



1811

ELEMENTI D' EUCLIDE

LIBRO PRIMO.

DE DEFINITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

LIBRO PRIMO.

DE DEFINITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

DE PROPOSITIONIBUS.

12/8/77 1-24

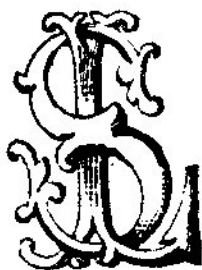
GLI
ELEMENTI D' EUCLIDE

CON NOTE,
AGGIUNTE ED ESERCIZI

AD USO DE' GINNASI E DE' LICEI

PER CURA DEI PROFESSORI

ENRICO BETTI E FRANCESCO BRIOSCHI.



FIRENZE.
SUCCESSORI LE MONNIER.

—
1867.

Proprietà letteraria.

PREFAZIONE.

Se, come scrisse Pascal nei suoi *Pensieri*, « la Géométrie seule sait les véritables règles du raisonnement, et, sans s'arrêter aux règles des syllogismes qui sont tellement naturelles qu'on ne peut les ignorer, s'arrête et se fonde sur la véritable méthode de conduire le raisonnement en toutes choses que presque tout le monde ignore, et qu'il est si avantageux de savoir, *que nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une rigueur toute nouvelle,*¹ » egli è indubitato che coloro i quali per debito d'ufficio sono chiamati a dirigere l'educazione nazionale, come quelli a cui essa è affidata o ne fruiscono, hanno stretto obbligo di curare che l'insegnamento della geometria nella istruzione media raggiunga quell'alto fine che da Pascal con tanta efficacia era espresso.

¹ *De l'esprit géométrique*, tom. I; *des Pensées, Fragments et Lettres de Pascal*, Paris, 1844.

Se non che negli elementi della geometria non si cerca da molti soltanto il mezzo forse più acconcio di ginnastica intellettuale, ma bensì una conveniente preparazione a studi più alti nelle scienze matematiche od anche uno strumento che possa tornare utile nelle applicazioni. Di qui la grande varietà di metodi coi quali in ogni tempo ed in numerosi trattati furono esposti quegli elementi, secondo che indirizzavansi piuttosto ad uno che ad un altro scopo. Parve però ai sottoscritti, che, sebbene come voleva dire il Galileo, la geometria sia « maestra dell' onesto acquistare l' utile, il dilettevole, il bello ed il buono » pure in molte pubblicazioni nostrali e forestiere, le quali servono di guida ai giovani nello studio della geometria elementare, siasi fatta una dannosa confusione fra quegli scopi, e non siasi veduto che l'insegnamento matematico coordinato al sistema degli studii classici e destinato a far parte di un insegnamento comune, non può confondersi coll'insegnamento matematico inteso ad uno scopo professionale.

Noi abbiamo per ora rivolta specialmente la nostra attenzione allo insegnamento matematico che si dà nelle scuole classiche, dalle quali debbono uscire giovani opportunamente preparati agli alti studi del diritto, della filologia, delle scienze di osservazione ed sperimentali, delle matematiche; ed abbiamo perciò dovuto domandarci se alla parte che l'insegnamento della geometria è destinato ad

avere in questo lavoro di preparazione della mente del giovane corrisponda l'indirizzo che nei nostri licei è dato all'insegnamento stesso.

« Le materie dell'insegnamento classico mutano e si modificano secondo i luoghi ed i tempi, osserva il Cournot,¹ ma il carattere essenziale di quell'insegnamento rimane sempre lo stesso dappertutto ove si stabilisce un sistema di studi liberali, considerati come necessari a tutti gli spiriti colti, e come la introduzione comune a differenti professioni studiose. » Ma se il determinare la qualità, i limiti, l'estensione di quegli studi necessari è uno dei problemi di cui la soluzione non può aspettarsi che da una lunga ed intelligente esperienza, i risultati che da quella varietà di studi si attendono sono ormai prefiniti. Si è ripetuto mille volte che lo studio delle lingue classiche e quello delle matematiche sono una specie di ginnastica intellettuale, che essi addestrano e fortificano l'intelligenza, che senza aprire ai giovani una carriera determinata preparano a tutte le carriere; è ormai accettato da tutti gli educatori (anche da quelle scuole inglesi le quali non senza qualche ragione temevano che l'aggiunta di nuovi insegnamenti nuocesse all'intensità degli studi classici e matematici), è accettato che l'insegnamento delle scienze naturali sviluppa nei giovanetti lo spirito di osservazione; che infine lo studio delle lingue e lettera-

¹ *Les institutions d'instruction publique en France.*

ture moderne, della storia, della geografia, fornisce quel grado di coltura generale che è richiesta dalla posizione sociale nella quale si troverà più tardi il giovane che esce dalla scuola classica. Ora se la funzione principale di questi vari insegnamenti può così prefinirsi, perchè non potrà determinarsene il metodo?

Ristringendoci all' insegnamento della geometria, non dubitiamo affermare che tanto il punto di vista metafisico nel quale si sono posti alcuni autori, considerandola come una scienza di ragionamento puro, quanto l' altro pel quale si fa quasi di essa una scienza applicata, facendo seguire ad ogni proposizione l' uso pratico della medesima, sono da condannarsi perchè evidentemente contraddittorii agli scopi prefissi. Perciò dobbiamo lamentare che quell' inimitabile modello di logica e di chiarezza lasciatoci dai Greci negli Elementi d' Euclide sia stato pressochè abbandonato dalle nostre scuole, e siansi invece introdotti e raccomandati libri, nei quali esagerandosi il metodo di Legendre, ¹ al rigore del ragionamento si è sostituito il meccanismo del processo aritmetico. *La suprema accuratezza d' Euclide* ² non è più apprezzata nelle nostre scuole, e vi si preferiscono dimostrazioni inesatte di proprietà, le

¹ Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, Paris, 1867. — Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*. 2^e Partie, 1866.

² *Dialoghi delle Nuove Scienze*. Giornata quinta.

quali non ponno esserci rivelate che dai sensi, ¹ a quegli assiomi e postulati che il Galileo giudicava « domande così oneste e concedibili che se la fabbrica della geometria veniva inalzata sopra tali fondamenti, non poteva essere che fortissima e stabilissima. »

« In Euclide, scrive il sig. Hoüel, nel rimarchevole opuscolo che citammo più sopra, in Euclide, la Geometria forma una scienza completa, che basta a sè stessa e non invoca da nessuna parte nelle sue dimostrazioni il soccorso della scienza dei numeri. » Che se qualche appunto fu fatto agli Elementi di Euclide, se, come osserva Clairaut: « Ce Géomètre avoit à convaincre des sophistes obstinés, qui se faisoient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes: il falloit donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le secours des raisonnements en forme pour fermer la bouche à la chicane. » Se perciò fu costretto di fare continuo uso del ragionamento indiretto che non sempre s'accorda colla maggiore semplicità della dimostrazione, pure nè questa, nè qualche altra lieve menda varranno a modificare od a diminuire in alcun modo gli effetti che dallo studio di quel libro ci aspettiamo, di svegliare, cioè, nei nostri giovani il gusto delle no-

¹ Vedi gli *Elementi di Matematica* del prof. Baltzer tradotti dal prof. Cremona; parte 4^a, *Planimetria*. Raccomandiamo quest'Opera a quei giovani che intendono progredire negli studi matematici.

zioni nettamente determinate e l'abitudine del rigore nel raziocinio.

Fra le molte edizioni italiane degli Elementi di Euclide, abbiamo prescelta per la nostra pubblicazione quella del Viviani, come una fra le più accurate, non senza però introdurvi alcune modificazioni di forma e di sostanza, prendendo anche a guida le migliori edizioni straniere. Vi aggiungeremo il trattato della misura del circolo di Archimede ed alcune proposizioni di cui la soluzione o la dimostrazione sarà lasciata come utile esercizio agli allievi. Profondamente convinti che soltanto dalle eminenti qualità di precisione e di chiarezza che distinguono la Geometria Euclidiana, si ponno sperare per lo sviluppo intellettuale dei nostri giovani quei risultati, in vista dei quali presso tutte le nazioni civili l'insegnamento della geometria tiene posto tanto importante nella pubblica educazione; ci siamo accinti a questa pubblicazione, col fermo intendimento di migliorarla via via che nuove pubblicazioni straniere, e l'esperienza che s'andrà facendo nelle nostre scuole, ne additino la convenienza. Noi abbiamo fiducia che i professori dei licei vorranno aiutarci in quest'opera, ed accetteremo con grato animo le loro osservazioni ed i loro suggerimenti.

2 Novembre 1867.

E. BETTI.

F. BRIOSCHI.

GLI ELEMENTI D' EUCLIDE.

LIBRO PRIMO.

Definizioni.

I. Il *punto* è ciò che non ha parte, ovvero che non ha grandezza alcuna.

II. La *linea* è una lunghezza senza larghezza.

III. I termini della linea sono i punti.

IV. La linea *retta* è quella che è situata egualmente rispetto a tutti i suoi punti.

V. La *superficie* è ciò che solamente ha lunghezza e larghezza.

VI. I termini della superficie sono le linee.

VII. La superficie *piana* è quella che è situata ugualmente rispetto alle sue linee rette.

VIII. *Angolo piano* è l' inclinazione di due linee che s' incontrano in un piano, e non son poste dirittamente fra loro.

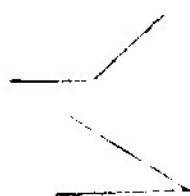
IX. E quando le linee che contengono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama *rettilineo*.

Le linee che comprendono l'angolo ed il punto dove si segano, diconsi rispettivamente *lati* e *vertice* dell'angolo.

X. Quando la linea retta, stando sopra un'altra retta, fa gli angoli conseguenti fra loro uguali, questi sono amendue *retti*, e la prima retta si chiama *perpendicolare* all'altra.



XI. L'angolo *ottuso* è quello che è maggiore del retto.



XII. L'angolo *acuto* è quello che è minore del retto.

XIII. Dicesi *limite* il termine di qualunque cosa.

XIV. La *figura* è ciò che è contenuto da uno o da più limiti.

XV. Il *cerchio* è una figura piana contenuta da una linea rientrante, che si chiama *circonferenza*, alla quale quante linee rette (*raggi*) pervengono tirate da un certo punto, che è dentro alla figura, tutte fra loro sono uguali.

XVI. E questo punto si chiama *centro* del cerchio.

XVII. Il *diametro* del cerchio è una linea retta che passa per il centro, e dall'una e l'altra parte è terminata dalla circonferenza, la quale eziandio divide il cerchio per mezzo.

XVIII. Il *semicerchio* è la figura contenuta dal diametro e dalla metà della circonferenza.

XIX. *Segmento* di cerchio è una figura contenuta dalla linea retta e da una porzione (*arco*) della circonferenza.

XX. Le figure, che sono contenute da linee rette si chiamano *rettilinee*.

XXI. E se sono contenute da tre rette, s'addimandano *trilatero* (*triangoli*).

XXII. Se da quattro, *quadrilatero* (*quadrangoli*).

XXIII. Se da più di quattro, *moltiplatere* (*poligoni*).

Le linee finite che costituiscono il contorno d'una figura, ed i termini di esse linee, diconsi rispettivamente *lati* e *vertici* della figura. *Diagonale* è una retta che congiunge due vertici non consecutivi.

XXIV. Fra le figure trilatero, il *triangolo equilatero* è quello che ha tre lati uguali.



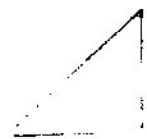
XXV. Il triangolo *isoscele*, ovvero *equicrure*, è quello che ha solamente due lati uguali.



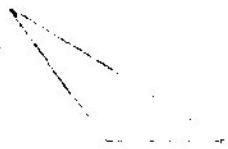
XXVI. Il triangolo *scaleno* è quello che ha tutti tre i lati disuguali.



XXVII. Inoltre fra le figure trilatero vi è il triangolo *rettangolo*, che è quello il quale contiene in sè un angolo retto:



XXVIII. L'*ottusangolo*, che ha un angolo ottuso:



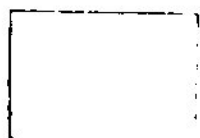
XXIX. L'*acutangolo*, che ha tutti tre gli angoli acuti.



XXX. Fra le figure quadrilatre vi è il *quadrato*, il quale è equilatero e rettangolo:



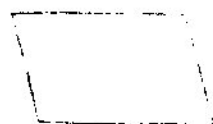
XXXI. Il *rettangolo*, che è una figura rettangola ma non equilatera:



XXXII. Il *rombo*, che è una figura equilatera ma non rettangola:

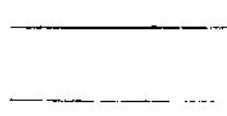


XXXIII. Il *romboide* o *parallelogrammo*, che è una figura avente i lati e gli angoli opposti fra loro uguali, ma nè equilatera nè rettangola.



XXXIV. Tutte le altre figure limitate da quattro rette diconsi *quadrilateri*.

XXXV. Le linee *parallele* o *equidistanti* sono quelle le quali, essendo in un medesimo piano e prolungate indefinitamente dall'una e l'altra parte, non si congiungono giammai insieme.



Postulati.

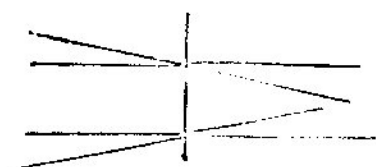
I. Si può tirare da qualsivoglia punto a qualsivoglia punto una linea retta.

II. Si può prolungare indefinitamente e secondo la sua direzione una linea retta terminata.

III. Da qualsivoglia centro e con qualsivoglia intervallo si può descrivere un cerchio.

IV. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

V. Se sopra due linee rette cadendo una terza retta farà gli angoli interni da una medesima



parte la cui somma sia minore di due retti, quelle linee prolungate in infinito concorrono insieme da quella parte, dove gli angoli valgono meno di due retti.

VI. Due linee rette non racchiudono spazio alcuno.

Assiomi.

I. Quelle grandezze che sono uguali ad una medesima sono ancora fra loro uguali.

II. Se alle grandezze uguali si aggiungono grandezze uguali, le somme sono uguali fra loro.

III. Se dalle grandezze uguali si sottraggono grandezze uguali, eziandio le rimanenti sono uguali fra loro.

IV. Se alle grandezze disuguali si aggiungono grandezze uguali, le somme sono disuguali.

V. Se dalle grandezze disuguali si sottraggono grandezze eguali, le rimanenti sono disuguali.

VI. Le grandezze che sono doppie di una medesima, sono uguali fra loro.

VII. Le grandezze che sono la metà di una medesima, sono uguali fra loro.

VIII. Quelle grandezze che si possono far coincidere l'una sull'altra sono uguali.

IX. Il tutto è maggiore della sua parte.

Il signor HOÜEL (*) dopo aver definita una *figura* « un

(*) *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (Paris, Gauthier-Villars, 1867).

insieme di punti, di linee e di superficie, considerato come invariabile di forma » propone di fondare la geometria elementare sopra quattro proposizioni desunte dall'esperienza:

1. *Tre punti bastano in generale a stabilire nello spazio la posizione di una figura.*

2. *Esiste una linea (la retta) la cui posizione nello spazio è individuata da due qualunque de' suoi punti, ed è tale che ogni porzione di essa può applicarsi esattamente sopra un'altra porzione qualsivoglia, purchè queste due porzioni abbiano due punti comuni.*

3. *Esiste una superficie (il piano) tale che una retta passante per due suoi punti qualsivogliano vi giace per intero, e che una porzione qualunque di essa superficie può essere applicata esattamente sulla superficie medesima, sia direttamente, sia dopo essere stata rovesciata.*

4. *Per un punto dato non si può condurre che una sola retta parallela ad una retta data.*

PROPOSIZIONE I.

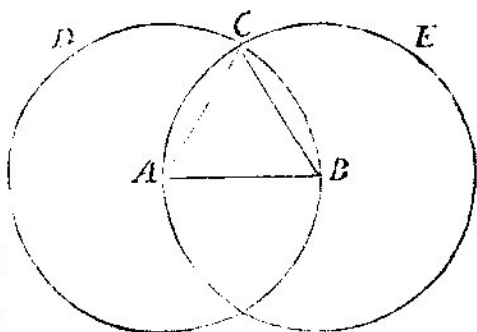
PROBLEMA.

Sopra una data retta finita, costruire il triangolo equilatero.

Sia la retta data AB ; bisogna sopra essa costruire il triangolo equilatero. Dal centro A con l'intervallo AB descrivasi [*post. 3*] il cerchio BCD ; similmente dal centro B con l'intervallo BA descrivasi un altro cerchio ACE , e dal punto C , nel quale i cerchi fra loro si segano, siano tirate [*post. 1*] le linee rette CA , CB ai punti A e B .

Perchè A è centro del cerchio BCD , sarà [*def. 15*]

la AC uguale alla AB ; e perchè ancora B è centro del cerchio ACE , sarà la BC uguale alla BA . Adunque l'una e l'altra di esse CA , CB è uguale alla AB . Ma quelle grandezze che sono uguali ad una medesima, sono ancora fra loro uguali [*ass. 1*]; onde la CA è uguale alla CB , e le tre linee CA , AB , BC sono uguali fra loro: dunque il triangolo ABC è equilatero ed è costruito sopra la data retta finita AB , il che bisognava fare.



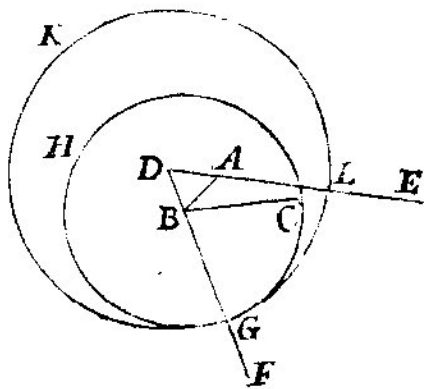
I due cerchi si segano necessariamente, perchè ciascuno di essi ha un punto interno ed un punto esterno rispetto all'altro cerchio.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

Da un punto dato tirare una linea retta uguale ad un'altra retta data.

Sia A il punto dato, e BC la linea retta data; bisogna dal punto A tirare una linea retta uguale alla retta BC . Tirisi dal punto A al punto B la retta AB [*post. 1*], e sopra essa costruiscasi [*prop. 1*] il triangolo equilatero DAB , e si prolunghino [*post. 2*] per diritto alle DA , DB le linee rette AE , BF , e dal centro B con l'intervallo BC descrivasi [*post. 3*] il cerchio CGH , e finalmente dal centro D con l'intervallo DG descrivasi il cerchio GKL .



Perchè il punto B è centro del cerchio CGH , sarà [*def. 15*] la BC uguale alla BG ; oltre a ciò perchè D è centro del cerchio GKL , sarà la DL uguale alla DG ; e poichè la parte DA è uguale alla parte DB , anche la rimanente AL sarà uguale [*ass. 3*] alla rimanente BG . Ma si è dimostrato che la BC è uguale alla BG , onde l'una e l'altra AL , BC è uguale alla BG . Ma quelle grandezze che sono uguali ad una medesima, sono uguali fra loro [*ass. 1*]; dunque la AL è uguale alla BC , e così dal punto dato A si è tirata la linea retta AL uguale alla data retta BC , il che bisognava fare.

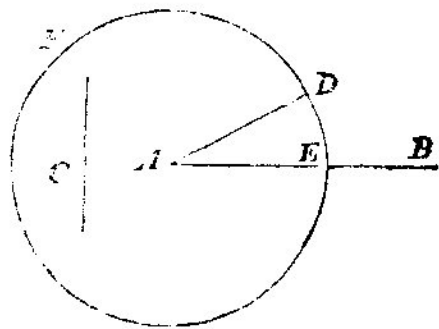
Questa Prop. II è un caso particolare di una proposizione più generale che si suole assumere come postulato «che una figura possa essere trasportata in un modo qualunque nello spazio, senza che si alteri alcuno de'suoi elementi (distanze scambievoli ed angoli).

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Date due linee rette disuguali, dalla maggiore tagliare una parte uguale alla minore.

Siano date due linee rette disuguali AB , C , delle quali AB sia la maggiore. Bisogna dalla maggiore AB tagliare una retta uguale alla minore C . Tirisi [*prop. 2*] dal punto A la retta AD uguale alla C , e dal centro A con intervallo AD descrivasi [*post. 3*] il cerchio DEF .



Poichè A è centro del cerchio DEF , la AE sarà uguale alla AD [*def. 15*]. Ma ancora la C è uguale

alla AD ; quindi AE e C sono ambedue uguali alla AD , e però ancor la AE è uguale alla C [*ass. 1*]. Date dunque due linee rette disuguali AB , C , dalla AB si è tagliata la AE uguale alla minore C ; il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE IV.

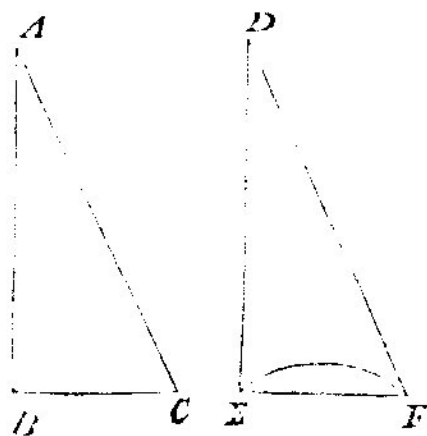
TEOREMA.

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed hanno uguale l'angolo che è contenuto dai lati eguali, avranno ancora la base uguale alla base, ed il triangolo sarà uguale al triangolo, e degli altri angoli saranno uguali, l'uno all'altro, quelli che sono opposti ai lati uguali.

Siano due triangoli ABC , DEF , i quali abbiano due lati AB , AC uguali a due lati DE , DF , l'uno all'altro, cioè il lato AB uguale al lato DE , ed il lato AC a DF , e l'angolo BAC uguale all'angolo EDF . Dico ancor la base BC esser uguale alla base EF , ed il triangolo ABC uguale al triangolo DEF , e gli altri angoli uguali agli altri angoli, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF , e l'angolo ACB all'angolo DFE .

Perciocchè, se si adatta il triangolo ABC sul triangolo DEF , posto il punto A sopra D , e la retta AB sopra DE , ancor il punto B si adatterà al punto E , per esser

la AB uguale alla DE , e adattandosi la AB alla DE , eziandio la retta AC si adatterà alla DF , perchè l'an-



golo BAC è uguale all'angolo EDF . Onde ancor il punto C si adatterà ad F , perchè la linea retta AC è uguale alla linea retta DF . Ma eziandio il punto B sta sopra E . Adunque altresì la base BC si adatterà alla base EF ; perciocchè, se adattandosi il punto B al punto E e C ad F , la base BC non si adattasse alla base EF , due linee rette chiuderebbero uno spazio, il che non è [*post. 6*]. Adunque la base BC si adatterà alla base EF , e sarà uguale ad essa [*ass. 8*]. Onde ancor tutto il triangolo ABC si adatterà a tutto il triangolo DEF e gli sarà uguale [*ass. 8*], e gli altri angoli si adatteranno agli altri angoli, e saranno uguali ad essi, cioè l'angolo ABC all'angolo DEF , e l'angolo ACB all'angolo DFE . Adunque *se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, ecc.*, come dovevasi dimostrare.

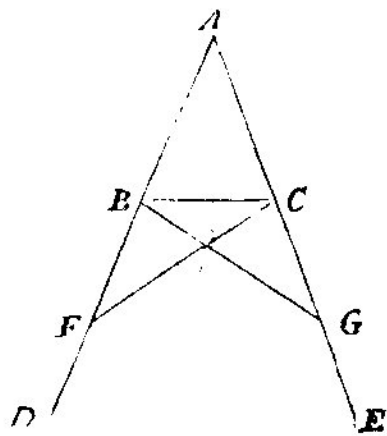
PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Gli angoli alla base del triangolo isoscele sono uguali fra loro, e se si prolungano i lati uguali, gli angoli sotto la base saranno ancora fra loro uguali.

Sia il triangolo isoscele ABC , che abbia il lato AB uguale al lato AC , e si prolunghino le rette BD , CE per diritto alle AB , AC . Dico l'angolo ABC esser uguale all'angolo ACB , e l'angolo CBD all'angolo BCE .

Piglisi nella linea BD un punto qualsivoglia F , e dalla maggiore AE taglisi AG uguale alla minore AF [*prop. 3*];



e si tirino FC , GB . Poichè la AF è uguale alla AG , e la AB alla AC , le due FA , AC sono uguali alle due GA , AB , l'una all'altra, e contengono l'angolo comune FAG , onde [*prop. 4*] la base FC è uguale alla base GB ; ed il triangolo AFC è uguale al triangolo AGB ; e degli altri angoli saranno uguali, l'uno all'altro, quelli che sono opposti ai lati uguali, cioè l'angolo ACF uguale all'angolo ABG , e l'angolo AFC all'angolo AGB . E poichè tutta la linea AF è uguale a tutta la AG , e la parte AB della prima è uguale alla parte AC della seconda, sarà [*ass. 3*] ancor la rimanente BF della prima uguale alla rimanente CG della seconda. Ma la FC fu mostrata uguale alla GB . Adunque le due BF , FC sono rispettivamente uguali alle due CG , GB , e l'angolo BFC uguale all'angolo CGB , e la base di essi BC è comune. Dunque il triangolo BFC sarà uguale [*prop. 4*] al triangolo CGB , gli angoli opposti ai lati uguali saranno uguali. Adunque l'angolo FBC è uguale all'angolo GCB , e l'angolo BCF all'angolo CBG . Siccome poi tutto l'angolo ABG è stato dimostrato uguale a tutto l'angolo ACF , de' quali la parte CBG è uguale alla parte BCF , sarà [*ass. 3*] il rimanente ABC uguale al rimanente ACB . Dunque *gli angoli alla base del triangolo isoscele, ecc. c. d. d.*

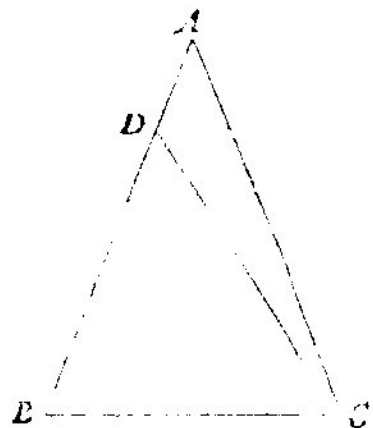
PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due angoli d'un triangolo sono uguali fra loro, eziandio i lati che sono opposti agli angoli uguali saranno fra loro uguali.

Sia il triangolo ABC , che abbia l'angolo ABC uguale all'angolo ACB . Dico ancor il lato AB essere uguale al lato AC .

Perciocchè se la AB non è uguale alla AC , una di esse sarà maggiore. Sia maggiore la AB , e da essa taglisi [*prop. 3*] DB uguale alla minore AC , e si tiri DC . Siccome la DB è uguale alla AC , e la BC è comune, saranno le due DB , BC uguali alle due AC , CB , l'una all'altra, e l'angolo DBC uguale all'angolo ACB ; onde la base DC sarebbe uguale alla base AB , ed il triangolo DBC uguale [*prop. 4*] al triangolo ACB , cioè il minore al maggiore, il che è impossibile. Non è dunque la AB disuguale alla AC , ma sarà uguale. E però *se due angoli d'un triangolo siano uguali fra loro, eziandio i lati, ecc. c. d. d.*

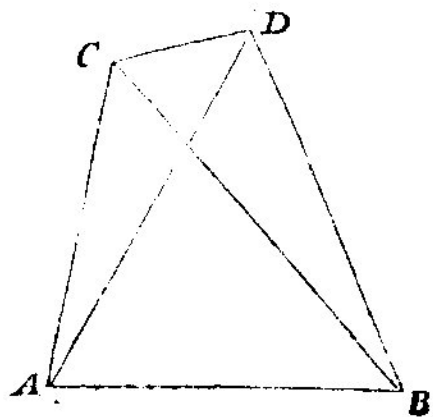


PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se i termini di una medesima retta si congiungono a due diversi punti, le due congiungenti del primo punto non possono essere rispettivamente uguali a quelle dell'altro punto.

Conducansi, se sia possibile, dai termini della medesima retta AB le rette AC , CB e due altre rette rispettivamente uguali AD , DB , a diversi punti C , D e dalla medesima parte, di modo che la CA sia uguale alla DA , che ha il medesimo termine A , e la CB sia uguale alla DB che ha il medesimo termine B , e si conduca CD



Poichè la AC è uguale alla AD , anche l'angolo ACD sarà uguale all'angolo ADC [*prop. 5*]. Onde l'angolo ADC è maggiore dell'angolo DCB . E però l'angolo CDB sarà molto maggiore dell'angolo DCB . Ma siccome la CB è uguale alla DB , eziandio l'angolo CDB sarebbe uguale all'angolo DCB , ciò che è impossibile. Adunque se i termini d'una medesima retta, ecc. c. d. d.

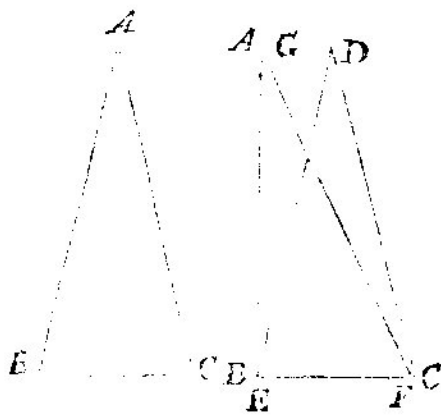
PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ed hanno la base uguale alla base, avranno ancora uguali gli angoli contenuti da uguali lati.

Siano due triangoli ABC , DEF , che abbiano due lati AB , AC uguali a due lati DE , DF , l'uno all'altro, di modo che AB sia uguale a DE , ed AC a DF , ed abbiano la base BC uguale alla base EF . Dico ancor l'angolo BAC essere uguale all'angolo EDF .

Perciocchè, se si porta il triangolo ABC sopra il triangolo DEF , posto il punto B sopra E , e la linea retta BC sopra la EF , eziandio il punto C cadrà sopra il punto F , perchè la BC è uguale alla EF . Onde stando BC sopra EF , staranno ancora le BA , AC sopra le ED , DF . Perchè se il punto A non cade in D , ma in un altro punto come G , avremo le ret-



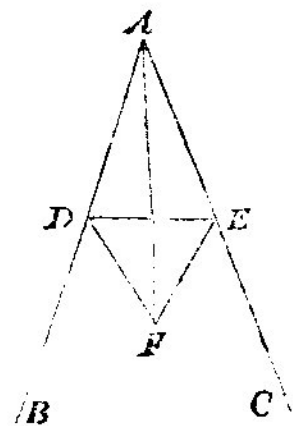
te EG , FG , uguali rispettivamente alle ED , FD , e congiungenti i termini della medesima retta EF a due punti diversi G , D , dalla medesima parte, il che è impossibile [*prop.* 7]. Non è dunque vero che, se la base BC è sopra la base EF , non cadano i lati BA , AC sopra i lati ED , DF . Adunque combacieranno insieme, e l'angolo BAC sarà sopra l'angolo EDF , e gli sarà uguale. Onde *se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Dividere per mezzo un angolo rettilineo dato.

Sia l'angolo BAC rettilineo dato; bisogna dividerlo per mezzo. Piglisi nella linea AB un qualsisia punto D , e dalla linea AC taglisi [*prop.* 3] la AE uguale alla AD , e condotta DE , costruisceasi sopra essa [*prop.* 1] il triangolo equilatero DEF , e tirisi AF .



Dico l'angolo BAC essere diviso per mezzo dalla linea retta AF : perciocchè, essendo la AD uguale alla AE , e la AF comune, saranno le due DA , AF uguali alle due EA , AF , l'una all'altra, e la base DF uguale alla base EF . Adunque [*prop.* 8] l'angolo DAF è uguale all'angolo EAF , e però l'angolo rettilineo dato BAC è diviso per mezzo dalla linea retta AF ; il che bisognava fare.

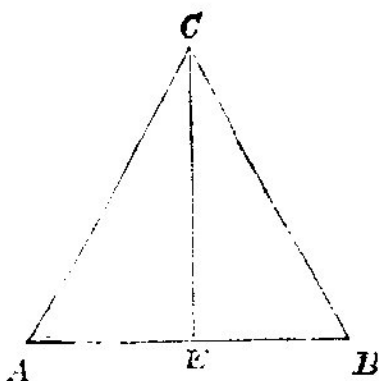
PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Dividere per mezzo una data retta terminata.

Sia AB la data retta terminata, bisogna dividerla per mezzo. Costruiscasi sopra essa [*prop. 1*] il triangolo equilatero ABC , e dividasì per mezzo l'angolo ACB con la linea retta CE .

Dico che la linea retta AB è divisa per mezzo nel punto E . Perciocchè, essendo la AC uguale alla CB , e la CE comune, le due AC , CE sono uguali alle due BC , CE , l'una all'altra, e l'angolo ACE è uguale all'angolo BCE . Adunque [*prop. 4*] la base AE è uguale alla base BE , e però la linea retta terminata AB è divisa per mezzo nel punto E ; il che bisognava fare.

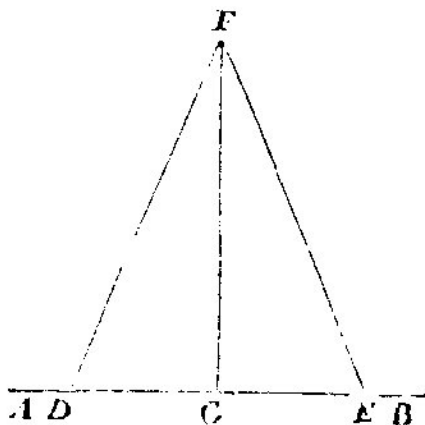


PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

Tirare una linea retta perpendicolare ad una data retta da un punto dato in essa.

Sia AB la data retta, e C il punto dato in essa. Bisogna dal punto C tirare una linea retta perpendicolare alla AB . Piglisi nella AC un punto qualsivoglia D , e prendasi la CE uguale alla CD [*prop. 3*], e sopra DE costruiscasi [*prop. 1*] il triangolo equilatero FDE , e tirisi CF .



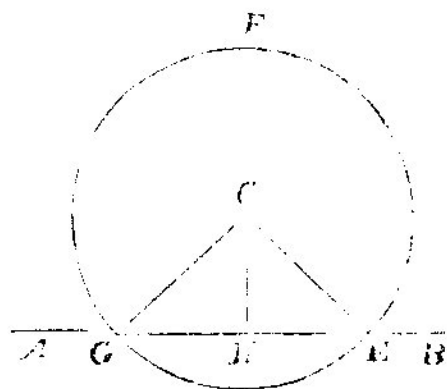
Dico che la linea retta FC sarà perpendicolare alla retta data AB ; perciocchè essendo la DC uguale alla CE , e la FC comune, le due DC , CF saranno uguali alle due EC , CF , l'una all'altra, e la base DF è uguale alla base FE . Adunque [*prop. 8*] l'angolo DCF è uguale all'angolo ECF , e sono conseguenti. Ma quando una linea retta stando sopra un'altra retta fa gli angoli conseguenti uguali fra loro, ciascuno degli angoli uguali è retto [*prop. 10*]; adunque ciascuno d'essi DCF , FCE è retto, e però si è tirata la linea retta FC perpendicolare alla data retta AB , dal punto C dato in essa; il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Sopra una data retta indefinita, da un punto dato che non sia in essa, tirare una linea retta perpendicolare.

Sia AB la data retta indefinita, e C il punto dato che non sia in essa. Dal punto C , bisogna tirare una retta perpendicolare alla AB . Piglisi dall'altra parte della linea retta AB qualsivoglia punto E , e dal centro C con l'intervallo CE descrivasi [*post. 3*] il cerchio $EF\Gamma$, e la EG sia segata [*prop. 10*] per mezzo nel punto H , e si conducano CG , CH , CE .



Dico che la CH è perpendicolare alla AB . Perciocchè, essendo la GH uguale alla HE , e la HC comune,

le due GH , HC sono uguali alle due EH , HC , l'una all'altra, e la base CG è uguale alla base CE . Adunque [*prop. 8*] l'angolo CHG è uguale all'angolo EHC , e sono conseguenti. Ma [*def. 10*] quando una linea retta stando sopra un'altra fa gli angoli conseguenti uguali fra loro, ciascuno degli angoli uguali è retto, e quella prima retta si chiama perpendicolare all'altra, dunque ecc.

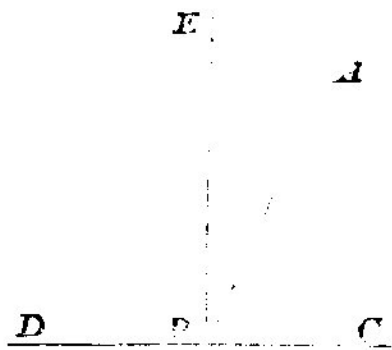
PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Quando una linea retta stando sopra un'altra retta fa due angoli, o questi sono ambedue retti, o la loro somma è uguale a due retti.

La linea retta AB stando sopra la retta CD faccia gli angoli CBA , ABD . Dico che gli angoli CBA , ABD o sono retti ambedue, o la loro somma è uguale a due retti.

Perchè se CBA è uguale ad ABD , sono due retti [*def. 10*]; ma se no, tirisi [*prop. 11*] dal punto B sopra la CD la BE perpendicolare. Allora gli angoli CBE , EBD saranno due retti [*def. 10*], e perchè CBE è uguale alla somma dei due CBA , ABE , posto EBD comune, la somma degli angoli CBE , EBD sarà uguale a quella dei tre angoli CBA , ABE , EBD . Similmente, perchè l'angolo DBA è uguale alla somma dei due angoli DBE , EBA , posto ABC comune, sarà la somma degli angoli DBA , ABC uguale a quella dei tre DBE , EBA , ABC .



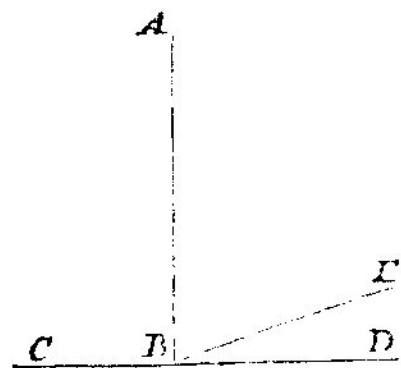
Quelle grandezze che sono uguali ad una medesima sono uguali fra loro [*ass. 1*]; adunque eziandio la somma degli angoli CBE , EBD è uguale alla somma degli angoli DBA , ABC . Ma CBE , EBD sono due retti, onde gli angoli DBA , ABC valgono insieme due retti, e però *quando una linea retta stando sopra un'altra retta fa due angoli ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se con una linea retta, ed in un punto di essa, due rette non poste dalla medesima parte facciano gli angoli conseguenti la cui somma sia uguale a due retti, esse rette saranno per diritto fra loro.

Con una retta AB , nel punto B che è in essa, due linee rette BC , BD non poste dalla medesima parte facciano gli angoli conseguenti ABC , ABD , la cui somma sia due retti. Dico la BD essere per diritto alla CB .



Perciocchè, se la BD non è per diritto alla CB , sia la BE per diritto alla CB . Perchè dunque la linea retta AB sta sopra la retta CBE , gli angoli ABC , ABE valgono insieme due retti [*prop. 13*]. Ma eziandio gli angoli ABC , ABD hanno per somma due retti; onde gli angoli CBA , ABE varranno insieme come CBA , ABD [*ass. 1* e *post. 4*]. Sottraggasi l'angolo ABC comune; il rimanente ABE sarebbe uguale al rimanente ABD , cioè il minore al maggiore; il che non può

essere. Adunque la BE non è per diritto alla BC . Dimostre-
remmo similmente non essere alcun' altra, fuori che
la BD ; adunque la CB sarà per diritto alla BD . E però
se con una retta ed in un punto di essa, ecc. c. d. d.

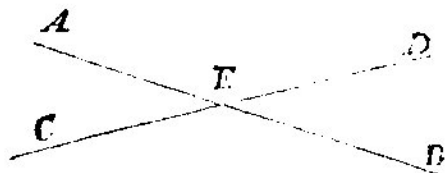
PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Se due linee rette si seghino insieme, faranno
gli angoli opposti al vertice uguali fra loro.

Due linee rette AB , CD si seghino insieme nel
punto E . Dico l'angolo AEC essere uguale all'angolo DEB ,
e l'angolo CEB all'angolo AED .

Perchè stando la linea retta AE sopra la retta CD ,
essa fa gli angoli CEA , AED , la cui somma è uguale a due
retti. Similmente, perchè la linea
retta DE sta sopra la retta AB essa
fa gli angoli AED , DEB , la cui som-
ma sarà uguale a due retti. Adun-
que gli angoli CEA , AED valgono
insieme come gli angoli AED , DEB [*ass. 1 e post. 4*].
Sottraggasi l'angolo comune AED ; il rimanente CEA
sarà uguale al rimanente DEB [*ass. 3*]. Si dimostreranno
parimente uguali CEB , DEA , e però *se due linee rette
si seghino insieme, ecc. c. d. d.*



COROLIARIO.

Da questo chiaramente si vede che se più li-
nee rette si segano insieme, la somma degli angoli

consecutivi formati intorno al punto comune è uguale a quattro retti.

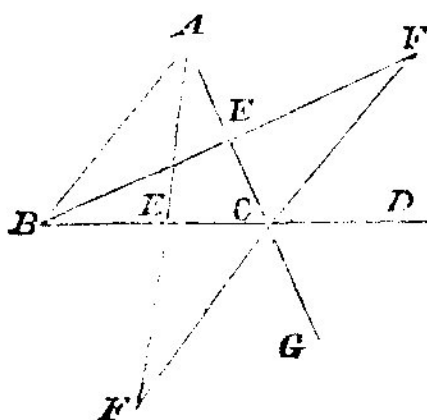
PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se si prolunga un lato di un triangolo, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni opposti.

Sia il triangolo ABC , ed un lato di esso BC si prolunghi in D . Dico l'angolo esterno ACD esser maggiore dell'uno e dell'altro interno opposto, cioè CBA , BAC .

Seghisi AC per mezzo [*prop. 10*] nel punto E , e condotta BE prolunghisi nel punto F , e pongasi la EF uguale alla BE [*prop. 3*]; giungasi poi FC . Poichè la AE è uguale alla EC , e la BE alla EF , le due AE , EB sono uguali alle due CE , EF , l'una all'altra, e l'angolo AEB è uguale all'angolo FEC , perciocchè sono opposti al vertice [*prop. 15*]; onde la base AB è uguale alla base FC [*prop. 4*], ed il triangolo ABE al triangolo FEC ed uguali gli altri angoli, che si oppongono ai lati uguali. Adunque l'angolo BAE è uguale all'angolo ECF ; ma l'angolo ECD è maggiore di ECF ; dunque l'angolo ACD è maggiore dell'angolo BAE . Parimente segandosi la linea retta BC per mezzo, si dimostrerà l'angolo BCG , cioè ACD [*prop. 15*] maggiore dell'angolo ABC . Laonde se si prolunga un lato di un triangolo l'angolo esterno, ecc. c. d. d.



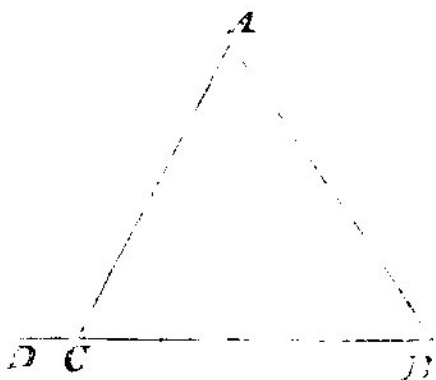
PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Due angoli di un triangolo, presi in qualunque modo, danno una somma minore di due retti.

Sia il triangolo ABC . Dico che due angoli del triangolo ABC , presi in qualsivoglia modo, valgono meno di due retti.

Prolunghisi la BC nel punto D . L'angolo ACD , esterno del triangolo ABC , è maggiore [*prop. 16*] dell'interno opposto ABC , per conseguenza gli angoli ACD , ACB fanno una somma maggiore [*ass. 4*] degli angoli ABC , BCA . Ma gli angoli ACD , ACB valgono due retti [*prop. 13*], quindi la somma di ABC , BCA sarà minore di due retti. Dimosteremmo similmente che la somma degli angoli BAC , ACB e quella degli angoli CAB , ABC sono ambedue minori di due retti. Adunque *due angoli di un triangolo, ecc. c. d. d.*



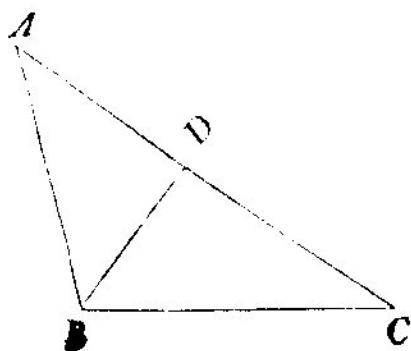
PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Il maggior lato di un triangolo è opposto al maggiore angolo.

Sia il triangolo ABC , che abbia il lato AC maggiore del lato AB . Dico ancor l'angolo ABC esser maggiore dell'angolo BCA .

Perciocchè, essendo la AC maggiore della AB , pongasi [*prop. 3*] la AD uguale alla AB , e aggiungasi BD . Siccome nel triangolo BDC l'angolo esterno è ADB , sarà questo maggiore dell'interno opposto DCB [*prop. 16*]. Ma ADB è uguale ad ABD , essendo il lato AB uguale al lato AD [*prop. 5*]. Adunque l'angolo ABD è maggiore dell'angolo ACB . Onde ABC sarà molto maggiore di ACB , e però *il maggior lato di un triangolo è opposto al maggior angolo; c. d. d.*



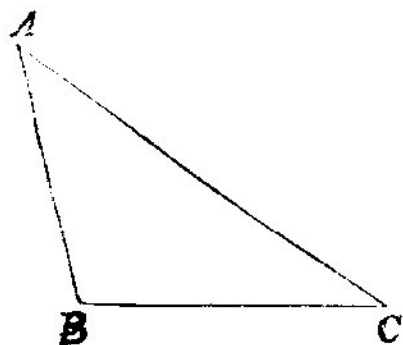
PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Al maggior angolo di un triangolo è opposto il maggior lato.

Sia il triangolo ABC che abbia l'angolo ABC maggior dell'angolo BCA . Dico il lato AC essere maggiore del lato AB .

Perciocchè se non è maggiore, ovvero AC è uguale ad AB , ovvero è minore di esso. Ma non è uguale, perchè ancora l'angolo ABC sarebbe [*prop. 5*] uguale all'angolo ACB , ciò che non è, e però AC non è uguale ad AB . Ma nè anche è minore, perchè ancor l'angolo ABC sarebbe [*prop. 18*] minore dell'angolo ACB , ciò che non è. Onde AC non è minore di AB . Adunque AC



è maggiore di AB . Laonde *al maggior angolo di un triangolo, ecc. c. d. d.*

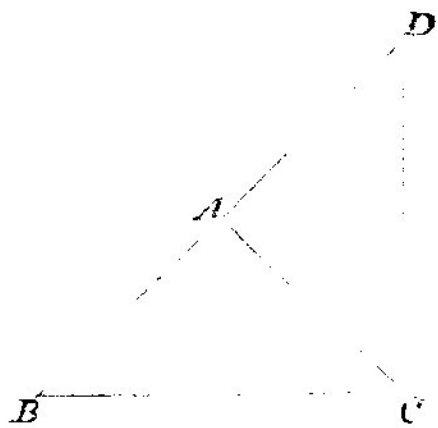
PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

La somma di due lati di qualunque triangolo, presi in qualsivoglia modo, è maggiore del lato rimanente.

Sia il triangolo ABC . Dico che la somma di due lati del triangolo ABC , come BA , AC , è maggiore del rimanente BC .

Prolunghisi BA nel punto D , e pongasi AD uguale a CA [*prop. 3*] e conducasi DC . Poichè DA è uguale ad AC , [*prop. 5*] sarà ancor l'angolo ADC uguale all'angolo ACD . Ma l'angolo BCD è maggiore dell'angolo ACD [*ass. 9*]. Adunque l'angolo BCD è maggiore dell'angolo ADC . E perchè DCB è un triangolo che ha l'angolo BCD maggiore dell'angolo BDC , ed al maggior angolo è opposto il maggior lato, sarà il lato BD maggiore del lato BC [*prop. 19*]. Ma DB è uguale alla somma di BA e AC ; onde la somma dei lati BA , AC è maggiore di BC . Dimostreremmo similmente ancora che la somma dei lati AB , BC è maggiore del lato CA , e che la somma dei lati BC , CA è maggiore di AB . Adunque *la somma di due lati, ec. c. d. d.*



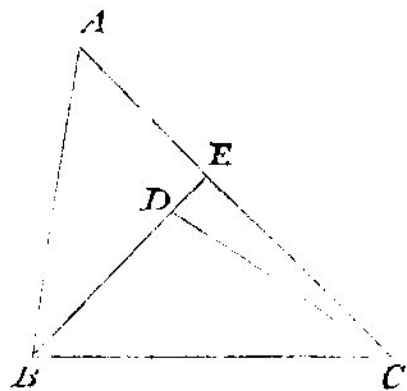
PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se dai termini d' un lato del triangolo si conducono due linee rette ad un punto interno, la somma di queste sarà minore della somma degli altri due lati del triangolo, ma conterranno un angolo maggiore.

Sopra un lato BC del triangolo ABC , dai termini B , C conducansi di dentro due rette BD , DC . Dico che BD , DC fanno una somma minore degli altri due lati del triangolo BA , AC . Ma contengono l'angolo BDC maggiore dell'angolo BAC .

Prolunghisi BD nel punto E . Poichè due lati di qualunque triangolo fanno una somma maggiore del rimanente [*prop. 20*], così la somma di due lati BA , AE del triangolo ABE sarà maggiore del lato BE . Pongasi EC comune. La somma di BA , AC sarà maggiore della somma di BE , EC [*ass. 4*]. Finalmente perchè due lati CE , ED del triangolo CED fanno una somma maggiore del lato CD [*prop. 20*], ponendo comune DB si vedrà che la somma di CE , EB è maggiore della somma di CD , DB . Ma si è dimostrato che BA , AC presi insieme superano BE , EC ; adunque la somma di BA , AC tanto più supererà quella di BD , DC . Oltre a ciò, perchè l'angolo esterno di un triangolo è maggiore dell'interno opposto [*prop. 16*], sarà l'angolo esterno BDC del triangolo CDE , maggiore di CED . Per la medesima ragione, ancor l'angolo esterno CEB



del triangolo ABE è maggiore di BAC . Adunque l'angolo BDC sarà molto maggiore dell'angolo BAC . Onde *se dai termini di un lato del triangolo, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XXII.

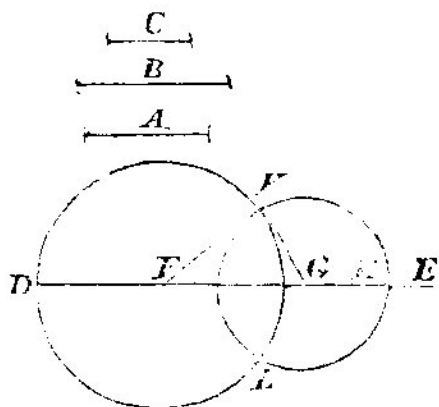
PROBLEMA.

Costruire un triangolo i cui lati siano uguali a tre rette date, tali che la somma di due qualunque fra esse sia maggiore della rimanente.

Siano tre linee rette date A, B, C , due delle quali diano una somma maggiore della rimanente, prese in qualsivoglia modo, cioè che le A, B prese insieme superino C , e le A, C superino B , ed ancora le B, C superino A . Bisogna con tre linee rette uguali alle A, B, C costruire un triangolo.

Pongasi la linea retta DE terminata nel punto D , ma indefinita verso il punto E . E pongasi la DF uguale alla A , e la FG uguale alla B , e la GH alla C . E dal centro F con l'intervallo FD descrivasi il cerchio DKL . Poi dal centro G con l'intervallo GH descrivasi un'altro cerchio KLH , e conducansi KF, KG .

Dico che KFG è il triangolo domandato. Perciòchè, essendo il punto F centro del cerchio DKL , sarà la FD uguale alla FK [*def. 15*]; ma FD è uguale alla A ; adunque ancor la FK è uguale ad A . Oltre a ciò, perchè il punto G è centro del cerchio LKH , sarà la GH uguale



alla GK . Ma la GH è uguale alla C , adunque eziandio la GK è uguale alla C . Inoltre la FG è uguale alla B ; quindi le tre KF, FG, GK sono uguali alle tre rette A, B, C . E però colle tre linee rette KF, FG, GK , che sono uguali alle tre rette date A, B, C si è costruito il triangolo KFG ; il che bisognava fare.

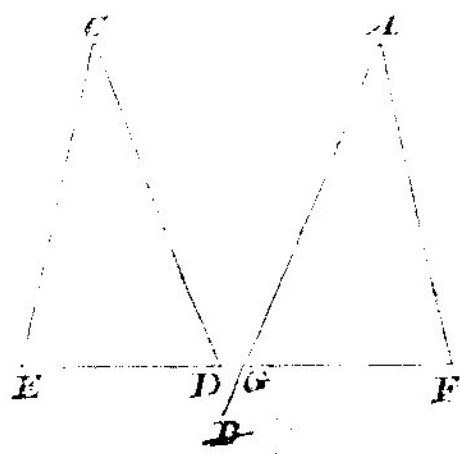
Le due circonferenze DKL e KLH s'incontrano necessariamente in K . Infatti, DG che è eguale alle A e B prese insieme sarà maggiore di HG , che è eguale alla C ; ed essendo FK che è eguale ad A minore di FI che è eguale alla B e C prese insieme, sottraendo FG , rimarrà GI minore di HG . Dunque la circonferenza KLH ha un punto I interno ed uno D esterno alla circonferenza KLH , e dovrà necessariamente incontrarla.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA.

Sopra una data retta, ed in un punto dato in essa, costruire un'angolo rettilineo uguale ad un altro angolo rettilineo dato.

Sia AB la retta data, e A il punto dato in essa, e DCE l'angolo rettilineo dato. Bisogna nella data retta AB , e nel punto dato in essa A , costruire un angolo rettilineo uguale all'angolo rettilineo dato. Piglinsi nell'una, e nell'altra delle rette CD, CE due punti quali si vogliano D, E , e conducasi DE , e con tre rette che siano uguali alle tre rette CD, DE, EC , [*prop. 22*] costruiscasi il triangolo AFG , di modo che la CD sia uguale alla AF , e la CE alla AG , e la DE alla FG .



Perchè le due DC , CE sono uguali alle due FA , AG , l'una all'altra, e la base DE è uguale alla base FG , sarà ancor l'angolo DCE uguale all'angolo FAG [*prop. 8*]. Adunque nella data retta AB , e nel punto in essa dato A , si è costruito l'angolo rettilineo FAG uguale all'altro angolo rettilineo dato DCE ; il che bisognava fare.

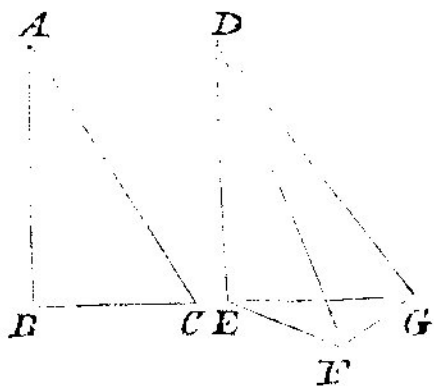
PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e hanno diseguali gli angoli compresi da questi lati, la base del triangolo in cui l'angolo è maggiore sarà maggiore della base dell'altro triangolo.

Siano due triangoli ABC , DEF , che abbiano due lati AB , AC uguali a due lati DE , DF , l'uno all'altro, cioè il lato AB uguale al lato DE , ed il lato AC uguale a DF , e l'angolo BAC sia maggiore dell'angolo EDF . Dico ancora la base BC esser maggiore della base EF .

Perchè l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF , costruiscasi sopra la linea retta DE , e nel punto che è in essa D , l'angolo EDG uguale all'angolo BAC [*prop. 23*] e pongasi la DG uguale ad AC , e conducasi GE , FG ; allora nei triangoli ABC , DEG i lati BA , AC sono uguali ai lati ED , DG , l'uno all'altro, e l'angolo BAC



è uguale all'angolo EDG . Adunque la base BC è uguale alla base EG [*prop. 4*]. Oltre a ciò, siccome la DG è uguale alla DF , e l'angolo DFG uguale all'angolo DGF [*prop. 5*], sarà l'angolo DFG maggiore dell'angolo EGF . Dunque l'angolo EFG è molto maggiore dell'angolo EGF . E perchè EFG è un triangolo che ha l'angolo EFG maggiore dell' EGF , ed al maggiore angolo è opposto il maggior lato, sarà ancor il lato EG maggior del lato EF . Ma il lato EG è uguale al lato BC , dunque ancor BC sarà maggiore di EF . Laonde *se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, ecc. c. d. d.*

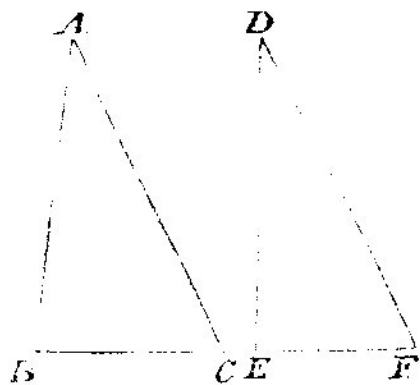
PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e le basi disuguali, l'angolo compreso fra i lati uguali nel triangolo in cui la base è maggiore sarà maggiore dell'angolo corrispondente dell'altro triangolo.

Siano due triangoli ABC , DEF , che abbiano due lati AB , AC uguali a due lati DE , DF , l'uno all'altro, cioè il lato AB uguale al lato DE , ed il lato AC al lato DF , e la base BC sia maggiore della base EF . Dico ancora l'angolo BAC essere maggiore dell'angolo EDF .

Perciocchè se non è maggiore, o è uguale o minore. Ma l'angolo BAC non è uguale al-



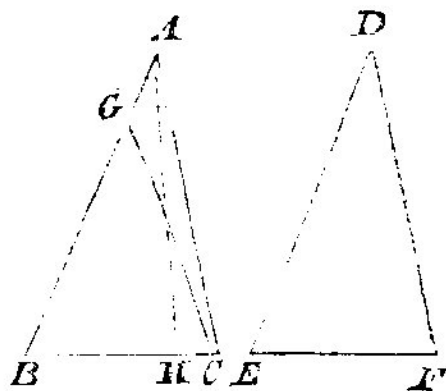
l'angolo EDF , perchè eziandio la base BC sarebbe uguale [*prop. 4*] alla base EF , il che non è. Ma nè anche è minore: perchè la base BC sarebbe minore della base EF [*prop. 24*], che non è. Adunque l'angolo BAC non è nè eguale nè minore dell'angolo EDF . Dunque l'angolo BAC sarà necessariamente maggiore dell'angolo EDF , e però *se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Se due triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, avranno ancora gli altri lati uguali agli altri lati, l'uno all'altro, e l'angolo rimanente uguale al rimanente.

Siano due triangoli ABC , DEF , che abbiano due angoli ABC , BCA uguali ai due DEF , EFD , l'uno all'altro, cioè l'angolo ABC uguale all'angolo DEF , e l'angolo BCA all'angolo EFD , ed abbiano un lato uguale ad un lato; e consideriamo prima il caso che questo lato sia quello che è fra gli angoli uguali, cioè il lato BC sia uguale al lato EF . Dico che ancora gli altri lati saranno uguali agli altri lati, l'uno all'altro, cioè il lato AB al lato DE , ed il lato AC a DF , ed il terzo angolo BAC uguale al terzo angolo EDF .



Perciocchè se la AB non è uguale alla DE , una di esse sarà maggiore; sia maggiore AB , e pongasi la GB uguale alla DE , e tirisi GC . Allora i due lati GB , BC sono uguali ai due lati DE , EF , l'uno all'altro, e l'angolo FBC è uguale all'angolo DEF ; adunque la base GC è uguale alla base BF [*prop. 4*], ed il triangolo GBC al triangolo DEF , e sono uguali gli angoli opposti ai lati uguali, cioè l'angolo GCB è uguale all'angolo DFE . Ma l'angolo DFE si suppone uguale all'angolo BCA , onde ancor l'angolo BCG sarebbe uguale all'angolo BCA , cioè il minore al maggiore, che non può essere. Non è adunque la AB disuguale alla DE . E però sarà uguale. La BC è uguale alla EF ; onde le due AB , BC sono uguali alle due DE , EF , l'una all'altra, e l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF . Adunque la base AC è uguale alla base DF , ed il rimanente angolo BAC al rimanente EDF [*prop. 4*].

Siano ora invece uguali quei lati che si oppongono agli angoli uguali, come AB e DE . Dico ancor gli altri lati essere uguali agli altri lati, cioè AC a DF , e BC ad EF , ed eziandio il rimanente angolo BAC uguale al rimanente EDF .

Perciocchè se la BC non è uguale alla EF , una di esse è maggiore. Sia maggiore la BC , se esser può, e pongasi la BH uguale alla EF , e conducasi AH . Allora le due AB , BH sono uguali alle due DE , EF , l'una all'altra, e contengono gli angoli uguali. Adunque la base AH è uguale alla base DF [*prop. 4*], ed il triangolo ABH uguale al triangolo DEF ; e sono uguali gli altri angoli ai quali sono opposti i lati eguali. Dunque l'angolo BHA è uguale all'angolo EFD . Ma l'angolo EFD è uguale all'angolo BCA . Dunque ancor l'angolo BHA è uguale all'angolo BCA . Onde l'angolo esterno BHA del triangolo AHC sarebbe uguale all'interno ed opposto BCA , che non può

essere [*prop. 16*], e però la BC non è disuguale alla EF , ma uguale. E AB è uguale alla DE ; onde le due AB, BC sono uguali alle due DE, EF , l'una all'altra, e contengono gli angoli uguali, e perciò la base AC è uguale alla base DF , ed il triangolo ABC al triangolo DEF , e l'angolo rimanente BAC al rimanente EDF . Adunque *se due triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, ecc. c. d. d.*

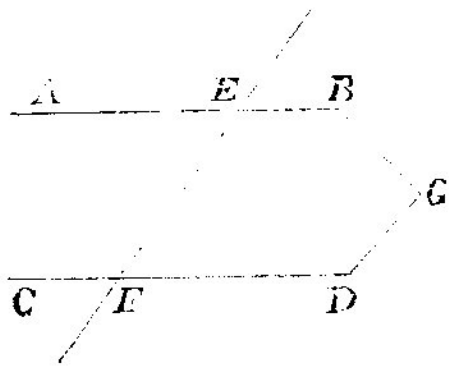
PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Se una retta cadendo sopra due altre rette fa gli angoli alterni uguali fra loro, le due rette saranno parallele.

La linea retta EF , cadendo sopra le due linee rette AB, CD , faccia gli angoli alterni AEF, EFD uguali fra loro. Dico che la linea retta AB sarà parallela alla CD .

Perciocchè se non è parallela, le AB, CD prolungate o verso la parte BD , o verso la AC concorreranno insieme. Prolunghinsi, e concorrano insieme dalla parte BD nel punto G . Allora l'angolo esterno AEF del triangolo GEF è maggiore dell'interno opposto EFG [*prop. 16*], ma è ancora uguale, il che non può essere. Adunque la AB, CD prolungate non concorreranno dalla parte BD . Si dimostrerà parimente che esse non concorrono dalla parte AC , onde la AB è parallela alla CD [*def. 35*]. Dunque *se una retta cadendo sopra due altre rette ecc. c. d. d.*

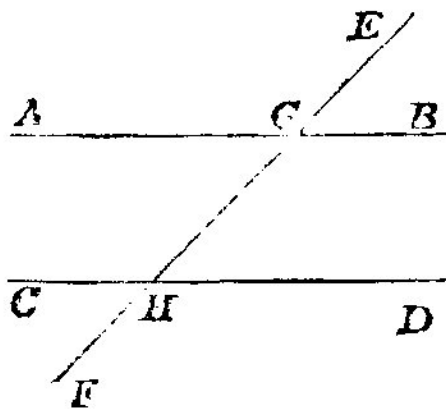


PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Se cadendo una linea retta sopra due altre rette fa l'angolo esterno uguale all'interno opposto dalla medesima parte, ovvero gli interni dalla stessa parte la cui somma sia uguale a due retti, le linee rette saranno parallele fra loro.

La linea retta EF , cadendo sopra le due linee rette AB , CD faccia l'angolo esterno EGB uguale all'interno opposto GHD , ovvero gli angoli interni dalla medesima parte BGH , GHD la cui somma sia uguale a due retti. Dico che la linea retta AB sarà parallela alla CD .



Perciocchè essendo l'angolo EGB uguale all'angolo GHD , e l'angolo EGB all'angolo AGH [*prop. 15*], sarà ancor l'angolo AGH uguale all'angolo GHD . Questi sono alterni; adunque la AB è parallela alla CD [*prop. 27*].

Oltre a ciò, se la somma degli angoli BGH , GHD è uguale a due retti, siccome anche gli angoli AGH , BGH fanno due retti, la somma degli angoli AGH , BGH sarà uguale a quella degli angoli BGH , GHD . Sottraggasi l'angolo comune BGH ; risulta il rimanente AGH uguale al rimanente GHD . Ma questi angoli sono alterni; dunque la AB sarà parallela alla CD .

Dunque se cadendo una linea retta ecc. c. d. d.

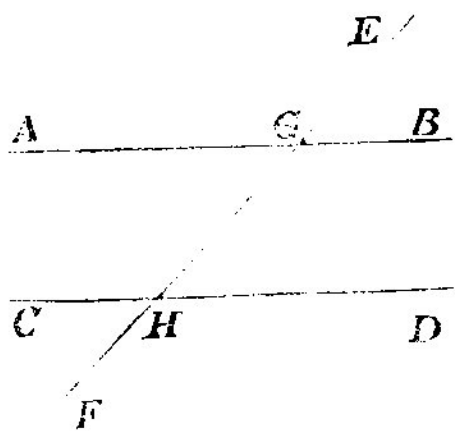
PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Se una linea retta cade sopra due rette parallele, farà gli angoli alterni uguali fra loro, e l'esterno uguale all'interno opposto dalla medesima parte, e avrà la somma degli interni dalla stessa parte uguale a due retti.

Sia la retta EF che cade sopra le linee rette parallele AB , CD . Dico che essa fa gli angoli alterni AGH , GHD uguali fra loro, e l'esterno EGB uguale all'interno opposto dalla medesima parte GHD , ed ha la somma degli interni dalla stessa parte BGH , GHD eguale a due retti.

Perciocchè se AGH non è uguale a GHD , uno di essi sarà maggiore. Sia maggiore AGH . Poichè l'angolo AGH è maggiore dell'angolo GHD , aggiungendo ad ambedue BGH , gli angoli AGH , BGH faranno una somma maggiore degli angoli BGH , GHD . Ma gli angoli AGH , BGH fanno due retti [*prop. 13*]. Adunque gli angoli BGH , GHD sommerebbero meno di due retti. Ma le rette che segate da un'altra fanno gli angoli da una stessa parte la cui somma sia minore di due retti, se si prolungano da questa parte, concorrono fra loro [*post. 4*]. Onde le linee rette AB , CD prolungate fra loro dovrebbero concorrere. Ma non concorrono, poichè esse sono parallele. Dunque l'angolo AGH non è disuguale all'angolo GHD . Onde è necessario che sia uguale. Ma l'angolo AGH è uguale [*prop. 15*] all'angolo EGB ; dunque anche EGB sarà



uguale a GHD e quindi aggiungendo BGH ad ambedue, si avrà che gli angoli EGB , BGH sommano come gli angoli BGH , GHD . Ma gli angoli EGB , BGH fanno due retti [*prop. 13*]. Adunque eziandio la somma di BGH , GHD sarà uguale a due retti; e però *cadendo una linea retta sopra due rette parallele, ecc. c. d. d.*

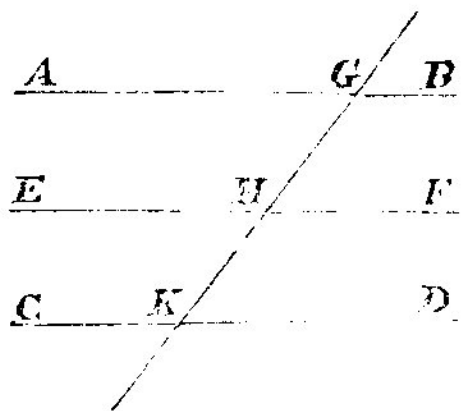
PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

Quelle rette che sono parallele ad una medesima retta sono anche parallele fra loro.

Siano ambedue le AB , CD parallele alla EF . Dico che le AB e CD sono anche parallele fra loro.

Tirisi sopra esse la linea retta GK . Poichè la linea retta GK cade sopra le linee rette parallele AB , EF , l'angolo AGH è uguale all'angolo GHE [*prop. 29*]. Inoltre, poichè la linea retta GK cade sopra le linee rette parallele EF , CD , l'angolo GHE è uguale all'angolo GKD . Adunque



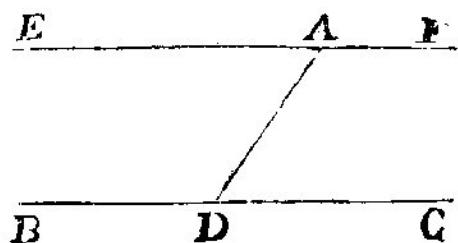
anche l'angolo AGK sarà uguale all'angolo GKD ; ma essi sono alterni; dunque la AB è parallela alla CD . E però *quelle rette che sono parallele, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XXXI.

PROBLEMA.

Per un punto dato tirare una linea retta parallela ad una retta data.

Sia A il dato punto, BC la retta data. Bisogna pel punto A tirare una linea retta parallela alla BC . Piglisi nella BC un punto qualsivoglia D , e conducasi DA , e sopra la retta DA nel punto A di essa costruiscasi [prop. 23] l'angolo DAE uguale all'angolo ADC , e prolunghisi la linea retta AF per diritto alla EA .



Siccome la linea retta AD cadendo sopra le due linee rette BC , EF fa gli angoli alterni EAD , ADC uguali fra loro, la EF sarà parallela alla BC [prop. 27]; e così pel dato punto A si è tirata la linea retta EAF parallela alla retta BC ; il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXXII.

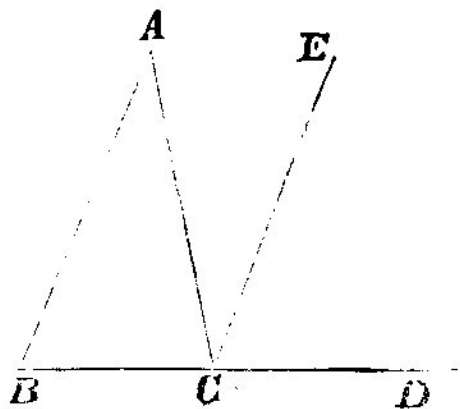
TEOREMA.

Se si prolunga un lato di qualunque triangolo, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due interni opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti.

Sia il triangolo ABC e si prolunghi uno de' suoi lati BC fino in un punto qualunque D . Dico che l'angolo esterno ACD è uguale alla somma dei due interni

opposti CAB , ABC , ed i tre angoli interni ABC , BCA , CAB del triangolo presi insieme sono uguali a due retti.

Tirisi pel punto C la CE parallela alla linea retta AB [*prop. 31*]. Poichè la AB è parallela alla CE , ed in esse cade la CA , gli angoli alterni BAC , ACE sono uguali fra loro [*prop. 29*]. Oltre a ciò, poichè la AB è parallela alla CE , ed in esse cade la linea retta BD , l'angolo esterno ECD è uguale all'interno opposto ABC . Onde tutto l'angolo esterno ACD è uguale alla somma dei due interni opposti BAC , ABC . Ponendo dunque ACB comune, gli angoli ACD , ACB sommano come i tre ABC , BCA , CAB . Ma gli angoli ACD , ACB fanno due retti. Onde ancor ACB , CBA , CAB faranno due retti. *Adunque prolungandosi un lato di qualunque triangolo, ecc. c. d. d.*



La proposizione XXIX e le seguenti si fondano sopra il Postulato V, al quale si potrebbe sostituire il IV del sig. HOËL. Senza ammettere quel Postulato, si possono dimostrare le seguenti proposizioni.

In due parallele segate da una terza retta la somma degli angoli interni dalla medesima parte non può superare due retti.

In un triangolo (rettilineo) qualunque, la somma degli angoli interni non può superare due retti.

Se fra i triangoli rettilinei ne esiste uno nel quale la somma degli angoli interni sia uguale a due retti, anche la somma degli angoli interni in qualsivoglia altro triangolo rettilineo, e la somma degli angoli interni dalla medesima parte in qualsivoglia paio di rette parallele segate da una terza retta, sarà uguale a due retti.

Soltanto l'esperienza ha fatto conoscere che un così

fatto triangolo esiste, e che per conseguenza il Postulato V di EUCLIDE è in accordo colla realtà dei fatti naturali. — Veggasi la quarta Parte degli *Elementi di Matematica* del dott. BALTZER, tradotti dal prof. L. CREMONA. ⁽¹⁾

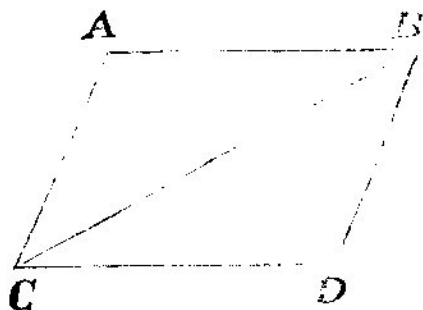
PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

Le linee rette che congiungono dalle medesime parti gli estremi di rette uguali e parallele sono anche esse uguali e parallele.

Siano le rette uguali e parallele AB , CD , e le linee rette AC , BD le congiungano dalle medesime parti. Dico che le AC , BD sono pure uguali e parallele.

Conducasi BC . Poichè la AB e la CD sono parallele, e cade in esse la BC , gli angoli alterni ABC , BCD sono uguali [*prop.* 29]. Allora le due AB , BC sono uguali alle due DC , CB , e l'angolo ABC è uguale all'angolo BCD ; dunque la base AC è uguale alla base BD [*prop.* 4], ed il triangolo ABC al triangolo BCD , e sono uguali gli angoli rimanenti a' quali si oppongono i lati uguali. Onde l'angolo ACB è uguale all'angolo CBD . E poichè sulle due linee rette AC , BD cade la linea retta BC facendo gli angoli alterni ACB , CBD uguali fra loro, la AC è parallela alla BD [*prop.* 27]. Adunque *quelle linee rette, ecc. c. d. d.*



⁽¹⁾ Genova, tipografia del R. Istituto dei Sordo-muti.

PROPOSIZIONE XXXIV.

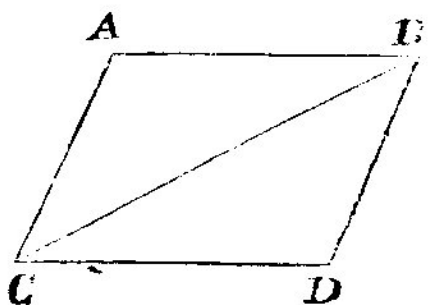
TEOREMA.

In un parallelogrammo i lati e gli angoli opposti sono fra loro uguali, e la diagonale lo taglia per metà.

Si chiama *parallelogrammo* un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli.

Sia il parallelogrammo $ACDB$, la cui diagonale è BC . Dico che i lati opposti del parallelogrammo $ACDB$, e gli angoli opposti sono uguali fra loro, e la diagonale BC lo sega per metà.

Perciocchè essendo la AB parallela alla CD , e cadendo in esse la linea retta BC , gli angoli alterni ABC, BCD sono uguali fra loro [*prop. 29*]. Similmente perchè la AC è parallela alla BD , ed in esse cade la BC , gli angoli alterni ACB, CBD sono uguali fra loro. I due triangoli ABC, CBD , hanno dunque due angoli ABC, BCA uguali a due angoli BCD, CBD , l'uno all'altro, e hanno comune il lato BC che è fra gli angoli uguali. Adunque avranno [*prop. 25*] ancora i lati rimanenti uguali ai rimanenti, l'uno all'altro, e l'angolo rimanente uguale al rimanente, cioè il lato AB uguale al lato CD , ed il lato AC a BD , e l'angolo BAC uguale all'angolo BDC . E perchè l'angolo ABC è uguale all'angolo BCD , e l'angolo CBD all'angolo ACB , sarà tutto l'angolo ABD uguale a tutto ACD . Adunque nel parallelogrammo i lati e gli angoli opposti sono uguali fra loro.



Dico ancora che la diagonale sega il parallelogrammo in due parti uguali. Perciocchè essendo i due lati AB, BC

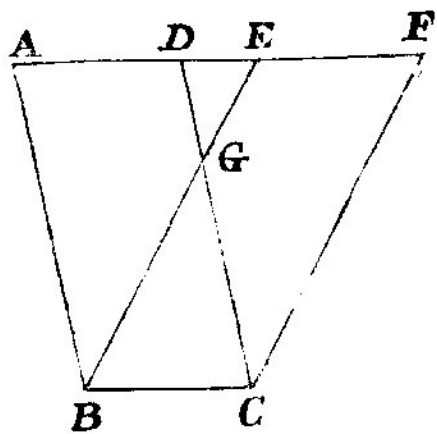
uguali ai due DC , CB , l'uno all'altro, e l'angolo ABC uguale all'angolo BCD , sarà la base AC uguale alla base DB [*prop. 4*], ed il triangolo ABC uguale al triangolo BCD . Adunque la diagonale BC divide il parallelogrammo $ACDB$ in due triangoli uguali; c. d. d.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

I parallelogrammi costruiti sulla medesima base e fra le medesime parallele sono fra loro eguali.

Siano i parallelogrammi $ABCD$, $EBCF$ collocati sulla medesima base BC e tra le medesime parallele AF , BC . Dico che il parallelogrammo $ABCD$ è eguale al parallelogrammo $EBCF$.



Perciocchè essendo $ABCD$ un parallelogrammo, la AD è uguale alla BC [*prop. 34*]. E per la medesima ragione la EF è uguale alla BC . Onde la AD sarà uguale alla EF , e aggiungendo ad ambedue DE , avremo tutta la AE uguale a tutta la DF . Ma la AB è uguale alla CD , onde le due EA , AB sono uguali alle due FD , DC , l'una all'altra, e l'angolo esterno FDC è uguale all'interno opposto EAB . Dunque la base EB è uguale alla base FC [*prop. 4*], ed il triangolo EAB è uguale al triangolo FDC . Sottraggasi la parte comune DGE . Lo spazio rimanente $ABGD$ sarà eguale al rimanente $EGCF$ [*ass. 3*]. Aggiungasi il triangolo GBC ad ambedue; verrà tutto il parallelogrammo $ABCD$ eguale a

tutto il parallelogrammo $EBCF$ [ass. 2], e perciò *i parallelogrammi costruiti sulla medesima base, ecc. c. d. d.*

Quando EUCLIDE dice che due figure sono *eguali*, intende solo che hanno la stessa *grandezza*.

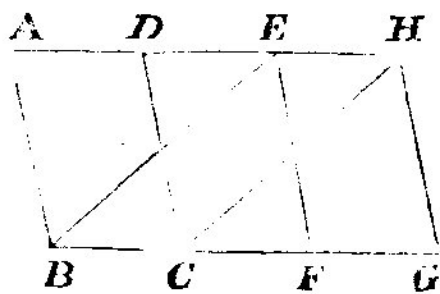
PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

I parallelogrammi costruiti sopra basi uguali e fra le medesime parallele sono fra loro eguali.

Siano i parallelogrammi $ABCD$, $EFGH$ costruiti sulle basi uguali BC , FG , e fra le medesime parallele AH , BG . Dico che il parallelogrammo $ABCD$ è eguale al parallelogrammo $EFGH$.

Conducansi BE e CH ; e perchè la BC è uguale alla FG , e la FG alla EH , sarà ancora la BC uguale alla EH . Ma le BC e EH sono anche parallele; dunque le BE e CH che le congiungono sono uguali anch'esse e parallele [prop. 33]. Onde $EBCH$ è un parallelogrammo eguale al parallelogrammo $ABCD$ [prop. 35], perchè ha la medesima base BC ed è compreso tra le medesime parallele BC , AD . Per la medesima ragione il parallelogrammo $EFGH$ è eguale al medesimo parallelogrammo $EBCH$, e però il parallelogrammo $ABCD$ sarà eguale al parallelogrammo $EFGH$. Adunque *i parallelogrammi costruiti sopra uguali basi, ecc. c. d. d.*



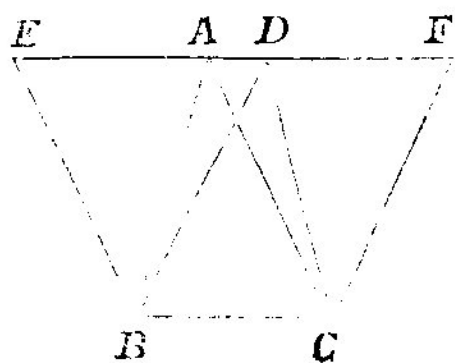
PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

I triangoli costruiti sulla medesima base e fra le medesime parallele sono fra loro eguali.

Siano i triangoli ABC , DBC collocati sulla medesima base BC , e fra le medesime parallele AD , BC . Dico il triangolo ABC essere eguale al triangolo DBC .

Prolunghisi la AD dall'una e dall'altra parte fino a due punti E, F , e per B tirisi [*prop. 31*] la BE parallela alla CA , e per C la CF parallela alla BD . Così si ottengono i parallelogrammi $EBCA$, $DBCF$,



eguali, perchè sono collocati sulla medesima base BC , e tra le medesime parallele BC , EF [*prop. 35*]. Il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo $EBCA$, perchè la diagonale AB divide questo per metà [*prop. 34*], ed il triangolo DBC è la metà del parallelogrammo $DBCF$, che è diviso per mezzo dalla diagonale DC . Ma quelle grandezze che sono le metà di grandezze uguali sono anche uguali fra loro [*ass. 7*]. Dunque il triangolo ABC è eguale al triangolo DBC . Onde *i triangoli costruiti sulla medesima base, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XXXVIII.

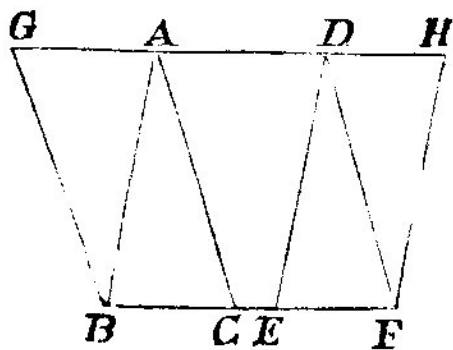
TEOREMA.

I triangoli costruiti sopra uguali basi e fra le medesime parallele sono fra loro eguali.

Siano i triangoli ABC , DEF aventi basi uguali BC ,

EF , e compresi tra le medesime parallele BF , AD . Dico il triangolo ABC esser eguale al triangolo DEF .

Prolunghisi AD dall'una e dall'altra parte fino ai punti G , H , e per B tirisi BG parallela alla CA [*prop. 31*], e per F tirisi FH parallela alla DE . Allora gli spazi $GBCA$, $DEFH$ sono ciascuno un parallelogrammo, e sono fra loro eguali, poichè hanno basi uguali BC , EF , e sono compresi tra le medesime parallele BF , GH [*prop. 36*]. Ma il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo $GBCA$, perchè la diagonale AB sega questo per mezzo [*prop. 34*]; e il triangolo DEF è la metà del parallelogrammo $DEFH$, perchè questo è diviso per mezzo dalla diagonale DF . Ora quelle grandezze che sono le metà di grandezze uguali sono uguali fra loro; dunque il triangolo ABC è eguale al triangolo DEF . E però *i triangoli costruiti sopra uguali basi, ecc. c. d. d.*



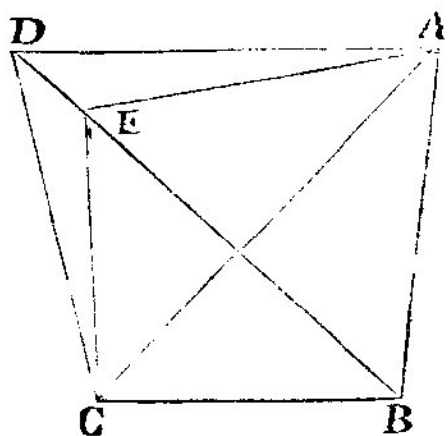
PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.

I triangoli eguali costruiti sulla medesima base e dalla medesima parte sono eziandio compresi tra le medesime parallele.

Siano i triangoli eguali ABC , DBC collocati sulla medesima base BC e dalla medesima parte. Dico essere ancora compresi tra le medesime parallele.

Conducasi AD . Dico la AD essere parallela alla BC , perciocchè se non è parallela, tirisi per A la linea retta AE parallela alla BC [*prop. 31*], e conducasi EC . Allora il triangolo ABC è eguale al triangolo EBC [*prop. 37*], essendo costruiti sulla medesima base BC



e tra le medesime parallele BC , AE . Ma il triangolo ABC è eguale al triangolo DBC . Onde eziandio il triangolo DBC sarebbe eguale al triangolo EBC , cioè il maggiore al minore, il che non può essere. Non è adunque AE parallela alla BC . Similmente dimostreremo niun'altra retta essere parallela alla BC , fuorchè la AD . Adunque la AD è parallela alla BC , e però *i triangoli eguali costruiti sulla medesima base, ecc. c. d. d.*

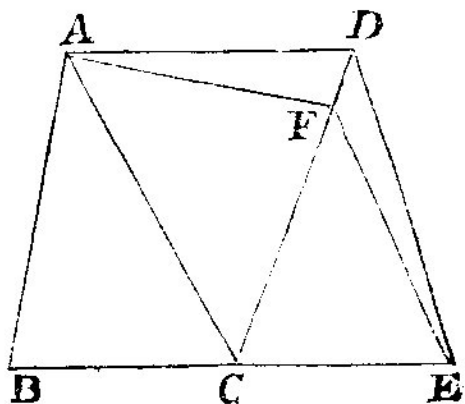
PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

I triangoli eguali costruiti sopra basi uguali, e dalla medesima parte, sono anche compresi tra le medesime parallele.

Siano i triangoli uguali ABC , CDE costruiti su basi uguali BC , CE . Dico eziandio essere compresi tra le medesime parallele.

Si tiri AD . Dico la AD essere parallela alla BE . Perchè se non è, tirisi per A la AF parallela alla BE , e conducasi FE . Il triangolo ABC sarà eguale al triangolo FCE , perchè sono costruiti sopra basi uguali, e fra le mede-



sime parallele BE , AF . Ma il triangolo ABC è eguale al triangolo DCE ; onde ancor il triangolo DCE sarebbe eguale al triangolo FCE , cioè il maggiore al minore, il che non può essere. La AF dunque non è parallela alla BE . Dimostreremmo similmente non essere alcun'altra retta parallela fuori che la AD . Adunque la AD sarà parallela alla BE , e però *i triangoli eguali costruiti, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XLI.

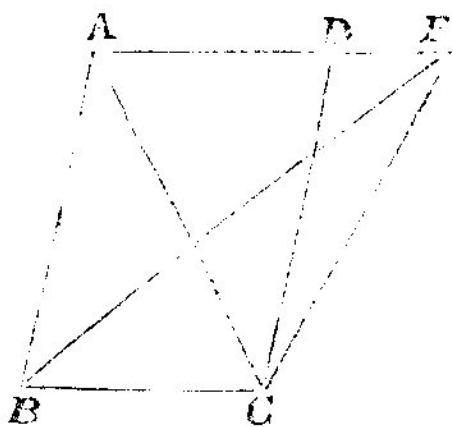
TEOREMA.

Se un parallelogrammo ed un triangolo hanno la medesima base, e sono fra le medesime parallele, il parallelogrammo è doppio del triangolo.

Il parallelogrammo $ABCD$, ed il triangolo FBC abbiano la medesima base BC , e siano tra le medesime parallele BC , AF . Dico il parallelogrammo $ABCD$ esser doppio del triangolo FBC .

Si tiri infatti AC . Allora il triangolo ABC è eguale al triangolo FBC [*prop. 37*], perchè sono collocati sulla medesima base BC , e tra le medesime parallele BC , AF .

Ma il parallelogrammo $ABCD$ è doppio del triangolo ABC [*prop. 34*]; onde sarà anche doppio di esso triangolo FBC . E però *se un parallelogrammo, ed un triangolo, ecc. c. d. d.*

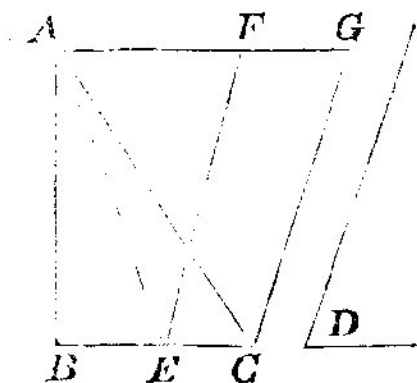


PROPOSIZIONE XLII.

PROBLEMA.

Costruire in un angolo rettilineo dato un parallelogrammo eguale a un triangolo dato.

Sia ABC il dato triangolo, e D l'angolo rettilineo dato. Bisogna costruire un parallelogrammo eguale al triangolo ABC , e che abbia un angolo rettilineo uguale a D . Seghisi BC per mezzo nel punto E , e conducasi AE , e colla linea retta EC , e nel punto E di essa [*prop. 23*] costruiscasi l'angolo CEF , uguale all'angolo D , e per A tirisi la AG parallela alla EC , e per C tirisi la CG parallela alla FE .



La figura $FECG$ è un parallelogrammo; e poichè la BE è uguale alla EC , il triangolo ABE sarà eguale al triangolo AEC , perchè giacciono sopra le basi uguali BE , EC , e tra le medesime parallele BC , AG . Dunque il triangolo ABC è doppio del triangolo AEC . Ma anche il parallelogrammo $FECG$ è doppio del triangolo AEC , perchè ha la medesima base, ed è tra le medesime parallele; dunque il parallelogrammo $FECG$ è eguale al triangolo ABC , ed ha l'angolo CEF uguale all'angolo dato D , come appunto era stato richiesto.

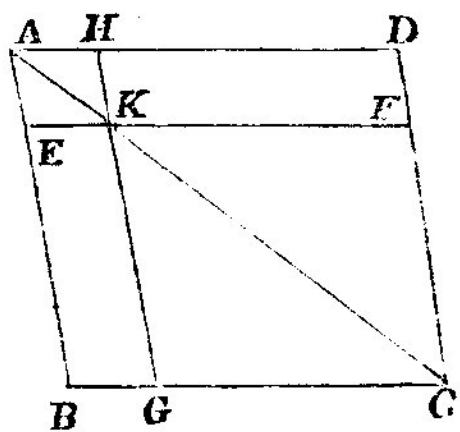
PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA.

Se per un punto della diagonale di un parallelogrammo si tirano due rette parallele ai lati, dei

quattro parallelogrammi che così si formano i due che sono situati per intiero, uno da una parte e uno dall'altra della diagonale, e che si chiamano supplementi degli altri due che sono dintorno alla diagonale, sono eguali.

Sia il parallelogrammo $ABCD$, la cui diagonale è AC : pel punto qualsivoglia K di questa diagonale si tirino le rette EF , HG , con che si formeranno quattro parallelogrammi EH , BK , FG , KD . Dico che i parallelogrammi BK e KD , vale a dire i supplementi dei due EH , FG , saranno eguali.



Infatti, siccome $ABCD$ è un parallelogrammo, e AC la sua diagonale, il triangolo ABC sarà uguale [*prop. 34*] al triangolo ADC . Inoltre poichè $EKHA$ è un parallelogrammo, e AK è la sua diagonale, il triangolo AEK sarà uguale al triangolo AHK , e per la medesima ragione il triangolo KGC sarà uguale al triangolo KFC . Dunque la somma dei due triangoli AEK e KGC sarà eguale alla somma dei due triangoli AHK e KFC ; e quindi sottraendo la prima di queste somme dal triangolo ABC e la seconda dal suo uguale ADC i rimanenti supplementi BK e KD saranno uguali; e così è dimostrato che *se per un punto della diagonale, ecc. c. d. d.*

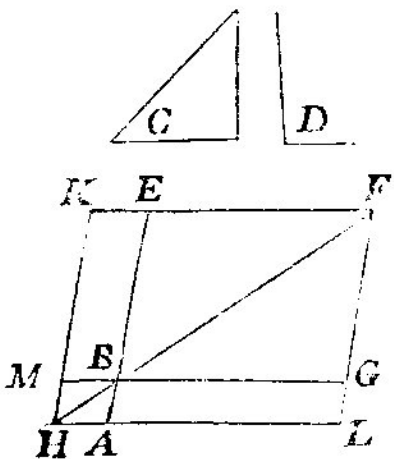
PROPOSIZIONE XLIV.

PROBLEMA.

Sopra una linea retta data in un angolo rettilineo dato costruire un parallelogrammo eguale ad un triangolo dato.

Sia AB la retta data, C il triangolo dato, e D l'angolo rettilineo dato. Bisogna sopra la retta data AB nell'angolo ABG che è uguale a D costruire un parallelogrammo che sia eguale al dato triangolo C .

Costruiscasi il parallelogrammo $BEKM$ eguale al triangolo C nell'angolo EBM , che è uguale a D [*prop. 42*]; pongasi in modo che la BE sia nella stessa linea retta che AB , e per A tirisi la AH parallela alle BM , EK , e conducasi HB . Poichè sulle parallele AH , EK cade la linea retta HK [*prop. 29*] la somma degli angoli AHK , HKE è uguale a due retti, e quindi BHK e HKE fanno meno di due retti, e le HB , KE prolungate [*post. 5*] concorreranno. Sia F il loro punto d'incontro. Per F si conduca FL parallela alle EA , KH , e si prolunghino le AH , MB fino ai punti G ed L .



Poichè $KHLF$ è un parallelogrammo, la cui diagonale è HF ; e d'intorno ad HF sono i parallelogrammi MA , EG , ed i supplementi KB , BL ; questi supplementi LB , BK saranno eguali [*prop. 43*]; e poichè BK è eguale al triangolo C , anche LB sarà eguale allo stesso triangolo C . E così, poichè l'angolo MBE è uguale all'angolo ABG , ed anche all'ango-

lo D , sopra la data linea retta AB nell'angolo ABG , che è uguale all'angolo D , si è costruito il parallelogrammo LB , eguale al dato triangolo C ; il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XLV.

PROBLEMA.

In un angolo rettilineo dato costruire un parallelogrammo eguale ad un dato poligono.

Sia $ABCD$ il poligono dato, ed E l'angolo rettilineo dato. Bisogna in un angolo uguale ad E costruire un parallelogrammo eguale alla figura $ABCD$. Tirisi BD , e costruiscasi [*prop. 42*] il parallelogrammo FH , eguale al triangolo ADB , nell'angolo HKE , uguale ad E , e poi sulla linea retta GH e nell'angolo GIM , che è uguale ad E , costruiscasi [*prop. 44*] il parallelogrammo GM , eguale al triangolo DBC .

Poichè l'angolo E è uguale a ciascuno dei due HKE , GIM , sarà anche HKE uguale a GIM e quindi aggiungendo ad ambedue KIG , la somma degli angoli FKH , KIG sarà uguale a quella degli angoli KHG , GIM . Ma FKH , KIG fanno due retti, quindi anche KHG , e GIM faranno due retti, e però nella linea retta GH e nel dato punto H , che è in essa, le due linee rette KH , HM non poste dalla medesima parte fanno gli angoli conseguenti la cui somma è uguale a due retti, e perciò la KH è per diritto alla HM [*prop. 14*]. Poichè



sopra le parallele KM , FG cade la linea retta HG , gli angoli alterni MHG , HGF sono uguali [*prop. 29*]; quindi aggiungendo ad ambedue HGL , gli angoli MHG , HGL sommano come gli angoli HGF , HGL . Ma gli angoli MHG , HGL fanno due retti; quindi anche gli angoli HGF , HGL faranno due retti [*prop. 14*], e però la FG è per diritto alla GL . Ora poichè la KF è parallela alla HG ed HG è parallela alla LM , anche KF sarà parallela alla ML [*prop. 30*]; inoltre KM ed FL sono pur esse parallele; dunque la figura $KFLM$ sarà un parallelogrammo. Ma il triangolo ABD è eguale al parallelogrammo HF , ed il triangolo DBC al parallelogrammo GM , quindi tutta la figura $ABCD$ sarà eguale a tutto il parallelogrammo $KFML$. E così si è costruito nell'angolo FKM , che è uguale al dato angolo E , il parallelogrammo $FKLM$, eguale al dato poligono $ABCD$; il che bisognava fare.

COROLLARIO. — Dalle cose dette è manifesto in qual modo si possa ad una data retta, in un angolo dato, adattare un parallelogrammo uguale ad un poligono dato; imperocchè basta adattare [*prop. 44*] alla retta data, nell'angolo dato, un parallelogrammo uguale al primo triangolo ABD .

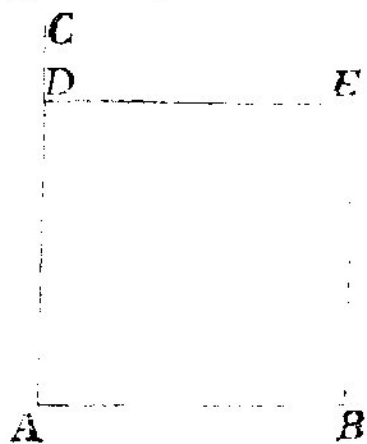
PROPOSIZIONE XLVI.

PROBLEMA.

Sopra una data linea retta descrivere un quadrato.

Sia AB la linea retta data. Bisogna sopra AB descrivere un quadrato. Tirisi la AD ad angolo retto sopra la AB dal punto A dato in essa, e pongasi la AD uguale alla AB , e per D tirisi la DE parallela alla AB , e per B la BE parallela alla AD [*prop. 31*].

Allora $ADEB$ è un parallelo-



grammo, e la AB è uguale alla DE , e la AD alla BE ; e poichè ancora la BA è uguale alla AD , le quattro BA , AD , DE , EB sono uguali fra loro, e però il parallelogrammo $ADEB$ è equilatero. Dico inoltre che esso è rettangolo, poichè cadendo sopra le parallele AB , DE la linea retta AD , la somma degli angoli BAD , ADE è uguale a due retti; e siccome BAD è retto, anche ADE sarà retto. Ma in un parallelogrammo [*prop. 34*] i lati e gli angoli opposti sono uguali fra loro: quindi ciascuno degli angoli opposti ABE , BED è retto, ed $ADEB$ è rettangolo. Ma si è già dimostrato che esso è equilatero; quindi sarà necessariamente un quadrato ecc.

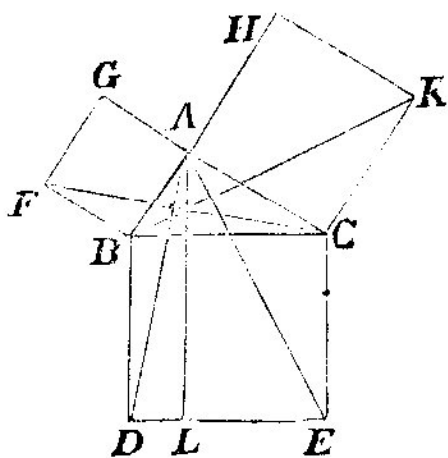
PROPOSIZIONE XLVII.

TEOREMA.

In ogni triangolo rettangolo il quadrato descritto sul lato opposto all'angolo retto è eguale alla somma dei quadrati descritti sui lati, che contengono l'angolo retto.

Sia il triangolo rettangolo ABC , che abbia l'angolo BAC retto. Dico che il quadrato descritto sulla retta BC è eguale alla somma dei quadrati descritti sulle BA , AC .

Descrivasi sulla BC il quadrato $BDEC$ e sulle BA , AC i quadrati GB , HC : e per A tirisi AL parallela alle BD , CE : e conducansi AD , FC . Poichè gli angoli BAC , BAG sono ambedue retti, ne segue che le due rette AC , AG che passano pel punto dato A della retta BA , e non sono dalla medesima parte di questa retta, fanno



con essa due angoli conseguenti la cui somma è uguale a due retti, e quindi CA è per diritto alla AG [*prop. 14*]. Per la medesima ragione la AB è per diritto alla AH . Ora siccome l'angolo DBC è uguale all'angolo FBA , poichè sono ambedue retti, se si aggiunge a ciascuno di essi FBC , tutto l'angolo DBA sarà uguale a tutto FBC , e quindi poichè anche le due AB , BD sono uguali alle due FB , BC , l'una all'altra, ne segue che anche la base AD del triangolo ABD sarà uguale alla base FC del triangolo FBC . e questi due triangoli saranno uguali [*prop. 4*]. Ma il parallelogrammo BL è doppio del triangolo ABD , perchè hanno la medesima base BD , e sono tra le medesime parallele BD , AL [*prop. 41*]; ed il quadrato GB è doppio del triangolo FBC , perchè anch'essi hanno la medesima base FB e sono tra le medesime parallele FB , GC ; quindi poichè quelle grandezze che sono doppie di grandezze uguali, sono uguali fra loro, ne segue che il parallelogrammo BL è eguale al quadrato GB . Parimente conducendo AE , BK si dimostrerà che il parallelogrammo CL è eguale al quadrato HC ; e quindi sommando si ha che tutto il quadrato $BDEC$ descritto sul lato BC è eguale alla somma dei quadrati GB , HC descritti sui lati BA , AC , e così resta dimostrato che *in ogni triangolo rettangolo il quadrato descritto sul lato opposto all'angolo retto, ecc. c. d. d.*

In un triangolo rettangolo si chiama *ipotenusa* il lato opposto all'angolo retto, e *cateti* gli altri due lati.

PROPOSIZIONE XLVIII.

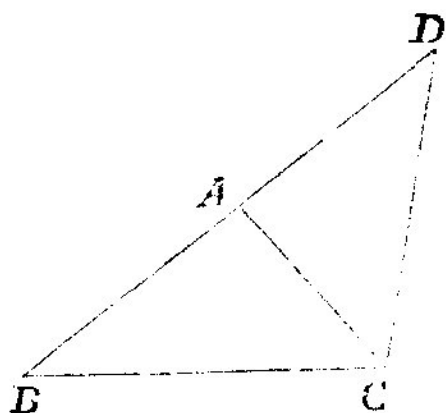
TEOREMA.

Se il quadrato descritto sopra uno dei lati di un triangolo sia eguale alla somma dei quadrati

descritti sugli altri due lati, l'angolo contenuto dagli altri due lati del triangolo sarà retto.

Suppongasi che il quadrato descritto sopra un lato BC del triangolo ABC sia eguale alla somma dei quadrati descritti sugli altri lati BA , AC del triangolo. Dico che l'angolo BAC è retto.

Tirisi dal punto A la AD ad angoli retti sopra la AC , pongasi la AD uguale alla BA , e condúcasi DC . Poichè la DA è uguale alla AB , anche il quadrato della DA sarà uguale al quadrato della AB , e quindi aggiungendo ad ambedue il quadrato della AC , la somma dei quadrati delle DA , AC sarà eguale a quella dei quadrati delle BA , AC . Ma la somma dei quadrati delle DA , AC è eguale al quadrato della DC , perchè l'angolo DAC è retto; la somma dei quadrati delle BA , AC si suppone eguale al quadrato della BC ; adunque il quadrato della DC è uguale al quadrato della BC , e però il lato DC è uguale al lato CB . E poichè nei due triangoli DAB , ACB , anche, la DA è uguale alla AB , e la AC è comune; l'angolo DAC è uguale all'angolo BAC [*prop. 8*], e DAC è retto. Onde anche BAC sarà retto, e quindi *se il quadrato descritto sopra uno dei lati di un triangolo, ecc. c. d. d.*



Esercizi.

1. La somma delle rette condotte da un punto situato nell'interno di un triangolo ai tre vertici è minore della somma dei tre lati e maggiore della metà di quest'ultima somma.

2. I punti equidistanti da due punti dati sono nella retta che biseca ad angolo retto quella che unisce i punti dati.

3. I punti equidistanti da due rette date sono nelle rette che dividono per mezzo gli angoli delle rette date.

4. Se da un punto qualunque della base di un triangolo isoscele si conducono le perpendicolari ai lati, la somma di queste è uguale alla distanza di un termine della base dal lato opposto.

5. Sopra una retta data descrivere un triangolo isoscele, nel quale ciascuno dei lati uguali sia doppio della base.

6. Se due cerchi si segano fra loro, la retta che congiunge i loro punti d'intersezione è bisecata ad angolo retto dalla retta che passa pei centri.

7. Se due punti dati sono ugualmente distanti da ciascun punto di una retta data, questa biseca ad angolo retto la retta che congiunge i due punti dati.

8. Delle rette che da un punto dato si possano condurre ad una retta data la perpendicolare è la minima; quella che è più vicina alla perpendicolare è minore di quella che è più lontana; e due sole rette uguali si possono condurre dal punto dato alla retta, l'una da una parte e l'altra dall'altra parte della perpendicolare.

9. Da un punto dato fuori di una retta data tirare una retta che faccia colla data un angolo dato.

10. Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo opposto all'uno di essi.

11. Descrivere un circolo che passi per due punti dati ed abbia il centro sopra una retta data.

12. Da due punti dati dalla stessa parte di una retta data condurre due rette che s'incontrino sulla retta data e facciano con queste angoli uguali.

13. Intorno ad una retta data, come diagonale, descrivere il quadrato.

14. La differenza di due lati di un triangolo è sempre minore del terzo lato.

15. La somma delle diagonali di un quadrilatero è minore della somma delle quattro rette che congiungono un punto qualunque ai quattro vertici.

16. Costruire un triangolo, essendo dati un lato, un angolo adiacente e la somma o la differenza degli altri due lati.

17. Da un punto dato condurre tre rette di grandezze date, in modo che i loro termini cadano in linea retta e vi determinino due segmenti uguali.

18. Nella figura della *prop.* 5 (EUCL.), se BG , CF si incontrano in H , mostrare che AH divide per mezzo l'angolo BAC .

19. Se una retta, che divide per mezzo l'angolo al vertice di un triangolo, divide per mezzo anche la base, il triangolo è isoscele.

20. Da un punto dato condurre una retta che faccia angoli uguali con due rette date.

21. Per un punto dato condurre una retta che sia ugualmente distante da due altri punti dati.

22. Le rette che dividono per mezzo gli angoli di un triangolo concorrono in un punto.

23. Le rette che bisecano ad angolo retto i lati di un triangolo concorrono in un punto.

24. Se si prolungano due lati di un triangolo, le rette che bisecano i due angoli esterni e quella che biseca il terzo angolo interno concorrono in un punto.

25. Se una retta avente i termini su due rette parallele è divisa per mezzo, ogni altra retta tirata pel punto di divisione fra le due parallele, sarà ivi divisa per mezzo.

- 26. Le diagonali di un parallelogrammo si dividono scambievolmente per mezzo.
- 27. Un rombo è un parallelogrammo, e le sue diagonali si bisecano fra loro ad angolo retto.
- 28. La retta che congiunge i punti medi dei lati non paralleli di un trapezio è uguale alla semisomma dei due lati paralleli.
- 29. Se un parallelogrammo ha le diagonali uguali, esso è rettangolo.
- 30. Da un dato triangolo isoscele segare un trapezio che abbia la stessa base del triangolo e gli altri tre lati uguali fra loro.
- 31. Se si congiungono fra loro i punti medi dei lati di un triangolo, i quattro triangoli risultanti sono uguali.
- 32. Il quadrilatero le cui diagonali si bisechino scambievolmente, è un parallelogrammo.
- 33. Condurre una retta che, se fosse prolungata dividerebbe per mezzo l'angolo di due rette date; e ciò senza prolungare queste fino al loro incontro.
- 34. Condurre una retta DE parallela alla base BC di un triangolo ABC , in modo che DE sia uguale alla somma o alla differenza di BD e CE .
- 35. Se AB è divisa per mezzo in C , e da A , B , C si tirino delle rette parallele a incontrare una retta data in D , E , F , dimostrare che CF è uguale alla semisomma o alla semidifferenza di AD e BE .
- 36. Per un punto dato fra due rette date tirare una retta in modo che i segmenti intercetti fra esso punto e le rette date siano uguali.
- 37. $ABCD$ è un parallelogrammo; per A tirare una retta qualunque e mostrare che la distanza di C da questa retta è uguale alla somma o alla differenza delle distanze di B e D dalla retta medesima.
- 38. Da un punto dato entro l'angolo di due rette date tirare una retta in modo che i segmenti compresi fra esso punto e le rette date siano l'uno doppio dell'altro.
- 39. Di tutti i triangoli che hanno lo stesso angolo al ver-

tice e le cui basi passano per un punto dato, il minimo è quello la cui base è bisecata in questo punto.

— 40. Nella diagonale prolungata di un quadrato trovare un punto dal quale se si tira una retta parallela ad un lato e segante un altro lato prolungato, essa formi colla diagonale prolungata e col lato prolungato un triangolo uguale al quadrato dato.

— 41. Nella figura della *prop.* 5 (EUCL.), se BG , CF si incontrano in H , e se gli angoli FBG , ABC sono uguali, allora l'angolo BHF è doppio dell'angolo ~~ABC~~ BAC .

— 42. Nella figura della *prop.* 1 (EUCL.), se si prolungano CA , CB ad incontrare le circonferenze in D , E , e se F è l'altro punto d'intersezione dei due cerchi, mostrare che D , E , F sono in linea retta.

— 43. Dividere un angolo retto in tre parti uguali.

— 44. Se uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo è triplo dell'altro angolo acuto, dividere in tre parti uguali l'angolo acuto minore.

— 45. Se si prolunga la base di un triangolo isoscele, il doppio dell'angolo esterno supera di due retti l'angolo al vertice.

— 46. Dividere una retta data in tre parti uguali.

— 47. Dividere un triangolo equilatero in nove parti eguali.

— 48. La differenza degli angoli alla base di un triangolo qualunque è doppia dell'angolo contenuto da due rette tirate dal vertice, l'una che bisechi l'angolo al vertice, e l'altra perpendicolare alla base.

— 49. Nella base BC d'un triangolo isoscele ABC prendasi un punto D ; in CA facciasi CE uguale a CD e sia F l'intersezione di ED con AB ; dimostrare che il triplo dell'angolo AEF supera di quattro retti l'angolo AFE .

— 50. Se l'angolo alla base di un triangolo isoscele è la quarta parte dell'angolo al vertice, e se dal vertice di quello si tira la perpendicolare alla base sino ad incontrare il lato opposto prolungato, allora la parte prolungata, la perpendicolare ed il lato rimanente formeranno un triangolo equilatero.

51. ABC è un triangolo rettangolo in A , ed avente l'angolo B doppio di C ; mostrare che il lato CB è doppio del lato AB .

52. Se si dividono per mezzo i tre angoli di un triangolo, ed una delle bisettrici sia prolungata a segare il lato opposto, l'angolo contenuto da questa retta prolungata e da una delle altre due bisettrici è uguale all'angolo contenuto dalla terza bisettrice e dalla perpendicolare calata dal loro punto comune sul lato suddetto.

53. Un quadrilatero nel quale i lati opposti o gli angoli opposti siano uguali è un parallelogrammo.

54. La figura formata da quattro punti presi rispettivamente nei quattro lati di un quadrato dato a distanze uguali dai quattro vertici, è un altro quadrato.

55. Siano AD , AE i quadrati costruiti sui cateti del triangolo rettangolo ABC , e conducansi DF , EF perpendicolari sull'ipotenusa prolungata; allora BC è uguale alla somma di DF , EG , ed il triangolo ABC è uguale alla somma dei triangoli DBF ed ECG .

56. Se si dividono per mezzo due lati opposti di un parallelogrammo, le rette tirate dai punti di divisione ai vertici opposti dividono la diagonale in tre parti uguali.

✚ 57. Data la perpendicolare dal vertice alla base, e data la differenza fra ciascun lato ed il segmento adiacente alla base, costruire il triangolo.

58. Le rette che dividono per mezzo gli angoli di un parallelogrammo formano un parallelogrammo rettangolo, le cui diagonali sono parallele ai lati del parallelogrammo dato.

59. AD , BC sono due rette parallele segate obliquamente da AB e perpendicolarmente da AC ; BED è una retta condotta a segare AC in E in modo che ED sia doppia di AB ; dimostrare che l'angolo ABC è triplo dell'angolo DBC .

60. Adattare in un angolo dato una retta uguale ad una data e parallela ad un'altra data.

61. Ciascuna retta che passa pel punto comune alle diagonali di un parallelogrammo e terminata a due lati oppo-

sti è ivi divisa per mezzo, e divide anche il parallelogrammo in due parti uguali.

62. Per un punto dato condurre una retta in modo che il segmento di essa compreso fra due date rette parallele sia uguale ad una retta data.

— 63. In un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipotenusa è ugualmente distante dai tre vertici.

~ 64. In un triangolo qualunque ABC , se BE , CF sono perpendicolari ad una retta tirata in modo qualunque per A , e se D è il punto di mezzo di BC , dimostrare che $DE = DF$.

65. Se dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo si tirano due rette, l'una a dividere l'ipotenusa per mezzo e l'altra perpendicolare all'ipotenusa medesima, l'angolo di quelle due rette sarà uguale alla differenza degli angoli acuti del triangolo.

66. Trovare il punto nella base di un triangolo, dal quale tirate le rette parallele ai lati sino ad incontrarli, queste riescano uguali.

67. Un trapezio è la metà di un parallelogrammo compreso fra le stesse parallele, la cui base sia uguale alla somma di due lati paralleli del trapezio.

68. Sui lati AB , AC di un triangolo descrivansi i parallelogrammi $ABDE$, $ACFG$, e si prolunghino DE , FG ad incontrarsi in H : la somma di questi parallelogrammi sarà uguale al parallelogrammo contenuto da BC e da una retta uguale e parallela ad AH .

69. Sopra una data base descrivere un triangolo isoscele uguale ad un triangolo dato.

70. Il perimetro di un triangolo isoscele è minore di quello di qualsivoglia altro triangolo uguale descritto sulla stessa base.

71. Di tutti i triangoli descritti sulla stessa base e che hanno lo stesso perimetro, il più grande è l'isoscele.

72. Se uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo è doppio dell'altro, dimostrare che il triangolo equilatero descritto sull'ipotenusa è uguale alla somma dei triangoli equilateri descritti sui cateti.

73. Trasformare un trapezio in un triangolo uguale, con un angolo comune; e quindi mostrare come si può trasformare un poligono qualunque in un triangolo il cui vertice debba essere in un dato angolo del poligono e la base in uno dei lati.

74. Dato un triangolo ABC ed un punto D in AB , costruire un altro triangolo ADE uguale al dato ed avente lo stesso angolo A .

75. Trasformare un triangolo in un altro uguale, la cui altezza sia data.

76. Se si congiungono i punti di mezzo dei lati di un quadrilatero, la figura inscritta è un parallelogrammo uguale alla metà del quadrilatero dato; dimostrare inoltre che le rette congiungenti i punti di mezzo dei lati opposti si bisecano fra loro.

77. Per D , E punti di mezzo dei lati AB , AC di un triangolo, si tirino DF , EF parallele a BE , AB ; mostrare che i lati del triangolo DCF sono uguali alle tre rette condotte dai vertici del triangolo dato ai punti medi dei lati opposti.

78. Dividere per mezzo un triangolo con una retta condotta da un punto dato in un lato.

79. Se un punto qualunque della diagonale di un parallelogrammo si congiunge ai vertici, il parallelogrammo sarà diviso in due paia di triangoli uguali.

80. Per E , punto di mezzo della diagonale BD di un quadrilatero $ABCD$, conducasi FEG parallela ad AC ; mostrare che AG divide la figura in due parti uguali.

81. Se dei quattro triangoli in cui le diagonali dividono un quadrilatero, due opposti sono uguali, il quadrilatero ha due lati opposti paralleli.

82. Le tre rette (mediane) che congiungono i vertici di un triangolo ai punti medi dei lati opposti, concorrono in un punto e dividono il triangolo in tre parti uguali.

83. Ciascuna mediana del triangolo è divisa nel punto d'intersezione in due parti, una delle quali è doppia dell'altra.

84. Se due lati di un triangolo sono dati, il triangolo è massimo quando contengono un angolo retto.

85. I due triangoli formati dalle rette che uniscono un punto preso ad arbitrio dentro un parallelogrammo ai termini di due lati opposti, valgono insieme la metà del parallelogrammo.

86. Se dai termini di uno dei lati obliqui di un trapezio si tirano due rette al punto medio del lato opposto, il triangolo così formato col primo lato è metà del trapezio.

87. Se dai termini della base di un triangolo isoscele si tirano le rette perpendicolari ai lati, la retta che congiunge il loro punto d'intersezione col vertice biseccherà la base ad angolo retto.

88. Nella figura della *prop. 47* (Eucl.), dimostrare che, se si conducono BG e CH , queste rette sono parallele.

89. Nella stessa figura, se DB , EC sono prolungate ad incontrare FG e KH in M , N , i triangoli BFM , CKN sono equiangoli ed uguali al triangolo ABC .

90. Nella stessa figura, se si congiungono GH , KE , FD , ciascuno dei triangoli così formati è uguale al triangolo dato ABC .

91. Nella stessa figura, prolunghinsi FG , KH ad incontrarsi in M ; congiungansi MB , MC , e si prolunghi MA a tagliare BC in L ; mostrare che ML è perpendicolare a BC . (Le tre rette AL , BK , CF concorrono in uno stesso punto).

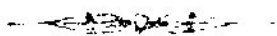
92. Le perpendicolari abbassate dai vertici di un triangolo sui lati opposti concorrono in un punto.

93. Dati due segmenti uguali di due rette date di posizione, trovare un punto che con quelli determini due triangoli uguali in tutte le loro parti.

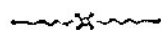
94. Se O è un punto qualunque nel piano di un parallelogrammo $ABCD$, la somma o la differenza dei triangoli ABO , ADO è uguale al triangolo ACO .

Correzione.

Nella Def. 33 (pag. 4) invece di « Il romboide o parallelogrammo, »
si legga « Il romboide ».



LIBRO SECONDO.



Definizioni.

I. Ogni parallelogrammo rettangolo dicesi *contenuto* da quei due lati, che sono intorno all'angolo retto.

II. In ogni parallelogrammo, si chiamerà *gnomone* lo spazio che si ottiene prendendo uno dei parallelogrammi che sono intorno alla diagonale insieme coi due supplementi.



PROPOSIZIONE I.

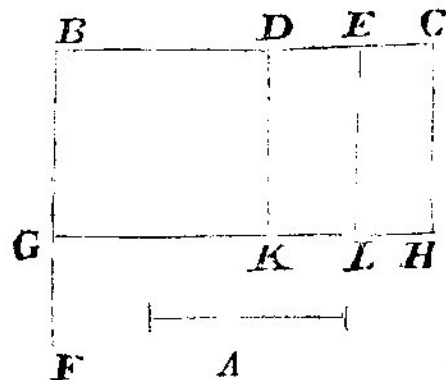
TEOREMA.

Se di due linee rette, l'una sia segata in più parti, il rettangolo contenuto dalle due linee è eguale alla somma dei rettangoli contenuti dalla linea non segata e da ciascuna parte dell'altra.

Siano due linee rette A , BC , e la BC sia segata in qualunque modo ne' punti D , E . Dico il rettangolo contenuto dalle linee rette A , BC essere eguale al ret-

tangolo contenuto dalle A, BD , al rettangolo contenuto dalle A, DE , ed a quello che è contenuto dalle A, CE , presi insieme.

Perciocchè tirisi dal punto B la BF ad angoli retti sopra la BC e pongasi la BG uguale alla A . Poi per G tirisi la GH parallela alla BC , e per i punti D, E, C tirinsi le DK, EL, CH parallele alla BG . Allora il rettangolo BH è la somma dei rettangoli BK, DL, EH . Ma il rettangolo BH è quello che si contiene dalle A, BC , essendo contenuto dalle GB, BC , ed essendo la BG uguale alla A . Così il rettangolo BK è quello che si contiene dalle A, BD ; ed il rettangolo DL è quello che si contiene dalle A, DE . Parimente il rettangolo EH è contenuto dalle A, EC . Onde *se di due linee rette, ecc. c. d. d.*



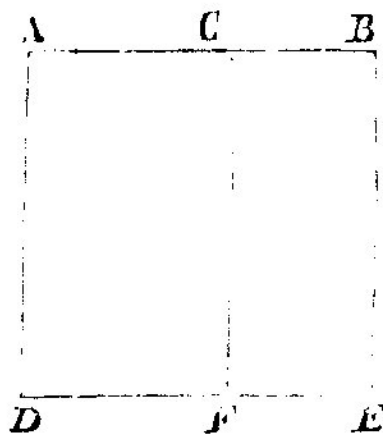
PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se una linea retta sia segata in più parti, la somma dei rettangoli contenuti da tutta la linea e da ciascuna delle parti è eguale al quadrato costruito sopra tutta la linea.

La linea retta AB sia segata in qualsivoglia modo nel punto C . Dico che il rettangolo contenuto dalle AB, BC insieme con quello che si contiene dalle BA, AC sarà eguale al quadrato di AB .

Descrivasi sulla AB il quadrato $ADEB$ [I, 46], e tirisi per C la CF parallela alle AD, BE . Allora



il quadrato AE è eguale alla somma dei rettangoli AF , CE . Ma AE è il quadrato di AB ; il rettangolo AF è contenuto dalle BA , AC ; ed il rettangolo CE è contenuto dalle AB , BC . Dunque *se una linea retta, ecc. c. d. d.*

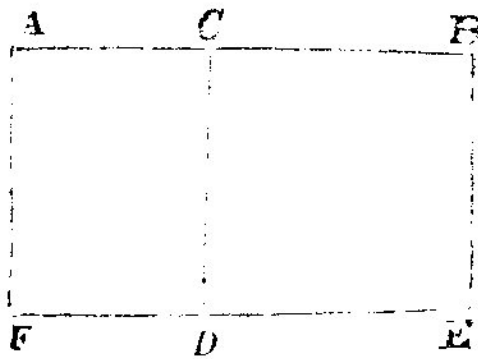
PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se una linea retta sia segata in qualunque modo, il rettangolo contenuto da tutta la linea e da una parte di essa è eguale al rettangolo contenuto dalle due parti preso insieme col quadrato di detta parte.

La linea retta AB sia segata in qualunque modo nel punto C . Dico che il rettangolo delle AB , BC è eguale al rettangolo delle AC , BC , preso insieme col quadrato della BC .

Descrivasi sulla BC il quadrato $CDEB$, prolunghisi ED in F , e per A tirisi la AF parallela alle CD , BE . Allora il rettangolo AE è eguale ai rettangoli AD , CE , presi insieme. Ma il rettangolo AE è contenuto dalle AB , BC ; il rettangolo AD è contenuto dalle AC , CB , ed è DB il quadrato della BC . Dunque *se una linea retta, ecc. c. d. d.*



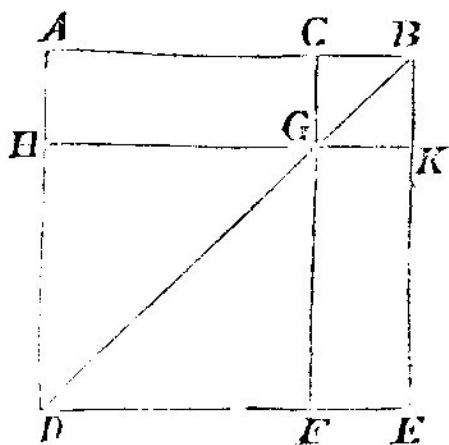
PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se una linea retta sia segata in qualunque modo, il quadrato di tutta la linea è eguale ai quadrati delle parti ed al doppio rettangolo contenuto dalle dette parti, presi insieme.

Sia la linea retta AB divisa in qualunque modo nel punto C . Dico che il quadrato di AB è eguale ai quadrati di AC , CB , ed al doppio del rettangolo contenuto dalle AC , CB .

Descrivasi sulla AB il quadrato $ADEB$, conducasi BD , per C tirisi CGF parallela alle AD , BE e per G tirisi HK parallela alle AB , DE . Perchè la CF è parallela alla AD ed in esse cade la BD , sarà l'angolo esterno BGC uguale all'interno opposto ADB , ma l'angolo ADB è uguale all'angolo ABD , perchè il lato BA è uguale al lato AD [I, 5]. Onde l'angolo CGB è uguale all'angolo GBC , e perciò il lato BC è uguale al lato CG [I, 6]; ma il lato CB è anco uguale al lato GK , e CG a BK ; adunque eziandio GK è uguale a KB e $CGKB$ è equilatero. Dico oltre a ciò essere rettangolo, perchè essendo la CG parallela alla BK , ed in esse cade la CB , la somma degli angoli KBC , GCB è uguale a due retti; ma è retto l'angolo KBC , adunque eziandio GCB è retto, e retti sono gli angoli opposti CGK , GKB . Onde $CGKB$ è rettangolo. Ma fu dimostrato che è ancora equilatero, adunque $CGKB$ è il quadrato [*def.* 30] della BC , e per la medesima ra-



gione HF è il quadrato della HG , cioè della AC , e perchè il rettangolo AG è uguale al rettangolo GE [I, 43], ed AG è quello che si contiene dalle AC , CB , sarà ancora GE uguale a quello che si contiene dalle AC , CB . Ora la somma degli spazi F , CK , AG , GE fa tutto il quadrato $ADEB$, costruito sulla AB . Laonde *se una linea retta, ecc. c. d. d.*

COROLLARIO.

Da questo si vede chiaramente che nel quadrato i parallelogrammi che sono intorno alla diagonale sono anch' essi quadrati.

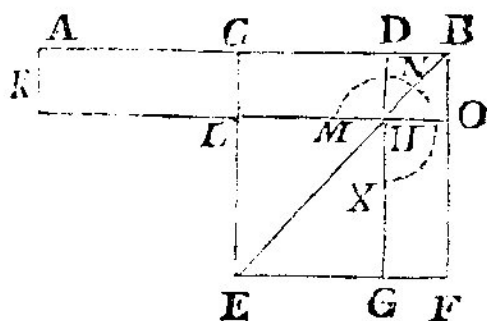
PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

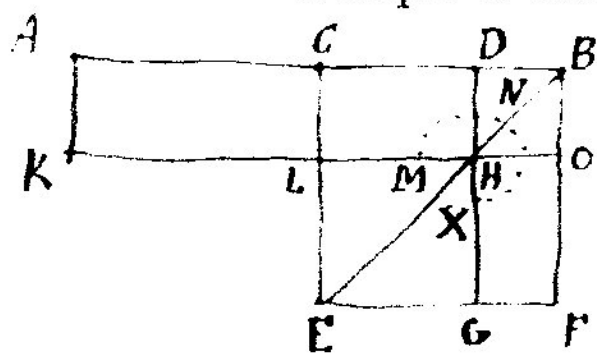
Se una linea retta sia segata in parti eguali, ed in parti disuguali, il rettangolo contenuto dalle parti disuguali, preso insieme col quadrato della linea che è fra i due punti di divisione è eguale al quadrato della metà di tutta la linea.

Sia la linea retta AB segata in parti eguali nel punto C , ed in parti disuguali in D . Dico che il rettangolo contenuto dalle AD , DB , insieme col quadrato di CD , è eguale al quadrato di CB .

Descrivasi sopra BC il quadrato $CEFB$, conducasi BE , per D tirisi la DHG parallela alle CE , BF , per H tirisi KLO parallela alle CB , EF , e finalmente



per A tirisi AK parallela alle CL , BO . Poichè il supplemento CH è eguale al supplemento HF [I, 43], aggiungendo DO si otterrà tutto il rettangolo CO eguale a tutto DF . Ma CO è eguale ad AL [I, 36], perchè AC è eguale a CB . Onde eziandio AL è eguale a DF . Aggiungasi CH ad ambedue; verrà tutto il rettangolo AH eguale alla somma dei due FD , DL . Ma AH è contenuto dalle AD , DB , ed i rettangoli FD , DL formano il gnomone MNX . Adunque il gnomone MNX è eguale al rettangolo contenuto dalle AD , DB . Aggiungendo ad ambedue LG , che è il quadrato fatto sopra CD , abbiamo che il gnomone MNX insieme con LG , ossia il quadrato $CEFB$, costruito sopra CB , è eguale al rettangolo contenuto dalle AD , DB insieme col quadrato di CD . Ma il gnomone MNX ed il quadrato LG formano il quadrato $CEFB$, costruito sulla CB . Adunque il rettangolo delle AD , DB insieme col quadrato di CD è eguale al quadrato di CB . Dunque se una linea retta, ecc. c. d. d.



PROPOSIZIONE VI.

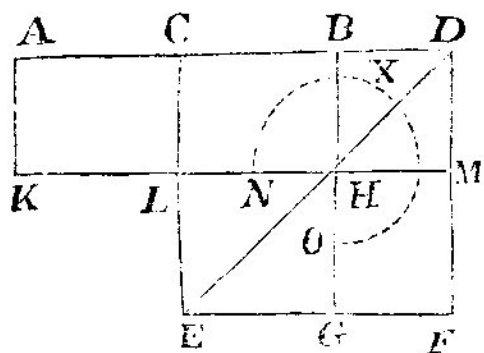
TEOREMA.

Se una linea retta sia segata per metà, e vi si aggiunga un'altra linea per diritto, il rettangolo contenuto da tutta la linea composta e dalla aggiunta, insieme col quadrato della metà della prima retta, è eguale al quadrato costruito sulla linea che è composta della metà della prima retta e della aggiunta.

Seghisi la linea retta AB per metà nel punto C , e aggiungavisi BD per diritto. Dico che il rettangolo

delle AD , BD , insieme col quadrato di BC , è uguale al quadrato della CD .

Descrivasi sulla CD il quadrato $CEFD$, conducasi DE , per B tirisi BHG parallela alle CE , DF , e per H tirisi KLM parallela alle AD , EF , e finalmente per A tirisi AK parallela alle CL , DM . Perchè la AC è eguale alla CB , il rettangolo AL sarà uguale al rettangolo CH [I, 36]. Ma CH è eguale ad HF [I, 43]; onde AL sarà eguale ad HF . Aggiungendo CM ad ambedue, avremo tutto il rettangolo AM che è contenuto dalle AD , DB eguale al gnomone NXO ; similmente aggiungendo LG , che è eguale al quadrato di CB , otterremo il rettangolo delle AD , DB , insieme col quadrato di CB , eguale al gnomone NXO e ad LG . Ma il gnomone NXO ed LG fanno tutto il quadrato $CEFD$, costruito sulla CD . Laonde il rettangolo delle AD , DB insieme col quadrato di BC è eguale al quadrato di CD . Dunque se una linea retta, ecc. c. d. d.



PROPOSIZIONE VII.

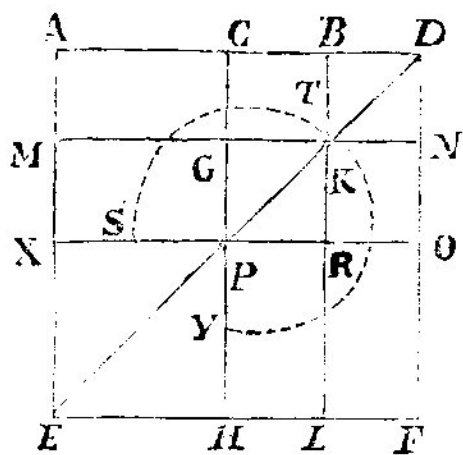
TEOREMA.

Se una linea retta sia segata in qualunque modo, la somma dei quadrati costruiti su tutta la linea e sopra una parte è eguale al doppio rettangolo contenuto da tutta la linea e dalla detta parte, insieme col quadrato dell' altra parte.

Sia la linea retta AB segata in qualunque modo nel punto C . Dico che la somma dei quadrati di AB , BC

dalle AB , BC , insieme col quadrato di AC , è eguale al quadrato della linea composta di AB , BC .

Prolunghisi la linea retta AB in D , e sia la BD uguale alla CB , e sulla AD descrivasi il quadrato $AEFD$, e facciasì la figura doppia. Poichè la CB è uguale alla BD , ed è la CB uguale alla GK [I, 34], e la BD alla KN , sarà eziandio la GK uguale alla KN , e per la medesima ragione la PR è uguale alla RO ; e perchè la CB è uguale alla BD , e la GK alla KN , sarà il rettangolo CK uguale al rettangolo KD , ed il rettangolo GR al rettangolo RN . Ma CK è uguale ad RN , come supplementi del parallelogrammo CO ; onde eziandio KD è eguale a GR , e i quattro rettangoli DK , KC , GR , RN sono uguali fra loro, e però CO è quadruplo del rettangolo CK . Similmente perchè la CB è uguale alla BD , e la BD alla BK cioè alla CG , e la CB alla GK , cioè alla GP , sarà ancora la CG uguale alla GP . Essendo poi la PR uguale alla RO , il rettangolo AG è uguale al rettangolo MP , ed il rettangolo PL al rettangolo RF ; ma MP è uguale a PL , essendo supplementi del parallelogrammo ML : e perciò AG è uguale ad RF . Onde i quattro rettangoli AG , MP , PL , RF sono uguali fra loro, e la loro somma è quadrupla di AG . Dunque il gnomone STY è quadruplo di AK , che è il rettangolo contenuto dalle AB , BC . Aggiungendo XH , che è uguale al quadrato di AC , avremo il quadruplo rettangolo contenuto dalle AB , BC , insieme col quadrato di AC , eguale al gnomone STY ed al quadrato XH , ossia al quadrato $AEFD$ costruito sulla AD . Laonde se una linea retta, ecc. c. d. d.



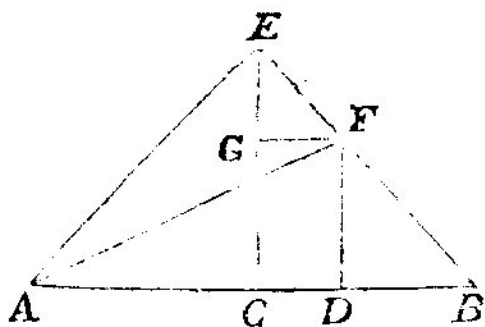
PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se una linea retta sia segata in parti eguali, ed in parti disuguali, la somma dei quadrati costruiti sulle parti disuguali è doppia della somma del quadrato della metà e del quadrato della linea che è fra i due punti di divisione.

Sia la linea retta AB segata in parti uguali nel punto C , ed in parti disuguali in D . Dico che la somma dei quadrati di AD , DB è doppia della somma dei quadrati di AC , CD .

Tirisi dal punto C la CE ad angoli retti sopra la AB , e pongasi uguale alle AC , CB , e si conducano EA , EB . Poi per D tirisi la DF parallela alla CE , e per F tirisi la FG parallela alla AB , e conducasi AF . Poichè la AC è uguale alla CE , sarà l'angolo EAC uguale all'angolo AEC [I, 5], ed essendo retto l'angolo C , gli angoli AEC , EAC faranno insieme un retto [I, 32]. Ma sono uguali fra loro, adunque l'uno e l'altro di essi è la metà d'un retto. E per la medesima ragione l'uno e l'altro degli angoli CEB , EBC è la metà d'un retto, onde tutto l'angolo AEB è retto. E perchè l'angolo GEF è la metà d'un retto, ed è retto EGF , essendo eguale all'interno opposto ECB [I, 29], sarà eziandio il terzo angolo EFG la metà d'un retto [I, 32]. Onde l'angolo GEF è eguale all'angolo EFG , e però il lato EG è eguale al lato GF [I, 6]. Similmente, perchè l'angolo B è la metà d'un retto, ed FDB è retto,



perchè uguale all'interno opposto ECB , sarà BFD la metà d'un retto. Dunque l'angolo B è uguale all'angolo DFB , ed il lato DF al lato DB . E perchè la AC è uguale alla CE , sarà anche il quadrato di AC uguale al quadrato di CE . Ma la somma dei quadrati di AC , CE è eguale al quadrato di EA , per essere l'angolo ACE retto [I, 47]. Adunque il quadrato di EA è doppio del quadrato di AC . Similmente il quadrato di EF è doppio del quadrato di GF , ossia del quadrato di CD . Onde la somma dei quadrati di AE , EF è doppia della somma dei quadrati di AC , CD . Ma la somma dei quadrati di AE , EF è eguale al quadrato di AF , perciocchè l'angolo AEF è retto: adunque il quadrato di AF è doppio della somma dei quadrati di AC , CD . Poi il quadrato di AF è eguale alla somma dei quadrati di AD , DF , ossia AD , DB , essendo l'angolo D retto; dunque la somma dei quadrati di AD , DB è doppia di quella dei quadrati di AC , CD . Laonde *se una linea retta, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE X.

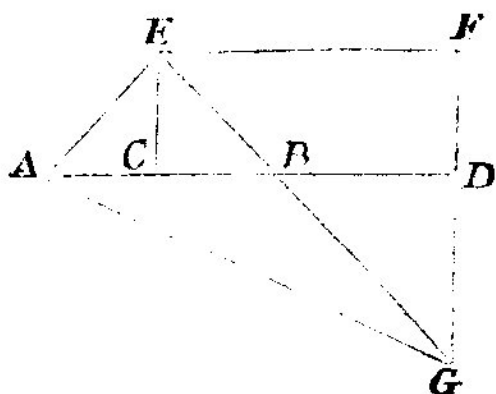
TEOREMA.

Se ad una linea retta segata per mezzo si aggiunga un'altra linea per diritto, il quadrato di tutta la linea composta e il quadrato della aggiunta fanno insieme il doppio del quadrato della metà della linea data e del quadrato costruito sulla linea che è composta di detta metà e della aggiunta.

Sia la linea retta AB segata per mezzo nel punto C , ed aggiungasi ad essa per diritto la linea BD . Dico che

la somma dei quadrati di AD, DB è doppia della somma dei quadrati di AC, CD .

Tirisi dal punto C la CE ad angoli retti sopra la AB , e pongasi uguale alle AC, CB ; e conducansi AE, EB . Poi per E tirisi la EF parallela alla AD , e per D tirisi la DF parallela alla CE . Poichè sopra le parallele EC, FD cade la linea retta EF , gli angoli CEF, EFD presi insieme fanno due retti. Dunque la somma degli angoli FEB, EFD è minore di due retti; e però prolungandosi le EB, FD concorreranno dalla parte BD [*post.* 5]. Prolunghinsi e concorrano nel punto G , e tirisi AG . Perchè la AC è eguale alla CE , eziandio l'angolo AEC sarà uguale all'angolo EAC ; ma l'angolo C è retto, onde l'uno e l'altro di essi EAC, AEC sarà la metà d'un retto [I, 32]. E per la medesima ragione sarà la metà d'un retto l'uno e l'altro degli angoli CEB, EBC . Adunque AEB è retto. E perchè EBC è la metà d'un retto, sarà anche la metà d'un retto DBG , opposto al vertice [I, 15]. Ma BDG altresì è retto, per essere uguale all'alternò DCE [I, 29]; dunque DGB è la metà d'un retto, e però è uguale a DBG : onde il lato BD è uguale al lato DG . Similmente perchè EGF è la metà d'un retto, ed è retto l'angolo F , essendo uguale all'angolo opposto C , sarà FEG la metà d'un retto ed uguale ad EGF ; onde eziandio il lato GF è uguale al lato EF . Essendo dunque la EC uguale alla CA , il quadrato di EC sarà uguale al quadrato di CA ; ma la somma dei quadrati di EC, CA è eguale al quadrato di EA ; dunque il quadrato di EA è doppio del quadrato di AC . Similmente il quadrato di EG è doppio del quadrato di EF , ossia



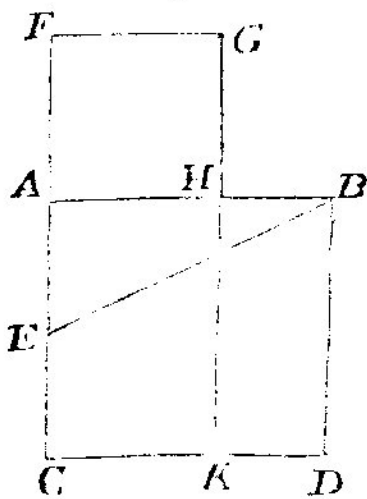
del quadrato di CD . Onde la somma dei quadrati di AE , EG è doppia di quella dei quadrati di AC , CD . Ma la somma dei quadrati di AE , EG è eguale al quadrato di AG , e il quadrato di AG è eguale alla somma dei quadrati di AD , DG , ossia di AD , DB , per la qual cosa la somma dei quadrati di AD , DB è doppia della somma dei quadrati di AC , CD . Laonde *se ad una linea retta, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

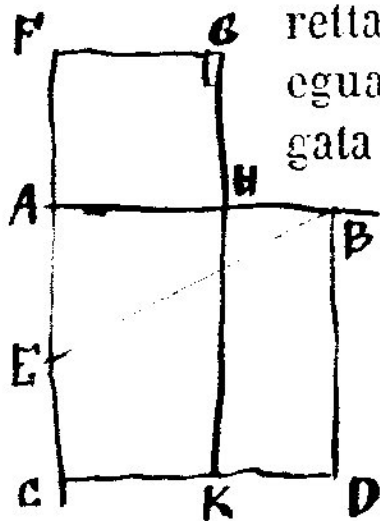
Segare una linea retta data talmente, che il rettangolo contenuto da tutta la linea e da una delle parti sia eguale al quadrato dell' altra parte.

Sia la retta data AB ; bisogna segarla in tal modo che il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una parte sia eguale al quadrato dell' altra parte. Descrivasi sulla AB il quadrato $ABCD$, e seghisi AC per metà nel punto E : e tirisi BE . Poi prolungata CA in F pongasi EF uguale a BE : e sulla AF descrivasi il quadrato $FGHA$ e GH prolunghisi in K . Dico che la AB è segata in H talmente, che il rettangolo delle AB , BH è eguale al quadrato di AH .



Perciocchè essendo la linea AC segata per mezzo in E , se vi si aggiunge AF per diritto, il rettangolo delle CF , FA insieme col quadrato di AE sarà eguale al quadrato di EF [II, 6], ossia al quadrato di EB , ossia alla somma dei quadrati di BA , AE [I, 47]. Sot-

traggasi il comune quadrato di AE ; rimarrà il rettangolo FK eguale al quadrato AD . Sottraggasi AK ad ambedue; rimarrà il quadrato FH eguale al rimanente rettangolo HD . Laonde il rettangolo delle AB , BH è eguale al quadrato di AH : e però la data retta AB è segata in H nel modo richiesto.



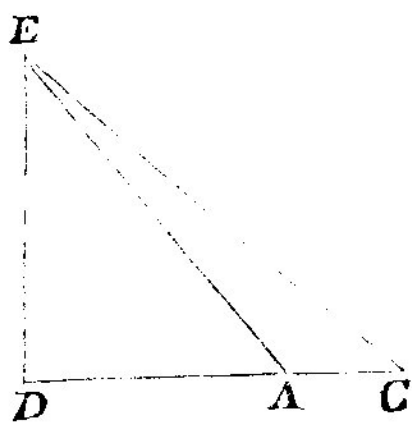
PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso supera di tanto la somma dei quadrati degli altri due lati quanto è il doppio rettangolo contenuto da uno de' lati che sono dintorno all'angolo ottuso, e dalla porzione del prolungamento di esso lato che è compresa fra il vertice dell'angolo ottuso e la perpendicolare abbassata dal vertice opposto.

Sia il triangolo ottusangolo AEC , che abbia l'angolo ottuso EAC , e dal punto E tirisi alla CA prolungata la perpendicolare ED . Dico che il quadrato di CE è tanto maggiore della somma dei quadrati di EA , AC , quanto è il doppio rettangolo delle CA , AD .

Perciocchè essendo la linea CD segata in qualunque modo nel punto A , [II, 4] sarà il quadrato di CD eguale alla somma dei quadrati di CA , AD , e del doppio rettangolo chè è contenuto dalle CA , AD . Aggiungendo il quadrato di DE ; abbiamo che i quadrati



di CD , DE fanno una somma uguale ai quadrati di CA , AD , DE , ed al doppio rettangolo che è contenuto dalle CA , AD . Ma la somma dei quadrati di CD , DE è eguale al quadrato di CE , perciocchè l'angolo D è retto [I, 47], e la somma dei quadrati di AD , DE è eguale al quadrato di AE . Onde il quadrato di CE è eguale ai quadrati di CA , AE ed al doppio rettangolo delle CA , AD . Laonde *in un triangolo ottusangolo il quadrato del lato, ecc. c. d. d.*

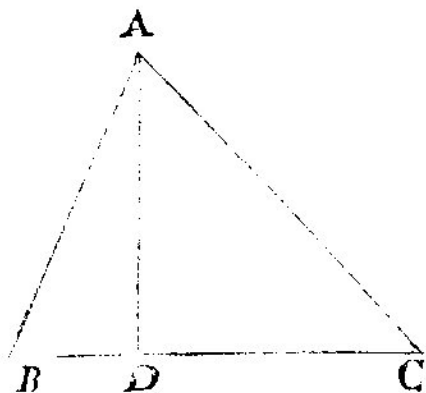
PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

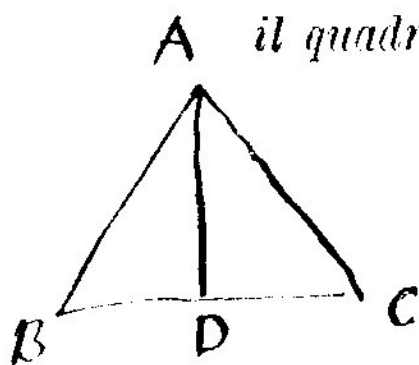
In un triangolo qualunque il quadrato del lato opposto ad un angolo acuto è superato dalla somma dei quadrati degli altri due lati di tanto quanto è il doppio rettangolo contenuto da uno dei lati che sono dintorno all'angolo acuto e dalla porzione di esso lato o del suo prolungamento che è compresa fra il vertice dell'angolo acuto e la perpendicolare abbassata dal vertice opposto.

Sia il triangolo ABC che abbia l'angolo B acuto, e dal punto A alla BC tirisi la perpendicolare AD . Dico che il quadrato di AC è tanto minore della somma dei quadrati di CB , BA , quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle CB , BD .

Perchè essendo la linea retta CB segata in qualunque modo nel punto D , la somma dei quadrati CB , BD è eguale [II, 7] al



doppio rettangolo delle CB, BD , insieme col quadrato di DC . Aggiungendo il quadrato di AD , avremo la somma dei quadrati di CB, BD, DA eguale al doppio rettangolo delle CB, BD insieme coi quadrati di AD, DC . Ma invece dei quadrati di BD, DA si può porre [I, 47] il quadrato di AB , perciocchè l'angolo D è retto, ed invece dei quadrati di AD, DC si può porre il quadrato di AC . Onde i quadrati di CB, BA fanno una somma eguale al quadrato AC , ed al doppio rettangolo contenuto dalle CB, BD . Dunque *in un triangolo qualunque il quadrato del lato, ecc. c. d. d.*

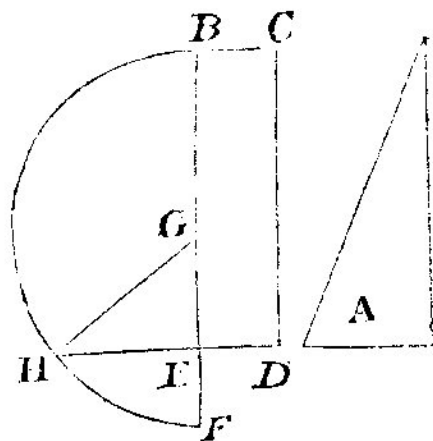


PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Costruire un quadrato eguale ad un dato poligono.

Sia A il dato poligono, bisogna costruire un quadrato eguale al poligono A . Costruiscasi [I, 45] il parallelogrammo rettangolo $BCDE$, eguale al poligono A . Onde se BE è uguale ad ED , sarà fatto quello che si proponeva, perciocchè si sarà costruito il quadrato BD eguale al poligono A . Ma se BE non è uguale ad ED , una di esse sarà maggiore. Sia maggiore BE , e prolunghisi in F , e pongasi EF uguale ad ED ; poi divisa FB per metà nel punto G , dal centro G coll'intervallo GB o GF descrivasi il mezzo cerchio BHF , prolunghisi DE in H , e tirisi GH . Perchè la linea retta BF è divisa in parti uguali nel



punto G , ed in parti disuguali nel punto E , sarà [II, 5] il rettangolo delle BE , EF insieme col quadrato di EG eguale al quadrato di GF , ossia al quadrato di GH . Ma il quadrato di GH è eguale alla somma dei quadrati di HE e di EG [I, 47]; dunque il rettangolo delle BE , EF insieme col quadrato di EG è eguale ai quadrati di HE , EG . Sottraggasi il quadrato di EG ; rimarrà il rettangolo delle BE , EF ossia BD eguale al quadrato di EH , e però il poligono A sarà eguale al quadrato di EH . Laonde, ecc.

Esercizi.

- 1. Se si congiunge con una retta (mediana) il vertice di un angolo acuto d'un triangolo rettangolo col punto di mezzo del lato opposto, il quadrato di quella retta sarà minore del quadrato dell'ipotenusa di tre volte il quadrato della metà del cateto bisecato.
- 2. Se dal punto medio di un cateto di un triangolo rettangolo si abbassa la perpendicolare sull'ipotenusa, la differenza dei quadrati dei segmenti dell'ipotenusa è uguale al quadrato dell'altro cateto.
- 3. In qualunque triangolo, se dal vertice si abbassa la perpendicolare sulla base, la differenza dei quadrati dei lati è uguale alla differenza dei quadrati dei segmenti della base.
- 4. Sia OAB un quadrante di circolo, il cui centro è O , da un punto qualunque C dell'arco si abbassi CD perpendicolare sopra OA od OB , la quale incontri in E il raggio che biseca l'angolo AOB ; dimostrare che la somma dei quadrati di CD e DE è uguale al quadrato di OA .
- 5. Se da un punto qualunque del diametro di un semicerchio si tirano due rette alla circonferenza, una al punto medio dell'arco e l'altra perpendicolare al diametro, la somma dei quadrati di queste due rette è doppia del quadrato del raggio.
- 6. Se A è il vertice di un triangolo isoscele ABC , e CD sia condotta perpendicolarmente ad AB , provare che la somma dei quadrati dei tre lati è uguale alla somma del quadrato di BD , del doppio quadrato di AD e del triplo quadrato di CD .
- 7. Se da un punto qualunque si conducono le perpendicolari su tutti i lati di un poligono, la somma dei quadrati dei segmenti non contigui dei lati è uguale alla somma dei quadrati degli altri segmenti.
- 8. Se dal vertice di uno degli angoli acuti di un triangolo

rettangolo si tira una retta sino al lato opposto, la somma dei quadrati di questo lato e di quella retta è uguale alla somma dei quadrati dell'ipotenusa e del segmento del lato adiacente all'angolo retto.

— 9. Descrivere un quadrato uguale alla differenza di due quadrati dati.

— 10. Dividere, quando sia possibile, una retta data in due parti, in modo che la somma dei loro quadrati sia uguale ad un quadrato dato.

— 11. Dal punto medio D del lato AC di un triangolo equilatero ABC , condotta DE perpendicolare a BC , dimostrare che il quadrato di BD è tre quarti del quadrato di BC , e che la retta BE è tre quarti di BC .

— 12. Se dal vertice A di un triangolo rettangolo ABC , si abbassa AD perpendicolare sull'ipotenusa, dimostrare che i rettangoli di BC e BD , di BC e CD , di BD e CD sono rispettivamente uguali ai quadrati di AB , AC , AD .

— 13. Prolungare una retta data in modo che il rettangolo contenuto dalla intera retta prolungata e dalla retta data sia uguale ad un quadrato dato.

— 14. Se sul raggio di un cerchio si descrive un semicerchio e si conduce una perpendicolare al diametro comune, il quadrato della corda del cerchio maggiore, compresa fra il termine del diametro ed il punto di sezione della perpendicolare, sarà doppio del quadrato della corrispondente corda nel cerchio minore.

— 15. Dividere una retta in due punti equidistanti dai suoi estremi, in modo che il quadrato della parte media sia uguale alla somma dei quadrati delle estreme; e dimostrare che allora il quadrato dell'intera retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti estreme e del doppio rettangolo dell'intera retta e della parte media.

— 16. Dividere una retta in due parti in modo che la somma dei quadrati dell'intera retta e di una parte sia uguale al doppio quadrato dell'altra parte; e dimostrare che allora il quadrato della parte maggiore è uguale al doppio rettangolo dell'intera retta e della parte minore.

17. Dividere una retta in due parti in modo che la somma de' loro quadrati sia la più piccola possibile.

18. Dimostrare che la somma dei quadrati di due rette non è mai minore del doppio loro rettangolo, e che la differenza dei loro quadrati è uguale al rettangolo contenuto dalla loro somma e dalla loro differenza.

19. $ABCD$ è un rettangolo, E un punto qualunque in BC , ed F in CD ; dimostrare che il rettangolo $ABCD$ è uguale a due volte il triangolo AEF insieme col rettangolo delle BE, DF .

20. Se una retta è divisa in due parti uguali ed anche in due parti disuguali, la somma dei quadrati delle due parti disuguali è uguale a due volte il rettangolo contenuto da queste parti, insieme con quattro volte il quadrato della retta compresa fra i due punti di divisione.

✚ 21. Se dal vertice di uno degli angoli uguali di un triangolo isoscele si cala una perpendicolare sul lato opposto, il doppio rettangolo contenuto da questo lato e dal segmento di esso adiacente alla base è uguale al quadrato della base.

22. A, B, C, D sono quattro punti nella stessa retta. E è un punto della retta medesima, ugualmente distante dai punti medi dei segmenti AB, CD ; F è un altro punto in AD ; dimostrare che la somma dei quadrati di AF, BF, CF, DF supera la somma dei quadrati di AE, BE, CE, DE , di quattro volte il quadrato di EF .

23. Se i termini di una corda qualunque di un cerchio si congiungono ad un punto qualunque del diametro parallelo alla corda, la somma dei quadrati delle congiungenti è uguale alla somma dei quadrati dei segmenti del diametro.

24. In un triangolo isoscele ABC , se AD congiunge il vertice ad un punto qualunque della base, provare che la differenza dei quadrati di AB e AD è uguale al rettangolo di BD e CD .

25. Se nella fig. della prop. 47, *Eucl.*, I, si uniscono i vertici, la somma dei quadrati dei sei lati della figura risultante è uguale ad otto volte il quadrato dell'ipotenusa.

26. Se un angolo di un triangolo è quattro terzi di un

retto, il quadrato del lato opposto è uguale alla somma dei quadrati dagli altri due lati insieme col rettangolo contenuto da questi.

27. Se nel triangolo ABC , ciascuno degli angoli B , C è doppio dell'angolo A , il quadrato di AB è uguale al quadrato di BC insieme al rettangolo di AB e BC .

28. In un triangolo qualunque ABC , se BP , CQ sono condotte perpendicolarmente ad AC , AB , prolungate se è necessario, il quadrato di BE è uguale al rettangolo di AB , BQ , insieme col rettangolo di AC , CP .

— 29. Se il vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo si congiunge ai vertici opposti del quadrato descritto sull'ipotenusa la differenza dei quadrati delle congiungenti è uguale alla differenza dei quadrati dei due cateti.

30. In un triangolo qualunque la somma dei quadrati di due lati è doppia della somma del quadrato della metà della base e del quadrato della retta che congiunge il punto medio della base al vertice opposto.

31. Se DB divide per mezzo in D il lato AC del triangolo ABC , e se AE è perpendicolare a BC , dimostrare che il quadrato di BD è uguale alla somma o alla differenza del quadrato della metà di AC e del rettangolo di BE , BC , secondo che E sia in BC o nel prolungamento di BC .

32. Un rettangolo qualunque è la metà del rettangolo contenuto dalle diagonali dei quadrati de' suoi lati.

33. Se un punto qualunque preso dentro ad un rettangolo si congiunge ai vertici, la somma dei quadrati delle congiungenti, condotte a due vertici opposti, è uguale alla somma dei quadrati delle altre due.

34. La somma dei quadrati delle diagonali di un parallelogrammo è uguale alla somma dei quadrati dei quattro lati.

35. La somma dei quadrati delle diagonali di un quadrilatero è superata dalla somma dei quadrati dei lati di quattro volte il quadrato della retta che unisce i punti medi delle diagonali.

36. La somma dei quadrati delle diagonali di un quadrilatero è doppia della somma dei quadrati delle due rette congiungenti i punti medi dei lati opposti.

37. La somma dei quadrati dei lati di un triangolo è tripla della somma dei quadrati delle distanze dei vertici dal punto comune alle mediane.

38. Se due lati opposti di un quadrilatero sono divisi per metà, la somma dei quadrati degli altri due lati insieme coi quadrati delle diagonali è uguale alla somma dei quadrati dei lati bisecati insieme col quadruplo del quadrato della retta che unisce i punti di bisezione.

39. La somma dei quadrati delle diagonali di un trapezio è uguale alla somma dei quadrati de' suoi lati non paralleli insieme col doppio rettangolo contenuto dai lati non paralleli.

40. Se BD , CE sono i quadrati descritti sui lati AB , AC di un triangolo, mostrare che la somma dei quadrati di BC e DE è doppia della somma dei quadrati di AB ed AC .

41. Se si descrivono i quadrati sui lati di un triangolo qualunque, e si congiungono i vertici di questi quadrati, la somma dei quadrati dei lati della figura esagona così ottenuta sarà uguale a quattro volte la somma dei quadrati dei lati del triangolo.

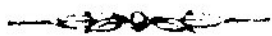
42. Presi due punti nel diametro di un cerchio, egualmente distanti dal centro, la somma dei quadrati delle due rette condotte da questi punti ad un punto qualunque della circonferenza sarà costante.

43. L'ipotenusa AB di un triangolo rettangolo ABC sia divisa in tre parti uguali, ne' punti D , E ; provare che congiunte CD , CE , la somma dei quadrati dei lati del triangolo CDE è due terzi del quadrato di AB .

44. Dividere una retta data in due parti contenenti un rettangolo uguale ad un quadrato dato.

45. Se un triangolo è uguale ad un quadrato, il perimetro del triangolo è maggiore del perimetro del quadrato.

46. $ABCD$ è un quadrilatero, E il punto medio della retta congiungente i punti medi delle diagonali; se col centro E si descrive un cerchio, e sia P un punto qualunque della circonferenza, dimostrare che la somma dei quadrati delle rette PA , PB , PC , PD è uguale alla somma dei quadrati delle rette EA , EB , EC , ED insieme con quattro volte il quadrato di EP .



LIBRO TERZO.

Definizioni.

I. I cerchi uguali sono quelli i cui diametri ovvero i cui raggi sono uguali.

II. Una linea retta si dice *tangente* al cerchio quando, incontra in un punto la circonferenza, e prolungata oltre il punto d'incontro non la taglia.

III. Due cerchi si dicono *tangenti* quando le loro circonferenze s'incontrano senza tagliarsi.

Nel concetto di EUCLIDE due linee si dicono *tangenti* l'una all'altra quando s'incontrano senza tagliarsi; vale a dire quando si può lungo ciascuna linea attraversare il punto d'incontro senza attraversare l'altra linea.

IV. Le linee rette nel cerchio si dicono essere ugualmente *distanti* dal centro, quando le perpendicolari tirate dal centro sopra quelle sono uguali.

V. E quella linea si dice essere più distante dal centro, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

VI. Il *segmento* di cerchio è la figura contenuta

da una retta (*corda*) e da una delle porzioni (*archi*) nelle quali la circonferenza è divisa dalla retta.

VII. L' *angolo del segmento* è quello che è compreso dalla corda e dall' arco.

VIII. L' *angolo nel segmento* è quello che è contenuto da due linee rette tirate da un punto dell' arco ai termini della corda di detto segmento.

IX. Quando le linee rette che contengono un angolo abbracciano un arco, si dice che l' angolo *insiste* su quell' arco.

X. Il *settore* del cerchio è la figura contenuta da due raggi e dall' arco da essi compreso.

XI. Segmenti *simili* di due cerchi sono quelli che contengono angoli uguali, ovvero quelli sui quali insistono angoli (al centro) uguali.

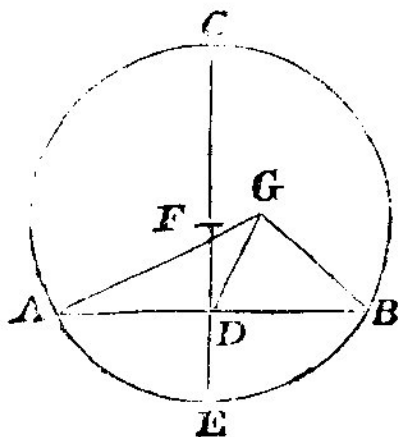
PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

Trovare il centro d' un dato cerchio.

Sia ABC il cerchio dato, di cui bisogna trovare il centro. Tirisi in esso una corda AB , comunque si voglia, e seghisi per mezzo nel punto D [I, 10], poi dal punto D tirata la DC ad angoli retti sopra la AB [I, 11], prolunghisi fino in E [*post.* 2], e seghisi la CE per mezzo nel punto F . Dico il punto F essere centro del cerchio ABC .

Perciocchè se il centro non



è F , sia s' egli è possibile un altro punto G , e condúcansi GA , GD , GB . Poichè AD è uguale alla DB , ed è comune la DG , saranno le due AD , DG uguali alle due GD , DB , l' una all' altra, e la base GA è uguale alle base GB , partendosi dal centro G [I, *def. 15*]. Dunque l' angolo ADG è uguale all' angolo GDB [I, 8]. Ma quando una linea retta stando sopra un' altra fa gli angoli conseguenti fra loro uguali, questi sono amendue retti [I, *def. 10*], e perciò l' angolo GDB è retto. Ma è retto ancora FDB . Adunque l' angolo FDB sarebbe uguale all' angolo GDB [*post. 4*], cioè il maggiore al minore, che è impossibile. Onde il punto G non è centro del cerchio ABC . Dimostreremmo parimente non essere altro punto fuori che F . Adunque F è il centro del cerchio ABC ; che bisognava trovare.

COROLLARIO.

Da questo si comprende chiaramente, che se nel cerchio una linea retta sega una corda per mezzo e ad angoli retti, il centro del cerchio è nella retta segante.

PROPOSIZIONE II.

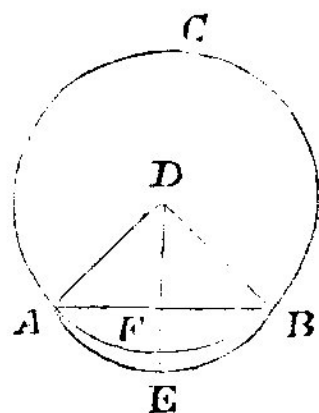
TEOREMA.

Se nella circonferenza del cerchio si piglino due punti, qualsivogliano, la linea retta che li congiunge sarà tutta dentro al cerchio.

Sia il cerchio ABC , e nella circonferenza di esso piglinsi due punti quali si vogliano A , B . Dico che la

linea retta tirata dal punto A al punto B cade dentro al cerchio.

Perciocchè s'egli è possibile cada di fuori, come AEB , e preso il centro D del cerchio ABC [III, 1], conducansi DA , DB : e prolunghisi DF in E . Essendo la DA uguale alla DB , sarà anche l'angolo DAE uguale all'angolo DBE [I, 5]; e perchè è prolungato un lato del triangolo DAE , cioè AEB , sarà l'angolo DEB maggiore dell'angolo DAE [I, 16]. Ma l'angolo DAE è uguale all'angolo DBE , onde l'angolo DEB è maggiore dell'angolo DBE . All'angolo maggiore è opposto il maggior lato [I, 19], adunque la DB è maggiore della DE : ma la DB è uguale alla DF , e perciò la DF sarebbe maggiore della DE ; cioè la minore della maggiore, il che è impossibile. Onde la linea retta tirata dal punto A al punto B non cadrà fuori del cerchio. Dimostreremmo parimente che nè anche cade in essa circonferenza, onde è necessario che sia tutta di dentro. Dunque *se nella circonferenza, ecc. c. d. d.*



PROPOSIZIONE III.

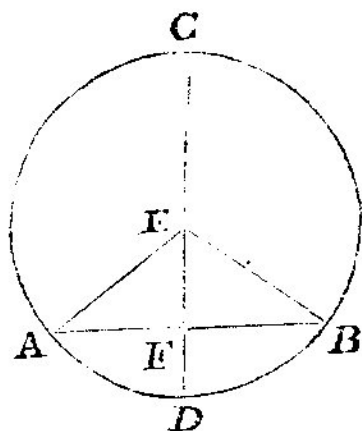
TEOREMA.

Se una linea retta tirata nel cerchio per il centro seghi per mezzo una corda che non passa per il centro, la segnerà ad angoli retti; e se la sega ad angoli retti, la segnerà per mezzo.

Sia il cerchio ABC , e la linea retta CD , tirata in esso per il centro, seghi per mezzo in F la corda AB

che non passa per il centro. Dico che la sega ad angoli retti.

Pigliasi il centro E del cerchio ABC [III, 1], e conducansi EA , EB . Perchè la AF è uguale alla FB , la FE è comune e la base EA è uguale alla base EB , l'angolo AFE sarà uguale all'angolo BFE [I, 8]. Dunque [I, *def. 10*] ciascuno degli angoli AFC , BFE è retto, e perciò la linea retta CD è perpendicolare alla retta AB .



Ora la CD seghi la AB ad angoli retti. Dico che eziandio la sega per mezzo, cioè che la AF è uguale alla FB .

Fatte le medesime costruzioni, perchè la EA raggio del cerchio è uguale alla EB [I, *def. 15*], sarà anche l'angolo EAF uguale all'angolo EBF [I, 5], e l'angolo AFE retto è uguale al retto BFE [*post. 4*]. Dunque i due triangoli CAF , EBF hanno due angoli uguali a due angoli, e comune il lato EF che è opposto ad uno degli angoli uguali; e perciò avranno gli altri lati uguali agli altri lati [I, 26], e la AF sarà uguale alla FB . Adunque *se una linea retta tirata nel cerchio, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE IV.

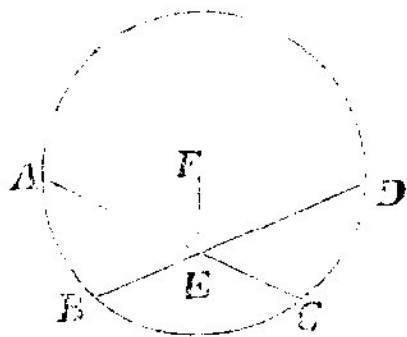
TEOREMA.

Se due linee rette nel cerchio non passanti per il centro si seghino fra loro, non si segheranno mai entrambe per metà.

Sia il cerchio AB , CD , e seghinsi in esso due linee rette che non passano per il centro, cioè AC , BD , nel

punto E . Dico che non si segano entrambe per metà.

Perciocchè, se sia possibile, seghinsi per mezzo di maniera che la AE sia uguale alla EC , e la BE alla ED . Piglisi poi il centro F del cerchio $ABDC$ [III, 4], e tirisi EF . Poichè la linea retta FE tirata per il centro sega per mezzo una corda AC che non passa per il centro, la segnerà ad angoli retti [III, 3]; onde l'angolo FEA sarà retto. Similmente perchè la linea retta FE sega per mezzo una corda BD che non passa per il centro, la segnerà ad angoli retti, e perciò l'angolo FEB sarà retto. Sarebbe dunque l'angolo FEA uguale all'angolo FEB , cioè il minore al maggiore, che è impossibile. Dunque le AC , BD non si segano entrambe per mezzo: onde *se nel cerchio due linee rette, ecc. c. d. d.*



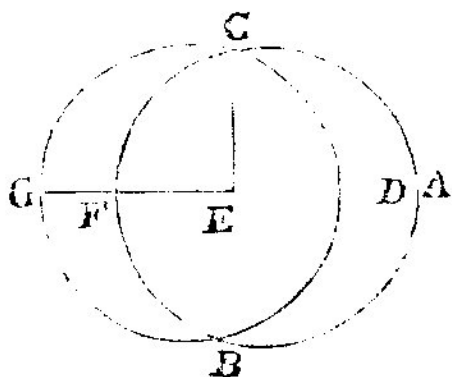
PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se due cerchi si seghino fra loro, non avranno il medesimo centro.

Due cerchi ABC , CDG seghinsi fra loro ne' punti B , C . Dico che non hanno il medesimo centro.

Sia E , se esser può, il centro comune: conducasi EC , e tirisi EFG in qualsivoglia modo. Poichè E è centro del cerchio ABC , la CE sarà uguale alla EF . Oltre a ciò, perchè E è centro del cerchio CDG , sarà la CE uguale alla EG , adunque la EF sarebbe uguale alla EG ,



cioè la minore alla maggiore, che non può essere; e perciò il punto E non è centro dei cerchi ABC , CDG . Laonde *se due cerchi si seghino fra loro, ecc. c. d. d.*

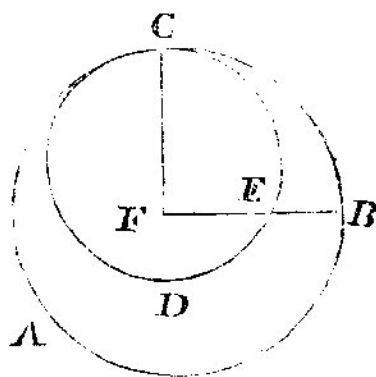
PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due cerchi siano tangenti fra loro internamente, non avranno il medesimo centro.

Due cerchi ABC , CDE siano tangenti internamente nel punto C . Dico che essi non hanno il medesimo centro.

Sia F , se esser può, il centro comune; si unisca F con C , e tirisi FEB in qualunque modo. Perchè F è centro del cerchio ABC , la CF sarà uguale alla FB , ed essendo F centro del cerchio CDE , la CF sarà uguale alla FE . Adun-



que la FE sarebbe uguale alla FB , cioè la minore alla maggiore, che non può essere. Laonde il punto E non è centro dei cerchi ABC , CDE . Dunque *se due cerchi siano tangenti fra loro, ecc. c. d. d.*

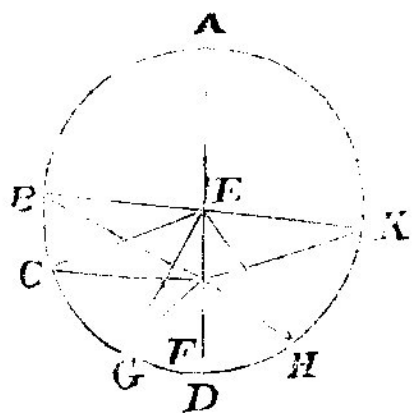
PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se nel diametro del cerchio si pigli un punto che non sia centro del cerchio, e da esso si tirino alla circonferenza alcune linee rette, la massima sarà quella nella quale è il centro; e la minima sarà

la parte rimanente del diametro. Delle altre, la più vicina a quella che passa per il centro sempre è maggiore della più lontana. E solamente due rette uguali cadranno dal medesimo punto sulla circonferenza dall' una e l' altra parte della minima.

Sia il cerchio $ABCD$, il cui diametro è AD : ed in essa AD piglisi un punto F , che non sia il centro: e sia il centro del cerchio E : e dal punto F si tirino alcune linee rette alla circonferenza $ABDC$. E siano FB , FC , FG . Dico la FA essere maggiore di tutte, e la FD minore: e delle altre, la FB maggiore della FC , e la FC maggiore della FG .



Conducasi BE , CE , GE . Perchè la somma di due lati di ciascun triangolo è maggiore del lato rimanente [I, 20], sarà la somma delle BE , EF maggiore della BF . Ma la AE è uguale alla EB ; adunque le BE , EF danno una somma uguale alla AF , e perciò la AF è maggiore della FB . Oltre a ciò, perchè la BE è uguale alla EC , la FE comune, e l'angolo BEF è maggiore dell'angolo CEF , sarà la base BF maggiore della base FC [I, 24]. Per la medesima ragione ancor la CF è maggiore della FG . E perchè la somma delle GF , FE è maggiore della EG , e la GE è uguale alla ED , sarà la somma delle GF , FE maggiore della ED . Sottraggasi la comune EF ; allora la rimanente GF è maggiore della rimanente FD . Onde la maggiore di tutte è FA , e la minore FD ; e la BF è maggiore della FC , e la CF maggiore della FG .

Dico che dal punto F si possono abbassare due sole

linee rette uguali alla circonferenza $ABCD$ dall' una e l' altra parte della minore FD . Costruiscasi nella linea EF , e nel punto dato in essa E l' angolo FEH uguale all' angolo GEF [I, 23], e congiungasi F con H . Poichè la GE è uguale alla EH , e la EF è comune, e l' angolo GEF , uguale all' angolo HEF , la base FG sarà uguale alla base FH [I, 4]. Dico che da F nel cerchio non si può condurre alla circonferenza altra retta uguale alla FG ; sia, se esser può una tal retta FK . Essendo la FK uguale alla FG , e la FH uguale alla FG , sarà eziandio la FK uguale alla FH , cioè la più vicina a quella che passa per il centro sarebbe uguale alla più lontana, che non può essere. Laonde dal punto F non si può tirare che una sola linea retta alla circonferenza, uguale alla GF ; dunque *se nel diametro del cerchio, ecc. c. d. d.*

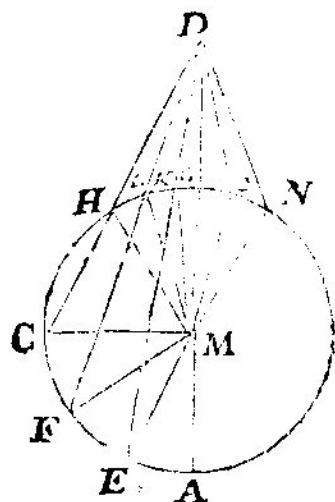
PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se fuori del cerchio si pigli un punto, e da quello si tirino più linee rette alla circonferenza, una delle quali passi per il centro, e l' altre in qualsivoglia modo; di quelle che cadono sopra la circonferenza concava la massima sarà quella che passa per il centro, e dell' altre la più vicina a quella che passa per il centro sarà sempre maggiore della più lontana. Ma di quelle che cadono sopra la circonferenza convessa, la minima sarà quella che continuata passa pel centro, e delle altre la più vicina alla minima sarà minore della più lontana:

e due sole rette uguali potranno tirarsi dal punto sulla circonferenza, dall' una e l' altra parte della minima.

Sia il cerchio ABC , e piglisi fuori del cerchio un punto D , e da quello tirinsi nel cerchio alcune linee rette DA , DE , DF , DC , e sia la DA quella che passa per il centro. Dico che di quelle che cadono nella circonferenza concava $AEFC$, la DA che passa per il centro è la massima: e la DE è maggiore della DF , e la DF maggiore della DC . E di quelle che cadono nella circonferenza convessa $HLKC$ la minima è la DG che prolungata passa pel centro, e la più vicina alla minima DG è sempre minore della più lontana, cioè la DK minore della DL , e la DL minore della DH .



In fatti trovisi il centro del cerchio ABC [III, 1], che sia M : e conducansi ME , MF , MC , MK , ML , MH . Poichè la AM è uguale alla ME , aggiungendo ad ambedue la MD , avremo la AD uguale alla somma delle EM , MD . Ma questa somma è maggiore della ED [I, 20]: adunque eziandio la AD è maggiore della ED . Oltre a ciò, perchè la ME è uguale alla MF , saranno le EM , MD uguali alle MF , MD , e l'angolo EMD è maggiore dell'angolo FMD ; onde la base ED sarà maggiore della base FD [I, 24]. Dimostreremmo similmente la FD essere maggiore della CD . Adunque la maggiore di tutte è la DA , e la DE è maggiore della DF , e la DF maggiore della DC .

Poi essendo la somma delle MK , KD maggiore

della MD [I, 20] e la MG uguale alla MK , sarà la rimanente KD maggiore della rimanente GD . Laonde la GD è minore della DK , e perciò la GD è la minima.

E perchè dai termini di un lato del triangolo MLD , cioè di MD , si sono tirate dentro due linee rette MK , KD , sarà la somma delle MK , KD minore della somma delle ML , LD [I, 21]; delle quali la MK è uguale alla ML ; dunque la rimanente DK è minore della rimanente DL . Dimostreremmo parimente la DL esser minore della DH , e perciò la DK è minore della DL , e la DL minore della DH .

Dico eziandio che due sole rette uguali si possono tirare dal punto D alla circonferenza, dall'una e l'altra parte della minore. Costruiscasi nella linea retta MD , e nel punto M dato in essa, l'angolo DMB uguale all'angolo KMD , e congiungasi D con B . Perchè la MK è uguale alla MB , la MD comune, e l'angolo KMD uguale all'angolo BMD , sarà la base DK uguale alla base DB . Dico che dal punto D niun'altra retta si può tirare alla circonferenza uguale alla DB . Tirisi, se esser può, la DN . Perchè la DK è uguale alla DN , ed è uguale alla DB , sarà la DB uguale alla DN , cioè la più vicina alla minima sarebbe uguale alla più lontana, che si è dimostrato impossibile. Laonde dal punto D non si potranno abbassare alla circonferenza ABC più di due linee rette uguali, dall'una e l'altra parte della minima GD . Dunque *se fuori del cerchio si pigli un punto, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE IX.

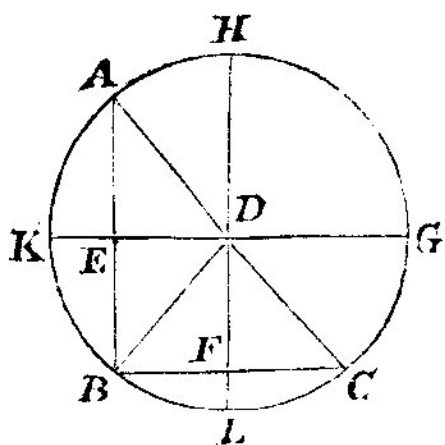
TEOREMA.

Se da un punto preso dentro al cerchio si possono condurre alla circonferenza più di due li-

nee rette uguali, quel punto sarà il centro del cerchio.

Sia il cerchio ABC , e piglisi dentro di esso il punto D , dal quale siano tirate nel cerchio più di due linee rette uguali, come DA , DB , DC . Dico che il punto D è centro del cerchio ABC .

Tirinsi AB , BC , e seghinsi per mezzo nei punti E , F [I, 10]; e condotte le ED , DF , prolunghinsi nei punti G , K ; H , L .



Poichè la AE è uguale alla EB , la ED comune, e la base DA è uguale alla base DB , l'angolo AED sarà uguale all'angolo BED [I, 8]. E perciò amendue gli angoli AED , BED sono retti, e la GK segando per mezzo la AB , la sega ancor ad angoli retti [III, 3]. E perchè se nel cerchio una linea retta sega per mezzo una corda e ad angoli retti, il centro del cerchio è nella linea segante [III, 1 *cor.*], sarà nella GK il centro del cerchio ABC , e per la medesima ragione il centro del cerchio ABC è nella HL . Le linee rette GK , HL non hanno alcun punto comune fuori che D . Adunque D è il centro del cerchio ABC ; laonde *se da un punto preso dentro al cerchio, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE X.

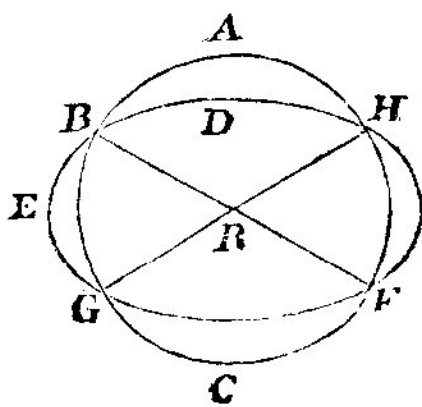
TEOREMA.

Due cerchi non si segano fra loro in più di due punti.

Il cerchio ABC seghi il cerchio DEF in più di due punti, cioè in B , G , F , H : si trovi il centro del cer-

chio ABC , che sia R [III, 1]: e conducansi RB, RG, RF .

Perchè dentro al cerchio DEF si è preso un punto R , dal quale arrivano alla circonferenza più di due linee rette uguali RB, RF, RG , il punto R sarà centro del cerchio DEF [III, 9]. Ma R è centro del cerchio ABC ; sarà dunque il medesimo punto R centro di due cerchi che si segano, il che non può essere [III, 5]. Laonde *due cerchi non si segano, ecc. c. d. d.*



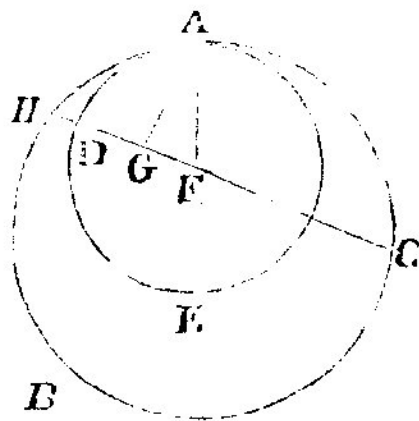
PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Se due cerchi sono tangenti internamente, la linea retta che congiunge i loro centri prolungata passerà pel punto di contatto.

Due cerchi ABC, ADE siano tangenti internamente nel punto A ; trovisi il centro del cerchio ABC , che sia F [III, 1], ed il centro del cerchio ADE , che sia G . Dico che la linea retta tirata dal punto F al punto G prolungata passa pel punto A .

Se è possibile, la retta FG non passi per A , ma seghi le circonferenze in D, H , e congiungasi A con F e con G .



Perchè la somma delle AG, GF è maggiore della FA , cioè della FH , sottraendo la comune FG , rimarrà AG maggiore della GH . Ma la AG è uguale alla GD , onde

la GD sarebbe maggiore della GH , cioè la minore della maggiore, che è impossibile. Adunque *se due cerchi siano tangenti internamente, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XII.

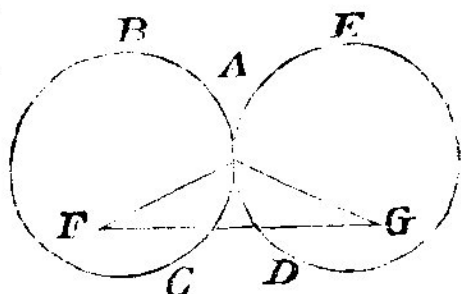
TEOREMA.

Se due cerchi siano tangenti esternamente, la linea retta che congiunge i loro centri passerà per il punto di contatto.

Due cerchi ABC , ADE siano tangenti esternamente nel punto A : e trovinsi il centro del cerchio ABC che sia F , ed il centro del cerchio ADE cioè G [III, 1]. Dico che la linea retta tirata dal punto F al punto G passa per A .

Non passi per A , ma se è possibile, incontri le circonferenze in C , D : e conducansi FA , AG .

Poichè F è centro del cerchio ABC , sarà la AF uguale alla FC ; e perchè G è centro del cerchio ADE , la AG sarà uguale alla GD . Adunque le FA , AG sono uguali alle FC , DG ; e tutta la FG sarebbe maggiore della somma delle FA , AG ; ma ciò è impossibile [I, 20]; adunque *se due cerchi siano tangenti esternamente, ecc. c. d. d.*



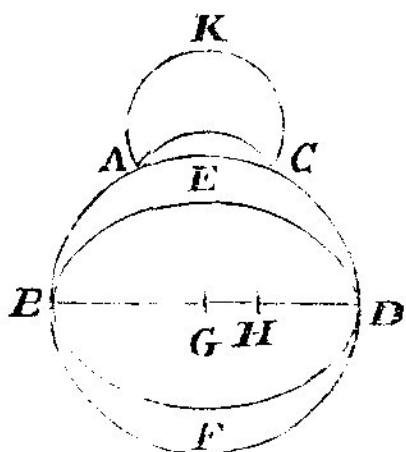
PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Un cerchio non può essere tangente nè internamente nè esternamente a un altro cerchio in più di un punto.

Il cerchio $ABDC$, se è possibile, sia tangente al cerchio $EBFD$ prima internamente in più di un punto, cioè in B , D : e trovisi il centro del cerchio $ABDC$ [III, 1], che sia G , ed il centro del cerchio $EBFD$, cioè H .

La linea retta tirata dal punto G ad H passerà pei punti B, D [III, 11], e perchè G è centro del cerchio $ABDC$, sarà la BG uguale alla GD , e quindi la BG maggiore della HD e la BH molto maggiore della HD . Oltre a questo, perchè H è centro del cerchio $EBFD$, sarebbe la BH uguale alla HD : il che è impossibile. Dunque un cerchio non può essere tangente internamente ad un altro cerchio in più di un punto. Dico che nè anche può essergli tangente esternamente; perciocchè se è possibile, il cerchio ACK sia tangente esternamente al cerchio $ABDC$ in più di un punto, cioè in A , C , tirisi AC . Poichè nella circonferenza dell' uno e l' altro cerchio $ABDC$, ACK si sono presi due punti quali si vogliono A , C , la linea retta che gli congiunge cadrebbe dentro all' uno e l' altro [III, 2]. Ma invece cade dentro al cerchio $ABDC$, e fuori del cerchio ACK ; adunque *un cerchio non può essere tangente ad un altro cerchio, ecc. c. d. d.*



PROPOSIZIONE XIV.

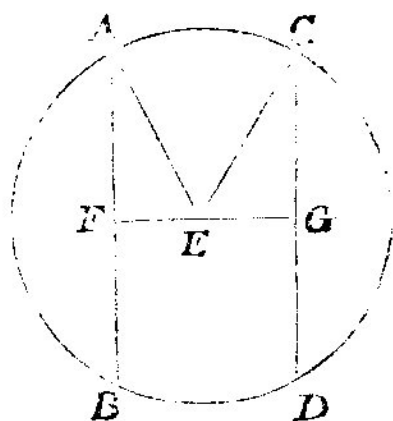
TEOREMA.

Nel cerchio le corde uguali sono ugualmente distanti dal centro, e quelle che sono ugualmente distanti dal centro sono fra loro uguali.

Sia il cerchio $ABDC$, ed in esso le corde uguali AB , CD . Dico ch'esse sono ugualmente distanti dal centro.

Sia E il centro del cerchio $ABDC$, e da esso tirinsi EF , EG perpendicolari alle AB , CD , e tirinsi le AE , EC .

Poichè la linea retta EF tirata per il centro sega la corda AB ad angoli retti, la segnerà ancora per mezzo [III, 3]. Onde la AF è uguale alla FB , e la AB è doppia della AF : e per la medesima ragione la CD è doppia della CG . La AB è uguale alla CD ; adunque la AF è uguale alla CG , ed essendo la AE uguale alla EC , il quadrato della AE sarà uguale al quadrato della EC . Ma la somma dei quadrati delle AF , FE è uguale al quadrato della AE [I, 47], perchè l'angolo F è retto; e la somma dei quadrati delle EG , GC è uguale al quadrato di EC , essendo l'angolo G retto; adunque la somma dei quadrati di AF , FE è uguale alla somma dei quadrati di CG , GE . Di questi il quadrato della AF è uguale al quadrato della CG , perciocchè la AF è uguale alla CG ; adunque il rimanente quadrato della FE è uguale al rimanente della EG ; e però la FE è uguale



alla EG . Ma nel cerchio si dicono le linee rette essere ugualmente distanti dal centro, quando le perpendicolari tirate dal centro sopra quelle sono uguali [III, *def.* 4]. Adunque le AB , CD sono ugualmente distanti dal centro.

Ora le AB , CD siano ugualmente distanti dal centro, cioè sia la FE uguale alla EG . Dico che la AB è uguale alla CD .

Avendo fatto le medesime costruzioni, dimostre-
remo eziandio che la AB è doppia della AF , e la CD
doppia della CG . E perchè la AE è uguale alla EC , sarà
ancora il quadrato della AE uguale al quadrato della EC ;
ma la somma dei quadrati delle EF , FA è uguale al
quadrato della AE [I, 47], e la somma dei quadrati
delle EG , GC è uguale al quadrato della EC : adunque
la somma dei quadrati delle EF , FA è uguale alla somma
dei quadrati di EG , GC . Di questi il quadrato della EG
è uguale al quadrato della EF , perchè la EG è uguale
alla EF ; adunque il rimanente quadrato della AF è
uguale al rimanente quadrato della CG ; e però la AF
è uguale alla CG . Ma la AB è doppia della AF , e la CD
doppia della CG ; onde la AB sarà uguale alla CD . Dun-
que *nel cerchio le corde uguali sono, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XV.

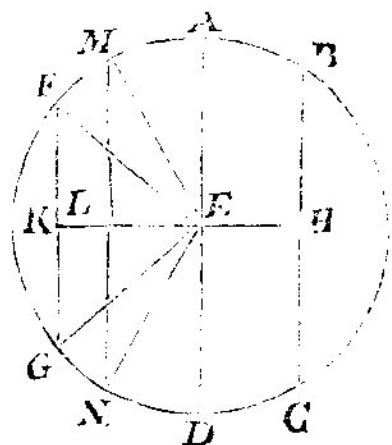
TEOREMA.

Nel cerchio la corda massima è il diametro, e
delle altre corde la più vicina al diametro è mag-
giore della più lontana.

Sia il cerchio $ABCD$, il cui diametro è AD , ed il
centro E ; e la corda più vicina al diametro AD sia

la BC , e la più lontana FG . Dico che la AD è la massima, e la BC è maggiore della FG .

Tirinsi dal centro le EH , EK perpendicolari alle BC , FG [I, 12]. Poichè la BC è più vicina a quella che passa per il centro, e la FG più lontana, sarà la EK maggiore della EH [III, def. 5]. Prendasi la EL uguale alla EH , e per L tirata la LM ad angoli retti sopra la EK , prolunghisi in N , e tirinsi EM , EN , EF , EG . Perchè la EH è uguale alla EL , sarà la BC uguale alla MN [III, 14]: e perchè la AE è uguale ad EM , e la DE alla EN , sarà la AD uguale alla somma delle ME , EN . Ma questa somma è maggiore della MN [I, 20]; adunque la AD è maggiore della MN : poi la MN è uguale alla BC ; onde la AD è maggiore della BC ed essendo le due EM , EN uguali alle due FE , EG , e l'angolo MEN maggiore dell'angolo FEG , sarà la base MN maggiore della base FG [I, 24]. Ma si è dimostrata la MN uguale alla BC , e però la BC è maggiore della FG : onde nel cerchio la corda massima è il diametro, ecc. c. d. d.



PROPOSIZIONE XVI.

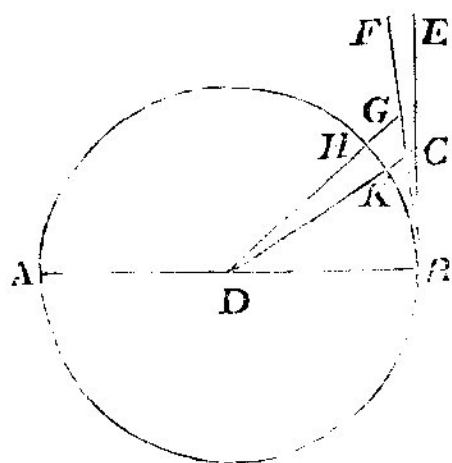
TEOREMA.

Quella linea retta che è perpendicolare al diametro alla sua estremità, cade fuori del cerchio, e nello spazio che è fra la linea retta e la circonferenza non cade alcun' altra retta.

Sia il cerchio ABH , il cui centro sia D e il diametro AB . Dico che la retta BE tirata dal punto B ad an-

goli retti sopra la AB giace tutta fuori del cerchio.

Sia C un punto qualsivoglia della BE , e congiungasi D con C . Sarà CD che è opposta all'angolo retto DBC maggiore di DB che si oppone all'angolo acuto DCB [I, 19]. Ma DB è uguale a DK ; dunque DC è maggiore di DK , e però il punto C è fuori del cerchio.



Dico che nello spazio che è fra la linea retta BE e la circonferenza CHB non cade altra linea retta.

Infatti, vi cada, se sia possibile, la FB ; e dal punto D tirisi la DG perpendicolare alla FB . Poichè l'angolo BGD è retto, e DBG è minore del retto, sarà la BD maggiore della DG [I, 19]. Ma la DB è uguale alla DH ; adunque la DH sarebbe maggiore della DG , cioè la minore della maggiore, che è impossibile. Dunque *quella linea retta, ecc. c. d. d.*

COROLLARIO.

Di qui è manifesto che la linea retta, condotta perpendicolare alla estremità del diametro, è tangente al cerchio, e tocca il cerchio in un punto solo, perciocchè quella che passa per due punti cade di dentro, come già si è dimostrato [III, 2].

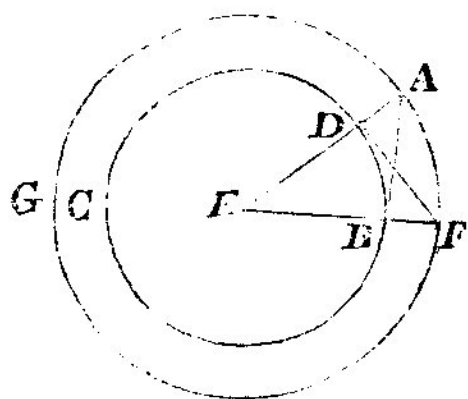
PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA.

Da un punto dato tirare una linea retta tangente ad un dato cerchio.

Sia A il punto dato, e BCD il dato cerchio; bisogna dal punto A tirare una linea retta tangente al cerchio BCD .

Piglisi il centro del cerchio [III, 1], e condotta la AE , dal centro E coll'intervallo EA , descrivasi il cerchio AFG , e dal punto D tirisi la DF ad angoli retti sopra la EA [I, 11], e condancansi EBF , AB . Dico che la AB è tangente al cerchio BCD .



Perciocchè essendo E centro de' cerchi BCD , AFG , sarà la EA uguale alla EF , e la ED uguale alla EB , onde le due AE , EB sono uguali alle due FE , ED , e comprendono l'angolo E comune; adunque gli altri angoli del triangolo DEF sono uguali agli altri angoli del triangolo EBA [I, 4] e perciò l'angolo EBA è uguale all'angolo EDF ; ma l'angolo EDF è retto, onde anco EBA è retto; e siccome la EB è semidiametro, e la retta perpendicolare ad un diametro alla sua estremità è tangente al cerchio [III, 16 *cor.*]; così dal punto dato A si è tirata la linea retta AB tangente al cerchio BCD , che bisognava fare.

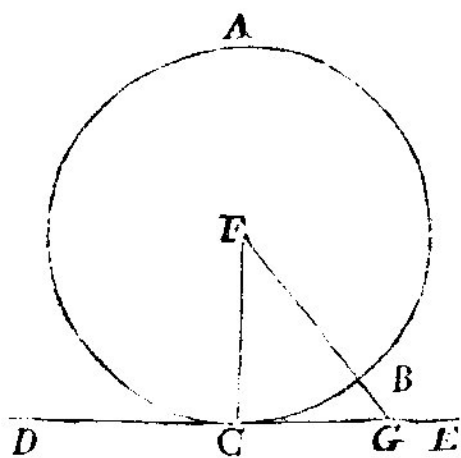
PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se una linea retta è tangente al cerchio, il raggio tirato al punto di contatto è ad essa perpendicolare.

La linea retta DE sia tangente al cerchio ABC nel punto C , e preso il centro F del cerchio ABC , tirisi la FC . Dico che la FC è perpendicolare alla DE .

Se non è, tirisi dal punto F la FG perpendicolare alla DE [I, 12]. Perchè l'angolo FGC è retto, sarà GCF acuto, e perciò l'angolo FGC sarà maggiore dell'angolo FCG ; ma il maggior lato è sottoposto al maggiore angolo [I, 19]: adunque la FC sarebbe maggiore della FG ; ma la FC è uguale alla FB , onde la FB sarebbe maggiore della FG , cioè la minore della maggiore, che è impossibile: la FG dunque non è perpendicolare alla DE . Dimostreremo parimente che non lo è altra linea che non sia la FC : laonde la FC è perpendicolare alla DE ; dunque se una linea retta, ecc. c. d. d.



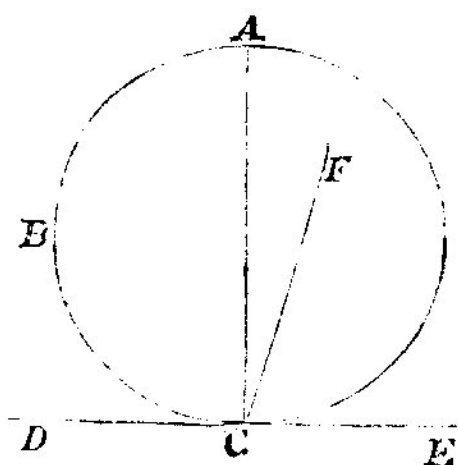
PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se una linea retta è tangente al cerchio, la perpendicolare ad essa condotta dal punto di contatto passa pel centro del cerchio.

La linea retta DE sia tangente al cerchio ABC nel punto C , e tirisi dal punto C la CA perpendicolare alla DE [I, 11]. Dico che il centro del cerchio è nella AC .

Non sia, ma se è possibile, sia F il centro e conducasi CF . Poichè la linea retta DE è tangente al cerchio ABC , e la FC è tirata dal centro al punto di contatto, sarà la FC perpendicolare alla DE [III, 18]. Adunque l'angolo FCE sarebbe retto; ma l'angolo ACE è parimente retto; onde l'angolo FCE sarebbe uguale all'angolo ACE , cioè il minore al maggiore, che è impossibile. Adunque F non è il centro del cerchio ABC . Dimostreremmo ancora che non può essere in alcun altro punto fuori della AC , onde se una linea retta, ecc. c. d. d.



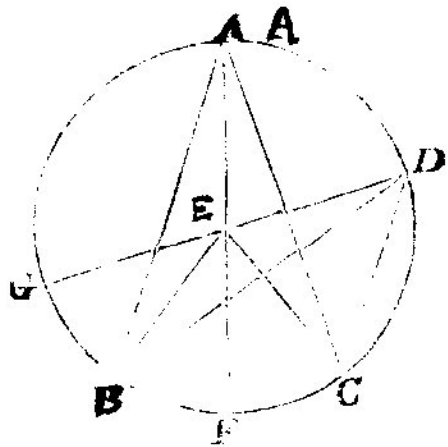
PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

L'angolo che ha il vertice al centro del cerchio è doppio di quello che ha il vertice alla circonferenza ed insiste sul medesimo arco.

Nel cerchio ABC siano BEC e BAC due angoli,

aventi l'uno il vertice al centro, l'altro alla circonferenza ed insistenti sullo stesso arco BC . Dico che l'angolo BEC è doppio dell'angolo BAC .



Tirisi la AE e prolunghisi fino in F ; e perchè la EA è uguale alla EB , sarà eziandio l'angolo EAB uguale all'angolo EBA [I, 5], onde la somma degli angoli EAB , EBA è doppia dell'angolo EAB . Ma l'angolo BEF è uguale alla somma degli angoli EAB , EBA [I, 32]. Adunque l'angolo BEF è doppio dell'angolo EAB ; e per la medesima ragione l'angolo FEC è doppio dell'angolo EAC : onde tutto l'angolo BEC è doppio di tutto l'angolo BAC .

Si consideri ora un altro angolo BDC , e tirata la DE prolunghisi fino in G . Dimostreremmo similmente che l'angolo GEC è doppio dell'angolo EDC , e l'angolo GEB è doppio dell'angolo EDB ; onde il rimanente BEC è doppio del rimanente BDC . Adunque l'angolo che ha il vertice al centro, ecc. c. d. d.

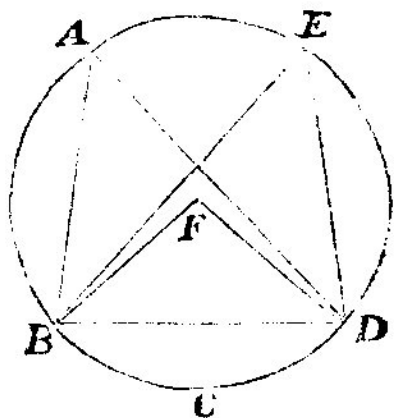
PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Gli angoli che sono nel medesimo segmento del cerchio sono fra loro uguali.

Sia il cerchio $ABCDE$, e siano BAD , BED due angoli nel medesimo segmento $BAED$. Dico che sono uguali.

Trovinsi il centro del cerchio $ABCDE$, che sia F ; e conducansi BF, FD . Poichè l'angolo BFD è al centro, e l'angolo BAD alla circonferenza, ed insistono sul medesimo arco BCD , l'angolo BFD sarà doppio dell'angolo BAD [III, 20]. Per la medesima ragione l'angolo BFD è doppio dell'angolo BED ; onde l'angolo BAD è uguale all'angolo BED . Adunque *gli angoli, ecc. c. d. d.*



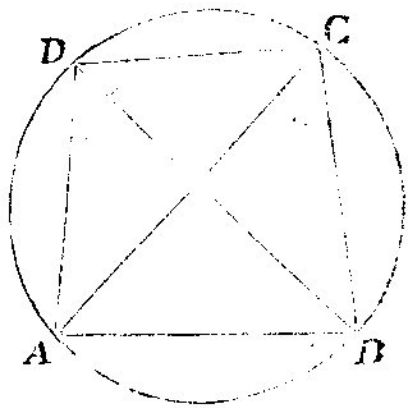
PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

La somma degli angoli opposti di un quadrilatero che abbia i suoi vertici sulla circonferenza di un cerchio è uguale a due retti.

Il quadrilatero $ABCD$ abbia i vertici sulla circonferenza del cerchio $ADCB$. Dico che la somma de' suoi angoli opposti è uguale a due retti.

Conducansi AC, BD . Poichè la somma dei tre angoli d'ogni triangolo è uguale a due retti [I, 32], sarà la somma dei tre angoli CAB, ABC, BCA del triangolo ABC uguale a due retti. Ma l'angolo CAB è uguale all'angolo BDC , perchè sono contenuti nel medesimo segmento $BADC$; [III, 21], e l'angolo ACB è uguale all'angolo ADB , perchè pure contenuti nel medesimo segmento $ADCB$; adunque



tutto l'angolo ADC è uguale alla somma degli angoli BAC , ACB . Aggiungasi l'angolo ABC a questa somma e all'angolo ADC separatamente: sarà la somma degli angoli ABC , ADC eguale a quella degli angoli ABC , BAC , ACB , e però eguale a due retti. Dimostreremmo similmente che la somma degli angoli BAD , DCB è uguale a due retti. Adunque *la somma degli angoli, ecc. c. d. d.*

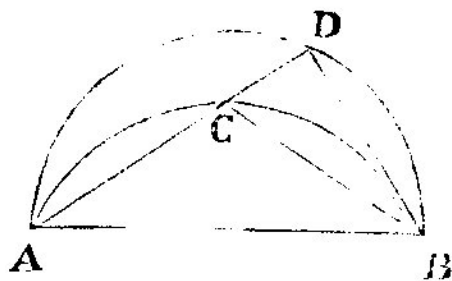
PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Sulla medesima linea retta data come corda, non si possono costruire, dalla stessa parte, due segmenti di cerchio simili e disuguali.

Costruiscansi, se però è possibile, sulla medesima linea retta AB due segmenti di cerchi ACB , ADB simili, non coincidenti, e dalla medesima parte: e tirisi ACD , e congiungasi C con B , B con D .

Poichè il segmento ACB è simile al segmento ADB , e simili segmenti di cerchi sono quelli che contengono angoli uguali [III, *def. 11*], sarà l'angolo ACB uguale all'angolo ADB , cioè l'esterno all'interno; che è impossibile [I, 16]. Adunque *sulla medesima linea retta, ecc. c. d. d.*



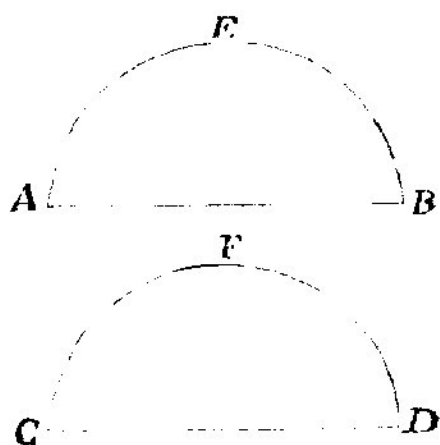
PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Simili segmenti di cerchi descritti su rette uguali sono uguali fra loro.

Siano descritti sulle linee rette uguali AB , CD simili segmenti di cerchi AEB , CFD . Dico che il segmento AEB è uguale al segmento CFD .

Altrimenti, sovrapponendo l' un segmento all' altro in modo che la base CD si adatti alla base AB , riuscirebbero sopra la stessa corda descritti due segmenti simili e disuguali, che è impossibile [III, 23]. Dunque *simili segmenti, ecc. c. d. d.*



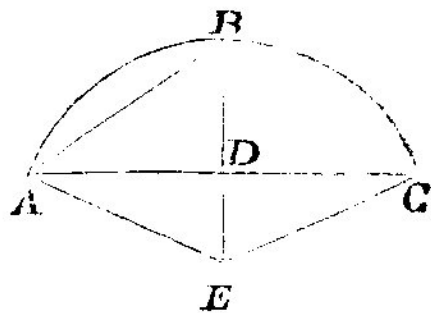
PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

Dato un segmento di cerchio trovare il centro del cerchio al quale esso appartiene.

Sia ABC il dato segmento di cerchio; bisogna trovare il centro del cerchio a cui esso appartiene.

Seghisi la AC per mezzo in D [I, 10], e dal punto D tirisi la DB ad angoli retti sopra la AC [I, 11] e congiungasi A con B . Dal punto A tirisi la AE , la quale faccia colla AB l' angolo BAE uguale all'an-



golo ABD [I, 23], e incontri la BD , prolungata se occorre, nel punto E ; dico essere E il centro richiesto.

Condotta EC , poichè l'angolo ABE è uguale all'angolo BAE , sarà la linea retta BE uguale alla EA [I, 6]: e perchè la AD è uguale alla DC e la DE comune, e l'angolo ADE è uguale all'angolo CDE , l'uno e l'altro essendo retto; sarà la base AE uguale alla base EC [I, 4]. Ma si è dimostrata la AE uguale alla EB , onde la BE è uguale alla EC , e perciò le tre linee rette AE , EB , EC sono fra loro uguali. Dunque il punto E sarà il centro del cerchio al quale appartiene il segmento dato [III, 9]. Laonde *dato, ecc.*

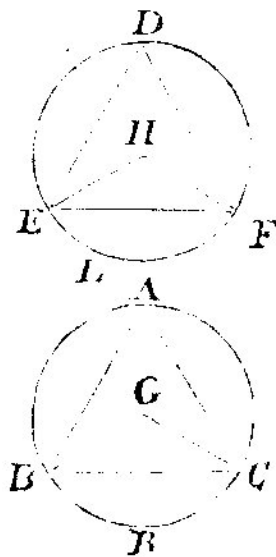
PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali gli angoli uguali, aventi i vertici a' centri o alle circonferenze, insistono sopra archi uguali.

Siano ABC , DEF cerchi uguali, e siano uguali in essi gli angoli BGC , EHF ai centri, e BAC , EDF alle circonferenze. Dico che l'arco BRC è uguale all'arco ELF .

Conducansi BC , EF : e perchè i cerchi ABC , DEF sono uguali, saranno anche i loro raggi uguali [III, def. 1]. Adunque le due BG , GC sono uguali, alle due EH , HE , e l'angolo G uguale all'angolo H ; onde la base BC è uguale alla base EF [I, 4]. Oltre a ciò perchè



l'angolo A è uguale all'angolo D , i segmenti BAC , EDF saranno simili, ed essendo descritti sulle rette uguali BC , EF , saranno uguali fra loro [III, 24]. Adunque il segmento BAC è uguale al segmento EDF : ma tutto il cerchio ABC è uguale a tutto DEF ; onde il rimanente segmento BRC sarà uguale al rimanente ELF , e l'arco BRC eguale all'arco ELF . Adunque *ne' cerchi uguali, ecc. c. d. d.*

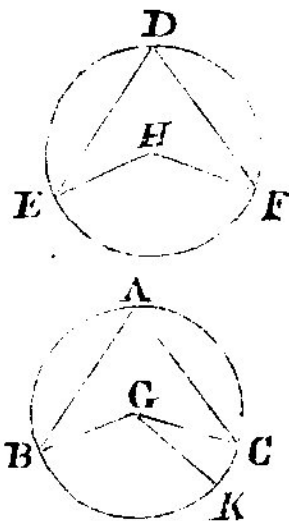
PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali sono uguali gli angoli a' centri, o alle circonferenze, che insistono sopra archi uguali.

Ne' cerchi uguali ABC , DEF , e sugli archi uguali BC , EF , insistano gli angoli ai centri BGC , EHF , e gli angoli alle circonferenze BAC , EDF . Dico che l'angolo BGC è uguale all'angolo EHF , e l'angolo BAC all'angolo EDF .

Perciocchè se l'angolo BGC non è uguale all'angolo EHF , uno di essi sarà maggiore. Sia maggiore BGC , e costruiscasi l'angolo BGK uguale all'angolo EHF [I, 23]. Ma gli angoli al centro uguali insistono sopra archi uguali, adunque l'arco BK sarebbe uguale all'arco EF ; ma l'arco EF è uguale all'arco BC , onde BK sarebbe uguale a BC , cioè il minore al maggiore, che è impossibile. Adunque l'angolo BGC non è disuguale all'angolo EHF , e perciò è uguale. L'an-



angolo A è la metà dell'angolo BGC [III, 20], e l'angolo D la metà dell'angolo EHF : onde l'angolo A è uguale all'angolo D . Adunque *ne' cerchi uguali, ecc. c. d. d.*

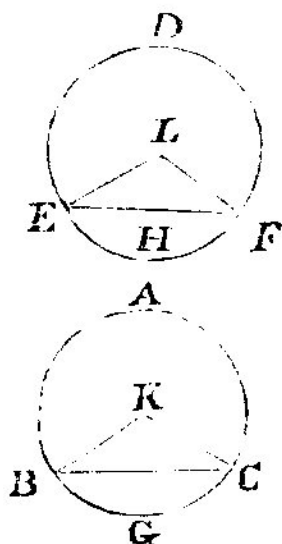
PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

Ne' cerchi uguali le corde uguali tagliano archi uguali, cioè il maggiore uguale al maggiore, ed il minore al minore.

Siano ABC , DEF i cerchi uguali, ed in essi le corde uguali BC , EF , che taglino gli archi BAC , EDF maggiori, e gli archi BGC , EHF minori. Dico che l'arco BAC maggiore è uguale al maggiore EDF , ed il minore BGC al minore EHF .

Trovinsi i centri K , L de' due cerchi, e conducansi BK , KC , EL , LF . Poichè i cerchi sono uguali, saranno eziandio uguali i loro raggi. Adunque le due BK , KC sono uguali alle due EL , LF , e la base BC è uguale alla base EF . Onde l'angolo BKC è uguale all'angolo ELF [I, 8]. Ma gli angoli al centro uguali insistono sopra archi uguali [III, 26], e però l'arco BGC è uguale all'arco EHF . Ma tutta la circonferenza ABC è uguale a tutta la DEF . Onde il rimanente arco BAC sarà uguale al rimanente EDF . Adunque *ne' cerchi uguali ecc. c. d. d.*



PROPOSIZIONE XXIX.

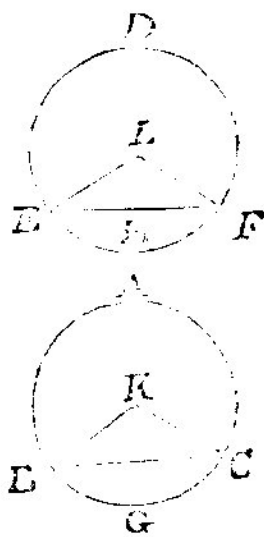
• TEOREMA.

Ne' cerchi uguali agli archi uguali sono sottese corde uguali.

Siano i cerchi uguali ABC , DEF , e prendansi in essi gli archi BGC , EHF uguali, e tirinsi BC , EF . Dico che la linea retta BC è uguale alla retta EF .

Trovinsi i centri K , L , de' due cerchi, e si conducano BK , KC , EL , LF .

Poichè l' arco BGC è uguale all' arco EHF , sarà l' angolo BKC uguale all' angolo ELF [III, 27]. E perchè i cerchi ABC , DEF sono uguali, saranno uguali ancora i raggi. Adunque le due BK , KC sono uguali alle due EL , LF , e comprendono angoli uguali. Onde la base BC è uguale alla base EF . Adunque *ne' cerchi uguali, ecc. c. d. d.*



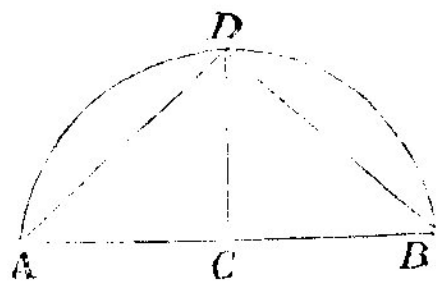
PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA.

Dividere un dato arco per metà.

Sia ADB il dato arco. Bisogna dividerlo per metà. Conducasi AB , e dividasi per metà in C [I, 10], e dal punto C tirisi la CD ad angoli retti sopra la AB [I, 11] e tirinsi AD , DB .

Perchè la AC è uguale alla CB , e la CD comune, e l'an-



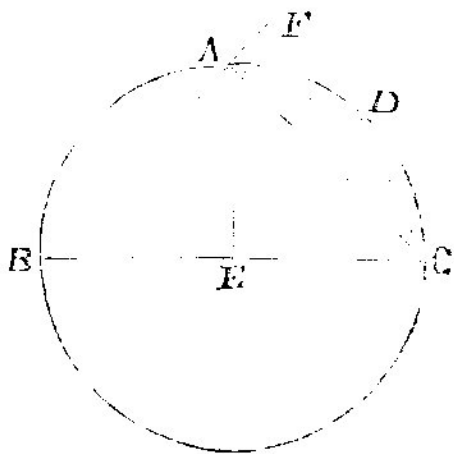
golo ACD è uguale all'angolo BCD , essendo l'uno e l'altro retto, sarà la base AD uguale alla base DB . Ma ne' cerchi uguali, epperò anche nel medesimo cerchio, le corde uguali tagliano archi uguali [III, 28], onde l'arco AD sarà uguale all'arco DB . Adunque il dato arco si è diviso per metà; il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

Nel cerchio l'angolo che è nel mezzo cerchio è retto, quello che è nel maggior segmento è acuto e quello che è nel minor segmento è ottuso.

Sia il cerchio $ABCD$, il cui diametro sia BC , ed il centro E , e conducansi BA , AC , AD , DC . Dico che l'angolo BAC che è nel mezzo cerchio è retto, e quello che è nel segmento ABC maggiore del mezzo cerchio, cioè l'angolo ABC , è acuto, e quello che è nel segmento ADC minore del mezzo cerchio, cioè l'angolo ADC , è ottuso.

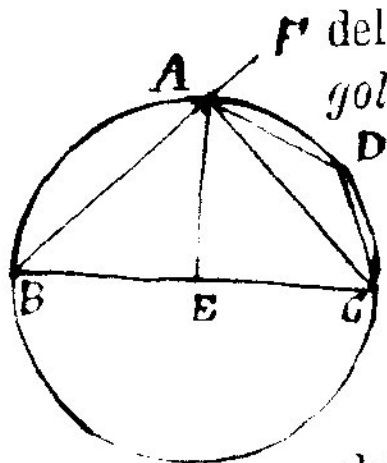


Conducasi AE , e prolunghisi la BA in F . Poichè la BE è uguale alla EA , l'angolo EAB sarà uguale all'angolo EBA [I, 5]. E similmente perchè la EA è uguale alla EC , sarà l'angolo ACE uguale all'angolo CAE . Adunque tutto l'angolo BAC è uguale alla somma dei due angoli ABC , ACB ; ma anche l'angolo FAC esterno al triangolo ABC è uguale alla somma dei due ABC , ACB [I, 32]. Dunque l'angolo BAC è uguale

all'angolo FAC , e perciò l'uno e l'altro di essi è retto [I, *def.* 10]. Onde l'angolo BAC nel mezzo cerchio BAC è retto.

E perchè la somma dei due angoli ABC , BAC del triangolo ABC è minore di due retti [I, 17], e BAC è retto, sarà l'angolo ABC , minore del retto. Dunque l'angolo ABC nel segmento ABC maggiore del mezzo cerchio è acuto.

Essendo poi i vertici del quadrilatero $ABCD$ nella circonferenza, sarà la somma degli angoli ABC , ADC uguale a due retti [III, 22]. Ma l'angolo ABC è minore del retto; onde il rimanente ADC sarà maggiore del retto. Dunque l'angolo ADC nel segmento ADC minore del mezzo cerchio è ottuso; adunque *nel cerchio l'angolo, ecc. c. d. d.*



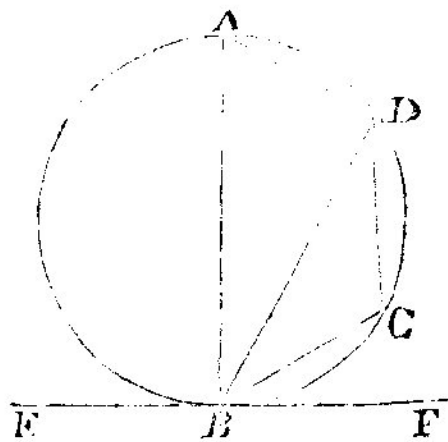
PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

Se da un punto della circonferenza di un cerchio si tirino la tangente ed una secante, l'angolo da esse compreso sarà uguale a quelli contenuti nel segmento che è fuori del detto angolo.

La linea retta EF sia tangente al cerchio $ABCD$ nel punto B , e dal punto B tirisi nel cerchio $ABCD$ una linea retta BD , che lo seghi in qualunque modo. Dico che l'angolo FBD è uguale all'angolo nel segmento DAB , e l'angolo EBD uguale all'angolo nel segmento DCB .

Tirisi dal punto B la BA ad angoli retti sopra la EF , e piglisi



nella circonferenza BD qualsivoglia punto C , e condu-
cansi AD ; DC , CB .

Poichè la linea retta EF è tangente al cerchio $ABCD$ nel punto B , e dal punto di contatto B è tirata una linea retta BA ad angoli retti sopra la EF , sarà nella BA il centro del cerchio $ABCD$ [III, 19]. Onde la BA è diametro del medesimo cerchio, e l'angolo ADB nel mezzo cerchio è retto [III, 31]. Ma la somma dei tre angoli del triangolo ABD è uguale a due retti [I, 32], adunque gli angoli rimanenti BAD , ABD fanno un retto. Anche l'angolo ABF è retto, e perciò è uguale alla somma degli angoli BAD , ABD . Sottraggasi il comune ABD . Onde il rimanente DBF è uguale al rimanente BAD . E perchè il quadrilatero $ABCD$ ha i suoi vertici sulla circonferenza, e quindi in esso gli angoli opposti fanno due retti [III, 22], sarà la somma degli angoli DBF , DBE uguale a quella degli angoli BAD , BCD [I, 13]; de' quali BAD si è dimostrato uguale a DBF . Adunque il rimanente DBE sarà uguale al rimanente DCB . Onde *se da un punto, ecc. c. d. d.*

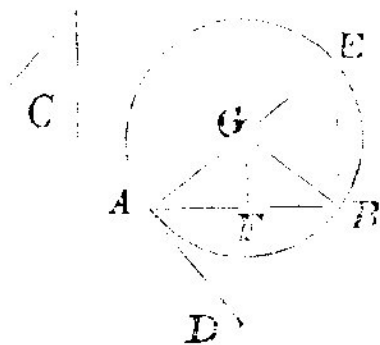
PROPOSIZIONE XXXIII.

PROBLEMA.

Sopra una data corda costruire un segmento di cerchio capace di un angolo uguale ad un angolo dato.

Sia AB la linea retta data e C il dato angolo. Bisogna sopra AB come corda descrivere un segmento di cerchio, nel quale si contengano angoli uguali all'angolo C .

Nella data retta AB , e nel punto A dato in essa, costruiscasi l'angolo BAD uguale all'angolo C [I, 23], e dal punto A tirisi la AE



ad angoli retti sopra la AD [I, 11], e seghisi la AB per metà in F [I, 10], e dal punto F tirisi FG ad angoli retti sopra la AB , e tirisi GB .

Poichè la AF è uguale alla FB , e la FG comune, e l'angolo AFG uguale all'angolo GFB , sarà la base AG uguale alla base GB . Onde dal centro G , coll'intervallo AG , descritto il cerchio, questo passerà ancor per B . Descrivasi, e sia ABE , e conducasi EB . E perchè dalla estremità A del diametro AE , è tirata AD ad angoli retti sopra la AE , la AD sarà tangente al cerchio [III, 16, *cor.*]. E perchè la retta AD è tangente al cerchio ABE , e dal punto di contatto A è tirata la secante AB nel cerchio ABE , l'angolo DAB sarà uguale all'angolo AEB contenuto nell'altra porzione del cerchio [III, 32]. Ma essendo l'angolo DAB uguale all'angolo C , sarà l'angolo C uguale all'angolo AEB . Onde sulla data corda AB si è descritto il segmento di cerchio ABE , capace di un angolo AEB uguale all'angolo dato C ; il che bisognava fare.

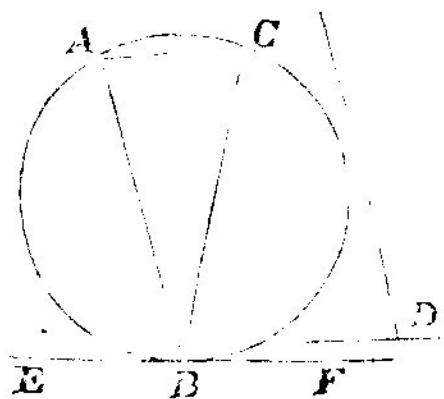
PROPOSIZIONE XXXIV.

PROBLEMA.

Da un dato cerchio tagliare un segmento capace di un angolo uguale ad un angolo dato.

Sia ABC il cerchio dato e D il dato angolo. Bisogna dal cerchio ABC tagliare un segmento capace di un angolo uguale all'angolo D .

Tirisi la linea retta EF tangente al cerchio ABC nel punto B [III, 17], e nella linea retta EF , e nel punto B che è in essa, costruiscasi l'angolo FBC uguale all'angolo D [I, 23].



Perchè la linea retta EF è tangente al cerchio ABC nel punto B , e dal punto di contatto B è tirata la BC , l'angolo FBC sarà uguale all'angolo BAC [III, 32]. Ma FBC è uguale all'angolo D . Adunque eziandio l'angolo BAC sarà uguale all'angolo D . Onde dal dato cerchio ABC si è tagliato il segmento BAC , capace di un angolo uguale all'angolo dato D ; il che bisognava fare.

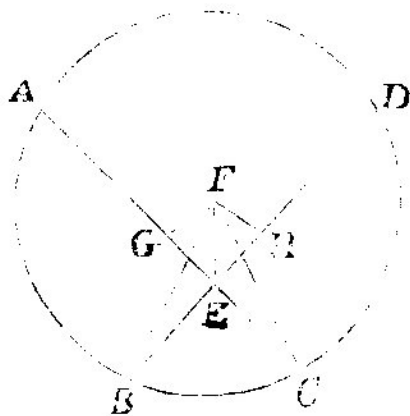
PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

Se nel cerchio due corde si tagliano fra loro, il rettangolo contenuto dalle parti di una è eguale al rettangolo contenuto dalle parti dell'altra.

Nel cerchio $ABCD$ seghinsi fra loro le due corde AC , BD nel punto E . Dico che il rettangolo contenuto dalle AE , EC è eguale a quello contenuto dalle DE , EB .

Sia F il centro del cerchio $ABCD$, e da F tirinsi le FG , FH , perpendicolari alle rette AC , DB : e conducansi FB , FC , FE .



Poichè la retta GF tirata pel centro sega una corda AC ad angoli retti, la sega ancora per metà [III, 3]. Onde la AG è uguale a GC . E perchè la linea retta AC è divisa in parti uguali nel punto G , ed in parti disuguali in E , sarà il rettangolo contenuto dalle AE , EC insieme col quadrato di EG eguale al quadrato di GC [II, 5]. Aggiungasi il comune quadrato di GF . Allora il rettangolo delle AE , EC insieme co' quadrati

di EG , GF è eguale alla somma dei quadrati di CG , GF . Ma il quadrato di FE è eguale alla somma dei quadrati di EG , GF [I, 47], ed il quadrato di FC è eguale alla somma dei quadrati di CG , GF . Dunque il rettangolo delle AE , EC insieme col quadrato di FE è eguale al quadrato di FC ossia al quadrato di FB . Per la medesima ragione il rettangolo delle DE , EB insieme col quadrato di FE è eguale al quadrato di FB . Adunque il rettangolo delle AE , EC insieme col quadrato di FE è eguale al rettangolo delle DE , EB insieme col quadrato di FE . Sottraggasi il quadrato comune di FE . Sarà il rettangolo rimanente della AE , EC uguale al rimanente delle DE , EB . Onde *se nel cerchio due corde, ecc. c. d. d.*

D

PROPOSIZIONE XXXVI.

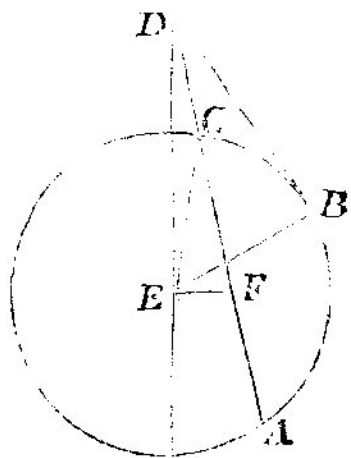
TEOREMA.

Se da un punto fuori del cerchio si tirino una retta tangente ed un'altra segante, il rettangolo contenuto da tutta la linea segante e dalla sua parte esterna è eguale al quadrato della linea tangente.

Piglisi un punto D fuori del cerchio ABC , e da esso si tirino la linea retta DCA che seghi il cerchio in CA , e la DB tangente in B . Dico che il rettangolo delle AD , DC è eguale al quadrato della DB .

Sia E il centro, e da E tirisi la EF perpendicolare alla AC , e conducansi EB , EC , ED .

Poichè la linea retta EF tirata pel centro sega una corda AC



ad angoli retti, la segnerà ancor per metà [III, 3]. Onde la AF è uguale a FC . Oltre a ciò perchè la linea retta AC è segata per mezzo nel punto F , e le si aggiunge la CD , il rettangolo della AD , DC insieme col quadrato di FC è eguale al quadrato di FD [II, 6]. Pongasi il quadrato di FE comune. Allora il rettangolo delle AD , DC insieme co' quadrati delle CF , FE è eguale alla somma dei quadrati delle DF , FE . Ma il quadrato di DE è eguale alla somma dei quadrati di DF , FE , perciocchè l'angolo EFD è retto [I, 47], ed il quadrato di CE è eguale alla somma dei quadrati di CF , FE . Adunque il rettangolo delle AD , DC insieme col quadrato di CE è eguale al quadrato di ED . Ma la CE è uguale alla EB ; onde il rettangolo delle AD , DC insieme col quadrato di EB è eguale al quadrato di ED . Ma il quadrato di ED è eguale alla somma dei quadrati di EB , BD , perciocchè l'angolo EBD è retto. Adunque il rettangolo delle AD , DC insieme col quadrato di EB è eguale alla somma dei quadrati di EB , BD . Sottraggasi il quadrato comune di EB , e avremo il rimanente rettangolo delle AD , DC eguale al quadrato di DB . Laonde *se da un punto, ecc. c. d. d.*

COROLLARIO.

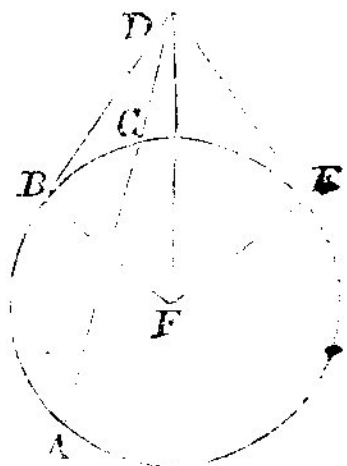
Di qui è manifesto che se da un punto fuori del cerchio si tirino due seganti, il rettangolo contenuto dall' una segante e dalla sua parte esterna sarà eguale al rettangolo contenuto dall' altra segante e dalla sua parte esterna; perocchè ciascuno di questi rettangoli è eguale al quadrato della tangente tirata dal medesimo punto al cerchio.

PROPOSIZIONE XXXVII.

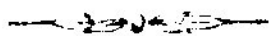
TEOREMA.

Da un punto fuori del cerchio tirata una secante ed un' altra retta che termini alla circonferenza, se il rettangolo dell' intera secante e della sua parte esterna è eguale al quadrato della seconda linea, questa sarà tangente al cerchio.

Piglisi fuori del cerchio ABC un punto D , e da quello tirinsi al cerchio due linee rette, cioè DCA che seghi il cerchio in C , A , e DB che termini al punto B ; ed il rettangolo delle AD , DC sia eguale al quadrato della DB . Dico che la DB sarà tangente al cerchio ABC .



Tirisi una linea retta DE , tangente al cerchio ABC [III, 17], il cui centro sia F , e conducansi FE , FB , FD . Allora l'angolo FED è retto [III, 18]. E perchè la DE è tangente al cerchio ABC , e la DCA lo sega, il rettangolo delle AD , DC sarà eguale al quadrato di DE [III, 35]. Ma il rettangolo delle AD , DC si suppone uguale al quadrato di DB . Onde il quadrato di DE sarà uguale al quadrato della DB . E perciò la linea DE è uguale alla DB . Allora le due DE , EF sono uguali alle due DB , BF , e la base FD è comune; onde l'angolo DEF è uguale all'angolo DBF [I, 8]. Ma DEF è retto; dunque DBF ancora è retto. Ma FB prolungata è un diametro, e la retta che è tirata ad angoli retti alla estremità del diametro è tangente al cerchio [III, 16, *cor.*]. Adunque la DB è tangente al cerchio ABC necessariamente. Laonde *da un punto, ecc. c. d. d.*



Esercizi.

- 1. Descrivere con un raggio dato una circonferenza, che passi per due punti dati.
- 2. Se col vertice di un triangolo isoscele, come centro, si descriva una circonferenza che tagli la base o la base prolungata, le parti di questa intercettate tra la circonferenza e l'estremità della base saranno uguali.
- 3. Se due circonferenze si tagliano scambievolmente, e per i punti d'intersezione si tirino due rette parallele, le parti di esse intercettate tra le due circonferenze saranno uguali.
- 4. Tirare per un punto d'intersezione di due circonferenze una linea retta prolungata fino ad incontrarle di nuovo ambedue, e che sia bisecata in questo punto.
- 5. Una corda PAQ taglia il diametro di un cerchio in un punto A e fa col diametro un angolo eguale alla metà di un retto; dimostrare che la somma dei quadrati di AP e di AQ è il doppio del quadrato del raggio.
- 6. Se due corde s'intersecano in un cerchio, la differenza dei loro quadrati è eguale alla differenza dei quadrati delle differenze dei segmenti.
- 7. Due corde parallele in un cerchio hanno rispettivamente 6 e 8 metri di lunghezza, e sono distanti di un metro; quanti metri è il diametro?
- 8. Tirare una linea retta che tagli due cerchi concentrici, in modo che la parte di essa intercettata dalla circonferenza del maggior cerchio, sia il doppio della parte intercettata dalla circonferenza del minore.
- 9. Se due circonferenze si tagliano scambievolmente, la linea retta di maggior lunghezza, che si possa tirare per un punto d'intersezione, è quella che è parallela alla retta che unisce i centri.

— 10. Descrivere tre cerchi eguali tangenti tra loro, e quindi un altro tangente a tutti tre.

11. Quanti cerchi eguali possono descriversi intorno a un dato cerchio della stessa grandezza, che siano tangenti a questo e tra loro?

12. Descrivere una circonferenza, che passi per un punto dato, e sia tangente a un cerchio dato in un dato punto, non essendo i due punti in una tangente al cerchio dato.

13. Descrivere un cerchio tangente a un cerchio dato in un dato punto, e tangente ad una linea retta data.

14. Due linee rette tirate da un punto dentro un cerchio in modo da fare angoli eguali colla retta tirata da questo punto al centro, tagliano dal cerchio segmenti uguali.

15. Tirare per un punto dato dentro un cerchio la corda di minima lunghezza.

16. Se due cerchi sono tangenti internamente, di tutte le linee tangenti al cerchio interno e terminate al cerchio esterno, la massima è quella che è parallela alla tangente comune ai due cerchi.

17. Dimostrare che le due tangenti a un cerchio tirate da uno stesso punto, sono eguali tra loro; e quindi provare che le somme dei lati opposti di un quadrilatero descritto intorno al cerchio sono eguali, e che gli angoli sottesi al centro del cerchio da due lati opposti, sommati insieme fanno due retti.

18. La parte di una tangente a un cerchio, compresa tra le tangenti condotte all'estremità di un diametro, sottende al centro un angolo retto.

19. Determinare sopra il prolungamento del diametro di un cerchio, un punto, dal quale tirando una tangente al cerchio, questa sia eguale al diametro.

20. Descrivere una circonferenza che passi per un punto dato, abbia un raggio dato, e sia tangente ad una retta data.

21. Descrivere una circonferenza che abbia il centro sopra un cateto di un triangolo rettangolo, che passi per il vertice dell'angolo retto e sia tangente alla ipotenusa.

22. A è un punto di un diametro (o di un diametro prolungato) di un cerchio, il cui centro è O ; OB un raggio

perpendicolare al diametro; se AB taglia la circonferenza in P , e la tangente nel punto P taglia AO in C , dimostrare che AC è eguale a CP .

23. Tirata una tangente comune a due cerchi, e descritta sopra la parte di essa compresa tra i punti di contatto, come diametro, una circonferenza, questa passerà per i punti di contatto dei due cerchi, e le sarà tangente la linea che congiunge i loro centri.

— 24. Descrivere una circonferenza con un dato raggio, col centro in una linea data, e tangente ad un'altra linea data.

— 25. Descrivere una circonferenza tangente ad una linea data in un punto dato, e tangente a una data circonferenza.

— 26. Tirare una tangente comune a due cerchi, con i punti di contatto dalla stessa parte, e da parti opposte della retta che congiunge i centri.

— 27. Tirare una linea retta tangente a un cerchio dato, e che faccia un dato angolo con una linea data.

— 28. Descrivere con raggi dati due circonferenze tangenti tra loro, e ad una medesima linea data dalla stessa parte.

29. Se due cerchi sono tangenti tra loro, e si tirano diametri paralleli, le linee che congiungono l'estremità di questi diametri passeranno per il punto di contatto.

30. La retta tirata da un vertice di un triangolo equilatero a un punto della circonferenza circoscritta al triangolo, è eguale alla somma o alla differenza delle due rette condotte dalle estremità della base a quel punto, secondo che quella linea taglia o non taglia la base.

31. AB , BC sono due corde qualunque di un cerchio, D , E i punti di mezzo degli archi AB , AC ; DE taglia AB , AC nei punti F , G : dimostrare che AF è eguale ad AG .

32. Dimostrare che si può far passare una circonferenza per tutti i vertici di un quadrilatero, quando la somma dei suoi angoli opposti è uguale a due retti, e trovare il centro e il raggio di questa circonferenza.

33. $ABCD$ è un parallelogrammo; condotta CE perpendicolare alla diagonale BD , e le perpendicolari ad AB , AD

nei punti B, D , dimostrare che queste tre rette s' incontrano in un medesimo punto.

34. Le tre circonferenze che passano ciascuna per due vertici di un triangolo, e per il punto d' intersezione delle tre perpendicolari condotte dai vertici sui lati opposti, sono eguali tra loro.

35. Due circonferenze si tagliano nei punti A, B , e il centro di una è sopra l' altra; tirata una corda ACD che le taglia ambedue, dimostrare che CB è eguale a CD .

36. Degli angoli che fanno le rette condotte da due punti dati sopra una circonferenza a un punto di una tangente alla medesima, il massimo è quello che si ottiene quando il punto della tangente è il punto di contatto.

37. Dati tre punti di una circonferenza, dimostrare come si possano trovare quanti altri punti si vogliano della medesima, senza conoscere la posizione del centro.

38. Se per i vertici di un quadrilatero si conducono le bisettrici degli angoli, tutti i punti nei quali una bisettrice incontra l' adiacente, saranno sopra una medesima circonferenza.

39. ABC è un semicerchio, ADC è un quadrante sopra la stessa linea AC e dalla medesima parte; tirate da un punto qualunque B della semi-circonferenza BA e BDC , dimostrare che BA e BD sono eguali, e che delle rette AB, AC soltanto la maggiore può tagliare il cerchio ADC .

40. Se una corda sia bisecata da un' altra, e prolungata fino all' incontro colle tangenti all' estremità della bisettrice, le parti di essa comprese tra le tangenti e la circonferenza sono eguali.

41. Se a partire dalle estremità A, C di un dato arco di cerchio si prendono in direzioni opposte due archi eguali AB, CD , le corde AC, BD sono parallele.

42. Gli archi intercettati da due corde parallele sono eguali; e se due corde qualunque s' intersecano, la somma degli archi intercettati da esse è eguale alla somma degli archi intercettati dai diametri paralleli alle medesime.

43. A, B, C, A', B', C' sono punti di una circonferenza;

se AB , AC sono rispettivamente parallele ad $A'B'$, $A'C'$; BC' sarà parallela a $B'C$.

44. Se due circonferenze eguali si tagliano, e col centro in uno dei due punti d'intersezione si descrive un'altra circonferenza, i punti nei quali questa taglia una delle due circonferenze eguali è in linea retta coll'altro punto d'intersezione di queste.

45. Se due circonferenze si tagliano, e da uno dei punti d'intersezione si tira una linea retta che le tagli, la parte di questa compresa tra loro sarà bisecata dal cerchio, il cui diametro è la corda comune ai due cerchi eguali.

46. Se due circonferenze si tagliano, e siano presi due punti qualunque in una di esse, e dai punti d'intersezione delle due circonferenze siano tirate a ciascuno di questi due linee che taglino l'altra circonferenza, le linee rette che congiungeranno i punti dove le rette tirate dallo stesso punto d'intersezione delle due circonferenze tagliano l'ultima circonferenza, saranno eguali tra loro.

47. A e B sono punti dati; se si tirano per questi quante si vogliano coppie di rette AC , BC che facciano tra loro angoli uguali ad un angolo dato, le bisettrici di questi angoli passeranno tutte per uno stesso punto.

48. Se si tirino dall'estremità di un diametro le perpendicolari ad una corda di un cerchio, le parti della corda comprese tra loro e la circonferenza saranno eguali, e la perpendicolare minore sarà eguale al segmento della maggiore compreso tra la corda e la circonferenza.

49. Se la base di un triangolo sia bisecata dal diametro del cerchio circoscritto, e si tiri dall'estremità di questo diametro una perpendicolare sul lato maggiore, questa dividerà il lato stesso in due segmenti, uno dei quali sarà eguale alla semi-somma e l'altro alla semi-differenza degli altri due lati.

50. Dato il raggio di un cerchio tangente a due linee date non parallele, determinarne il centro.

51. Trovare un punto nel diametro prolungato di un dato cerchio, tale che tirando da esso le due tangenti al cerchio, la parte concava della circonferenza sia doppia della convessa.

52. La retta condotta per il punto di mezzo di un arco parallela alla corda, è tangente al cerchio in questo punto; e il raggio che biseca la corda di un arco, biseca anche l'arco.

53. Se conducansi dall'estremità di due archi adiacenti eguali, linee rette a due punti dati sopra la rimanente circonferenza, e si prolunghino fino al loro incontro, gli angoli di queste linee saranno eguali tra loro.

54. Se dal punto di mezzo di un arco di cerchio si tiri una perpendicolare al diametro che passa per una delle sue estremità, questa perpendicolare bisecherà il segmento fatto nella corda dalla retta che congiunge il medesimo punto dell'arco coll'altra estremità del medesimo diametro.

55. Due circonferenze eguali, i centri delle quali sono A, B , passano ciascuna per il centro dell'altra; tirata una corda comune $CEFD$ parallela ad AB , dimostrare che le $ACEB$, $AFBD$ sono parallelogrammi, e se AF si prolunghi fino ad incontrare di nuovo le due circonferenze in G, H , dimostrare che EF è eguale ad FH , e CD a GH .

56. ABC è un triangolo iscritto in un cerchio, e DEF un diametro perpendicolare a BC in E ; dimostrare che la differenza degli angoli B e C è doppia dell'angolo AFD .

57. ACB, ADB sono archi di cerchi eguali sopra la stessa linea retta AB e dalla medesima parte di questa; tirata una corda che li tagli ambedue, dimostrare che BC è eguale a BD .

58. Se in un cerchio due corde si segano scambievolmente, l'angolo che fanno è la metà dell'angolo al centro sotteso da un arco eguale alla somma o alla differenza degli archi intercettati da esse, secondo che s'incontrano dentro o fuori del cerchio. Dimostrare inoltre che se s'intersecano ad angolo retto la somma dei due archi opposti sarà eguale alla semi-circonferenza.

59. Il cerchio, che ha il centro nel punto di mezzo dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, e il diametro eguale alla somma dei cateti, è tangente ai due cerchi descritti sopra i cateti, come diametri.

60. Dimostrare che le perpendicolari: Aa, Bb, Cc ab-

bassate dai vertici di un triangolo ABC sopra i lati opposti, bisecano gli angoli del triangolo abc .

61. Se una circonferenza è descritta sopra un raggio di un'altra come diametro, una linea qualunque condotta dal punto d'incontro delle due circonferenze fino ad incontrare di nuovo la circonferenza esterna, sarà bisecata dalla circonferenza interna.

62. Le circonferenze descritte sopra i lati di un triangolo, come diametri, si intersecheranno sopra i lati, o sopra i lati prolungati del triangolo.

63. Le metà delle corde tirate in un cerchio dalla estremità di un diametro, giacciono tutte sopra una stessa circonferenza.

— 64. Se un triangolo equilatero sia inscritto in un cerchio, e gli archi adiacenti sottesi da due dei suoi lati siano divisi per metà, la linea che congiunge i punti di mezzo sarà trisecata dai lati.

65. L'angolo al vertice di un triangolo obliquangolo inscritto in un cerchio, è maggiore o minore di un angolo retto dell'angolo fatto dalla base e dal diametro condotto per una estremità della base; e nessun parallelogrammo, tranne il rettangolo, può essere inscritto in un cerchio.

66. Tirare una perpendicolare a una estremità di una retta che non può prolungarsi.

67. ABC è un triangolo equilatero, D , E , F sono i punti di mezzo dei suoi lati; dimostrare che DF è tangente al cerchio CDE .

68. Se sopra un raggio di un cerchio, come diametro, si descriva un altro cerchio, e si tirino due altri raggi che taglino questo ultimo, la corda dell'arco intercettato da essi è eguale alla perpendicolare condotta dall'estremità dell'uno sopra l'altro.

69. Se due cerchi siano tangenti tra loro e si tirino due rette per il punto di contatto, le corde degli archi intercettati saranno parallele.

70. Descritto un semicerchio sopra il lato di un quadrante, e tirato un raggio a un punto dell'arco del quadrante,

te, la parte del raggio, compresa tra l'arco del quadrante e il semicerchio, sarà eguale alla perpendicolare condotta dallo stesso punto alla tangente comune.

71. Dato un angolo, i lati opposti, e la somma degli altri due lati, costruire il triangolo.

72. Data l'area e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo; costruirlo.

+ 73. Data la base, l'angolo al vertice e l'altezza, costruire il triangolo.

74. Di tutti i triangoli che hanno la stessa base e lo stesso angolo al vertice, il triangolo isoscele è il massimo; e reciprocamente di tutti i triangoli sulla stessa base e tra le medesime parallele, l'isoscele ha il massimo angolo al vertice.

- 75. Per tre punti dati condurre tre rette in modo che facciano un triangolo equilatero.

76. Tirare per un punto d'intersezione di due cerchi una retta che tagli ambedue i cerchi e sia eguale a una retta data; e quindi per tre punti dati tirare tre linee rette in modo che facciano un triangolo che abbia i suoi lati ed angoli eguali a quelli di un triangolo dato.

77. Trovare un punto dentro un triangolo, tale che le rette condotte ai vertici adiacenti facciano angoli eguali: e dimostrare che se sopra i tre lati di un triangolo si descrivano simili segmenti di cerchio dalla stessa parte, e si conducano dall'estremità della base tangenti al segmento descritto sopra la medesima e si prolunghino sino all'incontro colle altre circonferenze, i punti d'incontro e il vertice del triangolo saranno sopra la medesima retta parallela alla base.

— 78. AB è diametro di un cerchio, CD una corda perpendicolare ad AB ; se per un punto qualunque P di CD si tira una corda APQ , il rettangolo contenuto dalle AP , AQ è costante.

79. Data l'area, un angolo, e una linea tirata dal vertice di uno degli altri angoli alla metà del lato opposto, costruire il triangolo.

+ — 80. Descrivere una circonferenza che passi per due punti dati, e sia tangente a una retta data.

- 81. Descrivere una circonferenza che passi per due punti dati, e sia tangente a una retta data in uno dei due punti.
- 82. Per un punto dato descrivere una circonferenza tangente a due rette date.
- 83. Descrivere un cerchio tangente a due rette date e ad un altro cerchio.
- 84. Descrivere un triangolo isoscele, dato l'angolo alla base, e la perpendicolare condotta dall'estremità della base sul lato opposto.
- 85. Se dal centro di un cerchio si conduca una retta a un punto di una corda, il quadrato di questa retta insieme col rettangolo contenuto dai segmenti della corda sarà eguale al quadrato del raggio.
- 86. Sia un diametro di un cerchio perpendicolare ad una corda data, e un'altra corda qualunque BC tagli la stessa corda in D ; la somma del quadrato di AD e del rettangolo contenuto da BD , CD sarà costante.
- 87. Se per un punto qualunque che sia dentro o fuori di un cerchio due linee si tagliano ad angolo retto, le somme dei quadrati delle due linee che congiungono le loro estremità, e la somma dei quadrati dei quattro segmenti, sono ciascuna eguale al quadrato del diametro.
88. Dati tre cerchi qualunque in un Piano, e descritti tre cerchi, ciascuno dei quali passi per i centri di due qualunque dei tre cerchi dati e sia tangente al terzo, le linee che congiungono il centro di ciascuno dei primi cerchi col punto in cui il cerchio che passa per il medesimo l'interseca, s'incontreranno nello stesso punto.
- 89. Presi due punti nel diametro di un cerchio a distanze qualunque dal centro eguali, e tirata per uno di questi una corda, e congiunte le sue estremità coll'altro punto; dimostrare che il triangolo così formato ha invariabile la somma dei quadrati dei suoi lati:
- 90. ABC è un triangolo, A il vertice di un angolo acuto; dimostrare che il quadrato di BC è minore dei quadrati di AB , AC di due volte il quadrato della retta condotta da A tangente al cerchio descritto sopra BC , come diametro.

91. Descritte quante circonferenze si vogliano che passino per due punti dati, le rette che congiungono i loro punti d'intersezione con una circonferenza data, incontreranno tutte nello stesso punto la retta che unisce i due punti dati.

92. Se tre circonferenze si tagliano due a due, le loro tre corde d'intersezione s'incontreranno in uno stesso punto.

93. Sia $ABCD$ un semicerchio, il cui diametro è AB , e AD , BC siano due corde qualunque che si tagliano in P ; dimostrare che il quadrato di AB è eguale alla somma dei rettangoli contenuti da AD , AP , e da BC , BP .

94. Tirata la tangente comune a quanti si vogliano cerchi tangenti tra loro internamente, e descritto un cerchio col centro in un punto qualunque di questa tangente, il quale tagli gli altri cerchi; se dal centro di questo cerchio si tirino linee rette alle intersezioni dei cerchi, i segmenti di queste rette dentro tutti i cerchi saranno eguali tra loro.

95. Una retta PQ di data lunghezza si muove tra due rette fisse CP , CQ ; le perpendicolari condotte da P e Q sopra CP e CQ s'incontrano in R , e quelle da P e Q sopra CQ e CP s'incontrano in S ; dimostrare che i punti R si trovano tutti sopra una circonferenza e i punti S sopra un'altra, e queste circonferenze hanno lo stesso centro.

96. Se un semicerchio sia inscritto in un triangolo rettangolo in modo da esser tangente all'ipotenusa e ad un cateto, e dall'estremità del suo diametro sia condotta una linea per il punto di contatto coll'ipotenusa sino all'incontro del cateto prolungato, la parte prolungata sarà eguale al cateto.

97. La circonferenza che passa per due vertici di un triangolo, e per l'intersezione delle perpendicolari abbassate dai vertici sui lati opposti, sarà eguale alla circonferenza che passa per i tre vertici del triangolo.

— 98. AB , CD sono corde di un cerchio, di centro O , le quali si tagliano in E ad angoli retti; dimostrare che i quadrati di AB , CD , presi insieme con quattro volte il quadrato di OE , fanno il doppio del quadrato del diametro.

99. $ABCD$ è un parallelogrammo, ed è descritto un cerchio che passa per A , e taglia i lati AB , AD e la diagonale

AC rispettivamente nei punti F , H , G ; il rettangolo contenuto da AC , AG sarà eguale alla somma dei rettangoli contenuti da AB , AF e da AD , AH .

100. Dati l'angolo al vertice, la differenza dei lati che lo comprendono, e la differenza dei segmenti fatti sulla base dalla perpendicolare abbassata dal vertice; costruire il triangolo.



LIBRI SCOLASTICI.

- LA GRAMMATICA DEL MIO FELICINO**, Conversazioni offerte a Giovanetti studiosi da **ULISSE POGGI** Prof. di Letteratura Italiana nel R. Liceo di Reggio nell' Emilia. — Un volume. . . *Lire* 2
- BERTOLINI** (Francesco). **STORIA ROMANA** DAI PIÙ ANTICHI TEMPI FINO ALLO SCIoglimento DELL' IMPERO OCCIDENTALE, scritta ad uso della Gioventù italiana. *Seconda edizione*, riveduta ed ampliata dall' Autore con l' aggiunta del Periodo imperiale. — Un volume. . . 4
- RAFFAELLI** (Pietro). **COMPENDIO DI STORIA UNIVERSALE**, dalla creazione del mondo fino ad Augusto. — Un volume. . . 3
- ARIOSTO** (Lodovico). **ORLANDO FURIOSO**, conservato nella sua epica integrità, e recato ad uso della Gioventù dall' ab. *Giovacchino Avesani*, e corredato di Note storiche e filologiche. — Un grosso volume. . . 5 60
- ELEMENTI DI ARITMETICA** di **GIOVANNI NOVI**, professore di Algebra nella R. Università di Pisa. — Un volume. . . 1. 25
- TRATTATO DI ARITMETICA** di **GIUSEPPE BERTRAND**. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte di Giovanni Novi, Professore di Algebra nella R. Università di Pisa. — Un volume. . . 3. 25
- TRATTATO DI ALGEBRA ELEMENTARE** di **GIUSEPPE BERTRAND**. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte di Enrico Betti, Prof. di Algebra nella R. Università di Pisa. — Un volume. 3. 25
- TRATTATO DI TRIGONOMETRIA** di **G. ALFREDO SERRET**. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte di Antonio Ferrucci, Professore di Geometria e Geodesia nel Liceo militare. — Un vol. 3. 25
- TRATTATO DI GEOMETRIA ELEMENTARE** di **A. AMIOT**. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte di G. Novi, Professore di Algebra nella R. Università di Pisa. — Un volume con un atlante di 59 tavole. . . 6. 75
- TRATTATO DI ALGEBRA SUPERIORE** di **GIOVANNI NOVI**, prof. di Algebra superiore nella R. Università di Pisa. — *Parte prima*, ANALISI ALGEBRICA . . . 10. 00
- CORNELIO NIPOTE**. **DELLE VITE DEGLI ECCELLENTI CAPITANI**, illustrate con spiegazioni e note per cura di C. Gatti. — Un vol. . 1. 50
- LE FAVOLE DI FEDRO** corredate di spiegazioni e note italiane per cura di Carlo Gatti. — Un volume. . . 1. 00
- COMPENDIO DEGLI AMMAESTRAMENTI DI LETTERATURA** di Ferdinando Ranalli fatto da lui medesimo per uso delle Scuole. *Seconda edizione, corretta ed ampliata*. — Un volume. . . 4
- TEORICA DE' VERBI ITALIANI**, nuova edizione pubblicata per cura di Luigi Delâtre, preceduta da un *Trattato sulla formazione del verbo* e seguita da un *Saggio sulle sue funzioni*. . . 2. 75
- LIBRO DI PRIME LETTURE**, di Matteo Trenta. — Un vol. 1. 50
- SILLABARIO**, compilato da M. Cuturi e S. Benedetti. . . 1. 00
- LA PRONUNCIA DELLA LINGUA GRECA** esposta praticamente, per l' uso degli Italiani e delle scuole, da Gherardo Nerucci, maestro di Grammatica Greca nel Ginnasio di Pistoia, e a cui fan seguito alcune appendici riguardanti lo studio del Greco tanto antico che moderno. — Un volume. . . 2. 00
- GRAMMATICA DELLA LINGUA ITALIANA** di **GIUSEPPE CALEFFI**; edizione quarta, corretta ed arricchita di osservazioni secondo i manoscritti dell' Autore, per cura di Ulisse Poggi. — Un vol. 3 50
- NUOVO SILLABARIO** con parole d' esempio disposto sotto la direzione dell' Ispettore generale delle Scuole Primarie e Normali Commendatore **RAFFAELLO LAMBRUSCHINI**, Senatore del Regno. . . Cent. 90
- DEI MIGLIORI MODI D' INSEGNARE A LEGGERE**. Consigli dell' Ispettor generale delle Scuole Primarie e Normali Comm. **RAFFAELLO LAMBRUSCHINI**, Senatore del Regno. . . Cent. 30
- TABELLE DELLE SILLABE PER USO DELLE SCUOLE**, disposte dall' Ispettore generale delle Scuole Primarie e Normali Comm. **RAFFAELLO LAMBRUSCHINI**, Senatore del Regno. . . 1
- DIALOGHI SCELTI** di **AUGUSTO CONTI**, Prof. di Storia della Filosofia nella R. Università di Pisa, per utilità delle Scuole. — Un vol. 3. 50
- CORSO DI MATEMATICHE PER GL' ISTITUTI TECNICI**, secondo le norme degli ultimi Programmi ufficiali, per **GIUSEPPE PERI** dottore in Matematiche e Prof. nel R. Istituto Tecnico di Firenze. — *Parte prima*, ALGEBRA e TRIGONOMETRIA. . . 4
- ISTITUZIONI DI DIRITTO ROMANO** compilate dal professore **ALESSANDRO DOVERI**. — Seconda edizione accresciuta per note di confronto col *Codice Civile italiano*. — Due volumi in-8. . . 20

GLI

ELEMENTI D' EUCLIDE

CON NOTE

AGGIUNTE ED ESERCIZI

ALL' USO DEI GINNASI E DEI LICEI

PER CURA DEI PROFESSORI

ENRICO BETTI e FRANCESCO BRIOCHI

LIBRO 4° 5° e 6°

FIRENZE

SECCOSONI LE MONDRIER

LIRE 1.00

LIBRO QUARTO.

Definizioni.

I. Un poligono si dice *inscritto* in un altro poligono, quando i vertici del primo cadono nei lati del secondo.

II. Similmente, un poligono si dice *circoscritto* ad un altro poligono, quando i lati del primo contengono i vertici del secondo.

III. Un poligono si dice *inscritto* nel cerchio, quando tutti i suoi vertici sono nella circonferenza del cerchio.

IV. Un poligono si dice *circoscritto* al cerchio, quando tutti i suoi lati sono tangenti al cerchio.

V. Il cerchio si dice *inscritto* in un poligono, quando la circonferenza del cerchio è tangente a tutti i lati del poligono.

VI. Il cerchio si dice *circoscritto* ad un poligono, quando la circonferenza del cerchio passa per tutti i vertici del poligono.

VII. Una linea retta si dice *adattata* nel cerchio

quando i suoi termini sono nella circonferenza del cerchio.

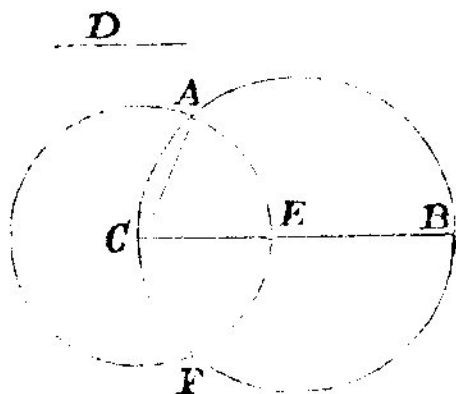
PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

In un dato cerchio adattare una linea retta uguale ad un'altra data, la quale non sia maggiore del diametro.

Sia ABC il cerchio dato, e D la linea retta data, non maggiore del diametro del cerchio: bisogna adattare nel cerchio ABC una linea retta uguale alla D .

Tirisi un diametro BC , e se BC è uguale alla D , sarà fatto ciò che si proponeva, perciocchè nel cerchio ABC si sarà adattata la BC uguale alla linea retta D . Ma se non è uguale, la BC è maggiore della D : pongasi la CE uguale alla D , e dal centro C coll'intervallo CE descrivasi il cerchio AEF , e conducasi CA .



Perchè il punto C è centro del cerchio AEF , la CA sarà uguale alla CE : ma la D è uguale alla CE : adunque eziandio la D sarà uguale alla AC . Onde nel dato cerchio ABC si è adattata la AC uguale alla data linea retta D , non maggiore del diametro del cerchio: il che bisognava fare.

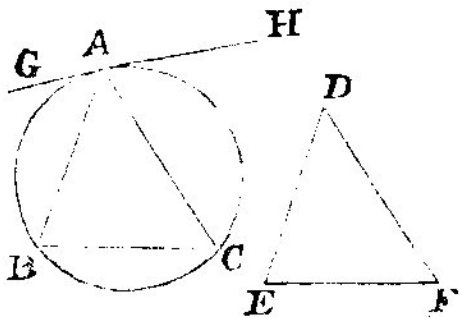
PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

In un dato cerchio inscrivere un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato.

Sia ABC il dato cerchio, e DEF il triangolo dato; bisogna inscrivere nel cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF .

Tirisi una linea retta GAH tangente al cerchio ABC nel punto A [III, 17], e costruiscasi l'angolo HAC uguale all'angolo DEF [I, 23] e l'angolo GAB uguale all'angolo DFE , e congiungasi B con C .



Poichè la linea retta HAG è tangente al cerchio ABC , e dal punto di contatto è tirata nel cerchio la AC , l'angolo HAC sarà uguale a quello che è nell'altro segmento del cerchio [III, 32], cioè all'angolo ABC ; ma l'angolo HAC è uguale all'angolo DEF ; adunque l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF . Per la medesima ragione l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE , ed il rimanente BAC sarà uguale al rimanente EDF [I, 32]. Adunque il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF , ed è inscritto nel cerchio ABC : onde nel dato cerchio si è inscritto un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato: il che bisognava fare.

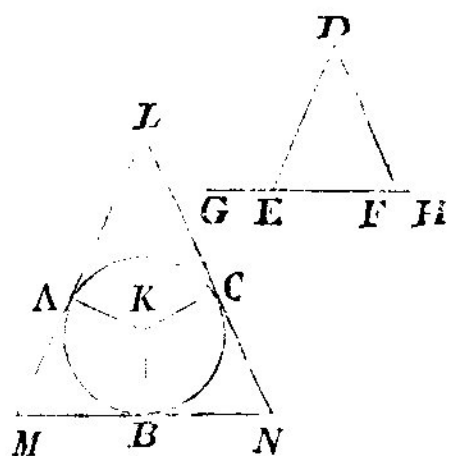
PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Ad un dato cerchio circoscrivere un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato.

Sia ABC il dato cerchio, e DEF il triangolo dato. Bisogna circoscrivere al cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF .

Prolunghisi da ciascuna parte la EF nei punti H, G , e dal centro K del cerchio ABC , tirisi la linea retta KB in qualsivoglia modo, e costruiscasi l'angolo BKA uguale all'angolo DEG [I, 23], e l'angolo BKC uguale all'angolo DFH , e per i punti A, B, C tirinsi le linee rette LAM, MBN, NCL , tangenti al cerchio ABC [III, 17].



Siccome LM, MN, NL sono tangenti al cerchio ABC ne' punti A, B, C , e dal centro K a' punti A, B, C si sono tirati i raggi KA, KB, KC , gli angoli ai punti A, B, C saranno retti [III, 18]. E siccome la somma dei quattro angoli del quadrilatero $AMBK$ è uguale a quattro retti (perchè si può dividere in due triangoli), e gli angoli KAM, KBM sono retti, i rimanenti AKB, AMB faranno insieme due retti: ma anche gli angoli DEG, DEF fanno insieme due retti: dunque la somma degli angoli AKB, AMB è uguale a quella degli angoli DEG, DEF . Di questi, AKB è uguale a DEG : dunque il rimanente AMB sarà uguale al rimanente DEF . Si dimostrerà parimente che l'angolo CNB è uguale all'angolo DFE : e però il

rimanente MLN sarà uguale al rimanente EDF . È adunque il triangolo LMN equiangolo al triangolo DEF , e circoscritto al cerchio ABC : onde al dato cerchio si è circoscritto un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato: il che bisognava fare.

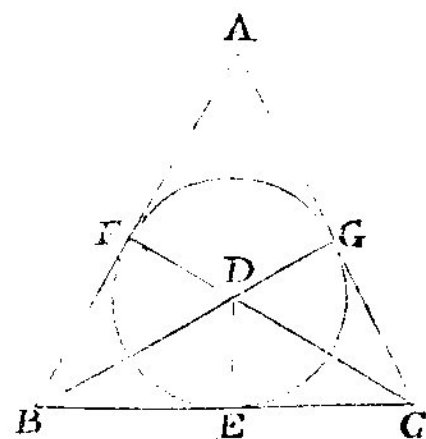
PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

In un dato triangolo inscrivere un cerchio.

Sia il triangolo dato ABC ; bisogna nel triangolo ABC inscrivere un cerchio.

Seghinsi gli angoli ABC , BCA per metà colle linee rette BD , CD [I, 9], le quali concorrano insieme nel punto D , e dal punto D tirinsi le DE , DF , DG perpendicolari alle linee rette BC , AB , CA [I, 12].



Siccome l'angolo ABD è uguale all'angolo CBD , e l'angolo retto BED è uguale al retto BFD , ed il lato BD comune, sarà DE uguale a DF [I, 26]. Per la medesima ragione DG sarà uguale a DF ; onde le tre linee rette DE , DF , DG sono fra loro uguali. E perciò il cerchio descritto dal centro D , coll'intervallo di una di esse, passerà pei punti E , F , G , e sarà tangente alle linee rette AB , BC , CA , essendo gli angoli E , F , G retti [III, 16]. Laonde nel dato triangolo si è inscritto un cerchio: il che bisognava fare.

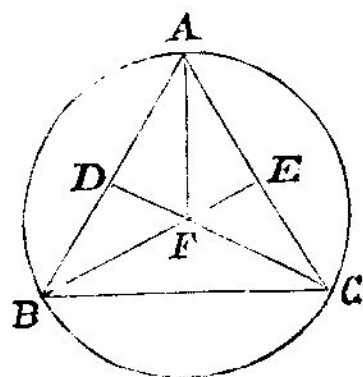
PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

Ad un dato triangolo circoscrivere un cerchio.

Sia il triangolo dato ABC ; bisogna circoscrivere ad esso un cerchio.

Seghinsi le AB , AC per metà ne' punti D , E [I, 10], e dai punti D , E tirinsi ad angoli retti sopra le BA , AC [I, 11] le rette DF , EF le quali concorrano nel punto F , e conducansi FB , FC , FA .



Perchè la AD è uguale alla DB , la DF è comune, e gli angoli ADF , BDF sono uguali, la base AF sarà uguale alla base FB . Si dimostrerà parimente che la CF è uguale alla FA ; onde le FA , FB , FC sono fra loro uguali, e il cerchio descritto dal centro F , col l'intervallo di una di esse, passerà pei punti A , B , C , cioè sarà circoscritto al triangolo ABC : il che bisognava fare.

COROLLARIO.

È manifesto che il centre del circolo cadrà dentro o fuori del triangolo o sopra un lato, secondo che il triangolo sia acutangolo, ottusangolo o rettangolo [III, 31].

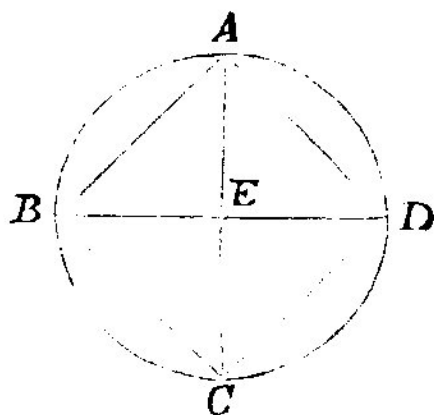
PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

In un dato cerchio inscrivere un quadrato.

Sia il dato cerchio $ABCD$. Bisogna in esso inscrivere un quadrato.

Tirinsi AC , BD diametri del cerchio $ABCD$ ad angoli retti fra loro, e conducansi AB , BC , CD , DA .



Perchè la BE è uguale alla ED , essendo E il centro, e la EA è comune, e gli angoli BEA , DEA sono retti, sarà la base BA uguale alla base AD . E per la medesima ragione l'una e l'altra delle BC , CD è uguale all'una e l'altra delle BA , AD : dunque il quadrilatero $ABCD$ è equilatero. Dico che inoltre è rettangolo. Perciocchè essendo la linea retta BD diametro del cerchio $ABCD$, sarà BDA mezzo cerchio, onde l'angolo BAD è retto [III, 31]. E per la medesima ragione ciascuno degli angoli ABC , BCD , CDA è retto: dunque il quadrilatero $ABCD$ è rettangolo. Ma si è dimostrato che è equilatero, onde sarà necessariamente un quadrato: è inoltre inscritto nel cerchio $ABCD$: adunque nel dato cerchio si è inscritto un quadrato: il che bisognava fare.

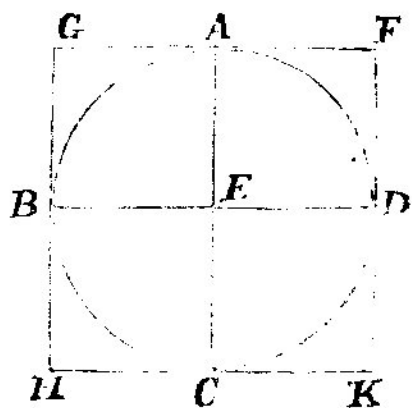
PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA.

Ad un dato cerchio circoscrivere un quadrato.

Sia il cerchio dato $ABCD$. Bisogna ad esso circoscrivere un quadrato.

Tirinsi due diametri AC , BD ad angoli retti fra loro, e pei punti A , B , C , D , tirinsi le FG , GH , HK , KF , che siano tangenti al cerchio $ABCD$.



Perchè la FG è tangente al cerchio $ABCD$, e dal centro E al punto di contatto A è condotta la EA , gli angoli che sono al punto A saranno retti [III, 18]. Per la medesima ragione gli angoli ne' punti B , C , D sono ancora retti; e perchè l'angolo AEB è retto, ed è retto parimente l'angolo EBG , sarà la GH parallela alla AC [I, 28], e similmente la AC parallela alla FK ; e perciò sarà la GH parallela alla FK [I, 30]. Dimostreremmo similmente, che l'una e l'altra delle GF , HK è parallela alla BD , e perciò la GF è parallela alla HK . Sono dunque GK , GC , AK , FB , BK parallelogrammi; onde la GF è uguale alla HK [I, 34], e la GH alla FK . E siccome la AC è uguale alla BD , e la AC è uguale all'una e l'altra delle GH , FK , e la BD uguale all'una e l'altra delle GF , HK ; saranno le GF , HK , GH , FK uguali tutte fra loro: dunque il quadrilatero $FGHK$ è equilatero. Dico che eziandio è rettangolo. Perciocchè essendo $GBEA$ parallelogrammo, ed essendo l'angolo AEB retto, sarà retto

ancora AGB [I, 34]. Dimostreremmo parimente che gli angoli ne' punti H , K , F sono retti: adunque il quadrilatero $FGHK$ è rettangolo. Ma si è dimostrato che è equilatero, onde è necessariamente un quadrato: è inoltre circoscritto al cerchio $ABCD$: adunque al dato cerchio si è circoscritto un quadrato: il che bisognava fare.

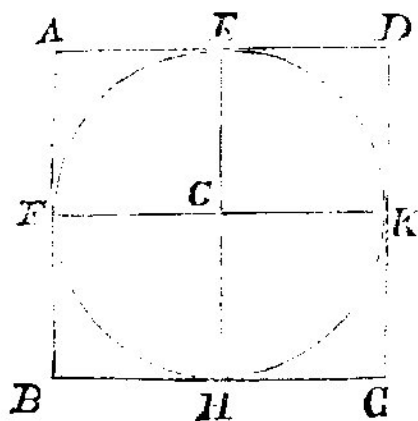
PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

In un dato quadrato inscrivere un cerchio.

Sia il dato quadrato $ABCD$. Bisogna in esso inscrivere un cerchio.

Seghisi l'una e l'altra delle AB , AD per metà ne' punti F , E ; e per E tirisi la EH parallela ad una delle AB , CD ; e per F la FK parallela ad una delle AD , BC .



Adunque ciascuno dei quadrilateri AK, KB ; AH, HD ; AG, GC ; BG, GD è parallelogrammo, ed i loro lati opposti sono uguali. Poichè la DA è uguale alla AB , e la AE è la metà della AD , e la AF la metà della AB , sarà la AE uguale alla AF , e perciò la FG è uguale alla GE . Dimostreremmo similmente che l'una, e l'altra delle GH, GK è uguale all'una e l'altra delle FG, GE ; dunque le quattro GE , GF , GH , GK sono fra loro uguali. E però il cerchio descritto dal centro G , col l'intervallo di una di esse, passerà per i punti F, H, K, E , e sarà tangente in essi alle linee rette AB , BC , CD , DA ,

perciocchè gli angoli nei punti E, F, H, K sono retti [III, 16]. Adunque nel dato quadrato si è inscritto un cerchio: il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

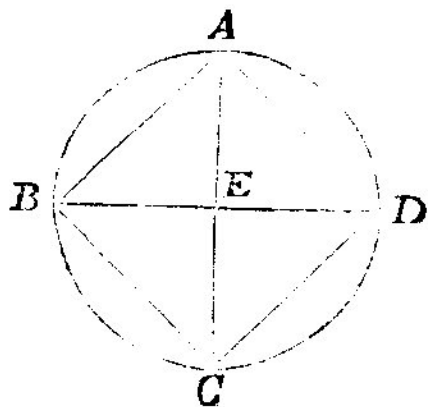
Ad un dato quadrato circoscrivere un cerchio.

Sia il dato quadrato $ABCD$. Bisogna ad esso circoscrivere un cerchio.

Conducansi AC, BD , che si seghino fra loro nel punto E .

Siccome la DA è uguale al-

la AB , e la AC è comune, e la base DC è uguale alla base CB , l'angolo DAC sarà uguale all'angolo BAC [I, 8]: dunque l'angolo DAB è segato per mezzo dalla linea retta AC . Dimostreremmo similmente che ciascun angolo ABC ,



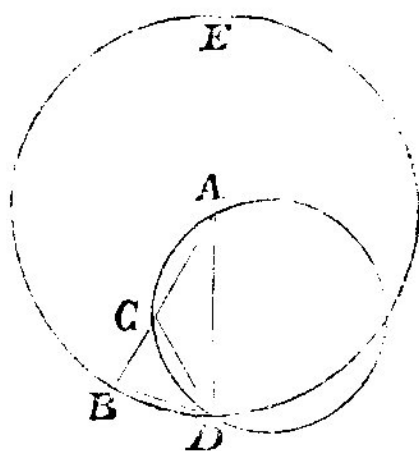
BCD , CDA è segato per mezzo dalle linee rette AC , BD : e perchè l'angolo DAB è uguale all'angolo ABC , ed è l'angolo EAB la metà dell'angolo DAB , e l'angolo EBA dell'angolo ABC , sarà l'angolo EAB uguale all'angolo EBA . Onde ancora il lato EA è uguale al lato EB [I, 6]. Dimostreremmo similmente che l'una e l'altra delle linee rette EC , ED è uguale all'una e l'altra delle EA , EB : adunque le quattro linee rette EA , EB , EC , ED sono fra loro uguali. Perciò il cerchio descritto dal centro E , coll'intervallo di una di esse, passerà per i punti A, B, C, D ; e però al dato quadrato si è circoscritto un cerchio: il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Costruire un triangolo isoscele che abbia ambedue gli angoli alla base doppi del rimanente.

Sia data una linea retta AB , e seghisi nel punto C di modo che il rettangolo contenuto dalle AB , BC sia uguale al quadrato descritto sulla CA [II, 11]: e dal centro A coll' intervallo AB descrivasi il cerchio BDE , e si adatti nel cerchio BDE una linea retta BD , uguale alla AC che non è maggiore del diametro del cerchio BDE [IV, 1], e condotte DA , DC , circoscrivasi il cerchio ACD al triangolo ADC [IV, 5].



Poichè il rettangolo delle AB , BC è eguale al quadrato della AC , ed è la AC uguale alla BD , sarà il rettangolo delle AB , BC uguale al quadrato di BD . E siccome fuori del cerchio ACD si è preso un punto B , e da B sono tirate al cerchio ACD due linee rette BCA , BD , l' una delle quali sega e l' altra incontra il cerchio, ed il rettangolo delle BA , BC è uguale al quadrato di BD , la linea retta DB sarà tangente al cerchio ACD [III, 37]. Inoltre, poichè BD è tangente e dal punto di contatto D è tirata la DC , l' angolo BDC sarà uguale à quello contenuto nell' altro segmento del cerchio, cioè all' angolo DAC [III, 32]. Aggiungasi ad entrambi l' angolo CDA : sarà tutto BDA eguale alla somma dei due angoli CDA , DAC . Ora l' angolo esterno BCD è uguale alla somma dei due angoli CDA , DAC , laonde BDA è uguale a BCD .

Ma l'angolo BDA è uguale all'angolo CBD , perciocchè il lato AD è uguale al lato AB [I, 5]: adunque DBA sarà uguale à BCD , cioè i tre angoli BDA , DBA , BCD saranno fra loro uguali. E siccome l'angolo DBC è uguale all'angolo BCD , sarà il lato BD uguale al lato DC [I, 6]: ma BD è posta uguale a CA , adunque eziandio AC è uguale a CD , e però l'angolo CDA all'angolo DCA ; onde gli angoli CDA , DAC insieme fanno il doppio dell'angolo DAC . Ma l'angolo BCD è uguale alla somma degli angoli CDA , DAC ; adunque BCD è doppio dell'angolo DAC . Ma BCD è uguale all'uno e l'altro dei due DBA , DBA ; e perciò entrambi questi sono doppi dell'angolo DAB : laonde si è costruito un triangolo isoscele ABD che ha ambedue gli angoli che sono alla base BD doppi del rimanente: il che bisognava fare.

A

PROPOSIZIONE XI.

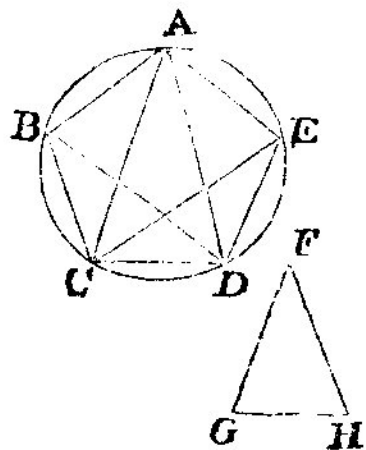
C

PROBLEMA.

B ^D In un dato cerchio inscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia il dato cerchio $ABCDE$: bisogna in esso inscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo.

Facciasi un triangolo isoscele FGH che abbia ciascuno degli angoli G , H doppio dell'angolo F [IV, 10], ed inscrivasi nel cerchio $ABCDE$ il triangolo ACD equiangolo al triangolo FGH [IV, 2], di modo che CAD sia uguale all'angolo F , e ciascuno dei due ACD , CDA sia uguale a



ciascuno degli angoli G, H : sarà adunque l'uno e l'altro dei due ACD, CDA doppio dell'angolo CAD . Seghisi ciascuno di essi ACD, CDA per metà colle linee rette CE, DB [I, 9]; e conducansi AB, BC, DE, EA .

Perchè ciascuno degli angoli ACD, CDA è doppio dell'angolo CAD , e sono segati per mezzo colle linee rette CE, DB , i cinque angoli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA sono fra loro uguali; ma gli angoli uguali insistono sopra archi uguali [III, 26]; adunque i cinque archi AB, BC, CD, DE, EA sono uguali fra loro. Ma gli archi uguali sottendono corde eguali [III, 29], onde le cinque corde AB, BC, CD, DE, EA sono uguali fra loro, ed il pentagono $ABCDE$ è equilatero. Dico che è ancora equiangolo. Perchè essendo l'arco AB uguale all'arco DE , aggiungendo ad ambedue BCD , sarà tutto l'arco $ABCD$ uguale a tutto l'arco $EDCB$: ma sopra l'arco $ABCD$ insiste l'angolo AED , e sopra l'arco $EDCB$ l'angolo BAE ; adunque l'angolo BAE è uguale all'angolo AED : e per la medesima ragione ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDE è uguale a ciascuno dei due BAE, AED ; onde il pentagono $ABCDE$ è equiangolo. Ma si è dimostrato essere equilatero; adunque nel dato cerchio si è inscritto un pentagono equilatero ed equiangolo: il che bisognava fare.

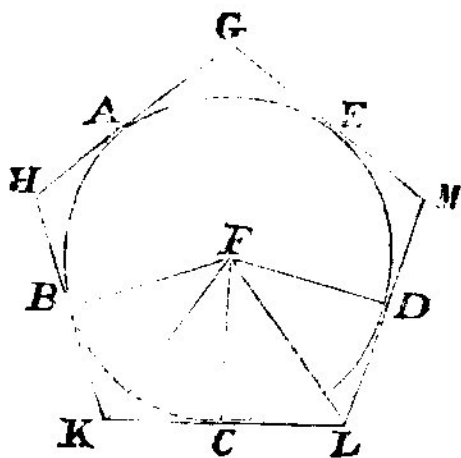
PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Ad un dato cerchio circoscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia il dato cerchio $ABCDE$: bisogna circoscrivere ad esso un pentagono equilatero ed equiangolo.

Intendansi i punti A, B, C, D, E essere i vertici del pentagono equilatero ed equiangolo inscritto nel dato cerchio, di modo che gli archi AB, BC, CD, DE, EA siano fra loro uguali [IV, 11], e per i punti A, B, C, D, E tirinsi le linee GH, HK, KL, LM, MG tan-



genti al cerchio [III, 17], e preso il centro del cerchio $ABCDE$, che sia F , conducansi FB, FK, FC, FL, FD .

Perchè la linea retta KL è tangente al cerchio $ABCDE$ nel punto C , e dal centro F al punto di contatto C si è tirata la linea retta FC , sarà la FC perpendicolare alla KL : dunque gli angoli in C sono retti, e per la medesima ragione gli angoli in B, D sono pur retti. E perchè l'angolo FCK è retto, il quadrato di FK è uguale alla somma dei quadrati di FC, CK [I, 47], e parimente il quadrato di FK è eguale alla somma dei quadrati di FB, BK ; onde la somma dei quadrati di FC, CK è uguale alla somma dei quadrati di FB, BK . Di questi il quadrato di FC è uguale al quadrato di FB ; adunque il quadrato rimanente di CK sarà uguale al quadrato di BK , e però la BK è uguale alla CK . E perchè FB è uguale alla FC , ed FK è comune, e la base BK è uguale alla base KC , l'angolo BFK è uguale all'angolo KFC [I, 8], e l'angolo BKF all'angolo FKC , onde l'angolo BFC è doppio dell'angolo KFC , e l'angolo BKC è doppio dell'angolo FKC . Per la medesima ragione l'angolo CFD è doppio dell'angolo CFL , e l'angolo CLD è doppio dell'angolo CLF ; e perchè l'arco BC è uguale all'arco CD , l'angolo BFC sarà uguale all'angolo CFD [III, 27], onde l'angolo KFC è uguale all'angolo CFL . Adunque i due

triangoli FKC , FLC hanno due angoli rispettivamente uguali ed il lato FC comune, laonde sarà KC uguale a CL , e l'angolo FKC all'angolo FLC [I, 26]: e perchè KC è uguale a CL , sarà la KL doppia della KC . Per la medesima ragione si dimostrerà che la HK è doppia della BK : e perchè la BK si è dimostrata uguale alla KC , sarà la HK uguale alla KL . Similmente ciascheduna delle GH , GM , ML si dimostrerà uguale all'una e l'altra delle HK , KL ; adunque il pentagono $GHKLM$ è equilatero. Dico che eziandio è equiangolo. Perciocchè essendo l'angolo FKC uguale all'angolo FLC , e l'angolo HKL doppio dell'angolo FKC , e l'angolo KLM doppio dall'angolo FLC , sarà anche l'angolo HKL uguale all'angolo KLM : e parimente si dimostrerà che ciascuno degli angoli KHG , HGM , GML è uguale all'uno e l'altro dei due HKL , KLM : adunque i cinque angoli GHK , HKL , KLM , LMG , MGH sono fra loro uguali, e però il pentagono $GHKLM$ è equiangolo. Ma si è già dimostrato che è equilatero, ed è circoscritto al cerchio $ABCDE$; onde al dato cerchio si è circoscritto un pentagono equilatero ed equiangolo: il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XIII.

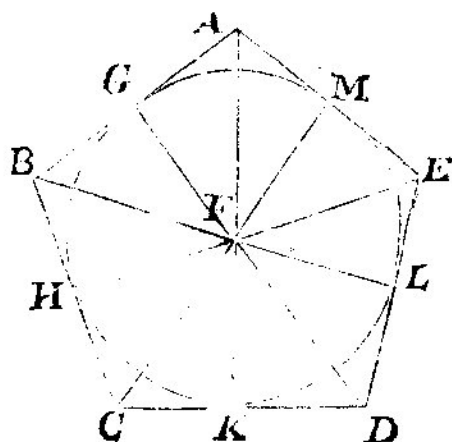
PROBLEMA.

In un dato pentagono equilatero ed equiangolo inscrivere un cerchio.

Sia $ABCDE$ il dato pentagono equilatero ed equiangolo. Bisogna in esso inscrivere un cerchio.

Seghisi per metà l'uno e l'altro angolo BCD , CDE [I, 9] colle linee rette CF , DF , e dal punto F , nel quale s'incontrano CF , DF , tirinsi le linee rette FB , FA , FE .

Poichè la BC è uguale alla CD , e la CF comune, e l'angolo BCF è uguale all'angolo DCF , sarà la base BF uguale alla base FD , e l'angolo CBF uguale all'angolo CDF : e perchè l'angolo CDE è doppio dell'angolo CDF , e l'angolo CDE è uguale all'angolo ABC , e l'angolo CDF uguale all'angolo CBF , sarà l'angolo CBA doppio dell'angolo CBF , e però l'angolo ABF uguale all'angolo FBC ; adunque l'angolo ABC è diviso per metà dalla linea retta BF . Si dimostrerà così che ciascuno degli angoli BAE , AED è diviso per metà dalle linee rette AF , FE . Dal punto F tirinsi alle linee rette AB , BC , CD , DE , EA le perpendicolari FG , FH , FK , FL , FM , e perchè l'angolo HCF è uguale all'angolo KCF ed è il retto FHC uguale al retto FKC , i due triangoli FHC , FKC avranno due angoli uguali a due angoli, ed il lato FC comune; onde sarà la perpendicolare FH uguale alla perpendicolare FK [I, 26]. Si dimostrerà eziandio che ciascuna delle FL , FM , FG è uguale all'una e l'altra delle FH , FK : adunque le cinque linee rette FG , FH , FK , FL , FM sono fra loro uguali; e però il cerchio descritto dal centro F , coll'intervallo di una di esse, passerà per i punti G , H , K , L , M e sarà tangente in essi alle linee rette AB , BC , CD , DE , EA , perciocchè gli angoli in G , H , K , L , M sono retti [III, 16]. Adunque nel dato pentagono equilatero ed equiangolo si è inscritto un cerchio: il che bisognava fare.



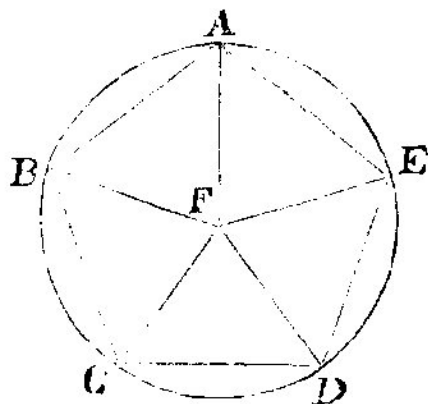
PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Ad un dato pentagono equilatero ed equiangolo circoscrivere un cerchio.

Sia $ABCDE$ il dato pentagono equilatero ed equiangolo; bisogna ad esso circoscrivere un cerchio.

Seghisi per metà colle linee rette CF , FD ciascuno degli angoli BCD , CDE , e dal punto F , nel quale s'incontrano, tirinsi le FB , FA , FE a' punti B , A , E .



Come nell'antecedente proposizione, si dimostrerà che ciascuno degli angoli CBA , BAE , AED è segato per metà dalle linee rette BF , FA , FE : e perchè l'angolo BCD è uguale all'angolo CDE , e l'angolo FCD è la metà dell'angolo BCD , e l'angolo CDF la metà dell'angolo CDE , sarà l'angolo FCD uguale all'angolo CDF ; onde il lato CF è uguale al lato FD . Si dimostrerà parimente che ciascuna delle FB , FA , FE è uguale a ciascuna delle FC , FD . Adunque le cinque linee rette FA , FB , FC , FD , FE sono fra loro uguali: onde dal centro F coll'intervallo di una di esse descrivendosi un cerchio, questo passerà per i punti A, B, C, D, E . Adunque al dato pentagono equilatero ed equiangolo si è circoscritto un cerchio: il che bisognava fare.

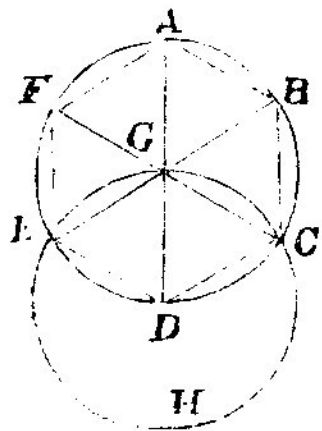
PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

In un dato cerchio inscrivere un esagono equilatero ed equiangolo.

Sia $ABCDEF$ il cerchio dato; bisogna in esso inscrivere un esagono equilatero ed equiangolo.

Trovinsi il centro G del cerchio $ABCDEF$, e tirisi il diametro AGD ; e dal centro D col l'intervallo DG descrivasi il cerchio $EGCH$; e condotte EG , CG , prolunghinsi ne' punti B , F , e tirinsi AB , BC , CD , DE , EF , FA . Dico che l' esagono $ABCDEF$ è equilatero ed equiangolo.



Essendo il punto G centro del cerchio $ABCDEF$, la GE sarà uguale alla GD ; e perchè D è centro del cerchio $EGCH$, anche la DE sarà uguale alla DG ; onde il triangolo EGD è equilatero, e però i tre angoli di esso EGD , GDE , DEG sono uguali fra loro, perciocchè gli angoli che sono alla base dei triangoli isosceli sono uguali. Ma la somma dei tre angoli del triangolo è uguale a due retti: adunque l'angolo EGD è la terza parte di due retti. Dimostreremmo anche che DGC è la terza parte di due retti; e perchè la somma degli angoli EGC , CGB è uguale a due retti [I, 13], sarà il rimanente CGB la terza parte di due retti; onde gli angoli EGD , DGC , CGB sono fra loro uguali. Ma gli angoli BGA , AGF , FGE sono uguali agli

angoli EGD , DGC , CGB [I, 15]; dunque i sei angoli EGD , DGC , CGB , BGA , AGF , FGE sono fra loro uguali: e siccome gli angoli al centro uguali insistono sopra archi eguali, saranno i sei archi AB , BC , CD , DE , EF , FA fra loro eguali [III, 26], ed eguali pure le corde ad essi sottese [III, 29], e però l'esagono $ABCDEF$ è equilatero. Dico che è inoltre equiangolo. Perciocchè essendo l'arco AF uguale all'arco ED , pongasi l'arco $ABCD$ comune; sarà tutto l'arco $FABCD$ uguale a tutto l'arco $EDCBA$, e l'angolo FED che insiste sopra l'arco $FABCD$ eguale all'angolo AFE che insiste sopra l'arco $EDCBA$. Si dimostreranno ancora gli altri angoli dell'esagono $ABCDEF$ uguali all'uno e l'altro di essi AFE , FED : onde l'esagono $ABCDEF$ è equiangolo. Ma si è dimostrato che è equilatero, ed è inscritto nel cerchio $ABCDEF$: adunque nel dato cerchio si è inscritto un esagono equilatero ed equiangolo, il che bisognava fare.

COROLLARIO.

Di qui è chiaro che il lato dell'esagono è uguale al raggio del cerchio. E se per i punti A , B , C , D , E , F si tireranno le rette tangenti al cerchio, sarà circoscritto al cerchio un esagono equilatero ed equiangolo, in virtù delle cose dette pel pentagono; e similmente dato un esagono equilatero ed equiangolo, inscriveremmo e circoscriveremmo ad esso un cerchio, come si è fatto nel pentagono.

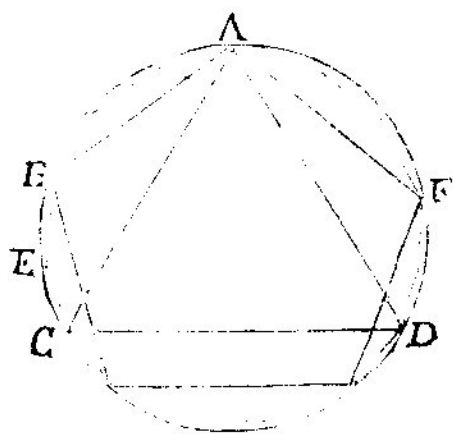
PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA.

In un dato cerchio inscrivere un pentedecagono equilatero ed equiangolo.

Sia $ABCD$ il dato cerchio; bisogna in esso inscrivere un pentedecagono equilatero ed equiangolo.

Adattisi nel cerchio $ABCD$ il lato AC del triangolo equilatero inscritto in esso [VI, 2], ed il lato AB del pentagono equilatero ed equiangolo [IV, 11]. Di quelle parti delle quali l'intera circonferenza $ABCD$ ne contiene 15, l'arco ABC , essendone la terza parte, ne conterrà 5, e l'arco AB , che è la quinta parte, ne conterrà 3; dunque la differenza BC ne contiene 2. Seghisi l'arco BC per mezzo nel punto E , onde l'uno e l'altro degli archi BE , EC sarà la quindicesima parte della circonferenza $ABCD$. Dunque, adattando successivamente nel cerchio $ABCD$ delle corde uguali alle congiungenti BE , EC sarà inscritto in esso un pentedecagono equilatero ed equiangolo: il che bisognava fare.



Simigliantemente alle cose dette pel pentagono, se nei punti di divisione del cerchio tireremo le rette ad esso tangenti, si circoscriverà al medesimo un pentedecagono equilatero ed equiangolo: ed oltre a questo, come nel pentagono, potremo in un dato pentedecagono equilatero ed equiangolo inscrivere e circoscrivere un cerchio.

Esercizi.

- 1. Adattare in un cerchio una linea retta di lunghezza data e che passi per un dato punto.
- 2. Tirare un diametro di un cerchio, che sia distante di una lunghezza data da un dato punto.
- 3. Il quadrato del lato di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio è triplo del quadrato del lato dell'esagono regolare inscritto nel medesimo cerchio. (*)
- 4. Un triangolo equilatero è inscritto in un cerchio, e sono condotte per i suoi vertici le tangenti al cerchio; dimostrare che queste formano un triangolo equilatero eguale a quattro volte il primo triangolo.
- 5. Dimostrare che si può descrivere una circonferenza che passi per i centri di quattro cerchi, ciascuno dei quali sia tangente a un lato e ai due adiacenti prolungati, di un quadrilatero.
- 6. La somma dei diametri dei due cerchi, uno inscritto e l'altro circoscritto a un triangolo rettangolo, è eguale alla somma dei due cateti.
- 7. La perpendicolare abbassata dal vertice alla base di un triangolo equilatero è eguale al lato di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio il cui diametro è la base.
- 8. Inscrivere un quadrato e un cerchio in un dato quadrante. (**)
- 9. Trovare i centri dei tre cerchi, ciascuno dei quali è tangente a un lato e al prolungamento degli altri due di un triangolo; e dimostrare che la retta, che congiunge due qualunque di questi centri, è perpendicolare alla retta che congiunge il centro del cerchio inscritto al triangolo col vertice compreso tra essi.

(*) Un poligono dicesi *regolare*, se è equilatero ed equiangolo.

(**) *Quadrante* è la quarta parte del cerchio.

- 10. La bisettrice di un angolo di un triangolo inscritto in un cerchio taglia la circonferenza in un punto equidistante dalle estremità del lato opposto all'angolo bisecato e dal centro del cerchio inscritto.
- 11. $ABCD$ è un rettangolo: se nel triangolo ABC sia inscritto un cerchio, e siano E, F i punti di contatto di questo coi lati AB, BC , e si tirino EGH, FGK parallele ad AD, CD , il rettangolo HK sarà eguale al gnomone AFH .
- 12. Il luogo dei centri dei cerchi inscritti nei triangoli rettangoli che hanno la stessa ipotenusa, è l'arco del quadrante descritto sopra la ipotenusa comune.
- 13. Se in un triangolo qualunque ABC , la retta AD biseca l'angolo A e taglia BC in D , e si tira dal centro O del cerchio inscritto la OE perpendicolare a BC , l'angolo BOE sarà eguale all'angolo COD .
- 14. Inscrivere un quadrato in un dato triangolo rettangolo e isoscele.
- 15. Descrivere una circonferenza tangente a un dato cerchio e che passi per due punti dati; e dimostrare che di tutte le rette condotte dai due punti a un punto della parte convessa della circonferenza del dato cerchio, quelle condotte al punto di contatto faranno il massimo angolo.
- 16. Un esagono regolare inscritto è $\frac{3}{4}$ di quello circoscritto al medesimo cerchio.
- 17. Sopra una retta data come diagonale descrivere un rombo, che abbia due dei suoi angoli doppi degli altri due. Quindi mostrare come si può trisecare un angolo retto.
- 18. Dati l'angolo al vertice, la bisettrice di questo angolo, e la differenza della base e della somma dei lati; costruire il triangolo.
- 19. Tirare dal vertice dell'angolo ottuso di un dato triangolo una retta alla base, in modo che il suo quadrato sia eguale al rettangolo contenuto dai segmenti della base.
- 20. I centri dei cerchi inscritto e circoscritto a un triangolo equilatero coincidono, e il diametro di uno è doppio di quello dell'altro.
- 21. La retta che congiunge i centri del cerchio inscritto

e di quello circoscritto a un triangolo, sottende a ciascuno dei vertici un angolo eguale alla semidifferenza degli altri due angoli del triangolo.

▲ 22. Dati gli angoli di un triangolo e il raggio del cerchio inscritto; costruire il triangolo.

23. Dati l'angolo al vertice di un triangolo, e i raggi del cerchio inscritto e circoscritto; costruire il triangolo.

24. Porre in un dato cerchio otto cerchi tangenti tra loro e al cerchio dato.

25. Le rette che congiungono i vertici alterni, o le intersezioni dei lati alterni, di un pentagono regolare, formano un altro pentagono regolare.

26. Sopra una data retta descrivere un ottagono regolare.

27. Inscrivere in un dato cerchio un rettangolo eguale a un dato poligono.

28. L'ottagono regolare inscritto in un cerchio è eguale al rettangolo contenuto dai lati dei quadrati inscritto e circoscritto.

29. Inscrivere un quadrato nello spazio compreso da due cerchi eguali che si tagliano.

– 30. Inscrivere un cerchio in un rombo dato.

31. $ABCD$ è un quadrilatero inscritto in un cerchio: prolunghiamo AD , BC fin che s'incontrino in E ; da un punto qualunque F di DE tiriamo FH parallela a BE , che incontri CD in H , e conduciamo FB che tagli la circonferenza in G : dimostrare che GH taglierà di nuovo la circonferenza in un punto fisso K .

32. Inscrivere un triangolo equilatero in un dato quadrato, con un vertice nel mezzo di un lato, e poi con un vertice in un vertice del quadrato.

33. Inscrivere in un dato quadrato il quadrato minimo.

34. Descrivere una circonferenza che passi per un vertice e sia tangente a due lati di un dato quadrato.

35. Nella figura (EUCL., IV, 10) dimostrare che AC è il lato di un decagono regolare inscritto nel cerchio maggiore e di un pentagono regolare inscritto nel minore.

36. Nella figura (EUCL., IV, 10), prolungata DE fino

all'incontro col cerchio in F , l'angolo ABF sarà triplo dell'angolo BFD .

37. Se $ABCDE$ è un pentagono regolare, la somma degli angoli ABE , BCA , CDB , DEC , EAD sarà eguale a due retti.

38. Dato un pentagono regolare, descrivere un triangolo che gli sia eguale ed abbia la stessa altezza.

39. Se si tirino in un pentagono regolare due diagonali che si taglino tra loro, i segmenti maggiori saranno eguali a un lato del pentagono.

40. Dividere un angolo retto in cinque parti eguali.

41. I lati opposti di un esagono regolare sono paralleli; e se due lati di un esagono inscritto sono paralleli a due altri lati, saranno paralleli anche i rimanenti.

42. Inscrivere un esagono regolare in un dato triangolo equilatero e confrontarne la grandezza con quella del triangolo.

43. Inscrivere un decagono regolare in un dato cerchio, e dimostrare che è eguale al quadrato di un lato del triangolo equilatero inscritto nello stesso cerchio.

44. Due lati alterni AB , CD di un poligono regolare prolungati s'incontrino in E ; dimostrare che la figura $AECO$, essendo O il centro del poligono, può essere inscritta in un cerchio.

45. Dato un poligono regolare inscritto in un cerchio: mostrare come si può inscrivere e circoscrivere allo stesso cerchio un altro poligono regolare di un doppio numero di lati.

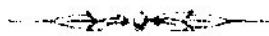
46. Se R ed r siano i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto a un poligono regolare, ed R' , r' i raggi corrispondenti dei poligoni regolari dello stesso perimetro e di un numero doppio di lati, dimostrare che r' è eguale alla semisomma di R ed r , e che il quadrato di R' è eguale al rettangolo contenuto da R ed r' .

47. Se da un punto qualunque preso dentro un poligono regolare di n lati si tirino le n perpendicolari ai lati, la somma di queste sarà eguale ad n volte il raggio del cerchio inscritto al poligono. Come si può far comprendere a questo teorema anche il caso in cui il punto è preso fuori del poligono?

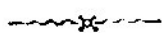
48. Se dai vertici di un triangolo equilatero si tirino rette parallele tra loro (*ordinate*) fino ad una retta data fuori del triangolo, la somma di queste ordinate e quella delle *ascisse* (cioè dei segmenti della retta data compresi fra le ordinate ed un punto preso fuori di esse) saranno rispettivamente eguali a tre volte l'ordinata e l'ascissa del centro del cerchio inscritto al triangolo. Dimostrare che questo è vero anche di un poligono regolare qualunque, e spiegare come si possa far comprendere a questo teorema anche il caso in cui la retta data tagli la figura, e il punto fisso sia situato comunque sopra la retta.

49. Se dai vertici di un triangolo equilatero si tirino le ordinate fino ad un diametro del cerchio circoscritto, la ordinata che cade sola da una parte del diametro sarà eguale alla somma delle due che cadono dall'altra parte, e il segmento del diametro che solo è da una parte del centro, è eguale alla somma dei due che rimangono dall'altra parte.

50. Se ABC è un triangolo equilatero; e P un punto qualunque di un cerchio concentrico al cerchio circoscritto al triangolo, la somma dei quadrati di PA , PB , PC sarà costante; e se $ABCP$, $A'B'C'P'$ siano cerchi concentrici ed ABC , $A'B'C'$ triangoli equilateri inscritti, in essi la somma dei quadrati di $P'A$, $P'B$, $P'C$ sarà eguale alla somma dei quadrati di PA , PB , PC .



LIBRO QUINTO.



Definizioni.

I. Di due grandezze omogenee la minore si dice *parte* della maggiore, quando quella misura questa esattamente.

II. Di due grandezze omogenee la maggiore si dice *multiplice* della minore, quando quella è misurata da questa esattamente.

III. *Ragione* è una scambievole relazione fra due grandezze omogenee in ordine alla loro quantità.

IV. Le grandezze si dicono *avere ragione fra loro* quando la minore può essere moltiplicata in modo da superare la maggiore.

In altri termini, non vi può essere ragione che fra grandezze omogenee e terminate.

V. La ragione di una prima grandezza ad una seconda si dice essere uguale a quella di una terza ad una quarta, quando, prese della prima e della terza le ugualmente moltiplici secondo qualsivoglia numero, e della seconda e della quarta pure le ugualmente moltiplici secondo qualsivoglia numero, se

la moltiplice della prima è maggiore della moltiplice della seconda, anche la moltiplice della terza sia maggiore della moltiplice della quarta; se uguale, uguale; se minore, minore.

VI. Le grandezze che hanno la medesima ragione fra loro si dicono *proporzionali*.

Quando quattro grandezze sono proporzionali (cioè la ragione della prima alla seconda sia uguale alla ragione della terza alla quarta) si suol dire che la prima è alla seconda come la terza alla quarta.

A. Se più grandezze omogenee saranno tali che le ragioni fra la prima e la seconda, la seconda e la terza, la terza e la quarta e così via via sieno uguali fra loro, quelle grandezze si diranno *continuamente proporzionali*.

VII. Date quattro grandezze, se prese le equimoltiplici della prima e della terza e le equimoltiplici della seconda e della quarta, la moltiplice della prima fosse maggiore della moltiplice della seconda, e la moltiplice della terza non fosse maggiore della moltiplice della quarta, si dirà avere la prima alla seconda *maggior ragione* che la terza alla quarta.

VIII. *Proporzione* è uguaglianza di ragioni.

IX. Una proporzione consiste almeno in tre termini.

Tre grandezze omogenee sono in proporzione quando la ragione della prima alla seconda sia uguale alla ragione della seconda alla terza.

X. Quando tre grandezze sono continuamente

proporzionali, la prima alla terza si dice avere *ragione duplicata* di quella che la prima ha alla seconda.

XI. Quando quattro grandezze sono continuamente proporzionali, la prima alla quarta si dice avere *ragione triplicata* di quella che la prima ha alla seconda: e così di seguito *quadruplicata*, ecc.

B. Se saranno quante si vogliano grandezze omogenee, la prima all'ultima si dirà aver *ragione composta* di quelle che hanno la prima alla seconda, la seconda alla terza, la terza alla quarta e così di seguito fino all'ultima.

XII. Di più grandezze proporzionali si dicono *omologhe* le antedecenti alle antecedenti, le conseguenti alle conseguenti.

Delle seguenti parole si fa uso quando si mutano sia l'ordine, sia la grandezza dei termini proporzionali, in modo però che rimangano ancora proporzionali.

XIII. *Permutando* o *alternando*; quando quattro grandezze siano proporzionali, e si conclude essere la prima alla terza, come la seconda alla quarta. [V, 16.]

XIV. *Invertendo*: quando quattro grandezze siano proporzionali, e si conclude essere la seconda alla prima, come la quarta alla terza. [V, B.]

XV. *Componendo*: quando quattro grandezze siano proporzionali, e si conclude essere la somma della prima e della seconda alla seconda, come la somma della terza e della quarta alla quarta. [V, 18.]

XVI. *Dividendo*: quando quattro grandezze siano proporzionali, e si conclude essere l'eccesso della prima sulla seconda alla seconda, come l'eccesso della terza sulla quarta alla quarta. [V, 17.]

XVII. *Convertendo*: quando quattro grandezze siano proporzionali, e si conclude essere la prima all'eccesso della prima sulla seconda, come la terza all'eccesso della terza sulla quarta. [V, E.]

XVIII. *Per ugualità (ex æquali)*: quando, essendo date parecchie grandezze ed altre grandezze in numero uguale ed alle prime ordinatamente proporzionali, si conclude essere, nelle prime grandezze, la prima all'ultima come, nelle seconde grandezze, la prima all'ultima.

Di questa definizione sono casi particolari le due seguenti, e nascono dal diverso modo col quale si prendono le grandezze, a due a due.

XIX. *Per ugualità in proporzione ordinata*: quando, essendo date due serie di grandezze e sia, nelle prime grandezze, la prima alla seconda come, nelle seconde grandezze, la prima alla seconda; e sia ancora, nelle prime grandezze, la seconda alla terza come, nelle seconde grandezze, la seconda alla terza; e così di seguito: e si conclude essere, nelle prime grandezze, la prima all'ultima come, nelle seconde grandezze, la prima all'ultima. [V, 22.]

XX. *Per ugualità in proporzione perturbata*: quando, essendo date, come dianzi, due serie di

grandezze in numero eguale, e sia, nelle prime grandezze, la prima alla seconda come, nelle seconde grandezze, la penultima all'ultima, e sia ancora, nelle prime grandezze, la seconda alla terza come, nelle seconde grandezze, la terzultima alla penultima; e così di seguito: e si conclude essere, nelle prime grandezze, la prima all'ultima come, nelle seconde grandezze, la prima all'ultima. [V, 23.]

Assiomi.

I. Le grandezze equimultiplici della medesima grandezza o di grandezze uguali sono uguali fra loro.

II. Le grandezze, delle quali una medesima grandezza è equimultiplice o delle quali grandezze uguali sono equimultiplici, sono uguali fra loro.

III. La multiplice della grandezza maggiore è maggiore della equimultiplice della grandezza minore.

IV. Di due grandezze, delle quali si siano prese le equimultiplici, quella è maggiore della quale l'equimultiplice è maggiore.

—

PROPOSIZIONE 1.

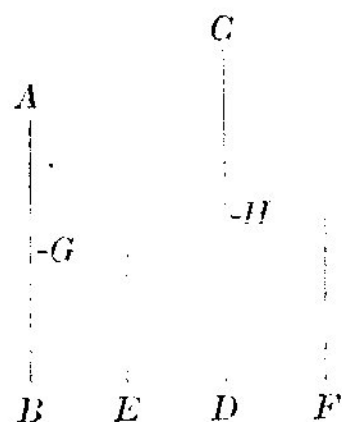
TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano siano equimultiplici di altrettante grandezze, ciascuna di cia-

scuna, quante volte una è multiplice della sua corrispondente, tante volte la somma delle prime sarà multiplice della somma delle seconde.

Siano quante grandezze si vogliano AB , CD , equimultiplici di altrettante grandezze E , F , ciascuna di ciascuna; dico che quante volte la AB è multiplice della E , tante volte la somma delle AB , CD sarà multiplice della somma delle E , F .

Imperocchè, essendo la AB multiplice della E come la CD è multiplice della F , quante grandezze sono nella AB uguali alla E ,



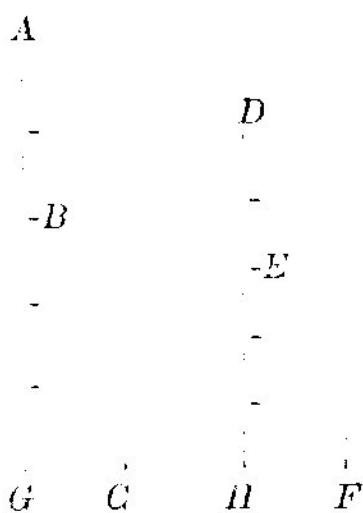
tante saranno nella CD uguali alla F . Siano AG , GB nella AB parti uguali alla E ; e nella CD siano CH , HD parti uguali alla F ; sarà il numero delle CH , HD uguale al numero delle AG , GB . E poichè la AG è uguale alla E e la CH alla F , sarà la somma delle AG , CH uguale alla somma delle E , F : così pure, poichè la GB è uguale alla E e la HD alla F , sarà la somma delle GB , HD uguale alla somma delle E , F . Quante grandezze adunque sono nella AB uguali alla E , altrettante saranno nella somma delle AB , CD uguali alla somma delle E , F ; e però quante volte la AB è multiplice della E , tante volte la somma delle AB , CD sarà multiplice della somma delle E , F . Adunque se quante grandezze si vogliono, ecc. c. d. d.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se la prima grandezza sia multiplice della seconda come la terza della quarta, e la quinta sia multiplice della seconda come la sesta della quarta; saranno anche la prima e la quinta insieme multipli della seconda, come la terza e la sesta insieme sono multipli della quarta.

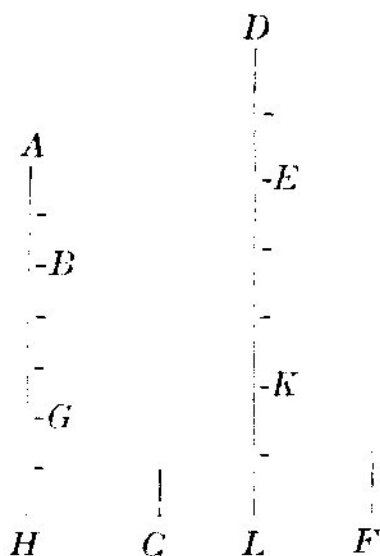
La prima AB sia multiplice della seconda C come la terza DE della quarta F ; e la quinta BG sia multiplice della seconda C come la sesta EH della quarta F : dico che la prima e la quinta insieme (AG) sono multipli della seconda C come la terza e la sesta insieme (DH) sono multipli della quarta F .



Imperocchè, essendo la AB multiplice della C come la DE della F , quante grandezze sono nella AB uguali alla C , tante saranno nella DE uguali alla F : per la medesima ragione, quante grandezze sono nella BG uguali alla C tante saranno nella EH uguali alla F . Quante grandezze adunque sono in tutta la AG uguali alla C , tante saranno ancora in tutta la DH uguali alla F : e però quante volte la AG è multiplice della C , tante volte la DH sarà multiplice della F . Adunque se la prima, ecc. c. d. d.

COROLLARIO.

Da ciò è manifesto che se quante si vogliano grandezze AB , BG , GH sono multiple della stessa C ; ed altrettante DE , EK , KL sono rispettivamente equimultiple della stessa F , sarà la somma delle prime, cioè la AH , multiple della C , come la somma delle seconde, cioè la DL , è multiple della F .



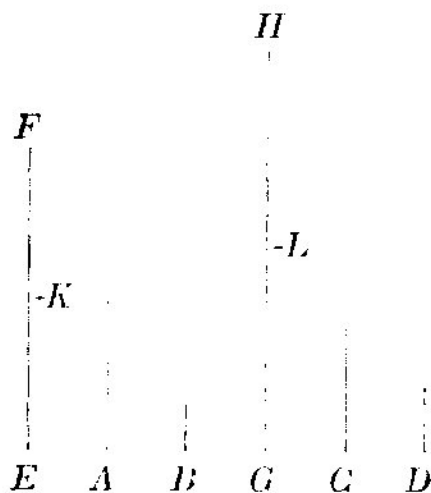
PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se la prima grandezza sia multiple della seconda come la terza della quarta, e si prendano le equimultiple della prima e della terza; queste ancora saranno equimultiple, l'una della seconda e l'altra della quarta.

La prima A sia multiple della seconda B , come la terza C della quarta D ; prendansi le EF , GH equimultiple delle A , C ; dico essere la EF multiple della B come è la GH della D .

Imperocchè, essendo la EF multiple della A come la GH della C , quante grandezze sono nella EF uguali alla A , tante saranno ancora nella GH uguali



alla C . Siano nella EF le grandezze EK , KF le parti eguali alla A ; e nella GHI le grandezze GL , LH le parti eguali alla C : sarà il numero delle EK , KF uguale al numero delle GL , LH : e siccome è la A multiplice della B , come la C della D , saranno le EK , KF rispettivamente multipli della B come le GL , LH lo sono della D ; onde [V, 2, cor.] la somma delle EK , KF , ossia la EF , sarà multiplice della B come la somma delle GL , LH , ossia la GH , è multiplice della D . Adunque *se la prima, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se di quattro grandezze la prima alla seconda ha la medesima ragione che la terza alla quarta, ancora le equimultipli della prima o della terza paragonate colle equimultipli della seconda e della quarta, secondo qualsivoglia moltiplicazione, avranno fra loro la medesima ragione.

La prima A alla seconda B abbia la medesima ragione che la terza C alla quarta D : prendansi le E , F

----- E ----- K -----

----- F ----- E -----

----- C ----- A -----

D ----- B -----

----- H ----- G -----

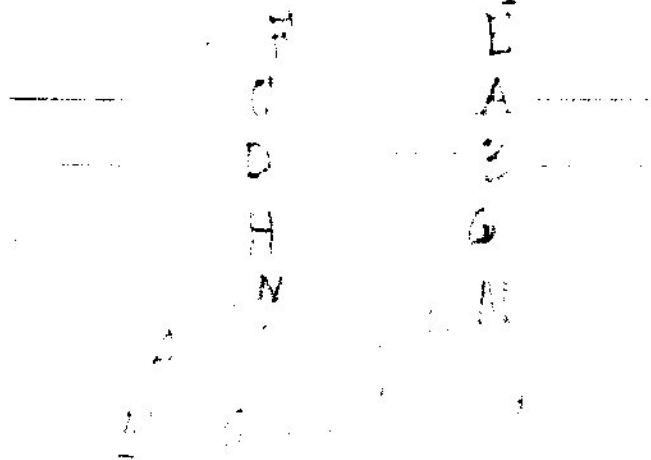
----- N ----- M -----

equimultiplici delle A, C ; e le G, H in qualunque altro modo equimultiplici delle B, D : dico essere come la E alla G così la F alla H .

Imperocchè, prendansi di nuovo le K, L equimultiplici delle E, F ; e le M, N equimultiplici delle G, H . Siccome la E è multiplice della A come la F della C , e si sono prese le K, L equimultiplici delle E, F , sarà la K multiplice della A come la L della C [V, 3]. Per la medesima ragione è la M multiplice della B come la N della D . E perchè come la A alla B così è la C alla D ; e si sono prese le K, L certe equimultiplici delle A, C , e le M, N certe altre equimultiplici delle B, D ; se la K è maggiore della M anche la L sarà maggiore della N ; se uguale, uguale; se minore, minore [V, def. 5]. Ma sono le K, L equimultiplici qualsivogliono delle E, F ; e le M, N , pure qualsivogliono equimultiplici delle G, H : come dunque la E alla G così sarà la F alla H [V, def. 5]: onde se la prima alla seconda, ecc. c. d. d.

COROLLARIO.

Similmente, se la prima alla seconda ha la medesima ragione che la terza alla quarta, anche le equimultiplici qualsivogliono della prima e della terza avranno alla seconda ed alla quarta la medesima ragione: ed ancora la prima e la terza avranno la medesima ragione alle equimultiplici qualsivogliono della seconda e della quarta.



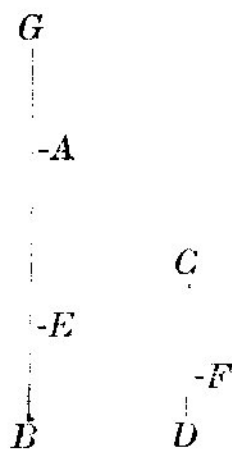
PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una grandezza d' un' altra grandezza è multiplice ugualmente che una grandezza sottratta dall' una di una grandezza sottratta dall' altra, sarà la rimanente multiplice della rimanente come tutta di tutta.

La grandezza AB sia multiplice della grandezza CD come la grandezza AE sottratta dalla prima è multiplice della grandezza CF sottratta dalla seconda: dico essere la rimanente EB multiplice della rimanente FD come è tutta la AB di tutta la CD .

Imperocchè, si faccia la AG multiplice della FD come la AE della CF : sarà adunque AE multiplice della CF come EG della CD



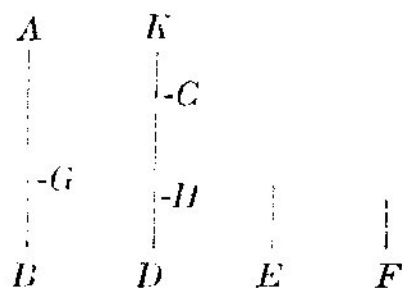
[V, I]. Ma come la AE della CF così si è supposta la AB multiplice della CD : sono adunque la AB e la EG equimultiplici della stessa CD , onde sarà [V, ass. 1] la EG uguale alla AB . Tolgasi la AE comune; sarà la rimanente AG uguale alla rimanente EB : e poichè la AE è multiplice della CF come la AG della FD ; ed è la AG uguale alla EB ; sarà la AE multiplice della CF come la EB della FD . Ma la AE è multiplice della CF come la AB della CD ; sarà dunque la EB multiplice della FD come la AB della CD : laonde se una grandezza, ecc. c. d. d.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due grandezze siano equimultiple di due altre grandezze e da quelle si sottraggano grandezze equimultiple di queste, saranno le rimanenti o uguali a queste o di queste equimultiple.

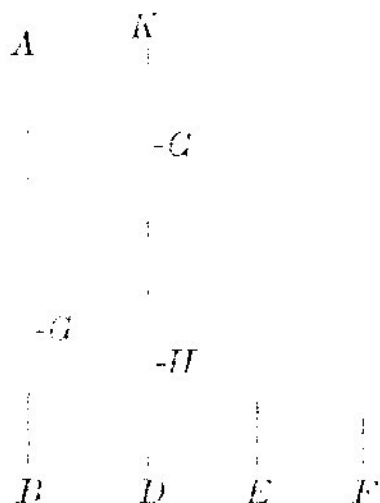
Le due grandezze AB , CD siano equimultiple delle due grandezze E , F ; e si sottraggano dalle AB , CD le grandezze AG , CH equimultiple delle stesse E , F : dico le rimanenti GB , HD essere o uguali alle E , F , o delle E , F equimultiple.



Imperocchè, sia primieramente la GB uguale alla E ; dico essere ancora la HD uguale alla F . Pongasi la CK uguale alla F ; e poichè la AG della E è moltiplice ugualmente che la CH della F , ed è la GB uguale alla E , e la CK uguale alla F , sarà la AB della E ugualmente moltiplice che la KH della F . Ma la AB è della E ugualmente moltiplice che la CD della F , onde la KH e la CD sono equimultiple della stessa F : sarà dunque la HK uguale alla CD [V, ass. 1]. Tolgasi la CH comune; sarà la rimanente KC uguale alla rimanente HD : ma la KC è uguale alla F , onde sarà ancora la HD uguale alla F . Adunque se la GB è uguale alla E , la HD è uguale alla F .

Ora sia la GB moltiplice della E ; sarà anche la HD

equimultiplice della F . Imperocchè prendasi la CK multiplice della F come è la GB della E ; e perchè la AG della E è multiplice ugualmente che la CH della F ; e la GB della E è multiplice ugualmente che la CK della F ; sarà [V, 2] la AB della E ugualmente multiplice che la KH della F . Ma la AB della E è ugualmente multiplice che la CD della F :



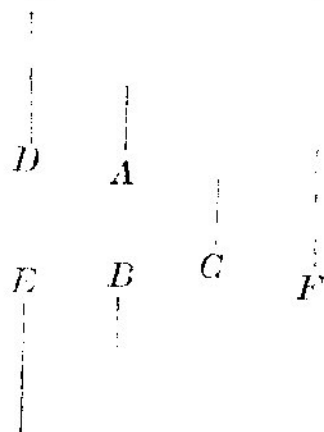
dunque la HK e la CD sono equimultiplici della stessa F , onde sarà la CD uguale alla HK . Tolgasi la CH comune; sarà la rimanente CK uguale alla rimanente HD : e siccome la GB è multiplice della E come la CK della F , ed è CK uguale alla HD , sarà HD multiplice della F come la GB è multiplice della E . Adunque *se due grandezze, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Le grandezze uguali alla medesima grandezza hanno la medesima ragione; e la medesima grandezza alle grandezze uguali ha la medesima ragione.

Siano le A, B grandezze uguali, e la C un'altra grandezza: dico l'una e l'altra delle grandezze A, B avere la medesima ragione alla grandezza C ; e la grandezza C avere la medesima ragione all'una e all'altra delle A, B .



Imperocchè, si prendano delle A, B le equimultiplici D, E ; e prendasi pure la F in qualunque

altro modo multiplice della C . Perchè dunque la D è multiplice della A come la E della B , e la A è uguale alla B , sarà la D uguale alla E . [V, ass. 1]: dunque se la D è maggiore della F , anche la E sarà maggiore della F : se uguale, uguale; se minore, minore: e sono le D , E equimultiplici delle A , B , e la F in qualunque altro modo multiplice della C : onde come la A alla C così sarà la B alla C [V, def. 5].

Dico inoltre avere la C la medesima ragione all' una e all' altra delle A , B . Imperocchè, fatte le medesime cose, dimostreremmo ancora essere la D uguale alla E ; onde se la F è maggiore della D , sarà ancora la F maggiore della E ; se è uguale, uguale; se minore, minore: ma la F è multiplice della C , e le D , E sono in qualunque altro modo equimultiplici delle A , B ; dunque come la C alla A così sarà la C alla B [V, def. 5]. Laonde le grandezze uguali, ecc. c. d. d.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Di due grandezze disuguali la maggiore ad una medesima grandezza ha maggior ragione che la minore; e la medesima grandezza alla grandezza minore ha maggior ragione che alla maggiore.

Siano le AB , BC grandezze disuguali, e sia AB la maggiore: D un' altra grandezza qualunque: dico la AB avere alla D maggior ragione che la BC : e la D avere alla BC maggior ragione che alla AB .

Se quella delle due grandezze AC , CB , che non è maggiore dell'altra, non sia minore della D , prendansi di esse AC , CB le grandezze dop-
 E
 pie EF , FG come nella prima
 figura. Se poi quella delle due
 -F
 grandezze AC , CB , che non è
 A
 maggiore dell'altra, è minore
 -C
 della D (come nell'altra figura),
 G B
 essa moltiplicata opportunamente
 L K H D
 potrà superare la D : si moltiplichino
 finchè diventi maggiore della D ,
 e quante volte è stata essa moltiplicata
 altrettante volte si moltiplichino
 l'altra; e sia EF la molteplice
 della AC , FG l'equimoltiplice della
 CB ; onde le EF , FG saranno entrambe maggiori della D .
 In ogni caso poi prendansi la H doppia della D , la K
 tripla, e così di seguito finchè si
 E
 ottenga quella molteplice della D ,
 che per la prima è maggiore
 -F
 della FG . Sia dessa la L , e sia la K
 A
 quella molteplice della D che è im-
 -C
 mediatamente minore della L .

Poichè la L è fra le moltiplici
 G B
 della D quella che per la prima è
 L K H D
 maggiore della FG , non sarà la K
 maggiore della FG , e però non
 sarà la FG minore della K : ed es-
 sendo la EF molteplice della AC
 come la FG della CB , sarà la FG molteplice della CB come
 la EG della AB [V, 1]; e però le EG , FG sono ugual-
 mente moltiplici delle AB , CB . Fu poi dimostrato es-
 sere la FG non minore della K , e per costruzione è
 la EF maggiore della D : sarà adunque tutta la EG

maggiore della somma della K e della D . Ma questa somma non è che la L ; pertanto la EG è maggiore della L . Ora la FG non è maggiore della L ; e le EG, FG sono equimultiplici delle AB, BC ; e la L è una certa multiplice della D : laonde [V, *def.* 7] la AB alla D avrà maggior ragione che la BC alla stessa D .

Inoltre la D ha alla BC maggior ragione che alla AB . Imperocchè, fatte le medesime costruzioni, si dimostrerà essere la L maggiore della FG e non maggiore della EG : ed è la L multiplice della D e sono le FG, EG equimultiplici delle BC, AB . Avrà dunque la D maggior ragione alla BC che alla AB [V, *def.* 7]. Pertanto *di due grandezze disuguali, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Quelle grandezze che alla medesima grandezza hanno la medesima ragione sono uguali fra loro: e quelle alle quali la medesima grandezza ha la medesima ragione sono pure fra loro uguali.

L'una e l'altra delle grandezze A, B abbia alla grandezza C la medesima ragione: dico la A essere uguale alla B .

Imperocchè, se A non è uguale a B , una di esse sarà maggiore dell'altra; sia A la maggiore. Allora (come in V, 8) vi saranno certe grandezze D, E equimultiplici delle A, B ed una certa grandezza F multiplice della C in modo che D sia più grande di F , ma E non maggiore di F . Poichè A è a C come B a C ,

$$\begin{array}{cc} A & D \\ | & | \\ C & F \\ | & | \\ B & E \end{array}$$

e si sono prese certe grandezze D , E equimultiplici delle A , B , ed una certa grandezza F multiplice di C , e poichè D è maggiore di F , anche E dovrebbe essere maggiore di F [V, *def.* 5]. Ma E non è maggiore di F ; dunque è impossibile che A e B non siano uguali.

Abbia ora la C all'una e all'altra delle A , B la medesima ragione: dico ancora la A essere uguale alla B .

Perchè, se A non è uguale a B , una di esse è maggiore dell'altra: sia A la maggiore. Allora (come in V, 8) vi sarà una certa grandezza F multiplice di C , e vi saranno certe grandezze D , E equimultiplici delle A , B , in modo che F sia maggiore di E ma non maggiore di D . Ora, poichè C è a B come C ad A , ed F multiplice della prima C è maggiore di E multiplice della seconda B , dovrebb'essere [V, *def.* 5] F multiplice della terza C maggiore di D multiplice della quarta A . Ma non è: dunque è impossibile che le A e B non siano uguali. Laonde *quelle grandezze, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE X.

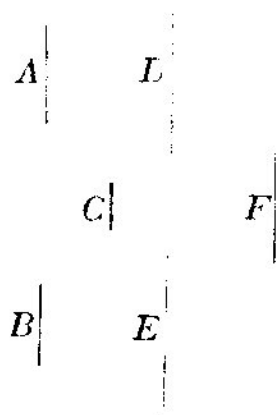
TEOREMA.

Delle grandezze, che hanno ragione alla medesima grandezza, quella che ha maggior ragione è maggiore: e quella, alla quale la medesima ha ragione maggiore, è minore.

La A alla C abbia maggior ragione che la B alla C : dico la A essere maggiore della B .

Imperocchè, avendo A maggior ragione a C che B a C , vi sono [V, *def.* 7] certe grandezze D , E equi-

multiplici delle A , B , ed una certa grandezza F multiplice di C , in modo che D sia maggiore di F , ma E non maggiore di F ; onde sarà D maggiore di E . Ma D , E sono equimultiplici delle A , B ; dunque [V, ass. 4] A è maggiore di B .



Ora la C abbia alla B maggior ragione che essa medesima C alla A ; dico essere la B minore della A .

Imperocchè vi è una certa grandezza F multiplice di C , e vi sono certe grandezze D , E equimultiplici delle A , B , tali che F sia maggiore di E ma non maggiore di D ; onde E è minore di D . Ma D , E sono equimultiplici delle A , B ; dunque B è minore di A .
 Laonde *delle grandezze, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Le ragioni che sono uguali ad una medesima sono pure uguali fra di loro.

Sia come la A alla B così la C alla D ; e come la C alla D così la E alla F : dico come la A alla B così essere la E alla F .

Imperocchè si prendano delle A, C, E le equimultiplici G, H, K ; e delle B, D, F altre in qualunque modo equimultiplici L, M, N . Poichè come la A alla B così è la C alla D ; e si sono prese le G, H equimultiplici delle A, C , e le L, M altre equimultiplici delle B, D ; se la G è maggiore della L , sarà ancora la H maggiore della M ; se uguale, uguale; se minore, minore. Di nuovo, poichè come la C alla D così è la E alla F , e si sono prese le H, K equimultiplici delle C, E e le M, N altre equimultiplici delle D, F ; se la H è maggiore della M , sarà ancora la K maggiore della N ; se uguale, uguale; se minore, minore. Ma se la H è maggiore della M , anche la G è maggiore della L ; se uguale, uguale; se minore, minore; dunque se la G è maggiore della L , anche la K sarà maggiore della N ; se uguale, uguale, se minore, minore. E le G, K sono qualsivogliano equimultiplici delle A, E ; e le L, N sono in qualunque altro modo

equimultiplici delle B , F ; onde [V, *def. 5*] come la A alla B così sarà la E alla F . Adunque *le ragioni, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE A.¹

TEOREMA.

Se la prima di quattro grandezze alla seconda ha la medesima ragione che la terza alla quarta, e sia la prima maggiore della seconda, sarà la terza maggiore della quarta: se uguale, uguale, se minore, minore.

Imperocchè prendansi di tutte le grandezze date le equimultiplici, per esempio, le doppie; e se la doppia della prima sarà maggiore della doppia della seconda sarà [V, *def. 5*] anche la doppia della terza maggiore della doppia della quarta. Ma se la prima è maggiore della seconda, sarà [V, *ass. 3*] la doppia della prima maggiore della doppia della seconda: quindi anche la doppia della terza è maggiore della doppia della quarta, e però la terza è maggiore della quarta. Similmente si dimostrerebbe che se la prima è uguale o minore della seconda, anche la terza sarà uguale o minore della quarta. Adunque *se la prima, ecc. c. d. d.*

¹ Le proposizioni segnate con lettere dell'alfabeto sono tolte dall'*Euclide* del SIMSON. Cfr. anche l'*Euclide* del COLENZO, dal quale si sono presi gli *Esercizii*.

PROPOSIZIONE B.

TEOREMA.

Se quattro grandezze sono proporzionali, anche *invertendo* saranno proporzionali.

Sia la A alla B come la C alla D : dico essere inversamente la B alla A come la D alla C .

Imperocchè, prendansi in qualunque modo delle B, D le equimultipli E, F ; e delle A, C le altre equimultipli G, H : e sia primieramente la E maggiore della G , onde sarà la G minore della E . Poichè come la A alla B così è la C alla D , e si sono prese delle A, C le equimultipli G, H , e delle B, D le altre equimultipli E, F ; ed è la G minore della E ; sarà ancora la H minore della F , e però la F maggiore della H . Se adunque la E è maggiore della G , anche la F è maggiore della H . Similmente si proverebbe che se la E fosse uguale alla G sarebbe anche la F uguale alla H ; se minore, minore. Ma le E, F sono equimultipli qualsivogliano delle B, D ; e le G, H altre qualsivogliano equimultipli delle A, C : dunque come la B alla A così sarà la D alla C [V, def. 5]. Laonde *se quattro grandezze, ecc. c. d. d.*

G	A	B	E
H	C	D	F
			-
			-

PROPOSIZIONE C.

TEOREMA.

Se la prima grandezza è ugualmente multiplice, o la medesima parte della seconda come la terza della quarta, sarà la prima alla seconda come la terza alla quarta.

Sia primieramente la A multiplice della B come la C della D : dico essere la A alla B come la C alla D .

Imperocchè, si prendano delle A, C le equimultiplici E, F qualsivogliano: e delle B, D altre in qualunque modo equimultiplici G, H : e siccome la E è multiplice della A come la F della C ; e la A è multiplice della B come la C della D ; sarà [V, 3] la E multiplice della B come la F della D . Ma sono ancora la G, H equimultiplici delle B, D : se adunque la E sarà maggior multiplice della B che la G della stessa B , sarà anche la F maggior multiplice della D che la H della stessa D ; se uguale, uguale; se minore, minore; e però se la E sarà maggiore della G , anche la F sarà maggiore della H ;

se uguale, uguale; se minore, minore. E sono le E, F in qualunque modo equimultiplici delle A, C ; e le G, H altre in qualunque modo equimultiplici delle B, D : dunque come la A alla B , così sarà la C alla D . [V, def. 5.]

A	B	C	D
E	G	F	H

Sia ora A la stessa parte di B come C è di D ; dico che A è a B come C a D .

Imperocchè B è ugualmente multiplice di A come D è di C ; quindi pel caso precedente sarà B ad A come D a C ; e invertendo [V, B] A è a B come C a D . Laonde *se la prima, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE D.

TEOREMA.

Se è la prima grandezza alla seconda come la terza alla quarta; ed è la prima multiplice o parte della seconda; sarà la terza ugualmente multiplice o la medesima parte della quarta.

Sia la A alla B come la C alla D ; e sia primieramente la A multiplice della B : dico la C essere ugualmente multiplice della D .

Prendasi la E multiplice della D come è la A della B : sarà [V, C] come la E alla D così la A alla B : ma come la A alla B così la C alla D : sarà dunque [V, 11] come la E alla D così la C alla D .

L'una e l'altra delle E , C ha dunque alla stessa D la medesima ragione, onde sarà [V, 9] la C uguale alla E . Ma si è presa la E multiplice della D come la A è multiplice della B : come dunque la A è della B così sarà la C multiplice della D .

Ora sia A una parte di B ; sarà C la stessa parte di D .

Imperocchè, essendo A a B come C a D , sarà invertendo [V, B] B ad A come D a C . Ma A è una parte di B , cioè B è multiplice di A ; dunque, pel caso pre-

cedente, D è ugualmente moltiplice di C , ossia C è la stessa parte di D come A è di B . Laonde *se è la prima, ecc.* c. d. d.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano siano proporzionali, come una delle antecedenti ad una delle conseguenti, così sarà la somma delle antecedenti alla somma delle conseguenti.

Siano le $A, B; C, D; E, F$; quante si vogliano grandezze proporzionali: cioè sia come la A alla B , così la C alla D , così la E alla F : dico come la A alla B , così essere la somma delle A, C, E , alla somma delle B, D, F .

Prendansi delle A, C, E le G, H, K in qualunque modo equimoltiplici; e delle B, D, F le altre in qualunque modo equimoltiplici L, M, N .

Poichè è la A alla B come la C alla D , e come la E alla F ; e si sono prese le G, H, K equimoltiplici delle A, C, E , e le L, M, N altre equimoltiplici delle B, D, F ; se [V, def. 5]

la G è maggiore della L , sarà ancora la H maggiore della M , e la K maggiore della N ; se uguale, uguale; se minore, minore; onde se la G è maggiore della L , sarà ancora la somma delle G, H, K maggiore della somma delle L, M, N , se uguale, uguale; se minore, minore. Ma la G e la somma delle G, H, K

$G \quad A \quad B \quad L$

$H \quad C \quad D \quad M$

$K \quad E \quad F \quad N$

sono qualsivogliano equimultiplici, l'una della A e l'altra della somma delle A, C, E [V, 1]; e la L e la somma delle L, M, N sono altre in qualunque modo equimultiplici, l'una della B , l'altra della somma delle B, D, F : come dunque [V, *def.* 5] la A alla B così sarà la somma delle A, C, E alla somma delle B, D, F . Laonde *se quante grandezze, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se la prima grandezza alla seconda abbia la medesima ragione che la terza alla quarta; e la terza alla quarta abbia maggior ragione che la quinta alla sesta; ancora la prima alla seconda avrà maggior ragione che la quinta alla sesta.

La prima A alla seconda B abbia la medesima ragione che la terza C alla quarta D ; e la terza C alla quarta D abbia maggior ragione che la quinta E alla sesta F : dico la prima A alla seconda B avere maggior ragione che la quinta E alla sesta F .

Imperocchè, avendo la C alla D maggior ragione che la E alla F , vi saranno [V, *def.* 7] certe grandezze G, H equimultiplici delle C, E , e certe altre grandezze K, L equimultiplici delle D, F , tali che la G sia bensì maggiore della K , ma la H non sia maggiore della L . Come poi la G è multiplice della C , prendasi la M multiplice



della A ; e come la K è multiplice della D , prendasi la N multiplice della B . E perchè come la A alla B così è la C alla D , e si sono prese delle A , C le equimultiplici M , G , e delle B , D certe altre equimultiplici N , K , se la G sarà maggiore della K anche la M sarà maggiore della N ; se uguale, uguale; se minore, minore. Ma la G è maggiore della K ; dunque ancora la M sarà maggiore della N . Ora la H non è maggiore della L ; e sono le M , H equimultiplici delle A , E ; e le N , L certe altre equimultiplici delle B , F . Avrà dunque [V, *def.* 7] la A alla B maggior ragione che la E alla F : onde *se la prima, ecc. c. d. d.*

COROLLARIO.

Similménte se la prima grandezza alla seconda ha maggior ragione che la terza alla quarta, ma la terza alla quarta abbia la stessa ragione che la quinta alla sesta, si può dimostrare che la prima alla seconda ha maggior ragione che la quinta alla sesta.

PROPOSIZIONE XIV.

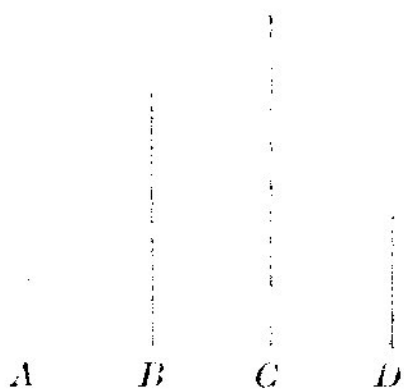
TEOREMA.

Se di quattro grandezze omogenee la prima sia alla seconda come la terza alla quarta, e sia la prima maggiore della terza, sarà ancora la seconda maggiore della quarta; se uguale, uguale; se minore minore.

Siano le A , B , C , D quattro grandezze omogenee,

e come la A alla B così sia la C alla D : sia poi la A maggiore della C : dico essere ancora la B maggiore della D .

Imperocchè, essendo la A maggiore della C , la A alla B avrà maggior ragione che la C alla stessa B [V, 8]: ma come la A alla B così è la C alla D : dunque ancora [V, 13] la C alla D avrà



maggior ragione che la C alla B . Ma di due grandezze quella a cui la medesima ha maggior ragione è minore [V, 10]; dunque la D è minore della B , e però la B è maggiore della D .

Sia ora la A uguale alla C ; sarà pure la B uguale alla D . Imperocchè, essendo la A alla B come la C alla D , ed essendo la C uguale alla A , sarà la A alla B come la A alla D ; e però la B sarà uguale alla D .

Sia per ultimo la A minore della C : sarà ancora la B minore della D . Imperocchè sarà la C maggiore della A : ed essendo come la C alla D così la A alla B , sarà come nel primo caso la D maggiore della B , e però la B minore della D . Adunque *se di quattro grandezze, ecc. c. d. d.*

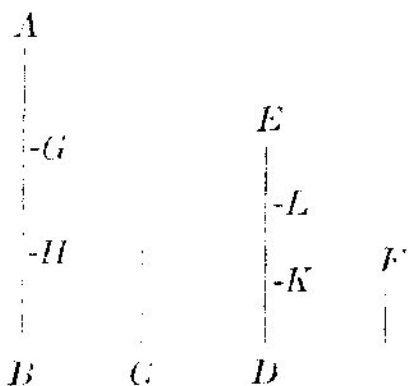
PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Due grandezze hanno fra loro la medesima ragione che hanno le loro equimoltiplici.

Sia la AB moltiplice della C come la DE della F ; dico essere come la C alla F così la AB alla DE .

Imperocchè, essendo la AB moltiplice della C come la DE della F , quante grandezze sono nella AB uguali alla C tante saranno nella DE uguali alla F . Nella AB siano AG , GH , HB le parti uguali alla C , e nella DE siano DK , KL , LE le parti uguali alla F , saranno adunque le AG , GH , HB in numero uguale alle DK , KL , LE : e poichè sono fra loro uguali le AG , GH , HB , ed uguali pure fra loro le DK , KL , LE ; come la AG alla DK così sarà la GH alla KL , e così ancora la HB alla LE [V, 7]. Ma come una delle antecedenti ad una delle conseguenti così è la somma delle antecedenti alla somma delle conseguenti [V, 12]: come dunque la AG alla DK così sarà la AB alla DE ; ma la AG è uguale alla C e la DK alla F : onde come la C alla F così è la AB alla DE . Adunque due grandezze, ecc. c. d. d.



PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se quattro grandezze omogenee siano proporzionali, ancora *permutando* saranno proporzionali.

Le quattro grandezze omogenee A, B, C, D siano proporzionali, e sia come la A alla B così la C alla D : dico essere quelle grandezze anche permutate proporzionali; cioè come la A alla C così essere la B alla D .

Prendansi delle A, B le equimultiplici E, F ; e delle C, D le altre in qualunque modo equimultiplici G, H .

Poichè la E è moltiplice della A come la F della B ; e le parti paragonate fra loro hanno la medesima ragione delle loro equimultiplici [V, 15]; sarà come la A alla B così la E alla F : ma come la A alla B così è la C alla D ; dunque come [V, 11] la C alla D così la E alla F . Di nuovo, poichè le G, H sono equimultiplici delle C, D , sarà [V, 15] come la C alla D così la G alla H ; ma come la C alla D così la E alla F ; adunque come la E alla F così la G alla H . Ma se quattro grandezze omogenee siano proporzionali, e la prima sia maggiore della terza, anco la seconda sarà maggiore della quarta; se uguale, uguale, se minore, minore [V, 14]; dunque se la E sia maggiore della G ancora la F sarà maggiore

della H ; se uguale, uguale; se minore, minore: ma sono le E, F equimultiplici delle A, B ; e le G, H altre qualsivogliono equimultiplici delle C, D ; dunque come la A alla C così sarà la B alla D . Laonde se quattro grandezze, ecc. c. d. d.

PROPOSIZIONE XVII.

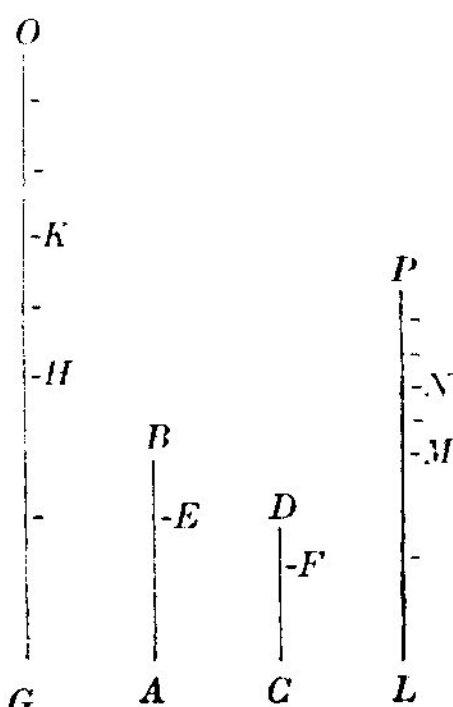
TEOREMA.

Se quattro grandezze prese insieme sono proporzionali, ancora prese separatamente saranno proporzionali; *vale a dire* se la somma di due grandezze ha ad una di esse la medesima ragione che la somma di due altre grandezze ha ad una di queste, la rimanente delle prime avrà all'altra la medesima ragione che la rimanente delle ultime ha all'altra di queste.

Siano AB, BE, CD, DF quattro grandezze che prese insieme siano proporzionali; cioè sia come la AB alla BE così la CD alla DF : dico che ancora prese separatamente saranno proporzionali; cioè come la AE alla EB così sarà la CF alla FD .

Prendansi delle AE, EB, CF, FD qualsivogliono equimultiplici GH, HK, LM, MN ; e delle EB, FD le altre ancora in qualunque modo equimultiplici KO, NP .

Poichè la GH è multiplice della AE come la HK della EB , sarà [V, 1] la GK multiplice



della AB come la GH della AE : ma come la GH è moltiplice della AE , così è la LM moltiplice della CF : come adunque la GK è moltiplice della AB , così è la LM moltiplice della CF . Inoltre, perchè la LM della CF è moltiplice ugualmente che la MN della FD ; sarà la LM moltiplice della CF come la LN è moltiplice della CD : ma si è mostrato che la LM è moltiplice della CF come la GK della AB ; dunque come la GK è moltiplice della AB così è la LN moltiplice della CD ; onde le due GK , LN sono equimoltiplici delle due AB , CD . Di nuovo, perchè la HK è moltiplice della EB come la MN della FD ; e la KO della stessa EB come la NP della stessa FD ; sarà [V, 2] l'intera HO moltiplice della EB come l'intera MP è moltiplice della FD , cioè le HO , MP sono equimoltiplici delle EB , FD . E poichè è come la AB alla BE così la CD alla DF ; e si sono prese delle AB , CD le equimoltiplici GK , LN ; e delle BE , DF certe altre equimoltiplici HO , MP ; se la GK è maggiore della HO , sarà anche la LN maggiore della MP ; se uguale, uguale, se minore, minore. Ma se la GH è maggiore della KO , aggiunta la HK ad entrambe, sarà la GK maggiore della HO ; e però anche la LN è maggiore della MP ; onde, sottratta la MN da entrambe, sarà la LM maggiore della NP : dunque se la GH è maggiore della KO , anche la LM sarà maggiore della NP . Similmente si dimostrerebbe che se la GH è uguale alla KO , anche la LM è uguale alla NP ; e se minore, minore. Ma le GH , LM sono equimoltiplici qualsivogliono delle AE , CF ; e le KO , NP sono altre pure qualsivogliono equimoltiplici delle EB , FD : adunque come la AE alla EB , così sarà la CD alla FD .
 Laonde se quattro grandezze, ecc. c. d. d.

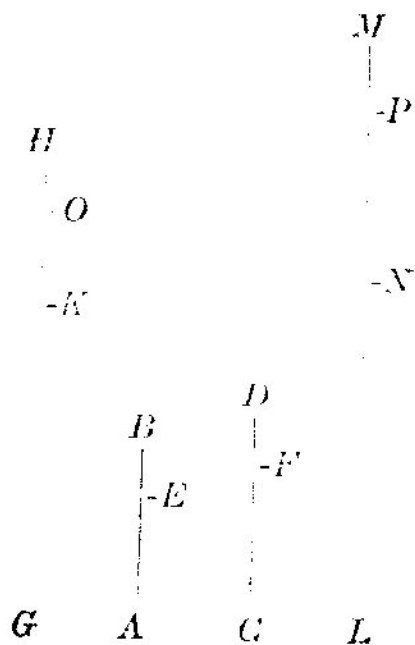
PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se quattro grandezze prese separatamente siano proporzionali, ancora prese insieme saranno proporzionali, *vale a dire* se la prima è alla seconda come la terza alla quarta, anche la somma delle prime due sarà alla seconda come la somma delle ultime due alla quarta.

Siano le quattro grandezze AE , EB ; CF , FD , proporzionali; cioè come la AE , alla EB così sia la CF alla FD : dico ancora essere proporzionali, prese insieme; cioè come la AB alla BE così essere la CD alla DF .

Prendansi delle AB , BE , CD , DF le in qualunque modo equimultipli GH , HK , LM , MN ; e ancora delle BE , DF le altre pure in qualunque modo equimultipli KO , NP .



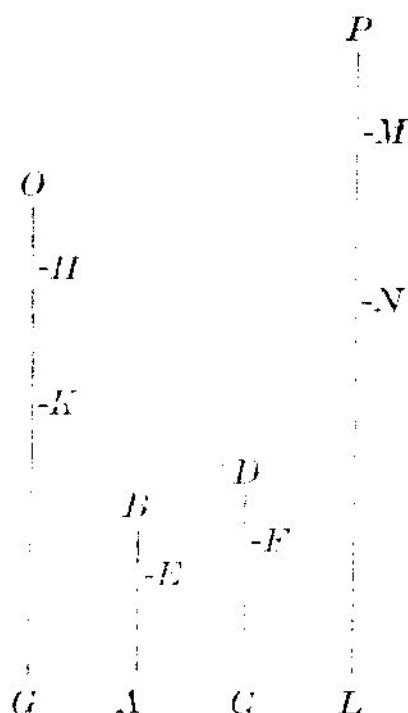
Poichè le KO , NP sono equimultipli delle BE , DF , e le KH , NM sono pure delle BE , DF equimultipli, se la KO sarà della BE multiplice maggiore che non sia la KH della medesima BE , sarà ancora la NP della DF multiplice maggiore che non sia la NM della medesima DF ; se uguale, uguale; se minore, minore; e però le KO , NP saranno contem-

poraneamente maggiori, uguali o minori delle KH , NM .

Sia primieramente la KO non maggiore della KH , onde sarà ancora la NP non maggiore della NM . E poichè le GH , HK sono equimultiplici delle AB , BE , ed è la AB maggiore della BE , sarà [V, ass. 3] la GH maggiore della HK ; ed è la KO non maggiore della KH ; onde sarà la GH maggiore della KO . Similmente si dimostrerebbe essere la LM maggiore della NP . Adunque, se la KO non sia maggiore della KH , saranno le GH , LM equimultiplici delle AB , CD sempre maggiori delle KO , NP equimultiplici delle BE , DF .

Ora sia la KO maggiore della KH , onde sarà ancora la NP maggiore della NM .

E poichè la GH è della AB ugualmente moltiplice che la HK sottratta dalla prima, della BE sottratta dalla seconda, sarà [V, 5] anche la rimanente GK moltiplice della rimanente AE come la GH della AB , e però come la LM della CD . Similmente si dimostrerebbe essere la LN moltiplice della CF come la LM della CD ; onde sarà la GK moltiplice della AE come la LN della CF . Sono adun-



que le GK , LN equimultiplici delle AE , CF . E poichè le KO , NP sono equimultiplici delle BE , DF , e ne sono sottratte le KH , NM delle stesse BE , DF pure equimultiplici, saranno [V, 6] le rimanenti HO , MP o uguali alle BE , DF o delle medesime equimultiplici. Siano primieramente le HO , MP uguali alle BE , DF : e poichè è la AE alla EB come la CF alla FD , e si presero delle AE , CF le equimultiplici GK , LN , sarà ancora [V, 4, cor.] la GK alla EB come la LN alla FD :

ed è la HO uguale alla EB , e la MP alla FD ; onde sarà la GK alla HO come la LN alla MP . Adunque se la GK è maggiore della HO , sarà anche la LN maggiore della MP ; se uguale, uguale; se minore, minore [V, A]. Siano ora le HO , MP equimultiplici delle BE , DF : e perchè è la AE alla EB come la CF alla FD , e si presero delle AE , CF le equimultiplici GK , LN , e delle EB , FD le equimultiplici HO , MP , sarà [V, 4] come la GK alla HO così la LN alla MP : onde, come nel caso precedente, se la GK è maggiore della HO , sarà anche la LN maggiore della MP ; se uguale, uguale, se minore, minore. Adunque, se la GH è maggiore della KO , tolta la HK comune, sarà la GK maggiore della HO ; onde sarà anche la LN maggiore della MP : e aggiunta la NM ad entrambe, sarà la LM maggiore della NP . Adunque se la GH è maggiore della KO anche la LM sarà maggiore della NP . Similmente si dimostrerebbe che se la GH fosse uguale alla KO , anche la LM sarebbe uguale alla NP ; e se minore, minore. Fu poi dimostrato, pel caso in cui la KO non è maggiore della KH , essere la GH sempre maggiore della KO ed insieme la LM maggiore della NP . E sono le GH , LM in qualunque modo equimultiplici delle AB , CD ; e le KO , NP altre in qualunque modo equimultiplici delle BE , DF ; dunque come la AB alla BE così sarà la CD alla DF . Laonde se quattro grandezze prese, ecc. c. d. d.

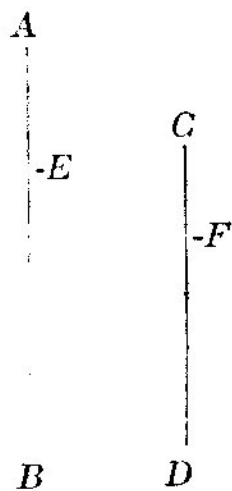
PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se tutta una grandezza è a tutta un'altra grandezza come una grandezza sottratta dalla prima ad una grandezza sottratta dalla seconda, anche la rimanente sarà alla rimanente come l'intera all'intera.

Sia tutta la AB a tutta la CD come la grandezza AE tolta da AB alla grandezza CF tolta da CD : dico che la rimanente EB è alla rimanente FD , come tutta la AB a tutta la CD .

Imperocchè, essendo come la AB alla CD così la AE alla CF , sarà ancora, permutando [V, 16], come la AB alla AE così la CD alla CF . E poichè, se le grandezze prese insieme sono proporzionali, ancora prese separatamente lo sono [V, 17], come la BE alla EA così sarà la DF alla FC : e di nuovo permutando, come la BE alla DF così la EA alla FC : ma come la EA alla FC così la AB alla CD ; onde [V, 11] come la rimanente BE alla rimanente DF così sarà tutta la AB a tutta la CD . Adunque *se tutta, ecc. c. d. d.*



COROLLARIO.

Se l'intera è all'intera come una grandezza presa dalla prima è ad una grandezza presa dalla seconda, anche la rimanente sarà alla rimanente

come la grandezza presa dalla prima alla grandezza presa dalla seconda; cioè se AB a CD come EB ad FD , anche AE sarà a CF come EB a FD .

PROPOSIZIONE E.

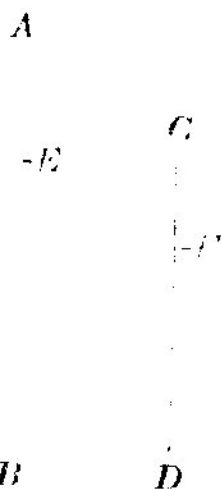
TEOREMA.

Se quattro grandezze siano proporzionali, anche *convertendo* saranno proporzionali.

Come la AB alla BE , così sia la CD alla DF ; dico essere ancora, *convertendo*, come la AB alla AE , così la CD alla CF .

Imperocchè, essendo come la AB alla BE così la CD alla DF , sarà, dividendo [V, 17], come la AE alla EB così la CF alla FD ; ed invertendo [V, B], come la BE alla EA così la DF alla FC : onde, componendo [V, 18], come la AB alla AE così sarà la CD alla CF .

Adunque *se quattro grandezze, ecc. c. d. d.*



PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Se siano tre grandezze ed altre in numero uguale, le quali prese a due a due abbiano la medesima ragione; e sia la prima maggiore della terza,

sarà ancora la quarta maggiore della sesta; se uguale, uguale; se minore, minore.

Siano A , B , C tre grandezze ed altre D , E , F , le quali prese a due a due abbiano la medesima ragione; sia cioè come la A alla B così la D alla E ; e come la B alla C così la E alla F ; e sia la A maggiore della C : dico essere anche la D maggiore della F , se uguale, uguale e se minore, minore.

$A \qquad B \qquad C$

$D \qquad E \qquad F$

Imperocchè essendo la A maggiore della C , avrà la A ad un'altra B maggior ragione che la C alla medesima B [V, 8]. Ma come la D alla E così è la A alla B ; adunque [V, 13], anche la D alla E avrà maggior ragione che la C alla B . E poichè come la B alla C così la E alla F , sarà invertendo [V, B] come la C alla B così la F alla E . Ma si è dimostrato avere la D alla E maggior ragione che la C alla B ; onde avrà la D alla E maggior ragione che la F alla E . Ma delle grandezze che hanno ragione ad una medesima, quella, che ha ragione maggiore, è maggiore [V, 40]: dunque la D è maggiore della F . Similmente si dimostrerà che se la A è uguale o minore della C , anche la D sarà uguale o minore della F . Adunque *se siano tre grandezze, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XXI.

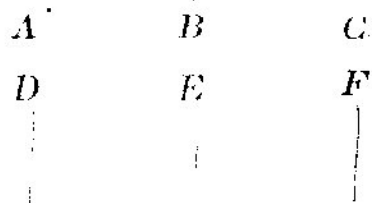
TEOREMA.

Siano tre grandezze, ed altre in numero uguale, che prese a due a due abbiano la medesima ra-

gione, ma in ordine *perturbato*; se la prima è maggiore della terza, anche la quarta sarà maggiore della sesta; e se uguale, uguale; se minore, minore.

Siano le A, B, C tre grandezze, e le D, E, F altre in numero uguale, le quali a due a due abbiano la medesima ragione, ma in ordine *perturbato*; sia cioè come la A alla B così la E alla F ; e come la B alla C così la D alla E : e sia la A maggiore della C ; dico che ancora la D sarà maggiore della F .

Imperocchè essendo la A maggiore della C , avrà [V, 8] la A ad un'altra B maggior ragione che la C alla B . Ma come la A alla B così è la E alla F : e come la B alla C così la D alla E , onde invertendo [V, 8], come la C alla B così la E alla D : avrà adunque la E alla F maggior ragione che la E alla D . Ma di due grandezze, quella a cui la medesima ha ragione maggiore è minore [V, 10]: dunque la F sarà minore della D , e però la D maggiore della F . Similmente si dimostrerà che se la A è uguale alla C , anche la D sarà uguale alla F ; e se minore, minore. Adunque se siano tre grandezze, ecc. c. d. d.



PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se siano quante grandezze si vogliano, ed altre in numero uguale, le quali prese a due a due abbiano la medesima ragione; saranno ancora per

a, b, c, d, e, f

$a:b::c:d$
 $b:c::d:e$
 $c:d::e:f$
 $a:c::b:d$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
 $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$
 $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

ossia $a:c::b:d$

ugualità (ex æquali) nella medesima ragione, *vale a dire* che la prima all' ultima nella prima serie di grandezze avrà la medesima ragione che la prima all' ultima nella seconda serie.

Siano primieramente A, B, C tre grandezze ed altre D, E, F , in numero uguale, che prese a due a due abbiano la medesima ragione;

cioè sia come la A alla B così la D alla E , e come la B alla C così la E alla F : dico essere (*per uguagli-
tà*) come la A alla C così la D alla F .

A	B	C	D	E	F
G	K	M	H	L	N

Si prendano le G, H equimoltiplici qualsivogliano delle A, D ; le K, L pur qualsivogliano equimoltiplici delle B, E ; e le M, N qualsivogliano altre equimoltiplici delle C, F .

Poichè la A è alla B come la D alla E , e si sono prese le G, H equimoltiplici delle A, D , e le K, L altre equimoltiplici delle B, E ; sarà [V, 4] come la G alla K così la H alla L . Per la medesima ragione, come la K alla M così la L alla N . Essendo adunque le G, K, M tre grandezze, e le H, L, N altre in numero uguale, prese a due a due nella medesima ragione, se la G sarà maggiore della M , ancora la H sarà maggiore della N ; se uguale, uguale; se minore, minore [V, 20]. Ma le G, H sono equimoltiplici qualsivogliano delle A, D ; e le M, N pure qualsivogliano equimoltiplici delle C, F ; adunque come la A alla C così sarà la D alla F .

Siano ora quattro grandezze A, B, C, D ; ed altre

Poichè le G, H sono equimultiplici delle A, B , sarà [V, 15] come la A alla B così la G alla H : e similmente come la E alla F così la M alla N . Ma è come la A alla B così la E alla F ; adunque come la G alla H così la M alla N [V, 11]. E poichè è come la B alla C così la D alla E , e si sono prese delle B, D le equimultiplici H, K ; e delle C, E le altre equimultiplici L, M ; sarà [V, 4] come la H alla L così la K alla M . E fu dimostrato come la G alla H così essere la M alla N . Perchè dunque sono tre grandezze G, H, L , e le altre in numero uguale K, M, N , che prese a due a due hanno la medesima ragione, ma in ordine perturbato; se la G sarà maggiore della L , anche la K sarà maggiore della N ; se uguale, uguale; se minore, minore [V, 21]. E sono le G, K in qualunque modo equimultiplici delle A, D ; e le L, N in qualunque modo equimultiplici delle C, F : dunque come la A alla C così sarà la D alla F .

Siano ora quattro grandezze A, B, C, D , ed altre in numero uguale E, F, G, H , che prese a due a due abbiano la medesima ragione, ma in ordine perturbato: cioè sia come la A alla B così la G alla H ; e come la B alla C così la F alla G ; e come la C alla D così la E alla F : sarà come la A alla D così la E alla H .

Imperocchè, essendo tre grandezze A, B, C ed altre in numero uguale F, G, H , che prese a due a due hanno la medesima ragione, ed in ordine perturbato, sarà come la A alla C così la F alla H : ma è come la C alla D così la E alla F : e però sarà ancora come la A alla D così la E alla H . Similmente si procederebbe ad un numero qualsivoglia di grandezze: onde *se quante grandezze, ecc. c. d. d.*

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f$$

$$\begin{aligned} a:b &:: c:d \\ b:c &:: d:e \\ c:d &:: e:f \\ a:c &:: d:f \end{aligned}$$

$$\text{---}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f} \quad \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f} \quad \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{e}{f} \quad \text{con} \quad a:b::c:d$$

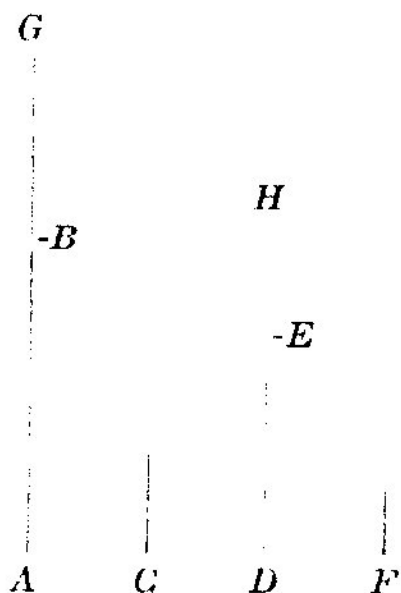
PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se la prima grandezza alla seconda abbia la medesima ragione che la terza alla quarta; e la quinta alla seconda abbia la medesima ragione che la sesta alla quarta; ancora la somma della prima e della quinta avrà alla seconda la medesima ragione che la somma della terza e della sesta ha alla quarta.

La prima AB alla seconda C abbia la medesima ragione che la terza DE alla quarta F : e la quinta BG alla seconda C abbia la medesima ragione che la sesta EH alla quarta F : dico la AG , composta della prima e della quinta, avere alla seconda C la medesima ragione che la DH , composta della terza e della sesta, alla quarta F .

Perchè, essendo come la BG alla C così la EH alla F ; sarà invertendo come la C alla BG così la F alla EH : e perchè come la AB alla C così è la DE alla F ; ed è come la C alla BG così la F alla EH ; sarà *per uguaglià* [V, 22] come la AB alla BG così la DE alla EH : e componendo [V, 18], sarà come la AG alla GB così la DH alla EH : ma come la GB alla C così la HE alla F ; adunque *per uguaglià* come la AG alla C così la DH alla F . Laonde *se la prima, ecc. c. d. d.*



COROLLARIO I.

Fatta la medesima ipotesi, la differenza della prima e della quinta sarà alla seconda come la dif-

ferenza della terza e della sesta alla quarta. Il che si dimostra come la proposizione 24, *dividendo* [V, 17] in luogo di *comporre*.

COROLLARIO II.

La prop. 24 rimane vera per due serie di grandezze, in numero qualsivoglia uguale, dove ciascuna grandezza della prima serie abbia alla seconda la medesima ragione che la corrispondente grandezza della seconda serie ha alla quarta grandezza: il che è manifesto.

PROPOSIZIONE XXV.

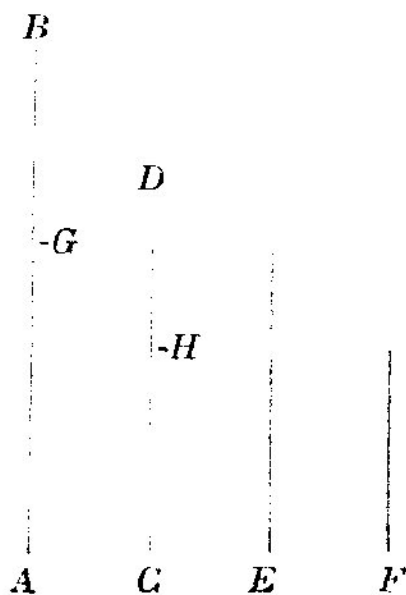
TEOREMA.

Se quattro grandezze omogenee siano proporzionali, sarà la somma della massima e della minima di esse maggiore della somma delle due rimanenti.

Siano le AB , CD , E , F quattro grandezze omogenee proporzionali, e sia come la AB alla CD così la E alla F : sia inoltre la AB massima, onde sarà la F minima [V, A e 14].

Dico essere la somma della AB e della F maggiore della somma della CD e della E .

Pongasi la AG uguale alla E e la CH uguale alla F . Poichè la AB è alla CD come la E alla F ; ed è la AG uguale alla E e la CH uguale alla F ; come la AB alla CD così sarà la AG alla CH : e perchè è come tutta la AB a tutta



la CD così la sottratta AG alla sottratta CH , sarà [V, 19] anche la rimanente GB alla rimanente HD come tutta la AB a tutta la CD : ma è la AB maggiore della CD , onde sarà [V, A] la GB maggiore della HD : e poichè la AG è uguale alla E e la CH alla F , sarà la somma della AG e della F uguale alla somma della CH e della E . E se alla somma della AG e della F aggiungeremo la GB , e alla somma della CH e della E aggiungeremo la HD , che è minore della GB , sarà la somma delle AG , F , GB maggiore della somma delle CH , E , HD . Ma le AG , GB insieme sono uguali alla AB ; e le CH , HD insieme sono uguali alla CD ; sarà dunque la somma della AB e della F maggiore della somma della CD e della E . Laonde *se quattro grandezze, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE F.

TEOREMA.

Le ragioni composte di ragioni fra loro uguali sono uguali.

Come la A alla B così sia la D alla E ; e come la B alla C così la E alla F : dico essere la ragione composta delle due ragioni della A alla B , e della B alla C , cioè [V, *def. B*] la ragione della A alla C , uguale alla ragione composta delle due ragioni della D alla E e della E alla F , ossia alla ragione della D alla F .

$A,$	$B,$	$C.$
$D,$	$E,$	$F.$

Imperocchè essendo le tre grandezze A , B , C e le altre in numero uguale D , E , F prese a due a due nella medesima ragione, sarà per ugualità [V, 22] come la A alla C così la D alla F .

Sia ora come la A alla B così la E alla F ; e come la B alla C così la D alla E : sarà per uguaglià in proporzione perturbata [V, 23] come la A alla C così la D alla F : cioè ancora la ragione della A alla C , che è composta delle due, della A alla B , della B alla C , è uguale alla ragione della D alla F , che è composta delle due, della D alla E , della E alla F . Adunque *le ragioni, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE G.

TEOREMA.

Se alcune ragioni sono uguali ad alcune altre, ciascuna a ciascuna; la ragione che è composta di ragioni uguali alle prime, ciascuna a ciascuna, sarà uguale alla ragione che è composta di ragioni uguali alle altre, ciascuna a ciascuna.

Siano come la A alla B così la E alla F ; e come la C alla D così la G alla H : e sia come la A alla B così la K alla L : e come la C alla D così la L alla M : la ragione della K alla M è adunque, per definizione [V, *def. B*], composta delle ragioni della K alla L e della L alla M , le quali sono uguali alle ragioni della A alla B e della C alla D . Sia inoltre come la E alla F così la N alla O : e come la G alla H così la O alla P : la ragione della N alla P è, per definizione, composta delle ragioni della N alla O , e della O alla P , le quali sono uguali alle ragioni della E alla F e della G alla H . Dico essere la ragione della K alla M uguale a quella

$A, B; C, D;$	$K, L, M.$
$E, F; G, H;$	$N, O, P.$

della N alla P : cioè come la K alla M così essere la N alla P .

Imperocchè è la K alla L come (la A alla B , cioè come la E alla F , cioè come) la N alla O : ed è la L alla M come (la C alla D , cioè come la G alla H , cioè come) la O alla P : sarà adunque [V, 22] per uguaglià, come la K alla M così la N alla P . Adunque *se alcune ragioni, ecc.* c. d. d.

PROPOSIZIONE H .

TEOREMA.

Se una ragione composta di alcune ragioni sia uguale ad una ragione composta di alcune altre ragioni; e sia una ragione delle prime, o una ragione composta di alcune delle prime, uguale ad una ragione delle altre, o ad una ragione composta di alcune delle altre; sarà anche la rimanente ragione delle prime, o la ragione composta delle rimanenti delle prime, uguale alla rimanente ragione delle altre, o alla ragione composta delle rimanenti delle altre.

Siano le ragioni della A alla B ; della B alla C ; della C alla D ; della D alla E ; e della E alla F : e le altre ragioni della G alla H ; della H alla K ; della K alla L ; e della L alla M : e sia la ragione della A alla F , composta delle prime [V, *def.* B], uguale alla ragione della G alla M , composta delle seconde: ed inoltre sia la ragione della A alla D , (la quale è composta delle

A, B, C, D, E, F $G, H, K, L, M.$
--

ragioni della A alla B , della B alla C , della C alla D) uguale alla ragione della G alla K (la quale è composta delle ragioni della G alla H , e della H alla K): sarà ancora la ragione della D alla F (la quale è composta delle rimanenti delle prime, cioè della D alla E , e della E alla F) uguale alla ragione della K alla M (la quale è composta delle rimanenti delle seconde, cioè della K alla L , e della L alla M).

Imperocchè, essendo per ipotesi come la A alla D così la G alla K , sarà invertendo come la D alla A così la K alla G : ma come la A alla F così la G alla M ; adunque [V, 22] sarà come la D alla F così la K alla M .
Laonde *se una ragione, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE K.

TEOREMA.

Se si abbiano delle ragioni in numero qualsivoglia, che chiameremo prime, ed altre pure in numero qualsivoglia, che chiameremo seconde; e sia la ragione che è composta di ragioni uguali alle prime, ciascuna a ciascuna, uguale alla ragione che è composta di ragioni uguali alle seconde, ciascuna a ciascuna; ed una ragione delle prime, ovvero la ragione che è composta di ragioni uguali, ciascuna a ciascuna, ad altrettante delle prime, sia uguale ad una ragione delle seconde, ovvero alla ragione che è composta di ragioni uguali, ciascuna a ciascuna, ad altrettante delle seconde; sarà

ancora la rimanente ragione delle prime, ovvero se sieno più d' una, sarà la ragione che è composta di ragioni uguali, ciascuna a ciascuna, alle rimanenti delle prime, uguale alla rimanente ragione delle seconde, ovvero se siano più d' una, uguale alla ragione che è composta di ragioni uguali, ciascuna a ciascuna, alle rimanenti ragioni delle seconde.

Siano le prime ragioni A a B ; C a D ; E ad F : e le seconde siano G ad H ; K ad L ; M ad N ; O a P ; Q

$h, k, l.$		
$A, B; C, D; E, F;$	$S, T, V, X.$	
$G, H; K, L; M, N; O, P; Q, R.$	$Y, Z, a, b, c, d.$	
$e, f, g;$	$m, n, o, p.$	

ad R : e sia come A a B così S a T ; e come C a D così T a V ; e come E ad F così V ad X : onde sarà, per definizione della ragione composta, la ragione di S ad X composta delle ragioni S a T ; T a V ; e V ad X ; le quali, ciascuna a ciascuna, sono uguali alle ragioni A a B ; C a D ; E ad F : sia inoltre come G ad H così Y a Z ; e come K ad L così Z ad a ; e come M ad N così a a b ; e come O a P così b a c ; e come Q ad R così c a d : onde, per definizione, la ragione di Y a d è composta delle ragioni Y a Z ; Z ad a ; a a b ; b a c ; c a d ; le quali, ciascuna a ciascuna, sono uguali alle ragioni G ad H ; K ad L ; M ad N ; O a P ; Q ad R : per l'ipotesi fatta sarà come S ad X così Y a d . Sia oltre a ciò la ragione A a B ossia la ragione S a T (una cioè delle prime) uguale alla ragione e a g , la quale è composta delle ragioni e ad f , f a g uguali, ciascuna a ciascuna,

alle ragioni G ad H , K ad L delle seconde: e sia la ragione h ad l composta delle ragioni h a k , k ad l , uguali, ciascuna a ciascuna, alle rimanenti delle prime cioè alle C a D , E ad F : e sia la ragione m a p composta delle ragioni m ad n ; n ad o ; o a p , uguali, ciascuna a ciascuna, alle rimanenti delle seconde, cioè alle ragioni M ad N ; O a P ; Q ad R . Sarà la ragione h ad l uguale alla ragione m a p : cioè come h ad l così sarà m a p .

Imperocchè è e ad f come (G ad H , cioè come) Y a Z ; ed f a g come (K ad L , cioè come) Z ad a : onde sarà, per uguaglià, e a g come Y ad a : ed è per ipotesi A a B cioè S a T , come e a g , onde sarà S a T come Y ad a ; ed invertendo T ad S come a ad Y : è inoltre S ad X come Y a d ; dunque, per uguaglià, sarà T ad X come a a d . Inoltre è h a k come (C a D , cioè come) T a V ; e k ad l come (E ad F , cioè come) V ad X : onde sarà per uguaglià h ad l come T ad X . Similmente si dimostrerà essere m a p come a a d : ma si è dimostrato essere T ad X come a a d : sarà adunque h ad l come m a p . Laonde se si abbiano, ecc. c. d. d.

LIBRO SESTO.



Definizioni.

I. Figure rettilinee *simili* diconsi quelle che hanno gli angoli uguali, ciascuno a ciascuno, e dintorno agli angoli uguali i lati proporzionali.

II. Due grandezze diconsi *reciprocamente* o *inversamente* proporzionali a due altre, quando una delle prime è ad una delle seconde come la rimanente di queste alla rimanente di quelle.

III. Una linea retta si dice essere segata in *estrema e media* ragione, quando sia tutta la linea al segmento maggiore, come il segmento maggiore è al minore.

IV. *Altezza* di una figura è la linea perpendicolare, che dal vertice è condotta alla base.



PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

I triangoli e i parallelogrammi che hanno la medesima altezza sono fra loro come le basi.

Siano i triangoli ABC , ACD , ed i parallelogrammi EC , CF , che hanno la stessa altezza, cioè la perpendicolare abbassata dal punto A sulla BD . Dico che i due triangoli fra loro e i due parallelogrammi fra loro hanno la stessa ragione delle basi BC , CD .

Prolunghisi BD dall'una e dall'altra parte, e pren-

dansi quanti segmenti si vogliano BG , GH uguali a BC ; e quanti segmenti si vogliano DK , KL uguali a CD ; e tirinsi AG , AH , AK , AL .

I triangoli ABC , AGB , AHG sono uguali [I, 38], onde quante volte la base HC è multiplice della base BC , altrettante volte il triangolo AHC sarà multiplice del triangolo ABC . Per la stessa ragione, il triangolo ALC sarà multiplice del triangolo ADC quante volte la base LC è multiplice della base DC . E secondochè sia la LC uguale, maggiore o minore della HC , anche il triangolo ALC sarà uguale, maggiore o minore del triangolo AHC . Dunque gli ugualmente multiplici del triangolo ABC e della sua base BC si accordano con gli ugualmente multiplici del triangolo ADC e della sua base DC in uguagliarsi, superarsi o essere superati l'uno dall' altro; e però [V, def. 5] come la base BC alla base DC , così il triangolo ABC sarà al triangolo ADC .

Siccome poi i parallelogrammi EC , CF sono doppi dei triangoli ABC , ADC [I, 41], così essi sono nella stessa ragione dei triangoli [V, 15]; cioè come la base BC alla base DC così sarà il parallelogrammo EC al parallelogrammo CF . Laonde i triangoli, ecc. c. d. d.

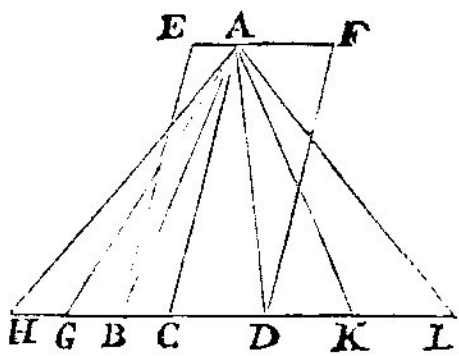
COROLLARIO.

I triangoli o i parallelogrammi che hanno altezze uguali sono fra loro come le basi.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Se in un triangolo si conduca una retta parallela alla base, essa segnerà i lati o i loro prolun-



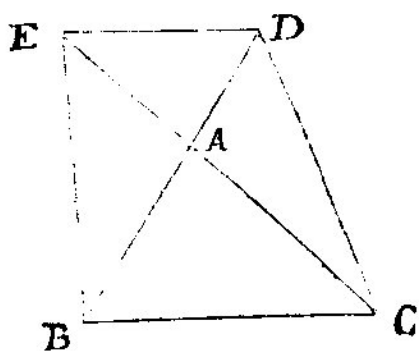
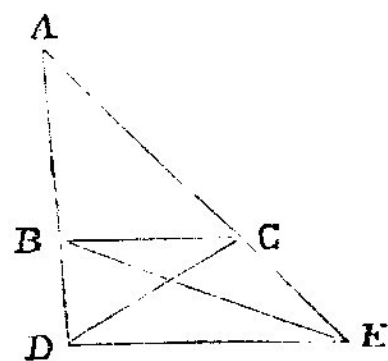
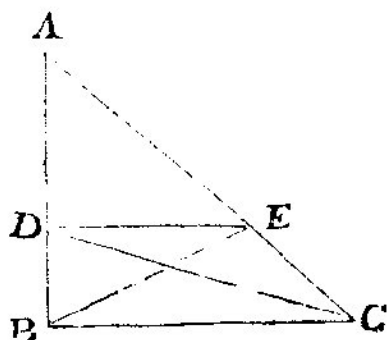
gamenti in parti proporzionali; e se i lati o i lati prolungati siano segati proporzionalmente, la retta che congiunge i punti di segmento sarà parallela alla base.

Tirisi la DE parallela ad un lato BC del triangolo ABC . Dico che, come la BD alla DA , così è la CE alla EA .

Si congiungano B con E e C con D .

Il triangolo BDE è uguale al triangolo CDE perchè sono sopra la medesima base DE e tra le medesime parallele DE, BC [I, 37]; e perchè le grandezze uguali hanno la medesima ragione ad una medesima grandezza [V, 7], sarà il triangolo BDE al triangolo ADE , com'è il triangolo CDE al triangolo ADE ; ma come il triangolo BDE al triangolo ADE così è la BD alla DA ; perchè avendo la medesima altezza (cioè la perpendicolare dal punto E abbassata sopra la AB) sono fra loro come le basi [VI, 1]; e per la medesima ragione, come il triangolo CDE al triangolo ADE , così è la CE alla EA ; adunque come la BD alla DA , così è la CE alla EA [V, 11].

Siano ora segati proporzionalmente i lati AB , BC del triangolo ABC o i lati prolungati, cioè come la BD alla DA , così sia la CE alla EA ; e tirisi DE . Dico la DE essere parallela alla BC .



Fatte le medesime costruzioni, come la BD alla DA , così è il triangolo BDE al triangolo ADE ; e come la CE alla EA , così è il triangolo CDE al triangolo ADE : dunque come il triangolo BDE al triangolo ADE , così il triangolo CDE al triangolo ADE : ed avendo ambedue i triangoli BDE , CDE la medesima ragione al triangolo ADE , sarà il triangolo BDE uguale al triangolo CDE [V, 9]. Ma sono sopra la medesima base DE , ed i triangoli uguali costruiti sopra la medesima base sono eziandio tra le medesime parallele [I, 40]; adunque la DE è parallela alla BC ; laonde *se in un triangolo si conduca, ecc. c. d. d.* —

PROPOSIZIONE III.

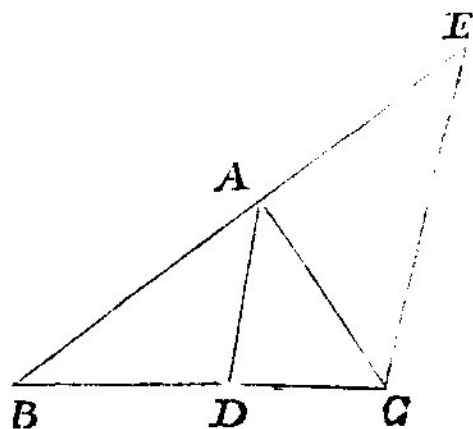
PROBLEMA.

Se un angolo di un triangolo sia segato per metà da una retta che seghi ancora la base, i segmenti della base saranno proporzionali agli altri lati del triangolo; e se i segmenti della base siano proporzionali agli altri lati del triangolo, la linea retta, che dal vertice si tiri al punto di segamento della base, dividerà l'angolo per metà.

Sia il triangolo ABC , e seghisi l'angolo BAC per metà colla linea retta AD . Dico come la BD alla DC , così essere la BA alla AC .

Tirisi per C la CE parallela alla DA , e la BA prolungata concorra con essa nel punto E .

Siccome fra le parallele AD , EC è tirata la linea retta AC , sarà l'angolo ACE uguale all'angolo CAD [I, 29]; ma si suppone l'angolo CAD



uguale all'angolo BAD , adunque l'angolo BAD sarà uguale all'angolo ACE . Oltre a ciò, perchè la linea retta BAE taglia le parallele AD , EC , l'angolo esterno BAD è uguale all'interno AEC ; adunque ancor l'angolo ACE sarà uguale all'angolo AEC ; e però il lato AE sarà uguale al lato AC [I, 6]. Poi essendo la AD parallela ad un lato del triangolo BCE , cioè ad EC , sarà come la BD alla DC , così la BA alla AE [VI, 2]; ma la AE è uguale alla AC , adunque come la BD alla DC , così è la BA alla AC .

Sia ora come la BD alla DC , così la BA alla AC , e congiungasi A con D , dico l'angolo BAC esser segato per metà dalla linea retta AD .

Perciocchè, fatte le medesime costruzioni, sarà come la BD alla DC , così la BA alla AE , perchè la AD è parallela ad un lato del triangolo BCE , cioè ad EC ; ma la BD è alla DC come la BA alla AC : sarà quindi come la BA alla AC , così la BA alla AE [V, 11]: adunque la AC è uguale alla AE [V, 9], e però l'angolo AEC uguale all'angolo ECA . Ma l'angolo AEC è uguale all'esterno BAD ; e l'angolo ACE è uguale all'alterno CAD ; onde eziandio l'angolo BAD sarà uguale all'angolo CAD . Dunque l'angolo BAC è segato per metà dalla linea retta AD ; laonde *se un angolo di un triangolo sia segato per metà, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE A.

TEOREMA.

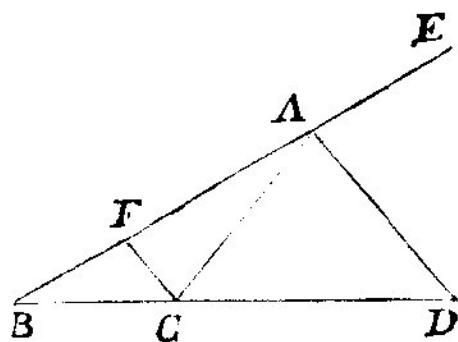
Prolungato un lato di un triangolo, se l'angolo esterno sia segato per metà da una retta che incontri la base prolungata, i segmenti della base

compresi fra i termini di essa e la secante saranno proporzionali agli altri lati del triangolo; e se i segmenti della base prolungata abbiano la stessa ragione degli altri due lati, la retta che dal vertice va al punto di segmento della base dividerà per metà l'angolo esterno del triangolo.

Nel triangolo ABC seghisi l'angolo esterno CAE per metà colla retta AD , che incontri la base BC prolungata in D . Dico come BD a DC , così essere BA ad AC .

Tirisi per C la CF parallela alla DA .

Sarà [I, 29] l'angolo ACF uguale all'alterno CAD , ossia all'angolo DAE . Inoltre l'angolo esterno DAE è uguale [I, 29] all'interno opposto CFA , dunque gli angoli ACF , CFA sono uguali, e quindi uguali anco i lati AF , AC del triangolo AFC [I, 6]. Poi essendo AD parallela alla base CF del triangolo BCF , sarà [VI, 2] come BD a CD così BA ad FA , ossia come BD a DC , così BA ad AC .

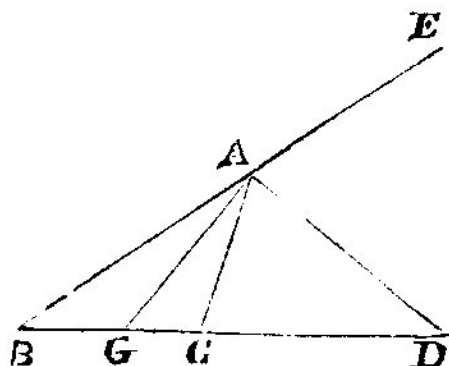


Ora sia BD a DC come BA ad AC ; dico che l'angolo esterno CAE è segato per mezzo dalla AD .

Fatta la medesima costruzione, essendo AD parallela alla base FC del triangolo BFC , sarà come BD a DC così BA ad AF ; ma come BD a DC così è BA ad AC ; adunque come BA ad AF così BA ad AC [V, 11]. Perciò [V, 9] AC è uguale ad AF , e l'angolo AFC sarà uguale all'angolo ACF [I, 5]. Ma l'angolo AFC è uguale all'esterno EAD , e l'angolo ACF è uguale all'alterno CAD ; dunque gli angoli CAD , EAD saranno uguali fra loro. Laonde *prolungato*, ecc. c. d. d.

COROLLARIO.

Se l'angolo esterno CAE del triangolo ABC e l'angolo adiacente interno BAC sono divisi per metà dalle rette AD , AG , sarà BG a GC come BD a CD , cioè se dalla BD si toglie GD e dalla GD si toglie CD , sarà il primo segmento rimanente al secondo segmento rimanente come BD a CD . Ossia i segmenti BD , GD e CD sono in proporzione armonica. Perciò si dice che BC è *divisa armonicamente* in G , D , ossia che i quattro punti B , C , G , D formano un *sistema armonico*.



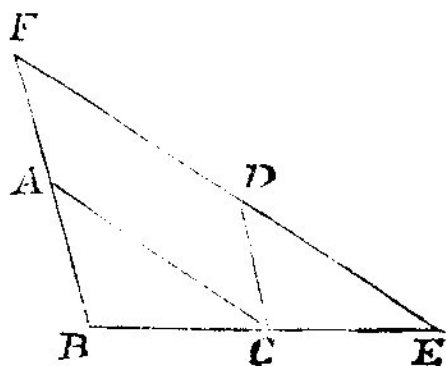
PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Nei triangoli equiangoli, i lati che stanno d'intorno agli angoli uguali sono proporzionali fra loro: e lati omologhi sono quelli che sono opposti agli angoli uguali.

Siano i triangoli equiangoli ABC , DCE , che abbiano l'angolo ABC uguale all'angolo DCE , l'angolo ACB all'angolo DEC , e l'angolo BAC all'angolo CDE . Dico che sono proporzionali i lati che stanno d'intorno agli angoli uguali, e che i lati omologhi, ovvero nella medesima ragione [V, *def.* 13], sono quelli che sono opposti agli angoli uguali.

Pongasi la BC per diritto



alla CE , e poichè la somma degli angoli ABC , ACB è minore di due retti, e l'angolo ACB è uguale all'angolo DEC , sarà la somma degli angoli ABC , DEC minore di due retti, onde le BA , ED prolungate concorreranno fra loro in un punto F . Essendo l'angolo DCE uguale all'angolo ABC , sarà la BF parallela alla DC [I, 28]; similmente perchè l'angolo ACB è uguale all'angolo DEC , la AC sarà parallela alla FE ; adunque $FACD$ è un parallelogrammo: e perciò la FA è uguale alla CD , e la AC alla FD [I, 34]. Poichè la AC è parallela ad un lato del triangolo FBE , cioè ad FE , sarà come la BA alla AF , così la BC alla CE [VI, 2]; ossia come la BA alla CD , così la BC alla CE : e permutando [V, 16] come la AB alla BC , così è la DC alla CE . Similmente, perchè la CD è parallela alla BF , sarà come la BC alla CE , così la FD alla DE , ossia come la BC alla CE , così la AC alla FD : e permutando, come la BC alla CA , così la CE alla ED . Per conseguenza sarà inoltre per uguaglià [V, 22] come la BA alla AC , così la CD alla DE ; onde *nei triangoli equiangoli, ecc. c. d. d.*

COROLLARIO.

Quindi si ha che i triangoli equiangoli fra loro sono figure simili [VI, *def.* 1].

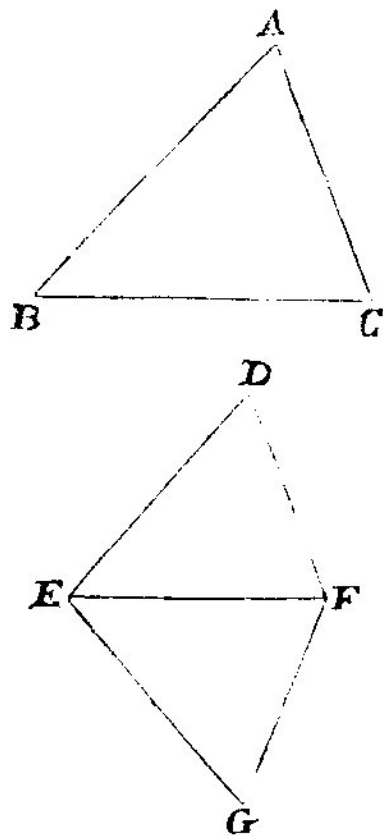
PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano i lati proporzionali, saranno ancora equiangoli, ed avranno uguali gli angoli opposti ai lati omologhi.

Siano due triangoli ABC , DEF che abbiano i lati

proporzionali; e sia come la AB alla BC , così la DE alla EF : e come la BC alla CA , così la EF alla FD ; ed in conseguenza come la BA alla AC , così la ED alla DF . Dico il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF , ed avere uguali gli angoli opposti ai lati omologhi; cioè l'angolo ABC all'angolo DEF , l'angolo ACB all'angolo EFD , e l'angolo BAC all'angolo EDF .



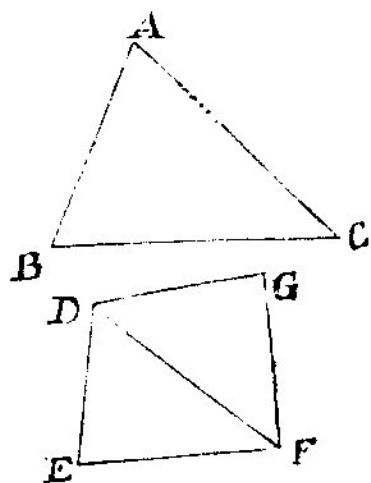
Costruiscansi l'angolo FEG uguale all'angolo ABC , e l'angolo EFG all'angolo BCA , onde l'angolo rimanente BAG è uguale al rimanente EGF [I, 32], e però il triangolo ABC è equiangolo al triangolo EGF . Sono dunque proporzionali i lati de' triangoli ABC , EGF , che stanno dintorno agli uguali angoli [VI, 4]: cioè come la AB alla BC , così la GE alla EF ; ma come la AB alla BC , così è la DE alla EF : adunque come la DE alla EF , così la GE alla EF ; ed avendo ciascuna di esse DE , EG la medesima ragione alla EF , sarà la DE uguale alla EG [V, 9]; e per la medesima ragione la DF sarà uguale alla FG ; e perchè la EF è comune, nei triangoli DEF , GEF , saranno uguali gli angoli opposti ai lati uguali [I, 8]; cioè l'angolo DFE uguale all'angolo GFE , l'angolo FED uguale all'angolo GEF : e perchè l'angolo GEF è uguale all'angolo ABC , sarà anche l'angolo ABC uguale all'angolo FED ; e per la medesima ragione l'angolo ACB uguale all'angolo DFE , e ancora l'angolo A uguale all'angolo D . Adunque il triangolo ABC sarà equiangolo al triangolo DEF ; laonde se due triangoli abbiano i lati proporzionali, ecc. c. d. d.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo e dintorno agli angoli uguali abbiano i lati proporzionali, saranno detti triangoli equiangoli, ed avranno uguali gli angoli opposti ai lati omologhi.

Siano due triangoli ABC , DEF , che abbiano un angolo BAC uguale ad un angolo EDF , e dintorno agli angoli uguali i lati proporzionali, cioè sia come la BA alla AC , così la ED alla DF . Dico il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF , ed avere l'angolo ABC uguale all'angolo DEF , e l'angolo ACB all'angolo DFE .



Costruiscansi l'angolo FDG uguale all'angolo BAC , e l'angolo DFG uguale all'angolo ACB , onde il rimanente angolo B sarà uguale al rimanente G , ed il triangolo ABC equiangolo al triangolo DGF ; perciò come la BA alla AC , così è la GD alla DF [VI, 4]: ma come la BA alla AC , così è la ED alla DF ; adunque [V, 11] come la ED alla DF , così è la GD alla DF , e però la ED è uguale alla DG [V, 9]. Sono adunque le due ED , DF uguali alle due GD , DF , e l'angolo EDF uguale all'angolo GDF ; onde nei triangoli DEF , GDF [I, 4], l'angolo DFG è uguale all'angolo DFE ; e l'angolo G all'angolo E : ma l'angolo DFG è uguale all'angolo ACB , onde l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE ; e siccome

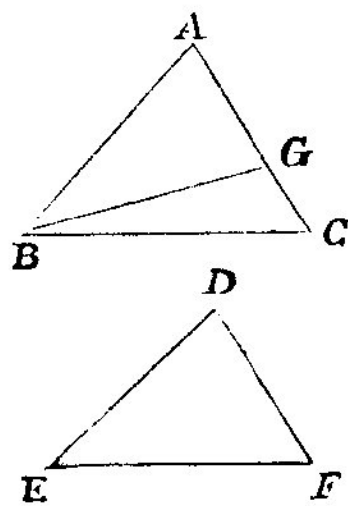
si è supposto l'angolo BAC uguale all'angolo EDF , il rimanente B è uguale al rimanente E , ed il triangolo DEF equiangolo al triangolo ABC . Onde *se due triangoli abbiano, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e dintorno ad un altro angolo abbiano i lati proporzionali, e l'angolo rimanente sia minore in entrambi, o in entrambi non minore del retto, saranno detti triangoli equiangoli, ed avranno uguale l'angolo intorno al quale sono i lati proporzionali.

Siano due triangoli ABC , DEF , che abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo BAC uguale all'angolo EDF , e dintorno agli angoli ABC , DEF i lati proporzionali, di modo che la DE sia alla EF , come la AB alla BC ; e supponiamo dapprima che i rimanenti angoli, che sono ai punti C, F siano entrambi minori del retto. Dico il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF , e l'angolo ABC uguale all'angolo DEF , ed il rimanente, cioè l'angolo C , uguale al rimanente F .



Perciocchè, se l'angolo ABC sia disuguale all'angolo DEF , uno di essi sarà maggiore. Sia maggiore ABC , e costruiscasi l'angolo ABG uguale all'angolo DEF . Sic-

come l'angolo A è uguale all'angolo D , e l'angolo ABG all'angolo DEF , sarà eziandio il rimanente AGB uguale al rimanente DFE . Adunque il triangolo ABG è equiangolo al triangolo DEF , e come la AB alla BG , così è la DE alla EF ; ma come la DE alla EF , così si è supposta la AB alla BC ; dunque come la AB alla BC , così [V, 11] la AB alla BG ; ed avendo la AB la medesima ragione ad ambedue BC , BG , sarà [V, 9] la BC uguale alla BG , e perciò l'angolo C sarà uguale all'angolo BGC . Ma l'angolo C si è supposto minore del retto, adunque eziandio BGC sarà minore del retto, e l'angolo conseguente AGB maggiore del retto: e siccome si è dimostrato l'angolo AGB uguale all'angolo F , così l'angolo F dovrebbe essere maggiore del retto, il che è contrario al supposto, onde l'angolo ABC non è disuguale all'angolo DEF : ed essendo l'angolo A uguale all'angolo D , sarà ancora il rimanente F al rimanente C , ed il triangolo ABC equiangolo al triangolo DEF .

Pongasi ora ciascuno degli angoli C , F non minore del retto. Dico similmente il triangolo ABC essere equiangolo al triangolo DEF .

Perciocchè, fatte le medesime costruzioni, dimostreremo eziandio BC essere uguale a BG , e l'angolo C uguale all'angolo BGC : ma l'angolo C non è minore del retto, adunque BGC non sarà minore del retto, e la somma di questi due angoli del triangolo BGC non sarà minore di due retti, che è impossibile; laonde l'angolo ABC non è disuguale all'angolo DEF , ma uguale necessariamente; e l'angolo A è uguale all'angolo D , adunque il rimanente C è uguale al rimanente F , e perciò il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF ; dunque *se due triangoli abbiano, ecc. c. d. d.*

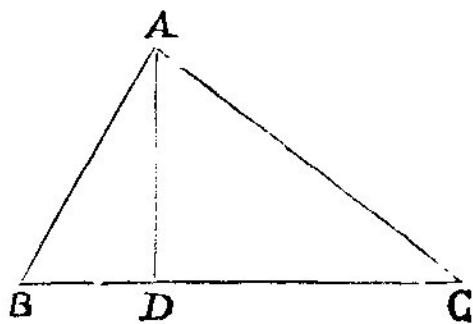
PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se in un triangolo rettangolo si abbassa dal vertice dell'angolo retto la perpendicolare sopra la ipotenusa, i triangoli che le stanno dintorno sono simili all'intero triangolo e simili anche fra loro.

Sia il triangolo rettangolo ABC , che abbia l'angolo retto BAC , e dal punto A tirisi la AD perpendicolare alla BC . Dico che i triangoli ABC , ADC sono simili a tutto il triangolo ABC , e simili anche fra loro.

Perciocchè essendo l'angolo BAC uguale all'angolo ADB , perchè l'uno e l'altro è retto, ed essendo l'angolo B comune a' due



triangoli ABC , ABD , sarà il rimanente ACB uguale al rimanente BAD : adunque il triangolo ABC è equiangolo al triangolo ABD e però simile ad esso [VI, 4, *cor.*]. Dimostreremo ancora per la medesima ragione il triangolo ADC essere simile al triangolo ABC ; e perciò l'uno e l'altro di essi ABD , ADC è simile a tutto il triangolo ABC .

Dico oltre a ciò, che i triangoli ABD , ADC sono fra loro simili. Perchè l'angolo BDA retto è uguale al retto ADC ; e si è dimostrato BAD uguale all'angolo C ; sarà il rimanente B uguale al rimanente DAC , e il triangolo ABD equiangolo e però simile al triangolo ADC .
Laonde *se in un triangolo rettangolo, ecc. c. d. d.*

COROLLARIO.

Da questo è chiaro che se in un triangolo rettangolo dal vertice dell'angolo retto alla ipotenusa sia tirata la perpendicolare, questa è media proporzionale fra i segmenti della ipotenusa: oltre a ciò ciascun cateto è medio proporzionale fra la ipotenusa e il segmento di questa, che gli è adiacente.

Imperocchè nei triangoli BDA , ADC è BD a DA come DA a DC [VI, 4]; nei triangoli ABE , DBA è BC a BA come BA a BD ; e nei triangoli ABE , DAC è BC a CA come DA a CD .

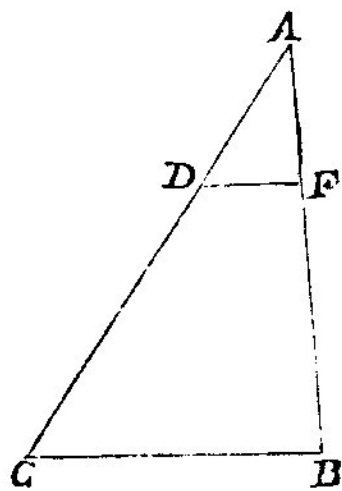
PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

Da una data linea retta tagliare una parte proposta.

Sia la data linea retta AB , bisogna dalla AB tagliare una parte proposta, cioè una linea retta della quale la AB sia moltiplice in un dato modo.

Tirisi dal punto A la linea retta AC , la quale con AB contenga un angolo arbitrario: e piglisi nella AC un punto qualunque D , e facciasi AC ugualmente moltiplice di AD come AB deve essere della parte che si vuol tagliare da essa; poi congiungasi B con C , e per D tirisi la DF parallela alla CB .



Perchè ad un lato del triangolo ABC , cioè a CB , si è tirata una parallela DF , sarà come la CD alla DA così la BF alla FA e componendo [V, 18] come CA a DA così BA ad FA . Ma CA è un certo multiplo di DA : dunque [V, D] BA è lo stesso multiplo di AF ; cioè AF è la stessa parte di AB come è AD di AC . Laonde, *ecc.*

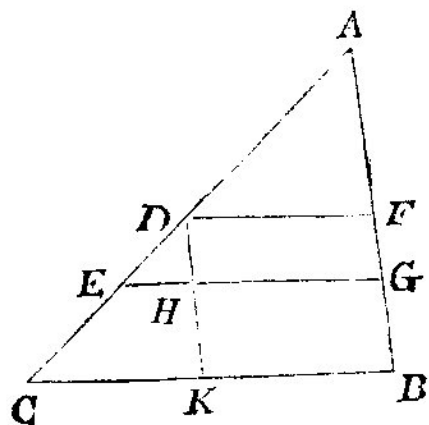
PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

Segare una data linea retta in parti proporzionali e similmente disposte a quelle nelle quali è divisa un' altra retta.

Sia la data linea retta da segarsi AB , e l' altra retta AC ; bisogna segare la linea retta AB come già è segata la AC .

Sia segata la AC nei punti D, E ; e pongansi le due rette in modo che contengano un angolo qual si voglia, e congiunto B con C per i punti D, E , tirinsi DF, EG parallele alla BC , e per D tirisi la DHK parallela alla AB .



Saranno FH, HB parallelogrammi, e però la DH uguale alla FG , e la HK alla GB ; e perchè ad un lato del triangolo DKC , cioè a KC , si è tirata la parallela HE , sarà come la CE alla ED , così la KH alla HD ; ossia come la CE alla ED , così è la BG alla GF . Similmente perchè ad un lato del triangolo AGE , cioè alla EG , si è tirata la parallela FD , come la ED

alla DA , così sarà la GF alla FA . Ma si è dimostrato che come la CE alla ED , così è la BG alla GF ; e come la ED alla DA , così la GF alla FA ; adunque si è segata una data linea retta, *ecc.*

PROPOSIZIONE XI.

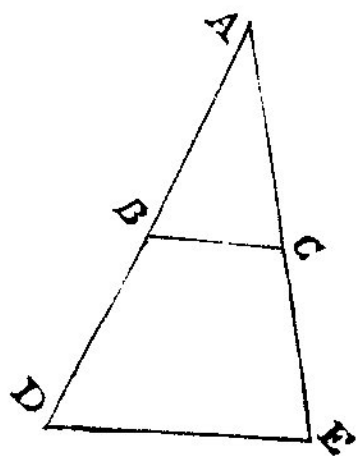
PROBLEMA.

Date due linee rette, trovare la terza proporzionale.

Siano le due linee rette date AB , AC , e pongansi in modo, che contengano qualsivoglia angolo; bisogna trovare la terza proporzionale alle AB , AC .

Prolunghinsi le AB , AC , e si prenda BD uguale ad AC ; si congiunga B con C , e tirisi per D la DE parallela alla BC .

Perchè ad un lato del triangolo ADE , cioè a DE , si è tirata la BC parallela, sarà come la AB alla BD , così AC alla CE ; ma la BD è uguale alla AC ; adunque come la BA alla AC così è la AC alla CE ; laonde, date due linee rette, si è trovata la terza proporzionale; il che bisognava fare.



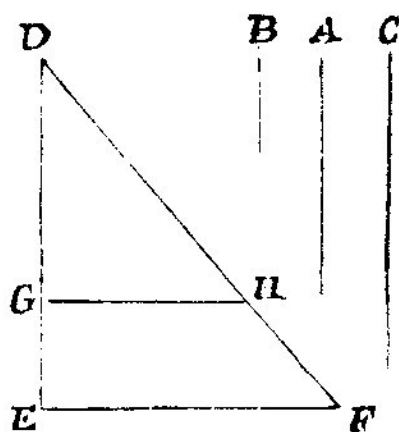
PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

Date tre linee rette, trovare la quarta proporzionale.

Siano le tre linee rette date A, B, C , bisogna trovare la quarta proporzionale.

Tirinsi due linee rette DE, DF , che contengano qualsivoglia angolo EDF ; e pongasi la DG uguale alla A , e la GE uguale alla B , e la DH uguale alla C ; e, condotta GH tirisi per E la EF parallela ad essa.



Perchè ad un lato del triangolo DEF , cioè ad EF , si è tirata la GH parallela, sarà come la DG alla GE , così la DH alla HF ; ma la DG è uguale alla A , e la GE alla B , e la DH alla C ; come dunque la A alla B , così la C alla HF . Laonde, date tre linee rette, si è trovata la quarta proporzionale, il che bisognava fare.

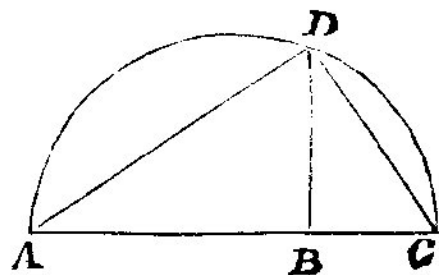
PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

Date due linee rette, trovare la media proporzionale.

Siano le due linee rette date AB, BC : bisogna trovare la media proporzionale.

Pongansi per diritto, e sulla AC descrivasi il mezzo cerchio ADC , e tirisi dal punto B la BD ad angoli retti sopra la AC , e conducansi AD , DC .



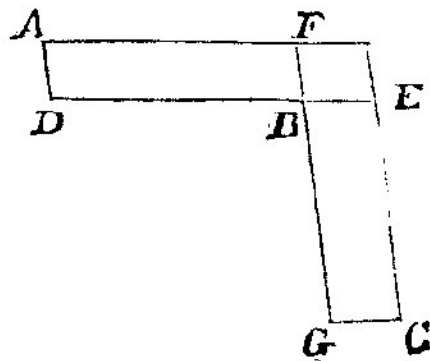
Perchè l'angolo ADC nel mezzo cerchio, è retto [III, 31], e perchè nel triangolo rettangolo ADC , dal vertice dell'angolo retto alla ipotenusa si è tirata la perpendicolare DB , sarà DB media proporzionale fra i segmenti della ipotenusa AB , BC [VI, 8 *cor.*]. Dunque date due linee rette, si è trovata la media proporzionale; il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se due parallelogrammi sono uguali ed hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati dintorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali: e se due parallelogrammi hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati dintorno agli angoli uguali inversamente proporzionali, i parallelogrammi sono uguali.

Siano i parallelogrammi uguali AB , BC , che abbiano gli angoli al punto B uguali; e pongansi per diritto DB , BE , onde saranno ancora per diritto FB , BG [I, 14]. Dico i lati, che sono dintorno agli angoli uguali, essere fra loro inversamente proporzionali, cioè, come DB a BE , così essere GB a BF .



Compiscasi il parallelogrammo FE .

Poichè il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo BC , sarà come AB ad EF , così BC ad FE [V, 7]; ma come AB ad FE , così è DB a BE [VI, 1]; e come BC ad FE , così GB a BF ; dunque come DB a BE , così GB a BF ; onde i lati de' parallelogrammi AB , BC , che sono dintorno agli angoli uguali, sono fra loro inversamente proporzionali.

Siano ora inversamente proporzionali fra loro i lati, che sono dintorno agli angoli uguali, cioè sia come DB a BE così GB a BF . Dico il parallelogrammo AB essere uguale al parallelogrammo BC .

Infatti, essendo come DB a BE così GB a BF ; e come DB a BE così il parallelogrammo AB al parallelogrammo FE ; e come GB a BF così il parallelogrammo BC al parallelogrammo FE : sarà [V, 11] come AB ad FE , così BC ad FE ; onde il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo BC [V, 9]. Adunque *se due parallelogrammi, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XV.

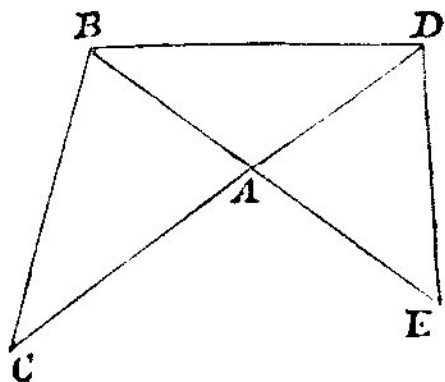
TEOREMA.

Se due triangoli sono uguali ed hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati dintorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali: e se due triangoli hanno un angolo uguale ad un angolo ed i lati dintorno agli angoli uguali inversamente proporzionali, i due triangoli sono uguali.

Siano i triangoli uguali ABC , ADE , che abbiano

l'angolo BAC uguale all'angolo DAE . Dico i lati, che sono dintorno agli angoli uguali, essere inversamente proporzionali, cioè, come CA ad AD così essere EA ad AB .

Pongansi in modo che CA sia per diritto ad AD , onde EA ancora sarà per diritto ad AB , e tirisi BD .



Siccome il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE , sarà [V, 7] come il triangolo CAB al triangolo BAD , così il triangolo ADE al triangolo BAD ; ma come il triangolo CAB al triangolo BAD , così CA ad AD [VI, 1]; e come il triangolo EAD al triangolo BAD , così EA ad AB ; dunque come [V, 11] CA ad AD , così EA ad AB ; onde i lati de' triangoli ABC , ADE , che sono dintorno agli angoli uguali, sono inversamente proporzionali fra loro.

Siano ora fra loro inversamente proporzionali i lati dei triangoli ABC , ADE che sono intorno agli angoli uguali in A ; sia cioè come CA ad AD , così EA ad AB . Dico il triangolo ABC essere uguale al triangolo ADE .

Infatti, essendo come CA ad AD , così EA ad AB ; e come CA ad AD , così il triangolo ABC al triangolo BAD ; e come EA ad AB , così il triangolo EAD al triangolo BAD ; sarà [V, 11] come il triangolo ABC al triangolo BAD , così il triangolo EAD al triangolo BAD ; onde il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE . Adunque *se due triangoli sono uguali, ecc. c. d. d.*

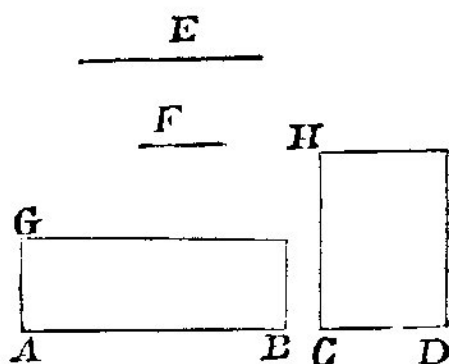
PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se quattro linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al rettangolo contenuto dalle medie; e se il rettangolo contenuto dall'estreme sia uguale al rettangolo contenuto dalle medie, le quattro linee rette saranno proporzionali.

Sieno quattro linee rette proporzionali AB, CD, E, F , e sia come la AB alla CD , così la E alla F . Dico che il rettangolo contenuto dalle linee rette AB, F è uguale a quello contenuto dalle CD, E .

Tirinsi da' punti A, C le AG, CH ad angoli retti sopra le AB, CD , e pongasi la AG uguale alla F , e la CH uguale alla E , e compiscansi i parallelogrammi BG, DH .



Poichè come la AB alla CD , così è la E alla F ; e la E è uguale alla CH , e la F alla AG ; sarà come la AB alla CD , così la CH alla AG ; dunque i lati de' parallelogrammi equiangoli BG, DH , che sono dintorno agli angoli uguali, sono fra loro inversamente proporzionali; e però il rettangolo BG contenuto dalle AB, F , è uguale al rettangolo DH contenuto dalle CD, E [VI, 14].

Sia ora il rettangolo BG contenuto dalle AB, F uguale al rettangolo DH contenuto dalle CD, E . Dico le quattro linee rette essere proporzionali, cioè come la AB alla CD , così essere la E alla F .

Avendo fatte le medesime costruzioni, perchè il rettangolo BG è uguale al rettangolo DH e l'angolo A è

uguale all' angolo C , sarà come la AB alla CD , così la CH alla AG [VI, 14]; ma la CH è uguale alla E , e la AG alla F ; come dunque la AB alla CD così è la E alla F ; laonde *se quattro linee rette siano proporzionali ecc. c. d. d.*

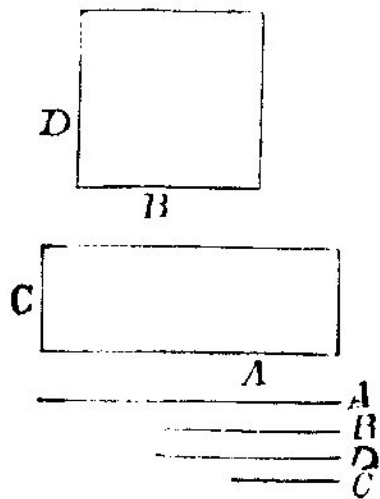
PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se tre linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al quadrato della media: e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al quadrato della media, le tre linee rette saranno proporzionali.

Siano tre linee rette proporzionali A, B, C , cioè sia come la A alla B , così la B alla C . Dico che il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale al quadrato della media B .

Pongasi la D uguale alla B , onde sarà [V, 7] come la A alla B , così la D alla C . E però il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale a quello, contenuto dalle B, D [VI, 16]; ma il rettangolo contenuto dalle B, D è uguale al quadrato della B , perciocchè la B è uguale alla D ; dunque il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale al quadrato della B .



Sia ora il rettangolo contenuto dalle A, C uguale al quadrato della B . Dico come la A alla B , così essere la B alla C .

Avendo fatte le medesime costruzioni, sarà il ret-

tangolo contenuto dalle A, C uguale a quello contenuto dalle B, D : adunque [VI, 16] come la A alla B , così è la D alla C ; ma la B è uguale alla D , onde come la A alla B , così la B alla C . Dunque *se tre linee rette siano proporzionali, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XVIII.

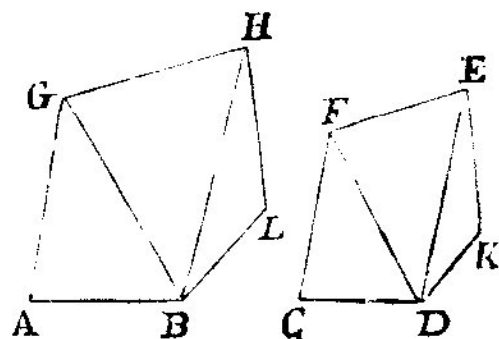
PROBLEMA.

Sopra una retta data descrivere un poligono simile e similmente posto ad un poligono dato.

Sia AB la retta data, $CDKEF$ il poligono dato; si domanda di descrivere sopra AB un poligono simile e similmente posto al dato, in modo che AB e CD siano lati omologhi.

Congiungasi D con F , facciasi l'angolo BAG uguale all'angolo DCF , e l'angolo ABG uguale all'angolo CDF ; per modo che sopra AB si è descritto il triangolo ABG equiangolo al CDF . Similmente, condotta DE , descrivasi su BG il triangolo BGH equiangolo al triangolo DFE ; e su BH descrivasi il triangolo BHL equiangolo al triangolo DEK .

Siccome gli angoli in B sono stati fatti uguali agli angoli in D , ciascuno a ciascuno, così tutto l'angolo ABL sarà uguale a tutto l'angolo CDK . Per la stessa ragione gli angoli AGH, CFE sono uguali; e sono pure uguali gli angoli GHL, FEK . Nei triangoli BHL, DEK gli angoli in H, B sono uguali agli angoli in E, D ; dunque l'angolo L è uguale all'angolo K . Perciò il poligono $AGHLB$ è equiangolo al poligono dato $CFEKD$.



Inoltre, essendo simili i triangoli AGB , CFD , sarà [VI, 4] AG ad AB come CF a CD , ed anche AB a BG come CD a DF . Nei triangoli simili BGH , DFE sarà del pari BG a BH come DF a DE , e nei triangoli simili BHL , DEK sarà BH a BL come DE a DK , e BL ad LH come DK a KE . Poichè adunque è AB a BG come CD a DF ; BG a BH come DF a DE ; e BH a BL come DE a DK , sarà anche [V, 22] AB a BL come CD a DK . Similmente si dimostra essere AG a GH come CF a FE ; e GH ad HL come FE ad EK . Dunque i poligoni $ABLHG$, $CDKEF$ sono equiangoli, ed i loro lati intorno agli angoli uguali sono proporzionali. Laonde si è descritto un poligono, ecc.

Due poligoni simili diconsi *similmente posti* quando i loro lati omologhi sono paralleli.

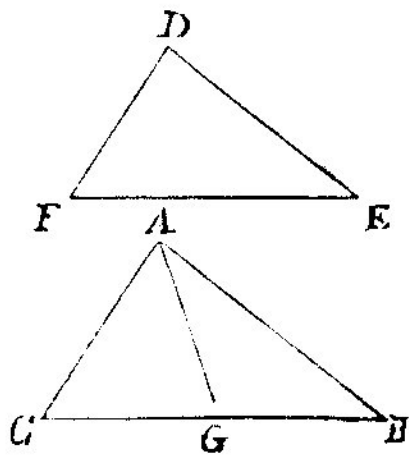
PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

I triangoli simili hanno fra loro la ragione duplicata di quella che hanno i lati omologhi.

Siano i triangoli ABC , DEF simili, che abbiano l'angolo B uguale all'angolo E , e sia come la AB alla BC , così la DE alla EF , di modo che il lato BC sia omologo al lato EF . Dico il triangolo ABC al triangolo DEF avere ragione duplicata di quella che ha la BC alla EF .

Piglisi la terza proporzionale BG delle BC , EF [VI, 14], di modo che come la BC alla EF , così sia la EF alla BG ; e tirisi GA .



Poichè come la AB alla BC , così è la DE alla EF ; sarà permutando come la AB alla DE , così la BC alla EF , ma come la BC alla EF , così è la EF alla BG ; dunque come [V, 11] la AB alla DE , così la EF alla BG ; onde i lati dei triangoli ABG , DEF , che sono d'intorno agli angoli uguali, sono inversamente proporzionali fra loro, e quindi il triangolo ABG è uguale al triangolo DEF . E perchè come la BC alla EF , così la EF alla BG , avrà [V, def. 10] la BC alla BG ragione duplicata di quella che ha la BC alla EF : ma come la BC alla BG , così il triangolo ABC al triangolo ABG [VI, 1], adunque eziandio il triangolo ABC al triangolo ABG ha ragione duplicata di quella, che ha la BC alla EF : e siccome il triangolo ABG è uguale al triangolo DEF , così il triangolo ABC al triangolo DEF ha ragione duplicata di quella che ha la BC alla EF . Adunque i triangoli simili, ecc. c. d. d.

COROLLARIO.

Dalle cose dette di sopra è manifesto che se tre linee rette siano proporzionali, come la prima alla terza, così sarà il triangolo fatto sulla prima al triangolo simile e similmente descritto fatto sulla seconda.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

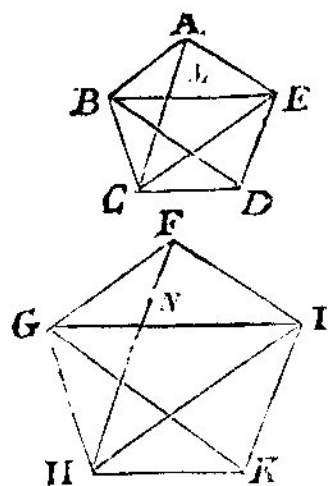
Due poligoni simili si possono dividere nello stesso numero di triangoli simili ed aventi fra loro la stessa ragione che hanno i poligoni; ed i poli-

goni hanno fra loro la ragione duplicata di quella che hanno i lati omologhi.

Siano dati i poligoni simili $ABCDE$, $FGHKI$, e sia il lato AB omologo al lato FG . Dico che i poligoni $ABCDE$, $FGHKI$ si possono dividere nello stesso numero di triangoli ordinatamente simili.

Congiungasi B con E , E con C ; G con I , I con H . Poichè il poligono $ABCDE$ è simile al poligono $FGHKI$, l'angolo BAE è uguale all'angolo GFI , ed è come BA ad AE , così GF ad FI ; quindi i due triangoli ABE , FGI , hanno un angolo uguale ad un angolo, e dintorno agli angoli uguali i lati proporzionali, onde sono simili [VI, 6]: dunque l'angolo ABE è uguale all'angolo FGI ; ma è tutto l'angolo ABC uguale a tutto l'angolo FGH per la similitudine de' poligoni; onde il rimanente EBC è uguale al rimanente IGH : e perchè per la similitudine de' triangoli ABE , FGI , è come la EB alla BA , così la IG alla GF ; e per la similitudine ancora de' poligoni, come la AB alla BC , così è la FG alla GH ; sarà per uguaglià [V, 22] come la EB alla BC , così la IG alla GH : adunque dintorno agli angoli uguali EBC , IGH i lati sono proporzionali, e però il triangolo EBC è simile al triangolo IGH ; e per la medesima ragione il triangolo ECD è simile al triangolo IHK . Adunque i poligoni simili $ABCDE$, $FGHKI$ si dividono nello stesso numero di triangoli simili.

Dico inoltre i triangoli essere proporzionali fra loro e coi poligoni; ed antecedenti essere ABE , EBC , ECD , ed i conseguenti loro FGI , IGH , IHK ; ed il poli-



gono $ABCDE$ al poligono $FGHKI$ avere ragione duplicata di quella che hanno i lati omologhi AB , FG .

Condotte AC , FH , siccome per la similitudine de' poligoni l'angolo ABC è uguale all'angolo FGH ; ed è come la AB alla BC così la FG alla GH , sarà [VI, 6] il triangolo ABC equiangolo al triangolo FGH ; è dunque uguale l'angolo BAC all'angolo GFH , e l'angolo ACB all'angolo GHF ; oltre a ciò, perchè l'angolo BAM è uguale all'angolo GFN , e si è dimostrato l'angolo ABM uguale all'angolo FGN , sarà ancora il rimanente AMB uguale al rimanente FNG : è dunque il triangolo ABM equiangolo al triangolo FGN ; dimostreremmo parimente il triangolo BMC essere equiangolo al triangolo GNH : dunque come la AM alla MB , così è la FN alla NG ; e come la BM alla MC , così la GN alla NH , onde per ugualità [V, 22] come la AM alla MC così la FN alla NH . Ma come la AM alla MC , così il triangolo ABM al triangolo MBC [VI, 1], ed il triangolo AME al triangolo EMC , perciocchè sono fra loro come le basi: e [V, 12] come uno degli antecedenti al suo conseguente, così la somma degli antecedenti alla somma dei conseguenti; dunque il triangolo ABM è al triangolo BMC come il triangolo ABE al triangolo CBE ; ossia come la AM alla MC , così il triangolo ABE al triangolo EBC ; e per la medesima ragione come la FN alla NH , così il triangolo FGI al triangolo GHI . Ora come la AM alla MC , così è la FN alla NH ; adunque come il triangolo ABE al triangolo BEC , così il triangolo FGI al triangolo GHI ; e permutando [V, 16], come il triangolo ABE al triangolo FGI , così il triangolo EBC al triangolo GHI . Dimostreremmo similmente, dopo aver tirate BD , GK , come il triangolo BEC al triangolo GIH , così essere il triangolo ECD al triangolo IHK ; onde come il triangolo ABE al triangolo FGI , così il triangolo EBC al

triangolo IGH , ed ancora il triangolo ECD al triangolo IHK . Ma [V, 12] come uno degli antecedenti al suo conseguente, così la somma degli antecedenti alla somma dei conseguenti; adunque come il triangolo ABE al triangolo FGI , così il poligono $ABCDE$ al poligono $FGHKI$; ma il triangolo ABE al triangolo FGI ha ragione duplicata di quella che ha il lato AB al lato omologo FG [VI, 19]; adunque eziandio il poligono $ABCDE$ al poligono $FGHKI$ ha ragione duplicata di quella che ha il lato AB al lato omologo FG ; onde *due poligoni simili, ecc. c. d. d.*

COROLLARIO I.

Dunque è manifesto in generale che, se AB ed FG sono lati omologhi di due poligoni simili, presa la X terza proporzionale alle AB , FG , sarà come la AB alla X , così il primo poligono al secondo.

COROLLARIO II.

Ed è pur manifesto in generale che se tre linee rette siano proporzionali, come la prima alla terza, così sarà la figura fatta sulla prima alla figura simile e similmente descritta fatta sulla seconda.

 PROPOSIZIONE XXI.

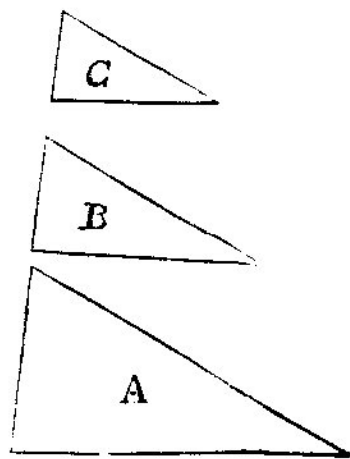
TEOREMA.

I poligoni simili ad un medesimo poligono sono ancora simili fra loro.

Sia l' uno e l' altro dei poligoni A , B simile al po-

ligono C . Dico il poligono A essere simile al poligono B .

Perciocchè essendo il poligono A simile al poligono C , sarà ancor equiangolo ad esso, e dintorno agli uguali angoli avrà i lati proporzionali ai corrispondenti lati di C : oltre a ciò, perchè il poligono B è simile al poligono C , sarà eziandio equiangolo ad esso, ed avrà dintorno agli angoli uguali i lati proporzionali ai corrispondenti lati di C : adunque l' uno e l' altro de' poligoni A , B è equiangolo al poligono C , ed ha intorno agli angoli uguali i lati proporzionali ai corrispondenti lati di C ; onde i poligoni A , B sono equiangoli fra loro, ed hanno i lati intorno agli angoli uguali proporzionali; e però il poligono A è simile al poligono B , il che bisognava dimostrare.



PROPOSIZIONE XXII.

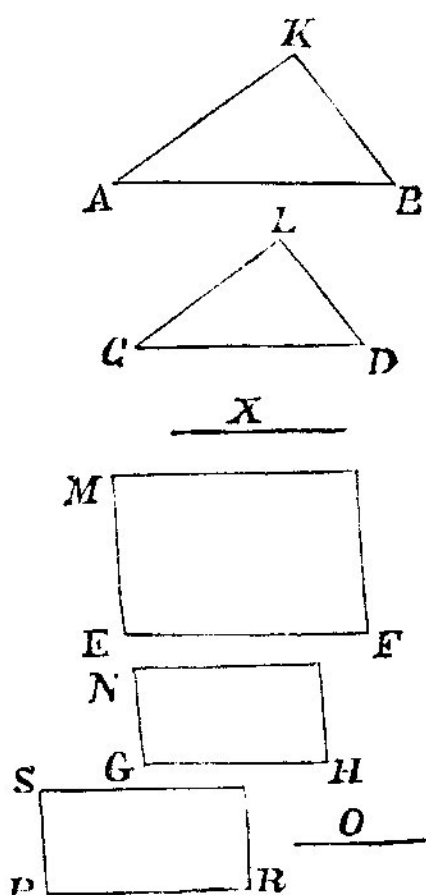
TEOREMA.

Se quattro linee rette siano proporzionali, anche i poligoni, simili e similmente descritti su di esse, saranno proporzionali: e se i poligoni simili e similmente descritti su quattro rette, siano proporzionali, le linee rette ancora saranno proporzionali.

Siano quattro linee rette proporzionali AB , CD , EF , GH ; e sia come la AB alla CD , così la EF alla GH : e

descrivansi sulle AB , CD poligoni simili e similmente posti KAB , LCD [VI, 18]; e sulle EF , GH descrivansi poligoni simili e similmente posti MF , NH . Dico che come il poligono KAB al poligono LCD , così è il poligono MF al poligono NH .

Piglisi delle AB , CD la terza proporzionale O [VI, 11], e delle EF , GH la terza proporzionale X ; e perchè come la AB alla CD , così è la EF alla GH ; e come la CD alla O , così la GH alla X ; sarà, per uguaglià [V, 22] come la AB alla O , così la EF alla X ; ma come la AB alla O , così è il poligono KAB al poligono LCD [VI, 20, *cor.* 2], e come la EF alla X , così il poligono MF al poligono NH : adunque come il poligono KAB al poligono LCD , così è il poligono MF al poligono NH .



— Ora sia come il poligono KAB al poligono LCD , così il poligono MF al poligono NH . Dico come la AB alla CD , così essere la EF alla GH . Si costruisca delle AB , CD , EF la quarta proporzionale PR [VI, 12]; onde come la AB alla CD , così la EF alla PR ; e descrivasi sulla PR il poligono SR simile ad uno de' poligoni MF , NH , e similmente posto. Perchè dunque è come la AB alla CD , così la EF alla PR , e sono descritti sulle AB , CD poligoni simili, e similmente posti KAB , LCD , e sulle EF , PR i poligoni MF , SR simili, e similmente posti; sarà come il poligono KAB al poligono LCD , così il poligono MF al poligono RS . Ma si suppone come il poligono KAB al poligono LCD , così il poligono MF al poligono NH ; adunque come il poligono MF al poli-

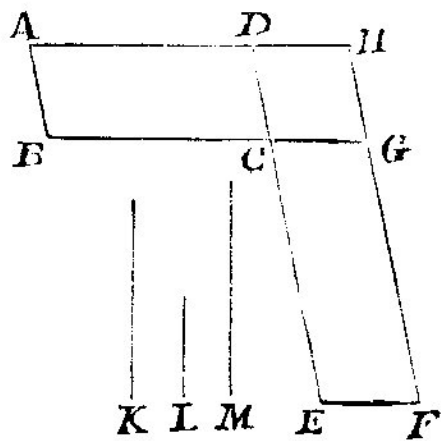
gono NH , così il poligono MF al poligono SR : onde sarà il poligono NH uguale al poligono SR : ma è ancora simile e similmente posto; adunque la GH è uguale alla PR , e perchè come la AB alla CD , così è la EF alla PR ; ed è la PR uguale alla GH , sarà come la AB alla CD , così la EF alla GH . Adunque se quattro linee rette siano proporzionali, ecc. c. d. d.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

I parallelogrammi equiangoli hanno fra loro la ragione composta delle ragioni de' lati.

Siano i parallelogrammi equiangoli AC , CF , che abbiano l'angolo BCD uguale all'angolo ECG . Dico il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF avere la ragione composta delle ragioni de' lati, cioè composta della ragione che ha la BC alla CG , e della ragione che ha la DC alla CE .



Pongasi la BC per diritto alla CG , onde sarà la DC per diritto alla CE [I, 14]: e compiscasi il parallelogrammo DG ; ed assunta una linea retta K , facciasi come la BC alla CG , così la K alla L [VI, 12], e come la DC alla CE , così la L alla M .

Le ragioni di K ad L , e di L ad M sono le medesime, che le ragioni de' lati BC a CG , e DC a CE . Ma la ragione della K alla M è composta [V, def. 11] della ra-

gione della K alla L , e della ragione della L alla M , onde eziandio la K alla M ha la ragione composta delle ragioni de' lati. E perchè come la BC alla CG , così è il parallelogrammo AC al parallelogrammo CH [VI, 1], sarà [V, 11] come la K alla L , così il parallelogrammo AC al parallelogrammo CH ; similmente, perchè come la DC alla CE , così è il parallelogrammo CH al parallelogrammo CF , sarà come la L alla M così il parallelogrammo CH al parallelogrammo CF . Dunque sarà, per uguaglià [V, 22] come la K alla M così il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF . Ma la K alla M ha la ragione composta delle ragioni dei lati, adunque ancora il parallelogrammo AC al parallelogrammo CF avrà la ragione composta delle ragioni dei lati; onde *i parallelogrammi equiangoli, ecc. c. d. d.*

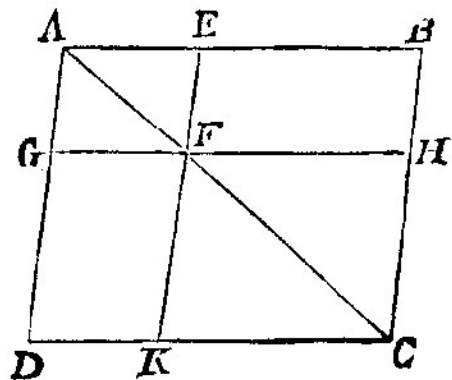
PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

In ogni parallelogrammo, i parallelogrammi costruiti dintorno alla diagonale sono simili all' intero parallelogrammo e simili fra loro.

Sia il parallelogrammo $ABCD$, la cui diagonale è AC , e dintorno ad essa siano i parallelogrammi EG , HK . Dico che essi sono simili a tutto $ABCD$, e simili fra loro.

Siccome le DC , GF sono parallele, così l'angolo ADC è uguale all'angolo AGF [I, 29], e per la stessa ragione, essendo parallele le BC , EF , sono uguali gli angoli ABC , AEF . Ciascuno dei due



angoli BCD , EFG è uguale all'opposto DAB [I, 34], e però quei due angoli saranno uguali fra loro. Dunque i parallelogrammi $ABCD$, $AEFG$ sono equiangoli fra loro. Siccome poi l'angolo ABC è uguale all'angolo AEF , e l'angolo BAC è comune, i triangoli BAC , EAF saranno fra loro equiangoli; onde AB è a BC come AE ad EF [VI, 4]. Ma i lati opposti dei parallelogrammi sono uguali, dunque [V, 7] sarà anche AB ad AD come AE ad AG ; e DC a CB come GF ad FE ; ed inoltre CD a DA come FG a GA . Perciò i lati dei parallelogrammi $ABCD$, $AEFG$, che sono dintorno agli angoli uguali, sono proporzionali; ond'è che i due parallelogrammi sono simili [VI, def. 1]. Per la medesima ragione anche il parallelogrammo $ABCD$ è simile al parallelogrammo $FHCK$; e però [V, 21] i parallelogrammi $AEFG$, $FHCK$ sono anche simili fra loro. Dunque in ogni parallelogrammo, ecc. c. d. d.

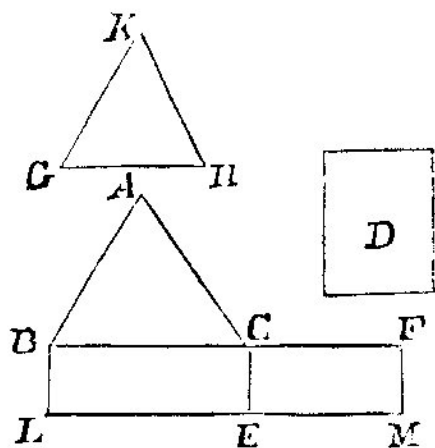
PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

Costruire un poligono simile ad un poligono dato e uguale ad un altro dato.

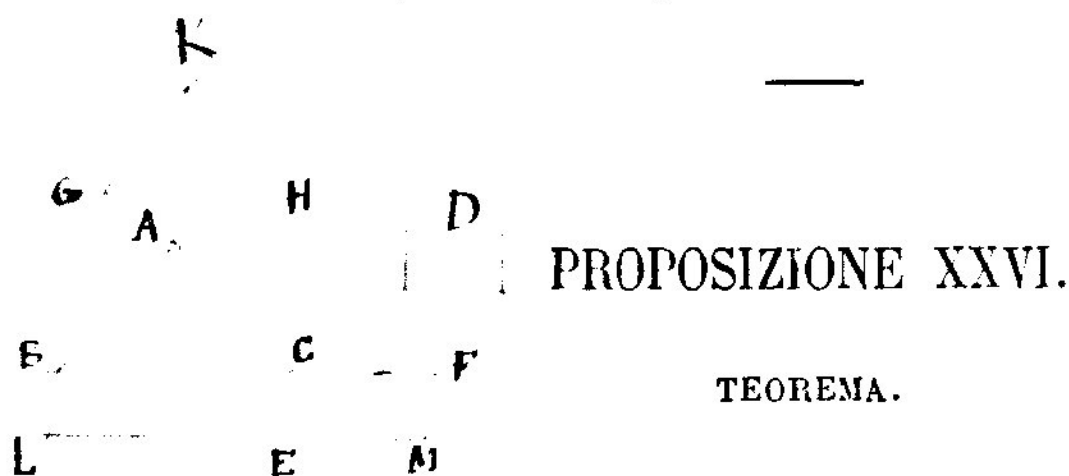
Sia ABC il poligono al quale dev'essere simile, e D quello al quale dev'essere uguale il poligono che si vuole costruire. K.

Si descriva sulla linea retta BC il parallelogrammo BE uguale al triangolo ABC [I, 44], ed alla retta CE adattisi il parallelogrammo CM uguale al parallelogrammo D , nell'angolo FCE , che è uguale all'angolo CBL [I, 45]:



onde la BC è per diritto alla CF , e la LE alla EM . Piglisi delle BC , CF la media proporzionale GH [VI, 13], e sulla GH descrivasi il triangolo KGH simile e similmente posto al triangolo ABC [VI, 18].

Poichè come la BC alla GH , così è la GH alla CF ; e se tre linee rette siano proporzionali, come la prima alla terza, così è la figura descritta sulla prima a quella simile e similmente descritta sulla seconda [VI, 20, *cor.* 2]; sarà come la BC alla CF , così il triangolo ABC al triangolo KGH ; ma come la BC alla CF , così il parallelogrammo BE al parallelogrammo EF ; adunque come il triangolo ABC al triangolo KGH così il parallelogrammo BE al parallelogrammo EF : e permutando come il triangolo ABC al parallelogrammo BE , così il triangolo KGH al parallelogrammo EF : ma il triangolo ABC è uguale al parallelogrammo BE , dunque il triangolo KGH è uguale al parallelogrammo EF ossia al poligono D . Inoltre KGH è simile al triangolo ABC ; adunque si è costruito un poligono simile ad un dato poligono ed uguale ad un altro dato; il che bisognava fare.

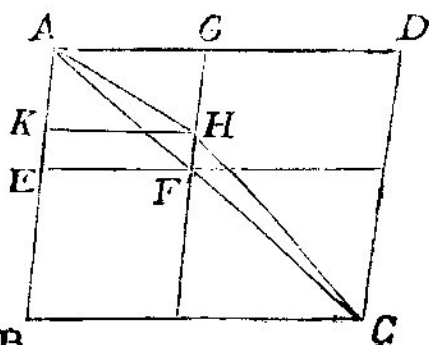


Se due parallelogrammi simili e similmente posti hanno un angolo comune, essi saranno dintorno alla medesima diagonale.

Nel parallelogrammo $ABCD$ si adatti il parallelo-

grammo AF , simile al parallelogrammo $ABCD$ e similmente posto, che abbia l'angolo GAE comune con esso. Dico che la diagonale AF passa pel punto C .

Se è possibile, la diagonale di $ABCD$ non passi per F , ma sia AHC . La GF incontri la diagonale AC nel punto H . Tirisi per H alle AD , BC la parallela HK .



Perchè il parallelogrammo $ABCD$ è dintorno alla medesima diagonale col parallelogrammo KG , sarà il parallelogrammo $ABCD$ simile al parallelogrammo KG [VI, 24]; adunque come la DA alla AB , così la GA alla AK : ma per la similitudine de' parallelogrammi $ABCD$, EG , come la DA alla AB , così la GA alla AE ; onde come la GA alla AE , così è la GA alla AK . Dunque la GA ha la medesima ragione all' una e l' altra delle AK , AE , quindi sarà la AE uguale alla AK , cioè la minore alla maggiore, il che non è possibile. Adunque il parallelogrammo $ABCD$ non ha la diagonale comune col parallelogrammo AH , e perciò avrà la diagonale comune con AF : e però *se due parallelogrammi, ecc. c. d. d.*

COROLLARIO.

Nello stesso modo si dimostrerebbe che se due parallelogrammi simili e similmente posti hanno due angoli opposti al vertice, le loro diagonali sono in linea retta.

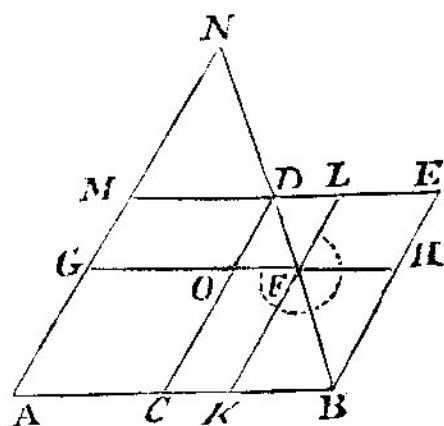
PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Di tutti i parallelogrammi che possono essere inscritti in un dato triangolo, il massimo è quello la cui base è la metà di un lato del triangolo.¹

Sia ABN il triangolo dato, AC la metà del lato AB , ed $ACDM$ il parallelogrammo avente la base AC ed inscritto nel triangolo. Sia $AKFG$ un altro parallelogrammo inscritto nel triangolo; dico che il parallelogrammo AD è maggiore del parallelogrammo AF .

Si completi il parallelogrammo AE , e si prolunghino GF e KF sino in H ed L .



Siccome la AC è uguale alla CB , così il parallelogrammo AD è uguale al parallelogrammo CE , ed il parallelogrammo AO al parallelogrammo CH [I, 36]; e siccome CF ed FE sono i supplementi dei parallelogrammi OL e KH , così CF è uguale ad FE [I, 43]; e però, tutto il parallelogrammo AF sarà uguale a tutto il gnomone LBC . Ma il parallelogrammo CE è maggiore del gnomone LBC , quindi il parallelogrammo AD , che è uguale a CE , sarà maggiore del parallelogrammo AF che è uguale al gnomone LBC . Nella stessa maniera dimostreremmo che il parallelogrammo AD è maggiore di qualsivoglia altro parallelogrammo inscritto nel triangolo ANB : laonde *di tutti i parallelogrammi ecc.*, c. d. d.

¹ Gli enunciati di questa e delle due proposizioni seguenti, un po' diversi nella forma da quelli di EUCLIDE, sono presi dall' *Euclide* del LAW.

PROPOSIZIONE XXVIII.

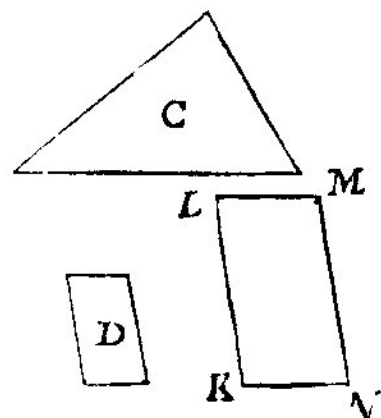
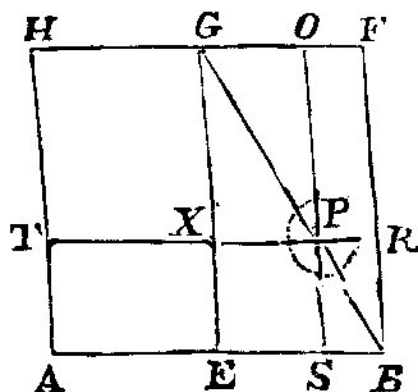
PROBLEMA.

Dividere una retta data in due parti tali che su di esse si possano costruire due parallelogrammi d'uguale altezza, l'uno uguale ad un dato poligono e l'altro simile ad un parallelogrammo dato.

Per la proposizione precedente, il poligono dato non dev'essere maggiore del parallelogrammo descritto sulla metà della retta data e simile al parallelogrammo dato.

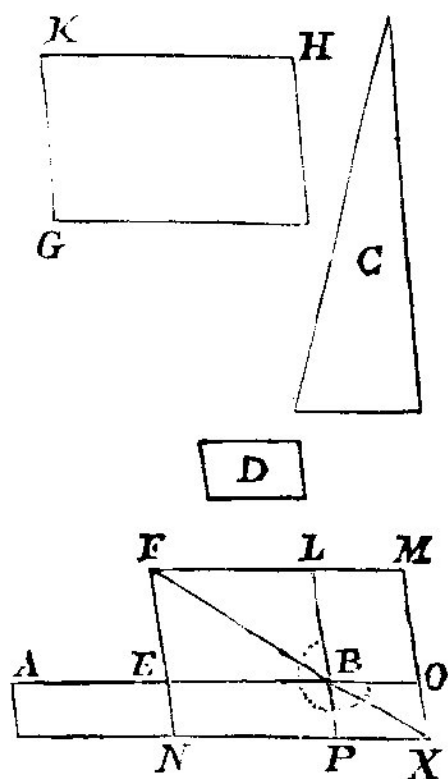
Sia AB la retta data, D il parallelogrammo dato, e C sia il dato poligono non maggiore del parallelogrammo che è adattato alla metà di AB ed è simile a D .

Seghisi per metà la AB nel punto E , e sulla EB descrivasi [VI, 18] il parallelogrammo $EBFG$, simile e similmente posto a D , e compiscasi il parallelogrammo AG . Allora AG , o è uguale a C , o è maggiore di esso: e se AG sia uguale a C , già sarà fatto ciò che si proponeva, cioè sarà E il punto di divisione richiesto. Ma se non è uguale, sarà HE maggiore di C ; ed essendo HE uguale a GB , GB sarà maggior di C . Costruiscasi [VI, 25] un parallelogrammo KM uguale all'eccesso del quale GB avanza C , e simile e similmente posto a D : ma D è simile a GB ; onde eziandio KM sarà



tezza, l' uno uguale ad un poligono dato, e l' altro simile ad un parallelogrammo dato.

Sia la retta data AB , il poligono dato C ed il parallelogrammo dato D . Seghisi la AB per metà nel punto E : e sulla EB descrivasi [VI, 18] il parallelogrammo BF simile a D e similmente posto: e costruiscasi [VI, 25] il parallelogrammo GH uguale alla somma delle due figure BF , C , e simile a D e similmente posto; onde il parallelogrammo GH sarà simile ad BF [VI, 21]. Sia KH il lato omologo ad FL , e KG omologo ad FE ; siccome il parallelogrammo GH è maggiore di BF , sarà la linea retta KH maggiore di FL , e KG maggiore di FE . Prolunghinsi FL , FE , e facciasi FLM uguale a KH ed FEN uguale a KG : e compiscasi il parallelogrammo MN . Adunque il parallelogrammo MN è uguale e simile a GH , ma GH è simile ad EL , adunque eziandio MN sarà simile ad EL , e perciò EL è dintorno alla medesima diagonale [VI, 26] con MN . Tirisi questa diagonale FX , e si completi la figura.



Siccome GH è uguale alla somma di EL , C , ed ancora è uguale ad MN , sarà MN uguale alla somma delle figure EL , C . Sottraggasi EL , che è comune; e il gnomone rimanente NOL sarà uguale a C . E perchè la linea AE è uguale alla EB , sarà il parallelogrammo AN uguale al parallelogrammo NB , cioè ad LO [I, 43]. Aggiungendo EX ad ambedue, tutto AX sarà uguale al gnomone NOL , ma il gnomone NOL è uguale a C , e

perciò AX è uguale a C . Laonde si è prolungata la data retta AB di una parte BO ecc., com'era richiesto.

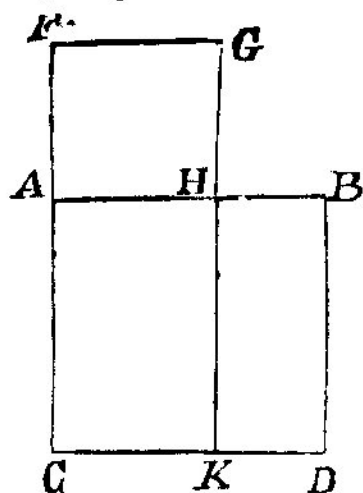
PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA.

Segare una data linea retta terminata in estrema e media ragione.

Sia la data linea retta terminata AB , si vuol segarla in estrema e media ragione [VI, *def.* 3].

Descrivasi sulla AB il quadrato BC [I, 46], ed alla AC (prolungata) adattisi il parallelogrammo CG uguale a BC , in modo che il parallelogrammo AG sia simile a BC [VI, 29].



BC è quadrato, adunque eziandio AG sarà quadrato; e perchè BC è uguale a CG , sottraendo da ambedue CH , che è comune; il rimanente BK sarà uguale al rimanente AG . Ma BK ed AG sono anche equiangoli tra loro, quindi i lati che sono dintorno agli angoli uguali, saranno fra loro inversamente proporzionali [VI, 14]: e perciò come KH ad HG così è AH ad HB : ma HK è uguale ad AC , cioè ad AB ; ed HG ad AH ; onde come AB ad AH , così AH ad HB . Ora AB è maggiore di AH , adunque AH è maggiore di HB ; laonde la linea retta AB è segata nel punto H in estrema e media ragione; il che bisognava fare.

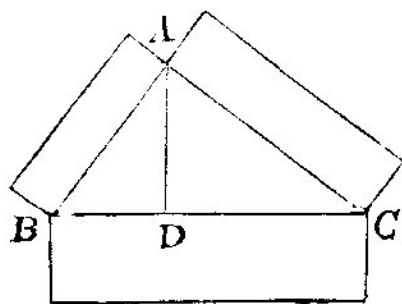
PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

In un triangolo rettangolo, una qualsivoglia figura descritta sull'ipotenusa è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte sui cateti.

Sia il triangolo rettangolo ABC , che abbia l'angolo retto BAC . Dico la figura costruita sulla BC essere uguale alla somma di quelle simili e similmente descritte sulle BA , AC .

Tirisi la perpendicolare AD : allora saranno i triangoli ABD , ADC , che sono intorno alla perpendicolare, simili a tutto ABC e simili fra loro [VI, 8]; e perchè il triangolo ABC è simile al triangolo ABD , sarà come la CB alla BA , così la AB alla BD : e essendo tre linee rette proporzionali, come la prima alla terza, così sarà la figura descritta sulla prima a quella, simile e similmente descritta sulla seconda [VI, 20, *cor.*]; onde come la CB alla BD , così la figura descritta sulla CB è alla figura simile e similmente descritta sopra BA . Per la medesima ragione come la BC alla CD , così la figura descritta sulla BC a quella descritta sulla CA ; onde [V, 24] come la BC alla somma delle BD , DC , così è la figura descritta sulla BC alla somma di quelle simili e similmente descritte sulle BA , AC . Ma la BC è uguale alla somma delle BD , DC ; adunque [V, A] la figura descritta sulla BC è uguale alla somma di quelle



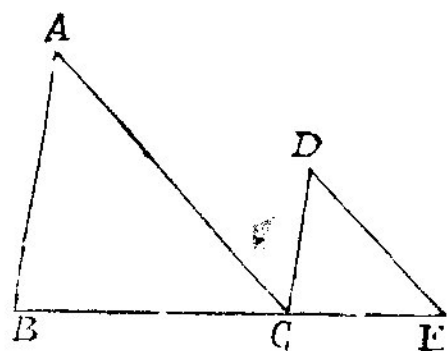
simili e similmente descritte sulle BA , AC ; laonde
in un triangolo rettangolo, ecc. c. d. d.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

Se due triangoli, i quali abbiano due lati proporzionali a due lati, si compongano intorno ad un vertice in modo che i lati omologhi siano paralleli, i lati rimanenti saranno in linea retta.

Siano due triangoli ABC , DCE , che abbiano il vertice comune C e i due lati BA , AC proporzionali ai due lati CD , DE , cioè sia come BA ad AC , così CD a DE ; e la AB sia parallela alla DC , e la AC alla DE . Dico la BC essere per diritto alla CE .



Perciocchè, essendo la AB parallela alla DC , saranno gli angoli alterni BAC , ACD fra loro uguali, e per la medesima ragione l'angolo CDE è uguale all'angolo ACD ; onde altresì BAC è uguale a CDE . E perchè sono due triangoli ABC , DCE , che hanno un angolo A uguale ad un angolo D , e dintorno agli angoli uguali i lati proporzionali, sarà il triangolo ABC equiangolo al triangolo DCE , onde l'angolo ABC è uguale all'angolo DCE . Ma si è dimostrato l'angolo ACD uguale all'angolo BAC , e però tutto ACE è uguale alla somma dei due ABC , BAC ; onde, aggiungendo ACB , la somma degli angoli ACE , ACB sarà uguale alla

somma degli angoli BAC , ACB , CBA ; ma BAC , ACB , CBA insieme fanno due retti, onde eziandio gli angoli ACE , ACB faranno insieme due retti, e perciò BC sarà per diritto a CE [I, 24]: onde *se due triangoli, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE XXXIII.

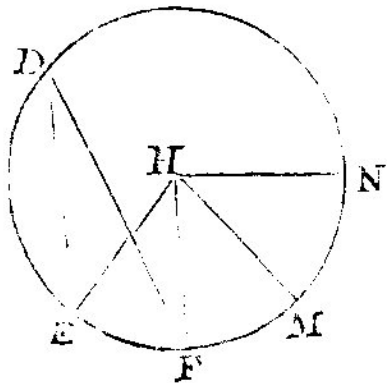
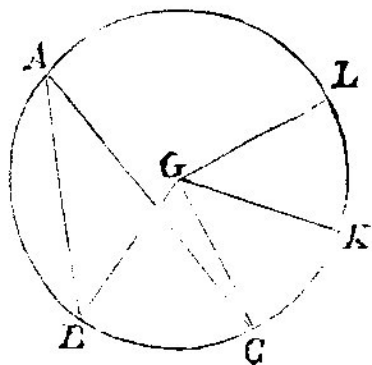
TEOREMA.

In due cerchi uguali o in uno stesso cerchio gli angoli, i cui vertici siano o alle circonferenze o ai centri, hanno fra loro la medesima ragione degli archi sui quali insistono: e la medesima ragione hanno anche i settori fra loro.

Siano i cerchi uguali ABC , DEF , ed a' loro centri G , H siano gli angoli BGC , EHF , ed alle circonferenze gli angoli BAC , EDF . Dico, che come l'arco BC all'arco EF , così è l'angolo BGC all'angolo EHF , e l'angolo BAC all'angolo EDF , ed il settore BGC al settore EHF .

Prendansi quanti si vogliano archi CK , KL uguali a BC , e similmente pongansi quanti si vogliano archi FM , MN uguali ad EF , e tirinsi GK , GL , HM , HN .

Poichè gli archi BC , CK , KL sono fra loro uguali, saranno altresì uguali fra loro gli angoli BGC , CGK , KGL , [III, 27]; adunque quante volte l'arco LB è mol-

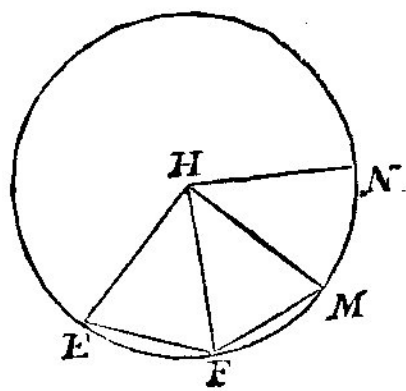
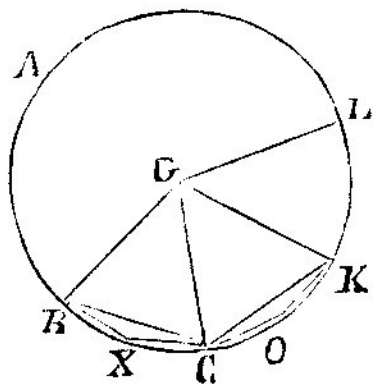


tiplice dell' arco BC , tante volte l' angolo BGL è multiplice dell' angolo BGC : per la medesima ragione quante volte l' arco NE è multiplice dell' arco EF , tante volte l' angolo EHN è multiplice dell' angolo EHF . E se l' arco BL è uguale all' arco EN , anche l' angolo BGL sarà uguale all' angolo EHN ; e se l' arco BL è maggiore dell' arco EN , anche l' angolo BGL sarà maggiore dell' angolo EHN ; e se minore, minore; onde come l' arco BC all' arco EF , così è l' angolo BGC all' angolo EHF [V, def. 5]. Ma come l' angolo BGC all' angolo EHF , così è l' angolo BAC all' angolo EDF [V, 15] essendo ciascuno doppio di ciascuno [III, 20]; come dunque l' arco BC all' arco EF , così è ancora l' angolo BGC all' angolo EHF , e l' angolo BAC all' angolo EDF .

Dico oltre a ciò, come l' arco BC all' arco EF , così essere il settore GBC al settore HEF .

Si tirino BC , CK , e presi negli archi BC , CK , i punti X , O , si tirino BX , XC , CO , OK .

Perchè le due BG , GC sono uguali alle due CG , GK , e contengono angoli uguali, [III, 27], sarà ancora la base BC uguale alla base CK , onde il triangolo GBC è uguale al triangolo GCK ; e perchè l' arco BC è uguale all' arco CK , eziandio i rimanenti archi che insieme ai due BC , CK compiono tutta la circonferenza ABC saranno fra loro eguali; adunque ancor l' angolo BXC è uguale all' angolo COK , e il segmento BXC è simile al segmento COK [III, def. II]; ma sono anche sopra le linee rette uguali BC , CK , onde il segmento BXC



è uguale al segmento COK [III, 24]: ed il triangolo BGC uguale al triangolo CGK ; dunque tutto il settore BGC sarà uguale a tutto il settore CGK , e per la medesima ragione il settore GKL è uguale all'uno e l'altro GKC , GCB , onde i settori BGC , CGK , KGL sono fra loro uguali. Parimente i settori HEF , HFM , HMN sono uguali fra loro; quante volte dunque l'arco LB è multiplice dell'arco CB , tante volte il settore BGL è multiplice del settore BGC ; per la medesima ragione quante volte l'arco NE è multiplice dell'arco EF , tante volte il settore EHN è multiplice del settore EHF ; e se l'arco BL è uguale all'arco EN , anche il settore BGL è uguale al settore EHN : e se l'arco BL è maggiore dell'arco EN , anche il settore BGL è maggiore del settore EHN : e se è minore, minore; onde come l'arco BC all'arco EF , così il settore BGC al settore EHF . Si è adunque dimostrato che *in due cerchi uguali, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE B.

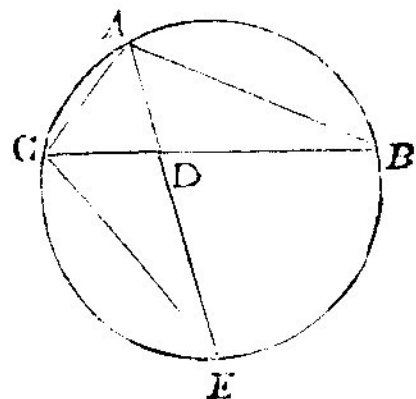
TEOREMA.

Se un angolo di un triangolo è segato per metà da una retta che sia terminata alla base, il rettangolo contenuto dai lati dell'angolo sarà uguale al rettangolo contenuto dai segmenti della base, preso insieme col quadrato della retta segante.

Sia il triangolo ABC , nel quale l'angolo A è segato per metà dalla retta AD . Dico che il rettangolo dei

lati AB , AC è uguale al rettangolo dei segmenti BD , DC insieme col quadrato di AD .

Descrivasi il cerchio ABC intorno al triangolo dato [IV, 5], e prolunghisi AD sino ad incontrare la circonferenza in E ; poi congiungasi E con C .



Essendo l'angolo BAD uguale all'angolo CAE , e l'angolo ABD uguale all'angolo AEC , perchè contenuti nello stesso segmento [III, 21], i triangoli ABD , AEC sono equiangoli fra loro: quindi come BA ad AD così è EA ad AC , e conseguentemente il rettangolo delle BA , AC è uguale al rettangolo delle EA , AD [VI, 16], cioè al rettangolo delle ED , DA , insieme col quadrato di AD [II, 3]. Ma il rettangolo delle ED , DA è uguale al rettangolo delle BD , DC [III, 35]; dunque *se un angolo, ecc. c. d. d.*

PROPOSIZIONE C.

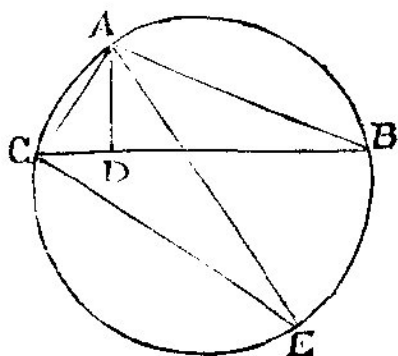
TEOREMA.

Se da un angolo di un triangolo si abbassa la perpendicolare alla base, il rettangolo contenuto dai lati dell'angolo sarà uguale al rettangolo contenuto dalla perpendicolare e dal diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

Sia ABC il triangolo, e dal vertice A si abbassi la perpendicolare AD sulla base BC . Descrivasi il cerchio ABC intorno al triangolo dato; conducasi il dia-

metro AE e congiungasi E con C . Dico il rettangolo delle AB, AC essere uguale al rettangolo delle AD, AE .

Siccome l'angolo retto BDA è uguale all'angolo ECA nel semicerchio [III, 21], e l'angolo ABD è uguale all'angolo AEC nello stesso segmento [III, 31], i triangoli ABD, AEC sono equiangoli fra loro; per conseguenza come AB ad AD così AE ad AC . Dunque il rettangolo delle AB, AC sarà uguale al rettangolo delle AE, AD [VI, 16]; c. d. d.



PROPOSIZIONE D.

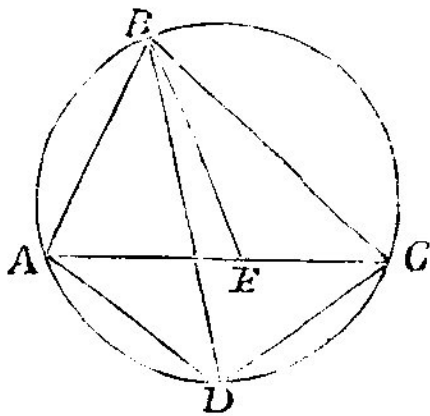
TEOREMA.

Se un quadrilatero è inscritto in un cerchio, il rettangolo delle diagonali è uguale alla somma dei rettangoli contenuti dai lati opposti.

Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto nel cerchio, e tirinsi le diagonali AC, BD . Dico il rettangolo delle AC, BD essere uguale al rettangolo delle AB, CD ed al rettangolo delle AD, BC , presi insieme.

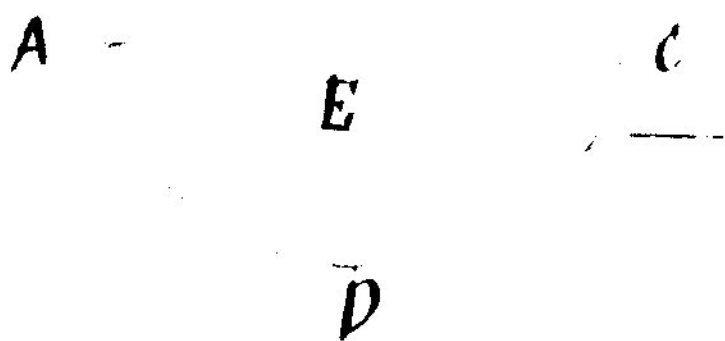
Facciasi l'angolo ABE uguale all'angolo DBC [I, 23].

Tolto da ciascuno degli angoli uguali ABE, DBC l'angolo EBD , sarà l'angolo ABD uguale all'angolo EBC : ma l'angolo BDA è uguale all'angolo BCE



perchè sono nello stesso segmento [III, 21]; perciò il triangolo ABD è equiangolo al triangolo BCE , onde sarà BD a DA come BC a CE , e per conseguenza il rettangolo delle BC , AD sarà uguale al rettangolo delle BD , CE [VI, 16]. Inoltre, essendo l'angolo ABE uguale all'angolo DBC , e l'angolo BAE uguale all'angolo BDC [III, 21], il triangolo ABE è equiangolo al triangolo BCD ; quindi sarà BD a DC come BA ad AE , epperò il rettangolo delle BA , DC sarà uguale al rettangolo delle BD , AE . Ma il rettangolo delle BC , AD è stato dimostrato uguale al rettangolo delle BD , CE ; dunque il rettangolo delle BC , AD e il rettangolo delle BA , DC sono insieme uguali al rettangolo delle BD , CE ed al rettangolo delle BD , AE , presi insieme, cioè all'intero rettangolo delle BD , AC [II, 1]. Laonde *se un quadrilatero, ecc. c. d. d.*

β



Esercizi.

— 1. Il rettangolo contenuto da due linee è medio proporzionale tra i loro quadrati.

— 2. Un quadrilatero ha uguali le perpendicolari abbassate da vertici opposti sopra una diagonale: dividerlo in quattro triangoli uguali per mezzo di linee condotte ai vertici da un punto interno.

— 3. Se da un vertice di un triangolo si tira una retta alla metà del lato opposto, e da un altro vertice si tira per la metà di questa un'altra retta sino all'incontro del lato opposto; questo lato rimarrà diviso in due parti una delle quali sarà doppia dell'altra.

— 4. Tirare per un punto dato una linea retta in modo che se da due altri punti si abbassino sopra di essa due perpendicolari, le parti intercette tra il punto dato e i piedi delle perpendicolari siano uguali.

— 5. Se conduciamo tre rette uguali dai tre vertici di un triangolo ai tre lati opposti, o ai loro prolungamenti, e da un punto interno al triangolo tre linee parallele a queste sino all'incontro con i lati, la somma di queste ultime sarà uguale ad una delle prime.

— 6. Se tre cerchi sono tra loro tangenti e due di essi sono uguali, l'angolo al vertice del triangolo formato congiungendo i punti di contatto, è uguale all'angolo alla base del triangolo isoscele, formato congiungendo i tre centri.

— 7. ABC è un triangolo equilatero, E un punto sopra AC ; sopra il prolungamento di BC prendiamo CD , CF , uguali rispettivamente a CA , CE , ed AF , DE s'incontrino in un punto H ; dimostrare che HC è ad EC come AC è ad AC più EC .

— 8. Le diagonali AC , BD di un quadrilatero iscritto in

un cerchio s'incontrano in E ; dimostrare che il rettangolo contenuto da AB, BC è al rettangolo contenuto da AD, DC come BE è ad ED .

— 9. Se in un triangolo rettangolo sia iscritto un quadrato con un lato sopra l'ipotenusa, questa rimane divisa in proporzione continua.

— 10. Se ABC è un triangolo iscritto in un cerchio, si tiri per il punto B una retta parallela alla tangente al cerchio nel punto A , e si prolunghi sino all'incontro nel punto D con AC o col suo prolungamento; dimostrare che AB sarà media proporzionale tra AC e AD .

— 11. Se AB è divisa in C e D in modo che AC sia media proporzionale tra AB e AD , e si tiri un'altra retta comunque AE uguale ad AC , l'angolo BED sarà diviso per metà da EC .

— 12. La parte di una tangente al cerchio intercetta fra le due tangenti all'estremità di un diametro, è divisa nel punto di contatto in modo che il raggio è media proporzionale tra i due segmenti.

— 13. Se due corde in un cerchio s'intersecano in modo che i segmenti dell'una abbiano la stessa ragione dei segmenti dell'altra, la retta che divide per metà l'angolo dei segmenti omologhi passa per il centro del cerchio.

— 14. Se un triangolo sia iscritto in un semicerchio, e si innalzi una perpendicolare da un punto qualunque del diametro, che incontri la circonferenza e gli altri due lati, i tre segmenti della perpendicolare saranno in proporzione continua.

— 15. Se le diagonali di un quadrilatero iscritto in un cerchio si segano ad angolo retto, la somma dei rettangoli contenuti dai lati opposti sarà uguale al doppio del quadrilatero.

— 16. Se da un punto fisso della circonferenza di un cerchio, si tirino corde qualunque, esse saranno tagliate dalla corda parallela alla tangente al cerchio nel punto fisso in modo, che i rettangoli contenuti da ciascuna corda e dal suo segmento compreso tra il punto fisso e la corda parallela alla tangente saranno tutti uguali tra loro.

— 17. Se in due triangoli simili, dai vertici di due angoli uguali si tirino rette ai lati opposti, le quali facciano angoli

uguali con i lati omologhi, queste avranno la stessa ragione dei lati sopra i quali cadono, e li divideranno proporzionalmente.

18. Applicare la prop. 2 del lib. VI a dimostrare come si possa con un pezzo di cordicella condurre per un dato punto una parallela ad una retta data.

19. In un triangolo ABC rettangolo in A , se tiriamo la CD bisettrice dell'angolo C , dimostrare che sarà la differenza di BC ed AC ad AD come AB è ad AC .

20. Se due cerchi sono tangenti esternamente, la parte di una tangente comune compresa tra i punti di contatto sarà media proporzionale tra i loro diametri.

21. Date le lunghezze delle tre rette condotte dai vertici ai punti di mezzo dei lati opposti, costruire il triangolo.

22. Inscrivere un quadrato in un dato segmento di cerchio.

23. Trovare il luogo dei punti nei quali sono divise secondo una data ragione le rette condotte da un dato punto alla circonferenza di un cerchio dato.

24. Dati due cerchi i quali si tagliano, tirare per uno dei punti d'intersezione una linea retta che tagli le due circonferenze in modo che le corde intercette siano tra loro in una data ragione.

25. Inscrivere in un dato triangolo un parallelogrammo simile ad un parallelogrammo dato.

26. Se per il vertice e per l'estremità della base di un triangolo si descrivano due cerchi, in modo che intersechino la base o la base prolungata, i loro diametri saranno tra loro come i lati per l'estremità dei quali passano le loro circonferenze.

27. Se due linee rette qualunque, che si tagliano, sono intersecate da due rette date, i rettangoli contenuti dai loro rispettivi segmenti saranno tra loro come i rettangoli contenuti dai rispettivi segmenti fatti dalle rette date sopra due altre parallele alle prime.

28. A , B sono i centri di due cerchi disuguali, PA , BQ una coppia di raggi paralleli qualunque: dimostrare che PQ

passa per un punto fisso, le cui distanze dai centri sono tra loro come i rispettivi raggi; e dedurne un metodo per condurre una tangente comune a due cerchi.

29. Se per il punto fisso dell'esercizio precedente si tira una retta qualunque che tagli i due cerchi, i raggi condotti ai punti d'intersezione saranno paralleli, e le corde intercette saranno tra loro come i raggi rispettivi.

30. Se per il medesimo punto fisso si tirano due linee qualunque che taglino i due cerchi, le corde che congiungeranno i corrispondenti punti d'intersezione saranno parallele; e degli otto punti d'intersezione, quattro saranno sopra la circonferenza di un altro cerchio, purchè due di questi quattro non siano sopra lo stesso cerchio e sopra la stessa retta data.

31. CDE è una tangente comune a due cerchi, che incontra la linea dei centri AB nel punto E ; $FGHKE$ è una retta che taglia i due cerchi e passa per E ; dimostrare che i rettangoli contenuti da EC, ED , da EF, EK , da EG, EH sono uguali.

32. Le rette che uniscono i punti di contatto di ciascun cerchio tangente a due cerchi dati passano per uno stesso punto.

33. Trovare la media aritmetica, geometrica ed armonica tra due linee date (*).

34. Se due angoli che una retta fa con un'altra da una stessa parte siano bisecati, dimostrare che tutte le rette che tagliano queste quattro linee sono divise armonicamente da esse; e reciprocamente, se una retta è divisa armonicamente, e si uniscano i punti di divisione con un punto qualunque per mezzo di rette, due alterne delle quali facciano tra loro un angolo retto, gli angoli delle altre due saranno divisi per metà.

(*) Tre linee si dicono in *progressione aritmetica* se togliendo la seconda dalla prima e la terza dalla seconda, le rimanenti sono uguali.

Tre linee si dicono in *progressione geometrica* se la prima è alla seconda come la seconda è alla terza.

Tre linee si dicono in *progressione armonica* se la prima è alla terza come la differenza della prima e della seconda è alla differenza della seconda e della terza.

35. Se da un punto P fuori di un cerchio si tirino le tangenti PC , PD , e la retta CD , che unisce i punti di contatto, tagli in Q il diametro AOB che passa per P ; dimostrare che il rettangolo contenuto da OP , OQ è uguale al quadrato del raggio, e che la retta PB è divisa armonicamente e l'angolo PCQ bisecato (*).

36. Se P sia il polo di CQD , e si tiri una retta qualunque per il punto P , che tagli il cerchio nei punti E , G , e la retta CD nel punto F , dimostrare che PG è divisa armonicamente, e gli angoli PEQ , PGQ sono bisecati da EA , GA .

37. Se P sia il polo di CQD , il polo di una retta che passa per P sarà sopra CQD ; e reciprocamente la polare di un punto qualunque di CQD passerà per P .

38. Dimostrare che, se un cerchio iscritto in un quadrilatero $ABCD$ è tangente ai suoi lati AB , BC , CD , DA rispettivamente nei punti E , F , G , H , ed EH , FG siano prolungate fino ad incontrarsi in un punto K , la retta condotta da K al centro del cerchio sarà perpendicolare ad AC .

39. Se in un triangolo ABC il lato AC è doppio di BC ; e se CD , CE sono le rispettive bisettrici dell'angolo C e dell'angolo esterno formato dal prolungamento di AC , i triangoli CBD , ACD , ABC , CDE saranno tra loro come i numeri 1, 2, 3, 4.

40. Il luogo dei vertici di tutti i triangoli che hanno la stessa base, e gli altri due lati in una data ragione, è la circonferenza di un cerchio.

41. Trovare il luogo dei punti nei quali due cerchi dati sono veduti sotto lo stesso angolo.

42. In un triangolo ABC rettangolo in A , bisecare con CD l'angolo C , e dimostrare che il doppio del quadrato di AC è alla differenza dei quadrati di AC e di AD , come AB è ad AD .

43. Dati un lato, l'angolo opposto e la ragione degli altri due lati, costruire il triangolo.

44. Se in due triangoli un angolo dell'uno è uguale a un angolo dell'altro, e un altro angolo dell'uno è supplementare

(*) Il punto P si dice il *polo* di CQD , e CQD la *polare* di P .

ad un altro angolo dell' altro, i lati opposti a questi quattro angoli saranno proporzionali.

45. Per un punto qualunque dato nella bisettrice di un angolo tirare una retta che faccia con i lati angoli uguali, e dimostrare che questa linea è la più breve che passi per quel punto e termini ai due lati, e il triangolo così formato è il minimo.

46. La retta che taglia ad angoli uguali i lati di un angolo, è la più corta che possa formare un triangolo di area data.

47. Se un triangolo isoscele sia iscritto in un cerchio, e dal vertice sia tirata una retta finchè incontri la base del triangolo e la circonferenza, il rettangolo contenuto dai segmenti di questa linea sarà uguale al quadrato di uno dei lati uguali del triangolo.

48. Porre dentro un cerchio sei cerchi uguali tangenti tra loro e al dato cerchio, e dimostrare che il cerchio interno che è tangente a tutti è uguale a ciascuno di essi.

49. Le perpendicolari abbassate dai vertici di un triangolo su' lati opposti s' incontrano in un punto.

50. AB è diametro di un cerchio; AC , BD due corde che s' intersecano in E ; abbassata EF perpendicolare ad AB , dimostrare che prolungata passa per l' intersezione di AD , BC .

51. Trovare fuori di un dato cerchio un punto tale che la somma delle due tangenti condotte da esso al cerchio, sia uguale alla retta condotta da esso al centro e prolungata fino all' incontro colla circonferenza.

52. ABC è un triangolo isoscele; tirare AD perpendicolare alla base, e DEF che tagli AB , AC nei punti E , F ; AD sarà a DE , come la somma di AB e di AF è alla differenza di AB , AF .

53. Da un punto P tirate le tangenti PA , PB ad un cerchio, e condotta AC perpendicolare al diametro BD , dimostrare che AC è bisecata da PD in E .

54. Dividere una data retta in un numero qualunque di parti uguali, e quindi dimostrare come si può dividere un triangolo nello stesso numero di parti uguali per mezzo di rette.

55. AD è la bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo, e taglia la base BC in D ; in BC prolungata preso un punto E ugualmente distante da A e da D , dimostrare che BE è a DE come DE è a CE .

56. Se per il punto di mezzo della base di un triangolo si tiri una retta qualunque, essa sarà divisa armonicamente da un lato del triangolo, dalla base, dall'altro lato prolungato e da una parallela alla base condotta per il vertice.

57. Se quattro rette che passano per uno stesso punto dividono una retta data armonicamente, divideranno anche armonicamente un'altra retta qualunque.

58. Due cerchi, uno dei quali è tangente ai tre lati di un triangolo ABC , l'altro a un lato BC e ai prolungamenti degli altri due, siano tangenti ad AB in D_1 e D_2 , ad AC in E_1 , E_2 ; dimostrare che i rettangoli contenuti da BD_1 , BD_2 da CE_1 , CE_2 , e dai due raggi sono uguali tra loro.

59. AD è la perpendicolare abbassata dal vertice A sulla ipotenusa BC di un triangolo rettangolo; dimostrare che il quadrato del raggio del cerchio iscritto in ABC , è uguale alla somma dei quadrati dei raggi dei cerchi iscritti in ABD , ACD .

60. Se l'angolo esterno di un triangolo sia bisecato da una retta che tagli il prolungamento della base, il quadrato di questa linea sarà uguale alla differenza dei rettangoli contenuti dai segmenti della base e dai lati del triangolo.

61. Se dal vertice A di un parallelogrammo sia tirata una retta che tagli la diagonale in E e i lati BC , CD in F , G , dimostrare che AE sarà media proporzionale tra EF ed EG .

62. Data la parte n^{esima} di una retta trovarne la parte $(n + 1)^{\text{esima}}$.

63. CAB , CEB sono due triangoli che hanno un angolo comune B , e i lati CA , CE uguali; se in BE prolungata si prenda ED terza proporzionale a BA , AC , i triangoli BDC , BAC saranno simili.

64. APB è il quadrante di un cerchio, SPT una tangente nel punto P , che taglia i raggi OA , OB nei punti S , T ; tirata PM perpendicolare ad OA , dimostrare che il triangolo AOB è media proporzionale tra i triangoli SOT , OMP .

65. Per un punto dato tirare una retta che, quando fosse prolungata, passerebbe per il punto d'incontro di due rette date, senza prolungare queste rette fino ad incontrarsi.

66. Se due triangoli sono uguali ed hanno i lati che comprendono un angolo in ciascuno reciprocamente proporzionali, questi angoli o saranno uguali o supplementari l'uno all'altro.

67. Costruire un triangolo isoscele uguale a un dato triangolo scaleno e collo stesso angolo al vertice.

68. $ABCD$ è un rettangolo; tirata una retta AE da A a un punto di CD , e la BF perpendicolare ad AE , dimostrare che il rettangolo contenuto da AE , BF è uguale al dato rettangolo $ABCD$.

69. ABC è un triangolo iscritto in un cerchio, AD , AE rette tirate alla base, parallele alle tangenti al cerchio in B , C ; dimostrare che AD è uguale ad AE , e che BD è a CE come il quadrato di AB è al quadrato di AC .

70. In un triangolo qualunque, abbassata la perpendicolare dal vertice sopra la base, la base è alla somma dei lati, come la differenza dei lati è alla differenza o alla somma dei segmenti della base, secondo che la perpendicolare cade dentro o fuori del triangolo.

71. Se $ABCDE$ è una retta che tagli due cerchi che s'intersecano, essendo C il punto dove essa incontra la retta che unisce i punti d'intersezione dei due cerchi; AB sarà a BC come ED a DC , e il quadrato di AE sarà al quadrato di BD come il rettangolo contenuto da AC , CE è al rettangolo contenuto da BC , CD .

72. Se un rettangolo sia iscritto in un triangolo rettangolo, con un angolo comune, il rettangolo contenuto dai segmenti della ipotenusa sarà uguale alla somma dei rettangoli contenuti dai segmenti dei cateti.

73. Se un triangolo isoscele che ha ciascun lato doppio della base sia iscritto in un cerchio, il quadrato del raggio del cerchio sarà al quadrato di uno dei lati uguali come 4 è a 15.

74. ABC è un triangolo rettangolo in A , e che ha l'an-

angolo B doppio dell'angolo C ; tirata BD bisettrice dell'angolo B , e AE , DF perpendicolari sopra BC , dimostrare che il rettangolo contenuto da AE , BF è uguale alla somma dei rettangoli contenuti da BE , DF e da BF , DF .

75. Se una retta è tangente a un cerchio, e si abbassi la perpendicolare dal punto di contatto sopra un diametro qualunque, e dall'estremità di questo diametro e dal centro s'innalzino perpendicolari al diametro fino all'incontro colla tangente, le quattro perpendicolari saranno proporzionali.

76. Inscrivere un quadrato in un pentagono regolare dato.

77. Le rette terminate AB , AC siano divise proporzionalmente in D , E , e le perpendicolari ad esse innalzate da D , E s'incontrino in F ; dimostrare che qualunque siano le posizioni di D , E , il punto F sarà sempre sopra una stessa retta che passa per A .

78. AB è una corda di un cerchio, ed AC , BC condotte per un punto qualunque della circonferenza tagliano il diametro perpendicolare ad AB in D , E ; se O è il centro del cerchio, il rettangolo contenuto da OD , OE sarà uguale al quadrato del raggio.

79. Descrivendo due mezzi cerchi sopra i segmenti dell'ipotenusa fatti dalla perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo, i segmenti dei lati intercetti da questi semicerchi saranno in ragione triplicata coi lati.

80. I lati di un angolo dato sono in una ragione data, ed il vertice è fisso; dimostrare che se l'estremo di un lato si muove sopra una retta data, si muoverà sopra una retta anche l'altro estremo.

81. Se dall'estremità della base di un triangolo si tirino due rette, ciascuna parallela ad uno dei lati ed uguale all'altra, le rette che congiungono l'altra loro estremità coll'altra estremità della base taglieranno dai lati segmenti uguali, ciascuno dei quali sarà medio proporzionale tra gli altri due segmenti.

82. AB , AC sono lati di un pentagono e di un decagono

regolare iscritti in un cerchio di centro O ; se OD è la bisettrice di AOC condotta fino ad AB , dimostrare che i triangoli ACB , ACD , come pure i triangoli AOB , DOB sono simili, e quindi che il quadrato del raggio è uguale alla differenza dei quadrati di AB , AC .

83. Se due cerchi sono tangenti tra loro nel punto C , e si prenda un punto qualunque D fuori di essi in modo che i raggi AC , BC sottendano angoli uguali in D , e DE , DF siano tangenti al cerchio, il rettangolo contenuto da DE , DF sarà uguale al quadrato di DC .

84. Bisecare un triangolo con una linea parallela ad uno dei lati.

85. Un cateto di un triangolo rettangolo è doppio dell'altro; dimostrare che i segmenti della ipotenusa fatti dalla perpendicolare abbassata dal vertice saranno tra loro come 1 è a 4.

86. Se due triangoli sono tra loro come le basi, hanno la stessa altezza; e triangoli e parallelogrammi di altezza disuguale sono tra loro nella ragione composta dalle ragioni delle loro basi e delle loro altezze.

87. Descrivere un rombo uguale a una data figura rettilinea, e che abbia un angolo uguale a un angolo dato.

88. Se due triangoli hanno un angolo uguale a un angolo, o un angolo supplemento di un angolo, saranno nella ragione composta delle ragioni dei lati che lo contengono.

89. Descrivere un quadrato, del quale sia data la differenza tra la diagonale ed un lato.

90. $ABCD$ è un quadrilatero; tirata una retta che tagli AB , CD , in a , d ; AD , BC in b , c ; ed AC , BD in e f ; ab sarà a cd come il rettangolo contenuto da af , be è al rettangolo contenuto da cf e de .

91. Dimostrare che la ragione della diagonale di un quadrato al suo lato è incommensurabile, e quindi dimostrare che il suo valore numerico è approssimativamente uguale ad 1, 4142.

92. Descrivere una circonferenza che passi per un punto dato e sia tangente a una data retta e a un dato cerchio.

93. Descrivere un cerchio tangente a due cerchi dati e ad una data retta.

94. Descrivere una circonferenza tangente a due cerchi dati e che passi per un punto dato.

95. Descrivere un cerchio tangente a tre cerchi dati.

96. In un triangolo qualunque sono in una stessa linea retta la intersezione delle perpendicolari abbassate dai vertici sopra i lati opposti, delle bisettrici dei lati condotte dai vertici opposti, e delle perpendicolari inalzate sulle metà dei lati, e le distanze di questi punti uno dall'altro sono tra loro come i numeri 1, 2, 3.

97. Presi sei punti in un piano, dei quali tre A, C, E in una linea retta, e gli altri tre B, D, F in un'altra linea retta, dimostrare che le intersezioni di AB e DE , di BC ed EF , di CD ed FA sono in linea retta.

98. Se dall'estremità della base di un triangolo si abbassino le perpendicolari sopra la bisettrice dell'angolo al vertice, il cerchio che passerà per i punti d'intersezione e per il piede della perpendicolare abbassata dal vertice alla base, biseccherà la base, e il triangolo sarà uguale al rettangolo contenuto da una delle due prime perpendicolari e dal segmento della bisettrice compreso tra il vertice e l'altra perpendicolare.

99. AC, BE sono rette parallele, F, G, H , ecc. una serie di punti equidistanti in AC ; tirata per il punto B una retta che tagli EF, EG, EH , ecc, in f, g, h , ecc., dimostrare che Bf, Bg, Bh , ecc, sono in proporzione armonica.

100. Se coppie di tangenti comuni siano condotte ad ogni coppia di tre cerchi dati, le intersezioni di ogni coppia di tangenti saranno in una medesima linea retta.

101. Se una retta si divida in estrema e media ragione e se al segmento maggiore si aggiunga la metà di tutta la retta; il quadrato della retta così ottenuta è quintuplo del quadrato della metà.

102. Se il quadrato di una retta sia quintuplo del quadrato di un'altra retta, e si divida il doppio della seconda in estrema e media ragione, il segmento maggiore sarà uguale all'eccesso della prima retta sulla seconda.

103. Se una retta si divida in estrema e media ragione, e se al segmento minore si aggiunga la metà del segmento maggiore, il quadrato della retta così ottenuta sarà quintuplo del quadrato della detta metà.

104. Se una retta sia divisa in estrema e media ragione, la somma dei quadrati dell'intera retta e del segmento minore è tripla dal quadrato del segmento maggiore.

105. Se ad una retta, divisa in estrema e media ragione, si aggiunga il segmento maggiore, e la retta così ottenuta si divida di nuovo in estrema e media ragione, il segmento maggiore di questa sarà uguale alla prima retta.

106. I lati dell'esagono e del decagono equilateri inscritti nello stesso cerchio, sono il segmento maggiore ed il segmento minore di una stessa retta segata in estrema e media ragione.

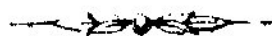
107. Se in un cerchio siano inscritti il pentagono, l'esagono ed il decagono equilateri, il quadrato del lato del pentagono è uguale alla somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono.

108. Il quadrato di un lato del triangolo equilatero è triplo del quadrato del raggio del circolo circoscritto.

109. Se in un circolo siano inscritti il pentagono, l'esagono ed il decagono equilateri, la somma dei lati dell'esagono e del decagono è doppia della perpendicolare calata dal centro sul lato del pentagono.

110. Se in un circolo sia inscritto il pentagono equilatero, la somma dei quadrati di un lato del pentagono e della corda sottesa a due lati è quintupla del quadrato del raggio.

111. Due rette divise in estrema e media ragione stanno fra loro come i segmenti maggiori.



1130

63/33

