoniana.

*Dim.* Essendo le precedenti $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, ec. le $m$ quantità date; poichè nella formazione dei terni si devono combinare le date lettere fra loro a tre a tre in tutte le maniere possibili, è chiaro che otterrò tutte queste combinazioni, unendo ciascuna quantità con tutti gli ambi delle altre. Ora le altre lettere son di numero $m-1$, e però gli ambi, che si possono formar con queste sono di numero $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ (*n.° prec.*); dunque nella formazione de' terni ciascuna lettera, e quindi tutte verranno a replicarsi le volte $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; ma queste lettere son di numero $m$; dunque nel totale aggregato delle supposte combinazioni a tre a tre entreranno $\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$ lettere; e quindi il numero totale de' terni, dovendo essere la terza parte di quello delle lettere, che lo formano, poichè in [illegible]uno di loro entrano tre let-

tere, sarà questo numero $= \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} =$ al quarto coefficiente della Formola (XXXIII).

216. *Scol.* 6.° Considerando nella maniera medesima le combinazioni a quattro a quattro, a cinque a cinque ec., troveremo, che il quinto coefficiente della Formola Neutoniana uguaglia il numero delle quaderne accennate, il sesto ne uguaglia le cinquine, e così di seguito. Rapporto difatti alle quaderne, osservo che in esse ciascuna delle $m$ lettere viene ripetuta tante volte quanti sono i terni, che possonsi formare con le altre $m-1$ lettere, cioè le volte $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}$ ( *n.° prec.* ). Dunque il numero totale delle lettere, che entrano nelle quaderne supposte, sarà $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}$; ma il numero delle quaderne è evidentemente la quarta parte di quello delle lettere; dunque sarà esso numero $= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} =$ perciò al coefficiente quinto del binomio Neutoniano. Un discorso perfettamente simile ha luogo riguardo alle cinquine, alle sestine, ec.

In generale il coefficiente (XXXV) indica il numero delle combinazioni che si possono fare ad $n$ ad $n$ con un numero $m$ di lettere.

Sia a cagion d'esempio $m=90$; risultando $m-1=89$; $m-2=88$, $m-3=87$, $m-4=86$, ec. ne verrà sostituendo $\frac{90.89}{2} = 4005$; $\frac{90.89.88}{2.3} = 117480$; $\frac{90.89.88.87}{2.3.4} = 2555190$; $\frac{90.89.88.87.86}{2.3.4.5} = 43949268$; e quindi con 90 quantità si potranno formare

4005 ambi  2555190 quaderne
117480 terni  [redacted] cinquine.

43949268

217. *Esem.* 35.° Mentre da un' urna, nella quale esistono $m$ palle segnate con i numeri 1, 2, 3, ec. $m$, estraesi un numero $p$ delle medesime; dimando, quale probabilità vi sia, che sortano $n$ determinate palle, essendo $n$ non $> p$.

*Sol.* Le supposte determinate $n$ palle formano una delle combinazioni ad $n$ ad $n$ fra tutte le $m$ palle dell' urna; ma pel (*n.° prec.*) il numero totale di queste combinazioni viene espresso dal coefficiente (XXXV), che abbiam denominato Q (II. *n.°* 204); dunque la combinazione supposta altro non sarà che uno dei casi, che vengono indicati dal numero Q. Ora estraendosi nella nostra ipotesi $p$ palle, e il numero delle combinazioni ad $n$ ad $n$ di $p$ quantità, essendo $\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n}$ (numero, che per brevità dirò R) vengono ad aver luogo attualmente R degli accennati Q casi, e ne rimangono per conseguenza esclusi $Q-R$. Dunque la probabilità che sortano tutte le supposte determinate $n$ palle starà alla probabilità che non sortano tutte :: R : Q — R, e posti i suoi valori

$$:: \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n} : \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} - \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n} :: p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1) : m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) - p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1).$$

Se sia $n = p$; le due probabilità staranno fra di loro evidentemente :: 1 : $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} - 1$.

Che se $p = m$; divenendo $Q-R = 0$, la seconda probabilità sarà zero, e quindi la combinazione supposta accaderà certamente.

Supponghiamo per esempio $m = 90$, $p = 5$, ed $n$ successivamente $= 1, 2, 3, 4, 5$; avendosi in corrispondenza

1.° R:Q—R::5:90—5::5:85::1:17,
2.° R:Q—R::5.4:90.89—5.4::20:8010—20::2:799,
3.° R:Q—R::5.4.3:90.89.88—5.4.3::1:11747,
4.° R:Q—R::5.4.3.2:90.89.88.87—5.4.3.2::1:5110 37,
5.° R:Q—R::5.4.3.2.1:90.89.88.87.86—5.4.3.2.1::1:43949267

apparisce, come nell'ordinario giuoco del lotto stia la probabilità, che esca un dato o numero, od ambo, o terno, o quaderna, o cinquina alla probabilità che non esca, e quindi si vede la difficoltà di vincere ad un simile giuoco.

## *CAPO III.*

### *Della estrazione della radice seconda da un qualunque Polinomio.*

213. *Scol.* 1.° Si elevi al quadrato il Polinomio $a+b+c+d+$ec. $+u$ avente $n$ termini. Posto $b+c+d+$ ec. $+u=x$, poichè si ha $(a+b+c+d+$ ec. $+u)^2 = (a+x)^2 = a^2+2ax+x^2$ ($n.^\circ$ 299) $= a^2+2a(b+c+d+$ec.$+u) + (b+c+d+$ ec. $+u)^2$, e poichè nella maniera medesima si truova $(b+c+d+$ ec. $+u)^2 = b^2+2b(c+d+$ ec. $+u)+(c+d+$ ec. $+u)^2$, $(c+d+$ ec. $+u)^2 = c^2+2c(d+$ ec. $+u)+(d+$ ec. $+u)^2$ ec., onde risulta $(a+b+c+d+$ ec. $+u)^2 = a^2+2a(b+c+d+$ ec. $+u)+b^2+2b(c+d+$ ec. $+u)+c^2+2c(d+$ ec. $+u)+$ ec.; vedesi, che i termini, i quali formano il quadrato $(a+b+c+d+$ec. $+u)^2$ già sviluppato altro non sono se non se i quadrati di ciascuna delle quantità $a$, $b$, $c$, ec., e i doppj prodotti delle quantità medesime prese a due a due. Ora il numero di simili prodotti pel ($n.^\circ$ 214) è $\frac{n(n-1)}{2}$, ed $n$ è il numero dei quadrati $a^2, b^2, c^2, d^2$, ec.. Dunque $\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$ sarà il numero totale dei termini che formano il quadrato d'un polinomio avente $n$ termini.

219. *Cor.* I. Se si faccia successivamente $n = 1$, 2, 3, 4, 5, ec., risultando in corrispondenza $\frac{n(n+1)}{2} = 1, 3, 6, 10, 15$, ec., ne segue, che mentre il quadrato di un monomio ha un solo termine, il quadrato di un binomio ne ha tre, quello di un trinomio sei, dieci quello di un quadrinomio, e così di seguito, come apparisce nei seguenti esempj

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\\
&(a+b+c)^2 = a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2,\\
&(a+b+c+d)^2 = a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2\\
&\qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned} \qquad \text{(XLVIII)}$$

i quali possonsi scrivere ancora così

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,\\
&(a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2,\\
&(a+b+c+d)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2\\
&\qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}$$

e però, posto $a+b=p$, $a+b+c=q$, ec., si avrà

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^2 = p^2+2pc+c^2\\
&(a+b+c+d)^2 = q^2+2qd+d^2 \qquad \text{ec.}
\end{aligned}$$

II. Essendo $a^2+2ab+b^2$ il quadrato del binomio $a+b$ (*n.*° 199), i tre termini (*prec.* I) che lo formano, saranno il quadrato $a^2$ della prima parte $a$, il doppio prodotto $2ab$ della prima parte $a$ nella seconda $b$, ed il quadrato $b^2$ di questa parte seconda: così ritenute le supposizioni del (*prec.* I) vale a dire di $a+b=p$, $a+b+c=q$, ec. e nei sovraesposti polinomj $a+b+c$, $a+b+c+d$, ec. considerando rispettivamente le $n$, $p$, $q$, ec. come prime parti, i loro quadrati saranno formati di tre parti perfettamente simili a quelle, di cui è formata la seconda potenza di un binomio semplice.

III. La radice seconda di un binomio, di valore positivo, in cui le due quantità che lo formano siano indeterminate, la radice seconda per esempio del binomio $a^2+b^2$, ovvero dell'altro $a^2-b^2$, sarà bensì reale (III. *n.*° 172), ma incommensurabile (*n.*° 187).

La sua realità difatti può dimostrarsi in un modo simile a quello del (*n.°* 184): imperocchè se si forma un triangolo rettangolo, di cui $a$, $b$ siano i cateti, dalla Geometria sappiamo, che $\sqrt{(a^2+b^2)}$ ne sarà il valore dell' Ipotenusa: e se il binomio sia $a^2-b^2$, poichè per la ipotesi dev' essere $a^2-b^2>0$, e però $a^2>b^2$, la $\sqrt{(a^2-b^2)}$ esprimerà evidentemente il cateto di un triangolo rettangolo, del quale $a$ sia l' ipotenusa e $b$ l' altro cateto. Che poi la radice seconda del supposto binomio $a^2+b^2$, oppure $a^2-b^2$ sia irrazionale, deducesi agevolmente dal (*prec.* I.). Poichè se essa fosse razionale, dovrebbe contenere un numero determinato di termini, ed essere quindi od un monomio, od un binomio, od un trinomio, od un quadrinomio, ec., ma niuna di queste espressioni pel citato (*prec.* I) somministra mai, mentre si elevi alla potenza seconda, un binomio. Dunque ec.

Se $a+b$, oppure $a-b$ fosse il binomio proposto, $\sqrt{(a+b)}$ sarebbe l' ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ fossero i cateti, e $\sqrt{(a-b)}$ sarebbe il cateto di un triangolo rettangolo, nel quale $\sqrt{a}$ fosse l' ipotenusa e $\sqrt{b}$ l' altro cateto.

IV. Nella stessa maniera si troveranno incommensurabili, quantunque siano reali esse pure, le radici seconde di un quadrinomio, di un quintinomio, e in generale di tutti i Polinomj, i quali mentre sono positivi, e sono formati da quantità indeterminate, contengono poi un numero di termini non esprimibile dalla formola $\frac{n(n+1)}{2}$ (*prec.*I), in cui $n$ sia numero intero e positivo.

V. Se il Polinomio di valor positivo, del quale si vuole la radice quadrata sia di tre termini, oppur di sei, e in generale, se contenga un numero di termini esprimibile dalla precedente formola $\frac{n(n+1)}{2}$, allora questa radice sarà razionale, ogni-

qualvolta il Polinomio dato contenga esattamente, siccome le potenze (XLVIII), i termini indicati nel (*n.°* 218); altrimenti sarà irrazionale. La radice seconda per esempio del trinomio $a^2+ab+b^2$ non potrebbe essere che un binomio (*prec.* I); ma qualunque binomio innalzato a quadrato contiene necessariamente e unicamente il quadrato di ciascuna delle due parti, che lo compongono, con di più il loro doppio prodotto; dunque non contenendosi nel trinomio dato esattamente tutti questi risultati; ne segue, che la sua radice seconda non potrà essere razionale.

VI. In tutte queste considerazioni ho supposto, che i termini, dai quali è formato il polinomio proposto, siano indeterminati; perchè altrimenti, potrebbe esso a cagione del valore particolare dei termini che lo formano, avere la radice seconda razionale, quantunque non abbia quel numero, e quella qualità di termini, che si è accennata nel (*n.°* 218). Se per esempio nel binomio $a^2+b^2$ (*prec.* II) pongasi $a=4c$, $b=3c$, risultando $a^2+b^2=16c^2+9c^2=25c^2$, ne verrà $\sqrt{(a^2+b^2)}=5c=$ quantità razionale.

VII. Nel quadrato $a^2\pm 2ab+b^2$ di un qualunque binomio $a\pm b$ reale, dovrà essere sempre $a^2+b^2$ non $< 2ab$. Imperciocchè se si volesse $a^2+b^2<2ab$, ne verrebbe $a^2-2ab+b^2=$ quantità negativa, e però $\sqrt{(a^2-2ab+b^2)}=$ quantità immaginaria (III. *n.°* 172); ma ciò non può essere, perchè essendo $a+b$ reale, anche $a-b=\sqrt{(a^2-2ab+b^2)}$ è quantità reale. Dunque ec.

220. *Probl.* 37.° Estrarre la radice seconda dal quadrato di un qualsivoglia binomio.

*Sol.* Sia in (XLIX) (A) il quadrato proposto: ordinato questo per una delle lettere in esso contenute, per esempio per $a$; giacchè il primo suo termine $25a^6$ pel (II. *n.°* 219) altro non deve essere che il quadrato della prima parte formante il binomio; estrag-

go da questo giusta il (*n.*° 177) la radice seconda, ritrovando $\sqrt{25a^6} = 5a^3$, scrivo un tal risultato in (B). Fattone il quadrato lo pongo in (C), e lo sottraggo da (A); verranne il residuo $30a^3b^2 + 9b^4$, il quale pel citato (II. *n.*° 219) conterrà il doppio del prodotto della prima nella seconda parte accresciuto dal quadrato della stessa seconda parte della radice binomia che si ricerca: raddoppiata pertanto la prima parte $5a^3$ di già ottenuta, la pongo alla destra del residuo in (E); divido pel risultato $10a^3$ il termine $30a^3b^2$ dell'avanzo (D), e il quoto $3b^2$, che ne viene, dovendo uguagliare l'altra parte della radice, lo colloco in (B) alla destra di $5a^3$. Affine di verificare, che $3b^2$ sia in realtà l'altro termine della radice, lo scrivo in (E) alla destra di $10a^3$, e lo scrivo al di sotto in (F); moltiplico la quantità (E) per la (F), e ottenuto il prodotto (G), lo sottraggo dall'avanzo (D); se $5a^3 + 3b^2$ è la vera radice, dovrà l'ultimo residuo essere zero, poichè il prodotto (G), che si sottrae, non è evidentemente che il doppio del prodotto del primo termine $5a^3$ nel secondo $3b^2$, più il quadrato del secondo. Ora tale avanzo è appunto zero; dunque la (B) sarà appunto la radice seconda richiesta

(XLIX)

| (A) | | (B) | |
|---|---|---|---|
| | $25a^6+30a^3b^2+9b^4$ | $5a^3+3b^2$ | |
| (C) | $25a^6$ | | |
| (D) | $*\quad +30a^3b^2+9b^4$ | $10a^3 \quad +3b^2$ | (E) |
| (G) | $+30a^3b^2+9b^4$ | $3b^2$ | (F) |
| | $* \quad *$ | $30a^3b^2+9b^4$ | |

Qualunque altro fosse stato il binomio, di cui si fosse proposto il quadrato; sarebbesi da questo estratta la radice seconda, ed ottenuto quindi l'indicato binomio, operando sempre nella stessa maniera.

221. *Probl.* 38.° Estrarre la radice quadrata dalla seconda potenza di un trinomio.

*Sol.* Sia in (L) (H) il proposto quadrato: prima di cominciare l'operazione lo scrivo di nuovo in (I) ordinandolo per la $x$. Ciò fatto, operando come precedentemente, ricavo la radice seconda dal 1.° termine, ed essendo questa $3nx^2$, la scrivo in (L); ne faccio il quadrato, lo sottraggo dalla quantità (I), e pongo in (K) l'avanzo. Raddoppiato il termine $3nx^2$, lo colloco in (M), divido per questo il primo termine di (K); ripongo il quoto $-4p^2x$ in (L) presso di $3nx^2$, e lo ripongo in (M) presso di $6nx^2$, e al di sotto, onde farne la moltiplicazione: avuto così il prodotto (N), lo sottraggo da (K), e mi viene l'avanzo (O). Finora ho considerati i tre soli primi termini della quantità (I), e ne ho ricavata la radice binomia $3nx^2-4p^2x$, come nel (*n.° prec.*): presentemente, onde ottenere il terzo termine della radice, considero questa quantità $3nx^2-4p^2x$ come un monomio semplice (II *n.°* 219); e quindi operando come precedentemente, la raddoppio; colloco in (P) il risultato $6nx^2-8p^2x$, divido per questo la quantità (O), e posto in (L) il quoto $2n^2p$, lo ripongo pur anche in (P), e al di sotto; ne faccio la moltiplicazione, sottraggo il prodotto (Q) da (O), e non venendone alcun residuo, il trinomio (L) è evidente, che formerà la domandata radice

(H) $12n^3px^2-24np^2x^3+4n^4p^2-16n^2p^3x+16p^4x^2+9n^2x^4$
(I) $9n^2x^4-24np^2x^3+16p^4x^2+12n^3px^2-16n^2p^3x+4n^4p^2$
$9n^2x^4$
(K) * $-24np^2x^3+16p^4x^2+12n^3px^2-16n^2p^3x+4n^4p^2$
(N) $-24np^2x^3+16p^4x^2$
(O) * * $+12n^3px^2-16n^2p^3x+4n^4p^2$
(L) $+12n^3px^2-16n^2p^3x+4n^4p^2$
* * *

(L) $3nx^2-4p^2x+2n^2p$
(M) $6nx^2-4p^2x$
$-4p^2x$
(N) $-24np^2x^3+16p^4x^2$
(P) $6nx^2-8p^2x+2n^2p$
$+2n^2p$
(Q) $12n^3px^2-16n^2p^3x+4n^4p^2$

Lo stesso si pratica, qualunque altro sia il proposto quadrato di un trinomio, da cui vogliasi estrarre la radice seconda.

222. *Scol.* 2.° I. Se la radice della data seconda potenza sia quadrinomia; ottenutine, come nel (*n.° prec.*) i primi tre termini, per ricavare il quarto, dal (II. *n.°* 219) è chiaro, che non dovrò se non considerare la somma dei tre termini avuti siccome un termine solo, e quindi raddoppiatala dividere per essa, come nei (*prec. n.i* 220, 221), l'avanzo già risultatomi dall'operazion precedente. Il quoto, che ne viene, essendo evidentemente il quarto termine richiesto, lo scriverò appresso agli altri tre, e sottratto il suo quadrato più il prodotto di esso col doppio della somma dei tre primi termini dall'avanzo accennato, poichè la radice ponesi quadrinomia, dovrà ottenersi per residuo lo zero.

Che se la radice sia quintinomia, ricavati i primi quattro termini, considererei la loro somma come un monomio semplice (II. *n.°* 219), e operando nel modo sovraesposto ne ritrarrei il termine quin-

to. Lo stesso si dice, e si pratica sempre, affin di ottenere successivamente il sesto, il settimo, ec. termine, mentre la radice del dato quadrato sia in corrispondenza di sei, di sette, ec. termini.

II.. In tutti i casi considerati finora (*n.*° 220, ec.) poichè la radice si è supposta binomia, trinomia, quadrinomia, ec., il quadrato corrispondente sarà stato composto di tanti e tali termini, quanti e quali sono stati indicati nel (V. *n.*° 219). Che se il polinomio dato, da cui vuolsi estrarre la radice quadrata, non sia formato da tali termini, non sia, come si dice, *un quadrato perfetto;* allora la sua radice non potrà pei (III, IV, V, *n.*° 219) ottenersi esattamente, e non potremo, mentre sia reale (III. *n.* 172), che accostarci ad essa, quanto si vuole, con uno dei metodi, che si esporrà in seguito.

III. Vogliasi la radice seconda del trinomio $2ab-a^2-b^2$, in cui $a$, $b$ siano quantità reali. Ridotto questo alla forma $(a^2-2ab+b^2)\times-1$, poichè si ha $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, ed $a$, $b$ sono per la ipotesi quantità reali, dovrà essere $a^2+b^2>2ab$ (VII. *n.*° 219), e però $2ab-a^2-b^2$ quantità negativa. Dunque $\sqrt{(2ab-a^2-b^2)}$ sarà quantità immaginaria (III. *n.* 172); ma $\sqrt{(2ab-a^2-b^2)}=\sqrt{((a^2-2ab+b^2)\times-1)}=\sqrt{(a^2-2ab+b^2)}\times\sqrt{-1}$, (*n.*° 191) $=\pm(a-b)\sqrt{-1}$. Dunque per ottenere l'espressione $\pm(a-b)\sqrt{-1}$, che è radice immaginaria della quantità negativa $2ab-a^2-b^2$, non dovremo che cambiare i segni a tutti i termini di questa, rendendola così positiva, estrarre quindi da lei nel modo sovraesposto la radice seconda, che sarà reale, e questa finalmente ottenuta moltiplicare per $\sqrt{-1}$. Lo stesso si dice, qualunque altra siasi la quantità negativa, da cui voglia estrarsi la radice quadrata. Perciò avremo

$\sqrt{-A^4}=\pm A^2\sqrt{-1}$, $\sqrt{-A^3}=\pm\sqrt{A^3}\times\sqrt{-1}=\pm A\sqrt{A}\times\sqrt{-1}$ (II. *n.*° 192); $\sqrt{(-4a^2c^2+20ab^3c-4ac^3-25b^6+10b^3c^2-c^4)}=\pm(2ac-5b^3+c^2)\sqrt{-1}$.

223. *Esem.* 36.° Ritrovare due numeri, la somma dei quali sia 224, il prodotto 2743.

*Sol.* Chiamati $x$, $y$ tai numeri, avremo $x+y=224$, $xy=2743$; ripongo nella seconda di queste equazioni il valore di $y$ avuto dalla prima, e fatte le dovute riduzioni, avremo $x^2-224x=-2743$. È questa un' equazione di 2.° grado (*n.* 163), ma equazione, che non possiamo sciogliere col metodo dei (*n.* 180, 181), poichè quivi oltre il quadrato $x^2$ entra ancora la $x$ alla prima potenza, e non può estrarsi la radice, come nei (*cit. n.* 180, 181).

Volgendomi perciò ad altro artifizio, cerco di rendere il primo membro $x^2-224x$ un quadrato perfetto, e ciò è chiaro dal (II. *n.* 219), che ottengo facilmente, aggiungendo al medesimo il quadrato della metà del coefficiente della $x$, cioè il quadrato di $\frac{224}{2}=112$, ossia il n.° 12544; ma io non debbo turbar l' uguaglianza; aggiungendo pertanto lo stesso numero anche all' altro membro $-2743$, poichè $12554-2743=9801$, l' equazione precedente diverrà $x^2-224x+12544=9801$. Ora estraendo la radice 2.ª dal primo membro $x^2-224x+12544$, poichè pel (*n.* 220) si ottiene $x-112$, suppongo questo $x-112=u$: lo sostituisco nell' equazione, ed essa diverrà $u^2=9801$, Equazione sulla forma di quella del (*n.* 181); sciolgo questa pertanto, e avendosi $u=\pm 99$, perchè $99\times 99=9801$, otterremo sostituendo di nuovo $x-112=\pm 99$, e però $x=112\pm 99$. Potrà adunque $x$ avere due valori, cioè i due $112+99=211$, $112-99=13$. Ripongo ciascuno di questi valori nella $x+y=224$, e risultando $y=224-211=13$, $y=224-13=211$, vedesi, che i valori, i quali sciolgono il problema, sono i due $x=211$, $y=13$, oppure i due $x=13$, $y=211$, valori, che infine non somministrano che una sola soluzione.

224. *Scol.* 3.° Vogliasi rendere generale la so-

luzione del precedente problema, vogliasi cioè, che $x+y=a$, $xy=b$; fatto il calcolo precedente ritroveremo l'equazione $x^2-ax=-b$. Usando pertanto il precedente artifizio, aggiungasi in questa Equazione da una parte e dall'altra il quadrato della metà del coefficiente $a$, e ottenuto $x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b$, suppongasi $x-\frac{a}{2}=u$, avremo l'equazione $u^2=\frac{a^2}{4}-b$, ove il secondo membro è tutto cognito, e quindi sarà $u=\pm\sqrt{(\frac{a^2}{4}-b)}$ (*n.* 181) ossia sostituendo $x-\frac{a}{2}=\pm\sqrt{(\frac{a^2}{4}-b)}$, e finalmente $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{(\frac{a^2}{4}-b)}$. Chiamo $x'$, $x''$ i due valori della $x$, cosicchè $x'=\frac{a}{2}+\sqrt{(\frac{a^2}{4}-b)}$, $x''=\frac{a}{2}-\sqrt{(\frac{a^2}{4}-b)}$; faccio la somma di queste due quantità, e ne viene $x'+x''=a$; ne faccio il prodotto, e risulta $x'x''=b$. Dunque le due radici $x'$, $x''$ esse medesime sono quelle, che sommate insieme danno $a$, e moltiplicate danno $b$; e quindi se nelle equazioni supposte $x+y=a$, $xy=b$ poniamo in luogo di $x$ uno dei suoi valori, per esempio $x'$, dovrà risultare $y=x''$, e viceversa.

225. *Def.* 1. Queste equazioni di secondo grado, che oltre la $x^2$ contengono anche la $x$ alla prima potenza, soglionsi dire equazioni di secondo grado *affette*, o *composte* a differenza delle altre prive della prima podestà della $x$ (*n.* 181), che appellansi *semplici* o *pure*.

226. *Probl.* 39. Sciogliere un' Equazione composta qualunque di 2.° grado.

Si portino da prima nel primo membro della Equazione data tutti i termini; si riducano in seguito con le opportune operazioni tutti i coefficienti della $x^2$ ad un solo, ad un solo tutti quelli della $x$, e ad uno solo tutti i termini cogniti. Ciò fatto, è chiaro, che la nostra Equazione si ridurrà della forma $ax^2+bx+c=0$, e dividendo per $a$, alla $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. Suppongo ora per brevità di scrivere $\frac{b}{a}=A$, $\frac{c}{a}=B$, sostituisco, e risultando $x^2+Ax+B=0$, ricerco col metodo dei due (*n. prec.*) la soluzione di questa Equazione, che suol dirsi Equazion *generale* del secondo grado, e operando nella stessa maniera, otterremo $x=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{(\frac{A^2}{4}-B)}$. Dunque per isciogliere un' Equazione di secondo grado qualunque, non avremo che a ridurla alla forma $x^2+Ax+B=0$, e poscia fare $x=$ alla metà del coefficiente del secondo termine $Ax$, $\pm$ la radice del quadrato della stessa metà con di più la quantità cognita B, cambiatone il segno. Ritenute pertanto rapporto alle radici le denominazioni del (*n. prec.*), avremo $x'=-\frac{A}{2}+\sqrt{(\frac{A^2}{4}-B)}$, $x''=-\frac{A}{2}-\sqrt{(\frac{A^2}{4}-B)}$, espressioni le quali si possono evidentemente ridurre anche alle altre

$$x'=\frac{-A+\sqrt{(A^2-4B)}}{2},\quad x''=\frac{-A-\sqrt{(A^2-4B)}}{2}.$$

227. *Esempio* 37.° Collocati su d' una retta due lumi di forza disuguale ad una distanza fra loro $a$, e supposto, che la luce si diffonda in ragione inversa dei quadrati delle distanze, determinare su di essa

essa retta quel punto, in cui tali lumi agiscono ugualmente.

*Sol.* Chiamati P, Q i due lumi; $m$, $n$ le loro forze rispettive, cosicchè ad una distanza 1 il lume P abbia la forza $m$, e il lume Q alla distanza medesima abbia la forza $n$, sia $x$ la distanza del primo lume P dal punto richiesto, e quindi $a-x$ la distanza del punto medesimo dall' altro lume Q. Dalla legge stabilita di sopra procede, che, facendo la proporzione $1 : \frac{1}{x^2} :: m :$ ad un quarto termine, questo ci esprimerà la forza del lume P alla distanza $x$, e però tal forza sarà $= \frac{m}{x^2}$; fatto in egual modo $1 : \frac{1}{(a-x)^2} :: n : \frac{n}{(a-x)^2}$, quest' ultimo termine ci esprimerà la forza del lume Q alla distanza $a-x$. Ora queste due forze a tali distanze devono essere fra loro uguali; dunque sarà $\frac{m}{x^2} = \frac{n}{(a-x)^2}$, e però $m(a-x)^2 = nx^2$, ossia $ma^2 - 2max + mx^2 = nx^2$. Cercando presentemente la soluzione di questa Equazione, faccio le precedenti trasposizioni e riduzioni, e risultando $(m-n)\,x^2 - 2ma + ma^2 = 0$, e quindi $x^2 - \frac{2ma}{m-n}x + \frac{ma^2}{m-n} = 0$; paragono questa con la precedente Equazione generale $x^2 + Ax + B = 0$, e giacchè ne viene $A = -\frac{2ma}{m-n}$, $B = \frac{ma^2}{m-n}$, dovrà essere $x = \frac{ma}{m-n} \pm \sqrt{\left(\frac{m^2a^2}{(m-n)^2} - \frac{ma^2}{(m-n)}\right)}$ e riducendo $x = \frac{ma \pm a\sqrt{mn}}{m-n}$; dunque avremo $x' = \frac{a(m+\sqrt{mn})}{m-n}$.

$x'' = \frac{a(m-\sqrt{mn})}{m-n}$, e questi saranno i valori, che sciolgono il problema.

Supponghiamo $m=18$, $n=2$, cosicchè la forza del primo lume P sia alla medesima distanza nove volte più grande della forza dell'altro Q: giacchè perciò ne viene $\sqrt{nm}=\sqrt{36}=6$, sostituendo avremo $x' = \frac{a(18+6)}{16} = \frac{3a}{2}$, $x'' = \frac{a(18-6)}{16} = \frac{3a}{4}$, e quindi tenendo conto del secondo valore della $x$, il punto, in cui nel nostro caso hanno ugual forza i due lumi P, Q sarà alla distanza $\frac{3a}{4}$ dal primo, ed alla distanza $a - \frac{3a}{4} = \frac{a}{4}$ dal secondo, e per conseguenza se sia la retta PQ$=a$, supposto PM $= \frac{3a}{4}$, MQ$= \frac{a}{4}$, il punto M sarà il domandato. Ma abbiamo pur anche un altro valore della $x$, cioè $x' = \frac{3a}{2}$: ciò mostra adunque che nella nostra retta esiste un altro punto capace di sciogliere il Problema, e questo dovrà essere alla distanza $\frac{3a}{2} = a + \frac{a}{2}$ da P, ed alla distanza $a - \frac{3a}{2} = -\frac{a}{2}$ da Q.

P M Q N

Pertanto se prendiamo QN$= \frac{a}{2}$, N sarà tale punto; e per conseguenza nei due punti M, N i nostri due lumi avranno forza uguale. Nella determinazione del secondo punto N, la distanza dello stesso da Q, è risultata negativa, poichè risulta in

una direzione opposta alla distanza prima QM, la quale essendo $\frac{a}{4}$ è positiva.

Dando alle $m$, $n$ altri valori, avremo altri casi quanti si vogliono dello stesso Problema.

228. *Scol.* 4.° Paragonando l' equazion generale $x^2+Ax+B=0$ (*n.* 226) con l' altra $x^2-ax=-b$ del (*n.*° 224), avremo $A=-a$, $B=b$, e con tale supposizione l' una si cangia nell' altra. Ora sì le quantità A, B, come le altre $a$, $b$ possono significare dei numeri qualunque affetti di un qualunque segno. Dunque tanto le $x^2+Ax+B=0$, come l' altra $x^2-ax=-b$ possono considerarsi come Equazioni di secondo grado egualmente generali. Ora nella Equazione $x^2-ax=-b$, ossia $x^2-ax+b=0$, trasportato il $-b$ nel primo membro si ha $x'+x''=a$, $x'\,x''=b$, essendo le $x'$, $x''$ le sue radici (*n.* 224). Dunque in un' Equazione generale, e perciò in un' Equazione qualunque di 2.° grado ridotta alla forma $x^2-ax+b=0$, od all' altra $x^2+Ax+B=0$, la somma delle due radici $x'$ $x''$ uguaglia sempre in corrispondenza il coefficiente del secondo termine $-a$, oppure A preso col segno opposto, cosicchè $x'+x''=a$, ovvero $x'+x''=-A$, e il loro prodotto $x'\,x''$ uguaglia sempre il termine ultimo $b$, oppure B preso col segno suo naturale.

229. *Esemp.* 38. Trovare un numero tale, che il suo decuplo superi il suo quadrato di 34.

*Sol.* Chiamato $x$ tal numero, avremo $10x-x^2=34$, e però $x^2-10x+34=0$, e sciogliendo, $x=5\pm\sqrt{-9}$. Ora la quantità $\sqrt{-9}$ è immaginaria; tale adunque sarà anche la $x-5$ a lei uguale, e tali per conseguenza saranno anche i valori della $x$. Dunque il numero domandato sarà impossibile.

230. *Scol.* 5.° Poichè facilmente può succedere, che le radici di un' Equazione affetta di secondo grado siano immaginarie; sarà perciò bene lo sta-

bilire un Criterio, affin di conoscere quando ciò succeda e quando no. Dalla Equazion generale $x^2+Ax+B$ (*n.* 226) noi abbiamo $x=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A^2}{4}-B\right)}$. Ora se i valori di $x$ sono immaginarj, è chiaro che ciò succederà dipendentemente dalla quantità $\sqrt{\left(\frac{A^2}{4}-B\right)}$, mentre cioè $\frac{A^2}{4}-B$ sia quantità negativa: ma $\frac{A^2}{4}$, essendo il quadrato della quantità reale $\frac{A}{2}$, è sempre positiva: dunque acciocchè i valori di $x$ siano immaginarj, dovrà la $-B$ avere un valor negativo, e dovrà di più nel risultato $\frac{A^2}{4}-B$ essere $B>\frac{A^2}{4}$. Conoscerò io dunque facilmente se la $x$ sia immaginaria, coll' osservare semplicemente nella Equazione $x^2+Ax+B=0$, se la quantità cognita posta nel membro primo sia positiva, e se questa presa positivamente sia $>$ del quadrato della metà del coefficiente del secondo termine. Ciò vedesi succedere nella Equazione del (*n.° prec.*) $x^2-10x+34=0$, ove il numero cognito 34 posto nel primo membro è positivo, ed ove $34>25$, quadrato della metà del coefficiente 10.

## *CAPO IV.*

### *Della Estrazione della radice seconda dalle quantità numeriche.*

231. *Scol.* 1.° I. Il quadrato di un numero intero qualunque, prescindendo dal segno, non $>9$, non può mai contenere più di due cifre. Ciò apparisce dalla linea seconda della sottoposta Tavola

(LI), nella quale si contengono le cinque prime potenze dei primi nove numeri 1, 2, 3, ec.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2ª | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| 3ª | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |
| 4ª | 1 | 16 | 81 | 256 | 625 | 1296 | 2401 | 4096 | 6561 |
| 5ª | 1 | 32 | 243 | 1024 | 3225 | 7776 | 16807 | 32768 | 59049 |

(LI)

II. Abbiasi un numero $10^n a$, in cui $n$ sia un intero positivo qualunque, ed $a$ un numero intero non $< 1$, e $< 10$; se ne faccia il quadrato, ne verrà $(10^n a)^2 = 10^{2n} a^2$. Ora l' espressione $10^n$ altro non significando, se non che il 10 ripetuto in forma di moltiplicazione le volte $n$, contiene sviluppata $n$ zeri, e così l' altra $10^{2n}$ ne contiene $2n$; inoltre essendo $a$ per la ipotesi un numero di una sola cifra, il suo quadrato $a^2$ ne contiene una o due solamente (*prec.* I). Dunque, mentre nel dato numero $10^n a$ contengonsi $n+1$ cifre, ed $n$ zeri, nella sua 2.ª potenza $10^{2n} a_2$ esisteranno $2n+1$, oppure $2n+2$ cifre, e $2n$ zeri; onde il numero degli zeri in questa sarà sempre doppio del numero degli zeri in quello, e il numero delle cifre o ne sarà doppio, o ne uguaglierà il doppio diminuito di una

unità. Pongasi $n$ successivamente $=1, 2, 3, 4$, ec. ed $a$ in corrispondenza $=3, 7, 2, 9$, ec., onde risulti $10^n a$ rispettivamente $=30, 700, 2000, 90000$, ec. Avendosi da queste supposizioni $10^{2n} a^2$ corrispondentemente $= 900, 490000, 4000000, 810000000$, ec. apparisce in fatto la verità di quanto abbiamo asserito, ed apparisce che i quadrati delle decine contengono due zeri, e tre oppure quattro cifre; i quadrati delle centinaja hanno quattro zeri, e cinque oppure sei cifre; in quelli delle migliaja esistono sei zeri, e sette od otto cifre, e così in progresso.

III. Poichè un numero razionale deve pel (*n.* 137) essere od un intero od una frazione attualmente determinata, o determinabile; dal (*n.* 133) deducesi agevolmente, che se un numero intero proposto ha la sua radice quadrata razionale, questa pure dovrà essere un intero.

232. *Teor.* 1.° Se un dato numero intero, la cui radice quadrata sia razionale, contiene $m$ cifre, l' accennata radice ne conterrà $\frac{m}{2}$, quando $m$ è pari, ed $\frac{m+1}{2}$, quando $m$ è dispari.

*Dim.* Chiamata M la radice 2.ª del numero dato, poichè essa è un intero (III. *n. prec.*) siano di numero $x$ le cifre, che in lei si contengono, e chiamisi $a$ la prima di queste a sinistra. Dalla natura de' numeri interi è facile a dedursi, dover essere $M < 10^{x-1}(a+1)$, e non $< 10^{x-1} a$, e però $M^2 < 10^{2x-2}(a+1)^2$, e non $< 10^{2x-2} a^2$. Ora potendo $a$ essere uguale e minore del 9, ne sia in primo luogo minore, e sia $a+1=b$: avendosi nel caso presente $b$ non $>9$, tanto in $10^{x-1} a$, come in $10^{x-1} b$

esistono $x$ cifre; dunque tanto in $10^{2x-2}\ a^2$, come in $10^{2x-2}\ b^2$ si dovrà contenere un numero di cifre non minore di $2x-1$, e non maggiore di $2x$ (II. *n.° prec.*). Ma a cagione di $M^2 < 10^{2x-2}\ b^2$, e non $< 10^{2x-2}\ a^2$, il numero $m$ delle cifre in esso $M^2$ esistenti deve evidentemente nè superare $2x$, nè calare da $2x-1$. Dunque, essendo $2x$ un numero essenzialmente pari, e $2x-1$ il prossimo inferiore essenzialmente dispari, ne segue, che ogni qualvolta $m$ sia pari, dovrà essere $m = 2x$, e però $x = \frac{m}{2}$; e mentre sia $m$ dispari, dovrà aversi $m = 2x-1$, e però $x = \frac{m+1}{2}$; ma $x$ rappresenta il numero delle cifre contenute nella radice M; dunque in questa prima ipotesi si verifica, che ec.

Sia in secondo luogo $a=9$, onde $10^{x-1}\ a = 10^{x-1} \times 9$, $10^{x-1}\ (a+1) = 10^{x-1} \times 10 = 10^{x}$, $10^{2x-2}\ a^2 = 10^{2x-2} \times 81$, e $10^{2x-2} \times (a+1)^2 = 10^{2x}$. Esprimendosi dal quadrato $10^{2x}$ il minimo tra i numeri, che contengono $2x+1$ cifre, ed essndo $M^2 < 10^{2x-2} \times (a+1)^2$, e però $< 10^{2x}$, non potranno in $M^2$ esistere più di $2x$ cifre; ma a cagione di 81 avente due cifre, nel quadrato $10^{2x-2} \times 81$ se ne contengono $2x$. Dunque avendosi $M^2$ non $< 10^{2x-2}\ a^2$, e quindi non $< 10^{2x-2} \times 81$, il numero delle cifre,

di cui è dotato $M^2$, non potrà essere neppure $< 2x$. Dunque risultando $m = 2x$; dovrà $m$ in questo secondo caso essere necessariamente numero pari, ed avendosi $x = \frac{m}{2}$, anche in questo secondo caso si verificherà, che ec.

233. *Cor.* I. In conseguenza della proprietà ora dimostrata, dato un intero, la cui radice seconda sia commensurabile, potremo tosto conoscere il numero delle cifre, di cui è fornita la radice medesima. Così se il quadrato contiene tre o quattro cifre, nella radice ne esistono due; se quello è dotato di cinque o sei cifre, questa ne contiene tre; ne conterrà la radice quattro, se nel quadrato ne esistono sette, od otto, e così di seguito.

II. Nel caso di $m$ numero pari $= 2n$, se pongasi in generale il precedente quadrato

$$\text{(LII)}\quad M^2 = 10^{2n-1}\,g + 10^{2n-2}\,h + 10^{2n-3}\,i + 10^{2n-4}\,k + 10^{2n-5}\,l + 10^{2n-6}\,p + 10^{2n-7}\,q + 10^{2n-8}\,r + \text{ec.}$$

in cui ciascuna delle lettere $g$, $h$, $i$, $k$, $l$, ec., esprima un intero non $> 9$ e non $< 0$, si avrà la sua radice della forma

$$\text{(LIII)}\quad M = 10^{n-1}\,a + 10^{n-2}\,b + 10^{n-3}\,c + 10^{n-4}\,d + \text{ec.}$$

esprimendosi qui pure dalle $a$, $b$, $c$, ec. degl' interi positivi non $> 9$. Un valore della radice M della stessa forma si otterrebbe ancora, nel caso, in cui, essendo $m$ numero dispari $= 2n-1$, si avesse

$$\text{(LIV)}\quad M^2 = 10^{2n-2}\,h + 10^{2n-3}\,i + 10^{2n-4}\,k + 10^{2n-5}\,l + 10^{2n-6}\,p + 10^{2n-7}\,o + 10^{2n-8}\,r + \text{ec.}$$

III. Per la razionalità della M è chiaro, che le precedenti serie (LII), (LIII), (LIV) non progrediscono oltre il termine, nel quale l' esponente del 10 diventa zero.

234. *Scol.* 2.° Facciasi il quadrato della precedente quantità M, e ottenuto il risultato

$$M^2 = 10^{2n-2} a^2 + 10^{2n-3} \times 2ab + 10^{2n-4} (b^2 + 2ac) \quad \text{(LV)}$$
$$+ 10^{2n-5} (2ad + 2bc) + 10^{2n-6} (c^2 + 2bd + \text{ec.})$$
$$+ 10^{2n-7} (2cd + \text{ec.}) + 10^{2n-8} (d^2 + \text{ec.}) + \text{ec.},$$

si paragoni, nel caso di $m$ pari, con l'espressione (LII), e con la (LIV) nel caso di $m$ dispari. Da un simile confronto apparisce

I. Che il quadrato $a^2$ della prima cifra a sinistra $a$ della radice M (LIII) deve essere contenuto, quando $m$ è pari, entro le due prime cifre $10g + h$ (LII), e quando $m$ è dispari, entro la prima $h$ (LIV); cosicchè sarà sempre nel primo di questi due casi $a^2$ non $> 10g + h$, e nel secondo $a^2$ non $> h$; onde supposto nel primo $10g + h - a^2 = G$, e nel secondo $h - a^2 = G$, sarà sempre G non $< 0$.

II. Ritenuta questa supposizione, tanto dalla (LII), come dalla (LIV) avremo rispettivamente

$$M^2 - 10^{2n-2} a^2 = 10^{2n-2} G + 10^{2n-3} i + 10^{2n-4} k + 10^{2n-5} l \quad \text{(LVI)}$$
$$+ 10^{2n-6} p + \text{ec.},$$

e dalla (LV) avremo

$$M^2 - 10^{2n-2} a^2 = 10^{2n-3} \times 2ab + 10^{2n-4} (b^2 + 2ac)$$
$$+ 10^{2n-5} (2ad + 2bc) + 10^{2n-6} (c^2 + 2bd + \text{ec.}) + \text{ec.}$$

e dal paragone di questi due risultati, vedesi, che, sottratto nelle (LII), (LIV) il quadrato $10^{2n-2} a^2$ da $M^2$, nelle prime due cifre $10G + i$ del residuo, che ne viene, deve contenersi il doppio prodotto $2ab$, e però che $2ab$ non $> 10G + i$; e vedesi, che la quantità $2ab \times 10 + b^2$ deve esistere entro l'altra $100G + 10i + k$, e che perciò $2ab \times 10 + b^2$ non $> 100h + 10i + k$.

III. Suppongasi $10a+b=A$, e mentre sia $m$ pari, si faccia $1000g+100h+10i+k-A^2=H$ (LII), e quando $m$ sia dispari (LIV), facciasi $100h+10i+k-A^2=H$. Pel dimostrato ne' (*prec.* I, II) dovrà essere H non $<0$; l'espressione (LII) oppure la (LIV) diverrà in corrispondenza

(LVII) $M^2-10^{2n-4}\quad A^2=10^{2n-4}\quad H+10^{2n-5}\quad l+10^{2n-6}\quad p+$ ec.

e dalla (LV), posto A in vece di $10a+b$, otterrassi

$M^2-10^{2n-4}\quad A^2=10^{2n-5}\quad \times 2Ac+10^{2n-6}\quad (c^2+2Ad)+$ ec.

Paragonando fra loro queste ultime due Equazioni, vedremo che dovrà quì pure il doppio prodotto $2Ac$ essere contenuto in $10H+l$, e però tale, che non ne potrà essere maggiore, e che la somma $2Ac\times 10+c^2$ si conterrà nella $100H+10l+p$, onde non la supererà.

IV. Pongasi $10A+c$, ossia $100a+10b+c=B$, e quando $m$ è pari, si faccia $10^5g+10^4h+10^3i+10^2k+10l+p-B^2=I$, e quando $m$ è dispari, pongasi $10^4h+10^3i+10^2k+10l+p-B^2=I$: fatte nelle solite serie (LII), (LIII), (LIV) le sostituzioni, e riduzioni, come nei (*prec.* II, III), troveremo risultarci

(LVIII) $M^2-10^{2n-6}\quad B^2=10^{2n-6}\quad I+10^{2n-7}\quad q+10^{2n-8}\quad r+$ ec.

$M^2-10^{2n-6}\quad B^2=10^{2n-7}\quad \times 2Bd+10^{2n-8}\quad (d^2+\text{ec.})+$ ec.;

e troveremo quindi, che quì pure le quantità $2Bd$, $2Bd\times 10+d^2$ devono essere rispettivamente contenute nelle $10I+q$, $100I+10q+r$, e che però non ne possono essere rispettivamente maggiori. Le stesse osservazioni hanno evidentemente luogo anche in seguito.

235. *Teor.* 2.° Chiamato $P^2$ il massimo quadrato intero perfetto, che nel caso di $m$ pari (II. *n.*° 233) contienesi in $10g+h$ (LII), e nel caso di $m$ dispari esiste in $h$, io dico, che deve essere la prima cifra $a$ della radice M (LIII) uguale a P.

*Dim.* Essendo per la ipotesi $P^2$ il massimo qua-

drato perfetto, che esiste, quando $m$ è pari in $10g+h$, e quando $m$ è dispari in $h$, dovrà essere $(P+1)^2$ rispettivamente maggiore di $10g+h$, oppure di $h$. Ora se mai si volesse $a>P$, essendo tanto $a$, come P numeri interi e positivi, dovrebbe risultare $a$ non $<P+1$, e per conseguenza $a^2>10g+h$ quando $m$ è pari, $>h$, quando $m$ è dispari; ma ciò è contro del (I. $n.^\circ$ 234). Dunque non potendo essere $a>P$, ne sia, se è possibile, minore: dovrà in questa ipotesi risultare $a+1$ non $>P$, e però avendosi $(a+1)^2$ non $>10g+h$, ovvero non $>h$, secondochè $m$ è pari, o dispari; ne verrà ancora, come appari-

sce dalle espressioni (LII), (LIV), $10^{2n-2}(a+1)^2$ non $>M^2$. Ma per la espressione (LIII), e per la natura

de' numeri deve essere $10^{n-1} > 10^{n-2}b + 10^{n-3}c +$

$10^{n-4}d +$ ec. e però $10^{n-1}(a+1) > M$. Dunque ri-

sultando $10^{2n-2}(a+1)^2 > M^2$, ne segue, che se fos-

se $a<P$, la quantità $10^{2n-2}(a+1)^2$ risulterebbe nel tempo stesso maggiore e non maggiore di $M^2$. Dunque non potendo neppur essere $a<P^2$ lo dovrà uguagliare.

236. *Teor.* 3.° Ottenuta giusta i (I, II, $n.$ 234) la espressione (LVI), se si prenda un numero intero e positivo Q tale che sia $2aQ\times 10+Q^2$ non $>100G+10i+k$, ed insieme $2a(Q+1)\times 10+(Q+1)^2>100G+10i+k$, io dico, che dovrà essere questo Q uguale alla seconda cifra $b$ della radice M (LIII).

*Dim.* Non potrà essere $b>Q$, poichè se lo fosse, risultando $b$ non $<Q+1$, ne verrebbe per le ipotesi fatte $2ab\times 10+b^2>100G+10i+k$ contro del (II. $n.^\circ$ 234). Nè potrà essere $b<Q$: imperciocchè se ciò si volesse, risultando $b+1$ non $>Q$, ne verrebbe $2a(b+1)\times 10+(b+1)^2$ non $>100G+10i+k$, e però $100a^2+2a(b+1)\times 10+(b+1)^2$ non $>100(a^2+G)$

$+10i+k$, ossia $(10a+b+1)^2$ non $> 100(a+G)+10i+k$, e quindi $10^{2n-4}(10a+b+1)^2$ non $> 10^{2n-2}(a^2+G)+10^{2n-3}i+10^{2n-4}k$; ma per la Equazione (LVI) si ha $10^{2n-2}(a^2+G)+10^{2n-3}i+10^{2n-4}k$ non $> M^2$. Dunque sarà $10^{2n-4}(10a+b+1)^2$ non $> M^2$. Ora per la (LIII) essendo $10^{n-2} > 10^{n-3}c+10^{n-4}d+$ ec., ne viene $10^{n-2}(10a+b+1) > 10^{n-1}a+10^{n-2}b+10^{n-3}c+10^{n-4}d+$ ec. e però $> M$, e finalmente $10^{2n-4}(10a+b+1)^2 > M^2$. Dunque essendosi dimostrato questa quantità $10^{2n-4}(10a+b+1)^2$ non $> M^2$, ne segue, che non potrà essere $b<Q$, e però avremo $Q=b$.

237. *Scol.* 3.° I. Ridotta secondo il (III *n.*° 234) la (LII), o la (LIV) alla Equazione (LVII), con la lettera R si esprima un numero intero positivo tale, che sia $2AR\times 10+R^2$ non $> 100H+10l+p$, e sia $2A(R+1)\times 10+(R+1)^2 > 100H+10l+p$; dovrà questo R uguagliare la terza $c$ delle cifre formanti la radice M (LIII). La dimostrazione di questa proposizione è perfettamente simile alla esposta nel (*n. prec.*). Difatti se si volesse $c>R$, risultando $c$ non $<R+1$, ne verrebbe $2Ac\times 10+c^2 > 10cH+10l+p$ contro del (III. *n.*° 234); e se si volesse $c<R$, e però $c+1$ non $> R$, avrebbesi $2A(c+1)\times 10+(c+1)^2$ non $> 100H+10l+p$, e per conseguenza $10^{2n-6}\times(10A+c+1)^2$ non $> 10^{2n-4}(A^2+H)+10^{2n-5}l+10^{2n-6}p$, onde $10^{2n-6}(10A+c+1)^2$ non $> M^2$; ma a cagione

di $10^{n-3} > 10^{n-4} d +$ ec. (LIII) si ha $10^{n-3}(100a + 10b + c + 1) > M$, ossia $10^{n-3}(10A + c + 1) > M$ (III. *n.°* 234), e però $10^{2n-6}(10A + c + 1)^2 > M^2$. Dunque essendo impossibile, che la stessa $10^{2n-6}(10A + c + 1)^2$ sia e non sia $> M^2$, sarà ancora impossibile, che $c < R$; e però ec.

II. In egual modo, fatta la riduzione del (IV. *n.°* 234), si dimostra, che se la lettera S rappresenta un numero tale, che $2BS \times 10 + S^2$ sia non $> 100I + 10q + r$, e sia $2B(S+1) \times 10 + (S+1)^2 > 100I + 10q + r$; si dimostra, dissi, che dovrà questa S uguagliare la quarta cifra *d* della radice M (LIII). Così in progresso.

238. *Teor.* 4.° Ritenuta la precedente radice M (LIII) intera e razionale, allorchè essa contiene due sole cifre, ed è però della forma $10a+b$; il secondo membro della equazione (LVI) diverrà $= 10 \times 2ab + b^2$. Quando M contenendo tre classi sia $= 100a + 10b + c$, dovrà il secondo membro della (LVII) essere $= 10 \times 2Ac + c^2$, avendosi $A = 10a + b$ (III. *n.°* 234). Quando M dotato di quattro cifre sia della forma $1000a + 100b + 10c + d$; posto $100a + 10b + c = B$ (IV. *n.°* 234), avremo il secondo membro della (LVIII) $= 10 \times 2Bd + d^2$, e così di seguito.

*Dim.* I. Quando $M = 10a + b$, avendosi $n = 2$ (II. *n.°* 233), l'equazione (LVI) diverrà $M^2 - 10^2a^2 = 10^2G + 10i + k$ (III. *n.°* 234); ma elevando al quadrato l'equazione $M = 10a + b$, e trasportando nel primo membro il termine $10^2a^2$, ne viene $M^2 - 10^2a^2 = 10 \times 2ab + b^2$. Dunque sarà il secondo membro della (LVI) divenuto in questo caso $10^2G + 10i + k = 10 \times 2ab + b^2$.

II. Abbiasi $M = 100a + 10b + c$, e però $n = 3$. Essendo $10a + b = A$ (III. *n.°* 234), risulterà $M = 10A$

$+c$, e la (LVII) diventerà $M^3 - 10^3A^3 = 10^2H + 10l + p$: ora col fare la seconda potenza della $M = 10A + c$, ottienesi $M^3 - 10^3A^2 = 10 \times 2Ac + c^2$. Dunque il secondo membro della (LVII) convertitosi nella ipotesi presente in $10^2H + 10l + p$ sarà $= 10 \times 2Ac + c^2$.

III. Mentre $M = 1000a + 100b + 10c + d = 10B + d$, perchè $100a + 10b + c = B$ (IV. $n.^o$ 234), si ha $n = 4$, e la (LVII) diviene $M^2 - 10^2B^2 = 10^2I + 10q + r$. Dunque dalla seconda potestà della $M = 10B + d$ avendosi $M^2 - 10^2B^2 = 10 \times 2Bd + d^2$, ne verrà il membro secondo della (LVIII) divenuto presentemente $10^2I + 10q + r = 10 \times 2Bd + d^2$.

Così in progresso. Dunque ec.

239. *Probl.* 39.° Dato un numero intero, la cui radice seconda sia razionale, determinare la radice medesima,

*Sol.* Suppongo dalla Tavola (LI) noti i quadrati delle prime nove cifre, e siano in (LIX) proposti i due interi (A), (B) aventi le loro radici seconde commensurabili, e però intere (III. $n.^o$ 231). Onde risolvere il problema comincio dal dividere i dati (A), (B) da destra a sinistra di due in due classi, e

I. Fissata l'attenzione sopra del primo (A); poichè lo veggo formato di cinque cifre, dirò, che la sua radice ne contiene tre ($n.^o$ 232); dal paragone poi di esso con la corrispondente formola generale (LIV) (II. $n^o$ 233) avremo $n = 3$, $h = 6$, $i = 0$, $k = 5$, $l = 1$, $p = 6$, e la rispettiva radice sarà della forma $100a + 10b + c$ (LIII). Ora $a^2$ pel ($n^o$. 235) uguaglia il massimo quadrato perfetto, che esiste in $h = 6$: dunque, essendo 4 questo massimo quadrato, avremo $a^2 = 4$, e però $a = 2$. Scrivo pertanto il 2 in (C) luogo destinato alla radice che si cerca, e passo alla determinazione della seconda cifra $b$. Sottratto perciò dal $6 = h$ il quadrato $4 = a^2$, e avuto in (D) il residuo 2, pongo presso di lui le due cifre 05,

che seguono in (A), e avremo il numero 205. Se si fossero calate tutte e quattro le cifre 0516, ne sarebbe venuto il risultato $20516 = 10^4 \times 2 + 10^3 \times 0 + 10^2 \times 5 + 6$; ma questo non è che un caso particolare della espressione generale (LVI): dunque nella ipotesi presente avendosi la lettera G della (LVI) $= 2$, ed entro perciò il numero $10G + i = 10 \times 2 + 0 = 20$ dovendosi pel (II. *n.*° 234) contenere il doppio prodotto $2ab = 2.2b = 4b$, ci serviremo di simile proprietà unita all' altra dei (II. *n.* 234, 236), per iscuoprire il valore di $b$. Raddoppio perciò l' ottenuto 2, colloco in (E) il 4, che ne viene, e diviso, secondo le regole ordinarie della divisione numerica, per esso 4 il 20, pongo il quoto 5 presso del 4, moltiplico pel 5 medesimo il numero 45, e osservo, se il prodotto, che ne risulta, sia o no $> 205$. In questo caso riuscendo $45.5 = 225 > 205$, ed essendo $45.5 = (40+5)5 = (2a \times 10+5)5 = 2a \times 5 \times 10 + 5^2$, pel (II. *n.*° 234) dirò che $b > 5$; riduco quindi l' ottenuto 5 all'intero prossimo inferiore 4, pongo questo 4 alla destra del primo, e poichè il prodotto $44.4 = 176$ è $< 205$, pel (*n.*° 236) dirò che $b = 4$. In conseguenza di ciò colloco in (C) alla destra del 2 il 4, ed effettuata in (E) la moltiplicazione di 44 per 4, sottraggo in (D) dal numero 205 il prodotto 176. Avuto in (F) l' avanzo 29, si scrivano alla sua destra le susseguenti due cifre 16 di (A). Essendo in questo caso il numero A del (III. *n.*° 234) $= 20 + 4 = 24$, il secondo membro della Equazione (LVII) diverrà uguale al numero 2916 risultatoci in (F); ed avendosi quindi la lettera H dell' accennata (LVII) $= 29$, dovrà il doppio prodotto $2Ac = 2 \times 24c = 48c$ pel citato (III. *n.*° 234) contenersi entro $10H + l = 10 \times 29 + 1 = 291$. Scritto perciò in G il doppio di 24, cioè 48, divido per esso la parte 291 del numero 2916, colloco presso del 48 il quoziente 6, che ne viene, e fatta in (G) la moltiplicazione del 486 per

6, poichè il prodotto 2916, che ne nasce non è maggiore del numero esistente in (F), ed anzi pel (II. *n.*° 238) gli è uguale, onde fattane la sottrazione, risulta l'avanzo zero; dirò pel (I. *n.*° 237) essere $c = 6$. Colloco pertanto questo 6 in (C) alla destra del 4, ed il numero 240 sarà la seconda radice, che si cercava.

II. Portandoci all'altro esempio (B), poichè in questo esiste un numero pari di cifre, cioè otto, converrà con la formola generale (LII), la sua radice seconda conterrà quattro classi (*n*°. 232) e la prima cifra a sinistra della radice altro non sarà che la radice del massimo quadrato esistente entro il numero che vien formato dalle prime due cifre di (B) (*n.*° 235); ma tal numero è 29, in cui il massimo quadrato è 25. Dunque essendo $5 = \sqrt{25}$ la prima cifra della radice che si cerca, la pongo in H; e per le ragioni stesse, che sonosi indicate, nel (*prec.* I) proseguendo ad operare nella medesima maniera sottraggo dal 29 il 25, presso all'avanzo 4 pongo in (I) le due cifre susseguenti 00, pongo in (K) il doppio di 5, cioè 10, e lasciata nel numero (I) l'ultima cifra 0, divido il numero formato dalle altre, cioè 40 per 10, aggiungo il quoto 4 alla destra del 10, e osservo se il prodotto di 104 per 4 supera il numero (I): superandolo in vece del 4 (II. *n.*° 234) pongo il 3, e poichè $103.3 < 400$, colloco questo 3 in (H) alla destra del 5 (*n.*° 236), ed ottenuto in (K) il prodotto 309, lo sottraggo dal 400. Appresso all'avanzo 91 pongo in (L) le seguenti due cifre 89, raddoppio in (M) l'ottenuto 53, lasciata indietro in (L) l'ultima cifra 9, divido il 918 per 106, e determinato il quoto 8, giacchè $1068.8 < 9189$, lo pongo in (H) alla destra del 3 (I. *n.*°237), e scritto in (N) il residuo 645 nato per la sottrazione del $1068.8 = 8544$ dal precedente 9189, calo appresso di lui le ultime due cifre 96. Posto in (P)

il

il 1076 doppio dell'ottenuto 538 divido in (N) per questo 1076 il 6459, e poichè il prodotto del quoto, che ne viene, 6 pel 10766 non supera, ed anzi uguaglia il numero (N) (II. *n.*° 237, III. *n.*° 238) colloco questo 6 in (H) presso all' 8, ed il numero 5386 composto appunto di quattro classi sarà la radice richiesta.

III. Se il quadrato numerico proposto contenga un numero di classi maggiore di quello, che si contiene nei due supposti (A), (B); proseguendo sempre l'operazione medesima, da quanto si è detto nei (I, II, III, IV, *n.*° 234, *n.*° 235, *n.*° 236, I. II. *n.*° 237) apparisce, che sempre ne otterremo la corrispondente radice seconda. Per piccola riflessione, che si faccia, vedesi poi facilmente, il perchè siasi il dato quadrato diviso da destra a sinistra di due in due classi. Finalmente il (*n.*° 238) mostra il perchè, ogniqualvolta la radice del dato numero intero è razionale, il residuo dell' ultima sottrazione debba essere zero

(A) 6,05,16 — 4 — (D) 205 — 176 — (F) 2916 — 2916 — *

(C) 246 — (E) 44 | (G) 486 — 4 | 6 — 176 | 2916

(B) 29,00,89,96 — 25 — (I) 400 — 309 — (L) 9189 — 8544 — (N) 64596 — 64596 — *

(H) 5386 — (K) 103 | (M) 1068 | (P) 10766 — 3 | 8 | 6 — 309 | 8544 | 64596 (LIX)

240. *Scol.* 4.° Pongasi ora, che la radice seconda del numero dato non sia razionale (*n.*° 187), quale è appunto la radice del 18 (*n.*° 183), l' altra del 2, quella del 138396, ec. In questo caso la radice di cui si tratta, pel (*cit. n.*° 183) non è mai determinabile esattamente; potremo però accostarci al suo vero valore sempre di più, od anzi accostarci oltre

qualunque differenza venga assegnata. Prima di esporre i metodi, onde ottenere simile accostamento, bisognerà eseguire alcune considerazioni. Chiamato perciò P l' intero proposto avente la sua radice quadrata irrazionale, chiamisi $N^a$ il massimo quadrato perfetto intero, che in esso si contiene, e sia $P - N^a = Q$: se con la P si esprima il precedente 13, o il 2, oppure il 133396, ne verrà in corrispondenza $N^a = 16$; $= 1$; $= 138384$, e $Q = P - N^a = 18 - 16 = 2$; $= 2 - 1 = 1$; $= 138396 - 138384 = 12$. Ciò posto

I. Poichè il dato intero P essendo necessariamente o pari o dispari, deve avere la forma (LII), o l' altra (LIV), suppongasi, che abbia attualmente una di queste, e fatto per maggiore chiarezza $n = 3$, sia

$P = 10^5 g + 10^4 h + 10^3 i + 10^2 k + 10l + p$, oppure

$P = 10^4 h + 10^3 i + 10^2 k + 10l + p$

Eseguiscasi sopra P finchè si può l' operazione del (*n.°* 239): il risultato, che ne viene, dovrà evidentemente contenere $n = 3$ cifre, e chiamato esso R, porrò quindi $R = 10^2 a + 10b + c$. Ritenuto quì pure, che alle A, H si attribuiscano i valori, che sonosi supposti nel (III, *n.°* 234), non potrà presentemente essere $10 \times 2Ac + c^2 = 10^2 H + 10l + p$, siccome nel (II, *n.°* 238); perchè se lo fosse, ne verrebbe $10^2 A^2 + 10 \times 2Ac + c^2 = 10^2 A^2 + 10^2 H + 10l + p$, e però $R^2 = P$, ed $R = \sqrt{P}$; ma R per la ipotesi è numero commensurabile; tale adunque sarebbe anche $\sqrt{P}$ contro della supposizione. Inoltre pel modo, con cui nel (*n.°* 239) determinansi le cifre $a, b, c$ dev' essere ancora $10 \times 2Ac + c^2$ non $> 10^2 H + 10l + p$. Dunque risultando $10 \times 2Ac + c^2 < 10^2 H + 10l + p$, ne segue, che nella ipotesi della $\sqrt{P}$ irrazionale, il residuo, il quale nell' accennata operazione ottienesi dalla sottrazione ultima non può essere $= o$, ma ne sarà maggiore.

II. Chiamato quest' ultimo residuo S, aggiungo

dover essere $R=N$, ed $S=Q$. Difatti pel modo con cui si determinano le $a$, $b$, $c$ (*n.*° 239) dev'essere $10\times 2A(c+1)+(c+1)^2 > 10^2H+10l+p$. Dunque avendosi $10^2A^2+10\times 2A(c+1)+(c+1)^2 > 10^2A^2+10^2H+10l+p$, sarà $(10A+c+1)^2 > P$, e però avendosi $(R+1)^2 > P$, $R^2$ uguaglierà il massimo quadrato perfetto intero che contienesi in P; ma per la ipotesi tale è $N^2$. Dunque sarà $R^2=N^2$, e quindi $R=N$. Inoltre per la supposizione abbiamo $10^2H+10l+p-10\times 2Ac-c^2=S$, ed $R^2=10^2A^2+10\times 2Ac+c^2$; onde $R^2+S=10^2A^2+10^2H+10l+p=P$; ma $P=N^2+Q$; dunque $R^2+S=N^2+Q$ e perciò $S=Q$.

Posto a cagion d'esempio, che P esprima il terzo dei precedenti numeri, che sia $P=138396$, eseguiscasi su di questo, finchè si può, l'operazione del (*n.*° 239); otterremo $R=372$, e dall'ultima sottrazione non si avrà punto per residuo lo zero, ma bensì il numero $12>0$ (*prec.* I), il quale sarà $=S$ (*prec.* III). Avendosi poi $372^2=138384$, $373^2=139129$, sarà rapporto al supposto 138396, l'ottenuto $372=N$; e giacchè $138396-138384=P-N^2=Q$ apparisce infatti, come risulti l'ultimo avanzo $12=Q$.

III. Qualunque altro valore diverso dal 3 (*prec.* I) attribuiscasi al numero $n$, è facile a vedersi, che hanno sempre luogo i discorsi e le conseguenze de' (*prec.* I, II).

241. *Cor.* I. Dunque qualunque siasi il numero delle cifre componenti l'intero P, avendosi sempre $R=N$, ed $S=Q$ (*n.*° *prec.*) ne viene, che coll'effettuare sopra il dato P, finchè si può, l'operazione del (*n.*° 239), il numero, che ne risulta, sarà sempre la radice del massimo quadrato perfetto intero, che si contiene in P, e che l'ultimo avanzo uguaglierà sempre la differenza, che passa tra P e l'indicato massimo quadrato.

II. Essendo $N^2$ il massimo quadrato perfetto intero che si contiene in P (*n.°* 240), avremo $(N+1)^2 > P$, e però $N+1 > \sqrt{P}$. Dunque risultando $\sqrt{P} - N < 1$, ne segue, che la radice irrazionale $\sqrt{P}$ supererà l' altra N dell' indicato quadrato $N^2$ meno d' un' unità.

III. Moltiplicata la quantità Q per 100, e avuto così il risultato 100Q, col dividere 10Q per 2N si determini come nel (*n.°* 239) un numero intero e positivo $p$ tale che $10 \times 2Np + p^2 < 100Q$, e $10 \times 2N(p+1) + (p+1)^2 > 100Q$, e sommata con N la quantità $\frac{p}{10}$, pongasi $N + \frac{p}{10} = N'$. Ciò fatto

1.° Si osservi non potere giammai essere $p$ tale, che $10 \times 2Np + p^2 = 100Q$: imperciocchè, se ciò fosse, ne verrebbe $\frac{100N^2 + 10 \times 2Np + p^2}{100} = \frac{100N^2 + 100Q}{100}$ $= P$, e quindi ottenendosi $\frac{10N+p}{10} = \sqrt{P}$, la radice seconda di P sarebbe determinabile esattamente, e però razionale contro la ipotesi (*n.°* 240).

2.° Poichè si ha $10 \times 2Np + p^2 < 100Q$, onde $\frac{100N^2 + 10 \times 2Np + p^2}{100} < \frac{100N^2 + 100Q}{100} = P$, e però $\frac{10N+p}{10} < \sqrt{P}$, avremo tanto N, come $N + \frac{p}{10} < \sqrt{P}$; ma $p$ è numero positivo per cui in generale si ha $N + \frac{p}{10} > N$. Dunque al valore della $\sqrt{P}$ sarà in generale più prossima la quantità $N + \frac{p}{10} = N'$, che la N. Ho detto in generale, perchè potrebbe accadere, che $p = 0$, e allora sarebbe $N' = N$, e però N' ed N egualmente distanti da $\sqrt{P}$.

3.° A cagione di $10 \times 2N(p+1) + (p+1)^2 > 100Q$,

avendosi $\frac{100N^2+10\times2N(p+1)+(p+1)^2}{100} > P$, e quindi $N+\frac{p+1}{10} > \sqrt{P}$, la quantità $\sqrt{P}$ sarà compresa fra le due $N+\frac{p}{10}$, $N+\frac{p+1}{10}$. Ora $N+\frac{p+1}{10}-N-\frac{p}{10}=\frac{1}{10}$; dunque $N+\frac{p}{10}$ differendo da $\sqrt{P}$ meno di quello che differisca da $N+\frac{p+1}{10}$; la differenza tra $\sqrt{P}$ ed $N+\frac{p}{10}=N'$ sarà minore di $\frac{1}{10}$. Se fosse $p=0$; allora risultando $N=N'$, sarebbe ancora $\sqrt{P}-N<\frac{1}{10}$.

IV. Sottraggasi dalla quantità $100Q$ l'altra $10\times2Np+p^2$, e sia $100Q-10\times2Np-p^2=Q'$: pel (1.° *prec.* III) dovrà esser questo $Q'>0$. Si moltiplichi esso per 100, e dividendo, come nel (*prec.* III) $10Q'$ per $2N'\times10$ si trovi un numero intero e positivo $q$ tale, che $100\times2N'q+q^2<100Q'$, e $100\times2N'(q+1)+(q+1)^2>100Q'$, e con la $N'$ unità la quantità $\frac{q}{100}$, sia

$$N'+\frac{q}{100}=N+\frac{p}{10}+\frac{q}{100}=N''.$$

Ciò fatto

1°. Riflettasi quì pure non poter esser giammai $100\times2Nq+q^2=100Q'$; perchè se ciò si volesse, ne verrebbe $\frac{10^4N'^2+10^2\times2N'q+q^2}{10^4}=\frac{10^4N'^2+100Q'}{10^4}=\frac{10^2(10^2N'^2+Q')}{10^4}=\frac{10^2(10^2N^2+10\times2Np+p^2+10^2Q-10\times2Np-p^2)}{10^4}=\frac{10^4(N^2+Q)}{10^4}=P$, e quindi risultando $\sqrt{P}=$

$\frac{100N'+q}{100}$, la $\sqrt{P}$ sarebbe commensurabile, contro la supposizione.

2.° Avendosi $100 \times 2N'q + q^2 < 100Q'$, sarà $\frac{10^4N'^2+10^2\times 2N'q+q^2}{10^4} < \frac{10^4N'^2+100Q'}{10^4} = P$ (*prec.* 1.°), e però $N' + \frac{q}{100} < \sqrt{P}$; ma $q$ è numero positivo. Dunque essendo in generale $N' + \frac{q}{100} > N'$; sarà in generale, più vicina al valor vero di $\sqrt{P}$ la quantità $N' + \frac{q}{100} = N''$, che la $N'$. Anche qui ho detto in generale, perchè se mai $q=0$, ne verrebbe $N'=N''$, e però $\sqrt{P} - N'' = \sqrt{P} - N'$.

3.° Poichè $100 \times 2N'(q+1) + (q+1)^2 > 100Q'$ (*prec.* IV), e però $\frac{10^4N'^2+10^2\times 2N'(q+1)+(q+1)^2}{10^4} > \frac{10^4N'^2+10^2Q'}{10^4} = P$, onde $N' + \frac{q+1}{100} > \sqrt{P}$; la quantità $\sqrt{P}$ esisterà tra le due $N' + \frac{q}{100}$, $N' + \frac{q+1}{100}$. Ma $N' + \frac{q+1}{100} - N' - \frac{q}{100} = \frac{1}{100}$. Dunque $N'' = N' + \frac{q}{100}$ sarà al di sotto della $\sqrt{P}$ di una differenza $< \frac{1}{100}$. Nel caso di $q=0$, anche $N'$ differirà dalla $\sqrt{P}$, meno di $\frac{1}{100}$; e meno di $\frac{1}{10^3}$ differirà ancora N, quando sia tanto $p$, come $q=0$.

V. Dalla $100Q'$ sottraggasi la quantità $100\times 2N'q + q^2$ (*prec.* IV), e si ponga $100Q' - 100 \times 2N'q - q^2 = Q''$, sarà $Q'' > 0$ (1.° *prec.* IV). Col dividere $10Q''$

per $2N''\times 100$, si determini al solito un numero $r$ intero positivo e tale, che $10^3\times 2N''r+r^2$ non $>100Q''$, e $10^3\times 2N''(r+1)+(r+1)^2>100Q''$; e facciasi

$$N''+\frac{r}{1000}=N+\frac{p}{10}+\frac{q}{100}+\frac{r}{1000}=N'''$$

1.° Non potrà neppur quivi essere $10^3\times 2N''r+r^2=100Q''$, perchè ne verrebbe $\frac{10^6N''^2+10^3\times 2N''r+r^2}{10^6}$

$$=\frac{10^6N''^2+100Q''}{10^6}=\frac{10^2(10^4N''^2+Q'')}{10^6}=$$

$$\frac{10^2(10^4N''^2+10^3\times 2N''q+q^2+10^2Q'-10^2\times 2N''q-q^2)}{10^6}=\frac{10^2N''^2+Q'}{10^4}$$

$=P$ (1.° *prec.* IV), e però $\sqrt{P}=N''+\frac{r}{1000}$ = quantità razionale contro la ipotesi.

2.° Poichè $\frac{10^6N''^2+10^3\times 2N''r+r^2}{10^6}<\frac{10^6N''^2+100Q''}{10^6}$

$=P$ (*prec.* 1.°), e quindi $N''+\frac{r}{1000}<\sqrt{P}$, e poichè, tolto il caso di $r=0$, abbiamo $N''+\frac{r}{1000}>N''$; si accosterà di più al valore della $\sqrt{P}$ la $N'''$, che la $N''$. Che se $r=0$, allora sarà $N'''=N''$, e $\sqrt{P}-N'''=\sqrt{P}-N''$.

3.° Dal rapporto $\frac{10^6N''^2+10^3\times 2N''(r+1)+(r+1)^2}{10^6}>\frac{10^6N''^2+100Q''}{10^6}=P$, traendosi $N''+\frac{r+1}{1000}>\sqrt{P}$; apparisce, che il valore della $\sqrt{P}$ è medio tra i due $N''+\frac{r}{1000}$, $N''+\frac{r+1}{1000}$; ma la differenza fra questi è $\frac{1}{1000}$. Dunque $\sqrt{P}$ differirà da $N'''$ meno di $\frac{1}{1000}$. Se $r=0$, sarebbe ancora $\sqrt{P}-N''<\frac{1}{1000}$, tale sa-

rebbe eziandio $\sqrt{P-N'}$, se $q=0$, $r=0$, e tale finalmente anche $\sqrt{P-N}$, se $p=0$, $q=0$, $r=0$.

VI. Posto $100Q''-1000\times 2N''r-r^2=Q'''$, nella stessa guisa del (1.° *prec.* III, IV, V) vedremo non potersi determinare alcuno intero $s$ tale, che $10^4\times 2N'''s+s^2=100Q'''$. Determinato però col dividere nella solita maniera $10Q'''$ per $2N'''\times 1000$ questo numero $s$ intero e positivo in modo, che il valore $100Q'''$ rimanga compreso fra i due $10^4\times 2N'''s+s^2$, $10^4\times 2N'''(s+1)+(s+1)^2$, come nel (2.° *prec.* III. IV, V) si vedrà, che fatto

$$N'''+\frac{s}{10000}=N+\frac{p}{10}+\frac{q}{100}+\frac{r}{1000}+\frac{s}{10000}=N''''$$

sarà $N''''<\sqrt{P}$, e sarà a questa $\sqrt{P}$ più vicino di $N'''$, quando $s$ non $=0$, vicino egualmente quando $s=0$. Finalmente col discorso del (3.° *prec.* III, IV, V,), troveremo essere $\sqrt{P-N''''}<\frac{1}{10000}$; risultando tale anche $\sqrt{P-N'''}$, quando $s=0$, tale anche $\sqrt{P-N''}$, quando $r=0$, $s=0$, e così di seguito.

VII. Siccome le successive espressioni $N^2+Q$, $\frac{10^2N'^2+Q'}{10^2}$, $\frac{10^4N''^2+Q''}{10^4}$, $\frac{10^6N'''^2+Q'''}{10^6}$, ec. uguagliano sempre la P (1.° *prec.* III, IV, V, ec.), e le corrispondenti $\frac{10^2N^2+10\times 2Np+p^2}{10^2}$, $\frac{10^4N'^2+10^2\times 2N'q+q^2}{10^4}$, $\frac{10^6N''^2+10^3\times 2N''r+r^2}{10^6}$, $\frac{10^8N'''^2+10^4\times 2N'''s+s^2}{10^8}$, ec. sono sempre quadrati perfetti, ne segue, che potranno sempre proseguirsi i discorsi de' (*prec.* III, IV, V, ec.); e in conseguenza di questi niuno degli avanzi successivi Q, Q'. Q'' Q''', ec. potendo mai risultare zero (1.° *prec.* III. IV. V, ec.), ne segue, che per quanto si estenda coll' indicato metodo

(*prec.* III , IV , V ) la determinazione dei precedenti numeri $\frac{p}{10}$ , $\frac{q}{100}$ , $\frac{r}{1000}$ , $\frac{s}{10000}$ , ec. e quella per conseguenza dei rispettivi risultati N', N'', N''', N'''' , ec. simile operazione non potrà mai aver fine . Col suo mezzo però potremo sempre nei risultati N' , N'' , N''' , N'''' ec. accostarci viemaggiormente al vero valore della $\sqrt{P}$ ( 2.° *prec.* III , IV , V , ec. ) rimanendone sempre ciascuno di essi minore ; ed anzi pei ( II. 3.° *prec.* III, IV , V , ec. ) sapremo essere questo accostamento tale , che $\sqrt{P} - N < 1$ , $\sqrt{P} - N' < \frac{1}{10}$ , $\sqrt{P} - N'' < \frac{1}{100}$ , $\sqrt{P} - N''' < \frac{1}{1000}$ , $\sqrt{P} - N'''' < \frac{1}{10000}$ , e quindi in generale che $\sqrt{P} - N^{(h)} < \frac{1}{10^h}$.

VIII. Supponghiamo di avere estesa la serie fino ad un termine $\frac{u}{10^h}$ , e sia

$$N + \frac{p}{10} + \frac{q}{100} + \frac{r}{1000} + \text{ec.} + \frac{u}{10^h} = N^{(h)} \qquad \text{(LX)}$$

Ora siccome abbiam riflettuto poter succedere , che alcuni dei numeri $p$ , $q$ , $r$ , ec. possono essere zero ( 2.° 3.° *prec.* III , IV, V , ec. ) ; potrebbe mai accadere , che fossero zero tutti quei termini $v$ , $z$ , ec. che , protraendo la serie , succederebbero al termine $u$ ? Rispondo che no. Difatti avendo tanto $\sqrt{P}$ , come $N^{(h)}$ un valore finito , ed essendo $\sqrt{P} > N^{(h)}$ ( *prec.* VII ) , tra $\sqrt{P}$ ed $N^{(h)}$ esisterà una differenza , che chiamerò D , onde $\sqrt{P} - N^{(h)} = D$,

re sarà $D<\frac{1}{10^{h}}$ ( *prec.* VII ) : Ora data la frazione $\frac{1}{10^{x}}$, se la $x$ possa aumentarsi all' infinito, potrà corrispondentemente all' infinito diminuirsi il valore della frazione medesima, e quindi, assegnata una quantità finita, potendo sempre aumentarsi la $x$ in guisa, che $\frac{1}{10^{x}}$ risulti minore di essa, ne viene, che potrò sempre determinare, e però esisteranno sempre dei valori della $x$ tali, che $\frac{1}{10^{x}}<D$; e giacchè simili valori della $x$ deggiono essere $>h$, perchè $\frac{1}{10^{h}}>D$, suppongasi, che uno di questi sia $h+k$, essendo $k$ un numero intero positivo. Da ciò avremo $\frac{1}{10^{h+k}}<D$. Estendasi presentemente nella solita maniera la serie $N+\frac{p}{10}+$ ec. fino al termine, che ha per denominatore $10^{h+k}$, e sia

$$N+\frac{p}{10}+\frac{q}{100}+\text{ec.}+\frac{u}{10^{h}}+\frac{v}{10^{h+1}}+\frac{z}{10^{h+2}}+\text{ec.}+\frac{y}{10^{h+k}}=N^{(h+k)}$$

avremo $\sqrt{P-N^{(h+k)}}<\frac{1}{10^{h+k}}$. Ma nella ipotesi che tutti i termini $v$, $z$, ec. $y$ fossero zero, per quanto si è detto nel ( 3.° *prec.* III, IV, V, ec. ) si avrebbe eziandio $\sqrt{P-N^{(h)}}<\frac{1}{10^{h+k}}$, e però $D<\frac{1}{10^{h+k}}$. Dunque se tutti i termini $v$, $z$, ec. i quali, col protraersi della serie, succederebbero ad $u$, risultassero zero, avrebbesi D maggiore nel tempo stesso, e minore di $\frac{1}{10^{h+k}}$; ma questo è un

assurdo. Dunque ec. Quindi pure apparisce che la determinazione dei successivi termini $p$, $q$, $r$, ec. non avrà mai fine.

242. *Probl.* 40.° Dato un intero e positivo P, la cui radice seconda sia irrazionale, ritruovare un numero, il quale differisca dal valor vero della $\sqrt{P}$ meno di una quantità data $\frac{1}{10^h}$, ossia *estrarre*, come dicesi, *per approssimazione la radice quadrata* dal dato P.

*Sol.* Scioglieremo il presente Problema, determinando attualmente la serie (LX), poichè il suo valore $N^{(h)}$ è appunto tale che $\sqrt{P} - N^{(h)} < \frac{1}{10^h}$ (VII. *n.*° 241). Dunque lo scuoprimento dei successivi termini N, $p$, $q$, $r$ ec. $u$ ci darà la soluzione ricercata. Determinato perciò da prima con l' operazione del (*n.*° 239) replicata finchè si può, quel numero, il cui quadrato è il massimo quadrato intero che esiste in P (I. *n.*° 241), sarà esso il valore della prima lettera N, e l' ultimo avanzo, che ne rimane, sarà pel citato (I. *n.*° 241) il valore di $Q = P - N^2$, essendo sempre questo $Q > 0$ (I. *n.*° 240). In (LXI) nell' esempio (B), ove $P = 138396$ otterremo così in (M) $N = 372$, ed in (N) $Q = 12$; nell' esempio (A), ove $P = 2$, otterremo in (C) $N = 1$, ed in (D) $Q = 1$. Fissata ora l' attenzione sopra del solo esempio (A) per trovare in esso il valore della seconda lettera $p$, moltiplico $Q = 1$ per 100, ossia aggiungo in (D) alla destra dello 1 due zeri, e proseguendo ad operare come nel (*n.*° 239), raddoppio in (E) il valore di $N = 1$, mediante la divisione di $10Q = 10$ per $2N = 2$ ricavo il numero 4, e questo pel (III. *n.*° 241) sarà il valore di $p$. Mentre viene aggiunto al precedente N, dovendosi tal valore dividere per 10 (LX), porrò in (C) l'ottenuto 4 alla destra del-

lo 1, frapponendovi, secondo la regola dei decimali, una virgola, e sarà $1,4 = N + \frac{p}{10} = N'$ (III. *n.*° 241). Avuto in (F) il residuo $4 = Q'$, pongo alla sua destra due zeri, onde ottenere $400 = 100Q'$, scrivo in (G) il doppio di 14, cioè 28, e operando nella solita maniera determino il numero 1. Essendo $14 = 10N'$, e però $28 = 10 \times 2N'$ pel (IV. *n.*° 241) lo 1 ottenuto sarà il valore di $q$; ma questo deve essere diviso per 100 (LX), lo porrò dunque in (C) alla destra del 4, e per la natura dei decimali avremo $1,41 = N + \frac{p}{10} + \frac{q}{100} = N''$ (IV. *n.*° 241). Determinato in (H) l'avanzo $119 = Q''$, e con l'aggiunta dei due zeri il numero $11900 = 100Q''$, e posto in (I) il doppio di 141, cioè 282, proseguo ad operare al solito, ed il numero 4, che ne proviene, essendo pel (V. *n.*° 241) il valore di $r$, giacchè $141 = 100\,N''$, e quindi $282 = 100 \times 2N''$, lo collocherò in (C) presso allo 1, e sarà $1,414 = N + \frac{p}{10} + \frac{q}{100} + \frac{r}{1000} = N'''$. Scritto in (K) il residuo $604 = Q'''$, ed in (L) il 2828 doppio del 1414, seguito ad operare sempre nella stessa maniera, finchè ottengo un numero $h$ di valori corrispondenti alle $h$ lettere $p$, $q$, $r$, ec., $u$; e il numero, che in conseguenza di ciò ottienesi in (C) sarà per la serie (LX) il valore che si cerca di $N^h$ più piccolo del valore vero della $\sqrt{P}$ di una quantità minore della data $\frac{1}{10^h}$ (VII. *n.*° 241). Se sia $h = 5$, avremo nel nostro esempio (A) $N' = 1,41421$, e $\sqrt{2} - 1,41421 < \frac{1}{100000}$. Lo stesso si dice di tutti gli altri casi, che ponno venire proposti. Nell'esempio (B) trovandosi $p = 0$,

avremo $Q' = 100Q$ (IV. *n.*° 241), e per conseguenza onde ottenere $100Q'$ non si avrà, che da aggiungere in (N) due zeri alla destra del 1200.

(A) 2 1

(D) 100 — 96

(F) 400 — 281

(H) 11900 — 11296

(K) 60400 — 56564 — 383600 — 282841 — 100759

(C) 1,41421

| (E) | 24 | 281 | (G) | 2824 | (L) | 28282 | 282841 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 1 | | 4 | | 2 | 1 |
| | 96 | 281 | | 11296 | | 56564 | 282841 |

(B) 13,83,96 — 9 — 483 — 469 — 1496 — 1484

(N) 120000 — 74401 — 4559900 — 4464156 — 9574400 — 7440321 — 2134079 00 — 148806444 — 64601456

(M) 372,01612

| | 67 | 742 | 74401 | 744026 | 7440321 | 74403222 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7 | 2 | 1 | 6 | 1 | 2 |
| | 469 | 1484 | 74401 | 4464156 | 7440321 | 148806444 |

243. *Scol.* 5.° I. L' esposto nel (*n.° prec.*) non è il solo metodo, onde accostarsi al vero valore della $\sqrt{P}$; un altro ce ne somministra la formola (XXXVII) (VII *n.°* 204), nel caso di $h = 1$, $k = 2$,

avendosi $\sqrt{(a+x)} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{1.x^2}{2.4.a^2} + \frac{1.3x^3}{2.4.6a^3} - \frac{1.3.5x^4}{2.4.6.8a^4} + \frac{1.3.5.7x^5}{2.4.6.8.10a^5} - \text{ec.}\right)$. Per riconoscere la verità di quanto asserisco e come si possa far uso dell'indicata serie, cominciamo dal porre $a+x=P$, $a=N^2$, $x=Q$, onde avendosi $P=N^2+Q$ e $Q>0$, sia

$$\text{(LXII)}\quad \sqrt{P} = N\left(1 + \frac{Q}{2N^2} - \frac{1.Q^2}{2.4.N^4} + \frac{1.3.Q^3}{2.4.6.N^6} - \frac{1.3.5\,Q^4}{2.4.6.8.N^8} + \frac{1.3.5.7Q^5}{2.4.6.8.10N^{10}} - \text{ec.}\right),$$

Supponghiamo N, Q tali, che $N^2 > Q$, e supponghiamo, che interrotta successivamente la serie nel primo, nel terzo, nel quinto, nel settimo, ec. termine, sia

$$N \times 1 = N$$

$$N\left(1 + \frac{Q}{2N^2} - \frac{1.Q^2}{2.4N^4}\right) = N'$$

$$\text{(LXIII)}\quad N\left(1 + \frac{Q}{2N^2} - \frac{1.Q^2}{2.4N^4} + \frac{1.3.Q^3}{2.4.6.N^6} - \frac{1.3.5.Q^4}{2.4.6.8N^8}\right) = N''$$

$$N\left(1 + \frac{Q}{2N^2} - \frac{1.Q^2}{2.4.N^4} + \frac{1.3.Q^3}{2.4.6N^6} - \frac{1.3.5\,Q^4}{2.4.6.8N^8} + \frac{1.3.5.7.Q^5}{2.4.6.8.10N^{10}} - \frac{1.3.5.7.9Q^6}{2.4.6.8.10.12N^{12}}\right) = N'''$$

ec.

ed interrotta la serie medesima al termine secondo, quarto, sesto, ec. abbiasi

$$N\left(1 + \frac{Q}{2N^2}\right) = M'$$

$$\text{(LXIV)}\quad N\left(1 + \frac{Q}{2N^2} - \frac{1.Q^2}{2.4.N^4} + \frac{1.3.Q^3}{2.4.6N^6}\right) = M''$$

$$N\left(1 + \frac{Q}{2N^2} - \frac{1.Q^2}{2.4.N^4} + \frac{1.3.Q^3}{2.4.6.N^6} - \frac{1.3.5.Q^4}{2.4.6.8.N^8} + \frac{1.3.5.7Q^5}{2.4.6.8.10N^{10}}\right) = M'''$$

II. Nella precedente supposizione di $N^2$ non $<$ Q, dall'andamento della serie (LXII) apparisce che il secondo termine di questa è minore del primo, il terzo minore del secondo, il quarto più piccolo del terzo, e così di seguito.

III. Eseguiscasi in (LXVI) sopra $P = N^2 + Q$ l'operazione dei (*n.i* 220, 221), e siccome questa, a cagione di $\sqrt{P}$ irrazionale, non può aver fine, protraggasi indefinitamente. Avuto il risultato (B), osservo, che si ha il suo termine

terzo $-\frac{Q^2}{2^3N^3} = -\frac{Q^2}{2.2^2N^3} = -\frac{1.Q^2}{2.4.N^3}$,

il quarto $\frac{Q3}{2^4N^5} = \frac{Q^3}{2.2^2.2N^5} = \frac{1.3.Q3}{2.4.6N^5}$,

il quinto $-\frac{5Q4}{2^7N^7} = -\frac{5Q4}{2.2^2.2.2^3N^7} = -\frac{1.3.5Q4}{2.4.6.8N^7}$

il sesto $\frac{7Q5}{2^8N^9} = \frac{7.Q5}{2.2^2.2.2^3.2N^9} = \frac{1.3.5.7.Q5}{2.4.6.8.10N^9}$,

il settimo $-\frac{3\,7.Q6}{2^{10}N^{11}} = -\frac{3.7\,Q6}{2.2^2.2.2^3.2.2^2N^{11}} = -\frac{1.3.5.7.9.Q6}{2.4.6.8.10.12N^{12}}$

ec.

Dunque la serie (B) altro non è, che la (LXII); e per conseguenza i suoi termini anderanno continuamente decrescendo (*prec.* II), si alterneranno, cominciando dal secondo, continuamente nel segno, e le proprietà, che riguardano la (B) spetteranno eziandio alla (LXII), e viceversa.

Potremo riconoscere, che non solamente i termini primi dell'indicata serie (B) uguagliansi ai primi della (LXII), ma che anche gli ulteriori di quella si uguagliano agli ulteriori di questa, coll'osservare, che esprimendosi tanto dall'una, come dall'altra di tali serie il valore sviluppato della $\sqrt{P}$, deggiono essere fra loro uguali, e non essendosi assegnato alcun valore particolare alle N, Q, simile

nguaglianza deve aver luogo, qualunque valore a queste N, Q si attribuisca. Dunque per quanto si è detto nel (*n.°* 202), ciasoun termine della (B) dovrà uguagliare ciasouno della (LXII), e però ec.

IV. Per semplicità maggiore denominiamo N, $p$, $-q$, $r$, $-s$, $t$, $-u$, ec. i termini successivi della serie (B), e però della (LXII); avremo $\sqrt{P} = N + p - q + r - s + t - u +$ ec. e sarà $N > p > q > r > s > t >$ ec. (*prec.* II. III). In conseguenza di ciò risultando le quantità $p - q$, $r - s$, $t - u$, ec. tutte positive, le altre $-q + r$, $-s + t$, ec. tutte negative, ed essendo $M' = N + p$, $M'' = N + p - q + r$, $M''' = N + p - q + r - s + t$, ec.; $N' = N + p - q$, $N'' = N + p - q + r - s$, $N''' = N + p - q + r - s + t - u$, ec. vedesi agevolmente che si avrà

1.° N minore di tutte le quantità M', N', M'', N'', M''', N''', ec.

2.° $N < N' < N'' < N''' <$ ec.

3.° $M' > M'' > M''' >$ ec.

V. Denominiamo Q, $-Q'$, $Q''$, $-Q'''$, $Q''''$, $-Q^{v}$, $Q^{v'}$, ec. gli avanzi, che nella operazione della (Tav. LXVI) ottengonsi successivamente: chiamiamo R, R', R'', R''', R'''', R$^{v}$, R$^{v'}$, ec. le quantità, che dai residui Q, $-Q'$, ec. successivamente si sottraggono: e in questi residui, cominciando dal terzo Q'', dinotiamo finalmente con le lettere $g$, $h$, $i$, $j$, $k$, ec. fornite opportunamente di apici i loro termini successivi, in modo che sia

$$\text{(LXV)}\quad \begin{array}{l} Q'' = g'' - h'' \\ -Q''' = -g''' + h''' - i''' \\ Q'''' = g'''' - h'''' + i'''' - j'''' \\ -Q^{v} = -g^{v} + h^{v} - i^{v} + j^{v} - k^{v} \\ Q^{v'} = g^{v'} - h^{v'} + i^{v'} - j^{v'} + k^{v'} - l^{v'} . \end{array}$$

ec.

Ciò posto, per la natura della operazione (Tav. LXVI) (*n.* 239), e per le supposizioni fatte nel (*prec.* IV) abbiamo $R = (2N + p)p$, $R' = (2N + 2p - q) \times \underset{(2M-q)}{-q} =$

$(2M'-q)\times-q$, $R''=(2N+2p-2q+r)\,r=(2N'+r)r$, $R'''=(2N+2p-2q+2r-s)\times-s=(2M''-s)\times-s$, $R^{IV}=(2N+2p-2q+2r-2s+t)t=(2N''+t)\,t$, $R^{V}=(2N+2p-2q+2r-2s+2t-u)\times-u$,

ec.

Dunque a cagione di $N>p>q>r>s>t>$ ec. i termini successivi, che compongono ciascuna delle R, R', R'', ec. anderanno, astrazion fatta dal segno, continuamente decrescendo: per esempio nella R'' avremo $2Nr>2pr>2qr>r^2$, ossia co' termini proprj (Tav. LXVI) avremo $\frac{Q3}{2^3N4}>\frac{Q4}{2^4N6}>\frac{Q5}{2^6N8}>\frac{Q6}{2^8N^{10}}$.

Ora per essere amendue i primi termini della (B) positivi, e gli altri alternantisi nel segno (*prec.* III), mentre dalle quantità Q, $-Q'$, Q'', ec. sottraggonsi le rispettive R, R', R'', ec. distruttosi il primo termine di ciascuna di quelle col primo termine di ciascheduna di queste, i termini ulteriori non fanno infine che sommarsi rispettivamente fra loro: così mentre dalla $-Q'''$ sottraesi per esempio la R''', distruttosi il primo termine $-\frac{5Q4}{2^6N6}$ col primo $-\frac{5Q4}{2^6N6}$, i secondi due si sommano nella Q'' nel solo termine $\frac{7Q5}{2^7N8}$, i terzi due nel solo $-\frac{7Q6}{2^9N^{10}}$, e gli ultimi due della R''' divengono $+\frac{5Q7}{2^{10}N^{12}}$, $-\frac{5Q8}{2^{14}N^{14}}$. Dunque, siccome i successivi termini in ciascuna delle R, R', R'', ec. vanno, prescindendo dal segno, sempre decrescendo, così andranno sempre decrescendo, astrazion fatta dal segno, ancora i termini di ciascuna delle Q'', $-Q'''$, Q'', ec.: quindi nella Q'' sarà $\frac{Q3}{2^3N4}>\frac{Q4}{2^6N6}$; nella $-Q'''$ sarà $\frac{5Q4}{2^6N6}>\frac{Q5}{2^6N8}>\frac{Q6}{2^6N^{10}}$, ec. e servendoci delle espressioni (LXV)

nella Q'' avremo $g'' > h''$, nella $-Q'''$ sarà $g''' > h''' > i'''$: nella $Q^{IV}$ si avrà $g^{IV} > h^{IV} > i^{IV} > j^{IV}$, ec.

VI. Dall'alternazione dei segni nei termini secondo, terzo, quarto, ec. della serie (B) (*prec.* III), e da quanto si è detto nel (*prec.* V.) facilmente si vede, che i termini successivi di ciascuna delle quantità $Q'', -Q''', Q^{IV}$, ec. si deggiono continuamente alternare nel segno, e che il termine primo in ciascheduna delle Q, Q'', $Q^{IV}$, $Q^{VI}$ ec. è positivo risultando esso negativo in ciascuna delle $-Q', -Q''', -Q^{V}$, ec.

244. *Cor.* Applicando alle espressioni (LXV) quanto si è veduto nei (V, VI. *n. prec.*) dedurremo agevolmente.

I. Che a cagione di $g'' > h''$, deve essere $Q'' > o$.

II. Avendosi $g''' > h''' > i'''$, (*prec.* V), e però $h''' - i''' > o$, ed insieme $< h'''$, sarà $g''' - (h''' - i''') > o$; ma per la seconda delle Equazioni (LXV) $g''' - (h''' - i''') = Q'''$. Dunque avremo $Q''' > o$.

III. Per essere $h^{IV} > i^{IV} > j^{IV}$; con un discorso uguale a quello del (*prec.* II) troveremo che $h^{IV} - i^{IV} + j^{IV} > o$; e a cagione di $i^{IV} > j^{IV}$ sarà $h^{IV} - i^{IV} + j^{IV} < h^{IV}$, ma $g^{IV} > h^{IV}$, onde $g^{IV} - h^{IV} > o$. Dunque sarà ancora $g^{IV} - (h^{IV} - i^{IV} + j^{IV})$ e però $Q^{IV} > o$ (LXV).

IV. Poichè $h^{V} > i^{V} > j^{V} > k^{V}$, come nel (*prec.* III), vedrassi dover essere $h^{V} - i^{V} + j^{V} - k^{V} > o$, e a cagione di $i^{V} > j^{V}$ avremo $h^{V} - i^{V} + j^{V} - k^{V} < h^{V}$. Dunque essendo $g^{V} - h^{V} > o$ avrassi ancora $g^{V} - (h^{V} - i^{V} + j^{V} - k^{V})$, e quindi per le (LXV) $Q^{V} > o$.

V. Come nel (*prec.* III) vedremo dover essere $h^{VI} - i^{VI} + j^{VI} - k^{VI} + l^{VI} > o$; ma a cagione di $i^{VI} > j^{VI}$, e di $k^{VI} > l^{VI}$ abbiamo $-i^{VI} + j^{VI} < o$, $-k^{VI} + l^{VI} < o$. Dunque risultando $h^{VI} - i^{VI} + j^{VI} - k^{VI} + l^{VI} < h^{VI}$, ed essendo $g^{VI} - h^{VI} > o$, ne verrà $g^{VI} - (h^{VI} - i^{VI} + j^{VI} - k^{VI} + l^{VI})$, e per conseguenza $Q^{VI} > o$.

Proseguendo innanzi il medesimo discorso, dai

*cit.* V, VI, *n. prec.*) apparisce, che dovrà risultare anche in seguito $Q^{v'''}>0$, $Q^{v'''}>0$, ec.

245. *Teor.* 5.° Nelle supposizioni del (*n.* 243) tutte le quantità (LXIII) ossia le N, N', N'', N''', ec. sono $<\sqrt{P}$; le (LXIV) ossia le M', M'', M''', ec. ne sono maggiori; e frattanto sì l'une che le altre si avvicinano al valore di essa $\sqrt{P}$ entro dei limiti sempre più piccoli.

*Dim.* I. Ottenuta con l'operazione (LXVI) la serie (B) comincio ad osservare, che a cagione di $P=N^2+Q$, abbiamo già $N<\sqrt{P}$.

Essendo $R=2Np+p^2$ (V. *n.* 243), avremo $N^2+R=N^2+2Np+p^2$: ma per la natura della sottrazione dalla (LXVI) si ha $Q=R=-Q'$, e però $R=Q+Q'$, onde $N^2+R=N^2+Q+Q'=P+Q'>P$, perchè avendosi $-Q'=-\frac{Q^2}{2^2N^2}$ quantità necessariamente negativa, sarà, cambiato il segno, $Q'>0$. Dunque risultando $N^2+2Np+p^2>P$, sarà $N+p$, e però $M'>\sqrt{P}$.

A cagione di $R'=-2M'q+q^2$ (V. *n.* 243), sarà $M'^2+R'=M'^2-2M'q+q^2$: ma dalla (LXVI) abbiamo $-Q'-R'=Q''$, e quindi $M'^2+R'=M'^2-Q'-Q''$. Dunque essendo $M'^2-Q'=P$, e $Q''>0$ (I. *n.* 244), risulterà $M'^2+R'<P$, e però $M'^2-2M'q+q^2=(M'-q)^2=N'^2<P$, d'onde $N'<\sqrt{P}$.

L'equazione $R''=2N'r+r^2$ (V. *n.* 243), somministra l'altra $N'^2+R''=N'^2+2N'r+r^2=(N'+r)^2=M''^2$; ma a cagione di $Q''-R''=-Q'''$ (LXVI) abbiamo $N'^2+R''=N'^2+Q''+Q'''=P+Q'''$, perchè $N'^2+Q''=P$. Dunque, per essere $Q'''>0$ (II. *n.* 244), si avrà $N'^2+R''>P$, e per conseguenza $M''>\sqrt{P}$.

Nella maniera medesima dall'Equazione $R'''=-2M''s+s^2$ (V. *n.* 243) ritraendosi $M''^2+R'''=(M''-s)^2=N''^2$, e dall'altra $-Q'''-R'''=Q^{iv}$ (LXVI) ricavandosi $M''^2+R'''=M''^2-Q'''-Q^{iv}=P-Q^{iv}<P$, perchè $Q^{iv}>0$, otterremo $N''<\sqrt{P}$.

Proseguendo sempre il discorso istesso vedesi,

che sempre risulterà $M''' > \sqrt{P}$, $N''' < \sqrt{P}$, $M'' > \sqrt{P}$, $N'' < \sqrt{P}$, ec. Dunque tutte le quantità espresse con le M, ossia tutte le (LXIV) sono $> \sqrt{P}$, e tutte le espresse con le N, ossia le (LXIII) sono $< \sqrt{P}$.

II. Poichè abbiamo $M' = N + p$, $N' = M' - q$, $M'' = N' + r$, $N'' = M'' - s$, $M''' = N'' + t$, $N''' = M''' - u$, ec. (IV. *n.* 243), $p$ esprime la differenza tra M' ed N, $q$ esprime la differenza tra M' ed N', $r$ la differenza tra M'' ed N', $s$ la differenza tra M'' ed N'', ec. Ora pel (*prec.* I) si ha $N < \sqrt{P} < M'$, $M' > \sqrt{P} > N'$, $N' < \sqrt{P} < M''$, $M'' > \sqrt{P} > N''$, $N'' < \sqrt{P} < M'''$, $M''' > \sqrt{P} > N'''$, ec. Dunque sarà $\sqrt{P} - N < p$, $M' - \sqrt{P} < q$, $\sqrt{P} - N' < r$, $M'' - \sqrt{P} < s$, $\sqrt{P} - N'' < t$, $M''' - \sqrt{P} < u$, ec.; ma pel cit. (IV. *n.* 243) $p > q > r >$ ec. Dunque le differenze tra la $\sqrt{P}$, e le successive quantità N, M', N', M'', N'', M''', N''', ec. saranno contenute entro dei limiti sempre minori. Dunque ec.

246. *Cor.* Poichè la espressione

$$\text{(LXVII)} \qquad \pm N \times \frac{1.3.5.7 \ldots . (2n-3)\, Q^n}{2.4.6.8 \ldots . 2n\, N^{2n}}$$

rappresenta evidentemente il termine generale della serie (LXII) (I. *n.* 243) prendendosi in essa il segno +, quando $n$ è dispari, ed il segno −, quando $n$ è pari: segue da quanto si è dimostrato nel (*n. prec.*) che detta serie prolungata in generale fino al termine (LXVII) differirà dal valore della $\sqrt{P}$ meno della quantità $N \times \frac{1.3.5.7 \ldots . (2n-1)\, Q^{n+1}}{2.4.6.8 \ldots . 2(n+1) N^{2(n+1)}}$ esprimente il termine, che immediatamente succede all'altro (LXVII); e questa differenza sarà in più, se $n$ è dispari, in meno se $n$ è pari.

247. *Probl.* 41. Mediante la serie (LXII) estrarre per approssimazione la radice seconda dal dato numero intero P.

*Sol.* Vogliasi che il numero, che si cerca, dif-

ferisca dal valore della $\sqrt{P}$ meno di una data quantità $\frac{1}{A}$ in cui A sia un intero positivo grande quanto si vuole. Determinato un numero N tale, che sia $N^2 > P - N^2 = Q$, e determinato così il corrispondente valore di Q, si sostituiscano essi nella serie (LXII), e protraggasi questa fino esclusivamente ad un termine (LXVII), il cui valore sia non $> \frac{1}{A}$. Ciò fatto, la serie ottenuta quella sarà, che scioglie il Problema.

Per dimostrare, come possa sempre arrivarsi all' accennato termine non $> \frac{1}{A}$, suppongo, che diviso $N^2$ per Q ne venga un quoto G, ed un avanzo $k$, onde $N^2 = GQ + k$, e $\frac{Q}{N^2} = \frac{1}{G + \frac{k}{Q}}$, e supposta per brevità $G + \frac{k}{Q} = H$, abbiasi $\frac{Q}{N^2} = \frac{1}{H}$; sostituisco nella serie (LXII), ed essa diverrà

$$\sqrt{P} = N\left(1 + \frac{1}{2H} - \frac{1 \cdot 1}{2.4.H^2} + \frac{1.3}{2.4.6.H^3} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8H^4} \cdot\right.$$

Ora poichè si ha $N^2 > Q$, e però G un intero non $< 1$, siano di numero $h$ le cifre componenti G, e sia primieramente $h$ non $< 2$. Avendosi G non $< 10^{h-1}$, ed essendo $\frac{k}{Q}$ non $< 0$, onde H non $< G$, sarà ancora H non $< 10^{h-1}$, e però $\frac{1}{H}$ non $> \frac{1}{10^{h-1}}$ e finalmente $\frac{1}{H^x}$ non $> \frac{1}{10^{(h-1)x}}$, essendo $x$ un numero positivo. Moltiplicato ora il numero A per N, suppongasi che in AN si contengano $i$ classi,

onde $AN < 10^i$, ed $\frac{1}{AN} > \frac{1}{10^i}$. Facciasi finalmente $(h-1)x = i$: ricavandosi quindi $x = \frac{i}{h-1}$ osservo, se $\frac{i}{h-1}$ è numero intero, se lo è, lo determino e lo chiamo $n$, se non lo è, chiamo $n$ l'intero prossimamente $> \frac{i}{h-1}$, ed avremo evidentemente $\frac{1}{H^n} < \frac{1}{AN}$, e però $\frac{N}{H^n} < \frac{1}{A}$, ossia $\frac{NQ^n}{N^{2n}} < \frac{1}{A}$; ma il termine (LXVII) è, prescindendo dal segno, evidentemente $< \frac{NQ^n}{N^{2n}}$. Dunque sarà ancora lo stesso (LXVII) $< \frac{1}{A}$.

Sia in secondo luogo $h = 1$. Poichè $H > 1$, elevando questa H alle successive potenze, arriverò certamente ad una potestà, che dirò $H^g$, nella quale esisterà una parte intera fornita di un numero di cifre non $< 2$: sia pertanto questo numero di cifre $l$, avremo, come precedentemente $H^g$ non $< 10^{l-1}$, e però $\frac{1}{H^g}$ non $> \frac{1}{10^{l-1}}$, ed $\frac{1}{H^{gx}}$ non $> \frac{1}{10^{(l-1)x}}$. Fatta l'equazione $(l-1)x = i$, si determini, come di sopra un intero $n =$, oppure prossimamente $> \frac{i}{l-1}$; e in conseguenza di ciò risultando quì pure $\frac{1}{H^n} < \frac{1}{AN}$, si avrà $\frac{NQ^n}{N^{2n}}$, e quindi il termine (LXVII) $< \frac{1}{A}$. Ora in amendue questi casi l'indicato numero $n$ è sempre attualmente determinabile, e determinabile indipendentemente dalla stessa serie

(LXII). Dunque sarà ancora sempre determinabile il termine (LXVII), che somministra il domandato limite di approssimazione.

Sia per esempio $P = 27$, e vogliasi un numero che differisca dalla $\sqrt{27}$ meno di $\frac{1}{100000}$. Preso $N^2 = 25$, e però $Q = 2$, sarà $\frac{Q}{N^2} = \frac{2}{25}$; ma $\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$, onde il precedente $G = 12$, ed $h = 2$, ed inoltre $AN = 500000$, onde $i = 6$. Dunque, risultando $x = \frac{i}{h-1} = \frac{6}{2-1} = 6$, e però $n = 6$, otterrò certamente l'approssimazione richiesta, calcolando la serie (LXII) entro del termine settimo. Ora, sostituendo, osservo, che il termine quinto diviene $\frac{5\,1.3.5.2^4}{2.4.6.8.5^8} = \frac{1}{8.5^6} = \frac{1}{125000} < \frac{1}{100000}$. Dunque per soddisfare a quanto si richiede, basterà nel caso presente, che ci fermiamo al termine quarto, e sarà il risultato

$$5\left(1+\frac{2}{2.5^2}-\frac{1.2^2}{2.4.5^4}+\frac{1.3.2^3}{2.4.6.5^6}\right) = 5+\frac{1}{5}-\frac{1}{2.5^3}+\frac{1}{2.5^5}$$

$$= 5+\frac{2.5^4-5^2+1}{2.5^5} = 5+\frac{5^2(2.5^2-1)+1}{2.5^5} = 5+\frac{25.49+1}{2.5^5}$$

$= 5+\frac{1226}{6250}$ il domandato; tale cioè, che $5+\frac{1226}{6250} - \sqrt{27} < \frac{1}{100000}$.

248. *Scol.* 6.° I. Quanto il termine $N^2$ è più grande di $Q$, dalla natura delle frazioni è chiaro, che tanto più sollecitamente potremo ottenere la soluzione del precedente Problema. Nel supposto esempio di $P = 27$ ( *n.° prec.* ) onde ottenere il numero $5+\frac{1226}{6250}$, che differisce dalla $\sqrt{27}$ meno di

$\frac{1}{100000}$, si è spinta la serie fino al quarto termine inclusivamente: che se venga richiesto di avere una simile approssimazione, calcolando un minor numero di termini, basterà attribuire ad $N^a$, che presentemente può anche essere un numero non intero, un valore opportunamente $> 25$; la determinazione poi di tal valore potrà ottenersi mediante il (*n.°* 242). Truovato di fatti con questo mezzo il numero $5,1 = \frac{51}{10}$, il cui quadrato differisce da 27 di $\frac{99}{100}$, pongo $N^a = \frac{51^2}{100}$, $Q = \frac{99}{100}$ sostituisco nella (LXII), ed avuto così $\sqrt{27} = \frac{51}{10}\left(1 + \frac{99}{2.51^2} - \frac{1.99^2}{2.4.51^4} + \frac{1.3.99^3}{2.4.6.51^6} - \text{ec.}\right)$, ossia riducendo a più semplice espressione, $\sqrt{27} = \frac{51}{10}\left(1 + \frac{11}{2.17^2} - \frac{1.11^2}{2.4.17^4} + \frac{1.3.11^3}{2.4.6.17^6} - \text{ec.}\right)$ osservo, che $\frac{51.1.3.11^3}{10.2.4.6.17^6} = \frac{51 \times 1331}{10 \times 19310052} = \frac{51}{10\left(145079 + \frac{\cdots}{1331}\right)} < \frac{1}{100000}$. Dunque in questa ipotesi basterà che ci fermiamo al terzo termine, e il risultato $\frac{51}{10}\left(1 + \frac{11}{2.17^2} - \frac{1.11^2}{2.4.17^4}\right)$ differirà da $\sqrt{27}$ meno di $\frac{1}{100000}$.

II. Sonovi alcuni casi, ne' quali l'artifizio del (*prec.* I) è assolutamente necessario: ogniqualvolta l'intero P è tale, che non esiste alcun quadrato perfetto $N^a$ intero $< P$, il quale somministri il residuo $P - N^a = Q < N^a$; allora non verificandosi

la condizione fondamentale supposta (*n.°* 243), non avrebbe più luogo tutto ciò, a cui si appoggia la soluzione del Problema del (*n.°* 247). Ma quali sono questi casi? Per determinarli, supponghiamo, che $x^2$ rappresenti il massimo quadrato intero perfetto, che si contiene in P, onde $(x+1)^2 > P$; e sia $x^2$ non $> Q$. Dal rapporto $x^2 + 2x + 1 > P$ sottraggasi l'altro $x^2$ non $> Q$, ne verrà $2x + 1 > P - Q$, e però a cagione di $P = x^2 + Q$, $2x + 1 > x^2$, e quindi $x^2 - 2x < 1$, $x^2 - 2x + 1 < 2$, $x - 1 < \sqrt{2}$, e finalmente $x < 1 + \sqrt{2}$. Ora $x$ dev'essere intero, e $> 0$, e degl' interi $> 0$ e $< 1 + \sqrt{2}$ non vi sono che i due 1, 2. Dunque il supposto $x^2$ non potrà eguagliare che $1^2 = 1$, oppure $2^2 = 4$; ma Q dev' essere non $< x^2$, ed $x^2$ il più grande quadrato intero perfetto, che esiste in $P = x^2 + Q$. Dunque, allorchè $x^2 = 1$, non potendo Q uguagliare che 1, ovvero 2, e quando $x^2 = 4$ non potendo che essere $Q = 4$; tre soli saranno i casi sovraccennati, quello cioè di $P = 1^2 + 1 = 2$, l' altro di $P = 1^2 + 2 = 3$, ed il terzo di $P = 2^2 + 4 = 3$. Supposto pertanto in conseguenza del (*n.°* 242) $N^2 = 1, 4$, $Q = \frac{4}{100}$, quando $P = 2$; $N^2 = 1,7$, $Q = \frac{11}{100}$ quando $P = 3$; ed $N^2 = 2,8$, $Q = \frac{16}{100}$ quando $P = 8$, otterremo in corrispondenza

$$\sqrt{2} = \frac{14}{10}\left(1 + \frac{4}{2.14^2} - \frac{1.4^2}{2.4.14^4} + \frac{1.3.4^3}{2.4.6.14^6} - \text{ec.}\right)$$

$$\sqrt{3} = \frac{17}{10}\left(1 + \frac{11}{2.17^2} - \frac{1.11^2}{2.4.17^4} + \frac{1.3.11^3}{2.4.6.17^6} - \text{ec.}\right)$$

$$\sqrt{8} = \frac{28}{10}\left(1 + \frac{16}{2.28^2} - \frac{1.16^2}{2.4.284} + \frac{1.3.163}{2.4.6.286} - \text{ec.}\right)$$

III. Se il valore, che si richiede prossimo alla $\sqrt{P}$, vuolsi di lei minore, allora l' ultimo termi-

ne, di cui si tien conto dev'essere negativo; e deve questo essere positivo quando il valore cercato si vuole $> \sqrt{P}$ (*n.°* 245, I. *n.°* 243).

249. *Scol.* 7.° I. Supposta l' Equazione

$$x = a + \frac{1}{b+x}$$

tolgansi da essa i rotti, e si sciolga. Avutosi quindi $x^2 - (a-b)x = ab + 1$, pel (*n.°* 226) ritrarremo $x = \frac{a-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(a-b)^2}{4} + ab + 1\right)}$. Si faccia $a = b$, e si tenga conto del solo segno $+$; ricavandosi quindi $x = \sqrt{(a^2+1)}$, l' equazione supposta diverrà $x = \sqrt{(a^2+1)} = a + \frac{1}{a+x}$. Si sostituisca in questa invece della $x$ il suo valore $a + \frac{1}{a+x}$, ne verrà $\sqrt{(a^2+1)} = a + \frac{1}{2a + \frac{1}{a+x}}$: si sostituisca di nuovo il valore medesimo, e otterremo $\sqrt{(a^2+1)} = a + \frac{1}{2a + \frac{1}{2a + \frac{1}{a+x}}}$. Si progredisca a piacimento la sostituzione istessa, ed è chiaro, che ci verrà

(LXVIII)
$$\sqrt{(a^2+1)} = a + \frac{1}{2a + \frac{1}{2a + \frac{1}{2a + \text{ec.}}}}$$

frazione continua (*n.°* 117), la quale potremo spingere innanzi quanto a noi piace, senza però, che mai giunga a terminarsi. Dunque supposto $P = a^2 + 1$, potremo svolgere la $\sqrt{P}$ in una frazione con-

tinua, la quale può avanzarsi quanto si vuole.

II. Supponghiamo, che si tronchi la precedente frazione (LXVIII) in un determinato luogo, per esempio dopo il termine quinto: aggiungasi all' ultimo denominatore $2a$ la frazione $\frac{1}{a+x}$, e sarà esattamente $\sqrt{(a^2+1)} = a + \cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{a+x}}}}}$

(*prec.* I). Truovinsi ora giusta i (*n.*° 117, II. 114) le successive frazioni ordinarie, che si uguagliano alle corrispondenti porzioni $a$, $a + \frac{1}{2a}$, $a + \cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a}}$, ec. e chiamate queste come nel (*n.*° 115)

$$\frac{a}{1}, \frac{h}{H}, \frac{i}{I}, \frac{k}{K}, \frac{l}{L}, \frac{m}{M},$$

avremo l' ultima $\frac{m}{M} = \frac{(a+x)l+k}{(a+x)L+K}$ (II. *n.*° 114) esattamente $= \sqrt{(a^2+1)}$ (*n.*° 117); ma le altre $\frac{a}{1}$, $\frac{h}{H}$, ec. son tali, che si avvicinano sempre di più, ed anzi quanto è mai possibile, avuto riguardo alla maggiore semplicità dei termini, al valore della $\frac{m}{M}$. Dunque esse stesse si accosteranno nella maniera medesima al valore della $\sqrt{(a^2+1)}$: ma quello che si è detto nella ipotesi presente, si dice in egual modo in qualunque altro luogo diverso, ed oltre del quinto si tronchi la frazione (LXVIII). Dunque quanto più si prolunga la serie delle prece-

denti quantità $\frac{a}{1}$, $\frac{h}{H}$, ec. tanto più ci accosteremo, e sempre nella sovraccennata maniera al valor vero della $\sqrt{(a^2+1)}$.

III. Essendo nella (LXVIII) i successivi denominatori costantemente $=2a$, le frazioni $\frac{a}{1}$, $\frac{h}{H}$, ec. acquisteranno un andamento costante, per cui potremo determinare una formola generale. Operando infatti secondo il (II. *n.*° 114), si troverà

$$\frac{a}{1} = \frac{a}{1}$$

$$\frac{h}{H} = \frac{2a^2+1}{2a},$$

$$\frac{i}{I} = \frac{2^2a^3+(2+1)a}{2^2a^2+1},$$

$$\frac{k}{K} = \frac{2^3a^4+(2^2+2.2)a^2+1}{2^3a^3+2.2a},$$

$$\frac{l}{L} = \frac{2^4a^5+(2^3+3.2^2)a^3+(2.2+1)a}{2^4a^4+3.2^2a^2+1},$$

e chiamata $\frac{r}{R}$ la frazione *nesima* troveremo essere in generale

$$\frac{r}{R} = \Big(2^{n-1}a^n + (2^{n-2} + (n-2)2^{n-3})a^{n-2} + \big((n-3)2^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)}{2}2^{n-5}\big)a^{n-4} + \Big(\frac{(n-4)(n-5)}{2}2^{n-6} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3}2^{n-7}\Big)a^{n-6} + \Big(\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3}2^{n-8} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{2.3.4}2^{n-9}\Big)a^{n-8} + \Big(\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{2.3.4}2^{n-10} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{2.3.4.5.}2^{n-11}\Big)a^{n-10} + \Big(\frac{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{2.3.4.5}2^{n-12} +$$

$$\frac{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{2.3.4.5.6}\times$$

$$\left(2^{n-13}\right)a^{n-12}+\text{ec.}\Big):\Big(2^{n-1}a^{n-1}+(n-2)2^{n-3}a^{n-3}+$$

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}2^{n-5}a^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3}2^{n-7}a^{n-7}+$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{2.3.4}2^{n-9}a^{n-9}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{2.3.4.5}2^{n-11}a^{n-11}+$$

$$\frac{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{2.3.4.5.6}2^{n-13}a^{n-13}+\text{ec.}\Big)$$

formola, il cui andamento tanto rapporto al numeratore, come al denominatore è assai facile a concepirsi, onde all' occorrenza si potrà agevolmente prolungare quanto si vuole. Da essa poi ricaveremo ciascuna delle frazioni particolari $\frac{a}{1}$, $\frac{h}{H}$, ec., col supporre in corrispondenza $n=1$, 2, ec. e col protrarre tal formola, finchè cominciano a sorgere sulla $a$ degli esponenti negativi. Facciasi per esempio $n=5$, dalla (LXIX) otterremo

$$\frac{r}{R}=\Big(2^4a^5+(2^3+3.2^2)a^3+(2.2+1)a\Big):(2^4a^4+3.2^2a^2+1)=\frac{l}{L};$$

sia $n=8$, ne verrà

$$\frac{r}{R}=\frac{2^7a^8+(2^6+6.2^5)a^6+(5.2^4+10.2^3)a^4+(6.2^2+4.2)a^2+1}{2^7a^7+6.2^5a^5+10.2^3a^3+4.2a},\ \text{ec.}$$

IV. Poichè tutte le frazioni $\frac{a}{1}$, $\frac{i}{I}$, $\frac{l}{L}$, ec. sono $<\sqrt{(a^2+1)}$, e le altre $\frac{h}{H}$, $\frac{k}{K}$, $\frac{m}{M}$, ec. ne sono maggiori (IV. *n.*° 115); ne segue, che quando $n$ è numero dispari sarà $\frac{r}{R}<\sqrt{(a^2+1)}$, e quando $n$ è pari, sarà $\frac{r}{R}>\sqrt{(a^2+1)}$. Quanto più grande poi sarà l' intero $n$, tanto più vicini saranno fra loro i

valori delle due quantità $\frac{r}{R}$, $\sqrt{(a^2+1)}$ avendosi pel (II. *n.*° 116) la loro differenza $< \frac{1}{R^2}$, ed anche $< \frac{1}{RS}$, chiamata $\frac{s}{S}$ la frazione, che succede immediatamente alla $\frac{r}{R}$.

250. *Probl.* 42. Mediante il valore $\sqrt{(P-1)}$ determinare per approssimazione il valore della $\sqrt{P}$, essendo al solito P un intero positivo.

*Sol.* Chiamato $\frac{g\sqrt{(P-1)}}{G}$ il valore che si cerca, vogliasi che la differenza tra $\sqrt{P}$, e $\frac{g\sqrt{(P-1)}}{G}$ sia, come nel (*n.*° 247), $< \frac{1}{A}$, e vogliasi in primo luogo $\frac{g\sqrt{(P-1)}}{G} < \sqrt{P}$. Supposto $P-1=a^2$ determino per $n$ un numero intero dispari tale, che nella (LXIX) risulti il quadrato del denominatore R non $< A$, il che è chiaro, che può sempre farsi, poichè al crescersi di $n$, il divisore R può aumentarsi evidentemente oltre qualunque quantità venga assegnata; divido il numeratore $r$ per $a$, onde tanto in $\frac{r}{a}$, come nel denominatore R non esistano a cagione di $n$ dispari, che tante potenze della $a$ pari; sostituisco in amendue queste quantità $\frac{r}{a}$, R in vece di $n$ il suo valore già determinato, in vece delle potestà $a^2$, $a^4$, $a^6$, ec., i valori $P-1$, $(P-1)^2$, $(P-1)^3$, ec. ed il risultato, che ne viene, moltiplicato per $\sqrt{(P-1)}$ altro non sarà che il cer-

cato valore $\frac{g\sqrt{(P-1)}}{G}$ (III, IV, *n.° prec.*). Che se si voglia $\frac{g\sqrt{(P-1)}}{G} > \sqrt{P}$; allora darò ad $n$ un valore pari, e tale che $R^2$ non $< A$, ridurrò la $\frac{r}{R}$ alla $\frac{ra}{Ra} = \frac{r\sqrt{(P-1)}}{Ra}$, onde gli esponenti della $a$, i quali in R erano tutti dispari, divengano tutti pari; farò tanto in $r$, come in $Ra$ le precedenti sostituzioni, e la $\frac{r\sqrt{(P-1)}}{Ra}$ si convertirà così nella domandata $\frac{g\sqrt{(P-1)}}{G} > \sqrt{P}$ (III, IV. *n.° prec.*).

251. *Scol.* 8. Prima di applicare la soluzione del precedente problema ad alcun esempio, premettiamo alcune cose, le quali potranno facilitare le operazioni.

I. Osservo, che nella (LXIX) alla formazione del numeratore $r$ entra in parte il denominatore R, moltiplicato per $a$, e che supposto $2a = z$, risulta

$$R = z^{n-1} + (n-2)z^{n-3} + \frac{(n+3)(n-4)}{2} z^{n-5} + \ldots$$

$$\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3} z^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{2.3.4} z^{n-9} +$$

$$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{2.3.4.5} z^{n-11} \quad \text{(LXX)}$$

$$+ \frac{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{2.3.4.5.6} z^{n-13} + \text{ec.}$$

$$r = aR + z^{n-2} + (n-3)z^{n-4} + \frac{(n-4)(n-5)}{2} z^{n-6} +$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3} z^{n-8} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{2.3.4} z^{n-10} +$$

$$\frac{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{2.3.4.5} z^{n-12} + \text{ec.}$$

II. Facciamo $n=13$. Dai coefficienti $n-2$, $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ ec. acquistandosi perciò i valori 11, 45, ec. e dagli altri $n-3$, $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$, ec. i valori 10, 36, ec. avremo

$$R=z^{12}+11z^{10}+45z^8+84z^6+70z^4+21z^2+1,$$
$$r=aR+z^{11}+10z^9+36z^7+56z^5+35z^3+6z,$$

e fatto $z^2$ ossia $4a^2=u$, otterremo

$$R=u^6+11u^5+45u^4+84u^3+70u^2+21u+1, \quad \text{(LXX}$$
$$r=(R+2(u^5+10u^4+36u^3+56u^2+35u+6))a.$$

Se si fosse supposto $n=11$ sarebbesi in egual modo ottenuto

$$R=u^5+9u^4+28u^3+35u^2+15u+1 \quad \text{(LXX}$$
$$r=(R+2(u^4+8u^3+21u^2+20u+5))a.$$

252. *Probl.* 43. Vogliasi determinare speditamente il valore, che acquista un' espressione algebrica intera avente una sola indeterminata, allorchè a questa indeterminata si attribuisce un dato valore.

*Sol.* Sia per esempio in (LXXII) R la espressione, di cui si cerca speditamente il valore, mentre ponesi $u=4$. Si scrivano in (LXXIII.A) in una linea orizzontale i coefficienti 1, 9, 28 ec. delle successive potenze della $u$, cominciando dalla più alta; alla sinistra di questi si ponga separato con una lineetta verticale il 4 proposto, quindi scritto sotto del numero secondo 9 il primo 1, si moltiplichi questo 1 pel 4, si sommi il prodotto 4 col sovrapposto 9, e scrivasi sotto del terzo coefficiente 28 il risultato 13. Moltiplicato questo 13 pel 4 si sommi il prodotto 52 col 28 sovrapposto, e scrivasi il risultato 80 sotto del coefficiente quarto 35. Si prosegua avanti sempre nella stessa maniera, operando in un modo perfettamente uguale a quello, che si è esposto nel (n.° 206) per la formazione delle se-

seconde righe; e ciò fatto il risultato ultimo 5741, che se ne ottiene, sarà il valore, che acquista la nostra R (LXXII) nella ipotesi di $u=4$.

Per conoscere la ragione di questa operazione, suppongasi, che la espressione data sia la $Au^3+Bu^2+Cu+D$, e che si voglia $u=p$. Effettuata su di lei in (LXXIII,B) la precedente operazione, per ultimo risultato ci viene $Ap^3+Bp^2+Cp+D$; ma questo è appunto ciò che diviene la $Au^3+Bu^2+Cu+D$ per la supposizione di $u=p$. Dunque ottenendosi ciò, qualunque siansi i coefficienti A, B, ec. e quello, che si è detto della espressione di 3° grado, posta tale per maggiore semplicità, dicesi ugualmente di tutte le altre. Dunque ec.

Se nella espressione data mancasse qualche termine, come per esempio nella $2u^5-45u^3+7$, nella quale mancano i termini corrispondenti alle potenze $u^4$, $u^2$, $u$; allora riduco simile espressione alla forma $2u^5+0\times u^4-45u^3+0\times u^2+0\times u+7$, e volendosi per esempio $u=3$, opero in (LXXIII,C), come di sopra, ponendo tanti zeri come coefficienti dei termini mancanti, e sarà l' ultimo risultato $-722=2.3^5-45.3^3+7$

(LXXIII)

(A)

4 | 1, 9, 28, 35, 15, 1
1, 13, 80, 355, 1435, 5741

(B)

$p$ | A B, C, D
A, $Ap+B$ $Ap^2+Bp+C$, $Ap^3+Bp^2+Cp+D$.

(C)

3 | 2, 0, −45, 0, 0, 7,
2, 6, −27, −81, −243, −722.

253. *Esem.* 39. Determinare il peso di un dato corpo col mezzo d' una bilancia infedele per braccia disuguali.

*Sol.* Poichè le due braccia della bilancia pongonsi disuguali, chiamo il braccio destro A, il si-

nistro B, e chiamo $b$ il peso già noto di ciascuno dei due bacini, ed $x$ il peso, che si cerca. Collocato il dato Corpo nel bacino destro, supponghiamo che si trovi equilibrarsi con lui un determinato peso $p$ posto nel bacino sinistro, e trasportato in seguito al bacino sinistro esso corpo, truovisi, che si ha equilibrio, ponendo nel bacino destro un determinato peso $q$. Ciò fatto, osservo, che $x+b$ è il peso totale, il quale pende nel primo esperimento dal braccio A della bilancia, e $p+b$ il peso pendente dal braccio B. Dunque a cagione dell' equilibrio attuale dovendo questi due pesi pei principj di Statica essere in ragione inversa della lunghezza de' bracci, considerandosi i pesi de' bracci medesimi come trascurabili, sarà $x+b:p+b::B:A$; ma in conseguenza dell' esperimento secondo, abbiamo ancora $q+b:x+b::B:A$. Dunque avendosi $x+b:p+b::q+b:x+b$, ne verrà $(x+b)^2=(p+b)(q+b)$, ed $x=\sqrt{(p+b)(q+b)}-b$, e questi sarà il peso domandato.

Sia per esempio $b=1$, $p=7$, $q=8$, risulterà $x=\sqrt{8.9}-1=\sqrt{72}-1=6\sqrt{2}-1$. Onde trovare per approssimazione il valore della $\sqrt{2}$, servendomi del metodo esposto nel (*n.°* 250), pongo $P=2$, e però $P-1=a^2=1$, e quindi $a=1$, $z=2a=2$ (*n.°* 251. II), ed $u=4a^2=4$; faccio nelle espressioni (LXX) $n=11$, e convertitesi perciò esse nelle (LXXII), colloco in queste, operando come nel (*n.° prec.*), il 4 in vece di $u$, e ritrovato così essere $R=5741$, $u^4+8u^3+21u^2+20u+1=1189$, per cui $r=5741+2.1189=8119$, il rotto $\frac{r}{R}=\frac{8119}{5741}$ esprimerà un valore prossimo alla $\sqrt{2}$, onde avremo prossimamente il peso richiesto $x=\frac{6\times 8119}{5741}-1$, e giacchè $\sqrt{2}-\frac{8119}{5741}<\frac{1}{5741^2}=\frac{1}{32959081}$ (IV. *n.°* 249), sarà $x-$

$\left(\frac{6\times 8119}{5741} - 1\right) < \frac{6}{32959081}$. Se si fosse supposto $n = 13$; tenendo allora conto delle formole (LXXI) avrei mediante il metodo del (*n.°prec.*) determinato $R = 33461$, $r = 33461 + 2.6930 = 47321$, e quindi $\frac{r}{R} = \frac{47321}{33461}$ sarebbe stato il numero prossimo alla $\sqrt{2}$, onde $x$ prossimamente $= \frac{47321}{33461} - 1$; avendosi poi $\sqrt{2} - \frac{47321}{33461} < \frac{1}{(33461)^2} = \frac{1}{1119638521}$, sarà $x - \left(6\times\frac{47321}{33461} - 1\right) < \frac{6}{1119638521}$.

254. *Scol.* 9. I. Siccome l' accostamento delle trovate frazioni $\frac{8119}{5741}$, $\frac{47321}{33461}$ alla $\sqrt{2}$ è rispettivamente maggiore dei valori $\frac{1}{10000000}$, $\frac{1}{100000000}$ (*numero prec.*), ne segue, che se getterò in decimali queste $\frac{8119}{5741}$, $\frac{47321}{33461}$, la prima darà un risultato esatto fino alla settima cifra decimale; e la seconda lo darà esatto fino alla nona.

II. Poichè quanto maggiore è la quantità $a$ tanto risulta più grande la $z = 2a$, e però il valore della R (LXX), (LXXI), (LXXII), e quindi tanto più piccolo il valore della $\frac{1}{R^2}$; dal (IV. *n.°*249) apparisce, che quanto più grande è la $a$, e per conseguenza la $P = a + 1$, tanto maggiore sarà l'approssimazione della $\frac{r}{R}$ alla $\sqrt{P}$: ma nella ipotesi di $P=2$, e però di $a=1$, col fare nelle (LXX) $n=11$,

si ottiene una frazione $\frac{r}{R}$ assai vicina al valor vero della $\sqrt{2}$ (*n.° prec.*). Dunque allorchè alla P darannosi dei valori $> 2$, e però alla $a$ dei valori $> 1$; dovendo, col porre parimenti $n = 11$, risultare in $\frac{r}{R}$ un' approssimazione tanto maggiore verso la $\sqrt{P}$; ne segue, che mentre si voglia col metodo del (*n.°* 250) ottenere prossimamente il valore della $\sqrt{P}$, potremo, ritenuto costantemente $n = 11$, servirci delle formole (LXXIII). Le (LXXII) nate dalla supposizione di $n = 13$, ci darebbero un' approssimazione maggiore.

255. *Scol.* 10. Pongasi l' equazione

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + x}} .$$

Tolti da questa i rotti, e sciolta l' equazione $bx^2 - b(a-c)x = abc + a + c$, che ne risulta, si faccia nel valore $x = \frac{a-c}{2} + \sqrt{\left( \frac{(a-c)^2}{4} + \frac{abc+a+c}{b} \right)}$ la quantità $a = b = c$; ne verrà $x = \sqrt{(a^2 + 2)} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + x}}$. Sostituiscasi, come nel (*n.°* 249), in luogo della $x$ la frazione ora determinata; si replichi tale sostituzione quanto si vuole, od ottenendosi

$$\sqrt{(a^2 + 2)} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{2a + \text{ec.}}}}}$$

col discorso stesso del (II. *n.°* 249) troveremo, che ancora col mezzo di questa frazione continua possia-

mo determinare per approssimazione il valore della $\sqrt{P}$, e questo espresso per la $\sqrt{(P-2)}$. Sia per esempio $P = 38$, e però $a^2 = 36$, $a = b$, ne verrà

$$\sqrt{38} = 6 + \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{6+\text{ec.}}}}}} = \frac{192501}{32430}$$

risultando $\frac{192501}{32430} - \sqrt{38} < \frac{1}{(32430)^2}$.

256. *Scol.* 11. Abbiamo nei (*n.* 242, 247, 250, 255) esposti quattro metodi diversi, onde cercare per approssimazione il valore della $\sqrt{P}$, alloracchè P esprime un numero intero e positivo avente la sua radice seconda incommensurabile. Affine però di scegliere tra questi quello, che può essere più opportuno all' uopo, si osservi, che mediante il primo (*n.°* 242) possiamo bensì ottenere assai semplicemente e speditamente il valore prossimo alla radice, ed ottenerlo immediatamente espresso con decimali; ma simile metodo non può applicarsi se non se quando P è un numero particolare determinato. Il metodo secondo (*n.°* 247) al contrario ci darà il valore richiesto in generale, anche allor quando la quantità P, e quindi le N, Q si considerino di valore indeterminato, purchè però si ritenga $N^a > Q$. Questo secondo metodo inoltre, mentre si ponga $N^a$ notabilmente maggiore di Q, potrà darci il chiesto valore prossimo molto più rapidamente di quel che faccia il metodo primo; ma per esso un tal valore non vien dato che con frazioni ordinarie, mentre con l' altro rimane tosto ridotto in decimali. I metodi finalmente terzo (*n.°* 255) potranno essere giovevoli, e spediti quando $\sqrt{(P-\ldots)}$ rapporto a quello, e $\sqrt{(P-2)}$ rapporto a questo sono razio-

nali; ma in caso diverso converrebbe aver conosciuto già prima o determinare attualmente per approssimazione il valore della $\sqrt{(P-1)}$, o della $\sqrt{(P-2)}$, e sostituirlo, il che allungherebbe il lavoro. È vero, che, qualunque siasi P, si può sempre ridurre $\sqrt{P}$ in una frazione continua, nella quale tutti i termini siano interi e razionali; ma mentre $\sqrt{(P-1)}$, $\sqrt{(P-2)}$ siano incommensurabili, simile frazione risulterebbe diversa dalle ritrovate nei (*n.* 249, 255), e la sua determinazione non può aver luogo nel presente Trattato elementare.

257. *Scol.* 12.° I. Siccome i quadrati de' primi nove numeri 1, 2, 3, ec. terminano solamente con una delle cifre 1, 4, 5, 6, 9 (*Tav.* LI), ne segue evidentemente, che se un intero dato finisce con una delle altre 2, 3, 7, 8, esso non potrà mai essere un quadrato perfetto: così non potrà esserlo, se finisce con un numero dispari di zeri.

II. Se il numero da cui si vuole estrarre la radice quadrata sia un rotto razionale, ne avremo la radice estraendo questa tanto dal numeratore, come dal denominatore (I. *n.*° 178). Sarà perciò $\sqrt{\frac{225}{81}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{81}} = \frac{15}{9}$; ma se il denominatore abbia la sua radice irrazionale, allora, prima di eseguire l' operazione, gioverà ridurre il denominatore medesimo ad essere un quadrato perfetto, col moltiplicare amendue i termini del fratto per un numero opportuno. Se per esempio $\frac{49}{12}$, $\frac{531}{11}$, $\frac{a^2+b^2}{a^2b}$, $\frac{b3}{a}$ siano le frazioni date, poichè i divisori 12, 11, $a^2b$, $a$ hanno tutti la loro radice seconda irrazionale, e poichè $3.12=36$, $11.11=121$, $a^2b \times b = a^2b^2$, $a \times a = a^2$ sono tutti quadrati perfetti, ridurrò le frazioni medesime alle altre $\frac{3.49}{3.12} = \frac{147}{36}$, $\frac{11.531}{11.11} = \frac{5841}{121}$

$\frac{b(a^2+b^2)}{a^2b^2}$, $\frac{ab^3}{a^2}$, e sarà $\sqrt{\frac{49}{12}}=\frac{\sqrt{147}}{6}$, $\sqrt{\frac{531}{11}}=\frac{\sqrt{5841}}{11}$.

$\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b}\right)}=\frac{\sqrt{(a^2b+b^3)}}{ab}$, $\sqrt{\frac{b^3}{a}}=\frac{\sqrt{ab^3}}{a}$.

## CAPO V.

### *Dell' estrazione di una radice qualunque dai Polinomj, e dalle quantità numeriche.*

259. *Scol.* 1.° I. Osservando le potenze (XXVIII) (*n.* 199), vedesi, che il cubo di un binomio qualunque $a+x$ contiene il cubo $a^3$ della prima parte $a$, più il triplo del quadrato della prima $a$ moltiplicato nella seconda parte $x$, cioè il termine $3a^2x$, più il triplo del prodotto della parte prima $a$ nel quadrato della seconda $x$, cioè $3ax^2$, più finalmente il cubo $x^3$ della parte seconda.

II. Supposto $x=b+c+d+$ec.$+u$, vedesi, come nel (*n.* 207), che ciò stesso, che si è detto del cubo del binomio $a+x$ (*prec.* I), dicesi ancora del cubo del polinomio $a+b+c+d+$ec.$+u$, considerando la quantità $b+c+d+$ec.$+u$ come seconda parte; onde si ha

$$(a+b+c+d+\text{ec.}+u)^3=a^3+3a^2(b+c+d+\text{ec.}+u)+3a(b+c+d+\text{ec.}+u)^2+(b+c+d+\text{ec.}+u)^3. \quad \text{(LXXIV)}$$

Osservando poi questo cubo, vedesi agevolmente, che in ciascuno de' suoi termini le lettere $a, b, c, d,$ ec., $u$ formano tre dimensioni (*n.* 162), ossia che in ciascuno di essi entrano tre delle accennate $a$, $b$, $c$, ec.

III. Coll' osservare le altre potenze del binomio $a+x$ (XXVIII) potremo agevolmente, come si è fatto riguardo al quadrato (I. *n.* 219), ed al cubo (*prec.* I.) determinare la forma de' termini, che

le compongono. Troveremo così, che la potestà, per esempio, quinta di $a+x$ contiene la quinta potenza $a^5$ della prima parte, più il quintuplo della quarta potenza $a^4$ moltiplicata nella parte seconda $x$, cioè $5a^4x$, più il decuplo della terza potenza $a^3$ nel quadrato $x^2$, ossia $10a^3x^2$, più il decuplo del quadrato $a^2$ nel cubo $x^3$, cioè $10a^2x^3$, più il quintuplo di $a$ in $x^4$, cioè $5ax^4$, più finalmente la potenza quinta $x^5$ della seconda parte $x$. In generale la potenza $(a+x)^m$ si troverà formata della potenza *mesima* $a^m$, della prima parte $a$, più, del prodotto della $a^{m-1}$ nella parte seconda $x$ moltiplicato per $m$, cioè del termine $ma^{m-1}x$, più del prodotto $a^{m-2}x^2$ replicato $\frac{m(m-1)}{2}$ volte, ossia del prodotto $\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}x^2$, e così di seguito (XXXIII) (*n.* 203). Ponendo poi $x=b+c+d+$ ec. $+u$, vedremo, come nel (*n. prec.* II) che dicesi delle potenze $(a+b+c+d+$ ec.$+u)^5$, $(a+b+c+d+$ ec.$+u)^m$ ciò stesso che si è detto de le $(a+x)^5$, $(a+x)^m$ (*n.* 207), e vedremo, che in esse ciascun termine rapporto alle $a$, $b$, $c$, ec. sarà nella prima di 5, e nella seconda di $m$ dimensioni.

259. *Probl.* 44. Supposto $n$ il numero de' termini, che formano il polinomio $(a+b+c+d+$ec.$+u)$, determinare il numero de' termini componenti il suo cubo.

*Sol.* Fisso l'attenzione sopra la prima lettera $a$, e considerando nel cubo del polinomio dato le diverse potenze di questa, veggo, che esso in conseguenza di simili potenze viene ad essere diviso, come apparisce in (LXXIV), e come dai (III. *n. prec.*) in quattro parti, la prima delle quali contiene $a^3$, la seconda $a^2$, la terza $a$, e la quarta è priva affatto di questa lettera: veggo inoltre, che $a^3$ forma un solo termine, che $a^2$ entra in tanti termini,

quante sono le altre lettere $b$, $c$, $d$, ec. $u$, che lo moltiplicano, cioè in $n-1$ termini; e che $a$ entra in tanti termini, quanti sono quelli, i quali formano la seconda potenza $(b+c+d+\text{ec.}+u)^2$, cioè in $\frac{(n-1)n}{2}$ termini (*n.* 218): veggo finalmente, che in $a^3 = aaa$ la lettera $a$ semplice è ripetuta tre volte, in $a^2 = aa$ la stessa $a$ viene ripetuta due volte, ed in $a$ una volta. Dunque conchiuderò, che questa $a$ semplice in tutto il cubo (LXXIV) viene replicata le volte $3 + 2(n-1) + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{6+4n-4+n^2-n}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ora quanto si è detto presentemente della $a$ dicesi in egual modo della lettera $b$, della $c$, ecc. Dunque nel cubo (LXXIV) essendo ciascuna di queste lettere ripetuta $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ volte, ne segue, che $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$ sarà il numero totale delle lettere semplici, che lo formano; ma di tali lettere entrano tre in punto per ciaschedun termine (II. *n. prec.*). Dunque il numero dei termini risultando la terza parte di quello delle lettere, ne segue, che nel cubo del dato polinomio esistono $\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$ termini.

Ponendo $n = 2, 3, 4, 5$, ec. risulta in corrispondenza $\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} = 4, 10, 20, 35$, ec. Dunque mentre nel cubo di un binomio entrano quattro termini, nel cubo di un trinomio ne entrano dieci, in quello d' un quadrinomio venti, trentacinque in quello di un quintinomio, ec.

260. *Scol.* 2. Col discorso medesimo del (*n. prec.*) potremo determinare qual sia il numero de' termini nella quarta potestà del supposto polinomio, quale

il numero stesso nella potestà quinta, quale nella sesta, ec. Difatti

I. Rapporto in primo luogo alla potenza quarta, poichè pel (III. n. 253) si ha

$$(a+b+c+d+\text{ec.}+u)^4 = a^4 + 4a^3(b+c+d+\text{ec.}+u) + 6a^2 (b+c+d+\text{ec.}+u)^2 + 4a(b+c+d+\text{ec.}+u)^3 + (b+c+d+\text{ec.}+u)^4 ,$$

la $a^4$ verrà in essa ripetuta una volta; la $a^3$ vi esisterà tante volte, quanti sono i termini della somma $b+c+d+\text{ec.}+u$, cioè le volte $n-1$; la $a^2$ vi si conterrà tante volte, quanto è il numero de' termini del quadrato $(b+c+d+\text{ec.}+u)^2$, cioè $\frac{(n-1)n}{2}$ volte ($n.$ 218); e la $a$ tante volte, quanto è il numero $\frac{(n-1)(n)(n+1)}{2.3}$ esprimente pel ($n.$ *prec.*) il numero de' termini nel cubo $(b+c+d+\text{ec.}u)^3$. Ora in $a^4 = aaaa$ la $a$ semplice esiste quattro volte, in $a^3 = aaa$ esiste tre volte, due volte in $a^2 = aa$, ed una in $a$. Dunque in tutta la supposta potenza quadrata-quadrata essa $a$ semplice sarà contenuta le volte $4 + 3(n-1) + \frac{2(n-1)n}{2} + \frac{n(n-1)(n+1)}{2.3}$ $= \frac{24 + 18n - 18 + 6n^2 - 6n + n^3 - n}{2.3} = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{2.3}$ $= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}$; ma lo stesso numero di volte contienesi nell' indicata potenza anche ciascuna delle $b$, $c$, $d$, ec., $u$, poichè quello che si dice della $a$, si dice eziandio delle altre lettere. Dunque $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}$ essendo il numero totale delle lettere semplici, che entrano nella formazione dell' esposta potenza, e di tali lettere entrandone quattro per ciascun termine (III. $n.$ 253) il numero de'

termini medesimi sarà $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4}$. Se sia $n=2, 3, 4, 5$, ec., il numero indicato diverrà corrispondentemente 5, 15, 35, 70, ec.

II. Col raziocinio medesimo trovandosi, che nella potenza quinta del dato Polinomio ciascuna delle lettere semplici $a, b, c, d$, ec., $u$ si contiene le volte $5+4(n-1)+3\frac{(n-1)n}{2}+2\frac{(n-1)(n)(n+1)}{2.3}$ $+\frac{(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{2.3.4}=\frac{n4+10n^3+35n^2+50n+24}{2.3.4}$ $=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3.4}$; il numero totale di esse lettere sarà $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3.4}$ e quello per conseguenza dei termini $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3.4.5}$.

III. Nella maniera stessa si troverà, che il numero de' termini nella potestà sesta riesce $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2.3.4.5.6}$, nella potestà settima è $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{2.3.4.5.6.7}$, e in generale nella *mesima* è $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(n+m-1)}{2.3.4.5\ldots m}$.

261. *Scol.* 3. I. Supposto $a+b+c+d+\text{ec.}=p$, si ottiene $(a+b+c+d+\text{ec.}+u)^3=(p+u)^3=p^3+3p^2u+3pu^2+u^3$, $(a+b+c+d+\text{ec.}+u)^m=(p+u)^m=p^m+mp^{m-1}u+\frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}u^2+\text{ec.}$

Dunque come nel (II. *n.* 210), concluderemo, che di quelle stesse parti, di cui è composto il cubo, e in generale la potenza *mesima* di un binomio $a+b$, può dirsi composto ancora il cubo, la potenza *mesima* del Polinomio $a+b+c+d+\text{ec.}+u$, mentre però

si consideri la somma $a+b+c+d+$ ec. come parte prima.

II. Acciocchè la radice cubica, e in generale la *mesima* di un polinomio dato sia razionale, come nei (III, IV, V. *n.* 219) vedremo dover esso polinomio avere i suoi termini tanti e quali sono stati determinati nei (*n.* 259, 260 I. III. *n.* 258). Altrimenti la radice sarà incommensurabile: potendo quì pure accadere, come nel (VI. *n.* 219.) che pel valore particolare delle lettere $a$, $b$, $c$, $u$ la radice, la quale in generale sarebbe stata incommensurabile, divenga razionale. Quantunque sia irrazionale la $\sqrt[3]{(a^3+b)}$, mentre $a$, $b$ siano indeterminate, pure se si faccia $a=10c^3$, $b=25c^6$, ci risulterà $\sqrt[3]{(a^3+b)}=\sqrt[3]{((10c+25)c^6)}=\sqrt[3]{125c^6}=5c^2$ quantità razionale.

262. *Probl.* 45. Estrarre la radice cubica da un quadrinomio avente la sua radice terza commensurabile.

*Sol.* Sia in (LXXV) (A) il quadrinomio dato. Poichè la sua radice terza è razionale, sarà questa un binomio, e quello avrà la forma indicata nel (I. *n.* 258). Ordinato esso pertanto per una delle lettere, che lo formano, per esempio per la $x$, estraggo giusta il (*n.* 177) la radice cubica del primo termine $8x^3$, e scritto il risultato $2x$ in (B) luogo destinato alla radice che si cerca, sottraggo dal quadrinomio (A) il cubo $8x^3$ di $2x$. Faccio ora di questo termine $2x$ il quadrato $4x^2$, lo triplico, e posto in (D) il risultato $12x^2$, divido per esso il primo termine $-36px^2$ della (C), dovendo il quoto, che ne viene, $-3p$ essere evidentemente il secondo termine della radice (I. *n.* 253), lo pongo in (B) presso al $2x$, e scrivo in (D) presso del $2x$ il triplo del suo quadrato, cioè $27p^2$, ponendo in mezzo a queste due quantità una virgola: moltiplico quindi in croce il termine $-3p$ esistente

in (B) col $12x^2$ esistente in (D), l' altro $2x$, che è in (B) col $27p^3$, che trovasi in (D), faccio il cubo di essa $-3p$, e scritti in (E) i prodotti $-36px^2$, $54p^2x$, $-27p^3$ faccio dalla sovrapposta (C) la sottrazione. Essendo la radice cercata binomia e razionale, è chiaro dal (*cit.* I. *n.* 258), che l' avanzo deve esser zero; come difatti succede, e quindi $2x-3p$ sarà la radice cubica domandata.

(A)

$8x^3-36px^2+54p^2x-27p^3$ | (B)

$8x^3$ | $2x-3p$

(C) $*\ -36px^2+54p^2x-27p^3$ | (D) $12x^2, 27p^3$

(E) $-36px^2+54p^2x-27p^3$

* * *

(LXXV)

Lo stesso si pratica, qualunque altro siasi il quadrinomio proposto, la cui radice cubica sia razionale.

263. *Probl.* 46. Dato un Decanomio (F) nella (Tav. LXXVI), la cui radice terza sia commensurabile, trovare la radice medesima.

*Sol.* Ordinato il decanomio dato per la lettera $x$, determino, operando come nel (*n.° prec.*), i due termini $5a^2x^2-3x$, e scrittili nel luogo (G) destinato alla radice, considero la quantità $5a^2x^2-3x$ siccome prima parte della radice che si cerca (I. *n.°* 261), come se fosse un termine solo; quindi, proseguendo ad operare come precedentemente, scrivo in (I) il triplo del suo quadrato; divido pel primo termine $75a^4x^4$ di questo il primo termine $525a^6x^4$ del residuo (H); pongo in (G) alla destra del $-3x$ il quoto $7a^2$, in (I) il triplo del quadrato di $7a^2$, cioè $147a^4$, dividendolo dalla quantità precedente con

una virgola; moltiplico in croce la $75a^4x^4 - 90a^2x^3 + 27x^2$ esistente avanti alla virgola per $7a^2$, l'altra $147a^4$ che è dopo la virgola, per $5a^2x^2 - 3x$; faccio il cubo del termine $7a^2$ ottenuto in (G); scrivo in (L) tutti i termini, che ne vengono; li sottraggo dalla sovrapposta quantità (H): e siccome la radice domandata è per la ipotesi razionale, e pel (*n.*° 259) dev'essere trinomia, ne verrà pei (I. *n.* 258, I. *n.* 261) un residuo zero, e in (G) $5a^2x^2 - 3x + 7a^2$ sarà la radice medesima.

264. *Scol.* 4.° I. Se il polinomio dato avente la radice terza commensurabile contenesse venti, oppure trentacinque, ec. termini, onde la radice stessa fosse in corrispondenza quadrinomia, quintinomia, ec. (*n.*° 259); allora, dopo avere ottenuti giusta il (*n.*° *prec.*) i primi tre termini, per iscuoprire il quarto, non dovrei che considerare la somma dei primi tre come un termine solo (I, *n.*° 261), ed operare come precedentemente; così per ottenere il quinto, dovrei considerare, siccome un termine solo, la somma dei primi quattro e così in progresso.

II. In conseguenza della (XXXIII) e di quanto si è detto nel (I. *n.*° 261) potremo stabilire una regola generale, affine di estrarre una radice qualunque *mesima* da un Polinomio dato, di cui la radice, che si cerca sia commensurabile. Supposto difatti essere la (XXXIII) la quantità ordinata già per la lettera $a$, estraggo la radice *mesima* dal primo termine $a^m$ (*n.*° 177); scritto nel luogo destinato per la radice il risultato $a$, e sottratta dalla (XXXIII) la potestà $a^m$, divido il primo termine $ma^{m-1}b$ del residuo per la quantità $ma^{m-1}$, sommo con $a$ il risultato $b$, sottraggo dal residuo accennato la somma dei termini $ma^{m-1}b$, $\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2$,

$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} a^{m-3} b^3$, ec. $b^m$; e se la radice domandata è solamente binomia, ne verrà un avanzo zero, essendo l'ottenuta $a+b$ la radice medesima. Che se tal radice contiene più di due termini, allora l'avanzo non sarà zero, e per ottenere il termine terzo, dividerò il termine primo di quest'ultimo avanzo pel primo della quantità $m(a+b)^{m-1}$, e proseguirò ad operare, come precedentemente, dicendo della $a+b$ ciò che di sopra si è detto della sola quantità $a$. Così di seguito.

III. Potrebbe il precedente esponente $m$ essere numero composto; in questo caso, se sia per esempio $m=pq$, potrò ancora ottenere la chiesta radice; estraendo prima dal polinomio proposto la radice *pesima*, e in seguito dal risultato, che ne viene, la *qesima* (II. *n.°* 194).

IV. Se il grado $m$ della radice cercata sia pari, e il Polinomio dato negativo: allora per averne la radice, che sarà immaginaria (III. *n.°* 172), operando come nel (III. *n.°* 222), cangerò il segno a tutti i termini, e ottenuta giusta i (*prec.* I. II) la radice, moltiplicherò questa per $\sqrt{-1}$.

265. *Probl.* 47. Supposto, che un dato numero intero che chiamerò P contenga $m$ cifre, ed abbia la sua radice *kesima* razionale, cercasi di quante cifre sia formata la radice medesima.

*Sol.* Denominato $x$ tal numero, avendosi evidentemente $\sqrt[k]{P}$ non $< 10^{kx-k}$, e $\sqrt[k]{P} < 10^{kx}$, sarà P non $< 10^{x-1}$, e $P < 10^{x}$. Chiamato dunque $p$ quel tal numero intero e positivo, che manca a $kx-k$ per giungere ad uguagliare $m$, onde $kx-k+p=m$, ne verrà $x=\frac{m-p}{k}+1$, e dovrà essere $p$ non $<1$, $p$ non $>$

$k$, ed insieme questo $p$ tale, che $m-p$ sia divisibile esattamente per $k$.

266. *Cor.* I. Vogliasi $x = 1$. In questa supposizione la precedente $x = \frac{m-p}{k} + 1$ ci darà $m = p$: ma $p$ deve essere non $< 1$ e non $> k$. Dunque la potenza *kesima* di un numero avente una sola cifra non può avere nè meno di una, nè più di $k$ classi. Rapporto difatti alle prime cinque potenze questo si vede nella tavola (LI).

II. Sia $k = 3$; qualunque vogliasi l' intero $m$, esso dovrà necessariamente avere una delle tre forme $3n$, $3n-1$, $3n-2$; ma $p$ dev' essere non $< 1$ e non $> 3$, e deve $m-p$ essere divisibile esattamente per 3 (*n.°* 265). Dunque corrispondentemente alle tre supposizioni di $3n$, $3n-1$, $3n-2 = m$ avendosi $p = 3, 2, 1$, otterremo sempre $x = n$. In generale qualsivoglia intero $m$ avendo necessariamente una delle forme $kn$, $kn-1$, $kn-2$, $kn-3$, ec. $kn-(k-1)$, e dovendo per le indicate ragioni essere in corrispondenza $p = k$, $k-1$, $k-2$, $k-3$, ec. 1; dovrà sempre risultare $x = n$.

III. Dunque se divideremo il dato numero intero P, cominciando alla destra di $k$ in $k$ classi, e se vengono così a formarsi $n$ parti, o, come dicesi, membri, la radice razionale $\sqrt[k]{P}$ sarà un intero formato esattamente di $n$ cifre. Se sia per esempio $k = 3$, $P = 52734375$; poichè fatta l' accennata divisione, ne vengono le tre parti 375, 734, 52, la $\sqrt[3]{P}$ conterrà tre classi, come difatti si vede, avendosi $\sqrt[3]{52734375} = 375$.

267. *Scol.* 5.° I. Supposto $k = 3$ e $\sqrt[3]{P} = M$, sia come nel (II. *n.°* 233)

(II) $M = 10^{n-1} a + 10^{n-2} b + 10^{n-3} c + \text{ec.}$

il suo cubo $M^3$ dovrà pel (II. *n.° prec.*) avere la seguente forma

(VII) $10^{3n-1} g + 10^{3n-2} h + 10^{3n-3} i + 10^{3n-4} j + 10^{3n-5} k + 10^{3n-6} l + 10^{3n-7} p + 10^{3n-8} q + 10^{3n-9} r + \text{ec.}$

in cui $g$, $h$, $i$, ec. esprimono le successive cifre, ed in cui sarà $g > 0$, quando il numero delle classi in $M^3$, cioè $m = 3n$, sarà $g = 0$, ed $h > 0$, quando $m = 3n-1$, e sarà $g = 0$, $h = 0$, ed $i > 0$, quando $m = 3n-2$. Facciasi ora il cubo della (LIII); risultando

(VIII) $M^3 = 10^{3n-3} a^3 + 10^{3n-4} \times 3a^2 b + 10^{3n-5} (3a^2 c + 3ab^2) + 10^{3n-6} \times (b^3 + 6abc) + 10^{3n-7} (3ac^2 + 3b^2 c) + 10^{3n-8} 3bc^2 + 10^{3n-9} c^3 + \text{ec.}$

paragono questo valore con la (LXXVII), e da simile confronto, trovando tosto come nel (I. *n.° 234*) dover essere $a^3$ non $> 100g + 10h + i$; col discorso stesso del (*n.° 235*) vedremo dover essere $a^3$ il massimo cubo esatto intero, che si contiene in $100g + 10h + i$.

II. Posto $100g + 10h + i - a^3 = G$, onde dalla (LXXVII) ritraggasi

(IX) $M^3 - 10^{3n-3} a^3 = 10^{3n-3} G + 10^{3n-4} j + 10^{3n-5} k + 10^{3n-6} l + 10^{3n-7} p + 10^{3n-8} q + 10^{3n-9} r + \text{ec.}$

dal paragone di questa con la (LXXVIII) instituito nel modo del (II. *n.° 234*) troveremo come nel (*cit.* II. *n.° 234*) dover essere primo $3a^2 b$ non $> 10G + j$, secondo $10 \times 3a^2 b + 3ab^2$ non $> 100G + 10j + k$, e terzo $100 \times 3a^2 b + 10 \times 3ab^2 + b^3$ non $> 1000G + 100j + 10k + l$; per cui col raziocinio del (*n.* 236) si troverà, che, chiamato Q un numero intero, tale, che $100 \times 3a^2 Q + 10 \times 3aQ^2 + Q^3$ sia non $>$, e

$100 \times 3a^2 (Q+1) + 10 \times 3a (Q+1)^2 + (Q+1)^3$ sia $>$ $100\,G + 100j + 10k + l$, si troverà, dissi, dover essere $Q =$ alla seconda cifra della radice, cioè $= b$; e cotal numero potrà determinarsi, dividendo $10\,G + j$ per $3a^2$, e facendo delle riduzioni simili alle indicate nel (*n.°* 239) per la determinazione della seconda cifra nella radice quadrata.

III. Fatto, come nel (III. *n.°* 234) $10a + b = A$, e fatto $10^5 g + 10^4 h + 10^3 i + 10^2 j + 10k + l - A^3 = H$, per cui dalla (LXXVII) si abbia

$$(LXXX)\quad M^3 - 10^{3n-6} A^3 = 10^{3n-6} H + 10^{3n-7} p + 10^{3n-8} q + 10^{3n-9} r + \&c.$$

e dalla (LXXVIII)

$$M^3 - 10^{3n-6} A^3 = 10^{3n-7} \times 3A^2 c + 10^{3n-8} \times 3Ac^2 + 10^{3n-9} c^3 + \&c.$$

paragono fra loro queste ultime due Equazioni, siccome nel (*cit.* III. *n.°* 234), e trovando così dover essere $3A^2 c$ non $> 10H + p$. $10 \times 3A^2 c + 3Ac^2$ non $> 100H + 10p + q$; $100 \times 3A^2 c + 10 \times 3Ac^2 + c^3$ non $> 1000H + 100p + 10q + r$; col discorso del (I. *n.°* 237) si vedrà, che, chiamato R un numero tale che $1000H + 100p + 10q + r$ sia $< 100 \times 3A^2 (R+1) + 10 \times 3A (R+1)^2 + (R+1)^3$, e sia non $< 100 \times 3A^2 R + 10 \times 3AR^2 + R^3$, dovrà essere questo $R = c$. La determinazione poi di tal numero si otterrà, come nel (*prec.* II), dividendo $10H + p$ per $3A^2$, e riducendo opportunamente.

Lo stesso si dice proseguendo avanti, mentre la $M^3$ contenga un numero maggiore di classi.

IV. Quando $M = 10a + b$ come nel (*n.°* 238), vedremo che il secondo membro della (LXXIX) deve essere $= 100 \times 3a^2 b + 10 \times 3ab^2 + b^3$, e però che sottratta questa quantità da quello, deve venirne il residuo zero: vedremo parimenti, che quando $M = 100a + 10b + c$, posto $10a + b = A$, deve risultare il secondo membro della (LXXX) $= 100 \times 3A^2 c + 10 \times 3Ac^2 + c^3$, onde facendone la sottrazione, deve ottenersi l'avanzo zero; e così di seguito.

268. *Probl.* 43. Estrarre la radice cubica da un dato numero intero, in cui essa radice sia razionale.

*Sol.* Sia in (LXXXI) (A) il numero dato. Diviso esso da destra a sinistra, giusta il (III. *n.°* 266), di tre in tre classi con tante virgole; poichè nel nostro caso ne risultano tre parti, dirò tosto, che la radice cercata consta di tre cifre (III. *n.°* 266), la prima delle quali a sinistra avrà il suo cubo uguale al massimo cubo intero esatto, che si contiene nella prima parte 52 (I. *n.°* 267). Trovato pertanto con l'ajuto della Tavola (LI) essere $27 = 3^3$ questo massimo cubo, scrivo la sua radice 3 in (B) luogo destinato alla radice richiesta, e sottraggo questo 27 dal 52. Per iscuoprire la cifra seconda, pongo in (C) presso l'avanzo 25 il membro secondo 734 del numero (A), onde avere il numero $25734 = 25000+700+30+4 = 10^3G+10^2j+10k+l$. Collo o in (D) il triplo del quadrato dell'ottenuto 3, cioè 27, lascio in (C) addietro le ultime due cifre 34, e divido il numero $257 = 10G+j$, giusta il (II. *n.° prec.*) pel 27: ne verrebbe il quoto 9, ma siccome questo 9 è troppo grande, risultando $2700\times 9+90\times 9^2+9^3 > 25000+700+30+4 = 25734$, e tale è pure anche lo 8, mi ridurrò al 7, giacchè $2700\times 7+90\times 7^2+7^3 < 25734$, e scritto questo 7 in (B) presso del 3, pongo in (D) il triplo del suo quadrato, cioè 147, separandolo dal 27 con una virgola, moltiplico in croce il 27 per 7, il 147 per 3, formo il cubo del 7, pongo i tre risultati 189, 441, 343, che ne vengono in (E) l'uno sotto dell'altro per modo, che sotto la prima cifra a destra 9 del primo cada la seconda 4 del secondo, e sotto la prima 1 del secondo cada la seconda 4 del terzo, e fatta in (F) la loro somma 23653, la sottraggo dal sovrapposto (C), onde avere in (G) l'avanzo 2081 = H (*n.° prec.* III.). Poichè si ha $189 = 27\times 7$, $441 = 9\times 7^2$,

$343 = 7^3$, e poichè la somma in (F) deve essere $= 2700 \times 7 + 90 \times 7^2 + 7^3$, è facile a vedersi il perchè, sonosi questi 189, 441, 343 scritti in (E) con l'ordine indicato. Colloco in (G) presso al 20815 l'ultima parte 375 del numero (A), scrivo in (H) il triplo del quadrato dell'ottenuto 37, cioè 4107, divido per questo il numero $20813 = 10H + p$, e trovato il quoto 5 opportuno, lo pongo in (B) alla destra del 7; e fatte le successive operazioni, come precedentemente, poichè dalla sottrazione del risultato (I) dal sovrapposto (G), ne viene il residuo zero, dirò essere 375 la radice cubica domandata (IV. *n.° prec.*). Se il numero (A) e però l'altro (B) contenesse un numero maggiore di classi; per ottenere le cifre ulteriori, proseguirei giusta il (I, *n.°* 264) ad operare sempre nella stessa maniera.

(LXXXI)

| | (A) | (B) |
|---|---|---|
| | 52,734,375 | 375 |
| | 27 | |
| (C) | 257,34 | (D) 27,147 |
| | 189 | (H) 4107, 75 |
| (E) | 441 | |
| | 343 | |
| (F) | 23053 | |
| (G) | 2081375 | |
| | 20535 | |
| | 2775 | |
| | 125 | |
| (I) | 2081375 | |

269. *Prob.* 49. Dato l'intero P del (*n.°* 265) domandasi di estrarre la sua radice *kesima*, che suppongo essere razionale.

*Sol.* Per rendere più chiaro il metodo generale che siamo per esporre, consideriamolo da prima in qualche caso particolare, e

1. Sia $k = 3$, e sia in (LXXXII) (A) il numero

dato : Poichè la radice , che si vuole , è la terza ; diviso esso (A) , come nel (*n.° prec.*) , di tre in tre classi , determino in egual modo dalla prima parte 159 la prima cifra 5 della radice cubica (B) , e sottratto dal 159 il cubo $5^3 = 125$ , unisco , come di sopra , in (C) all' avanzo 34 la parte seconda 484. Ciò fatto , scrivansi in (D) le potenze 0.ª, 1.ª, e 2.ª dell' ottenute 5 , cioè 1 , 5 , 25 , sotto di loro si pongano in corrispondenza i numeri 1 , 3 , 3 , si moltiplichino rispettivamente , aggiungendo al secondo prodotto 15 uno zero , al terzo 75 due zeri, e scritti nella linea (E) i risultati 1 , 150 , 7500 , si divida per l' ultimo di essi , cioè per 7500 il numero (C) . Il quoto dovrà essere sempre $< 10$ ; in questo caso risultando tal quoto 4 , pongasi alla sinistra de' numeri (E) separato da loro con una lineetta verticale, e posto inoltre alla destra del 7500 separato con una virgola uno zero , si operi sopra i risultati (E) , e col numero 4 nel modo stesso , che si è indicato nel ( *n.°* 206 ) ; ottenuta però la prima riga (G) , prima di procedere innanzi , si osservi , se l' ultimo risultato ivi esistente cioè nel caso presente 32464 sia , o nò maggiore di (C) ; se mai lo fosse , direi , che il 4 è un numero troppo grande , e lo diminuirei , finchè l' ultimo risultato della riga (G) divenisse non $>$ (C) ; ma presentemente essendo già tal risultato ultimo $<$ (C) ; colloco il quoziente 4 come seconda cifra della radice in (B) , pongo in (H) l' indicato risultato , ne faccio la sottrazione da (C) , con il residuo 2020 unisco in (I) la terza parte 621 del numero (A) , ed avuto così il numero 2020621 , compio in (K) l'accennata operazione del ( *n.°* 206 ) . Ciò fatto scrivansi in (L) in linea orizzontale gli ultimi tre risultati , che sonosi ottenuti nell' ultima colonna verticale , cioè i numeri 1 , 162 , 8748 , aggiungendo al secondo uno zero , e due al terzo , e si

divida per quest' ultimo il numero (I). Venendone il quoto 2, lo pongo alla sinistra dei valori (L) con una lineetta verticale tra mezzo, aggiungo alla destra de' valori medesimi separato da loro con una virgola lo zero, operando giusta il (*n.°* 206), come precedentemente, determino da prima i valori della linea (M), osservando se l' ultimo di questi, cioè il 1756038 sia o no maggiore di (I); se mai lo fosse, converrebbe, come si è detto di sopra, diminuire il 2 opportunamente; non essendolo, colloco in (B) presso il 4 l' ottenuto 2, sottraggo da (I) l' ultimo de' valori (M), onde avere in (N) la differenza 264533, alla quale unisco l' ultima parte 967 di (A), e determino i risultati (P) (*n.°* 206). Scrivo di nuovo nella linea (Q) gli ultimi tre de' risultati (P), cioè i tre 1, 1626, 881292, coll' unire al secondo uno zero, al terzo due, divido per quest' ultimo la quantità (N), pongo come precedentemente il 3 alla sinistra de' valori (Q), lo zero alla destra, ritrovo, come di sopra, i numeri della linea (R), e veggendo che l' ultimo di questi non solo non è maggiore, ma è uguale ad (N), cosicchè fattane la sottrazione, ne viene il residuo zero, e veggendo che in (A) non esiste più alcuna parte, dirò, che il 3 è l' ultima cifra della radice richiesta, e postala in (B) alla destra del 2, dirò, che tal radice è 5423.

| (A) | (B) |
|---|---|
| 159,484,621,967 | 5423 |
| 125 | |
| (C) 34484 | |
| (H) 32464 | |
| (I) 2020621 | |
| (M) 1756088 | |
| (N) 264533967 | |
| 264533967 | |
| * | |

(D) (LXXXII)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1, 5, 25 | | | |
| | 1, 3, 3 | | | |
| 4 | 1, 150, | 7500, | 0 | (E) |
| | 1, | 154, | 8116, 32464 | (G) |
| | | 1, | 158, 8748 | (K) |
| | | | 1, 162 | (K) |
| | | | 1 | |
| 2 | 1, 1620, | 874800, | 0 | (L) |
| | 1, | 1622, | 878044, 1756088 | (M) |
| | | 1, | 1624, 881292 | (P) |
| | | | 1, 1626 | (P) |
| | | | 1 | |
| 8 | 1, 16260, | 88129200, | 0 | (Q) |
| | 1, | 16263, | 88177989, | 264533967 (R) |

II. Vogliasi in (LXXXIII) estrarre dal *n.°* (A) la radice quinta. Divido giusta il (III. *n.°* 266) il dato (A) di cinque in cinque classi cominciando alla destra, e siccome ne vengono tre parti, la radice cercata conterrà tre cifre, e come nei (*n.* 235, I. 267) si potrà dimostrare agevolmente, che la prima di esse a sinistra altro non è che la radice della massima potestà quinta esatta intera, che esiste nella prima parte 2104. Ora dalla Tavola (LI) veggiamo, essere 1024 questa potenza massima, la cui radice è 4, scrivo dunque in (B) questo 4, e sottratto dal 2104 il 1024, pongo in (C) presso all'avan-

zo 1080 la seconda parte 79520. Scrivansi presentemente in (D) le potenze $0^a$, $1.^a$, $2^a$, $3.^a$, e $4.^a$ del 4; cioè i numeri 1, 4, 16, 64, 256, sotto di loro gli altri 1, 5, 10, 10, 5, e si moltiplichino in corrispondenza, aggiugnendo al prodotto secondo 20 uno zero, al terzo 160 due zeri, tre al quarto 640, e quattro all' ultimo 1280. Scritti i risultati che ne vengono in (E) dividasi per l' ultimo di essi il numero (C), ne verrebbe il quoziente 8, ma siccome questo è troppo grande, perchè operando come nel (*prec.* I) darebbe l' ultimo de' risultati (G) > (C), ed è per la stessa ragione troppo grande anche il 7, prenderò il 6. ( Fra poco vedremo come si possa cercar di conoscere con ispeditezza, quando il quoto ottenuto è troppo grande ). Posti, siccome precedentemente, alla sinistra de' risultati (L) il 6, ed alla destra lo zero, opero secondo il solito (*prec.* I. *n.°* 206). Siccome l' ultimo dei risultati (G) è < (C), pongo in (B) il 6 appresso al 4, sottraggo da (C) il risultato medesimo scritto perciò in (H), unisco in (I) all' avanzo 451656o l' ultima parte di (C), e proseguo l' operazione del (*n.°* 206), determinando i valori (K). Colloco questi (K) in (L) orizzontalmente, aggiungendo al solito uno zero al secondo, due al terzo, ec., divido per l' ultimo di essi il numero (I), e venendone il quoto 2, lo colloco alla sinistra degli (L), ponendo alla loro destra il solito zero; rinnovo con la solita maniera i risultati (K), e l' ultimo di questi essendo = (I), cosicchè facendone la sottrazione, ne resta zero; il 2 sarà l' ultima cifra della radice; la colloco dunque in (L), e 462 sarà la quinta radice cercata.

(A) (B)

2104,79536,04832 | 462

1024

(C) 108079536

(H) 103562976

(I) 451656004832

451656004832

*

8| 6,128,0 (N)

6,176,1408 (P)

7| 6,170,1490 (Q)

6| 6,164, 984 (R)

(D)

1, 4, 16, 64, 256

1, 5, 10, 10, 5

6| 1, 200, 16000, 640000, 12800000, 0 (E)

1, 206, 17236, 743416, 17260496, 103562976 (G)

1, 212, 18508, 854464, 22387280 (K)

1, 218, 19816, 973360

1, 224, 21160

1, 230

1 (K)

(LXXXIII)

(L)

2|1,2300, 2116000, 973360000, 22387280000, 0

1, 2302, 2120604, 977601208, 225828002416, 451656004832 (M)

III. Dividendo (C) per l' ultimo dei risultati (E) viene tosto il quoziente 8, il quale, come si è osservato nel (*prec.* III), è troppo grande. Per riconoscere con ispeditezza questa grandezza eccessiva, nell' ultimo dei valori (E) tengo conto del numero, che è formato dalle sole prime tre cifre a sinistra, cioè del 128, e veggendo che vengono perciò nel detto risultato escluse cinque classi, escludo cinque classi ancora dalla destra di tutti gli altri risultati (E). In conseguenza di questo il risultato penultimo diverrà 6, e gli altri precedenti il penultimo scompariranno, perchè niuno di essi contiene più di cinque classi. Posti ora in un luogo separato (N) i due numeri 6, 128, colloco nella maniera consueta alla loro sinistra lo 8, alla destra lo zero; operando nella solita maniera, determino la sola prima riga (P), e truovato ivi il nu-

mero 1408, lo paragono con quello, che resta, nel numero (C), togliendo in esso pure le cinque cifre a destra, cioè col 1080; veggo che ne è maggiore; dunque dirò, che lo 8 è troppo grande. Tentando perciò il 7, lo scrivo sotto dello 8; replicando l'operazione medesima, determino in corrispondenza nella riga (Q) il numero 1190, e siccome anche questo è > 1080, porrò sotto del 7 il 6, e truovato dipendentemente dal 6 in (R) il numero $984 < 1080$, dirò che il 6 potrà essere opportuno, come difatti si è veduto nel (*prec.* II), risultando l'ultimo de' valori $(G) < (C)$. Il metodo esposto presentemente in questo caso particolare, ha sempre luogo in generale; avvertendo però, che, se per esempio il risultato ultimo corrispondente in (R) al 6 si fosse trovato uguale, oppure minore di poco del 1080 in (C), e d'altronde le cifre trascurate nei risultati (E), e specialmente nei primi tra loro costituissero dei numeri di qualche valore notabile rispettivamente al numero costituito dalle cifre trascurate in (C); allora anche il 6 potrà essere troppo grande; e per assicurarsene, converrà nei valori (E), (C) tener conto di una cifra di più a sinistra, cioè invece di tre, converrà tener conto di quattro cifre, e qualche volta ancora di più.

IV. Qualunque siasi l'intero dato P, e qualunque il grado $k$ della radice, che se ne vuole estrarre, l'operazione, che si dee praticare, è sempre la medesima. Diviso sempre esso P dalla destra alla sinistra di $k$ in $k$ classi, e supposto che ne vengano $n$ parti, che denominerò $Q'$, $Q''$, $Q'''$, $Q''''$, ec. $Q^{(n)}$, cosicchè sia

$$P = 10^{(n-1)k} Q' + 10^{(n-2)k} Q'' + 10^{(n-3)k} Q''' + 10^{(n-4)k} \times Q'''' + \text{ec.} + 10^{k} Q^{(n-1)} + Q^{(n)}$$

truoverò in primo luogo la prima cifra a sinistra

della radice, truovando col mezzo della Tavola (LI) prolungata quanto occorre, o col mezzo della Tavola delle potenze posta sul fine del T.° I.° del presente Corso per gli Aspiranti alla R. Scuola del Genio e d' Artiglieria, truovando dissi la radice della massima potenza *kesima* esatta intera, che si contiene nel primo membro Q'. Chiamata $a$ questa radice, la quale non può evidentemente essere che di una cifra sola, la pongo nel luogo destinato alla radice, che si cerca; sottraggo $a^k$ da Q', e supposto $Q' - a^k = R'$, formo la quantità $10^k R' + Q''$. In seguito per determinare la seconda cifra, che dirò $b$, si moltiplichino sempre le potenze 0.ª, 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª, ec. $(k-1)$.ª della $a$, cioè le $1$, $a$, $a^2$, $a^3$, $a^4$, ec. $a^{k-1}$ rispettivamente pei coefficienti numerici $1$, $k$, $\frac{k(k-1)}{2}$, $\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}$, $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2.3.4}$, ec. $k$ del binomio Newtoniano, aggiungasi uno zero alla destra del prodotto secondo, due zeri alla destra del terzo, tre alla destra del quarto, ec., e per ultimo dei risultati $1$, $k \times 10a$, $\frac{k(k-1)}{2} 10^2 a^2$, $\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3} 10^3 a^3$, ec. $k \times 10^{k-1} a^{k-1}$, che ne vengono, cioè per $k \times 10^{k-1} a^{k-1}$ si divida il numero $10^k R' + Q''$ cercando così un quoto tale, che eseguita in corrispondenza, come nei (*prec.* I, II) l'operazione del (*n.°* 206), l' ultimo dei risultati, che ne provengono nella prima riga, sia non $> 10^k R' + Q''$, e nel tempo stesso sia il massimo, che si contiene in questa $10^k R' + Q''$; il (*prec.* III) esibisce

un metodo più semplice per la determinazione di simile quoto. Ora essendo esso il valore della cifra $b$, si ponga nel luogo della radice alla destra della $a$, sottraggasi quindi l'ultimo sovraesposto risultato da $10^k R' + Q''$, e chiamatane $R''$ la differenza si scriva al disotto la quantità $10^k R'' + Q'''$. Per iscoprire poscia la cifra terza, si compia come nei (*prec.* I, II) l'operazione del (*n.°* 206) gli ultimi $k$ risultati che da questa si ottengono nell' ultima colonna verticale, si scrivano in una linea orizzontale coll'aggiungere al secondo di essi uno zero; due zeri al terzo, tre al quarto, ec., e sopra di questi così ridotti, e la quantità $10^k R'' + Q'''$ si operi precisamente nella stessa maniera, come si è fatto poc' anzi sopra i risultati $1$, $k \times 10a$, $\frac{k(k-1)}{2} 10^2 a^2$, ec. $k \times 10^{k-1} a^{k-1}$, e la $10^k R' + Q''$. Per determinare poi le cifre quarta, quinta, ec. non dobbiamo che ripetere sempre sopra i risultati successivi le operazioni medesime.

V. Per riconoscere la ragione del metodo presente, basta alle osservazioni, ed alle proprietà dei (*n.* 233, ec. 233; 266, 267) generalizzare, il che può ognuno fare agevolmente da se medesimo, basta, dissi, aggiugnere la riflessione, che, eseguita sopra le $1$, $k \times 10a$, $\frac{k(k-1)}{2} 10^2 a^2$, $\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3} 10^3 a^3$, ec. $k \times 10^{k-1} a^{k-1}$, o (*prec.* IV), e sulla $b$ la operazione del (*n.°* 206) fra i risultati, i quali ne provengono, l' ultimo della prima riga, che nei precedenti esempi (LXXXII), (LXXXIII) si è denotata con la lettera (G), altro non è che la quantità $k \times 10^{k-1} a^{k-1} b + \frac{k(k-1)}{2} 10^{k-2} a^{k-2} b^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{2.3} 10^{k-3} a^{k-3}$

$$+\text{ec.}+\frac{k(k-1)}{2}10^2a^2b^{k-2}+k\times 10ab^{k-1}+b^k \quad (n.^\circ 252)$$

$=(10a+b)^k-a^k$, e che supposto $10a+b=A$, i risultati i quali formano l' ultima colonna verticale (K) (K) altro non sono, come si dimostrerà in luogo più opportuno, che le quantità $1$, $kA$, $\frac{k(k-1)}{2}A^2$, $\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}A^3$, ec. $kA^{k-1}$. Ciò stesso che si è ora detto sopra le $a$, $b$, si ripete in egual modo sopra le A, $c$, essendo $c$ la terza cifra della radice; e così in progresso.

Finalmente la ragione dell' abbreviamento di calcolo esposto nel (*prec.* III) si deduce dall'osservare, che mentre si tien conto di poche cifre da calcolarsi; queste poi sono quelle, che per cagione di posizione hanno più alto valore, e quelle per conseguenza, dalle quali dipende principalmente il valore dell' ultimo de' risultati, che sonosi denotati con la (G) (LXXXII) (LXXXIII).

270. *Scol.* 6.° 1. Sia la radice *kesima* del dato P irrazionale, e chiamata N la massima potenza $k$ *esima* intera esatta, che esiste in P, sia $P=N^k+Q$: con de' discorsi simili a quelli de' (I. II. III. *n.* 240) vedrassi, che il valore di N si determina eseguendo sopra P, finchè si può, l' operazione del (*n. prec.*) e che l' ultimo residuo proveniente dall'operazione deve essere $>0$, ed $=Q$; avendosi poi $\sqrt[k]{P-N}<1$.

II. Al precedente avanzo Q si aggiungano $k$ zeri, onde avere il numero $10^k Q$; col dividere questo $10^k Q$ per $k\times 10^{k-1}N^{k-1}$ si determini, giusta il (*n.* 269), un numero $p$ tale, che abbiasi la quantità $k\times$

$$10^{k-1}N^{k-1}p+\frac{k(k-1)}{2}10^{k-2}N^{k-2}p^{2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}\times$$

$$10^{k-3}N^{k-3}p^{3}+\text{ec.}+k\times 10N^{k-1}+p^{k}\text{ non}>10^{k}Q,$$

e cangiandosi nella quantità medesima $p$ in $p+1$, divenga essa $>10^{k}Q$. In conseguenza di tali supposizioni, come nel (III *n.* 241) troveremo dover essere $N+\frac{p}{10}<\sqrt[k]{P}$, e $\sqrt[k]{P}-(N+\frac{p}{10})<\frac{1}{10}$, e fatta la sottrazione della precedente quantità $k\times 10^{k-1}N^{k-1}p$ $+$ ec. da $10^{k}Q$, il residuo, che ne viene, e che dirò $Q'$, dovrà essere $>0$.

III. Supposto $N+\frac{p}{10}=N'$, e uniti all'avanzo $Q'$ (*prec.* II) $k$ zeri, onde ottenere $10^{k}Q'$, si ricavi secondo il (*n.* 269), con la divisione di questo per $k\times 10^{2k-2}N'^{k-1}$ un intero $q$ tale, che sia $k\times 10^{2k-2}N'^{k-1}q+\frac{k(k-1)}{2}10^{2k-4}N'^{k-2}q^{2}+\text{ec.}+k\times 10^{2}N'q^{k-1}+q^{k}$ non $>10^{k}Q'$, e sia $k\times 10^{2k-2}N'^{k-1}(q+1)+\frac{k(k-1)}{2}10^{2k-4}N'^{k-2}(q+1)^{2}+\text{ec.}+(q+1)^{k}>10^{k}Q'$. Ciò fatto, vedremo, come nel (IV. *n.* 241) dover essere $N'+\frac{q}{10}$, e però $N+\frac{p}{10}+\frac{q}{100}<\sqrt[k]{P}$, $\sqrt[k]{P}-\left(N+\frac{p}{10}+\frac{q}{100}\right)<\frac{1}{100}$, e posto

$10^{k}Q' - (k10^{2k-2}N'^{k-1}q + \text{ec.}) = Q''$, dover essere $Q'' > 0$.

IV. Posto $N' + \frac{q}{10} = N''$, e dividendo $10^{k}Q''$ per $k \times 10^{3k-3} \times N''^{k-1}$ trovato un numero $r$, il cui valore renda $k \times 10^{3k-3} \times N''^{k-1} r + \frac{k(k-1)}{2} 10^{3k-6} N''^{k-2} r^2 + \text{ec.} + k\,10^3 N'' r^{k-1} + r^k$ non $> 10^{k} Q''$, e renda $k \times 10^{3k-3} N''^{k-1} (r+1) + \frac{k(k-1)}{2} \times 10^{3k-6} N''^{k-2} (r+1)^2 + \text{ec.} + (r+1)^k > 10^{k} Q''$, nel modo stesso del (*n.* 241) si vedrà dover essere $N'' + \frac{r}{10}$, e quindi $N + \frac{p}{10} + \frac{q}{100} + \frac{r}{1000} < \sqrt[k]{P}$, $\sqrt[k]{P} - (N + \frac{p}{10} + \frac{q}{100} + \frac{r}{1000}) < \frac{1}{1000}$, e $10^{k} Q'' - (k \times 10^{3k-3} N''^{k-1} r + \text{ec.}) > 0$.

V. Così in progresso: onde se supporremo di estendere con la stessa regola la serie $N + \frac{p}{10} + \frac{q}{100} + \frac{r}{1000} + \text{ec.}$ fino ad un termine qualunque, che dirò $\frac{u}{10^k}$; dovrà la serie che ne proviene, corrispondente a quella dello (VIII. *n.* 241), cioè alla

$$N + \frac{p}{10} + \frac{q}{100} + \frac{r}{1000} + \text{ec.} + \frac{u}{10^k} \qquad \text{(LX)}$$

essere $< \sqrt[k]{P}$, e la differenza di essa dal valore della $\sqrt[k]{P}$ sarà $< \frac{1}{10^k}$, avendosi sempre il residuo corrispondente $Q^{(k)} > 0$.

271. *Probl.* 50. Supposta la radice *kesima* dell' intero P reale ed incommensurabile, estrarre per approssimazione la radice medesima,

*Sol.* Essendo $\frac{1}{A}$, in cui A sia un intero grande quanto si vuole, il numero oltre del quale vogliamo accostarci al valore della $\sqrt[k]{P}$: contengasi in essa A un numero $h$ di cifre, cosicchè $\frac{1}{A} > \frac{1}{10^h}$. Ciò posto, si eseguisca, finchè si può, sull' intero P, secondo il metodo del (*n.* 269) l' estrazione della radice *kesima*; ne verrà un intero N, la cui potestà *kesima* sarà la massima intera esatta, che esiste in P, e ritenuto $P-N^k=Q$, questo Q sarà l' ultimo avanzo, che ottienesi dalla operazione (I. *n.* 270). Si aggiungano a Q $k$ zeri, e proseguendo l' operazione solita (*n.* 269) ritrovisi giusta il (II. *n.* 270), il numero $p$ ivi accennato, e la successiva differenza Q'. Aggiunti a questa Q' li $k$ zeri si seguiti ad operare nella solita maniera (*n.* 269), determinando secondo il (III. *n.* 270) il successivo numero $q$, e la differenza Q''. Ridotta la Q'' alla $10^k$ Q'', si determini quindi il numero $r$ (*n.* 269, IV. *n.* 270); e si progredisca avanti, operando sempre nella stessa guisa, finchè si ottenga un termine *kesimo*, che dirò $u$. Con i ricavati valori $p$, $q$, $r$, ecc. si formi la serie (LX), e questa pel (*prec.* VI. *n.* 270) differendo dalla $\sqrt[k]{P}$ meno di

di $\frac{1}{10^k}$, ne differirà meno eziandio di $\frac{1}{A}$, e quella sarà per conseguenza, che scioglie il Problema.

Avendosi a cagion d'esempio P = 20, venga richiesto di accostarsi alla sua radice quarta oltre il valore $\frac{1}{937}$ e vogliasi estrarre la radice quarta immediatamente. Poichè in questo caso si ha $h = 3$, e però $\frac{1}{10^h} = \frac{1}{1000}$, non dovrò spingere la serie (LX), che fino al termine $\frac{r}{1000}$, e fatta quì sotto l'operazione giusta il metodo del (*n.* 269) col porre $k=4$, otterrò $N + \frac{p}{10} + \frac{q}{100} + \frac{r}{1000} = 2,114$ diverso dalla $\sqrt[4]{20}$ meno di $\frac{1}{1000}$, e però meno di $\frac{1}{937}$.

20 | 2,114
16 |
40000
34481
5519000
37309441
178,805,590,000
150 730 838 016
28 074 751 984

| | 1, | 2, | 4, | 8 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1, | 4, | 6, | 4 | | |
| 1 | 1, | 80, | 2400, | 32000, | • | |
| | | 1, | 81, | 2481, | 34481, | 34481 |
| | | | 1, | 82, | 2563, | 37044 |
| | | | | | 83, | 2646 |
| | | | | | 1, | 84 |
| | | | | | | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1, 840, | 264000, | 37044000, | 0 | |
| | 1, | 841, | 265441, | 37309441, | 3730944 |
| | | 1, | 842, | 266283, | 3757572 |
| | | | 1, | 843, | 267126 |
| | | | | 1, | 84 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1, 8440, | 26712600, | 3757572400o, | 0 | |
| | 1, | 8444, | 26746376, | 37682709504, | 150730838 |

272. *Scol.* 7. I. Nella serie ( XXXVII ) del (VI. *n.* 204) facciasi $h=1$, $x=Q$, $a=N^k$ avremo sostituendo

$$\text{(LXXXIV)}\quad \sqrt[k]{P}=\sqrt[k]{(N^k+Q)}=N\left(1+\frac{Q}{kN^k}-\frac{(k-1)Q^2}{k.2kN^{2k}}+\frac{(k-1)(2k-1)Q^3}{k.2k.3k.N^{3k}}-\frac{(k-1)(2k-1)(3k-1)Q^4}{k.2k.3k.4kN^{4k}}+\text{ec.}\right)$$

Ora si determini N per modo, che sia $N^k > Q$: risultando perciò $\frac{Q}{N^k} < 1$, i termini successivi della serie (LXXXIV) anderanno continuamente, astrazion fatta dal segno, scemando di valore. Dunque quanto più innanzi troncheremo la serie tanto minore divenendo la differenza tra essa e la $\sqrt[k]{P}$, ne segue, che anche col suo mezzo potremo accostarci, ossia cercare per approssimazione il valore della $\sqrt[k]{P}$. Se mai la massima potenza *kesima* intera esatta, che esiste in P fosse non $> Q$; allora converrà come si è indicato nei ( I, II. *n.* 248), determinare col mezzo del ( *n. prec.* ) quel valore, parte intero, e parte fratto, la cui potenza *kesima* sia $< P$,

e insieme maggiore della differenza tra essa medesima, ed il numero P, e porre tal valore = N.

II. Se il numero, da cui si vuole estrarre la radice *kesima* fosse una frazione; opererei, come si è detto nel (II. *n.* 257), bisognerebbe cioè estrarre la radice tanto dal numeratore che dal denominatore; e se mai la radice del denominatore fosse incommensurabile, converrebbe moltiplicar prima amendue i termini della frazione per un numero, che rendesse il denominatore una podestà *kesima* perfetta; avremo perciò $\sqrt[k]{\frac{A}{B}} = \sqrt[k]{\frac{AB^{k-1}}{B^k}} = \frac{\sqrt[k]{AB^{k-1}}}{B}$, $\sqrt[k]{\frac{A}{B^p C^k}} = \frac{\sqrt[k]{AB^{k-p}}}{BC}$.

III. Che se la quantità polinomia P, di cui si vuole la radice *kesima* sia algebraica, e la radice sia irrazionale; otterremo questa per serie col mezzo della (LXXXIV) ponendo N = a quella parte del Polinomio dato, che si troverà più opportuna, e Q = alla rimanente. Si potrebbe ottenere eziandio una serie corrispondente alla $\sqrt[k]{P}$, col replicare su di essa continuamente l'operazione del (II, *n.* 264): ma si rifletta, che, ogniqualvolta prendansi in questo secondo metodo per N e per Q quelle parti del Polinomio P, che sonosi prese nel metodo primo, questa seconda serie per la ragione addotta sul fine del (III *n.* 243) sarà identica alla prima. Dunque degl' indicati due metodi essendo tanto più semplice il primo, che non il secondo, ci serviremo, allorchè la $\sqrt[k]{P}$ è incommensurabile, piuttosto di quello, che di questo.

273. *Probl.* 51. Sciogliere l'Equazione $x^3 - 1 = 0$.

*Sol.* Poichè qualsivoglia potenza dell' unità è $=1$; ne segue, che avremo $1^3=1$, e però $1^3-1=0$. Dunque, se nella $x^3-1=0$ facciasi $x=1$, tale Equazione verificandosi, 1 sarà sua radice; ma sarà esso 1 l' unica sua radice? veggiamolo. Dividendo $x^3-1$ per $x-1$, ne viene il quoto esatto $x^2+x+1$, onde si ha $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Dunque la $x^3-1$ diverrà zero, non solamente quando la $x$ è tale che si abbia $x-1=0$; ma ancora quando essa $x$ è tale che $x^2+x+1=0$. Ora da quest' ultima Equazione si ottiene $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ (*n.* 226); cosicchè la $x^2+x+1$ diventa zero, tanto mentre alla $x$ si dà il valore $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, come quando le si dà il valore $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Dunque anche la $x^3-1$ diventando zero sì per la ipotesi di $x=1$, come per l' altra di $x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; e per la terza di $x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; queste $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ saranno tutte e tre radici dell' Equazione $x^3-1=0$; ma questa $x^3-1$ non può divenire zero, se non se quando si attribuisca alla $x$ uno degli accennati tre valori; perchè il primo solo produce $x-1=0$, e gli altri due soli producono $x^2+x+1=0$; e frattanto qualunque quantità algebraica non può diventare zero, se non quando divenga tale uno dei suoi fattori. Dunque essendo le tre ritrovate tutte le radici che possono far verificare la $x^3-1=0$, ci daranno esse completamente la soluzione del Problema proposto.

274. *Scol.* 8. I. Dalla $x^3=1$, avendosi $x=\sqrt[3]{1}$; e ciascuno dei tre valori trovati (*n. prec.*) essendo valore della $x$; ne segue, che ciascheduno di loro

sarà $= \sqrt[3]{1}$, e ciascuno per conseguenza sarà radice cubica della unità. Dunque la unità ha tre radici terze, una però sola reale, e le altre due immaginarie.

II. Si elevino alla seconda potenza amendue le precedenti radici cubiche immaginarie dell' unità: risultando $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, e $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, ne segue, che il quadrato di una di esse uguaglia l' altra, e viceversa. Dunque se si denoti con la lettera $\alpha$ una qualsivoglia delle tre radici terze di 1, tali saranno ancora le quantità $\alpha^2$, $\alpha^3$; e se $\alpha$ rappresenti una delle due immaginarie; $\alpha$, $\alpha^2$, $\alpha^3$ esprimeranno tutte e tre le radici medesime: posto però $\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, sarà $\alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ed $\alpha^3 = 1$.

275. *Probl.* 52. Domandasi la soluzione dell' Equazione $x^3 - V = 0$.

*Sol.* Estratta dalla V la radice cubica, e supposto quindi $\sqrt[3]{V} = M$, sarà $x^3 - M^3 = 0$. Ora $x^3 - M^3 = (x - M)(x^2 + Mx + M^2)$; dunque per la ragione stessa, che si è accennata nel (*n.* 273), la $x^3 - M^3 = 0$, e però la $x^3 - V = 0$ non potrà avere, che tre sole radici, cioè non esisteranno che tre espressioni, ciascuna delle quali sostituita invece della $x$ faccia sì, che $x^3 - V$ diventi zero. La prima di queste espressioni si ha già in $M = \sqrt[3]{V}$, le altre due si potrebbero ricavare, sciogliendo la $x^2 + Mx + M^2 = 0$; le otterremo però più semplicemente, osservando, che la $x^3 - V = 0$ può ridursi alla $x^3 = 1 \times V$,

e però che si ha $x = \sqrt[3]{1} \times \sqrt[3]{V}$; ma $\sqrt[3]{1}$ ha tre valori (I. *n.* 274), uno qualsivoglia dei quali si è nel (II. *n.* 274) denotato con lettera $\alpha$. Dunque sarà in generale $x = \alpha \sqrt[3]{V} = \alpha M$, e posti invece di $\alpha$ i suoi tre valori, avremo $x' = M$, $x'' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} M$, $x''' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} M$: ma si è già dimostrato che le radici della $x^3 - V = 0$ non possono essere che tre. Dunque le ottenute tre daranno la soluzione completa dell' Equazione data. Due di queste radici sono evidentemente sempre immaginarie, ed una reale.

276. *Esem.* 4o. Dato un cubo avente il lato di $a$ metri si cerca il lato di un altro, la cui solidità sia $m$ volte la solidità del primo.

*Sol.* Chiamato $x$ il lato del cubo che si cerca; avremo $x^3 = ma^3$, e però $x = \alpha a \sqrt[3]{m}$. Sia per esempio $a = 15$, $m = 8$, risultando $x = \alpha \times 15 \sqrt[3]{8}$, si avrà $x = 30\alpha$, e posti invece della $\alpha$ i suoi valori, sarà $x' = 30$, $x'' = -15 + 15\sqrt{-3}$, $x''' = 15 - 15\sqrt{-3}$. In questo caso siccome la quantità che si cerca è una retta, la cui attuale esistenza esige, che sia quantità reale; quindi ne viene, che la soluzione del Problema, viene somministrata dal solo primo valore, cioè da $x' = 30$, e in generale da $x' = a \sqrt[3]{m}$.

277. *Probl.* 53. Risolvere la Equazione $x^4 - V = 0$, essendo $V > 0$.

*Sol.* Estratta dalla V la radice quarta (*n.* 269, III. *n.* 264), e supposto $\sqrt[4]{V} = M$, avremo sostituendo $x^4 - M^4 = 0$. Ora $x^4 - M^4 = (x^2 - M^2)(x^2 + M^2)$, cosicchè la $x^4 - M^4$ diventa zero solamente ne' casi, ne' quali la $x$ sia tale, che renda $x^2 - M^2 = 0$,

oppure $x^2+M^2=0$. Dunque dalla soluzione della $x^2-M^2=0$ avendosi $x=\pm M$, e dalla soluzione della $x^2+M^2=0$ risultando $x=\pm M\sqrt{-1}$; ne segue, che la $x^4-M^4$ diverrà zero corrispondentemente ai quattro valori $M, -M, M\sqrt{-1}, -M\sqrt{-1}$ due reali, e due immaginarj, e non divenendo tale che corrispondentemente a questi soli, avremo in essi tutte le radici, che si cercavano della Equazione $x^4-M^4=0$, e però della data $x^4-V=0$.

278. *Scol.* 9. Se sia $V=1$, e però $x^4-1=0$ l' Equazione proposta: risultando $M=1$, saranno $1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$, le sue radici; e per conseguenza ciascuno di questi $1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ sarà una radice quarta dell' unità. Ora le radici della Equazione $x^4-V=0$ (*n.° prec.*) altro non sono evidentemente, che $\sqrt[4]{V}$ moltiplicato per le varie radici quarte dell' unità. Dunque denominata $\beta$ una qualunque di queste, la radice della $x^4-V=0$ sarà in generale $x=\beta\times\sqrt[4]{V}$.

II. Se nella equazione del (*n.° prec.*) fosse $V<0$, ossia se l'equazione data fosse $x^4+V=0$; allora, trasportato V nel secondo membro, estrarrei nella $x^4=-V$ la radice seconda, estrarrei di nuovo la radice stessa nella $x^2=\pm\sqrt{-V}$, e risultandoci $x=\pm\sqrt{(\pm\sqrt{-V})}$, sarebbero $\sqrt{(\sqrt{-V})}$, $-\sqrt{(\sqrt{-V})}$, $\sqrt{(-\sqrt{-V})}$, $-\sqrt{(-\sqrt{-V})}$ le quattro radici della Equazione data, radici, come si vede, tutte e quattro immaginarie.

279. *Esem.* 41. Determinare tra due date rette $a$, $b$ tre medie proporzionali geometriche.

*Sol.* Denominate $x$, $z$, $u$ le tre medie, poichè si ha $a:x::x:z::z:u::u:b$, ne verrà $z=\frac{x^2}{a}$, $u=\frac{x^3}{a^2}$, $b=\frac{x^4}{a^3}$; ma dall' ultima di queste equazioni si ricava $x=\beta\sqrt[4]{a^3b}$ (*n.° prec.*). Dunque $\beta\sqrt[4]{a^3b}$ sa-

rà la prima, $\frac{\beta^2\sqrt[4]{a^6b^2}}{a} = \beta^2\sqrt{ab}$ la seconda, e $\frac{\beta^3\sqrt[4]{a^9b^3}}{a^3} = \frac{\beta^3\sqrt[4]{ab^3}}{a}$ la terza delle medie proporzionali cercate.

280. *Probl.* 54. Cercasi la soluzione della Equazione $x^4 + Bx^2 + D = 0$.

*Sol.* Fatto $x^2 = y$, sostituisco, e secondo il (*n.°* 226) sciolgo l'equazione, che se ne ottiene $y^2 + By + D = 0$. Avremo quindi $y = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2-4D)}}{2}$; ma la $x^2 = y$ ci dà $x = \pm\sqrt{y}$. Dunque sostituendo si avrà $x = \pm\sqrt{\left(\frac{-B \pm \sqrt{(B^2-4D)}}{2}\right)}$ e per conseguenza le radici della data $x^4 + Bx^2 + D$ saranno le quattro quantità

$$x' = \sqrt{\left(\frac{-B+\sqrt{(B^2-4D)}}{2}\right)}, \quad x'' = -\sqrt{\left(\frac{-B+\sqrt{(B^2-4D)}}{2}\right)}$$

$$x''' = \sqrt{\left(\frac{-B-\sqrt{(B^2-4D)}}{2}\right)}, \quad x'''' = -\sqrt{\left(\frac{-B-\sqrt{(B^2-4D)}}{2}\right)}$$

Se l'equazione data fosse stata la $x^6 + Bx^3 + D = 0$ oppure la $x^8 + Bx^4 + D = 0$; supposto avrei nel primo di questi due casi $x^3$, nel secondo $x^4 = y$, e trovato come precedentemente $y = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2-4D)}}{2}$ le radici della $x^6 + Bx^3 + D = 0$ sarebbero contenute nella espressione $x = \alpha\sqrt[3]{\left(\frac{-B \pm \sqrt{(B^2-4D)}}{2}\right)}$ (II. *n.°* 274), e le radici della $x^8 + Bx^4 + D = 0$ nella $x = \beta\sqrt[4]{\left(\frac{-B \pm \sqrt{(B^2-4D)}}{2}\right)}$ (I. *n.°* 278) risultando quelle di numero sei, e queste di numero otto.

281. *Escmp.* 42. Formare un triangolo rettangolo, nel quale il quadrato dell' ipotenusa sia del

valore $a$, e il rettangolo fatto con i due cateti sia del valore $b$.

*Sol.* Siano $x$, $z$ i due cateti del triangolo, che si cerca. Per la seconda delle condizioni proposte sarà $xz=b$, e per la condizione prima $x^2+z^2=a$. Dunque avendosi $x^2+\frac{b^2}{x^2}=a$, e però $x^4-ax^2+b^2=0$, pel (*n.° prec.*) otterremo $x=\pm\sqrt{\left(\frac{a\pm\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}\right)}$, e quindi $z=\frac{b}{\pm\sqrt{\left(\frac{a\pm\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}\right)}}=\frac{\pm b\sqrt{\left(\frac{a\mp\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{(a^2-a^2+4b^2)}{4}\right)}}$ (VI. *n.°* 193) $=\pm\sqrt{\left(\frac{a\mp\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}\right)}$. Ora non cercandosi dal Problema che la formazione d' un triangolo rettangolo, e quindi semplicemente la lunghezza de' suoi lati, dovremo nella considerazione de' valori ottenuti prescindere dai segni, e quindi diremo che $\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}\right)}$ è uno dei cateti, $\sqrt{\left(\frac{a-\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}\right)}$ l' altro, e che $\sqrt{a}$ è l' ipotenusa. Avvertasi finalmente dover essere $a^2$ non $<4b^2$; perchè se lo fosse, allora i valori delle $x$, $z$ sarebbero immaginarj, e però impossibile il triangolo domandato.

## CAPO VI.

### *Dell' Estrazione delle Radici dalle Quantità Polinomie irrazionali.*

282. *Scol.* 1.° Dato un Polinomio, che contenga dei radicali, e da cui possa estraersi esattamente la radice *kesima*, possiamo bensì alcune volte ottenere simile radice col mezzo delle regole stabilite nei Capi precedenti; ma più di sovente accade, che queste regole divengono inutili, e alla determinazione della radice sono necessarj altri artifizj. Date per esempio le due quantità $9+6\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}$, $19+4\sqrt{21}$, da ciascuna delle quali si voglia la radice seconda, facilmente si vede, che rapporto alla prima le regole precedenti (*n.* 220) danno $\sqrt{(9+6\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49})}=3+\sqrt[3]{7}$, ma niuna delle regole stesse serve a scuoprire il valore della $\sqrt{(19+4\sqrt{21})}$. Vedremo fra poco come si possano alcune volte ottenere somiglianti radici. Cominciamo dagl' irrazionali di 2.° ordine.

283. *Teor.* 1.° Se due numeri $a$, $b$ commensurabili e disuguali fra loro, moltiplicati insieme formano un quadrato perfetto cosicchè $ab=q^2$, e $\sqrt{ab}=q$; io dico, che i radicali $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ potranno sempre ridursi ad un radicale solo per modo, che sia $\sqrt{a}=n\sqrt{h}$, $\sqrt{b}=n\sqrt{h}$, essendo $m$, $n$, $h$ quantità tutte razionali.

*Dim.* I. Siano $a$, $b$ entrambi interi, e chiamato $h$ il loro massimo comun divisore, abbiasi $a=hd$, $b=he$; ne verrà $ab=h^2de=q^2$, e però $de=\frac{q^2}{h^2}$: dunque $de$ sarà un quadrato perfetto; ma essendo $d$, $e$ primi fra loro, ciò non può essere, quan-

do essi $d$, $e$ non siano quadrati perfetti per loro medesimi. Posto dunque $d=n^2$, $c=n^2$, saranno $m$, $n$ amendue razionali, e con la sostituzione otterremo $a=hm^2$, $b=hn^2$, e però $\sqrt{a}=m\sqrt{h}$, $\sqrt{b}=n\sqrt{h}$.

II. Abbiasi $a=\frac{c}{C}$, $b=\frac{g}{G}$: ridotte queste frazioni alle $\frac{cC}{C^2}$, $\frac{gG}{G^2}$, avremo $ab=\frac{cgCG}{C^2G^2}$: ma $ab=q^2$ è un quadrato perfetto, e tale è ancora il denominatore $C^2G^2$; dunque, tale dovendo essere eziandio il numeratore $cC\,gG$, ne viene, che chiamato $h$ il massimo comun divisore de' due numeri $cC$, $gG$, dovrà pel (*prec.* I) essere $cC=hp^2$, $gG=hr^2$, esprimendosi con le $p$, $r$ due interi, e quindi posto $\frac{p}{C}=m$, $\frac{r}{G}=n$ sarà quì pure $\sqrt{a}=m\sqrt{h}$, $\sqrt{b}=n\sqrt{h}$. Dunque ec.

284. *Cor.* I. Supposta l' espressione

$$M\sqrt{a}+N\sqrt{b}+Q\sqrt{c}+R\sqrt{d}+S\sqrt{e}+\text{ec.}=P$$

nella quale le M, $a$, N, $b$, ec. siano tutte quantità razionali, e supposto $a=hm^2$, $b=in^2$, $c=kq^2$, $d=lr^2$, ec. rappresentandosi con le $m^2$, $n^2$, ec. i massimi divisori quadrati delle $a$, $b$, ec.; ne verrà $P=Mm\sqrt{h}+Nn\sqrt{i}+Qq\sqrt{k}+Rr\sqrt{l}+\text{ec.}$. Sia $h=i$, e le altre quantità $i$, $k$, $l$, ec. disuguali fra loro; risultando da ciò $P=(Mm+Nn)\sqrt{h}+Qq\sqrt{k}+Rr\sqrt{l}+\text{ec.}$, fatto $(Mm+Nn)^2h=A$, $Q^2q^2k=B$, $R^2r^2l=C$, ec. avremo

(xv) $P=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}+\text{ec.}$, e quadrando

(xvi) $P^2=A+B+C+D+2(\sqrt{AB}+\sqrt{AC}+\sqrt{AD}+\sqrt{BC}+BD+\sqrt{CD}+\text{ec.})$.

Ora niuno dei prodotti $hk$, $hl$, $kl$, ec. può pel (*n.° prec.*) essere nella nostra ipotesi quadrato perfetto; dunque non potendolo essere neppure alcuno degli altri AB, AC, BC, ec.; ne segue, che, se ridotti i radicali $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, ec. alle loro più semplici espressioni $m\sqrt{h}$, $n\sqrt{i}$, $q\sqrt{k}$, ec.

(II. *n.°* 192) si raccolgono i radicali fra loro uguali in un termine solo, come nel caso nostro, ove $\sqrt{h}=\sqrt{i}$, i due $M m\sqrt{h}$, $N n\sqrt{i}$ nel solo $(Mm+Nn)\sqrt{h}$, e se finalmente liberati i radicali esistenti nella P così ridotta da' loro coefficienti ( I. *n.°* 192), ottengasi $P=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+$ ec. ne segue, dissi, che niuna delle quantità $\sqrt{AB}$, $\sqrt{AC}$, $\sqrt{AD}$, ec. che si contengono nel quadrato $P^2$ potrà essere razionale.

II. Supposto nella precedente (LXXXV) tutte le A, B, ec. fra loro disuguali, dovranno nella (LXXXVI) essere fra loro disuguali tutti i radicali, che hanno una lettera comune; non potrà per esempio essere $\sqrt{AB}=\sqrt{AD}$.

III. Nella ipotesi del (*prec.* II) potrà essere $\sqrt{AB}=\sqrt{CD}$, oppure $\sqrt{AC}=\sqrt{BD}$, oppure $\sqrt{AD}=\sqrt{BC}$, ec. Avvertasi però, che se si verifica la prima di queste tre Equazioni, non può verificarsi la seconda; perchè se fosse $AB=CD$, ed $AC=BD$; avendosi dalla prima $\frac{A}{C}=\frac{D}{B}$, dovrebbe essere $D=mA$, $B=mC$, essendo $m$ un numero razionale, e convertendosi quindi la $AC=BD$, nella $AC=m^2AC$, dovrebbe essere $m=1$, e però $D=A$, $B=C$ contro la supposizione. Mentre poi la A sia dello stesso segno con una delle C, D, posta la $\sqrt{AB}=\sqrt{CD}$, non potrà neppur essere $\sqrt{AD}=\sqrt{BC}$: perchè supposta A dello stesso segno con la C, avendosi già $D=mA$, $B=mC$, se fosse anche $AD=BC$, sostituendo, si otterrebbe $mA^2=mC^2$, e però $A=C$ contro la ipotesi.

IV. Sia la quantità (LXXXV) reale di quattro termini, e sia $\sqrt{AB}=\sqrt{CD}$: in questo caso non potrà essere nè $\sqrt{AC}=\sqrt{BD}$, nè $\sqrt{AD}=\sqrt{BC}$ (*prec.* II), e ritenuto, pel cit.° (*prec.* II), $D=mA$, $B=mC$, le (LXXXV), (LXXXVI) diverranno

(LXXXVII) $$P=\sqrt{A}+\sqrt{mC}+\sqrt{C}+\sqrt{mA}$$

(LXXXVIII) $$P^2=(1+m)(A+C)+2(2\sqrt{mAC}\pm(1+m)\sqrt{AC}\pm(A+C)\sqrt{m}).$$

È chiaro non poter essere il numero $m$ un quadrato perfetto, perchè se lo fosse, posto $m = n^2$ la P diverrebbe $(n+1)\sqrt{A} + (n+1)\sqrt{C}$, e quindi la (LXXXV) non sarebbesi più dedotta dalla più semplice espressione contro del (*prec.* I). Non potrà neppur essere $m = 1$ (*prec.* II). Se i due termini $\sqrt{C}$, $\sqrt{mA}$ sono forniti di segno contrario, e gli altri $\sqrt{A}$, $\sqrt{mC}$ di segno uguale, come nella

$$P = \sqrt{A} + \sqrt{C} + \sqrt{mC} - \sqrt{mA}, \qquad \text{(LXXXIX)}$$

avremo in corrispondenza

$$P^2 = (1+m)(A+C) \pm 2((1+m)\sqrt{AC} + (C-A)\sqrt{m}). \qquad \text{(XC)}$$

V. Venga dato un Polinomio irrazionale della forma $G + \sqrt{H} + \sqrt{I} + \sqrt{L} +$ ec., che porrò $= P^2$, la cui radice seconda sia determinabile esattamente. In questa supposizione la radice P non potrà essere che una quantità della forma $\sqrt{A} + \sqrt{B} +$ ec.: imperocchè essendo la P determinabile esattamente, e però radice razionale del Polinomio dato; non potrà l'operazione, che la determina introdurvi nuovi radicali, nè darle forma diversa.

VI. Sia $P^2 = G + \sqrt{H}$; è facile a vedersi dai (*prec.* I, ec. V.), che la P dovrà in corrispondenza avere la forma $\sqrt{A} + \sqrt{B}$. Abbiasi $P^2 = G + \sqrt{H} + \sqrt{I}$. In questa ipotesi dai (*prec.* I, II) dedurremo agevolmente non poter essere la P della forma $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$; ma potrà essa P contenere quattro termini (*prec.* IV). Pongasi $P^2 = G + \sqrt{H} + \sqrt{I} + \sqrt{K}$. In questo caso la P potrà avere la forma $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ (*prec.* I); ma potrebbe ancora invece di tre contenere quattro termini (*prec.* IV).

285. *Probl.* 55.° Estrarre la radice 2.ª dal binomio $G + \sqrt{H}$, essendo le G, H quantità reali, e positive.

*Sol.* Poichè la radice, che si cerca, mentre sia determinabile esattamente, deve avere la forma $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ (VI. *n.*° *prec.*); supporrò $\sqrt{(G+\sqrt{H})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = P$. Facendo il quadrato, ne viene $x + y + 2\sqrt{xy} = G + \sqrt{H}$, ed abbiamo così un' Equazione con

due incognite; dunque una di loro essendo determinabile ad arbitrio, la determinerò in modo, che la parte irrazionale $2\sqrt{xy}$ uguagli l' irrazionale $\sqrt{H}$. Si avranno quindi le due Equazioni $x+y=G$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{H}$. Ora dal quadrato della prima sottraggasi il quadrato della seconda; risultando da ciò $x^2-2xy+y^2=G^2-H$, sarà $x-y=\sqrt{(G^2-H)}$; ma mentre, poste le G, H commensurabili, la radice cercata sia determinabile esattamente, le $x, y$ deggiono essere quantità razionali (V, VI. *n.° prec.*). Dunque dovendo essere razionale ancora $x-y=\sqrt{(G^2-H)}$, dovrà $G^2-H$ essere un quadrato perfetto; e per conseguenza supposto $G^2-H=M^2$ dalle $x+y=G$, $x-y=\pm M$ ricaveremo $x=\frac{G\pm M}{2}$, $y=\frac{G\mp M}{2}$, ossia tenendo conto solamente dei segni superiori, perchè gl' inferiori non farebbero che ripetere per P lo stesso valore, avremo $x=\frac{G+M}{2}$, $y=\frac{G-M}{2}$, e però

$$P=\sqrt{(G+\sqrt{H})}=\sqrt{\left(\frac{G+M}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{G-M}{2}\right)}.$$

Sia per esempio $P=24+\sqrt{540}$. Avendosi $G=24$, $H=540$, ne viene $M=6$, e però $x=15$, $y=9$. Dunque sarà

$P=\sqrt{(24+\sqrt{540})}=3+\sqrt{15}$.

236. *Scol.* 2.° I. La $G^2-H$ somministra un criterio onde conoscere, se il valore della P sia, o no, determinabile esattamente: è chiaro che si potrà sempre determinare ogniqualvolta $G^2-H$ sia un quadrato perfetto, e che non si potrà, mentre $G^2-H$ non sia tale.

II. Suppongasi $\sqrt{(G^2-H)}$ irrazionale, e però la radice seconda della $G+\sqrt{H}$ non determinabile esattamente. In questa ipotesi, qualunque siansi

le quantità G, H, che si suppongono reali, e positive (*n.* 285), può accadere che abbiasi $\sqrt{H} < G$, e che $\sqrt{H} > G$. Nel primo di questi casi si otterrà pel valore della P la stessa precedente espressione $\sqrt{\left(\frac{G+M}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{G-M}{2}\right)}$, ove però $M = \sqrt{(G^2 - H)}$ è quantità incommensurabile. Ma nel caso secondo risultando $G^2 - H < 0$, dovrà supporsi $G^2 - H = -M^2$, onde $(\sqrt{G^2 - H}) = M\sqrt{-1}$; e però essendo $x + y = G$; $x - y = M\sqrt{-1}$, otterremo $x = \frac{G + M\sqrt{-1}}{2}$, $y = \frac{G - M\sqrt{-1}}{2}$, e finalmente

(XCI) $$P = \sqrt{(G + \sqrt{H})} = \sqrt{\left(\frac{G+M\sqrt{-1}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{G-M\sqrt{-1}}{2}\right)}.$$

III. Sia $P = G - \sqrt{H}$, e $\sqrt{H} < G$, onde P sia quantità reale. Nel caso presente converrà supporre $\sqrt{(G - \sqrt{H})} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$; perchè, se si ponesse $\sqrt{(G - \sqrt{H})} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, il metodo precedente dando $x + y = G$, $2\sqrt{xy} = -\sqrt{H}$, produrrebbe in questa seconda Equazione la quantità $2\sqrt{xy}$, che è essenzialmente positiva, uguale all'altra $-\sqrt{H}$ essenzialmente negativa, il che è un assurdo. Fatto pertanto $\sqrt{(G - \sqrt{H})} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, ed ottenuta come nel (n.° 285) la $x^2 - 2xy + y^2 = G^2 - H$, poichè per la ipotesi $G > \sqrt{H}$, sarà $G^2 - H > 0$, e ritenuto quindi $G^2 - H = M^2$, avremo $x - y = M$, $x + y = G$, e però

$$P = \sqrt{(G - \sqrt{H})} = \sqrt{\left(\frac{G+M}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{G-M}{2}\right)}.$$

Quì pure sarà sempre M quantità commensurabile, e però $G^2 - H$ quadrato perfetto, mentre il valore della P possa determinarsi esattamente.

IV. Ritenuto $P = G - \sqrt{H}$, sia $\sqrt{H} > G$, onde P quantità immaginaria. Avendosi in questo caso $G^2 - H < 0$, dovrà, come nel (*prec.* II), supporsi $(G^2 - H) = -M^2$, e fatto il calcolo del (*prec.* III) si scriverà

(XCII) $P=\sqrt{(G-\sqrt{H})}=\sqrt{\left(\frac{G+M\sqrt{-1}}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{G-M\sqrt{-1}}{2}\right)}$

V. Si abbia $P^2=(-G+\sqrt{H})$. Nella ipotesi presente per la ragione addotta nel (*prec.* III) dovrà supporsi $\sqrt{(-G+\sqrt{H})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, e mentre sia $\sqrt{H}>G$, fatto $G^2-H=-M^2$ (*prec.* II, IV), e mentre $\sqrt{H}<G$, fatto $G^2-H=M^2$ (*n.°* 285, *prec.* III) col solito calcolo otterremo nel primo di questi due casi la quantità immaginaria

(XCIII) $P=\sqrt{(-G+\sqrt{H})}=\sqrt{\left(\frac{-G+M\sqrt{-1}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{-G-M\sqrt{-1}}{2}\right)}$,

e nel secondo la quantità reale

$$P=\sqrt{(-G+\sqrt{H})}=\sqrt{\left(\frac{-G+M}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{-G-M}{2}\right)}.$$

VI. Allorchè si abbia $P^2=-G-\sqrt{H}$, posto $\sqrt{(-G-\sqrt{H})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ (*prec.* III) truoveremo

$$P=\sqrt{(-G-\sqrt{H})}=\sqrt{\left(\frac{-G+M}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{-G-M}{2}\right)},$$

oppure

(XCIV) $P=\sqrt{(-G-\sqrt{H})}=\sqrt{\left(\frac{-G+M\sqrt{-1}}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{-G-M\sqrt{-1}}{2}\right)}$

secondochè $\sqrt{H}$ è $<$, ovvero $>G$; e questo valore della P sarà in entrambi i casi immaginario.

VII. Finalmente se sia $P^2=G\pm\sqrt{-H}$ quantità immaginaria, faccio $\sqrt{(G\pm\sqrt{-H})}=\sqrt{x}\pm\sqrt{-y}$, e truovato come di sopra $x-y=G$, $4xy=H$, sommo la seconda di queste Equazioni con il quadrato della prima, e avuto quindi $x^2+2xy+y^2=G^2+H$, e posto $G^2+H=N^2$, avremo $x=\frac{N+G}{2}$, $y=\frac{N-G}{2}$, e però

$$P=\sqrt{(G\pm\sqrt{-H})}=\sqrt{\left(\frac{N+G}{2}\right)}\pm\sqrt{-\left(\frac{N-G}{2}\right)}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{N+G}{2}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{N-G}{2}\right)}\times\sqrt{-1}=E\pm F\sqrt{-1},$$

sup-

supposto $\sqrt{\left(\frac{N+G}{2}\right)} = E$, $\sqrt{\left(\frac{N-G}{2}\right)} = F$; essendo poi $N > G$, tanto E, come F saranno quantità reali. Sia per esempio $P^2 = -23 - \sqrt{-200}$, onde $G = -23$, $H = 200$. Risultando $N = \sqrt{(23^2 - 200)} = 27$, avremo in corrispondenza $P = \sqrt{2} - 5\sqrt{-1}$

Se sia $P^2 = \sqrt{-H}$. Avendosi $G = 0$, $N = \sqrt{H}$. ne verrà $P = \sqrt{\frac{\sqrt{H}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{H}}{2}} \times \sqrt{-1}$, onde avremo $\sqrt[4]{-H} = \sqrt{\frac{\sqrt{H}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{H}}{2}} \times \sqrt{-1}$.

Ogniqualvolta le $x$, $y$ siano razionali, è chiaro, che anche la N dovrà essere razionale.

287. *Cor.* Poichè nelle espressioni (XCI), (XCII), (XCIII), (XCIV) le quantità reali G, H non vanno soggette ad altra condizione, se non se a quella di essere $H > G^2$, ne segue, che la M, non meno che la G, potrà avere un valore reale qualunque; e quindi nelle citate espressioni potendo dalle $\frac{G}{2}$, $\frac{M}{2}$ rappresentare due quantità reali qualisivogliano, ed essendo le due (XCI), (XCIII) sempre reali, e le altre (XCII), (XCIV) sempre immaginarie; ne segue, che poste due quantità immaginarie della forma $\sqrt{(\pm A + B\sqrt{-1})}$, $\sqrt{(\pm A - B\sqrt{-1})}$ la loro somma $\sqrt{(\pm A + B\sqrt{-1})} + \sqrt{(\pm A - B\sqrt{-1})}$ sarà sempre quantità reale, la differenza $\sqrt{(\pm A + B\sqrt{-1})} - \sqrt{(\pm A - B\sqrt{-1})}$ sarà sempre quantità immaginaria.

288. *Probl.* 56.° Data la quantità $P^2 = G \pm \sqrt{H} \pm \sqrt{I}$, nella quale i numeri G, H, I siano razionali, e gli ultimi due positivi, ed in cui la radice seconda sia reale, e determinabile esattamente, truovare la radice medesima.

*Sol.* Non presentandosi altro caso nel quale un

quadrato perfetto contenga, siccome P$^2$ ora supposto, solamente due radicali $\surd$H, $\surd$I di 2.° grado, ed una quantità razionale G, se non se il considerato nel fine del ( IV. *n.*° 234 ); ne segue, che dovrà esso P$^2$ coincidere con la espressione (XC), e la sua radice avrà perciò la forma (LXXXIX). In conseguenza di ciò suppongasi in generale $P = \pm \surd x \pm \surd y \pm \surd mx \mp \surd my$, essendo le quantità $x$, $y$, $m$ da determinarsi, e combinarsi fra di loro solamente o i segni superiori, o gl' inferiori (IV. *n.*° 284). Fattone il quadrato per la forma (XC) ne viene $P^2 = (1+m)(x+y) \pm 2((1-m)\surd xy + (x-y)\surd m)$, e però $P^2 = (1+m)(x+y) \pm \surd(4(1-m)^2 xy) \pm \surd(4(x-y)^2 m)$ ove i segni si deggiono prendere opportunamente in corrispondenza alla quantità data. Dunque paragonando questa con quella, avremo $(1+m)(x+y) = G$, $4(1-m)^2 xy = H$, $4(x-y)^2 m = 1$. Poichè queste sono tre Equazioni con le tre incognite $x$, $y$, $m$; eliminatene due, per esempio le $x$, $y$, si giungerà ad un' Equazione con un' incognita sola, con la sola $m$; ma siccome la $m$ in questa ultima Equazione ascenderebbe ad un grado troppo alto, e non sapremmo con i principj stabiliti determinarla; gioverà ricorrere pel nostro intento a qualche altro artifizio. Essendo difatti le G, H, I, e però le $x$, $y$, $m$ quantità reali, e razionali, tale deve essere ancora la $x-y$, e però $(x-y)^2$ deve essere un quadrato perfetto. Ora abbiamo $I = 4(x-y)^2 \times m = 4m \times (x-y)^2$. Dunque il numero I dovendo essere composto di due fattori razionali l' uno multiplo del 4, ed $= 4m$, l'altro quadrato perfetto, ed $= (x-y)^2$; potremo ottenere la soluzione del nostro Problema, cercando i divisori esatti del numero I, e prendendo tra questi quelli, che sono quadrati perfetti, e che col dividere I producono de' quoti multipli del 4. Sia M$^2$ uno di questi Fattori, e sia $\frac{I}{M^2} = 4N$; pongo $x - y = M$, $m = N$; col mezzo

della $x-y=M$, e della precedente $(1+m)(x+y)=G$ ridotta alla $(1+N)(x+y)=G$ determino i valori delle $x$, $y$, li sostituisco insieme col valore N della $m$ nella $4(1-m)xy=H$, ed osservo se questa Equazione si verifica: se sì, avrò così determinati i valori delle $x, y, m$ opportuni, e sostituiti essi nella $P=\pm\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\pm\sqrt{mx}\mp\sqrt{my}$, avrò la radice cercata. Che se non si verifica, converrà tentare nello stesso modo gli altri fattori della I quadrati finchè si truova quello, che soddisfa, e per cui quindi si ottiene la soluzione richiesta. È chiaro, che i divisori della I forniti delle qualità sovraindicate non ponno essere che pochi, e però che il calcolo sarà non molto lungo. Se mai niuno degli accennati fattori soddisfacesse, oppur niuno ne esistesse nella I; allora converrebbe nel modo stesso cercare, se esistono somiglianti fattori quadrati nella H, e se esistendo, sono opportuni: che se non se ne truovano opportunamente neppure nella H, per quanto si è detto poc'anzi, concluderemo, che la P non è nel nostro caso determinabile esattamente.

Sia per esempio $P^2=36-\sqrt{140}+\sqrt{32}$. Avendosi $G=36$, $H=140$, $I=32$ cerco quei fattori del 32, che sono quadrati, e che dividendo 32 danno un quoto multiplo di 4. Di simili quadrati non avvi nel caso presente che il solo 4, risultando $\frac{32}{4}=8=4.2$. Posto adunque $x-y=\sqrt{4}=2, m=2$ poichè si ha $G=36$, $H=140$, e quindi $(1+m)(x+y)=3(x+y)=36$, $4(1-m)xy=4xy=140$, col mezzo delle $x-y=2$, $x+y=12$, determino i valori $x=7$, $y=5$, li sostituisco nella $4xy=140$; e verificandosi questa, poichè $4.35=140$, dirò che i valori delle $x$, $y$, $m$ sono opportuni, e che però la radice domandata è $P=\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{14}-\sqrt{10}$.

289. *Probl.* 57. Ritruovare mentre esista reale,

e determinabile esattamente, la radice quadrata del Polinomio
$P^2 = G \pm \sqrt{A} \pm \sqrt{I} \pm \sqrt{K}$, essendo le quantità G, H, I, K razionali, e le ultime tre positive.

*Sol.* Potendo il valore della P che si domanda, essere trinomio, e quadrinomio (VI. *n.*° 284),

I. Suppongasi $P = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z}$; ne verrà $P^2 = x+y+z \pm 2\sqrt{xy} \pm 2\sqrt{xz} \pm 2\sqrt{yz}$, ed operando secondo il solito, poichè si ha $x+y+z = G$, $4xy = H$, $4xz = I$, $4yz = K$, otterremo $y+z-x = \pm\sqrt{(G^2-H-I)}$, $x+z-y = \pm\sqrt{(G^2-H-K)}$, $x+y-z = \sqrt{(G^2-I-K)}$. Nella ipotesi delle $x$, $y$, $z$ determinabili esattamente, e però razionali, essendo razionali ancora le $\sqrt{(G^2-H-I)}$, $\sqrt{(G^2-H-K)}$, $\sqrt{(G^2-I-K)}$; le determino attualmente, e chiamati i loro valori $\pm M$, $\pm N$, $\pm Q$, dalle tre Equazioni $y+z-x = \pm M$, $x+z-y = \pm N$, $x+y-z = \pm Q$ ricavandosi col sommarle a due a due, $z = \frac{\pm M \pm N}{2}$, $y = \frac{\pm M \pm Q}{2}$, $x = \frac{\pm N \pm Q}{2}$; otterremo

$$P = \pm\sqrt{\left(\frac{\pm N \pm Q}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{\pm M \pm Q}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{\pm M \pm N}{2}\right)}.$$

L' Equazione $x+y+z = G$ potrà servirci per conoscere quali dei due segni +, − debba attualmente anteporsi a ciascuno dei valori M, N, Q; è chiaro, che dobbiamo tener conto di quei segni, pe' quali la somma $x+y+z$ risulta esattamente del valore G. Essendo per esempio $P^2 = 54 - \sqrt{392} + \sqrt{588} - \sqrt{4}$, si truoverà in corrispondenza $P = 7 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

II. Mancando qualcuna delle precedenti quantità M, N, Q dall' essere quadrato perfetto, siasi ritruovato che il valore della P determinabile esattamente non può essere trinomio: potendo in tal caso essere quadrinomio, purchè dotato della forma (LXXXVII), suppongo in generale $P = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

$\pm\sqrt{mx}\pm\sqrt{my}$; avvertendo che nel caso presente, i termini $\sqrt{y}$, $\sqrt{mx}$ non possono essere di segno contrario, mentre gli altri $\sqrt{x}$, $\sqrt{my}$ lo hanno uguale, e viceversa (IV. *n.°* 284). Ottenendosi quindi per la formola (LXXXVIII)

$$P^2=(1+m)(x+y)\pm 4\sqrt{mxy}\pm 2(1+m)\sqrt{xy}\pm 2(x+y)\sqrt{m},$$

e però

$$P^2=(1+m)(x+y)\pm\sqrt{16mxy}\pm\sqrt{(4(1+m)^2xy)}\pm\sqrt{4(x+y)^2m)}$$

osservo, che mentre esista il quadrinomio, che si cerca, due certamente dei numeri H, I, K deggiono avere un divisore quadrato, che produca un quoto multiplo di 4, l' uno deve avere il divisore $(x+y)^2$, ed il quoto $4m$, l' altro il divisore $(1+m)^2$ ed il quoto $4xy$. Fatta pertanto l' opportuna ricerca, supponghiamo, che si truovi $K=4M^2k$, $I=4N^2i$: in questa ipotesi osservo se sia $k+1=N$, oppure $i+1=M$; si verifichi la prima di queste Equazioni; si ponga in tal caso $k=m$, $M=x+y$, $i=xy$; si osservi quindi se il prodotto MN sia $=G$, e l' altro $16ki=H$, e verificandosi tutto questo, sottraggo dalla Equazione $(x+y)^2=\frac{G^2}{(k+1)^2}$ l' altra $4xy=4i$, onde avere $x-y=\pm\sqrt{\left(\frac{G^2}{(k+1)^2}-4i\right)}$, che nel caso delle $x$, $y$ razionali, deve essere razionale, e che pongo $=Q$; combinando le $x+y=M$, $x-y=Q$, col tener conto nel valore Q del solo segno +, perchè l' altro diviene inutile, determino $x=\frac{M+Q}{2}$, $y=\frac{M-Q}{2}$; ed avremo così finalmente

$$P=\pm\sqrt{\left(\frac{M+Q}{2}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{M-Q}{2}\right)}\pm\sqrt{m\left(\frac{M+Q}{2}\right)}\pm\sqrt{m\left(\frac{M-Q}{2}\right)}.$$

Se mai qualcuna delle indicate condizioni non si verificasse, converrebbe nelle H, I, K cercare altri fattori quadrati, che vi soddisfacessero; e se non

si trovassero mai opportuni, allora concluderemo non esistere alcun quadrinomio esattamente determinabile, ed uguale alla radice seconda del dato quadrinomio $P^2$.

Sia per esempio $P^2 = 112 + 24\sqrt{20} - 28\sqrt{7} - 12\sqrt{35}$. Ridotta questa quantità all' altra $P^2 = 112 + \sqrt{11520} - \sqrt{5488} - \sqrt{5040}$, applico ad essa il metodo del (*prec.* I), e veggendo che non esiste radice trinomia determinabile, ricorro all' altro del (*prec.* II). Ora secondo questo ritruovo, che il numero 11520 è divisibile per $64 = 8^2$, venendone il quoto $180 = 4.45$, e l'altro 5488 è divisibile per $196 = 14^2$ risultando il quoziente $28 = 4.7$. Posto perciò $M = 8$, $k = 45$, $N = 14$, $i = 7$, proseguo le indicate osservazioni; e poichè veggo essere $i + 1 = 7 + 1 = 8 = M$, $MN = 8.14 = 112 =$ al termine razionale di $P^2$, e $16ki = 16.45.7 = 5040 =$ al numero posto sotto l'ultimo radicale; dirò, che esiste il quadrinomio che si cerca, e per iscuoprirne i termini,

pongo $x + y = N = 14$, $x - y = \sqrt{\left(\frac{G^2}{(i+1)^2} - 4k\right)} = \sqrt{\left(\frac{112^2}{8^2} - 4.45\right)} = 4 = Q$, e ricavando quindi $x = \frac{N+Q}{2} = 9$, $y = \frac{N-Q}{2} = 5$, ed avendosi già $m = i = 7$, otterremo $P = \pm\sqrt{9} \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{63} \pm \sqrt{35}$. Per determinare i segni, che attualmente corrispondono ai segni dati in $P^2$, faccio il quadrato del valore truovato, lo paragono col $P^2 = 112 + \sqrt{11520} - \sqrt{5488} - \sqrt{5040}$, e si truoverà essere $P = \pm(3 + \sqrt{5} - \sqrt{63} - \sqrt{35})$.

Quantunque per maggiore semplicità siasi nel dato Polinomio $G \pm \sqrt{H} \pm \sqrt{I} \pm \sqrt{K}$ apposto a ciascun radicale il doppio segno $\pm$; pure deve avvertirsi, che uno per lo meno di essi è sempre positivo; perchè qualunque siansi i segni nei termini della radice, sia essa trinomia, o quadrinomia, facendo-

sene il quadrato, un termine per lo meno risulta sempre affetto di segno +.

Non mi estendo di più, nel supporre de' Polinomj simili ai precedenti, e dotati di un numero maggiore di termini; perchè le considerazioni simili alle passate, che si dovrebbero fare per la dovuta esattezza, esigerebbero troppa complicazione, inopportuna alle presenti Istituzioni, e forse non compensata da vantaggi corrispondenti.

290. *Probl.* 58. Sia $\pm\sqrt{G}\pm\sqrt{H}$ la quantità da cui si vuole estrarre la radice seconda.

*Sol.* Supposto al solito $P=\sqrt{(\pm\sqrt{G}\pm\sqrt{H})}$, il valore della P non potrà essere della forma $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$, essendo $x$, $y$ quantità commensurabili, perchè se lo fosse esisterebbe nella P una parte razionale $x+y$ contro la supposizione. Facciasi pertanto $P=\pm\sqrt{(x\sqrt{m})}\pm\sqrt{(y\sqrt{n})}$; quadrando si ottiene $P^2=x\sqrt{m}+y\sqrt{n}\pm 2\sqrt{(xy\sqrt{mn})}$; ma questo risultato dev' essere identico con $\pm\sqrt{G}\pm\sqrt{H}$. Dunque acciocchè questa identicità succeda, non potendo in $P^2$ contenersi, che due soli radicali di 2.° grado, dovrà essere $m=n$, risultando in corrispondenza $P^2=(x+y)\sqrt{m}\pm 2\sqrt{xym}$. Ciò dunque essendo, supposte le G, H quantità positive, e supposto $G>H$, pel (VII. *n.*° 219), pongasi $(x+y)\times\sqrt{m}=\pm\sqrt{G}$, $2\sqrt{xym}=\sqrt{H}$; ne verrà $(x+y)^2 m=G$, $4xym=H$, e sottraendo avremo $(x-y)^2 m=G-H$,

onde $x\sqrt{m}=\dfrac{\pm\sqrt{G}+\sqrt{(G-H)}}{2}$, $y\sqrt{m}=\dfrac{\pm\sqrt{G}-\sqrt{(G-H)}}{2}$,

e però $P=\sqrt{\left(\dfrac{\pm\sqrt{G}+\sqrt{(G-H)}}{2}\right)}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\pm\sqrt{G}-\sqrt{(G-H)}}{2}\right)}$.

Se le G, H siano razionali, e sia determinabile esattamente il valore della P: allora dovendo essere razionali ancora le $x$, $y$; le due quantità G, G—H dovranno avere per ciascheduno un divisore quadrato, il primo $=(x+y)^2$, il secondo $=(x-y)^2$, e il quoto corrispondente dovrà in amendue i casi es-

sere lo stesso $m$. In conseguenza di ciò, cerco se le accennate quantità G, G — H contengono divisori quadrati producenti uno stesso quoziente; se trovo, che non ne contengono, dirò, che nella supposta P le $x$, $y$, $m$ non sono determinabili esattamente; che se li contengono, chiamati essi $M^2$, $N^2$, e chiamato $h$ il quoto corrispondente, cosicchè si abbia $\frac{G}{M^2}=\frac{G-H}{N^2}=h$, formo le Equazioni $x+y=\pm M$, $x-y=\pm N$, $m=h$, determino quindi $x=\frac{\pm M\pm N}{2}$, $y=\frac{\pm M\mp N}{2}$, e sarà $P=\pm\sqrt{\left(\left(\frac{\pm M\pm N}{2}\right)\sqrt{h}\right)}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{\pm M\mp N}{2}\right)\sqrt{h}\right)}$. I segni dovranno prendersi opportunamente in corrispondenza ai segni dati nella quantità $P^2$, ed allo stato per conseguenza di realità, o d'immaginarietà della P.

Sia per esempio $P^2=3\sqrt{48}-2\sqrt{105}$, ridotta questa alla $\sqrt{432}-\sqrt{420}$; poichè si truova, che i numeri 432, $432-420=12$ hanno rispettivamente i fattori quadrati $144=12^2$, $4=2^2$ da' quali producesi lo stesso quoto 3, faccio $x+y=\pm 12$, $x-y=\pm 2$, onde $x=\pm 7$, $y=\pm 5$; avendosi $\sqrt{432}>\sqrt{420}$, e però $P=\sqrt{(\sqrt{432}-\sqrt{420})}$ reale, tengo conto dei segni superiori, ed avremo così $P=\sqrt{5\sqrt{3}}-\sqrt{7\sqrt{3}}$. Se fosse stato $P^2=-\sqrt{722}+\sqrt{704}$, essendo allora la P immaginaria, avrei nei valori delle $x$, $y$ tenuto conto dei segni inferiori, e avrei ottenuto in corrispondenza $P=\sqrt{-11\sqrt{2}}+\sqrt{-8\sqrt{2}}$.

Nella ipotesi di $P^2=\pm\sqrt{-G}\pm\sqrt{-H}$, e nell'altra di $P^2=\pm\sqrt{-G}\pm\sqrt{H}$, avrei supposta in corrispondenza $P=\pm\sqrt{(x\sqrt{-m})}\pm\sqrt{(y\sqrt{-m})}$, $P=\pm\sqrt{(x\sqrt{-m})}\pm\sqrt{(-y\sqrt{-m})}$ ed avrei proseguito il calcolo, come precedentemente.

291. *Probl.* 59.° Cercasi il valore della $\sqrt[k]{(G+\sqrt{-H})}$

$=P$, essendo $k$ un qualunque numero intero, e positivo.

*Sol.* Facciasi $\sqrt[k]{(G+\sqrt{-H})} = (x+y\sqrt{-1})\sqrt[k]{p}$, e chiamati per maggiore semplicità, come nel (I. *n.*°204), A, B, C, ec. i coefficienti numerici del binomio Newtoniano, avremo

$$P^k = G+\sqrt{-H} = p(x^k - Bx^{k-2}y^2 + Dx^{k-4}y^4 - Fx^{k-6}y^6 + \text{ec.}) + p(Ax^{k-1}y - Cx^{k-3}y^3 + Ex^{k-5}y^5 - \text{ec.})\sqrt{-1}$$

(III. *n.*° 205); ma questa Equazione dev' essere identica; dunque la parte reale dovendo uguagliarsi alla reale, l'immaginaria alla immaginaria, ne verrà

$$G = p(x^k - Bx^{k-2}y^2 + Dx^{k-4}y^4 - Fx^{k-6}y^6 + \text{ec.})$$

$$\sqrt{-H} = p(Ax^{k-1}y - Cx^{k-3}y^3 + Ex^{k-5}y^5 - \text{ec.})\sqrt{-1};$$

sottraggo questa seconda dalla prima Equazione, e risultando

$$G-\sqrt{-H} = p(x^k - Bx^{k-2}y^2 + Dx^{k-4}y^4 - Fx^{k-6}y^6 + \text{ec.}) - p(Ax^{k-1}y - Cx^{k-3}y^3 + Ex^{k-5}y^5 - \text{ec.})\sqrt{-1},$$

pel cit.° (IV.*n.*°205) avremo $G-\sqrt{-H} = (x-y\sqrt{-1})^k p$, e moltiplicando questa con la $G+\sqrt{-H} = (x+y\sqrt{-1})^k p$, avremo $G^2+H = (x^2+y^2)^k p^2$, e però $y^2 = \sqrt[k]{\left(\frac{G^2+H}{p^2}\right)} - x^2$. Ora essendo il numero $p$ arbitrario, si determini in modo, che $\frac{G^2+H}{p^2}$ sia una potenza *kesima* perfetta; se sia già tale $G^2+H$, basterà fare $p=\pm 1$; se no, avremo sempre l'intento, se non altro, facendo $p = \frac{\pm 1}{(G^2+H)^{\frac{k-1}{k}}}$, poichè in corrispondenza si otterrà $\frac{G^2+H}{p^2} = (G^2+H)^k$ : chiamato pertanto $M^k$

questo valore, onde $\sqrt[k]{\left(\frac{G^2+H}{p^2}\right)} = M$, e però $y^2 = M-x^2$, sostituisco nella precedente Equazione $G=p^k(x^k - \text{ec.})$, e risultando

$$\frac{G}{p}=x^k-Bx^{k-2}(M-x^2)+Dx^{k-4}(M-x^2)^2-Fx^{k-6}(M-x^2)^3+$$

avremo così un' Equazione, ove entra la sola $x$, del grado $k$, dalla cui soluzione ottenuto il valore della $x$, si sostituisca nella $y^2 = M - x^2$; e per tal modo ricavato il valore della $y=\sqrt{(M-x^2)}$, avremo finalmente la cercata $\sqrt[k]{(G+\sqrt{-H})}=(x+y\sqrt{-1})\,p$.

Se fosse stato $P^k = (G-\sqrt{-H})$, oppure $= G \pm \sqrt{H}$, si avrebbe nello stesso modo sciolto il Problema, col porre P rispettivamente $=(x-y\sqrt{-1})\sqrt[k]{p}$, oppure $=(x\pm\sqrt{y})\sqrt[k]{p}$.

La risoluzione esatta, e generale del Problema proposto riducesi adunque allo scioglimento esatto dell'ottenuta Equazione in $x$: ma siccome tale scioglimento non si sa, e non si può ottenere che in pochissimi casi; perciò converrà che veggiamo, nel (*n.° seg.*), come il Problema medesimo possa sempre risolversi, accostandoci sempre più al vero valore delle $x\sqrt[k]{p}$, $y\sqrt[k]{p}$.

292. *Scol.* 3.° I. Suppongasi perciò $\sqrt{H}=L$, onde si abbia $P^k = G \pm \sqrt{-H} = G \pm L\sqrt{-1}$, e sia in primo luogo G non $<$ L. In quest' ipotesi faccio nelle formole (XL) (III. *n.°* 205) $a=G$, $t=L$, $m=\frac{1}{k}$, ed eseguite nei loro coefficienti le riduzioni esposte nel (VI. *n.°* 204) otterremo

$$P=\sqrt[k]{(G\pm L\sqrt{-1})}=\sqrt[k]{G}\left(1+\frac{(k-1)L^2}{k.2kG^2}-\frac{(k-1)(2k-1)(3k-1)L^4}{k.2k.3k.4kG^4}\right.$$

$$\left.+\frac{(k-1)(2k-1)(3k-1)(4k-1)(5k-1)L^6}{k.2k.3k.4k.5k.6kG^6}-\text{ec.}\right)\pm\sqrt[k]{G}\left(\frac{L}{kG}-\right.$$

$$\left.\frac{(k-1)(2k-1)L^3}{k.2k.3kG^3}+\frac{(k-1)(2k-1)(3k-1)(4k-1)L^5}{k.2k.3k.4k.5kG^5}-\text{ec.}\right)\sqrt{-1},$$

e chiamata Q la prima parte di questo risultato, R la seconda, sarà $P=\sqrt[k]{(G\pm L\sqrt{-1})}=Q\pm R\sqrt{-1}$. Ora essendo per la supposizione G non $<$ L, i denominatori delle successive frazioni nelle Q, R vanno diventando sempre maggiori de' rispettivi numeratori. Dunque per la ragione addotta nel (I. *n.*° 272) tanto la serie Q, come la R convergeranno sempre più verso il loro valore, quanto più si avanzano le serie medesime.

II. Sia G $<$ L, e sia *k* numero dispari. In questo caso avendosi $G\pm L\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-1}(L\mp G\sqrt{-1})$, sviluppo, come nel (*prec.*I), la quantità $\sqrt[k]{(L\mp G\sqrt{-1})}$; e chiamate Q', R' le due serie, che ne sorgono, cosicchè $\sqrt[k]{(L\mp G\sqrt{-1})}=Q'\mp R'\sqrt{-1}$, anche Q', R' saranno convergenti verso il vero valore, perchè nei denominatori entra la quantità maggiore L, nei numeratori la più piccola G; ma a cagione di *k* dispari, abbiamo $\sqrt[k]{(\pm\sqrt{-1})}=\pm\sqrt[k]{\sqrt{-1}}=\pm\sqrt{-1}$; dunque sarà $P=\sqrt[k]{(G\pm L\sqrt{-1})}=R'\pm Q'\sqrt{-1}$.

III. Rimanendo G $<$ L, sia *k* numero pari, in conseguenza di ciò potendo esso *k* sempre esprimersi per $2^i h$, in cui *i* sia un intero non $<1$, ed *h* un numero dispari, avremo $P=\sqrt[2^i h]{(G\pm L\sqrt{-1})}=\sqrt[h]{(\sqrt[2^i]{(G\pm L\sqrt{-1})})}$. Ora $\sqrt[2^i]{(G\pm L\sqrt{-1})}$ è =

$\sqrt[2^{i-1}]{(\sqrt{(G \pm L\sqrt{-1})})}$, e la $\sqrt{(G \pm L\sqrt{-1}) = \sqrt{(G \pm \sqrt{-H})}}$ (*prec.* I) riducesi alla $E \pm F\sqrt{-1}$ (VII. *n.°* 286); dunque sarà $\sqrt[2^i]{(G \pm L\sqrt{-1}) = \sqrt[2^{i-1}]{(E \pm F\sqrt{-1})}}$. Nuovamente, poichè $\sqrt{(E \pm F\sqrt{-1}) = \sqrt{(\sqrt{(E \pm F\sqrt{-1})})}}$, e pel cit.° (VII. *n.°* 286) $\sqrt[2^i]{(E \pm F\sqrt{-1})}$ riducesi alla forma $E' \pm F'\sqrt{-1}$, avremo $\sqrt[2^{i-2}]{(G \pm L\sqrt{-1}) = \sqrt[2^{i-2}]{(E' \pm F'\sqrt{-1})}}$: nella stessa maniera essendo $\sqrt[2^{i-3}]{(E' \pm F'\sqrt{-1}) = \sqrt{(\sqrt{(E' \pm F'\sqrt{-1})})}}$, e la $\sqrt{(E' \pm F'\sqrt{-1})}$ riducendosi alla $E'' \pm F''\sqrt{-1}$ (VII. *n.°* 286), ne viene $\sqrt[2^i]{(G \pm L\sqrt{-1}) = \sqrt[2^{i-3}]{(E'' \pm F''\sqrt{-1})}}$. Proseguendo ad operare nel medesimo modo per un numero $i$ di volte, vedesi, che finalmente giungeremo ad un risultato $E^{(i-1)} \pm F^{(i-1)}\sqrt{-1} = \sqrt[2^i]{(G \pm L\sqrt{-1})}$, e frattanto tutte le quantità E, F, E', F', ec. $E^{(i-1)}$, $F^{(i-1)}$ saranno pel citato (VII. *n.°* 286) reali. Avendosi adunque $P = \sqrt[k]{(G \pm L\sqrt{-1})} = \sqrt[h]{(E^{(i-1)} \pm F^{(i-1)}\sqrt{-1})}$ osservo se mai fosse $h = 1$; se sì, avremo già ottenuta esattamente nella $E^{(i-1)} \pm F^{(i-1)}\sqrt{-1} = P$ la radice richiesta: che se $h > 1$, osservo se sia, o no, $E^{(i-1)} < F^{(i-1)}$; se non lo è, sostituisco nelle serie Q, R del (*prec.* I) invece della G la $E^{(i-1)}$, invece della L la $F^{(i-1)}$, e quindi denominatine Q'', R'' i risultati, avremo $P = Q'' \pm R''\sqrt{-1}$; che se $E^{(i-1)} < F^{(i-1)}$, faccio le

sostituzioni medesime nelle Q', R' del (*prec.* II), e chiamatine Q''', R''' i risultati, otterremo $P = R''' \pm Q'''\sqrt{-1}$. Dunque in qualunque supposizione, data la $(G \pm \sqrt{-H})$, potremo sempre ottenere un espressione, che in generale dirò $Q \pm R\sqrt{-1}$ la quale ne rappresenta la radice *kesima*, e nella quale le Q, R o sono due quantità reali, ed esatte, o esprimono due serie sempre più convergentisi verso il vero valore delle $x$, $y$ (*n.°* 291).

293. *Teor.* 2.° Qualunque espressione algebraica immaginaria venga attualmente proposta, essa può sempre ridursi alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$, essendo A, B due quantità determinabili esattamente, e reali, o determinabili per serie convergenti.

*Dim.* I. Data un' espressione immaginaria $\sqrt[2ih]{-K}$, nella quale sia $i$ non $< 1$, $h$ numero dispari (III. *n.° prec.*), e K quantità reale, e positiva, riducesi essa alla $\sqrt[2i]{(-\sqrt[h]{K})}$; e supposto $\sqrt[h]{K} = H$, alla $\sqrt[2i]{-H}$; ma per quanto si è detto nei (VII. *n.°* 286, III. *n.° prec.*) questa $\sqrt[2i]{-H}$ può ridursi alla forma $M + L\sqrt{-1}$; dunque, eseguita simile riduzione, avremo $\sqrt[2ih]{-K} = M + L\sqrt{-1}$.

II. Sia $(\sqrt[k]{(I \pm \sqrt[2ih]{-K})})^m$ l' espressione proposta, che chiamo P, ove $m$ sia un intero qualunque positivo. Pongo $M + L\sqrt{-1}$ invece della $\sqrt[2ih]{-K}$ (*prec.* I), e fatto $I \pm M = G$, ci verrà $\sqrt[m]{P} = \sqrt[k]{(G \pm L\sqrt{-1})}$; ma pel (*n.°* 292) anche questo radicale può sempre ridursi all' espressione $Q + R\sqrt{-1}$, esprimendosi dalle Q, R o dei valori esatti, o delle serie convergenti verso i valori veri. Dunque determinate que-

ste Q, R, otterremo $\sqrt[m]{P} = Q \pm R\sqrt{-1}$, e però $P = (Q \pm R\sqrt{-1})^m$. Ora nelle formole (XL), (III. *n.°* 205) colloco Q invece della *a*, R invece della *t*, e denominato A ciò che in esse diventa la prima parte, B ciocchè diviene la seconda, ci verrà finalmente

$$P = (\sqrt[k]{(I \pm \sqrt{-K})})^{2h^m} = A \pm B\sqrt{-1}.$$

III. Supposte le quantità $P' = (\sqrt[k']{(I' \pm \sqrt{-K'})})^{2i'h'^{m'}}$, $P'' = (\sqrt[k'']{(I'' \pm \sqrt{-K''})})^{2i''h''^{m''}}$, $P''' = (\sqrt[k''']{(I''' \pm \sqrt{-K'''})})^{2i'''h'''^{m'''}}$, ec. nelle quali le *k*, *i*, *m* denotino degli interi positivi qualunque, e le *h* siano interi positivi e dispari; sia data un' espressione, che chiamerò $P_1$, nella quale P', P'', P''', ec. siano combinate fra loro per qualsivogliono operazioni algebraiche. Ridotte in questa ipotesi le supposte P', P'', P''', ec. alle rispettive espressioni $A' \pm B'\sqrt{-1}$, $A'' \pm B''\sqrt{-1}$, $A''' \pm B'''\sqrt{-1}$, ec. (*prec.* II); osservo, che mentre cominciano esse nella $P_1$ a combinarsi fra loro, sia con l'addizione, o con la sottrazione, o con la moltiplicazione, o con la divisione, o con l'elevazione a potenza, o con l'estrazione delle radici, posson sempre venirne dei risultati della stessa forma delle $P' = A' + B'\sqrt{-1}$, $P'' = A'' + B''\sqrt{-1}$, ec. (I, III. *n.°* 193, III. *n.°* 205, *n.°* 292). Truovati simili risultati, osservo, che ripetendo fra questi, e i risultati primi P', P'', P''' ec. altre combinazioni della stessa natura, ne posson sorgere altri risultati parimenti della forma medesima. Determinati anche questi terzi, osservo finalmente, che proseguendo a fare nuove combinazioni, finchè in fine ci risulti quella tale espressione, che costituisce il valore della $P_1$; osservo, dissi, che verranno sempre formati, e combinati fra loro dei risultati della solita forma; ma quando alla fine si ottiene il valore del-

la $P_1$, deve ottenersi in corrispondenza un risultato ultimo finale, che lo uguagli. Dunque avendo ancora questo risultato finale la forma solita; chiamatolo $A \pm B\sqrt{-1}$, avremo $P_1 = A \pm B\sqrt{-1}$.

Sia per esempio $P_1 = \frac{P'P''P''' + (P' + P'')^2}{P' - P'' + \sqrt{\frac{P'P''}{P'''}}}$. Le prime combinazioni $P'P''$, $P' + P''$, $P' - P''$ ci daranno rispettivamente i risultati $(A'A'' \mp B'B'') \pm (A'B'' \pm A''B')\sqrt{-1}$, $(A' + A'') \pm (B' + B'')\sqrt{-1}$, $(A' - A'') \pm (B' - B'')\sqrt{-1}$, i quali denomino in corrispondenza $C' \pm D'\sqrt{-1}$, $C'' \pm D''\sqrt{-1}$, $C''' \pm D'''\sqrt{-1}$. Seguitando a combinare i risultati ottenuti, ed i primi opportunamente al valore della $P_1$, otterremo

$P'P''P''' = (A'''C' \mp B'''D') \pm (A'''D' \pm B'''C')\sqrt{-1}$, $(P' + P'')^2 = (C''^2 + D''^2) \pm 2C''D''\sqrt{-1}$, $\frac{P'P''}{P'''} = \frac{(A'''C' + B'''D')}{A'''^2 + B'''^2} \pm \frac{(A'''D' - B'''C')}{A'''^2 + B'''^2}\sqrt{-1}$. Chiamati questi risultati terzi $E' \pm F'\sqrt{-1}$, $E'' \pm F''\sqrt{-1}$, $E''' \pm F'''\sqrt{-1}$, sarà

$P'P''P''' + (P' + P'')^2 = (E' + E'') \pm (F' + F'')\sqrt{-1}$, $\sqrt{\frac{P'P''}{P'''}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(E'''^2 + F'''^2)} + E'''}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(E'''^2 + F'''^2)} - E'''}{2}\right)}\sqrt{-1}$:

denomino questi ultimi $G' \pm H'\sqrt{-1}$, $G'' \pm H''\sqrt{-1}$, e poichè ne viene $P' - P'' + \sqrt{\frac{P'P''}{P'''}} = (C''' + G'') \pm (D''' + H'')\sqrt{-1}$, sarà finalmente

$$P_1 = \frac{P'P''P''' + (P' + P'')^2}{P' - P'' + \sqrt{\frac{P'P''}{P'''}}} = \frac{G' \pm H'\sqrt{-1}}{(C''' + G'') \pm (D''' + H'')\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{(G'(C''' + G'') + H'(D''' + H''))}{(C''' + G'')^2 + (D''' + H'')^2} \pm \frac{(H'(C''' + G'') - G'(D''' + H''))}{(C''' + G'')^2 + (D''' + H'')^2}\sqrt{-1},$$

quantità, come apparisce, della forma $A \pm B\sqrt{-1}$.

IV. Ora qualunque siasi la espressione algebraica immaginaria proposta, essa non può mai venire

formata che da tante quantità simili alle precedenti P′, P″, P‴, ec. o riducibili ad esse combinate fra loro con una o più operazioni algebraiche in maniere più, o meno composte. Dunque essa verrà sempre rappresentata dalla P1 del (*prec.* III); ma per quanto si è detto nel cit.° (*prec.* III) questa P1 è sempre riducibile alla forma $A+B\sqrt{-1}$. Dunque ec. Avvertasi poi, che siccome dalle quantità reali I′, K′ delle P′ ec. determinansi esattamente, o per serie convergenti le A′, B′, ec. (VII. *n.*° 186, *n.*° 292), così esattamente, o per serie convergenti rimarranno determinate ancora le A, B nella P1 (*prec.* III).

294. *Probl.* 60.° Risolver l'Equazione di 3.°grado

(XCV) $x^3+Bx+C=0$.

*Sol.* Suppongasi $x=y+z$, sostituendo ne verrà $y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+By+Bz+C=0$, ossia $y^3+z^3+C+(3yz+B)(y+z)=0$. Poichè per essere $x=y+z$, una delle incognite $y$, $z$ è determinabile ad arbitrio, purchè si soddisfaccia alla condizione di rendere la somma $z+y$ uguale al valore della $x$, la determino in modo che $3yz+B=0$, e in conseguenza di ciò l'Equazion risultata diverrà $y^3+z^3+C=0$. Dalla $3yz+B=0$ ritraggo $z=-\frac{B}{3y}$, sostituisco nella $y^3+z^3+C=0$, ed avremo $y^3-\frac{B^3}{27y^3}+C=0$, e però $y^6+Cy^3-\frac{B^3}{27}=0$. Posto ora $y^3=u$, sciolgo l'Equazione $u^2+Cu-\frac{B^3}{27}=0$, e col tener conto del solo segno +, avendosi $u=-\frac{C}{2}+\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}$ (*n.*° 226) sarà $y^3=-\frac{C}{2}+\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}$, e quindi $y=\sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2}+\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right)}$ (*n.*°275,274).

espri-

esprimendosi dalla $\alpha$ una delle tre radici cubiche dell' unità, ed avremo insieme $z = -\frac{B}{3y} = -\frac{B}{3\alpha\sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2}+\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right)}}$, ossia moltiplicando questo valore sopra e sotto per $\alpha^2\sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2}-\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right)}$, avremo $z = -\frac{\alpha^2 B\sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2}-\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right)}}{3\alpha^3\times\frac{-B}{3}}$.

(VI. *n.°* 193) $= \alpha^2\sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2}-\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right)}$, perchè $\alpha^3 = 1^3$ (II. *n.°* 274). Sostituisco i valori truovati nella $x = y + z$, ed otterremo

$$x = \alpha\sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2}+\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right)} + \alpha^2\times\sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2}-\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B3}{27}\right)}\right)} \quad \text{(XCVI)}$$

espressione, dalla quale si otterranno tre valori diversi della $x$, col porre successivamente in vece della $\alpha$ le tre radici cubiche dell' unità $1$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (II. *n.°* 274).

Se sia per esempio $x^3 + 6x - 10 = 0$ l' Equazione data, le sue radici saranno

$= \sqrt[3]{(5+\sqrt{33})} + \sqrt[3]{(5-\sqrt{33})}$,

$x'' = \frac{(-1+\sqrt{-3})\sqrt[3]{(5+\sqrt{33})} + (-1-\sqrt{-3})\sqrt[3]{(5-\sqrt{33})}}{2}$,

$x''' = \frac{(-1-\sqrt{-3})\sqrt[3]{(5+\sqrt{33})} + (-1+\sqrt{-3})\sqrt[3]{(5-\sqrt{33})}}{2}$.

295. *Scol.* 4.° I. Dei due valori della $u$ (*n.° prec.*) se si fosse tenuto conto dell' altro $-\frac{C}{2}-\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}$ sarebbesi ricavato $x=\alpha\sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2}-\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right)}+\alpha^2\sqrt[3]{\left(-\frac{C}{2}+\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}\right)}$; ma per la proprietà delle $\alpha$, $\alpha^2$ esposta nel (II. *n.°* 274) i valori che si ottengono della $x$ da quest' ultima formola sono gli stessi affatto, che quelli, i quali ricavansi dalla (XCVI). Dunque per lo scioglimento completo della (XCV) bastava, come abbiam fatto, tener conto di un solo dei valori della $u$.

II. La ritruovata (XCVI) suol dirsi *formola Cardanica*, essendo stato Cardano il primo a pubblicarla con le stampe; la sua invenzione però devesi totalmente a Scipion Ferreo, ed a Nicolò Tartaglia.

296. *Esem.* 43.° Si domandano tre numeri, la somma dei quali sia $=-A$, la somma de' loro ambi $=B$, e il prodotto loro $=-C$.

*Sol.* Chiamati $x, y, z$ questi tre numeri, le condizioni del Problema ci danno $x+y+z=-A$, $xy+xz+yz=B$, $xyz=-C$. Ora da queste Equazioni abbiamo $y+z=-A-x$, $yz=B-x(y+z)$. Dunque sostituendo nella seconda il valore della somma $y+z$ avuto dalla prima, e nell' ultima il valore $yz$ avuto dalla seconda, otterremo successivamente $yz=B+Ax+x^2$, $-C=Bx+Ax^2+x^3$, e però

(XCVII) $x^3+Ax^2+Bx+C=0$.

Facciasi $x=t-\frac{A}{3}$, si sostituisca, e ne verrà $t^3+\left(B-\frac{A^2}{3}\right)t+\left(C-\frac{AB}{3}+\frac{2A^3}{27}\right)=0$, ossia $t^3+B't+C'=0$ posto $B-\frac{A^2}{3}=B'$, $C-\frac{AB}{3}+\frac{2A^3}{27}=$

C'. Ora essendo la $t^3+B't+C'=o$ della stessa forma della (XCV), la sua soluzione si ottiene con lo stesso metodo del ( *n.°* 294 ). Dunque per la formola (XCVI) avremo

$$t=\alpha\sqrt[3]{\left(-\frac{C'}{2}+\sqrt{\left(\frac{C'^2}{4}+\frac{B'^3}{27}\right)}\right)}+\alpha^2\sqrt[3]{\left(-\frac{C'}{2}-\sqrt{\left(\frac{C'^2}{4}+\frac{B'^3}{27}\right)}\right)}$$

e per conseguenza

$$x=-\frac{A}{3}+\alpha\sqrt[3]{\left(-\frac{C'}{2}+\sqrt{\left(\frac{C'^2}{4}+\frac{B'^3}{27}\right)}\right)}+\alpha^2\sqrt[3]{\left(-\frac{C'}{2}-\sqrt{\left(\frac{C'^2}{4}+\frac{B'^3}{27}\right)}\right)} \qquad \text{(XCVIII)}$$

Affine di ricavare il valore delle altre due incognite $y$, $z$ col mezzo delle prime due Equazioni $x+y+z=-A$, $xy+xz+yz=B$ truovo come precedentemente $xz=B+Ay+y^2$, $xy=B+Az+z^2$ sostituisco successivamente, e dalla $xyz=-C$ risultando in corrispondenza $-C=By+Ay^2+y^3$, $-C=Bz+Az^2+z^3$ otterremo $y^3+Ay^2+By+C=o$, $z^3+Az^2+Bz+C=o$. Ma ciascuna di queste due Equazioni non è che la stessa (XCVII), cangiate semplicemente le lettere $y$, $z$ nella $x$. Dunque le loro radici altro non essendo, che le radici della (XCVII), ne segue, che i tre valori $x', x'', x'''$, i quali provengono dalla formola (XCVIII) col porre successivamente invece della $\alpha$ le tre espressioni $1$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ( *n.°* 294 ) altro non sono che i tre valori delle $x$, $y$, $z$ richiesti dal Problema.

297. *Scol.* 5.° I. Data un' Equazione qualunque di 3.° grado, trasportinsi in essa tutti i termini nel primo membro, non restando nel secondo che lo zero; si riducano ad un termine solo tutti i

coefficienti della $x^3$, ad un solo tutti quelli della $x^2$, ad uno quei tutti della $x$, e ad uno tutti i termini cogniti; si divida tutto pel termine che moltiplica $x^3$, e chiamato A il coefficiente, che quindi moltiplica $x^2$, B quello, che moltiplica $x$, e C la quantità nota, vedesi, che l'Equazione che ne risulta, altro non sarà, che la (XCVII). Dunque a questa (XCVII) potendosi ridurre qualsivoglia Equazione di 3.° grado, essa ne costituirà la *Formola generale*, e col mezzo della (XCVIII) avremo per conseguenza le radici di una qualunque di tali Equazioni. Ora la soluzione della (XCVII) dipende pienamente dalla soluzione della (XCV) (*n.°* 296). Dunque la Formola Cardanica (XCVI) (dovrebbesi dir piuttosto Tartagliana) somministra la soluzione generale delle Equazioni di 3.° grado.

II. Un' Equazione di terzo grado è sempre dotata di tre radici, ossia esistono sempre tre espressioni che la fanno verificare.

298. *Teor.* 3.° In un' Equazione qualunque di grado 3.° ridotta giusta il (*n.° prec.*) la somma delle sue tre radici, (II. *n.° prec.*), uguaglia il coefficiente del secondo termine preso col segno contrario, la somma de' loro prodotti a due a due uguaglia il coefficiente del termine terzo, e il prodotto di tutte e tre è uguale al termine cognito preso con segno contrario.

*Dim.* La (XCVII) pel (*n.° prec.*) rappresenta un' Equazione di 3.° grado qualunque, e le $x$, $y$, $z$ del (*n.°* 296) sono pel cit.° (*n.°* 296) le tre radici dell' Equazione stessa; ma $x+y+z=-A$, $xy+xz+yz=B$, $xyz=-C$ (*n.°* 296), ed A è il coefficiente del termine secondo nella (XCVII), B il coefficiente del termine terzo, C la quantità nota. Dunque ec.

Posta diffatti l' Equazione $x^3-6x^2+11x-6=0$,

di cui le radici sono 1, 2, 3, avremo $1+2+3=6$, $1.2+1.3+2.3=11$, $1.2.3=6$.

299. *Teor.* 4.° Un' Equazione di 3.° grado ha sempre una radice reale.

*Dim.* Ridotta l' Equazione di 3.° grado proposta alla (XCVII) (I.*n.*° 297), e quindi alla (XCV) (*n.*° 296) è chiaro, che, se esiste una radice reale in quest' ultima, esister ne deve una reale anche nella data. Ora io dico, che è sempre reale quella radice della (XCV), che corrisponde alla supposizione nella (XCVI) di $\alpha=1$, e ciò difatti è evidente, ogniqualvolta sia B non $<0$, ed ogniqualvolta, essendo B negativa, e che quindi porrò $=-p$, abbiasi $\frac{C^2}{4}-\frac{p^3}{27}$ non $<0$. Rapporto poi al caso, in cui $\frac{C^2}{4}-\frac{p^3}{27}<0$, pongasi per maggiore semplicità $\frac{C}{2}=n$, $\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}=\sqrt{\left(n^2-\frac{p^3}{27}\right)}=\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-n^2\right)}\sqrt{-1}=r\sqrt{-1}$, e nella fatta supposizione di $\alpha=1$ convertitasi la (XCVI) nella $x=\sqrt[3]{(n+r\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(n-r\sqrt{-1})}$ se ne faccia il cubo, ne verrà $2n+3\sqrt[3]{(n^2+r^2)}\,(\sqrt[3]{(n+r\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(n-r\sqrt{-1})})=x^3$, e però $2n+3x\sqrt[3]{(n^2+r^2)}=x^3$. Ora questa Equazione ci dà $\sqrt[3]{(n^2+r^2)}=\frac{x^3-2n}{3x}$, e quindi $n^2+r^2=\frac{x^9-6nx^6+12n^2x^3-8n^3}{27x^3}=\frac{u^3-6nu^2+12n^2u-8n^3}{27u}$, posto $x^3=u$. Dunque sarà $r^2=\frac{u^3-6nu^2-15n^2u-8n^3}{27u}=\frac{u^3+2nu^2+n^2u-8nu^2-16n^2u-8n^3}{27u}=\frac{(u^2+2nu+n^2)u-(u^2+2nu+n^2)8n}{27u}=\frac{(u+n)^2(u-8n)}{27u}$, e però $r^2=\frac{1}{27}\left((u+n)^2\left(1-\frac{8n}{u}\right)\right)$.

Ciò posto, osservo, che se fosse $u=8n$, di-

ventando $\frac{8n}{u} = 1$, la $r$ diverrebbe zero, e se la $u$ andasse continuatamente crescendo dal valore $8n$ all'infinito ; siccome la $\frac{8n}{u}$ anderebbe in corrispondenza scemando continuatamente, e però la $1 - \frac{8n}{u}$ continuatamente crescendo , e nel tempo stesso si aumenterebbe continuatamente eziandio la $(u+n)^2$; ne segue, che si aumenterebbe in corrispondenza continuatamente ancora la $r^2$, e però la $r$ . Dunque a tutti i valori reali, che può avere la $r$ dallo zero all'infinito, corrisponderanno sempre, dal valore $8n$ all'infinito, tanti valori attualmente esistenti, e però reali della $u$ . Ma avendosi per la supposizione $\frac{C^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$, e però $\frac{p^3}{27} - \frac{C^2}{4} > 0$, il valore della $r = \sqrt[3]{\left(\frac{p^3}{27} - n^2\right)}$ nel caso presente risulta reale, e però compreso nella indicata serie infinita di valori . Dunque corrispondentemente ad esso esisterà sempre un valore reale della $u$, e però della $x^3 = u$, e della $x = \sqrt[3]{u}$ . Dunque sarà sempre vero che ec.

Potrebbe essere $n$ quantità negativa : allora risultandovi $r^2 = \frac{1}{27}\left((u-n)^2\left(1+\frac{8n}{u}\right)\right)$ ; faremo lo stesso discorso , ponendo però da prima $u = -8n$ , e poi facendo crescere la $u$ come precedentemente, ma in senso negativo .

300. *Cor.* Da quanto si è detto nel (*n.° prec.*) è facile a vedersi , che quando il coefficiente ultimo della (XCV), cioè la quantità C è $< 0$ ; allora la radice , che si è nel cit. ( *n.° prec.* ) dimostrata reale , dev' essere positiva, che questa radice è ne-

gativa, quando $C > 0$; e ch' essa è zero, quando $C = 0$.

301. *Probl.* 61.° Determinare un criterio, onde conoscere, quando le altre due radici della Equazione (XCV) sono reali, od immaginarie.

*Sol.* Espresse con le lettere $x'$, $x''$, $x'''$ le tre radici della (XCV) rappresentisi con la $x'$ la reale (*n.°* 299). Essendo la (XCV) identica con la $x^3 + 0 \times x^2 + Bx + C = 0$, avremo

$x' + x'' + x''' = 0$, $x'x'' + x'x''' + x''x''' = B$, $x'x''x''' = -C$ (*n.°* 298), e però $x' = -(x'' + x''')$, $x'(x'' + x''') + x''x''' = B$, onde sarà $B = -(x''^2 + x''x''' + x'''^2)$, $C = x''^2 x''' + x''x'''^2$. Si elevi la quantità B al cubo, la C al quadrato, e avuti i risultati

$$B^3 = -(x''^6 + 3x''^5 x''' + 3x''^4 x'''^2 + 3x''^4 x'''^2 + 6x''^3 x'''^3 + 3x''^2 x'''^4 + x''^3 x'''^3 + 3x''^2 x'''^4 + 3x'' x'''^5 + x'''^6)$$

$$C^2 = x''^4 x'''^2 + 2x''^3 x'''^3 + x''^2 x'''^4,$$

si moltiplichi il primo per 4, il secondo per 27, se ne faccia la somma, e ne verrà

$$27C^2 + 4B^3 = -(4x''^6 + 12x''^5 x''' - 3x''^4 x'''^2 - 26x''^3 x'''^3 - 3x''^2 x'''^4 + 12x'' x'''^5 + 4x'''^6) = -(2x''^3 + 3x''^2 x''' - 3x'' x'''^2 - 2x'''^3)^2$$

ma divisa la quantità $2x''^3 + 3x''^2 x''' - 3x'' x'''^2 - 2x'''^3$ per $x'' - x'''$, ne risulta il quoto $2x''^2 + 5x'' x''' + 2x'''^2$, il quale è $= 2(x''^2 + x''x''' + x'''^2) + 3x'' x'''$, e perciò $= -\left(2B + \frac{3C}{x'}\right)$. Dunque avendosi $27C^2 + 4B^3 = -(x'' - x''')^2 \left(2B + \frac{3C}{x'}\right)^2$, otterremo $(x'' - x''')^2 = -\left(\frac{27C^2 + 4B^3}{(2B + \frac{3C}{x'})^2}\right)$, e per conseguenza $x'' - x''' = \sqrt{-\left(\frac{27C^2 + 4B^3}{(2B + \frac{3C}{x'})^2}\right)}$. Ora essendo $x'$ reale, e reali i coefficienti B, C, il quadrato $(2B + \frac{3C}{x'})^2$ è necessariamente positivo; la frazione dun-

que $\frac{27C^2+4B^3}{(2B+\frac{3C}{x'})^2}$ sarà positiva, negativa, o zero, secondo che tale è il numeratore $27C^2+4B^3$.

I. Sia $27C^2+4B^3>0$. Risultando in questo caso $x''-x'''=\sqrt{-\left(\frac{27C^2+4B^3}{(2B+\frac{3C}{x'})^2}\right)}$ = quantità immaginaria, denominiamo essa $i$, e col sommare, e sottrarre fra loro le due Equazioni $x''+x'''=-x'$, $x''-x'''=i$, ottenendosi $x''=\frac{-x'+i}{2}$, $x'''=\frac{-x'-i}{2}$, ne segue, che in questo caso le $x''$, $x'''$ saranno amendue immaginarie.

II. Facciasi $27C^2+4B^3<0$: per essere in tale ipotesi questa quantità negativa, risulterà $x''-x'''=\sqrt{\frac{-(27C^2+4B^3)}{\left(2B+\frac{3C}{x'}\right)^2}}$ = quantità reale, che chiamerò $r$; si sommino, e si sottraggano le $x''+x'''=-x'$, $x''-x'''=r$, e poichè risulta $x''=\frac{-x'+r}{2}$, $x'''=\frac{-x'-r}{2}$, le $x''$, $x'''$ saranno entrambe reali.

III. Se finalmente sia $27C^2+4B^3=0$; divenendo $x''-x'''=0$, otterremo $x''=-\frac{x'}{2}$, $x'''=-\frac{x'}{2}$, e per conseguenza le $x''$, $x'''$ saranno reali uguali fra loro, e ciascuna di esse metà della prima radice $x'$ presa negativamente.

Divisa ora la $27C^2+4B^3$ per $4.27$, ne risulta $\frac{1}{4.27}(27C^2+4B^3)=\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}$, la quale altro non è che la quantità esistente nella formola (XCVI) sotto del radicale secondo. Dunque dalla semplice ispezione di questa quantità avremo il criterio do-

mandato dal Problema . Se si vegga essere $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}$ $>$ o , diremo pel (*prec.* I) , che le altre due radici della (XCV) sono immaginarie , diremo queste amendue reali e disuguali fra loro, se si vegga $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}<0$ (*prec.* II) , e se $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}=0$ le diremo reali , e uguali fra loro (*prec.* III) .

302. *Scol.* 6.° I. Da quanto abbiam detto nei (*n.* 296 , 301 ) apparisce che le altre due radici della (XCVII) (*n.°* 299 ) saranno entrambe immaginarie , o reali , disuguali , od uguali fra loro , secondochè nella (XCVIII) la quantità $\frac{C'^2}{4}+\frac{B'^3}{27}$ risulta positiva , o negativa , o zero .

II. Poichè quando $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}>0$, la $\sqrt{\left(\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\right)}$ è reale, ed è questa immaginaria, quando $\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}<0$ , vedesi , che la Formola Cardanica (XCVI) apparisce sotto un aspetto reale , quando le altre due radici della Equazione di 3.° grado sono immaginarie ; e che quando tutte e tre le radici dell' Equazione medesima sono reali , essa (XCVI) si presenta sotto un aspetto immaginario . Ora possiamo noi aver mezzo onde esprimere in generale il valore di queste tre radici reali , senza che siano involute d' immaginarj ? rispondo , che mentre si vogliono queste espressioni esatte , e con metodi puramente algebraici , ciò è affatto impossibile , ed è per questo , che a simile caso si dà il nome di *Caso irreducibile* . La dimostrazione di quest' ultima mia asserzione non può aver luogo nel presente Corso elementare .

III. Poichè nel *Caso irreducibile* esser deve $\frac{C^2}{4}+\frac{B3}{27}<0$, dovrà il coefficiente B essere negativo, l'altro C potrà essere positivo e negativo; e posto quindi $B=-p$, $C=\pm q$, la (XCV) si ridurrà in corrispondenza alla $x^3-px\pm q=0$ essendo poi in questa $4p^3>27q^2$.

IV. Quantunque nel Caso irreducibile non si possano i valori delle radici ottenere esattamente privi d'immaginarj (*prec.* II); pure potremo sempre averli tali per approssimazione. Supposta difatti l'Equazione del (*prec.* III) e supposto ivi $\pm\frac{q}{2}=n$, $\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-n^2\right)}=r$, onde avere, come nel (*n.°* 299) la formola $x=\alpha\sqrt[3]{(n+r\sqrt{-1})}+\alpha^2\sqrt[3]{(n-r\sqrt{-1})}$ esprimente in questo caso le tre radici reali della Equazione (*prec.* I), osservo se sia $n<r$, o non lo sia: se non lo è, pongo nelle serie ottenute nel (I. *n.* 292) invece della G il numero $n$, invece della L l'altro $r$, invece della $k$ il 3, e ritenute le denominazioni colà assegnate di Q, R, avremo $x=\alpha(Q+R\sqrt{-1})+\alpha^2(Q-R\sqrt{-1})$, ossia $x=(\alpha+\alpha^2)Q+(\alpha-\alpha^2)R\sqrt{-1}$, ove Q, R rappresentano due serie convergenti (*cit.* I. *n.* 292). Sostituisco ora successivamente in vece della $\alpha$ i tre valori $1$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (*n.* 294), e risultando $x'=2Q$, $x''=-Q-R\sqrt{3}$, $x'''=-Q+R\sqrt{3}$, avremo in queste tre espressioni prive d'immaginarj i valori per serie convergenti delle tre radici. Che se sia $n>r$; allora faccio le stesse sostituzioni de' numeri $n$, $r$, 3 invece delle G, L, $k$ nelle serie espresse con le Q', R', nel (II. *n.* 292), e nella stessa maniera otterremo in generale $x=(\alpha+\alpha^2)R'+(\alpha-\alpha^2)Q'\sqrt{-1}$, e quindi in

particolare $x'=2R'$, $x''=-R-Q'\sqrt{3}$, $x'''=-R'+Q'\sqrt{3}$, espressioni prive esse pure d' immaginarj, e approssimantisi sempre più ai veri valori delle radici.

303. *Probl.* 62.° Domandasi la soluzione della Equazione

$$x^4+Bx^2+Cx+D=0 \qquad \text{(XCIX)}$$

*Sol.* Trasportati nel secondo membro i duè termini $Cx$, D, aggiungasi all' un membro, ed all' altro la quantità $zx^2+\frac{(B+z)^2}{4}$, ove $z$ è quantità da determinarsi; avremo $x^4+Bx^2+zx^2+(\frac{B+z)^2}{4}=$

$zx^2+\frac{(B+z)^2}{4}-Cx-D$, ossia

$$\left(x^2+\frac{z+B}{2}\right)^2=z\left(x^2-\frac{C}{z}x+\frac{(z+B)^2}{4z}-\frac{D}{z}\right). \qquad \text{(C)}$$

Ora poichè la $z$ è arbitraria, determiniamola in modo, che si abbia

$$\frac{C^2}{4z^2}=\frac{(z+B)^2}{4z}-\frac{D}{z}. \qquad \text{(CI)}$$

In conseguenza di ciò la (C) diverrà

$$\left(x^2+\frac{z+B}{2}\right)^2=z\left(x-\frac{C}{2z}\right)^2; \qquad \text{(CII)}$$

e la (CI) convertendosi nella

$$z^3+2Bz^2+(B^2-4D)z-C^2=0. \qquad \text{(CIII)}$$

il valore della $z$, che riduce la (C) alla (CII) dipenderà da un' Equazione di grado 3.°, da un' Equazione per conseguenza, che sappiamo risolvere (*n.°* 296). Siano pertanto $z', z'', z'''$ le radici della (CIII), e supposta una di queste, per esempio la $z'=t^2$, pongasi questo valore nella (CII), e se ne estragga la radice, ne verrà $x^2+\frac{t^2+B}{2}=\pm t\left(x-\frac{C}{2t^2}\right)$

$= \pm tx \mp \frac{C}{2t}$, e però $x^2 \mp tx + \frac{t^2+B}{2} \pm \frac{C}{2t} = 0$; sciolgo quest' ultima Equazione (*n.* 226), ed avremo

(CIV) $$x = \pm \frac{t}{2} \pm \sqrt{\left(-\left(\frac{2B+t^2}{4}\right) \mp \frac{C}{2t}\right)}$$

espressione generale della $x$, nella quale il segno + del termine $\frac{t}{2}$ combinasi col − del $\frac{C}{2t}$, ed il − del $\frac{t}{2}$ col + del $\frac{C}{2t}$, ed amendue poi i segni di queste due quantità così combinati corrispondono in egual modo tanto all' uno come all'altro dei segni, che sono anteposti alla $\sqrt{}$, onde per la $x$ si ottengono i quattro seguenti valori

(CV) $$x' = \frac{t}{2} + \sqrt{\left(-\left(\frac{2B+t^2}{4}\right) - \frac{C}{2t}\right)}, \quad x'' = -\frac{t}{2} + \sqrt{\left(-\left(\frac{2B+t^2}{4}\right) + \frac{C}{2t}\right)}$$

$$x''' = \frac{t}{2} - \sqrt{\left(-\left(\frac{2B+t^2}{4}\right) - \frac{C}{2t}\right)}, \quad x'' = -\frac{t}{2} - \sqrt{\left(-\left(\frac{2B+t^2}{4}\right) + \frac{C}{2t}\right)}$$

Siccome poi dalla (CIII) convertitasi nella $t^6 + 2Bt^4 + (B^2 - 4D)t^2 - C^2 = 0$ si ha $\frac{C}{2t} = \sqrt{\left(\frac{t^4+2Bt^2+B^2-4D}{4}\right)}$ sostituendo la (CIV) acquisterà l' altra forma

(CVI) $$x = \pm \frac{t}{2} \pm \sqrt{\left(-\left(\frac{2B+t^2}{4}\right) \mp \sqrt{\frac{(t^4+2Bt^2+B^2-4D)}{4}}\right)}.$$

304. *Scol.* 1.° I. Se invece della $z'$ si fosse tenuto conto della $z''$, oppure della $z'''$, io dico, che per la $x$ sarebbero sempre risultati gli stessi quattro valori (CV). Imperciocchè la quantità $z$ si è introdotta nella nostra Equazione coll' aggiungere tanto al primo, come al secondo membro della $x^4 + Bx^2 = -Cx - D$ la medesima quantità $zx^2 + \frac{(z+B)^2}{4}$; ma per una simile addizione i valori della $x$ nella

$x^4 + Bx^2 = Cx - D$ è chiaro che rimangono sempre gli stessi, qualunque sia il valore che si attribuisce alla $z$: dunque se sotto un certo valore della $z$ si ricavano i valori (CV), gli stessi valori (CV) dovrà ottenere la $x$ sotto qualunque altro valore si dia alla $z$. I valori poi della $z$ opportuni alla chiesta soluzione non sono che i precedenti tre $z'$, $z''$, $z'''$; perchè essi deggiono soddisfare alla condizione di ridurre la (C) alla (CII), e di valori atti a ciò non vi sono, che le radici della (CII).

II. Si è risolta la Equazione (XCIX) dipendentemente dalla soluzione della (CIII) (*n.* 303); ma questa ultima Equazione, essendo di 3.° grado, è soggetta al caso irreducibile (II. *n.* 302). Dunque per questa ragione sarà soggetta al caso irreducibile eziandio la (XCIX).

III. Potendo nella (XCIX) i coefficienti B, C, D avere un valore qualunque, supponghiamo, che sia $C=0$. In questa ipotesi la (XCIX) diviene $x^4+Bx^2+D=0$, e la (CIII) $z^3+2Bz^2+(B^2-4D)z=0$, Equazione, in cui una delle radici è evidentemente lo zero. Fatto adunque $z'$, e però $t$ (*n.* 303) $=0$, pongasi nella (CIV) lo zero tanto invece della $t$, come invece della C, essa (CIV) diverrà perciò $x = \pm\sqrt{\left(-\frac{2B}{4} \mp \frac{0}{0}\right)}$; ma questo è un risultato, il quale contenendo l'espressione $\frac{0}{0}$, apparisce indeterminato (III, IV. *n.* 98): affine però di determinarlo, ricorrasi alla (CVI), e posto in essa lo zero invece della $t$, avremo $x = \pm\sqrt{\left(-\frac{B}{2} \mp \frac{\sqrt{(B^2-4D)}}{2}\right)}$, risultato il quale è appunto quello, che nel (*n.* 280) si è ritrovato corrispondentemente all' Equazione $x^4+Bx^2+D=0$.

305. *Esem.* 44.° Truovare quattro quantità tali, che la loro somma sia $=-A$, la somma de' loro prodotti a due a due $=B$, la somma de' prodotti loro a tre a tre $=-C$; ed il prodotto di tutte e quattro $=D$.

*Sol.* Espresse con le $x, y, z, u$ le quattro quantità domandate, poichè per le condizioni del Problema si ha $x+y+z+u=-A$, $xy+xz+xu+yz+yu+zu=B$, $xyz+xyu+xzu+yzu=-C$, $xyzu=D$, e però $y+z+u=-A-x$, $yz+yu+zu=B-x(y+z+u)$, $yzu=-C-x\times(yz+yu+zu)$, sostituisco successivamente nella seconda di queste Equazioni il valore della somma $y+z+u$ avuto dalla prima, nella terza il valore della somma $yz+yu+zu$ ricavato dalla seconda, e nella $xyzu=D$ il valore del prodotto $yzu$ ottenuto dalla terza; e successivamente risulterà $yz+yu+zu=B+Ax+x^2$, $yzu=-C-Bx-Ax^2-x^3$, $D=-Cx-Bx^2-Ax^3-x^4$, e quindi

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0. \qquad \text{(CVII)}$$

Si ponga $x=t-\frac{A}{4}$, sostituiscasi, e supposto

$$B-\frac{6A^2}{4^2}=B',\ C-\frac{AB}{2}+\frac{2A^3}{4^2}=C',\ D-\frac{AC}{4}+\frac{A^2B}{4^2}-\frac{3A^4}{4^4}=D',$$

avremo $t^4+B't^2+C't+D'=0$. Ora la presente è un' Equazione simile alla (XCIX); dunque ottenutane col metodo del (*n.* 303) la soluzione, sottraendo dal valore della $t$ la quantità $\frac{A}{4}$, avremo il valore della $x$. Con lo stesso artifizio, con cui si è truovata l' Equazione (CVII) in $x$, cercando le Equazioni in $y$, in $z$, in $u$; come nel (*n.* 296) vedremo, che ciascuna di esse altro non è, che la stessa (CVII), cangiata soltanto la lettera $x$ rispettivamente nella $y$, o nella $z$, o nella $u$. Dunque le quattro quantità $x, y, z, u$ altro infine non sono,

che le quattro radici della (CVII), e per conseguenza la soluzione di questa dandoci il valore di tutte e quattro le $x$, $y$, $z$, $u$ ci darà essa sola lo scioglimento del Problema proposto.

306. *Scol.* I. Col discorso fatto nel (I. *n.* 297) è facile a vedersi, che la (CVII) esprime la formola generale delle Equazioni di grado 4.°, e che quindi il metodo esposto nei (*n.* 303, 305) somministra la soluzione di tutte le Equazioni di tal grado. Lodovico Ferrari quegli è a cui devesi la prima scoperta di questa soluzione, Bombelli in seguito ha avuto il merito di generalizzarla.

II. Con un raziocinio affatto uguale a questo del (*n.* 298), e in conseguenza del (*n.* 305) vedremo, che in un' Equazione qualunque di 4.° grado la somma delle sue quattro radici (*n.* 303, 305) uguaglia sempre il coefficiente del secondo termine preso col segno contrario, l'aggregato dei prodotti a due a due di esse radici è uguale al coefficiente del terzo termine, l'aggregato dei loro prodotti a tre a tre uguaglia il coefficiente del termine quarto preso col segno contrario, ed il prodotto di tutte e quattro le radici medesime uguaglia il termine ultimo.

307. *Scol.* 9.° I. Poichè il termine cognito tanto nelle Equazioni di 3.°, come nelle altre di 4.° grado già ridotte alle forme (XCVII) (CVII) è uguale al prodotto delle loro radici preso in queste col proprio segno, in quelle col segno opposto (*n.* 293. II. *n. prec.*); ne segue, che ogniqualvolta alcuna delle radici sia numero intero, noi potremo determinarla indipendentemente dalla loro soluzion generale (*n.i* 294, 296, 303, 305). Imperciocchè, truovati pel (*n.* 93) tutti i divisori esatti del termine cognito, sostituiscansi essi ad uno ad uno col metodo, per maggiore semplicità, del (*n.* 252) in luogo della incognita nel primo membro della Equa-

zione già ridotta come di sopra, e quelli, che per ultimo risultato daranno lo zero, saranno evidentemente radici. Per tal modo truoveremo, che la Equazione $x^3-10x^2+16x+35=0$ ha per radice l'intero 5, e l'altra $x^4-2x^3-8x^2+10x+15=0$ ha per radici gl' interi $-1$, 3.

II. La soluzione generale delle Equazioni algebraiche, che superano il 4.° grado è assolutamente impossibile. La dimostrazione però di questa impossibilità appoggiasi ad ulteriori principj, i quali non possono venir compresi da questi Elementi.

IL FINE.

# INDICE

*Della Quantità e del Numero in generale*. Pag. 1.

Def. della Quantità pag. 1, n. 1. — Def. del Numero pag. 2, n. 8. — Def. della Matematica, dell'Aritmetica, e del Calcolo p. 3, n. 12. — Def. dell' Algebra p. 4, n. 13. — Delle Istituzioni Aritmetiche p. 4.. 8, n. 14.. 17.

PARTE I.

Delle Prime quattro Operazioni di Calcolo fra le Quantità letterali. Pag. 9

*CAPO I.*

*Dell' Addizione, e della Sottrazione*. ivi.

Def. dell'Addizione, e della Sottrazione p. 9, n. 18. — Dei segni corrispondenti p. 9, n. 19. Def. della Equazione p. 11, n. 24. — Delle quantità positive, e negative p. 11.. 15, n. 25.. 30. — Def. delle quantità algebraiche, o letterali p. 16, n. 32. — Probl. Sommare le quantità algebraiche p. 15, n. 33. — Probl. Sottrarre le quantità algebraiche p. 17, n. 34. — Def. dei Termini simili, e dei Coefficienti p. 18, n. 36. — Regole pel trasporto dei termini nelle Equazioni p. 21, n. 42. — Del cambiamento dei segni nelle Equazioni p. 23, II. n. 44.

## *CAPO II.*

*Della Moltiplicazione* Pag. 24.

Def. della Moltiplicazione p. 24, n. 45. — Dei segni corrispondenti p. 24, n. 45. — Probl. Della regola dei segni da prefiggersi al prodotto p. 24, n. 46. — Prima regola di Eliminazione p. 27, n. 51. — Probl. Moltiplicare fra loro le quantità intere algebraiche p. 28, 30, 31, n. 52, 56, 58.

## *CAPO III.*

*Della Divisione.* Pag. 34.

Def. della Divisione p. 34, n. 62. — Dei segni corrispondenti p. 34, n. 62. — Probl. Della regola dei segni da anteporsi al quoto p. 35, n. 64. — Probl. Dividere fra loro le Quantità intere ed algebraiche p. 37, 39, n. 67, 69. — Della potenza zero, e delle potenze negative p. 38, n. 63. — * Riflessioni sulla moltiplicazione, e sulla divisione p. 42, III. n. 70.

## *CAPO IV.*

*Delle Frazioni in generale, e dei numeri primi, e dei composti* Pag. 48.

Proprietà riguardanti i quozienti, e le frazioni p. 48..50. n. 76, 77. — Def. dei Numeri primi, e dei composti p. 51, n. 78. — Def. dei Numeri primi fra se, e dei composti fra se p. 51, n. 79. — Def. del massimo comun divisore p. 52, n. 80. — Alcune proprietà dei

numeri p. 52 .. 57, n. 81 .. 90. — Probl. Cercasi se un dato numero determinato sia primo, o no p. 58, n. 91. — Sopra la divisione di alcuni numeri particolari p. 58 .. 61, n. 92 .. X. n. 92. — * Sopra la divisione di altri numeri p. 62 . . 71, XI . . XXI. n. 92. — Probl. Truovare i divisori esatti di un dato numero intero p. 72, n. 93.

## *CAPO V.*

*Del Calcolo de' Rotti.* Pag. 75.

Probl. Ridurre più frazioni ad uno stesso denominatore p. 75, n. 94. — Probl. Sommare, e Sottrarre i Rotti p. 76, n. 96. — Delle espressioni $\frac{a}{o}$, $\frac{o}{o}$ p. 79, n. 98. — Togliere i rotti dalle Equazioni p. 82, n. 99. — Probl. Della Moltiplicazione dei rotti p. 83, n. 100. — Probl. Della Divisione nelle frazioni p. 85, n. 103. — Metodi diversi di eliminazione p. 89, n. 106. — Probl. Della Ricerca del massimo comun Divisore p. 99, 101, n. 109, 111. — Probl. Ridurre un rotto alla più semplice espressione p. 103, n. 113. — Proprietà delle Frazioni continue p. 104. 116, n. 114. . 117.

## *CAPO VI.*

*Delle Ragioni e delle Proporzioni aritmetiche, geometriche, ed armoniche.* Pag. 118.

Def. della Ragione aritmetica e geometrica p. 118, n. 118. — Dei Segni corrispondenti p. 118, n. 119. — Def. della Proporzione aritmetica, e geometrica p. 119, n. 123. — Proprietà delle ragioni, e delle proporzioni p. 118 . . 126, n. 120 . . 137.

— Della Regola aurea o del tre p. 122, n. 133. — Delle Regole di falsa posizione semplice e doppia p. 128, n. 138. — Delle Regole aurea composta, di Compagnia, e di Alligazione p. 133, n. 139. — Def. delle Proporzioni armoniche, e delle contrarmoniche p. 137, 140.

## *CAPO VII.*

*Dell' Analisi Matematica.* Pag. 138

Def. del Problema, e dell' Analisi logica, e matematica p. 138, n. 142. — Delle Regole per la soluzione dei Problemi p. 138, n. 143. — Problemi piucchè determinati p. 140, 141, n. 144, 145. — Accidente, che può accadere nella eliminazione p. 142, n. 146. — Dei Problemi indeterminati di 1.° grado, ove il numero delle incognite supera di un' unità il numero delle Equazioni p. 142..155, n. 147..155. — Probl. Metodo onde risolvere in numeri interi la $Ax+By=P$, ove A, B, P sono interi p. 152, n. 154. — * Dei Problemi indeterminati, ne' quali il numero delle incognite supera di più di un' unità quello delle Equazioni p. 155..171, n. 156..159. — Probl. Soluzione di altra Equazione indeterminata p. 171, n. 160. — Def. dei Problemi determinati, dei piucchè determinati, degli indeterminati, e dei semideterminati p. 173, n. 161. — Def. delle Dimensioni p. 174, n. 162. — Def. dei diversi gradi delle Equazioni p. 174, n. 163, 164.

## PARTE II.

### Delle ultime due Operazioni Algebraiche.

### *CAPO I.*

*Della Elevazione a potenza, e della Estrazione della Radice da un qualunque Monomio Algebraico* Pag. 175

Defin. della Elevazione a potenza pag. 175, n.° 165. — Def. della Radice, e della sua Estrazione p. 175, n.° 166. — Def. del segno, o vincolo radicale pag. 176, n.° 168. — Delle quantità immaginarie, e delle reali pag. 178, III n.° 172. — Probl. Elevare a potenza un Monomio pag. 178, n.° 173. — Probl. Estrarre la radice da un Monomio pag. 181, n.° 177. — Soluzione dell' Equazione $ax^2 = b$ pag. 184, n.° 181. — Soluzione della $x^2 = -A$ pag. 184, n.° 182. — Delle quantità irrazionali pag. 184 . . 187, n. 183..188. — Calcolo dei radicali reali p. 187.. 201, n. 189..196. — * Maniera di togliere i radicali dai denominatori di alcune frazioni p. 194, 195, 197, II.. V.. VII, n.° 193. — Maniera di togliere il radicale dal denominatore della frazione $\frac{G}{\sqrt[m]{(A \pm \sqrt{(A^2 + B^m)})}}$ pag. 196, IV, n.° 193. — Calcolo di quantità immaginarie p. 201, 203 n. 197, 198.

## *CAPO II.*

*Della Elevazione a potenza di un qualunque Polinomio, e della Formola Newtoniana* Pag. 203

Probl. Elevare a potenza una quantità composta pag. 203, n.° 199. — Delle Equazioni, che si verificano, qualunque sia l' incognita p. 205, 206, n. 201, 202. — Della Formola Newtoniana, e delle prime serie, che ne dipendono pag. 208 .. 229, n. 203 .. 207. — Probl. Metodo pratico per ottenere con facilità lo sviluppo di una potenza binomia con coefficienti numerici pag. 226, n.° 206. — * Sopra l'elevazione a potenza delle quantità composte di più di due termini pag. 220 .. 241, n. 208 .. 213. — Proprietà dei coefficienti della Formula Newtoniana pag. 242..245, n. 214.. 217.

## *CAPO III.*

*Della Estrazione della Radice seconda da un qualunque Polinomio* Pag. 246

Proprietà dei quadrati polinomj pag. 246, 247, n. 218, 219. — Probl. Estrarre la radice seconda dai Polinomj pag. 249 .. 252, n. 220 ... I. n.° 222. Def. delle Equazioni di secondo grado affette, o composte, e delle semplici, o pure pag. 255, n.° 225. — Probl. Sciogliere un' Equazione composta di secondo grado pag. 255, n.° 226. — Proprietà delle Equazioni di secondo grado pag. 259, n. 228 .. 230.

## CAPO IV.

*Della Estrazione della Radice seconda dalle quantità numeriche* Pag. 266

Proprietà dei Quadrati numerici interi esatti p. 260.. 269, n. 231..238. — Probl. Estrarre la radice seconda da un quadrato intero numerico perfetto pag. 270, n.° 239. — Proprietà dei quadrati interi numerici imperfetti p. 273..275, n. 240, 241. — Probl. Estrarre per approssimazione la radice seconda da un quadrato intero numerico imperfetto p. 283 n.° 242. — Proprietà riguardanti una serie, nella quale si sviluppa la radice seconda pag. 285.. 292, n. 243..246. — Probl. Altro metodo, onde estrarre le radici seconde per approssimazione pag. 292, n.° 247. — *Della estrazione delle radici seconde mediante le frazioni continue pag. 298..308, n. 249.. 255. — Probl. Metodo spedito, onde determinare il valore, che acquista un' espressione algebrica intera avente una sola indeterminata, allorchè a questa indeterminata si attribuisce un dato valore pag. 304, n.° 252.

## CAPO V.

*Della Estrazione di una Radice qualunque dai Polinomj e dalle quantità numeriche* Pag. 311

Proprietà riguardanti le Potenze, e le Radici dei Polinomj pag. 311..315, n. 258..261. — Probl. Ritrovare la radice terza de' Polinomj cubici perfetti p. 316..318, n. 262.. I. n.° 264. — Della estrazione della radice *mesima* da una Potenza *mesima* perfetta pag. 318..319,

II .. IV. n. 264. — Proprietà delle potenze superiori de' numeri interi, e delle loro radici pag. 319 .. 322, 333 .. 336, n. 265..267, 270. — Probl. Estrarre la radice cubica da un dato numero intero pag. 323, 324, 336, n. 268, 269, 271. — Probl. Metodo generale, onde estrarre da un dato numero intero una radice qualunque *kesima* p. 324, 336, n. 269, 271. Altro metodo d'estrazione per approssimazione pag. 338, n.° 272. — Probl. Sciogliere le Equazioni $x^3 - 1 = 0$, $x^3 - V = 0$ p. 339, 341 n. 273, 275. — Probl. Risolvere l' Equazione $x^4 - V = 0$ p. 342, n.° 277. — Probl. Soluzione dell' Equazione $x^4 + Bx^2 + D = 0$ pag. 344, n.° 280.

## *CAPO VI.*

*Della Estrazione delle Radici dalle Quantità polinomie irrazionali* Pag. 346

Proprietà delle Potenze, delle quantità irrazionali, e delle loro radici p. 346, 347, n. 282..284. — Probl. Estrarre la radice seconda dai binomj $G \pm \sqrt{H}$, $G \pm \sqrt{-H}$ pag. 349, 350, n. 285, 286. — * Probl. Estrarre la radice seconda dai Polinomj $G \pm \sqrt{H} \pm \sqrt{I}$, $G \pm \sqrt{H} \pm \sqrt{I} \pm \sqrt{K}$, $\pm \sqrt{G} \pm \sqrt{H}$ p. 353..359, n. 288, 289, 290. — Probl. Determinare il valore della $\sqrt[k]{(G \pm \sqrt{-H})}$ pag. 360..362, n.° 291, 292. — Della riduzione delle quantità immaginarie date alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$ pag. 365 n. 293. — Probl. Sciogliere l' Equazione generale di 3.° grado p. 368..371, n. 294..297. — Proprietà delle Equazioni di 3.° grado p. 372..377, n. 298..302. — Del caso irreducibile p. 375..377, n.° 301, 302. — Probl. Risolu-

zione generale delle Equazioni di 4.° grado p. 379..382, n. 303..305. — Proprietà delle Equazioni di 4.° grado p. 333, n.° 306. — Delle radici intere nelle Equazioni di 3.°, e 4.° grado pag. 383, I. n.° 307.

| *Pag.* | *Lin.* | *Errori* | *Correzioni* |
|---|---|---|---|
| 32 | 6 | 16 | 15 |
| 45 | 4 | $d = 16$ | $d = -16$ |
| 48 | 29 | $= ax$ | $= .c$ |
| | | $bce$ | $bcf$ |
| 75 | 9 | $\overline{bdf}$ | $\overline{bdf}$ |
| 78 | 15 | $m = 4$ | $a = 4$ |
| 83 | 1 | pruovata | truovata |
| 94 | 9 | del | nel |
| 90 | 21 | $c''$ | $-c^{m}$ |
| 102 | 13,14 | $4x$ | $3x$ |
| 106 | 30 | ( *n.* 100) | ( *n.* 109 ) |
| 109 | 4 | (XVII) | (XIX) |
| | | $\frac{1}{K}$ | $\frac{1}{IK}$ |
| 110 | 13 | | |
| 112 | 14,15 | KT | $kT$ |
| 114 | 11 | $\frac{1}{I^2} < \frac{1}{IK}$ | $\frac{1}{I^2} > \frac{1}{IK}$ |
| 127 | 6 | $c:f$ | $d:f$ |
| | 8 | $cd$ | $ed$ |
| 131 | 14 | uguali | disuguali |
| 140 | 9 | avanzano | mancano |
| 146 | 8 | intere | positive |
| — | 20 | $\frac{A}{B} < \frac{D}{C}$ | $\frac{A}{B} > \frac{D}{C}$ |
| 147 | 11 | negativo | positivo |
| 190 | 15 | $\frac{mg\sqrt{A}}{Bh}$ | $\sqrt[m]{\frac{A^{g}}{L^{h}}}$ |
| 200 | 17 | $m\sqrt{}$ | $mn\sqrt{}$ |
| 203 | 10 | $mq\sqrt{1}$ | $mq\sqrt{-1}$ |
| 212 | 12 | $\frac{\frac{ha^{h-1}}{\frac{hk-h}{k}}}{hk} = \frac{\frac{hk-k}{\frac{ha\ \ k}{hk-k}}}{ka\ \ k}$ | $\frac{\frac{ha^{h-1}}{\frac{hk-h}{k}}}{ka\ \ k} = \frac{\frac{hk-k}{k}}{ka\ \frac{hk-h}{k}}$ |
| 217 | 3 | $m-2+1 = m$ | $m-1+1 = m$ |
| 225 | 2 | $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$ | $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ |

| *Pag.* | *Lin.* | *Errori* | *Correzioni* |
|---|---|---|---|
| 270 | 1 | $M^2+10^2A^2$ | $M^2-10^2A^2$ |
| 282 | 1 | $\frac{1}{104}$ | $\frac{1}{10h}$ |
| 307 | 8 | $\frac{47321}{33461}$ | $\frac{6\times47321}{33461}$ |
| 309 | 32 | terzo ( *n.* 255 ) | terzo (*n.* 250), e quarto (*n.* 255) |
| 314 | 9 | $h-1$ | $n-1$ |
| 333 | 28 | $k\times10^{k-1}\ N^{k-1}$ | per $k\times10^{k-1}\ N^{k-1}$ |
| 341 | 7 | $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3$ | $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2$ |
| 371 | 13 | $Ay$ . . . . $Az$ | $Ay+y^2$ . . $Az+z^2$ |
| 381 | 1 | $x-C$ | $-Cx$ |

(A) (B)

$$N + \frac{Q}{2N} - \frac{Q^2}{2^3N^3} + \frac{Q^3}{2^4N^5} - \frac{5Q^4}{2^7N^7} + \frac{7Q^5}{2^8N^9} - \frac{3.7Q^6}{2^{10}N^{11}} + \frac{3.11Q^7}{2^{11}N^{13}} - \text{ec.}$$

| $P = N^2 + Q$ | $2N + \frac{Q}{2N}$ | $2N + \frac{Q}{N} - \frac{Q^2}{2^3N^3}$ | $2N + \frac{Q}{N} - \frac{Q^2}{2^2N^3} + \frac{Q^3}{2^4N^5}$ | $2N + \frac{Q}{N} - \frac{Q^2}{2^2N^3} + \frac{Q^3}{2^3N^5} - \frac{5Q^4}{2^7N^7}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $N^2$ | $\frac{Q}{2N}$ | $-\frac{Q^2}{2^3N^3}$ | $\frac{Q^3}{2^4N^5}$ | $-\frac{5Q^4}{2^7N^7}$ | |
| $Q = * \quad Q$ | | | | | |
| $R = \quad Q + \frac{Q^2}{2^2N^2}$ | | | $2N + \frac{Q}{N} - \frac{Q^2}{2^2N^3} + \frac{Q^3}{2^3N^5} - \frac{5Q^4}{2^6N^7} + \frac{7Q^5}{2^8N^9}$ | $2N + \frac{Q}{N} - \frac{Q^2}{2^2N^3} + \frac{Q^3}{2^3N^5} - \frac{5Q^4}{2^6N^7} + \frac{7Q^5}{2^7N^9} - \frac{21Q^6}{2^{10}N^{11}}$ | |
| $-Q' = \quad * - \frac{Q^2}{2^2N^2}$ | | | $\frac{7Q^5}{2^8N^9}$ | $-\frac{21Q^6}{2^{10}N^{11}}$ | |
| $R' = \quad -\frac{Q^2}{2^2N^2} - \frac{Q^3}{2^3N^4} + \frac{Q^4}{2^6N^6}$ | | | | | ec. |
| $Q'' = \quad * \quad \frac{Q^3}{2^3N^4} - \frac{Q^4}{2^6N^6}$ | | | | | |
| $R'' = \quad \frac{Q^3}{2^3N^4} + \frac{Q^4}{2^4N^6} - \frac{Q^5}{2^6N^8} + \frac{Q^6}{2^8N^{10}}$ | | | | | |
| $-Q''' = \quad * \quad -\frac{5Q^4}{2^6N^6} + \frac{Q^5}{2^6N^8} - \frac{Q^6}{2^8N^{10}}$ | | | | | |
| $R''' = \quad -\frac{5Q^4}{2^6N^6} - \frac{5Q^5}{2^7N^8} + \frac{5Q^6}{2^9N^{10}} - \frac{5Q^7}{2^{10}N^{12}} + \frac{25Q^8}{2^{14}N^{14}}$ | | | | | |
| $Q'' = \quad * \quad \frac{7Q^5}{2^7N^8} - \frac{7Q^6}{2^9N^{10}} + \frac{5Q^7}{2^{10}N^{12}} - \frac{25Q^8}{2^{14}N^{14}}$ | | | | | |
| $R'' = \quad \frac{7Q^5}{2^7N^8} + \frac{7Q^6}{2^8N^{10}} - \frac{7Q^7}{2^{10}N^{12}} + \frac{7Q^8}{2^{11}N^{14}} - \frac{35Q^9}{2^{14}N^{16}} + \frac{40Q^{10}}{2^{16}N^{18}}$ | | | | | |
| $-Q' = \quad * \quad -\frac{3.7Q^6}{2^9N^{10}} + \frac{12Q^7}{2^{10}N^{12}} - \frac{81Q^8}{2^{14}N^{14}} + \frac{35Q^9}{2^{14}N^{16}} - \frac{40Q^{10}}{2^{16}N^{18}}$ | | | | | |
| $R' = \quad -\frac{3.7Q^6}{2^9N^{10}} - \frac{21Q^7}{2^{10}N^{12}} + \frac{21Q^8}{2^{13}N^{14}} - \frac{21Q^9}{2^{13}N^{16}} + \frac{105Q^{10}}{2^{16}N^{18}} - \frac{147Q^{11}}{2^{17}N^{20}} + \frac{441Q^{12}}{2^{20}N^{22}}$ | | | | | |
| $Q'' = \quad * \quad \frac{3.11Q^7}{2^{10}N^{13}} - \frac{165Q^8}{2^{14}N^{14}} + \frac{77Q^9}{2^{14}N^{16}} - \frac{154Q^{10}}{2^{16}N^{18}} + \frac{147Q^{11}}{2^{17}N^{20}} - \frac{441Q^{12}}{2^{20}N^{22}}$ | | | | | |

(LXVI) ec.

(F)



$$125a^6x^6 - 225a^4x^5 + 525a^6x^4 + 135a^2x^4 - 630a^4x^3 - 27x^3 + 735a^6x^2 + 189a^2x^2 - 441a^4x + 343a^6$$

$125a^6x^6$

(LXXVI) $* \quad - 225a^4x^5 \quad + 135a^2x^4 \quad - 27x^3$

(H) $* \quad 525a^6x^4 \quad * \quad -630a^4x^3 \quad * \quad +735a^6x^2 + 189a^2x^2 - 441a^4x + 343a^6$

(L) $525a^6x^4 \quad -630a^4x^3 \quad +735a^6x^2 + 189a^2x^2 - 441a^4x + 343a^6$

$* \quad * \quad * \quad * \quad * \quad *$

(G)

$$5a^2x^2 - 3x + 7a^2$$

$$75a^4x^4 \ , \ 27x^2$$

(I) $75a^4x^4 - 90a^2x^3 + 27x^2 \ , \ 147a^4$