EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

MARINI GHETALDI
PATRITII RAGVSINI
MATHEMATICI PRAESTANTISSIMI.
DE RESOLVTIONE,
& Compoſitione Mathematica
LIBRI QVINQVE.
Opus Poſthumum.

ROMAE,
Ex Typographia Reuerendæ Cameræ Apoſtolicæ.
M. DC. XXX.

Superiorum Permiſſu, & Priuilegio.

Mathematicus; cuius opera præclara ne cum ipso cecidisse videantur Authore, iussis cauet suis & typis meis Eminentissimus Cardinalis Barberinus frater tuus: qui magnorum monumenta virorum iacere in tenebris, occulique sepulcro non patitur. Facit ipse pro sua in doctos homines pietate, vt eos ab interitu vindicet qui laboribus ac vigilijs plurimis aduersus mortalitatem vincentem, & conterentem omnia se communire non dubitarunt: facit pro sua in me beneuolentia, vt opera potissimum mea eorumdem doctorum hominum immortalitati consultum velit. Erit nunc tuæ benignitatis, humanissime Princeps, excipere à me perlibenter hoc munus, quod ex animi mei sententia, ac simpliciter offero, ratus, tibi displicere non posse officium meum quod ceteris iam Barberinæ familiæ Principibus est probatum. Vale.

INDEX PROPOSITIONVM, ET PROBLEMATVM LIBRI I.

LIBRI SECVNDI.

LIBRI TERTII.

LIBRI QVARTI.

LIBRI QVINTI.

F I N I S.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, & Compositione Mathematica.

LIBER PRIMVS.

A OMNES Mathematicæ probationes vel à concessis ad quæsita, vel à quæsitis ad concessa progrediuntur. Quæ à concessis progrediuntur ad quæsita, compositiones appellantur. Compositio enim est assumptio concessi per consequentia ad quæsiti finem, & compræhensionem. quæ vero à quæsitis progrediuntur ad concessa duplices sunt; vel enim concessa ponunt, vel destruunt: quæ ponunt concessa, resolutiones vocantur: Est enim Resolutio assumptio quæsiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Nam in resolutione id quod quæritur, vt iam exi-
B stens, & vt verum ponentes, per ea, quæ deinceps consequuntur, procedimus ad aliquod concessum: quo opere quæsitam conclusionem, in proprias causas, per quas demonstratur reducimus: atque his resolutionibus compositiones opponuntur. fieri enim potest, vt à concesso illo, per eadem resolutionis vestigia ad quæsitum reuertamur. Quæ vero destruunt concessa, deductiones ad impossibile nuncupamus. Deductio enim ad impossibile est assumptio eius quod quæsito contradicit tanquam concessi per consequētia, ad id, quod vero concesso opponitur. nam in deductione ad impossibile sumimus id quod quæsito contradicit, idq; supponentes progredimur, donec in aliquod absurdum incidamus, per quod suppositione destructa confirmetur id, quod à prin-
C cipio quærebatur. Ex quibus patet Resolutionem à Deductione ad impossibile ratiocinatione tantum differre; nam vtraque ab incognito ad cognitum eodem progressionis ordine procedit: sed Resolutio desinens in verum, concludit verum esse & quod supponitur: Deductio vero ad impossibile, desinens in falsum, falsum esse & quod supponitur arguit, & consequenter quæsitum verum esse.

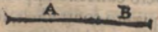
Duplex autem est resolutionis genus alterum quidem ad Theoremata pertinet, eiusq; finis in sola veritatis inuestigatione consistit. alterum vero ad Pro-

blemata, cuius scopus est rationem constructionis, atque demonstrationis in- A
uestigare: proposita enim Problemata construere docet, viamq; ad constructionis demonstrationem ostendit. sed omnia ferè Theoremata, & Problemata, quæ sub Algebram cadunt facillimè resoluuntur, ac per resolutionis vestigia componuntur: non quidem vulgaris Algebræ beneficio; quæ resolutionis vestigia omnino confundit; sed illius, cuius auctor est Franciscus Vieta, vir certè de rebus Mathematicis optimè meritus: cui non solum nostra, sed etiã superior ætas haud scio an vllum huius scientiæ laude parem, nedum superiorem inuenerit. etenim Resolutio procedens per species immutabiles, non autem per numeros mutationi, quacunque operatione tractentur, obnoxios; sua vestigia clara relinquit, per quæ non est difficilis ad compositionem reditus: compositio enim in Problematibus, siue per Algebram, siue Antiquorũ B
methodo resolutis, à fine resolutionis, ad principium per resolutionis vestigia regreditur: in Theorematibus verò quorum veritas per Algebram exploratur, eodem ordine quo inuenta est Theorematis veritas, demonstratio procedit. At Theoremata vel Problemata, quæ sub Algebram non cadunt qualia sunt ea, quæ per comparationem angulorum demonstrantur, resoluuntur, & componuntur methodo ab antiquis tradita, cuius exempla extant in libris Archimedis, Apollonij, & Pappi, aliorumq; veterum ac recentium. Et quamuis ea methodo omnia Theoremata, & Problemata resolui, & componi possint; tamen ea, quæ sub Algebram cadunt, plerumque faciliùs ac expeditiùs per Algebram resoluuntur, ac deinde per resolutionis vestigia componuntur. Hæc omnia exemplis, atque etiam præceptis vbi locus exiget perspicua fient. Pri- C
mum igitur proponam. Exempla ad inuentionem Theorematum, eorumq; demonstrationem pertinentia; deinde ad resolutionem, & compositionem Problematum: primis enim quatuor Theorematibus in Problematum resolutionibus & compositionibus sæpe vtemur.

Propositio Prima.

Si recta linea secetur vtcumque; rectangulum sub tota, & differentia partium cui plano ad ipsas partes relato æquale sit inuestigare.

SEcetur recta linea in duas partes, quarum A sit maior, B, minor. Oportet inuestigare cui plano ad ipsas partes relato æquale sit rectangulum sub A + B, & A — B. Ducatur A + B in A -- B, fit A Q -- B Q. huic igitur plano æquale est rectangulum sub tota & differentia partium; quare inuentum est quod quærebatur. Hinc formatur D



Theorema I.

Si recta linea secetur vtcumque, rectangulum sub tota, & differentia partium, æquale est differentiæ quadratorum partium.

Sece-

A SEcetur recta linea A B vtcunque in C, & producatur in D, vt sit C D æqualis A C, ergo differentia partium A C, C B erit B D. Dico rectangulum A B D æquale esse differentiæ quadratorum A C, C B. Describatur enim super C D quadratum C H, & ducatur diameter D E, quam B G parallela rectæ C E secet in F: deinde per F ducatur ipsi A B parallela K F L. Similiter ducatur & ipsi B K parallela A L. Quoniam igitur rectangulum A I, æquale est rectangulo B H, sunt enim A C, D H æquales, & æquales C I, B D. Addito igitur communi rectangulo B I, rectangulũ A F æquale erit rectangulis B H, B I, hoc est gnomoni M N O per quem differunt quadrata C H, I G. Rectangulum igitur A F æquale est differentiæ quadratorum C H, I G quod erat ostendendum.

B Idem Theorema posset quoque ita enunciari:

Si recta linea secetur vtcumque, rectangulum sub tota, & differentia partium vnà cum quadrato partis minoris, æquale est quadrato partis maioris.

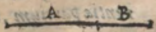
OStensum est enim rectangulum A F æquari gnomoni M N O, addito communi quadrato I G, rectangulum A F, vnà cum quadrato I G æquabitur toti quadrato C H.

C Itaque Theorema hoc idem est, quod Theorema quintum, vel sextum libri secundi elementorum. Nam in quinto Theoremate dimidia illa recta intelligatur pars maior, intermedia vero sectionum, pars minor, reliqua autem differentia partium. In sexto autem Theoremate dimidia illa recta intelligatur pars minor, altera vero dimidia cum adiecta, pars maior, ipsa autem adiecta, differentia partium. His ita acceptis manifestum est vnum, eundemq; sensum contineri in hac nostra propositione, atque in illis duabus Euclidis.

Propositio II.

D *Si recta linea secetur vtcumque, quadratum differentiæ partium quibus planis ad ipsas partes relatis æquale sit inuestigare.*

SIt recta linea secta in duas partes A, B quarum A sit maior; ergo earum differentia erit A—B. oportet inuestigare quibus planis ad ipsas partes relatis æquale sit quadratum ex A—B. Ducatur A—B in se: productum erit A Q + B Q—B in A 2. Atque hæc sunt ea plana quibus æquale est quadratum differentiæ partium. quare inuentum est quod quærebatur. Hinc formatur.



Theorema II.

Si recta linea secetur vtcumque, quadratum differentiæ partium, æquale est quadratis partium minus duplo sub partibus rectangulo.

Secetur recta A B vtcumque in C, eaq; producatur in D, vt sit C D æqualis A C: differentia igitur partium A C, C B, erit B D. Dico quadratum B D æquale esse quadratis A C, C B, minus rectangulo A C B bis. Describatur enim super C D quadratum C H, in quo agatur diameter D E, quã recta B G, parallela ipsi C E, vel D H, secet in puncto F, per quod agatur ipsi C D parallela I F K. sunt igitur B K, I G quadrata rectarum B D, C B, & quadratum B K vnà cum rectangulis C H, I H, æquale est quadratis C H, I G, demptis vtrimque rectangulis C G, I H, reliquum quadratum B K æquale erit quadratis C H, I G, minus rectangulis C G, I H. hoc est æquale erit quadratis rectarum A C, C B, minus rectangulo A C B bis: quod erat ostendendum.

Theorema hoc, quemadmodum & præcedens, demonstrantur ex ipsa constructione, quoniam vnico tantum actu resoluuntur, nullo resolutionis progressu; in primo enim Theoremate ex ductu $A + B$ in $A - B$, in secundo autem ex ductu $A - B$ in se, veritas innotuit.

Idem Theorema potest quoque ita proponi.

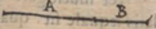
Si recta linea secetur vtcumque, quadrata partium simul æqualia sunt quadrato differentiæ partium, vnà cum duplo sub partibus rectangulo.

Itaque Theorema hoc est vnum, idemq; cum Theoremate septimo libri secundi Elementorum; nam in eo Theoremate tota illa recta intelligatur pars maior, alterum autem segmentorum, pars minor, reliquum vero, differentia partium: quibus sic acceptis, manifestum est vnum, idemq; propositum esse vtriusque Theorematis.

Propositio III.

Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium, cui plano ad ipsas partes relato æquale sit inuestigare.

Sit recta linea secta in duas partes A, B, quarum A sit maior, ergo differentia earum erit $A - B$. Oportet inuestigare, cui plano æquale sit quadratum ex $A + B$ minus quadrato ex $A - B$. Fiat quadratum ex $A + B$ id, erit



$$A\,Q + B\,Q + B \text{ in } A\,2.$$

ab eoq; auferatur quadratum ex $A - B$ quod est

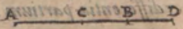
$$A\,Q + B\,Q - B \text{ in } A\,2.$$

Rema-

A Remanebit B in A 4. Huic igitur plano æquale est quadratum totius rectæ, minus quadrato differentiæ partium: Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theorema III.

Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius minus quadrato differentiæ partium æquale est quadruplo sub partibus rectangulo.



SIt recta A D secta vtcumque in B, & rectæ D B, quæ sit minor pars, fiat æqualis B C; ergo differentia partium A B, B D, erit A C. Dico qua-
B dratum A D, minus quadrato A C, æquale esse quadruplo rectanguli A B D. Quoniam enim quadratum A D æquale est quadratis A B, B D vnà cum rectangulo A B D bis; quadratum autem A C æquale est eisdem quadratis A B, B D, minus rectangulo A B D bis, si igitur à quadratis A B, B D, & rectangulo A B D bis auferantur quadrata A B, B D, minus rectangulo A B D bis, remanebit rectangulum A B D quater. Quadratum igitur totius rectæ, minus quadrato differentiæ partium, æquale est quadruplo rectangulo sub partibus, quod erat ostendendum.

Idem Theorema potuit quoque ita enunciari.

C *Si recta linea secetur vtcumque, quadruplum rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale est totius lineæ quadrato.*

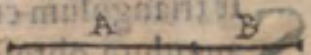
CVm enim ostensum sit quadratum totius, minus quadrato differentiæ partium, æquari quadruplo rectangulo sub partibus, si vtrobique addatur quadratum differentiæ partium, quadratum totius æquale erit quadruplo rectangulo sub partibus, vnà cum quadrato differentiæ partium.

Itaque Theorema hoc idem est quod Theorema octauum libri 2. Euclidis in eo enim Theoremate tota illa recta intelligatur pars maior, alterum autem segmentorum, pars minor, reliquum vero, differentia partium. quibus sic acceptis, manifestum est vnum, idemq; propositum esse vtriusque Theorematis

D

Propositio IIII.

Si recta linea secetur vtcumque, quadratum totius vnà cum quadrato differentiæ partium, quibus planis ad ipsas partes relatis, æquale sit inuenire.



SEcetur recta linea in duas partes A, B, quarum A sit maior, ergo differentia partiũ erit A — B: Oportet inuestigare, quibus planis æquale sit quadratum ex A + B, vnà cum quadrato ex A — B. Fiat quadratum ex A + B id erit

A Q + B Q + B in A 2

 Simi-

Similiter fiat quadratum ex A—B id erit A

A Q ✢ B Q—B in A 2.

Horum quadratorum aggregatum eſt A Q 2 ✢ B Q 2. Atque his planis æqualia ſunt quadrata, totius videlicet, & differentiæ partium, quare inuentum eſt quod quærebatur. Hinc

Theorema IV.

Si recta linea ſecetur vtcumque, quadratum totius vnà cum quadrato differentiæ partium, dupla ſunt quadratorùm partium.

SEcetur recta A B vtcumque in C, & à maiori parte, quæ ſit A C, auferatur C D æqualis C B: ergo differentia partium A C, C B erit A D. Dico quadrata A B, A D dupla eſſe quadratorum A C, C B. Quoniam enim quadratum A B æquale

B

4 secũdi eſt* quadratis A C, C B, vnà cum rectangulo A C B bis; quadratum autem
Theor. 2 A D æquale* quadratis A C, C B, minus rectangulo A C B bis, ideo quadrata A B, A D æqualia ſunt quadratis A C, C B bis. hoc eſt dupla ſunt quadratorum A C, C B, quod erat oſtendendum. In hoc Theoremate idem oſtenditur, quod in Theorematibus nono, & decimo libri ſecundi Elementorum licet in alia forma ſit propoſitum. Nam in nono Theoremate, dimidia illa recta, intelligatur pars maior, intermedia verò ſectionum, pars minor, reliqua autem, differentia partium.

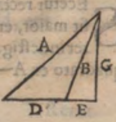
In decimo autem Theoremate dimidia illa recta, intelligatur pars minor, C altera vero dimidia cum adiuncta, pars maior, ipſa autem adiuncta, differentia partium. quibus ſic acceptis, manifeſtum eſt huius noſtri Theorematis idē eſſe propoſitum, atque dictorum Theorematum noni & decimi.

Quatuor præcedentia Theoremata ea ratione, qua propoſitæ ſunt, nō paruo vſui erunt in reſolutionibus, & compoſitionibus; nam vt in reſolutionibus plana (quibus æquatur quadratum differentiæ partium vel rectangulum ſub differentia partium, & aggregato) cum alijs planis ſæpe comparantur; ſic rurſus in compoſitionibus, quæ per filium reſolutionis progrediuntur, aut regrediuntur; eadem plana pro quadrato differentiæ partium, ſeu rectangulo ſub differentia partiū, & aggregato, cum ijſdem alijs planis, cōparentur neceſſe eſt. D

Propoſitio V.

In obtuſiangulis triangulis, quadratum lateris angulum obtuſum ſubtendentis, quanto maius ſit quadratis reliquorum laterum inuenire.

SIt triangulum cuius latera A B D & latus A ſubtendat angulum obtuſum. Oportet inuenire quanto ſit maius quadratum lateris A quadratis laterum B & D. Ab angulo verticis cadat in D. baſim continuatam perpendicularis G, ſitq; continuatio E: quadratum igitur lateris A æquale



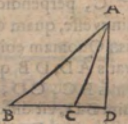
A æquale* erit quadratis à perpendiculari, & à base producta vsque ad perpendicularem, hoc est 47 primi

A Q æquale erit G Q ✠ D Q ✠ E Q ✠ D in E 2. sed
G Q ✠ E Q æquale* est B Q. ergo 47 primi
A Q æquabitur B Q ✠ D Q ✠ D in E 2

Quadratum igitur lateris A maius est, quàm quadrata laterum B, & D rectãgulo D in E 2. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc formatur.

Theorema V.

B *In obtusiangulis triangulis, quadratum lateris angulum obtusum subtendentis, maius est, quàm quadrata reliquorum laterum, rectangulo cõprehenso bis ab vno reliquorum laterum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & à linea, quæ inter perpendicularem, & angulum obtusum interijcitur.*



SIt obtusiangulum triangulum A B C, obtusum angulum habens A C B, & ducatur à puncto A ad B C productam, perpendicularis A D. Dico quadratum A B, maius esse, quàm quadrata A C, C B rectangulo B C D bis; quoniam enim quadratum A B æquale* est quadratis A D, D B; quadratum autem D B æquale* quadratis D C, C B, vnà cum rectangulo B C D bis; erit quadratum A B æquale quadratis A D, D C, C B vnà cum rectangulo B C D bis. sed quadrata A D, D C æqualia* sunt quadrato A C, ergo quadratum A B, æquale erit quadratis A C, C B vnà cum rectangulo B C D bis; itaque quadratum A B maius est, quàm quadratum A C, C B, rectangulo B C D bis. quod erat ostendendum. 47 primi 4 secũdi 47 primi

C

Propositio VI.

In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum acutum subtendentis, quanto minus sit quadratis reliquorum laterum, inuenire.

D SIt triangulum cuius latera A B D & latus A subtendat angulum acutum. Oportet inuenire quanto minus sit quadratum lateris A quadratis laterum B & D. Cadat ab angulo verticis in basim D, perpendicularis G, secans ipsam basim in duas partes, quarum illa, quæ est inter perpendicularem, & angulum acutũ sit E; ergo altera pars erit D—E.

Et quoniam A Q æquale* est quadratis ex G & D—E, ideo 47 primi

A Q æquabitur G Q ✠ D Q ✠ E Q—D in E 2.

Et addito vtrique parti D in E 2

A Q

47 primi A Q ✠ D in E 2, æquabitur G Q ✠ D Q ✠ E Q, sed G Q ✠ E Q æquale* est B Q, ergo A
A Q ✠ D in E 2 æquabitur D Q ✠ B Q.

Quadratum igitur lateris A, minus est, quàm quadrata laterum D, & B rectangulo D in E 2. Hinc

Theorema VI.

In acutiangulis triangulis, quadratum lateris angulum rectum subtendentis, minus est, quàm quadrata reliquorum laterum, rectangulo cõprahenso bis, ab vno reliquorum laterum, in quod perpendicularis cadit, & à portione ipsius lateris, quæ inter perpendicularem, & angulum acutum interijcitur. B

SIt acuti angulum triangulum A B C, acutum habens angulum A C B, & ducatur à puncto A ad B C, perpendicularis A D. Dico quadratum A B, minus esse, quam quadrata A C, C B rectangulo B C D bis. Quoniam enim quadratum A B æquale* est quadratis A D, D B, quadratum autem D B æquale* est quadratis B C, C D, minus rectangulo B C D bis; recta enim B D, est differentia inter B C, C D: ergo quadratum A B æquale erit quadratis A D, B C, D C, minus rectangulo B C D bis. addatur vtrobique rectangulum B C D bis, ergo quadratum A B vnà cum rectangulo B C D bis, æquale erit quadratis A D, B C, D C. sed quadrata A D, D C æqualia* sunt quadrato A C, ergo quadratum A B vnà cum rectangulo B C D bis, æquale erit quadratis B C, C A. Itaque quadratum A B minus, est quam quadrata B C, C A rectangulo B C D bis. quod erat ostendendum. C

47 primi; Theor. 2; 47 prim

In principio libri tertij decimi Elementorum extant in scholijs nonnulla exempla ad Resolutionem, & Compositionem Theorematum pertinentia; ibi enim quinque Theoremata resoluuntur, & componuntur. Ego quoque eorundem Theorematum veritatem alia methodo inquiram; peritus autem Geometra in inquirendo huiusmodi Theorematum veritate, poterit ea methodo vti quæ facilior videatur. D

Propositio VII.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur; quadratum maioris portionis assumentis dimidium totius, quanto maius sit quadrato dimidiæ totius inuestigare.

SIt recta linea B 2 extrema, ac media, ratione secta, cuius portio maior sit D ergo portio

minor

A minor erit B 2--D; dimidia autem totius est B, itaque composita ex maiore portione, & dimidia totius, erit D + B, Oportet inuestigare, quanto maius sit quadratum ex D + B, quadrato ex B; posuimus eam sectam extrema, ac media ratione, esse B 2 non autē B simplicem; sic enim fractiones vitabūtur.

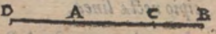
Quoniam igitur secta est B 2 extrema, ac media ratione, rectangulum sub tota, & portione minori, æquale erit quadrato portionis maioris. hoc est

BQ 4—B in D 2 æquabitur DQ.

Quadratum autem ex D + B, est D Q + B Q + D in B 2. si igitur dematur D Q, & in locum eius subrogetur B Q 4--B in D 2, cui ostensum est æquari D Q, prodibit B Q. 5, idq; æquabitur quadrato ex D + B; atque adeo quadratum ex D + B quintuplum erit quadrati ex B. Quare inuentum est B quod quærebatur. Hinc ordinatur

Theorema VII.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, quadratum maioris portionis assumentis dimidiam totius, quintuplum est quadrati dimidiæ totius.

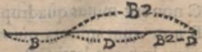


SEcetur A B extrema, ac media ratione in C, sitq; maior portio A C, eaq; producatur in D, vt sit A D æqualis dimidiæ A B. Dico quadratum ex D C quintuplum esse quadrati ex D A. Quoniam enim secta est A B extrema, ac media ratione C in C, quadratum A C æquale erit rectangulo A B C, hoc est quadrato A B, minus rectangulo B A C; seu quod idem est, quadrato D A, quater minus rectangulo D A C bis, est enim A B dupla ipsius A D. Et quoniam quadratum D C æquale* est quadratis D A, A C vnà cum rectangulo D A C bis: si dematur quadratum A C, & in locum eius subrogetur, ipsi æquale quadratū D A, quater minus rectangulo D A C bis, itidem manebit æqualitas, hoc est quadratum D C æquale erit quadrato D A quinquies. Itaque quadratum D C quintuplum est quadrati D A, quod erat ostendendum.

*4 secūdi

Propositio VIII.

D *Si recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis, extrema ac media ratione secta. quæritur an maior portio sectæ sit reliqua pars eius quæ à principio rectæ lineæ.*



REcta linea constans ex partibus B D quintuplum possit partis B, cuius dupla est B 2; ipsa igitur B 2 secetur extrema, ac media ratione. Oportet inuestigare an maior portio sectæ sit D, reliqua videlicet pars eius, quæ à principio rectæ lineæ. Quoniam igitur vna pars ipsius B 2, est D reliqua pars erit B 2—D, demonstrabimus aūt infra ipsam B 2, maiorem esse, quam D. Et cum quadratū ex B + D ponatur quintuplū quadrati ex B.

B Q

B Q + D Q + B in D 2, æquabitur B Q 5.

Auferatur vtrinque B Q, ergo

D Q + in D 2 æquabitur B Q 4.

Auferatur quoque B in D 2, vt D Q solum remaneat, cum recta D comparanda sit cũ portione maiori ipsius B 2 sectæ, extrema ac media ratione, ergo

D Q æquabitur B Q 4 — B in D 2

Seu quod idem est

D Q æquabitur B 2 — D in B 2.

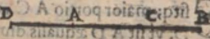
Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

B 2 — D   D   B 2.

Itaque B 2 secta est extrema, ac media ratione, & maior portio est D; cum sit ipsa D media proportionalis inter portionem B 2 — D, & totam B 2. quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theorema VIII.

Si recta linea partis ipsius quintuplum possit. Dupla dictæ partis extrema ac media ratione secta, maior portio, reliqua pars est eius quæ à principio recta linea.



Sit quadratum rectæ A B quintuplum quadrati partis B C, & ipsius B C dupla sit C D; post autem ostendemus B C duplam maiorem esse reliqua parte C A. Dico si C D extrema ac media ratione secetur, C A esse portionem maiorem.

4 secũdi Quoniam enim quadratum A B, quod * constat quadratis A C, C B, & rectangulo A C B bis, ponitur quintuplum quadrati B C, quadrata A C, C B vnà cum rectangulo A C B bis, æqualia erunt quadrato B C quinquies; dempto vtrinque quadrato B C, relinquetur quadratum A C, vnà cum rectangulo A C B bis æquale quadrato B C quater, hoc est relinquetur quadratum A C vnà cum rectangulo D C A æquale quadrato C D; ponitur enim C D dupla ipsius B C: auferatur quoque vtrinque rectangulum D C A, ergo quadratum A C, æquale erit quadrato C D, minus rectangulo D C A; hoc est æquale

16 sexti erit rectangulo C D A; quare * vt D A ad A C ita erit A C ad C D. Secta est igitur recta C D extrema, ac media ratione, & maior portio est C A, quod erat ostendendum.

At vero B C duplam maiorem esse, quam C A sic demonstrabitur.

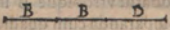
Sit enim si fieri potest B C dupla non maior quàm C A, ergo quadratum A C non erit minus quadruplo quadrati C B, & consequenter quadrata A C, C B non erunt minora quintuplo quadrati C B, sed ponitur quadratum A B quintuplum quadrati C B, ergo quadrata A C, C B, non erunt minora qua-

4 secũdi drato A B: quod est absurdum; quadratum enim A B æquale * est quadratis A C, C B vnà cum rectangulo A C B bis. Dupla igitur B C maior est, quàm C A quod erat ostendendum.

Propo-

Propositio IX.

Si recta linea secetur extrema, ac media ratione, quadratum minoris portionis aßumentis dimidiam maioris portionis. quanto maius sit quadrato dimidiæ maioris portionis, inuestigare.



Secetur recta extrema, ac media ratione cuius portio maior sit B 2, portio minor D. Quæritur quanto maius sit quadratum ex D + B quadrato ex B. Quoniam igitur ex natura huiusmodi sectionls rectangulum sub tota, & portione minore æquale est quadrato portionis maioris. ideo

D in B 2 + D Q æquabitur B Q 4

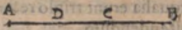
Quadratum autem ex D + B constat ex

D Q + B Q + D in B 2

cui quadrato si dematur D in B 2, & D Q. & in locum eorum subrogetur. æquus valor, nempe B Q 4; fit B Q 5 pro valore eiusdem quadrati ex D + B. Itaque quadratum ex D + B quintuplum erit quadrati ex B. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theorema IX.

Si recta linea secetur extrema, ac media ratione, portio minor assumens dimidiam maioris portionis, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris portionis describitur quadrati.

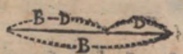


Secetur A B extrema, ac media, ratione: in C cuius portio maior A C, secetur bifariam in D. Dico quadratum B D quintuplum esse quadrati D C. Quoniam enim ex huiusmodi sectione rectangulum A B C, æquale est quadrato A C ipsi autem rectangulo A B C, æquale est quadratum C B vna cum rectangulo A C B, hoc est vna cum rectangulo D C B bis, & quadratum A C quadruplum est quadrati D C, ergo quadratum C B vnà cum rectangulo D C B bis, æqualia erunt quadrato D C quater. Et quoniā quadratum D B æquale* est quadratis D C, C B vnà cum rectangulo D C B bis. 4 secūdi
demptis quadrato C B, & rectangulo D C B bis, & in locum eorum subrogato quadrato D C quater, cui ea æqualia sunt, rursus manebit æqualitas, nēpe quadratum D B, æquale erit quadrato D C quinquies. Itaque quadratum A B quintuplum erit quadrati D C. Quare constat propositum.

Propositio X.

Si recta linea secetur extrema, ac media ratione: quadrata totius & portionis minoris simul, quanto sint maiora quadrato portionis maioris, inuestigare.

Secetur



SEcetur recta B extrema, ac media, ratione, sitq; minor portio D ergo maior erit B—D. Quæritur quanto maiora sint quadrata ex B & D quadrato ex B—D. Quoniam igitur ratione sectionis, quadratum portionis maioris æquale est rectangulo sub tota & portione minori A

$$BQ + DQ - B \text{ in } D\,2 \text{ æquabitur } B \text{ in } D.$$

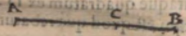
Addatur vtrobique B in D 2 vt BQ & DQ vna ex parte existant, cum sint comparanda cum quadrato portionis maioris, ergo

$$BQ + DQ \text{ æquabitur } B \text{ in } D\,3.$$

Quadràta igitur ex B & D simul, tripla sunt quadrati portionis maioris. Quare inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theorema X. B

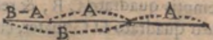
Si recta linea secetur extrema, ac media ratione; quadrata totius, & portionis minoris simul, tripla sunt quadrati portionis maioris.



SEcetur recta A B in C extrema, ac media ratione, sitq portio maior A C, & portio minor C B. Dico quadrata A B, B C simul, tripla esse quadrati A C. Quoniam enim ex vi sectionis quadratum A C æquale est re-
Theor.2 ctangulo A B C, & æquale quoque quadratis A B, B C, minus duplo rectanguli A B C, recta enim A C differentia est rectarum A B, B C, ergo quadrata A B, B C, minus duplo rectanguli A B C, æqualia erunt rectangulo A B C; C addatur vtrique parti duplum rectangulum A B C, ergo quadrata A B, B C æqualia erunt triplo rectangulo A B C hoc est triplo quadrati A C quod erat ostendendum.

Propositio XI.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturq; ipsi æqualis maiori portioni. Quæritur an tota linea sit extrema, ac media ratione secta, ita vt maior portio sit ea quæ à principio posita est recta linea.



SIt recta linea B secta extrema, ac media ratione, sitq; maior portio A, ergo portio minor erit B—A: ipsi autem B adijciatur recta æqualis maiori portioni, ea erit A. Oportet inuestigare an tota B + A sit secta extrema, ac media, ratione, ita vt maior portio sit B. Quoniam igitur ex natura sectionis est D

vt B ad A ita A ad B—A

Erit conuertendo vt A ad B ita B—A ad A

Et componendo vt A + B ad B ita B ad A.

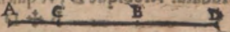
Secta est igitur B A extrema, ac media ratione, & portio maior est B, quæ à principio posita est. Itaque inuentum est quod quærebatur. Hinc

Theo-

A

Theorema XI.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturq; ipsi æqualis maiori portioni, erit tota linea extrema, ac media, ratione, secta, et maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea.

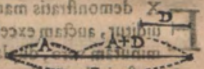


SIt recta linea A B, quæ secetur extrema, ac media, ratione, in C & sit portio maior C B, cui æqualis ponatur B D. Dico rectam lineam A D extrema, ac media, ratione, secari in puncto B, & maiorem portionem esse A B, quæ à principio posita est. Quoniam enim ratione se-
B ctionis est, vt A B ad B C, ita B C ad C A, erit conuertendo, vt B C, hoc est B D, ad B A, ita A C ad C B; & componendo, vt D A ad A B, ita A B ad B C; hoc est ad B D. Secta est igitur A D extrema, ac media, ratione, in B, & maior portio est A B. quod erat ostendendum.

Problema Primum.

Datam rectam lineam secare, ita vt maior pars minorem dato excessu superet. Oportet autem datum excessum minorem esse data secanda.

Resolutio.



C SIt data recta linea B secanda in duas partes, quarum maior superet minorē excessu æquali datæ rectæ lineæ D.

Factum iam sit & pars minor esto A, maior igitur erit A + D, vnde tota erit A 2 + D sed eadem data est B, ergo

B æquabitur A 2 + D

auferatur vtrinque D, vt magnitudines datæ ex vna parte existant; ea vero de qua quæritur ex altera, ergo

B — D æquabitur A 2

Vnde

Porisma.

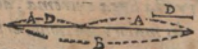
D Recta data minus excessu dato, æqualis est duplo partis minoris. Datur ergo minor pars quæsita.

Compositio.

SIt dacta recta linea A B, quam oportet secare vt pars maior superet minorem excessu æquali datæ rectæ lineæ D, à recta A B auferatur B C æqualis ipsi D, reliqua vero C A secetur bifariam in E, erit igitur A E minor pars, E B maior; hæc enim superat illam excessu C B, æquali ipsi D, quare factum est quod oportebat.

Alia Resolutio. A

Pars maior estò A, minor igitur erit A — D, tota ideo erit A 2 — D, sed eadem data est B ergo



B æquabitur A 2 — D

Addatur vtrobique D, vt quæsita magnitudo à datis separetur. ergo

B + D æquabitur A 2.

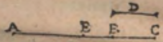
Hinc

Porisma.

Recta data plus excessu dato æqualis est, duplo partis maioris. B
Datur ergo maior pars quæsita.

Compositio.

Sit data recta linea secunda vt petitur A B, datus autem excessus D. Producatur A B in C, vt B C sit æqualis D, & tota A C secetur bifariam in E;



erit A E pars maior, E B pars minor, recta enim E C, hoc est A E, superat E B, excessu B C æquali ipsi D. Factum est igitur quod oportebat.

Corollarium I.

Ex demonstratis manifestum est, rectam lineam, quæ in duas partes diuiditur, auctam excessu partium, æqualem esse parti maiori duplæ, diminutam vero, duplæ minori. C

In posteriori enim demonstratione rectæ A B sectæ in E adiecta est B C differentia partium A E E B, & fit A G dupla partis maioris A E.

In priori vero demonstratione rectæ A B, quæ secta est in E, ablata est C B differentia partium A E E B, & relinquitur A C dupla partis minoris A E.

Corollarium II.

Per consequens hoc etiam verum est, dimidia lineæ rectæ in duas partes diuisæ, aucta dimidio excessu partium, æqualis est parti maiori, diminuta minori. D

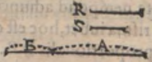
Posui corollaria hæc, quoniam frequens est eorum vsus in resolutionibus, præsertim in constituendis partibus ex aggregato partium, & differentia.

Problema II.

Data recta linea, alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, datam teneat rationem. Oportet autem datam rationem esse maioris ad minus.

Reso-

A Resolutio.



Sit data recta linea B, cui oportet alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta, ad adiunctam, sit vt R ad S, quarum R sit maior.

Factum iam sit & adiuncta de qua quæritur esto A, ergo data cum adiuncta erit B + A, & erit

vt R ad S ita B + A ad A.

In hac propositione duo tantum dantur termini, primus nempe, & secundus, vt necesse est dari quoque tertium, nam nisi sint cogniti tres propositionis termini, quartus, hoc est quæsita magnitudo, non innotescet. igitur vt
B tertius quoque detur terminus, qui constat ex B & A magnitudinibus, data scilicet, & quæsita, liberandus est à quæsita, ita tamen vt quatuor illi termini proportionales existant. liberabitur autem in hoc casu, auferendo consequẽtes ab antecedentibus, hoc est per diuisionem rationis argumentando, nam cum sit

vt R ad S ita B + A ad A

erit diuidendo vt R — S ad S, ita B ad A.

Dantur ergo tres proportionalium termini, itaque dabitur, & quartus, hoc est adiuncta, de qua quæritur.

C Porisma.

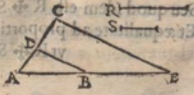
Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum minorem, ita est data ad adiunctam.

Scholium.

Sæpe autem contingit, non vnum tantùm, sed plures proportionis terminos constare ex datis magnitudinibus & ea de qua quæritur, vel eius gradu, nec rationem apparere, qua datæ magnitudines à quæsita separari possint, seruata proportione quacunque, ideo eo casu resoluenda est ad æqualitatem proportio & procedendum æqualibus æqualia addendo, vel subducendo vel æqualia per æqualia multiplicando, aut diuidendo, donec facta omni-
D no sub magnitudinibus datis ex vna æquationis parte existant, cætera vero ex altera. Hæc autem exemplis suo loco fient illustriora.

Compositio.

Sit data recta linea A B cui oportet alteram rectam adiungere, vt data cum adiuncta ad adiunctam sit, vt R ad S maior ad minorem. Ponatur A C æqualis R, ita vt cum A B constituat angulum quemcunque, & ab A C abscindatur C D æqualis S, & iungatur D B, eiq; paral-



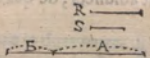
a sexti lela agatur C E secans A B productam in E. Erit* igitur vt A D ad D C differentia videlicet terminorum R & S ad terminum minorem, ita A B ad B E, data nempe ad adiunctam. Itaque continuata est A B in E, quemadmodum ad risma iubet, hoc est datis tribus rectis lineis A D D C A B, inuēta est quarta proportionalis B E. Nunc autem ostendendum est, vt R ad S ita esse A E ad B E. Quoniam igitur est vt A D ad D C, ita A B ad B E, erit componendo vt A C ad D C, hoc est vt R ad S, ita A E ad B E cum enim in Resolutione per diuisionem rationis argumentatus fueris, in compositione per compositionem rationis argumentaberis & è contra. Continuata est igitur A B in E, vt A E ad B E rationem habeat vt R ad S quod erat faciendum. A

Problema III. B

Datæ rectæ lineæ. alteram rectam adiungere, vt differentiæ datæ & adiunctæ ad aggregatum earundem rationem habeat datam. Oportet autem datam rtaionem esse minoris ad maius.

Hoc Problema duos casus habet; aut enim data superabit adiunctam, aut adiuncta datam. primum data superet adiunctam.

Resolutio primi casus.



SIt data recta linea B, cui oportet alteram rectam adiungere vt excessus quo data superat adiunctam ad aggregatum earundem, rationem habeat, vt R ad S, quæ ratio sit minoris ad maius. C

Sit iam factum & adiuncta de qua quæritur esto A, ergo excessus quo data superat adiunctam, erit B — A, aggregatum verò earundem B + A & erit

vt R ad S, ita B — A ad B + A.

Quoniam igitur in hac proportione plures termini, non vnus tantum constant, ex datis magnitudinibus, & ea de qua quæritur neque in promptu est quomodo datæ magnitudines à quæsita separari possint, seruata proportione quacunque; idcirco resoluenda est proportio ad æqualitatem, vt factum sub extremis proportionalium terminis, æquale sit facto sub medijs ea igitur resoluta.

R in B + R in A æquabitur S in B — S in A D

Addito vtrique parti S in A

R in B + R in A + S in A æquabitur S in B

Et ablato vtrinque R in B.

R in A + S in A æquabitur S in B — R in B,

Seu quod idem est R + S in A æquabitur S — R in B

Et æqualitate ad proportionem reuocata. erit

vt R + S ad S — R ita B ad A

Hinc

A Hinc

Porisma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita est data ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Compositio primi casus.

SIt data recta linea A B, data autem ratio R ad S minoris ad maius. Oportet ipsi A B alteram rectam adiungere, vt excessus quo data superat adiunctam, ad aggregatum earundem sit, vt R ad S. Ponatur A C æqualis S constituens cum A B angulum quemcunque eaq; duplicetur in E, & sumatur C D æqualis R. itaq; differentia ipsarum A C, C D, erit D E, aggregatum vero A D. iungatur autem D B, eiq; parallela agatur E F occurrens continuatæ A B in F, erit igitur vt A D ad D E ita A B ad B F, hoc est, vt aggregatum terminorum rationis datæ ad differentiam eorundem, ita data ad adiunctam, atque adeo factum erit quemadmodum Porisma docet. Nunc autem demõstrandum est vt R ad S, ita esse differentiam rectarum A B, B F ad A F, idq; per repetitionem vestigiorum resolutionis ducendo initium à fine, ita fit manifestum. Sumatur B G æqualis B F, ergo differentia rectarum A B, B F erit A G. Et quoniam est vt A D ad D E ita A B ad B F, resoluta ad æqualitatẽ proportione, rectangulum sub extremis A D, B F æquale erit rectangulo sub medijs D E, A B. nam cum in fine resolutionis æqualitas ad proportionem sit reuocata; in principio demonstrationis proportio ad æqualitatem, resoluenda est, quod enim postremum est in resolutione, id in compositione primum esse debet. Cum igitur rectangulum A D, B F quod constat rectangulis A C, B F C D, B F, æquale sit rectangulo D E, A B, cui æquatur rectangulum C E, A B minus rectangulo C D, A B, erit rectangulum A C, B F vnà cum rectangulo C D, B F æquale rectangulo C E, A B, minus rectangulo C D, A B. addatur vtrique parti rectangulum C D, A B, quia in resolutione detractum fuit, ergo rectangulum A C, B F vnà cum rectangulis C D B F, C D, A B, æquale erit rectangulo C E, A B; hoc est rectangulo C A B, sunt enim æquales A C, C E. auferatur vtrinque rectangulum A C, B F, additum enim fuit in resolutione; ergo rectangulum C D, B F vnà cum rectangulo C D, A B, hoc est rectangulum C D, A F, æquabitur rectangulo C A B, minus rectangulo A C, B F, hoc est æquabitur rectangulo C A G, & reuocata ad proportionem æqualitate, cum in resolutione proportio ad æqualitatem sit resoluta, erit vt D C ad C A, hoc est vt R ad S, ita A G ad A F. Datæ igitur A B adiecta est B F, quarum differentia ad aggregatum rationem habet vt R ad S. quod erat faciendum.

B (margin, beside "iunctam, ad aggregatum"); 4 sexti (margin, beside "A B in F, erit igitur"); C (margin, beside "A G. Et quoniam"); D (margin, beside "B F, C D, A B, æquale")

Conspectus Resolutionis & Compositionis. A

Principium Resolutionis	*Finis Compositionis*	
R S B—A B+A	hoc est R S AG AF DC CA	
ad æqualitatem	ad proportionem	
R in B + R in A S in B — S in A	hoc est V C D A F + V C D A B V C D B F	hoc est V C A G — V A C B F V C A B
Addatur S in A	auferatur V A C B F	B
R in B + R in A + S in A | S in B	+ V C D A B + V C D B F V A C B F	hoc est V C A B V C E A B
auferatur R in B	addatur V C D A B	
R in A + S in A S in B — R in B seu R + S in A | S — R in B.	+ V C D B F hoc est V A C B F V A D B F	— V C D A B hoc est V C E A B V D E A B
ad proportionem	ad æqualitatem	
R + S S — R B A	A D D E A B B F	C
Finis Resolutionis	*Principium Compositionis*	

Scholium.

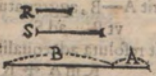
Satis est per repetitionem vestigiorum Resolutionis inuenisse demonstrationem, neque ad eam explicandam necesse est omnino Resolutionis vestigia sequi; potest enim ipsa demonstratio, cognitis iam medijs alia quoque via aliquando clariore, atque adeo elegantiore perfici; sed cum de Resolutione, & Compositione mihi agendum sit, vt proposui à gressibus Resolutionis in Compositionibus seu demonstrationibus non recedam; licet ipsas demonstrationes rudes, & incultas prout ex Resolutionibus nascentur exposuero, sic enim apertius patebit quomodo demonstratio per filium Resolutionis procedat. D

Idem autem casus alia quoque via breuiori, ac faciliori poterit, & resolui, & componi sine vllo à proportione ad æqualitatem transitu; quamuis non appareat quomodo magnitudines datæ à quæsita separari possint, seruata proportione quacunque; nam satis est, vt tres proportionis termini constent ex datis magnitudinibus, quod in Casibus similibus commodè fieri potest; quartus autem terminus etiam si constet ex dato & quæsito, nihil refert.

A

Altera Resolutio eiusdem casus.

Sit data recta linea B, & oportet facere quod imperatum est. Factũ iam sit, & adiuncta de qua quæritur estò A. Excessus igitur quo data superat adiunctam erit B—A aggregatum vero earundem B + A & erit



vt R ad S ita B—A ad B + A

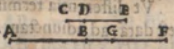
Et componendo erit vt R + S ad S ita B 2 ad B + A.

Porisma.

B Vt aggregatum terminorum rationis datæ, ad terminum secundum, ita est data dupla ad compositam ex data, & adiuncta.

Altera Compositio eiusdem casus.

Sit data recta linea A B, cui oporteat alteram rectam adiungere, vt excessus quo data superat adiunctam, ad compositam ex data, & adiuncta sit, vt C D ad D E, quarum C D sit minor. Duplicetur A B in F, & ponantur in directum C D, D E, & fiat vt C E ad E D, ita A F ad aliam, quæ sit A G, ea maior erit, quam A B dimidia videlicet ipsius A F, quoniam & E D maior est, quàm dimidia C E, ponitur enim C D minor, quàm D E. Itaque factum



C est vt docet Porisma. Rectam autem B G problema efficere, sic demonstrabimus. Quoniam enim vt C E ad E D, ita est A F ad A G, erit diuidendo, vt C D ad D E, ita F G ad G A, cum enim in resolutione factus sit transitus per compositionem rationis, in demonstratione fieri debet per diuisionem rationis, vt dictum est in antecedenti problemate, sed F G est excessus, quo B F, vel A B superat ipsam B G, ergo vt C D ad D E, ita erit excessus, quo A B superat B G, ad compositam ex A B, B G, data videlicet, & adiuncta. Quare factum est quod oportebat.

Conspectus Resolutionis, & Compositionis.

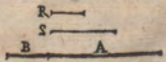
D *Initium Resolutionis* *Finis Compositionis*

	R	S	B—A	B + A	diuidendo	CD	DE	FG	GA
componendo	R + S	S	B 2	B + A		CE	ED	AF	AG

Finis Resolutionis *Initium Compositionis*

Resolutio secundi casus.

Sit data recta linea B, ratio autem, vt R ad S minoris ad maius. Oportet ipsi B alteram rectam adiungere, vt excessus quo adiuncta su-



perat

perat datam, ad aggregatum earundem sit, vt R ad S. A

Sit factum, & adiuncta esto A, excessus igitur, quo adiuncta superat datam, erit $A - B$, aggregatum vero earundem $A + B$, & erit

vt R ad S, ita $A - B$ ad $A + B$.

Et resoluta ad æqualitatem proportione

R in $A +$ R in B æquabitur S in $A -$ S in B

addito vtrique parti S in B

R in $A +$ R in $B +$ S in B æquabitur S in A.

Et detracto R in A

R in $B +$ S in B æquabitur S in $A -$ R in A.

Seu quod idem est $R + S$ in B æquabitur $S - R$ in A.

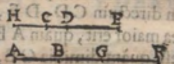
Et æqualitate ad proportionem reuocata, erit B

vt $S - R$ ad $R + S$ ita B ad A.

Porisma.

Vt differentia terminorum rationis datæ, ad aggregatum eorundem, ita est data, ad adiunctam. Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Compositio secundi casus.



Sit data recta linea A B, cui oporteat alteram rectam adiungere, vt excessus quo adiuncta superat datam ad aggregatum earundem sit, vt C D ad D E, minor nempe ad maiorem. Duplicetur E D in H, & fiat vt H C ad C E, ita A B ad aliam, quæ sit B F, hoc est, vt differentia terminorum rationis datæ, ad aggregatum eorundem, ita data ad adiunctã, sic enim Porisma fieri docet. Nunc autem ostendendum est, rectum B F problema efficere. Sumatur B G æqualis B A, igitur B F superat ipsam A B excessu G F. Et quoniam est vt H C ad C E, ita A B ad B F, rectangulum sub medijs C E, A B, hoc est duo rectangula C D A B, D E A B æqualia erunt rectangulo sub extremis H C, B F, hoc est rectangulo H D, B F, minus rectangulo C D, B F, addito vtrique parti rectangulo C D, B F: demptum enim fuit in Resolutione, ergo rectangula C D B F, C D A B, D E A B, æqualia erunt rectangulo H D B F, hoc est D E B F, & ablato vtrinque rectangulo D E A B, seu D E B G, fuit enim additum in resolutione, rectangula C D B F, C D A B, hoc est rectangulum C D A F, æquabitur rectangulo D E B F, minus rectangulo D E B G. hoc est æquabitur rectangulo D E G F, & æqualitate ad proportionem reuocata, fuit enim in resolutione proportio ad æqualitatem resoluta, erit vt C D ad D E, ita G F ad F A, hoc est ita excessus quo B F adiuncta superat A B datam, ad aggregatum earundem. Datæ igitur A B adiuncta est B F vt faciendum erat.

C

D

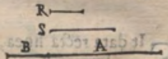
A

Conspectus Resolutionis & Compositionis.

	Initium Resolutionis		*Finis Compositionis*	
	R S A—B A + B		CD DE GF FA	
	ad æqualitatem		ad proportionem	
	R in A + R in B	S in A — S in B	hoc est V CD AF + V CD AB V CD BF	hoc est V DE GF — V DE BG V BE BF
	Addatur S in B		auferatur V DE AB seu V DE BG	
B	R in A + R in B + S in B	S in A	+ V DE AB + V CD AB V CD BF	hoc est V DE BF V HD BF
	auferatur R in A		addatur V CD BF	
	R in B + S in B seu quod idem est R + S in B	S in A—R in A S—R in A	+ V DE AB hoc est V CD AB V CE AB	—V CD BF hoc est V HD BF V HC BF
	ad proportionem		ad æqualitatem	
C	S—R R + S B A		HC CE AB BF	
	Finis Resolutionis		*Initium Compositionis*	

Et hic Casus poterit resolui, & componi, etiam si nullus à proportione ad æqualitatem fieret transitus, hac ratione.

Altera Resolutio secundi casus.



Isdem datis quæratur adiuncta, vt in antecedenti resolutione. erit

vt R ad S ita A—B ad A + B

D Et conuertendo vt S ad R ita A + B ad A—B

Et diuidendo vt S—R ad R ita B 2 ad A—B

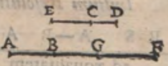
Porisma.

Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum priorem, ita est data dupla ad excessum, quo adiuncta superat datam.

Datur ergo adiuncta de qua quæritur.

Altera

Altera Compositio secundi casus. A



SIt datæ rectæ A B addenda altera recta, vt excessus adiectæ supra datam, ad aggregatum earundem sit, vt C D ad D E. Duplicetur A B in G, & fiat, vt E C ad C D, differentia videlicet terminorum rationis datæ, ad terminum priorem, ita A G ad aliam, quæ sit G F, sic enim Porisma docet. Dico B F Problema efficere. Quoniam enim, vt E C ad C D, ita est A G ad G F, erit componẽdo, vt E D ad D C, ita A F ad F G, & conuertendo, vt C D ad D E, ita G F ad F A. Datæ igitur A B adiecta est B F, cuius excessus G F supra datam A B se habet ad A F, compositam ex data, & adiecta, vt C D ad D E; quod facere oportebat. B

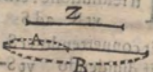
Conspectus Resolutionis, & Compositionis.

Initium Resolutionis	*Finis Compositionis*
R S A — B A + B	C D D E G F F A
conuertendo	conuertendo
S R A + B A — B	E D D C A F F G
diuidendo	componendo
S — R R B 2 A — B	E C C D A G G F C
Finis Resolutionis	*Initium Compositionis*

Problema IV.

Datam rectam lineam in duas partes diuidere, vt partium quadrata, dato quadrato differant. Oportet autem latus quadrati dati minus esse data secunda.

Resolutio.



SIt data recta linea B secanda in duas partes, vt quadratum partis maioris superet quadratum minoris partis quadrato datæ Z. D

Ponatur factum esse, & differentia partium esto A

Corol. I. Probl. I. ergo B + A erit* maior pars dupla, & B — A dupla minor, vnde simpla pars maior erit B $\frac{1}{2}$ + A $\frac{1}{2}$, simpla minor B $\frac{1}{2}$ — A $\frac{1}{2}$. Quadratum autem partis maioris est B Q $\frac{1}{4}$ + A Q $\frac{1}{4}$ + B in A $\frac{1}{2}$, quadratum vero partis minoris est B Q $\frac{1}{4}$ + A Q $\frac{1}{4}$ — B in A $\frac{1}{2}$. ablato igitur quadrato partis minoris à quadrato partis maioris, residuum erit B in A, idq; æquale est Z Q, differunt enim partium quadrata per quadratum Z datæ. ergo æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt   B   Z   A.

Poris-

A

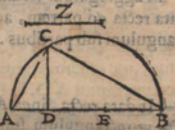
Porisma.

Latus quadrati dati medium proportionale est inter datam rectam, quæ secanda proponitur, & differentiam partium eiusdem.

Datur ergo differentia partium quæsita.

Compositio.

Sit data recta linea A B secanda in duas partes, vt quadratum partis maioris superet quadratũ partis, minoris quadrato datæ Z, quæ minor sit ipsa A B. Describatur in A B semicirculus, in quo



B accomodetur A C æqnalis Z, & à puncto C demittatur in A B perpendicularis G D & secetur D B bifariam in E; differentia igitur partium A E E B erit A D, & ducta C B, angulus A C B in semicirculo rectus erit; quare A C cui æqualis est Z erit* media linea proportionalis inter B A A D, itaque secta est A B in E, prout Porisma docet. Nunc ostendendum est differentiam quadratorum A E E B, æquari quadrato Z. Quoniam igitur proportionales sunt B A A C A D, quadratum mediæ A C æquale erit rectangulo B A D, sed rectangulum B A D comprehensum sub tota B A, & A D differentia partium A E E B, æquale* est differentiæ quadratorum A E E B, ergo & quadratum A C æquale erit eidem differentiæ quadratorum A E E B. Secta est igitur C A B in E vt Problema postulat quod faciendum erat.

Coroll. prop. 8. sexti

Theor. I

Problema V.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium rationem habeat datam.

Resolutio.

Sit data recta linea B secanda in duas partes, vt rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium sit vt R ad S.

D Sit iam secta, & pars ad cuius quadratum datam rationem habet rectangulum sub partibus esto A, ergo pars altera erit B—A, atque erit

vt R ad S, ita B in A — A Q. ad A Q. hoc est ita rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium.

Quare resoluta ad æqualitatem analogia

R in A Q æquabitur S in B in A — S in A Q

Applicentur omnia ad A vt aliqua magnitudo sit omnino data, cui magnitudines incertæ comparabuntur, ergo

R in A æquabitur S in B — S in A

Addito

Addito vtrique parti S in A, vt cognita ab incognitis separentur. A

R in A ✣ S in A æquabitur S in B.

Seu quod idem est, R ✣ S in A æquabitur S in B,

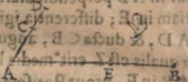
Et reuocata ad proportionem æqualitate, proportionales erunt

R ✣ S S B A.

Porisma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum secundum, ita est data recta ad partem, ad cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum sub partibus. Datur ergo pars quæsita.

Compositio. B



Sit data recta linea A B, quam oportet secare vt rectangulum sub partibus ad quadratum vnius partium rationē habeat vt D C ad C A. Ponantur in directum D C C A, & fiat vt A D ad A C, ita A B ad aliam quæ sit A E, sicut fieri Porismata iubet, ergo rectangulum D A E sub extremis, hoc est duo rectangula D C A E, & C A E, æqualia erunt rectangulo C A B sub medijs. auferatur vtrinque rectangulum C A E, ergo rectangulum D C A E æquale erit rectangulo C A B, minus rectangulo C A E, hoc est æquale erit rectangulo C A E B. Ducantur omnia plana in A E vt fiant solida, in resolutione enim omnia solida depressa sunt ad plana applicatione eidem A E, ergo solidum sub D C & quadratum A E æquale erit solido sub C A A E E B, & reuocata ad proportionem æqualitate, erit vt D C ad C A, ita rectangulum A E B ad quadratum A E. Secta est igitur A B in E, vt rectangulum A E B ad quadratum A E rationem habeat, vt D C ad C A. quod erat faciendum. C

Scholium.

Plures viæ sunt quibus Problemata resoluuntur; aliæ quidem faciles, quæ sua quasi sponte occurrunt, aliæ vero cum aliquo difficultate inueniuntur. Ex facilioribus autem nonnunquam oriuntur demonstrationes, etsi verissimæ, subobscuræ tamen, ac parùm vsitatæ, qualis est superior demonstratio per æqualitatem etiam solidorum procedens; quibus in planorum Problematũ demonstrationibus non est vtendum; vitium enim quodammodo videtur ad planorum Problematum demonstrationes perficiendas solida cõtrahere, hoc est ea per improprium genus demonstrare. Ne igitur in demonstratione plani problematis, solidis vtar, idem Problema aliter resoluam & componam. D

Altera Resolutio eiusdem Problematis.

Sit data recta linea B, quam oportet secare, vt rectangulum sub partibus ad quadratum alterius partis rationem habeat vt R ad S.

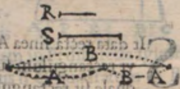
Secta iam sit & pars ad cuius quadratum datam rationē habet rectan-

gulum

A gulum ſub partibus eſto A, quemadmodum poſitum eſt in antecedenti reſolutione, ergo altera pars erit B—A. Quoniam igitur eſt vt R ad S, ita rectangulum ſub partibus ad quadratum alterius partis, erit

vt R ad S ita B in A — AQ ad AQ

& componendo erit, vt R ✢ S ad S, ita B in A ad AQ: Sed B in A ad AQ eſt vt B ad A, ſunt enim eiuſdem altitudinis rectangulum B in A & A quadratum, cùm ſit vtriuſque altitudo A; ergo erit



vt R ✢ S ad S, ita B ad A

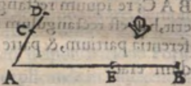
B Poriſma.

Vt aggregatum terminorum rationis datæ ad terminum ſecundum, ita eſt recta data, ad partem ad, cuius quadratum debet habere rationem datam rectangulum ſub partibus.

Illud ipſum eſt, quod per antecedentem reſolutionem inueniebatur. Datur ergo pars quæſita.

Altera Compoſitio eiuſdem Problematis.

Sit data recta linea AB, quam oportet ſecare, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum alterius partis rationem habeat, vt DC



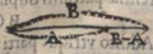
C ad CA. Ponantur in directum ACCD, & fiat, vt AD ad AC, ita AB ad aliam, quæ ſit AE, ſic fieri Poriſma docet, ergo diuidendo erit, vt DC ad CA, ita BE ad EA, ita eſt rectangulum BEA ad quadratum EA, cùm ſint eiuſdem altitudinis EA, ergo vt DC ad CA, ita erit rectangulum BEA ad quadratum EA. Secta eſt igitur AB in E, vt Problema poſtulat. quod erat faciendũ.

Problema VI.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & parte minore æquale ſit rectangulo ſub differentia partium, & parte maiore.

D Reſolutio.

Sit B data recta ſecanda, vt petitur. Ponatur iam factum. & pars maior, de qua quæratur eſto A, ergo B— A erit pars minor, harum partium differentia erit A 2 — B; ſi enim ab A auferatur B—A, remanebit A 2—B. Quoniam igitur rectangulum ſub tota, & parte minori æquale eſt rectangulo ſub differentia partium, & parte maiori.



BQ—B in A æquabitur AQ 2 — B in A

Addatur vtrobique B in A, ergo

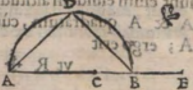
BQ æquabitur AQ 2

Porisma.

Quadratum totius rectæ secandæ duplum est quadrati à maiore parte descripti. Datur ergo maior pars quæsita.

Compositio.

Sit data recta linea A B, quam oporteat secare, vt rectangulum sub tota, & parte minori æquale sit rectangulo sub differentia partiũ, & parte maiori. Describatur in A B semicircu-lus, cuius circumferentia secetur bifariam in D, &



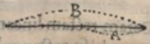
47. primi connectantur A D, D B. quadrata igitur æqualium A D, D B* æqualia erunt quadrato A B, angulus enim A D B in semicirculo rectus est, vnde quadratum A B duplum erit quadrati A D. Fiat ergo A C æqualis A D, & factũ erit quemadmodum Porisma docet: secta est enim A B in C, vt quadratum ipsius A B duplum sit quadrati A C. Nunc ostendendum est eam sectionem Problema efficere. Producatur enim C B in E, vt sit C E æqualis C A, itaque differentia partium A C, C B erit B E. Et quoniam quadratum A B duplum est quadrati A C; hoc est æquale rectangulo E A C, si auferatur commune rectangulum B A C; reliquum rectangulum A B C, reliquo rectangulo E B, A C, æquale erit, hoc est rectangulum sub tota, & parte minori æquale rectangulo sub differentia partium, & parte maiori. Secta est igitur A B in C, & quod faciendum erat.

Problema V I I.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus comprehensum æquale sit ei, quod à differentia partium, fit quadrato.

Resolutio.

Sit data recta linea B secanda vt petitur. Ponatur enim recta, & differentia partium esto A, ergo B



Corol. 1. Probl. 1. + A* erit pars maior dupla, & B — A pars minor dupla. Et quoniam rectangulum sub partibus æquale est quadrato differentiæ partium, rectangulum sub partibus duplis æquale erit quadrato differentiæ partium duplæ: hoc est

B Q — A Q æquabitur A Q 4

Addito vtrique parti A Q, vt quæsitum à dato separetur

B Q æquabitur A Q 5

Porisma.

Quadratum totius secandæ quintuplum est quadrati differentiæ partium. Datur ergo differentia partium quæsita.

Com-

A

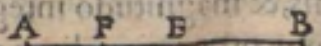
Compositio.

SIt data recta linea AB, quã oportet secare, vt rectangulum sub pedibus æquale sit quadrato differẽtiæ partium. Producatur A B in C, vt B C sit æqualis quintæ parti ipsius A B, & in A C describatur semicirculus A D C, & ex B erigatur ad A C perpendicularis B D, cui æqualis fiat B E, & reliqua E A secetur bifariam in F: differẽtia igitur partium A F, F B erit E B, & cũ sit A B quintupla ipsius B C, quadratum A B quintuplum erit rectanguli A B C, hoc est quadrati B D, vel B E. Secta est igitur A B in F, prout Porisma docet. Rectangulũ autẽ A F B sub partibus æquale
B esse quadrato E B differentiæ partium vt Problema requirit, sic demonstrabo. Quoniam enim quadratum A B quintuplum est quadrati B E, seu æquale est quintuplo quadrati B E, ablato vtrinq; quadrato B E, quadratũ A B minus quadrato B E, *æquale est quadruplo rectangulo A F B, cùm sit B E differẽtia ipsarum A F, F B, ergo quadruplum rectangulum A F B æquabitur quadruplo quadrato B E, & consequenter simplum simplo. Secta est igitur A B in F, vt rectangulum A F B sub partibus æquale sit quadrato E B differentiæ partium; quod faciendum erat. Theor. 3.

Si quis voluerit peracta Problematis resolutione Porisma, quod ex ipsa resolutione deducitur, in formam Theorematis proponere, ac demonstrare; demonstratio fiet per repetitionem vestigiorũ resolutionis, directo ordine non retro-
C grado. Plurimis autem Problematibus potest satisfieri demonstratione Porismatis tantum, præcipuè quando Problema numero explicandum est; exemplũ subijciam quo sit res dilucidior. Itaque Porisma proximè præcedens proponetur in formam Theorematis, & demonstrabitur hac ratione.

Theorema.

Si recta linea secetur, ita vt rectangulum sub partibus comprehensum æquale sit ei, quod à differentia partium fit quadrato, quadratum totius rectæ quintuplum erit quadrati differentiæ partium.



D SEcta sit recta A B in F, ita vt rectangulum A F B æquale sit quadrato differẽtiæ partium A F, F B. Dico quadratum A B quintuplum esse quadrati differẽtiæ ipsarum partium A F, F B: à maiori enim parte, quæ sit F B auferatur F E æqualis F A, reliqua E B erit differentia partium A F, F B. Et quonìam rectangulum A F B ponitur æquale quadrato E B, quadruplum rectãgulum A F B quadruplo quadrato E B æquale erit, sed quadruplum rectangulum A F B * æquale est quadrato A B, minus quadrato E B, ergo quadratũ A B, minus quadrato E B, æquale erit quadruplo quadrato E B, addito vtriq; parti quadrato E B, quadratum A B æquale erit quintuplo quadrato E B, hoc est quadratũ A B, quintuplum erit quadrati E B. quod erat ostendendum. Theor. 3.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, & Compositione Mathematica.

LIBER SECVNDVS.

INTERDVM accidit fractionem magnitudini integræ æquari, eamq. oportere in sua membra resolui; ita vt æqualitas in proportionem transmutetur: id enim plerumq; fieri expedit, ne plena in progressu resolutionis ad solida, vel etiam ad plano-plana ascendant. Nam si fractio plana reducenda esset ad denominationem integram; manente inter partes æqualitate, oporteret omnia plana tùm fractionem, tùm quibus æquatur ipsa fractio ducere in denominatorem fractionis; quo onere, æqualitas quidem non immutaretur, sed plana ad solida, vel ad plano-plana ascenderent, quibus in planorum Problematum resolutionibus, & compositionibus non est vtendum ob rationes in scholio quinti Problematis libri primi allatas. Sci- A re autem oportet, non omnem fractionem posse in sua membra resolui, nisi B eam cuius numerator resolubilis est in duas magnitudines, quæ ductu suo efficiunt ipsum numeratorem. Dicendum igitur est quomodo fractio magnitudini integræ æqualis numeratorem habens resolubilem in duas magnitudines, ductu suo ipsum numeratorem efficientes, resoluatur in sua membra, vt æqualitas in proportionem transmutetur.

Resoluitur dicta fractio in sua membra hac ratione. Denominator fractionis, & magnitudo integra, cui æquatur ipsa fractio, ponantur pro extremis quatuor proportionalium terminis; magnitudines verò, quæ ductu suo efficiũt numeratorem, ponantur pro medijs, vel contra magnitudines numeratorem efficientes, ponantur pro extremis; denominator verò & magnitudo integra pro C medijs, seruata hac conditione, vt primus terminus & secundus sint eiusdem generis, quia magnitudines diuersi generis non possunt inter se comparari. Constitui quatuor proportionales terminos quoniam & si tres etiam possunt constitui, medium pro duobus intelligo, is enim bis sumitur. quæ igitur, vt fiat euidentiora, Proponatur $\frac{B\ Q}{D}$ æquari A, & oporteat fractionem $\frac{B\ Q}{D}$ in sua membra resoluere, vt æqualitas in proportionem transmutetur. Fiant extremi termini D & A, medius vero B, eos autem proportionales esse

ma-

A manifestum est. nam cum sit vt D ad B, ita B ad $\frac{BQ}{D}$, fractio autem $\frac{BQ}{D}$ æqualis A, erit, vt D ad B, ita B ad A. factum est igitur, quod imperabatur. Rursus $\frac{BC}{A}$ æquetur D Q, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A & D Q, medij vero B, & B Q, eos autem proportionales esse manifestum est, nam cum sit vt A ad B, ita B Q ad $\frac{BC}{A}$, & $\frac{BC}{A}$ æqualis D Q, erit vt A ad B, ita B Q ad D Q. factum est igitur, quod oportebat.

Deinde $\frac{B \text{ in } D}{A}$ æquetur G, & sit resoluenda fractio, vt dictum est. Fiant extremi termini A & G, medij vero B & D. Quoniam igitur est, vt A ad B, ita D ad $\frac{B \text{ in } D}{A}$, & fractio $\frac{B \text{ in } D}{A}$ æqualis G, erit vt A ad B, ita D ad G.

Vel contra fiant extremi termini B & D, medij vero A & G. Quoniam
B igitur $\frac{B \text{ in } D}{A}$ ponitur æquari G, ductis omnibus in A, B in D æquabitur G in A, & æqualitate ad proportionem reuocata, erit vt B ad G, ita A ad D. fractio igitur $\frac{B \text{ in } D}{A}$, cui æquabatur G, resoluta est in sua membra, & equalitas transmutata in proportionem, quod faciendum erat. Item $\frac{B \text{ in } D}{A ✢ G}$ equetur F, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A ✢ G & F, medij verò B & D, vel contra fiant extremi B & D, medij vero A ✢ G & F, eos proportionales esse demonstrabimus eadem ratione qua supra.

Amplius $\frac{B \text{ in } D \text{ in } G}{A}$ equetur F Q, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A, & F Q, medij vero B, & D in G, vel G, & B in D, vel etiam D & B in G. Quoniam igitur est, vt A ad B, ita D in G ad $\frac{B \text{ in } D \text{ in } G}{A}$ ipsaque fractio equalis F Q, erit vt A ad B, ita D in G ad F Q, & reliqua demon-
C strabuntur, vt supra. Similiter si medij termini ponantur pro extremis, extremi vero pro medijs, iidem proportionales erunt.

Item $\frac{B \text{ in } D + G \text{ in } D}{A}$ equetur F, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini A, & F, medij vero B ✢ G & D, vel contra. Quoniam igitur est, vt A ad B ✢ G, ita D ad $\frac{B \text{ in } D + G \text{ in } D}{A}$ eaque fractio equalis est F erit vt A ad B ✢ G ita D ad F. Quare factum est quod imperabatur.

Sed $\frac{BQ - DQ}{G}$ æquetur A, & oporteat iussum facere. Ponantur pro extremis terminis G & A; pro medijs vero B ✢ D & B — D, vel contra. Quoniam igitur est, vt G ad B ✢ D, ita B — D ad $\frac{BQ - DQ}{G}$, ipsaque fractio æqualis est A; erit vt G ad B ✢ D, ita B — D ad A. Quare factum est quod oportuit.

Vel $\frac{BQ + DQ + B \text{ in } D \, 2}{A}$ æquetur F, & oporteat facere, quod imperatum est.
D Fiant extremi termini A & F, medius verò B ✢ D, eos autem proportionales esse manifestum est, nam cum sit, vt A ad B ✢ D, ita B ✢ D ad $\frac{BQ + DQ + B \text{ in } D \, 2}{A}$, ipsaque fractio equalis sit F, erit vt A ad B ✢ D, ita B ✢ D ad F. Factum est igitur quod oportebat.

Denique $\frac{BQ \text{ in } DQ}{GQ}$ equetur A Q, & oporteat facere, quod imperatum est. Fiant extremi termini G Q, & A Q medius vero B in D. Quoniam igitur est, vt G Q ad B in D, ita B in D ad $\frac{BQ \text{ in } DQ}{GQ}$, ipsaque fractio equalis est A Q, erit vt G Q ad B in D, ita B in D, ad A Q. factum est igitur quod imperabatur.

Vel fiant extremi termini, vt prius G Q, & A Q, medij verò B Q, & D Q. A
Eadem ratione ostendetur, vt G Q ad B Q, ita esse D Q ad A Q. factum est igitur quod oportebat.

Item $\frac{D \text{ in } G Q}{D - G}$ æquetur B Q, & oporteat iussum facere. Fiant extremi termini D — G, & B Q, medij verò D, & G Q. eadem ratione qua supra ostendetur, vt D — G ad D, ita esse G Q ad B Q.

Vel fiant medij termini G, & D in G. Quoniam igitur est, vt D — G ad G, ita D in G ad $\frac{D \text{ in } G Q}{D - G}$ ipsaque fractio æqualis est B Q; erit vt D — G ad G, ita D in G ad B Q: factum est igitur quod oportebat.

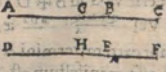
Eadem ratione omnes aliæ fractiones, quæ magnitudini integræ æquantur, numeratoremq. habent resolubilem in duas magnitudines, quæ ductu suo efficiunt ipsum numeratorem; poterunt in sua membra resolui, vt æqualitas in B
proportionem transmutetur. Atque hæc quidem de transmutatione æqualitatis in proportionem per resolutionem fractionis sufficiant.

Fractiones autem quarum numerator non est resolubilis, vt dictum est, non possunt in sua membra resolui; poterit tamen æqualitas in proportionẽ transmutari hac ratione. Denominator fractionis, & magnitudo integra, cui ipsa fractio æquatur, ponantur pro extremis trium proportionalium terminis; latus vero vniuersale numeratoris, ponatur pro medio. Exempli gratia proponatur $\frac{B \text{ in } D + F \text{ in } G}{H}$ æquari A, & oporteat æqualitatem in proportionem transmutare. Ponantur pro extremis terminis H & A; pro medio vero ponatur L. V. B in D ✢ F in G. Eos autem proportionales esse manifestum est; nam cum sit vt H ad L. V. B in D ✢ F in G, ita idem L. V. B in D ✢ F in G ad G
$\frac{B \text{ in } D + F \text{ in } G}{H}$ ipsaque fractio æqualis sit A, erit vt H ad L. V. B in D ✢ F in G, ita idem L. V, B in D ✢ F in G, ad A, factum est igitur quod oportebat.

Theorema I.

Si secentur duæ rectæ lineæ æquales, ita vt rectangulum sub partibus vnius æquale sit rectangulo sub partibus alterius; partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior videlicet maiori, minor minori.

Secentur duæ rectæ A B, C D æquales in G H, sitq. rectangulum A G B æquale rectangulo C H D. Dico partes A G, G B partibus C H H D æquales esse, maiorem videlicet maiori, minorem minori. Secetur enim vtraque A B, C D bifariam in punctis E F. Quoniam igitur sectæ sunt



D

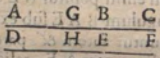
A B, C D in æqualia & non æqualia, rectangulum A G B vna cum qua-
5 secundi. drato E G* æquale est quadrato A E. Similiter & rectangulum C H D vna
5 secundi. cum quadrato F H* æquale quadrato C F, quæ quidem quadrata A E, C F æqualia sunt cum sint æquales rectæ A E, C F, ergo rectangulum A G B vnà cum quadrato E G æquale erit rectangulo C H D vnà cum quadrato F H; auferantur æqualia rectangula A G B, C H D, ergo reliquum quadratum E G

 reli-

A reliquo quadrato F H æquale erit, vnde & recta E G æqualis rectæ F H, & per additionem, vel ſubductionem æqualium æqualibus, erit A G æqualis C H, & G B æqualis H D, quod erat oſtendendum.

Theorema II.

Si duæ rectæ lineæ æquales ſectæ fuerint, atque quadrata partium vnius ſimul ſumpta, æqualia fuerint quadratis partium alterius ſimul ſumptis, partes vnius partibus alterius æquales erunt, maior maiori, minor minori.

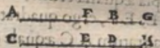


DVæ rectæ A B, C D æquales ſecentur in
B punctis G H, & ſint quadrata A G, G B æqualia quadratis C H, H D. Dico partes A G, G B partibus C H, H D æquales eſſe maiorem maiori, minorem minori. Secetur enim vtraque A B, C D bifariam in E F. Quoniam igitur quadrata A G, G B * dupla ſunt quadratorum A E, E G, & quadrata C H, H D * dupla quadratorum C F, F H, erunt quadrata A E, E G quadratis C F, F H æqualia; ſed quadratum A E æquale eſt quadrato C F, ergo & reliquum quadratum E G reliquo quadrato F H æquale erit; vnde & recta E G æqualis rectæ F H; quare per additionem æqualium æqualibus, erit & A G æqualis C H, & reliqua G B æqualis reliquæ H D. Quare conſtat propoſitum.

9 ſecundi.
9 ſecundi.

C
Theorema III.

Si à duabus rectis lineis abſcindantur partes æquales, & rectangulum ſub tota, & parte reliqua vnius æquale ſit rectangulo ſub tota, & reliqua parte alterius; tota toti, & reliqua pars, reliquæ æqualis erit.

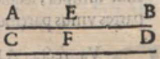


A Rectis A B, C D abſcindantur partes æquales B E, D F, ſitq. rectangulũ B A E æquale rectãgulo D C F. Dico A B, C D æquales eſſe, & æquales A E, C F. Secentur enim E B, F D bifariam in G H. Quoniã igitur rectangulum B A E ponitur æquale rectangulo D C F, & quadratum E G æquale eſt quadrato F H, rectan-
D gulum B A E vnà cum quadrato E G æquale erit rectangulo D C F vnà cum quadrato F H; ſed quoniam ſectæ ſunt E B, F D bifariam, & ipſis in rectum adiectæ ſunt E A, F C, rectangulum B A E vnà cum quadrato E G,* æquale eſt quadrato A G. ſimiliter, & rectangulum D C F vnà cum quadrato F H * æquale quadrato C H; quadratum igitur A G æquale erit quadrato C H: vnde & recta A G æqualis rectæ C H, & additis æqualibus G B, H D tota A B æqualis erit toti C D, vel ablatis æqualibus E G, F H, reliqua E A, reliquæ F C æqualis erit. quod erat oſtendendum.

6 ſecundi.
6 ſecundi.

Theorema IV.

Si à duabus rectis lineis abscindantur partes æquales, & sit reliqua pars primæ ad reliquam secundæ, vt tota secunda ad totam primam; reliquæ quoque partes æquales erunt.

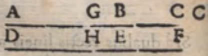


A Rectis AB, CD abscindantur partes æquales BE, DF; sitque AE ad CF, vt CD ad AB. Dico AE, CF æquales esse. Quoniam enim ponitur AE ad CF, vt CD ad AB; re-
16 sexti ctangulum BAE sub extremis* æquale erit rectangulo DCF sub medijs; ponuntur autem & partes EB, FD æquales, ergo ex antecedente Theoremate reliqua pars AE, reliquæ CF æqualis erit.

Theorema V.

Si duo rectangula fuerint æqualia; fuerint autem & quadrata laterum primi æqualia quadratis laterum secundi. Latera primi lateribus secundi æqualia erunt, maius videlicet maiori, minus minori.

Theorema hoc demonstraui in libro variorum hic quoque eamdem demonstrationem transferam.



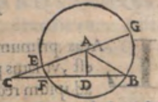
SInt æqualia rectangula ABC, DEF, & æqualia quoque quadrata AB, BC simul sumpta quadratis DE, EF simul sumptis. Dico rectas AB, BC rectis DE, EF æquales esse, maiorem videlicet maiori, minorem minori.

Quoniam enim ponuntur æqualia rectangula ABC, DEF, ea quoque dupla æqualia erunt, sed & quadrata AB, BC ponuntur æqualia quadratis
4 secundi DE, EF, ergo quadrata AB, BC vna cum duplo rectangulo ABC, hoc* est quadratum AC æquale erit quadratis DE, EF vnà cum duplo rectangulo
4 secundi DEF, hoc est* æquale erit quadrato DF; quare, & recta AC æqualis erit, rectæ DF. Secentur autem ipsæ AC, DF bifariam in G, & H. erunt igi-
5 secundi tur AG, DH æquales, & æqualia eorum quadrata, sed quadratum AG* æquale est rectangulo ABC vnà cum quadrato GB, & quadratum DH* æquale rectangulo DEF vnà cum quadrato HE, ergo rectangulum ABC vna cum quadrato GB, æquale erit rectangulo DEF, vna cum quadrato HE, demptis æqualibus rectangulis ABC, DEF, reliquum quadratum GB, reliquo quadrato HE æquale erit, vnde & recta GB æqualis rectæ HE, & per additionem, & subductionem æqualium æqualibus erit AB æqualis DE, & BC æqualis EF, quod erat ostendendum.

A

Theorema VI.

Rectangulum sub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem, æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base.



SIt triangulum D B C, in quo perpendicularis A D secet basim B C in duo segmenta B D, D C, & cētro A interuallo A B vnius crurum describatur circulus secans alterum crus A C etiam productum hinc inde in punctis E G; basim vero B C in F. crurum igitur A B, A C differentia erit C E; aggregatum verò
B G C, differentia autem segmentorum A D, D C erit C F, * sunt enim B D, D F æquales. Dico rectangulum E C G æquale esse rectangulo F C B. hoc manifestum est ex propos. 36. & 35. tertij elementorum. * 3 tertij

Theorema VII.

Differentia crurum trianguli se habet ad differentiam segmentorum basis, vt basis ad aggregatum crurum.

REsumatur antecedentis Theorematis figura. Dico E C ad C F esse vt C B ad C G. Quoniam enim rectangulum E C G * æquale est * 36. & 35. tertij
C rectangulo F C B, * proportionales erunt E C, C F, C B, C G. * 16 sexti
quare constat propositum.

Problema I.

Dato quadrato, æquale rectangulum inuenire, cuius latera datam teneant rationem.

SIt datum B quadratum, cui æquale oporteat rectangulum inuenire habens latera in ratione, vt R ad S. Sit iam inuentum rectangulum illud, eiusque latus primum esto A, ergo latus secundum erit $\frac{S \text{ in } A}{R}$; est enim vt R ad S, ita A latus primum ad latus secundum. At rectangulum sub late-
D ribus ponitur æquale B quadrato, ergo

$$\frac{S \text{ in } AQ}{R} \text{ æquabitur } BQ$$

Resoluatur fractio $\frac{S \text{ in } AQ}{R}$ in sua membra, vt æqualitas in proportionem trāsmutetur, quemadmodum in principio huius libri docuimus, ergo proportionales erunt

R S AQ BQ

Et conuertendo proportionales erunt

S R BQ AQ

Po-

I Poriſma. A

Vt terminus ſecundus rationis datæ ad terminum primum, ita eſt quadratum datum ad quadratum lateris primi rectanguli de quo quæritur. Datur ergo latus primum rectanguli quæſiti.

Alia eiuſdem Problematis Reſolutio.

LAtus primum rectanguli eſto A. Quoniam igitur in omni rectangulo eſt, vt latus primum ad latus ſecundum, ita quadratum lateris primi ad ipſum rectangulum; ſunt enim eiuſdem altitudinis, cum ſit vtriuſq; altitudo latus primum, latus autem primum rectanguli quæſiti ad latus ſecundum ponitur vt R ad S; ergo vt R ad S ita erit A Q ad rectangulum quæſitum, B hoc eſt ad B Q: huic enim ponitur æquale rectangulum illud, & conuertendo erit

vt S ad R ita BQ ad AQ.

Datur ergo latus primum rectanguli quæſiti, idq. in eadem ratione atque in antecedenti Reſolutione.

Compoſitio.

SIt dato quadrato A, æquale rectangulum inueniendũ, cuius latera ſint, vt R ad S. Fiat vt S ad R, ita quadratum A ad aliud quadratum, cuius latus ſit B C, deinde vt R ad S, ita fiat B C ad aliam, quæ ſit C D, & ex B C, C D fiat rectangulum B D. Sic fieri docet vtraque reſolutio. Demonſtratio autem fiet per earum regreſſum; idem enim eſt vtriuſque reſolutionis progreſſus. Quoniam igitur eſt vt S ad R, ita quadratum A ad quadratum B C, ex C

conſtructione, erit conuertendo, vt R ad S, hoc eſt vt B C ad C D, ita quadratum B C ad quadratum A; ſed vt B C ad C D, ita eſt quadratum B C ad rectangulum B D; cũm ſint eiuſdem altitudinis B C, ergo rectangulum B D quadrato A æquale erit, atque eſt B C ad C D, vt R ad S, ex conſtructione. Inuentum eſt igitur rectangulum B D, quale inueniendum proponebatur.

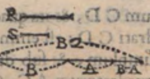
Problema II. D

Datam rectam lineam ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta, ad quadratum differentiæ partium, rationem habeant datam. Oportet autem datam rationem eſſe maioris ad minus.

Reſolutio.

SIt data recta linea B 2 ſecanda in duas partes, quarum quadrata ſimul ſumpta, ad quadratum differentiæ partium, rationem habeant

A vt R ad S; maioris nempe ad minus.



Sit iam secta, vt petitur, & dimidia differentia partium esto A, ergo B + A erit pars maior, & B — A pars minor, harum partium quadrata simul sumpta ad quadratum differentiæ partium, rationem habent, vt R ad S, sed quadratum ex B + A est B Q + A Q + B in A 2; quadratum verò ex B — A est B Q + A Q — B in A 2. eorum summa est B Q 2 + A Q 2. Quadratum autem totius differentiæ partium est A Q 4, dimidia enim differentia ponitur A; itaque tota differentia est A 2, eius quadratum A Q 4, ergo erit Corol. 2. Probl. 1. libr. 2.

B vt R ad S ita B Q 2 + A Q 2, ad A Q 4

Et duplatis antecedentibus, erit vt R 2, ad S, ita B Q 4 + A Q 4, ad A Q 4, & ita B Q + A Q ad A Q.

Est enim eadem ratio simpli ad simplum, quæ quadrupli ad quadruplum. denique diuidendo erit

vt R 2 — S ad S ita B Q ad A Q.

Porisma.

Vt excessus quo primus rationis datæ terminus duplus superat secundum, ad ipsum secundum, ita est quadratum dimidiæ datæ, ad quadratum dimidiæ differentiæ partium.

C Datur ergo dimidia differentia partium, de qua quæritur.

Compositio.

Sit data recta linea A B secanda in duas partes, quarum quadrata simul sumpta, ad quadratum differentiæ partium sint, vt E F ad F G, quarum E F sit maior. Duplicetur F E in H, & in F H describatur semicirculus, in quo erigatur ex G perpendicularis G K, vsque ad circumferentiam: deinde secetur A B bitariam in C, & fiat vt H G ad G K, ita A C ad aliam, quæ sit C D. Secta est igitur A B sicuti Porisma docet. Nam cum sit H G ad G K, vt A C ad C D, erit

D & quadratum H G ad quadratum G K, sicut quadratum A C ad quadratum C D. Sed quadratum H G ad quadratum G K est vt H G ad G F, ergo vt H G ad G F, ita erit quadratum A C ad quadratum C D; quod Porisma requirit. Nunc ostendendum est, quadrata partium A D, D B ad quadratum differentiæ earumdem, rationem habere, vt E F ad F G. id autem ex resolutionis regressu, ita fit manifestum.

Ponatur ipsi C D æqualis C I, & cum sint æquales C B, C A fiunt æquales, & reliquæ B D, A I, vnde differentia partium A D, D B erit I D. Et quoniam ostensum est, vt H G ad G F, ita esse quadratum A C ad quadratum A D, erit componendo, vt H F ad F G, ita quadrata A C, C D ad quadratum

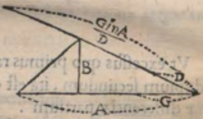
tum C D, & ita quadruplum quadratorum A C, C D ad quadruplum quadrati C D; est enim eadem ratio quadrupli ad quadruplum, quæ simpli ad simplum, & sub duplatis antecedentibus erit, vt E F ad F G, ita duplum quadratorum A C, C D ad quadruplum quadrati C D, hoc est ad quadratum I D; sed cum A B secta sit in æqualia in C, & non æqualia in D, quadrata A D, D B, * dupla sunt quadratorum A C, C D, ergo vt E F ad F G, ita erunt quadrata A D, D B ad quadratum I D. Secta est igitur A B data in D, vt problema postulat, quod erat faciendum. A

9. secundi

Problema I I I.

Data perpendiculari, differentia crurum trianguli, & differentia segmentorum basis. inuenire triangulum. B

Resolutio.



Sit data perpendicularis trianguli B, differentia crurum D, & differentia segmentorum basis G. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur inuentum esse & basis ipsius trianguli esto A. Quoniam igitur est, vt D ad G, ita A ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$ erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ aggregatum crurum, est * enim, vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum. C

Theor. 7. eius

Et quoniam quadratum aggregati crurum vnà cum quadrato differentiæ eorumdem * dupla sunt quadratorum è cruribus, ergo

Theor. 4. primi

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ ✠ DQ æquabuntur quadratis crurum bis.

Quadrata autem crurum bis * æqualia sunt quadratis segmentorum bis, plus quadrato perpendicularis quater, ergo

47. primi

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ ✠ DQ æquabuntur quadratis segmentorum bis plus BQ4

Sed quadrata segmentorum bis * æqualia sunt quadrato basis vnà cum quadrato differentiæ segmentorum basis, ergo

Theor. 4. primi

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ ✠ DQ æquabuntur AQ † GQ ✠ BQ4. D

Auferantur vtrinque AQ, & DQ, vt cognita ab incognitis separentur, ergo

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ — AQ æquabitur BQ 4 ✠ GQ — DQ

Hoc est $\frac{GQ \text{ in } AQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur BQ 4 † GQ — DQ, est enim $\frac{DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ idem quod AQ; nam AQ ductum in DQ, eidemque DQ applicatum nullam excipit alterationem, quoniam quod superefficit ductio, idem resoluit applicatio.

Seu quod idem est $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur BQ 4 † GQ — DQ

Resoluatur fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ in sua membra, ita vt æqualitas in pro-

por-

A portionem transmutetur, vt in principio huius libri docuimus, quo facto proportionalia erunt plana.

$$GQ - DQ \quad BQ\,4 + GQ - DQ \quad DQ \quad AQ$$

Atque eorum radices proportionales erunt.

$$L.V.GQ - DQ,\ L.V.BQ\,4. + GQ - DQ,\ D,\ A$$

Porisma.

Vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis trianguli superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum prædicto quadratorum excessu; ita est differentia crurum, ad basim.

B Datur ergo quæsita trianguli basis.

Ex Porismate apparet, differentiam segmentorum basis maiorem esse differentia crurum, eo quod quadratum differentiæ segmentorum maius est quadrato differentiæ crurum.

Similiter apparet, priorem rectam in Porismate nominatam ad posteriorem, minorem rationem habere quàm differentiam crurũ ad differentiã segmentorũ basis; Porisma enim indicat, priorem rectam ad posteriorẽ, se habere vt differentia crurum, ad basim. Hæc omnia demonstranda sunt, atq; Problemati præfigendæ determinationes; ne data fortuitò, vel etiam de industria exponantur, ex quibus Problema construi non posset.

C

Lemma I.

Differentia segmentorum basis trianguli maior est quàm differentia crurum.

IN triangulo A B C perpendicularis A D, secet basim in duo segmenta B D, D C, & centro A interuallo A B vnius crurũ describatur circulus secans crus A C, etiam si opus fuerit productũ in E, basim verò B C etiã productam in F; crurum igitur A B, A C differentia erit E C, differentia vero segmentorum B D, D C erit F C, sunt enim B D, D F* æquales. Dico F C maiorem esse quàm E C, nã cùm recta A C transeat per centrũ, basis verò B C secus, recta F C *maior est quàm C E, quod erat ostendendum. 3 tertij

D

8 tertij & 7 tertij

Lemma II.

IN omni triangulo recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorũ basis superat quadratum differentiæ crurũ, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodẽ quadratorum excessu, minorem rationẽ habet, quàm differentia crurum ad differentiã segmentorum basis.

Esto triangulum A B C, in quo perpendicularis A D: & centro A, interuallo A B cruris minoris, describatur circulus secans basim trianguli in E, crus maius

ius in G, differentia igitur segmentorum B D, DC erit E C; differentia vero crurum BA, AC erit GC. Deinde ex G erigatur perpendicularis G H, in qua ponatur C K æqualis C E, & sumatur G I æqualis G K, & fiat G H dupla ipsius A D, & iungatur I H. Quadratum igitur C K hoc est CE superat quadratum G C quadrato G K, vel G I, & quadratum I H æquale est quadratis G H, G I: hoc est quadrato perpendicularis duplæ, & excessui quadratorum E C, G C. Dico igitur G I ad I H minorem ratione habere quam G C ad C E. Producatur enim C A vsq; ad circumferentiã circuli in F. Quoniam igitur quadrata F C, C G * æqualia sunt duplo quadratorum F A, A C, duplum autem quadratorum F A, A C duplum autem quadratorum F A, A C hoc est B A, A C * æquale est duplo quadratorum B D, D C vnà cum quadruplo quadrati A D; ideo quadrata F C, C G, æqualia erunt duplo quadratorum B D, D C vnà cum quadruplo quadrati A D, hoc est vna cum quadrato H G, sed duplum quadratorum B D, D C * æquale est quadratis B C, C E, ergo quadrata F C, C G æqualia erunt quadratis B C, C E, H G, auferantur vtrinque quadrata B C, C G, ergo quadratũ F C minus quadrato B C æquale erit quadratis H G, C E, minus quadrato C G, sed quadratum C E minus quadrato C G hoc est quadratum C K, minus quadrato C G. idem valet, quod quadratum G K, vel G I; ergo quadratum F C, minus quadrato C B, æquabitur quadratis H G, G I hoc est quadrato H I.

Theor. 4 primi

47 primi

Theor. 4 primi

Et quoniã est E C, vel C K ad C G, vt C F ad C B, erit & quadratum C K ad quadratum C G, vt quadr. C F ad quadratũ C B; & diuidendo, vt quadratũ C K, minus quadrato C G, hoc est, vt quadratũ G K, vel G I ad quadratum C G, ita erit quadratum F C, minus quadrato C B, ad quadratũ C B; sed quadratũ F C, minus quadrato C B, ostensum est æquale quadrato H I, ergo vt quadratũ G I ad quadratũ G C, ita erit quadratũ H I ad quadratũ C B, & permutando, vt quadratũ G I ad quadratũ I H, ita erit quadratũ G C ad quadratũ C B, & consequenter, vt G I ad I H, ita G C ad C B, sed G C ad C B minorẽ rationẽ habet, quàm eadẽ G C ad C E, ergo & G I ad I H minorẽ rationem habebit, quàm G C ad C E, quod erat ostendendum.

Hæc demonstratio procedit per resolutionis filum, directo tamen ordine, non retrogrado; hic enim non ostenditur constructio Problematis, sed proposito Theoremate, conclusio eius demonstratur; Porismata enim, quæ ex resolutionibus Problematum deducuntur in formam Theorematis proposita, eodem demonstrantur ordine, quo ipsa Problemata resoluuntur; vt memorauimus in Scholio Theorematis, quod Problema septimum primi libri subsequitur.

Demonstratis igitur quæ ad determinationem Problematis pertinent, Problema ita determinandum erit.

A

Determinatio I.

OPortebit, differentiam segmentorum basis maiorem esse differentia crurum.

Determinatio II.

OPortebit quoque, rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vna cum eodem quadratorum excessu, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis. Sed in simpliciorem formam potest hæc secunda determinatio ita reduci.

B

Oportebit quoque, duplam perpendicularem maiorem rationem habere ad rectam, cuius quadratum æquale est prædicto quadratorum excessui, quàm eamdem rectam, ad differentiam crurum. Huius autem reductionis demonstratio ita se habet.

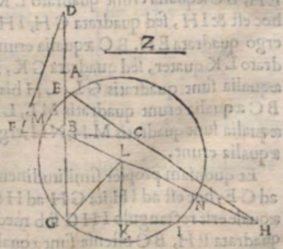
Quoniam enim ostensum est, G I ad I H minorem rationem habere, quàm G C ad C E; conuertendo H I ad I G* maiorem rationem habebit, quàm E C ad C G, & consequenter quadratum H I ad quadratum I G, maiorem rationem habebit, quàm quadratum E C ad quadratum C G & diuidendo quadratum H I, minus quadrato I G hoc est quadratum H G ad quadratum G I maiorē rationem habebit, quàm quadratum E C, minus quadrato C G, hoc est, quàm quadratum C K, minus quadrato C G; seu quod idem est, quàm quadratum I G ad quadratum G C. vnde & recta H G ad rectam G I maiorem habebit rationem, quàm eadem G I ad G C. quare constat determinatio.

C

Compositio Problematis.

SIt data perpendicularis trianguli A B; differentia crurum B C, & differentia segmentorū basis Z. Oportet inuenire triangulū. Inclinentur ad rectos angulos A B BC, ipsaque BA duplicetur in D, & in eam etiam si opus fuerit producta ponatur C E æqualis Z. est autē Z maior, quàm BC ex determinatione prima; quadratū igitur E C superat quadratum B C quadrato E B; itaq; recta E B ponenda est pro prima quatuor proportionalium. Sic Porisma iubet. Deinde, producta C B in F, vt sit B F æqualis B E iungatur F D. quadratum igitur F E æquale

D



le est quadratis B D, B F, hoc est, quadrato perpendicularis duplæ, & quadrato B E, quod est excessus quadratorum E C, B C; itaque recta F D debet fieri secunda quattuor proportionalium tertia B C, & quærenda est quarta. sic habetur ex Porismate. Producatur igitur E B in G, vt sit E G æqualis D F ipsi autem B C parallela agatur G H occurrens E C continuatæ in H. vt igitur E B ad E G, ita erit B C ad G H; atque adeo inuenta est quarta proportionalis G H; ea debet fieri basis trianguli construendi, ex præcepto Porismatis. ab ipsa igitur G H abscindatur H I æqualis Z. est autem Z minor, quàm G H; nam cum sit E B ad E G sicut B C ad G H, E B autem ad E G, ex determinatione minorem rationem habet, quam B C ad Z, ergo & B C
8 quinti ad G H minorem rationem habet quàm eadem B C ad Z, vnde Z* minor est, quàm G H. Denique secetur I G bifariam, & ad rectos angulos in K à recta K L æquali ipsi B A, & iunctis G L, L H constitutum erit triangulum L G H, quemadmodum Porisma docet. est enim vt E B ad E G, ita B C ad G H, hoc est vt recta, cuius quadratum æquale est excessui quadratorum E C, B C ad rectam, cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem excessu quadratorum, ita est differentia crurum ad basim. Nunc ostendendum est, in eo triangulo esse ea quæ requiruntur.

Primum perpendicularis L K æqualis est A B ex constructione. deinde I H differentia segmentorum basis G K, K H æqualis Z, pariter ex constructione; superest igitur, vt differentia crurum L G, L H æquetur ipsi B C; id autem repetendo resolutionis vestigia, ita fiet manifestum.

Centro L interuallo L G describatur circulus secans H L continuatam in punctis M N. differentia igitur crurum L G, L H erit H N, & circulus M G N
3 tertij transibit per I, sunt enim G K, K I* æquales, & L K perpendicularis est ipsi
47 primi G I. Quoniam igitur quadratum E H, minus quadrato H G* æquale est quadrato E G, vel D F, hoc est* quadratis D B, B F, seu quod idem est quadrato L K
47 primi quater, & quadrato B E, hoc* est & quadrato E C minus quadrato B C. additis vtrobique quadratis G H, B C cùm sint dempta in resolutione; quadrata E H, B C æqualia erunt quadrato L K quater vnà cum quadratis G H, & E C,
Theor. 4 primi hoc est & I H, sed quadrata G H, I H* æqualia sunt quadratis G K, K H bis; ergo quadrata E H, B C æqualia erunt quadratis G K, K H bis vnà cum qua-
47 primi drato L K quater, sed quadrata G K, K H bis vnà cum quadrato L K quater* æqualia sunt quadratis G L, L H bis, seu M L, L H bis; ergo quadrata E H,
Theor. 4 primi B C æqualia erunt quadratis M L, L H bis, quadrata autem M L, L H bis,* æqualia sunt quadratis M H, N H, ergo quadrata E H, B C quadratis M H, N H æqualia erunt.

Et quoniam propter similitudinem triangulorum E C B, E H G est vt B C
36 tertij ad C E, hoc est ad I H, ita G H ad H E, rectangulum sub extremis B C, H E æquale erit rectangulo I H G sub medijs, hoc est* rectangulo M H N, sed & quadrata E H, B C ostensa sunt æqualia quadratis M H, H N ergo M H ipsi
Theor. 5 huius E H* æqualis erit, & N H ipsi B C. quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L G H, &c. quod faciendum erat.

CON-

A

CONSPECTVS RESOLVTIONIS, ET COMPOSITIONIS.

Initium Resolutionis. Finis Compositionis.

VBC, HE | hoc est V MH N / V I H G

D   G   A $\frac{G \text{ in } A}{D}$ BC   hoc est I H CE   GH   HE

B Et 9 m. quad. ex $\frac{G \text{ in } A}{D}$ plus quad. ex. D — † 9 B C / ergo 9 E H | † 9 N H / 9 M H

Theo. 4. pr. * dupla sunt quadratorum à cruribus — † 9 L H 2 / sed 9 L G 2 | † 9 N H / 9 M H Theo. 4. pr.

Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ \dagger DQ}{DQ}$ æqualia erunt quadratis crurum bis — † 9 B C / ergo 9 E H | † 9 L H 2 / 9 G L 2

47 pr. Sed quadrata crurũ bis* æqualia sũt quadratis segmẽtorũ bis vnà cũ quadrato ꝑpẽdicularis quater — † 9 L K 4 / † 9 K H 2 / sed 9 G K 2 | † 9 L H 2 / 9 G L 2 47 primi

Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ \dagger DQ}{DQ}$ æqu. quadratis segmẽtorũ bis plus BQ 4 — † 9 B C / ergo 9 E H | † 9 L K 4 / † 9 KH 2 / 9 GK 2

C Sed quadrata segmẽtorũ bis æqualia sũt quad. basis plus quad. differentiæ segmentorum (Theo. 4. pr.) — † 9 I H / sed 9 G H | † 9 K H 2 / 9 G K 2 Th. 4. pr.

Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} \dagger DQ$ æqu. AQ † GQ † BQ4 — † 9 B C / 9 E H | hoc est / † 9 I H / † 9 E C / † 9 G H / 9 L K 4

auferatur vtrinque AQ, & DQ | addantur quadrata G H, & B C

Ergo $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ — AQ æqu. BQ4 † GQ — DQ | — 9 B C / hoc est † 9 E C / † 9 E B

hoc ẽ $\frac{GQ \text{ in } AQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æq. BQ4 † GQ — DQ | seu 9 L K 4

D seu $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æqu. B Q4 † G Q — DQ — 9 G H / 9 E H | † 9 B F / hoc est 9 D B 47 primi / vel 9 D F / A — 9 E G 47 primi

Resol. fract. GQ — DQ, BQ4 † GQ — DQ, DQ AQ

L.V. GQ — DQ, L.V. BQ4 † GQ — DQ, D A — Initium Compositionis

Finis Resolutionis.

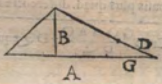
Scholium.

VLtima fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ respondet in compositione quadrato E G, A
nam cùm sit, vt D Q ad G Q — D Q, ita A Q ad $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$, quod quidem in compositione est, vt quadratum B C ad quadratum E C minus quadrato B C; ita quadratum G H ad quadratum E G; quadratum igitur E G idem est, quod fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$.

Similiter fractio $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ$ respondet in compositione quadrato E G; nam cùm sit, vt D Q ad G Q, ita A Q ad $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, quod est in compositione, vt quadratum B C ad quadratum E C, ita quadratum G H ad quadratum E H, erit quadratum E H idem quod fractio $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, & consequenter $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ$ respondebit in compositione quadrato E H, minus B
quadrato G H; hoc est respondebit quadrato E G, quemadmodum & vltima fractio $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$.

Demonstratio autem sumit initium ab æqualitate quæ est inter fractionem $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ$, & $BQ\,4 + GQ - DQ$, non autem à proportione, inquam per resolutionem fractionis transmutata fuit ipsa æqualitas, desijtque resolutio Problematis; nam cùm in ipsa æqualitate insit, ex vi fractionis proportio, per quam ordinata est Problematis constructio, satis est ab ipsa æqualitate demonstrationem inchoauisse. Alia eiusdem Problematis Resolutio, in qua progressus quidem simplicior est, breuiorq. operatio autem paulo operosior ob multiplicationem fractionis, per magnitudinem integram. C

Sit igitur data perpendicularis trianguli B differentia crurum D, & differentia segmentorum basis G. Oportet inuenire triangulum.



Factum iam sit, & basis ipsius trianguli esto A, ergo A + G * erit duplum segmenti maioris. Et quoniam est, vt D ad G ita A ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$, erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ aggregatum crurũ, & $\frac{G \text{ in } A}{D}$ + D erit * duplum cruris maioris; sed quadratum cruris maioris dupli æquale est quadrato dupli segmenti maioris vnà cum quadrato perpendicularis duplæ; ergo

Corol. 1. Probl. 1. lib. 1.

Corol. 1. Probl. 1. lib. 1.

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} + DQ + G \text{ in } A\,2$ æquabitur $AQ + G \quad G \text{ in } A \quad B \quad 4$.

Auferantur vtrinq; G in A 2, & A Q, & D Q, vt cognita ab incognitis separentur, ergo D

$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - A$ æquabitur $BQ\,4 + GQ - DQ$

Hoc est $\frac{GQ \text{ in } AQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur $BQ\,4 + CQ - DQ$

Seu $\frac{GQ - DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabitur $BQ\,4 + G - DQ$.

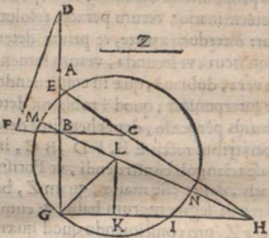
Et æqualitate in proportionem transmutata per resolutionem fractionis, proportionalia erunt plana

$GQ - DQ,\; BQ\,4 + GQ - DQ,\; DQ,\; AQ.$

Atque eorum radices proportionales erunt

L.V. $GQ - DQ$, L.V. $BQ\,4 + GQ$, DQ, DA, A Ea ipsa proportio, quæ per antecedentem resolutionem inueniebatur, vnde idem erit & Porisma, eædemque ex eo determinationes deducentur.

Compositio.



SIt data perpendicularis trianguli A B, differentia crurum B C, & differentia segmentorum basis Z. Oportet inuenire triangulum. Fiat eadem constructio, quæ in antecedenti compositione: trianguli igitur L G H perpēdicularis L K æqualis est
B AB, ex constructione, & I H differentia segmentorum basis G K, K H æqualis Z, pariter ex constructione. Superest vt ostendatur N H differentia crurum L G, L H æqualis ipsi B C; id autem per regressum resolutionis fit hoc modo. Quadratum E H, minus quadrato H G, * æquale est quadrato 47. primi
E G vel D F, hoc est* quadratis D B, B F, seù quod idem est quadrato duplæ 47. primi
L K, & quadrato B E, hoc est &* quadrato E C, minus quadrato B C, ad- 47. primi
ditis vtrobiq; quadratis G H, B C, & rectangulo G H I bis: quadrata E H, B C, vnà cum rectangulo G H I bis, æqualia erunt quadrato duplæ L K, vnà,
C cum quadratis G H, & E C, vel & I H, & insuper rectangulo G H I bis; sed quadrata G H, I H vnà cum rectangulo G H I bis, * æqualia sunt quadrato 4. secundi
compositæ ex G H, H I, hoc est* quadrato duplæ K H, ergo quadrata E H, Corol. 1. Probl. 1. lib. 1.
B C vnà cum rectangulo G H I bis, æqualia erunt quadratis duplarum L K, K H, hoc est quadrato duplæ L H, hoc est compositæ ex M H, H N; sed rectangulum G H I æquale est rectangulo E H, B C; nam cùm sint similia triāgula E H G, E C B, est G H ad A E, vt B C ad C E; hoc est ad H I, ac proinde rectangulum G H I sub extremis æquale rectangulo E H, B C sub medijs; ergo si loco rectanguli G H I ponatur rectangulum E H, B C, quadrata E H, B C vnà cum rectangulo E H, B C, hoc est* quadratum compositæ ex E H, 4. secundi
B C, æquale erit quadrato compositæ, ex M H, H N, quare & illa composi-
D ta huic compositæ æqualis erit; sed & rectangulum E H, B C, ostensum est æquale rectangulo G H I, hoc est * rectangulo M H N ergo E H * æqualis erit 36. tertij Theor. 1. huius
M H & B C æqualis N H, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L G H. &c. vt faciendum erat.

Scholium

CVm determinationis facta mentio sit; res ipsa postulare videtur, vt subijciam quomodo determinatio Problematis determinati, cum ea ex se non patet; in Porismate, vel in constructione Problematis deprehendatur.

Pro-

Problematum igitur determinatorum alia ſunt, in quibus ſtatim vt proponuntur determinationes occurrunt, vt propoſitio 22. libri primi Euclidis, & propoſitio prima libri 4. eiuſdem, nec non prima quattuor problemata præcedentis libri, multaq. alia; eorum enim determinationes in ipſa Problematis propoſitione manifeſtæ ſunt. Alia vero Problemata ſunt, in quibus latet determinatio; verum peracta reſolutione Problematis, in Poriſmate detegitur: interdum aperte, vt prima determinatio huius Problematis; interdum non item, vt ſecunda, verum tamen ſumpto inditio ex aliqua impoſsibilitate vera, dubiauè, quæ in conſtruendo, iuxta rationem Poriſmatis, Problemate interponitur; quod Problema determinatione egeat, deinde Poriſmate attentiùs perpenſo, deprehenditur determinatio: vt in hac conſtructione; vbi datis tribus rectis E B, F D, B C, inuenta eſt quarta proportionalis G H pro baſe trianguli conſtruendi, vt Poriſma docet, ipſa G H, niſi vitium eſt in datis, debet eſſe maior, quam Z, baſis enim trianguli maior eſt, quàm differentia ſegmentorum baſis, & cum ab ipſa G H auferenda ſit recta æqualis datæ Z pro conſtituendo quod quæritur triangulo, ſi ipſa G H non eſſet maior, ex recta auferri non poſſet, ſumpto igitur inditio ex hoc dubio impoſsibilitatis, quod problema determinatione egeat; deinde reuerſus ad Poriſma, inuenio rectam, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum differentiæ ſegmentorum baſis trianguli ſuperat quadratum differentiæ crurum, ad rectam, cuius quadratum æquale eſt quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem quadratorum exceſſu, eandem rationem habere, quàm differentiam crurum ad baſim, ex quo infertur priorem rectam ad poſteriorem, minorem rationem habere, quam differentiam crurum, ad differentiam ſegmentorum baſis: quippe quæ minor eſt baſe. Itaque impoſita determinatione, vt ratio prioris rectæ ad poſteriorem minor ſit ratione differentiæ crurum, ad differentiam ſegmentorum baſis, neceſſario G H maior erit, quàm Z; atq; adeo inſtantia, quæ aduerſus conſtructionem Problematis ferebatur deſtructa erit, quod quidem abſque determinatione non eueniret. Exempli gratia, ſi quis imprudens, neglecta determinatione, expoſuerit data, ita vt ratio prioris rectæ ad poſteriorem fuerit non minor ratione differentiæ crurum ad differentiam ſegmentorum baſis, vt potè expoſuerit perpendicularem trianguli 1, differentiam crurum 2, & differentiam ſegmentorum baſis 3, iuſſeritq. triangulum conſtruere, fruſtrà ſe excruciabit, qui triangulum illud tentauerit inuenire; quæreret enim id quod non eſt, ſi quidem nullum poteſt dari triangulum in quo perpendicularis ſit 1, differentia crurum 2, & differentia ſegmentorum baſis 3, quoniam ratio huiuſmodi datorum non continetur intra limites à determinatione præſtitutos. Sic igitur determinatio, quæ prius in Poriſmate latebat, per ea quæ conſtructioni aduerſabantur, in ipſo Poriſmate patefit. Alia autem Problemata ſunt, in quibus neque ſponte ſe ſe offert determinatio, neque in Poriſmate vllo modo deprehenditur; ſed inſtantiæ quæ aduerſus conſtructionem Problematis feruntur, ipſam ſuggerunt determinationem; nam cum in conſtructione, quæ fit per rationem Poriſmatis

A

B

C

D

occur-

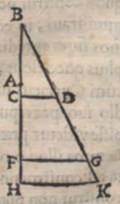
A occurrit aliquod, quod fieri non poteſt, vel in dubium venit, an fieri poſsit, argumentum eſt, vitium eſſe in datis, vel certe poſſe eſſe, ex eoque oriri illud impoſsibilitatis, vel dubij impedimentum. Neque enim Poriſma iubet ea, quæ fieri non poſſunt, immo indicat quando Problema poſsibile eſt, & quando impoſsibile, vt ſuo loco dicetur. Cognitis igitur, quæ aduerſus conſtructionem inſtant; determinatio quoque cognita erit; nam determinatio nihil aliud eſt, quàm cautio quædam, ne quid aduerſus conſtructionem Problematis inſtet, exemplum ad huiuſmodi determinationem pertinens, ſubijciam in Scholio Problematis quinti.

In hoc Problemate, quod & in libro variorum conſtruxi, Clemens Cyriacus ſe non ſatis accuratam demonſtrationem aſſerit deprehendiſſe, quod B non demonſtrauerim, quartam illam proportionalem G H maiorem eſſe quàm E C, cùm ab ipſa G H auferenda ſit recta æqualis E C: miraturq. vir alioqui doctiſsimus, id à me omiſſum; ac ſe ſuppleturum, quod omiſerim, pollicetur, vt ea me cura leuaret. Sed cùm ea quæ pollicetur non ſoluerit, non alienum putauerim planum facere, primum illam demonſtrationem, licèt in ea id quod Cyriacus notat omiſſum fuerit, non ideo potuiſſe dici, non accuratam, tum Cyriacum nihil omnino ſuppleuiſſe, quamuis ſupplendi munus ſibi ſuſceperit.

Et quidem ſi demonſtratio mea ex huiuſmodi omiſsione non accuratè demonſtrationis vitio laboraret; idem Archimedi, idem Appollonio, idem pluribus alijs accuratiſsimis Mathematicis tribuendum eſſet, cùm in eorum C demonſtrationibus quamquam veriſsimis, plura omiſſa fuerint, quæ Eutocius Aſcalonita, Federicus Comandinus, & plures alij comentatores viri eruditiſsimi in ſuis comentarijs ſuppleuerunt, quas quidem demonſtrationes cùm nemo non accuratas ſit auſus dicere, non video quid cauſæ fuerit, cur Cyriacus demonſtrationem meam non accuratam appellarit.

Verùm vt conceſſerim, potuiſſe me de non accurato opere accuſari, ſi quis caſus dari poſſet, in quo ipſa G H non ſit maior quàm E C, ita plane affirmauerim, audaciorem potius Cyriaci cenſuram, quàm non ſatis accuratam demonſtrationem extitiſſe, cùm certum ſit nullum huiuſmodi caſum dari poſſibilibus (ad Problema conſtruendum) datis exiſtentibus, vt in conſtructione Problematis demonſtraui.

D Sed conatur in ſua animaduerſione Cyriacus oſtendere, poſſe dari caſum, in quo recta G H non ſit maior, quàm E C, & ad id faciendum conſtituit duo triangula, rectangula ſimilia B C D, B F G, quorum maius habet baſim F G minorem latere maximo B D trianguli minoris, idq. ad ſimilitudinem conſtructionis duorum triangulorum E B C, E G H in conſtructione Problematis conſtitutorum; atque ex hoc arguit caſum ſupramemoratum dari poſſe. Verùm parum animaduertit, quod in triangulis B C D, B F G in ſua animaduerſione conſtitutis, ſuppoſuerit data ex quibus Proble-



ma

ma construi non potest. quid igitur mirum si ex male suppositis male conclu- A
serit? hoc autem ita se habere sic demonstrabo.

Resumatur Cyriacæ animaduersionis figura, in qua ostenduntur æquales B D, H K, & propterea F G minor quam D B, itaque ex F G non posse auferri rectam æqualem B D manifestum est.

Sed intelligatur A B data perpendicularis trianguli quæsiti, C D differentia crurum, & B D differentia segmentorum basis, atque rectæ B F quadratum sit æquale quadrato A B duplæ, & quadrato B C, quo nimirum differunt quadrata B D, D C, sic enim disponuntur data in constructione Problematis. Dico ex datis A B perpendiculari, C D differentia crurum, & B D differentia segmentorum basis, nullum triangulum
inueniri posse. Quoniam enim ob similitudinem triangulorum B C D, B F G B
est, vt B C ad B F, ita C D ad F G, C D autem ad F G maiorem rationem habet, quàm eadem C D ad B D, cùm sit B F G minor, quàm B D, ergo & B C ad B F, maiorem rationem habet, quàm C D ad B D; hoc est recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum basis superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est, quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum eodem quadratorum excessu, maiorem rationem habet, quàm differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, quod quidem in nullo triangulo potest esse. ostensum est enim lemmate secundo, in omni triangulo priorem rectam ad posteriorem minorem rationem habere quam differentiam crurum, ad differentiam
segmentorum basis. Quare ex datis A B perpendiculari, C D differentia cru- C
rum, & B D differentia segmentorum basis, triangulum inueniri non potest. quod erat ostendendum.

Cùm igitur in triangulis B C D, B F G in animaduersione Cyriaci constitutis, supposita sint data, ex quibus Problema construi non potest, male Cyriacus deducit ex eo, quod in ipsis triangulis recta F G minor sit, quàm B D, etiam in triangulis E B C, E G H, in constructione Problematis constitutis, in quibus pronuntur data, ad construendum Problema, possibilia, rectam G H minorem aliquando futuram quàm E C.

Iam vero ostendendum est, Cyriacum id quod pollicitus est non suppleuisse.

Quoniam enim Problema, de quo agitur, ex determinatis est, quippe
quod construi non potest, ex datis in quacumque ratione existentibus, vt de- D
monstraui, in eo nihil aliud deerat nisi determinatio pro cohibendis datis, ne suos fines egrediantur, nam adhibita congrua determinatione, nihil est amplius quod desit, vt videre est in constructione Problematis supra allata. Sed cùm Cyriacus nihil de determinatione tetigerit, non video, quid Lemmate illo suo præcipuo (sic enim appellat, propter eximiam, quam de eo concepisse videtur præstantiam) suppleuerit; sed vt manifestius id pateat, ostendam Lemma illud omnino inutile esse, sed exercitationis gratia exponam prius data ad construendum Problema impossibilia, hoc est ex quibus triangulum construi non potest; deinde ostendam quomodo ex ea datorum impossibili-

tate

A tate oriatur instantia constructioni obsistens; quibus ostensis, perspicuè apparebit, Cyriacum nec præcipuo suo Lemmate, nec approbata constructione, id quod omissum asserit suppleuisse.

Sit igitur data A B perpendicularis trianguli 1, B C, differentia crurum 2, & Z differentia segmentorum basis 3, vel sit A B 10, B C & Z 12, vt posuit Regiomontanus, & oporteat inuenire triangulũ. Hoc manifestum est fieri non

B posse, cum nullum triangulum posit habere perpendicularem, & differentias crurum, & segmentorum quales hic exponũtur; nam in his datis, recta cuius quadratum æquale est excessui quo quadratum Z superat quadratum B C, ad rectam cuius quadratum, æquale est excessui quo quadratum Z superat quadratum B C, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato A B duplæ, vnà cum eodem quadratorum excessu, maiorem rationem habet, quàm B C ad Z; prior enim recta in primis datis est L. 5, posterior vero 35, & L. 5 ad 3 maiorem habet rationem, quàm 2 ad 3. In datis vero à Regiomontano expositis prior recta est L. 135, posterior L. 535, & ratio

C L 135 ad L. 535, maior est ratione 3 ad 12, quod in nullo triangulo potest esse: si quidem ostensum est, in omni triangulo priorem rectam ad posteriorem minorem rationem habere, quam differentiam crurum, ad differentiam segmentorum basis. Ex datis igitur quæ supra exposita sunt, Problema construi non potest; quod animaduertisse operepretium fuit.

Nunc autem ostendam, quomodo ex ea datorum impossibilitate oriatur instantia constructioni obsistens.

Expositis ijsdem datis, nempe impossibilibus, procedatur cum constructione, quemadmodum Porisma docet, donec aliquod impedimentum occurrat, occurret autem; nam ex impossibilibus impossibilia sequi necesse est.

Inclinentur igitur ad rectos angulos A B, B C, & in B A productam po-

D natur C E æqualis Z, & producatur C B in F, vt sit B F æqualis B E: deinde duplicetur B A in D, & connectatur D F, cui æqualis fiat E G, & ducatur G H parallela rectæ B C, occurrens E C continuatæ in H. Hic subsistimus nec possumus alterius progredi, nam cum recta G H debeat esse basis trianguli quæsiti, vt Porisma indicat, ipsaq; G H minor sit, quàm Z, (G H enim in prima figura est L. $7\frac{1}{5}$ Z 3, in secunda est L. $35.\frac{1}{3}$, Z 12) non potest ab ipsa G H auferri recta æqualis Z. Hic itaque occurrit instantia quæ reliquam constructionis partem impedit; nec mirum quia ex datis impossibilibus, sequitur quæsitum impossibile, impossibilia enim exponuntur data, & inuenitur quæsita basis trianguli minor, quàm data differentia segmentorum basis; quod est

im-

impossibile, totum videlicet minus esse sua parte. Hanc instantiam debebat dissoluere Cyriacus, deinde verò constructionem suam dicere approbatam: nam expositis datis ad Problema construendum, vel possibilibus, vel impossibilibus, quid commodi affert illud ipsius præcipuum Lemma, cùm ex eo nec sciri posit, quæ sint posibilia data, quæue impossibilia, nec ideo Problemati determinatio præfigi, vt ea instantia, quæ aduersus constructionem fertur, destrui posit? quid ve illa sua constructio approbata valet, cùm ea perfici non posit, nisi prius instantia, quæ constructionem impedit, determinatione destruatur? Non igitur omissa suppleuit Cyriacus, vt pollicebatur, cùm instantiam constructioni aduersantem, non dissoluerit, nam nihil aliud nisi determinatio contra instantiam à docto commentatore desiderabatur, quippe quæ sola omnia præstitisset. sed quamquam ea me supplendi cura non leuarit Cyriacus, magnas tamen ei ago gratias, habeoq. licet enim ei votum defuerit, ipse tamen voto non defuit. A B

Iacobus quoque Christmanus in Nodo suo Gordio ait, se meum hoc Problema examinasse, eiusque constructionem vacillantem deprehendisse, non tamen in quo vacillet exprimit. profecto assumpserit, in suo examine Abacularis calculator demonstrationum Geometricarũ planè innocens, numeros ad constructionem Problematis non idoneos, quippe ignorauit Problema determinatũ esse, nec ideo construi posse ex quibusuis datis; idcirco non miror si suo vacillanti per abaculos calculo delusus, vacillantem meã constructionem sibi visus fuerit deprehendisse.

Idem vitiũ non accuratæ demonstrationis notat Cyriacus in Problemate secundo Francisci Vietæ in Apendicula prima ad Apolloniũ Gallum, atque determinationẽ à Vieta Problemati præpositã illegitimam esse censet, & ideo delendam. quam malè de vtroque iudicet, ingeniosissimè Alexander Andersonus disseruit, vir sanè eruditus in paucis, mihique percarus; cui multum debeant Mathematicæ disciplinæ, quas præclaris monumentis illustrauit, cum quibus de me non semel perhonorificè meminerit, meique patrocinium susceperit, multum sane me sibi sua humanitate, ac prona in me voluntate deuinxit. Verùm cùm ipse quoque molestè ferrem, quòd tanti viri laudes, non sine aliqua temeritatis nota, vt leuissime dicam, Cyriacus ausus sit imminuere, non possum non ostendere, quàm longe absit à vero in suis animaduersionibus iudicium Cyriaci. Nempe hoc à me postulat singularis quidam meus in Vietam amor, atque obseruantia, atque adeo arctissima amicitiæ, coniunctionisque necessitudo, quæ mihi cum illo Parisijs intercessit, mutuis officijs confirmata. huc accedit, quod cùm Cyriacus in vno, eodemque libello, & Vietam, & me de non accurata demonstratione accusauerit, inofficiosus essem, si omissa amici causa meam tantùm defenderem. Primum igitur resoluam Problema illud, deinde Determinationem Problemati præpositam, non solum legitimam, verùm etiam necessariam esse demonstrabo. Postremo composito Problemate, perspicuum fiet, Cyriacum de delenda illa determinatione non rectè iudicasse. C D

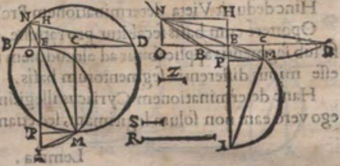
Pro-

A

Problema Vietæ.

Data base altitudine & ratione crurum trianguli, inuenire triangulum.

Resolutio.



SIt data triãguli basis B D, altitudo Z, & ratio crurum vt S ad R. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum N B D, cuius basis
B sit ipsa B D data, altitudo verò N O sit æqualis Z, crura autem B N, N D se habeant, vt S ad R. Secetur angulus B N D bifariã à recta N E secante basim B D in E; circulũ verò circa triangulũ B N D descriptũ, in M. erit igitur ratio B E ad E D data, cũ sit B E ad E D, vt B N ad N D, hoc est vt S ad R, ergo* data erũt & segmẽta B E, E D: vnde dabitur & rectangulum B E D, ac etiam vt ei* æquale rectangulum N E M. Ducatur autem per punctum E recta E H parallela, & æqualis rectæ O N, eaque producatur donec occurrat rectæ M I perpendiculari ipsi N M in I, & iungatur N H ea parallela erit basi B D; & ideo positione erit, atque positione erit, & H I, cùm ea perpendicularis sit ipsi
C B D. Et quoniam similia sunt triangula E H N, E M I; anguli enim E H N, E M I recti sunt, & ideo æquales, & æquales quoque anguli ad E; vt igitur E H ad E N, ita erit E M ad E I; quare rectangulum H E I sub extremis, æquale erit rectangulo N E M, sub medijs; sed datur rectangulum N E M, vt demonstrauimus; ergo dabitur & rectangulum H E I; data autem est recta H E, quippe quæ æqualis est N O, vel Z datæ, ergo dabitur & recta E I, magnitudine quoque; quare & semicirculus in ea descriptus. Denique, secta B D bifariam in C. connectatur C M ea perpendicularis erit ipsi B D, cùm sint æquales circumferentiæ B M, M D ratione æqualium angulorum B N M, M N D, ipsis circumferentijs insistentium: quare ipsa
D C M positione data erit; ergo dabitur & punctum M, per quod nimirum transit semicirculus E M I, cùm sit rectus angulus E M I, ex constructione; sed datum est & punctum E, ergo dabitur recta M E positione, & magnitudine; vnde & recta E N positione erit; sed positione est & N H; ergo dabitur & punctum N: quare & triangulum N B D.

7 daturum

35 tertij

Scholium.

HAc via existimo Vietam suum Problema resoluisse, ex qua quidem resolutione apparet E I latitudinem, quam facit rectangulum B E D, sub segmentis basis sectæ, pro ratione crurum, applicatum ad E H, altitudinem trianguli, non esse minorem differentia segmentorum B E, E D. nam cùm semicirculus in diametro E I descriptus necessariò transeat per punctum M, quod commune est rectis E M, C M, eiusque semidiameter non sit minor, quàm M P perpendicularis ad E I, hoc est quam E C; per consequens neque tota diameter E I minor erit quàm dupla E C, id est quàm differentia segmentorum B E, E D. A

Hinc deduxit Vieta determinationem Problematis, nempè.

Oportere cum basis secabitur pro ratione crurum, & rectangulum quod fit sub segmentis applicabitur ad altitudinem trianguli, quod inde orietur, non esse minus differentia segmentorum basis.

Hanc determinationem Cyriacus illegitimam esse censet, & ideo delēdam, ego verò eam non solum legitimam, sed etiam necessariam esse demonstrabo. B

Lemma.

Si basis trianguli secetur pro ratione crurum, & rectangulum sub segmentis applicetur ad altitudinem trianguli, latitudo inde orta non erit minor differentia segmentorum.

Sit triangulum N B D, cuius angulus verticis secetur bifariam à recta N E secante basim B D in E; itaque erit vt B N ad N D, ita B E ad E D. Ducatur autē per punctū E perpēdicularis H E I, & fiat H E æqualis N O, altitudini trianguli N B D. Deinde applicetur rectangulū B E D ad rectā H E, & faciat latitudinem E I. Dico ipsam E I non esse minorem differentia segmentorum B E, E D. Producatur enim N E donec secet circumferentiā circuli circa triangulū B N D descripti in M, & secetur B D bifariam in C, & iungantur M C, M I, N H. Quoniam igitur æquales sunt anguli B N M, M N D, erunt æquales & circumferentiæ B M, M C, quibus ipsi anguli insistunt; vnde M C perpendicularis erit ipsi B D, & ideo parallela rectæ E I. Et quoniam rectangulum H E I æquale est rectangulo B E D, ex constructione, hoc est rectangulo N E M; erit vt E I ad E M ita E N ad E H; sunt autem anguli I E M, N E H ad verticem æquales, D

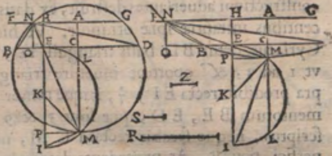
4 sexti ergo * æquiangula erunt triangula E M I, E H N; quare angulus E M I æqualis erit angulo E H N, sed rectus est E H N, ergo & E M I rectus erit; vnde semicirculus in diametro. E I descriptus transibit per M, eiusq; semidiameter non erit minor quàm M P perpendicularis ad E I, hoc est quam E C, & per consequens, nec tota diameter E I minor erit, quàm dupla E C; sed segmenta BE, E D differunt per duplam E C, ergo ipsa E I non erit minor quàm differentia segmentorum B E, E D quod erat ostendendum.

Corol-

Corollarium.

HOc igitur demonſtrato, conſtat, determinationem, quam Vieta Problemati præpoſuit, legitimam eſſe, atque neceſſariam.

Compoſitio Problematis ea ipſa, quam Vieta exhibuit.



SIt data trianguli baſis B D, altitudo Z, ratio crurũ vt S. ad R Oportet inuenire triãgulum. Baſis B D ſecetur bifariã, & ad angulos rectos in C à recta
B A C, quæ ſit ipſi Z æqualis, & per A agatur F A G ipſi B D parallela. Eadem baſis B D ſecetur in E ratione crurum, vt ſit B E ad E D ſicut S ad R, & agatur H E ipſi A C æqualis, & parallela, & ita producatur in I, vt quod fit ſub H E, E I, ſit æquale ei, quod fit ſub B E, E D, & ſecetur E I bifariam in K, & centro K interuallo E K, vel K I deſcribatur circulus, quem A C continuata ſecet in punctis L M, aut demum contingat in M, ſecabit enim aut continget circulũ illũ A C, quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter, erit æqualis ipſi E C, cui ex cautione adiecta Problemati præſtabit, aut demum erit æqualis E K ſemidiameter circuli. denique acta M E ſecet F G in N, & connectantur B N,
C N D. Triangulum igitur conſtructum eſt B N D, cuius baſis eſt data B D, in quam cadens perpendicularis N O ſit ipſi A C, ſeu Z datæ æqualis. Connectatur autem I M, ſunt igitur triangula ſimilia rectangula N H E. I M E, & eſt, vt N E ad I E, ita H E ad E M, quod fit, itaque ſub N E, E M æquale eſt ei quod fit ſub H E, E I, ideſt rectangulo ſub B E, E D. quare puncta N B, D M ſunt in circulo, in eo autem ſubtenſa B D ſecatur bifariã ad rectos angulos ab A C, quare ſectio eſt per centrum, & ſunt peripheriæ æquales B M, M D, angulus igitur B N E angulo E N D eſt æqualis, & ideo eſt B N ad N D, ſicut B E ad E D. Triangulum igitur B N D deſcriptum eſt ſub data baſe B D, cuius altitudo N O æqualis eſt imperatæ Z, ſeu A C, & B N ad N D ſe habet, vt B E ad E D, ſeu vt S ad R, quod faciendum erat.

D Animaduertit Cyriacus in Vietam, quod non demonſtrauerit circulum in diametro E I deſcriptum ſecari, aut tangi à recta C M, ſed cauerit ne recta E I minor ſit quàm differentia ſegmentorum B E, E D, ex eaque cautione deduxerit, ipſum circulum ſecari, aut tangi ab ipſa C M; quamobrem Cyriacus cautionem illam, ſeu determinationem è medio tollendam eſſe cenſet, præ ſe enim fert, inquit, quamdam exceptionis non legitimæ ſpeciem, vt habet latius in ſuo libello. Miror quomodo Cyriacus deceptus ſit, vt determinationem illam, quæ adeo neceſſaria eſt, vt demonſtraui, delendam eſſe cenſeat, cùm ſine ipſa Problema conſtrui non poſſit. ipſa ſane determinationis neceſsitas erat oſtendenda, ſed licèt hoc omiſerit Vieta, non ideo demonstratio illa potest dici non accurata, cùm ipsam necessitatem A quilibet etiam mediocriter in Geometricis versatus ostendere possit. Sed video Cyriacum nihili determinationes Problematum æstimare, cum determinationem illam, quæ adeo necessaria est, tamquam inutilem delendam censeat, & tamen sine determinationibus Problemata determinata sunt impossibilia. Determinatio enim sola cohibens data intra suos terminos, omnes instantias constructioni aduersantes destruit, ex datis enim determinationi non subiacentibus instantiæ ipsæ oriuntur. Vt hìc, sublata determinatione, vt vult Cyriacus, detur B D basis trianguli 12, Z altitudo 5, & ratio crurum vt 1 ad 3, & oporteat inuenire triangulum. Facta constructione vt supra prodibit recta E I 5 $\frac{2}{7}$, itaque minor quàm 6 differentia, videlicet segmentorum B E, E D, quæ sunt 3 & 9; quare semicirculus in E I de- B scriptus, neque secabit rectam C M, neque tanget, nec ideo Problema perfici poterit. At præcedente determinatione, hæc instantia constructionem impediens dissoluitur: ea enim, vt dictum est, procedit ex datis ad construendum Problema non idoneis, nullum enim triangulum dari potest basim habens, & altitudinem, & rationem crurum, quales hic præscribuntur.

Illud autem quod in libello Vietæ in ipsa determinatione dictum est, (Oportere quod inde orietur maius esse differentia segmentorum basis) cũ dici debuisset (non esse minus) error est Typographi, nam Vietam intellexisse (oportere quod inde orietur non esse minus) clarè testantur verba illa in constructione Problematis expressa nempè (secabit enim, aut C continget circulum E M I recta A C, quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter, erit æqualis ipsi E C, cui ex cautione adiecta Problemati præstabit, aut demum erit æqualis K E semidiameter circuli) quod si aliter sensisset, nempè (oportere quod inde orietur maius esse differentia segmentorum basis) non addidisset (aut demum erit æqualis E K semidiameter circuli.

His igitur ita se habentibus, melius quidem Cyriacus fecisset, si commentatorem potius, quàm correctorem egisset, sic enim suppleuisset id quod omissum fuerat à Vieta, ostendens determinationem illam necessariam esse, non autem tamquam inutilem fuisse delendam censuisset.

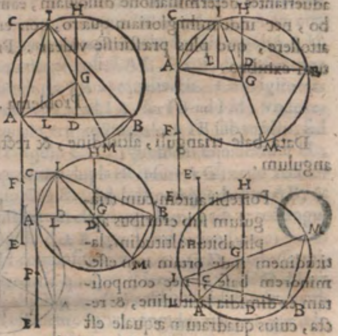
De Problemate primo Appendiculæ primæ ad Apollonium Gallum, quod D licèt explicatione indigeat non leui, Cyriacus intactum præterijt.

Problema Constructum à Vieta.

Data base trianguli, altitudine & rectangulo sub cruribus; inuenire triangulũ.

TRianguli, de quo quæritur, esto data basis A B, altitudo æqualis rectæ A C, rectangulum autem sub cruribus detur æquale ei, quod fit sub A C, A E. Oportet inuenire triangulum, cuius basis A B altitudo ipsi A C æqualis, & rectangulum sub cruribus æquale ei,

quod



A quod fit ſub A C, A E. Inclinetur AC, AB ad angulos rectos, & ipſæ AE, AB ſecetur bifariã in F, D, & per D agatur DG ipſi GAE parallela, in qua ponatur A G ipſi A F æqualis, & cẽtro G interuallo GA, vel GB deſcribatur circulus. Deniq; per punctũ C agatur CI ipſi A B parallela ſecãs circulũ in I, & connectãtur A I, B I. In triãgulo igitur AIB cũ ex vertice cadat **B** in baſim A B perpẽdicularis IL, ipſa erit altitudini AC. æqualis. Agatur autẽ diameter IGM; & connectatur M B, erit triangulum I B M rectangulum, & ſimile triangulo I A L; recti enim ſunt anguli I L A, I B M, & ſiue anguli IMB, ſiue anguli I A B, duplam amplitudinem eadem peripheria IB definit, quare eſt vt I L ad A I, ita I B ad I M, ſed I M eſt dupla ipſius A G, & ideo æqualis toti A E. Itaque rectangulum ſub I M, I L conſtituitur rectangulo ſub C A, A E æquale, ergo eidem quoque æquatur rectangulum ſub A I, I B. Ad datam itaque baſim A B, & altitudinem I L, ſeu A C, ita conſtitutum eſt **C** triangulum A I B, vt rectangulũ ſub cruribus æquale ſit, rectangulo ſub A C, A E, quod erat faciendum.

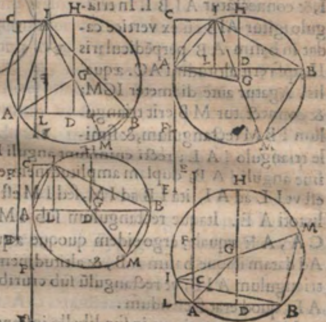
Miror cur Cyriacus in ſuo libello inſtantias quoque, quæ aduerſus conſtructionem huiuſce Problematis feruntur non adnotauerit, cum eæ ſint plures, maioreſque quam in illo meo Problemate variorum, aut in Problemate ſecundo ſupradictæ Appendiculæ, in quo ſtudium omne adhibuit, vt corrigeret etiam quæ corrigenda non erant. Neque veriſimile eſt Cyriacum Problema primum non legiſſe, cum ſecundum illud tàm attentè perlegerit. Sed nec dubito quin ad explanationem huiuſmodi difficultatem ſufficeret, cum eruditum eum, ac varia litterarum ſuppellectile inſtructum, libellus ipſe oſtendat. fortaſſe iucundiora ſtudia, vel etiam quæſtuoſiora ſecutus, laborioſa **D** hæc prætermiſit.

Duæ ſunt inſtantiæ, quæ conſtructionem huius Problematis impediunt. altera quidem quod non patet rectam æqualem A F poſſe à puncto A in perpendicularem D G duci, quoniam ſi A F maior eſſet, quàm A D, ea recta duci non poſſet. Altera vero inſtantia eſt, quòd nõ apparet quare C I parallela baſi A B, debeat neceſſario ſecare circulum A B I; nam ſi A C maior eſſet, quàm recta D G producta vſque ad circumferentiam circuli, ipſa C I non ſecaret circulum, ſed ne tangeret quidem. Sumam igitur perſonam commentatoris, nec dedignabor tanti viri ſcripta preſſo, ac breui ſtylo tradita, & ob id fortaſſe ſubobſcura fuſiùs explicare. Oẽs itaq; inſtãtias cõſtructioni ad-

aduersantes determinatione dissoluam, eamque necessariam esse demonstrabo, nec inde mihi gloriam quæro, non enim mihi moris est paruam rem attollere, quo plus præstitisse videar. Problema igitur illud sic explanatum exhibeo. A

Problema.

Data base trianguli, altitudine, & rectangulo sub cruribus, inuenire triangulum.



Oportebit autem, cum triangulum sub cruribus applicabitur altitudini, latitudinem inde ortam non esse minorem base; nec compositam ex dimidia latitudine, & recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ latitudinis superat quadratũ dimidiæ basis, minorem esse altitudine. B

Trianguli de quo quæritur esto data basis A B, altitudo æqualis rectæ A C, rectangulum autem sub crurib⁹ detur æquale ei quod sit sub A C, A E, quarum A E non sit minor, quàm A B, nec composita ex dimidia A E, & recta, cuius quadrato differt quadratum dimidiæ A E à quadrato dimidiæ A B, minor sit quàm A C. Oportet inuenire triangulum cuius basis A B, altitudo ipsi A C æqualis, & rectangulum sub cruribus æquale ei, quod sit sub A C, A E. Inclinentur A C, A B ad angulos rectos, & rectæ A E, A B secentur bifariàm in F D, & per D agatur D G ipsi A C parallela, in qua ponatur A G ipsi A F æqualis, est enim A F non minor, quàm A D, cùm ex determinatione Problematis tota A E non sit minor, quam tota A B. Deinde centro G interuallo G A, vel G B describatur circulus secans D G productam in H. erit D H ex determinatione Problematis non minor altitudine A C; componitur enim ipsa D H ex rectis H G, G D, quarũ H G æqualis est G A vel A F, & quadratũ rectæ G D excessus est, quo quadratum A G vel A F superat quadratũ A D, itaq; acta C I ipsi A B parallela, secabit circulum aut continget. secet ergo aut contingat in I, & connectantur A I, I B. In triangulo igitur A I B, cùm ex vertice cadat in basim A B perpendicularis I L, ipsa erit altitudini A C æqualis. Agatur autem diameter I G M, & connectatur M B, erit triangulum I B M rectangulum & simile triangulo I A L; recti enim sunt anguli I B M, I L A, hic ex constructione ille ex vi semicirculi, & anguli I M B, I A L sunt C D

æqua-

A æquales; in primis enim tribus figuris eidem circumferentiæ I B insistunt, in reliqua vero cùm anguli oppositi I M B, I A B quadrilateri I M, B A in circulo æquales sint duobus rectis, & æquales quoque duobus rectis anguli I A L, I A B, erunt anguli I M B, I A B æquales angulis I A L, I A B, dempto communi angulo I A B, reliquus I M B reliquo I A L æqualis erit. Cùm igitur similia sint triangula I B M, I L A, erit vt I L ad I A, ita I B ad I M, vnde rectangulum L I M sub extremis, æquale erit rectangulo A I B sub medijs; sed rectangulum L I M æquale est rectangulo C A E, quoniam æquales sunt I L, C A, & æquales I M, A E. vtraque enim dupla est ipsius A G; ergo rectangulum A I B æquale erit rectangulo C A E. Ad datam itaque basim A B, & altitudinem I L, seu A C, ita constitutum est triangulum A I B vt rectangu-
B lum sub cruribus æquale sit rectangulo C A E, quod erat faciendum.

Determinatum est, rectam D H compositam ex A G, G D, non esse minorem altitudine A C; sed si differentia quoque ipsarum A G, G D fuerit non minor eadem altitudine A C; duobus modis Problema absoluetur, nempe duo diuersa triangula Problema efficient. in vno angulus verticis erit obtusus, in altero acutus. Hoc apparet in duobus vltimis figuris.

At verò Determinationem, quam Problemati adiecimus, necessariam esse, sequenti Lemmate ostendetur.

Lemma.

C SI rectangulum sub cruribus trianguli applicetur ad altitudinē eiusdem trianguli, latitudo inde orta, non erit minor base, nec composita ex dimidia latitudine, & recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ latitudinis superat quadratum dimidiæ basis, minor erit altitudine.

Sit triangulum A B C, cuius altitudo A D, sitque rectangulum B A C, sub cruribus, æquale rectangulo A D F. Dico primum, D F non esse minorem base B C. Describatur enim circa triangulum circulus A B C, & in
D eo ducatur diameter C E, & iungatur A E: angulus igitur E A C in semicirculo rectus erit, & ideo æqualis recto A D B. sunt autem & anguli A E C, A B D æquales; in prima enim figura, eidem circumferentiæ A C insistunt, in secunda verò quadrilateri E A, B C, in circulo anguli appositi A E C, A B C duobus rectis sunt æquales; sed & anguli A B D, A B C æquales sunt duobus rectis, ergo anguli A E C, A B C æquales erunt angulis A B D, A B C, dempto communi angulo A B C, reliquus angulus A E C reliquo A B D æqualis erit; sed & anguli E A C, A B D ostensi sunt æquales, ergo similia erunt triangula E A C, A D B. quare vt A D ad A B, ita erit A C ad C E, ac proinde rectangulum sub extremis A D, C E æquale erit rectangulo B A C

sub

sub medijs, hoc est rectangulo A D F. vnde D F æqualis erit diametro C E, A
& consequenter non minor quàm B C quod est primum.

Deinde secetur B C bifariam, & ad rectos angulos in G à recta G I secante diametrum E C in H, circumferentiam vero in I; erit ergo H centrum circuli, & semidiameter H I vel H C, æqualis erit dimidiæ D F. Dico igitur rectam I G compositam ex I H, & H G hoc est ex dimidia D F, & recta cuius quadrato superatur quadratum C G à quadrato C H, seu dimidiæ D F, nō esse minorem altitudine A D. Hoc licet manifestum sit, tamen ne dicat Cyriacus demonstrationem non esse accuratam; istud quoque demonstrabo.

Si punctum D idem sit, quod G erit & D E eadem, quæ G I, ergo constat propositum. si vero punctum D non sit idem quod G, cōnectatur G A, erit G I, cum sit in ea centrum circuli maior, quàm G A; sed ipsa G A maior est B
quam D A, quadratum enim G A æquale est quadratis D A D G, ergo G I multo maior erit, quam D A; non autem minor quod secundo loco erat demonstrandum. Quare manifesta est determinatio Problematis. Longius quàm par erat incepto abij ad propositum redeo.

Problema IV.

Data perpendiculari, aggregato crurum trianguli, & differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

Resolutio.

C
Sit B data perpendicularis trianguli, D aggregatum crurum G differentia segmentorum basis. Oportet inuenire triangulū. Sit iam factum. & basis trianguli esto A. Quoniam igitur est, vt D ad A, ita G ad $\frac{G \text{ in } A}{D}$ erit $\frac{G \text{ in } A}{D}$ differentia crurum, est enim vt * aggregatum crurum ad basim, ita differentia segmentorum basis, ad differentiam crurum; sed quadratum aggregati crurum, vnà cum quadrato differentiæ eorundem, * dupla sunt. quadratorum à cruribus, ergo $DQ + \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æqualia erunt quadratis crurum bis: Quadrata autem crurum bis, * æqualia sunt quadratis segmentorū bis, vna cum quadrato perpendicularis quater, ergo. D
$DQ + \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ æquabuntur quadratis segmentorum bis $+ BQ4$

Sed quadrata segmentorum bis * æqualia sunt quadrato basis, vnà cum quadrato differentiæ segmentorum basis, ergo

$$DQ + \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} \text{ æquabitur } AQ + GQ + BQ4$$

Hic non possunt auferri ex vtraq; parte A Q, & D Q, vt cognita ab incognitis separentur; quia ijs ablatis.

$$\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ} - AQ, \text{ æquaretur } BQ4 + GQ - DQ$$

Atque adeo ex vna æqualitatis parte existeret quadratum differentiæ crurum, minus quadrato basis, quod esset absurdum; nam non potest auferri

Theor. 7 huius

Theor. 4 primi

7 primi

Theor. 4 primi

qua-

A quadratum basis à quadrato differentiæ crurum, maius nempe à minore. auferatur ergo vtrinque $\frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$, & GQ, & $BQ4$, vt cognita ab incognitis separentur. ergo

$DQ - GQ - BQ4$ æquabitur $AQ - \frac{GQ \text{ in } AQ}{DQ}$

Vel $DQ - GQ - BQ4$ æquabitur $\frac{DQ \text{ in } AQ - GQ \text{ in } AQ}{DQ}$

est enim $\frac{DQ \text{ in } AQ}{DQ}$ idem quod AQ.

Seu quod idem est $DQ - GQ - BQ4$ æquabitur $\frac{DQ - GQ) \text{ in } AQ}{DQ}$

Denique resoluatur fractio $\frac{DQ - GQ \text{ in } AQ}{DQ}$ in sua membra, vt æqualitas in proportionem transmutetur, vt in principio huius Libri docuimus, ergo proportionalia erunt plana.

B $DQ - GQ$, $DQ - GQ - BQ4$, DQ, AQ.

Atque eorum radices proportionales erunt

L. V. $DQ - GQ$, L. V. $DQ - GQ - BQ4$, D A

Porisma.

VT recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum trianguli, superat quadratum differentiæ segmentorum basis, ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadrata, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & perpendiculari dupla; ita est aggregatum crurum ad basim.

Datur ergo basis trianguli de qua quærebatur.

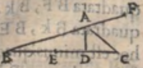
C Ex Porismate apparet, quadratum aggregati crurum maius esse quadratis, quæ fiunt à differentia segmentorum basis, & à perpendiculari dupla.

Apparet quoque, priorem rectam in Porismate nominatam ad posteriorẽ, minorem rationem habere, quàm aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis; prior enim recta ad posteriorem se habet, vt aggregatum crurum ad totam basim. Sic Porisma indicat.

Hæc omnia demonstranda sunt, & Problemati præponendæ Determinationes.

Lemma I.

D Quadratum aggregati crurum trianguli maius est quadratis, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & a perpendiculari dupla.



SIt triangulum ABC, in quo perpendicularis AD secet basim BC in duo segmenta BD, DC, quorum differentia sit BE, & continuetur BA in F, vt sit BF æqualis compositæ ex BA, AC. Dico quadratum ex BF maius esse quadratis ex BE, & AD dupla. Quoniam enim quadratum BF * æquale est quadratis BA, AF, & duplo rectanguli BAF, quadrata autem BA, & AF; hoc est & AC, * æqualia sunt quadratis BD, DC, & duplo quadrati AD, duplum verò rectangulum BAF maius est du- 4 secundi 47 primi

plo

plo quadrati A D, cùm vtraque ipsarum B A, A F maior sit ipsa A D, ergo quadratum A F maius erit quadratis B D, D C, & quadruplo quadrati A D, & consequenter multo maius quadrato B E, & quadruplo quadrati A D, hoc est & quadrato A D duplæ. quod erat ostendendum. A

Lemma II.

RECta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum trianguli superat quadratum differentiæ segmentorum basis, ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo idem quadratum aggregati crurum superat quadrata differentiæ segmentorum basis, & perpendicularis duplæ, minorem rationem habet, quàm aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis. B

SIt triangulum A B C, cujus basim B C secet perpendicularis A D in duo segmenta B D, D C, quorum differentia sit B E, & producatur B A in F, vt sit A F æqualis A C, & in B F describatur semicirculus, in quo accomodetur F G æqualis B E, & iungatur G B; deinde ex B demittatur B H perpendicularis ipsi B C, duplæ verò A D æqualis, & iungatur H E: ea minor erit, quàm B F, quia quadratum B F, ex antecedente Lemmate, maius est quadratis B E, B H; hoc est quadrato H E, ergo in semicirculo B G F aptetur F I æqualis H E; & iungatur I B. quadratum igitur B F superat quadratum B E hoc est F G, quadrato G B, idemque quadratum B F superat quadrata B E, B H, hoc est quadratum E H; seu F I, quadrato I B. C

Dico igitur B G ad B I, minorē rationē habere, quā B F ad B E. Describatur enim ex A centro ad interuallum A C vel A F circulus, quem A B secet in k, is circulus transibit per E, cum sint æquales E D, D C, & A D perpendicularis ad B C. Quoniam igitur quadrata B F, B k* æqualia sunt duplo quadratorum B A, A F, hoc est B A, A C, duplum autem quadratorum B A, A C* æquale est duplo quadratorum B D, D C, & quadruplo quadrati A D; ergo quadrata B F, B k æqualia erunt duplo quadratorum B D, D C, & quadruplo quadrati A D, hoc est & quadrato B H; est enim B H dupla ipsius A D; D sed duplum quadratorum B D, D C,* æquale est quadratis B C, B E, ergo quadtata B F, B k æqualia erunt quadratis B C, B E, B H; auferantur vtrinq; quadrata B k, B E, B H, quadratum igitur B F, minus quadratis B E, B H, hoc est minus quadrato H E, æquale erit quadrato B C, minus quadrato B k; sed quadratum B F, minus quadrato H E vel F I, idem valet, quod quadratum B I; ergo quadratum B I æquale erit quadrato B C, minus quadrato B k.

Et quoniam est B F ad B E, vel F G, sicut B C ad B k, erit & quadratum B F ad quadratum F G, vt quadratum B C ad quadratum B k; & diuidendo erit vt quadratum B F, minus quadrato F G, hoc* est, vt quadratum B G ad qua-

Theor. 4 primi

47 primi

Theor. 4 primi

47 primi

A quadratum F G, ita quadratum B C, minus quadrato B k, ad quadratum B k; sed quadratum B C, minus quadrato B k, ostensum est æquale quadrato B I, ergo vt quadratum B G ad quadratum F G, ita erit quadratum B I ad quadratum B k, & per consequens vt B G ad F G, hoc est ad B E, ita erit B I ad B k, & permutando vt B G ad B I, ita B E ad B k, hoc * est, ita B F ad BC; sed minor est ratio B F ad B C, quàm B F ad B E, ergo & ratio B G ad B I, minor erit quàm B F ad B E, quod erat ostendendum. Theor. 7 huius

His demonstratis, Problema ita determinandum erit.

Determinatio

B Oportet quadratum aggregati crurum, maius esse quadratis, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & à perpendiculari dupla.

Determinatio I I.

Oportet quoque rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadratum differentiæ segmentorum basis, ad rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadrata differentiæ segmentorum basis, & perpendicularis duplæ, minorem rationem habere, quàm aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis. Sed aliter quoque in simpliciorem formam potest hæc secunda determinatio ita reduci.

C Oportet quoque duplam perpendicularem minorem habere rationem, ad rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadratum differentiæ segmentorum basis, quàm eadem recta ad aggregatum crurum.

Determinationem hanc demostrabimus hoc modo.

Quadratum B F superat quadratum B G * quadrato F G hoc est B E, idem autem quadratum B F, superat quadratum B I quadrato F I, hoc est quadrato H E, seu quadratis B E, B H, quadratum igitur B G superabit quadratum B I quadrato B H. 47 primi

Et quoniam ostensum est B G ad B I minorem rationem habere, quàm B F ad B E, vel ad F G, habebit quoque & quadratum B G ad quadratum B I minorem rationem, quàm quadratum B F ad quadratum F G; quare per conuersionem rationis, * quadratum B G ad quadratum B G, minus quadrato B I, hoc est ad quadratũ B H, maiorem habebit rationem, quàm quadratum B F ad quadratum B F, minus quadrato F G; hoc est ad quadratum B G; ergo * conuertendo minorem rationem habebit quadratum B H ad quadratum B G, quàm idem quadratum B G ad quadratum B F, & consequenter B H ad B G minorem quoque rationem habebit quàm eadem B G ad B F, quare constat Determinatio.

D (margin); 30 quinti; 26 quinti

Com-

A

Compositio Problematis.

SIt data perpendicularis trianguli A; aggregatum crurum B, & differentia segmentorum basis CD. Oportet inuenire triangulum. à puncto D ipsi C D ducatur perpendicularis D E, in eaq; ponatur C E æqualis B; quadratum igitur E C superat quadratum C D quadrato E D; itaq; recta E D, ex præcepto Porismatis, ponenda est pro prima quatuor proportionalium. Deinde in E D describatur semicirculus, in quo accomodetur D F æqualis duplæ A, (est autem E D maior quàm A dupla, quoniam ex prima determinatione Problematis quadratum E C, cui æqualia sunt quadrata C D, D E, maius est quadratis C D, & A duplæ, atq; adeo quadratum D E maius est quadrato duplæ A; vnde & recta D E maior quàm A dupla), & iungatur E F. Quoniam igitur quadratum E C superat quadratum C D quadrato D E; quadratum autē D E superat quadratum D F quadrato E F ipsum quadratū E C superabit quadrata C D, D F quadrato E F; ergo recta E F debet fieri secunda quatuor proportionaliū, tertia E C, & quærenda est quarta; sic Porisma docet, rectæ igitur E F ponatur æqualis E G, & agatur G H parallela ipsi D C secans E C in H, erit igitur vt E D ad D G, ita E C ad E H: quare E H est quarta proportionalis quæsita. Atq; ea debet fieri basis trianguli construendi. sic habetur ex Porismate. Ab ipsa igitur E H abscindatur E I æqualis C D (est autem C D minor, quàm E H; nam cùm sit vt E D ad E G, ita E C ad E H; ratio autem E D ad E G minor, quàm E C ad C D, ex secunda determinatione, erit ergo & ratio E C ad E H minor, quàm E C ad C D, quare * C D minor est, quàm E H). deinde reliqua I H secetur bifariam, & ad angulos rectos in K à recta L k æquali datæ A, & iungantur E L, L H. Itaq; triangulum L E H constitutum est, quemadmodum Porisma docet; est enim vt E D ad E G, hoc est ad E F, ita E C ad E H, hoc est vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum E C superat quadratum C D, ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo idem quadratum E C superat quadrata C D, D F, ita est aggregatum crurum ad basim. Nunc ostendendum est, triangulum illud Problema efficere.

B

C

* 8 quinti

D

In triangulo L E H perpendicularis L K æqualis est A datæ, ex constructione, & E I differentia segmentorum basis L k, K H æqualis C D, similiter ex constructione, superest vt composita ex cruribus E L, L H ostendatur æqualis datæ E. id fiet repetitis resolutionis vestigijs hac ratione.

Centro L interuallo L H describatur circulus secans eius E L in M, productum vero in N; is circulus transibit per punctum I cùm sint æquales I k, K H,

A KH, & Lk perpendicularis ad E H. Quoniam igitur quadratum E H minus quadrato H G æquale * est quadrato E G, hoc est E F, seu quod idem * est 47 primi
quadrato E D, minus quadrato D F, quadratum autem E D * æquale est qua- 47 primi
drato E C minus quadrato C D, ergo quadratum E H; minus quadrato H G æquale erit quadrato E C minus quadratis C D, D F. addantur vtrique parti quadrata H G, C D, D F; ea enim dempta sunt in resolutione, ergo quadrata E H, C D, D F, æqualia erunt quadratis E C, H G; sed quadratum C D æquale est quadrato E I, & quadratum D F quadruplum est quadrati L K; cum sit D F dupla ipsius L k, ergo quadrata E H, E I, vnà cum quadruplo quadrati L k æqualia erunt quadratis E C, H G; sed quadrata E H, E I * æqua- Theor. 4 primi
lia sunt duplo quadratorum E K, K H. ergo duplum quadratorum E k, k H,
B vnà quadruplo quadrati L k æquale erit quadratis E C, H G; sed duplum quadratorum E K, k H, vnà cum quadruplo quadrati L K * æquale est duplo qua- 47 primi
dratorum E L, L H, ergo duplum quadratorum E L, L H æquabitur quadratis E C, H G; duplum autem quadratorum E L, L H, hoc est E L, L N * æquale est quadratis E N, E M, ergo quadrata E N, E M quadratis E C, H G Theor. 4 primi
æqualia erunt.

Et quoniam propter similitudinẽ triangulorũ E H G, E C D est, vt E H ad H G, ita E C ad C D hoc est ad E I, rectangulum I E H sub extremis, hoc * est 16 sexti
rectangulum M E N æquale erit rectangulo E C, H G sub medijs, sed & quadrata E N, E M ostensa sunt æqualia quadratis E G, H G, ergo recta E M * æqua- Theor. 5 huius
lis erit rectæ H G, & E N æqualis E C, hoc est datæ B, quod erat ostendendũ.

C Constructum est igitur triangulum L E H quale construendũ proponebatur.

Problema V.

Data differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, & differentia crurum. Inuenire triangulum.

Resolutio.

Sit data differentia segmẽtorum basis D, differentia crurum B, & oporteat inuenire triangulum.

Sit iam factum, & aggregatum crurum triáguli estò A, ergo A + B erit * crus maius duplũ, A — B * du- Corol. 1 Probl. 1 Lib. 1
D plũ crus minus, & cõsequenter simplum crus maius, erit A $\frac{1}{2}$ + B $\frac{1}{2}$ crus minus A $\frac{1}{2}$ — B $\frac{1}{2}$, sed quadrata crurum æqualia sunt quadrato basis subtendẽtis angulum rectum trianguli, ergo

Quad. cruris maioris A Q $\frac{1}{4}$ + B Q $\frac{1}{4}$ + B in A $\frac{1}{2}$)
Quad. cruris minoris A Q $\frac{1}{4}$ + B Q $\frac{1}{4}$ — B in A $\frac{1}{2}$) æquabuntur quadrato basis

Hoc est A Q $\frac{1}{2}$ + B Q $\frac{1}{2}$ æquabitur quadrato basis

Et cõsequẽter L. V. A Q $\frac{1}{2}$ + B Q $\frac{1}{2}$ æquabitur ipsi basi

Et quoniam est * vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, Theor. 7 huius
ita basis ad aggregatum crurum, ideo proportionales erunt.

B D L. V. A Q $\frac{1}{2}$ + B Q $\frac{1}{2}$ A

Et per consequens earum quadrata proportionalia erunt.

$$BQ \quad DQ \quad AQ\,\tfrac{1}{2} + BQ\,\tfrac{1}{2} \quad AQ$$

Et duplatis antecedẽtibus, vt potestas integra fiat, erunt quoq; proportionalia

$$BQ\,2 \quad DQ \quad AQ + DQ \quad AQ$$

Et diuidendo proportionalia erunt

$$BQ\,2 - DQ \quad DQ \quad BQ \quad AQ$$

Atque proportionalia erunt, & eorum latera

$$L.V.\ BQ\,2 - DQ \quad D \quad B \quad A$$

Porisma.

Vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo duplum quadratum differentiæ crurum superat quadratum differentiæ segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli ad differentiam segmentorum basis; ita est differentia crurum ad aggregatum eorundem.

Datur ergo aggregatum crurum, de quo quærebatur.

Ex Porismate apparet differentiam segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli minorem esse recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum, eo quod duplum quadratum differentiæ crurum maius est quadrato differentiæ segmentorum.

Id ostendendum est atque Problemati præfigenda determinatio, ne differentia segmentorum basis detur non minor, quàm recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum. quamobrem ita propono.

Lemma.

Differentia segmentorũ basis subtendentis angulũ rectum trianguli, minor est, quàm recta cuius quadratũ æquale est duplo quadrati differentiæ crurum.

Sit triangulum A B C rectangulum in A, cuius basim B C secet perpendicularis A D in duo segmenta B D, D C, & centro A interuallo A C cruris minoris describatur circulus secans basim B C in E, crus vero B A in F, productum autem in G. Differentia igitur segmentorum B D, D C erit B E; differentia vero crurum B F. Dico B E minorem esse recta, cuius quadratum æquale est duplo quadrati B F. Quoniam enim B G secta est vtrunq; in A, quadratum totius B G vnà cum quadrato B F differentiæ partium * æquale erit duplo quadratorum B A, A G, hoc est B A, A C, seu quod idem est æquale erit duplo quadrati B C, & consequenter quadratum B G minus erit duplo quadrati B C. Et quoniam est B C ad B G vt B F ad B E, erit & quadratum B C ad quadratum B G vt quadratum B F ad quadratum B E, & duplatis antecedentibus vt duplum quadrati B C ad quadratum B G, ita erit duplum quadrati B F ad quadratum B E; sed quadratum B G ostensum est minus duplo quadrati B C, ergo & quadratum B E minus erit duplo quadrati B F, atque adeo & recta B E minor erit, quàm recta cuius quadratum

*Theor. 4 primi

æqua-

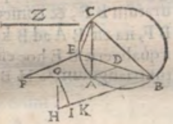
A æquale eſt duplo quadrati B F, quod erat oſtendendum.

Hoc igitur demonſtrato, Problema ita determinandum erit.

Determinatio.

OPortebit differentiam ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectū trianguli, minorem eſſe recta, cuius quadratum duplum eſt quadrati differentiæ crurum, maiorem vero differentia crurum.

Compoſitio Problematis.



SIt data differentia ſegmẽtorum baſis angulum rectum ſubtendentis Z. differentia crurum A B.
B Oportet inuenire triangulum. Ponatur ipſi A B æqualis, & ad angulos rectos A C, & cõnectatur C B. quadratum igitur C B æquale erit quadratis C A, A B, & ideo duplum erit quadrati A B. Itaque à quadrato C B debet auferri quadratum Z, ſic Poriſma iubet; eſt autem Z minor, quàm C B ex prima determinationis parte; ergo in circulo circa diametrum C B deſcripto aptetur B E æqualis Z; ea maior erit, quã A B, ex ſecunda parte determinationis, & iuncta E C quadrata C E, E B æqualia erũt quadrato C B; rectus eſt enim angulus C E B in ſemicirculo, quare ſi à quadrato C B auferatur quadratum E B; hoc eſt Z remanebit quadratum C E, rectæ igitur C E quadratum æquale erit exceſſui, quo duplum quadrati A B ſu-
C perat quadratum Z, ergo ipſa C E ponenda eſt pro prima quatuor proportionalium, quarum ſecunda erit B E, tertia B A, & quærenda eſt quarta. ſic habetur ex Poriſmate. Itaque à recta E B abſcindatur B D æqualis E C, & connectatur D A, cui parallela agatur E F occurrens B A continuatæ in F. erit igitur vt B D ad B E, ita B A ad B F. inuenta eſt igitur quarta proportionalis B F; ea debet æquari compoſitæ ex cruribus trianguli conſtruendi, vt in Poriſmate, ſed eorundem crurum datur differentia A B, ergo ſecetur F A bifariam in G à perpendiculari G H æquali ipſi G A, vel G F, & connectatur H B compoſita igitur ex cruribus H G, G B trianguli H G B, (manente tamen eorundem differentia A B) æqualis erit ipſi B F. Itaque conſtitutum eſt triangulum H G B, quemadmodum Poriſma docet, eſt enim vt B D,
D hoc eſt E C ad B E, ſeu Z, ita B A ad B F, hoc eſt vt recta cuius quadratum æquale eſt ei, quo differt duplum quadrati differentiæ crurum, à quadrato differentiæ ſegmentorum baſis ad differentiam ſegmentorum, ita differentia crurum ad aggregatum eorundem. Nunc autem oſtendendum eſt triangulum G H B eſſe quale Problema requirit.

Primum igitur triangulum G H B rectangulũ eſt, quoniã angulus H G B rectus eſt, ex conſtructione. deinde crura eius H G, G B differunt per A B datam; ſunt enim æquales H G, G A, ex conſtructione; itaque ſupereſt, vt differentia ſegmentorum baſis æquetur Z datæ; id autem ita fit manifeſtum.

Ducatur enim G I baſi H B perpendicularis, & centro G interuallo G H, de-

scribatur circulus secans basim H B in K, erunt æquales H I, I K, vnde differentia segmentorum H I, I B erit K B. Quoniam igitur ob parallelas D A, E F est, vt D B, hoc est E C ad B E, ita A B ad B F; erit & quadratum E C ad quadratum B E, vt quadratum A B ad quadratum B F, & componendo (nã in resolutione per diuisionem rationis argumentatus sum) erit vt quadrata
47 Primi E C, B E, hoc est * vt quadratum C B, seu quod idem est, vt duplum quadrati
Theor. 4 primi A B ad quadratum B E, ita quadrata A B, B F hoc est ita * duplum quadratorum F G, G B, seu G H, G B ad quadratum B F, & subduplatis antecedẽtibus, (in resolutione enim duplata sunt antecedentia) erit vt quadratum A B ad quadratum E B, ita quadrata G H, G B, hoc est, ita quadratum B H ad quadratum B F, & consequenter, vt A B ad B E, ita B H ad B F, sed vt B H ad B F, ita est B A ad B k; ergo vt A B ad B E, ita erit A B ad B K; quare B k æqualis erit B E hoc est Z datæ, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum G H B & Problemati satisfit quod faciendum erat.

Scholium.

Aduersus constructionem huius Problematis duæ feruntur instantiæ quorum altera per primam Determinationis partem dissoluitur; altera per secundam. Et prima quidem Determinationis pars in Porismate conspicitur; scilicet differentiam segmentorum basis minorem esse debere recta, cuius quadratum duplum est quadrati differentiæ crurum, eò quod quadratum differentiæ segmentorum minus est duplo quadrato differentiæ crurum, vt Porisma indicat.

Secunda verò pars Determinationis, nempe differentiam segmentorum basis maiorem esse debere, differentia crurum, neque in propositione Problematis, neque in Porismate cernitur; sed per instantiam quæ aduersus constructionem fertur manifesta fit. Nam cum in circulo C A B aptari debeat recta B E æqualis Z, differentiæ segmentorum basis, vt Porisma iubet; ea, nisi esset maior quam A B differentia crurũ recta E C, non esset minor, quàm E B, nec ideo ab ipsa E B, posset abscindi recta æqualis E C; itaque Problema coustrui non posset. Sed cum istantia hæc constructioni aduersans procedat ab eo; quod differentia segmentorum basis posset exponi, non maior, quàm differentia crurum, adiecta Determinatione Problemati, vt ipsa differentia segmentorum maior sit, quàm differentia crurum, ea instantia dissoluitur. differentiam autem segmentorum maiorem esse, differentia crurum, demonstrauimus Lemmate primo Problemate tertij huius libri. Atque hæc quidem de inuentione Determinationis in hoc, atque in scholio Problematis tertij huius libri dicta sufficiant.

Problema VI.

Data differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, & aggregato crurum, inuenire triangulum.

Reso-

A

Resolutio.

Sit data differentia segmentorum basis D; aggregatum crurum B; & oporteat inuenire triangulum.

SIt iam factum, & differentia crurum trianguli esto A, ergo $B + A$ erit duplum cruris maioris, & $B - A$ duplum cruris minoris, vnde simplum crus maius erit $B\frac{1}{2} + A\frac{1}{2}$, simplum crus minus $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$. At quadrata crurum* æqualia sunt quadrato basis subtendentis angulum rectum trianguli, ergo 47 primi

Quad. cruris maioris $BQ\frac{1}{4} + AQ\frac{1}{4} + B \text{ in } A\frac{1}{2}$)
Quad. cruris minoris $BQ\frac{1}{4} + AQ\frac{1}{4} - B \text{ in } A\frac{1}{2}$) æquabuntur quadrato basis

B Hoc est $BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ æquabitur quadrato basis

Et cõsequenter $L,V.BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ æquabitur ipsi basi.

Et quoniam est* vt aggregatum crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad differentiam crurum; proportionales erunt. Theor. 7 huius

B, D, $L.V.BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$, A

Atque eorum quadrata proportionalia erunt.

BQ DQ $BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ AQ

Et duplatis antecedentibus, vt potestas integra fiat, erunt proportionalia

$BQ2$ DQ $BQ + AQ$ AQ

Et diuidendo proportionalia erunt.

C $BQ2 - DQ$ DQ BQ AQ

Et consequenter eorum latera proportionalia erunt.

$L.V.BQ2 - DQ$ D B A

Porisma.

Vt recta cuius quadratũ æquale est ei, quo differt duplum quadratũ aggregati crurum, à quadrato differentiæ segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, ad differentiam segmentorum basis; ita est aggregatum crurum ad differentiam eorundem.

Datur ergo differentia crurum, de qua quærebatur.

D

Compositio Problematis.

SIt data differentia segmentorum basis angulum rectum subtendentis Z, aggregatum crurum AB. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iungatur CB; eius igitur quadratum æquale erit quadratis CA, AB, & ideo quadrati AB duplũ, itaq; à quadato CB auferendũ est quadratũ Z. sic Porisma fieri iubet. ergo describatur circulus circa diametrũ CB, in eoq. aptetur CD æqualis Z, & iungatur DB.

 Qua-

Quadrata igitur C D, D B æqualia erunt quadrato C B, quoniam rectus est A
in semicirculo angulus C D B, quare si à quadrato C B auferatur quadratum C D, hoc est Z, remanebit quadratum D B. Itaque rectæ D B quadratum æquale erit ei, quo differt duplum quadrati A B à quadrato Z. Igitur ipsa D B ponenda est pro prima quatuor proportionalium, quarum secunda erit Z, tertia A B, & quærenda est quarta. id Porisma præcipit. Sumatur ergo ipsi Z, vel D C æqualis B E, & iungatur D A, cui parallela agatur E F secans A B in F, vt igitur B D ad B E, ita erit B A ad B F; inuenta est igitur quarta proportionalis B F. ea debet fieri differentia crurum trianguli quæsiti, sic Porisma docet; sed eorumdem crurum aggregatum datur A B, ergo secetur F A bifariam in G à perpendiculari G H, æquali ipsi G A, vel G F, & connectatur H B. Differentia igitur crurum H G, G B trianguli H G B, manente quidem eorumdem aggregato A B, erit B F. Itaque constitutum est triangulum H G B, vt Porisma docet. est enim vt B D ad B E, hoc est ad Z, ita B A ad B F, idest, vt recta cuius quadratum æquale est ei, quo differt duplum quadratum aggregati crurum, à quadrato differentiæ segmentorum basis ad differentiam segmentorum, ita aggregatum crurum ad differentiam eorumdem. Nunc ostendendum est in triangulo G H B, esse ea, quæ requiruntur. B

In triangulo igitur G H B angulus H G B rectus est, ex constructione, composita verò ex cruribus H G, G B æqualis est A B datæ; reliquum autẽ, nempe vt differentia segmentorum basis æquetur datæ Z, id autem, repetendo resolutionis vestigia, ita fit manifestum.

Ducatur G I perpendicularis ad basim H B, & centro G interuallo G H, vel C
3 tertij D F, seu G A describatur circulus secans basim H B in K. erunt igitur * æquales H I, I K, & ob id differentia segmentorum H I, I B, erit K B. Et quoniam ob parallelas D A, E F, est, vt B D ad B E, hoc est D C, ita B A ad B F; erit quoque & quadratum B D ad quadratum D C, sicut quadratum B A ad quadratum B F; & componendo erit, vt quadrata B D, D C, hoc est, vt quadratum C B, seu quod idem valet, vt duplum quadrati A B ad
Theor. 4 primi. quadratum D C, ita quadrata B A, B F, hoc est, ita * duplum quadratorum A G, G B, vel G H, G B ad quadratum B F, & subduplatis antecedentibus erit, vt quadratum A B ad quadratum D C, ita quadrata G H, G B, hoc est, ita quadratum B H ad quadratum B F, & consequenter vt A B ad D C, ita erit B H ad B F; sed B H ad B F est, vt B A ad B k, ergo vt A B ad D
D C, ita erit A B ad B k, quare B k æqualis erit D C, hoc est Z datæ, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum G H B, vt faciendum erat.

Problema VII.

Data differentia crurum trianguli, & differentia segmentorum basis, datoque excessu inter crus maius & basim, inuenire triangulum.

A HOc Problema quatuor casus habet: aut enim excessus est penes basim, aut penes crus maius; & si penes crus, aut differentia segmentorum basis maior est, quàm dupla differentia crurum, aut minor, aut æqualis; quartus hic casus vix inter Problemata annumerari potest, cùm in eo innumera triangula Problemati satisfaciant, vt ex eius resolutione & compositione patebit. Primum igitur sit excessus ille penes basim.

Resolutio Primi Casus.

SIt data differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis D, & excessus, quo basis superat crus maius G. Oportet inuenire
B triangulum.

Sit iam factum, eiusque basis esto A, ergo crus maius erit A — G, crus minus A — G — B; differunt enim crura per B, atque aggregatum crurum erit A 2 — G 2 — B. At rectangulum sub differentia crurum & aggregato eorumdem* æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis & ipsa base. itaque Theor. 6 huius

B in (A 2 — G 2 — B æquabitur D in A

Seu quod idem est B in A 2 — B in G 2 — B Q æquabitur D in A

Additis vtrobiq; B in G 2, & B Q, ergo

B in A 2 æquabitur D in A + B in G 2 + B Q.

Et ablato vtrinque D in A, vt cognita ab incognitis separentur,

C B in A 2 — D in A æquabitur B in G 2 + B Q

Seu quod idem est B 2 — D) in A æquabitur G 2 + B) in B.

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

B 2 — D. G 2 + B. B. A

Porisma.

Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli præstat differentiæ segmentorum basis, ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius, ita est differentia crurum ad basim.

Datur ergo basis trianguli, de qua quærebatur.

D Ex Porismate apparet in huiusmodi triangulo duplam crurum differentiam maiorem esse differentia segmentorum basis. quod quidem, antequam Problema componam, demonstrandum est, atque Problemati præfigenda determinatio, ne crurum differentia dupla detur, non maior quàm differentia segmentorum basis. Itaq; ad id ostendendum Lemma huiusmodi propono.

Lemma.

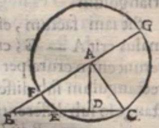
Si basis trianguli fuerit crure maiore maior, dupla crurum differentia differentiam segmentorum basis excedet.

Hoc

HOc Lemma quod ad determinationem Problematis attinet sic propositum & demonstratum determinationi satisfacit, vt in libro variorum Lem. 2 ante Problema quintum factum est. Verùm quoniam dupla differentia crurum trianguli, etiam si basis fuerit minor crure maiore, potest esse maior quàm differentia segmentorum basis, ideo Lemma illud in meliorem formam sic propono.

Lemma.

Si basis trianguli fuerit dimidio aggregati crurum maior, dupla crurum differentia, differentiam segmentorum basis excedet.



SIt triangulum A B C, cuius basis B C, sit maior dimidio aggregati crurum B A, A C, & centro A interuallo A C cruris minoris describatur circulus secans crus A B productum in punctis F G, basim vero B C in E, & cadat in B C, perpendicularis A D. erit igitur B F differentia crurum A B, A C, differentia vero segmentorum B D, D C erit B E;
3 tertij sunt enim* æquales E D, D C. Dico duplam B F maiorem esse quam B E. Quoniam enim B C ponitur maior dimidia B G, dupla B C maior erit, quàm
Theor.7 huius tota B G, sed vt B C ad B G, ita* est B F ad B E, ergo duplatis antecedentibus erit, vt B C dupla ad B G, ita dupla B F ad B E; sed B C dupla ostensa est maior, quàm B G, ergo & B F dupla, maior erit quàm B E, quod erat ostendendũ.
Hoc igitur demonstrato præfigenda est huic casui hæc determinatio.

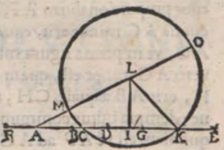
Determinatio.

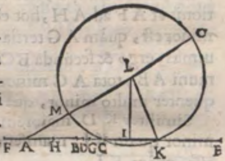
OPortebit duplam differentiam crurum maiorem esse differentia segmentorum basis, simplam vero minorem.

Compositio Primi Casus.

SIt data differentia crurum trianguli A B, differentia segmentorum basis A C, quæ sit maior, quàm A B, minor autem, quàm dupla A B & excessus, quo basis superat crus maius B D. Oportet inuenire triangulum. Fiat C F dupla ipsius A B, ea, ex determinatione, maior erit, quàm A C. similiter & B G fiat dupla ipsius B D, & fiat vt A F ad A G, ita A B ad aliam, quæ sit A k; ea ex præcepto Porismatis debet fieri basis trianguli construendi, eamq; maiorem esse, quam A C ostendetur infra, ergo secetur C k bifariam in I à perpendiculari I L, in qua ponatur k L æqualis K D; ipsa autem K D maior est quam K I, vt demonstrabimus infra & iungatur A L. posuimus k L æqualem k D pro crure minore trianguli construendi, quoniam ipsum crus debet superari à base A K, excessu A D; nam cum basis A k debeat superare crus maius, excessu B D, crus autem maius superare debeat crus minus exces-
su

A ſu A B; baſis A k debebit ſuperare crus minus vtroq; exceſſu A B, B D. Conſtructum eſt igitur triangulum L A K, quemadmodum Poriſma conſtruere docet, factum eſt enim vt A F exceſſus, quo A B. dupla ſuperat A C, ad compoſitam ex A B, & dupla B D, ita A B ad A K baſim trianguli L A k. Nunc demonſtrandum eſt in eo triangulo eſſe ea quæ requiruntur. Differentia ſegmentorum baſis A I, I K eſt ipſa A C data, cum ſint æquales C I, I k, ex conſtructione; differentia vero crurum A L, L k æqualem





B eſſe A B datæ, per reſolutionis regreſſum oſtendetur; reliquum autem, ideſt latus A L ſuperari à baſe A K exceſſu B D ex demonſtratis patebit. Centro igitur L interuallo L k deſcribatur circulus ſecans A L in M; productam verò in O, is circulus tranſibit per C cum ſint * æquales C I, I k. deinde producatur A k in E, vt ſit k E æqualis k G. Quoniam igitur E G dupla eſt ipſius K G, & G B dupla ipſius G D tota E B erit dupla totius k D, hoc eſt ipſius k L, atque adeo B E, M O æquales erunt. 3 tertij

Et quoniam eſt vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum F A K ſub extremis æquale erit rectangulo B A G ſub medijs, ſed rectangulum F A K æquatur rectangulo C F, A K, minus rectangulo C A K, hoc eſt æquatur duplo rectanguli B A K, minus rectangulo C A k recta enim C F dupla eſt ipſius A B) ergo duplum rectanguli B A K, minus rectangulo C A K, æquale erit rectangulo B A G. addatur vtrobique rectangulum C A K; detractum enim fuit in reſolutione, ergo duplum rectanguli B A K; hoc eſt rectangulum ſub B A, & dupla A K, æquabitur rectangulis B A G, C A K. auferatur vtrinque rectangulum B A G, additum fuit in reſolutione, ergo rectangulum ſub A B, & dupla A k, minus rectangulo B A G, ſeu quod idem valet, rectangulum ſub B A, & compoſita ex A K, k G, quod eſt rectangulum B A E (ſunt enim æquales k G, k E, ex conſtructione) æquale erit rectangulo C A K, * hoc eſt M A O, atque ſunt æquales M O, B E, vt eſt demonſtratum, ergo & A M * æqualis erit A B. Reliquum eſt vt baſis A k ſuperet crus L A exceſſu B D; id autem ex demonſtratis patet; nam cum L k ſuperetur ab A k exceſſu A D, ex conſtructione, ab A L verò exceſſu A B, vt demonſtrauimus, L A ſuperabitur ab A k reliquo exceſſu B D. Conſtructum eſt igitur triangulum L A k, cuius crurum differentia A M, æqualis eſt datæ A B; differentia vero ſegmentorum baſis eſt ipſa A C data, & baſis A K ſuperat crus maius L A dato exceſſu B D, quod erat faciendum.

C (margin, beside "tur rectangulo C F")

D (margin, beside "M A O") — 36 tertij; Theor. 4 huius

At vero A K maiorem eſſe, quàm A C ſic demonſtrabitur. Quoniam enim A B minor eſt, quàm A C, ex determinatione, atque F C dupla eſt ipſius A B, ex conſtructione, erit A F minor, quàm A B ſed A F eſt prima quatuor

14 quinti tuor proportionalium A F, A G, A B, A K; ipsa autem A B tertia, ergo &* secunda A G minor erit, quàm A K quarta; si igitur A G non est minor, quàm A C, vt in prima figura manifestum est A K maiorem esse, quàm A C. Si verò A G minor est, quàm A C, vt in secunda figura, secetur F C bifariam in H, erit A B æqualis C H, recta enim F C dupla est ipsius A B ex constructione; dempta igitur communi H B, reliqua A H reliquæ B C æqualis erit. Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, ex constructione, erit permutando, vt A F ad A B, hoc est ad F H, ita A G ad A K, & per diuisionem rationis vt A F ad A H, hoc est ad B C, ita erit A G ad G K; sed A F prima minor est, quàm A G tertia, cum sit etiam minor quàm A B, vt demonstrauimus, ergo & secunda B C minor erit, quàm G H quarta atque addita communi A B, tota A C minor erit, quàm composita ex A B, G K, & consequenter multo minor, quàm A K quod erat ostendendum.

Similiter K D maiorem esse, quàm K I sic ostendetur. Si K G non est minor quam K I, manifestum est K D compositam ex K G, G D maiorem esse, quàm K I.

Sed K G sit minor quam K I. Quoniá igitur A K ostensa est maior, quam A G, dempta communi A D, reliqua D K maior erit, quàm reliqua D G, hoc est quam D B, & ideo multo maior, quàm D C; ergo punctum D, erit inter puncta C I, cum sint * æquales K I, I C. quare K D maior est quàm K I. quod erat ostendendum.

3 tertij

CON-

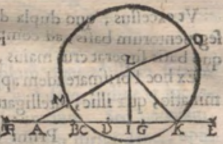
A

CONSPECTVS RESOLVTIONIS, ET COMPOSITIONIS.

Initium Resolutionis,		Finis Compositionis.	
seu quod B in(A 2 — G 2 — B idē est B in A 2 — B in G 2 — B Q	D in A D in A	V B A E V B A G V B A K 2	hoc est V M A O V C A K
addatur B in G 2 & B Q		auferatur V B A G	
B in A 2	D in A † B in G 2 † B Q	V B A K 2	V B A G † V C A K
auferatur D in A		addatur V C A K	
seu quod B in A 2 — D in A idē est B 2 — D) in A	B in G 2 † B Q G 2 † B) in B	— V C A K seu V B A K 2 — V C A K hoc est V C B A K V F A K	V B A G
æqualitas ad proportionem		proportio ad æqualitatē	
B 2 — D G 2 † B B A		A F A G A B A K	
Finis Resolutionis.		Initium Compositionis	

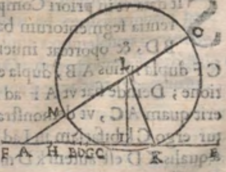
B

C



D

* *Similiter rectang. B A E idem est, quod in resolutione B in (A 2 -- G 2 -- B. nam ipsum rectang. B A E continetur sub B A, & excessu, quo A K dupla superat G A compositam ex G B, B A, hoc est ex G D dupla, & ipsa B A. cui quidem rectangulo respondet ex resolutione rectang. B, in (A 2 -- G 2, -- B.*



* *Nota quod rectang. B A G. idem est quod in resolutione B in G 2 † B Q. nam ipsum rectang. B. A G æquale est rectang. A B. G. plus quadrato A B. hoc est rectangulo A B D. bis, plus quad. A B. quæ quidem in resolutione sunt B in G 2 † B Q.*

Eundem

Eundem casum alia breuiori via, & resoluam, & componam, in eoque resol- A
uendo proportione vtar, non æqualitate.

Eiusdem Casus secunda Resolutio.

Theor. 7 huius

IIsdem datis, positisque, vt in antecedente resolutione, & resumpta eiusd em resolutionis figura. Quoniam est* vt differentia crurum triãguli ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, erunt proportionales.

B D A A2—G2—B

Et duplatis antecedentibus, proportionales erunt

B2 D A2 A2—G2—B B

Et per conuersionem rationis proportionales erunt

B2 B2—D A2 G2 + B.

Rursus subduplatis antecedentibus, erunt proportionales

B B2—D A G2 + B

Et conuertendo erunt proportionales

B2—D B G2 + B A

Denique permutando proportionales erunt

B2—D G2 + B B A

Hæc autem permutatio non erat necessaria, cum etiam in penultima proportionalium serie, primi tres termini cogniti existant, sed quoniam in eandem proportionem recidit hæc resolutio quemadmodum & antecedens; vo- C
lui vt etiam eorum Porismata eadem verborum textura exempli arcentur.

Porisma.

Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli præstat differentiæ segmentorum basis, ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius, ita est differentia crurum ad basim.

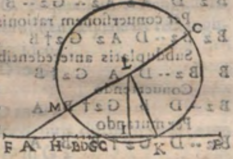
Ex hoc Porismate idem apparet quod ex præcedenti, eadem ergo Determinatio, quæ illic, intelligatur hic quoq; apposita, ac demonstrata.

Primi Casus Compositio secunda:

SIt data vt in priori Compositione differentia crurum trianguli AB, diffe- D
rentia segmentorum basis A C, & excessus, quo basis superat crus maius B D, & oporteat inuenire triangulum. Producatur C A in F, vt sit C F dupla ipsius A B, dupla enim A B maior est, quàm A C, ex determinatione; Deinde fiat vt A F ad A G, ita A B ad aliam, quæ sit A K, ea maior erit quam A C, vt demonstratum est sub antecedenti Compositione. Secetur ergo C k bifariam in I ad rectos angulos à recta I L, in qua ponatur K L æqualis K D est autem k D maior, quàm k I, vt sub eadem Compositione demonstrauimus, & iungatur A L. Hæc constructio eadem est, quæ in præcedenti compositione; quoniam vtraque fit per rationem vnius, eiusdemque Po-

A Porismatis. In triangulo igitur L A k differentia segmentorum basis A I, I K est ipsa A C data, cum sint æquales C I, I k, ex constructione. vt autem ostendantur reliqua, centro L interuallo L k circulus describatur secans A L in M, productum vero in O; is circulus transibit per C, cum sint æquales C I, I K. deinde producatur A K in E, vt sit k E æqualis k G. Quoniam igitur E G dupla est ipsius K G, & G B dupla ipsius G D, tota E B erit dupla totius k D, hoc est ipsius k L; sed & M O dupla est ipsius L k, ergo æquales erunt B E, M O.

B Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, erit permutando vt A F ad A B, ita A G ad AK, & conuertendo vt A B ad A F, ita A K ad A G, & duplatis antecedentibus vt F C ad A F, ita erit A K bis ad A G, & per conuersionem rationis vt F C ad A C, ita A k bis ad A E, & rursus subduplatis antecedentibus, vt A B ad A C, ita erit A K ad A E, sed vt A C ad A M, ita est A O ad A K; ergo in perturbata proportione erit vt A B ad A M, ita A O ad A E; atque M O ostensa est æqualis B E, ergo & A M * æqualis erit A B. restat igitur vt basis A k superet crus maius L A, excessu B D; id autem ita fit manifestum: Theor. 4. huius



C Quoniam enim L k superatur ab A k, excessu A D, ex constructione, ab L A verò excessu A B, vt demonstrauimus, L A superabitur ab A k, reliquo excessu B D. Constructum est igitur triangulum E A K, &c. quod faciendum erat.

Scholium.

Hæc demonstratio procedit per resolutionis filum vsque ad illam seriem quatuor proportionalium A B, A C, A K, A E inclusiue, ordine vt hìc iacent dispositarum, illinc enim Resolutio sumpsit initium. Sed quoniam A M conferenda est cum A B, ad quod omne consilium dirigi debet, opus

D fuit eximere duas medias proportionales A C, A k, & in earum locum alias duas subrogare A M, A O; quippe quæ prioribus ad constitutionem proportionalium manentibus extremis A B, A E sunt æquiualentes; cùm rectangulum C A K * æquale sit rectangulo M A O, quæ quidem subrogatio fit per argumentationem ex æquali in proportione perturbata, vt cernitur. 16 tertij

CONSPECTVS RESOLVTIONIS, ET COMPOSITIONIS.

Initium Resolutionis.

B D A A2 -- G2 -- B

Duplatis antecedentibus

B2 D A2 A2 -- G2 -- B

Per conuersionem rationis

B2 B2 -- D A2 G2 + B

Subduplatis antecedentibus

B B2 -- D A G2 + B

Conuertendo

B2 -- D B G2 + B A

Per mutando

B2 -- D G2 + B B A

Finis Resolutionis.

Finis Compositionis.

AB AC AM AK AO AE

Subduplatis antecedentibus

FC AC AK2 AE

Per conuersionem rationis

FC AF AK2 AG

Duplatis antecedentibus

AB AF AK AG

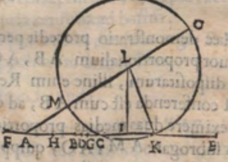
Conuertendo

AF AB AG AK

Permutando

AF AG AB AK

Initium Compositionis.



Alias duas Resolutiones, & Compositiones eiusdem Casus proferam, quarum altera per æqualitatem, altera per proportionem procedet; sed aliter atque in præcedentibus, in ijs enim quæsita est basis trianguli; in his de aggregato crurum quæram.

A Primi Casus Resolutio tertia.

IIsdem datis, nempe differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis D, & excessus quo basis superat crus maius G. Oportet inuenire triangulum.

Corol. 1 Probl. 2 primi.

Aggregatum crurū de quo quæratur estò A, ergo duplum cruris maioris erit $A + B$; quare simplum $A\frac{1}{2} + B\frac{1}{2}$ & cum basis superet crus maius excessu G, erit basis $A\frac{1}{2} + B\frac{1}{2} + G$. & quoniam rectangulum sub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem æquale est rectangu-
B lo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base; ideo

B in A æquabitur D in $A\frac{1}{2}$ + D in $B\frac{1}{2}$ + D in G.

Et duplicatis omnibus vt fractiones vitentur

B in A 2 æquabitur D in A + D in B + D in G 2.

Auferatur vtrinque D in A, vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

B in A 2 — D in A æquabitur D in B + D in G 2

Seu quod idem est B 2 — D) in A æquabitur B + G 2) in D

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

B 2 — D   B + G 2   D   A

Porisma.

C Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli superat differētiam segmentorum basis ad compositam ex differentia crurum, & duplo excessu, quo basis superat crus maius, ita est differentia segmentorum basis ad aggregatum crurum.

Datur ergo aggregatum crurum.

Idem apparet ex hoc Porismate, quod ex præcedētibus, nempè duplam differentiam crurum, maiorem esse differentia segmentorum basis; quare intelligatur hic quoque eadem determinatio, quæ supra.

Primi Casus Compositio tertia.

D SIt data differentia crurum trianguli, A B, differentia segmentorum basis A C, & excessus quo basis superat crus maius B D. Oportet inuenire triangulum. Positis in directū A B, B D, duplicetur B D in G, & C A producatur in F, vt sit C F dupla ipsius A B, est autē A B dupla maior, quàm A C, ex Determinatione. Deinde fiat vt A F ad A G, ita A C ad aliam, quæ sit A E, ea maior erit, quàm A G,

quia & A C maior est, quàm A F, atque ablatis A B ab A G, & A H, æquali ipsi A B ab A E, reliqua H E maior erit, quàm reliqua B G, & cum secetur H E bifariam in L, erit quoque L E maior, quàm B D, quæ dimidia est ipsius G B. in ipsa igitur L E sumatur L O æqualis B D, & centro L interuallo L E, vel L H describatur circulus. similiter centro A interuallo A O alius circulus describatur secans priorem in K, & iungantur A K, L K, ipsam autẽ A k secet circulus E k H in M, perpendicularis vero L I in I. Itaque constructũ est triangulum L A k quemadmodum Porisma docet, factum est enim vt A E excessus, quo A B dupla superat A C, ad A G compositam, ex A B, & B D dupla; ita A C ad A E aggregatum crurũ trianguli A L K. Huius igitur trianguli crura L A, L K differunt per A k æqualem datæ A B, ex constructione; basis verò A k superat crus maius A L excessu L O æquali ipsi B D, pariter ex constructione. Superest igitur vt differentia segmentorum basis ostendatur æqualis datæ A C, id autem repetendo resolutionis vestigia, ita perspicuũ fiet. A B

i Tertij Quoniam enim L I perpendicularis est ad A k, erunt æquales M I, I K; quare differentia segmentorum A I, I K, erit A M; Et quoniam est vt A F ad A G, ita A C ad A E, rectangulum F A E sub extremis, æquale est rectangulo C A G sub medijs, sed rectangulum F A E, idem valet, quod rectangulum F C A E minus rectangulo C A E, hoc est idem valet, quod rectangulum H A E bis, minus rectangulo C A E; ergo rectangulum H A E bis, minus rectangulo C A E, æquale erit rectangulo C A G, addito vtrique parti rectangulo C A E, rectangulũ H A E bis, æquale erit rectangulo C A G, plus rectangulo C A E, hoc est æquale erit rectangulo, C A, G E, sed rectangulum C A, G E duplum est rectanguli C A O; nam cum sint æquales A B, A H, & æquales quoque L E, L H, erit E B dupla ipsius A L, sed & B G dupla est ipsius L O, ergo tota E G dupla erit totius A O, & consequenter rectangulum C A, G E duplum rectanguli C A O. rectangulum igitur H A E bis, hoc est M A K, bis, æquale erit rectangulo C A O bis, vel C A k bis, vnde & rectangulum M A K semel, æquale rectangulo C A K semel, quare & recta M A æqualis rectæ A C, quod erat ostendendum. Constructum est igitur L A K, &c. quod faciendum erat. C

Primi Casus Resolutio quarta.

Theor. 7 huius I Isdem datis, positisque prout in antecedenti Resolutione. Quoniam est vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, erunt proportionales. D

B D $A\frac{1}{2}$ ✢ $B\frac{1}{2}$ ✢ G A

Et duplatis antecedẽtib⁹, proportionales erũt

B 2 D A ✢ B ✢ G 2 A

Et diuidendo erunt quoque proportionales

B 2 — D D B ✢ G 2 A

Et permutando erunt proportionales

B 2 — D B ✢ G 2 D A.

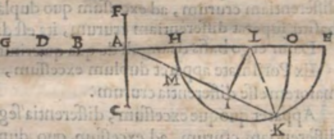
Hæc

A Hæc permutatio quamuis non ſit neceſſaria, cum & in penultima proportionalium ſerie primi tres termini cogniti exiſtant; tamen facta eſt, vt cum ſit eadem proportio, quæ in antecedenti Reſolutione, ſit quoque idem & Poriſma.

Poriſma.

Vt exceſſus quo dupla differentia crurum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad compoſitam ex differentia crurum, & duplo exceſſu, quo baſis ſuperat crus maius; ita eſt differentia ſegmentorum baſis ad aggregatum crurum.

B Primi Caſus Compoſitio quarta.



IIſdem datis quæ in antecedenti compoſitione, eademque conſtructione facta. oſtendendum eſt A M differentiam ſegmentorum baſis æquari A C datæ; cætera enim, vt illic, ex conſtructione patet.

Quoniam enim vt A F ad A G, ita eſt A C ad A E, ex conſtructione, erit permutando, vt A F ad A C, ita A G ad A E, & componendo vt FC ad AC, ita G E ad A E, ſed F C dupla eſt ipſius A B, vel A H ex conſtructione, & G E
C dupla ipſius A O, vt oſtenſum eſt in præcedenti compoſitione, ergo ſubduplatis antecedentibus erit A H ad A C, vt A O, hoc eſt A k ad A E, ſed & A H ad A M, eſt quoque vt A k ad A E, ergo vt A H ad A C ita erit eadem A H ad A M, quare A M æqualis erit A C, quod erat oſtendendum. Conſtructum eſt igitur triangulum L A k in quo A H differentia crurũ æqualis eſt datæ AB, & A M differentia ſegmentorum baſis; æqualis A C, atque L O exceſſus, quo baſis A k ſuperat crus A L, æqualis B D. quod facere oportebat.

Reſolutio Secundi Caſus.

DEinde exceſſus, qui eſt inter crus maius, & baſim ſit penès ipſum crus, atq; differentia ſegmentorum baſis ſit maior, quàm dupla differentia crurum.
D

Sit igitur data differentia crurum trianguli B, differentia ſegmentorum baſis D, quæ ſit maior; quàm dupla B, & exceſſus, quo crus maius ſuperat baſim ſit G. oportet inuenire triangulum.

Baſis trianguli eſto A, ergo crus maius erit A + G, crus minus A + G — B, differunt enim crura per B, atque adeo aggregatum crurum erit A 2 + G 2 — B, & quoniam rectangulũ ſub differentia crurum, & aggregato eorundẽ *æquale eſt Theor. 6 huius

est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base, ideo A
B in A 2 + B in G 2 — B Q æquabitur D in A.

Quoniam autem ponitur D maior, quàm dupla B, planum D in A maius erit plano B 2 in A, vel quod idem est B in A 2, itaque poterit B in A 2 auferri A D in A. auferatur ergo vtrinque, vt cognita ad incognitis separentur, ergo
B in G 2 — B Q æquabitur D in A — B in A 2.

Seu quod idem est G 2 — B) in B æquabitur D — B 2) in A

Et reuocata ad proportionem æqualitate, erunt proportionales
D — B 2   G 2 — B   B   A

Porisma.

Vt excessus quo differentia segmentorum basis trianguli superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia inter crus maius, & basim superat differentiam crurum, ita est differentia crurum, ad basim. B

Datur ergo basis trianguli de qua quæritur.

Ex Porismate apparet duplum excessum, quo crus maius superat basim, maiorem esse differentia crurum.

Apparet quoque excessum, differentia segmentorum basis superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia cruris maioris, & & basis superat differentiam crurum, minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis. primus enim excessus ad secundum se habet vt differentia crurum ad basim. sic Porisma indicat.

Hæc omnia ostendenda sunt vt data intra terminos coerceantur, non enim ex quibuscunque datis Problema construi posse manifestum est. Dico igitur Lemmata ad determinationes pertinentia sic propono. C

Lemma I.

Si basis trianguli fuerit crure maiore minor; differentia autem segmentorum basis fuerit maior, quàm dupla differentia crurum; Duplus excessus, quo crus maius superat basim, maior erit quàm differentit crurum.

Sit triangulum L A k, in quo perpendicularis L I secet basim A k in duo segmenta A I, I k, & centro L interuallo L K. cruris minoris, describatur circulus secans basim A k in C, crus vero L A in M, ipsumque productum in O. Differentia igitur crurum L A, L K erit A M, differentia vero segmentorum A I, I k erit A C. sit autem basis A K minor crure L A; ipsa autem A C maior, quàm dupla A M. Dico duplum excessum, quo crus A L superat basim A k, maiorem esse, quàm A M. Secetur enim A M bifariam. in H, erit igitur L H dimidia ipsius A O; Et quoniam* est vt A M ad A C, ita A k ad A O, duplatis antecedentibus erit, vt A M dupla ad D

Theor. 7 huius

A ad A C, ita dupla A K ad A O, sed A M dupla ponitur minor, quàm A C, ergo & A k dupla minor erit quàm A O; & consequenter A K simpla minor, quàm L H, dimidia videlicet ipsius A O; quare excessus, quo L A superat A K maior erit, quàm A H, & per consequens duplus est excessus maior, quàm dupla A H, hoc est, quàm A M. quod erat ostendendum.

Lemma II.

Iisdem positis. Excessus, quo differentia segmentorum basis superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia cruris maioris, & basis superat differentiam crurum, minorem habebit rationem, quàm differentia crurum ad differentiam segmentorum basis.

B

RESumatur antecedentis Lemmatis figura, & M A duplicetur in B, ac etiam producatur in F, vt sit M F æqualis A C. producatur quoque A K in E, vt sit A E æqualis A L; & sumatur B G dupla ipsius K E. Dico B F ad A G, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Hoc demonstrabitur progrediendo per filum resolutionis directo ordine, non inuerso. hac ratione.

Quoniam enim æquales sunt B A, A M, & æquales quoque M L, L O, erit B O dupla ipsius A L, hoc est
C ipsius A E. Et quoniam rectangulum M A O, hoc est B A O, seu quod idem valet rectangulum A B O, minus quadrato A B æquale est rectangulo C A K, sed cùm sit B O dupla ipsius A E; rectangulũ A B O æquale est duplo rectanguli B A E, hoc est duplo rectanguli B A K, & duplo rectanguli B A, k E; hoc est & simplo rectangulo A B G, est enim B G dupla ipsius k E, ergo duplum rectanguli B A k, plus rectangulo A B G minus quadrato A B, æquale erit rectangulo C A k, hoc est, rectangulo M F, A K; auferatur vtrinque duplum rectanguli B A K, ergo rectangulũ A B G minus quadrato A B, hoc est, rectangulum B A G æquale erit rectangulo M F A K, minus duplo rectanguli B A K, hoc est, minus rectangulo M B A k, seu quod idem est, æquale erit rectangulo F B A k. Cùm igitur rectangulum
D B A G æquale sit rectangulo F B A k, reuocata ad proportionem æqualitate; erit vt F B ad A G ita B A, hoc est A M, ad A K, sed A M ad A K, minorem rationem habet, quàm A M ad A C, ergo & F B ad A G, minorem rationem habebit, quàm A M ad A C. quod erat ostendendum.

His igitur demonstratis patet, non ex quibuscumque datis Problema construi posse; ideo præfiniendi sunt limites, intra quos data consistant.

Determinatio I.

OPortebit duplum excessum, quo crus maius superat basim maiorem esse differentia crurum.

De-

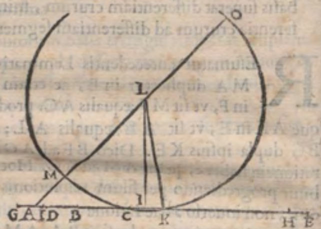
 A

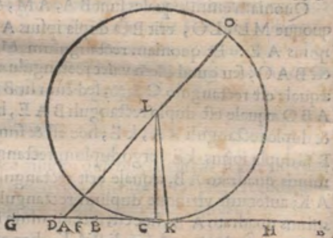
Determinatio II.

OPortebit quoque exceſſum quo differentia ſegmentorum baſis ſuperat duplam differentiam crurum, ad exceſſum quo dupla differentia cruris maioris, & baſis ſuperat differentiam crurum, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum, ad differentiam ſegmentorũ baſis.

Compoſitio ſecundi caſus.

SIt data differentia crurum trianguli A B, differentia ſegmentorum baſis A C, B quæ ſit maior, quàm dupla A B, & exceſſus quo crus maius ſuperat baſim B D. Oportet inuenire triangulum, ergo oportebit duplam B D maiorem eſſe quàm A B, & exceſſum, quo A C ſuperat duplam A B ad exceſſum; quo B D dupla ſuperat A B, minorem rationem habere, quàm A B ad A C. Ponatur ergo C F æqualis duplæ A B, & duplicetur B D in G, & fiat vt A F ad A G, C ita A B ad aliam quæ ſit A k, ea ex præcepto Poriſmatis debet fieri baſis trianguli conſtruendi, atque habebit A B ad A k minorem rationem, quàm A B ad A C quoniam & A F ad A G, minorẽ rationẽ habet quàm A B ad A C ex determinatione, quare Ak maior erit, quàm A C. Secetur ergo C K bifariam in I à perpendiculari I L, in qua ponatur k L æqualis K D, & iungatur L A. D





Poſuimus K L æqualem k D, pro crure minore trianguli conſtruendi; nam cum crus maius debeat ſuperare crus minus exceſſu A B, baſim vero exceſſu B D minori in prima figura quàm A B, baſis A K maior eſſe debet crure minore exceſſu D A. In ſecunda autem figura, crus maius trianguli conſtruendi, debet ſuperare crus minus, exceſſu A B, baſim vero, exceſſu B D qui maior eſt, quàm A B, ergo baſis A K minor eſſe debet crure minore, exceſſu D A. Triangulum igitur L A k conſtitutum eſt quemadmodum Poriſma docet; eſt enim vt A F exceſſus, quo A C ſuperat duplam A B ad A G exceſſum, quo B D dupla ſuperat A B, ita A B ad A K baſim trian-

guli

A guli L A k; in eo autẽ triangulo esse ea, quæ requiruntur, sic demonstrabitur.

Centro L interuallo L K describatur circulus secans A L in M, productam vero in O, is circulus transibit per C, cum sint æquales C I, I k; differentia igitur segmentorum basis A I, I k erit ipsa A C data. Duplicetur autem G K in E, & fiat E H æqualis G A. Quoniam igitur E G dupla est ipsius k G, & G B dupla ipsius G D, erit & reliqua E B dupla reliquæ k D, vel K L, atque adeo B E, M O æquales erunt.

Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum B A G sub medijs, æquale erit rectangulo F A k, sub extremis; hoc est rectangulo C A K, minus rectangulo C F, A k, seu minus duplo rectanguli B A k, recta enim C F dupla est ipsius A B, ex constructione, addatur vtrique parti duplum re-

B ctanguli B A k, ergo rectangulum B A G, vnà cum duplo rectanguli B A K, hoc est vna cum rectangulo B A H; seu quod idem valet, rectangulum B A G H, vel B A E æquale erit rectangulo C A k, hoc est M A O, atqui sunt æquales M O, B E, vt est demonstratum, ergo * & A M differentia crurum A L, L K, æqualis erit ipsi A B. Superest igitur vt crus A L maius sit base A K, excessu B D; id autem ita fit manifestum. Theor. 3 huius

Quoniam enim in prima figura crus L k superatur à crure A L, excessu A B, vt ostendimus, à base vero A K excessu A D, ex constructione, basis A k superabitur à crure A L reliquo excessu B D, in secunda vero figura basis A k superatur à crure L K, excessu D A, ex constructione, ipsumque crus L k superatur à crure L A, excessu A B, ergo basis A k superabitur à crure

C A L vtroque excessu D A, A B; hoc est excessu B D, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L A K, in quo A M differentia crurum A L, L k æqualis est datæ A B, & differentia segmentorum basis A I, I K, est ipsa A C data, atque crus maius A L superat basim A k excessu B D quod erat faciendum.

Aliter eundem casum breuiori via & resoluam & componam, omissaque æqualitate, proportione vtar.

Alia Resolutio Secundi casus.

D Sit data differentia crurum trianguli vt prius B; differentia segmẽtorum basis D, & excessus quo crus maius superat basim, G, & oporteat inuenire triangulum. Basis trianguli esto A, ergo crus maius erit A + G, crus minus A + G — B, vnde aggregatum crurum A 2 + G 2 — B. Et quoniam est * vt differentia segmentorum basis ad differentiam crurum, ita aggregatum crurum ad basim; erunt proportionales. Theor. 9 huius

D. B. A 2 + G 2 — B. A.

Et duplatis consequentibus, proportionales erunt.

D. B 2. A 2 + G 2 — B. A 2.

Et

Et quoniam dupla differentia crurum ponitur minor, quàm differentia segmentorum basis, hoc est B 2 ponitur minor quàm D, poterit B 2 auferri à D, ergo à diuisione rationis argumentabor; hoc est diuidendo proportionales erunt A

D — B 2 B 2 G 2 — B A 2

Et rursus subduplatis consequentibus, erunt proportionales

D — B 2 B G 2 — B A

Atque permutando proportionales erunt.

D — B 2 G 2 — B B A

Hæc permutatio licet non sit necessaria, cum in præcedenti quoque proportionalium serie dentur primi tres termini; tamen addita est, quò commodius Porisma, ac Determinationes ordinentur. B

Porisma.

Vt excessus, quo differentia segmentorum basis trianguli superat duplam differentiam crurum ad excessum, quo dupla differentia inter crus maius, & basim superat differentiam crurum, ita est differentia crurum ad basim.

Illud ipsum Porisma est, quod ex antecedente Resolutione deducitur. Eadem ergo Lemmata, eædemque determinationes, quæ illic, hic quoque intelligantur præposita. Sed quoniam secundum illud Lemma, quod ad secundam Determinationem huius Casus pertinet, ostenditur per repetitionem vestigiorum Resolutionis, eaque resolutio procedit per æqualitatem, hæc autem per proportionem; idem Lemma hic etiam, sed aliter, omissa æqualitate, per proportionem demonstrabo. C

Lemma.

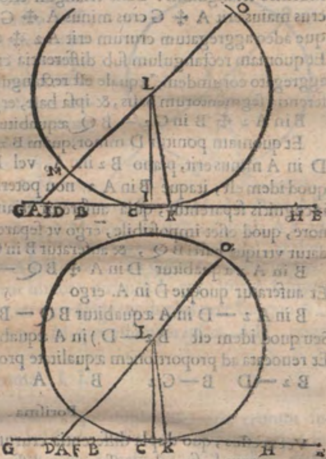
Si basis trianguli fuerit crure maiore minor, differentia autē segmentorum basis fuerit maior, quàm dupla differentia crurum. Excessus quo differentia segmentorum basis superat duplam differentiam crurum, ad excessum quo dupla differentia inter crus maius, & basim superat differentiam crurum, minorem rationem habebit quàm differentia crurum ad differentiam segmentorum basis. D

Resumatur eiusdem Lemmatis figura, & fiat eadem constructio. Dico B F excesū quo AC, superat duplam A M ad A G, excessum quo dupla K E superat A B, vel A M, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Quoniam enim A L superat A K dimidia B G; est enim B G dupla ipsius, K E, superabit dupla A L, hoc est recta B O duplam A k tota B G, quare G O dupla erit ipsius A K. Et quoniam est vt A C, hoc est F M ad A M, ita A O ad A k; duplatis conse-

A consequentibus, erit vt F M ad M B, ita A O ad G O, & diuidendo, vt F B ad B M; ita A G ad G O, rursus subduplatis consequentibus erit F B ad A M, ita A G ad A K, & permutando, vt F B ad A G, ita A M ad A k, sed A M ad A K, minorem rationem habet, quàm A M ad A C, ergo & F B ad A G, minorem rationem habebit, quàm A M, ad A C, quod erat ostendendum.

Alia Compositio secundi casus.

Iisdem datis, quæ in antecedenti Compositione, eademque facta cōstructione, Ostēdendum est in triangulo L A k,
B esse ea quæ requiruntur. Quoniam enim est vt A F ad A G, ita A B, ad A k, ex constructione, erit permutando, vt A F ad A B, ita A G ad A K, & duplatis consequentibus, vt A F ad F C, ita A G ad A K, & componendo, vt A C ad F C, ita erit G H, hoc est A E, ad A H; & rursus subduplatis cōsequentibus, vt A C ad A B, ita erit A E ad A k. Vt autem
C A B conferatur cum A M, deleātur extremæ A C, A K proportionalium, & in earum locum substituantur A M, A O, quippe quæ ad constitutionem proportionalium, manentibus medijs A B, A E sunt æquiualentes: propter quod rectangulū M A O, æquale est rectangulo, C A k; sed ad eas delendas, aliasque substituendas oportet prius commutare extremas proportionalium cum medijs; nam argumentatio ex æquali in proportione perturbata eximit medias proportiona-
D lium, aliasque substituit; non autem eximit extremas. Conuertantur itaque proportionales vt extremę cum medijs commutentur; ergo, vt A B ad A C, ita erit A k ad A E; sed vt A C ad A M, ita est A O ad A k, ergo in perturbata proportione erit, vt A B ad A M, ita A O ad A E; atque sunt æquales M O, B E, vt ostensum est in antecedenti Compositione, ergo * & A M differentia crurum A L, L K, æqualis erit A B datæ. differentia autem segmentorum basis A I, I k est ipsa A C data: & basim A K superari à crure A L, excessu B D ostendetur eadem ratione, qua in antecedenti compositione. Constructum est igitur triangulum L A k, &c. quod faciendum erat. Theor. 4 huius



Re-

Resolutio Tertij Casus.

RVrsus sit excessus, qui est inter crus maius, & basim penes ipsum crus, sed differentia segmentorum basis sit minor, quàm dupla differentia crurum; sit igitur data differentia crurum trianguli B differentia segmentorum basis D minor, quàm dupla B, & excessus, quo crus maius superat basim sit G. Oportet inuenire triangulum. Basis trianguli esto A, ergo crus maius erit A + G crus minus A + G — B, atque adeo aggregatum crurum erit A 2 + G 2 — B. Et quoniam rectangulum sub differentia crurum, & aggregato eorumdem, *æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base, ergo

Theor. 6 huius

B in A 2 + B in G 2 — B Q æquabitur D in A

Et quoniam ponitur D minor, quàm B 2, planum D in A minus erit, plano B 2 in A, vel B in A 2, quod idem est; itaque B in A 2 non poterit vtrinque auferri, vt cognita ab incognitis separentur, quia auferetur etiam à D in A, maius videlicet à minore, quod esset impossibile, ergo vt separentur cognita ab incognitis, addatur vtrique parti B Q, & auferatur B in G 2. ergo

B in A 2 æquabitur D in A + B Q — B in G 2

Et auferatur quoque D in A. ergo

B in A 2 — D in A æquabitur B Q — B in G 2.

Seu quod idem est B 2 — D) in A æquabitur B — G 2.) in B.

Et reuocata ad proportionem æqualitate proportionales erunt

B 2 — D B — G 2 B A

Porisma.

Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis; ita est differentia crurum ad basim.

Ex hoc Porismate apparet, duplum excessum, quo crus maius superat basim, minorem esse differentia crurum.

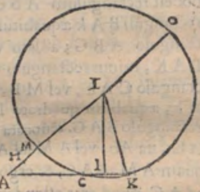
Apparet etiam, excessum, quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum, quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem rationem habere, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis; primus enim excessus ad secundum se habet, vt differentia crurum ad basim. sic Porisma indicat. Quæ quoniam ad determinationes pertinent, ostendenda sunt. Lemmata igitur ad id opus sic propono.

Lem-

A

Lemma I.

Si basis trianguli fuerit crure maiori minor, ac etiam differentia segmentorum basis minor, quàm dupla differentia crurum. Duplus excessus quo crus maius superat basim, minor erit, quàm differentia crurum.



SIt triangulum L A K, in quo perpendicularis L I secet basim A K in duo segmēta A I, I K, & centro L interuallo L K, cruris minoris, describatur circulus secans basim A K in C, crus vero K L in M, ipsumque
B continuatum in O. differentia igitur crurum L A, L K erit A M, differentia vero segmentorum A C. Sit autē basis A K minor crure maiori A L, & A C minor, quàm dupla A M. Dico duplum excessum, quo A L superat A k, minorem esse, quàm A M. Secta enim A M bifariam in H erit A O dupla ipsius L H. Et quoniam est vt A M ad A C, ita A K ad A O, duplatis antecedentibus, erit vt A M dupla ad AC, ita dupla A K ad A O, sed dupla A M ponitur maior quàm A C, ergo & A k dupla, maior erit, quàm A O, & consequenter A k simpla, maior quam L H, dimidia videlicet ipsius A O; sed A k ponitur minor, quàm A L; ergo ipsa A L supe-
C rat A K excessu minori, quàm A H, & per cōsequens duplus excessus, quo A L superat ipsam Ak, minor erit, quàm A M, quæ est dupla ipsius A H, quod erat ostendendum.

Lemma II.

Ijsdem positis. Dico insuper excessum, quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differētia crurū superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem habere rationem, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis.

REsumatur enim antecedentis Lem-matis figura, & duplicetur M A in
D B, ab eaq. abscindatur MF æqualis A C, & producatur A k in E, vt sit A E æqualis A L, & rectæ k E: fiat dupla B G. ea minor erit quam A B, ex antecedente Lemmate. Ostendendum est igitur B F ad G A minorem rationem habere, quàm A M ad A C, idque fiet per resolutionis filum procedendo, directo tamen ordine. Quoniam igitur æquales sunt A B, A M, & æquales quoq; M L, L O, erit B O dupla

ipsius A L, vel A E. Et quoniam rectangulum M A O, hoc est B A O, seu quod idem valet rectangulum A B O, minus quadrato A B, æquale est rectangulo C A k, rectangulum autem A B O æquatur duplo rectanguli BAE, cum sit B O dupla ipsius A E, hoc est æquatur duplo rectanguli B A K, & duplo rectanguli B A, K E, ergo duplum rectanguli B A K vnà cum duplo rectanguli B A, k E (minus quadrato A B æquale erit rectangulo C A K; addatur vtrobique quadratum B A, & auferatur duplum rectanguli B A, k E, hoc est rectangulum A B G. est enim B G dupla ipsius k E, ergo duplum rectanguli B A k æquabitur rectangulo C A k, & quadrato B A, minus rectangulo A B G; ablato vtrinque rectangulo C A k, duplum rectanguli B A K, minus rectangulo C A k, hoc est rectangulum M B, A k minus rectangulo C A k, vel M F, A K, seu quod idem valet, rectangulum B F, A k, æquabitur quadrato B A, minus rectangulo A B G, hoc est æquabitur rectangulo B A G. reuocata igitur ad proportionem æqualitate erit* vt B F ad A G, ita Ab, vel A M ad A K, sed A M ad A K minorem rationem habet, quam A M ad A C, & ergo B F ad A G, minorem rationē habebit, quàm A M ad A C. quod erat ostendendum. A B

*16 sexti

His igitur demonstratis præponendæ sunt huiusmodi Determinationes.

Determinatio I.

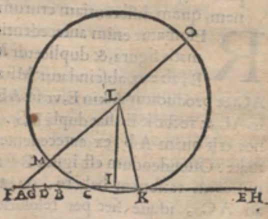
Oportebit duplum excessum, quo crus maius superat basim, minorem esse differentia crurum.

Determinatio I I.

Oportebit quoque excessum, quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum, quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem rationē habere, quàm differentiam crurum ad differentiam segmentorum basis. C

Compositio tertij casus.

Sit data differentia crurum trianguli A B; differentia verò segmentorum basis A C, quæ sit minor, quàm dupla A B, excessus autem, quo crus maius superat basim sit B D. Oportet inuenire triangulum. Oportet autem, ex Determinatione prima, B D duplam, minorem esse, quàm A B; ex Determinatione vero secunda, oportet excessum, quo A B dupla superat A C ad excessum, quo AB superat duplam BD, minorē rationē habere, quàm AB ad AC. Ponatur igitur C F æqualis duplæ AB, & duplicetur BD in G, & fiat vt A F ad AG, ita A B ad aliā quæ sit A K, ea ex præcepto Porismatis debet fieri basis trianguli construendi, D



atque

A atque habebit A B ad A k minorem rationem, quàm A B ad A C, quoniam & A F ad A G minorem rationem habet, quàm A B ad A C ex determinatione; quare A k maior erit, quàm A C. Secetur ergo C k bifariam in I perpendiculariter à recta I L, in qua ponatur K L æqualis k D, & iungatur L A. posita est K L æqualis K D, pro crure minore trianguli construendi; nam cum crus maius trianguli debeat superare crus minus, excessu A B; basim vero excessu B D; basis A K maior esse debet crure minori, excessu D A; itaque triangulum L A k constructum est, quemadmodum Porisma docet; est enim vt A F excessus, quo dupla A B superat A C ad A G excessum, quo A B superat duplam B D; ita A B ad A k basim trianguli L A K. in eo autem triangulo esse ea, quæ requiruntur, sic demonstrabitur.

B Centro L interuallo L k describatur circulus secans A L in M, ipsamque productam in O, is circulus transibit per C cum sint æquales CI, I k. Differentia igitur segmentorum basis A I, I k, erit ipsa A C data. Duplicetur autem G K in E, & A k in H. Quoniam igitur E G dupla est ipsius K G, & B G dupla ipsius G D, erit & reliqua E B dupla, reliquæ K D, vel K L, atque adeo B E, M O æquales erunt.

Et quoniam est vt A F ad A G, ita A B ad A k, rectangulum F A k sub extremis, æquale erit rectangulo B A G sub medijs, sed rectangulum F A K æquale est rectangulo C F, A K, minus rectangulo C A k, seu æquale est rectangulo B A k bis, minus rectangulo C A k (est enim C F dupla ipsius A B) ergo rectangulum B A K bis, minus rectangulo C A K æquabitur re-

C ctangulo B A G; addatur vtrique parti rectangulum C A k, ergo rectangulum B A k bis, hoc est rectangulum B A H, æquabitur rectangulis C A K, B A G; auferatur vtrinque rectangulum B A G, ergo rectangulum B A H, minus rectangulo B A G, seu quod idem valet rectangulum B A, G H, vel B A E æquale erit rectangulo C A K; hoc est rectangulo M A O, sed æquales sunt M O, B E, vt est demonstratum, ergo &* A M æqualis erit A B. Et quoniam L K superatur ab A K excessu A D, ex constructione, ab A L vero excessu A M æquali A B, vt ostendimus, ipsa A k superabitur ab A L reliquo excessu D B. Constructum est igitur triangulum L A K in quo A M, differentia crurum æqualis est datæ A B, & differentia segmentorum basis A I, I K est ipsa A C data: atque excessus quo crus L A superat basim A k est

D B D. quod erat faciendum.

Theor. 3 huius

Alia Resolutio tertij Casus.

Iisdem datis. quæratur basis trianguli, vt in antecedenti Resolutione; & resumatur eadem figura. Quoniam igitur * proportionales sunt, differentia crurum trianguli, differentia segmentorum basis, ipsa basis, & aggregatum crurum, hoc est

Theor. 7 huius

B D A A 2 ✢ G 2 -- B

Duplatis antecedentibus, erunt quoque proportionales

B 2 D A 2 A 2 ✢ G 2 -- B

Et per conuersionem rationis proportionales erunt

B 2 B 2 -- D A 2 B -- G 2

Et rursus subduplatis antecedentibus, proportionales erunt

B B 2 -- D A B -- G 2

Et conuertendo B 2 -- D B B -- G 2 A

Et permutando B 2 -- D B -- G 2 B A

Hæc permutatio non erat necessaria, sed addita est ob eas, quas in resolutione secunda, & quarta primi Casus, & in Resolutione secunda secundi, attuli rationes.

Porisma.

Vt excessus, quo dupla differentia crurum trianguli superat differentiam segmentorum basis, ad excessum, quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis; ita est differentia crurum ad basim. B

Illud ipsum Porisma, quod per antecedentem resolutionem inuentum est, neque ideo opus est Lemmata illa, ac Determinationes, quæ post eam Resolutionem sequuntur repetere. Verùm quoniam Lemma illud secundum per filum resolutionis ostenditur, hìc etiam idipsum alia via per alium huiusce Resolutionis filum demonstrabo.

Lemma. C

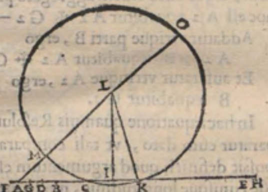
Si basis trianguli fuerit crure maiori minor, & differentia segmentorum basis minor quoque, quàm dupla differentia crurum. Excessus quo dupla differentia crurum superat differentiam segmentorum basis, ad excessum quo differentia crurum superat duplam differentiam cruris maioris, & basis, minorem rationem habebit, quàm differentia crurum, ad differentiam segmentorum basis.

Resumpta eiusdem Lemmatis figura, eademque facta constructione. Ostendendum est B F excessum quo M A dupla superat A C, ad excessum A G, quo M A superat duplam k E, minorem rationem habere, quàm A M ad A C. Quoniam enim æquales sunt A B, A M, & æquales quoque M L, L O, erit B O dupla ipsius A L, sed cum A L superet A K dimidia B G; est enim B G dupla ipsius k E superabit dupla A L, hoc est ipsa B O duplã A K, tota BG; quare GO ipsius AK dupla erit. Et quoniam est, vt AM ad A C ita AK ad AO, duplatis antecedẽtibus erit, vt BM ad AC hoc est ad MF, ita GO

ad

A ad O A, & per conuersionem rationis, vt BM ad BF, ita GO ad G A, & rursus subduplatis antecedentibus, vt AM ad BF, ita erit AK ad AG: & conuertendo, vt B F ad AM, ita A G ad AK; ac denique permutando erit, vt B F ad A G, ita A M ad A k; sed A M ad A k, minorem rationem habet quàm A M ad A C; ergo & B F ad A G minorem rationem habebit quàm A M ad A C, quod erat ostendendum.

Alia Compositio tertij casus.



IIsdem datis, quæ in antecedenti Compositione, factaq. eadem con-
B structione. Quoniam igitur est, vt A F ad A G, ita A B ad A K; erit permutando, vt A F ad A B, ita A G ad A k; & conuertendo, vt A B ad A F, ita A K ad A G, & duplatis antecedentibus, vt C F ad F A, ita A H ad H G, & per conuersionem rationis, vt C F ad C A, ita A H ad H G, hoc est ad A E. & rursus subduplatis antecedentibus erit, vt A B ad A C, ita A k ad A E, sed vt A C ad A M, ita est A O ad A k, ergo in perturba-
C ta proportione erit, vt A B ad A M, ita A O ad A E, atque æquales sunt M O, B E, vt demonstratum est in antecedenti compositione: ergo & * reliqua A M reliquæ A B æqualis erit. Et cum L k superetur ab L A, excessu A M æquali A B, vt ostendimus, ab A K vero, excessu A D, ex constructione, ipsa A k superabitur ab A L, reliquo excessu D B. Constructum est igitur triangulum L A k, cuius crurum L A L k differentia A M, æqualis est datæ A B, & differentia segmentorum A I, I k, est ipsa A C data, atque crus L A superat basim A k, dato excessu B D, quod erat faciendum. * Theor. 4. huius

Scholium.

D

IN hac quoque demonstratione, vt A M cum A B conferri posit, opus fuerit eximere proportionalium medias A C A K, & in eorum locum alias A M, A O subrogare, prioribus ad constitutionem proportionalium (manentibus extremis A B, A E) æquiualentes, vt factum est in secunda Compositione primi Casus, & in secunda secundi, & sic cum aliquid simile occurret faciendum erit.

Resolutio quarti, & vltimi Casus. A

DEnique existente excessu, qui est inter crus maius, & basim, penes ipsum crus, sit differentia segmentorum basis æqualis duplæ differentiæ crurum, vtpotè sit differentia crurum trianguli B, differentia segmentorum basis B 2, & excessus, quo crus maius superat basim G. Oportet inuenire triangulum. Basis trianguli esto A, crus igitur maius erit A + G, crus verò minus A + G — B aggregatum ideo crurum A 2 + G 2 — B; sed cũ sit vt B ad B 2; ita A ad A 2, *erit A 2 aggregatum crurum, atque adeo eidem aggregato prius inuento æquale; hoc est A 2 æquabitur A 2 + G 2 — B B

Theor. 7 huius

Addatur vtrique parti B, ergo

A 2 + B æquabitur A 2 + G 2.

Et auferatur vtrinque A 2, ergo

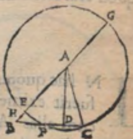
B æquabitur G 2.

In hac æquatione quamuis Resolutio ritè sit peracta, quæsitum non comparatur cum dato, vt tali comparatione ex ipsum innotescat, atque adeo possit definiri; quod argumentum est, basim trianguli, de qua quæritur, posse esse cuiusque longitudinis, modo datam differentiam segmentorum basis excedat, cùm basis maior sit, quàm ipsa differentia. Apparet tamen ex resolutione, duplum excessum, quo crus maius superat basim, æqualem esse differentiæ crurum, idque quoniam ad determinationem pertinet demonstrandum est. Lemma igitur ad id opus ita propono. C

Lemma.

Si differentia segmentorum basis fuerit dupla differentiæ crurum. Crus maius excedet basim, excessu dimidiæ differentiæ crurum æquali.

SIt triangulum A B C, in quo perpendicularis A D secet basim B C in duo segmenta B D, D C, & centro A, interuallo A C, quod sit crus minus, describatur circulus secans basim B C in F; crus verò A B in E, ipsumq. productum in G; sit autem B F differentia segmentorum basis, dupla B E differentiæ crurum. Dico A B excedere ipsam B C, excessu æquali dimidiæ B E. Secetur enim B E bifariam in H. Quoniam igitur est vt B F ad B E, ita B G ad B C, & est B F dupla ipsius B E, erit & B G dupla ipsius B C; sed & ipsius A K dupla est B C, cum sint A F, E H æquales ipsis A G, H B, vtraque vtrique, ergo B C æqualis erit A H. itaque A B superat ipsam B C excessu H B æquali dimidiæ B E, quod erat ostendendum. D



Determinatio.

Oportebit, excessum, quo crus maius trianguli superat basim, æqualem esse dimidiæ differentiæ crurum.

Compositio quarti Casus.

Sit data differentia crurum trianguli A B, differentia segmentorum basis A C, quæ sit dupla ipsius A B, & excessus quo crus maius superat basim B D, is debet esse
B æqualis dimidiæ A B, ex Determinatione. Oportet inuenire triangulum. Producatur A C quantum libuerit in K, & C k secetur bifariam in I ad rectos Angulos à recta I L, in qua ponatur K L æqualis K D, & iungatur A L. Dico, triangulum L A k Problema efficere. Duplicetur enim A K in E, & centro L interuallo L k describatur circulus secans A L in M, ipsamque productam in O. is circulus * transibit per C; cum sint æquales C I, I k, ex constructione. Et quoniam A E dupla est ipsius A K, & A B dupla ipsius A D; erit & reliqua E B dupla reliquæ k D, vel K L, sed & M O dupla est eius-
C dem K L, ergo M O æqualis erit B E. Et quoniam est vt A B ad A C, ita A K ad A E; sunt enim consequentes antecedentium duplæ, & vt A C* ad A M; ita est A O ad A k; erit in perturbata proportione, vt A B ad A M, ita A O ad A E: atque sunt æquales B E, M O, vt est demonstratum, ergo & A M* A B æquales erunt, & cum L k superetur ab A k excessu A D, ex constructione, ab A L vero excessu A B, basis A K superabitur à crure L A, reliquo excessu D B. Atque differentia segmentorum basis A I, I K, est ipsa A C data. Constructum est igitur triangulum L A k, &c. quod faciendum erat.

, tertij

Theor. 7 huius

theor. 4 huius

Is Casus, vt dixi in principio Problematis, vix inter Problemata annumerari potest, manentibus enim ijsdem datis, innumera triangula construi pos-
D sunt, vt ex supradictis patet; basis enim A k fit ad libitum, eaque potest fieri & maior, & minor. requiritur tantum vt datam A C differentiam segmentorum basis excedat. Conuenientior huic Problemati locus erat in primo libro, cum in Resolutionibus omnium eius casuum simplices æquationes existant; sed quoniam pluribus Determinationibus indiget, in eoque libro nulla fit de Determinationibus tractatio, visum fuit illud in hoc secundo libro collocare.

Pro-

Problema VIII.

Data base trianguli, angulum rectum subtendente, & differentia crurum. Inuenire triangulum,

Resolutio.

Sit D data basis trianguli rectanguli, B differentia crurum. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam factum. & trianguli illius aggregatum crurum estò A, ergo A + B * erit duplum cruris maioris, A — B * duplum cruris minoris, vnde simplum crus maius erit $A\frac{1}{2} - B\frac{1}{2}$, simplum crus minus $A\frac{1}{2} - B\frac{1}{2}$ (Carol. 1 Probl. 8 Lib. 1)

Sed cum quadrata crurum * æqualia sint quadrato basis (47 primi)

A Q $\frac{1}{2}$ + B Q $\frac{1}{2}$ æquabitur D Q

Et omnibus duplatis, vt integra fiat Potestas

A Q + B Q æquabitur D Q 2

Et ablato vtrinque B Q, vt cognita ab incognitis separentur

A Q æquabitur D Q 2 — B Q

Porisma:

Duplum quadratum basis subtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato differentiæ crurum æquale est quadrato aggregati crurum.

Datur ergo aggregatum crurum de quo quærebatur.

Compositio.

Sit data basis trianguli angulum rectum subtendens A B, differentia crurum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi A B perpendicularis, & æqualis A C, & iungatur B C. à quadrato igitur B C quod est duplum quadrati A B, debet auferri quadratum Z. sic Porisma iubet, ergo describatur in B C semicirculus, in quo aptetur C E æqualis Z, & iungatur E B, erit angulus C E B rectus in semicirculo, & ob id quadratum E B * æquale erit quadrato C B, minus quadrato E C, hoc est æquale erit duplo quadrato A B, minus quadrato Z. Itaque ex præcepto Porismatis aggregatum crurum trianguli construendi debet æquari rectæ E B, ita tamen, vt differentia eorundem crurum æquetur ipsi Z, vt Problema exigit. ergo sumatur in E B recta B F æqualis E C, vel Z; reliqua vero F E secetur bifariam in D à perpendiculari D G æquali ipsi D E, vel D F, & iungatur G B. Composita igitur ex cruribus G D, D B trianguli D G B æqualis est ipsi E B, differentia verò eorundem crurum, hoc (47 primi)

est

A est BF æqualis ipsi Z. Itaque constructum est triangulum DGB, quemadmodum Porisma docet. ipsum autem triangulum Problema efficere hoc modo demonstrabitur. Quoniam enim rectus est angulus CEB in semicirculo, quadratum EB æquale erit quadrato CB, minus quadrato EC, hoc est æquale erit duplo quadrati AB, minus quadrato FB, addatur vtrique parti quadratum FB, ablatum enim fuit in Resolutione, ergo quadratum EB vnà cum quadrato FB, hoc est duplum* quadratorum ED, DB, æ- Theor. 4 primi
quale erit duplo quadrati AB; quare & simplum simplo, sed quadrata ED, DB, hoc est GD, DB* æqualia sunt quadrato GB, ergo quadra- 47 primi
tum GB quadrato AB æquale erit, vnde & recta GB æqualis rectæ AB. Constructum est igitur triangulum DGB rectangulum in D, cuius ba-
B sis GB æqualis est ipsi AB, & FB differentia crurum GD, DB æqualis ipsi Z, quod faciendum erat.

Problema IX.

Data base trianguli angulum rectum subtendente, & aggregato crurum. Inuenire triangulum.

Resolutio.

Sit D data basis trianguli rectanguli, B aggregatum crurum. Oportet inuenire triangulum. Ponatur iam factum esse, & differentia crurum
C trianguli esto A, ergo B + A erit duplum cruris maioris, & B − A duplum cruris minoris. vnde simplum crus maius erit $B\frac{1}{2} + A\frac{1}{2}$: simplum crus minus $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$. horum quadra simul* æqualia sunt quadrato basis, ergo 47 primi

$BQ\frac{1}{2} + AQ\frac{1}{2}$ æquabitur DQ

Et omnibus duplatis, vt Potestas integra fiat

$BQ + AQ$ æquabitur $DQ\,2$

Et ablato vtrinque BQ

AQ æquabitur $DQ\,2 - BQ$

D

Porisma.

Duplum quadratum basis subtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato aggregati crurum, æquale est quadrato differentiæ crurum.

Datur ergo differentia crurum, de qua quærebatur.

Ex Porismate apparet si crura trianguli sunt inæqualia, duplum quadratum basis, maius esse, quadrato aggregati crurum; si verò sunt æqualia, duplum illud quadratum huic quadrato æquale esse; nam cum sint crura æqualia, nulla est eorum differentia, & consequenter nullum differentiæ quadratum, sed quadratum differentiæ crurum æquale est excessui, quo duplum quadratum basis superat quadratum aggregati crurum; sic Poris-

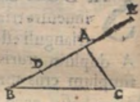
ma

ma indicat, ergo & excessus ille nullus erit; in hoc enim casu nihil nihilo adæquatur. Cum igitur nullus sit excessus inter duplum quadratum basis, & quadratum aggregati crurum, duplum illud quadratum huic quadrato æquale erit secundum Porisma. Hæc omnia demonstranda sunt, vt Problemati ea quam decet determinatio præponatur.

Lemma.

Recta cuius quadratum æquale est duplo quadrato basis subtendentis angulum rectum trianguli, non est minor aggregato crurum.

Sit triangulum ABC rectangulum in A, cuius basis BC. Dico rectam cuius quadratum æquale est duplo quadrato ex BC, non esse minorem composita ex cruribus, BA, AC. Producatur enim BA in E, vt sit AE æqualis AC, & sint primum æqualia crura AB, AC. Quoniam igitur quadratum BC æquale est quadratis BA, AC, hoc est BA, AE duplum quadratum BC æquabitur duplo quadratorum BA, AE, hoc est æquabitur quadrato BE, quare & recta cuius quadratum æquale est duplo quadrato BC, æqualis erit ipsi BE. Non igitur minor.



Deinde sint inæqualia crura AB, AC à maiori ergo quod sit AB, abscindatur AD æqualis AC, vel AE. Theor. 4 primi quadrata igitur BE, BD * æqualia erunt duplo quadratorum BA, AE. hoc est duplo quadrati BC, ergo duplum quadrati BC, maius erit quadrato BE tantum, vnde & recta, cuius quadratum æquale est duplo quadrato BC, maior quam recta BE. quare constat propositum.

Hoc demonstrato, Problema ita determinandum erit.

Determinatio.

Oportebit basim minorem esse aggregato crurum. Rectam autem, cuius quadratum æquale est duplo quadrato basis, non esse minorem.

Compositio.

Sit data basis trianguli angulum rectum subtendens AB; aggregatum crurum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & connectatur CB, à cuius quadrato (est enim duplum quadrati AB) auferendum est quadratum Z; sic Porisma iubet, ergo in BC describatur semicirculus, & in eo aptetur CE æqualis Z; recta enim BC, ex Determinatione, non est minor quam Z; dein-

de

A de connectatur EB, erit igitur quadratum EB æquale quadrato CB, minus quadrato EC. hoc est æquale erit duplo quadrati AB, minus quadrato Z. Itaque ex præcepto Porismatis differentia crurum triangali construendi debet æquari rectæ EB. Sumatur igitur in EC recta CF æqualis EB, & FE secetur bifariam in D ad rectos angulos à recta DG æquali ipsi DE, vel DF, & iungatur CG. Differentia igitur crurum CD, DG trianguli CDG, æqualis est ipsi EB, aggregatum verò æquale ipsi CE, hoc est Z. Itaque triangulum CDG constructum est quemadmodum Porisma docet. nunc ostendendum est in eo esse ea quæ Problema requirit. Quoniam enim rectus est angulus CEB in semicirculo; quadratum EB, vel CF æquale erit quadrato CB, minus quadrato
B EC, hoc est æquale erit duplo quadrato AB, minus quadrato EC, addito vtrobique quadrato EC quadratum CF vnà cum quadrato CE. hoc est * duplum quadratorum CD, DE, æquale erit duplo quadrati AB, *Theor. 6 primi* quare & simplum simplo. sed quadrata CD, DE. hoc est CD, DG æqualia sunt quadrato CG, ergo quadratum CG quadrato AB æquale erit. vnde & recta CG basis trianguli CDG æqualis rectæ AB. est autem & composita ex cruribus CD, DG æqualis ipsi CE, hoc est Z datæ, ex constructione. Constructum est igitur triangulum CDG quale construendum proponebatur.

Finis Libri Secundi.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE, ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

LIBER TERTIVS.

DE ijs, quæ ad Resolutionem, & Compositionem pertinent, existentibus simplicibus laterum, aut quadratorum æquationibus; superioribus libris satis me dixisse censeo. venio nunc ad explicanda ea, quæ in Resolutionibus, & Compositionibus occurrunt, quando in æquationibus quadrata affectionibus implicantur. Sed prius dicam quomodo huiusmodi æquationes explicentur.

Multi sanè Auctores de explicandis quadratorum affectorum æquationibus scripserunt, ijque omnes præter Diofantum, ac Petrum Nonium, vna eademque Methodo, aut parum distanti vtuntur, quamuis diuersas afferant demonstrationes. Diofantus quidem non curat quadratum æquationis à comite, hoc est à data magnitudine in quam ductum est liberare, vt ex se subsistat, quemadmodum notat Bachetus, sed præcipit duci homogeneum comparationis in eundem Comitē quadrati, & reliqua perfici; vt suo loco dicetur. quo fit vt magnitudines ad plano plana ascendant, ac proinde longiori operatione, & ad Geometricas Compositiones minimè apta æquatio explicetur. Petrus autem Nonius sumit totam coefficientem longitudinem, non autē dimidiam prout communis Methodus docet; sumit quoq; quadruplum homogeneum comparationis, & sic explicata æquatione exhibet duplum latus quæsitum, ex quibus Compositio fit difficilior. hanc Methodum Nonius excogitauit, vt fractiones numerorum vitaret, quæ quoniam in Geometricis locum nō habent, nihil est quod nos cogat ea Methodo vti. Communi igitur Methodo, quæ est simplicissima vtar, eamq. Geometrica ratione demonstrabo, alijs tamen medijs, atque alij scriptores; per hæc enim media commodior à Resolutione ad Compositionē fit regressus, ipsaq. Compositio clarius, ac facilius demonstratur, vt exemplis manifestum fiet.

A De æquationibus quadratorum affectorum explicandis.

TRibus modis æquatio ritè ordinata variari poteſt. aut enim quadratũ afficitur adiunctione plani, ſub latere, & data coefficiẽte longitudine; aut afficitur multa ipſius plani, aut denique planum ipſum afficitur multa quadrati. Tres igitur Canones proferam, quibus ratio explicandi æquationes continetur.

De explicanda æquatione, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, & data coefficiente longitudine.

Canon Primus.

B REctæ cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ coefficientis datæ, & dato homogeneo comparationis, dematur dimidia coefficiens; reliqua æquabitur lateri quæſito.

Proponatur A Q + B in A æquari Z Q, explicata ſecundum Canonem æquatione.

L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ † Z Q) -- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A lateri quæſito.

Demonſtratio Canonis primi.

SIt A B caſus quæſitum, B C, data coefficiens longitudo, & quadratum ex Z datum comparationis homogeneum. Poſitis in directum A B, B C
C ſecetur B C bifariam in D, & ex D erigitur perpendicularis D E, æqualis vero ipſi Z, & connectatur E C, ex qua abſcindatur C F æqualis C D. Dico reliquam F E æqualem eſſe A B. Deſcribatur enim ex centro C ad interuallum C F, vel C D circulus ſecãs E C productam in G, is circulus tanget rectam D E in D. & quoniam quadratum A B vnà cum rectãgulo A B C ponitur æquale quadrato Z: eſt autem * æquale & rectangulo B A C; ideo rectangulũ B A C æquale erit quadrato Z, hoc eſt quadrato D F, 3 ſecundi

D ſed & rectangulum F E G * æquale eſt quadrato D E. ergo rectangula F E G, B A C æqualia erũt, at ſi ſunt æquales F G, B C, ergo & reliquæ * E F, A B æquales erunt, quod erat oſtendendum. Patet igitur Canonem rectè eſſe inſtitutum. 16 tertij; Theor. 3 ſecundi

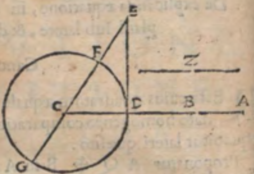
De explicanda æquatione, in qua quadratum afficitur multa plani ſub latere, & data coefficiente longitudine.

Canon Secundus.

REctæ cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ coefficientis datæ, & dato homogeneo comparationis, addatur dimidia coefficiens. Cõpoſita æquabitur lateri quæsito. Proponatur A Q -- B in A æquari Z Q. Explicata secundum Canonem æquatione.

$L.V.(BQ\tfrac{1}{4} + ZQ) + B\tfrac{1}{2}$ æquabitur A lateri quæsito.

Demonstratio Canonis secundi.



SIt quadratum ex Z datum comparationis homogeneum, A C latus quæsitum; & quia ponitur A Q -- B in A æquari Z Q erit B coefficiens, minor quàm A, hoc est data coefficiens longitudo, minor erit latere A C.

Sit igitur data coefficiẽs longitudo B C, eaq. secetur bifariá in D, & ex D erigatur perpendicularis D E, & æqualis ipsi Z, & connectatur EC, eaq. producatur in G, vt sit C G æqualis C D. Dico E C æqualem esse A C. Centro enim C interuallo C D, vel CG describatur circulus secans E C in F, is circulus tanget rectam E D in D. Et quoniam quadratum A C, minus rectangulo A C B, ponitur æquari quadrato z; quadratum autem A C, minus rectangulo A C B, æquale est rectangulo C A B, ergo rectangulum CAB æquale erit quadrato z, hoc est quadrato D E, sed & rectangulum G E F * æquale est quadrato D E, ergo rectangula G E F, CA B æqualia erunt, atque sunt æquales F G, B C, ergo & * tota E G toti A C æqualis erit, quod erat ostendendum, ex quo manifestum est Canonem rectè esse institutum.

3 tertij

Theor. 1. secundi

De explicanda æquatione, in qua planum sub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa quadrati.

Canon Tertius.

REcta, cuius quadratũ æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ coefficientis datæ, præstat dato comparationis homogeneo, dempta vel addita dimidiæ coefficienti, reliqua vel composita, latus quæsitũ erit. Proponatur B in A -- A Q æquari z Q. explicata secundũ Canonẽ æquatione.

$B\tfrac{1}{2} - L.V.(BQ\tfrac{1}{4} - ZQ)$ æquabitur A lateri quæsito.

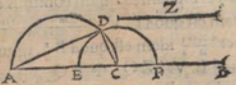
Vel $B\tfrac{1}{2} + L.V.(BQ\tfrac{1}{4} - zQ)$ æquabitur A lateri quæsito.

Antequam demonstratio Canonis fiat, ostendendũ est, rectũ cuius quadratũ æquale est dato comparationis homogeneo nõ esse maiorẽ dimidia coefficiẽte. Proponatur B in A -- AQ æquari ZQ Dico z non esse maiorem dimidia B.

Reuocetur enim ad proportionem æqualitas, erunt tres proportionales B -- A, z, A; sed dupla media non est maior, quàm composita ex extremis; composita autem ex extremis est B, ergo dupla z, non erit maior ipsa B, nec simpla z maior dimidia B, quod erat ostendendum.

Demon-

Demonstratio Canonis tertij.



SIt quadratum ex Z datum comparationis homogeneum, A B data coefficiens longitudo, quæ secetur bifariam in C, erit Z non maior quam A C, vt proximè demonstrauimus. in ipsa igitur A C describatur semicirculus, & in eo accommodetur A D æqualis Z, & iungatur D C. angulus igitur A D C in semicirculo rectus erit, quare quadratum A C * æquale erit quadratis A D, D C, vnde quadratum D C erit excessus, quo qua- 47 primi
dratum A C, dimidiæ videlicet coefficiētis præstat quadrato A D, hoc est qua-
B drato Z, quod est datum homogeneum comparationis. Centro igitur C interuallo C D describatur circulus secans rectam A B hinc inde in punctis E F. Dico latus de quo quæritur, minus quidem esse A E, maius autem A F, hoc est rectangulum B A E, minus quadrato A E, æquari quadrato Z, & rursus rectangulum B A F, minus quadrato A F, æquari eidem quadrato Z, in huiusmodi enim æquationibus latus quæsitum de duplici termino explicabile est. Quoniam igitur A D tangit circulum E D F in D, cum sit rectus angulus A D C rectangulum F A E * æquale erit quadrato A D, vel qua- 36 tertij
drato z, sed rectangulum F A E, hoc est B E A, æquale est rectangulo B A E, minus quadrato A E, ergo rectangulum B A E, minus quadrato A E, æquale erit quadrato z, atque adeo latus quæsitum erit A E, quod esto
C primum.

Rursus quoniam rectangulum E A F æquale est quadrato A D, hoc est quadrato z; ipsum autem rectangulū E A F hoc est B F A, æquale est rectangulo B A F, minus quadrato A F, ergo rectangulum B A F, minus quadrato A F, æquabitur quadrato z, itaq; latus quæsitum erit A F, quod secūdo loco erat ostendendum. ex his igitur manifestum est Canonem rectè esse institutum.

Diophantus autem in explicandis quadratorum affectorum æquationibus hac vtitur Methodo.

Canon explicandi æquationem in qua quadratum afficitur affirmatè.

D

DAtum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & producto addatur quadratum dimidij coefficientis, & à radice quadrata aggregati auferatur dimidium coefficientis; reliquum vero applicetur ad comitem quadrati, & proueniet latus quæsitum.

Proponatur A Q in D + B in D in A æquari z Q in D, & explicentur æquatio secundum Canonem, ergo L. V. (z Q in D Q + B Q in D Q ÷) -- B in D ½ æquabitur A lateri quæsito.

Longa quidem operatione, & ad Geometricas Compositiones inutili explicata est hæc æquatio, per ipsam enim operationem magnitudines ad plano plana aſcẽdentes, geometriæ terminos trãſcendunt; vtraque tamen Methodus, tam Diophantea, quàm cõmunis eodẽ recidunt; nam L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ + BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{4}}{D}$) idem eſt quod L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ + BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{4}}{L.\ DQ}$) ſeu quod L. V. ($ZQ + BQ\ \frac{1}{4}$) ſimiliter $\frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2}}{D}$ idem eſt quod $B\ \frac{1}{2}$. igitur L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ + BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{4}}{D}$) $- \frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2}}{D}$ idem eſt quod L. V. ($ZQ + BQ\ \frac{1}{4}$) $- B\ \frac{1}{2}$, cui quoque (æquatione communi Methodo explicata) æquatur A.

Repetatur enim eadem æquatio, quæ ſupra; hoc eſt A Q in D + B in D in A, æquetur Z Q in D. hæc æquatio non poteſt dici ritè ordinata, donec A Q liberetur à comite D, ergo applicentur omnia ad D. igitur A Q + B in A æquabitur Z Q, & explicata communi Methodo æquatione L. V. ($ZQ + BQ\ \frac{1}{iv}$) $- B\ \frac{1}{ii}$, æquabitur A. Siue igitur Methodo Diophantea, ſiue communi æquatio explicetur, opus eodem recidit, ſed Diophantea quidem Methodus longa eſt, & Geometricis compoſitionibus inutilis; communis autem breuis, & commoda, idem intelligendum eſt de reliquis duobus, quæ ſequentur æquationibus, & ne eadem repetantur, hæc dixiſſe ſufficiat.

Canon explicandi æquationem in qua quadratum efficitur negatè.

DAtum comparationis homogeneum ducatur in Comitem quadrati, & producto addatur quadratum dimidij coefficientis, & radici quadratæ aggregati, addatur dimidium coefficientis, idque compoſitum applicetur ad Comitem quadrati, & proueniet latus quæſitum.

Proponatur A Q in D — B in D in A, æquari Z Q in D; explicata ſecundum Canonem æquatione.

L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ}{D} + \frac{BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{iv}}{D}$) $+ \frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2}}{D}$ æquabitur A

Hoc eſt L. V. ($zQ + BQ\ \frac{1}{4}$) $+ B\ \frac{1}{2}$. æquabitur A

Eadem enim ratione, qua ſub antecedenti canone oſtendemus.

L. V. ($\frac{ZQ \text{ in } DQ}{D} + \frac{BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{4}}{D}$) $+ \frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2}}{D}$ idem eſſe quod L. V. ($zQ + BQ\ \frac{1}{iv}$) $+ B\ \frac{1}{2}$.

Canon explicandi æquationem, in qua quadratum negatur de afficiente homogeneo.

DAtum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & productum auferatur à quadrato dimidij coefficientis, reſidui radix quadrata addatur, vel dematur dimidio coefficienti, ſumma vel reſiduum applicetur ad comitem quadrati, & proueniet latus quæſitum.

Proponatur B in D in A -- A Q in D æquari z Q in D explicata ſecundum canonem æquatione.

$\frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2} + L.V.\ (BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{iv} - ZQ \text{ in } DQ)}{D}$ æquabitur A

Vel $\frac{B \text{ in } D\ \frac{1}{2} - L.V.\ (BQ \text{ in } DQ\ \frac{1}{iv} - ZQ \text{ in } DQ)}{D}$ æquabitur A

Atque hæc de æquationibus quadratorum affectorũ explicandis dicta ſufficiãt.

Pro-

A

Problema I.

Dato vno ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataq. differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

HOc Problema duos Casus habet, aut enim datur crus maius, aut crus minus. Primo Casu oportebit differentiam segmentorum basis minorem esse crure, siquidem crus maius toto maiore segmento maius est; secundus Casus Determinatione non indiget.

Resolutio primi Casus.

B

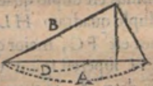
SIt datum crus maius trianguli rectanguli B, differentia segmentorum basis D. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam factum, & basis trianguli esto A, ergo A ✢ D erit * duplum segmenti maioris, & quoniam crus maius trianguli rectanguli medium est * proportionale inter basim, & segmentum maius, rectangulum sub base, & segmento maiori * æquale erit quadrato cruris maioris, & consequenter rectangulum sub base, & duplo segmento maiori æquabitur duplo quadrato cruris maioris, hoc est

Corol. 2 Probl. 2 primi

Corol. Prop. 8 sexti

17 sexti



$$AQ + D \text{ in } A \text{ æquabitur } BQ\,2$$

C Et explicata secundum primum Canonem æquatione.

$$L.V.(BQ\,2 + DQ\,\tfrac{1}{4}) - D\,\tfrac{1}{2} \text{ æquabitur } A$$

Porisma.

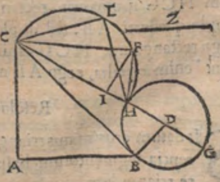
Recta, cuius quadratum æquale est duplo quadrato cruris maioris trianguli rectanguli, vnà cum quadrato dimidiæ differentiæ segmentorum basis, contracta eadem dimidia differentia æqualis est basi trianguli.

Datur ergo quæsita basis trianguli.

Compositio primi Casus.

D

SIt datum crus maius trianguli rectanguli AB, data autem differentia segmentorum basis Z. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, AC æquales, & connectatur CB, cui perpendicularis ducatur BD, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque CD: eius quadratū æquale erit quadratis CB, BD, hoc est duplo quadrati AB, & quadrato dimidiæ Z. ab ipsa igitur CD auferenda est recta æqualis dimidiæ Z, reliqua verò sumenda pro



baſe trianguli conſtruendi. ſic habetur ex Poriſmate. centro igitur D intervallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in H. deinde in C H, deſcribatur ſemicirculus, in quo accommodetur C F æqualis ab ipſa autem A B minor eſt, quàm C H, vt oſtendetur infra. denique iuncta F H factum erit triangulum C F H, vt Poriſma docet. à recta enim C D, cuius quadratum æquale eſt quadratis C B, B D. hoc eſt duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z ablata eſt D H æqualis dimidiæ Z, & reliqua C H baſis eſt trianguli C F H. Nunc oſtendendum eſt in eo triangulo eſſe ea, quæ Problema requirit. A

Ducatur enim F I ad baſim C H perpendicularis, & producatur C D vſque ad circumferentiam circuli in G. Quoniam igitur in ſemicirculo eſt angulus C F H trianguli C F H, is eſt rectus, & crus F C æquale eſt A B datæ, ex conſtructione, ipſumque crus maius eſſe crure F H manifeſtum eſt, nam ſecta bifariam circumferentia ſemicirculi CFH in L, & iuncta H L, quadratum C H* æquale erit duplo quadrati H L, ſed quadratum C H (cum ſit minus quadrato C B, eſt enim recta C H minor, quàm recta C B) minus eſt duplo quadrato A B, ergo duplum quadratum A B, maius erit duplo quadrato H L; quare & ſimplum maius ſimplo, vnde & recta A B, hoc eſt F C, maior quam recta H L, & conſequenter multo maior, quàm F H ſupereſt igitur vt differentia ſegmentorum C I, I H oſtendatur æqualis datæ Z. id per reſolutionis regreſſum ita fit manifeſtum. B

47 primi

Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum ſit rectus angulus C B D, ex conſtructione, rectangulum H C G æquale erit quadrato C B, hoc eſt duplo quadrati A B, ſeu quod idem eſt duplo quadrati C F, ſed cum ſit C F* media proportionalis inter H C, C I, rectangulum ſub H C, C I æquale eſt quadrato C F, & conſequenter rectangulum ſub HC, & dupla C I æquale duplo quadrati C F, ergo rectangulum H C G æquale erit rectangulo ſub H C, & C I dupla; quare C G dupla erit ipſius C I, ac proinde æquales erunt C I, I G; atque adeo differentia ſegmentorum C I, I H erit H G quæ æqualis eſt Z datæ ex conſtructione. Conſtructum eſt igitur triangulum F C H quale conſtruendum proponebatur. At verò rectam A B minorem eſſe, quàm C H manifeſtum eſt, ſi enim non eſt minor, erit tota C G minor, quàm A B dupla, quia H G, hoc eſt Z, minor eſt, quàm A B ex determinatione Problematis. Itaque rectangulum H C G minus erit, rectangulo ſub A B, & altera ipſius dupla, hoc eſt duplo quadrati A B, ſed duplum quadrati A B æquale eſt quadrato C B, ergo rectangulum H C G, minus erit quadrato C B, ſed hoc eſt falſum; ſunt* enim æqualia, ergo A B minor eſt, quàm C H quod oſtendiſſe oportuit. C D

Corol. 8. ſexti

36 tertij

Reſolutio ſecundi Caſus.

SIt datum crus minus trianguli rectanguli B, differentia ſegmentorum baſis D, & oporteat inuenire triangulum.

Baſis trianguli eſtò A, ergo A -- D erit* duplum

ſeg-

A ſegmenti minoris, & quoniam crus minus trianguli * rectanguli medium eſt proportionale inter baſim, & ſegmentum minus, rectangulum ſub baſe, & ſegmento minore æquale erit quadrato cruris minoris, & conſequenter rectangulum ſub baſe, & duplo ſegmenti minoris, æquabitur duplo quadrato cruris minoris, hoc eſt Corol. 1. Probl. 1 lib. 1. Corol. propoſ. 8. ſexti

A Q − D in A æquabitur B Q 2

Et explicata iuxta ſecundum Canonem æquatione.

L. V. (B Q 2 ✣ D Q $\frac{1}{4}$) ✣ D $\frac{1}{2}$ æquabitur A

Poriſma.

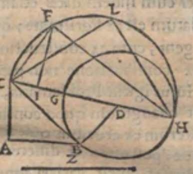
B Recta cuius quadratum æquale eſt duplo quadrato cruris minoris trianguli rectanguli, vnà cum quadrato dimidiæ differentiæ ſegmentorum baſis, protracta longitudine eiuſdem dimidiæ differentiæ, æqualis eſt baſi trianguli.

Datur ergo baſi trianguli quæſita.

Compoſitio ſecundi caſus.

SIt datum crus minus trianguli rectanguli A B, data differentia ſegmẽtorum baſis Z, & oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, A C æquales, & connectatur C B, cui perpendicularis ducatur B D æqualis dimidiæ Z, & connectatur

C quoque C D, eius igitur quadratum æquale eſt quadratis C B, B D, hoc eſt duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z, ergo ipſa C D continuanda eſt longitudine dimidiæ Z, eaque ſic continuata fieri debet baſis trianguli conſtruendi. ſic Poriſma docet. Centro igitur D interuallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in G, eandemque continuatam in H, & in C H ſemicirculus deſcribatur, in quo accommodetur C F æqualis A B, & iungatur F H triangulum igitur



F C H conſtructum eſt, vt Poriſma docet, recta enim C D, cuius quadra-
D tum æquale eſt quadratis C B, B D, hoc eſt duplo quadrati A B, & quadrato dimidiæ Z protracta longitudine D H, æqualis dimidiæ Z baſis eſt trianguli F C H. Nunc oſtendendum eſt in eo triangulo eſſe ea, quæ requiruntur.

Angulus C F H cum ſit in ſemicirculo rectus eſt, & crus F C æquale eſt A B datæ, ex conſtructione, ipſumque crus minus eſſe crure F H, manifeſtum eſt, nam ſecta bifariam circumferentia ſemicirculi G F H in L, & iuncta H L quadratum C H * æquale erit duplo quadrati H L; ſed quadratum C H (cum ſit maius quadrato C B, eſt enim & recta C H maior, quàm recta C B) maius eſt duplo quadrati A B minus erit duplo quadrati 47 primi

H L;

H L; quare & ſimplum minus ſimplo; vnde & recta A B hoc eſt F C, minor A
quam recta H L, & conſequenter multo minor, quàm FH, hæc omnia ex conſtructione patent: differentiam vero ſegmentorum baſis, æqualem eſſe Z datæ per repetitionem veſtigiorum Reſolutionis demonſtrabitur hoc modo.

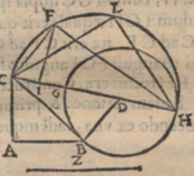
Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum ſit rectus angulus C B D, ex conſtructione, rectangulum H C G æquale erit quadrato C B, hoc eſt duplo quadrati A B; ſeu quod idem eſt duplo quadrati C F; ſed cum ſit
Corol. Prop. 8 ſexti C F * media proportionalis inter H C, C I, rectangulum ſub H C, C I æquale eſt quadrato C F, & conſequenter rectangulum ſub H C, & dupla C I, æquale duplo quadrati C F; ergo rectangulum H C G, æquale erit rectangulo ſub H C, & C I dupla quare C G dupla erit ipſius C I, ac proinde æquales erunt C I, I G atque adeo differentia ſegmentorum C I, I H erit H G quæ æqualis B
eſt Z datæ, ex conſtructione; Conſtructum eſt igitur triangulum C F H &c. quod faciendum erat.

Scholium.

Omne Problema tot admittit Compoſitiones, ex vna eademque Reſolutione pendentes, quot in eo conditiones requiruntur. componitur enim Problema vt ex ſola conſtructione appareant conditiones Problematis omnes adimpletæ, præter vnam quæ poſtea per repetitionem veſtigiorum reſolutionis adimpleta oſtenditur. Nam diſponuntur in conſtructione Problematis omnia data excepto vno, ſecundum Poriſmatis ordinationem: diſponitur ſimiliter cum ijſdem datis etiam quæſitum tamquam datum; quoniam & ipſum C
datum eſt ex Poriſmate; quæ quidem ſic diſpoſita alia demonſtratione non egent, cum ex conſtructione pateant. illud autem quod excipitur quoniam ex conſtructione non patet, per regreſſum Reſolutionis demonſtratur. Huius igitur Problematis, cum in eo tres conditiones requirantur, nempè vt triangulum quod conſtruendum proponitur ſit rectangulum, deinde vt alterum ex cruribus quæ ſunt circa angulum rectum ſit æquale datæ rectæ lineæ; poſtremo vt differentia ſegmentorum baſis æquetur alteri datæ, tripliciter poteſt variari compoſitio ex vna, eademque reſolutione pendens, aut enim excipitur data differentia ſegmentorum baſis, aut crus datum, aut datus verticis angulus, qui eſt rectus. In antecedente compoſitione excepta eſt differentia ſegmentorum baſis, conſtructum eſt enim triangu- D
lum ex crure, & angulo recto quæ data ſunt, & ex baſe, vt data, quoniam reuerſa & ipſa data eſt ex Poriſmate; ipſumque crus æquari cruri dato, & angulum verticis eſſe rectum, manifeſtum eſt ex conſtructione; differentiam vero ſegmentorum baſis æqualem eſſe datæ differentiæ, oſtenſum eſt per repetitionem veſtigiorum Reſolutionis. Nunc in hac quæ ſequitur ſecunda Compoſitione ſecundi Caſus excipiam crus datum, atque ex differentia ſegmentorum baſis, & angulo recto, & baſe iam per Reſolutionem inuenta, conſtruam triangulum iuxta rationem Poriſmatis, cuius trianguli crus æquale eſſe cruri dato retrograda Reſolutionis via oſtendetur; cætera vero ex conſtructione perſpi-

A ſpicua erunt. in tertia denique compoſitione excipiam angulum rectum, & ex differentia ſegmentorum baſis, & crure, & baſe inuenta, triangulum componam, ſecundum præceptum Poriſmatis, cuius trianguli angulum verticis rectum eſſe, per Reſolutionis regreſſum demonſtrabo, reliqua ex conſtructione patebunt.

Secunda compoſitio ſecundi caſus.



SIt igitur datum crus minus trianguli rectanguli A B. data differentia ſegmentorum baſis Z. & oporteat inuenire triangulum. in-
B clinatis, vt prius ad angulos rectos A B, A C æqualibus connectatur C B, eique perpendicularis ducatur B D æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque C D, & centro D interuallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in G, continuatam vero in H, & circa diametrum C H, alius circulus deſcribatur (hactenus eadem conſtructio, quæ in antecedenti compoſitione) deinde ſecetur C G bifariam in I à perpendiculari I F ducta vſque ad circumferentiã circuli, & iungantur C F, F H: Trianguli igitur F C H angulus G F H, cum ſit in ſemicirculo rectus eſt, & G H differentia ſegmentorum C I, I H æqualis eſt datæ Z hæc
C omnia ita ſe habent ex conſtructione; crus autem F C æquari ipſi A B, regreſſu reſolutionis demonſtrabitur hoc modo.

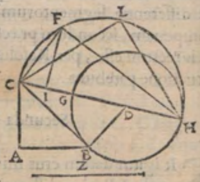
Quoniam enim recta C B tangit circulum in B, cum ſit rectus angulus C B D, rectangulum G C H æquale erit quadrato C B, hoc eſt duplo quadrati A B, ſed cum ſit C F * media proportionalis inter H C, C I, rectangulum I C H æquale eſt quadrato C F, & conſequenter rectangulum G C H æquale duplo quadrati C F; eſt enim C G dupla ipſius C I, ergo quadratum C F, æquale erit quadrato A B: vnde & recta F C æqualis rectæ A B. Conſtructum eſt igitur triangulum F C H, &c. quod faciendum erat: Corol. 8. ſexti

Tertia Compoſitio ſecundi Caſus.

D

IIſdem datis inclinentur vt prius ad angulos rectos A B, A C æquales & connectatur C B, eique perpendicularis agatur B D, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque C D, & centro D interuallo D B deſcribatur circulus ſecans C D in G, eamque continuatam in H (hactenus præcedens compoſitio) deinde ſecetur C G bifariam in I ad rectos angulos à recta I F indefinita, in qua ponatur C F æqualis C A: eſt autem C A maior, quàm C I, nam cum ipſa C A maior ſit quàm dimidia C B ea multo maior erit quàm dimidia C G, hoc eſt quàm C I denique connectatur F H. in triaagulo igitur F C H crus F C æquale eſt C A, hoc eſt A B datæ, ex conſtructione, ſimi-

militer & G H differentia segmentorum C I, I H A
æqualis datæ Z, ex constructione; superest igitur vt angulus C F H sit rectus; id autem repetendo resolutionis vestigia ita fit manifestum. Quoniam enim est rectus angulus C B D, recta C B tanget circulum in B, ac proinde rectãgulum G C H*
36 tertij æquale erit quadrato C B, hoc est duplum erit quadrati A B, seu quod idem est quadrati C F, sed idem rectangulum G C H duplum est rectanguli I C H, cum sit G C dupla ipsius C I; ergo rectan-
17 sexti gulum I C H æquale erit quadrato C F vt* igitur
6 sexti I C ad C F, ita erit C F ad C H; quare * similia erunt triangula F C I, F C H B
sed trianguli F C I angulus F I C rectus est, ergo & trianguli F C H angulus C F H rectus erit. Constructum est igitur triangulũ F C H, vt facere oportebat.



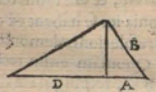
Eadem ratione. & primus Problematis Casus tripliciter cõponi poterat deducendo ex vna, eademque resolutione Compositiones.

Problema 11.

Dato vno ex cruribus trianguli, angulum rectum ambientibus, datoque alterno basis segmento. inuenire triangulum.

Resolutio.

Sit datum vnum ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus B alternum autem basis segmentum D. oportet inuenire triangulum. Factum sit hoc, & alterum segmentũ basis de quo quæ- C
Corol. 8 sexti ratur estò A. Quoniam autem crus B medium* proportionale est inter basim trianguli, & segmentum A, ergo proportionales erunt.



$$D + A \quad B \quad A$$

17 sexti Quod autem fit sub extremis, * æquale est mediæ quadrato, ergo

$$D \text{ in } A + AQ \text{ æquabitur } BQ$$

Et explicata æquatione

$$L.V.(BQ + DQ\tfrac{1}{4}) - D\tfrac{1}{2} \text{ æquabitur } A$$ D

Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato vnius crurum trianguli angulum rectum ambientium, vna cum quadrato dimidij alterni segmenti basis, contracta dimidio eiusdem segmenti, æqualis est alteri segmento.

Datur ergo alterum segmentum de quo quærebatur.

Atque hoc Problema cum in eo tres conditiones requirantur triplici via componi potest deducendo ab vna eademque resolutione compositiones.

Com-

A

Compoſitio Prima.

SIt datum vnum ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus A B ſegmentum autem baſis alternum B C. Oportet inuenire triangulum. inclinentur ad rectos angulos A B, B C, & ſecetur BC bifariã in D, & iungatur A D. Quadratum igitur A D æquale eſt quadratis A B, B D, cruris videlicet, & dimidij ſegmenti. Itaque ab ipſa A D debet auferri recta æqualis B D. ſic Poriſma docet. Centro igitur D, interuallo D B; vel D C deſcribatur circulus ſecans A D in E, productam autem in G, reliqua igitur A E debet æquari alte-

B ri ſegmento baſis, vt Poriſma indicat. Sed E G, cum ſit æqualis dato ſegmento B C, tota A G fieri debet baſis trianguli conſtruendi. In ipſa igitur A G deſcribatur ſemicirculus A F G, & ducatur perpendicularis E F vſque ad circumferentiam, & iungantur A F, F G. Triangulum igitur A F G conſtitutum eſt, quemadmodum Poriſma iubet; à recta enim A D cuius quadratum æquale eſt quadratis A B, B D cruris videlicet, & dimidij ſegmenti alterni; ablata eſt D E æqualis ipſi B D dimidio ſegmenti, & ex reliqua A E factum eſt alterum ſegmentum baſis, vt Poriſma docet. Ipſum autem triangulum A F G eſſe quale Problema exigit, ſic demonſtrabitur.

Angulus enim A F G, cum ſit in ſemicirculo, rectus eſt, & baſis ſegmen-
C tum E G, æquale eſt datæ B C ex conſtructione. crus autem A F æquale eſſe A B datæ per repetitionem veſtigiorum reſolutionis; ita oſtendetur. Quoniam enim rectangulum G A E * æquale eſt quadrato A B, recta enim A B tangit circulum; erunt tres * proportionales G A, A B, A E; quarum media erit A B, ſed inter eaſdem G A, A E eſt quoque * media proportionalis A F: ergo A F æqualis eſt A B, quod oſtendiſſe oportuit. Conſtructum eſt igitur triangulum A F G, &c. quod faciendum erat.

14 tertij

17 ſexti

Corol. 8 ſexti

Compoſitio Secunda.

IN præcedenti compoſitione exceptum eſt crus datum, ex dato enim baſis alterno ſegmento, & angulo recto, & ex reliquo baſis ſegmento quod
D per reſolutionem inuentum eſt, conſtructum eſt triangulum, ſecundum præceptum Poriſmatis. in hac ſecunda Compoſitione conſtituam ipſum triangulum ex dato crure, & angulo recto, & ex ſegmento per reſolutionem inuento alternum autem baſis ſegmentum æquari ſegmento dato, per regreſſum reſolutionis demonſtrabo.

Sint igitur eadem data, & inclinentur ad angulos rectos A B, B C & ſecta B C bifariam in D iungatur A D, & centro D interuallo DB, vel DC, deſcribatur circulus, quem A D ſecet in E, ipſi autem A D ducatur perpendicularis E F indefinita, in qua ponatur A F æqualis ipſi A B, & ex F ducatur ipſi A F perpendicularis F G occurrens A D productæ in G. In triangulo igitur

F A G crus A F continens, cum crure F G angulum rectum, æquale est ipsi A B, ex constructione, & angulus A F G rectus est, pariter ex constructione. segmentum autem E G æquari ipsi B C, per repetitionem vestigiorum resolutionis demonstrabitur hac ratione.

Corol. prop. 8 sexti; 17 sexti — Quoniam enim A F * media proportionalis est inter E A, A G, rectangulum E A G * æquale erit quadrato A F, hoc est quadrato A B, atque A B tangit circulum in B quod angulus A B D rectus est, ergo punctum G erit in circumferentia circuli B E C, quare E G diameter erit, ac proinde diametro B C æqualis.

Esse autem punctum G in circumferentia circuli B E C patet. si enim non est, erit aut in circulo, aut extra circulum. sit primum si possibile est in circulo & producatur A G vsque ad circumferentiam in H, itaque rectangulum E A H æquale erit quadrato A B, sed & rectangulum E A C ostensum est æquale quadrato A B, ergo rectangulum E A C rectangulo E A H æquale erit, quare & recta A G æqualis rectæ A H, pars toti quod est absurdum. Non est igitur punctum G in circulo.

Deinde sit si fieri potest punctum G extra circulum, ergo recta A G secabit circumferentiam, secet in H, rectangulum igitur E A H æquabitur quadrato A B, sed eidem quadrato æquatur & rectangulum E A G, ergo rectangula E A H, E A G æqualia erunt; quare & rectæ A H, A G æquales pars & totum quod itidem est absurdum. Non igitur punctum G est extra circulum, sed neque in circulo, ergo in circumferentia circuli erit, quod erat ostendendum.

Compositio Tertia.

IIsdem datis, inclinentur ad angulos rectos A B, B C & secta B C bifariam in D iungatur A D, & centro D interuallo D B, vel D C describatur circulus, quem A D secet in E, continuata vero in G, & ex E ipsi A D ducatur perpendicularis A F indefinita, in qua ponatur A F æqualis A B, & iungatur F C. In triangulo igitur F A G, crus F A æquale est A B datæ, & E G segmentum basis alternum æquale ipsi B C, diameter nempe diametro; superest igitur vt angulus A F G sit rectus; id autem per Resolutionis regressum ostendetur hoc modo.

Corol. 16 tertij; 4 sexti — Quoniam enim recta A B * tangit circulum cum sit rectus angulus A B C, rectangulum E A G æquale erit quadrato A B, hoc est quadrato A F, quare vt A E ad A F, ita erit A F ad A G: vnde * similia erunt triangula E A F, F A G, sed rectus est angulus A E F trianguli E A F ergo, & angulus A F G trianguli F A G rectus erit quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum F A G quemadmodum facere oportebat.

Pro-

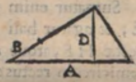
A Problema III.

Data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari. inuenire triangulum.

Resolutio.

Sit data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium B, perpendicularis autem D. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam inuentum, eiusque basis, esto A.



Quoniam igitur ab angulo recto trianguli ducta est in basim perpendicularis; triangula ad perpendicularem* 8 sexti
B similia sunt toti triangulo, vt igitur basis totius trianguli ad crus vnum, ita erit crus alterum ad perpendicularem, ac proinde id quod fit sub extremis* æquabitur ei, quod fit sub medijs, hoc est 16 sexti

D in A æquabitur rectangulo sub cruribus,

Sed quadratum differentiæ crurum æquale est quadratis crurum, minus duplo rectangulo sub cruribus, ergo

B Q æquabitur A Q - D in A 2

quadratum enim basis, quod est A Q æquale est quadratis crurum, & duplum rectangulum sub base, & perpendiculari, quod est D in A 2,
C æquale duplo rectangulo sub cruribus, vt est demonstratum. Denique explicata æquatione.

L. V. (B Q + D Q) -- D æquabitur A.

Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadratis differentiæ videlicet crurum trianguli circa angulum rectum, & perpendicularis, aucta ipsa perpendiculari, æqualis est basi trianguli.

Datur igitur quæsita basis trianguli.

D Compositio.

Sit data differentia crurum trianguli angulum rectum ambientium A B, perpendicularis autem B C. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos A B, B C, & connectatur A C: eius quadratum æquale erit quadratis A B, B C, differentiæ videlicet crurum, & perpendicularis; ipsa igitur A C, augenda est longitudine C B, & sic aucta debet fieri basis trianguli construendi. sic Porisma docet.

K ergo

ergo centro C interuallo CB describatur circulus secans A C continuatam in D. deinde in A D describatur semicirculus A G D, ex cuius centro, quod sit F, ducatur perpendicularis F G, in qua sumatur F H, æqualis C B, vel C D, ipsi autem A D parallela agatur H I, secans circumferentiam in I, & connectantur A I, I D. Constructum est igitur triangulum A I D, quemadmodum Porisma docet; recta enim A C, cuius quadratum æquale est quadratis datarum A B, B C, differentiæ videlicet crurum, & perpendicularis, aucta longitudine C B basis est trianguli A I D. Nunc ostendendum est ipsum triangulũ esse quale Problema requirit.

Sumatur enim I k æqualis I D, & circulus D B E secet rectam A C in E; & agatur basi A D perpendicularis I L; ea parallela erit, & æqualis rectæ H F, atque adeo æqualis quoque C B datæ. atque angulus A I D in semicirculo rectus est. hæc omnia ex constructione patent. ipsam autem A k differentiam crurum A I, I D æqualem esse A B datæ, per resolutionis regressum ita ostendetur.

Quoniam enim rectus est angulus A B C, ex constructione, & ideo A B
36 tertij tangit circulum in B quadratum A B* æquale erit rectangulo E A D, seu quod idem est quadrato A D, minus rectangulo A D E, hoc est minus duplo rectangulo A D, I L, est enim D E dupla ipsius I L, ex constructione;
47 primi sed quadratum A D,* æquale est quadratis A I, I D, & rectangulum A D,
8 sexti I L æquale rectangulo A I D; nam cum sint* similia triangula A I D, I L D, & ob id, vt A D ad A I, ita I D ad I L, rectangulum A D, I L sub extremis æquale erit rectangulo A I D sub medijs; ergo quadratum A B æquale erit quadratis A I, I D, minus duplo rectangulo A I D; sed & quadratum A k dif-
Th.3.primi ferentiæ ipsarum A I, I D,* æquale est quadratis A I, I D, minus duplo rectangulo A ID, ergo quadratum A K quadrato AB, æquale erit, quare & recta A K æqualis rectæ AB. Constructum est igitur triangulum AID, &c. quod facere oportebat.

Problema I V.

Dato aggregato crurum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari. inenire triangulum.

SIt data composita ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus B. perpendicularis autem D. oportet inuenire triangulum.

Resolutio.

FActum iam sit, & basis illius trianguli esto A.
8 sexti Quoniam igitur triangula ad perpendicularem* similia sunt toti triangulo, erit vt basis totius trianguli ad crus vnum; ita crus alterum, ad perpen-
16 sexti dicularem, & ideo id quod fit sub extremis* æquabitur ei, quod fit sub medijs, hoc est

D in

A D in A æquabitur rectangulo ſub cruribus,

Sed quadratum compoſitæ ex cruribus* æquale eſt quadratis crurum, vna cum duplo rectangulo ſub cruribus, ergo 4 secundi

B Q æquabitur A Q + D in A 2

Quadratum enim baſis, hoc eſt A Q æquale eſt quadratis crurum; duplum autem rectangulum ſub baſe, & perpendiculari, hoc eſt D in A 2 æquale duplo rectangulo ſub cruribus, vt eſt demonſtratum. Denique explicata æquatione.

L. V. (B Q + D Q) – D æquabitur A

Poriſma.

B

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis aggregati videlicet crurum, angulum rectum ambientium, perpendicularis, contracta ipſa perpendiculari, æqualis eſt baſi trianguli.

Datur ergo baſis trianguli, de qua quærebatur.

Ex Poriſmate apparet triplam perpendicularem non eſſe maiorem rectà, cuius quadratum æquale eſt quadratis aggregati crurum, & perpendicularis; nam ſi ab ea recta auferenda eſt perpendicularis, & ex reliqua facienda baſis trianguli conſtruendi, vt Poriſma docet, ipſa baſis non debet eſſe minor, quàm dupla perpendicularis, in triangulo enim rectangulo ſi crura ſunt æqualia, baſis dupla eſt ipſius perpendicularis, ſi inæqualia, maior eſt quàm dupla C perpendicularis. Hæc demonſtranda ſunt, & Problemati adijcienda determinatio, ne data ſuos limites egrediantur.

Lemma.

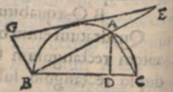
Tripla perpendicularis trianguli rectanguli ab angulo recto in baſim cadens, non eſt maior, quàm recta, cuius quadratum æquale eſt quadratis aggregati crurum, & perpendicularis.

Sit triangulum rectangulum A B C, à cuius angulo recto B A C cadat in baſim B C perpendicularis A D, & B A producatur in E longitudine A C, & ducatur ipſi B E

D perpendicularis B G; æqualis autem ipſi A D, & connectatur G E; eius quadratum æquale erit quadratis B E, B G, hoc eſt aggregati crurum, & perpendicularis. Dico igitur triplam A D, non eſſe maiorem rectà G E. Aut enim æqualia ſunt crura B A, A C, aut inæqualia, ſint primum æqualia, ergo æquales erunt & B D, D A, D C: vnde quadratum B A duplum erit quadrati A D, ſed quadratum B E quadruplum eſt quadrati B A, cum ſit B E dupla ipſius B A, ergo quadratum B E octuplum erit quadrati A D, ſed quadratum G E æquale eſt quadratis G B, B E, & eſt recta G B æqualis rectæ A D, ergo quadratum G E nonuplum erit

erit quadrati A D, & consequenter recta G E tripla rectæ A D. Tripla igitur A D non est maior, quam G E.

Sed sint inæqualia crura B A, A C, ergo & B D, D C erunt inæquales. Describatur autem in B C semicirculus B A C, eius circumferentia transibit per A, propter angulum rectum B A C, & recta D A non erit ex centro, quare B C maior erit quam A D dupla, & consequenter quadratum B C maius quadruplo quadrati



A D, & rectangulum B C, A D maius duplo quadrati A D, & per consequens duplum rectanguli B C, A D maius quadruplo quadrati A D, atque adeo quadratum B C, vnà cum duplo rectanguli B C, A D maiora erunt octuplo quadrati A D, sed quadratum B C æquale est quadratis B A, A C, & duplum rectanguli B C, A D æquale duplo rectanguli B A C; est enim pro-
8 sexti pter* similitudinem triangulorum A B C, D A C, vt B C ad B A, ita A C ad A D, & ideo rectangulum sub extremis B C, A D, æquale rectangulo B A C sub medijs; ergo quadrata B A, A C vnà cum duplo rectanguli B A C,
4 secundi hoc est* quadratum B E, quæ est æqualis compositæ ex B A, A C, maius erit octuplo quadrati A D, atque adeo quadratum G E, cui æqualia sunt quadrata G B, B E maius erit nonuplo quadrati A D, vnde & recta G B maior erit, quam tripla A D: quare constat propositum.

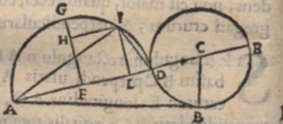
Hoc igitur demonstrato, Problema ita determinandum erit.

Determinatio.

Oportebit triplam perpendicularem non esse maiorem recta, cuius quadratum æquale est quadratis aggregati crurum, & perpendicularis.

Compositio Problematis.

Sit datum aggregatū crurum trianguli angulum rectum ambientiū A B, perpendicularis autem B C. Oportet inuenire triangulū. Inclinentur ad angulos rectos A B, B C, & connectatur A C, eius quadratum æquale erit quadratis A B, B C aggregati videlicet crurum, & perpendicularis, ab



ipsa igitur A C auferenda est recta æqualis C B; reliqua vero sumenda pro base trianguli construendi; sic Porisma præcipit ergo centro C interuallo C B describatur circulus secans A C in D, in reliqua vero A D describatur semicirculus A G D, ex cuius centro quod sit F ducatur perpendicularis F G, in qua sumatur F H æqualis C B, vel C D, est autē C B non maior, quàm F G; nam ex determinatione Problematis tripla C B non est maior, quam A C, ergo nec dupla C B maior erit, quàm A C; nec simpla C B maior quàm F G. Ipsi autem A D parallela agatur H I secans circumferentiam

in

A in I, & connectantur A I, I D. Itaque constructum est triangulum A I D, quemadmodum Porisma docet: recta enim A C, (cuius quadratum æquale est quadratis datarum A B, B C, aggregato videlicet crurum, & perpendicularis) contracta longitudine C B basis est trianguli A I D. Nunc ostendendum est illud triangulum Problema efficere.

Producatur enim A C vsque ad circumferentiam circuli in E, & in A D cadat perpendicularis I L: ea parallela erit, & æqualis rectæ H F; atque adeo æqualis quoque datæ C B. est autem & angulus A I D in semicirculo rectus. Hæc omnia patent ex constructione. Compositam autem ex cruribus A I, I D, æqualem esse A B datæ, repetendo resolutionis vestigia, ita ostendetur.

B Quoniam enim rectus est angulus A B C, & ideo A B tangit circulum in B, quadratum A B* æquale erit rectangulo E A D, seu quod idem est qua- 16 tertij
drato A D vnà cum rectangulo A D E, hoc est vnà cum duplo rectãgulo A D I L; est enim D E dupla ipsius I L, ex constructione; sed quadratum A D* æ- 47 primi
quale est quadratis A I, I D, & rectangulum A D, I L æquale rectangulo A I D: nam cum sint* similia triangula A I D, I L D, & ob id, vt A D ad 8 sexti
A I, ita I D ad I L, rectangulum A D, I L sub extremis; æquale est rectangulo A I D sub medijs; ergo quadratum A B, æquale erit quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectangulo A I D; sed & quadratum compositæ ex A I, I D,* æquale est quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectanguli A I D, ergo 4 secundi
quadratum compositæ ex A I, I D, æquale erit quadrato A B: vnde & ipsa
C composita ęqualis rectę A B. Constructum est igitur triangulum A I D, &c. quod erat faciendum.

Problema V.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte ęquale sit quadrato partis reliquę.

HÆc est Propositio vndecima libri secundi Elementorum, seu trigesima sexti, quę iubet datam rectam lineam extrema, ac media ratione secare.

Resolutio.

D SIt data recta linea secanda B, vt rectangulum sub tota, & altera parte ęquale sit quadrato partis reliquę.

Secta iam sit, & pars maior esto, A, ergo minor pars erit B -- A. Et cum rectangulum sub tota & minori parte ęquale sit quadrato partis maioris

BQ -- B in A ęquabitur AQ

Addito vtrique parti B in A, vt cognita ab incognitis separentur.

BQ ęquabitur AQ ✢ B in A

Et explicata ęquatione L. V. (BQ ✢ BQ ¼) -- B ½ ęquabitur A.

Porisma. A

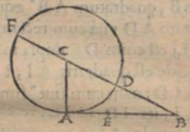
Recta cuius quadratum æquale est quadratis totius datæ, & dimidiæ eiusdem contracta eadem dimidia, æqualis est parti maiori.

Datur ergo pars maior, de qua quæritur.

Hoc Problema vnico modo ab vna resolutione pendente componitur, quoniam in eo vna tantum conditio requiritur, nempe vt rectangulum sub tota data, & altera parte æquale sit quadrato partis reliquæ.

Compositio.

SIt data recta linea A B, quam oportet secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte, æquale sit quadrato reliquæ partis. Ducatur A C perpendicularis, & æqualis dimidiæ A B, & iungatur C B, à qua abscindatur C D æqualis C A, reliquæ vero D B fiat æqualis B E. Secta est igitur A B in E, quemadmodum habetur ex Porismate: à recta enim C B, cuius quadratum æquale est quadratis A B, A C totius videlicet datæ, & dimidiæ eiusdem, ablata est C D æqualis dimidiæ A B, reliquæ verò B D facta est æqualis B E. Itaque ostendendum est rectangulum B A E æquari quadrato B E. id autem per repetitionem vestigiorum Resolutionis fiet manifestum. B



C

Centro enim C interuallo C A, vel C D circulus describatur secans B C continuatam in F, is circulus tanget rectam A B in A, ac proinde rectangulum D B F quod *constat quadrato D B, & rectangulo F D B *æquale erit quadrato A B. auferatur vtrinque rectangulum F D B, quoniam in Resolutione additum fuit; ergo reliquum quadratum D B, hoc est E B, æquabitur quadrato A B, minus rectangulo F D B, hoc est minus rectangulo A B E; sunt enim æquales F D, A B; cum sit A C dimidia ipsius A B; & æquales quoque D B, B E, seu quod idem est, æquabitur rectangulo B A E. Secta est igitur A B in E, vt Problema exigit, quod faciendum erat.

* 6 secundi
* 36 tertij

D

Problema VI.

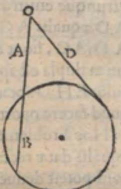
In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat.

HOc Problema duos casus habet, aut enim datum est punctum extra circulum, aut intra; primo Casu oportebit rectam magnitudine datam non esse maiorem diametro circuli; secundo vero Casu oportebit eã nec esse maiorẽ diametro circuli, nec minorẽ ea recta linea in circulo,

quæ

A quæ in dato puncto secat diametrum ad rectos angulos; ea enim minima est omnium, cum sit à centro omnium remotissima.

Resolutio primi Casus.



SIt iam factum. hoc est sit aptata, in dato circulo, vt petitur, data recta linea B; quæ producta perueniat ad datum punctum O, à quo ducatur recta tangens circulum, ea data erit; quoniam datum est & punctum O positione, circulus vero positione & magnitudine. Sit igitur ea tangens D, & quæratur continuatio aptatæ; quæ est inter datum punctum, & aptatum. ea esto A, ergo to-
B ta continuata, seu secans circulum, erit $A + B$. Et quoniam rectangulum sub tota secante, & parte exteriori eiusdem æquale est quadrato, tangentis, ideo

A Q + B in A æquabitur D Q

Et explicata æquatione. L. V. (D Q + B Q $\frac{1}{4}$) -- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato tangentis circulum, & quadrato dimidiæ aptatæ in circulo, contracta eadem dimidia æqualis est continuationi aptatæ, quæ dato puncto, & aptata terminatur.

Datur ergo continuatio aptatæ de qua quæritur.

C

Compositio Primi Casus.

SIt datus circulus E H D cuius centrum B; datum autem punctum A, quod sit extra circulum, & data magnitudine recta linea Z, quæ non sit maior diametro circuli. Oportet in circulo E H D rectæ lineæ, Z æqualem rectam lineam aptare, quæ ad punctum A pertingat. Si diametro circuli E H D æqualis est ipsa Z ducatur à puncto A per centrum circuli recta linea, & factum erit quod proponitur. Si vero ipsa Z minor est
D diametro, ducatur A E contingens circulum E H D in E, & connectatur B E, erit igitur angulus A E B rectus. deinde in E B sumatur E F, æqualis dimidiæ Z, & connectatur quoque A F; quadratum igitur A F æquale erit quadratis A E, E F, hoc est tangentis, & dimidiæ Z. itaque à recta A F auferenda est recta æqualis ipsi F E, vel dimidiæ Z, residuæ vero facienda est æqualis continuatio aptandę, quę dato puncto, & aptanda terminabitur. Sic habetur ex Porismate. ergo à recta F A abscindatur F C ęqualis F E, & centro A internallo A C describatur arcus secans circulum E H D in H, & per punctum H ducta recta linea A H D vsque ad cauam eiusdem cir-

circuli circumferentiam, aptata erit H D in circulo, quemadmodum Porisma docet. Eam autem æqualem esse Z datæ, sic demonstrabitur. A

Centro enim F interuallo F E, vel F C describatur circulus secans A F continuatam in G. Quoniam igitur æqualia sunt rectangula H A D, C A G vtrunque enim æquale est quadrato A E, atque est A H æqualis A C, erit & A D æqualis A G, quare per subductionem æqualium A H, A C, æqualibus A D, A C, fiunt & reliquæ H D, C G æquales; sed C G æqualis est Z, vtraque enim dupla est ipsius E F; ergo & H D ipsi Z æqualis erit. In dato igitur circulo E H D aptata est H D datæ Z æqualis, eaque ad punctum A pertingit quod facere oportebat.

Hoc Problema quia duas conditiones exigit nempe vt aptata in circulo sit æqualis datæ rectæ lineæ, & vt ad datum punctum pertingat, dupliciter componi potest deductis ab vna, eademque Resolutione compositionibus, & licet hæc altera quæ sequitur Compositio sit multis de causis inferior, quam prima eam tamen subijcere volui, vt ostendatur ex qualibet Resolutione, tot compositiones oriri, quot in Problemate conditiones requiruntur. B

Alia eiusdem Casus Compositio.

Sint igitur eadem data, & oporteat facere quod imperatum est. Ducatur A E, vt prius contingens circulum E H D in E, & iūgatur B E, & in ea sumatur E F æqualis dimidiæ Z, & iungatur A F, ab eaque abscindatur F C æqualis F E, & centro A interuallo A C describatur arcus secans circulum F H D in H, in quo accommodetur H D æqualis Z. Dico H D Problema efficere, eamq. productā peruenire ad punctū A. Cētro enim F interuallo F C, vel F E describatur circulus secans A F productam in G, & iungatur A H. Ostendendum est igitur A H D rectam esse lineam. C

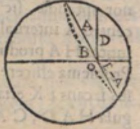
Si enim non est recta linea A H D producatur A H. vsque ad cauam circumferentiam circuli E H D in I. Rectangulum igitur H A I æquale erit rectangulo C A G, vtrunque enim æquale est quadrato A E tangentis, ea enim vtrumque circulum tangit, sed rectangulum C A G æquale est rectangulo sub H A, & composita ex A H, H D; sunt enim æquales A C, A H; & æquales quoque C G, H D, ex constructione, & ideo æquales, & A G, A I; ergo rectangulum H A I, æquale erit rectangulo sub H A, & composita ex A H, H D; quare A I æqualis erit compositæ ex A H, H D dempta communi A H; reliqua H I reliquę H D ęqualis erit, quod est absurdum: recta est igitur linea A H D; quod ostendisse oportuit, atque adeo aptata est in circulo recta H D, eaque ad punctum A pertingit quod faciendum erat. D

Re-

A

Resolutio secundi Casus.

FActum iam sit, hoc est sit aptata in circulo vt petitur data recta linea B, eaque transeat per datum punctum O, per quod ducatur circuli diameter cui à puncto O, ducatur perpendicularis vsque ad circumferentiam. Quoniam igitur datum est punctum O, positione, circulus vero positione, & magnitudine, ergo & diameter eius transiens per O dabitur positione, & magnitudine, atque adeo dabitur & ipsa perpendicularis, ergo sit ea D, & quæratur alterutra pars aptatæ, quæ in dato puncto diuiditur: ea esto A; ergo reliqua pars erit B -- A & rectangulum sub partibus aptatæ * æquale erit rectangulo sub partibus diametri, hoc est quadrato perpendicularis, itaque,



B 35 tertij

B in A -- AQ æquabitur DQ

Et explicata secundum tertium Canonem æquatione

B $\frac{1}{2}$ + L. V. (BQ $\frac{1}{4}$ -- DQ) æquabitur A

Vel B $\frac{1}{2}$ - L. V. (BQ $\frac{1}{4}$ -- DQ) æquabitur A

In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum primus est pars maior aptatæ, secundus pars minor, in eamdem enim æquationem inciditur siue de maiori parte aptatæ quæritur, siue de minori.

C

Porisma.

Dimidia aptata in circulo, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ aptatæ superat quadratum perpendicularis, æqualis est parti maiori aptatæ, quæ dato puncto diuiditur, contracta vero æqualis est parti minori.

Compositio Secundi Casus.

SEd sit in circulo datum A punctũ, & data z non sit maior diametro circuli dati H E D, neque minor ea recta linea in circulo, quàm diameter per punctũ A ducta secat ad rectos angulos, & oporteat facere quod imperatum est. Ducatur per A circuli diameter I A K, cui si sit æqualis Z data, factum iam erit quod proponitur si vero sit minor ducatur per A ipsi diametro ad rectos angulos E A L & si ipsa E L æqualis sit datæ Z, rursus factũ erit quod proponitur, si vero Z maior sit quam E L ponatur in A I recta linea E F æqualis dimidiæ Z; est autem dimidia Z maior, quam A E, cum tota Z ponatur maior, quàm tota E L, quæ dupla est ipsius A E. Quadratum igitur E F superat

D

qua-

quadratum E A quadrato A F, itaque dimidiæ Z addenda est recta A F, eique sic auctę facienda æqualis pars maior aptandæ, quæ in puncto A diuisa erit. Vel dimidiæ Z detrahenda est recta A F; & residuæ facienda ęqualis pars minor aptandæ, sic Porisma fieri docet. Igitur rectę F E fiat ęqualis F C, & centro A interuallo A C describatur arcus secans circulum H E D in H, & iuncta H A producatur vsque ad circumferentiam in D. Dico rectam H D Problema efficere. Centro enim F interuallo F C, vel F E describatur circulus secans F K etiam productam in G. Quoniam igitur æqualia sunt rectangula H A D, C A G; vtrunque enim æquale est quadrato A E, atque est A H æqualis A C, erit & A D æqualis A G; quare per additionem æqualium A D, A G æqualibus A H, A C, fiunt quoque æquales & H D, C G, sed C G æqualis est Z, vtraque enim dupla est ipsius F E, ergo & H D ipsi Z æqualis erit. In dato igitur circulo H A D aptata est H D æqualis Z datæ, eaque per punctum A transit, quod erat faciendum. A

Et hic Casus duplicem admittit Compositionem, vtramque ex vna, eademque Resolutione emanantem, sed primi Casus compositiones ad exemplum sufficiant. B

Problema VII.

Dato semicirculo, & recta linea sit ipsius basi perpendicularis. Inter ipsam perpendicularem, & circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad semicirculi angulum pertingat. C

Hoc Problema sex Casus habet; tres quidem sunt cum perpendicularis secat basim semicirculi productam. primus differt à reliquis duobus, quod in primo ponenda est recta magnitudine data inter perpendicularem, & conuexam semicirculi circumferentiam. In reliquis vero ponenda est inter perpendicularem, & circumferentiam cauam. Secundus autem Casus differt à tertio, quod in secundo basis semicirculi non est maior segmento basis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur, in tertio autem maior est.

Quartus autem Casus, & quintus est cum perpendicularis in ipsam basim cadit; quartus differt à quinto, quod in quarto ponenda est recta magnitudine data inter perpendicularem, & circumferentiam cauam. At in quinto ponenda est inter perpendicularem, & circumferentiam conuexam. D

Sextus denique Casus est cum perpendicularis in extremitatem basis semicirculi cadit.

Primi quatuor Casus determinatione indigent: duo vero reliqui indeterminati sunt.

Primo igitur Casu oportet rectam magnitudine datam non esse minorem eo segmento basis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur.

Secundo Casu oportet illam magnitudine datam, non esse minorem base

pro-

A producta, vſque ad perpendicularem.

Tertij Caſus determinaionem quære ex Poriſmate Reſolutionis, ſiquidem in ea ſemicirculi, & perpendicularis poſitione non dum liquet, quæ ſit minima interceptarum à circumferentia, & perpendiculari quemadmodum cernitur in præcedentibus, &c. in ea quæ ſequitur inſpecta tantum ſemicirculi & perpendicularis poſitione.

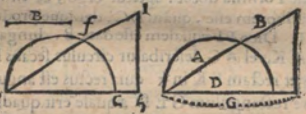
Quarto denique Caſu oportebit rectam magnitudine datam non eſſe maiorem ſegmento baſis ſemicirculi, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur ex ea parte ponendæ.

Reſolutio primi Caſus.

B

SIt datus ſemicirculus E F C, in cuius baſim productam cadat perpendicularis I H, & data recta linea B, quæ non ſit minor, quàm C H. Oportet inter circumferentiam ſemicirculi, & ipſam perpendicularem ponere rectam lineam æqualem datæ B; itaut ad punctum E pertineat.

Sit iam factum, & ſit ea recta F I, & connectatur C F. ſit autem datarum F I, E C, E H, prima B, ſecunda D, tertia G, vt in ſecunda figura, & quæratur E F, ea eſto A. duplicem figuram



C appoſui, primam quidem vt expoſitio Problematis clarior fiat; ſecūdum vero vt Roſolutioni ſeruiat, easque diſtinxi, ne multitudine, & diuerſitate literarum, quæ in vna figura exiſterent obruantur ſtudioſi potius, quam iuuentur. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula E F C, E H I, angulus enim E F C in ſemicirculo rectus eſt, & ideo æqualis angulo recto H, & angulus ad E communis eſt vtrique, erit vt E F ad E C, ita E H ad E I, hoc eſt in figura ad reſolutionem pertinente proportionales erunt.

A D G A + B

Sed quod fit ſub extremis æquale eſt facto ſub medijs, ergo

D A Q + B in A æquabitur D in G

Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ + D in G) --- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

Poriſma.

Recta, cuius quadratum æquale eſt quadrato dimidiæ F I & rectangulo C E H, contracta dimidia F I æqualis eſt rectæ E F.

Datur ergo E F quæſita.

Com-

Compositio Primi Casus.

SIt datus semicirculus E F C, in cuius basim E O productam cadat perpendicularis I H, & data quoque recta linea B, quæ non sit minor, quàm C H. Oportet inter perpendicularem I H, & circumferentiam E F C datæ B æqualem rectam ponere, quæ ad punctum E pertingat. Si B æqualis sit rectæ C H, factum iam erit quod proponitur, si vero sit maior; describatur in E H semicirculus E k H, & ipsi E H agatur perpendicularis C k, & iungantur E K, k H. angulus igitur E k H in semicirculo rectus est, ac proinde

Corol. 8. sexti E k* media proportionalis inter C E, E H, quare qua-

17 sexti dratum E k* æquabitur rectangulo C E H. Producatur autem H k in A, vt sit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A: quadratum igitur E A æquale erit quadratis A K, k E, hoc est quadrato dimidiæ B, & rectangulo C E H. à recta igitur E A auferenda est A G æqualis A K, vel dimidiæ B, residuæ vero E G æqualis aptanda est recta in semicirculo E F C sic Porisma docet. aptetur ergo, & sit ea E F. demonstrabitur infra, A G minorem esse, quàm E C. denique producta E F donec occurrat rectæ H I in I. Dico F I æqualem esse datæ B. Iungatur enim F C, & centro A interuallo A K, vel A G describatur circulus secans E A productam in D. is circulus tanget rectam E K in k quia rectus est angulus E K, cum sit rectus & k H; quare rectangulum G E D æquale erit quadrato E B hoc est rectangulo C E H, vt igitur G E, seu E F ad E C, ita erit E H ad E D; sed propter similitudinem triangulorum E F C, E H I, est vt E F ad A C, ita E H ad E I ergo ipsa E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D hoc est datæ B, æqualis erit. Posita est igitur inter circumferentiam E F, & perpendicularem I H recta F I æqualis B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum.

At vero E G minorem esse, quàm E C manifestum est, si enim non est minor, erit maior, vel æqualis: sed ponitur & G D, hoc est B, maior quàm C H, ergo & E D tota maior erit quàm tota E H. vnde rectangulum G E D, hoc est quadratum E K, maius erit rectangulo C E H, quod est absurdum, illud

Corol 8 sexti enim quadratum huic rectãgulo* æquale est. Non igitur E G maior est quàm E C, aut ei æqualis, ergo minor quod ostendisse oportuit.

Determinatione cautum est ne data B sit minor, quàm C H; nam ipsa C H minima est omnium, quæ ad punctum E pertinentes inter circumferentiam E F C, & rectam I H interijciuntur. Ducatur enim alia vtrunque recta linea E F I, ea maior erit quam E H, sed & E C maior est quam E F, ergo reliqua C H minor erit quàm reliqua F I & sic ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur omnium C H, quare manifesta est determinatio.

Reso-

Resolutio secundi Casus.

SIt datus semicirculus e f c è cuius base continuata longitudine, non minore ipsa base, cadat perpendicularis h i: data autem recta linea B, quæ non sit minor, quàm c h. Oportet inter perpendicularem h i, & circumferentiam e f c ponere rectam lineam æqualem datæ B, ita vt ad punctum e pertingat.

Sit iam factum, & sit ea recta f e i, & iungatur f c. datæ sunt igitur f i, c e, e h. prima sit B, secunda D, tertia G, & quæratur siue e i, siue e f. altera earum esto A, ergo reliqua erit B -- A. Et quoniam similia sunt triangula e f c, e h i, nam angulus e f c in semicirculo rectus est, & ideo æqualis angulo recto e h i, & angulus f e c æqualis angulo h e i, cum sint ad verticem, erit vt e f ad e c, ita e h ad e i, hoc est in figura Resolutionis proportionales erunt.

B -- A D G A

Vel A D G B -- A

Et quod fit sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs, ergo

B in A -- A Q æquabitur D in G

Et explicata æquatione $B\,\frac{1}{2} + (B\,Q\,\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

Vel $B\,\frac{1}{2}$ -- $(B\,Q\,\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum primus est e i, secundus e f si quidem in eandem æquationem inciditur, siue de e i quæritur, siue de e f.

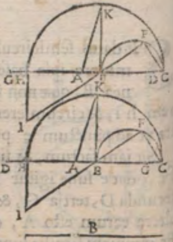
Porisma.

Dimidia f i, protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum dimidiæ f i superat rectangulum c e h, æqualis est rectæ e i; contracta verò æqualis rectę e f.

Datur ergo vtraque ei, e f.

Compositio secundi Casus.

SIt datus semicirculus E F C, vt supra, & oporteat facere quod propositum est. Si B data æqualis sit H C, factum iam erit quod proponitur. si vero sit maior, agatur ipsi H C perpendicularis E K, quam semicirculus in H C descriptus secet in k, erit E k minor quàm dimidia B, cum sit & H C minor quam tota B. Itaque poterit à puncto K in rectam E H duci recta æqualis dimidię B. ducatur igitur k A



ea maior erit quam A H, minor autem quam A C; nam cum sit A k maior, quàm dimidiæ H C, erit centrum circuli H K C in A C, & ideo A K maior quam A H, & minor quam A C. Producatur ergo A H in G, vt sit A G æqualis A K, vel dimidiæ B, & in H I ponatur E I æqualis E G, eaque producatur ad circumferentiam in F. A

Vel vt in secunda figura ab A C abscindatur recta A G æqualis A k, & in semicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, eaque producatur in I. alterutro modo id fiat, factum erit quemadmodum Porisma docet, in prima enim figura rectæ A G, cui æqualis est dimidia B, addita est A E, cuius quadrato superatur quadratum K E à quadrato A K, hoc est superatur rectangulum C E H à quadrato dimidiæ B, & toti E G facta est æqualis E I. B

In secunda vero figura rectæ A G detracta est A E, & reliquæ E G facta est æqualis E F. Nunc ostendendum est rectam I E F Problema efficere.

Iungatur enim F C, & sumatur A D æqualis A G. Quoniam igitur rectarum G A, A E, in prima quidem figura differentia est E D, aggregatum E G; in secunda vero differentia est E G, aggregatum E D; ideo in vtraque figura rectangulum G E D, sub aggregato, & differentia * æquale erit differentiæ quadratorum G A, A E, seu k A, A E, hoc est quadrato k E, vel rectangulo H E C: sed & rectangulum I E F æquale est eidem rectangulo H E C, nam cum sint similia triangula E H I, E F C, est vt E H ad E I, ita E F ad E C, & ideo rectangulum H E C sub extremis æquale rectangulo I E F sub medijs; ergo rectangulum G E D æquale erit rectangulo I E F. In prima quidem figura sic argumentor. sed sic æqualis est G E, ergo & E F, ac proinde tota I F æqualis toti G D, hoc est ipsi B. In secunda vero figura argumentor hoc modo; sed E F æqualis est E G, ergo & E I æqualis erit E D, & consequenter tota I F, æqualis toti D G, hoc est datæ B, quod erat ostendendum. Posita est igitur inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C recta I F æqualis datæ B, eaque ad punctum E pertingit: quod erat faciendum.

* Theor. 1 primi

C

At vero rectam H C minimam esse omnium, quæ ad punctum E pertinent, & inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C interijciuntur sic demonstrabitur. D

Ducatur enim alia quæcunque recta I E F, & iungatur F C. Quoniam igitur propter similitudinem triangulorum E F C, E H I, est vt E F ad E C, ita E H ad E I, atque est maxima quidem E I, minima vero E F; erit I F composita ex maxima, & minima maior, quàm H C composita ex reliquis: & sic ostendetur H C minor omnibus alijs. Quare manifesta est determinatio.

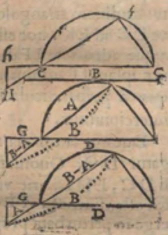
Re-

A

Reſolutio Tertij Caſus.

SIt datus ſemicirculus e f c, è cuius baſe continuata longitudine minori ipſa baſe cadat perpendicularis h i, dataque recta linea B: & oporteat facere quod imperatum eſt. In hoc caſu quoniam ex hac ſemicirculi, & perpendicularis poſitione non videtur offerri minima interceptarum a perpendiculari, & circumferentia ſemicirculi, quemadmodum in caſibus præcedentibus, ideo determinatio petenda eſt ex Poriſmate.

Sit igitur factum ducta ſcilicet recta i e f æqualis datæ B, & iungatur F C, ſitque datarum i f, e c, e h, prima B, ſecunda D, tertia G, & quæratur alterutra partium e i, e f, ea eſto A, ergo reliqua
B erit B -- A, & propter ſimilitudinem triangulorum e f c, e h i, erit vt e f ad e c, ita e h ad e i, hoc eſt in figuris ad reſolutionem pertinentibus, proportionales erunt.



A D G B -- A

Vel B -- A D G A

Et factum ſub extremis æquale erit facto ſub medijs, hoc eſt

B in A -- A Q æquabitur D in G.

Et explicata æquatione B $\frac{1}{2}$ +- L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

C Vel B $\frac{1}{2}$ -- L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ -- D in G) æquabitur A

Et in hac quoque æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum primus indicat maiorem quæſitarum e f, e i, ſecundus minorem.

Poriſma.

Dimidia f i protracta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum dimidiæ f i ſuperat rectangulum h e c, æqualis eſt maiori partium e f, e i, contracta verò, minori.

Ex hoc Poriſmate apparet, dimidiam B, non eſſe minorem media proportionali inter rectas e h, e c. Poriſma enim indicat quadratum dimidiæ B non eſſe minus rectangulo h e c; iubet enim auferri rectangulum illud à quadrato dimidiæ B, minus videlicet à maiori, vel ſaltem æquale ab æquali, non autem maius à minori; neque enim, vt dictum eſt, Poriſma iubet, quod fieri non poteſt. Determinatio igitur tertij Caſus, quam dixi ex Poriſmate petendam, hæc erit.

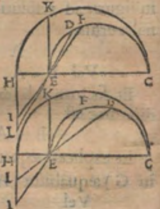
D

 A

Determinatio tertij Casus.

OPortebit datam B non esse minorem dupla media proportionali inter H E, E C. Nam ipsa media dupla minima est omnium interceptarũ à perpendiculari H I, & circumferentia E F C; quod quidem sic demonstrabitur.

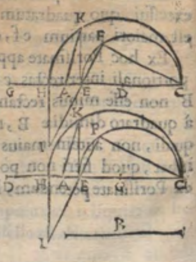
Resumatur antecedens figura, & describatur in H C semicirculus secans E k ipsi H C perpendicularem in k, erit ergo E k media proportionalis inter E H, E C. Accommodetur autem in semicirculo E F C recta E F æqualis Ek, eaque producta secet perpendicularem H I in I, & iungatur F C. erit ob similitudinem triangulorum E F C, E H I vt E C ad E F, ita E I ad E H, sed B vt E C ad E K, hoc est ad E F, ita est E F ad E H, * ergo E F æqualis erit E I, atque adeo tota I F dupla erit ipsius E K. Dico igitur ipsam I F minimam esse omnium ductarum per E, quæ à perpendiculari H I, & circumferentia E F C intercipiuntur.



Ducatur enim alia recta vtcumque L E D, & iungatur D C. Quoniam igitur similia sunt triangula E D C, E H L, erit vt E D ad E C, ita E H ad E L; sed ostensum est, vt E C ad E F, ita esse E I ad E H, ergo in perturbata proportione erit vt E D ad E F, ita E I ad E L, sed in prima quidem figura maxima est E L, minima E D; in secunda vero maxima est E D, minima E L, vtroque igitur Casu L D cum sit composita ex maxima, & minima, maior erit, quàm I F composita ex reliquis. & sic demonstrabitur I F minor omnibus alijs. Minima est igitur I F. quod erat ostendendum. C

Compositio tertij Casus.

SIt datus semicirculus E F C, vt dictum est; data autem recta linea B, quæ non sit minor dupla proportionali inter H E, E C. & oportet facere quod imperatum est. Describatur in H C semicirculus, quem acta perpendicularis E k secet in k, & in E H ponatur k A æqualis dimidiæ B; est autem dimidia B non minor, quàm K E; cum tota B non sit minor quàm dupla E k, ex Determinatione: Deinde producatur A H in G, vt sit A G æqualis A K, & in H I ponatur E I æqualis E G, eaque producatur ad circumferentiam in F. D



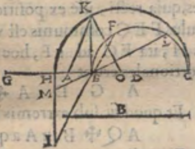
Vel vt in secunda figura sumatur in A C recta A G æqualis A K, & in-

se-

A ſemicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, eaque producatur in I. ſiue hoc, ſiue altero modo fiat conſtructio, ea facta erit quemadmodum Poriſma iubet. rectamque I E F æqualem eſſe datæ B demonſtrabitur eadem ratione, qua in antecedenti Caſu immo eadem verborum textura. quare ijs repetitis habebis demonſtrationem.

Quando autem data B maior eſt, quam dupla E k, non autem quàm H C, poſsibile eſt per punctum E ducere duas rectas lineas, quarum vtraque inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C interiecta æqualis erit datæ B

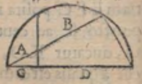
Repetatur enim eadem conſtructio, quæ ſupra, & ſit inter perpendicularem H I, & circumferentiam E F C poſita recta I E F æqualis ipſi B, & à puncto K ad centrum circuli H k C, quod ſit O, ducatur K O, ea non erit minor, quàm k A, cui æqualis eſt dimidia B, cum & H C ponatur non minor quam B, quare neque quadratum K O minus erit quadrato k A; hoc eſt neque quadrata K E, E O minora erunt quadratis k E, E A, atque ablato communi quadrato K E, reliquum quadratum E O non erit minus reliquo quadrato E A; nec ideo recta E O minor, quàm recta E A, ſed & O C non eſt minor quàm A G, ergo tota E C non erit minor quam E G tota. Accommodetur igitur in ſemicirculo E F C recta E L æqualis E G, vel E I, & producatur donec ſecet perpendicularem H I in M, & iungatur L C. Quoniam igitur propter ſimilitudinem triangulorum E L C, E H M eſt vt E L ad E C, ita E H ad E M, & propter ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E C ad E F, ita E I ad E H, erit in perturbata proportione, vt E L ad E F, ita E I ad E M, ſed E L prima æqualis eſt tertiæ E I, ex conſtructione, ergo & ſecunda E F æqualis erit E M quartæ, & conſequenter tota M L æqualis toti I F, atque adeo vtraque æqualis B datæ.



Idem autem Caſus poterit conſtrui alia quoque ratione in eodem Poriſmate expoſita, vbi enim in ſemicirculo E F C accommodata eſt recta E L æqualis E G, vel E I, hìc, omiſſa ea accommodatione ponatur in H I recta E M æqualis E D, vel E F, ſi quidem ipſa E D, vel E F non eſt minor quam E H, quia cum ſit ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E C ad E F, ita E I ad E H, atque E C prima non minor, quam tertia E I, vel E C, vt demonſtrauimus ſupra, erit & ſecunda E F non minor, quàm E H quarta. Ipſa autem M E producatur ad circumferentiam E F C in L, & iungatur L C, erit igitur ob ſimilitudinem triangulorum E F C, E H I, vt E F ad E C, ita E H ad E I, ſed vt E C ad E L, ita eſt E M ad E H, ob ſimilitudinem triangulorum E L C, E H M, ergo in perturbata proportione, vt E F ad E L, ita erit E M ad E I, ſed E F prima æqualis eſt E M tertiæ, ex conſtructione, ergo & ſecunda E L æqualis erit quartæ E I; itaque tota I F æqualis erit, toti M L, & per conſequens vtraque æqualis B datæ.

Resolutio quarti Casus.

Sit datus semicirculus E F C, in cuius basim cadat perpendicularis I H data autem recta linea B, quæ non sit maior quàm H C. Oportet inter perpendicularem H I, & cauam circumferentiam E F C ponere rectam lineam æqualem ipsi B, ita vt ad punctum E pertingat.



Sit factum & sit ea recta I F, & connectatur F C. Sit autem datarum I F, E C, E H prima B, secunda D, tertia G, & quæratur E I. ea esto A. Quoniam igitur similia sunt triangula EHI, E F C, anguli enim E H I, EFC sunt æquales, quia recti, ille ex positione, hic ex vi semicirculi & angulus F E C communis est vtrique triangulo, erit vt E I ad E H, ita E C ad E F, hoc est in resolutionis figura, proportionales erunt

A G D A + B

Et quod fit sub extremis æquale erit ei quod fit sub medijs, nempe

A Q + B in A æquabitur G in D.

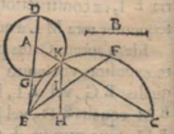
Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ + G in D) -- $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ I F, & rectangulo H E C contracta eadem dimidia I F æqualis est rectæ E I.

Datur ergo E I quæsita.

Compositio quarti Casus.



Sit datus semicirculus E F C, vt supra, & oporteat facere quod imperatum est. Si data B, æqualis sit rectæ H C, factum iam erit quod proponitur. Si vero sit minor secet recta H I circumferentiam in k, & connectatur E K, K C. angulus igitur E K C in semicirculo rectus erit, & ideo E K * media proportionalis inter H E, E C, ac proinde quadratum E k * æquale rectangulo H E C. producatur autem C k in A, vt sit k A æqualis dimidiæ B, & connectatur A E eius quadtatum æquale erit quadratis A k, K E; hoc est quadrato dimidiæ B, & rectangulo H E C. Itaque à recta A E auferatur AG æqualis dimidiæ B, residuæ vero E G ponatur in H k æqualis E I, sic Porisma iubet. inferius autem ostendetur ipsa A G maior, quàm A H producta; denique E I ad circumferentiam in F. Dico I F æqualem esse datæ B. Connectatur enim F C, & centro A interuallo A G, vel A K describatur circulus quem E A producta secet in D, is circulus tangit rectam E k in k; angulus enim AK E rectus est, cum sit rectus & angulus E k C in semiculo, & ideo re-

Corol 8 sexti
17 sexti

A rectangulum G E D æquabitur quadrato E K hoc est rectangulo H E C, quare vt G E, hoc est E I ad E H, ita erit E C ad E D; sed vt E I ad E H, ita est quoque E C ad E F, propter similitudinem triangulorum E H I, E F C, anguli enim E H I, E F C sunt æquales, quia recti, & angulus I E H communis est vtrique triangulo, ergo E F æqualis erit E D, demptis æqualibus E I, E G, reliqua I F reliquæ G D, hoc est datæ B, æqualis erit, quod erat ostendendum. Posita est igitur recta I F, vt facere oportebat.

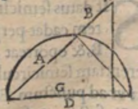
At vero E G maiorem esse, quàm E H sic demonstrabimus. sit enim, si fieri potest, non maior, ergo cum G D cui æqualis est B, minor sit, quàm H C, vt ponitur, erit & tota E D minor, quàm tota E C, atque adeo rectangulum G E D minus erit rectangulo H E C, hoc est* quadrato E k, quod est Corol. 8 sexti
B absurdum; rectangulum enim G E D quadrato E k æquale est. Maior est igitur E G, quàm E H, quod erat ostendendum. Rectam autem H C maximam esse omnium, quæ à puncto E ductæ inter perpendicularem k H, & cauam circumferentiam K C interijciuntur, sic ostendemus.

Ducatur enim alia vtrumque recta E I F; ea minor erit, quàm E C; sed & E H minor est quàm E I, ergo reliqua H C maior erit, quàm reliqua I F: & sic ipsa H C ostendetur omnibus alijs maior: Maxima est igitur omnium H C, quod erat ostendendum.

Resolutio quinti casus.

C Sit datus semicirculus E F C, in cuius basim cadat perpendicularis I H: data autem recta linea B: & oporteat inter ipsam perpendicularem, & conuexam circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam æqualem ipsi B, ita vt ad punctum E pertingat.

Sit factum, & sit ea recta F I, & iungatur F C, sitque datarum F I, E C, E H prima B, secunda D, tertia G, & quæratur E F. ea estò A. Quoniam igitur similia sunt triangula E F C, E H I, angulus enim E F C, cum sit in semicirculo rectus est, & ideo æqualis recto E H I, & angulus E communis est vtrique, erit vt E F ad E C, ita E H ad E I, hoc est in figura resolutionis, proportio-
D nales erunt



A D G A ✤ B

Et quod fit sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs nempe

A Q ✤ B in A æquabitur D in G

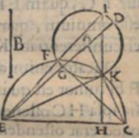
Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ ✤ D in G) — B $\frac{1}{2}$ æquabitur A.

Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ F I, & rectangulo H E C; contracta eadem dimidia F I æqualis est rectæ E F. Datur ergo E F quæsita.

Compositio quinti Casus.

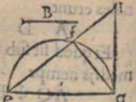
SIt datus semicirculus E F C, vt supra, & oporteat facere quod propositum est. Ducantur ad punctum k, in quo perpendicularis I H secat circumferentiam E F C rectæ E K, C K, ipsaque C K, producatur in A, vt sit k A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A, B
ab eaque abscindatur A G æqualis A k, & in semicirculo E F C accommodetur E F æqualis E G, & producatur vsq; ad perpendicularem H I. Factum est igitur quemadmodum Porisma docet: à recta enim A E, cuius quadratum æquale est quadratis A K, K E, hoc est quadrato dimidiæ B, & rectangulo H E C, ablata est A G æqualis dimidiæ B, & residuæ E G aptata est in semicirculo æqualis E F. Rectam autem F I æqualem esse datæ B, ita fit manifestum.



Iungatur enim F C & centro A interuallo A E, vel A G describatur circulus secans E A productam in D, is circulus tangit rectam E K in K, rectus est enim angulus A K E, cum sit rectus & angulus EkC in semicirculo, & propterea rectangulum G E D æquale erit quadrato E k, hoc est rectangulo H E C, quare vt G E seu E F ad E C, ita erit E H ad E D, sed vt E F ad E C, ita est quoque E H ad E I ob similitudinem triangulorum E F C, E H I, quorum anguli E F C, E H I sunt recti, & ideo æquales, & angulus I E H communis est. vtrique ergo E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc est datæ B æqualis erit: quod erat ostendendum. quare factum est quod oportebat. C

Resolutio Sexti Casus.

SIt datus semicirculus E F C, in cuius basis extremitatem cadat perpendicularis I C; data autem recta linea B, & oporteat, inter ipsam perpendicularem, & circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam æqualem ipsi B, ita vt ad punctum E pertingat. D



Sit factum & sit ea recta F I, & connectatur F C. sitque datarum F I, E C, prima B, secunda D, & quæratur E F ea esto A. Quoniam igitur angulus E F C in semicirculo rectus est, erit E C * media proportionalis inter E F, E I idest in resolutionis figura proportionales erunt.

Coroll. 8 sexti

A D

A A D A + B

Et quod fit sub extremis æquabitur quadrato mediæ hoc est

A Q + B in A æquabitur D Q.

Et explicata æquatione L. V. (B Q $\frac{1}{4}$ + D Q) -- B $\frac{1}{2}$ æquabitur A

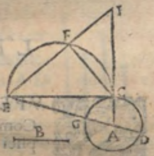
Porisma.

Recta, cuius quadratum æquale est quadratis E C, & dimidiæ F I, contracta eadem dimidia F I, æqualis est rectæ E F.

Datur ergo E F quæsita.

B

Compositio Sexti Casus,



Sit datus semicirculus E F C, vt dictum est, & oporteat iussum facere. Producatur I C in A, vt sit C A æqualis dimidiæ B, & iungatur E A. eius quadratũ æquale erit quadratis E C, & C A, hoc est, & dimidiæ B, à recta igitur E A auferatur A G æqualis dimidiæ B, & reliquæ E G accommodetur in semicirculo æqualis E F, eaque producta secet perpendicularem C I in I, hæc constructio habetur ex Porismate. Rectam autem F I æqualem esse datæ B, ita ostendetur. Iungatur enim F C, &

C describatur ex centro A ad interuallum A C, vel A G circulus secans E A continuatam in D is circulus tanget rectam E C, in C, cum sit rectus angulus E C A, & ideo rectangulum G E D * æquale erit quadrato E C, vnde recta 36 tertij

E C erit media proportionalis inter E G, E D; sed eadem E C est quoque * Corol. 8 sexti

media proportionalis inter E F, E I, cum sit rectus angulus E F C in semicirculo, atque est E F æqualis E G, ex constructione, ergo & E I æqualis erit E D, & ablatis æqualibus E F, E G, reliqua F I reliquæ G D, hoc est datæ B, æqualis erit quod erat ostendendum. Factum est igitur quod oportuit.

Finis Libri Tertij.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

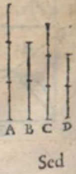
LIBER QVARTVS.

SVPERIORI libro exposui exempla ad Resolutionem, & Compositionem pertinentia, vbi quadrata in æquationibus simplici affectione implicantur, idest simplici plano sub latere, & data coefficiente lõgitudine, & ideo absque difficultate Æquationes ipsæ explicantur, ac deinde Compositiones, quæ inde deducuntur, facili opera perficiuntur. Nunc venio ad Resolutionem, & Compositionem difficiliorum Problematum, vbi quadrata implexis affectionibus obuoluuntur, idest vel pluribus planis, partim affirmatis, partim negatis, vel etiam planis sub latere, & aliqua longitudine, non quidem ex se data, sed ad datam ex se, datam habente rationem, quo fit vt æquationes difficilius explicentur, atque adeo Compositiones, quæ ab ipsis proficiscuntur fiant difficiliores.

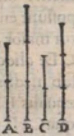
Theorema I.

Si quatuor magnitudinum proportionalium vna extremarum, aut mediarum fuerit maxima, altera minima erit.

SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D, sitque A ad B, vt C ad D, & sit vna extremarum vtpote A omnium maxima. Dico alteram extremam D minimam esse. Quoniam enim maxima ponitur A prima, ea maior est quàm C tertia, ergo & secunda B maior est, quàm D quarta. & cum sit, vt A ad B, ita C ad D, A autem maior quàm B, erit & C maior quàm D. itaque ipsa D omnium est minima.



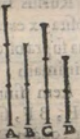
A SEd sit maxima vna mediarum vtpote B. Dico alterâm mediam C minimam esse; Quoniam enim vt A ad B minor nempè ad maiorem, ita est C ad D, erit & C minor quam D, & cum sit, vt A ad B, ita C ad D erit conuertendo vt B ad A, ita D ad C, est autem B maior quam D, cum sit omnium maxima, ergo & A, quàm E C maior erit. Minima est igitur omnium C. quare constat propositum.



Theorema II.

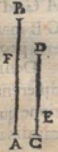
B Si composita ex extremis quatuor magnitudinum proportionalium fuerit maior, quam composita ex medijs, vel differentia extremarum maior, quam differentia mediarum, altera extremarum maxima erit, altera minima, sin minor altera mediarum maxima, altera minima erit.

SInt quatuor magnitudines proportionales A B, C D; sitque composita ex extremis A D maior, quã composita ex medijs B C. Dico alterã extremarum A D maximam esse, alteram minimam. Si enim fieri potest neutra ipsarum A D sit maxima, ergo maxima erit vna ex medijs B C & * consequenter altera minima, quare composita ex maxima & minima, hoc est ex B C, * maior erit quam composita ex reliquis, quod est absurdum; ponitur enim composita ex A D maior, ex antec. ex quinti



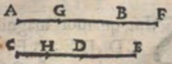
C quam composita ex B C: Cum igitur neutra mediarum sit maxima, erit maxima vna extremarum, & per consequens * altera minima. Eadem ratione ostendemus si composita ex extremis fuerit minor, quam composita ex medijs, alteram mediarum, maxima esse alteram minimam. ex antec.

Rursus sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F differentia extremarum A B, B F maior quam C E differentia mediarum C D, D E. Dico A B maximam esse, F B minimam. Si enim fieri potest non sit maxima A B, ergo C D maxima erit, & consequenter * D E minima: itaque D E minor erit, quàm B F; quare reliqua E C maior, quàm reliqua F A. quod est absurdum; ponitur enim A F maior quàm C E. Non igitur maxima est C D, quare A B maxima erit, & * consequenter B F minima. Eadem ratione ostendemus si differentia extremarnm fuerit minor, quàm differentia mediarum, alteram mediarum maximam esse, alteram minimam. Quare constat propositum. ex antec. ex antec.



Hoc Theorema demonstrauimus ratione ducente ad imposibile, sed tamen possumus etiam recta demonstratione vti hoc modo.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F composita ex extremis maior quàm C E composita ex medijs. Dico alteram extremarum A B, B F maximam esse, alteram mini-



mam

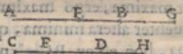
mam. Sit enim A B maior, quam B F, & C D non minor, quam D E; possunt enim C D, D E esse quoque æquales. Quoniam igitur A B ponitur maior, quàm B F, & C D non minor quam D E, erit B F minor, quàm C D: alioquin rectangulum A B F sub extremis maius esset rectangulo C D E sub medijs; quod esset absurdum. Sumatur ergo D H æqualis F B, & B G æqualis E D: erit G F æqualis H E, vnde reliqua A G maior erit, quàm reliqua C H, ponitur enim tota A F maior, quàm tota C E.

Et quoniam est, vt A B ad C D, ita D E ad B F; erit permutando vt A B ad D E, hoc est ab B G, ita C D ad B F, hoc est ad D H, & diuidendo, vt A G ad G B, ita erit C H ad H D, sed A G ostensa est maior, quam C H, ergo & G B maior erit quam H D; atque adeo tota A B maior, quàm tota C D, & consequenter maior etiam, quàm D E, ponitur enim C D non minor, quàm D E, itaque A B maxima erit proportionalium, & per * consequens B F minima.

ex antec.

Rursus sint quatuor proportionales C D, A B, B F, D E, sed C E composita ex extremis sit minor quàm A F composita ex medijs. eadem ratione qua supra ostendemus alteram mediarum A B, B F, maximam esse, alteram minimam.

Item sint quatuor proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F differentia extremarum maior, quàm C E differentia mediarum. Dico alteram, extremarum A B, B F maximam esse, alteram minimam. Producatur enim A B in G, vt sit B G æqualis E D. similiter producatur C D in H, vt sit D H æqualis F B, erunt igitur æquales F G, E H, sed A F ponitur maior, quàm C E, ergo tota A G maior erit, quàm tota C H.



Et quoniam est vt A B ad C D, ita D E ad B F, erit permutando, vt A B ad E D, hoc est ad B G, ita C D ad B F, hoc est ad D H, & componendo, vt A G ad G B, ita C H ad H D, sed A G ostensa est maior, quàm C H, ergo & G B maior erit, quàm H D, hoc est E D maior, quàm F B, itaque F B minima erit proportionalium A B, C D, D E, B F, & * consequenter A B maxima.

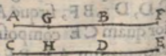
ex antec.

Denique sint quatuor proportionales C D, A B, B F, D E: sit autem C E differentia extremarum minor, quàm A F differentia mediarum. eadem ratione qua supra ostendemus alteram mediarum A B, B F maximam, alteram minimam esse. quare constat propositum.

Theorema III.

Si composita ex extremis quatuor magnitudinum proportionalium fuerit æqualis compositæ ex medijs, vel differentia extremarum æqualis differentiæ mediarum, maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D E, B F, sitque A F composita ex extremis æqualis C E compositæ ex medijs, & sit



A B

A B maior extrema, C D maior media. Dico A B, C D æquales esse, itemque æquales D E, B F; sumatur enim B G æqualis E D, & D H æqualis F B, ergo tota F G æqualis erit toti E H, sed & A F ponitur æqualis C E, ergo & reliqua A G æqualis erit reliquæ C H.

Et quoniam est, vt A B ad C D, ita B E ad B F; erit permutando, vt A B ad E D, hoc est ad B G, ita C D ad B F, hoc est ad D H, & diuidendo, vt A G ad G B, ita erit C H ad H D, sed A G ostensa est; æqualis C H, ergo & G B æqualis erit H D, hoc est E D æqualis F B, minor videlicet mediarum, minori extremarum. & si ab æqualibus A F, C E auferantur æquales F B, D E, reliqua B A reliquæ D C æqualis erit, hoc est maior extrema maiori mediæ.

Rursus sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, D H, B G, sitque A G differentia extremarum æqualis C H differentiæ mediarum. Dico A B, C D æquales esse, & æquales D H, B G, producatur enim A B, C D, vt sit B F æqualis D H, & D E æqualis B G. Quoniam igitur B F æqualis est D H, & B G æqualis D E; erit tota F G æqualis toti E H, sed & A G ponitur æqualis C H, ergo tota A F toti C E æqualis erit.

Et quoniam est, vt A B ad C D, ita D H ad B G, erit permutando, vt A B ad D H, hoc est ad B F, ita C D ad B G, hoc est ad D E, & componendo, vt A F ad F B, ita C E ad E D, sed A F ostensa est æqualis C E, ergo & F B æqualis erit E D, hoc est D H æqualis B G minor videlicet mediarum minori extremarum, sed ponũtur æquales & A G, C H, ergo tota A B toti C D æqualis erit; hoc est maior extrema maiori mediæ. Maior igitur extremarum maiori mediarum minor minori æqualis est, quod erat ostendendum.

Problema I.

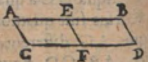
Dato quadrato aliud quadratum in data ratione inuenire.

Sit datum quadratum, cuius latus A k, & data ratio A G ad A C. Oportet inuenire aliud quadratum, vt quadratũ A K ad quadratũ inuentũ habeat rationẽ, vt A G ad AC. Ponãtur in directum AG, AC, & ex pũcto A ducatur A k, ita vt cũ A C constituat angulum quẽcunq;, & iungatur G k, eiq. parallela ducatur c y occurrens K A productæ in y: in recta autem k y describatur semicirculus y I K, & ex A ipsi k y ducatur perpendicularis A I, vsque ad circumferentiam: si quidem punctum A sit in diametro K y; si vero sit extra diametrum, ducatur A I contingens semicirculum in I. Quoniam igitur parallelæ sunt G k, c y, erunt anguli A G K, A c y æquales, & æquales quoque anguli A k G, A y c; vnde similia triangula A G K, A c y: vt igitur A G ad A C, ita erit A k ad A y, sed vt A K ad A y, ita est quadratum A k ad quadratum A I, sunt enim tres proportionales A k,

Corol. 2. propos. 20 sexti A I, A y, & est vt * prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ, ergo vt A G ad A C, ita erit quadratum A k ad quadratum A I. Factum est igitur quod oportebat.

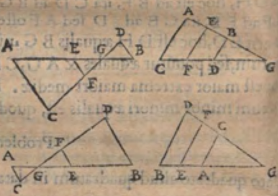
Lemma I.

Si à medio & extremitatibus vnius rectæ lineæ ducantur tres rectæ parallelæ, alteram rectam lineam secantes. Segmenta sectæ inter parallelas interiecta æqualia erunt.



SInt duæ rectæ lineæ AB, CD, quarum A B secetur bifariam in E, & à punctis A E B. ducantur tres parallelæ A C, E F, B D secantes rectam C D in punctis, C F D. Dico æquales esse C F, F D. Si enim A B, C D sunt parallelæ. parallelogramma sunt A F, F B, ac proinde latera A E, C F ex aduerso æqualia, atque æqualia latera E B, F D, sed ponuntur æquales A E, EB, ergo & C F, F D sunt quoque æquales.

Si vero A B, C D non sunt parallelæ conuenient inter se, conueniant in G, ergo similia erunt triangula G A C, G E F, ob parallelas enim E F, A C angulus G A C æqualis est angulo G E F, & angulus G C A angulo G F E, quare vt A G ad G E, ita erit C G ad G F, & existente quidem puncto E inter puncta A G, erit diuidendo, & conuertendo, existẽte vero G inter A E erit componendo, & conuertendo, existẽte autem A inter E G erit conuertẽdo, & per conuersionem rationis, vt G E ad E A, ita G F ad F C.



Et quoniam propter parallelas B B, E F angulus G D B, æqualis est angulo G F E, & angulus G B D angulo G E F, similia erunt triangula G D B, G F E, vt igitur B G ad G E, ita erit D G ad G F, & existente G inter E B, erit componendo, existente vero E inter G B, erit diuidendo, at existente B inter E G, erit conuertendo, & per conuersionem rationis, & rursus conuertendo, vt B E ad G E, ita D F ad G F; sed vt G E ad E A, ita est G F ad F C, vt demonstrauimus, ergo ex * æquali, erit vt B E ad E A; ita D F ad F C; sed B E æqualis est E A, ergo & D F æqualis erit F C.

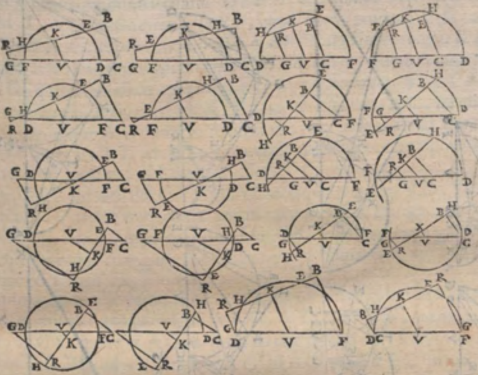
Lemma I I.

Si in diametro circuli, etiam producta, sumantur duo puncta à centro æquè distantia, & ab ijs ducantur ad rectam lineam cadentem in circulum duæ rectæ perpendiculares; Segmenta cadentis inter circumferentiam, & perpendiculares interiecta, æqualia erunt.

Suman-

A Sumantur in diametro circuli DF. duo puncta CG à centro quod ſit V,

B

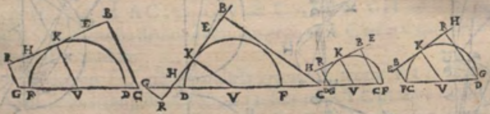


æque diſtantia, & ab alijs ad rectam EH cadentem in circulum ducantur duæ perpendiculares CB, GR, ipſa autem EH ſecet circulum in punctis

C EH. Dico EB, HR æquales eſſe. Ducatur enim VK perpendicularis ad EH, erunt igitur tres parallelæ BC, kV, GR atque ſunt æquales GV, VC, ergo ex antecedente Lemmate æquales erunt, & KR, KB, ſed æquales quoque ſunt KH, KE, ergo per æqualium æqualibus ablationem, vel additionem, erunt æquales & EB, HR.

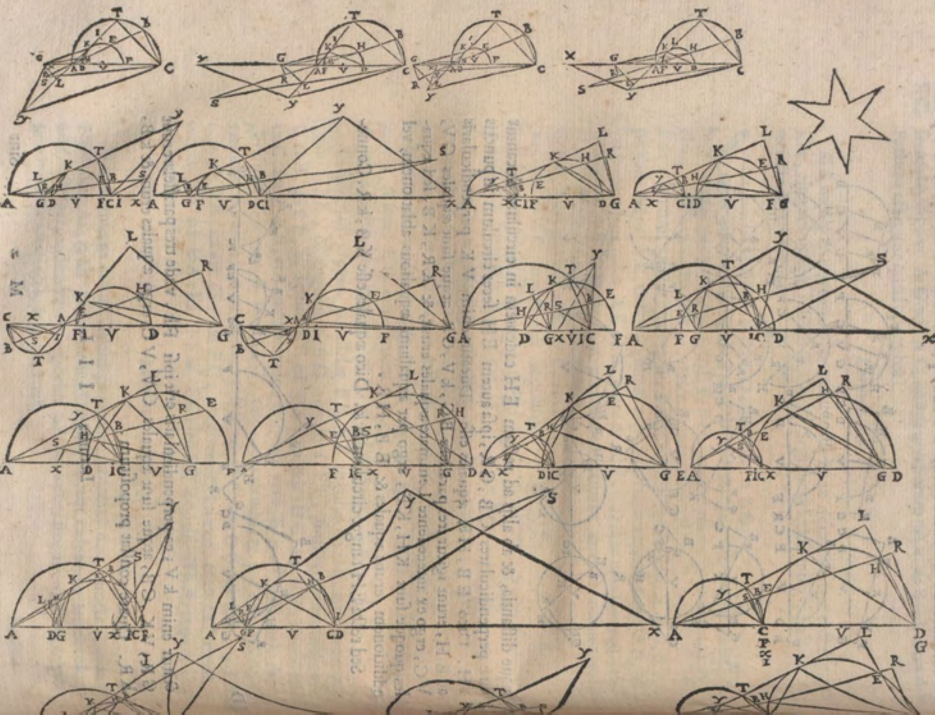
Sed recta EH tanget circulum in k. Dico æquales eſſe KB, kR. Conne-

D



ctatur enim kV; ea perpendicularis erit ipſi Fk, vnde tres parallelæ erunt GR, VK, CB, atque ſunt æquales GV, VC, ergo æquales erunt & kB, KR. Quare conſtat propoſitum.

Lemma III.



A SInt duo ſemicirculi A B C, D E F in directum baſes habentes, & recta A k contingat ſemicirculum DEF in K, ipſum vero ABC ſecet in T, & ex centro circuli D E F, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & per A ducatur vtcumque recta A E B ſecans circũferentias K F, T C in punctis E B, circumferentiam verò K D in H, & connectantur G H, G k, k D, quibus parallelæ agantur c s, c y, y x ſecantes B A, T A, F A etiam continuatas in punctis S Y X, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratũ A K ad quadratum A I. Dico vt A G ad A C, ita eſſe F C ad c x, & ita E B ad B S, & ita k T ad T Y, atque vnumquodque rectangulorũ Y A k, E A S, F A X quadrato A I æquale eſſe. Probl. 1 huius

Quoniam enim æquales ſunt V G, VC, & æquales quoq; V D, V F, erũt B æquales & D G, F C, & quoniam propter parallelas K D, x y æquales ſunt anguli G D k, c x y, & propter parallelas G K, c y æquales anguli D G k; x c y, ſimilia erunt triangula D G K, x c y; vt igitur G k ad c y, ita erit G D hoc eſt FC ad c x.

Similiter quoniam parallelæ ſunt G k, c y, erunt anguli A G k, A C Y æquales, & æquales quoque anguli A K G, A Y C, & ideo ſimilia triangula A G k, A C Y, quare vt A G ad A C, ita erit G K ad c y, ſed vt G k ad c y, ita oſtenſa eſt F C ad c x; ergo vt A G ad A C, ita erit F C ad c x. quod eſt primum.

Deinde iungatur B C, eique parallela agatur G R ſecans B S in R. angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus, quia & ipſe C A B C in ſemicirculo rectus eſt, vnde H R, * E B æquales erunt. Lem. 2.

Et quoniam parallelæ ſunt G H, c s, erit angulus G H R æqualis angulo c S B, eſt autem & angulus H R G æqualis angulo S B C, rectus nempe recto, ergo ſimilia erunt triangula H R G, S B C; quare vt G H ad C S, ita erit H R, hoc eſt E B ad B S.

Æquè quoniam ob parallelas G H, c s æquales ſunt anguli A G H, ACS, & æquales quoque anguli A H G, A S C, & ideo ſimilia triangula A G H, A c S; erit vt A G ad A C, ita G H ad C S, ſed vt G H ad C S, ita eſt E B ad B S, vt proximè demonſtrauimus, ergo vt A C ad A C, ita erit E B ad B S, quod eſt ſecundum.

Iam connectatur T C, eique parallela agatur G L ſecans Y T in L, erit an- D gulus K G L æqualis angulo A T C, ſed rectus eſt A T C in ſemicirculo, ergo & k L G rectus erit: itaque æquales erunt L k, K T. Et quoniam ſimilia ſunt triangula k L G, Y T C, ſunt enim æquales anguli G K L, C Y T ob parallelas G k, c y, & æquales anguli k L G, Y T C, quia recti, erit vt G K ad c y, ita k L, hoc eſt k T, ad T y, ſed & A G ad A C eſt, vt G k ad c y, ob ſimilitudinem triangulorum A G k, A C Y, ergo vt A G ad A C, ita erit k T ad T y, quod eſt tertium.

Et quoniam propter eandem triangulorum A G K, A c y ſimilitudinem, eſt vt A G ad A C, ita A k ad A y, vt autem A K ad A y ita * eſt quadratum A k ad rectangulum y A k, cum ſint eiuſdem altitudinis A k, ergo vt A G 1 ſexti

A G ad A C, ita erit quadratum A k ad rectangulum Y A k, sed vt A G ad A C, ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I ergo rectangulum Y A K quadrato A I æquale erit, quod est quartum. A

Similiter quoniam supra ostensa sunt similia triangula A G H, A C S, erit
5 sexti vt A G ad A C, ita A H ad A S, sed vt A H, ad A S, * ita est rectangulum E A H ad rectangulum E A S, eandem enim habent altitudinem E A, ergo
36 tertij vt A G ad A C, ita erit rectangulum E A H, hoc est * quadratum A K, ad rectangulum E A S, sed vt A G ad A C, ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I, ergo rectangulũ E A S æquale erit quadrato A I quod est quintum.

Postremo quoniam parallelæ sunt k D, x y, erunt anguli A D K, A X Y æquales, & æquales anguli A K D, A Y k, & ideo similia triangula A D K,
17 sexti A X Y; vt igitur A D ad A k, ita erit A X ad A Y; sed vt A D ad A K * ita est B
36 tertij A K ad A F; rectangulum enim F A D * æquatur quadrato A k, ergo vt A X ad A Y, ita erit A K ad A F; vnde rectangulum F A X sub extremis, æquale erit rectangulo Y A k sub medijs, sed rectangulum Y A K æquale est quadrato A I, quarto loco demonstrauimus, ergo & rectangulum F A X eidem quadrato A I æquale erit, quod postremo loco erat ostendendum,

Corollarium,

Ex demonstratis patet rectangula Y A k, E A S, F A X æqualia esse, ostensum est enim vnumquodque eorum æquari quadrato A I. C

Problema I I.

Datis duobus semicirculis in directum bases habentibus, inter eorum circumferentias ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad vnius semicirculorum angulum pertingat.

Hoc Problema multos Casus habet, eosque omnes in secundo libro mei Apollonij Rediuiui in tria capita congestos absolui. nunc octo ex principalibus in exemplum Resolutionis & Compositionis explicabo, omissis ijs in quibus dati duo semicirculi se inuicem secant aut tangunt, hi enim Casus ad illorum similitudinem, & resoluentur & componentur. D

Casus primus,

Primum vergant dati duo semicirculi ad eandem partem, neutro reliquum includente.

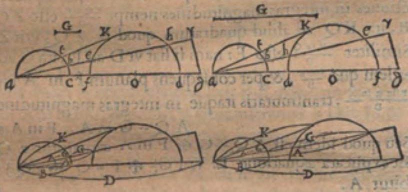
Sint itaque dati duo semicirculi a b c, d e f, vt dictum est. data autem recta linea G. & ducatur a k contingens semicirculum d e f in k; ipsum vero A B C secans in t. Oportet inter circumferentias t c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertingat. Quamuis autem ex hac semicirculorum positione duo Casus oriantur, aut enim po-

A ponenda eſt illa magnitudine data inter conuexam vtriuſque ſemicirculi circumferentiam, aut inter conuexam vnius, & cauam alterius, tamen vna, eademque reſolutione vtrique ſatisfit.

Reſolutio.

FActum iam ſit ducta nimirum recta a b e habens ſegmentum b e æquale datæ G, & producatur a d in g, vt o g recta ex centro circuli d e f, quod ſit o ſit æqualis o c, & in a e productam ſectamque à circumferentia k d in h ducatur perpendicularis g r, & connectatur c b, eaque eidem a e perpendicularis erit, quoniam angulus a b c in ſemicirculo rectus Lem 4.
B eſt, quare * æquales erunt h r, e b.

Quoniã igitur datæ ſunt a c, a g, b e, a k prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Reſolutionem pertinẽtibus deſignatũ eſt, & quæratur a e, ea eſto A: ergo a b erit A -- G, &



C cum ſint anguli a b c, a r g recti, & ideo æquales parallelæ erunt b c, r g, & ob id ſimilia triangula a b c, a r g, quare vt a c, ad a g, ita erit a b ad a r; hoc eſt in figuris Reſolutionis, vt B ad D ita A -- G ad $\frac{\text{D in A -- D in G}}{\text{B}}$, atque adeo a r erit $\frac{\text{D in A -- D in G}}{\text{B}}$, à qua ſi auferatur recta h r, cui æqualis eſt e b, reliqua a h erit $\frac{\text{D in A -- D in G}}{\text{B}}$ -- G; ſed rectangulum e a h æquale eſt quadrato a K, ergo

$$\frac{\text{D in AQ -- D in G in A}}{\text{B}} \text{ -- G in A æquabitur KQ}$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat, ergo

$$\text{D in AQ -- D in G in A -- B in G in A æquabitur KQ in B.}$$

Applicentur omnia ad D, vt poteſtas æquationis nempe AQ ex ſe ſubſi-
D ſtat, ergo

$$\text{AQ -- G in A -- } \frac{\text{B in G in A}}{\text{D}} \text{ æquabitur } \frac{\text{KQ in B}}{\text{D}}$$

Præcipere autem vt omnia ducantur in B, ac deinde producta applicentur ad D, perinde eſt ac ſi dicatur fiat vt D ad B, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad alias partes, harum namque partium altera quidem eſſet AQ -- G in A -- $\frac{\text{B in G in A}}{\text{D}}$, altera vero $\frac{\text{KQ in B}}{\text{D}}$ eadem nempe partes, quæ ex illa ductione, & applicatione procreantur, nam vtrobique eadem eſt operatio exemplo res fiet illuſtrior.

$$\frac{\text{D in AQ -- D in G in A}}{\text{B}} \text{ -- G in A æquetur KQ}$$

& fiat vt D ad B ita $\frac{\text{D in AQ -- D in G in A}}{\text{B}}$ -- G in A ad alia plana, ea erunt AQ -- G in

in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ nam A
$\frac{D \text{ in } AQ -- D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ -- G in A ducitur in B, & productum quod est D in A Q -- D in G in A -- B in G in A applicatur ad D, ex eaque applicatione oritur A Q -- G in A -- $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$.

Similiter fiat, vt D ad B, ita K Q ad aliud planum id erit $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$: tota igitur hæc progressio fit per plana non autem per solida, & in eandem inciditur æquationem. Hoc monuimus quoniam in demonstratione, quæ ordinanda est per regressum Resolutionis procedetur per proportionem planorum, non autem per æqualitatem solidorum; neque enim opus erit plana in longitudines ducere, solidaque ex huiusmodi ductu facta, ad alias longitudines applicare, vt rursus ad plana deueniant, cum in æqualitatem eorundem planorum B
incidatur per proportionem planorum progrediendo.

Vt autem clarior existat æquatio, faciliusque explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines nempe $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$ esto Z Q, si enim fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum quod sit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$. Similiter $\frac{B \text{ in } G}{D}$ esto F: nam si fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } g}{D}$, & per consequens planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } g \text{ in } a}{D}$. transmutatis itaque in integras magnitudines fractionibus.

A Q -- G in A -- F in A æquabitur Z Q

Seu quod idem est A Q -- G ✣ F in A æquabitur z Q,

Et explicata æquatione L. V. (G $\frac{1}{2}$ ✣ F $\frac{1}{2}$ Q ✣ z Q) ✣ G $\frac{1}{2}$ ✣ F $\frac{1}{2}$ æquabitur A. C

Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F; deinde rectæ cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ compositæ ex G, & F; addita eadem dimidia composita, fiet recta æqualis quæsitæ a e.

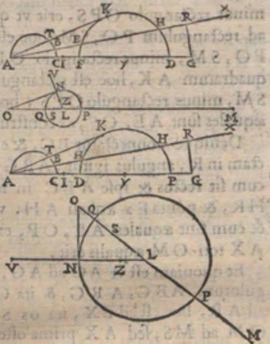
Datur igitur a e quæsita.

Compositio.

Sint dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V z, & contingat A K semicirculum D E F in K secet vero ipsum A B C in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum A pertingat. D
Duo sunt Casus vt in Resolutione dictum est. in primo oportebit datam V z non esse maiorem, quàm K T, nec minorem quam F C. in secundo oportebit non esse maiorem, quam F C, nec minorem quàm K T. Si quidem data V z sit æqualis alteri ipsarum k T, F c: factum iam erit quod proponitur, si vero maior sit minore, minor autem maiore producatur A D in G, vt y G recta ex centro circuli D E F, quod sit y, æqualis sit y c, & *fiat

Probl. 1 huius

vt



A vt A G ad A C, ita quadratũ A K ad aliud quadratũ quod ſit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L cõpoſita ex V Z, Z L ſecetur bifariã in N, eiq. ducatur ad rectos angulos N O æqualis ipſi A I, & connectatur O L. quadratum igitur O L æquale eſt quadratis O N, N L, itaq; rectæ O L addenda eſt recta æqualis ipſi L N. ſic Poriſma fieri iubet.

Producatur ergo O L in P, vt ſit L P æqualis L N, & à puncto A ad circumferẽ-
B tiam k F ducatur A E æqualis O P ſecans circumferentiã T C in B, ipſam autẽ O P, in primo quidem caſu, maiorẽ eſſe quàm A F, minorẽ quàm A K, in ſecundo vero, minorẽ quàm A F, maiorẽ quã AK infra demonſtrabitur. Iam facta eſt conſtructio Problematis, prout Poriſma docet. Nunc oſtendendũ eſt B E æqualem eſſe VZ datæ. Producatur A E, vbi opus exigit donec ſecet circumferentiã k D in H, & centro L interuallo L N, vel L P deſcribatur circulus ſecans rectam O P in Q, & ſumatur P S æqualis V Z, reliqua S Q æqualis erit reliquæ Z L.

Et quoniam recta O N tangit circulum in N cum ſit rectus angulus
C O N L ex conſtructione; quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q; 16 tertij
hoc eſt quadrato O P, minus rectangulo O P Q, ſeu minus rectangulis O P S O P S Q. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraq; æqualitatis pars ſeparatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas in Reſolutione conuerſo modo factum eſt nempe, vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ſeparatim ad alia plana. At quoniam eſt, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I ex conſtructione, hoc eſt ad quadratum O N, erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K. quadratum igitur A K erit vna pars æqualitatis, alterum vero ſic explorabimus.

Fiat vt A C ad A G, hoc eſt vt L Z ad Z V, ſeu quod idem eſt, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ ſit S M, ea maior erit, quàm S P, quoniam
D & O S maior eſt, quàm Q S, ſed vt O S ad S M ita * eſt rectangulum P O S 1 ſexti
ad rectangulum P O, S M, eandem enim habent altitudiuem P O, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum P O S, hoc eſt quadratum O P, minus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M; ſed vt A C ad A G, hoc eſt vt Q S ad S P, ita * eſt quoque rectangulum O P, S Q ad rectangulum 1 ſexti
O P S ſunt enim eiuſdem altitudinis O P. ergo vt quadratum O P, minus rectangulo O P S ad rectangulum P O, S M, ita erit rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, hoc eſt vt totum ad totum ita ablatum ad ablatum, quare & * reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum ideſt & quadra- 19 quinti
tum O P minus rectangulo O P S, ac etiam minus rectangulo O P, S Q

minus

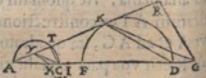
minus rectangulo O P S, erit vt quadratum O P minus rectangulo O P S A
ad rectangulum P O, S M, hoc est vt A C ad A G. Rectangulum igitur P O, S M, minus rectangulo O P S, erit altera pars æqualitatis. Itaque quadratum A K, hoc est rectangulum E A H, æquale erit rectangulo P O, S M, minus rectangulo O P S, hoc est æquale erit rectangulo O P M; sed æquales sunt A E, O P, ex constructione ergo & A H, P M æquales erunt.

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A E productam in R, angulus igitur, A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus
Lem. 3 cum sit rectus & ipse A B C in semicirculo, quare* æquales erunt E B, H R, & posita E x æquali A H. vel P M tota B X æqualis erit toti A R, & cum sint æquales A E, O P, ex constructione, & æquales e x P M, tota B
A X toti O M æqualis erit.

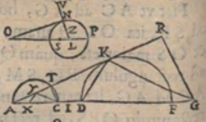
Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B ad A R ob similitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex constructione, erit vt A B ad A R, hoc est ad B X, ita os S M, & componendo vt A X ad X B, ita O M ad M S; sed A X prima ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo & secunda X B æqualis erit M S quartæ, vnde ablatis æqualibus e x P M reliqua E B æqualis erit reliquæ P S, hoc est V Z datæ, quod erat ostendendum. Factum est igitur quod oportebat.

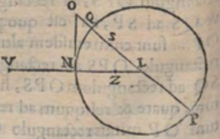
Rudis est quidem hæc demonstratio, sed talem Resolutio genuit, & nos nostrum institutum secuti, quod est à vestigijs Resolutionis in Demonstratione non recedere, ipsam demonstrationem per orsum resolutionis texuimus. C
sic etiam sequentium Casuum demonstrationes texentur. facile autem eas expoliet, qui non ea se lege adstrinxerit, vt per vestigia Resolutionis omnino regrediatur. quemadmodum neglectis ex parte resolutionem vestigijs, demonstrationes omnium Casuum huius Problematis in secundo libro nostri Apollonij Rediuiui explicauimus.

At vero rectam O P in primo quidem Casu maiorem esse quam A F, minorem quam A k, in secundo vero minorem quam A F, maiorem quam A k sic demonstrabimus.



Connectantur G K, K D, eisque parallelæ agantur C y, y x secantes A T, A C in pun- D
Lem. 3 ctis y x, erit* igitur vt A G ad A C, ita F C ad C X, sed vt A G ad A C, ita est quoque V Z ad Z L ex constructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C ad c x, & permutando vt V Z ad F C, ita erit Z L ad c x, quare vt V Z ad F C, ita erit quoque V L hoc est P Q ad F x, hoc est vt vna antecedentium ad vnam consequentium; ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, sed V Z in primo quidem Casu ponitur maior, quam F c, in secun-





do

A do vero minor, ergo & p Q in primo Casu maior erit quam Fx, in secundo minor.

Et quoniam rectangulum F A x * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato ON, seu rectangulo P Q Q, proportionales erunt P O, F A, A x, OQ, sed P Q differentia extremarum in primo quidem Casu ostensa est maior, quam F x, differentia mediarum, ergo altera * extremarum p O, OQ, nempe ipsa p O maxima erit, & per consequens maior quam F A. in secundo vero Casu ipsa P Q ostensa est minor quam F x, ergo altera * mediarum F A, A x, hoc est ipsa A F maxima erit, & per consequens maior quam O P.

Lem. 3 — Theor. 2 huius — Theor. 2 huius

Deinde connectatur C T, eique parallela agatur G R occurrens A K

B continuatæ in R, erit angulus A R G rectus, cum sit rectus & angulus A T C in semicirculo, ac proinde * æquales erunt T K, k R. Lem.

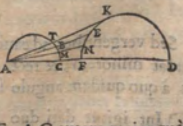
Et quoniam est vt A G ad A C, * ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita k T ad T y, & permutando vt V Z ad k T, ita Z L ad T y, & consequenter ita V L ad k Y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, sed V Z, in primo quidem Casu ponitur minor, quàm K T, in secundo vero maior, ergo & V L hoc est P Q in primo Casu minor erit, quam K Y in secundo maior. Lem. 5

Et quoniam rectangulum y A k * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N, seu rectangulo P O Q, proportionales erunt y A, Q o, o P, A k, sed y k differentia extremarum, in primo quidem Casu ostensa est ma-

C ior, quam p Q differentia mediarum, ergo altera * extremarum y A, A k, nempe ipsa A k maxima erit, & consequenter maior quam O P: In secundo vero Casu y k ostensa est minor, quàm P Q ergo altera * mediarum Q O, O p, nempè ipsa p O erit maxima, & per consequens maior quam A k. Recta igitur O p. in primo quidem Casu maior est quàm A F, minor quàm A K, in secundo vero minor, quàm A F, maior quàm A K. quod erat ostendendum.

Lem. 3 — Theor. 2 huius — Theor. 2 huius

Diximus oportere in primo quidem Casu datam V Z non esse maiorem, quam K T, nec minorem quam F C: in secundo vero non esse maiorem, quàm F C, nec minorem, quàm K T. Quoniam in primo Casu k T maxima est omnium, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias

D T C, k F interijciuntur: F C minima: In secundo vero maxima est F C, minima K T, aliarum autem in vtroque Casu propinquior minimæ remotiore minor est, idque sic demonstrabitur.

Ducatur vtrumque recta A B E secans circumferentias T C, K F in punctis B E. Quoniam igitur in primo Casu A K maior est, quàm A E, A T autem minor, quàm A B, reliqua T K maior erit, quàm reliqua B E, & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur K T.

Similiter quoniam A F minor est, quàm A E, A C autem maior quàm

A B,

A B, reliqua C F minor erit, quàm reliqua B E: Eademque ratione demonstrabitur omnibus alijs minor. minima est igitur omnium F C. A

Rursus ducatur alia recta A M N secans circumferentias T C, K F in punctis M N, sitque recta M N minimæ C F propinquior, quàm B E. Quoniam igitur A N minor, est quàm A E, A M autem maior quam A B reliqua M N, minor erit quàm reliqua B E. Propinquior igitur minimæ, minor est remotiore.

In secundo autem Casu sumatur ex centro circuli D E F, quod sit y recta y G æqualis y c, & connectatur C B eique parallela agatur G R secans A E productam in R, quàm etiam secet circumferentia k D in H. Angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, sed rectus est A B C

B

Lem. 1 in semicirculo ergo & A R G rectus erit, quare * æquales erunt E B, H R; & A G maior erit quam A R, sed A D minor est quam A H, ergo reliqua D G, hoc est F C, maior erit quam reliqua H R. & sic ostendetur ipsa F C maior omnibus alijs. Maxima est igitur F C.

Deinde connectatur C T, & ei parallela agatur G I secans A k productam in I, ipsam vero A R in L, angulus A I G æqualis erit angulo A T C

Lem. 1 & ideo rectus, cum sit rectus & ipse A T C in semicirculo, quare * æquales T K, K I, & A I minor erit quam A L, & multo minor quam A R, sed A K maior est quàm A H, ergo reliqua K I seu k T minor erit, quàm reliqua H R, hoc est quam E B, & sic ipsa K T ostendetur omnibus alijs minor. Itaque minima est K T. C

Postremo ducatur alia recta A M N secans circumferentias T C, K F in punctis M N, circumferentiam vero k D in O, sitque recta M N minimæ K T propinquior quam E B, & connectatur C M, cui parallela agatur G P secans A N productam in P, ipsam vero A R in Q. angulus igitur A P G æqualis erit angulo A M C, & ideo rectus, cum sit rectus & A M C

Lem. 1 in semicirculo, vnde æquales * erunt M N, O P, & A P minor erit quam A Q, & multo minor quam A R, sed A O maior est, quàm A H, ergo reliqua A P seu M N, minor erit, quàm reliqua H R. hoc est quam B E. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. Quare manifesta est Determinatio. D

Casus Secundus.

Sed vergentibus ad eandem partem datis duobus semicirculis, maior includat minorem, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi maioris, à quo quidem angulo semicirculus minor plus distet, quàm à reliquo.

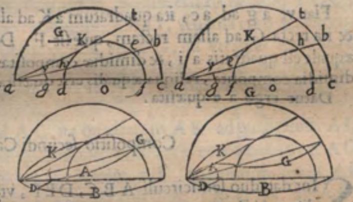
Sint igitur dati duo semicirculi a b c, d e f, quales ponuntur, data autem recta linea G, & contingat a k semicirculum d e f in K, ipsum

A ſum vero a b c ſecet in t. Oportet inter circumferentias t c, k f. ponere rectam lineam æqualem ipſi G, ita vt ad punctum a pertineat. Hic quoque duplex oritur Caſus, aut enim ponenda eſt data recta inter cauam vnius & conuexam alterius ſemicirculi circumferentiam, aut inter cauam vtriuſque. vnica tamen Reſolutione vtrique caſui ſatisfit.

Reſolutio.

POſita iam ſit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertineat, quemadmodum Problema exigit, & ex centro circuli d e f, quod ſit o ponatur o g æqualis o c, & recta a e b ſecet circumferentiam k d in h, ipſique a b ducatur perpendicularis g r, & iungatur c b;
B ea quoque eidem a b perpendicularis erit, angulus enim a b c in ſemicirculo rectus eſt vnde* æquales erunt h r, e b. Theor. 4 hujus

Quoniam igitur datæ ſunt a c, a g, b e, a K, prima ſit B, ſecunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Reſolutionem pertinentibus deſignatum eſt, & quæratur a e, ea eſto A, ergo a b erit A ✣ G, & cum ſint ſimilia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c, a r g ſunt æquales, quia recti, & angulus a communis vtrique triãgulo, erit vt a c ad a g, ita a b ad a r, hoc eſt in figuris



C reſolutionis, vt B ad D, ita A ✣ G ad $\frac{D \text{ in } A \dagger D \text{ in } G}{B}$, atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A \dagger D \text{ in } G}{B}$, cui addita r h, quæ æqualis eſt ipſi e b tota a h erit $\frac{D \text{ in } A \dagger D \text{ in } G}{B}$ ✣ G, ſed rectangulum e a h * æquale eſt quadrato A K, ergo 16 tertij

$\frac{D \text{ in } A\,Q \dagger D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ✣ G in A æquabitur k Q.

Ducantur omnia in B, vt fractio euaneſcat. ergo

D in A Q † D in G in A † B in G in A æquabitur K Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt Poteſtas æquationis, nempe A Q ex ſe ſub-
D ſiſtat. ergo

A Q ✣ G in A ✣ $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ æquabitur $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$.

Ductio hæc, & applicatio vtramq; æqualitatis partẽ trãſmutant in alias partes ibidem æquales, reſolutionemq. ad æquationem ſecundũ artis pręcepta perducunt. idem fieret ſi operatio per proportionẽ inſtitueretur, hoc modo. Fiat vt D ad B, ita vtraq; æqualitatis pars ſeparatim ad alias partes, nam & hæ quidẽ partes æquales erunt eædẽq. quæ ex operatione ductionis, & applicationis procreantur. Hoc monuimus quẽadmodũ in antecedẽtis caſus reſolutione factum eſt, quoniá in demonſtratione inſtituenda, regreſſus qui fieri debet reſolutionis veſtigia repetendo, fiet non per æqualitatem ſolidorum, ſed per proportionem planorum, vt factum est in compositione antecedentis Casus, & ne eadem in omnibus Casibus repetenda sint eadem dicta esse intelligantur in similibus sequentium Casuum locis.

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutione antecedentis Casus factum est nempe $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$ estò ZQ, nam si fiat, vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum quod sit ZQ, erit ZQ idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter $\frac{B \text{ in } G}{D}$ esto F, nam si fiat, vt D ad B, ita G ad alium quæ sit F, erit F eademque quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, & ideo planum F in A idem erit quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. Facta igitur transmutatione fractionum in integras magnitudines.

AQ + G in A + F in A æquabitur ZQ.

Vel AQ + G + F in A æquabitur ZQ.

Et explicata æquatione L.V. (G $\frac{1}{2}$ + F $\frac{1}{2}$ Q + ZQ) --- G $\frac{1}{2}$ --- F $\frac{1}{2}$ æquabitur A

Porisma.

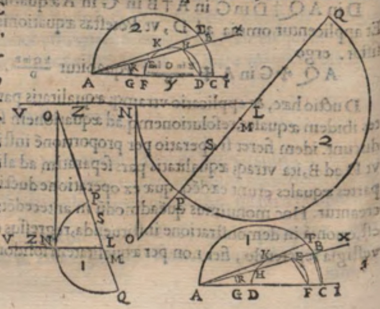
Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a K ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. Deinde rectæ, cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ compositæ ex G, & F dematur eadem dimidia composita, reliqua æqualis erit quæsitæ a e.

Datur ergo a e quæsita.

Compositio secundi Casus.

Sint dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V Z, & contingat A K semicirculum D E F in K, secet vero alterum A B C in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertingat. Duplex est Casus, vt dictum est in Resolutione. In primo quidem oportebit datam V z non esse maiorem quam K T, nec minorem quam F C, in secundo vero non esse maiorem quā F C nec minorem quam K T.

Siquidem V Z sit æqualis alteri ipsarum k T, F C, factum iam erit, quod Proponebatur, si vero maior sit minore, minor autem maiore, ponatur ex centro circuli D E F quod sit y recta y G æqualis y c, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratū quod



quod sit A I. similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L compo-
sita ex V Z, Z L secetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O,
quæ sit æqualis A I, & connectatur O L. Quadratum igitur O L æquale
est quadratis O N, N L: itaque rectæ O L detrahenda est recta æqualis ipsi
L N. sic Porisma fieri iubet. Centro igitur L interuallo L N describatur
circulus secans O L in P, ipsamque continuatam in Q. infra demonstra-
bimus rectam O P, in primo quidem Casu minorem esse, quàm A F,
maiorem quam A K: in secundo vero maiorem esse, quam A F; minorem
quam A K. Itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k F duci re-
cta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, & producatur donec secet cir-
cumferentiam T C in B. Facta est igitur constructio quemadmodum Po-
risma docet. Nunc ostendam E B æqualem esse V Z datæ. Producatur
A E, vbi res postulat ad circumferentiam K D in H; & sumatur P S æ-
qualis V Z, reliqua S Q æqualis erit reliquæ Z L, est enim P Q æqua-
lis V L.

Et quoniam recta O N tangit circulum in N cum sit rectus angulus
O N L ex constructione, quadratum, O N * æquale erit rectangulo P O Q, 36 tertij
hoc est quadrato O P, vna cum rectangulo O P Q, seu vna cum rectangu-
lis O P S, O P S Q. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis
pars separatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas. In Resolutione con-
uerso modo factum est, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars
ad alia plana.

C At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I,
ex constructione, hoc est ad quadratum O N, erit conuertendo, vt A C
ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K, quadratum igitur A k
erit vna pars æqualitatis, alteram vero sic inueniemus. Fiat vt A C ad A G,
hoc est vt L Z ad Z V, seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam,
quæ sit S M: vt autem O S ad S M, ita * est rectangulum P O S ad rectan- 1 sexti
gulum P O, S M; sunt enim eiusdem altitudinis P O, ergo vt A C ad
A G, ita erit rectangulum P O S, hoc est quadratum O P, plus rectan-
gulo O P S, ad rectangulum P O, S M.

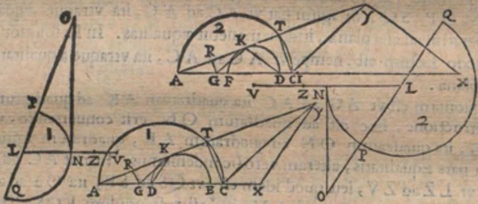
Rursus vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita est rectangulum O P,
S Q ad rectangulum O P S, cum sint eiusdem altitudinis O P, ergo vt
D quadratum O P, plus rectangulo O P S, ad rectangulum P O, S M, ita
erit rectangulum O P, S Q ad rectangulum O P S, & ita quoque * omnes 12 quinti
antecedentes ad omnes consequentes, nempe vt quadratum O P, plus re-
ctangulo O P S ad rectangulum P O, S M, hoc est vt A C ad A G, ita qua-
dratum O P vnà cum rectangulis O P S, O P, S Q ad rectangulum P O, S M
vna cum rectangulo O P S. Rectangulum igitur P O, S M, vnà cum rectan-
gulo O P S, erit altera pars æqualitatis. Itaque quadratum A k, hoc est * re- 36 tertij
ctangulum E A H æquale erit rectangulo P O, S M, vnà cum rectangulo
O P S hoc est, æquale erit rectangulo O P M, sed æquales sunt A E, O P
ex constructione, ergo & A H, P M æquales erunt.

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A H in R, A
angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus, cum sit
Lem. 3 rectus & ipse A B C in semicirculo, quare * æquales erunt E B, H R, & posita B x æquali A R, tota E x æqualis erit toti A H, vel P M, & cum sint æquales A E, O P, ex constructione, & æquales e x, P M, tota A x toti O M æqualis erit.

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B ad A R, ob similitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex constructione, erit vt A B ad A R, hoc est ad B x, ita O S ad S M, & componendo vt A x ad x B, ita O M ad M S, sed prima A x ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo & secunda x B æqualis erit M S quartæ, atque ablatis æqualibus x B, M S ab æqualibus e x, P M, reliqua E B reliquæ P S, hoc est V Z datæ, æqualis erit, quod erat ostendendum. Factum est igitur quod oportebat. B

At vero rectam O P, in primo quidem Casu minorem esse, quam A F, maiorem quam A K: in secundo vero maiorem quàm A F, minorem quam A K, sic demonstrabitur.

Connectantur G k, K D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes A T



Lem. 5 A C continuatas in punctis y x: erit igitur vt * A G ad A C, ita F C ad C x, sed vt A G, ad A C, ita est quoque V Z ad, Z L, ex constructione, ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C, ad C x, & permutando vt V Z ad F C,
12 quinti ita erit Z L ad c x, quare & * ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, hoc est ita V L, vel P Q ad F x. sed V Z in primo casu ponitur maior, quàm F C: in secundo minor, ergo & P Q in primo Casu maior D
erit quam F x, in secundo minor.

Lem. 5. Et quoniam rectangulum F A x * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato
36 tertij 16 sexti O N, seu * rectangulo P O Q, * proportionales erunt P O, F A, A x, O Q, sed P Q differentia extremarum, in primo quidem Casu ostensa est maior,
Theor. 8 huius quam F x differentia mediarum, ergo altera * extremarum P O, O Q, nempe ipsa P O minima erit, & per consequens minor quam A F. In secundo vero
Theor. 2 huius Casu ipsa P Q ostensa est minor, quàm F x, ergo altera * mediarum F A, A x, hoc est ipsa A F, minima erit, & consequenter minor quam O P.

Iam connectatur C T, eique parallela agatur G R secans A K in R.

erit

A erit angulus A R G æqualis angulo A T C, & ideo rectus, cum sit rectus & angulus A T C in semicirculo quare* æquales erunt T k, k R. Lem. 3.

Et quoniam est vt A G ad, A C, * ita k T ad T y, & ita quoque V Z ad Lem. 3.
Z L, ex constructione, erit, vt V Z ad Z L ita k T ad T y, & permutando vt V Z ad k T, ita erit Z L ad T y, & consequenter ita * quoque V L ad 12 quinti
K y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, & rursus conuertendo vt V Z ad V L, ita k T ad k y sed V Z in primo casu ponitur minor, quam k T, in secundo maior, ergo, & V L, hoc est P Q in primo Casu minor erit, quam K y, in secundo maior.

Postremo quoniam rectangulum y A K* æquale est quadrato A I, hoc Lem. 3
est quadrato O N seu * rectangulo Q o P, proportionales erunt y A, Q o 36 tertij
B o P, A K, sed y K differentia extremarum. in primo quidem Casu ostensa est maior, quàm P Q differentia mediarum, ergo altera * extremarum y A, Theor. 2 huius
A k nempe ipsa A K minima erit, & consequenter minor, quam O P. In secundo vero Casu y k ostensa est minor, quàm P Q, ergo altera * media- Theor. 2 huius
rum Q O, o P, nempe, ipsa O P minima erit, & per consequens minor quàm A k. Recta igitur O P in primo Casu minor est, quàm A F, maior quam A k, in secundo minor quàm A K, maior quàm A F. quod erat ostendendum.

Diximus oportere in primo quidem Casu datam V Z non esse maiorem, quàm k T, nec minorē, quam F C, in secundo vero non esse maiorem, quam F C, nec minorem, quam k T, nam in primo Casu k T maxima est om-
C nium quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias T C, k F interijciuntur, F C minima. In secundo autem maxima est F C, minima k T. aliarum autem propinquior minimæ, remotiore minor est. idque sic demonstrabitur.

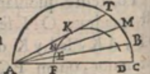
In primo Casu ducatur vtrumque recta A E B secans circumferentias K F, T C in punctis E B, circumferentiam vero K D in H, & ex centro circuli D E F, quod sit y sumatur y G æqualis y c, & connectantur C B, C T, eisque parallelæ agantur G R, G I, quarum G R secet rectam A B in R, altera vero G I secet vtramque A B, A T in punctis Q I. Æquales

D igitur erunt anguli A T C, A I G, & æquales quoque anguli A B C, A R G sed recti sunt A T C, A B C in semicirculo, ergo & anguli A I G, A R G recti erunt, ac proinde* æquales I K, K T, &* æquales R H, E B. Et quoniam Lem. 2
A k maior est, quàm A H, A I autem minor, quàm A Q, & multo minor quam A R, reliqua I K maior erit, quàm reliqua R H, hoc est K T, maior quam E B & sic ipsa K T ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur K T.

Æque quoniam A D minor est, quàm A H, A G autem maior quàm A R reliqua G D minor erit, quàm reliqua R H, hoc est F C minor, quàm E B. Minima est igitur F C.

Sed ducatur alia recta A N M secans circumferentias K F, T C in pun- A
ctis N M; circumferentiam vero k D in O, sitque N M ipsi F C propinquior, quàm E B, & connectatur C M, cui parallela agatur G P secans rectam A M in P, quam etiam secet G R in L. angulus igitur A P G æqualis erit angulo A M C, sed rectus est A M C in semicirculo, ergo &
Lem. 2 A P G rectus erit, ac proinde* æquales erunt P O, N M. Et quoniam A O minor est, quàm A H, ipsa autem A L maior, quàm A R, & A P multo maior, ergo reliqua P O hoc est N M minor erit, quàm reliqua R H, hoc est quàm E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore.

In secundo autem Casu ducatur recta A E B secans circumferentias k F, T C in punctis E B. Quoniam igitur A C maior est, quàm A B, A F autem minor, quàm B
A E, reliqua F C maior erit, quàm reliqua E B. Maxima est igitur omnium F C.



Similiter quoniam A T minor, est quàm A B; A K autem maior, quàm A E reliqua K T minor erit, quàm reliqua E B. Minima est igitur omnium k T.

Postremò ducatur alia recta A N M secans circumferentias k F, T C in punctis N M, & sit N M ipsi k T propinquior, quàm E B. Quoniam igitur A M minor est, quàm A B, & A N maior, quàm A E, reliqua N M minor erit, quàm reliqua E B, hoc est propinquior minimæ minor remotiore. Quare manifesta est determinatio. C

Casus Tertius.

Rursus vergant ad eamdem partem dati duo semicirculi, maior minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi maioris, sed ab eo angulo semicirculus minor minus distet, quàm à reliquo.

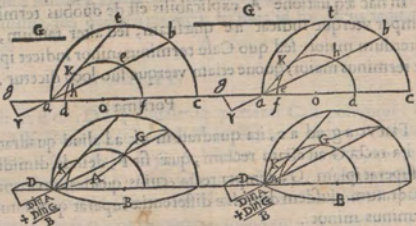
Sint igitur dati duo semicirculi a b c, d e f, quales ponuntur; data autem recta linea G, & ducatur A K contingens semicirculum d e f in K; ipsum vero a b c secans in t. Oportet inter circumferentias t c, K f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertineat. Et hic Ca-
sus in duos alios Casus diuiditur, aut enim ponenda est ea recta inter cauam D
circumferentiam vnius semicirculi, & conuexam alterius, aut inter cauas vtriusque, tamen vterque vno eodemque modo resoluitur.

Resolutio.

Sit iam posita recta linea e b æqualis datæ G, vt Problema exigit, & ex centro circuli d e f, quod sit O, ponatur O g æqualis o c, & recta a e b secet circumferentiam K d in h, & ducatur g r perpendicularis ad b a productam, & connectatur c b. angulus igitur a b c in semicirculo rectus est, ac proinde h r *æqualis e b.
Lem. 2

Quo-

A Quoniam igitur datæ sunt ac, ag, be, ak. prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus designatū est, & quæratur ae. estò illa A, ergo recta AB erit A + G, & cùm sint similia triangula abc, arg, anguli enim abc,



B arg sunt recti, & ideo æquales, & æquales quoque anguli ad a, quia sunt ad verticem, erit vt ac ad ag ita ab ad ar, hoc est in figuris ad resolutionem pertinentibus, vt B ad D, ita A + G ad $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, atque adeo ar erit $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, quæ si auferatur à recta rh æquali ipsi eb, remanebit ah, itaque ah erit G -- $\frac{D \text{ in } A + D \text{ in } G}{B}$, sed rectangulum eah * æquale est quadrato Ak, ergo 36 tertij

G in A -- $\frac{D \text{ in } AQ + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ æquabitur kQ

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

B in G in A -- D in G in A -- D in A Q æquabitur K Q in B

G in A -- $\frac{D \text{ in } AQ + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ducto in B alicui videbitur productum debere esse B
C in G in A -- D in A Q + D in G in A (non autem vt nos exposuimus) quod verum non est; nam cum à G in A auferenda sit tota fractio $\frac{D \text{ in } AQ + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ à producto quoque B in G in A auferri debet totum productum fractionis, quod est D in A Q + D in G in A Itaque G in A -- $\frac{D \text{ in } AQ + D \text{ in } G \text{ in } A}{B}$ ducto in B, productum erit B in G in A -- D in A Q -- D in G in A, quod animaduertisse fuerit operæ pretium.

Denique applicentur omnia ad D, vt AQ, Potestas nempe æquationis ex se subsistat, ergo

$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ -- G in A -- A Q æquabitur $\frac{kQ \text{ in } B}{D}$

Ea, quæ de huiusmodi ductione, & applicatione in Resolutionibus duorum præcedentium Casuum in simili loco dicta sunt, hic quoque dicta esse intel-
D ligantur ob rationes ibidem allatas.

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est, hoc est fiat vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum, quod sit ZQ, erit ZQ idem quod $\frac{kQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, erit F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planū $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$ facta igitur transmutatione.

F in A --- G in A --- A Q æquabitur ZQ

Vel F -- G in A -- A Q æquabitur ZQ

Et explicata æquatione F $\frac{1}{2}$ G $\frac{1}{2}$ -- L. V. (F $\frac{1}{2}$ -- G $\frac{1}{2}$ Q -- ZQ) æquabitur A

Vel

 A

Vel $F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} \pm$ L. V. $(F\frac{1}{2} - G\frac{1}{2}\, Q - Z\, Q)$ æquabitur A

In hac æquatione A, explicabilis eſt de duobus terminis, quorum non ſemper vterque indicat a e quæſitam, ſed alter tantum, interdum minor, interdum maior, ſed quo Caſu terminus minor indicet ipſam quæſitam, quoue terminus maior, quoue etiam vterque ſuo loco dicetur.

Poriſma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod ſit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ ſit F, deinde dimidiæ differentiæ, qua F ſuperat ipſam G, dempta recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem dimidiæ differentiæ ſuperat quadratum a i, reliqua erit terminus minor. B

Vel eidem dimidiæ differentiæ addita eadem recta fiet terminus maior.

Scholium.

Ex Poriſmate apparet dimidiam differentiam, qua F ſuperat G, non eſſe minorem recta a i, eo quod quadratum ipſius dimidiæ differentiæ non eſt minus, quadrato a i, & licet in Poriſmate appareat ipſum quadratum a i ſuperari à quadrato dimidiæ differentiæ, non tamen poteſt dici abſolute, quadratum dimidiæ differentiæ maius eſſe quadrato a i, affirmari autem debet non eſſe minus; nam quadratum dimidiæ differentiæ nonnumquam præſtat quadrato a i nihilo, idque contingit cum ratio a d ad a f, non eſt maior ratione a g, ad a c, & præterea data G, expoſita eſt æqualis minimæ earum, quæ inter circumferentias K f, t c interijciuntur. immo ſi ipſa G exponeretur minor minima, ſequeretur dimidiam differentiam rectarum F, & G, minorem fieri rectam a i, quod quidem aduerſus conſtructionem Problematis, inſtaret; nam cum in circulo, cuius diameter æqualis eſt ipſi dimidiæ differentiæ, aptanda ſit ex præcepto Poriſmatis recta æqualis a i, id fieri non poſſet, ſi ipſa dimidia differentia minor eſſet quam a i. Similiter ſi ratio a d ad a f maior eſſet, ratione a g ad a c, & recta G exponeretur minor minima, ſequeretur aut dimidiam differentiam rectarum F & G minorem fieri recta a i, quod quidem conſtructionem Problematis eadem ratione impediret, aut terminum indicantem quæſitam a e maiorem fieri recta a f, quod pariter conſtructioni, ſed alia ratione, aduerſaretur; nam à puncto a ad circumferentiam k f non poſſet duci recta æqualis ipſi termino, vt Poriſma fieri præcipit, ſi ipſe terminus maior eſſet, quàm a f. Similis quoque inſtantia conſtructioni occurreret, ſi data G exponeretur maior maxima, ſiue ratio a d ad a f, maior ſit ratione a g ad a c, ſiue non maior: nam terminus indicans a e quæſitam fieret, vel minor minore rectarum a K, a f, vel maior maiore: itaque à puncto a ad circumferentiam K f, non poſſet duci recta æqualis ipſi termino, vt Poriſma fieri iubet. Hæc omnia ſuis locis demonſtrabuntur. Ad deſtruendas igitur huiuſmodi inſtantias præfigi debet Problemati Determinatio, ne data G maximam

A ximam ſuperet, neue à minima ſuperetur. Itaque oſtendendum eſt, quæ ſit maxima, quæue minima, ſed quo clarius, atque facilius id fiat prius ſequens Lemma demonſtrabo.

Lemma IV.

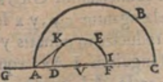
Sint duo ſemicirculi A B C, D E F, quales in præſenti Caſu ponuntur, & contingat recta A K ſemicirculum D E F in K, & ex centro circuli, quod ſit V ponatur V G æqualis V C, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico ſi ratio A D ad A F maior eſt ratione A G ad A C, & rectam A I maiorem eſſe maiore rectarum A F, A k, B & ſi æqualis æqualem, & ſi minor minorem, maiorem autem minore.

Probl. 1 huius

SIt primum ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo duo ſunt Caſus, aut enim F C intercepta eſt inter conuexam vnius ſemicirculi circumferentiam, & cauam alterius, aut inter cauam vtriuſque. ſit primum intercepta inter vtriuſq; cauam, erit A K maior, quàm A F. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, minor nempe ad maiorem, ita quadratum A k ad quadratum A I ex poſitione, erit quadratum A k, minus quadrato A I, vnde & recta A k minor, quam recta A I. Recta igitur A I maior eſt maiore rectarum A F, A k.

Deinde ſit F C intercepta inter conuexam circumferentiam, & cauam erit A F maior, quàm A k, & quoniam ratio A D ad A F ponitur maior C ratione A G ad A C vt autem A G, A C, ita eſt quadratum A K ad quadratum A I, ergo ratio A D ad A F maior erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, ſed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A K, A F ad tertiam, ita eſt quadratum ſecundæ A k ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A F maior erit, ratione quadrati A k ad quadratum A I; quare quadratum A I * maius erit quadrato A F, & conſequenter recta A I maior, quam recta A F, quod primum.

10 quinti



D Sed ſit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad A C, ergo eadem erit, quæ quadrati A k ad quadratum A I, ſed vt A D ad A F, ita eſt quadratum A K ad quadratum A F, vt demonſtrauimus ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, quare & recta A I, æqualis rectæ A F, quod eſt ſecundum.

Denique ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, ergo minor erit & ratione quadrati A k ad quadratum A I; ſed vt A D ad A F, ita oſtenſum eſt quadratum A k ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A K ad quadratum A F

mi-

minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, quare* quadratum A I minus erit, quadrato A F, & consequenter recta A I minor, quàm recta A F; quod est tertium. A

Et quoniam est vt A G ad A C ita quadratum A k ad quadratum A I, A G autem minor, quàm A C erit & quadratum A k minus quadrato A I, quare & recta A K minor, quàm recta A I; recta igitur A I maior est minore rectarum A F, A k, quod vltimo loco erat ostendendum.

Lemma V.

Iisdem positis sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico F C maximam esse omnium quæ à puncto A ductæ inter cauas circumferentias k F, T C interijciuntur, minimam k T, earum vero quæ inter conuexam circumferentiam K F, & cauam T C interijciuntur, maximam esse K T, minimam F C. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore maiorem esse. B

Dvcantur enim vtrumque recta linea A E B secans circumferentias K F, T C in punctis E B, & sit primum F C interiecta inter cauas circumferentias K F, T C. Quoniam igitur A C maior est, quàm A B, A F autem minor, quàm A E, reliqua F C maior erit, quam reliqua E B, & sic ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur F C. C

Æque quoniam A T minor est, quàm A B ex vero maior quam A E reliqua K T minor erit, quàm reliqua E B, atque eadem ratione, ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur K T.

Rursus ducatur alia recta A L P secans circumferentias k F, T C in punctis L P, & sit L P minimæ K T propinquior, quam E B erit igitur A P, minor, quam A B, sed A L maior est quam A E, ergo reliqua L P minor erit, quam reliqua E B, nempe propinquior minimæ minor remotiore.

Sed sit F C interiecta inter cauam circumferentiam T C, & conuexam K F, & connectantur G k, k D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes T A, C A productas in punctis y x; erit igitur rectangulum F A x* æquale quadrato A I, & recta A I, ex antecedente Lemmate, non minor quam A F: quare neque A x, minor erit ipsa A F, alioquin rectangulum F A x minus esset quadrato A I. D

Lem. 1

Et quoniam rectangulum F A x* æquale est rectangulo y A K* erit vt A K ad A F, ita A x ad A y, sed A k minor est, quàm A F, ergo & A x minor erit quam A y, sed A x ostensa est non minor quàm A F, ergo &

Carol. Lem. 1
16 sexti

A F

A A F minor erit quam A y, atque A K multo minor. quare A y maxima erit quatuor proportionalium A K, A F, A x, A y; minima vero A K; atque adeo y k composita ex maxima, & minima * maior, quàm x F composita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam est * vt A G ad A C, ita k T ad T y; & ita F C ad c x, Lem. 3 erit vt k T ad T y, ita F C ad C x, & conuertendo vt y T ad T k, ita x c ad C F, & diuidendo vt y k ad k T, ita x F ad F C, sed y k prima ostensa est maior, quàm x F tertia, ergo, & secunda k T maior erit, quàm F C quarta.

Secet autem recta E B circumferentiam k D in H, & iungatur G H, cui parallela agatur C S occurrens B A continuatæ in S. rectangulum igi-
B tur y A K * æquale erit rectangulo S A E, quare vt * A k ad A E, ita erit A S Corol. Lem. 1 16 sexti ad A I, sed A K minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit quam A y, est autem & A F minor quam A y, vt demonstrauimus, ergo A E multo minor erit, atque A K multo minor. quare A y maxima erit quatuor proportionalium A k, A E, A S, A y, minima vero A k, atque adeo y k composita ex maxima, & minima * maior erit quam S e composita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & ita k T ad T y, Lem. 3 erit vt K T ad T y, ita E B ad B S, & conuertendo vt y T ad T k, ita S B ad B E, & diuidendo, vt y k ad K T, ita S e ad e B, sed y k ostensa est maior, quam S e, ergo & K T maior erit, quàm e B. Atque eadem ratione ostendetur ipsa K T omnibus alijs maior. Maxima est igitur k T.

C Deinde quoniam * æqualia sunt rectangula F A x, E A S, erit vt * A E ad A F, ita A x ad A S, sed A E minor est, quàm A F, ergo & A x minor erit, quam A S sed A x ostensa est non minor, quàm A F, ergo & A F minor erit, quàm A S, atque A E multo minor. itaque A S maxima erit quatuor proportionalium A E, A F, A X, A S, minima vero A E; atque adeo S e composita ex maxima, & minima, * maior erit quàm x F composita ex reliquis. Corol. Lem. 1 16 sexti 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita F C ad c x, Lem. 3 erit F c ad c x, vt E B ad B S, & conuertendo vt x c ad C F, ita S B ad B E, & diuidendo vt x c ad c F, ita S e ad e B, sed x F ostensa est minor, quàm S e, ergo & F C minor erit, quàm E B, eaque * demonstrabitur
D omnibus, alijs minor. Minima est igitur F C.

Sed ducatur alia recta A L P secans circumferentias k F, T c in punctis L P, circumferentiam vero K D in Q, & sit L P minimæ F C propinquior, quàm E B, & connectatur G Q, cui parallela agatur c Z occurrens P A continuatæ in Z. rectangula igitur L A Z, E A S * æqualia erunt Corol. Lem. 1 16 sexti quare * vt A L ad A E, ita erit A S ad A Z, sed A L maior est, quam A E, ergo & A S maior erit, quam A Z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I erit vt A E ad A I, erit * vt A E ad A I, ita A I Lem. 1 17 sexti Lem. 4 ad A S, sed A E minor est, quàm A I, cum ipsa A I non sit * minor, quàm A F, ergo & A I minor erit, quàm A S. Itaque ipsa A S maior

erit,

erit, quàm AL, & multo maior, quàm AE, est quoque maior quàm AZ vt demonstrauimus, ergo ipsa AS maxima erit quatuor proportionalium AL, AE, AS, AZ, & *consequenter AE minima, vnde SE composita ex maxima, & minima, *maior erit quam ZL composita ex reliquis; hoc est ZL minor quam SE. A

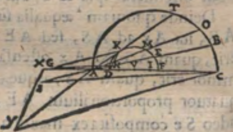
Theor. 1 huius 15 quinti

Lem. 3 Et quoniam est vt AG ad AC, *ita EB ad BS, & ita *LP ad PZ, erit vt LP ad PZ, ita EB ad BS, & conuertendo vt ZP ad PL, ita SB ad BE, & diuidendo vt ZL ad LP, ita SE ad EB, sed ZL ostensa est minor, quàm Se, ergo & LP minor erit, quàm eB, propinquior igitur minimæ minor est remotiore. Quare constat propositum.

Lemma VI. B

Rursus ijsdem positis. sit autem ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC, ergo AI* minor erit, quàm AF, maior autem, quàm Ak. à puncto igitur A ad circumferentiam KF, ducatur AM æqualis AI, & producatur ad circumferentiam TC in O. Dico maiorem rectarum KT, FC maximam esse omnium, quæ à puncto A ductæ inter circumferentias KF, Tc interijciuntur. Minimam vero MO. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore, ex eadem parte, minorem esse.

Lem. 4



Dvcatur enim à puncto A vtrumque recta linea AEB secans circumferentias KF, TC in punctis EB; circumferentiam vero kD in H, & connectatur GH, GK, kD, quibus parallelæ ducantur cS, cy, yx secantes EA, KA, FA productas in punctis Syx, & sit primum KT maior, quàm FC. quoniam igitur est* vt AGad AC, ita FC ad cx; &* ita KT ad Ty; erit KT ad Ty, vt FC, ad cx; & diuidendo, erit Tk ad ky, vt cF ad Fx; sed kT ponitur maior, quàm FC. ergo & ky quam Fx* maior erit. C

14 quinti

Et quoniam *æqualia sunt rectangula yAK, FAx: erit vt* Ay ad AF, ita Ax ad Ak: sed ky composita ex extremis Ay, AK, ostensa est maior, quàm Fx, composita ex medijs, ergo altera* extremarum Ay, Ak, maxima erit altera minima: sed AK non est maxima, quia minor est, quàm AF, ergo minima erit, & consequenter Ay maxima. Itaque Ay maior erit, quàm AF, & multo maior, quàm AE: Et quoniam* æqualia sunt rectangula yAK, EAS, erit* vt Ak ad AE, ita AS ad Ay: sed Ak minor est, quàm AE, ergo & AS minor erit, quàm Ay. Cum igitur Ay maior sit, quàm AS, & maior, quàm AE, vt demonstraui, ac etiam maior, quam Ak, erit ipsa Ay maxima quatuor proportionalium Ak, AE, AS, Ay; *minima vero Ak, vnde yk compo- D

Corol. Lem. 1 16 sexti

Theor. 1 huius

Corol. Lem. 1 16 sexti

Theor. 1 huius

po-

A posita ex maxima, & minima, * maior erit quàm S c composita ex reliquis.

Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & * ita k T ad T y, Lem. 3 erit K T ad T y, vt E B ad BS, & conuertendo, vt y T ad T k, ita S B ad B E: & diuidendo, vt y k ad k T, ita S e ad E B, sed y k ostensa est maior, quàm S e, ergo & k T quàm E B maior erit, & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur K T.

Sed sit F C maior, quàm K T: quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita lem. 3 F c ad C x, & * ita k T ad T y; erit F c ad C x, vt k T ad T y: & diuidendo, vt c F ad F x, ita erit T K ad K y, sed c F ponitur maior, B quàm T K, ergo & F x maior erit, quàm K y, sed F x composita est ex extremis quatuor proportionalium A F, A y, A k, A x, ipsa vero k y ex medijs (constat autem eos pro- lem. 3 portionales esse, ex eo quod * æqualia sunt re- Theor. 3 huius ctangula F A X, y A k) ergo altera * extre-

marum A F, A X maxima erit, altera minima: sed A F non est minima, cum sit maior, quàm A k, ergo maxima erit: vnde A X minima: itaque A X minor erit quàm A K, & multo minor, quàm A E.

Et quoniam æqualia sunt rectangula F A X, E A S, erit vt A F ad A E, C maior nempe ad minorem, ita A S ad A X, quare & A S maior erit, quàm A X: sed A X ostensa est minor, quàm A E, & consequenter multo minor est, quàm A F, ergo quatuor proportionalium A F, A E, A S, A X minima erit A X: * quare A F maxima, vnde X F compo- Theor. 1 huius sita ex maxima, & minima, * maior erit, quàm S c composita ex reliquis. 25 quinti

Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita F c ad c x, & ita E B ad B S, lem. 3 erit F c ad c x vt E B ad BS, & conuertendo, vt x c ad c F, ita erit S B ad B E, & diuidendo vt x F ad F c, ita S e ad E B; sed x F ostensa est maior, quàm S e; ergo & F c, quàm E B maior erit. eademq. ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare maxima est F c.

Sed sint æquales K T, F c: quoniam igitur est lem. 3 D vt A G ad A C, * ita F c ad c x, & * ita K T ad T y; erit F c ad c x, vt k T ad T y: sed F c ponitur æqualis K T, ergo & c x æqualis erit T y; quare ablatis æqualibus F C, K T, reliquæ x F, y k, æquales erunt: sed x F composita est ex extremis quatuor proportionalium F A, A y,

A k, A x, ipsa vero y k ex medijs, constat autem eas * proportionales esse ex eo, quod * rectangula F A x, y A k sunt æqualia; ergo * maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit. itaque A F extrema æqualis erit alteri mediarum y A, A k; sed non est æqualis ipsi A K;

O hæc

hæc enim tangit circulum D E F; illa vero secat; ergo ipsa A F æqualis A
erit A y.

Corol. lem. 1 Et quoniam * æqualia sunt rectangula y A k, E A S; erit A y ad A E, vt A S ad A K; sed A y, cum sit æqualis ipsi A F, maior est, quam A E, ergo & A S maior erit, quam A k, vnde quatuor proportionalium A y, A E, A S, A K, minima erit A K; & per * consequens maxima A y, itaque y K composita ex maxima, & minima * & maior erit, quàm S e composita ex reliquis. (Theor. 1 huius; 25 quinti)

Postremo quoniam est vt A G ad A C, ita E B ad B S & ita k T ad T y; erit k T ad T y, vt E B ad B S: & conuertendo, vt y T ad T K, ita S B ad B e: & diuidendo, vt y k ad k T, ita erit S e ad e B; sed y k ostensa est maior quam S e, ergo & K T maior erit, quam e B. B

Atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs, quare & F C, cum sit æqualis ipsi k T, erit quoque omnibus maior: itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum K T, F C, maxima est omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias K F, T C interijciuntur. quod est primum.

Deinde secet recta A M circumferentiam k D in R, & iungatur G R, eique parallela agatur C N secans M A productam in N. Rectangulum igitur M A N * æquale erit quadrato A I; hoc est quadrato A M sunt enim æquales A I, A M, ex constructione, quare A M æqualis erit ipsi A N, & cum sit rectangulum F A x * æquale quadrato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A F, A M, A x sunt autem & inæqualis, quia A F maior est, quàm A M, ergo x F composita ex extremis, maior erit quam dupla media, hoc est, quàm M N. Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita F C ad C x, & * ita M O ad O N; erit F C ad C x, vt M O ad O N: & conuertendo, vt x c ad C F, ita N O ad O M: & diuidendo, vt x F ad F C, ita erit N M ad M O; sed x F ostensa est maior, quàm N M, ergo & F C maior erit, quàm M O. (Lem. 5; Lem. 1, 17 sexti; Lem. 5)

Æque quoniam rectangulum y A k * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A k, A M, A y: sunt autem & inæquales; y k composita ex extremis maior erit, quàm M N, media videlicet dupla. Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita k T ad T y, & * ita M O ad O N: erit K T ad T y, vt M O ad O N, & conuertendo vt y T ad T k, ita N O ad O M, & diuidendo, vt y K ad k T, ita erit N M ad M O: sed y k ostensa est maior, quam N M, ergo & k T maior erit, quàm M O. D (Lem. 1, 17 sexti; Lem. 5)

Eadem ratione quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, * proportionales erunt A E, A M, A S, sunt autem & inæquales. ergo S E, composita ex extremis, maior erit quàm (Lem. 1, 17 sexti)

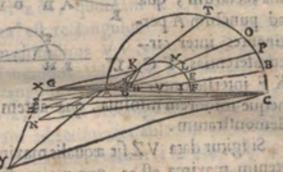
dupla

A dupla media; hoc eſt, quàm N M. Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita Lem. 3
E B ad B S, & * ita M O ad O N, erit E B ad B S, vt M O ad O N: & conuertendo, vt S e ad E B, ita N O ad O M; & diuidendo, vt S e ad e B, ita erit N M ad M O: ſed S e maior eſt, quàm N M, vt demonſtrauimus, ergo & E B maior erit, quam M O. Atque eadem ratione oſtendemus omnes alias maiores eſſe ipſa M O. Minima eſt igitur M O omnium, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias k F, T C interijciuntur. quod eſt ſecundum.

Poſtremo ducatur alia recta A L P ſecans circumferentias k F, T C in punctis L P, ſintque L P, E B, ex eadem parte minimæ M O, quarum L P ipſi M O ſit propinquior, quàm E B, & recta A P ſecet circumferentiam
B k D in Q, & iungatur G K, eique parallela agatur C Z occurrens P A continuatæ in Z. * æqualia erunt rectangula L A Z, E A S: quare vt * A L ad A E, ita erit A S ad A Z. ſiquidem A L propinquior eſt centro V, quàm A E, ſic argumentor, ſed A L maior eſt, quàm A E, ergo & A S maior erit, quàm A z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale eſt quadrato A I, hoc eſt quadrato A M, * proportionales erunt A E, A M, A S; ſed A E minor eſt, quàm A M, ergo & A M minor erit quàm A S: itaque A S maior erit, quàm A L, & multo maior quàm A E eſt quoque maior, quam A z, vt demonſtrauimus; ipſa igitur A S maxima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A z, & * conſequenter A E minima; vnde S E compoſita ex maxima, & minima maior erit, quàm z L
C compoſita ex reliquis, hoc eſt z L minor, quàm S e.

Corol. Lem. 1 16 ſexti; Lem. 1 17 ſexti; Theor. 1 huius

Si vero A L remotior eſt à centro V, quàm A E, argumentor in hunc modũ, ſed A L minor eſt, quàm A E: ergo & A S minor erit, quam A z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale eſt quadrato A I, vel A M: * proportionales erunt A E, A M, A S. ſed A E maior eſt, quàm A M, ergo & A M maior erit, quàm A S.



Lem. 3 17 ſexti

D quare A S minor erit, quàm A L, & multo minor quam A E; atque eſt minor, quàm A z, vt demonſtrauimus. itaque A S minima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A z, & * conſequenter A E maxima; quare S E compoſita ex maxima, & minima, * maior erit quàm z L, compoſita ex reliquis, quod etiam demonſtrauimus & ſupra.

Theor. 1 huius; 25 quinti

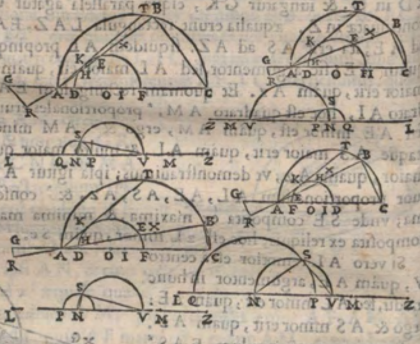
At quoniam in vtroque Caſu eſt, vt A G ad A C, ita * E B ad B S & Lem. 3
ita * L P ad P z, erit vt L P ad P z, ita E B ad B S; & conuertendo vt z P ad P L, ita S B ad B e; & diuidendo, vt z L ad L P, ita S e ad e B; ſed z L oſtenſa eſt minor, quàm S e, ergo & L P minor erit, quàm E B, hoc eſt propinquior minimæ, minor remotiore ex eadem parte. Quod tertio loco erat oſtendendum.

Corollarium.

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores sint, manifestum est KT maximam esse omnium, quæ inter circumferentias KM, TO interijciuntur. Earum verò quæ interijciuntur inter circumferentias MF, OC maximam esse FC.

Compositio tertij Casus.

SInt dati duo semicirculi ABC, DEF, vt dictum est; data autem recta linea VZ, & cõtingat Ak semicirculũ DEF in k; semicirculum vero ABC secet in T. Oportet inter circũferentias TC, KF ponere rectam lineã æqualem VZ, ita vt ad punctum A pertineat, Oportet autem ipsam VZ non esse maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinentes inter circumferentias TC, KF interijciuntur,



neque minorem minima. quæ autem sit maxima, quæue minima, iam est demonstratum.

Si igitur data VZ sit æqualis maximæ, factum iam erit, quod proponitur, etenim maxima est ea, quæ maior est rectarum kT, FC, si vero sit æqualis minimæ, minimaq. sit vel FC, vel KT itidem factum erit, quod proponitur. Si autem neutra ipsarum FC, kT sit minima inuenta, minima Problemati satisfiet, inuentio autem minime patet ex Lemmate sexto. Sed si VZ minor sit maxima, maior autem minima, ponatur ex centro Probl. 1 huius circuli DEF, quod sit O recta OG æqualis OC, & * fiat vt AG ad AC, ita quadratum AK ad aliud quadratum, quod sit AI. Similiter fiat, vt AG ad AC, ita VZ ad aliam, quæ sit ZL; & sit ipsarum Vz, zL differentia LV, quæ secetur bifariam in N: Cum igitur à quadrato NV debeat auferri quadratum AI, vt Porisma iubet; describatur in VN semicirculus, in quo accommodetur VS æqualis AI infra demonstrabimus ipsam AI minorem esse, quàm VN, & iungatur SN: Quadratum igitur Nv superat

qua-

A quadratum S V, quadrato S N, cum sit rectus angulus V S N in semicirculo: itaque rectæ V N auferenda est vel addenda recta æqualis N S; sic Porisma fieri iubet; auferatur igitur, vel addatur prout sequentia præcepta docebunt; eaque sic diminuta, vel aucta sit V P, ea non erit minior minore restarum A F, A k, nec maior maiore, vt tria sequentia Lemmata ostendent; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta A E æqualis V P. ducatur igitur A E, & producatur ad circumferentiam T C in B. Dico E B Problema efficere.

Secet enim B A circumferentiam k D in H, & centro N interuallo N P describatur circulus secans V L in Q, is circulus tanget rectam S V in S, ac proinde quadratum V S, æquale erit rectangulo P V Q, vel

B V P L, seu quod idem est rectangulo V P, L Z minus rectangulo V P Z. Si igitur fiat, vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alia plana, itidem manebit inter ea plana æqualitas.

At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione, hoc est ad quadratum V S, erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum V S ad quadratum A K; quadratum igitur A K erit vna pars æqualitatis; alteram vero sic explorabimus.

Quoniam est vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex constructione, erit conuertendo vt A C ad A G, ita L Z ad z V; vt autem L z ad z V, ita 1. sexti est rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, eandem enim habent altitudinem P V, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z

C ad rectangulum P V z.

Deinde fiat, vt A C ad A G, hoc est vt L z ad z V, ita P z ad aliam, quæ sit z M erit z V maior, quam z M, quoniam & L z maior est, quàm P z; vt autem P z ad z M; ita est rectangulum V P Z ad rectan- 1. sexti gulum V P, z M; sunt enim eiusdem altitudinis V P, ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M; sed ita ostensum est & rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z; ergo vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M, hoc est vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, quare & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum, i. e. & rectangulum V P, L z minus rectangulo V P z. ad rectangulum P V z minus re-

D ctangulo V P, z M erit vt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z, 19. quinti hoc est vt A C ad A G. Itaque rectangulum P V z minus rectangulo V P, z M erit altera pars æqualitatis.

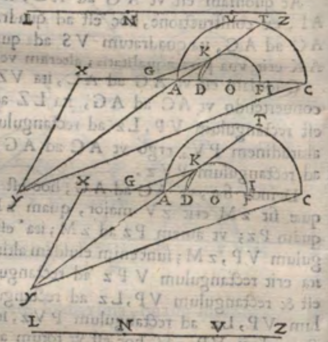
Quadratum igitur A K, hoc est rectangulum E A H æquale erit rectangulo P V z, minus rectangulo P V, z M, hoc est æquale erit rectangulo P V M, sed P V æqualis est A E, ex constructione; ergo & V M æqualis erit A H.

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans E A continuatam in R; angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus cum sit rectus, & ipse A B C in semicirculo; quare æquales tem.

erunt EB, HR, & sumpta Ex æquali EH, vel VM, reliqua xB æqualis erit reliquæ AR, & cum sint æquales AE, VP, & æquales EX, VM tota AX toti PM æqualis erit. A

Et quoniam similia sunt triangula ABC, ARG anguli enim ABC, ARG sunt æquales, quia recti, hic ex constructione, ille ex vi semicirculi. Atque anguli BAC, RAG ad verticem sunt æquales, ideo vt AC ad AG, ita erit AB ad AR, sed vt AC ad AG, ita est quoque PZ ad ZM, ex constructione, ergo vt AB ad AR, hoc est ad BX, ita erit PZ ad ZM, & diuidendo vt Ax ad xB, ita erit PM ad MZ, sed Ax ostensa est æqualis PM, ergo & xB æqualis erit MZ, sed Ex æqualis est VM, ex constructione, ergo tota EB æqualis erit toti VZ. Posita est igitur inter circumferentias kF, TC recta EB æqualis VZ datæ, eaque ad punctum A pertinet. quod erat faciendum. B

At vero rectam AI minorem esse, quàm VN sic demonstrabimus.



Duo sunt Casus, aut enim AD ad AF minorem rationem habet quam AG ad AC, aut non minorem. primum habeat non minorem & FC sic intercepta inter conuexam circumferentiam KF, & cauam Tc, ergo AI
lem. 4 non * erit minor, quàm AF, at-
lem. 3 que Fc * minima erit omnium interceptarum inter circumferentias kF, Tc. C

Connectantur autem Gk, kD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes TA, CA productas in punctis yx: rectangulum igitur
lem. 1 FAx * æquale est quadrato AI:
lem. 1 quare * proportionales sunt FA, AI, Ax vnde Fx composita ex extremis, non erit minor, quàm dupla media AI.

Et quoniam est vt AG ad AC * ita FC ad cx, & ita VZ ad ZL ex constructione, erit Fc ad cx, vt VZ ad ZL, & diuidendo vt cF ad Fx, ita erit ZV ad VL, sed CF cum sit omnium interceptarum minima minor est, quàm ZV, ponitur enim ZV maior minima, ergo & Fx minor erit, quàm VL: sed Fx ostensa est maior, quàm AI dupla, ergo AI dupla minor erit, quàm VL, & consequenter simpla AI minor quàm VN dimidia videlicet ipsius VL. D

lem. 5 Sed sit FC intercepta inter cauas circumferentias kF, TC, ergo kT * minima erit omnium interceptarum inter circumferentias KF, TC. Connectatur autem GK, & ei parallela agatur cy occurrens KA productæ in y.

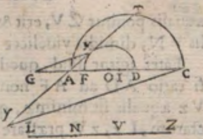
Re-

A Rectangulum igitur y A K* æquale erit quadrato A I; & ideo* proportionales erunt y A, A I, A K; sunt autem & inæquales, quia A I* maior est, quam A K, ergo y k composita ex extremis maior erit, quàm A I dupla; Et quoniam est vt A G ad A C* ita K T ad T y, & ita quoque V z ad z L, ex constructione, erit K T ad T y vt V z z L; & diuidendo erit vt T K ad k y, ita z V ad V L, sed T K cum sit omnium interceptarum minima minor est, quàm z V, ergo & K y minor erit, quam V L, sed k y ostensa est maior, quàm dupla A I, ergo A I dupla minor erit, quàm V L & consequenter A I
B simpla minor, quàm V N dimidia videlicet ipsius V L.

Lem. 3 17 sexti

Lem. 4

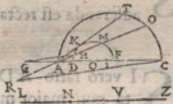
Lem. 3



Sed habeat A D ad A F minorem rationem, quàm A G ad A C, ergo A I* minor erit, quam A F, maior autem quàm A K, itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K F duci recta æqualis A I. ducatur ergo, eaque sit A M, quæ producta secet circumferentiam T c in O: erit M O* minima omnium, quæ inter circumferentias k F, T C intercipiuntur. Secet autem recta A M circumferentiam K D in H, & connectatur G H, eique parallela agatur C R occurrens M A continuatæ in R. Rectangulum igitur M A R* æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M quare æquales erunt A R, A M. Lem. 5
C

Lem. 4

Lem. 6



Et quoniam est vt A G ad A C,* ita M O, ad O R; & ita V z ad z L lem. 5
ex constructione, erit M O ad O R, vt V z ad z L; & diuidendo erit vt O M ad M R, ita z v ad V L: sed O M cum sit omnium interceptarum minima, minor est, quàm z V ponitur enim z V maior minima; ergo erit & M R minor, quàm V L, & consequenter A M, vel A I minor, quam V N, dimidia videlicet minor quàm dimidia. Quare constat propositum.

Scholium.

Si autem existente ratione A D ad A F non maiori quam A G ad A C data V z sit æqualis minimæ interceptarum, erit & A I æqualis V N, id-
D que ita ostendemus.

Primum sit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad A C, ergo F C* lem. 5
minima erit interceptarum & A I* æqualis A F, & cum sit rectangulum lem. 4
F A x* æquale quadrato A I erit & A x æqualis A I, atque adeo tota F x lem. 3
dupla ipsius A I; & quoniam ostensæ sunt supra, proportionales C F, F x, z V, V L, prima autem c F æqualis est z V tertiæ, ponitur enim z V æqualis minimæ, ergo & secunda F x æqualis erit V L quartæ, & consequenter A I æqualis V N, dimidia videlicet dimidiæ.

Sed sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. Quoniam igitur ostensæ sunt proportionales O M, M R, z V, V L, & O M minima æqua-

æqualis ponitur Z V, erit & M R æqualis V L; vnde & A M vel A I æqua- A
lis V N, dimidia videlicet dimidiæ.

Patet igitur illud, quod in Scholio per Resolutionem monuimus; nempe si ratio A D ad A F non sit maior ratione A G ad A C, & præterea data V z æqualis sit minimæ, quadratum V N, dimidiæ videlicet differentiæ rectarum, L z, z V præstare quadrato A I nihilo: id est alterum alteri æquale esse.

Quo autem Casu rectæ V N auferenda sit recta æqualis N S, quoue addenda; ratio his constat præceptis.

Præceptum primum.

SI ratio A D ad A F non sit minor ratione A G ad A C, rectæ V N B
auferenda est recta æqualis N S.

Præceptum I I.

SI vero ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, & V Z data non maior minore rectarum K T, F C, rectæ V N poterit siue addi, siue auferri recta æqualis N S: in hoc enim Casu recta æqualis datæ V z potest optari inter circumferentias k F, T C ex vtraq; parte minimæ, & ideo duobus modis Problema absolui. Nam si auferatur, aptabitur ea recta è regione K T, si vero addatur aptabitur è regione F C.

Præceptum I I I. C

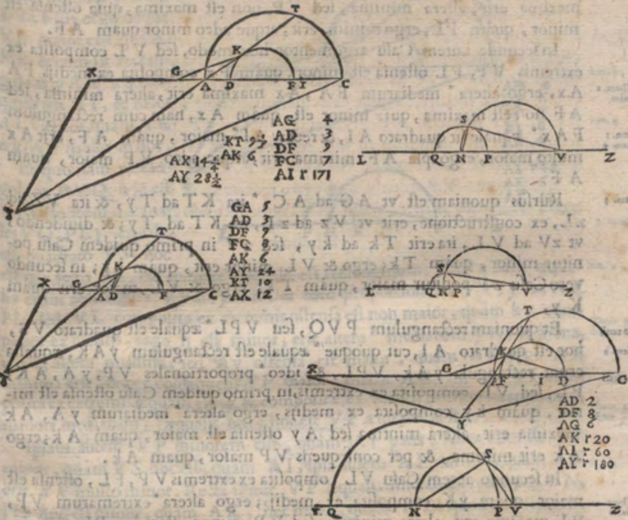
QVod si V Z data maior sit minore rectarum K T, F C; recta ipsi V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias k F, T C ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum K T, F C, ergo existente k T maiore, quam F C, rectæ V N auferenda est recta æqualis N S existente minore, addenda.

Nunc ostendendum est rectam V P sumptam quemadmodum præcepta docent non esse maiorem maiore rectarum A F, A k, nec minorem minore quo pertinent tria quæ sequuntur Lemmata.

Lemma V I I.

Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico V P æqualem differentiæ rectarum V N, N S minorem esse maiore rectarum A F, A k maiore autem minore. D

AVt enim recta F C intercipitur inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C; quo Casu A F maior est, quàm A k, aut inter vtramque cauam, & A F minor est, quàm A K. Primo Ca-
lem 5 su k T* maxima est omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur, minima vero F C, itaque V Z data minor est quàm k T, maior autem, quàm F C ponitur enim V Z minor maxima, maior minima.



A nima. Secundo Casu* minima est KT, maxima FC, vnde VZ data Lem. 5
maior, est quam kT, minor quàm FC.

Connectuntur autem Gk, KD, eisque parallelæ agantur cy, yx secantes kA, CA continuatas in punctis yx. Quoniam igitur est vt AG ad AC,* ita FC ad Cx, & ita VZ ad ZL, ex constructione, erit VZ Lem. 8
ad ZL, vt Fc ad Cx: & diuidendo, vt ZV ad VL, ita erit CF ad Fx; sed ZV in primo quidem Casu ponitur maior, quàm CF; ergo & VL maior erit, quàm Fx. in secundo vero Casu ponitur ZV minor, quàm FC ergo & VL minor erit, quàm Fx.

Et quoniam æquales sunt LN, NV, ex constructione, & æquales quoque NP, NQ, vt semidiametri, ergo fiunt quoque æquales LP, VQ:
B quare rectangulum PVQ æquale erit rectangulo VPL, sed rectangulum PVQ* æquale est quadrato VS, hoc est quadrato AI, cui quoque * æqua- 6. tertij Lem. 7
le est rectangulum FAx, ergo rectangulum VLP æquale erit rectangulo FAx quare proportionales erunt VP, FA, Ax, PL. in primo quidem Casu sic argumentor; sed VL composita ex extremis ostensa est maior

ior

ior, quàm Fx composita ex medijs; ergo altera * extremarum VP, PL A
maxima erit, altera minima, sed VP non est maxima, quia ostensa est minor, quàm PL, ergo minima erit, atque adeo minor quàm AF.

In secundo autem Casu argumentor hoc modo, sed VL composita ex extremis VP, PL ostensa est minor, quàm Fx composita ex medijs FA
Theor. 2 huius Ax, ergo altera * mediarum FA, Ax maxima erit, altera minima, sed AF non est maxima, quia minor est, quàm Ax, nam cum rectangulum
Lem. 3 Lem. 4 FAx * æquale sit quadrato AI, & recta AI * maior, quàm AF, erit Ax multo maior, ergo ipsa AF minima erit, atque adeo VP maior, quàm AF.

Lem. 3 Rursus quoniam est vt AG ad AC, * ita KT ad Ty, & ita VZ ad zL, ex constructione, erit vt Vz ad zL, ita KT ad Ty; & diuidendo, B
vt zV ad VL, ita erit Tk ad ky; sed zV in primo quidem Casu ponitur minor, quàm Tk; ergo & VL minor erit, quàm ky; in secundo vero Casu zV ponitur maior, quàm Tk, ergo & VL, maior erit quàm Ky.

36 tertij Et quoniam rectangulum PVQ, seu VPL * æquale est quadrato VS,
Lem. 3 hoc est quadrato AI, cui quoque * æquale est rectangulum yAK, æqualia
16 sexti erunt rectangula yAk, VPL, & ideo * proportionales VP, yA, AK, PL, sed VL composita ex extremis, in primo quidem Casu ostensa est mi-
2 nor, quàm ky composita ex medijs, ergo altera * mediarum yA, Ak maxima erit, altera minima sed Ay ostensa est maior, quàm Ak; ergo Ak erit minima, & per consequens VP maior, quam Ak. C

In secundo autem Casu VL composita ex extremis VP, PL, ostensa est
Theor. 2 huius maior, quàm yK composita ex medijs; ergo altera * extremarum VP, PL maxima erit, altera minima; sed VP minor est quàm PL; ergo ipsa VP minima erit, atque adeo minor, quàm Ak. Existente igitur ratione AD ad AF, non minori, quàm AG ad AC, recta VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS, minor est maiore rectarum AF, AK, maior minore, quod erat ostendendum.

Lemma VIII.

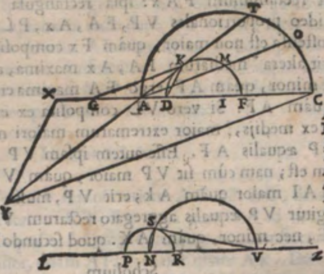
Sit ratio AD ad AF minor ratione AG ad AC, & data Vz non maior minore rectarum KT, FC. Dico neque differentiam rectarum VN, NS, neque compositam ex ijsdem minorem esse, quàm AK, aut maiorem, quàm AF. D

Connectantur enim Gk, kD quibus parallelæ agantur cy, yx secantes TA, CA productas in punctis yx, & sit primum VP æqualis differentiæ rectarum VN, NS.

Lem. 3 Quoniam igitur est vt AG ad AC, * ita kT ad Ty, & ita quoque VZ ad ZL ex constructione erit, vt VZ ad ZL, ita KT ad Ty: & diuidendo, vt ZV ad VL, ita erit TK ad Ky, sed ZV non est maior, quàm Tk,

po-

A ponitur enim Z V non maior minore rectarũ K T, F C; ergo neque V L maior erit quàm K y. & cum ſit rectangulum y A K * æquale quadrato A I, & recta A I, * maior, quàm A K erit A y multo maior. lem. 3 lem. 4



AD	2
DF	6
FC	7
KT	8
AK	4
AG	5
AI	$\sqrt{48}$
AX	6
AY	12

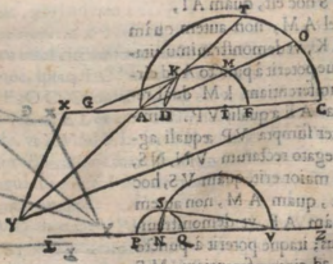
Et quoniam rectangulum P V Q, hoc eſt
B V P L (ſunt enim æquales V Q, P L) * æquale 3. tertij
eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum y A k; ideo æqualia erunt rectangula V P L, y A K, & ideo proportionales V P, y A, A K P L: ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt non maior, quàm k y compoſita ex medijs, ergo ſi eſt minor, erit altera * mediarum y A, A k maxima, altera minima; ſed A y oſtenſa eſt maior, quàm A K ergo A K minima erit, & per conſequens V P maior, quàm A K. Si vero V L compoſita ex extremis æqualis eſt y K compoſitæ ex medijs, minor extremarum minori mediarum, * æqualis erit: hoc eſt V P æqualis A k. lem. 3 Theor. 8 huius Theor. 8 huius

C Ipſam autem V P minorem eſſe, quàm A F patet; nam cum ſit V P minor, quàm V S hoc eſt, quam A I, ipſa autem A I * minor, quam A F erit V P multo minor. Recta igitur V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S non eſt minor, quàm A K, nec maior, quàm A F. quod eſt primum. lem. 4

Sed ſit V P æqualis aggregato rectarum V N, N S.

Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, * ita F c ad c x, & ita quoque V Z ad Z L, ex conſtructione, erit vt V Z ad Z L ita F C ad C x: & diuidendo vt Z V ad V L, ita C F ad F x; ſed Z V non eſt maior quam C F: ponitur enim Z V non maior minore rectarum K T, F C, ergo neque V L maior erit, quàm F x. Et cum ſit rectangulum F A x * æquale quadrato A I, & recta A I * minor, quàm A F, erit A x multo minor. lem. 1 lem. 3 lem. 4

D



Et quoniam rectangulum P V Z, hoc eſt V P L (ſunt enim æquales V Q, P L) * æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque * lem. 3 lem. 3

æqua

æquale est rectangulum F A x: ipsa rectangula V P L, F A x æqualia A erunt, & ideo proportionales V P, F A, A x, P L: sed V L composita ex extremis ostensa est non maior, quàm F x composita ex medijs; ergo si est minor, erit altera * mediarum F A, A x maxima, altera minima; sed A x ostensa est minor, quàm A F: ergo F A maxima erit, & consequenter V P minor, quàm A F. Si vero V L composita ex extremis æqualis est F x compositæ ex medijs, * maior extremarum maiori mediarum æqualis erit, hoc est V P æqualis A F. Esse autem ipsam V P maiorem, quàm A k, manifestum est; nam cùm sit V P maior, quàm V S, hoc est, quàm A I; ipsa autem A I maior quàm A k; erit V P, multo maior.

Theor. 2 huius

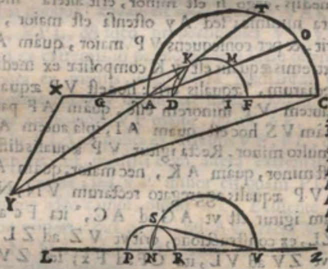
Lem. 1 huius

Recta igitur V P æqualis aggregato rectarum V N, N S non est maior quàm A F, nec minor, quàm A K. quod secundo loco erat ostendendum. B

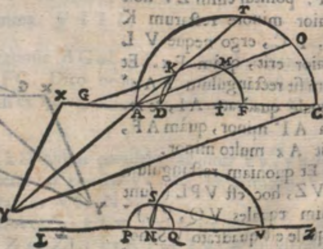
Scholium.

Ex demonstratis patet, cum A D ad A F minorem rationem habet, quàm A G ad A C, data autem V Z non est maior minore rectarum k T, F C; Problema duobus modis absolui posse. Nam si à puncto A ad circumferentiam K F ducatur recta A M æqualis A I, & producatur donec secet circumferentiam T C C in O, erit M O * minima omnium, quæ inter circumferentias K F, T C interijciuntur, & sumpta V P æquali differentiæ rectarum V N, N S, ea minor erit, quàm V S hoc est, quàm A I, vel A M, non autem quàm A K, vt demonstrauimus; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k M duci recta A E æqualis V P. Similiter sumpta V P æquali aggregato rectarum V N, N S, ea maior erit, quàm V S, hoc est, quàm A M, non autem quàm A F, vt demonstrauimus; itaque poterit à puncto A ad circumferentiam M F D

Lem. 4



AD	2
DF	6
FC	7
KT	8
AK	4
AG	5
AI	1 48
AX	6
AY	12



du-

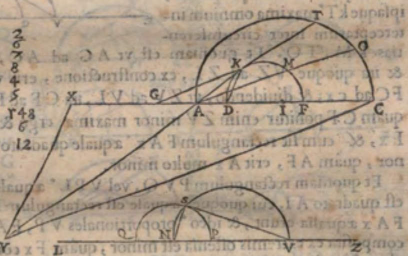
A duci recta A E æqualis ipſi V P. Igitur ſi A E ducatur æqualis differentiæ rectarum V N, N S, aptabitur recta datæ V z æqualis inter circumferentias K M, T O; ſi vero ducatur A L æqualis aggregato ipſarum V N, N S, aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C, atque adeo poterit aptari ex vtraque parte minimæ M O, ac proinde Problema duobus modis abſolui. quod in præcepto ſecundo monuimus.

Lemma I X.

Rurſus ſit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, data autem V Z ſit maior minore rectarum K T, F C, & à puncto A ad circumferen-
B tiam k F ducatur A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam T C in O, eſt autem A I * minor, quàm A F, & maior quam A k. Dico ſi K T Lem. 4
maior ſit, quàm F C, differentiam rectarum V N, N S maiorem eſſe, quàm A K, minorem quam A M; ſin minor, compoſitam ex V N, N S, minorem eſſe, quàm A E, maiorem, quàm A M.

Connectantur enim G k, k D, quibus parallelæ agantur C y, y x ſecantes T A, C A productas in punctis y x, & ſit primum V P æqualis differentiæ re-
C ctarum V N, N S. & k T maior, quá F C, ergo ipſa k T maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias K F, T C: quare recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias k M, T O, non etiam inter circumferentias M F, O C, cum ſit
D V Z maior, quam F C, ex poſitione, ipſaq. F C * maxima omnium interce- Corol. Lem. 6
ptarum inter circumferentias M F, O C: Quoniam igitur eſt vt AG ad A C, Lem. 3
* ita K T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L ex conſtructione, erit vt V Z ad Z L, ita k T ad T y; & diuidendo, vt Z V ad V L, ita T K ad k y: ſed Z V minor eſt, quàm T k; ponitur enim Z V minor maxima, ergo & V L minor erit, quàm k y, & cum ſit rectangulum y A K * æquale quadrato A I, & recta Lem. 3 Lem. 4
A I * maior, quàm A k, erit A y multo maior.

AD	2
DF	6
FC	7
KT	8
AK	4
AG	5
AI	148
AX	6
AY	12

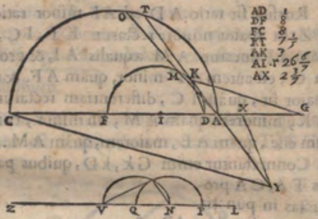


Et quoniam rectangulum P V Q hoc eſt V P L (ſunt enim æquales V Q, P L) * æquale eſt quadrato V S, vel quadrato A I, cui quoque * æquale eſt rectangulum y A k, æqualia erunt rectangula V P L, y A k, & 6 tertij lem. 3

 ideo

ideo* proportionales V P, y A, A K, P L, sed V L composita ex extremis A
Theor. 2 huius * ostensa est minor, quam k y composita ex medijs, ergo altera* mediarum
y A, A k maxima erit, altera minima; sed A y ostensa est maior, quàm
A k ergo A k minima erit, & consequenter V P maior, quàm A k. Quod
autem ipsa V P minor sit, quàm A M patet ex eo, quod ea minor est quàm
V S, ipsique V S æqualis A I, vel A M, ex constructione. Existente igitur
k T maiore, quàm F C, recta V P differentia rectarum V N, N S maior est,
quàm A K, minor autem quam A M. quod est primum.

Sed sit V P æqualis compositæ
ex V N, N S, & K T minor,
Lem. 6 quam F C, ergo F C* maxima
est omnium interceptarum inter
circumferentias k F, T C, quare
recta datæ V Z æqualis poterit
aptari inter circumferentias M F,
O C, non etiam inter circumfe-
rentias k M, T O cum sit V Z
maior quam k T ex positione,
Corol. Lem. 6 ipsaque k T* maxima omnium in-
terceptarum inter circumferen-
lem. 3 tias k M, T O. Et quoniam est vt A G ad A C,* ita F C ad C X,
& ita quoque V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita
F C ad c x; & diuidendo, vt Z V ad V L, ita C F ad F x: sed Z V minor est C
quàm C F ponitur enim Z V minor maxima, ergo & V L minor erit, quam
lem. 3 F x, & cum sit rectangulum F A x* æquale quadrato A I, & recta A I* mi-
Lem. 4 nor, quàm A F, erit A x multo minor.



36 tertij Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L* æquale est quadrato V S, hoc
lem. 3 est quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum F A x rectangula V P L
16 sexti F A x æqualia erunt, & ideo* proportionales V P, F A, A x, P L, sed V L
composita ex extremis ostensa est minor, quàm F x composita ex medijs ergo
Theor. 2 huius * altera* mediarum F A, A x maxima erit, altera minima; sed A x ostensa est
minor, quàm F A, ergo ipsa F A maxima erit, quare V P minor, quàm A F.
Ipsam autem V P maiorem esse, quam A M manifestum est: nam ea maior est D
quam V S, V S autem æqualis A I, vel A M, ex constructione. Existente igi-
tur K T minorem, quam F C recta V P æqualis compositæ ex V N, N S mi-
nor est, quàm A F, maior autem quam A M. quod secundo loco erat osten-
dendum, quare constat propositum.

Plerumque accidit vt Resolutio Problematis incidat in æquationem de duo-
bus terminis explicabilem, ex quibus vnus tantum solutioni Problematis
idoneus sit, quippe non semper vterque indicat id quod quæritur, sed alter
tantum, interdum minor, interdum maior. Dicendum est igitur quomodo
terminus quæsitum indicans dignoscatur.

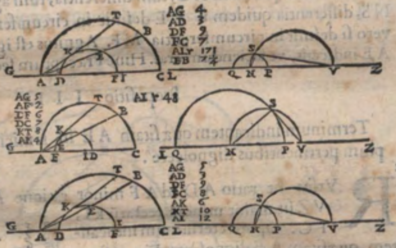
Dignoscitur terminus quæsitum indicans ipsa terminorum, prout
Po-

A Porisma præcipit, exhibitione: nam exhibitis illis terminis, si vnus tantum idoneus est solutioni Problematis, alter in construendo Problemate manifesto se ostendit, aut maiorem quæsito, aut minorem, aut etiam alia via constructioni aduersantem: is ergo reijciendus; sumendus autem alter pro indice quæsiti; si vero vterque terminus solutioni idoneus est, quia vero non indicat eundem quæsitum vterque, sunt enim eo Casu duæ magnitudines, de quibus potest quæri, altera minor, altera maior. Ideo si de minore quæritur sumendus est pro indice quæsiti terminus minor, si verò de maiore sumendus maior. Hæc omnia exemplis fient euidentiora.

Propositio I.

B Terminum quæsitam A E indicantem in semicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoscere.

Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Resumantur compositionis figuræ ad huiusmodi Casum pertinẽtes. Quoniam igitur termini de quibus Æquatio explicabilis est sunt V P differentia rectarum V N, N S, & V Q aggregatum earundem, manifestum est alterum



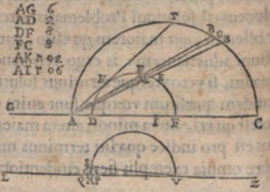
C eorum quæsitam A E indicare. Et quoniam ratio A D ad A F ponitur non minor ratione A G ad A C, recta A I non erit* minor maiore rectarum A F, A k, vnde A E quæsita minor erit, quam A I, hoc est quam V S, & multo minor quam V Q. ipsa igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V P. Itaque existente ratione A D ad A F, non minore quam A G ad A C, differentia rectarum V N, N S indicat D A E quæsitam. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum constitutum est.

* lem. 4

Propositio II.

Terminum quæsitam A E indicantem in semicirculis ad secundum Præceptum pertinentibus dignoscere.

Sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & data V Z non sit maior minore rectarum K T, F C. Oportet terminum quæsitam A E indicantem dignoscere. Resumatur Compositionis figura ad huiusmodi ca-



sum pertinens. Quoniam igitur termini, de quibus æquatio explicabilis est, sunt V P minor, V Q maior, manifestũ est alterum eorum indicare quæsitam A E. Ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, hoc potest fieri, est enim A I* minor quàm A F, maior autem quam A k. Aut igitur quæsita A E desinit in circumferẽtia M K, aut in circumferentia M F. Si in M K, ea erit minor quam A M, hoc est quam A I, seu V S, & multo minor, quàm V Q aggregatum rectarum V N. N S.. Recta igitur V Q non indicat A E quæsitam, ergo eam indicat V P differentia ipsarum V N, N S.

lem. 4

Si verò quæsita A E desinit in circumferẽtia M F, ea maior est, quá A M, hoc est quam A I, vel V S, & multo maior quam V P. recta igitur V P non indicat A E, quæsitum ergo eam indicat V Q. Si igitur ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, & data V Z non sit maior minore rectarũ K T F C indicabit quæsitam A E, tum differentia, tum aggregatum rectarum V N N S, differentia quidem si A E desinit in circumferentia k M, aggregatum vero si desinit in circumferentia M F. Agnitus est igitur terminus quæsitum A E indicans, vt faciendũ erat. Hinc Præceptum secundum cõstitutum est.

Propositio III.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoscere.

Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, data autem V Z sit maior minore rectarũ k T, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Fiat cõstructio vt supra, & producatur A M ad circumferentiam T C in O. erit M O* minima omnium interceptarum inter circumferẽtias k F, T C; manifestum est igitur rectã datæ V Z æqualẽ posse aptari inter circumferentias semicirculum ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum K T, F C. Itaque sit primum k T maior quam F C, ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias K M, T O, non etiam inter circumferentias M F, O C cum sit V z maior quam F C, ipsaque F C * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur: itaque A E quæsita desinit in circumferentia K M, & ideo minor est quam A M, hoc est quam A I, seu quam A S, & multò minor quàm V Q, quæ est æqualis aggregato rectarum V N, N S. Recta igitur V Q non indicat quæsitam A E,

Lem. 6

Corol. lem. 6

A AE, ergo eam indicat V P æqualis differentiæ ipsarum V N, N S.

Sed sit F C maior, quàm K T, ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias k M, T O. itaque A E quæsita desinit in circumferentia M F, & ideo maior est, quam A M, hoc est quam A I, seu quàm V S, atque multo maior, quàm V P. Ipsa igitur V P nō indicat quæsitam A E, ergo eam indicat recta V Q. Si igitur ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, data autem V z maior minore rectarum K T,

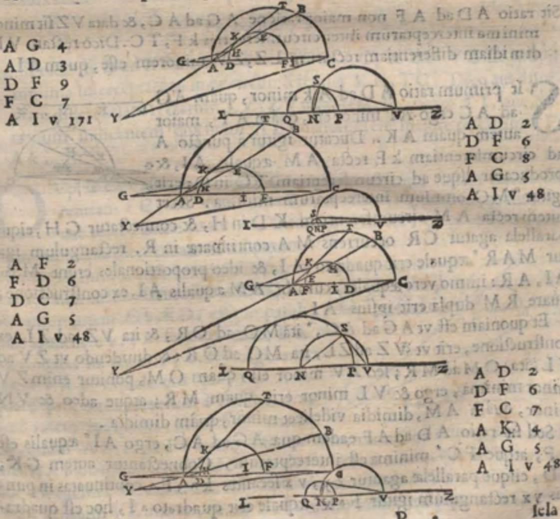
B F C, differentiam rectarum V N, N S existente K T maiore, quam F C indicabit A E quæsitam, existente vero minore, aggregatum. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans vt faciendum erat. Hinc præceptum tertium constitutum est.

Ostensa ratione qua sciri possit vter terminorum de quibus Æquatio explicabilis est, indicet A E quæsitam, consentaneum est ostendere, indicante vno terminorum quæsitam A E quid indicet terminus alter.

Resumantur compositionis figuræ & connectatur G H eique paral-

C

D



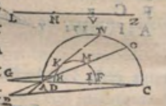
lela agatur c y occurreus B A continuatæ in y. Duos terminos Porisma constituit, de quibus A E explicabilis est; vnum quidem differentiam rectarum V N, N S, alterum verò aggregatum earundem. Dico igitur indicante vno terminorum quæsitam A E alterum rectæ A y indicem esse. A

Indicet enim quæsitam A E terminus V P, siue sit differentia rectarum
Lem. 3. V N, N S, siue aggregatum. Quoniam igitur rectangulum E A y * æqua-
16 tertij le est quadrato A I, & rectangulum P V Q * æquale quadrato V S, quæ quidem quadrata æqualia sunt, quia & rectæ A I, V S æquales sunt ex constructione; ideo rectangulum P V Q æquale erit rectangulo E A y, sed V P, cum indicet quæsitam A E, æqualis est ipsi A E, ergo & V Q æqualis erit A y. itaque ipsa V Q, quæ est alter terminus indicat rectam A y. Indicante igitur vno terminorum V P, V Q, quæsitam A E alter rectam A y indicat B quod erat ostendendum.

Expositis quæ ad constructionem pertinent non alienum videtur instantias constructioni aduersantes, & vnde ipsæ oriantur indicare, quod in Scholio post Resolutionem monuimus: quo circa tres sequentes propositiones proferuntur.

Propositio I.

Sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C, & data V Z sit minor minima interceptarum inter circumferentias k F, T C. Dico rectam V N dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem esse, quam A I. C

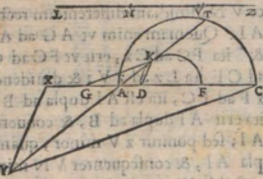


Lem. 6 Sit primum ratio A D ad A k minor, quàm A G ad A C ergo A I minor est, quàm A F, maior autem quam A K. Ducatur igitur à puncto A ad circumferentiam k F recta A M æqualis A I, & producatur vsque ad circumferentiam T C in O; erit
Lem. 6 igitur * M O omnium interceptarum minima. Secet autem recta A M circumferentiam K D in H, & connectatur G H, eique parallela agatur C R occurrens M A continuatæ in R. rectangulum igi-
Lem. 1 tur M A R * æquale erit quadrato A I, & ideo proportionales erunt M A, A I, A R: immo verò æquales, cum sit A M æqualis A I, ex constructione; quare R M dupla erit ipsius A I. D

Lem. 3 Et quoniam est vt A G ad A C, * ita M O ad O R, & ita V Z ad Z L ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita M O ad O R: & diuidendo vt Z V ad V L, ita O M ad M R; sed Z V minor est, quàm O M, ponitur enim Z V minor minima, ergo & V L minor erit, quàm M R; atque adeo & V N minor, quàm A M, dimidia videlicet minor, quàm dimidia.

Lem. 4 Sed sit ratio A D ad A F eadem quæ A G ad A C, ergo A I * æqualis est
Lem. 5 A F, atque F C * minima est interceptarum. Connectantur autem G K, K D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes k ʌ, F ʌ continuatas in pun-
Lem. 1 ctis y x rectangulum igitur F ʌ x * æquale erit quadrato ʌ I, hoc est quadra-

A to $\wedge$ F: vnde æquales erunt F A, $\wedge$ x, ac proinde F x dupla erit ipsius $\wedge$ F, vel $\wedge$ I.



Et quoniam est vt $\wedge$ G ad $\wedge$ C, ita V Z ad Z L, ex constructione, & * ita F C ad c x erit V Z ad Z L, vt F c ad c x. & diuidendo vt Z V ad V L, ita C F ad F x, sed Z V cum sit minor minima minor est quàm C F, ergo & V L minor erit quàm F x: vnde & V N minor, quam A I; dimidia videlicet minor, quàm dimidia. Lem. 3

B

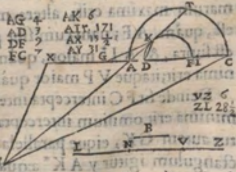
Scholium.

Ex his constat cum ratio A D ad A F non est maior, quàm A G ad A C instantiam constructioni aduersantem oriri ex data V Z deficiente à minima. nam eo Casu necesse est, quod V N dimidia differentia rectarum L Z, Z V minor sit quàm A I, & ob id recta ipsi A I æqualis non possit aptari in circulo, cuius diameter est V N, prout Porisma fieri iubet; atque adeo constructio Problematis perfici non possit.

Propositio I I.

C Sed sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & data V Z sit minor minima interceptarum inter circumferentias K F, T C. Dico aut dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem esse, quàm A I, aut terminum indicantem quæsitam A E, maiorem esse maiore rectarum A F, A k.

Duplex est Casus, aut enim F C intercepta est inter cauam circumferentiam T C, & conuexam K F, & ideo A F maior est, quàm A k, aut inter cauam vtramque, & ideo A K maior, quàm A F. Sit primum intercepta inter cauam & conuexam; Lem. 5



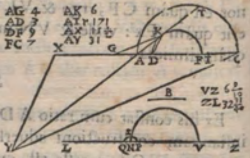
ergo F C * minima est omnium interceptarum inter dictas circumferentias. Con-

D nectantur autem G k, k D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes A K, F A continuatas in punctis y x. rectangulum igitur F A x * æquale erit quadrato A I; quare * proportionales erunt F A, A I, A x; sunt autem inæquales, quia A I, * maior est, quàm A F, ergo F x composita ex extremis maior erit, quàm dupla media. Fiat igitur vt x F ad F c, ita dupla A I ad aliam, quæ sit B: ea minor erit quàm F C, cum sit & A I dupla minor, quàm F K. Lem. 1 17 sexti Lem. 4

Sit primum V Z minor, quam B, ea multo minor erit, quam F C. Di-

co

co V N dimidiam differentiam rectarum L Z, z V, minorem esse, quàm A I. Quoniam enim vt A G ad A C ita est V z ad z L, ex constructione, lem. 3 & * ita F C ad C x, erit vt F C ad C x, ita V z ad z L, & conuertendo vt x C ad C F ita L z ad z V; & diuidendo vt x F ad F C, ita L V ad V z; sed x F ad F C, ita est A I dupla ad B, ex constructione, ergo vt L V ad V z, ita erit A I dupla ad B, & conuertendo vt z V ad V L, ita B ad duplam A I; sed ponitur z V minor, quàm B, ergo & V L minor erit, quàm dupla A I, & consequenter V N minor, quàm simpla A I, quod est primum.



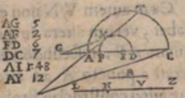
Sed sit V z non minor, quàm B, minor autem quàm F C. Eadem ratione quâ supra, ijsdemque verbis ostendemus, vt Z V ad V L, ita esse B ad duplam A I; sed ponitur z V non minor, quàm B; ergo neque V L minor erit quàm A I dupla; idcirco nec V N minor quàm A I simpla. In circulo igitur circa diametrum V N descripto poterit aptari recta æqualis A I. aptetur ergo, eaque sit V S, & connectatur N S, cui æqualis ex N V auferatur N P; reliqua V P indicat A E quæsitam sic habetur in Porismate, per cuius rationem texuimus constructionem Problematis. Dico igitur ipsam V P maiorem esse, quàm A F. Quo- lem. 3 niam enim vt A G ad A C, ita est V z ad z L ex constructione, & * ita F C ad C X, erit vt F C ad C x, ita V z ad z L. & diuidendo vt C F ad F x ita erit z V ad V L, sed C F ponitur maior quam z V, ergo & F x maior erit quam V L.

Describatur autem ex centro N ad interuallum N S, vel N P circulus se- 36 sexti cans N L in Q. rectangulum igitur P V Q * æquale erit quadrato V S, hoc est quadrato A I, sed rectangulum quidem P V Q æquale est rectangulo lem. 3 V P L; sunt enim æquales V P, P L, quadratum vero A I * æquale rectangulo F A x, ergo rectangulum F A x rectangulo V P L æquale erit, quare * 16 sexti proportionales erunt F A, V P, P L, A X; sed F x composita ex extre- Theor. 1 huius mis ostensa est maior, quàm V L composita ex medijs, ergo altera * extremarum maxima erit, altera minima; sed A x non est minima, quia maior est, quàm A F; nam cum sint proportionales F A, A I, A X. vt ostensum lem. 4 est supra, & A I * maior, quàm A F, erit A x multo maior, ergo A F minima erit; itaque V P maior quàm A F quod secundo loco erat ostendendum.

lem. 5 Deinde sit F C intercepta inter cauas circumferentias T C, k F, ergo k T * minima erit omnium interceptarum inter dictas circumferentias, connectatur autem G K, eique parallela agatur c y secans k A continuatam in y. re- lem. 3 17 sexti ctangulum igitur y A K * æquale erit quadrato A I; quare * proportionales lem. 4 erunt y A, A I, A K; sunt autem inæquales, quia A I * maior est, quàm A K, ergo y k composita ex extremis maior erit quam dupla media A I. Fiat igitur vt y K ad k T, ita dupla A I ad aliam, quæ sit B. ea minor erit, quàm k T cum sit & A I dupla minor, quàm y k.

Pri-

A Primum igitur sit V Z data minor, quam B. ea multo minor erit, quam K T. Dico V N dimidiam differentiam rectarum L Z, Z V minorem esse, quàm A I. Quoniam enim vt A G ad A C, ita est V Z ad Z L ex constructione, & * ita K T



lem. 1

ad T y, erit vt k T ad T y, ita V Z ad Z L: & conuertendo vt y T ad T k, ita L Z ad Z V: & diuidendo, vt y k ad K T, ita L V ad V Z: sed vt y K ad K T, ita est A I dupla ad B, ergo vt L V ad V z, ita erit A I dupla ad B; & conuertendo, vt Z V ad V L, ita B ad duplam A I; sed Z V ponitur minor quam B, ergo & V L minor erit, quàm A I dupla, vnde & V N minor, quàm A I simpla, quod est primum.

B Sed sit data V Z non minor, quàm B, minor autem quàm k T: eadem ratione qua supra ijsdemque prorsus verbis ostendemus, vt z V ad V L ita esse B ad duplam A I, sed z V ponitur non minor, quam B, ergo neque V L minor erit, quàm A I

dupla, atque adeo nec V N minor quam A I simpla. in circulo igitur cuius diameter V N aptetur recta V S æqualis A I, & connectatur N S, & ex N V abscindatur N P æqualis N S; reliqua V P indicat A E quæsitam: sic enunciatum est in Porismate. Dico igitur ipsam V P maiorem esse, quàm A k.

Quoniam enim vt A G ad A C, ita est V z ad z L ex constructione, & * ita k T ad T y, erit vt k T ad T y, ita V z ad z L, & diuidendo vt T k ad K y, lem. 1

C ita erit z V ad V L sed T k ponitur maior, quàm z V, ergo & k y maior erit, quàm V L.

Describatur autem circulus sub N centro interuallo N S, vel N P secans N L in Q: rectangulum igitur P V Q hoc est V P L * æquale erit quadrato V S, hoc est, quadrato A I, seu quod idem est * rectangulo y A k, quare * proportionales erunt y A, V P, P L, A k, sed y K composita ex extremis, ostensa est maior, quam V L composita ex medijs, ergo altera * extremarum y A; A K maxima erit, altera minima, sed A y non est minima, quia maior est quàm A K, nam cum sint proportionales y A, A I, A K, & A I maior quam A k, vt demonstratum est, vtrumque erit A y multo maior ergo A k minima erit, quare V P maior quam A k. quod secundo loco erat

15 tertij lem. 1 16 sexti

Theor. 1 huius

D ostendendum.

Scholium.

Existente igitur ratione A D ad A F maiore, quàm A G ad A C, manifestum est ex data V z minore minima interceptarum, alteram è duabus instantijs constructioni aduersantibus oriri; oritur enim prima instantia, cum V N dimidia differentia rectarum L z, z V minor est, quàm A I; nam recta æqualis ipsi A I non potest aptari in circulo circa diametrum V N descripto, quemadmodum Porisma fieri iubet, & ideo Problema construi non potest.

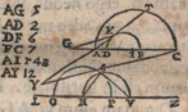
Cum

Cum autem V N non est minor, quam A I, prædicta instantia locum non habet, verum altera surgit, nam recta V P fit maior in primo quidem Casu quàm A F, in secundo vero quàm A K; itaque recta æqualis ipsi V P, non potest à puncto A ad circumferentiam K F duci, vt Porisma præcipit, atque adeo constructio Problematis perfici nequit. A

Propositio III.

Sed in quacumque ratione extiterint A D ad A F, & A G ad A C. sit data V z maior maxima interceptarum inter circumferentias K F, T C. Dico differentiam quidem rectarum V N, N S minorem esse minore rectarum A F, A K, compositam vero ex ijsdem maiorem maiore. B

SIt V P differentia rectarum V N, N S, composita autem ex ipsis V Q, & connectantur G k, K D, quibus parallelæ agantur c y, y x secantes k A, F A productas in punctis y x. Aut igitur F C intercepta est inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C aut inter vtramque cauam. Primum sit intercepta inter conuexam, & cauam, ergo A F maior erit, quam A k. Et quoniam est vt A G ad A C * ita K T ad T y, & ita A z ad z L, ex constructione, erit vt V z ad z L ita k T ad A y, & diuidendo vt z V ad V L, ita T k ad K y, sed z V maior est, quam T K, ponitur enim z V maior maxima, ergo & V L maior erit, quàm k y. C



lem. 3

16 tertij lem. 8 Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L * æquale est quadrato V S, & rectangulum y A k * æquale quadrato A I, quæ quidem quadrata æqualia sunt, cum sint æquales & rectæ V S, A I ex constructione, ideo rectangula

16 sexti V P L, y A K æqualia erunt, & ideo * proportionales V P, y A, A K, P L; sed V L composita ex extremis, ostensa est maior, quam y K composita ex

Theor. 2 huius medijs, ergo altera * extremarum V P, P L maxima erit, altera minima, sed cum sit V P minor, quam P L; ipsa V P minima, & per consequens minor quàm A K.

lem. 3 Rursus quoniam est A G ad A C, * ita F c ad c x, & ita V z ad z L ex constructione; erit vt V z ad Z L, ita F c ad c x: & diuidendo vt z V ad V L, ita C F ad F x: sed z V cum sit maior maxima, maior est quam C F, ergo & V L maior erit quam F x. D

16 tertij Lem. 8 Et quoniam rectangulum P V Q, vel V Q L * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui * æquale est & rectangulũ F A x rectangulum V Q L

16 sexti rectangulo F A x æquale erit, * quare proportionales erunt V Q, F A, A x, Q L, sed V L composita ex extremis ostensa est maior, quàm F x composita

Theor. 2 huius ex medijs, ergo altera * extremarum V Q, Q L maxima erit, altera minima; sed V Q maior est, quàm Q L ergo ipsa V Q maxima erit, & per consequens maior quàm A F.

Sed sit F C intercepta inter cauas circumferentias K F, T C, ergo A F minor

A minor erit, quàm A K, & quoniam est vt A G ad A C,* ita F C ad c x, & ita V z ad Z L ex constructione, erit vt V Z ad z L ita F C ad c x: & diuidendo vt z V ad V L, ita C F ad F x: sed z V maior est, quàm C F ea enim ponitur maior maxima; ergo & V L maior erit, quàm F x.

Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L* æquale est quadrato V S, 16 tertij
vel quadrato A I, cui* æquale est, & rectangulum F A x rectangula V P L, lem. 5
F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V P, F A, A x, P L; sed V L composita ex extremis ostensa est maior, quam F x composita ex medijs, ergo altera* extremarum maxima erit altera minima, sed V P minor est, quam Theor. 2 huius
B P L, ergo ipsa V P minima erit, & per consequens minor, quam A F.

Rectam autem V Q maiorem esse, quàm A k manifestum est; nam cum sit vt A G ad A C minor nempe ad maiorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione, erit & quadratum A K minus quadrato A I, vnde & recta A k minor, quàm recta A I hoc est quam recta V S, & multo minor quam recta V Q.

Existente igitur V Z maiore maxima interceptarum differentia rectarum V N, N S minor est minore rectarum A F, A k; composita vero ex ijsdem V N, N S maior maiore. quod erat ostendendum.

Scholium.

C Constat igitur instantiam constructioni aduersantem oriri ex data VZ excedente maximam interceptarum, cum eo Casu necesse sit, vt recta V P quæsitam A E indicans vel minor sit minore rectarum A F, A k, vel maior maiore, & ideo recta æqualis ipsi V P non possit à puncto A ad circumferentiam K F duci, quemadmodum Porisma fieri præcipit, & propterea constructio problematis perfici non possit.

Casus quartus.

Sed vergant ad diuersas partes dati duo semicirculi neutro reliquum includente etiamsi complerentur.

D Sint igitur tales duo semicirculi a b c, d e f data autem recta linea G, & ducatur A k contingens semicirculum d e f in K; ipsum vero a b c secans in T. Oportet inter circumferentias t c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum A pertineant.

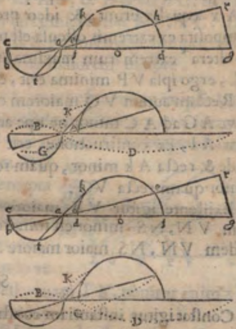
Hic quoque Casus in duos alios Casus diuiditur: in primo quidem ponenda est ea recta inter cauam circumferentiam vnius semicirculi, & conuexam alterius, in secundo vero ponenda est inter cauas vtriusque.

Re-

Resolutio. A

SIt iam posita recta linea b a e æqualis datæ G, vt impetratum est, & ex centro circuli d e f, quod sit O ponatur o g æqualis o c, & recta b a e etiam producta secet circumferentiam k d in h, & ducatur g r ipsi be productæ ad rectos angulos, & connectatur c b angulus igitur a b c in se-
Lem 3. micirculo rectus est, ac proinde h r* æqualis e b.

Et quoniam datæ sunt a c, a g, b e, a k; prima sit B, secunda D, tertia G, quarta k, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus: & quæratur a e, esto illa A, ergo recta a b erit G -- A, & cum sint similia triangula a b c, a r g; anguli enim a b c, a r g sunt æquales, quia recti; hic ex constructione, ille ex vi semicirculi, & æquales quoque b a c, r a o, quia sunt ad verticem, erit vt a c, ad a g, ita a b ad a r. hoc est in figuris ad Resolutionem pertinentibus, vt B ad D, ita G -- A ad $\frac{\text{D in G -- D in A}}{\text{B}}$, atque adeo a r erit $\frac{\text{D in G -- D in A}}{\text{B}}$, à qua si abscindatur recta h r æqualis ipsi e b, remanebit a h, quæ ideo erit $\frac{\text{D in G -- D in A}}{\text{B}}$ -- G; sed rectangulum e a h æquale est quadrato a k, ergo



$\frac{\text{D in G in A -- D in AQ}}{\text{B}}$ -- G in A æquabitur KQ B

Ducantur omnia in B; ergo

D in G in A -- B in G in A -- D in AQ æquabitur KQ in B.

Et applicentur omnia ad D, vt AQ ex se subsistat, ergo G in A -- $\frac{\text{B in G in A}}{\text{D}}$ -- AQ æquabitur $\frac{\text{kQ in B}}{\text{D}}$ C

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est, nempe fiat vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum quod sit ZQ, erit ZQ idem quod $\frac{\text{kQ in B}}{\text{D}}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, erit F eadem quæ $\frac{\text{B in G}}{\text{D}}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{\text{B in G in A}}{\text{D}}$ facta D igitur transmutatione.

G in A -- F in A -- AQ æquabitur ZQ

hoc est G -- F in A -- AQ æquabitur ZQ.

Et explicata æquatione $\text{G}\frac{1}{2}$ — $\text{F}\frac{1}{2}$ + L.V. ($\text{G}\frac{1}{2}$ -- $\text{F}\frac{1}{2}$ Q -- ZQ) æquabitur A

Vel $\text{G}\frac{1}{2}$ -- $\text{F}\frac{1}{2}$ -- L.V. ($\text{G}\frac{1}{2}$ -- $\text{F}\frac{1}{2}$ Q -- ZQ) æquabitur A.

In hac quoque æquatione A explicabilis est de duobus terminis, maiore, & minore; sed quo Casu terminus maior indicet quæsitam a e, quoue terminus minor quoue etiam vterque suo loco dicetur.

Po-

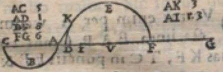
Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. deinde dimidiæ differentiæ, qua G superat ipsam F, addita recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ differentiæ superat quadratum a i, fiet terminus maior. Vel eidem dimidiæ differentiæ dempta eadem recta, reliqua erit terminus minor.

Antequam constructio fiat ostendendæ sunt maxima, & minima rectarum, quæ ad punctum a pertinentes, inter circumferentias K f, t c intercipiuntur, idque vt data G possit determinari, ne maximam superaret, neue à
B minima superaretur. sed prius sequens Lemma demonstrabo, quò facilius, ac clarius ea, quæ sequuntur demonstrentur.

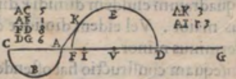
Lemma X.

Sint duo semicirculi AB C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur, & contingat recta A K semicirculum D E F in K, & ex centro circuli D E F, quod sit V ponatur V G æqualis V C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico si ratio A D ad A F minor sit ratione A G ad A C, & rectam A I minorem esse minore rectarum A F, A k, & si æqualis æqualem, & si maior maiorem: at minorem maiore.

C SIt primum ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. aut igitur recta F C intercepta est inter cauas vtriusque semicirculi circumferentias, aut inter cauam vnius, & conuexam alterius. Sit primum intercepta inter cauas. Quoniam igitur est, vt A G ad A C, maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I ex constructione, quadratum A K maius erit quadrato A I, vnde & recta A k maior, quàm recta A I.

Deinde sit F C intercepta inter cauam, & conuexam circumferentiam. Quoniam igitur ratio A D ad A F ponitur minor ratione A G ad A C, vt autem
D A G ad A C, ita est quadratum A K ad quadratum A I, ergo ratio A D ad A F minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I, sed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A k, A F ad tertiam, ita est quadratum secundæ A k ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A f, minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I: quare quadratum A I * minus erit quadrato A F, & per consequens recta A I minor, quàm recta A f, recta igitur A I minor est minore rectarum A f, A k, quod est primum.

Deinde sit ratio A D ad A F eadem, quæ A G ad A C, ergo eadem erit,

quæ quadrati A K ad quadratum A I, sed vt A D ad A F, ita est quadratum A k ad quadratum A F, vt demonstrauimus: ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, quare & recta A I æqualis rectæ A F, quod est secundum. A

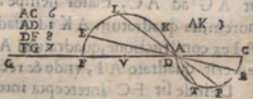


Postremo sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, ergo maior erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I; sed vt A D ad A F, ita ostensum est quadratum A K ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A k ad quadratum A F maior erit ratione quadrati A K ad quadratum A I; quare quadratum * A I maius erit quadrato A F, & B consequenter recta A I maior, quam recta A F; quod est tertium.

Denique quoniam est vt A G ad A C maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, quadratum A K maius erit quadrato A I: vnde & recta A K maior quam recta A I. Recta igitur A I minor est maiore rectarum A F, A K; quod vltimo loco erat ostendendum.

Lemma XI.

Iisdem positis, sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C. Dico K T maximam esse omnium, quæ per punctum A ductæ inter conuexam circumferentiam k F, & cauam T C intercipiuntur, minimam F C; earum verò quæ inter cauas circumferentias intercipiuntur, minimam esse k T, maximam F C. Aliarum autem vtroque casu propinquiorem minima remotiore maiorem esse. C



In quinti D Vcatur enim per A vtcumque recta linea E A B secans circumferentias K F, T C in punctis E B & sit primum F C intercepta inter cauas circumferentias K F, T C. Quoniam igitur A C maior est, quam A B, & A F maior quam A E tota C F maior erit, quam tota B E, & sic ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur F C. D

Pari ratione quoniam A T minor est, quàm A B, & A k minor quam A E, tota K T minor erit, quàm tota E B, atque eadem ratione ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur K T.

Rursus ducatur per A alia recta L A P secans circumferentias k F, T C in punctis L P, sitque L P minimæ k T propinquior, quam E B; erit A P minor quam A B, & A L minor quam A E, atque adeo tota P L minor, quam tota B E, hoc est propinquior minimæ, minor remotiore.

Sed

A Sed sit F C intercepta inter cauam circumferentiã T C, & conuexã K F, & connectantur G k, k D, quibus parallelæ agãtur c y, y x secantes A T, A C in punctis y x. rectangulum igitur F A X * æquale erit quadrato A I, sed recta A I ex antecedente Lemmate non est maior quàm A F, ergo neque Ax maior erit quam ipsa A F, alioquin rectangulum F A X maius esset quadrato A I. lem. 3

Et quoniam rectangulum F A x * æquale est rectangulo y A k, erit vt A K ad A F, * ita A x ad A y: sed A k maior est, quam A F, ergo & A x maior erit quàm A y; sed A x ostensa est non maior, quàm A F, ergo & Corol. Lem. 3 16 sexti
B A F maior erit quàm A y, atque A K multo maior. Itaque quatuor proportionalium A K, A F, A x, A y minima erit A y, & * consequenter maxima A K, atque adeo y k composita ex maxima & minima * maior, quàm F x composita ex reliquis. Theor. 4 huius 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita F x ad C x, & * ita k T ad T y, erit vt K T ad T y, ita F c ad c x: & permutando vt k T ad F C, ita T y ad c x videlicet vt tota ad totam, ita ablatã ad ablatam, quare & reliqua y k ad reliquam X F, erit vt tota k T ad F C totam, sed y K ostensa est maior, quam X F, ergo & k T maior erit, quàm F C. lem. 3

Producatur autem B E donec secet circumferentiam k D in H, & connectatur G H, cui parallela agatur C S secans ipsam A B in S. rectangu-
C lum igitur y A k * æquale erit rectangulo S A E: quare vt A K * ad A E, ita erit A S ad A y, sed A k maior est, quam A E, ergo & A S maior erit quam A y: est autem & A F maior, quam A y, vt demonstrauimus, ergo A E multo maior erit, atque A K multo maior. Sic igitur quatuor proportionalium A k, A E, A S, A y minima est A y, maxima vero A K vnde y K composita ex maxima & minima * maior, quam S E composita ex reliquis. Corol. lem. 5 16 sexti 25 quinti

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & * ita k T ad T y, erit vt K T ad T y, ita E B ad B S: & permutando vt k T ad E B, ita T y ad B S videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam: quare & * reliqua y K ad reliquam S E erit, vt k T ad E B; sed y k ostensa est maior, quam S E, Lem. 1
D ergo k T maior erit, quam E B, eademque ratione ostendetur ipsa K T omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium K T.

Deinde quoniam rectangulum F A x * æquale est rectangulo E a S, erit vt A E ad A F, ita A X ad A S; sed A E maior est; quam A F, ergo & A X maior erit, quam A S; sed a X ostensa est non maior, quàm A F, ergo & A F maior erit, quam a S, atque a E multo maior. itaque quatuor proportionalium a E, a F, a x, a S maxima esto a S, minima vero a E, atque adeo S E composita ex maxima, & minima * maior, quàm x F composita ex reliquis. Corol. Lem. 1 16 sexti 25 quinti

Et quoniam est vt a G ad a C, * ita E B ad B S, & ita F C ad c x, erit vt lem. 13

E B ad B S, ita F C ad c x, & permutando vt E B ad F C, ita B S ad c x, videlicet vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; quare & * reliqua S E ad reliquam X F erit vt E B ad F C; sed S E ostensa est maior, quàm X F, ergo & E B maior erit, quàm F C; & sic quæcumque alia demonstrabitur maior, quàm ipsa F C. Minima est igitur F C. A

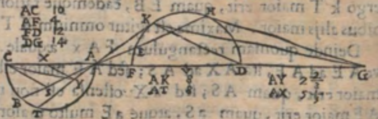
Sed ducatur per A alia recta P A L secans circumferentias T C, k F in punctis P L, circumferentiam vero K D in Q, & sit P L minimæ C F propinquior, quàm E B, & connectatur G Q, & ei parallela agatur C Z secans
Corol. Lem. 1 xvi sexti rectam P A in Z. Rectangula igitur L A Z, E A S * æqualia erunt, & ideo * proportionales A L, A E, A S, A Z; sed A L minor est quam A E; ergo & A S minor erit, quam A Z.

Lem. 1 17 sexti Et quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, erunt proportionales A E, A I, A S, sed A E maior est, quam A I, cum ipsa A I non B
Lem. 10 sit * maior, quàm A F; ergo & A I maior erit, quam, A S: itaque ipsa A S minor erit quàm A L, & multo minor, quam A E: est etiam minor quam A Z, vt demonstrauimus, ergo ipsa A S minima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A z. quare A E maxima, atque S E composita ex maxima, & minima maior erit, quam z L composita ex reliquis, hoc est z L minor, quam S E.

Et quoniam est vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & ita L P ad P z, erit vt L P ad P z, ita E B ad B S, & per conuersionem rationis vt P L ad L z; ita B E ad E S, & conuertendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B, sed z L ostensa est minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quam E B, hoc est propinquior minimæ minor remotiore. quare constat propositum. C

Lemma XII.

Rursus iisdem positis. sit autem ratio A D ad A F maior ratione A G
Lem. 10 ad A C, ergo A I * maior erit, quàm A F, minor autem, quàm A k, itaque ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, eaque producatur ad circumferentiam T C in O. Dico maiorem rectarum k T, F C maximam esse omniũ, quæ per A transeunt, & inter circumferentias k F, T C interijciuntur, minimam vero M O. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore ex eadem parte, minorem esse. D



Dvcatur enim per A vtcũq; recta B A E, secans circũferentias K F, T C in punctis E B; circũferentiam vero K D in N, & connectantur G H, G k, K D, quibus parallelæ agantur c s, c y, y x, secantes A B, A T, A C in punctis s y x, & sit primum k T maior,
Lem. 5 quàm F c. Quoniam igitur est, vt A G ad A C, ita * F c ad c x, & ita * k T ad T y; erit k T ad T y, vt F c ad c x, & per conuersionem rationis

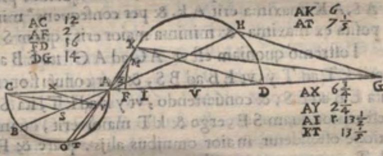
erit

A erit, vt KT ad ky, ita FC ad FX; sed kT ponitur maior, quam FC, ergo & Ky maior erit quam Fx.

Et quoniam æqualia sunt rectangula yAk, FAX, * proportionales erunt yA, AF, AX, Ak, sed Ky composita ex extremis ostensa est maior, quam Fx composita ex medijs, ergo * altera extremarum yA, Ak maxima erit, altera minima; sed Ak non est minima, quia maior est, quàm AF, ergo maxima erit; & per consequens Ay minima. itaque Ay minor est, quam AF, & multo minor, quam AE. Corol. lem. 3 16 sexti

Similiter quoniam * æqualia sunt rectangula EAS, kAy, erit * vt EA ad Ak, ita Ay ad AS; sed AE minor est, quàm AK, ergo & Ay minor erit, quàm AS. cum igitur Ay minor sit quam AS, & B minor quam AE, vt demonstraui, & multo minor, quàm Ak, erit ipsa Ay minima quatuor proportionalium EA, Ak, Ay, AS; * maxima vero AK; vnde yK composita ex maxima & minima * maior erit, quam SE composita ex reliquis. Corol. lem. 3 16 sexti Theor. 1 huius

Et quoniam est vt AG ad AC * ita EB ad BS, & ita kT ad Ty, erit kT ad Ty, vt EB ad BS; & per conuersioné rationis vt KT ad Ky, ita erit EB ad ES: & conuertendo vt yk ad KT, ita SE ad EB; sed yK ostensa est maior, quàm SE; ergo & KT maior erit, quam EB; & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium KT. lem. 3



Sed sit FC maior, quã kT. Quoniã igitur est vt C AG ad AC, * ita FC ad Cx, & * ita KT ad Ty erit vt FC ad cx, ita KT ad Ty, & per conuersionem rationis vt FC ad Fx, ita kT ad ky; sed FC ponitur maior, quàm kT, ergo & Fx maior erit, quam Ky; sed ipsa Fx composita est ex extremis quatuor proportionalium AF, Ay, AK, Ax; ipsa vero Ky ex medijs (constat autem eas proportionales esse ex eo, quod æqualia sunt rectangula FAx, yAK) ergo * altera extremarum AF, Ax maxima erit, altera D minima, sed AF non est maxima, quia minor est, quam AK, ergo minima erit, vnde Ax maxima itaque Ax maior erit, quàm Ak, & multo maior quam AE. Et quoniam * æqualia sunt rectangula EAS, FAx, erit * vt AE ad AF maior nempe ad minorem, ita Ax ad AS, quare & Ax maior erit, quàm AS; sed ipsa Ax ostensa maior, quam AE, & ideo multo maior, quam AF, ergo quatuor proportionalium EA, AF, Ax, AS maxima erit Ax, vnde AF minima, atque adeo xF composita ex maxima, & minima maior, quam Se composita ex reliquis. lem. 3 Theor. 2 huius Corol. lem. 3 16 sexti

Et quoniam est vt AG ad AC, * ita FC ad cx, & ita EB ad BS, ita erit vt FC ad cx, ita EB ad BS, & per conuersioné rationis vt FC ad Fx; ita lem. 3

F B ad A S; & conuertendo vt X F ad F C, ita erit S E ad E B, sed x F ostensa est maior, quam S E, ergo & F C, quam E B maior erit. Eademque ratione ostendetur omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium F C. A

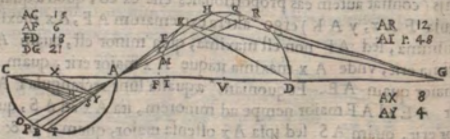
Sed sint æquales k T, F C. Quoniam igitur est (Lem 3.) vt A G ad A C, * ita F C ad C X, & * ita K T ad T y erit F C ad C x, vt K T ad T y, sed proponuntur æquales F C, k T, ergo æquales erunt & C x,

T y, quæ si ab æqualibus C F, T k auferantur reliquæ X F, y K æquales erunt B sed X F composita est ex extremis quatuor proportionalium F A, A y, A k, A x; ipsa vero y K ex medijs, constat autem eas proportionales esse ex eo quod * rectangula F A x, y A K sunt æqualia, ergo * maior extrema maiori (Corol. Lem. 1 Theor. 3 huius) mediæ, minor minori æqualis erit; sed A F extrema non est æqualis mediæ A k; hæc enim tangit circulum D E F, illa vero secat ergo æqualis erit ipsi A y.

Et quoniam * æqualia sunt rectangula y A K, E A S, erit vt * A y ad A E, (Corol. Lem. 3 16 sexti) ita A S ad A K; sed A y cum sit æqualis A F minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit, quàm A k, vt de quatuor proportionalium A y, A E, A S, A K maxima erit A k, & per consequens * minima A y; itaque y k com- (Theor. 1 huius) posita ex maxima, & minima maior erit, quàm S E composita ex reliquis. C

Postremo quoniam est vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita k T ad T y, (lem. 3) erit k T ad T y, vt E B ad B S, & per conuersionem rationis vt k T ad K y, ita E B ad E S; & conuertendo, vt y k ad k T, ita S e ad E B; sed y K ostensa est maior quam S E, ergo & k T maior erit, quàm E B. Atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare & F C, cum sit æqualis ipsi k T, erit quoque omnibus maior; itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum k T, F C maxima est omnium quæ per A ducuntur, & inter circumferentias k F, T C interijciuntur, quod est primum.

Deinde secet O M producta circumferétiam K D in R, & connectatur G R, eique parallela agatur C N



(lem. 3) secans rectam O M in N. Rectangulum igitur M A N * æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M, sunt enim æquales A I, A M, quare A M æqualis erit ipsi A N, & cum rectangulum F A x * æquale sit quadrato A I, (lem. 3 17 sexti) seu quadrato A M, * proportionales erunt A F, A M, A x, sunt autem & D

in-

A inæquales, ergo x F composita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc est quam M N. Et quoniam est vt A G ad A C* ita F C ad C x, & ita* M O ad O N, erit F C ad c x vt M O ad O N, & per conuersionem rationis vt F C ad F x, ita M O ad M N, & conuertendo vt x F ad F c, ita N M ad M O; sed x F ostensa est maior, quam M N, ergo & F c maior erit, quam M O; Æque quoniam rectangulum y A K* æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M,* proportionales erunt A k, A M, A y, sunt autem & inæquales, quare y K composita ex extremis, maior erit, quam M N media videlicet dupla, & quoniam est vt A G ad A C,* ita k T ad T y, & ita* M O ad O N, erit K T ad T y, vt M O ad O N: & per conuersionem rationis, vt K T ad K y, ita erit N O ad M N: & conuertendo, vt y k ad K T, ita N M ad M O; sed y k ostensa est maior, quàm M N, ergo & K T maior erit, quàm M O. lem. 3 Lem. 3 17 sexti

B

Eadem ratione quoniam rectangulum E A S* æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt A E, A M, A S, sunt autem C & inæquales, ergo S E composita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc est quam N M. Et quoniam est, vt A G ad A C,* ita E B ad B S, &* ita M O ad O N, erit vt E B ad B S, ita M O ad O N: & per conuersionem rationis vt E B ad E S, ita M O ad M N; & conuertendo vt S E ad E B, ita N M ad M O; sed S E ostensa est maior, quam N M, ergo & E B maior erit, quàm M O. Atque eadem ratione ostendemus omnes alias maiores esse ipsa M O: Minima est igitur M O omnium, quæ per A ducuntur, & inter circumferentias K F, T C interijciuntur, quod est secundum. Postremo ducatur per A alia recta P A L secans circumferentias T C, k F in punctis P L, sintque P L, B E ex eadem parte minima M O, & sit P L ipsi M O propinquior, quàm B E, & producatur P L D ad circumferentiam k D in Q, & iungatur G Q, eique parallela agatur C Z secans P A in Z.* æqualia erunt rectangula L A Z, E A S, & ideo proportionales A L, A E, A S, A Z: si quidem A L propinquior est rectæ A F. sic argumentor, sed A L minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit, quam A Z. Et quoniam rectangulum E A S* æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M,* proportionales erunt A E, A M, A S, sed A E maior est, quàm A M, ergo & A M maior erit quam A S, itaque A S minor erit, quàm A L, & multo minor, quàm A E: est quoque minor quam A Z, vt proxime demonstrauimus, ergo ipsa A S minima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A Z: maxima vero A E, atque S E, composita

Tem. 3 xvij sexti

Lem. 1

Corol. Lem. 3 xvi sexti

Lem. 3 xvij sexti

po-

posita ex maxima, & minima, maior quam Z L, composita ex reliquis, hoc est z L, minor quam S e. A

Si vero A L remotior est ab ipsa A F, quam A E; argumentor in hunc modum, sed A L maior est, quam A E, ergo & A S maior erit, quam A z. Et quoniam rectangulum E A S * æquale est quadrato A I, vel A M, proportionales erunt A E, A M, A S; sed A E minor est, quam A M, ergo & A M minor erit quam A S: itaque A S maior erit, quam A L, & multo maior quam A E: atque est maior quam A z, vt demonstrauimus, ergo ipsa A S maxima erit quatuor proportionalium A L, A E, A S, A z, & * consequenter A E minima: atque adeo S e composita ex maxima & minima maior, quam z L composita ex reliquis, hoc est z L minor, quam S e. quod etiam demonstrauimus & supra. B

Theor. 1 huius

lem. 1 Et quoniam in vtroque Casu est vt A G ad A C, * ita E B ad B S, & ita L P ad P z, erit vt L P ad P z, ita E B ad B S, & per conuersionem rationis vt P L ad L z, ita B E ad E S; & conuertendo vt z L ad L P, ita S E ad E B; sed z L ostensa est minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quàm E B, hoc est propinquior minimæ minor remotiore, quod tertio loco erat ostendendum.

Corollarium.

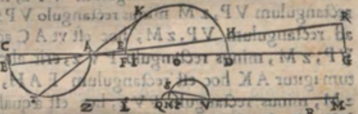
CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores sint; manifestum est K T maximam esse omnium, quæ inter circumferentias k M, T O interijciuntur. Earum autem, quæ interijciuntur inter circumferentias M F, O C maximam esse F C. C

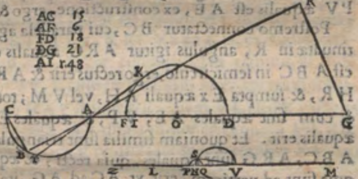
Compositio quarti Casus.

SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur; data autem recta linea V z, & contingat A k semicirculum D E F in k, semicirculum vero A B C secet in T. Oportet inter circumferentias T C, K F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertineat. Oportebit autem ipsam V Z non esse maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinentes, inter circumferentias T C, K F interijciuntur, neque minorem minima, quæ autem sit maxima, quæue minima iam est demonstratum. D

Si igitur data V Z sit æqualis maximæ, factum iam erit quod proponitur; & enim maxima est ea, quæ maior est rectarum k T, F C: si vero sit æqualis minimæ, minima autem sit ea, quæ minor est ipsarum K T, F C: itidem factum erit quod proponitur.

Si autem neutra dictarum k T, F C sit minima, inuenta minima Problemati satisfiet. inuentio autem minimæ constat ex Lemmate 16. Si autem V Z minor sit maxima, maior minima, sumatur ex centro circuli D E F, quod sit O recta O G æqualis O C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum, quod sit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita





A VZ ad aliam quæ sit ZL, & sit ipsarum VZ, ZL differentia LV, quæ secetur bifariam in N. Cum igitur à quadrato NV debeat auferri quadratum AI, vt Porisma præcipit describatur in VN semicirculus, in quo accomodetur VS æqualis AI intra demonstrabitur ipsa AI minor, quam VN, & conectatur SN. Qua-
B dratum igitur NV superat quadratum SV quadrato SN angulus enim NSV in semicirculo rectus est. Itaque rectæ VN addenda est, vel auferenda recta æqualis NS. sic Porisma fieri iubet, addatur ergo, vel auferatur prout sequentia præcepta docebunt, eaque aucta, vel diminuta sit VP cui æqualis ducatur à pun-
C cto A ad circumferentiã KF recta AE, & producatur donec secet semicirculum ABC in B. ipsam autem VP non esse minorem minore rectarum AF, Ax, nec maiorem maiore, tribus quæ sequuntur Lemmatibus manifestum fiet. Iam facta est constructio Problematis. Nunc ostendemus repetendo Resolutionis vestigia EB æqualem esse VZ datæ.

Secet recta AE vel continuata, circumferentiam KD in H, & centro N interuallo NS vel NP describatur circulus secans VL in Q. is circulus tan-
D get rectam SV in S, ac proinde quadratum SV æquale erit rectangulo PVQ, vel VPL, seu quod idem est rectangulo VPZ, minus rectangulo VP, LZ; punctum enim L est inter puncta PZ, nam NP cum, sit æqualis NS, maior est diametro NV, hoc est ipsa NL: si igitur fiat vt AC ad AG, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes itidem manebit inter eas partes æqualitas. At quoniam est vt AG ad AC, ita quadratum AK ad quadratum AI, ex constructione; erit conuertendo, vt AC ad AG, ita quadratum AI, hoc est quadratum SV, ad quadratum AK, quadratum igitur AK erit vna pars æqualitatis, alteram vero sic explorabimus. 95 tertij

Fiat vt AC ad AG, hoc est vt Lz ad ZV, ita PZ ad aliam, quæ sit

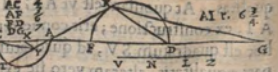
ZM:

ZM: ea erit maior, quam ZV, quoniam & PZ maior est, quam LZ; A cum sit punctum L inter puncta PZ, vt demonstrauimus. vt autem PZ ad zM, ita est rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM; sunt enim eiusdem altitudinis VP, ergo vt AC ad AG, ita erit rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM.

Et quoniam est vt AG ad AC, ita Vz ad zL, ex constructione; erit conuertendo, vt AG ad AG, ita Lz ad zV: vt autem Lz ad zV, ita est rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz; sunt enim eiusdem altitudinis VP, ergo vt AC ad AG, ita erit rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVZ; sed vt AC ad AG, ita ostensum est rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, ergo vt rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, ita erit rectangulum VP, Lz ad rectangulum PVz; nempe vt totum ad B
19 quinti totum, ita ablatum ad ablatum; quare & * reliquum ad reliquum erit vt totum ad totum, id est & rectangulum VPz, minus rectangulo VP, Lz, ad rectangulum VP, zM minus rectangulo VPz, erit vt rectangulum VPz ad rectangulum VP, zM, hoc est vt AC ad AG. Itaque rectangulum VP, zM, minus rectangulo PVz, erit altera pars æqualitatis. Quadratum igitur AK hoc est rectangulum EAH, æquale erit rectangulo VP, zM, minus rectangulo PVz, hoc est æquale erit rectangulo PVM, sed PV æqualis est AE, ex constructione, ergo & VM æqualis erit AH.

Postremo connectatur BC, cui parallela agatur GR occurrens AE continuatæ in R, angulus igitur ARG æqualis erit angulo ABC, sed rectus
Schol. ij. est ABC in semicirculo, ergo rectus erit & ARG: quare * æquales erunt EB, C HR, & sumpta Ex æquali AH, vel VM; tota Bx æqualis erit toti AR, & cum sint æquales AE, VP, & æquales Ex, VM, tota Ax toti PM æqualis erit. Et quoniam similia sunt triangula ABC, ARG, anguli enim ABC, ARG sunt æquales, quia recti, & æquales quoque BAC, RAG, quia sunt ad verticem, erit vt AC ad AG, ita AB ad AR; sed vt AC ad AG, ita est quoque Pz ad zM, ex constructione; ergo vt AB ad AR, hoc est ad Bx, ita erit Pz ad zM: & permutando; vt AB ad Pz, ita Bx ad zM, videlicet vt pars ad partem, ita tota ad totam; quare & reliqua Ax
19 quinti ad reliquam * MP erit, vt tota Bx ad totam Mz; sed Ax æqualis est MP, ex constructione, ergo & BX æqualis erit zM, sed Ex æqualis est VM ex constructione ergo & reliqua EB reliquæ Vz æqualis erit. Posita est igi- D tur inter circumferentias KF, TC recta EB æqualis datæ Vz, eaque ad punctum A pertinet, quod erat faciendum.

At vero rectam AI minorem esse, quam VN sic demonstrabimus.

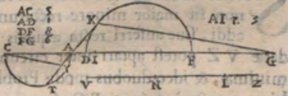


Hanc demonstrationem in duas partes diuidam, aut enim AD ad AF maiorem rationem habet, quam AG ad AC, aut non maiorem. primum habeat non maiorem, & FC sit inter-
Lem. 10 cepta inter conuexam circumferentiam KF, & cauam TC; ergo AI * non erit

A erit maior, quàm A F, atque F C* minima erit omnium interceptarum inter circumferentias K F, T C. Connectantur autem G k, K D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes A T, A C in punctis y x. Rectangulum igitur F A x* æquale est quadrato A I, & ideo* proportionales F A, A I, A x, vnde F x composita ex extremis non erit minor, quàm dupla media A I. lem. 18 lem. 9 17 sexti

Et quoniam est vt A G ad A C, ita V z ad z L, ex constructione, &* ita F c ad c x, erit vt F c ad c x, ita V z ad z L: & per conuersionem rationis, vt C F ad F x, ita erit z V ad V L; sed C F cum sit omnium interceptarum minima minor est, quam z V: ponitur enim z V maior minima, ergo & F x minor erit, quam V L; sed F x ostensa est maior, quam A I dupla, ergo A I dupla minor erit, quam V L, & consequenter A I
B simpla minor, quam V N, dimidia videlicet ipsius V L.

Sed sit F C intercepta inter cauas circumferentias k F, T C, ergo* k T minima est omnium, quæ inter dictas circumferentias intercipiuntur. Connectatur autem G k, & ei parallela agatur c y secans A T in y, rectangulum igitur y A k,* æquale erit quadrato A I. & ideo* proportionales erunt y A, A I, A K; sunt autem & inæquales, quia A I* minor, est quam A K; ergo y k composita ex extremis maior est, quàm A I dupla. Et quoniam est vt A G ad A C,* ita k T ad T y, & ita V z ad Z L, ex constructio-
C ne, erit K T ad T y vt V Z ad Z L, & per conuersionem rationis vt T K ad k y, ita erit Z V ad V L, sed K T cum sit omnium interceptarum minima minor est, quam Z V, ergo & k y minor erit, quàm V L; sed k y ostensa est maior, quam dupla A I, ergo A I dupla minor erit, quàm V L, & consequenter A I simpla minor, quam V N dimidia videlicet ipsius V L. Lem. 12 lem. 9 17 sexti lem. 10 Lem. 5



Sed habeat A D ad A F maiorem rationem, quam A G ad A C ergo* A I maior erit, quam A F, minor autem, quàm A K: itaque à puncto A ad circumferentiam k F poterit duci recta æqualis A I; ducatur igitur, eaque sit
D A M, & producta secet circumferentiam T C in O, ergo* M O minima est omnium interceptarum inter circumferentias k F, T C. Producatur quoque ipsa A M vsque ad circumferentiam k D in H, & connectatur G H, cui parallela agatur C R secans A O in R, rectangulum igitur M A R æquali erit quadrato A I, hoc est quadrato A M; quare æquales erunt A R, A M. lem 10 lem. 18

Et quoniam est vt A G ad A C ita M O ad O R, & ita V Z ad Z L, ex constructione, erit vt M O ad O R, ita V Z ad Z L, & per conuersionem rationis, vt O M ad M R, ita Z V ad V L. sed O M cum sit omnium interceptarum minima, minor est quàm Z V ponitur enim Z V maior minima, Lem. 5

nima, ergo & MR minor erit, quam VL, & consequenter AM, vel A AI minor, quam VN dimidia videlicet minor, quam dimidia. quare constat propositum.

Quo autem Casu rectæ VN addenda sit recta æqualis NS, quoue auferenda ratio his constat præceptis.

Præceptum I.

SI ratio AD ad AF non sit maior ratione AG ad AC, rectæ VN addenda est recta æqualis NS.

Præceptum II.

SI ratio AD ad AF maior sit ratione AG ad AC, data autem VZ non sit maior minore rectarum KT, FC, rectæ VN poterit siue addi, siue auferri recta æqualis NS: in hoc enim Casu recta æqualis datæ VZ potest aptari inter circumferentias kF, TC ex vtraque parte minimæ, & ideo duobus modis Problema absolui. Nam si auferatur aptabitur ea recta è regione FC; si vero addatur aptabitur è regione kT. B

Præceptum III.

SI vero data VZ maior sit minore rectarum kT, FC, recta ipsi VZ æqualis poterit aptari inter circumferentias kF, Tc ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum KT, Fc, itaque existente kT maiore, quam FC, rectæ VN addenda est recta æqualis NS, existente minore, auferenda. C

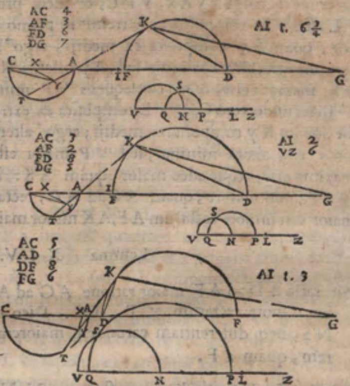
Restat vt recta VP sumpta, quemadmodum præcepta docent, ostendatur non minor minore rectarum AF, AK, nec maior maiore, quo circa tria Lemmata proferuntur.

Lemma XIII.

Sit ratio AD ad AF non maior ratione AG ad AC. Dico VP compositam ex, VN, NS maiorem esse minore rectarum AF, AK, minorem autem maiore.

AVt enim recta FC intercepta est inter conuexam circumferentiam KF, & cauam TC: quo Casu AF minor est, quam Ak; aut inter vtramque cauam, quo Casu AF maior est quam AK. Pri- D
Lem. 11 mo Casu KT * maximam est omnium, quæ inter circumferentias KF, TC intercipiuntur, minima vero FC, itaque VZ data minor est quam KT, maior quam FC, ponitur enim VZ minor maxima, maior mini-
Lem. 12 ma: Secundo autem Casu * minima est KT, maxima FC; vnde VZ data maior est, quam KT, minor quam FC.

Connectantur autem GK, kD, eisque parallelæ agantur cy, yx secan-



A cantes A T, A C in punctis y x. Quoniam igitur est vt A G ad A C, ita V Z ad Z L ex constructione, & ita * F C ad c x, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x; & per conuersionem rationis vt Z V ad V L, ita C F ad F x, sed z V in primo quidem Casu ponitur maior, quàm F C, ergo & V L maior erit, quam
B F x. In secũdo vero Casu ponitur Z V minor, quã c F, ergo & V L minor erit, quã F x.

Et quoniam æquales sunt L N, N V, ex constructione, & æquales quoque N P, N Q vt semidiametri, ideo fiunt quoque æquales L P, V Q, quare rectangulum P V Q æquale est rectangulo V P L, sed rectangulum P V Q * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum F A x, ergo rectangulum V P L æquale est rectangulo F A x. 36 tertij Lem. 3
C quare * proportionales sunt V P, F A, A x, P L, in primo quidem Casu sic argumentor, sed V L composita ex extremis ostensa est maior, quam F x composita ex medijs, ergo * altera extremarum V P, P L maxima erit, altera minima; sed V P maior est, quam P L, ergo ipsa V P maxima erit, & consequenter maior quam A F. 16 sexti Theor. 11 huius

In secundo autem Casu argumentor in hunc modum. sed V L composita ex extremis V P, P L ostensa est minor, quam F x, composita ex medijs. F A A x, ergo * altera mediarum F A, A x maxima erit altera minima, sed A x maior est, quam A F, nam cum rectangulum F A x * æquale sit quadrato A I, & recta A I minor, quam A F erit A x multo minor, ergo ipsa A F maxima erit, atque adeo V P, minor, quam A F, Theor. 11 huius lem. 3
D Rursus quoniam est vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex constructione, & ita * K T ad T y, erit vt V z ad z L, ita K T ad T y: & per conuersionem rationis, vt z V ad V L, ita T K ad K y, sed z V, in primo quidem Casu ponitur minor, quam T Q. ergo & V L minor erit, quam k y: in secundo vero Casu z V ponitur maior, quam T K, ergo & V L maior erit, quam k y. lem. 3

Et quoniam rectangulum y A K * æquale est quadrato A I, & recta A I * minor, quam A K: erit A y multo minor. lem. 3 Lem. 10

Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L, * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum y A K æqua- 36 tertij lem. 1

15 sexti lia erunt rectangula y A k, V P L, & ideo* proportionales V P, y A, A K, P L. sed V L composita ex extremis in primo quidem Casu ostensa est minor, quam k y composita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A K

Theor. 1 huius maxima erit, altera minima sed, A y ostensa est minor, quam A K, ergo A k maxima erit, & per consequens V P minor, quam A K.

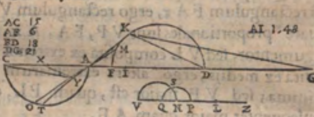
In secundo vero Casu V L composita ex extremis V P, P L ostensa est ma-

Theor. 2 huius ior, quàm K y composita ex medijs; ergo* altera extremarum V P, P L maxima erit, altera minima; sed V P maior est, quam P L, ergo ipsa V P maxima erit, atque adeo maior, quàm A K. Existente igitur ratione A D ad A F, non maiore, quam A G ad A C, recta V P composita ex V N, N S maior erit minore rectarum A F, A K minor maiore: quod erat ostendendum.

Lemma XIV.

Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, data autem V Z non maior minore rectarum K T, F C. Dico neque compositam ex V N, N S, neq; differentiam earundem maiorem esse, quàm a k, aut minorem, quàm a F.

SIt enim V P æqualis compositæ ex v N, N S. v Q vero æqualis differentiæ earundem, & connectantur G k, k D, eisq. paralleIæ agantur c y y x, secantes a T, a C in punctis y x.



Quoniam igitur est, vt a G ad

Lem. 3 a C,* ita k T ad T y, & ita v Z ad z L, ex cōstructione, erit vt v Z ad z L, ita k T ad T y, & per conuersionem rationis, vt Z v ad v L, ita erit T K ad K y; sed Z v non est maior, quam T k, ponitur enim Z v non maior minore rectarum KT, F C, ergo neque v L maior erit, quam K Y. Et cum sit rectangulum

Lem. 3 Lem. 10 y A K* æquale quadrato a I, & recta a I* minor, quam a K, erit a y multo minor.

Et quoniam rectangulum P v Q, hoc est v P L sunt enim æquales v Q, P L,

Lem. 3 æquale est quadrato v S, hoc est quadrato a I, cui quoque* æquale est rectan-

16 sexti gulum y a k, æqualia erunt rectangula v P L, y a K, & ideo* proportionales v P y a, a k, P L, sed v L composita ex extremis ostensa est non maior, quam k y, composita ex medijs, ergo si est minor, erit altera mediarum y a, a k maxima, altera minima; sed A y ostensa est minor, quam a k, ergo a k maxima erit, & per consequens V P minor quam a k.

Si vero V L composita ex extremis æqualis est y k composita ex medijs,

Theor. 3 huius maior* extremarum maiori mediarum æqualis erit; hoc est V P æqualis a k. Ipsam autem v P non esse minorem, quam a F manifestum est, nam cum v P

Lem. 10 maior sit, quā v S, hoc est quam a I, ipsa autē a I* maior, quam a F; erit v P multo maior. Recta igitur v P æqualis cōpositæ ex v N, N S non est maior quā a k,

nec

A nec minor quam A F, quod est primum.

Deinde quoniam V Q minor est quam V S hoc est, quam A I, ipsaque A I * minor, quàm A K; erit V Q multo minor: superest igitur vt ipsa V Q ostendatur non minor, quam a F: id autem ita fit manifestum. lem. 10

Quoniam enim vt a G ad a C * ita est F C, ad C x, & ita quoque V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x, & per conuersionem rationis vt Z V ad V L, ita C F ad F x; sed Z V non est maior, quam C F: ponitur enim Z V non maior minore rectarum K T, F C, ergo neque V L maior erit, quàm F x. Et cùm rectangulum F A x æquale sit quadrato a I, & recta a I * maior, quam F a; erit A x multo maior. lem. 1 Lem. 1 lem. 10

Et quoniam rectangulum Q V P, vel V Q L, sunt enim æquales V P, B Q L, * æquale est quadrato V S hoc est quadrato a I, cui quoque æquale est rectangulum F A x, ipsa rectangula V Q L, F A x æqualia erunt, & ideo * proportionales V Q, F a, A x, Q L: sed V L composita ex extremis ostensa est non maior, quàm F x composita ex medijs, ergo si est minor, erit * altera mediarum F A, A x maxima, altera minima; sed A x ostensa est maior, quàm F A, ergo ipsa F A minima erit, & consequenter V Q maior, quàm A F. Si vero V L composita ex extremis æqualis est F x compositæ ex medijs, minor extremarum * minori mediarum æqualis erit, hoc est V Q æqualis A F. Recta igitur V Q differentia rectarum V N, N S non est minor, quàm A F, nec maior, quam A K, quod secundo loco erat ostendendum. 15 tertij 14 sexti Theor. 2 huius Theor. 1 huius

C

Scholium.

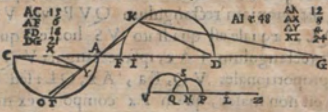
Ex demonstratis igitur manifestum est si A D ad A F maiorem rationem habeat, quàm a G ad a C. data autem V Z non sit maior minore rectarum k T, F C, Problema duobus modis absolui posse; nam si à puncto A ad circumferentiam k F ducatur recta a M, æqualis a I, & producatur ad circumferentiam T C in O, erit * M O minima omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur. Et cum V P composita ex V N, N S ostensa sit maior, quam a I, hoc est quam a M, non autem quam a k; poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta a E, æqualis V P. Similiter cum V Q differentia rectarum V N, N S ostensa sit minor, quàm D a M, non autem quàm a F, poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta a E æqualis V Q. Itaque si à puncto A ad circumferentiam K F ducatur a E æqualis V P compositæ ex V N, N S, aptabitur recta datæ V Z æqualis inter circumferentias K M, T O. Si vero ducatur a E æqualis V Q differentiæ ipsarum V N, N S aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C, atque adeo poterit aptari ex vtraque parte minimæ M O, & ideo Problema duobus modis absolui, quod in præcepto secundo monuimus. lem. 12

Lemma X V.

Rursus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C. Sed data V Z sit maior minore rectarum K T; F C, & à puncto A ad circumferentiam K F ducatur A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam T C in O est* autem A I maior, quam A F, minor autem quam A K. Dico si K T maior sit, quam F C, compositam ex V N, N S minorem esse, quá A k, maiorem quam A M; sin minor, differentiam rectarum V N, N S maiorem esse, quam A F, minorem quam A M.

lem. 10

SIt enim V P æqualis compositæ ex V N, N S, V Q vero æqualis differentiæ earundem, & cónectantur G K, k D, eisque parallelæ agantur c y, y x secantes A T, A C in punctis y x, & sit primum k T maior quàm F C, ergo ipsa K T* maxima est omnium interceptarum inter circumferentias K F, T C; quare recta ipsi V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias K M, T O, non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit V Z maior quam F C, expositione, ipsaq. F C * maxima omnium interceptarum inter circumferentias M F, O C.



lem. 11

Corol. lem. 12 lem. 3

Et quoniam est, vt A G ad A C, * ita K T ad T y, & ita quoque V Z ad Z L ex constructione, erit vt V z ad z L, ita K T ad T y, & per conuersioné rationis vt z V ad V L, ita T K ad k y; sed z V minor est, quàm T K: ea enim ponitur minor maxima, ergo & V L minor erit, quam k y, & cum sit rectangulum y A K* æquale quadrato A I, & recta A I* minor, quàm A K, erit A y multo minor.

Lem. 1 lem. 10

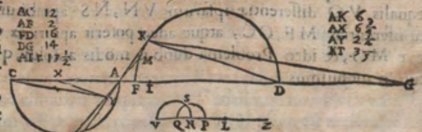
Et quoniam rectangulum P V Q, hoc est V P L (sunt enim æquales V Q, P L)* æquale est quadrato V S, vel quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum y A k, ideo æqualia erunt rectangula V P L, y A k, ac proinde* proportionales V P, y A, A k, P L; sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quàm k y composita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A K maxima erit, altera minima; sed a y ostensa est minor, quàm a K, ergo a K maxima erit, & consequenter V P minor, quàm A K. Ipsam autem V P maiorem esse, quam a M manifestum est. Nam V P maior est, quam V S, cui æqualis est a I, vel a M ex constructione. Existente igitur K T maiore, quàm F C recta V P æqualis compositæ ex V N, N S minor est, quàm a K, & maior, quam a M, quod est primum.

ex tertij lem. 3 16 sexti

Theor. 2 huius

Sed sit K T minor quam F C, ergo F C, * maxima est omniũ interceptarum inter circumferentias, k F, T C, quare recta datæ V Z

lem. 11



A VZ æqualis poteſt aptari inter circumferentias MF, OC, non etiam inter circumferentias KM, TO, cum ſit VZ maior, quàm KT, ex poſitione; ipſa autem KT maxima omnium, quæ inter circumferentias KM TO interijciuntur.

Et quoniam eſt vt AG ad AC, ita *FC ad cx, & ita VZ ad ZL ex conſtructione, erit vt VZ ad ZL, ita Fc ad cx: & per conuerſionem rationis, vt zV ad VL, ita CF ad Fx, ſed zV minor eſt, quàm Fc: ea enim ponitur minor maxima, ergo & VL minor erit, quam Fx. Et cum ſit rectangulum FAX* æquale quadrato AI, & recta AI* maior, quam AF, erit AX multo maior. Lem. 3 Lem. 1 Lem. 10

Denique quoniam rectangulum QVL, vel VQL * æquale eſt quadrato VS, hoc eſt quadrato AI, cui quoque * æquale eſt rectangulum FAX, rectangula VQL, FAX æqualia erunt, & ideo* proportionales VQ, FA, Ax, QL; ſed VL compoſita ex extremis, oſtenſa eſt minor, quam Fx compoſita ex medijs, ergo* altera mediarum FA, Ax maxima erit, altera minima; ſed Ax oſtenſa eſt maior, quam AF, ergo ipſa FA minima erit: vnde VQ maior, quàm AF. Ipſam autem VQ minorem eſſe, quàm aM conſtat ex eo, quod ea minor eſt, quàm VS, cui æqualis eſt AI, vel aM, ex conſtructione. Exiſtente igitur KT minore, quàm FC, recta VQ æqualis differentiæ rectarum VN, NS maior eſt, quàm AF, minor autem quam aM, quod ſecundo loco erat oſtendendum. 36 tertij B Lem. 3 Theor. 2 huius

Reſolutio huiuſce quarti Caſus, quemadmodum & tertij, incidit in æquationem de duobus terminis explicabilem, quorum maior eſt aggregatum rectarum VN, NS, minor differentia earundem. Et quoniam non ſemper vterque indicat AE quæſitam, ideo hic quoque oſtendam quomodo terminus quæſitam AE indicans dignoſcatur. C

Propoſitio I.

Terminum indicantem quæſitam AE in ſemicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoſcere.

SIt ratio AD ad AF non maior ratione aG ad aC. Oportet terminum indicantem quæſitam AE dignoſcere. Reſumantur compoſitionis figuræ ad huiuſmodi Caſum pertinentes. Quoniam igitur termini de quibus æquatio explicabilis eſt, ſunt VP aggregatum rectarum VN, NS, & VQ differentia earundem, ideo manifeſtum eſt alterum eorum quæſitam AE indicare; & quoniam ratio AD ad aF ponitur non maior ratione aG ad aC, recta AI non* erit maior minore rectarum AF, Ak, vnde AE quæſita maior erit, quam AI, hoc D Lem. 5

hoc est quam V S, & multo maior quam V Q, ipsa igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V P. Existente igitur ratione A D ad A F non maiore, ratione A G ad A C, aggregatum rectarum V N, N S indicat quæsitam A E. Itaque agnitus est terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum constitutum est. A

Propositio I I.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad secundum præceptum pertinentibus dignoscere.

Sit ratio AD ad AF maior ratione A G ad A C, & data VZ neutra rectarum KT, FC sit maior. B

Oportet terminum quæsitam A E indicantem dignoscere. Resumatur Compositionis figura ad huiusmodi Casum pertinens. Quoniam igitur termini de quibus æquatio explicabilis est sunt V P, aggregatum rectarum V N, N S, & V Q differentia earundem, manifestum est alterum eorum indicare quæsitam A E. Ducatur à puncto A ad circumferentiam k F recta A M æqualis A I, vel V S, hoc autem potest fieri, nam A I maior est, quam A F, minor autem quam A k. aut igitur quæsita A E desinit in circumferentia M F, aut in circumferentia M K. si in M F, ea erit maior quam A M, hoc est quam V S, & multo minor quam V P. Recta igitur V P non indicat quæsitam A E, ergo V Q eam indicat. C

lem. 10

Si vero quæsita A E desinit in circumferentia M k, ea maior erit, quam A M, hoc est quam O S, & multo maior, quam V Q. ipsa igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo V P eam indicat. Itaque existente ratione A D ad A F maiore, quam A G ad A C, & data V Z non maiore minore rectarum k T, F C indicat quæsitam A E, tum differentia, tum aggregatum rectarum V N, N S; differentia quidem cum A E desinit in circumferentia M F, aggregatum vero cum desinit in circunferentia k M. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum secundum constitutum est. D

Propositio I I I.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoscere.

Rur-

A RVrsus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, sed data V Z sit

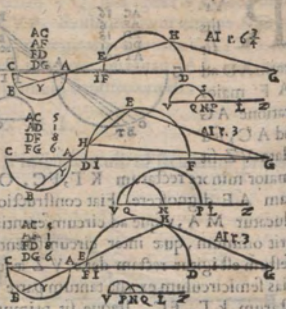
maior minore rectarum K T, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoſcere. Fiat constructio vt in antecedenti propositione & producatur M A, vsque ad circumferentiam T C in O, ergo M O* minima
B erit omnium, quæ inter circumferentias k F, T C interijciuntur. Manifestum est igitur rectam datæ V Z æqualem posse aptari inter circumferentias semicirculum ex vna tantum parte minimæ, nempe è regione maioris rectarum k T, F C. Itaque sit primum k T maior, quàm F C, ergo recta æqualis datæ V z poterit aptari inter circumferentias k M, T O; non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit V Z maior, quam F C ex positione, ipsaq. F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C intercipiuntur; itaque A E quæsita terminabitur in circumferentia K M, & ideo maior erit, quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S, & multo maior quam V Q, quæ æqualis est differentiæ rectarum V N, N S: Terminus igitur V Q non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V P æqualis aggregato ipsarum V N, N S. Corol. lem. 12

C Sed sit K T minor, quam F C, ergo recta æqualis datæ V Z poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias K M, T O, cum sit V Z maior, quam K T, quæ est* maxima omnium inter circumferentias K M, T O interceptarum, atque A E quæsita terminabitur in circumferentia M F, vnde minor erit, quam A M, hoc est quàm A I, seu quam V S, & multo minor, quàm V P; terminus igitur V P non indicat quæsitam A E, ergo eam indicat V Q. Cum igitur ratio A D ad A F Corol. lem. 12

D maior sit, quam A G ad A C, & data V Z maior minore rectarum k T, F C existente K T maiore, quam F C, aggregatum rectarum V N, N S indicat A E quæsitam; existente vero minore differentia. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat.
Hinc præceptum tertium constitutum est.

Superest vt ostendamus quemadmodum factum est in præcedenti Casu, nempe indicante vno terminorum quæsitam A E, quid indicet terminus alter.

Resumantur Compositionis figuræ, & connectatur G H, eique parallela agatur c y secans A B in y. Duos terminos, Porisma constituit, de quibus



bus A explicabilis est vnum quidem aggregatum rectarum V N, N S. alterum vero differentiam earundem, Dico indicante vno terminorũ quæsitam A E, alterum rectæ A y indicem esse.

Indicet enim quæsitam A E terminus V P, siue sit æqualis aggregato rectarum V N, N S, siue differentiæ. Quoniam igitur rectangulum

Lem. 3 E A y * æquale est quadrato A I, &

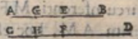
36 tertij rectangulum P V Q * æquale quadrato V S, quæ quidem quadrata æqualia sunt, quod & rectæ A I, V S sunt æquales, ex constructione; ideo rectangulum P V Q æquale erit rectangulo E A y; sed V P indicans quæsitam A E æqualis est ipsi A E, ergo & V Q æqualis erit A y: itaque recta V Q, quæ est alter terminus indicat rectam A y.

Indicante igitur vno terminorum V P, V Q quæsitam A E, alter rectam A I indicat; quod erat ostendendum.

Lemma XVI.

Si à duabus rectis lineis abscindantur duæ rectæ æquales, rectangulum autem contextum prima & reliqua parte eiusdem sit minus eo, quod secunda, & reliqua parte eiusdem continetur, prima minor erit, quam secunda, & reliqua pars primæ minor, quam reliqua pars secundæ.

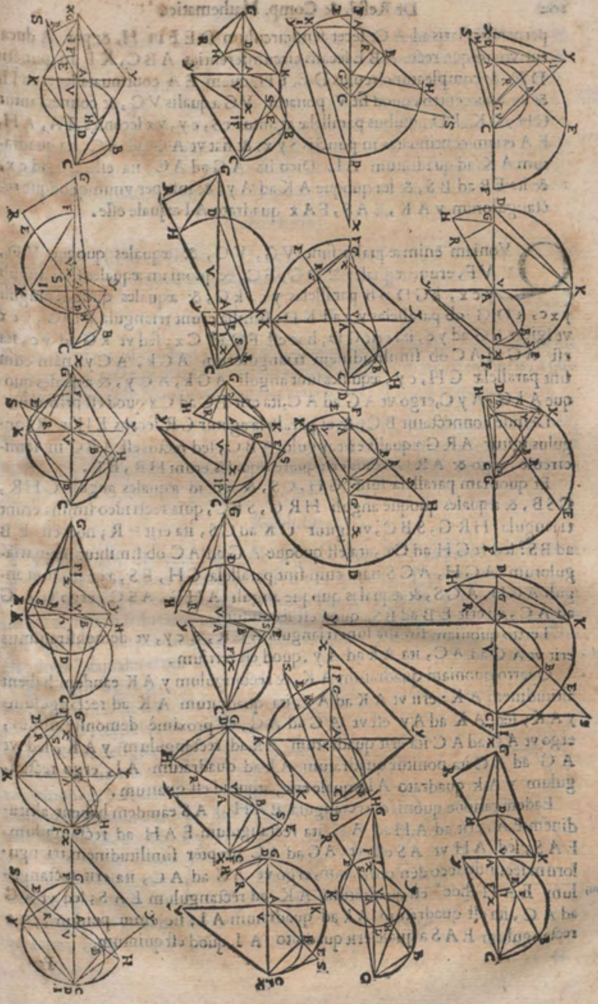
A Duabus rectis A B, C D abscindantur rectæ A E, C F æquales & rectangulum A B E sit minus rectangulo C D F. Dico A B minorem esse quam C D, itemque E B minorem, quam F D. Secentur enim A E, C F bifariam in G H, erunt æquales G E, H E, vnde & earum quadrata æqualia erunt, sed cum rectangulum A B E minus sit rectangulo C D F, sic enim ponitur, erit ipsum rectangulum A B E, vna cum quadrato G E, minus rectangulo C D F vnà cum quadrato H F; sed rectangulum A B E vna cum quadrato G E * æquale est quadrato G B; similiter & rectangulum G D F, vnà cum quadrato H F * æquale quadrato H D, ergo quadratum G B, minus erit quadrato H D: vnde & recta G B minor, quam recta H D, & additis æqualibus A G, C H, tota A B minor erit, quàm C D tota atque ablatis æqualibus G E, H F, reliqua E B minor erit, quam reliqua F D. quare constat propositum.



6 secundi

Lemma XVII.

Sint duo semicirculi A B C, D E F in directum bases habentes, & recta A K per-



perpendicularis ad A C. secet semicirculum D E F in H, & per A ducatur vtcumque recta A B E secans circumferentias A B C, K F in punctis D E, & compleatur circulus D E, F H, quem F A continuata secet in H, & ex eius centro, quod sit V ponatur V G æqualis V C, & connectantur G H, G K, k D, quibus parallelæ agantur c S, c y, y x secantes E A, A H, F A etiam continuatas in punctis S y x. & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico sit A G ad A C, ita esse F C ad c x, & ita E B ad B S, & ita quoque A K ad A y, & insuper vnumquodque rectangulorum y A K, E A S, F A x quadrato A I æquale esse. A

QVoniam enim æquales sunt V G, V C, & æquales quoque V D, V F, erunt æquales & D G, F C, & quoniam æquales sunt anguli y c x, k G D ob parallelas y c, k G, & æquales quoque anguli y x c, k D G ob parallelas y x ad K D, similia erunt triangula k D G, y c x vt igitur k G ad y c, ita erit G D, hoc est F C ad C x; sed vt k G ad y c, ita est A G ad A C ob similitudinem triangulorum A G k, A C y: nam cum sint parallelæ G H, c y, æquales sunt anguli A G k, A C y, & æquales quoque A k G, A y C, ergo vt A G ad A C, ita erit F C ad C x quod est primum. B

Deinde connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans E H in R: angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C; sed rectus est A B C in semicirculo, ergo & A R G rectus erit, quare æquales erunt H R, E B.

Et quoniam parallelæ sunt G H, C S, & ob id æquales anguli G H R, C S B, & æquales quoque anguli H R G, S B C, quia recti ideo similia erunt triangula H R G, S B C, vt igitur G K ad C S, ita erit H R; hoc est E B ad B S: sed vt G H ad C S, ita est quoque A G ad A C ob similitudinem triangulorum A G H, A C S nam cum sint parallelæ G H, E S, æquales sunt anguli A G H, A C S, & æquales quoque anguli A H G, A S C, ergo vt A G ad A C, ita erit E B ad B S. quod est secundum. C

Tertio quoniam similia sunt triangula A G R, A c y, vt demonstrauimus erit vt A G ad A C, ita A k ad A y. quod est tertium.

Quarto quoniam quadratum A K, & rectangulum y A K eandem habent altitudinem A K: erit vt A K ad A y, ita quadratum A K ad rectangulum y A K; sed A K ad A y est vt A G ad A C, vt proximè demonstrauimus, ergo vt A G ad A C ita erit quadratum A K ad rectangulum y A K, sed vt A G ad A C ita ponitur quadratum A k ad quadratum A I, ergo rectangulum y A k quadrato A I æquale erit, atque id est quartum. D

Eadem ratione quoniam rectangula E A H, E A S eamdem habent altitudinem E A. erit ad A H ad A S, ita rectangulum E A H ad rectangulum E A S; sed A H vt A S est vt A G ad A C propter similitudinem triangulorum secundo loco demonstratam, ergo vt A G ad A C, ita erit rectangulum E A H, hoc* est quadratum A K ad rectangulum E A S; sed vt A G ad A C, ita est quadratum A k ad quadratum A I, sic enim ponitur, ergo rectangulum E A S æquale erit quadrato A I. quod est quintum.

*35 tertij

Po-

A Postremo quoniam parallelæ sunt k D, y x, erit angulus A D K æqualis angulo A x y, & angulus A K D angulo A y c, & ideo similia triangula A D k, A x y, vt igitur A D ad A k, ita erit A x ad A y; sed vt A D ad A K, xvij sexti * ita est A k ad A F, rectangulum enim D A F * æquale est quadrato A k, 35 tertij ergo vt A x ad A y, ita erit A K ad A F vnde rectangulum F A x sub extremis, * æquale erit rectangulo y A K sub medijs, sed rectangulum y A K æ- 16 sexti quale est quadrato A I, vt quarto loco demonstrauimus, ergo & rectangulum F A x quadrato A I æquale erit, quod sexto, & vltimo loco erat ostēdendū.

Corollarium.

B Ex demonstratis colligitur rectangula y A K, E A S, F A x æqualia esse etenim vnumquodque eorum ostensum est æquale quadrato A I.

Casus quintus

Denuo vergant ad eandem partem dati duo semicirculi maior minorem includens; sed recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi minoris, à quo quidem angulo semicirculus maior plus distet, quam à reliquo.

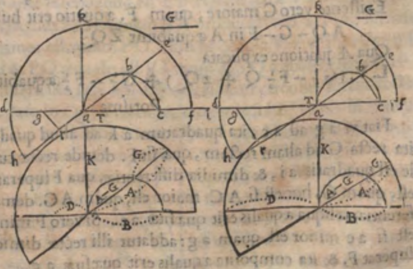
Sint itaque tales dati duo semicirculi a b c, d e f, data autem recta linea G, & ducatur a k perpendicularis ipsi d f secans circumferentiam d e f in k oportet inter circumferentias a b c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertingat.

C

Resolutio.

Posita iam sit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertingat, & ex centro circuli d e f, quod sit T ponatur T G æqualis T C, & compleatur circulus f e, d h, quem e a producta secet in h, & ipsi e h ducatur perpendicularis g r, & connectatur b c, ea quoque ipsi e h perpendicularis erit quia angulus a b c in semicirculo rectus est. vnde * æquales erunt h r, e b. Lem. a

D Datarum a c, a g, b e, a k; prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K. vt designatum est in figuris ad resolutionem pertinētibus, & quæratur a e. estò illa A, ergo a b erit A - G, & cum sint similia triangula a b c, a r g, anguli enim a b c, a r g sunt æquales, quia recti,



&

& æquales quoque anguli ad a, quia sunt ad verticem; erit vt a c ad a g, ita a b ad a r, hoc est in figuris Resolutionis vt B ad D, ita A -- G ad $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$; atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$, cui addita r h, quæ æqualis est e b tota a h erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B} + G$; sed rectangulum e a h æquale est quadrato AK, ergo A
35 tertij

$$\frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B} + G \text{ in } A \text{ æquabitur } KQ$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

$$D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A + B \text{ in } G \text{ in } A \text{ æquabitur } KQ \text{ in } B.$$

Et applicentur omnia ad D, vt Potestas æquationis ex se subsistat, ergo

$$AQ - G \text{ in } A + \frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} \text{ æquabitur } \frac{KQ \text{ in } B}{D}$$

Sed vt Æquatio facilius explicetur, trāsmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est; hoc est fiat vt D ad B ita k Q ad aliud quadratum, quod sit Z Q, eritque Z Q idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit E, eritque F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur transmutatione. B

$$AQ - G \text{ in } A + F \text{ in } A \text{ æquabitur } ZQ$$

In hac æquatione G interdum minor est, quàm F, interdum maior; interdum æqualis, nam cum D minor est, quam B fiet & G minor, quam F; est enim vt D ad B, ita G ad F, D autem minor est, quàm B cum centrum circuli d e f includentis existit inter puncta a c; maior vero cum existit extra, æqualis autem cum existit in ipso a puncto. Itaque cum G minor est, quàm F quadratum in Æquatione afficitur affirmate; cum autem maior afficitur negate, at cum æqualis, nulla est affectio, sed quadratum purum manet, nam id quod est affirmatum æquale est ei quod est negatum, atque adeo affirmationem destruit negatio. Existente igitur G minore quam F, eiusmodi erit Æquatio. C

$$AQ + F - G \text{ in } A \text{ æquabitur } ZQ$$

Qua Æquatione explicata

$$\text{L.V.}\left(\overline{F\tfrac{1}{2} - G\tfrac{1}{2}}\,Q + ZQ\right) - \left(F\tfrac{1}{2} - G\tfrac{1}{2}\right) \text{ æquabitur } A$$

Existente vero G maiore, quam F. æquatio erit huiusmodi.

$$AQ - G - F \text{ in } A \text{ æquabitur } ZQ$$

Qua Æquatione explicata

$$\text{L.V.}\left(\overline{G\tfrac{1}{2} - F\tfrac{1}{2}}\,Q + zQ\right) + G\tfrac{1}{2} - F\tfrac{1}{2} \text{ æquabitur } A$$ D

Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. deinde rectæ cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ differentiæ, qua F superat G siquidem F maior est, quàm G, hoc est si A C maior est, quàm A G. dematur ipsa dimidia differentia; reliqua æqualis erit quæsitæ a c. Si vero F minor est, quam G; hoc est si a c minor est, quam a g: addatur illi rectæ dimidia differentia, qua G superat F, & ita composita æqualis erit quæsitæ a c.

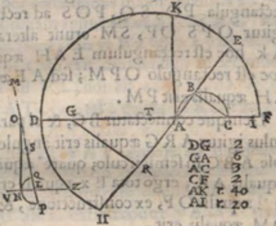
Com-

A

Compositio.

SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A K pertineat. Oportebit autem datam V z non esse minorem, quam F C, nec maiorem A k perpendiculari à puncto A ad circumferentiam D E F ducta. Siquidem V z æqualis sit alteri ipsarum A k, F C. factum iam erit quod proponitur, si vero maior sit quàm F C, minor autem quam A k. Ponatur ex cen-

B tro circuli D E F, quod sit T recta T G, æqualis T C, & fiat* vt A G ad A C, ita quadratum A K ad aliud quadratum quod sit A I. Similiter fiat vt A G ad A C, ita V z ad z L, & V L differentia rectarum V z, z L secetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O æqualis A I, & connectatur O L. quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L. itaque si A G minor sit, quàm A C, rectæ O L, Probl. 1 huius



C detrahenda est recta æqualis L N, si vero maior, addenda. Sic Porisma fieri iubet. primo igitur ab ipsa V L abscindatur recta L P æqualis L N, secundo vero addatur L P æqualis L N infra demóstrabimus, rectam O P in primo quidē Casu minorem esse, quàm A F, maiorē quam A k: in secundo vero maiorem, quàm A F, minorem quam A k. Itaque poterit à puncto A in circumferentiam K F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, quam semicirculus A B C secet in B, & facta erit constructio, vt Porisma fieri iubet. Nunc ostendenda est E B æqualis datæ V z.

Cópleatur igitur circulus F E D, quem E A producta secet in H, & sumatur P S æqualis V z. ea minor est, quàm P O, cum sit & ipsa V z minor, vt infra demonstrabimus; sed & P Q æqualis est V L, ergo & S Q æqualis erit z L.

D Deinde centro L interuallo L N, vel L P describatur circulus secans rectam O L, etiam continuatam in Q. is circulus tanget rectam O N in N, cum rectus angulus O N L, ex constructione: quare quadratum O N æquale erit rectangulo P O Q, hoc est rectangulis* P O, S Q, P O S. si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alia plana, itidem manebit æqualitas: in Resolutione conuerso modo factum est, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana. At quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione, hoc est ad quadratum O N erit conuertendo, vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K: quadratum igitur A k erit vna pars 1 secundi æqualitatis. alteram vero sic inueniemus. A

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad Z O; seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ sit S M, ea in primo quidem casu minor erit, quàm S O, quoniam & S P minor est, quàm Q S. in secundo verò maior: quoniam & S P maior est, quàm Q S. Et quoniam est vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita
sexti * rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S; sunt enim eiusdem altitudinis
1 sexti O P. Similiter vt A C ad A G, hoc est vt O S ad S M, * ita est quoq; rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M, cum sint eiusdem altitudinis P O: ideo erit vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, ita rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; sed vt vna antecedentium ad vnam consequen-
12 quinti tium, * ita sunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. ergo vt rectangulum PO, SQ ad rectangulum OPS, hoc est vt A C ad A G, ita erunt B
rectangula PO, SQ, POS ad rectangula OPS, PO, SM, rectangula igitur OPS OP, SM erunt altera pars æqualitatis. itaque quadratum A k hoc est rectangulum E A H æquale erit rectangulis O P S, O P, S M, hoc est rectangulo O P M; sed A E æqualis est O P ex constructione, ergo & A H æqualis erit P M.

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A H in R: angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus; cum sit rectus &
Lem. 1 ipse A B C in semicirculo; quare* æquales erunt E B, H R. sumatur autem B X æqualis A R, ergo tota E x æqualis erit toti A H, hoc est ipsi P M: & cum sit A E æqualis O P, ex constructione, & E X æqualis P M, reliqua A x reliquæ O M æqualis erit. C

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B ad A R ob similitudinem triangulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M ex constructione, erit vt A B ad A R, hoc est ad B x, ita O S ad S M: & diuidendo vt A x ad x B, ita O M ad M S: sed prima A X ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo & secunda X B æqualis erit M S quartæ, sed X E ostensa est æqualis P M, ergo & reliqua B E reliquæ P S, hoc est V z datæ, æqualis erit, quod erat ostendendum.

Posita est igitur inter circũferẽtias A B C, D E F recta B E æqualis datæ VZ, eaq. pertinet ad punctũ A, quod faciendũ erat.

At verò rectam O P in primo quidem Casu minorem esse, quam A F, maiorem quam A K. in secundo verò maiorem, quam A F, minorem quam A K; ita ostendemus. D

Connectantur G k, k D quibus parallelæ agantur C Y, Y X

se-

A secantes K A, A C productas in punctis y x: erit igitur vt A G ad A C* ita F C ad C x; sed vt A G ad A C, ita est quoque V Z ad Z L, ex constructione, ergo vt V Z ad Z L ita erit F C ad C X, & in primo Casu erit diuidendo. in secundo vero per conuersionem rationis, vt V Z ad V L, hoc est ad P Q, ita F C ad F X: sed V Z ponitur maior quam FC, ergo & P Q maior erit, quàm F X. Lem. 17

Et quoniam rectangulum F A X æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N, seu * rectangulo P O Q, proportionales * erunt P O, F A, A X, O Q. sed P Q differentia extremarum ostensa est maior, quàm F X, differentia mediarum, ergo * altera extremarum P O, O Q maxima erit, altera minima. In primo quidem Casu sic argumentor. sed P O non est maxima, quia minor est, quam O Q: ergo minima erit, & consequenter minor quàm A F. In B secundo verò casu argumentor hoc modo. Sed P O non est minima, quia maior est, quam O Q, ergo maxima erit, & per consequens maior quam A F. Lem. 17 36 tertii 16 sexti Theor. 2 huius

Deinde sumatur A T æqualis A K. quoniam igitur est, vt A G ad A C* ita K A ad A Y, & ita V Z ad Z L ex constructione; erit vt V z ad z L, ita K A hoc est A T ad A Y. in primo quidem Casu erit diuidendo; in secundo vero per conuersionem rationis. vt V z ad V L, hoc est ad P Q, ita A T ad T y: sed V Z ponitur minor, quàm A T, hoc est, quàm A K. ergo & P Q minor erit quam T y. Lem. 17

Et quoniam rectangulum * y A K, hoc est y A T æquale est quadrato A I, hoc est quadrato O N, vel * rectangulo Q O P: * proportionales erunt y A, Q O, O P, A T; sed y T differentia extremarum ostensa est maior, C quam P Q differentia mediarum, ergo * altera extremarum y A, a T maxima erit, altera minima; sed in primo quidem Casu a T non est maxima, quia minor est quam a y, ergo ipsa a T, hoc est a k, minima erit, & per consequens O P maior, quàm a k. In secundo vero Casu a T non est minima, ea enim maior est, quàm a y: ergo ipsa a T, hoc est a K maxima erit, & per consequens O P minor quam a k. quare constat propositum. Lem. 17 36 tertii 16 sexti Theo. 2 huius

Similiter rectam V z minorem esse, quàm P O ita fit manifestum.

Quoniam enim est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum a I, & ita V z ad z L: vtrumque ex constructione erit, vt V z ad z L, ita quadratum a k ad quadratum a I, hoc est ad quadratum O N, vel ad D rectangulum P O Q: sed vt V Q ad z L, ita est quadratum V z ad rectangulum V z L, eamdem enim habent altitudinem V z, ergo & quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum a k ad rectangulum P O Q: sed quadratum V z minus est quadrato a k, ponitur enim recta V z minor, quam recta a k. ergo & rectangulum V z L minus erit rectangulo P O Q, sunt autem æquales V L, P Q, ergo V z minor erit quam P O, quod erat ostendendum. 36 tertii Lem. 16

Diximus oportere datam V z non esse maiorem, quàm a k, nec minorem quam F C. quoniam a K maxima est omnium, quæ ad punctum a pertinentes inter circumferentias a B C, K F interijciuntur, F C minima.

 Alia-

Aliarum autem propinquior minima remotiore minor est, quod quidem sic demonstrabitur. A

7 tertij Quoniam enim in primo Casu A k* maior est, quàm A H. ea multo

lem. 2 maior erit, quàm H R, hoc* est quam E B, & sic demonstrabitur omnibus alijs maior.

Maxima est igitur omnium A k.

Similiter quoniam A D* minor est, quàm A H, A G autem maior, quam A R reliqua D G minor erit, quàm reliqua H R, hoc est F C minor quam E B, & sic ipsa F C demonstrabitur minor omnibus alijs. Minima est igitur omnium F C.

Rursus ducatur alia recta A M N secans circumferentias A B C, K F in punctis M N, & sit recta M N ipsi C F propinquior, quàm B E, & producta N A secet circulum F E D completum in O, & connectatur M C; cui parallela agatur G P secans rectam A O in P, quam etiam secet G R in Q. erit angulus A P G æqualis angulo A M C; sed rectus est A M C in semicirculo, ergo & A P G rectus erit

Lem. 2 quare* æquales erunt M N, P O. Et quoniam A O minor est, quam A H, A Q autem maior, quàm A R; reliqua Q O minor erit, quam reliqua R H. vnde recta P O multo minor, quam ipsa R H; hoc est M N minor quam B E, propinquior videlicet minimæ minor remotiore.

7 tertij In secundo autem Casu A K* maior est, quàm A E, ergo multo maior quam E B. Maxima est igitur omnium A K. C

Et quoniam A F minor est, quam A E, A C vero maior quam A B, reliqua C F minor erit, quam reliqua B E, & sic F C demonstrabitur omnibus alijs minor. Minima est igitur omnium F C.

Denique ducatur alia recta A M N secans circumferentias A B C, k F in punctis M N, ità vt M N ipsi C F sit propinquior, quam B E. Quoniam igitur A N minor est quam A E, A M autem maior quam A B, reliqua M N minor erit, quàm reliqua B E. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. quare manifesta est determinatio.

Casus sextus. D

SEd vergant ad diuersas partes dati duo semicirculi, & maior si compleatur includat minorem, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculis minoris, à quo quidem angulo semicirculus maior plus distet, quàm à reliquo.

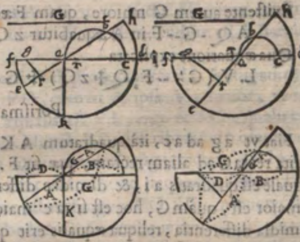
Sint itaque tales dati duo semicirculi a b c, d e f: data autem recta linea G, à puncto autem a demittatur a k ad rectos angulos ipsi a c, vsque ad circumferentiam d e f in k. Oportet inter circumferentias a b c, K f ponere rectam lineam æqualem ipsi G; ita vt ad punctum pertineat.

Re-

A

Resolutio.

POsita iam sit recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertineat, & ponatur ex centro circuli d e f, quod sit t. recta t g æqualis t c, & compleatur circulus f e, d h secans e b productam in h, ipsique e h ducatur perpendicularis g r, & connectatur b c: ea quoque ipsi e h perpendicularis erit, cum sit rectus angulus a b c in semicirculo: quare * æquales erunt h r, e b. lem.



B Datarum autem a c, a g, b e, a k prima sit B, secunda D, tertia G, quarta k, vt in figuris ad resolutionem pertinētibus. & quæratur a e, esto illa A, ergo a b erit G -- A, & cum sint similia triangula a b c, a r g, erit vt a c ad a g, ita a b ad a r. hoc est in figuris Resolutionis, vt B ad D, ita G -- A ad $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. atque adeo a r erit $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. si auferatur a b, r h æquali ipsi e b, reliqua a h erit G -- $\frac{D \text{ in } G - D \text{ in } A}{B}$. Et quoniam rectangulum e a h

C ęquale est quadrato a k, ideo

$$G \text{ in } A - \frac{D \text{ in } G \text{ in } A + D \text{ in } A Q}{B} \text{ ęquabitur } K Q$$

Ducantur omnia in B vt fractio euanescat ergo

$$B \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } G \text{ in } A + D \text{ in } A Q \text{ æquabitur } k Q \text{ in } B.$$

Et applicentur omnia ad D, vt potestas æquationis ex se subsistat, ergo

$$A Q - G \text{ in } A - \frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} \text{ æquabitur } \frac{k Q \text{ in } B}{D}$$

Sed vt æquatio facilius explicetur, transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus pręcedentium casuum factum, hoc est, fiat vt D ad B, ita K Q ad aliud quadratum, quod sit z Q, eritque zQ idem quod $\frac{K Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam, quæ sit F, eritque F

D eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, atque adeo planum F in A idem erit, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur transmutatione

$$A Q - G \text{ in } A + F \text{ in } A \text{ æquabitur } z Q.$$

In hac quoque æquatione quemadmodum in æquatione præcedentis Casus G interdum minor est, quam F, interdum maior, interdum æqualis, prout D minor est quam B, vel maior, vel æqualis; est enim vt D ad B, ita G ad F. D autem minor est, quam B, cum centrum circuli d e f includentis existit inter puncta a c, maior vero cum existit extra, æqualis autem, cum existit in ipso à puncto. Itaque cum G minor est, quam F, quadratum in æquatione afficitur affirmate, cum maior

maior afficitur negate, cum æqualis, nulla est affectio, sed quadratum purum manet, nam cum id quod est affirmatum æquale sit ei quod est negatum, quod affirmatio addit, idem negatio minuit. Existente igitur G minore, quam F: æquatio erit huiusmodi, A

$$A\,Q + .\,F - G \text{ in } A \text{ æquabitur } z\,Q$$

Qua æquatione explicata,

$$L.V.\,(F\tfrac{1}{2} - G\tfrac{1}{2}\,Q + z\,Q) - \left\{\begin{matrix} -F\tfrac{1}{2} \\ G\tfrac{1}{2} \end{matrix}\right. \text{ æquabitur } A$$

Existente autem G maiore, quam F æquatio erit huiusmodi

$$A\,Q - G - F \text{ in } A \text{ æquabitur } z\,Q$$

Qua æquatione explicata

$$L.V.\,(G\tfrac{1}{2} - F\tfrac{1}{2}\,Q + z\,Q) + G - F \text{ æquabitur } A.$$ B

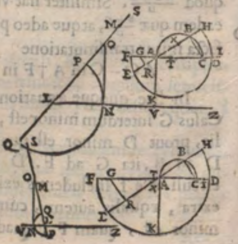
Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ità quadratum A K ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F. Deinde rectæ cuius quadratum æquale est quadratis a i, & dimidiæ differentiæ, qua F superat G si quidem F maior est, quàm G, hoc est si a c maior est, quàm a g: dematur ipsa dimidia differentia, reliqua æqualis erit quæsitæ a c. Si vero F minor est quam G, hoc est si a c minor est quàm a g, addatur dimidia differentia, qua G superat F, & ità composita æqualis erit a c quæsitæ.

Porisma hoc idem est, quod Porisma Resolutionis antecedentis Casus, sed tamen non sunt eadem vtriusque Resolutionis vestigia, idcirco constructio, C quæ sequitur, eadem prorsus erit, quæ in antecedenti Casu, demonstratio autem paulum diuersa.

Compositio.

Sint dati duo semicirculi A B C, D E F, vt dictum est, data autem recta linea V z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V Z, ita vt ad punctum A pertineat. Oportebit autem datam V Z non esse maiorem, quam F C, nec minorem A k perpendiculari ducta à puncto A ad circumferentiam D E F.



Si quidem V Z æqualia sit alteri ipsarum A K F C factum iam erit, quod proponitur: D si verò minor sit, quàm F C, maior autem, quàm A k. ponatur ex centro circuli D E F quod sit T, recta T G, æqualis T C, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum quod sit A I.

Probl. 1. huius

Similiter fiat vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, & V L differentia rectarum V Z, z L secetur bifariam in N, eique ad rectos angulos ducatur N O æqualis A I, & connecta-

tur

A tur O L. quadratum igitur O L æquale est quadratis O N, N L; itaque si A G minor est, quam A C rectæ O L detrahenda est recta æqualis L N, si vero maior addenda. sic Porisma fieri iubet. ab ipsa igitur O L in primo casu abscindatur recta L P æqualis L N, in secundo vero producatur O L in P, vt sit L P æqualis L N. infra autem ostendemus rectam O P in primo quidem casu maiorem esse, quam A F, minorem quam A K. in secundo vero minorem, quam A F, maiorem quam A k. itaque poterit à puncto in circumferentiam k F duci recta A E æqualis O P. ducatur ergo A E, quam productam secet semicirculus A B C in B. facta est igitur constructio quemadmodum Porisma fieri iubet. Nunc ostendendum est E B æqualem esse datæ V z.

B Compleatur circulus E E D secans A B productam in H, & sumatur P S æqualis V z. ea maior erit quam P O, cum sit & ipsa V z maior, vt infra demonstrabimus, sed & P Q æqualis est V L, ergo & S Q æqualis erit z L. deinde centro L intervallo L N, vel L P describatur circulus secans rectam O L etiam continuatam in Q: is circulus tanget rectam O N in N, cum sit rectus angulus O N L, ex constructione. itaque quadratum O N * æquale erit rectangulo P O Q, hoc est rectangulo P O, S Q, minus rectangulo P O S. Si igitur fiat, vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars separatim ad alia plana; itidem manebit æqualitas. in resolutione conuerso modo factum est, nempe vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alia plana. At quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadra-

C tum A I, ex constructione, hoc est ad quadratum O N: erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum O N ad quadratum A K. quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, nunc verò inueniemus alteram.

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L z ad z V, seu quod idem est, vt Q S ad S P, ita O S ad aliam, quæ sit S M. ea in primo quidem Casu minor erit quam S O, quoniam & S P minor est, quam Q S. in secundo vero maior quoniam & S P maior est, quam Q S. Et quoniam est vt A C ad A G, hoc est vt Q S ad S P, ita rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S; sunt enim eiusdem altitudinis O P. Similiter vt A C ad A G, hoc est vt O S ad S M, ita est quoque rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M cum sint eiusdem altitudinis P O, ideo erit vt rectangulum P O, S Q ad rectan-

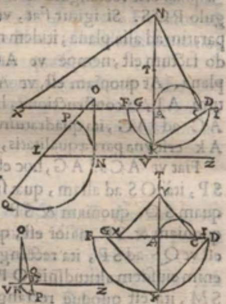
D gulum O P S, ita rectangulum P O S ad rectangulum P O, S M; nempe vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, ergo * vt totum ad totum, ita erit & reliquum ad reliquum, id est vt rectangulum P O, S Q ad rectangulum O P S, hoc est vt A C ad A G, ita rectangulum P O, S Q, minus rectangulo P O S ad rectangulum O P S, minus rectangulo P O, S M. rectangulum igitur O P S, minus rectangulo O P, S M erit altera pars æqualitatis, itaque quadratum A k, hoc est rectangulum E A H, æquale erit rectangulo O P S, minus rectangulo O P S M, hoc est æquale erit rectangulo O P M, sed A E æqualis est O P, ex constructione, ergo & A H æqualis erit P M.

De-

Denique connectatur B C, & ei parallela agatur G R secans A in E R: A
angulus igitur A R G æqualis erit angulo A B C, & ideo rectus cum sit re-
lem. 2 ctus, & ipse A B C in semicirculo quare * æquales erunt E B, H R, abscinda-
tur autem B x æqualis A R, reliqua X E æqualis erit reliquæ A H, hoc est
ipsi P M; sed & A E æqualis est V P ex constructione, ergo & reliqua A x
reliquæ O M æqualis erit.

Et quoniam est vt A C ad A G, ita A B, ad A R ob similitudinem trian-
gulorum A B C, A R G, & ita O S ad S M, ex constructione, erit vt A B
ad A R, hoc est ad B X, ita O S ad S M. & diuidendo vt A X ad X B, ita
O M ad M S; sed prima A X ostensa est æqualis tertiæ O M, ergo, & se-
cundæ X B æqualis erit M S quartæ, sed & X E ostensa est æqualis P M,
ergo tota B E toti P S, hoc est V Z datæ æqualis erit, quod erat ostenden- B
dum. Posita est igitur inter circumferentias A B C, D E F recta B E æqua-
lis datæ V Z eaque pertinet ad punctum A quod erat faciendum.

At vero O P in primo quidem Casu maiorem esse, quam A F minorem
quam A K; in secundo vero minorem, quàm A F, maiorem quam A K;
ita fit manifestum.



Connectatur G k, k D quibus parallelæ agan-
tur c y, y x secantes K A, C A productas in
punctis y x. Quoniam igitur est, vt A G ad
Lem. 17 A C, * ita F C ad c x, & ita V Z ad Z L, ex con-
structione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad c x,
& in primo quidem Casu erit diuidendo, in se-
cundo vero per conuersionem rationis, vt V Z
ad V L, hoc est ad P Q, ita F c ad F X; sed
V Z ponitur minor, quàm F c. ergo & P Q
minor erit, quàm F x.

Lem. 17 Et quoniam rectangulum F A x * æquale
est quadrato A I hoc est quadrato O N, seu
Theor. 11 huius rectangulo P O Q * proportionales erunt P O,
F A, A X, O Q: sed P Q differentia extrema-
rum ostensa est minor, quam F X, differen-
Lem. 17. tia mediarum, ergo * altera mediarum F A, A x maxima erit altera mini-
ma. in primo quidem Casu sic argumentor, sed F A non est maxima; mi- D
nor enim est, quàm A x, ergo minima erit, & per consequens O P maior
quam A F. In secundo vero Casu argumentor in hunc modum sed F A
non est minima, maior enim est quàm A X, ergo maxima erit, & per con-
sequens O P minor quàm A F.

Deinde sumatur A T æqualis A k. Quoniam igitur est vt A G ad A C*
ita K A ad A y, & ita V Z ad Z L ex constructione, erit vt V z ad z L; ita
K A hoc est A T ad A y, in primo quidem Casu erit diuidendo, in secundo
vero per conuersionem rationis, vt V z ad V L, hoc est ad P Q, ita A T ad
T y, sed V z ponitur maior, quàm A T, hoc est quam A K, ergo & P Q
maior

A maior erit quam T y.

Et quoniam rectangulum y A K, hoc eſt y A T * æquale eſt quadrato Lem. 17
A I, hoc eſt quadrato O N vel * rectangulo Q O P; * proportionales erunt 36 tertii 16 sexti
Q O, y A, A T, O P; ſed Q P differentia extremarum oſtenſa eſt maior quàm y T differentia mediarum, ergo * altera extremarum maxima erit, altera minima. in primo quidem Caſu ſic argumentor, ſed O P non eſt maxima, quia minor eſt quam O Q, ergo minima erit, & per conſequens minor quam A T, hoc eſt, quam A Q. in ſecundo vero Caſu hoc modo, ſed O P non eſt minima, quia maior eſt quam O Q, ergo maxima erit, & per conſequens maior quam A T, hoc eſt quam A k. quare conſtat propoſitum.

Similiter rectam V Z maiorem eſſe, quam P O. ſic demonſtrabimus.

B Quoniam enim eſt, vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, & ita V Z ad Z L, vtrumque ex conſtructione erit, vt V Z ad z L, ita quadratum A K ad quadratum A I, hoc eſt ad quadratum * O N, ſeu ad * rectangulum P O Q; ſed vt V z ad z L, * ita eſt quadratum V z ad rectangulum V z L, eamdem enim habent, altitudinem V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum A k, ad rectangulum P O Q, ſed quadratum V z maius eſt quadrato A k, ponitur enim recta V z maior, quàm A k; ergo & rectangulum V z L maius erit rectangulo P O Q; ſed ſunt æquales V L, P Q, ergo V z * maior erit, quàm P O. quod erat oſtendendum. 16 tertij 1 sexti Lem. 16

Diximus oportere datam V Z non eſſe minorem, quàm A k; nec maiorem quam F C. ipſa enim A K minima eſt omnium quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur, idque ita fit manifeſtum. C

Quoniam enim in primo Caſu A K * minor, eſt quam A H, ea multo minor erit, quam H R; hoc eſt quam E B, & ſic demonſtrabitur, omnibus alijs minor. Minima eſt igitur A K.

Similiter quoniam A D maior eſt quam A H, & A G maior quam A R, erit tota D G maior quam tota H R, hoc eſt F C maior, quam E B, & ſic ipſa F C demonſtrabitur omnibus alijs maior. Maxima eſt igitur F C.

Ducatur autem alia recta N A M ipſi A k propinquior, quam E B, & producatur donec ſecet circulum F E D completum in O, & connectatur M C, cui parallela agatur G P ſecans A N in P, rectam vero A E in Q: erit angulus A P G æqualis angulo A M C, & ideo rectus, cum ſit rectus & A M C in ſemicirculo, quare * æquales erunt N M, O P. Et quoniam A Q * minor eſt, quàm A H, & A P minor quam A Q, & multo minor, quàm A R; tota O P minor erit, quam tota H R hoc eſt N M minor, quam E B; propinquior igitur minimæ minor eſt remotiore. D Lem. 1

In ſecundo autem Caſu A K minor eſt, quàm A E; ergo multo minor quam

quam E B, atque ratione ostendetur omnibus alijs minor. Minima est igitur A k. A

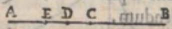
Æquè quoniam A F maior estquam A E, & A C maior quam A B, tota F C maior erit quam tota E B, & sic demonstrabitur ipsa F C maior omnibus alijs. Maxima est igitur F C.

Sed ducatur per A alia recta N A M ipsi A K propinquior, quàm E B; erit A N minor, quàm A E; sed & A M minor est quam A B, ergo tota N M minor erit, quàm tota E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. quare manifesta est Determinatio.

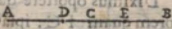
Lemma XVIII. B

Si recta linea bifariam secetur, & in ea sumantur duo puncta vtcumque. Punctum quod efficit rectangulum maius propinquius est sectioni eo puncto, quod minus rectangulum efficit.

SEcetur recta A B bifariam in C, & in ea sumantur vtcumque duo puncta D E, sitque rectangulum A D B maius rectangulo A E B. Dico punctum D sectioni C propinquius esse, quàm punctum E. Quoniam enim rectangulum A D B vna cum quadrato D C * æquale est quadrato A C. Similiter &



5 secundi rectangulum A E B vna cum quadrato E C * æquale eidem quadrato A C, ideo rectangulum A D B



C

vna cum quadrato D C, æquale erit rectangulo A E B vna cum quadrato E C; sed rectangulum A D B ponitur maius rectangulo A E B, ergo reliquum quadratum D C minus erit reliquo quadrato E C. vnde & recta D C minor, quàm recta E C. Itaque punctum D sectioni C propinquius erit, quam punctum E, quod erat ostendendum.

Casus VII.

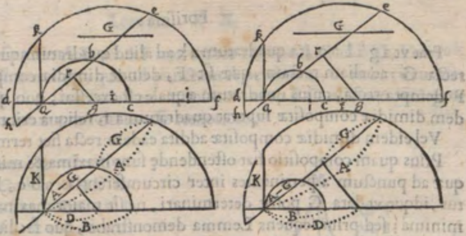
Denuo vergant ad eandem partem dati duo semicirculi maior minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi minoris; sed ab eo angulo semicirculus maior minus distet, quàm à reliquo. D

SInt igitur tales dati duo semicirculi a b c d e f. data autem recta linea G, & ducatur a k perpendicularis ad d f secans circumferentiam d e f in K. Oportet inter circumferentias a b c, k f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertingat.

Resolutio.

SIt iam posita recta linea e b æqualis datæ G, eaque ad punctum a pertingat, & ex centro circuli d e f, quod sit t ponatur t g æqualis t c,

&com-



A & cópleatur circulus fe, dh, quem ea producta secet in h, & ipsi eh ducatur perpendicularis gr, & connectatur bc. ea quoque ipsi eh perpedicularis, erit cum sit rectus

B angulus abc in semicirculo; vnde* æquales erunt hr, eb. Lem. 2

Datarum autem ac, ag, be, ak. prima sit B, secunda D, tertia G, quarta K, vt in figuris ad Resolutionem pertinentibus, & quæratur ae. esto illa A, ergo ab erit $A - G$, & cum sint similia triangula abc, arg, anguli enim abc, arg sunt æquales, quia recti, & angulus à communis vtrique erit vt ac ad ag, ità ab ad ar; quod in figuris ad Resolutionem pertinentibus respondet vt B ad D, ita $A - G$ ad $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$, itaque ar erit $\frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$. sed hæc detrahatur ipsi rh, cui æqualis est eb reliqua ah erit $G - \frac{D \text{ in } A - D \text{ in } G}{B}$; sed rectangulum eah* æquale est quadrato ak, ergo 35 tertii

$$G \text{ in } A - \frac{D \text{ in } AQ - D \text{ in } G \text{ in } A}{B} \text{ æquabitur } KQ$$

Ducantur omnia in B, vt fractio euanescat, ergo

C $$B \text{ in } G \text{ in } A + D \text{ in } G \text{ in } A - D \text{ in } AQ \text{ æquabitur } kQ \text{ in } B.$$

Deinde applicentur omnia ad D, vt potestas æquationis ex se subsistat, ergo

$$\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D} + G \text{ in } A - AQ \text{ æquabitur } \frac{kQ \text{ in } B}{D}$$

Sed vt æquatio facilius explicetur. transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in Resolutionibus præcedentium Casuum factum est, hoc est fiat vt D ad B, ita KQ ad aliud quadratum, quod sit ZQ. erit ZQ idem quod $\frac{KQ \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam rectam, quæ sit F, eritque F eadem, quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$, & planum F in A idem quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur transmutatione.

$$F \text{ in } A + G \text{ in } A - AQ \text{ æquabitur } ZQ$$

D vel $F + G \text{ in } A - AQ$ æquabitur ZQ

Et explicata Æquatione $F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2} - L.V.(F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2}Q - ZQ)$ æquabitur A

$$\text{Vel } F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2} + L.V.(F\frac{1}{2} + G\frac{1}{2}Q - ZQ) \text{ æquabitur } A.$$

In hac æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum non semper vterque indicat ac quæsitam, sed alter tantum, interdum maior, interdum minor: quo autem Casu terminis maior indicet ipsam quæsitam, quare terminus minor, quoue etiam vterque, suo loco dicetur.

Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum, quod sit a i, & ita recta G ad aliam rectam, quæ sit F, deinde dimidiæ compositæ ex G, & F dempta recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ compositæ superat quadratum a i, reliqua erit terminus minor. A

Vel eidem dimidiæ compositæ addita eadem recta fiet terminus maior.

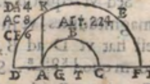
Prius quam compositio fiat ostendendę sunt maxima, & minima rectarum, quæ ad punctum a pertinentes inter circumferentias a b c, K f intercipiuntur, idque vt data G possit determinari, ne sit maior maximà, neve minor minimà; sed prius sequens Lemma demonstrabo, quo facilius, ac clarius ea, quæ sequentur demonstrentur. B

Lemma XIX.

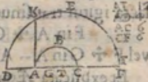
Sint duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur, & recta A K perpendicularis ad A F secet semicirculum D E F in K, & ex centro circuli D E F, quod sit T sumatur T G æqualis T C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I. Dico si ratio A D ad A F maior sit ratione A G ad A C, & rectam A I maiorem esse, quam A F, & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.

Sit primum ratio A D ad A F maior, quam A G ad A C, ergo ea ratio erit quoque maior ratione quadrati A k ad quadratum A I. est enim vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I; sed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium A D, A K, A F ad tertiam, ità est quadratum secundæ A K ad quadratum A F tertiæ, ergo ratio quadrati A k ad quadratum A F maior erit, ratione quadrati A k ad quadratum A I; quare * quadratum A I maius erit quadrato A k; itaque & recta A I maior quam recta A F, quod est primum. C

10 quinti

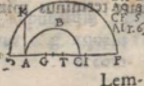


Deinde sit ratio A D ad A F eadem quæ A G ad A C, ergo eadem erit quæ quadrati A K ad quadratum A I; sed vt A D ad A F, ita est quadratum A k ad quadratum A F, vt demonstrauimus, ergo quadratum A I quadrato A F æquale erit, vnde & recta A I æqualis rectæ A F. quod est secundum. D



Denique sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, ergo minor erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I, sed vt A D ad A F ita est quadratum A K ad quadratum A F, ergo ratio quoque quadrati A k ad quadratum A F minor erit ratione quadrati A K ad quadratum A I, quare quadratum A I minus erit quadrato A F. vnde & recta A I minor, quàm recta AF. quod vltimo loco erat ostendendum.

10 quinti

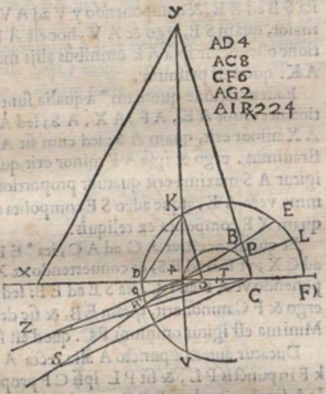


Lem-

A

Lemma XX.

Iisdem positis. sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico a k maximam esse omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, k F interijciuntur: minimam vero F C; aliarum autē propinquiorem minimæ minorem esse remotiore.



DVcatur enim à puncto A vtcumq; recta linea a B E secans circumferentias a B C, K F in punctis B E, & compleatur

B circulus F E D H, quem E a, K a continuatæ secent in punctis H V, & connectantur G k, k D, G H, eisque parallelæ agantur c y, y x, c s secantes a k, a D, a H continuatas in punctis y x s.

Quoniam igitur rectangulum F a x * æquale est quadrato a I, proportionales erunt a F, a I, a x: sed a I ex antecedente Lemmate non est minor, quàm a F,

C eo quod ratio a D ad a F ponitur non minor ratione a G ad A C, ergo neque a x minor erit, quam a I, nec ideo minor quam a F.

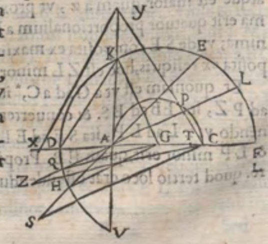
Lem. 17 17 sexti

Et quoniam rectangulum F a x* æquale est rectangulo y a k, erit * vt a k, hoc est a V ad a F, ita a x ad a y: sed a V minor est, quàm a F, ergo & a x minor erit, quàm a y: sed ipsa a x ostensa est non minor, quàm a F. ergo & a F, minor erit, quam a y. itaque quatuor proportionalium a V, a F, a x, a y maxima erit a y. minima vero a V. vnde y V composita ex maxima, & minima maior, quàm F x, composita ex reliquis.

coroll. lem. 17 16 sexti

D Et quoniam est vt a G ad a C, ita a k ad a y, & ita* F C ad C x, erit vt a K ad a y, ita F C ad C x, & conuertendo, vt y a ad a K, hoc est ad a V, ita x C ad c F, & componendo, vt y V ad V a, ita x F ad F C, sed y V prima ostensa est maior, quàm x F tertia, ergo & secunda a V, hoc est a k, maior erit quam F C quarta,

lem. 17



corol. lem. 17. Similiter quoniam * æqualia sunt rectangula y A K, E A S. erit vt * A K, A
16 sexti hoc est A V ad A E, ita A S ad A y: sed A V minor est, quàm A E, ergo & A S minor erit, quàm A y. est autem & A E minor, quàm A y, cum sit & A F minor, vt demonstrauimus: ergo quatuor proportionalium A V, A E,
25 quinti A S, A Y maxima erit A y. minima vero A V; vnde y V * composita ex ma-
lem. 17 xima, & minima maior erit, quam S E composita ex reliquis.

Et quoniam est, vt A G ad A C, ita * E B ad B S, & * ita A K ad A y erit vt A K ad A y, ita E B ad B S, & conuertendo vt y A ad A k, hoc est ad A V, ita S B ad B E. & componendo y V ad A V, ita S E ad E B; sed y V ostensa est maior, quàm S E, ergo & A V, hoc est A K, maior erit quam E B, eadem ratione ostendetur ipsa A k omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium A K. quod est primum. B

corol. Lem. 17 Eadem ratione quoniam * æqualia sunt rectangula F A X, E A S, proportionales erunt A E, A F, A X, A S; sed A E minor est, quàm A F, ergo & A X minor erit, quam A S: sed cum sit A X non minor, quàm A F, vt demõstrauimus. ergo & ipsa A F minor erit, quàm A S, & A E multo minor. Sic igitur A S maxima erit quatuor proportionalium A E, A F, A X, A S: minima vero A E, atque adeo S E composita ex maxima, & minima maior erit,
lem. 17 quam X F composita ex reliquis.

lem. 17 Et quoniam est vt A G ad A C, ita * E B ad B S, & ita F C ad C X. erit F C ad C X, vt E B ad B S, & conuertendo vt X C ad C F, ita S B ad B E. & componendo vt X F ad F C, ita S E ad E B: sed X F ostensa est minor, quam S E, ergo & F C minor erit, quàm E B. & sic demõstrabitur omnibus alijs minor. C
Minima est igitur omnium F C. quod est secundum.

Ducatur autem à puncto A alia recta A P L secans circumferentias A B C, k F in punctis P L, & sit P L ipsi C F propinquior quam B E, & producatur L A secans circulum F E D completum in Q, & connectatur G Q, & ei parallela ducatur C Z occurrens L Q continuatæ in Z; rectangula igitur L A z
corol. lem. 17. E A S * æqualia erunt. idcirco * proportionales A L, a E, a S, a z: sed a L ma-
16 sexti ior est, quàm a E, ergo & a S maior erit quam a z. Et quoniam rectangulum
lem. 17 E A S * æquale est quadrato a I, proportionales erunt a E, a I, a s, sed a E minor est, quàm a I, cum ipsa a I non sit minor quam a F, ergo & a I minor erit quam a S. atque adeò ipsa a S maior erit, quàm a L, & multo maior quam a E. atque est maior, quam a z, vt proximè demonstrauimus, ergo ipsa a S maxi- D
Theor. 1 huius ma erit quatuor proportionalium a L, a E, a S, a Z, & * consequenter a E minima; vnde S E composita ex maxima, & minima maior erit, quam Z L composita ex reliquis, hoc est Z L minor quam S E.

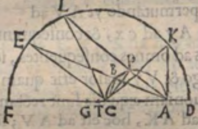
lem. 17 Et quoniam est vt a G ad a C, * ita E B ad B S. & ita L P ad P Z, erit vt L P ad P Z, ita E B ad B S. & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad B E. & componendo vt z L ad L P, ita S E ad E B; sed z L ostensa est minor, quam S E, ergo & L P minor erit, quam E B. Propinquior igitur minime minor est remotiore. quod tertio loco erat ostendendum.

A

Lemma XXI.

Rursus iisdem positis. ratio autem AD ad AF sit minor ratione AG ad AC. Dico si semicirculus ABC non extenditur vltra centrum circuli DEF, rectam FC maximam esse omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias ABC, KF interijciuntur, minimam AK; si verò extenditur, ducatur à puncto A ad circumferentiam KF recta AM æqualis AI secans semicirculum ABC in O. est autem a i minor* quam a f, maior autem quam a K, cum sit vt a g ad a c, minor nempe ad maiorem, ita quadratam a K ad quadratum a i ex positione. Dico maiorem rectarum a K, c f maximam esse, MO minimam, aliarum autem propinquiorem minimę remotiore ex eadem parte minorem esse. lem. 19

B



DVcatur enim vtcumq; recta linea a B F secans circumferentias a B C, k F in pũctis B E; & primum semicirculus a B C non extendatur vltra cẽtrum circuli D E F, quod sit T, & connectantur C k, C E, C B; erit angulus a B C in semicirculo rectus. vnde & angulus E B C rectus erit, quare

C

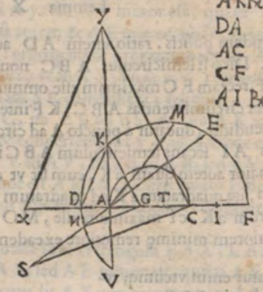
C E maior erit quam B E; sed C F non est minor quam C E, ergo & C F maior erit quam B E. & sic demõstrabitur maior omnibus alijs. Maxima est igitur C F.

Rursus quoniam C k non est maior; quàm C E, ideo nec quadratum C k maius erit quadrato C E; sed quadratum C k* æquale est quadratis C a, a k, & quadratum C E* æquale quadratis C B, B E; ergo nec quadrata C a, a k maiora erunt quadratis C B, B E. sed quadratum C a maius est quadrato C B, ergo reliquum quadratum a k reliquo quadrato B E minus erit. vnde & recta a k minor quam recta E B, & sic demonstrabitur minor omnibus alijs. Minima est igitur a F. Sed ducatur alia recta a P L secans circumferentias a B C K F in punctis P L, & sit P L ipsi a k propinquior, quam B E. & connectantur C P, C L erit angulus a P C in semicirculus rectus, quare & angulus C P L rectus erit, & quoniam C L non est maior quàm C E, ideo nec quadratũ C L maius erit quadrato C E, hoc est nec quadrata C P, P L maiora erunt quadratis C B, B E, sed quadratum C P maius est quadrato C B, ergo reliquum quadratum P L reliquo quadrato B E minus erit, quare & recta P L maior quam recta B E. Propinquior scilicet minime minor remotiore. 47 Primi

D

T 2 Sed

Sed extendatur semicirculus A B C vltra punctum T. & compleatur circulus F E D quem E A, K A productæ secent in punctis H V, & connectantur G H, G K, K D, quibus parallelæ agantur C S, c y, y x secantes E A, A K, F A, in punctis S Y X, & sit primum A k maior, quam C F. Quoniam igitur est, vt
lem. 17 A G ad A C,* ita F C ad C X, & ita A k ad A Y: erit A K, hoc est A V ad A y, vt F C ad C X. & permutando vt A V ad
12 quinti F C, ita A y ad c x, & consequenter* ita V y ad F x, hoc est ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, sed A V, hoc est A K, ponitur maior quam F C, ergo & V y maior erit quam F x.



AKR 20		R 5
DA	2	1
AC	6	3
CF	4	2
AI	R 60	R 15

A

B

corol. lem 17. Et quoniam æqualia sunt rectangula y A k, F A X erit,* vt A y ad A F,
16 sexti ita A x ad A K, hoc est ad A V; sed y v composita ex extremis ostensa est
Theor. 2 huius maior, quàm F x. composita ex medijs. ergo altera* extremarum A y, A V, nempe ipsa A y maxima erit; minima vero A k, vnde A y maior erit quam
corol. Lem. 17 A F, & multo maior quam A E. Et quoniam æqualia sunt rectangula y A k C
16 sexti E A S. proportionales erunt A K, A E, A S, A y, sed A K minor est quam A E, ergo & A S minor erit quam A y.

Cum igitur A y maior sit quam A S, & maior quam A E, vt demonstrauimus, ac etiam maior, quàm A K; erit ipsa A y maxima quatuor pro-
Theor: 1 huius portionalium A k, A E, A S, A Y; minima vero A k, vnde composita ex y a, a K, maxima videlicet, & minima, idest recta y v, maior erit, quam E S composita ex reliquis.

lem. 17 Et quoniam est vt a g ad a c,* ita E B ad B S, &* ita a K ad a y erit a k, hoc est a v ad a y, vt E B ad B S, & conuertendo, & componendo vt y v ad v A, ita S E ad E B; sed y V ostensa est maior, quam S E, ergo & v a, hoc est a K, maior erit quam E B, & sic demonstrabitur maior omnibus alijs. Maxima est igitur omnium a k. D

lem. 17 Sed sit F C maior quam A k. eadem ratione, quoniam est vt a g ad a c, ita FC ad C X, &* ita a k ad a y, erit F C ad C X, vt a k, hoc est a v ad a y, & permutando vt F C ad a v, ita C X ad a y, & consequenter,* ita
12 quinti F X ad V Y omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed

DA1
AC4
Ct3
AKR1
AI R14

A FC ponitur maior, quàm AK, hoc est quam AV, ergo & Fx maior erit, quàm Vy. sed Fx composita est ex extremis quatuor proportionalium af, ay, av, ax, ipsa vero vy ex medijs; constat autem eas proportionales esse, ex eo quod rectangulum FAX æquale est rectangulo yak, hoc est corol. lem. 17
yav; ergo* altera extremarum af, ax maxima erit, altera minima, sed Theor. 2. huius
af non est minima, cum sit maior quam av, ergo maxima erit, &* consequenter ax minima, itaque ax minor erit quam av, & multo minor quam ac. Theor. 1 huius

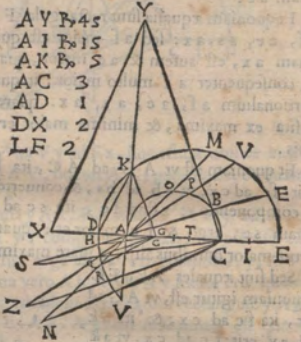
Et quoniam æqualia sunt rectangula FAX, EAS proportionales erunt af, ae, as, ax: sed af maior est quam ae, ergo & as maior erit quam ax, est autem & ae maior, quam ipsa ax, vt demonstrauimus, corol. lem. 17
B & consequenter af multo maior: itaque ax minima erit quatuor proportionalium af, ae, as, ax. quare af* maxima, vnde yf composita ex maxima, & minima maior erit, quam se composita ex reliquis. Theor. 1 huius 25 quinti

Et quoniam est vt AG ad AC, ita FC ad CX, & ita EB ad BS; erit fc ad cx, vt eb ad bs, & conuertendo vt xc ad cf, ita sb ad be, & componendo vt xf ad fc, ita se ad eb; sed xf ostensa est maior, quam se, ergo & fc maior erit, quam eb; eademque ratione ostendetur maior omnibus alijs. Quare maxima est fc.

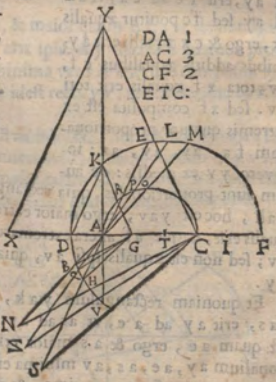
Sed sint æquales Ak, FC. Quoniam igitur est, vt AG ad
C ac, ita fc ad cx, &* ita ak ad ay, erit fc ad cx, vt ak ad ay, sed fc ponitur æqualis ak, ergo & cx æqualis erit ay, quibus additis æqualibus cf, av, tota xf æqualis erit toti yv. sed xf composita est ex extremis quatuor proportionalium fa, ay, av, ax: ipsa vero yv ex medijs: eæ autem sunt proportionales, quia rectangulum fax* æquale est rectangulo lem. 17 corol. lem. 11
D yak, hoc est yav, ergo maior extrema maiori mediæ, minor minori æqualis erit, itaque af altera extremarum æqualis erit alteri mediarum ya, Theor. 3 huius
av; sed non est æqualis ipsi av, quia* maior est, ergo æqualis erit ipsi ay. 7 tertii

Et quoniam rectangulum yak, hoc est yav æquale est rectangulo lem. 17
eas, erit ay ad ae, vt as ad av; sed ay cum sit æqualis af, maior est quam ae, ergo & as maior erit quam av, itaque quatuor proportionalium ay, ae, as, av minima erit av, &* consequenter maxima ay. Theor. 1 huius
vnde xv composita ex maxima, & minima* maior erit, quàm se composita ex reliquis. 25 quinti lem. 17

Lem. 17. Et quoniam est vt A G ad A C * ita E B ad B S, & ita * A K hoc est A V ad A y, erit A V ad A y, vt E B ad B S. & conuertendo vt y A ad A V, ita S B ad B E, & componendo vt y V ad V A, ita erit S E ad E B: sed y V ostensa est maior quam S E, ergo & V A hoc est A k maior erit quàm E B. atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare & F G cum sit æqualis A k, erit quoque omnibus maior. itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum A k, F C maxima est omnium, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur. quod est primum.



Deinde producatur M A donec secet circulum completum F E D in R, & connectatur G R, eique parallela agatur C N secans M R productam in N. Rectangulum igitur Lem. 17. M A N * æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M: sunt enim æquales A I, A M, ex constructione. quare A M æqualis erit ipsi A N. & cum Lem. 17. sit rectangulũ F A X * æquale quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt A F, A M, A x: sunt autem & inæquales, quia A F maior est, quam A M, ergo x F composita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc est quam M N.



Lem. 17. Et quoniam est vt A G ad A C, * ita F C ad c x, & * ita M O ad O N: erit F C ad c x, vt M O ad O N. & conuertendo vt x c ad C F, ita N O ad O M. & componendo vt X F ad F C, ita erit N M ad M O. sed X F ostensa est maior quam N M, ergo & F C maior erit quam M O.

Eadem ratione quoniam rectangu- Lem. 17. lum y A k * æquale est quadrato A I, hoc est quadrato A M, proportionales erunt y A, A M, & A K, hoc est & A V: sunt autem & inæquales; ergo y V composita ex extremis maior erit, quam M N, media videlicet dupla.

A Et quoniam est vt AG ad AC, * ita AK ad Ay, & * ita MO ad ON: erit lem. 17.
vt Ak, vel AV ad Ay, ita MO ad ON; & conuertendo vt yA ad AV, ita NO ad OM. & componendo vt yV ad VA, ita erit NM ad MO: sed yV ostensa est maior, quam NM; ergo & VA hoc est AK maior erit quam MO.

Similiter quoniam rectangulum EAS æquale est quadrato AI, hoc est quadrato AM, proportionales erunt AE, AM, AS, sunt autem, & inæquales, ergo SE composita ex extremis maior erit, quam dupla media hoc est quam NM. Et quoniam est vt AG ad AC, * ita EB ad BS, & * ita lem. 17.
MO ad ON: erit EB ad BS, vt MO ad ON. & conuertendo vt SB ad BE ita NO ad OM. & componendo vt SE ad EB, ita erit NM ad MO, sed
B SE maior est, quam NM, vt demonstrauimus. ergo & EB maior erit, quàm MO. atque eadem ratione ostendemus omnes alias maiores esse ipsa MO. Minima est igitur MO omnium quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias ABC, KF interijciuntur. quod est secundum.

Postremo ducatur à puncto A alia recta APL secans circumferentias ABC, kF in punctis PL, sintque PL, BE ex eadem parte minime OM, atque sit PL ipsi OM propinquior, quam BE. deinde producatur LA donec secet circulum FED completum in Q, & connectatur GQ, eique parallela ducatur cz occurrens LQ continuatæ in z: erunt corol. lem. 17.
igitur * æqualia rectangulo LAZ, FAS, ac proinde proportionales AL, AE, AS, AZ. in prima quidem figura vbi AL, AE existunt inter re-
C ctas AM, AK. sic argumentor, sed AL maior est quam AE, ergo & AS maior erit quam AZ. Et quoniam rectangulum EAS * æquale est Lem. 17.
quadrato AI, hoc est quadrato AM, proportionales erunt AE, AM, AS; sed AE minor est quam AM, ergo & AM minor erit quam AS; atque adeò AS maior erit quam AL, & multò maior quam AE; atque est maior quam AZ, vt demonstrauimus, itaque AS maxima erit quatuor proportionalium al, ae, as, az, & per * consequens. AE mi- Theor. 1. huius
nima vnde SE composita ex maxima, & minima * maior erit quam ZL 25 quinti
composita ex reliquis, hoc est ZL minor quam SE.

In secunda verò figura vbi AL, AE existunt inter rectas am, af, argumentor in hunc modum. sed al minor est quam ae, ergo & as mi-
D nor erit quam az, & quoniam rectangulum eas * æquale est quadrato lem. 17.
ai, vel am, proportionales erunt ae, am, as; sed ae maior est quam am, ergo & am maior erit quam as, itaque as minor erit quam al, & multo minor quam ae, atque est minor quam az, vt demonstrauimus, itaque as minima erit quatuor proportionalium al, ae, as, az, & consequenter * ae maxima. quare se composita ex maxima, & minima Theor. 1. huius 25 quinti
maior erit quam ZL composita ex reliquis, hoc est zl minor quam se. quod quidem demonstrauimus & supra.

At quoniam in vtroque casu est, vt ag ad ac, * ita eb ad bs, & ita lem. 17.
LP ad PZ, ita EB ad BS, & conuertendo vt ZP ad PL, ita SB

ad

ad B E. & componendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B; sed z L ostensa est minor quam S E, ergo & L P minor erit quam E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore ex eadem parte. quod tertio loco erat ostendendum. A

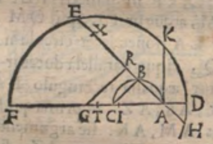
Corollarium.

CVm igitur propinquiores minimæ remotioribus ex eadem parte minores sint, manifestum est A K maximam esse omnium, quæ inter circumferentias a O, K M interijciuntur. Earum autem, quæ interijciuntur inter circumferentias O C, M F, maximam esse C F.

Compositio septimi Casus.

SInt dati duo semicirculi a B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur. data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias a B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum a pertineat. Oportebit autem ipsam V z non esse maiorem, maxima rectarum, quæ B

2 AD 4
4 AC 8
3 CF 6
B 56 A I B 224
1 AG 2

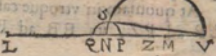


C

AD 1
AC 3
CF 2
A I B 15

DA 1
AC 3
CF 2
AG 1
A I B 15

D



ad pun-

A ad punctum a pertinentes inter circumferentias a B C, D E F interijciuntur, neque minorem minima; quæ autem sit maxima, quoque minima, iam est demonstratum. Ducatur ad A F perpendicularis A K secans circumferentiam D E F in k, & si quidem data V Z sit æqualis maximæ, factum iam erit quod proponebatur. etenim maxima est ea, quæ maior est rectarum A K, F C; si vero sit æqualis minimæ, minima autẽ sit ea, quæ minor est ipsarũ A k, F C, itidem factum erit, quod proponebatur, sed si neutra dictarum A K, F C sit minima, inuenta minima Problemati satisfiet. inuentio autem minimæ constat ex Lemmate 24. Si autem V Z minor sit maxima, maior minima sumatur ex centro circuli D E F, quod sit T recta T G æqualis T C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A k ad aliud quadratum quod sit A I. Probl. 8 Huius

B Similiter fiat vt A G ad A C, ita V z ad aliam, quæ sit z L. & V L composita ex V Z, Z L secetur bifariam in N. cum igitur à quadrato V N auferendum sit quadratum A I, vt Porisma iubet, describatur in V N semicirculus, in quo accommodetur V S æqualis A I infra ostendetur minor quam V N, deinde connectatur S N. quadratum igitur V N superat quadratum V S quadrato S N, angulus enim V S N in semicirculo rectus est itaque rectæ V N auferenda est, vel addenda recta æqualis N S, sic Porisma fieri iubet, auferatur ergo, vel addatur prout sequentia præcepta docebant. eaque diminuta, vel aucta sit V P; cui æqualis à puncto A ad circumferentiam k F ducatur recta A E secans semicirculum A B C in B, ipsam autem V P non esse maiorem quam A F, nec minorem quam A K, quatuor sequentia Lemmata ostendent. iam facta est constructio quemadmodum Porisma docet. Nunc ostendemus E B æqualem esse V z datæ.

C

Producatur E A donec secet circulum F E D completum in H. & centro N interuallo N S, vel N P circulus describatur secans rectam V L in Q. is circulus tangit rectam V S in S. vnde quadratum V S æquale erit rectangulo P V Q, vel V P L, seu quod idem est rectangulo V P, L z, minus rectangulo V P z: punctum enim z existit in recta V P, vt quatuor sequentia Lemmata ostendent. Si igitur fiat vt A C ad A G, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes, itidem manebit inter eas partes æqualitas, igitur quoniam est vt A G ad A C ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione, erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum A I, hoc est quadratum V S ad quadratum A k, quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis, altera vero pars sic inuenietur. 36 tertii

D

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L Z ad z V, ita P z ad aliam, quæ sit z M, erit Z M minor, quam z V, quoniam & P z minor est, quam L z, sed vt P z ad z M, ita est rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M, sunt enim eiusdem altitudinis V P: ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M.

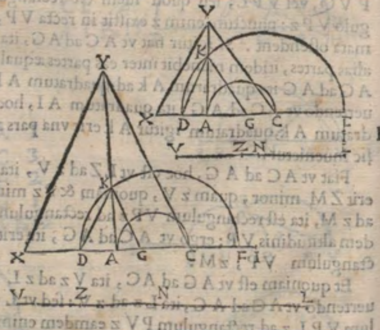
Et quoniam est vt A G ad A C, ita V z ad z L ex constructione, erit conuertendo vt A C ad A G, ita L z ad z V: sed vt L z ad z V, ita est rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z eamdem enim habent altitudinem V P ergo

go vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P L z ad rectangulum P V z : sed A
vt A C ad A G ; ita ostensum est rectangulum V P z ad rectangulum V P , z M. ergo vt rectangulum V P , L z ad rectangulum P V z , ita rectangulum V P z ad rectangulum , V P , z M. nempe vt totum ad totum,
19 quinti ita ablatum ad ablatum; quare vt * totum ad totum, ita erit & reliquum ad reliquum, hoc est vt rectangulum V P , L z ad rectangulum P V z, id est vt A C ad A G, ita rectangulum V P, L z minus rectangulo V P z ad rectangulum P V z minus rectangulo V P, z M. itaque rectangulum P V z minus rectangulo V P, z M erit altera pars æqualitatis. Quadratum igitur A K, hoc est rectangulum E a H, æquale erit rectangulo P V z minus rectangulo V P, z M. hoc est æquale erit rectangulo P V M, sed P V æqualis est A E ex constructione; ergo & V M æqualis erit A H. B

Denique connectatur B C, cui parallela agatur G R secans A E in R : angulus igitur a R G, æqualis est angulo a B C, & ideo rectus, quia & ipse a B C
Lem. 2 in semicirculo rectus est . vnde* æquales sunt E B, H R : sumatur autem B x æqualis a R; reliqua x E æqualis erit reliquæ a H, hoc est ipsi V M; sed a E æqualis est V P, ex constructione; ergo & reliqua x a reliquæ M P æqualis erit.

Et quoniam similia sunt triangula a B C, a R G, anguli enim a B C, a R G sunt æquales, quia recti & angulus a communis est vtrique: erit vt a C ad a G, ita a B ad a R; sed vt a C ad a G, ita est quoque P z ad z M, ex constructione: ergo vt a B ad a R, hoc est ad B x, ita erit P z ad z M. & componendo vt a x ad x B, ita P M ad M z; sed x a prima ostensa C
est æqualis tertiæ P M, ergo & secunda x B æqualis erit M z quartæ, sed E x ostensa est æqualis M V, ergo tota E B toti V z æqualis erit. Posita est igitur inter circumferentias k F, a B C recta E B æqualis datæ V z, eaque ad punctum a pertinet. quod erat faciendum.

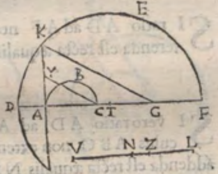
At vero rectam a I minorem esse, quam V N sic demonstrabimus : Primũ habeat a D ad a F non minorem rationem, quam a G ad a C ergo a I non
lem. 19. *erit minor, quàm a F; D
lem. 20 atque F C* minima erit omnium interceptarum inter circumferentias a B C, k F. Connectatur autem G k, k D, quibus parallelæ agantur c y, y x secã tes a K, a D continuatas in punctis y x. rectangu-
lem. 17 lum igitur F a x* æquale erit



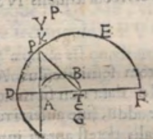
A erit quadrato A I: & ideo proportionales erunt F a, a I, a x: quare F x composita ex extremis non erit minor quam a I dupla.

Et quoniam est vt a G ad a C, * ita F C ad c x, & ita V z ad z L, ex lem 17
constructione, erit vt F C ad C x, ita V Z ad Z L, & permutando vt F C ad V z, ita erit C x ad z L. & consequenter * ita F x ad V L, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes: sed F C cum sit omnium interceptarum minima, minor est, quam V z; ponitur enim V z maior minima, ergo & F x minor erit, quam V L; sed F x ostensa est non minor, quam dupla A I, ergo & A I dupla minor erit, quam ipsa V L, & consequenter A I simpla minor quàm V N, dimidia videlicet ipsius V L.

Sed habeat A D ad A F minorem rationem, quàm A G ad A C. Vel
B igitur semicirculus A B C extenditur vltra centrum circuli D E F, quod est T, vel non extenditur. Primum non extendatur, & connectatur G K, eique parallela agatur C y secans A K in y, & producatur k A donec secet circulum F E D completum in P. Quoniam igitur rectangulum y A K * æquale est quadrato A I, proportionales erunt y A, A I, A K. lem. 17
quare composita ex extremis y A, A K, hoc est recta y P, non erit minor quam A I dupla.



Et quoniam est vt A G ad A C * ita A k ad A y, & ita V z ad z L ex constructione, erit vt a k hoc est. A P ad A y, ita V z ad z L, & lem. 17
C permutando vt A P ad V z, ita A y ad z L, & consequenter * ita P y ad V L, hoc est ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; sed a P cui æqualis est a k, quæ est * minima interceptarum, minor est quam V z, ponitur enim V z maior minima: ergo & P y minor erit quã V L, sed P y ostensa est non minor, quam dupla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam V L, & consequenter a I simpla minor, quam V N, dimidia videlicet ipsius V L. 12 quinti. lem. 21.



Sed extendatur semicirculus a B C vltra cen-
D trum T. ergo a G minor erit, quam a C, & per consequens a k minor quam a I, est enim vt a G ad a C, ita quadratum a k ad quadratum a I ex constructione. Cum itaque a I sit maior, quam a k, minor autem quam a F, poterit à puncto a ad circumferentiam k F duci recta a M æqualis a I. Ducatur igitur a M secans semicirculum a B C in O. ergo * M O. erit minima omnium, quæ ad punctum a pertinent, & inter circumferentias a B C, K F interijciuntur. Producatur autem M a donec lem. 22

donec secet circulum FED completum in H, & iungatur GH, cui parallela agatur CR secans MH continuatam in R. Rectangulum igitur MaR * æquale erit quadrato aI, hoc est quadrato aM, quare æquales erunt aR, AM. A

lem. 17 Et quoniam est vt aG ad aC, * ita MO ad OR, & ita Vz ad zL ex constructione, erit vt MO ad OR, ita Vz ad zL, & permutando vt MO ad Vz, ita OR ad zL, & consequenter ita * MR ad VL, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes: sed MO, cum sit omnium interceptarum minima, minor est quam Vz; ponitur enim Vz maior minima, ergo & MR minor erit, quam VL, & per consequens AM, vel AI minor, quam VN dimidia, videlicet minor quam dimidia. quod erat ostendendum.

12 quinti

Quo autem Casu rectæ VN auferenda sit recta æqualis NS, quoue addenda, ratio his constat præceptis. B

Præceptum I.

SI ratio AD ad AF non sit minor ratione AG ad AC, rectæ VN auferenda est recta æqualis NS.

Præceptum II.

SI vero ratio AD ad AF minor sit ratione AG ad AC, & semicirculus ABC non extendatur vltra centrum circuli DEF, rectæ VN addenda est recta æqualis NS. C

Præceptum III.

SI autem semicirculus ABC extendatur vltra centrum circuli DEF, & Vz data non sit maior minore rectarum aK, FC, rectæ VN poterit siue addi, siue auferri recta æqualis NS. in hoc enim Casu recta datæ Vz æqualis potest aptari inter circumferentias aBC, kF ex vtraque parte minimæ, & ideo duobus modis Problema absolui. Nam si auferatur aptabitur ea recta è regione aK; si vero addatur, aptabitur è regione FC.

Præceptum IV.

D

SI vero Vz data maior sit minore rectarum ak, FC; recta ipsi Vz æqualis poterit aptari inter circumferentias aBC, kF ex vna tantum parte minimæ nempe è regione maioris rectarum ak, FC. Itaque existente aK maiore quam FC rectæ VN auferenda est recta æqualis NS, existente minore, addenda. Nunc ostendam rectam VP sumptam quemadmodum Præcepta docent non esse maiorem, quam aF, nec minorem quam ak, atque punctum z existere in recta VP. quo circa quatuor Lemmata proponuntur, quorum primum pertinebit ad primum præceptum, secundum vero ad secundum, & sic deinceps.

Lem-

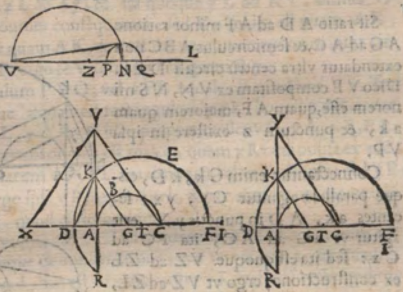
A Lemma XXII.

Sit ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C. Dico V P differentiam rectarum V N, N S minorem esse, quam A F, maiorem quam A k, & punctum z existere in ipsa V P.

Connectantur enim G k, k D, quibus parallelæ agantur c y, y x secantes A k a D continuatas in punctis y x.

Quoniam igitur est vt a G ad a C,* ita F C ad C X, & ita V z ad z L ex constructione, erit y z ad z L, vt F C ad C x. & permutando vt V z ad F C, ita z L ad C x, & ita* quoque V L ad F x: est enim vt vna antecedentium ad vnã consequentium, ita oẽs antecedentes ad oẽs cõsequentes; sed V z ponitur maior, quã FC; est enim FC minima oĩum quæ inter circũferentias a B C, K F intercipiuntur. ergo & v L maior erit quam F x. lem. 17 xii quinti

B



Et quoniam æquales C sunt V N, N L ex constructione, & æquales quoque N Q, N P, vt semidiametri, ergo fiunt quoq; æquales V Q, L P, quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L, sed rectangulum P V Q* æquale est quadrato V S, hoc est quadrato a I, cui quoque æquale est rectangulum F a x; ergo rectangulum V P L æquale erit rectangulo F a x: quare proportionales erunt V P, F a, a x P L. sed V L composita ex extremis ostensa est maior quam F x composita ex medijs, ergo altera* extremarum v P, P L, maxima erit, altera minima; sed V P minor est quam P L, ergo ipsa V Q minima erit, atque adeo minor quam A F. quod est primum. 16 tertij the. 1 huius

Deinde compleatur circulus F E, B R, quem K A producta secet in R. Quoniam igitur est vt A G ad A C,* ita A K ad A y, & ita quoque V z ad z L lem. 17

D ex constructione: erit vt V z ad z L, ita A K hoc est A R ad A y. & permutando vt v z ad A R, ita z L ad A y. & consequenter* ita V L ad R y, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed V z minor est quam A R; ponitur enim z v minor, quam A k, quæ est* maxima omnium interceptarũ inter circumferentias A B C, K F: ergo & V L minor erit, quàm R y. 12 quinti lem. 10

Et quoniam rectangulum P V Q, seu V P L* æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum y a K, hoc est y a R; æqualia erunt rectangula V P L, y A R, & ideo proportionales V P, Y A, a R, P L: sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quam lem. 18

V R y

the. 2. huius R y composita ex medijs, ergo* altera mediarum y A, A R maxima erit, A
altera minima; sed A y maior est quam A R, ergo ipsa A R minima erit, & per consequens V P maior quam A R, hoc est, quam A k, quod est secundum.

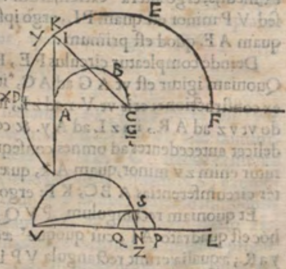
Denique cum V P non minor quam A k, ipsaque A K maior quam V Z, erit V P multo maior, quam V Z; atque adeo punctum Z erit in recta V P. quod vltimo loco erat ostendendum.

Lemma XXIII.

Sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & semicirculus A B C non extendatur vltra centrū circuli D E F. Dico V P compositam ex V N, N S minorem esse, quam A F, maiorem quam a k, & punctum z existere in ipsa V P.

Connectantur enim G k, k D, eisque parallelæ agantur C y, y x, secantes a k, A D in punctis y X. erit lem. 17. igitur vt a G ad A C, ita F C ad C x: sed ita est quoque V Z ad Z L ex constructione; ergo vt V Z ad Z L, ita erit F C ad C X. & permutando vt V Z ad F C, ita Z L ad C x. & ita* quoque V L ad F X, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed V z ponitur minor quam F C; est enim F C* maxima omnium, quæ inter circumferentias A B C, X F interijciuntur; ergo & V L minor erit, quam F X. B

Et quoniam æquales sunt V N, N L, & æquales quoque N P, N Q, vt semidiametri; ergo fiunt quoque æquales V P, L Q. Quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L; sed rectangulum P V Q 36 tertii * æquale est quadrato V S, hoc est lem. 17 quadrato A I, cui quoque* æquale est rectangulum F A X, ergo rectangulū V P L æquale erit rectangulo F A X; C



D

quare

A quare proportionales erunt VP, F A, A X, PL; sed v L composita ex extremis ostensa est minor, quam F X composita ex medijs, ergo * altera me- The. 2 huius diarum FA, a X maxima erit, altera minima. itaque A F maxima erit quippe quæ maior est, quam A X, & per consequens V P minor erit quam a F. quod est primum.

Deinde compleatur circulus F E D, quem K a producta secet in R. Quoniam igitur est vt A G ad A C, ita * a k ad a y. & ita quoque V Z ad z L lem. 17 ex constructione; erit vt V z ad z L, ita A K, hoc est A R ad a y. & permutando vt V z ad A R, ita z L ad a y, & * ita quoque V L ad R Y, omnes vi- 12 quinti delicet antecedentes ad omnes consequentes. sed V z maior est quam A R, ponitur enim V z maior quam A K, quæ est minima interceptarum inter cir- lem. 21 B cumferentias A B C, K F. ergo & V L maior erit quam R y.

Et quoniam rectangulum P V Q, vel v PL æquale est quadrato V S, seu 36 tertij quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum y a k, hoc est y a R, erunt lem. 17 æqualia rectangula V P L, y A R, & ideo proportionales v P, y A, a R, P L. sed v L composita ex extremis ostensa est maior, quam y R composita ex medijs, ergo altera * extremarum v P, P L maxima erit, altera minima; sed v P The. 2 huius maior est, quàm P L, ergo ipsa v P maxima erit, & per consequens maior quã A R, hoc est quam A K. quod est secundum.

Rursus quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum a I, & ita v Z ad Z L. vtrumque ex constructione, erit vt v Z ad z L, ita quadratum A K ad quadratum A I, hoc est ad quadratum v S, vel ad * rectangulum 36 tertij C P v Q, seu ad rectangulum v P L: sed vt v z ad z L, ita est quoque quadratum v z ad rectangulum v z L, eandem enim habent altitudinem v z. ergo vt quadratum v z ad rectangulum v z L, ita erit quadratum A k ad rectangulum v P L. sed quadratum v z maius est quadrato A k, ponitur enim recta V z maior, quam A K, quæ est minima interceptarum, lem. 21 ergo & rectangulum v z L maius erit rectangulo v P L. quare punctum z propinquius erit ipsi N, quam punctum P, atque vtrumque existit in medietate N L. ergo punctum z erit in recta v P. quod vltimo loco erat ostendendum.

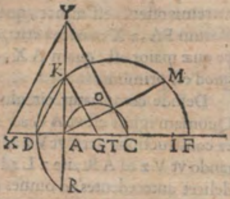
Lemma XXIV.

D Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. sed semicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F, & data v Z non sit maior minore rectarum A K, F C. Dico neque differentiam rectarum v N, N S, neque compositam ex ipsis minorem esse quam A K, aut maiorem quam A F: & punctum z existere in ipsa differentia.

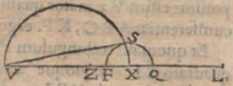
Sit V P differentia rectarum V N, N S, V Q vero aggregatum earundem, & compleatur circulus F E, D R, quem k a producta secet in R, & iungantur G k, K D, eisque parallelæ agantur C Y, Y X, secantes A K, A B productas in punctis Y X. erit igitur vt A G ad A C,

 ita

lem. 17. * ita AK ad Ay: sed ita est quoque VZ ad ZL ex constructione. ergo vt VZ ad ZL, ita erit AK, hoc est AR ad Ay. & permutando vt VZ ad AR, ita ZL ad
12. quinti Ay. & consequenter * ita VL ad Ry, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed VZ non est maior quam AR, ponitur enim VZ non maior minore rectarum ak, FC. ergo neque VL maior erit quam Ry.



Et quoniam rectangulum PVQ, hoc est VPL (sunt enim æquales VQ, PL) æ-
36 terti quale * est quadrato VS, hoc est quadrato
lem. 17 AI, cui quoque * æquale est rectangulum yAK, rectangulum VPL æquale erit rectangulo yak, vel yaR, & ideo proportionales erunt VP, ya, aR, PL. sed VL composita ex extremis ostensa est non maior, quam yR
the. 2. huius composita ex medijs. ergo si est minor, erit * altera mediarum ya, ak maxima, altera minima. sed ay maior est quam aR, ergo ipsa aR, hoc est ak, minima erit: & per consequens VP maior quam aK. Si vero VL composita ex extremis æqualis est yR compositæ ex medijs,
the. 3 huius * minor extremarum minori mediarum æqualis erit. hoc est VP æqualis aR, vel ak.



Et quoniam VP minor est quam VS, hoc est quam aI, ipsaque aI minor quam aF, erit VP ipsa aF multo minor. Recta igitur VP differentia rectarum VN, NS non est minor quam ak, nec maior quam aF. quod est primum.

lem 17 Simili ratione quoniam est vt aG ad aC, * ita FC ad CX, & ita VZ ad zL ex constructione. ergo vt Vz ad zL, ita erit FC ad
12 quinti CX. & permutando vt Vz ad FC, ita erit zL ad CX, & ita * quoque VL ad FX omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed Vz non est maior quam FC, ponitur enim Vz non maior minore rectarum ak, FC. ergo neque VL maior erit quam FX. Et quoniam re-
lem. 17 ctangulum FaX * æquale est quadrato aI, & recta aI minor quam aF: erit aX multo minor.

Rursus quoniam rectangulum QVP, hoc est VQL, sunt enim æquales
36. terti lem. 17. VP, QL, * æquale est quadrato VS, hoc est quadrato aI, cui quoque * æquale est rectangulum FaX. ipsa rectangula VQL, FaX æqualia erunt, & ideo
16. sexti proportionales * VQ, Fa, aX, QL: sed VL composita ex extremis ostensa est
The. 2. huius non maior, quam Fx cõposita ex medijs. ergo si est minor erit altera * mediarũ Fa, ax. Maxima, altera minima. sed ax ostensa est minor quam aF, ergo Fa maxima erit. quare VQ minor quam aF. Si vero VL composita ex extre-

A extremis æqualis est F X compositæ ex medijs, * maior extremarum maiori Theo.3 huius mediarum æqualis erit, hoc est V Q æqualis A F.

Et quoniam est vt A G ad A C, minor nempe ad maiorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione, quadratum A k minus erit quadrato A I. vnde & recta A k minor quam recta A I, hoc est quam recta V S; sed V Q maior est, quam V S, ergo multo maior erit quam A K. Recta igitur V Q composita ex V N, N S non est minor, quàm A k, nec maior quam A F, quod est secundum.

Postremo quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. & ita V z ad z L vtrumque ex constructione, erit vt V z ad z L, ita quadratum A K ad quadratum A I, hoc est ad quadratum V S, seu ad re-
B ctangulum P V Q, vel, v P L. sed vt v z ad z L ita * est quoque quadra- lem.17 tum v z ad rectangulum v z L; sunt enim eiusdem altitudinis v z. ergo vt quadratum v z ad rectangulum v z L, ita erit quadratum A k ad rectangulum v P L. sed quadratum v z non est maius quadrato A K: ponitur enim recta v z non maior minore rectarum A K, F C. ergo si est minus erit, & rectangulum v z L minus rectangulo v P L. quare punctũ B * propinquius 12 quinti erit ipsi N, quam punctum Z, atque vterque existit in medietate v N. ergo punctum z erit in recta v P. Si vero quadratum v z æquale est quadrato A k, erit & rectangulum v z L æquale rectangulo v P L. quare punctum Z idem erit, quod punctum P. itaque z erit in recta v P. quod vltimo loco erat ostendendum.

C

Scholium.

Ex demonstratis patet si A D ad A F minorem rationem habeat quam A G ad A C, & semicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F, atque data v z non sit maior minore rectarum A k, F C, Problema duobus modis posse absolui. Nam si à puncto A ad circumferentiam K F ducatur recta A M æqualis A I, vel v S secans semicirculum A B C in O: erit M O * minima omnium, quæ inter circumferentias lem.19 A B C, k F intercipiuntur, Et quoniam v P differentia rectarum v N, N S minor est, quàm v S, hoc est quam A M, non autem quam A k, vt demonstrauimus, poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta
D A E æqualis v P.

Similiter quoniam recta v Q composita ex v N, N S maior est quam v S, hoc est quam A M, non autem quam A F, vt demonstrauimus; poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta A E æqualis v Q. Itaque si recta A E ducatur æqualis v P, aptabitur recta æqualis datæ v z inter circumferentias K M, A O. si vero ducatur æqualis v Q, aptabitur inter circumferentias M F, O C. poterit igitur aptari ex vtraque parte minimæ, atque adeo Problema duobus modis absolui. quod in tertio præcepto monuimus.

Lemma XXV.

Rursus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C, & semicirculus A B C extendatur vltra centrum circuli D E F: sed data V Z sit maior minore rectarum A k, F C, & à puncto A ad circumferentiam k F ducatur A M æqualis A I; est enim A I, * minor quàm A F, maior quam A k. Dico si A K maior sit quam F C, differentiam rectarum V N, N S maiorem esse quam A K, minorem autem quam A M, & punctum z existere in ipsa differentia. sin minor compositam ex V N, N S minorem esse quam A F, maiorem autem quam A M, & punctum z existere in ipsa composita.

lem.19.

Sit enim V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S; V Q vero æqualis compositæ ex ipsis, & connectantur G K, k D, eisque parallelæ agantur C y, y x secantes A k, A D productas in punctis y x, & compleatur circulus F E, D R, quem K A producta secet in R, & sit primum A k maior,

lem.21. quam F C. ergo ipsa A k maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias A B C, k F. quare recta datæ V z æqualis poterit aptari inter circumferentias K M, A O. non etiam inter circumferentias M F, O C cum C

Corol.le.21 sit V z maior quàm F C, ex positione; ipsa autem F C * maxima omnium interceptarum inter circumferentias M F, O C.

lem. 25. Et quoniam est vt A G ad A C, * ita A K ad A y, & ita V z ad z L, ex constructione; erit vt V Z ad Z L, ita A k, hoc est A R, ad A Y. &

12. quinti permutando vt V Z ad A R, ita Z L ad A y. & ita * V L ad R Y; omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes, sed V Z minor est quam A R. ponitur enim V Z minor maxima A k. ergo & V L minor erit quam R y.

36. tertij Et quoniam rectangulum P V Q hoc est V P L, * æquale est quadrato V S,

lem. 17 vel quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum y A K, hoc est y A R,

16. sexti ideo æqualia erunt rectangula V P L, y A R, & ideo * proportionales V P, y A, A R, P L. sed V L composita ex extremis ostensa est minor quam D

the. 2. huius y R composita ex medijs. ergo * altera mediarum y A, A R maxima erit, altera minima, sed A R minor est quam A y. ergo ipsa A R minima erit, & consequenter V P maior quam A R hoc est quam A K. Ipsam autem V P minorem esse quam A M patet, cum ipsa V P minor sit quam V S, cui æquales sunt A I, A M, ex constructione.

Rursus quoniam est, vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratũ A I, & ita V z ad z L vtraque ex constructione erit vt V z ad z L, ita quadratum

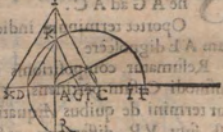
36 tertij A k ad quadratum A I, hoc est ad quadratũ V S, seu ad * rectangulum P V Q,

1 sexti vel V P L. sed vt V z ad z L, ita est * quoq; quadratum V z ad rectangulum,

cum

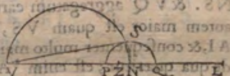
A cum ſint eiuſdem altitudinis V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulum V z L, ita erit quadratum A K ad rectangulum V P L, ſed quadratum V z minus eſt quadrato A K: ponitur enim recta V z minor maxima, quæ eſt A k. ergo & rectangulum V z L minus erit rectangulo V P L. quare punctum P * propinquius erit ipſi N, quam punctum z. itaq; punctum z erit in in recta V P. Exiſtente igitur A K maiori, quam F, recta V P differentia rectarum V N, N S maior eſt, quàm A L, minor autem quam A M, atq; punctum z exiſtit in recta V P. quod eſt primum. lem. 18

Deinde ſit A k, minor quam F C, ergo F C * maxima erit omnium interceptarum inter circumferentias A B C, k F. quare recta datæ V z æqualis poterit aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias k M, A O, cum ponatur V z maior quam A K, quæ eſt * maxima omnium interceptarum inter circumferentias K M, A O. lem. 21



B (margin) Corol. le. 21

Et quoniam eſt vt A G ad A C, * ita F C ad C x, & ita V z ad z L, ex conſtructione, erit vt V z ad z L ita F C ad c x, & permutando vt V z ad F C, ita erit z L ad C x, & conſequenter * ita V L ad F x, omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes; ſed V z minor eſt quam F C; poni- lem. 15



22 quinti

C tur enim V z minor maxima interceptarum inter circumferentias A B C, k F, ergo & V L minor erit, quam F x. Et quoniam rectangulum F A x * æquale eſt quadrato A I, & recta A I minor quam A F, erit A x multo minor. lem 17

Et quoniam rectangulum Q V P, vel V Q L * æquale eſt quadrato V S, hoc eſt quadrato A I, cui quoque * æquale eſt regandtulum F A x, rectangula V Q L, F A x æqualia erunt, & ideo proportionales V Q, F A, A x, Q L, ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt minor, quam F x, compoſita ex medijs, ergo * altera mediarum F A, A X maxima erit, altera minima. ſed A x oſtenſa eſt minor quam F A, ergo ipſa F A maxima erit, quare V Q minor quam A F. Ipſam autem V Q maiorem eſſe, quam A M manifeſtum eſt, cum ea maior ſit, quam V S, cui æqualis eſt A I, vel A M D ex conſtructione. 36 tertij lem 17 the. 2 huius

Similiter punctum z exiſtere in recta V Q conſtat. nam cum ſit vt A G ad A C minor ad maiorem, ita V z ad z L ex conſtructione, erit & V z minor, quam z L vnde punctum z erit in recta V N, & conſequenter in recta V Q. Exiſtente igitur A k minori, quàm F C; recta V Q compoſita ex V N, N S minor eſt, quàm A F, maior autem quam A M. & punctum z. exiſtit in ipſa V Q. quod ſecundo loco erat oſtendendum.

Reſolutio prædicti Caſus quemadmodum tertij, & quarti incidit in æquationem de duobus terminis explicabilem, quorum non ſemper vterque indicat quæſitam A E, iſque Caſus parum diſtat à prædictis. idcirco eadem fere

ratione

ratione terminus ipsam quæsitam indicans dignoscitur; quo tamen constan- A
tior vndique cernatur methodus, hic quoque breuiter ostendam quomodo terminus quæsitam A E indicans à non indicante discernatur.

Propos. I.

Terminum quæsitam A E indicantem, in semicirculis ad primum Præceptum pertinentibus dignoscere.

SIt ratio A D ad A F non minor ratione A G ad A C.

Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere.

2 AD 4
4 AC 8
3 CF 6
℞ 56 AI ℞ 224
1 AG 2

Resumatur compositionis figura ad huiusmodi Casum pertinens. Quoniam igitur termini de quibus Æquatio explicabilis est sunt V P. differentia rectarum V N, N S. & V Q aggregatum earundem. V Q autem maior est quam V S, hoc est quam A I, & consequenter multo maior quam A E, de qua quæritur; est enim *A I non maior quam A F. itaq; v Q non indicat ipsam A E. ergo eam indicat v P, Itaque existente ratione A D ad A F non minori, quàm A G ad A C, differentia rectarum v N, N S indicat A E quæsitam; agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum primum constitutum est.

lem 19 (margin)

Propos. II.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad secundum Præceptum pertinentibus dignoscere.

SIt ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. & semiciculus A B C non extendatur vltra T centrum circuli D E F.

vide fol. 214 Cas. 7 (margin)

Oportet terminum quæsitam A E indicantem dignoscere. Resumatur compositionis figura ad hunc Casum pertinens.

Termini de quibus æquatio explicabilis est sunt v P aggregatum rectarum v N, N S, & v Q differentia earundem. Et quoniam est vt A G ad A C, ita quadratum A L ad quadratum A I ex constructione. & A G in hac semicirculorum positione non minor quam A C: ergo neque quadratum minus erit, quadrato A I. quare nec recta A K minor, quam recta A I, sed A E quæsita maior est, quàm A K; ergo maior etiam, quàm A I, hoc est quam V S. & consequenter multo maior, quam v Q: recta igitur v Q non indicat quæsitam A E. ergo eam indicat v P. Itaque existere ratione A D ad A F maiore, quam A G ad A C, & semicirculo A B C non extenso vltra

centrum

A centrum circuli D E F. aggregatum rectarum V N, N S indicat quæsitam A E. Agnitus est igitur terminus ipsam quæsitam indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum secundum constitutum est.

Propos. III.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium Præceptum pertinentibus dignoscere.

RVrsus sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. sed semicirculus A B extendatur vltra centrum T, & data V z non sit maior minore rectarum A K, F C.

B Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere.

Resumatur compositionis figura pertinens ad hunc Casum

Quoniam igitur est. vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione; & A G in hac semicirculorum positione minor est, quam A C; erit & quadratum A K minus quadrato a I, vnde & recta a k minor, quam recta a I, seu quod idem est a I maior, quam a k; sed ipsa * a I minor est quam a F. ergo poterit à puncto A ad circumferentiam K F lem.19.

C duci recta A M æqualis A I; ducatur igitur A M secans semicirculum a B C in O. Aut igitur quæsita a F terminatur in circumferentia k M, vel in circumferentia M F: potest enim terminari in vtraque nam recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias semicirculorum ex vtraque parte minimæ M O, cum ipsa V z ponatur non maior minore rectarum a k, F C. si igitur a E desinit in circumferentia k M; ea minor est, quam a M, hoc est, quam a I, seu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S, quod est vnus è duobus terminis de quibus A quatio explicabilis est; alter vero est V P differentia rectarum V N, N S. Terminus igitur V Q non est idoneus ad indicandam a E quæsitam, ergo eam indicat V P.

D Si vero quæsita a E desinit in circumferentia M F, ea maior est, quam a I, seu quam V S, & multo maior quam V P. recta igitur V P non indicat ipsam quæsitam. ergo eam indicat V Q. Quando igitur ratio a D ad a F minor est ratione a G ad a C, & semicirculus a B C extenditur vltra centrum T, atque data V z non est maior minore rectarum a K, F C, indicat quæsitam a E, tum differentia tum aggregatum rectarum V N, N S. differentia quidem cum a E desinit in circumferentia k M; aggregatum vero cum desinit in circumferentia M F. Agnitus est igitur terminus quæsitam a E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum tertium constitutum est.

Propos.

A

Propos. IV.

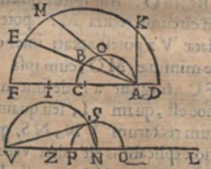
Terminum indicantem quæsitam a E in semicirculis ad Præceptum quartum pertinenibus dignoscere.

RVrsus sit ratio a D ad a F minor ratione a G ad a C, & semicirculus, a B C extendatur vltra T centrum circuli D E F, sed dat V z sit maior minore rectarum a K, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam a E dignoscere. Facta constructione vt in antecedenti Propositione, manifestum est rectam datæ V z æqualẽ posse aptari inter circumferentias semicirculorum ex vna tantum parte minimæ. nempe è regione maioris rectarum A K, F C. Itaque sit primum A K maior quam F C, ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias K M, A O, non autem inter circumferentias M F, O C, cum sit V z maior quam F C, ipsaque F C * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur. ergo A E quæsita desinit in circumferentia k M, & ideo minor est quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S: terminus igitur v Q non indicat quæsitam A E. ergo eam indicat V P differentia ipsarum V N, N S. B

Corol. le. 21

C

Sed sit F C maior quam A k. ergo recta æqualis datæ V z potest aptari inter circumferentias M F, O C, non autem inter circumferentias K M, A O, & A E quæsita desinit in circumferentia M F, & ideo maior est quam A M hoc est quam A I, seu quam V S, & per consequens multo maior quam V P differentia rectarum V N, N S. ipsa igitur v P non indicat quæsitam A E. ergo V Q aggregatum rectarum v N, N S eam indicat. Cum igitur ratio A D ad A F minor est ratione A G ad A C; & semicirculus A B C extenditur vltra centrum T, atque data v z maior est minore rectarum A K, F C, existente A k maiore, quam F C differentia rectarum v N, N S indicat A E quæsitam. existente vero F C maiore quam A R, aggregatum. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Hinc Præceptum quartum constitutum est.



D

Casus. VIII.

Rursus vergant ad diuersas partes dati duo semicirculi. maior si compleretur minorem includens, & recta ponenda pertineat ad angulum semicirculi

mino-

A minoris, sed ab eo angulo semicirculus maior minus distet, quam à reliquo.

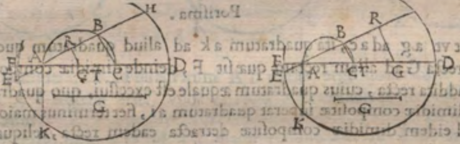
Int igitur tales dati duo semicirculi a b c, d e f; data autem recta linea G; & à puncto à demittatur ipsi d f perpendicularis a k, vsque ad circumferentiam d e f.

Oportet inter circumferentias a b c, K f ponere rectam lineam æqualem ipsi G, ita vt ad punctum a pertineat.

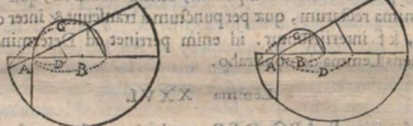
Resolutio.

It iam posita recta linea e g b æqualis datæ G, & ex centro circuli d e f, quod sit t, ponatur t g æqualis t e, & compleatur circulus f e, d h,

B quem e b producta secet in h, & ipsi e h ducatur perpendicularis



C



g r, & ducatur b c. ea quoque eidem e h perpendicularis erit; cum sit rectus angulus a b c in semicirculo. quare æqualis erunt h r, e b.

Datarum autem a c, a g, b e, a k prima sit B. secunda D. tertia G. quarta K, vt designatura est in figuris ad resolutionem pertinentibus. & quæratur

D a e. esto illa A. ergo a b erit G -- A. & cum sint similia triangula a b c, a r g; erit vt a c ad a g, ita a b ad a r. quod in figuris ad resolutionem pertinentibus respondet: vt B ad D ita G -- A ad $\frac{\text{D in G -- D in A}}{\text{B}}$, atque adeo a r erit $\frac{\text{D in G -- D in A}}{\text{B}}$, cui addita r h æquali e b tota a h erit $\frac{\text{D in G -- D in A}}{\text{B}}$ ✠ G. sed rectangulum e a h æquale est quadrato a k, ergo

G in A ✠ $\frac{\text{D in G in A -- D in A Q}}{\text{B}}$ æquabitur K Q.

Ducantur omnia in B, ergo

B in G in A ✠ D in G in A -- D in A Q æquabitur k Q in B.

Et applicentur omnia ad D, vt Potestas æquationis ex se subsistat, ergo.

$\frac{\text{B in G in A}}{\text{D}}$ ✠ G in A -- A Q æquabitur $\frac{\text{k Q in B}}{\text{D}}$.

Sed

Sed vt Æquatio facilius explicetur transmutentur fractiones in integras magnitudines, vt in resolutionibus præcedentium Casuum factum est; hoc est fiat vt D ad B, ita k Q ad aliud quadratum quod sit Z Q, erit Z Q idem quod $\frac{k\,Q \text{ in } B}{D}$. Similiter fiat vt D ad B, ita G ad aliam rectam, quæ sit F, eritq. F eadem quæ $\frac{B \text{ in } G}{D}$. & planum F in A idem, quod planum $\frac{B \text{ in } G \text{ in } A}{D}$. facta igitur trasmutatione. A

F in A ⁜ G in A -- A Q æquabitur Z Q.

Vel F ⁜ G in A -- A Q æquabitur Z Q

Et explicata Æquatione. F $\frac{1}{2}$ ⁜ G $\frac{1}{2}$ ⁜ L.V. (F $\frac{1}{2}$ ⁜ G $\frac{1}{2}$ Q -- Z Q) æquabitur A

Vel F $\frac{1}{2}$ ✱ G $\frac{1}{2}$ -- L.V. (F $\frac{1}{2}$ ✱ G $\frac{1}{2}$ Q -- Z Q) æquabitur A

In hac quoque Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, sed cum in omni Casu non possit sumi vterque ad indicandam a e quæsitam, inter B sumendus sit suo dicetur loco.

Porisma.

Fiat vt a g ad a c, ita quadratum a k ad aliud quadratum quod sit a i. & ita recta G ad aliam rectam quæ sit F, deinde dimidiæ compositæ ex F, & G addita recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem dimidiæ compositæ superat quadratum a i, fiet terminus maior.

Vel eidem dimidiæ compositæ detracta eadem recta, reliqua erit terminus minor.

Sed antequam Problema componam, ostendendum est, quæ sit maxima, quæue minima rectarum, quæ per punctum a transeunt & inter circumferentias a b c, k f interijciuntur. id enim pertinet ad Determinationem, sed prius sequens Lemma demonstrabo. C

Lemma XXVI.

Sint duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti Casu ponuntur, & recta A k perpendicularis ipsi F D secet semicirculum D E F, in K, & ex centro circuli D E F, quod sit T sumatur T S æqualis T C, & fiat vt A G ad A C, ita quadratum A K ad quadratum A I. Dico si ratio A D ad A F minor est ratione A G ad A C, & rectam A I minorem esse, quam A F, & si æqualis, æqualem: & si maior maiorem. D

Primum sit ratio A D ad A F minor ratione A G ad A C. ergo minor erit & ratione quadrati A K ad quadratum A I: est enim vt A G ad A C, ita quadratum a k ad quadratum A I; sed vt A D ad A F prima videlicet trium proportionalium a D, a k, a F ad tertiam, ita est quadratum secundæ a K ad quadratum A F tertiæ. ergo ratio qua-

F A	4
A C	$\frac{1}{2}$
C G	2
A D	9
A K	6
A I	R. 15 $\frac{3}{7}$

A quadrati A K ad quadratum A F minor erit ratione quadrati A k ad quadratum A I. quare quadratum a I minus erit quadrato A F. vnde & recta A I, minor, quàm recta A f. quod est primum.

Sit deinde ratio A D ad A f eadem, quæ A G ad A C. ergo eadem erit ratio & quadrati A k ad quadratum A I. sed vt A D ad A f, prima nempe ad tertiam, trium proportionalium A D, A k, A f; ita est quadra-

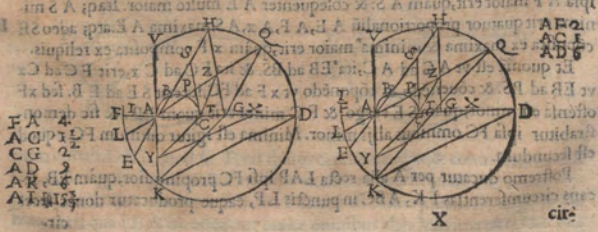
B

tum secundæ A k ad quadratum A f tertiæ. ergo quadratum A I quadrato A f æquale erit. vnde & recta A I æqualis rectæ A f. quod est secundum.

Sit tertiò ratio a D ad a f. maior ratione a G ad a C. ergo maior erit & ratione quadrati a L ad quadratum a I, cum sit vt a G ad a C,
C ita quadratum a L ad quadratum a I, ex constructione. sed vt a D ad a f, ita est quadratum a k ad quadratum a f, vt demonstrauimus, ergo ratio quoque quadrati a K ad quadratum a f maior erit ratione quadrati a K ad quadratum a I, quare quadratum a I *maius erit quadrato a f. 2. quinti
vnde & recta a I maior, quam recta a f quod est tertium. quare constat propositum.

Lemma XXVII.

Isdem positis sit ratio a D ad a f non maior ratione a G ad a C. Dico a K maximam esse omnium, quæ ad punctum a pertinent, & inter



cir-

circumferentias a B C, K f interijciuntur, minimam vero f C. Aliarum A autem propinquiorem minimæ, remotiore minorem esse.

Ducatur enim per a vtcunque recta linea E a B secans circumferentias k f, a B C in pũctis E B, & cõpleatur circulus f E, D H, quẽ E B, K a productæ secent in punctis H V, & connectantur G K, K D, G H, quibus parallelæ agãtur C y, y X, C S secantes a K, a D, a H in punctis y X S. erit igitur rectangulum lem. 17 F a X * æquale quadrato a I, vnde proportionales erunt a F, a I, a X. sed a I, ex antecedente Lemmate, non est maior quam a F, eo quod ratio a D ad a F ponitur nõ maior ratione a G ad a C. ergo neque a x maior erit, quam a I, nec ideo corol. lem. 17 16 sexti maior quam a F. Rursus quoniam rectangulum F a X * æquale est rectangulo Y a K. erit * vt a K ad a F, ita a X ad a y: sed a K maior est quam a F, ergo & a x maior erit, quam a y. sed ipsa a x ostensa est non maior, quàm a F. ergo & B a F maior erit, quam a y. itaq; quatuor proportionalium a k, a F, a x, a y minima erit a y, maxima a k. quare cõposita ex a y, a k, hoc est y V maior erit, quàm lem. 17 F x composita ex reliquis. Et quoniam est vt a G ad a C, * ita a K ad a y, & ita F C ad C X erit vt a K, hoc est a V ad a y, ita F C ad C x. & conuertendo vt y a ad a V, ita x C ad C F. & componendo vt y V ad V a, ita x F ad F C. sed y V ostẽsa est maior quã x F. ergo & V a, hoc est a k, maior erit quã F C. corol. lem. 17 16 sexti tertij Similiter quoniã * æqualia sunt rectãgula y a K, E a S, erit vt * a k ad a E, ita a S ad a y: sed a K maior est, quam a E: ergo & a S maior erit, quã a y. est autem & a E maior quã a y, cum sit & a F maior, vt demõstrauimus. ergo quatuor 25 quinti proportionalium a k, a E, a S, a y minima erit a y, maxima a k. quare cõposita ex a y, a K, hoc est recta y v, * maior erit, quàm S E composita ex reliquis. C lem. 17 Et quoniã est vt a G ad a C, * ita E B ad B S, & ita a k ad a y. erit vt a k, hoc est a V ad a y, ita E B ad B S, & cõuertendo vt y a ad a V, ita S B ad B E, & cõponẽdo vt y V ad a V, ita erit S E ad E B. sed y V ostensa est maior, quam S E, ergo & A V, hoc est A K, maior erit, quàm E B. Eadem ratione ostendetur ipsa A k omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium A k: quod est primum.

corol. lem. 17 16 sexti Eadẽ ratione, quoniam * æqualia sunt rectangula F A x, E A S, * proportionales erunt A E, A F, A x, A S: sed A E maior est, quàm A F. ergo & A x maior erit, quam A S. sed cũ sit A x non maior, quàm A F, vt demõstrauimus. ergo & ipsa A F maior erit, quam A S: & cõsequenter A E multo maior. Itaq; A S minima erit quatuor proportionaliũ A E, A F, A x, A S. maxima A E. atq; adeo S E D 25 quinti cõposita ex maxima & minima * maior erit, quàm x F composita ex reliquis.

lem. 17 Et quoniã est vt A G ad A C, ita * E B ad B S. & ita F C ad C x, erit F C ad C x vt E B ad B S. & cõuertẽdo, & cõponẽdo vt x F ad F C, ita erit S E ad E B. sed x F ostensa est minor, quam S E: ergo & F C minor erit quam E B. & sic demonstrabitur ipsa F C omnibus alijs minor. Minima est igitur omnium F C; quod est secundum.

Postremo ducatur per A alia recta L A P ipsi F C propinquior, quàm E B, secans circumferentias F K, A B C in punctis L P, eaque producatur donec secet

cir-

A circulum F E D completum in Q; & iungatur G k, & ei parallela agatur C Z secans ipsam L Q in Z. rectangula igitur L A Z, E a S æqualia* erunt, coro. 1. lem. 17
& ideo* proportionales a L, a E, a S, a Z. sed a L minor est, quam A E. 16 sexti
ergo & a S minor erit, quàm a Z. Et quoniam rectangulum E a S* æquale lem. 17
est quadrato a I: proportionales erunt a E, a I, a S; sed a E maior est, quàm a I cum ipsa a I non* sit maior quam a F. ergo & a I maior erit quam a S. 17 sexti
itaque ipsa a S minor erit, quam a L, & multo minor, quam a E, atque est minor quam a Z, vt demonstrauimus. ergo ipsa a S minima erit quatuor proportionalium a L, a E, a S, A Z: maxima ideo a E. vnde E S composita ex maxima, & minima* maior erit, quàm L Z composita ex reliquis, hoc est L z minor, quàm E S.

B Et quoniam est vt a G ad a C,* ita E B ad B S, & ita L P ad P z. erit vt L P ad P z, ita E B ad B S. & conuertendo vt z P ad p L, ita S B ad B E. & componendo vt z L ad L p, ita S E ad E B. sed z L ostensa est minor, quàm S E, ergo & L p minor erit quam E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore. quod tertio loco erat ostendendum. lem. 17

Lemma XXVIII.

Rursus iisdem positis ratio autem A D ad A F sit maior ratione A G ad A C. Dico si semicirculus A B C extenditur vltra centrum circuli D E F, aut ipsum centrum attingit, rectam F C maximam esse omnium, quæ ad punctum A pertineat, & inter circumferentias A B C, k F
C interijciuntur, minimam A k. Si vero nec extenditur, nec centrum illud attingit; ducatur à puncto A ad circumferentiam K F recta A M æqualis A I, & producatur ad circumferentiam A B C in O: est autem A I* maior, quàm a F, 1. m. 26
minor vero, quàm a K. cum sit vt a G ad a C maior nempe ad minorem, ita quadratum a k ad quadratum a I ex positione. Dico maiorem rectarum a K, F C maximam esse; M O minimam. Aliarum autem propinquiorem minimæ remotiore ex eadem parte minorem esse.

Ducatur enim per A vtcunque recta linea E a B secans circumferentias F K a B C in punctis E B, & primum semicirculus a B C, vel extendatur vltra cen-

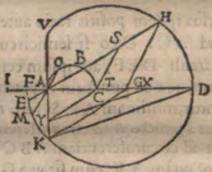
D

trum circuli D E F, quod sit T, vel ipsum centrũ attingat, & connectantur C K C E, C B. angulus igitur E B C in semicirculo rectus erit. quare E C basis trianguli E B C, maior erit latere E B. sed F C non est minor, quam E C: ergo & F C maior erit quã E B, & sic ostẽdetur maior omnibus alijs. Maxima est igitur F C.

Rursus quoniam C K non est maior quam C E. ideo nec quadratum C k A
47 primi maius erit quadrato C E; sed quadratum C k* æquale est quadratis A K, A C, & quadratum C E æquale quadratis E B, B C. ergo nec quadrata A K, A C maiora erunt quadratis E B, B C: sed quadratum A C maius est quadrato B C. ergo reliquum quadratum A K minus erit reliquo quadrato E B. vnde & recta A K minor, quàm recta E B. atque eadem ratione ostendetur minor omnibus alijs. Minima est igitur A k.

Ducatur autem alia recta L A P ipsi A K propinquior quam E B, secans circumferentias F k, A B C in punctis L P, & iungantur C P, C L. angulus igitur L P C in semicirculo rectus erit; Et quoniam C L non est maior quam C E, nec quadratum C L maius erit quadrato C E. idest nec quadrata L P, P C maiora erunt quadratis E B, B C: sed quadratum P C B
maius est quadrato B C. ergo reliquum quadratum L P minus erit reliquo quadrato E B. quare & recta L P minor, quam recta E B. idest propinquior minimæ minor remotiore.

Sed non extendatur semicirculus A B C vltra centrum T, nec ipsum centrum attingat. Producatur autem E B secans circulum completum in H, quem etiam k A producta secet in V, & iungantur G H, G k, K D, eisque parallelæ agantur C S, C y, y X secantes A H, A k, A D, in punctis S y X. & sit primum A k maior quam F C. Quoniam igitur est vt A G ad A C,* ita F C ad C X, & ita A k ad A y. erit A K hoc est A V ad A y, vt F C ad C X. & permutando vt A V ad F C, ita A y ad C x. & con-



FA	2
AC	4
AG	16
AD	22
AKR	44
AIR	11

C

19 quinti sequenter* ita V y ad F x omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed A V, cui æqualis est A K, ponitur maior quam F C: ergo & V y maior erit quam F x;

corol. lem. 17 / 15 sexti Et quoniam * æqualia sunt rectangula y A k, F A x. erit* vt A y ad A F, ita A x ad a K, hoc est ad A V. sed y V composita ex extremis osten-
Theor. 2 huius sa est maior, quam F x composita ex medijs. ergo* altera extremarum A y, D
A V, nempe ipsa A y minima erit, maxima vero A V. quare A y minor
corol. lem. 17 erit, quam A F, & multo minor, quàm A E. Et quoniam * æqualia sunt
16 sexti rectangula y A k, E A S,* proportionales erunt A K, a E, a S, a y. sed a k maior est, quam a E. ergo & a S maior erit, quam a y, hoc est a y minor, quam a S. sed ipsa a y est quoque minor, quam A E, vt demonstrauimus, & minor, quam a K; ergo ipsa A y minima erit quatuor proportio-
Theor. 1 huius nalium a K, a E, a S, a y.* maxima vero a K. vnde composita ex y a, a K maxima videlicet, & minima, hoc est recta y V, maior erit quam E S composita ex reliquis.

Et

A Et quoniam est vt a G ad A C, ita* E B ad B S, & ita a K ad a y; erit a K, hoc est a V ad a Y vt E B ad B S, & conuertendo, vt y a ad a F, ita S B ad B E, & componendo vt y V ad V a, ita erit S E ad E B. sed Y V ostensa est maior, quam S E, ergo & V a, hoc est a K, maior erit quam E B. & sic demonstrabitur omnibus alijs maior. Maxima est igitur omnium a K. Lem.xvj.

Sed sit F C maior, quàm A k. eadem ratione quoniam est vt a G ad a C, *ita F C ad C X, & ita a k ad a y. erit F C ad C X, vt a k, hoc est a V ad a y. & permutando vt F C ad a V, ita C X ad a Y. & consequenter ita F X ad V y, idest omnes an- ibid.

B tecedentes ad omnes consequentes. sed F C ponitur maior, quam a K, hoc est quam a V. ergo & F X maior erit, quam V y. sed F X composita est ex extremis quatuor proportionalium a F, a y, a V, a X. ipsa vero V y ex medijs, constat autem eas proportionales esse ex eo quod rectangulum F a X* æquale est rectangulo y a K, hoc est y a V. ergo* altera extremarum a F, a X maxima erit, altera minima. sed a F non est maxima, cum sit minor quam a V. ergo minima erit, & consequenter a X maxima itaque a X maior erit quam Corol.xvij. Th. 2. huius

FA	2
AC	4
AD	12
AKB	24
AI	4

C a V, & multo maior quam a E.

Et quoniam *æqualia sunt rectangula F a X : E a S, proportionales erunt a F, a E, a S, a x. sed a F minor est, quam a E, ergo & a S minor erit, quam a X. est autem & a E minor quam a X, vt demonstrauimus. & consequenter a F multo minor itaque a X maxima erit quatuor proportionalium a F, a E, a S, a X. quare *a F minima, vnde F X composita ex maxima, & minima maior erit, quàm S E composita ex reliquis. Corol.xvij Teor.i.huius

Et quoniam est vt a G ad a C* ita F C ad C X, & ita E B ad B S. erit F C ad C x vt E B ad B S. & conuertendo vt x C ad C F, ita S B ad B E, & componendo vt x F ad F C, ita S E ad E B. sed x F ostensa est maior quam S E; ergo & F C maior erit, quam E B. eademq. ratione ostendetur maior omni- lem. xvj

D bus alijs. quare maxima est omnium F C. quod est primum.

Sed sint æquales a k, F C. Quoniam igitur est vt a G ad a C,* ita F C ad C x. & ita a k ad a Y. erit F C ad C X, vt a k ad a y: sed F C ponitur æqualis a k; ergo & C x æqualis erit a y. & additis æqualibus C F, a V, tota x F æqualis erit toti y V. sed x F composita ex extremis quatuor proportionalium F a, a y a V, a x; ipsa vero y V ex medijs. patet autem eas proportionales esse, quia rectangulum F a x* æquale est rectangulo y a K, hoc est Y a V. ergo maior extrema maiori mediæ, minor minori* æqualis erit. itaque a F altera ex extremis æqualis erit alteri ex medijs y a, a V. sed non est æqualis ipsi a V, quia minor est. ergo æqualis erit ipsi a y. ibidem Corol. lem. 17 Theor. 3 huius

X 3 Et

Coro l. lem. 17. Et quoniam rectangulum y A K, hoc est y A V æquale est rectangulo A
E A S, proportionales erunt A y, A E, A S, A V. Et A y cum sit æqualis A F, minor est quam A E. ergo & A S minor erit, quam A V. itaque Theor. 2 huius quatuor proportionalium A y, A E, A S, A V maxima erit A V, & * consequenter minima A y. vnde y V composita ex maxima, & minima maior quam S E composita ex reliquis.

lem. 17. Et quoniam est vt A G ad A C, ita * E B ad B S, & ita A k, hoc est A V ad A y, erit A V ad A y, vt E B ad B S. & conuertendo vt y A ad A V, ita S B ad B E. & componendo vt y V ad V A, ita erit S E ad E B. sed y V, ostensa est maior quam S E. ergo & V A, hoc est A k maior erit, quam E B. atque eadem ratione ostendetur maior omnibus alijs. quare & F C, cum sit æqualis A k, erit quoque omnibus maior. B
itaque vtraque maxima erit. Maior igitur rectarum A k, F C maxima est omnium, quæ ad punctum V A pertinent, & inter circumferentias A B C, K F interijciuntur.

Deinde producatur M O donec secet circulum F E D completum in R, & connectatur G R, cui parallela agatur C N secans M R in N. lem. 17 rectangulum igitur M A N * æquale erit quadrato A I, hoc est quadrato A M; sunt enim æquales rectæ A I, A M, ex constructione. quare A M æqualis erit ipsi C
A N, & cum sit rectangulũ F A X lem. 17 * æquale quadrato A I, hoc est quadrato A M; proportionales erunt a F, a M, a X: sunt autem & inæquales, quia a F minor est quam a M. ergo F X composita ex extremis maior erit quam dupla media, hoc est quam M N.

lem. 17 Et quoniam est vt a G ad a C, * ita F C ad C x. & ita M O ad O N erit F C ad C X, vt M O ad O N. & conuertendo vt X C ad C F, ita N O ad O M. & componendo vt X F ad F C, ita erit M N ad M O. D
sed X F ostensa est maior, quam N M. ergo & F C maior erit quam M O. Eadem ratione quoniam rectangulum y a K, hoc est y a V, lem. 17. * æquale est quadrato a I, vel qua- 17 sexti drato a M, * proportionales erunt y A, A M, A V: sunt autem & inæquales. ergo y V composita ex extremis maior erit, quam M N, media videlicet dupla. Et quoniam est vt A G ad A C, ita A K ad A y. &

ita

A ita MO ad ON: erit vt AK vel AV ad AY, ita MO ad ON. & conuertendo vt yA ad AV, ita NO ad OM. & componendo vt yV ad VA, ita erit NM ad MO. ſed yV oſtenſa eſt maior, quam NM: ergo & VA, vel Ak, maior erit quam MO.

Æque quoniam rectangulum EAS* æquale eſt quadrato AI, hoc eſt quadrato AM; proportionales erunt AE AM AS; ſunt autem & inæquales. ergo ES compoſita ex extremis maior erit, quàm dupla media, hoc eſt quam MN. Et quoniam eſt vt AG ad AC,* ita BB ad BS: & ita MO ad ON. erit vt EB ad BS, ita MO ad ON. & conuertendo vt SB ad BE, ita NO ad OM. & componendo vt SE ad EB, ita erit NM ad MO. ſed SE maior eſt, quàm NM, vt demonſtrauimus, lem. 17 lem. 17

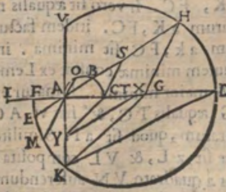
B ergo & EB maior erit, quam MO. Atque eadem ratione oſtendemus omnes alias maiores eſſe ipſa MO. minima eſt igitur MO. quod eſt ſecundum.

Poſtremo ducatur per A alia recta LAP, ipſi MO propinquior, quam EB ſecans circumferentias Fk, ABC in punctis LP. & ſint rectæ LP, EB ex eadem parte minimæ MO, & producatur LP donec ſecet circulum DEF completum in Q. & iungatur GQ, & ei parallela agatur CZ ſecans ipſam LQ in Z. Rectangula igitur LAZ, EAS* æqualia erunt, ac proinde proportionales AL, AE, AS, AZ. in prima quidem figura vbi AL, AE exiſtunt inter rectas AM, Ak ſic argumentor. ſed AL minor eſt quam AE, ergo & AS minor erit, quam AZ. Et Corol. lem. 17

C quoniam rectangulum EAS* æquale eſt quadrato AI, hoc eſt quadrato AM; proportionales erunt AE, AM, aS. ſed aE maior eſt quam aM, ergo & aM maior erit quam aS atque adeo aS, minor erit quam aL; & multo minor quam aE, atque eſt minor quam AZ, vt demonſtrauimus; ergo ipſa aS minima erit quatuor proportionalium aL, aE, aS, aZ, & *conſequenter aE maxima. quare ES compoſita ex maxima & minima* maior erit, quam LZ compoſita ex reliquis, hoc eſt LZ minor, quàm ES. lem. 17 Theor. 1 huius 25 quinti

In ſecunda vero figura vbi aL, aE exiſtunt inter rectas aM, aE argumentor hoc modo. ſed aL

D maior eſt quam aE, ergo & aS maior erit quam aZ. Et quoniam rectangulum EaS* æquale eſt quadrato aI, hoc eſt quadrato aM, proportionales erunt aE, aM, aS. ſed aE minor eſt quam aM. ergo & aM minor erit quam aS. atque adeo aS maior erit quam aL; & multo maior quam aE. eſt quoque maior quam aZ, vt demonſtrauimus; ergo ipſa aS maxima erit quatuor proportionalium aZ, aE, aS, az, & con- lem. 17



FA	2
AC	2
AG	4
AD	8
AK	4
AIB	8

ſe-

Th. 1 huius sequenter * a E minima. quare E S composita ex maxima, & minima maior erit, quàm L Z composita ex reliquis, hoc est L z minor quam E S. quod etiam demonstrauimus & supra. A

lem. 17 Et quoniam in vtroque casu est vt a G ad a C, ita E B ad B S, * & ita L P ad P z. erit vt L P ad P z, ita E B ad B S. & conuertendo vt Z P ad P L, ita S B ad B E. & componendo vt Z L ad L P, ita S E ad E B. sed Z L ostensa est minor, quàm S E. ergo & L P minor erit, quàm E B. Propinquior igitur minimæ minor est remotiore ex eadem parte. quod tertio loco erat ostendendum.

Compositio octaui Casus.

SInt dati duo semicirculi A B C, D E F, quales in præsenti casu ponuntur. data autem recta linea V Z. Oportet inter circumferentias A B C, D E F ponere rectam lineam æqualem V z, ita vt ad punctum A pertineat. B

Oportebit autem ipsam V z non esse maiorem maxima rectarum, quæ ad punctum A pertinent, & inter circumferentias a B C, D E F interijciuntur. neque minorem minima. quæ autem sit maxima, quæue minima iam est demonstratum.

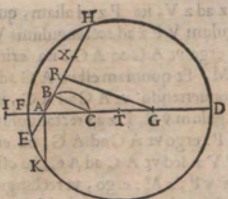
C

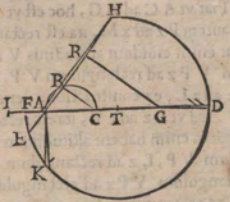
A F	4
A C	$1\frac{1}{2}$
C G	2
A D	9
A K	6
A I	R. $15\frac{1}{4}$

Ducatur a K ipsi F D perpendicularis secans semicirculum D E F in K, & si quidem data v z sit æqualis maximæ. factum iam erit, quod proponitur. etenim maxima est ea, quæ maior est rectarum a K, F C. si vero sit æqualis minimæ, minimaque sit ea, quæ minor est ipsarum a K, F C. itidem factum erit quod proponitur; si vero neutra rectarum a k, F C sit minima. inuenta minima Problemati satisfiet, D inuentio autem minimæ constat ex Lemmate 31. Si autem V z minor sit maxima, & maior minima. sumatur ex centro circuli D E F, quod sit T, Probl. 1 huius recta T G æqualis T C, & * fiat vt A G ad A C, ita quadratum a K ad aliud quadratum, quod sit a I. Similiter fiat vt A G ad a C, ita V z ad aliam, quæ sit z L, & V L composita ex V z, z L secetur bifariam in N, cum igitur à quadrato V N auferendum sit quadratum A I, vt Porisma fieri præcipit; describatur in V N semicirculus, in quo accomodetur V S æqualis A I. infra ostendetur A I minor, quàm V N. Deinde connectatur S N. quadratum igitur V N superat quadratum V S quadrato S N; angulus

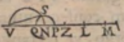
enim

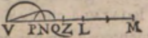
A	F		2
A	D		18
A	C		4
A	G		12
A	I	V	12

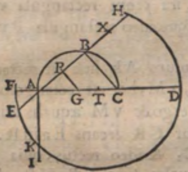


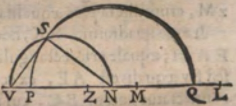


A	F		3
A	D		18
A	C		4
A	G		12
A	I	V	12









A enim V S N in ſemicirculo rectus eſt. itaque rectæ V N addenda eſt, vel auferenda recta æqualis N S. ſic Poriſma fieri iubet. addatur ergo, vel auferatur prout ſequentia Præcepta docebunt, eaque acuta vel diminuta ſit V P. ea non erit minor quam A F, nec maior quam A k, vt quatuor ſequentia Lemmata oſtendent. itaque poterit à puncto A ad circumferentiam k F duci recta A E æqualis V P; ducatur igitur A E, & producatur donec ſecet ſemicirculum A B C in B. Dico rectam E B Problema efficere.

Compleatur enim circulus F E, D H, quem E B producta ſecet in H. & centro N interuallo N S, vel M P deſcribatur circulus ſecans rectam V L in Q. is circulus tangit rectam V S in S; quare quadratum V S æquale erit rectangulo P V Q, vel V P L, ſeu, quod idem eſt rectangulo V P, B Z L, plus rectangulo V P Z: punctum enim Z exiſtit in recta P L, vt eadem quatuor ſequentia Lemmata oſtenderet. Si igitur fiat vt A G ad A C, ita vtraque æqualitatis pars ad alias partes itidem manebit inter eas partes æqualitas. At quoniam eſt, vt A G ad AC, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex conſtructione. erit conuertendo vt A C ad A G, ita quadratum A I, hoc eſt quadratum V S ad quadratum A K. quadratum igitur A k erit vna pars æqualitatis. alteram vero ſic inueniemus. Primo quoniam eſt vt A G ad A C, ita V Z ad Z L, ex conſtructione. erit conuertendo vt A C ad A G, ita L Z ad z O, vt autem L z ad z O, ita eſt rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z: eandem enim habent altitudinem V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z.

Fiat

Fiat vt A C ad A G, hoc est vt L z ad z V, ita P z ad aliam, quæ sit z M A
vt autem P z ad z M, ita est rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M: sunt enim eiusdem altitudinis V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P z ad rectangulum V P, z M. Et quoniam est vt A G ad A C, ita V z ad z L, ex constructione; erit conuertendo vt A C ad A G, ita L z ad z V. sed vt L z ad z V, ita est rectangulum v P, L z ad rectangulum P V z; eandem enim habent altitudinem V P. ergo vt A C ad A G, ita erit rectangulum V P, L z ad rectangulum P V z. sed vt A C ad A G, ita ostensum est rectangulum V P z ad rectangulum v P, z M: ergo, vt rectangulum v P, L z ad rectangulum P v z, ita erit rectangulum v P z ad rectangulum V P,
12 quint. Z M. sed vt vna antecedentium ad vnam consequentium, ita * sunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. ergo, vt rectangulum V P, L z ad B
rectangulum P v z, hoc est vt A C ad A G, ita erunt rectangula v P, L z, v P z, ad rectangula P v z, v P, z M. atque adeo rectangula P v z, v P, z M, erunt altera pars æqualitatis.

Itaque quadratum A K, hoc est rectangulum A k, hoc est rectangulum E A H, æquale erit rectangulis p v z, v p, z M, hoc est rectangulo P v M. sed P v æqualis est A E, ex constructione; ergo & v M æqualis erit A H. connectatur autem B C, cui parallela agatur G R secans E a in R. angulus igitur A R G æqualis est angulo a B C, & ideo rectus, quia & ipse
lem. 8. a B C in semicirculo rectus est, vnde * æquales sunt E B, H R. sumatur autem B x æqualis a R; tota E x æqualis erit toti a H. hoc est ipsi v M; sed E A æqualis est V P ex constructione. ergo & reliqua a x æqualis erit reliquæ P M. C

Et quoniam similia sunt triangula a B C, a R G; erit vt a C ad a G, ita a B ad a R. sed vt a C ad a G, ita est quoque p z ad z M, ex constructione; ergo vt a B ad a R, hoc est ad B X, ita erit p z ad z M. & componendo vt a x ad x B, ita p M ad M z. sed a x ostensa est æqualis p M. ergo & x B æqualis erit M z. sed tota E X ostensa est æqualis toti V M, ergo & reliqua E B reliquæ V z æqualis erit. Posita est igitur inter circumferentias a B C, K F recta E B æqualis datæ V z, eaque ad punctum a pertinet. quod faciendum.

At vero rectam a I minorem esse, quàm V N, sic demonstrabimus.

Primum habeat a D ad a F non maiorem rationem, quam a G ad a C. D
lem. 16. lem. 17 ergo a I non * erit maior quam a F. atque F C minima erit interceptarum inter circumferentias a B C, K F. connectantur autem G K, K D, eisque parallelæ agantur C Y, Y x secantes a k, a D in punctis Y x. Rectangu-
lem. 17 lum igitur F a X * æquale erit quadrato a I. quare proportionales erunt F a, a I, a x. vnde F x composita ex extremis non erit minor, quam a I dupla.

lem. 19 Et quoniam est vt a G ad a C, ita * F C ad C X. & ita V z ad z L ex constructione; erit vt F C ad C X, ita V z ad z L & permutando vt F C ad
12 quinti V z, ita erit C X ad z L & * ita quoque F X ad V L. omnes videlicet ante-

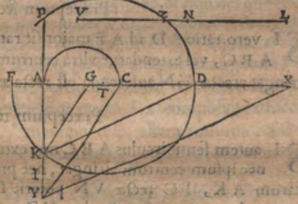
ceden-

A

B cedentes ad omnes consequentes. sed F C, cum sit omnium interceptarum minima, minor est quam V z; ponitur enim V z maior minima; ergo & F x minor erit quam V L sed F x ostensa est non minor, quam dupla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam ipsa V z. & consequenter a I simpla minor, quam V N dimidia videlicet ipsius V L.

Sed habeat a D ad a F maiorem rationem, quàm a G ad a C. Aut igitur, semicirculus a B C extenditur vltra centrum circuli D E F, quod sit, T, aut non extenditur. primum extendatur, & producatur

C k a donec secet circulum F E D completum in P. & connectatur G k, cui parallela agitur C Y secans a k in Y. rectangulum igitur y a k *æquale erit quadrato a I. vnde proportionales erunt y a, a I, a k. quare composita ex extremis y A, A K, hoc est recta y P. non erit minor quam A I dupla. lem. 17



Et quoniam est vt A G ad A C* ita A K ad A y, & ita V z ad Z L, ex constructione; erit vt A k hoc est A P ad A y, ita V z ad z L. & permutando vt A P ad V Z, ita erit A y ad z L. & * ita quoque P y ad V L; omnes videli- lem. 17 · 12 quint

D cet antecedentes ad omnes consequentes. sed A P, cui æqualis est* A K minima interceptarum, minor est quam V z; ponitur enim V z maior minima. ergo & P y minor, erit quam V L; sed P y ostensa est non minor quam dupla a I. ergo & a I dupla minor erit, quam V L, & consequenter a I simpla minor, quam V N dimidia videlicet ipsius V L. lem. 18

Sed non extendatur semicirculus a B C vltra centrum T ergo a G maior erit, quàm a C, & per consequens a k maior quam a I; est enim vt a G ad a C, ita quadratum a k ad quadratum a I ex constructione. cum itaque a I minor sit, quàm a K; maior autem, quam a F. poterit a puncto a ad circumferentiam F K duci recta a M æqualis a I. ducatur igitur a M, eaque

pro-

Producatur ex parte A donec secet semicirculum A B C in O; circulum vero A
F E D completum in H. & iungatur G H, cui parallela agatur C R, secans
lem. 17 rectam A H in R. rectangulum igitur M A R * æquale erit quadrato A I,
hoc est quadrato A M. quare æquales erunt A R, A M.

ibid. Et quoniam est vt A G ad A C * ita M O ad O R, & ita V Z ad Z L, ex constructione; erit vt M O ad O R, ita V Z ad Z L. & permutando vt M O ad V Z, ita O R ad Z L. & ita * M R ad V L; omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed M O, cum sit omnium interceptarum * minima, minor est quam V Z: ponitur enim V Z maior minima; ergo & M R minor erit quam V L. & consequenter A M, vel A I minor quam V N, dimidia videlicet minor, quam dimidia. quod erat ostendendum.

a quinci len. 28

Quo autem casu rectæ V N addenda sit recta æqualis N S, quóue auferenda ratio his constat præceptis. B

Præceptum primum.

SI ratio A D ad A F non sit maior ratione A G ad A C, rectæ V N addenda est recta æqualis N S.

Præceptum secundum.

SI vero ratio A D ad A F maior sit ratione A G ad A C, & semicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel ipsum centrum attingat; rectæ V N auferenda est recta æqualis N S. C

Præceptum tertium.

SI autem semicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat, nec præterea V Z data maior sit minore rectarum A K, F C rectæ V N poterit siue addi, siue auferri recta æqualis N S, in hoc enim casu recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F K, A B C, ex vtraque parte minimæ. & ideo duobus modis Problema absolui, nam si auferatur, aptabitur ea recta è regione F C. si vero addatur aptabitur è regione A K.

Præceptum quartum.

SI vero V Z data maior sit minore rectarum A K, F C, recta ipsi V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F K, A B C ex vna tantum parte minimæ, nempe, è regione maioris rectarum A K, F C. Itaque existente A K maiore, quam F C, rectæ V N addenda est recta æqualis N S; existente minore, auferenda. D

Nunc ostendendum est rectam V P sumptam prout præcepta docent non esse minorem, quam A F, nec maiorem quam A K. atque punctum Z existere in recta P L, quocirca quatuor Lemmata proponuntur.

Lem-

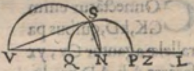
Lemma XXIX.

A Sit ratio A D ad A F non maior ratione A G ad A C. Dico V P cõpositam ex V N, N S, maiorem esse, quam A F, minorem quam A K. atque punctum z existere in recta P L.

Connectantur enim G K, k D, quibus parallelæ agantur C y, y x secantes A k, A D in punctis Y x; erit igitur * vt A G ad A C, ita F C ad C X. sed ita est quoque V z ad z L, ex cõstructione: ergo vt v z ad z L, ita erit F C ad C x. Et permutando vt V z ad F C, ita z L ad C x. & ita

F A 4.
A C 1 ½ Lem. 17
C G 2
A D 9
A K 6
A I √ 13

B quoq; v L ad F x; * est enim vt vna antecedentium ad vnam consequentium, ita oẽs antecedentes ad omnes cõsequentes. sed v z ponitur maior, quàm F C cum ipsa F C * minima sit omnium, quæ inter circumferentias F k, A B C interijciuntur, ergo & V L maior erit quam F X. 12 quinti lem. 17



Et quoniam æquales sunt V N, N L ex constructione, & æquales quoq; N Q N P, vt semidiametri. ergo fiunt quoque æquales V Q, L P. quare rectangulum P V Q æquale erit rectangulo V P L, sed rectangulum P V Q * æquale est quadrato V S, hoc est quadrato A I, seu * rectangulo F A x. ergo rectangulum v P L æquale erit rectangulo F A x. quare proportionales erunt v P, F A, A X, P L. sed v L composita ex extremis ostensa est maior quam F x composita ex medijs, ergo altera extremarum v P, P L * maxima erit, altera minima. sed v P maior est, quam P L. ergo ipsa v P maxima erit, atque adeo maior quam A F. quod est primum. 36 tertij lem. 17. Th. 2 huius

C

Deinde compleatur circulus F E, D R, quem K A producta secet in R. Quoniam igitur est vt A G ad A C, * ita A k ad a y. & ita quoque v z ad z L, ex constructione, erit vt v z ad z L, ita A k hoc est a R ad a Y, & permutãdo vt v z ad A R, ita z L ad A y. & consequenter ita v L ad R y. omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed v z minor est, quam A R vel A k, quæ est maxima omnium interceptarum inter circumferentias F k, A B C; ponitur enim v z minor maxima, ergo & v L minor erit quàm R y. lem. 17

D Et quoniam rectangulum P v Q, vel v P L * æquale est quadrato v S, hoc est quadrato A I, cui quoque * æquale est rectangulum y A K, hoc est y A R; æqualia erunt rectangula v P L, y A R; & ideo proportionales v P, y A, A R, P L. sed v L composita ex extremis ostensa est minor, quam R y composita ex medijs. ergo altera mediarum y a, a R maxima erit, altera minima: sed a R, maior est quam a y; ergo ipsa a R maxima erit, & per consequens v P minor quã a R, hoc est quam a K. quod est secundum. 36 tertij lem. 17

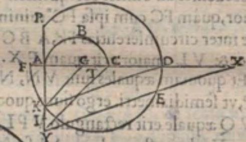
Rursus quoniam est, vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratũ a I, & ita v z ad z L, vtrumque ex constructione, erit vt v z ad z L, ita quadratum a k ad quadratũ A I, hoc est ad quadratũ v S, seu ad * rectangulũ P v Q, vel v P L. 36 tertij sed vt V Z ad Z L, ita est quoq; quadratū V Z ad rectāgulū V z L; eandē enim habent altitudinē V z, ergo vt quadratum V z ad rectangulū v z L, ita erit quadratū A K ad rectangulū V P L; sed quadratum V z minus est quadrato A K; A

lem. 27 ponitur enim recta V z minor, quàm A k, quæ* est maxima interceptarū. ergo

lem. 18 & rectangulum V Z L minus erit rectāgulo v P L. quare punctum P* propinquius erit ipsi N, quàm punctum Z. atq; est vtrūque in medietate N L. ergo punctum Z erit in recta P L, quod est tertium. quare constat propositum.

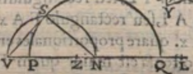
Lemma XXX.

Sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & semicirculus A B C, vel extendatur vltra centrum circuli D E F, vel saltem ipsum centrum attingat, Dico V P differentiam rectarum V N, N S maiorem esse, quam A F, minorem quam A k. & punctum z existere in recta P L. B



Connectātur enim GK, kD, quibus parallelæ agantur Cy, yx secātes A k, A D productas in punctis y x. erit

lem. 27 igitur vt a G ad a C* ita Fc ad c x; sed ita est quoque V z ad z L, ex constructione. ergo vt v z ad z L, ita erit Fc ad cx. C



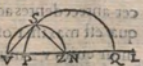
& permutādo vt v z ad

13. quinti FC, ita z L ad C x.* & ita quoq; v L ad F x; oēs videlicet antecedētes ad oēs cōse-

lem. 18 quētes; sed v z ponitur minor, quā FC, cum sit ipsa FC* maxima omnium, quæ inter circūferentias F K, ABC interijciuntur. ergo & v L minor erit, quā F x.

Et quoniā æquales sunt VN, NL, & æquales quoq; NP, NQ. ergo fiunt quoque æquales VP, LQ, quare rectangulū PvQ æquale erit rectangulo vPL; sed

36. tertii rectāgulū P v Q* æquale est quadrato v s, hoc est quadrato a I, cui quoq; æquale est rectāgulū F a x. ergo rectangulum v P L æquale erit rectangulo F a x. quare proportionales erūt v P, F a, a x, PL. D



sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quam F x com-

Th. 2 huius posita ex medijs. ergo* altera mediarū F a, a x maxima erit, altera minima; itaq; aF, quippe quę minor est, quam a x, minima erit, & per consequens v P maior erit quam ipsa a X. quod est primum.

Deinde compleatur circulus FE, DR, quem K a producta secet in R. Quo-

lem. 27 niam igitur est, vt a G ad aC, *ita ak ad a y; & ita quoque v z ad z L ex constru-

A ſtructione: erit vt v z ad z L, ita a k, vel a R ad a Y; & permutando vt v z ad a R, ita z L ad a y; & *ita quoque v L ad R y; omnes videlicet antecedentes ad omnes conſequentes: ſed v z maior eſt quam a R, ponitur enim v z maior, quam a k, quæ eſt *minima interceptarum inter circumferentias f k, a B C. ergo & v L maior erit, quàm R y. xij. quinti lem. 28

Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L *æquale eſt quadrato V S, vel quadrato A I, cui quoque *æquale eſt rectangulum y A k, hoc eſt y A R; erũt æqualia rectãgula V P L, Y A R, & ideo proportionales V P, Y A, A R, P L: ſed V L compoſita ex extremis oſtenſa eſt maior, quam R y, compoſita ex medijs. ergo *altera extremarum V P, P L, maxima erit, altera minima. ſed V P minor eſt quam P L; ergo ipſa V P minima erit, & per conſequens minor, quã A R, hoc eſt quam A K; quod eſt ſecundum. 16 tertij lem. 17. Th. 3 huius

B

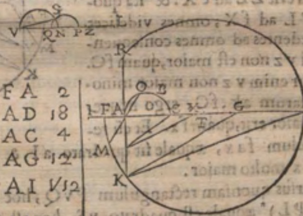
Poſtremo cum ſit V P minor quam A K, & A K minor quam V Z, vt demonſtrauimus: erit V P multo minor, quàm V Z, itaque punctum Z erit in recta P L, quod vltimo loco erat oſtendendum.

Lemma XXXI.

Rurſus ſit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C: ſed ſemicirculus A B non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipſum centrum attingat, nec præterea data V Z ſit maior minore rectarum A K, F C. Dico rectam V P æqualem, ſiue aggregato, ſiue differentiæ rectarum V N, N S non eſſe maiorem, quam A K, nec minorem, quam A F, & punctum

C Z exiſtere in recta P L.

Compleatur enim circulus F E, D R, quem K A producta ſecet in R: & iungantur G k, k D. quibus parallelæ agantur C Y, Y X ſecantes A K, A D in punctis Y X, & ſit primum V P, æqualis compoſitæ ex V N, N S. Quoniam igitur eſt vt A G ad A C, *ita Ak ad Ay, & ita quoq; VZ ad ZL, ex cõſtructione: erit vt Vz ad zL, ita Ak, hoc eſt AR



D ad Ay; & permutando vt Vz ad AR, ita zL ad Ay. & conſequenter, *ita VL ad R y. omnes videlicet antecedentes ad omnes cõſequentes: ſed Vz non eſt maior, quàm AR; ponitur enim V z nõ maior minore rectarũ Ak, FC. ergo neq; V L maior erit, quam R y. Et quoniam rectangulũ PVQ, vel VPL (ſunt enim æquales VQ, PL) *æquale eſt quadrato VS, hoc eſt quadrato A I, cui quoq; *æquale eſt rectãgulũ Y A K; rectangulũ VPL æquale erit rectãgulo y a k, hoc eſt y AR; quare *proportionales erunt VP, y A, AR, PL. ſed vL compoſita ex extremis oſtẽſa eſt nõ maior, quã R y cõpoſita ex medijs. ergo ſi eſt minor erit *altera mediarũ y A, AR maxima, altera minima. ſed AR maior eſt, quàm A Y. ergo lem. 15 3 quinti 16 tertij lem. 17 16 ſexti Th. 3 huius

ergo ipsa AR, hoc est AK maxima erit, & per consequens V P minor quam A k. A
Theor. iij huius Si vero V L cōposita ex extremis æqualis est y R cōpositæ ex medijs, maior extremarum maiori mediarum * æqualis erit, hoc est V P æqualis A R, vel A K.

Rursus quoniam V P maior est, quàm V S, hoc est quam A I, ipsaque A I maior quam A F, erit V P multo maior ipsa A F, Recta igitur V P æqualis cōpositæ ex V N, N S, non est maior, quam a k, nec minor quàm a F.

Et quoniam est, vt a G ad a C, ita quadratum a K ad quadratum a I, & ita V z ad Z L; vtrumque ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita quadratum a K ad quadratum a I, vel ad quadratum V S, hoc est ad rectangulum P v Q, vel v P L; sed vt V z ad z L, * ita est quadratum V z ad rectangulum v z L; sunt enim eiusdem altitudinis V z; ergo vt quadratum v z ad rectangulum V z L; ita erit quadratum a K ad rectangulum v P L, sed quadratum v z nō B
est maius quadrato a k, ponitur enim recta v z non maior minore rectarum a k, F C, ergo si est minus, erit & rectangulum v z L minus, rectangulo v P L. quare punctum P propinquius erit ipsi N, quam punctum z. atque est vtrumque in medietate N L, ergo punctum z erit in recta P L. Si vero quadratum v z æquale est quadrato a K, erit & rectangulum v z L æquale rectangulo v P L. quare punctum z idem erit, quod punctum P. itaque z erit in recta P L.

Sed sit v P æqualis differentiæ rectarum v N, N S. Quoniam igitur est, vt a G ad a C, * ita F C ad C X, & ita quoque v z ad z L, ex constructione; erit vt v z ad z L, ita F C ad C X. & permutando vt v z ad f C, ita erit Z L ad c X. &* ita quoque V L ad f X; omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed v z non est maior, quam f C. ponitur enim v z non maior minore rectarum a k, f C. ergo neque v L maior erit, quàm f x. Et cū rectangulum f a x, æquale sit quadrato a I, & recta a I * maior, quàm a f, erit a x multo maior.

C

Rursus quoniam rectangulum P v Q, hoc est v P L (sunt enim æquales v Q, P L) * æquale est quadrato v S, hoc est quadrato a I, cui quoque æquale * est rectangulum f a X; ipsa rectangula v P L, f a X æqualia erunt, & ideo proportionales v P, f a, a X, P L. sed v L composita ex extremis ostensa est non maior quam f X, composita ex medijs. ergo si est minor, erit altera * mediarum f a, a X maxima erit, altera minima. sed a X ostensa est maior quam a f; ergo ipsa f a minima erit. quare v P maior, quàm a f. Si vero v L composita ex extremis æqualis est f x compositæ ex medijs, minor * extremarum v P, P L, nempe ipsa v P, minori mediarum, idest ipsi a f, æqualis erit. D

Item

A Item quoniam est, vt A G ad A C, maior nempe ad minorem, ita quadratum A K ad quadratum A I, ex constructione; quadratum A K maius erit quadrato A I. vnde & recta A k maior quam recta A I; hoc est quam recta V S. sed V P minor est, quam V S. ergo multo minor erit, quàm A k. Recta igitur V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S non est maior quàm A K, nec minor, quàm A F.

Denique quoniam est, vt A G ad A C, maior ad minorem, ita V Z ad Z L, ex constructione, erit & V Z maior, quàm Z L. itaque punctum Z erit in medietate N L, & consequenter in recta P L. Recta igitur V P æqualis, siue compositæ ex V N, N S, siue differentiæ earundem non est maior, quam A K, nec minor, quàm A F. atque punctum Z existit in recta P L; quod
B erat ostendendum.

Scholium.

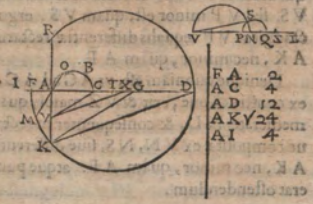
Manifestum est igitur si A D ad A F maiorem rationem habeat, quam A G ad A C, & semicirculus A B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum attingat, nec præterea data V Z maior sit minore rectarum A k, F C: Problema duobus modis posse absolui. nam si à puncto A ad circumferentiam F K ducatur recta A M æqualis A I, & producatur donec secet semicirculum A B C in O, erit M O minima omnium, quæ inter circumferentias F K, A B C intercipiuntur. & sumpta V P æquali compositæ ex V N, N S. ea maior erit quam V S, hoc est quam A M; non autem len. 28
C quam A K, vt demonstrauimus. itaque poterit à puncto A ad circumferentiam K M duci recta A E æqualis V P. Similiter sumpta V P æquali differentiæ rectarum V N, N S. ea minor erit, quam V S, hoc est quam A M, non autem quam A F, vt est demonstratum. poterit à puncto A ad circumferentiam M F duci recta A E æqualis V P. Itaque si ducatur A E æqualis compositæ ex V N, N S, aptabitur recta datæ V Z æqualis inter circumferentias K M, A O. Si vero ducatur A E æqualis differentiæ rectarum V N, N S, aptabitur ea recta inter circumferentias M F, O C. poterit itaque aptari ex vtraque parte minimæ, atque adeo Problema duobus modis absolui, vt in tertio præcepto monuimus.

D ## Lemma XXXII.

Rursus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C, & semicirculus a B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat; sed data V Z sit maior minore rectarum a k, F C. & à puncto a ad circumferentiam k F ducatur a M æqualis a I: est enim a I maior, quam lem. 26 a F; minor autem, quàm a k. Dico si a k maior sit, quàm F C compositam ex v N, N S, minorem esse, quàm a k, maiorem quam a M; sin minor differentiam ipsarum v N, N S maiorem esse, quam a F, minorem quam a M, atque punctum Z in vtroque Casu existere in recta P Z.

 Con-

Connectantur enim GK, KD, quibus parallelæ agantur Cy, yX secan- A
tes ak, a D in punctis y X. & compleatur circulus FE, DR, quem K a producta secet in R. & sit primum VP æqualis compositæ ex VN, NS, & A k maior quam fC. ergo ipsa AK maxima erit omnium interceptarum inter circumferentiam fk, ABC; quare recta datæ Vz æqualis poterit aptari inter circumferentias KM, a O; non etiam inter circumferentias MF, OC; cum sit Vz maior, quam



B

Corol lem. 31 FC, ex positione, ipsa vero FC* maxima omnium interceptarum inter circumferentias MF, OC.

Lem. 17 Quoniam igitur est, vt AG ad AC, *ita a K ad ay. & ita VZ ad zL, ex constructione; erit vt Vz ad zL, ita AK, hoc est AR ad ay; & permutando vt Vz ad AR, ita erit zL ad Ay. & ita *VL ad Ry. omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes. sed Vz minor est quam aR; ponitur enim Vz minor maxima aK, cui æqualis est aR; ergo & VL minor erit quam Ry.

38 tertij Et quoniam rectangulum PVQ* æquale est quadrato vS, vel quadra-
lem. 17 to AI, cui quoque *æquale est rectangulum yaK, hoc est yaR; ideo erunt C
16 sexti æqualia rectangula vPL, yaR, & ideo *proportionales vP, ya, aR, PL. sed VL composita ex extremis ostensa est minor, quam Ry composita ex me-
Th. 2. huius dijs. ergo altera *mediarum YA, aR maxima erit, altera minima. itaque aR, quippe quæ maior est quam ya, maxima erit, & consequenter vP minor quam ipsa aR, hoc est quam aK. Et cum ipsa VP maior sit quam vS, ea quoque maior erit quam aM; sunt enim æquales vS, aM, cum sit vtraque æqualis recta aI, ex constructione.

Rursus quoniam est vt aG ad aC, ita quadratum aK ad quadratum aI, & ita vZ ad zL: vtrumque ex constructione, erit vt vZ, ad zL, ita qua-
16 tertij dratum aK ad quadratum aI, hoc est ad quadratum vS, seu ad* rectan-
1 sexti gulum PvQ, vel vPL, sed vt vz ad zL, ita est *quoque quadratum vz D
ad rectangulum vzL; eandem enim habent altitudinem vz. ergo vt quadratum vz ad rectangulum vzL; ita erit quadratum ak ad rectangulum vPL. sed quadratum vz minus est quadrato ak; ponitur enim recta vz minor maxima, quæ est ak. ergo & rectangulum vzL, minus erit rectangulo vPL. quare punctum P propinquius erit ipsi N, quàm punctum z. atque ipsa puncta P z sunt in medietate NL. igitur punctum z erit in recta PL. existente igitur ak maiori, quàm FC, recta vP æqualis compositæ ex vN, NS, minor est, quàm Ak y maior quam aM; & punctum z existit in recta PL; quod est primum.

Dein-

A Deinde sit V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S, & A k minor, quàm F C. ergo F C* maxima erit omnium, quæ inter circumferentias F k, A B C intercipiuntur. quare recta datæ V Z æqualis poterit aptari inter circumferentias F M, O C, non autem inter circumferentias M k, A O; cum ponatur V Z maior, quàm A k, quæ est* maxima omnium interceptarum inter circumferentias k M, A O. Et quoniam est, vt A G ad A C *ita F C ad C x. & ita V Z ad Z L, ex constructione, erit vt V Z ad Z L, ita F C ad C x. & permutando vt V z ad F C, ita erit z L ad C x, & consequenter* ita quoque V L ad F x, omnes videlicet antecedentes ad omnes consequentes; sed V z minor est, quam F C; ponitur enim V z minor maxima interceptarum inter circumferentias F k, A B C. ergo & V L minor erit quam F x. lem. 18 coroll. lem. 18 lem. 17 12. quinti

B quam F x.

Et quoniam rectangulum f a x* æquale est quadrato a I, & recta a I maior quàm a f erit a x multo maior. lem. 17 lem. 28

Et quoniam rectangulum P V Q, vel V P L æquale est quadrato. V S; hoc est quadrato A I, cui quoque æquale est rectangulum f a x; rectangulum V P L, f a x æqualia erunt; & ideo proportionales V P, F A, A x. P L. sed V L composita ex extremis ostensa est minor, quam f x composita ex medijs. ergo altera mediarum f A, A x* maxima erit, altera minima. sed a x ostensa est maior quàm a f, ergo ipsa a f minima erit, atque adeo V P maior, quam a f. Ipsam autem V P minorem esse, quam a f manifestum est. nam cum sit V P minor quam V S; ea quoque minor erit, quam a M, Theor. 1 huius

C sunt enim æquales V S, a M; cum sit vtraque æqualis ipsi a I, ex constructione. Æque manifestum est punctum z existere in recta P L. nam cum sit vt a G ad a C, maior nempe ad minorem, ita V z ad z L ex constructione, erit & V z maior quam z L. quare punctum z erit in medietate N L, & consequenter in recta P L existente igitur a K minore, quam f C; recta V P æqualis differentiæ rectarum V N, N S, maior est, quam a f, minor quam a M. & punctum z existit in recta P L, quod secundo loco erat ostendendum.

Quamuis in tertio & quarto, ac etiam septimo Casu satis dictum sit de dignoscendo termino quæsitam a E indicante è duobus de quibus Æquatio explicabilis est; tamen in hoc quoque Casu, cum resolutio incidat in Æqua-

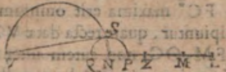
D tionem, de duplici termino explicabilem, non alienum videtur exempla ad huiusmodi cognitionem pertinentia subijcere.

Propositio prima.

Terminum indicantem quæsitam a E in semicirculis ad primum præceptum pertinentibus dignoscere.

Sit ratio a D ad a f non maior ratione a G ad a C. & oporteat iussum facere. Resumatur constructionis figura ad huiusmodi Casum pertinens. termini de quibus Æquatio explicabilis est sunt, V P maior, V Q mi-

minor, quorum VQ minor est, quam VS, hoc est quam a I, & consequenter multo minor, quam a E de qua quaritur, cum sit a I non maior quam AE: terminus igitur VQ non indicat ipsam AE; per consequens eam indicat VP, aggregatum rectarum VN, NS. Itaque existente ratione AD ad AF non maiori ratione AG ad AC, agnitus est terminus quæsitam AE indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum primum constitutum est; A



AF	4
AC	$1\frac{1}{2}$
CG	2
AD	9
AK	6
AI	℞ $15\frac{3}{7}$

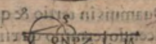
B

Propositio Secunda.

Terminum indicantem quæsitam AE in semicirculis ad secundum præceptum pertinentibus dignoscere.

A	F		2
A	D		18
A	C		4
A	G		12
A	I	√	12

Sit ratio AD ad AF maior ratione AG ad AC, & semicirculus ABC, vel extendatur vltra centrum circuli DEF, vel saltem ipsum centrum attingat. Oportet terminum indicantem quæsitam AE dignoscere. Resumatur constructionis figura ad hunc Casum pertinens. Termini de quibus æquatio explicabilis est, sunt, VP minor, VQ maior: quorum VQ maior est quam VS, hoc est quam AI, & consequenter multo maior quam AE quæsita, est enim AI non minor quam Ak. Nam cum sit vt AG ad AC, ita quadratum Ak ad quadratum AI, ex constructione, & AG in hac semicirculorum positione non maior, quam AC. ergo neque quadratum AK maius erit quadrato AI, quare nec recta Ak maior quam recta AI, hoc est nec AI minor quam Ak. Terminus igitur VQ non indicat ipsam AE, C D

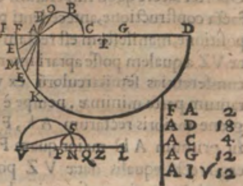


er-

A ergo eam indicat V P differentia rectarum V N, N S. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans vt faciendum erat. Hinc præceptum secundum constitutum est.

Propositio tertia.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad tertium præceptum pertinentibus dignoscere.



RVrsus sit ratio A D ad A F maior ratione A G ad A C; sed semicirculus A B C. non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat, nec præterea data V Z sit maior minore rectarum A K, F C. Oportet terminum indicantem quæsitam A E dignoscere. Resumatur cõstructionis figura ad hunc Casum pertinens. Quoniam igitur est vt A G ad A C, ita quadratum A k ad quadratum A I, ex constructione, & A G maior quam A C, erit & quadratum A k maius quadrato A I Vnde & recta A k maior, quam recta A I, seu quod idem est A I minor quam A k; sed ipsa A I maior est, quàm A F, ergo poterit à puncto A ad circumferentiam lem. 16

C F K duci recta a M æqualis a I; ducatur igitur a M, & producatur donec secet circulum a B C in O. Aut igitur a E quæsita terminatur in circumferentia F M aut in circumferentia M k; potest enim terminari in vtraque, nam recta datæ V Z æqualis potest aptari inter circumferentias semicirculorum ex vtraque parte minimæ, quæ est M O; cum ipsa V Z ponatur non lem. 18

maior minore rectarum a k, F C. Si igitur a E terminatur in circumferentia F M. ea minor est, quam a M hoc est quam a I, seu quam V S, & multo minor quam V Q aggregatum rectarum V N, N S. quod est vnus è duobus terminis, de quibus Æquatio explicabilis est. alter vero terminus est V P differentia rectarum V N, N S. Terminus igitur V Q non indicat quæsitam a E. ergo eam indicat V P.

D Si vero ipsa a E terminatur in circumferentia M K. ea maior est, quam a M, hoc est quam a I, seu quam V S. & multo maior quam V P. recta igitur V P non indicat a E quæsitam, ergo eam indicat V Q. Cum igitur ratio a D ad a F maior est ratione a G ad a C, & semicirculus a B C non extenditur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingit, nec præterea data V Z maior est minore rectarum a K, F C, indicat quæsitam a E tum differentia tum aggregatum rectarum V N, N S; differentia quidem cum a E desinit in circumferentia F M, aggregatum vero cum desinit in circumferentia M k. Agnitus est igitur terminus quæsitam a E indicans, vt faciendum erat. Hinc præceptum tertium constitutum est.

Propositio quarta.

Terminum indicantem quæsitam A E in semicirculis ad præceptum quartum pertinentibus dignoscere.

Rursus sit ratio a D, ad a F maior ratione a G ad a C, & semicirculus a B C non extendatur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingat; sed data V Z sit maior minore rectarum a k, F C. Oportet facere quod imperatum est.

Facta constructione, antecedenti propositione, manifestum est rectam datæ V Z æqualem posse aptari inter circumferentias semicirculorũ ex vna tantum parte minimæ. nempe è regione maioris rectarum A k, F C. sit primum A k maior quam F C. ergo recta æqualis datæ V Z potest aptari inter circumferentias k M. A O, non etiam inter circumferentias M F, O C, cum sit V Z maior,

F A	2
A C	4
A G	16
A D	22
A K	$\sqrt{44}$
A I	$\sqrt{11}$

corol. lem. 25 quam F C vt ponitur. ipsaque F C * maxima omnium, quæ inter circumferentias M F, O C interijciuntur. ergo A E quæsita desinit in circumferentia K M. vnde maior est quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S. & multo maior quam V Q differentia rectarum V N, N S. terminus igitur V Q non indicat quæsitam A E. ergo eam indicat terminus V P, aggregatum videlicet rectarum V N, N S.

Sed sit F C maior, quam A k ergo recta æqualis datæ V Z potest aptari inter circumferentias M f, O C, non etiam inter circumferentias k M, A O, atque A E quæsita desinit in circumferentias M F. & ideo minor est quam A M, hoc est quam A I, seu quam V S, & consequenter multo minor quam V P, aggregatum rectarum V N, N S. terminus igitur V P non indicat quæsitam A E, ergo V Q differentia ipsarum V N, N S eam indicat. Itaque cum ratio A D ad A F maior est ratione A G ad A C, & semicirculus A B C nec extenditur vltra centrum circuli D E F, nec ipsum centrum attingit, sed data V Z maior est minore rectarum A k, F C. existente A K maiore, quam F C, aggregatum rectarum V N, N S indicat A E quæsitam, existente vero F C maiore, quam A K differentia. Agnitus est igitur terminus quæsitam A E indicans, vt faciendum erat. Atque hinc præceptum quartum constitutum est.

Magna est inter grauissimos omnium ætatum viros de circuitu terræ discrepantia. Aristoteles in secundo libro de cælo asserit ex Mathematicorum illius temporis authoritate terræ circuitum esse stadiorum 400000. hoc est milliariorum 50000. Archimedes vero in libro de arenæ numero videtur

A tur assensisse ijs, qui opinabantur ipsum circuitum esse stadiorum 300000. siue milliariorum 37500. At Hypparcus referente Plinio lib. 2. cap. 108. tribuit circuitui terræ stadia 277000. quæ sint milliaria 34625. Erathostenes vero stadia 252000. vel milliaria 31500. Dionysiodorus autem nobilis Geometra scribens ex centro terræ ad superos, vt Plinius refert eodem libro cap. vltimo affirmat se à sepulchro ad infimam terram peruenisse, esseque id spatium, hoc est semidiametrum terræ stadiorum 42000. hoc est milliariorum 5250. ex quo secundum Archimedis computationem fit circuitus eius milliariorum 33000. At Ptolæmeus, quem recentiores sequuntur affirmat circuitum terræ continere stadia 180000. siue milliaria 22500. Alphraganus, ac Tebitius tribuunt circuitui terræ stadia 163200. siue milliaria 20400.

B Hæc tanta opinionum diuersitas me impulit vt cogitarem quomodo circuitus terræ inueniri posit, & quidem duos inueni modos, quibus id assequi poterimus, eosque Geometrica ratione demonstrabo, quorum alter ita se habet.

Sumantur in crepidine lacus, silentibus ventis, duo loca distantia inter se spatio minimum trium milliariorum, in quorum altero erigatur ad perpendiculum supra aquam lamina habens foramen in latitudinem ductum, à tergo autem laminæ iuxta ipsum foramen ponatur lumen, & sit interuallum inter sumitatem foraminis, & superficiem aquæ, vtpote vnius pedis; in altero autem loco sit mensor attollens sese, vel deprimens donec visu perueniat ad

C lumen per lineam tangentem superficiem aquæ. ita vt si oculus, vel modicum deprimeretur, lumen illud ob rotunditatem aquæ, quæ tunc inter oculum, & lumen interponeretur videri non posset; superficies enim aquæ consistentis, atque manentis sphærica est, cuius sferæ centrum idem est quod centrum terræ, vt demonstrauit Archimedes. & notetur diligenter interuallum, quod est inter oculum mensoris, & superficiem aquæ, quemadmodum notatum est interuallum inter sumitatem foraminis laminæ, & superficiem aquæ; datis enim his duobus interuallis, & distantia duorũ locorũ in crepidine lacus sumptorum; dabitur diameter terræ, vt postea demonstrabimus, & consequenter per calculum Archimedæum, dabitur & circuitus eius. Dixi huiusmodi operationem debere fieri in aliquo lacu, non autem in mari; nam propter

D fluxum, & refluxum maris fallax euaderet operatio. cum ad hoc negotium requiratur aqua consistens, & manens, quapropter fieri hæc debere dixi silentibus etiam ventis, ne superficies aquæ turbaretur; Quin etiam magis oportunus esset riuus, vel canalis in aliqua planitie in directum extensus qualis in Germania inferiori, & præcipuè in Battauia vidi, cum in ijs tranquilla omnino, & immobilis maneat aqua. Alter autem modus inueniendi circuitum terræ, & quidem facilior atque exactior priore ita se habet.

Eligantur duo montes, ex quibus maris prospectus pateat, ita vt ab aliquo loco altioris montis per apicem montis depresioris visus noster extendi posit vsque ad circulum orizontalem, marisque contactum; deinde exquiratur

de-

depressionis montis altitudo, nempe perpendiculum ab eius vertice vsque ad superficiem maris. A

Similiter exquiratur altitudo loci, à quo per apicem montis ad orizontem visus extenditur, hoc est perpendiculum ab eo loco vsque ad maris superficiem; denique inueniatur distantia, quæ est inter dictum locum, & dictum apicem montis; quibus diligenter peractis, dabitur diameter terræ, vt perspicuum fiet, atque adeo & circuitus. Vnico igitur Problemate duos Casus habente omnia quæ dixi prestabo.

Lemma ad id quod sequitur.

Si recta linea per centrum circuli ducta alteram rectam in circulo bifariam non ad rectos angulos secuerit centrum circuli in earum sectione erit. B

Recta linea a B per centrum circuli ducta secet alteram rectam C D bifariam non autem ad rectos angulos in E. Dico punctum E esse centrum circuli. Ducatur enim per punctum E recta linea F E G ipsi C D ad rectos angulos, ergo cum sint æquales C E, E D centrum* circuli erit in recta F G, sed idem centrum est quoque in recta a E B, ergo centrum illud erit in puncto E, quod erat ostendendum.

*Corol. prop. 1 tertij

Problema III.

Data base trianguli, & excessibus, quibus crura superant eius altitudinem, inuenire triangulum.

Hoc Problema duos Casus habet, vel enim altitudo trianguli, hoc est perpendicularis è vertice demissa intra triangulum cadit, vel extra. Primo Casu oportebit compositam ex excessibus minorem esse base, secundo vero differentiam excessuum minorem esse base. C

Resolutio primi Casus.

Sit data basis trianguli B, excessus vero, quo crus maius superat altitudinem D, excessus autem quo crus minus eandem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulum.

D

Factum iam sit, & sit illud triangulum H E F, in cuius basim cadat perpen-

A pendicularis H O, & centro H interuallo H O describatur circulus I O P secans crura H e, H f in punctis I K. productum vero crus maius e H in P. erunt igitur I c, K f excessus, quibus crura H e, H f superant perpendicularem H O. Quoniam igitur dantur basis E F, excessus maior I E excessus minor k F. sit basis B excessus vero maior D, excessus autem minor G, vt in figura resolutionis designatum est. Rursus centro H, interuallo autem H F alius circulus describatur, secans basim E F in M, crus vero E H in L. ipsumque productum in N, differentia igitur segmentorum E O, O F erit E M cum sint * æquales M O, O F, differentia autem crurum H E, H F erit E L, 16. tertij ea ipsa quæ est excessuum I E. k F; eaque in figura resolutionis erit D — G. Quæratur E M differentia segmentorum E O, O F. ea estò A. ergo B $+$ A

B erit duplum segmentum E O. vnde simplum erit B $\frac{1}{2}$ $+$ A $\frac{1}{2}$. cor. 3 prob. 1 lib. primi

Et quoniam rectangulum L E N * æquale est rectangulo M E F, erit vt L e ad E M, ita E f ad E N. hoc est in figura ad resolutionem pertinente erit vt D — G ad A, ita B ad $\frac{b \text{ in } a}{d-g}$. itaque $\frac{b \text{ in } a}{d-g}$ erit ipsa E N, à qua si auferatur P N hoc est G; reliqua E P erit $\frac{b \text{ in } a}{d-g}$ — G. 36 tertij

Et quoniam rectangulum I E P * æquale est quadrato E O, hoc est rectangulum sub D, & $\frac{b \text{ in } a}{d-g}$ — G æquale quadrato ex B $\frac{1}{2}$ $+$ A $\frac{1}{2}$.

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a}{d-g}$ — B in G æquabitur B Q $\frac{1}{4}$ $+$ A Q $\frac{1}{4}$ $+$ B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Potestas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d-g}$ — D in G 4 æquabitur B Q $+$ A Q $+$ B in A 2.

Auferantur vtrinque B in A 2, & A Q. addatur autem D in G 4. vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

C $\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d-g}$ — B in A 2 — A Q æquabitur B Q $+$ D in G 4.

Vt autẽ æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{d \text{ in } b}{d-g}$ in integrá magnitudinẽ; ea esto F. nam si fiat vt D — G ad D, ita B ad aliã, quæ sit F. erit F eadem quæ $\frac{d \text{ in } b}{d-g}$. atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d-g}$. transmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 — B in A 2 — A Q, æquabitur B Q $+$ D in G 4.

Seu quod idem est F 4 — B 2 in A — A Q æquabitur B Q $+$ D in G 4.

Et explicata secundum tertium Canonem Æquatione.

F 2 - B - L. V. (F 2 - B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

Vel F 2 - B $+$ L. V. (F 2 B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

D In hac Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, quorum minor tantum indicat quæsitam E M differentiam segmentorum basis. nam terminus maior manifesto se ostendit maiorem ipsa differentia. immo etiam tota base, vt in opere constructionis perspicuum fiet.

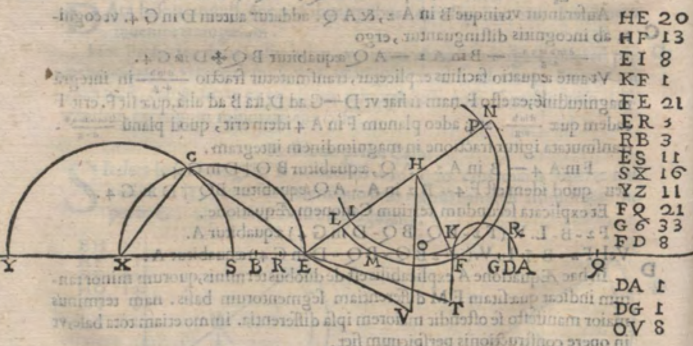
Porisma.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam; differentiæ autem, qua dupla ea recta superat basim dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus. reliqua erit terminus minor.

Vel eidem differentiæ addatur eadem recta, & fiet terminus maior.

Compositio primi Casus.

SIt data basis trianguli E F: excessus autem quo crus maius superat altitudinem trianguli F D, excessus vero, quo crus minus eandem altitu-



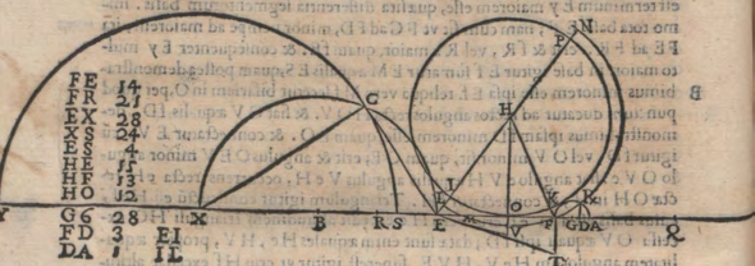
dinem superat D A, ex quibus excessibus composita F A sit minor base E F. Oportet inuenire triangulum. Erigatur ex puncto D perpendicularis D ℞, quam semicirculus in F A descriptus secet in ℞. ex puncto autem F. demittatur perpendicularis F T dupla ipsius D ℞. & connectatur F T. quadratum igitur F T quadruplum est quadrati D ℞, vel rectan-

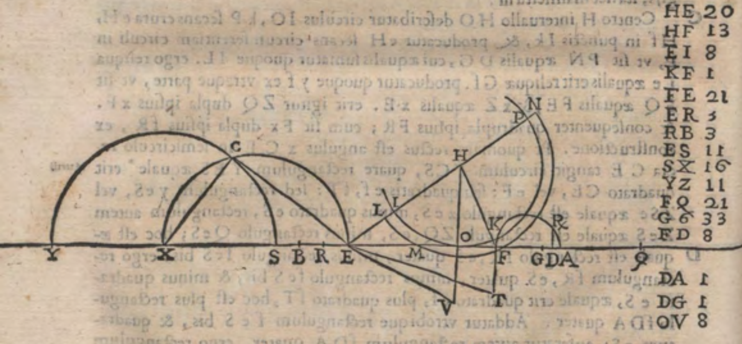
A ctanguli F D A. Deinde in F D ſumatur D G æqualis D A. & fiat vt F G ad F D, ita F E ad aliam. quæ ſit F R, eaque duplicetur in X, & in E x deſcribatur ſemicirculus x C E. in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonſtrabimus minorem eſſe diametro E x. & connectatur x C. & centro x interuallo x C deſcribatur circulus ſecans diametrum E x in S, eandemque productam in y. Termini igitur de quibus A in Æquatione explicabilis eſt ſunt; E S minor; E y maior. & manifeſtum eſt terminum E y maiorem eſſe, quæſita differentia ſegmentorum baſis. immo tota baſe E F; nam cum ſit vt F G ad F D, minor nempe ad maiorem; ita F E ad F R. erit & f R, vel R x maior, quam f E. & conſequenter E y multo maior. in baſe igitur E f ſumatur E M æqualis E S, quam poſtea demonſtra-

B bimus minorem eſſe ipſa E f. reliqua vero M f ſecetur bifariam in O, per quod punctum ducatur ad rectos angulos recta H O V. & fiat O V æqualis f D. demonſtrabimus ipſam f D minorem eſſe, quam E O. & connectatur E V. cũ igitur f D, vel O V minor ſit, quam O E; erit & angulus O E V minor angulo O V e. fiat angulo e V H æqualis angulus V e H, occurrens recta e H rectæ O H in H, & connectatur f H. Triangulum igitur conſtructũ eſt H e f, cuius baſis eſt data e f, crus vero H e excedit altitudinem trianguli H O exceſſu O V æquali ipſi f D; datæ ſunt enim æquales H e, H V, propter æqualitatem angulorum H e V, H V E. ſupereſt igitur vt crus H f excedat altitudinem H O exceſſu æquali datæ D A; id autem, repetitis Reſolutionis veſtigijs, ita fiet manifeſtum.

C Centro H interuallo H O deſcribatur circulus I O, k P ſecans crura e H, H f in punctis I k, & producatur e H ſecans circumferentiam circuli in P, vt ſit P N æqualis D G, cui æqualis ſumatur quoque I L. ergo reliqua L e æqualis erit reliquæ G f. producatur quoque y f ex vtraque parte, vt ſit F Q æqualis F E, & x Z æqualis x E. erit igitur Z Q dupla ipſius x F. & conſequenter quadrupla ipſius F R; cum ſit F x dupla ipſius f R, ex conſtructione. Et quoniam rectus eſt angulus x C E in ſemicirculo recta C E tangit circulum Y C S, quare rectangulum Y E S æquale * erit quadrato C E, vel e F: ſeu quadratis e f, f T: ſed rectangulum y e S, vel Z S e æquale eſt rectangulo z e S, minus quadrato e S, rectangulum autem Z e S æquale eſt rectangulo Z Q, e S, minus rectangulo Q e S; hoc eſt æ- 16 tertij

D quale eſt rectangulo f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis, & minus quadrato e S, æquale erit quadrato e f, plus quadrato f T, hoc eſt plus rectangulo f D A quater. Addatur vtrobique rectangulum f e S bis, & quadratum e S; auferatur autem rectangulum f D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f D A quater, æquale erit quadratis e f, e S, & rectangulo f e S bis, hoc eſt * æquale erit quadrato f S, vel quadrato e O quater. recta enim f S dupla eſt ipſius e O, cum ſint æquales S E, e M, & æquales quoque M O, O f, vtræque ex conſtructione. cum igitur quadruplum ſit æquale quadruplo, erit & ſimplum æquale ſimplo, 4 ſecundi hoc est rectangulum F R, E S, vel F R, E M, minus rectangulo f D A, 36 tertij æquale erit quadrato E O. sed quadrato e O æquale est rectangulum I E P, hoc est rectangulum I e N, minus rectangulo e I, P N, vel minus rectangulo e I L, ergo rectangulum f R, e M, minus rectangulo f D A, vel minus rectangulo e I L æquale erit rectangulo I e N, minus rectangulo e I L, addito communi rectangulo e I L rectangulum F R, e M, æquale





erit rectangulo I e N, vt igitur e M ad e N, ita erit e I ad F R. sed cum sit vt f G ad f D, hoc est vt e L ad e I, ita F e ad F R, ex constructione. est quoque permutando vt e L ad e F, ita e I ad f R. ergo vt e M ad E N, ita erit e L ad e F. quare rectangulum F e M sub extremis æquale erit rectangulo L e N sub medijs. ac proinde puncta L M, f N in circu-

lo

A loerunt, cuius quidem circuli, & centrum * est in recta H V secante rectam Mf bifariam, & ad rectos angulos in O, atque ipsa V H secat rectam N L bifariam in H; cum sint æquales N P, I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate præmisso punctum H erit centrum circuli L M, F N. atque adeo idem, quod centrum circuli I K P., vnde æquales erunt H F, H L. sunt autem æquales & H K, H I. ergo & reliqua K F, idest excessus, quo crus H f superat H O altitudinem trianguli. reliquæ I L, hoc est D A datæ æqualis erit. Ad datam igitur basim E f constitutum est triangulum H E f, cuius crura H E, H f superant altitudinem H O excessibus I E, K f, æqualibus datis f D, D A. quod facere oportebat. *coro. 1 propertij*

B At vero rectam e T minorem esse diametro e X sic demonstrabimus.

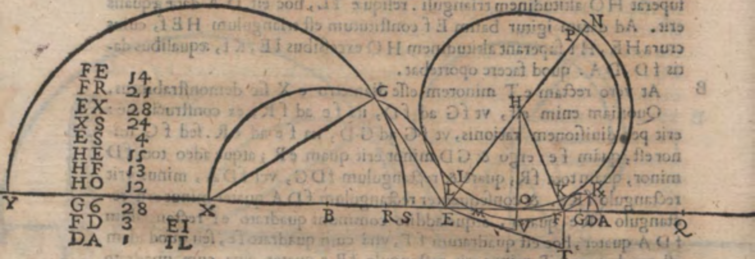
Quoniam enim est, vt f G ad f D, ita f e ad f R, ex constructione: erit per diuisionem rationis, vt f G ad G D, ita f e ad e R. sed f G minor est, quàm f e; ergo & G D minor erit quam e R; atque adeo tota f D minor, quam tota f R; quare & rectangulum f D G, vel f D A, minus erit rectangulo f R e. & consequenter rectangulum f D A quater minus erit rectangulo f R e quater, atque addito communi quadrato e f rectangulum f D A quater, hoc est quadratum f T, vnà cum quadrato f e, seu quod idem est quadratum e T minus erit rectangulo f R e quater, vna cum quadrato f e. hoc est minus erit quadrato compositæ ex f R, R e, seu quod idem est quadrato X e. sunt enim æquales f R, R X, ex constructione. quare & recta e T minor erit, quam recta X e, quod erat ostendendum.

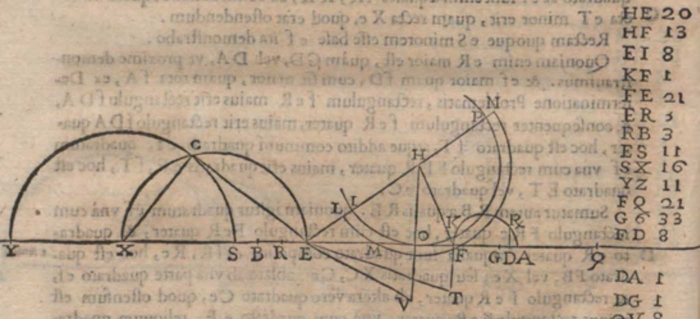
C Rectam quoque e S minorem esse base e f ita demonstrabo.

Quoniam enim e R maior est, quàm G D, vel D A, vt proxime demonstrauimus. & e f maior quam f D, cum sit maior, quàm tota f A, ex Determinatione Problematis, rectangulum f e R maius erit rectangulo f D A, & consequenter rectangulum f e R quater, maius erit rectangulo f D A quater, hoc est quadrato f T, atque addito communi quadrato e f, quadratum e f vna cum rectangulo F E R quater, maius erit quadratis e F, f T, hoc est quadrato E T, vel quadrato e C.

Sumatur autem R B æqualis R E. quoniam igitur quadratum e f vnà cum rectangulo F R e quater, hoc est cum rectangulo F e R quater, & quadrato e R quater, * æqualia sunt quadrato compositæ ex f R, R e, hoc est quadrato F B, vel X e; seu quadratis X C, C e. ablato ab vna parte quadrato e f, & rectangulo F e R quater, ab altera vero quadrato C e, quod ostensum est minus rectangulo F e R quater, vnà cum quadrato e F; reliquum quadratum e R quater, hoc est quadratum e B reliquo quadrato X C minus erit, quare & recta e B minus erit, quàm recta X C, vel X S. atque addita, vel abtata vtrinque B S fiet e S minor, quàm X B, hoc est quam e F; sunt enim æquales X B, e F, cum sint æquales R X, R F, & æquales R B, R e, ex constructione. quare constat propositum. Denique rectam F D minorem esse quàm e O demonstrabimus in hunc modum. *D* *1 secundi*

Quoniam enim est, vt F G ad F D, ita F E ad F R, ex constructione. erit permutando vt F G ad F E, ita F D ad f R: fiat autem vt F G ad F E, ita E M ad aliam, quæ sit G b. ergo vt f D ad F R, ita erit E M ad G B. quare rectangulum sub extremis f D, G B, æquale erit rectangulo sub medijs f R, E M. sed rectangulum f R, E M, minus rectangulo f D A, vel f D G, ostensum est in Demonstratione Problematis æquale quadrato E O. ergo &





rectangulum F D, G B, minus rectangulo f D G, hoc est rectangulum f D B, æquale erit quadrato E O; vnde proportionales erunt f D, E O, D B. sunt autem & inæquales, vt postea demonstrabimus ergo f B composita ex extremis maior erit, quàm dupla media E O, hoc est quam recta S F, quæ dupla est ipsius E O, nam composita ex tota f E, & E M, vel E S, differentia par-

A partium E O, O F, * æqualis est duplæ E O.

Et quoniam est vt f G ad F E, ita E M, vel E S ad G B, ex quarum extremis composita F b ostensa est maior, quàm S f, composita ex medijs; erit * altera extremarum F G, G b minima; altera maxima: sed F G non est maxima cum sit minor, quam F E: ergo minima erit, & per consequens minor, quàm E S; sed & F A minor est, quàm F E, ex Determinatione; ergo composita ex F G, & F A hoc * est F D dupla minor erit, quàm S f composita ex S E, & E f, hoc est quam dupla E O. quare & simpla f D minor erit, quàm simpla E O. quod erat ostendendum. coro.1 prob. 3 lib.primi th.1 huius coroll.ibid.

At vero rectas proportionales f D, E O, D b inæquales esse sic demonstrabitur.

B Si enim non sunt inæquales, sint si fieri potest æquales. ergo f b composita ex extremis æqualis erit duplæ E O, hoc est rectæ S F. & cum sit vt f G ad f E, ita E M, vel E S ad G b. atque F b composita ex extremis æqualis S f, compositæ ex medijs, minor * extremarum f G, G B, minori mediarum f E, E S æqualis erit, maior autem maiori. quare f G, quippe quæ minor est quam f E æqualis erit ipsi E S, vel E M; sed & f D ponitur æqualis E O. ergo & reliqua G D erit æqualis reliquæ M O. & per consequens etiam D A æqualis erit O f, atque adeo tota f A æqualis erit toti f E, quod est absurdum, ponitur enim f A minor quam f E, ex determinatione Problematis. Inæquales sunt igitur f D, E O, D b, quod ostendisse oportuit. th.3 huius

Ex hoc Problematis constructione diametrum terræ inueniemus hac ratione.

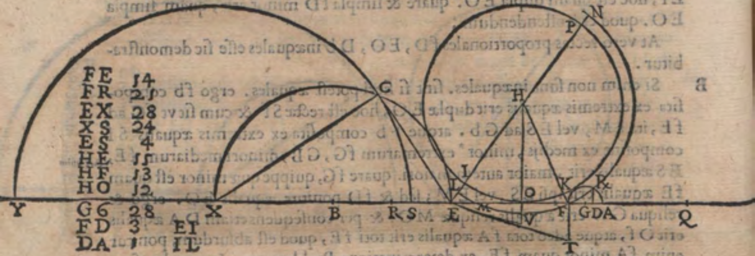
C Distantia duorum locorum, quæ in crepidine lacus sumpsimus. idest recta linea tangens superficiem aquæ interiecta inter oculum mensoris, & foramen laminæ. intelligatur basis trianguli verticem habentis in centro terræ, altitudinem vero semidiametrum terræ. nam ipsa altitudo siue perpendicularis è vertice trianguli ducta ad basim secat ipsam basim in puncto contactus, in quo scilicet basis trianguli tangit superficiem aquæ, quam sphæricam esse demonstratum est interuallum vero, quod est inter sumitatem foraminis laminæ, & superficiem aquæ intelligatur excessus quo crus vnum trianguli superat eius altitudinem, interuallum autem quod est inter oculum mensoris, & superficiem aquæ intelligatur excessus, quo crus alterum trianguli superat eius altitudinem: atque ex data base, & illis excessibus dabitur triangulum. quare & eius altitudo hoc est semidiameter terræ.

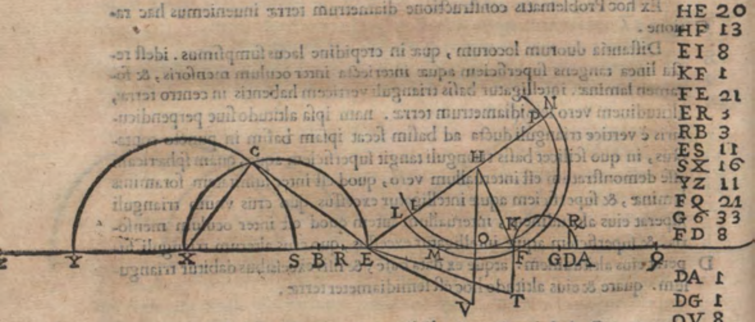
D

Ratio igitur inueniendi diametrum terræ ita se habet.

FIat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam; differentiæ autem, qua dupla ea recta superat basim dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus, reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima ma est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit æqualis compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur.

Est enim ex constructione vt F G ad F D, hoc est vt E L ad E I, ita F E ad f R, cuius dupla est f X, differentia autem, qua ipsa X f superat basim E f, est X E, cuius quadratum excedit quadratum G E, quadrato X C; quadratũ
47 primi autem C E, vel E T* æquale est quadratis E f, f T, hoc est quadrato E f, &





quadruplo rectangulo f D A, vel E I L. itaque quadratum X C est excessus, quo quadratum X E superat quadratum E f, & quadruplũ rectangulum E I L. a recta autem X E dempta est X S æqualis X C. reliquæ vero S E facta est æqualis E M, differentia segmentorum E O, O F; quam quidem E M ponendam esse diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est E L dif-

A differentia excessuum EI, KF: secunda vero basis EF; quartam autem futuram esse diximus æqualem compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum est, nam vt EL ad EF, ita est EM ad EN compositam ex excessibus EI, PN, & diametro IP.

In numeris sit data basis trianguli EF 21, excessus vero IE 8, excessus autem KFI, fiat vt 7 differentia videlicet excessuum ad 8 excessum maiorem, ita 21, idest basis ad aliam rectam, ea erit 24 eius dupla 48, differentia autem inter 48 & 21 est 27. ab hac auferatur 16 nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 27 superat quadratum ex 21, & quadruplum eius quod fit ex 8 & 1, hoc est ex excessibus, remanebunt 11 pro EM differentia segmentorum EN, NF.

B hæc differentia ponenda est pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 7, nempe differentia excessuum, secunda vero 21, hoc est basis; quarta erit 33 composita ex excessibus, & diametro quæsita, à qua composita si auferantur excessus nempe 8 & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

Vel sit data basis 14, excessus maior 3, excessus minor 1. Fiat vt 2 differentia excessuum ad 3 excessuum maiorem, ita 14 ad aliam rectam. ea erit 21, eius dupla 42. differentia autem inter 42, & 14 est 28. ab hac auferatur 24, nempe recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 28 superat quadratum ex 14, & quadruplum eius, quod fit ex 3 & 1, hoc est ex excessibus. remanebunt 4 pro EM differentia

C segmentorum EN, NF. hæc differentia ponenda est pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 2 differentia excessuum, secunda vero 14 hoc est basis, quarta erit 28 composita ex excessibus, & diametro quæsita, auferantur excessus, nempe 3 & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

Aliam quoque rationem inueniendi diametrum terræ exponemus, & quidem faciliorem quia per numeros minores procedet.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam. differentiæ autem, qua dupla ea recta inuenta superat basim dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub recta inuenta, & differentia ipsius inuenntæ, & basis superat quadru-

D plum rectangulum sub excessibus; reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit composita ex excessibus, & diametro quæsita.

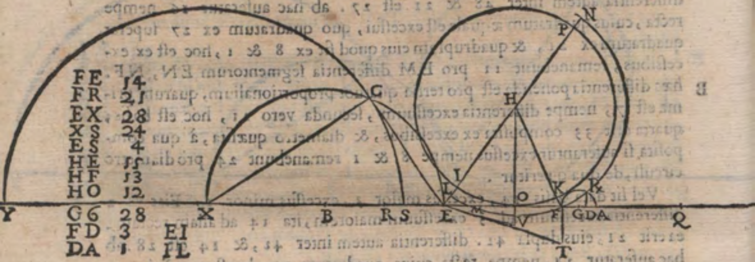
Ratio hæc inueniendi diametrum terræ eadem est quæ ratio supra exposita. licet operatione differant. nam quadruplum rectangulum FRE sub recta inuenta FR & RE; differentia ipsius FR, & basis EF superat quadruplum rectangulum EIL sub excessibus, eodem excessu, quo quadratum xE superat quadratum basis EF; & quadruplum rectangulum EIL. idque sic demonstrabitur.

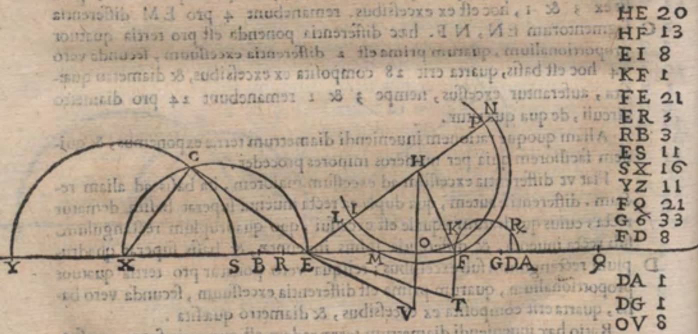
Quoniam enim quadratum xE superat quadratum CE, vel ET, seu

qua-

quadrata EF, FT, quadrato xC; quadratum autem FT æquale est quadruplo rectangulo FDA, vel EIL. ergo ipsum quadratum xE superabit quadratum EF, & quadruplum rectangulum EIL quadrato xC.

Et quoniam quadruplum rectangulum fRe, vna cum quadrato ef æ-
8 secundi quale* est quadrato compositæ ex fR, Re, hoc est quadrato xe; quod quidem quadratũ superat quadratũ ef, & quadruplum rectangulum eIL quadra-





to xC, vt demonstrauimus. ergo & quadruplum rectangulum fRe, vnà cum quadrato ef, superabit quadratum EF, & quadruplum rectangulum EIL eodem quadrato XC. auferatur commune quadratum EF, ergo quadruplum rectangulum FRE itidem superabit quadruplum rectangulum EIL, quadrato XC: sed & quadratum XE superat quadratum EF, &

qua-

A quadruplum rectangulum E I L quadrato X G; ergo quadruplum rectangulum F R E superat quadruplum rectangulum E I L eodem excessu, quo quadratum X E superat quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L; quod erat ostendendum.

Sit data basis trianguli 21 excessus maior 8, excessus minor 1. Fiat vt 7 differentia excessuum, ad 8 excessum maiorem, ita 21 hoc est basis, ad aliam rectam. ea erit 24, eius dupla 48 differentia autem inter 48, & 21, est 27. ab hac auferatur 16, nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub 3, & 24; hoc est, sub recta inuenta, & differentia eiusdem inuentæ; & basis, superat rectangulum ex 8 & 1. hoc est ex excessibus; remanebunt 11 pro E M differentia segmentorum E N, N F. hæc differentia ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 7 differentia excessuum, secunda vero 21. idest basis, quarta erit 33 composita ex excessibus, & diametro quæsita, demptis excessibus nempe 8, & 1, remanebit diameter, eaque erit 24.

B

Eundem Casum Problematis alia via & resoluam, & componam quamuis in hac quoque, quæ sequitur Resolutione idem quæsitum erit.

Alia Resolutio primi Casus.

SIt data basis trianguli, vt in antecedenti Resolutione B, excessus vero quo crus maius superat altitudinem trianguli D. excessus autem, quo crus minus eamdem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulum.

C

Factum iam sit, & resumantur antecedentis Resolutionis figuræ, & quæ-

D

ratur, vt prius E M differentia segmentorum E O, O F. esto illa A. ergo B — A erit M F, & consequenter F O erit $B\frac{1}{2} - A\frac{1}{2}$.

Et quoniam rectangulum L E N æquale est rectangulo M E F; erit vt L E ad E M, ita E F ad E N. hoc est in figura resolutionis, vt D — G ad A, ita B ad $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$; itaque $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$ erit ipsa E N à qua si auferatur I E, hoc est D; reliqua I N erit $\frac{B \text{ in } A}{D - G} - D$.

Pro-

Producatur autem F H vſque ad circumferentiam O I P in Z; erit F Z æ- A
qualis I N; atque adeo & ipſa F Z erit $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$ — D.

35 tertij

Et quoniam rectangulum K F Z * æquale eſt quadrato O F, hoc eſt rectangulum ſub G, & $\frac{B \text{ in } A}{D - G}$ — D æquale quadrato ex B $\frac{1}{2}$ — A $\frac{1}{2}$

$\frac{G \text{ in } B \text{ in } A}{D - G}$ — G in D, æquabitur B Q $\frac{1}{4}$ + A Q $\frac{1}{4}$ — B in A $\frac{1}{2}$

Quadruplicentur omnia, vt Poteſtas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } A\, 4}{d - g}$ — G in D 4 æquabitur B Q + A Q — B in A 2

Addatur vtrique parti B in A 2, & G in D 4. auferatur autem A Q, vt cognita ab incognitis ſeparentur; ergo

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d - g}$ + B in A 2 — A Q, æquabitur B Q + G in D 4

Vt autem æquatio facilius explicetur, tranſmutetur fractio $\frac{g \text{ in } b}{d - g}$ in integram magnitudinem, ea eſto F: nam ſi fiat vt D — G ad G, ita B ad aliam, quæ B
ſit f; erit f eadem quæ $\frac{g \text{ in } b}{d - g}$. atque adeo planum f in A 4 idem erit, quod planum $\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d - g}$. tranſmutata igitur in magnitudinem integram fractione.

E in A 4 + B in A 2 — A Q æquabitur B Q + G in D 4

Vel quod idem eſt f 4 + B 2 in A — A Q æquabitur B Q + G in D 4.

Et explicata Æquatione.

F 2 + B — L. V. F 2 + B Q — B Q — G in D 4, æquabitur A

Vel F 2 + B + L. V, F 2 + B Q — B Q — G in D 4 æquabitur A.

In hac Æquatione A explicabilis eſt de duobus terminis, quorum mi- C
nor tantum indicat quæſitam E M differentiam ſegmentorum baſis, maior enim terminus maior eſt ipſa differentia, immo etiam tota baſe, vt in conſtructione manifeſtum fiet.

Poriſma.

Fiat vt differentia exceſſuum ad exceſſum minorem, ita baſis ad aliam rectam, compoſitæ autem ex hac recta dupla, & baſe dematur recta, cuius quadratum æquale eſt exceſſui, quo quadratum eiuſdem compoſitæ ſuperat quadratum baſis, & quadruplum rectangulum ſub exceſsibus, reliqua erit terminus minor.

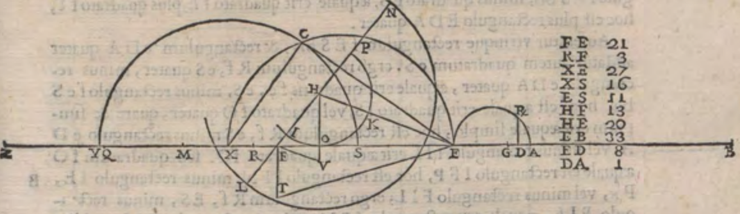
Vel ſi eidem compoſitæ addatur eadem recta, fiet terminus maior. D

Compoſitio.

Sit data trianguli baſis E F; exceſſus vero, quo crus maius ſuperat altitudinem trianguli e D: exceſſus autem, quo crus minus eamdem altitudinem ſuperat D A. ex quibus exceſsibus compoſita e A ſit minor baſe e f. Oportet inuenire triangulum. Erigatur ex puncto D perpendicularis D ℞, quam ſemicirculus in e A deſcriptus ſecet in ℞. ex puncto autem f demittatur perpendicularis f T, dupla ipſius D ℞, & connectatur e T. quadratum igitur f T quadruplum erit quadrati D ℞, vel rectanguli e D A.

Dein-

A Deinde e D sumatur D G æqualis D A, & fiat vt E G ad G D, ita E F ad aliam, quæ sit F R. eaque duplicetur in X, & in E X describatur semicirculus



F E	21
R F	3
X E	27
X S	16
E S	11
H F	13
H E	20
E B	33
E D	8
D A	1

B X C E, in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonstrauimus minorem esse diametro E X; & connectatur X C, & centro X interuallo X C describatur circulus secans diametrum E X productam in y. is circulus secabit quoque rectam E E, quia x C maior est, quam x F. vt infra ostendetur; secet ergo in S, termini igitur, de quibus A in Æquatione explicabilis est sunt S E minor, E y maior. & manifestum est terminum E y maiorem esse quæsita differentia segmentorum basis; immo tota base. secetur ergo F S bifariam, & ad rectos angulos in O à recta H O V, & fiat O V æqualis D A, quam demonstrabimus minorem esse recta, O F. & connectatur f V. angulus igitur O V f maior erit angulo O f V: fiat angulo o V f æqualis angulus V f H occurrens recta f H, rectæ O H in H, & connectatur E H. Trian-

C gulum igitur constructum est H e f, cuius basis est data E f, crus vero H f excedit altitudinem trianguli H O excessu O V æquali ipsi D A datæ: sunt enim æquales H f, H V; propter æqualitatem angulorum H f V, H V f. superest igitur vt crus H E excedat altitudinem H O, excessu æquali datæ E D: id autem ita fit manifestum.

Centro H interuallo H O describatur circulus O I, P k secans crura H f, H E in punctis I K, & producatur f H secans circumferentiam in P, vt sit P N æqualis E D, cui æqualis sumatur quoque I L. ergo cum sit I L æqualis E D & I f æqualis D A, vel D G: erit & reliqua f L æqualis reliquæ E G. Producatur quoque E y in Z, vt sit x Z æqualis X E, & sumatur f Q æqualis f E. atque f M æqualis S E. Quoniam igitur X e superat F E excessu X F du-

D pla X E, hoc est Z E superabit duplam f E, quæ est Q E excessu X F duplo. sed Z E superat Q E excessu Z Q. ergo Z Q dupla erit ipsius X E, & consequenter quadrupla rectæ R f.

Et quoniam rectus est angulus x C e in semicirculo: recta C e tangit circulum Y C S. quare rectangulum Y e S æquale erit quadrato C e, vel e T, seu quadratis e F, F T: sed rectangulum y e S, vel Z S E æquale est rectangulo z e S, minus quadrato e S, rectangulum autem z e S æquale est re-

 ctan-

ctangulis Z Q, E S, Q E S, hoc est rectangulo R E, E S quater, & rectangulo A
f E S bis; Z Q enim ostensa est quadrupla ipsius R E. ipsa autem Q E dupla
est ipsius f E, ex constructione. ergo rectangulum f R, E S quater, plus rectan-
gulo f E S bis, minus quadrato E S, æquale erit quadrato f E, plus quadrato f T,
hoc est plus rectangulo E D A quater.

Auferatur vtrinque rectangulum f E S bis, & rectangulum e D A quater
addatur autem quadratum e S. ergo rectangulum R f, e S quater, minus re-
ctangulo e D A quater, æquale erit quadratis f e, e S, minus rectangulo f e S
bis. hoc * est æquale erit quadrato f S, vel quadrato f O quater, quare & sim-
plum erit æquale simplo, hoc est rectangulum R f, e S minus rectangulo e D
A, vel minus rectangulo f I L erit æquale quadrato f O. sed quadratum f O
æquale est rectangulo I F P, hoc est rectangulo I F N, minus rectangulo I E, B
P N, vel minus rectangulo F I L; ergo rectangulum R f, E S, minus rectan-
gulo F I L, æquale erit rectangulo I F N, minus rectangulo F I L; addito
communi rectangulo F I L; rectangulum R F, E S, hoc est R F M rectan-
gulo I F N æquale erit. vt igitur F M ad F N, ita erit f I, ad f R; sed cum
sit vt E G ad G D, hoc est vt L f ad f I, ita e f ad f R; est quoq; permutando
vt L f ad f E, ita f I ad f R. ergo vt f M ad f N, ita erit f L ad f E, vnde
rectangulum M f E sub extremis æquale erit rectangulo N f L sub medijs.
quare puncta M N, E L in circulo erunt, cuius quidem circuli centrum est
Corol. prop 1 tertij * in recta H V secante rectam M E bifariam, & ad rectos angulos in O;
cum sint æquales M f, f O ipsis E S, S O, vtraque vtrique, ex constructio-
ne; atque ipsa V H secat rectam N L bifariam in H, cum sint æquales N P, C
I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat
non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate, quod huic Problemati præmissum
est, punctum H; erit centrum circuli M N, E L, idemque quod centrum cir-
culi P k I, atque adeo æquales erunt H E, H L: sunt autem æquales & H K, H I;
ergo & reliqua k E, reliquæ I L, hoc est E D, æqualis erit. quod erat osten-
dendum. ad datam igitur basim e f constitutum est triangulum H e f, cu-
ius crura H e, H f superant altitudinem H O, excessibus k e, I f æqualibus
datis e D, D A. quod erat faciendum.

Rectam autem e T minorem esse diametro e X. ita ostendam.

Quoniam enim est vt e G ad G D, ita e f ad f R, ex constructione; & e S
minor quam e f, erit & G D minor, quàm f R; atque tota e D minor, quam D
tota e R. vnde & rectangulum e D G, vel e D A minus erit rectangulo e R f,
& consequenter quadruplum rectangulum e D A, hoc est quadratum f T, mi
nus erit quadruplo rectangulo e R f, atque addito vtrique parti quadrato f e, qua
47 primi drata f T, f e, hoc * est quadratum e T, minus erit quadruplo rectangulo e R f,
8 secundi vnà cum quadrato e f; hoc * est minus erit quadrato compositæ ex e R, R f,
idest quadrato e X; quare & recta e T minor erit, quam recta e X. quod
erat ostendendum.

Rectam vero X C maiorem esse quam X f. ita fiet manifestum.

Quoniam enim f R ostensa est maior, quam G D; & f e maior est quã e D;

tota

A tota enim e A minor est quàm f e, ex Determinatione Problematis; rectangulum e f R maius erit rectangulo e D G, vel e D A. & consequenter qua-

F E	21
R F	3
X E	27
X S	16
E S	11
H F	13
H E	20
E B	33
E D	8
D A	1

B druplum E F R, maius quadruplo E D A, hoc est quadrato F T. atque addito vtrique parti quadrato F e, quadruplum rectangulum e f R vnà cũ quadrato f E maius erit quadratis f T, f e, hoc est quadrato e T, vel quadrato E C.

Et quoniam quadratum E f, vnà cum rectangulo e R f quater, vel cum rectangulo e f R quater, & quadrato f R quater * æqualia sunt quadrato 5 secundi compositæ ex e R, R f; hoc est quadrato e X, seu quadratis X C, C e; ablato ab vna parte quadrato e f, & rectangulo e f R, quater; ab altera vero quadrato C e, quod ostensum est minus rectangulo e f R quater, vnà cum quadrato e f; reliquum quadratum f R quater, hoc est quadratum X F, reliquo quadrato X C minus erit. quare & recta X F minor quam recta X C. quod erat ostendendum.

C Rectam denique D A minorem esse recta O F. sic demonstrabitur.

Quoniam enim est vt E G ad G D, ita E F ad F R ex constructione, erit permutando vt E G ad E F, ita G D ad F R. fiat autem vt E g ad E F, ita E S ad aliam, quæ sit E B. ergo vt G D ad F R, ita erit E S ad E B. quare rectangulum sub extremis G D, E B æquale erit rectangulo sub medijs F R, E S; sed rectangulum F R, E S, minus rectangulo E D A, vel e D G ostensum est in demonstratione Problematis æquale quadrato F O. ergo & rectangulum G D, e B, minus rectangulo E D G, hoc est rectangulum G D B, æquale erit quadrato F O. vnde proportionales erunt G D, F O, D B; sunt autẽ & inæquales, vt postea demonstrabimus, ergo G B composita ex extremis maior erit quam dupla media F O, hoc est quam recta F S.

D Et quoniã est vt e G ad e f, ita e S ad e B, G B autem differentia extremarũ e G, e B ostensa est maior, quàm F S, differentia mediarum e f, e S. ergo altera extremarum e G, e B minima erit, altera maxima. sed e G non est theo. 2. li. 4 maxima, cum sit minor, quàm E f. ergo minima erit, & per consequens minor quam e S. sed & e A minor est quàm e F, ex determinatione. ergo cõpositam ex e A, & e G, hoc est dupla e D minor erit quàm cõposita ex e f, & e S. Corol. 1 Prob. 1 lib. primi hoc est quam dupla e O. quare & simpla e D minor erit, quàm simpla

 EO:

E O: & cum sit E G minima, & extrema quatuor proportionalium E G, E f, e S, e B; erit altera extrema E B maxima. vnde maior quam e F. sed e D ostensa est maior, quam e O. ergo reliqua D B maior erit, quam reliqua O f. sed vt B D ad O F, ita est O f ad D G. ergo & O f maior erit quam D G, vel D A, quod erat ostendendum. A

At vero rectas proportionales G D, O f, D B inęquales esse sic demonstrabitur.

Si enim non sunt inæquales, sint si fieri potest æquales. ergo G B composita ex extremis æqualis erit duplæ F O, hoc est rectæ F S. & cum sit vt E G ad E f, ita E S ad E B, atque G B differentia extremarum E G, e B æqualis f S differentiæ mediarum e F, E S, minor extremarum minori mediarum* æqualis erit, maior autem maiori. quare E G, quippe quæ minor est, quàm E F, æqualis erit e S: sed cum ponantur æquales tres proportionales G D, O f, D B, erit & G D æqualis F O, vel S O, & per consequens D A quoque æqualis O f. ergo tota e A æqualis erit toti e f, quod est absurdum; ponitur enim e A minor quam e f, ex determinatione Problematis. inæquales igitur sunt G D, O F, D B, quod erat ostendendum. B

th. 3 lib. 4

Ex hac constructione Problematis, inuenitur diameter terræ hoc modo.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam, compositæ autem ex hac recta dupla, & base, demátur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem compositæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus; reliqua vero ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit æqualis compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur. C

Est enim ex constructione, vt e G ad G D, hoc est, vt L f ad f I, ita e f ad R R, cuius dupla est f X composita autem ex X f, & fe est X e. eius quadratum superat quadratum C e quadrato X C. quadratum autem C e, vel e T* æquale est quadrato e f, vna cum quadrato f T, hoc est vna cum rectangulo B D A quater, vel L I f quater. itaque quadratum x C erit excessus, quo quadratum x e superat quadratum e f, & quadruplum rectangulum L I f, à recta autem x e dempta est x S æqualis x C; reliqua vero S e facta est differentia segmentorum e O, O f; quam quidem seu ipsi æqualem f M ponendam esse diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est L f differentia excessuum k e, I f. secunda vero basis f e, quartam autem futuram esse diximus æqualem compositæ ex excessibus. & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum est, nam vt L f ad fe, ita est f M ad f N compositam ex excessibus f I, P N, & diametro I P. D

47 primi

In numeris sit data basis trianguli 21. excessus vero maior 8. excessus autem minor 1. Fiat vt 7 differentia excessuum ad 1 excessum minorem, ita 21, hoc est basis, ad aliam rectam. ea erit 3. eius dupla 6 composita autem ex 6, & 21 est 27. ab hac auferatur 16 recta videlicet, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 27 superat

qua-

A quadratum ex 21, & quadruplum eius, quod fit ex 8 & 1, hoc est ex excessibus remanebunt 11. pro tertio quatuor proportionalium termino, quorum

B primus est 7 differentia excessuum, secundus vero 21 basis, quartus erit 33, hoc est composita ex excessibus, & diametro quæsita. & ablatis excessibus 8 & 1, remanebit diameter 24.

Et hic quoque exponam rationem inueniendi diametrum terræ faciliorem nimirum per numeros minores progredientem.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam. compositæ autem ex hac recta dupla, & base, dematur recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub recta inuenta, & composita ex eadem inuenta, & base superat quadruplum rectangulum sub excessibus; reliqua verò ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis; quar-

C ta erit composita ex excessibus, & diametro de qua quæritur.

Hæc ratio inueniendi diametrum terræ non est dissimilis ab ea, quæ supra exposita est ratione. nam recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum FRE sub recta inuenta FR, & RE composita ex ipsa FR, & base FE superat quadruplum rectangulum EDA sub excessibus, vel LIF: eadem est, quæ recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum XE superat quadratum FE, & quadruplum rectangulum LIF. Quadruplum enim rectangulum FRE superat quadruplum rectangulum LIF eodem excessu, nempe quadrato XC, quo etiam quadratum XE superat quadratum EF, & quadruplum rectangulum LIF. vt mox demonstrabimus.

D Quoniam enim quadratum XE superat quadratum CE, vel ET, seu quadrata EF, FT, quadrato XC; quadratum autem FT æquale est quadruplo rectangulo EDA, vel LIF. ergo ipsum quadratum XE superabit quadratum EF, & quadruplum rectangulum LIF, quadrato XC.

Et quoniam quadruplum rectangulum FRE vnà cum quadrato FE æquale est quadrato compositæ ex FR, RE, hoc est quadrato XE, quod quidem quadratum superat quadratum FE, & quadruplum rectangulum LIF qua- 8 secundi

 dra-

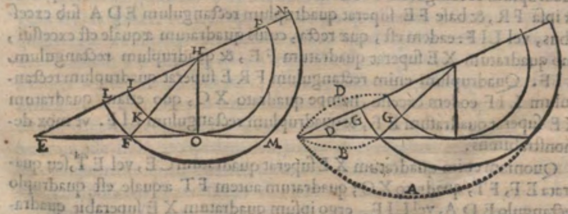
drato X C, vt demonstrauimus. ergo & quadruplum rectangulum F R E A
vna cum quadrato f E superabit quadratum f E, & quadruplum rectãgulum L I f eodem quadrato X C. & ablato vtrinque quadrato f E, reliquum, hoc est quadruplum rectangulum F R E, itidem superabit quadruplum rectangulum L I f, quadrato X C. sed & quadratum x E superat quadratum f E, & quadruplum rectangulum L I f quadrato x C, vt est demonstratum. ergo quadruplum rectangulum f R E superat quadruplum rectangulum L I f eodem excessu, quo quadratum X E superat quadratum E f, & quadruplum rectangulum L I f. quod erat ostendendum.

Sit data basis trianguli 21. excessus maior 8, excessus minor 1. Fiat vt 7 differentia excessuum ad 1 excessum minorem, ita 21 basis, ad aliam rectam, ea erit 3 eius dupla 6. composita autem ex 6 & 21 est 27. ab hac aufe- B
ratur 16, nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub 3 & 24, hoc est sub recta inuenta, & composita; ex eadem inuenta & base superat quadruplum rectangulum ex 8 & 1, hoc est ex excessibus. remanebunt 11 pro tertio quatuor proportionalium termino, quorum primus est 7 differentia excessuum, secundus vero 21, idest basis, quarta erit 33 composita ex excessibus, & diametro, de qua quæritur, atque adeo ablatis excessibus 8. & 1 remanebit ipsa diameter 24.

Resolutio secundi casus.

SEd cadat perpendicularis trianguli extra triangulum, & sit data basis B; excessus vero, quo crus maius superat altitudinem D, excessus au- C
tem, quo crus minus eandem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum H E f, in cuius basim productam cadat perpendicularis H O; & centro H interuallo H O describatur circulus I O P secans crura H E, H f in punctis I K. productum vero crus maius



D

E H in P, erunt igitur I E, k F excessus, quibus crura H E, H f superant perpendicularem H O. quoniam igitur dantur basis E f, excessus maior I E, & excessus minor k f. sit basis B, excessus vero maior D, excessus au-

A tem minor G, vt in figura ad resolutionem pertinente designatum est.

Rursus centro H interuallo autem H f, alius circulus describatur secans productam basim E F in M, crus vero E H in L, ipsamque productum in N. differentia igitur rectarum E O, O M, erit basis E F. sunt enim * æquales f O, O M; differentia autem crurum H E, H f erit E L; ea ipsa quæ est excessuum I E, K f. eaq. in figura Resolutionis erit D -- G. Quæratur E M composita ex base, & dupla continuatione basis, vsque ad perpendicularem, hoc est composita ex E f, & dupla f O; esto illa A, ergo A + B * erit duplum segmentum E O. vnde simplum segmentum E O erit A $\frac{1}{2}$ + B $\frac{1}{2}$ 1 tertii; co. 1 prob. 1 lib. primi.

Et quoniam rectangulum L E N * æquale est rectangulo F E M, erit vt L e ad E f. ita E M ad E N, hoc est in figura ad resolutionem pertinente, erit vt 36 tertii

B D — G ad B, ita A ad $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$. itaque $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ erit ipsa E N, ex qua si abscindatur P N hoc est G; reliqua P E erit $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G.

Et quoniam rectangulum I E P * æquale est quadrato E O, hoc est rectangulum sub D, & $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G æquale quadrato ex A $\frac{1}{2}$ + B $\frac{1}{2}$. ibid.

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — D in G æquabitur A Q $\frac{1}{4}$ + B Q $\frac{1}{4}$ + B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Potestas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d\text{-}g}$ — D in G 4 æquabitur A Q + B Q + B in A 2.

Auferantur vtrinque B in A 2, & A Q: addatur autem D in G 4. vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

$\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d\text{-}g}$ — B in A 2 — A Q æquabitur B Q + D in G 4.

Vt autẽ æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{d \text{ in } b}{d\text{-}g}$ in integrã

C magnitudinẽ; ea esto F. si enim fiat vt D — G ad D, ita B ad aliã, quæ sit F. erit F eadem quæ $\frac{d \text{ in } b}{d\text{-}g}$. atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{d \text{ in } b \text{ in } a\, 4}{d\text{-}g}$. transmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 — B in A 2 -- A Q, æquabitur B Q † D in G 4.

Seu quod idem est F 4 -- B 2 in A -- A Q æquabitur B Q † D in G 4.

Et explicata Æquatione.

F 2 - B + L. V. (F 2 - B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

Vel F 2 - B - L. V. (F 2 B Q - B Q - D in G 4) æquabitur A.

Porisma.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam

D rectam; differentiæ autem, qua dupla ea recta superat basim addita recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus, fiet terminus maior.

Vel si eidem compositæ addatur eadem recta, fiet terminus minor.

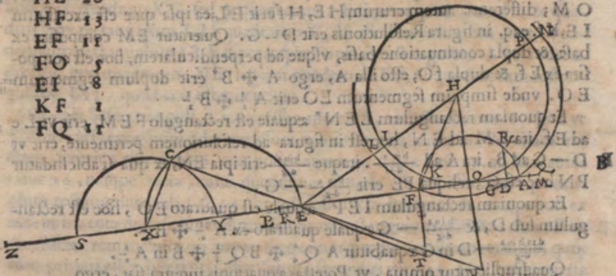
In hac quoque Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, sed maior tantum indicat quæsitam E M.

hic deest aliquid.

Compositio secundi Casus. A

Sit data trianguli basis E F. excessus vero, quo crus maius superat altitudi-

HE	20
HF	13
EF	11
FO	5
EI	8
KF	1
FQ	11



HE	$19\frac{1}{2}$
HF	$12\frac{1}{2}$
EF	8
FG	7
FD	12
DG	5
ER	$5\frac{5}{7}$
FM	22
ES	28
EY	$10\frac{6}{7}$

nem trianguli F D : excessus autem quo crus minus eandem altitudinem su- D
perat D G, quorum excessuum differentia F G sit minor base E F. Oportet inuenire triangulum. Producatur F D, in A, vt sit D A æqualis D G, & in ipsa F A describatur semicirculus quem ducta ex D. perpendicularis D ℞ secet in ℞. ex puncto autem F demittatur perpendicularis F T dupla ipsius D ℞; & connectatur E T; quadratum igitur F T quadruplum erit quadrati D ℞ vel rectanguli F D A. Deinde fiat vt F G ad F D, ita F E ad aliam, quæ sit F R. eaque duplicetur in X, & in E X describatur semicirculus, in quo accommodetur recta E C æqualis E T quam demonstrabimus minorem esse diametro E X, & connectatur X C, & centro X inter-

A teruallo X C describatur circulus secans diametrum E X in Y; producta m vero in S. termini igitur de quibus in Æquatione explicabilis est A. sunt E S maior, E y minor. Ibid. 8.

Deest aliquid non ad demonstrationem Problematis, sed ad Resolutionem; quia vnus ex terminis Resolutionis assignatis in Porismate debet assumi, non alius. vel cur vnus debeat assumi, & non alius.

Producatur autem E F in M, vt sit E M æqualis E S, & secetur F M bifariam, & ad rectos angulos à recta H O V, & fiat O V æqualis F D, quam ostendam minorem esse recta E O. ergo angulus O V E maior erit angulo O E V. fiat igitur angulo O V E æqualis angulus V e H, & recta E H secet rectam O H in H, & connectatur F H; triangulum igitur constructum est
B H e f, cuius basis est data e F; crus vero H e superat perpendicularem H O excessu O V, æquali ipsi F D datæ; sunt enim æquales H e, H V, propter æqualitatē angulorū H e V, H V e. superest igitur vt crus H F excedat perpendicularem H O excessu æquali datæ D G. id autem repetitis resolutionis vestigijs ita fit manifestum.

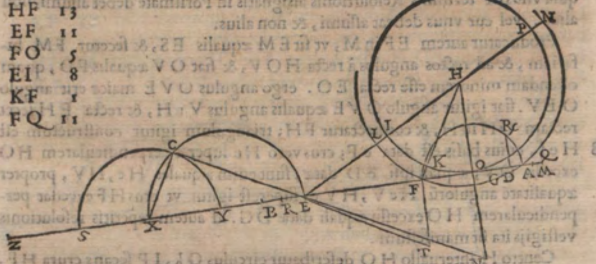
Centro H interuallo H O describatur circulus O k, I P secans crura H F, H e in punctis k I, & producatur e H vltra circumferentiam circuli K I P secans eam in P, & fiat P N æqualis G D, cui æqualis sumatur quoque I L. ergo reliqua L e æqualis erit reliquæ G F. sumatur quoque F Q æqualis F e, & x Z æqualis x e. erit igitur Z Q dupla ipsius x f, & consequenter quadrupla ipsius f R cum sit f x dupla ipsius f R, ex constructione.

C Et quoniam rectus est angulus x C e in semicirculo, recta C e tangit circulum y C S; quare rectangulum y e S * æquale erit quadrato C e, vel e T 15 tertii seu quadratis e F, f T. sed rectangulum y e S; vel Z S e æquale est rectangulo y e S, Z S e, æquale est rectangulo Z e S minus quadrato e S; ipsum autem rectangulum Z e S, æquale est rectangulo Z Q, e S, minus rectangulo Q e S. hoc est æquale est rectangulo f R, e S quater minus rectangulo f e S bis, ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f e S bis & minus quadrato e S, æquale erit quadrato e f, plus quadrato f T, hoc est plus rectangulo f D A quater. addatur vtrobique rectangulum f e S bis, & quadratum e S. anferatur autem rectangulum f D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo f D A quater; æquale erit quadratis e f,
D e S, & rectangulo f e S bis. hoc est * æquale erit quadrato f S, vel quadrato 4 secundi e O quater; recta enim f S dupla est rectæ e O, cum sit ipsa f S æqualis compositæ ex M e, & f. sunt enim æquales e S, e M, ex constructione. Cum igitur quadruplum æquale sit quadruplo, erit & simplum æquale simplo hoc est rectangulum f R, e S, vel f R, e M, minus rectangulo f D A, æquale erit quadrato e O, sed quadrato e O æquale est rectangulum I e P, hoc est rectangulum I e N, minus rectangulo e I, P N, vel minus rectangulo e I L. ergo rectangulum f R, e M, minus rectangulo f D A, vel minus rectangulo e I L, æquale erit rectangulo I e N, minus rectangulo e I L; addito communi rectangulo e I L, rectangulum f R, e M, æquale

erit

16 sexti erit rectangulo IeN. vt igitur eM ad eN, ita erit eI ad fR. sed cum sit A
vt FG ad FD: hoc est vt EL ad EI, ita FE ad FR; est quoque permutando, vt EL ad EF, ita EI ad FR; ergo vt EM ad eN, ita erit eL ad eF

HE	20
HF	13
EF	11
FO	5
EI	8
KF	1
FQ	11



quare rectangulum FEN sub extremis æquale erit rectangulo LeN sub B
medijs. puncta igitur LF, MN in circulo erunt, cuius quidem circuli centrum est in recta HV, secante rectam FM bifariam, & ad rectos angulos in O atque ipsa VH secat rectam NL bifariam in H, cum sint æquales NP, IL, ex constructione, & æquales PH, HI, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos; ergo ex præmisso Lemmate punctum H erit centrum circuli LF, MN, atque adeo idem, quod centrum circuli IOP. vnde æquales erunt HF, NL: sunt autem æquales & HK, HI. ergo & reliqua KF, idest excessus, quo crus HF superat HO altitudinem trianguli; reliquæ IL, hoc est DG datæ, æqualis erit. Ad datam igitur basim EF

con-

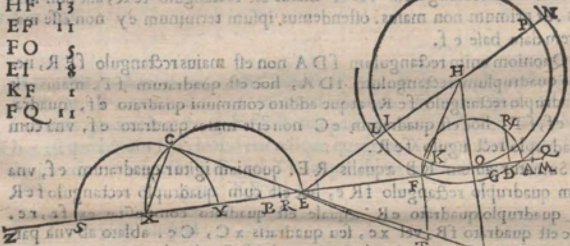
A constitutum est triangulum H E F, cuius crura H E, H f superant altitudinem H O excessibus æqualibus datis f D, D G. quod facere oportebat.

At vero rectam E T minorem esse diametro E x. sic demonstrabimus.

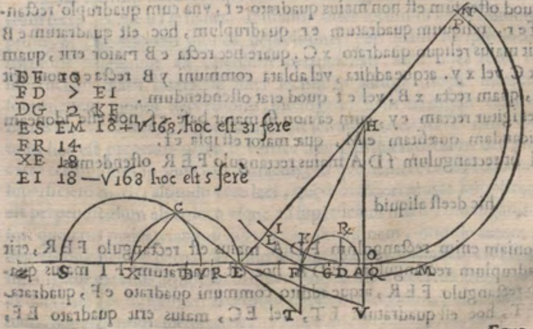
Quoniā enim est vt f G ad f D, ita f E ad f R, ex constructione, erit per diuisionem rationis vt f G ad G D, ita f e ad E R: sed f G minor est quam f E, ex determinatione ergo & G D minor erit, quam E R. atque adeo tota f D minor quam tota f R. quare & rectangulū f D G, vel f D A, minus erit rectangulo f R E, & consequenter rectangulum F D A quater minus erit rectangulo F R E quater, atque addito communi quadrato E F, quadratum E F, vna cum rectangulo F D A quater, hoc est cum quadrato F T, seu quod idem est quadratum e T minus erit quadrato F E, vna cum rectangulo F R E quater, hoc est minus, erit quadrato compositæ ex f R, R E, hoc est quadrato x e; sunt enim æquales F R, R x ex constructione; quare & recta E T minor erit, quàm recta x E, quod erat ostendendum.

B — 8 secundi

HE 20
HF 13
EF 11
FO 5
EI 8
KF 1
FQ 11



DF 10
FD > EI
DG 2 KE
ES EM 18+√168, hoc est 31 fere
FR 14
XE 18
EI 18—√168 hoc est 5 ferè



Æque rectam fD minorem esse recta E O, hoc modo ostendemus. A

Quoniam enim rectangulum fD A quater, æquale est quadrato F T, vt demonstrauimus, quadratum autem fG minus est quadrato E f, cum recta f G minor sit, quam recta e f ex determinatione. ergo rectangulum f D A quater, vnà cum quadrato fG, hoc est quadratum fA minus erit quadratis f T, f e, hoc est quadrato e T. quare & recta f A minor erit quam recta e T, vel e C. & consequenter multo minor, quam E x. atque multo minor quá e S, vel e M. sed & f G minor est quam e f ex determinatione. ergo composita ex A f, f G minor erit, quam composita ex M e, e f sed composita ex A f, f G dupla * est ipsius f D; composita vero ex M e, e f dupla ipsius e O. ergo dupla f D minor erit, quam dupla e O. & simpla f D, minor quam simpla e O. quod erat ostendendum. B

8 secundi

Coro. I. prob. 1. lib. 1

Nunc ostendemus e y terminum minorem è duobus e y, e S, de quibus in Æquatione est explicabilis, non esse idoneum ad indicandam e M quæsitam.

Aut enim rectangulum f D A maius est rectangulo fe R, aut non maius. Sit primum non maius. ostendemus ipsum terminum e y non esse maiorem data base e f.

Quoniom enim rectangulum f D A non est maius rectangulo f E R, neque quadruplum rectangulum f D A, hoc est quadratum f T. maius erit quadruplo rectangulo f e R, atque addito communi quadrato e f, quadrata e f, f T, hoc est quadratum e C non erit maius quadrato e f, vna cum quadruplo rectangulo f e R. C

Sumatur autem R B æqualis R E. quoniam igitur quadratum e f, vna cum quadruplo rectangulo f R e, hoc est cum quadruplo rectangulo f e R & quadruplo quadrato e R * æquale est quadrato compositæ ex f r, r e. hoc est quadrato f B, vel x e, seu quadratis x C, C e. ablato ab vna parte quadrato e f, & quadruplo rectangulo f e R: ab altera vero quadrato C e, quod ostensum est non maius quadrato e f, vna cum quadruplo rectangulo f e r, reliquum quadratum e r quadruplum, hoc est quadratum e B non erit maius reliquo quadrato x C. quare nec recta e B maior erit, quam recta x C vel x y. atque addita, vel ablata communi y B recta e y non erit maior, quam recta x B, vel e f quod erat ostendendum.

8 secundi

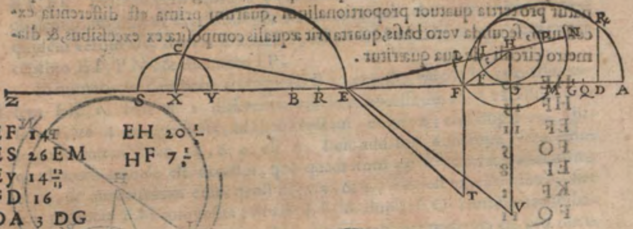
Patet igitur rectam e y, cum ea non sit maior base e f, non esse idoneam ad indicandam quæsitam e M, quæ maior est ipsa e f. D

Sed sit rectangulum f D A maius rectangulo F E R ostendemus.

hic deest aliquid

Quoniam enim rectangulnm F D A maius est rectangulo F E R, erit & quadruplum rectangulum F D A hoc est quadratum F T maius quadruplo rectangulo F E R, atque addito communi quadrato e F, quadrata F F, F T, hoc est quadratum E T, vel E C, maius erit quadrato E F, A vna cum quadruplo rectangulo F E R.

Et quoniam quadratum E F vna cum quadruplo rectangulo F E R, hoc est cum quadruplo rectangulo F E R, & quadruplo quadrato E R, æquale est quadrato compositæ ex f R, R E, hoc est quadrato X E, seu quadratis 8 secundi



X C, C E, ablato ab vna parte quadrato E f, & quadruplo rectangulo f E R, ab altera vero quadrato C E, quod ostensum est maius quadrato E f, vna cum quadruplo rectangulo f E R, reliquum quadratum E R quadruplum hoc est quadratum E B, maius erit reliquo quadrato X C. quare & recta E B maior erit, quam recta X C, vel X y. atque ablata vel addita communi y B recta E y maior erit, quam X B vel E f.

B

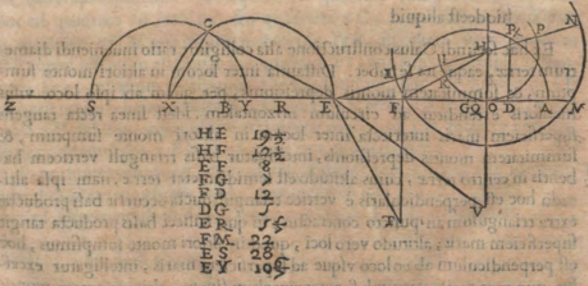
hic deest aliquid

Ex hac secundi Casus constructione alia colligitur ratio inueniendi diametrum terræ, eaque ita se habet. Distantia inter locum in altiori monte sumptum, & summitatem montis depressionis, per quam ab ipso loco visus mensoris extenditur ad circulum orizontalem. idest linea recta tangens superficiem maris interiecta inter locum in altiori monte sumptum, & summitatem montis depressionis, intelligatur basis trianguli verticem habentis in centro terræ, cuius altitudo est semidiameter terræ. nam ipsa altitudo hoc est perpendicularis è vertice trianguli ducta occurrit basi productæ extra triangulum in puncto contractus, in quo scilicet basis producta tangit superficiem maris; altitudo vero loci, quod in altiori monte sumpsimus, hoc est perpendiculum ab eo loco vsque ad superficiem maris, intelligatur excessus, quo crus maius trianguli superat eius altitudinem, altitudo autem montis depressionis nempe perpendiculum ab eius apice, vsque ad superficiem maris intelligatur excessus, quo crus minus trianguli superat eius altitudinem, & sic ex data base, & huiusmodi excessibus dabitur triangulum; quare & eius altitudo, hoc est semidiameter terræ.

C

Ratio igitur inueniendi diametrum terræ hæc erit. A

Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam; differentia autem qua dupla ea recta superat basim aucta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem differentiæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus; ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit æqualis compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur.



Est enim ex cõstructione vt F G ad F D; hoc est vt E L ad E I, ita F e ad t R, cuius dupla est f X: differentia autem qua ipsa x F superat basim E F est X E: huius quadratum excedit quadratum C E quadrato X C: quadratum autẽ C E, vel E T æquale est quadrato E F, E T; hoc est quadrato e F, & quadruplo rectan- B

gulo

A gulo F D G, vel E I L. itaque quadratum X C est excessus, quo quadratum X E superat quadratum E F, & quadruplum rectangulum E I L, recta autem, E S composita ex E X, & X S æquali X C, facta est æqualis E M composita ex E F, & dupla F O, hoc est ex basi, & dupla continuatione basis, vsque ad perpendicularem, quam quidem E M ponendam esse diximus pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est E L differentia excessuum E I, F k. secunda vero basis E F, quartam autem futuram esse diximus æqualem compositæ ex excessibus, & diametro circuli, de qua quæritur. quod quidem verum est. nam vt E L ad E F, ita est E M ad E N compositam ex excessibus E I, P N, & diametro I P.

In numeris sit data basis trianguli E F 4; excessus vero E I 3; excessus au-
B tem F K 1. Fiat vt 2 differentia videlicet excessuum ad 3 excessum maiorem, ita 4 nempe basis, ad aliam rectam. ea erit 6; eius dupla 12, differentia autem inter 12, & 4 est 8. huic addatur 6. nempe recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum ex 8 superat quadratum ex 4, & quadruplum eius, quod fit ex 3, & 1. hoc est ex excessibus, fiet 14. pro recta E M composita ex basi E F, & dupla F O continuatione basis, vsque ad perpendicularem O H. hæc composita ponenda est pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 2 nempe differentia excessuum 3, & 1, secunda vero 4, idest basis, quarta erit 28 composita ex excessibus, & diametro quæsita, à qua composita si auferantur excessus, nempe 3, & 1 remanebunt 24 pro diametro circuli, de qua quæritur.

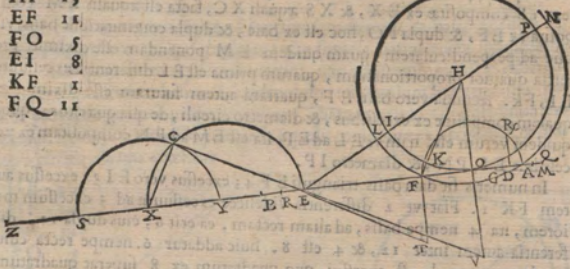
C Aliter eandem diametrum terræ inueniemus in hunc modum.

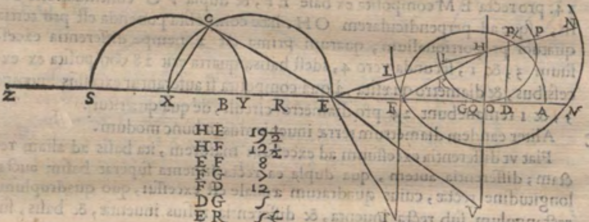
Fiat vt differentia excessuum ad excessum maiorem, ita basis ad aliam rectam; differentia autem, qua dupla ea recta inuenta superat basim aucta longitudine rectæ, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub recta inuenta, & differentia ipsius inuentæ, & basis, superat quadruplum rectangulum sub excessibus. ponatur pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est differentia excessuum, secunda vero basis, quarta erit composita ex excessibus, & diametro quæsita.

Neque hæc ratio conueniendi diametrum terræ dissimilis est ab ea, quæ supra exposita est ratione. Nam recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum f R E sub recta inuenta f R, & R E
D differentia ipsius f R, & basis E f, superat quadruplum rectangulum E I L sub excessibus, eadem est, quæ recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum X e superat quadratum basis e F, & quadruplum rectangulum e I L. Quadruplum enim rectangulum f R e superat quadruplum rectangulum e I L eodem excessu. nempe quadrato X C, quo etiam quadratum X e superat quadratum e f, & quadruplum rectangulum e I L, idque sic demonstrabitur.

Quoniam enim quadratum X e superat quadratum C e, vel e T, seu quadrata e f, f T quadrato X C, quadratum autem f T, æquale est quadruplo rectangulo f D G; vel e I L. ergo ipsum quadratum X e superabit

HE	20
HF	15
EF	11
FO	5
EI	8
KF	1
FQ	11





HE	$19\frac{1}{2}$
HF	$12\frac{1}{2}$
EF	8
FG	7
FD	12
DG	5
ER	$5\frac{4}{5}$
FM	22
ES	28
EY	$10\frac{6}{7}$

bit quadratum e f, & quadruplum rectangulum e I L quadrato x C. A

Et quoniam quadruplum rectangulum F R E vna cum quadrato E F, æquale est quadrato compositæ ex F R, R E, hoc est quadrato x E, quod quidem quadratum, superat quadratum E F, & quadruplum rectangulũ E I L, quadrato x C vt demonstraui. ergo & quadruplum rectangulũ F R E, vna cũ quadrato E F superabit quadratum E F, & quadruplũ rectangulum E I L eodem quadrato x C. auferatur commune quadratum E E. ergo quadruplũ rectangulum F R E itidem superabit quadruplum rectangulum E I L quadrato x C. sed & quadratum x E superat quadratum E F, & quadruplũ rectangulum E I L quadrato x C, vt demonstrauimus; ergo quadruplum rectangulum F R E superat quadruplum rectangulum E I L eodem excessu, quo quadratum x E superat quadratum E F, & quadruplum rectangulum e I L. quod erat ostendendum. B

Sit

A Sit vt prius data trianguli basis 4, excessus vero maior 3, excessus autem minor 1 fiat vt 2 differentia excessuum ad 3 excessum maiorem, ita 4 nempe basis ad aliam rectam, ea erit 6. eius dupla 12 differentia autem inter 12, & 4 e. b. 8. huic addatur 6 nempe recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadruplum rectangulum sub 6, & 2, hoc est sub recta inuenta, & differentia eiusdem inuentæ, & basis superat quadruplum rectangulum sub 3 & 1, hoc est sub excessibus. & fiet 14 pro tertia quatuor proportionalium, quarum prima est 2, secunda vero 4, quarta erit 28 composita ex excessibus, & diametro quæsita, ablatis igitur excessibus 3 & 1, remanebit ipsa diameter 24.

Alia via eundem Casum Problematis & resoluam, & componam.

B

Alia Resolutio secundi Casus.

Sit data basis trianguli, vt in antecedenti Resolutione B. excessus vero, quo crus maius superat altitudinem trianguli D, excessus autem, quo crus minus eandem altitudinem superat G. Oportet inuenire triangulũ.

C 

Factum iam sit, & resumantur antecedentis Resolutionis figuræ, & quæratur vt prius E M composita ex base E F, & dupla F O continuatione basis. esto illa A, ergo A -- B erit ipsa F M, & per consequens ipsa F O erit A $\frac{1}{2}$ -- B $\frac{1}{2}$

Et quoniam rectangulum L E N æquale est rectangulo F E M; erit vt L e

D ad E f, ita E M ad E N. hoc est in figura ad resolutionis, vt D — G ad B, ita A ad $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$. itaque $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ -- D.

Producatur autem F H vsque ad circumferentiam I O P in Z: erit F Z æqualis I N, atque adeo ipsa F z erit $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ -- D.

Et quoniam rectangulum K F L * æquale est quadrato F O, hoc est rectangulum sub G, & $\frac{b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — D æquale quadrato ex A $\frac{1}{2}$ -- B $\frac{1}{2}$.

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a}{d\text{-}g}$ — G in D æquabitur A Q $\frac{1}{4}$ + B Q $\frac{1}{4}$ -- B in A $\frac{1}{2}$.

Quadruplicentur omnia, vt Potestas æquationis integra fiat, ergo

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } a\,4}{d\text{-}g}$ — G in D 4 æquabitur A Q + B Q — B in A 2.

 Ad-

Addatur vtrique parti G in D 4. & B in A 2, auferatur autem A Q: vt cognita ab incognitis separentur, ergo A

$\frac{g \text{ in } b \text{ in } A\,4}{d - g}$ ✣ B in A 2 — A Q æquabitur B Q ✣ G in D 4.

Et vt æquatio facilius explicetur, transmutetur fractio $\frac{g \text{ in } b}{d - g}$ in integrã magnitudinẽ; ea esto F nam si fiat vt D — G ad G, ita B ad aliã, quæ sit F. erit F eadem quæ $\frac{b \text{ in } g}{d - g}$, atq; adeo planum F in A 4 idem erit, quod planũ $\frac{g \text{ in } b \text{ in } A\,4}{d - g}$, transmutata igitur fractione in magnitudinem integram.

F in A 4 ✣ B in A 2 — A Q, æquabitur B Q † G in D 4.

Seu quod idem est F 4 † B 2 in A — A Q æquabitur B Q † G in D 4.

Et explicata Æquatione.

F 2 † B ✣ L. V. (F 2 † B Q - B Q - G in D 4) æquabitur A.

Vel F 2 † B - L. V. (F 2 ✣ B Q - B Q - G in D 4) æquabitur A. B

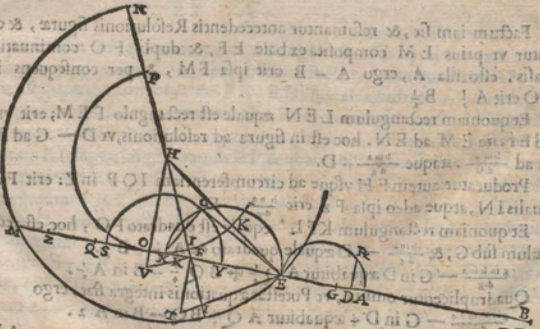
In hac Æquatione A explicabilis est de duobus terminis, sed maior.

Porisma.

Fiat vt differentia excessuum ad excessum minorem, ita basis ad aliam rectam; composita autem ex dupla ea recta, & base, aucta longitudine rectæ cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum eiusdem compositæ superat quadratum basis, & quadruplum rectangulum sub excessibus, fiet terminus maior. contracta vero eadem longitudine fiet terminus minor.

Compositio.

Sit data basis trianguli E F; excessus vero, quo crus maius superat altitudinem trianguli E D, excessus autem quo crus minus eandem altitudinem superat D G, quorum excessuum differentia E G sit minor base C

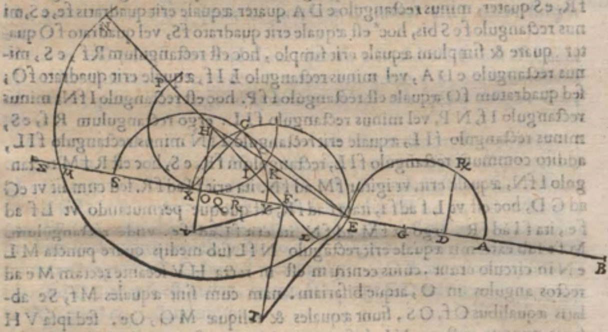


EF.

A EF. Oportet inuenire triangulum. Producatur E D in A, vt sit D A æqualis D G, & in ipsa E A describatur semicirculus; quem ducta ex D perpendicularis D ℞ secet in ℞. ex puncto autem F demittatur perpendicularis F T dupla ipsius D ℞, & connectatur E T; quadratum igitur F T quadruplum erit quadrati D ℞, vel rectanguli E D A. Deinde fiat vt E G ad G D, ita E F ad aliam, quæ sit E R, eaque duplicetur in X, & in E X describatur semicirculus, in quo accommodetur recta E C æqualis E T, quam demonstrabimus minorem esse diametro E X, & connectatur X C. & centro X interuallo X C describatur circulus secans diametrum E X in y, productam vero in S. Termini igitur, de quibus A in Æquatione explicabilis est, sunt E S maior, E y minor.

B Secetur S F bifariam in O, per quod punctum ducatur ad rectos angulos recta H O V, & fiat O V æqualis D G, quam demonstrabimus mi-

C



norem esse recta O F, & connectatur V F, angulus igitur O V F maior erit angulo O F V, fiat angulo O V F æqualis angulus V F H occurrens re-

D cta F H rectæ O H in H, & connectatur E H. Triangulum igitur constructum est H E F, cuius basis est data E F; crus vero H F excedit altitudinem trianguli H O excessu O V æquali ipsi D G datæ; sunt enim æquales H F, H V propter æqualitatem triangulorum H F V, H V t. superest igitur, vt crus H E excedat altitudinem H O excessu æquali datæ E D. id autem ita fit manifestum.

Centro H interuallo H O describatur circulus O I, k P, secans crura H F, H E in punctis I K, & producatur F k secans circumferentiam in P, vt sit P N æqualis E D, cui æqualis sumatur quoque I L; ergo cum sit I L æqualis E D, & I f æqualis D G, erit & reliqua f L æqualis reliquæ E G.

E G. Producatur quoque E S in Z, vt sit X Z æqualis X E, & sumatur F Q A
æqualis F E, atque F M æqualis S E. Quoniam igitur X E superat F E excessu X F, dupla X E, hoc est Z E superabit duplam F E, quæ est Q E duplo excessu X F; sed Z E superat Q E excessu Z Q, ergo Z Q dupla erit ipsius x F, & consequenter quadrupla rectæ R F.

Et quoniam rectus est angulus X C E in semicirculo, recta C E tangit circulum Y C S. quare rectangulum Y E S, æquale erit quadrato C E, vel E T, seu quadratis E E, E T; sed rectangulum Y E S, vel Z S E æquale est rectangulo Z E S, minus quadrato e S; rectangulum autem Z e S, æquale est rectangulis Z Q, e S, & Q e S, hoc est rectangulo R F, e S quater, & rectangulo f e S bis: Z Q enim ostensa est quadrupla ipsius R f, Q e autem dupla est ipsius f e, ex constructione. ergo rectangulum f R, e S quater, plus rectangulo f e S B
bis, minus quadrato e S, æquale erit quadrato f e, plus quadrato f T, hoc est plus rectangulo e D A quater; addatur vtrobique quadratum e S, auferatur autem rectangulum f e S bis, & rectangulum e D A quater. ergo rectangulum f R, e S quater, minus rectangulo e D A quater, æquale erit quadratis f e, e S, minus rectangulo f e S bis, hoc* est æquale erit quadrato f S, vel quadrato f O quater. quare & simplum æquale erit simplo, hoc est rectangulum R f, e S, minus rectangulo e D A, vel minus rectangulo L I f, æquale erit quadrato f O; sed quadratum f O æquale est rectangulo I f P. hoc est rectangulo I f N, minus rectangulo I f, N P, vel minus rectangulo f I L. ergo rectangulum R f, e S, minus rectangulo f I L, æquale erit rectangulo I f N minus rectangulo f I L, addito communi rectangulo f I L, rectangulum f R, e S, hoc est R f M rectan- C
gulo I f N, æquale erit. vt igitur f M ad f N. ita erit f I ad f R. sed cum sit vt e G ad G D, hoc est vt L f ad f I, ita e f ad f R; est quoque permutando vt L f ad f e, ita f I ad f R. ergo vt f M ad f N, ita erit f L ad f e. vnde rectangulum M f e sub extremis æquale erit rectãgulo N f L sub medijs. quare puncta M L e N in circulo erunt, cuius centrum est in recta H V secante rectam M e ad rectos angulos in O, atque bifariam. nam cum sint æquales M f, S e ablatis æqualibus O f, O S, fiunt æquales & reliquæ M O, O e. sed ipsa V H secat quoque rectam N L bifariam in H, cum sint æquales N P, I L, ex constructione, & æquales P H, H I, vt semidiametri, eamque secat non ad rectos angulos. ergo ex Lemmate huic Problemati præmisso punctum H erit centrum circuli M L, e N, idemque quod centrum circuli O I, K P; atque D
adeo æquales erunt H e, H L; sunt autem æquales & H k; H I. ergo & reliqua K e reliquæ I L, hoc est e D æqualis erit, quod erat ostendendum. Ad datam igitur basim e f constitutum est triangulum H e f, cuius crura H e H f superant altitudinem H O excessibus K e, I f æqualibus datis e D, DG. quod erat faciendum.

At vero rectam e T minorem esse diametro e X, ita ostendemus.

Quoniam enim est, vt e G ad G D, ita e f ad f R, ex constructione, & e G minor, quàm e f ex determinatione erit & G D minor, quàm f R. atq; tota e D minor quam tota e R. vnde & rectangulum e D G, vel e D A minus erit

re-

A rectangulo E R f, & consequenter quadruplum rectangulum E D A, hoc est quadratum f T, minus erit quadruplo rectangulo E R f. atque addito vtrique parti quadrato f E, quadrata f T, f E, hoc * est quadratum E T, minus erit quadruplo rectangulo E R f, vnà cum quadrato E f, hoc * est, minus erit quadrato compositæ ex e R, R f, idest quadrato E X. quare & recta E T minor erit, quam recta E X, quod erat ostendendum. 47 primi 8 secundi

Item rectam D G minorem esse, quam O f. sic demonstrabitur.

Quoniam enim rectangulum E D A quater, æquale est quadrato f T; quadratum autem E G, minus est quadrato e f, cum recta e G minor sit, quam recta e f, ex determinatione. ergo rectangulum e D A quater, vnà cum quadrato e G, hoc * est quadratum e A minus erit quadratis f T, f e. ibid.
B hoc est quadrato e T. quare & recta e A minor erit, quàm recta e T, vel e C, & consequenter multo minor, quam e X. atque multo minor quam e S. sed & e G minor erit quam e f ex determinatione, ergo composita ex e A, e G, * hoc est dupla e D, minor erit, quàm composita ex e S, e f, hoc est, quàm dupla e O, quare & simpla e D minor erit, quam simpla e O. Corol. 1. prop. 1. lib. 1.

Fiat vt e G ad e f, ita e S ad aliam, quæ sit e B, sed e G minor est, quàm e f ex determinatione. ergo & e S minor erit quam e B. sed e D ostensa est minor, quàm e O, ergo reliqua D B maior erit, quam reliqua O S, vel O f.

Et quoniam est vt e G ad G D, ita e f ad f R, ex constructione, erit per-
C mutando vt e G ad e f, ita G D ad f R, sed vt e G ad e f, ita est quoque e S ad e B. ergo vt G D ad f R, ita erit e S ad e B, vnde rectangulum sub extremis G D, e B æquale erit rectangulo sub medijs f R, e S, sed rectangulum f R, e S, minus rectangulo e D A, vel e D G ostensum est in demonstratione Problematis æquale quadrato f O. ergo & rectangulum G D, e B, minus rectangulo e D G, hoc est rectangulum G D B, æquale erit quadrato f O. sed D B ostensa est maior, quam f O. ergo G D minor erit, quam ipsa f O, quod erat ostendendum.

Finis Libri Quarti.

MARINI GHETALDI DE RESOLVTIONE ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

LIBER QVINTVS.

HIC liber in quatuor capita diuiditur, quorum primo conti- A
nentur Problemata, quæ constructione operaria non egent,
sed solum postulant, vt quæsitum numero explicetur. Secundo
vero continentur Problemata impossibilia, ex quorum
Resolutionibus cognoscitur eorum impossibilitas. Tertio autem
continentur Problemata vana, seu nugatoria, quorum Resolutiones indicant
talia esse Problemata. Quarto denique continentur Problemata, quæ
sub Algebram non cadunt, eaque resoluuntur, & componuntur Methodo,
qua antiqui vtebantur.

De Problematibus quæ constructione operaria non egent, sed solum postulant vt quæsitum numero explicetur. B

Caput primum.

PRoblemata quæ constructione operaria non egent, sed postulant quæsitum numero exhiberi, resoluuntur eadem ratione, qua Problemata constructionem operariam requirentia; verum Porismata ex eorum Resolutionibus deducta in formam Theorematis proponuntur, eorumque demonstratio procedit per vestigia Resolutionis, directo tamen ordine, vt in fine libri primi monuimus, quæ quidem Theoremata suggerunt rationem construendi ipsa Problemata, hoc est explicandi numero id quod quæritur.

Pro-

A

Problema primum.

Quomodo Archimedes portionem argenti aureæ coronæ permixtam inuenerit.

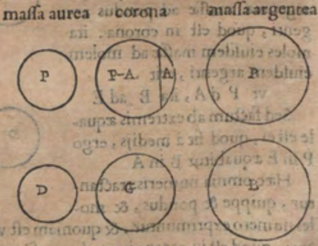
Refert Vitruuius lib. 9. cap. 3 his verbis. Archimedem duas fecisse massas æquo pondere, quo etiam fuerat corona, vna ex auro alteram ex argento. cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra impleuit aqua, in quo demisit argenteam massam, cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantum aquæ effluxit. ita exempta massa quanto minus factum fuerat refudit sextario mensus, vt eodem modo quo prius fuerat ad labra æquaretur. ita ex eo inuenit quantum ad certum pondus argenti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter

B pleno vase demisit, & ea exempta, eadem ratione mensura addita inuenit ex aqua non tantum defluxisse, sed tanto minus, quanto minus magno corpore eodem pondere auri massa esset quam argenti. Postea vero repleto vase in eadem aqua ipsa corona demissa, inuenit plus aquæ defluxisse in coronam, quam in auream eodem pondere massam & ita ex eo quod plus defluxerat aquæ in corona quam in massa ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifestum furtum redemptionis.

Sed qua ratiocinatione Archimedes id furtum deprehenderit Resolutio docebit.

Resolutio.

C Coronæ, quæ constat ex auro, & argento sit pondus P, pondus autem argenti quod est in ea esto A. ergo P - A erit pondus auri.



Deinde sumantur duæ massæ eiusdem ponderis cum corona, vna ex auro altera ex argento, & demittatur in aliquod vas aqua plenum aurea massa. ea eijciet è vase tantum aquæ, quanta est eius

D moles, sit igitur mensura aquæ eiectæ, seu moles aureæ massæ D, similiter demittatur, & massa argentea eijciens tantum aquæ, quanta est moles ipsius masæ, cuius quidem aquæ mensura seu moles massæ argenteæ sit B, atque eodem modo, demissa corona, effluet tantum aquæ quanta est moles ipsius coronæ, sit igitur mensura ipsius aquæ seu moles coronæ G. Quoniam igitur est vt P ad A, ita B ad $\frac{B \text{ in } A}{P}$, hoc est vt Pondus massæ argenteæ, ad pondus argenti, quod est in corona, ita moles eiusdem mas-

sæ

ſæ ad molem eiuſdem argenti, corpora enim eiuſdem generis eamdem ratio- A
nem habent in pondere quam in mole, vt demonſtrauimus in noſtro Archimede promoto, ergo $\frac{b \text{ in } a}{p}$ erit moles argenti, quod eſt in corona, ſeu menſura aquæ mole æqualis ipſi argento.

Æque quoniam eſt vt P ad P — A, ita D ad $\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } a}{p}$ hoc eſt vt pondus maſſæ aureæ ad pondus auri, quod eſt in corona, ita moles eiuſdem maſſæ ad molem eiuſdem auri, erit $\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } a}{p}$ moles auri, quod eſt in corona, ſeu menſura aquæ, mole æqualis ipſi auro, ſed moles argenti eſt $\frac{b \text{ in } a}{p}$. ergo $\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } a}{p} + \frac{b \text{ in } a}{p}$ erit moles totius coronæ, ſed moles coronæ eſt quoque G, ergo.

$\frac{d \text{ in } p - d \text{ in } A}{p} + \frac{b \text{ in } a}{p}$ æquabitur G

Ducantur omnia in P. ergo

D in P — D in A + B in A æquabitur G in P B

Auferatur vtrimque D in P, vt cognita ab incognitis diſtinguantur ergo.

B in A -- D in A, æquabitur G in P -- D in P

Seu quod idem eſt B -- D in A æquabitur G -- D in P

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt.

B -- D G -- D P A

Idem Problema aliter reſoluam

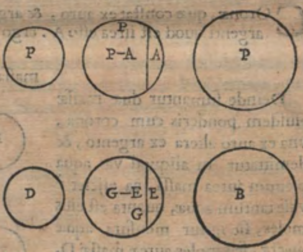
Reſolutio ſecunda.

Iiſdem poſitis, menſura autem aquæ, mole æqualis argento quod eſt in corona eſto E. ergo G -- E erit menſura aquæ mole æqualis auro; ponitur enim G menſura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam eſt vt pondus argenteæ maſſæ ad pondus argenti, quod eſt in corona. ita moles eiuſdem maſſæ ad molem eiuſdem argenti, erit

vt P d A, ita B ad E

Sed factum ab extremis æquale eſt ei, quod fit à medijs, ergo P in E æquabitur B in A

maſſa aurea corona maſſa argentea C



D

Hæc omnia numeris tractantur, quippe & pondus, & moles numero exprimuntur. & quoniam eſt vt pondus aureæ maſſæ ad pondus auri, quod eſt in corona ita moles eiuſdem maſſæ ad molem eiuſdem auri erit.

vt P ad P -- A, ita D ad G -- E

Quod autem fit ab extremis, æquale eſt ei quod fit à medijs ergo

G in P -- E in P æquabitur D in P -- D in A.

Sed oſtenſum eſt P in E æquari B in A. ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in

A G in P — D in P æquabitur D in P — D in A.

Sed oſtenſum eſt P in E æquari B in A, ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in P æquabitur B in A + D in P -- D in A

Auferatur vtrimque D in P, vt cognita ab incognitis ſeparentur, ergo

G in P - D in P æquabitur B in A - D in A

Seu quod idem eſt G - D in P æquabitur B - D in A.

Et reuocata ad proportionem æqualitate, proportionales erunt

B - D G - D P A

Ea ipſa proportionalium ſeries, quæ per antecedentem reſolutionem inueniebatur.

B

Poriſma.

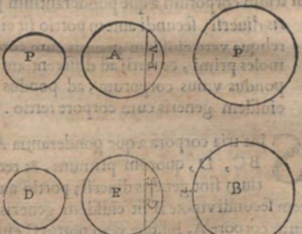
Vt differentia inter menſuram aquæ defluxæ in maſſa argentea, & menſuram aquæ defluxæ in maſſa aurea, ad differentiam menſuræ aquæ defluxæ in corona & aquæ defluxæ in maſſa aurea, ita eſt pondus coronę ad pondus argenti. quod eſt in corona.

Vel ſic. vt differentia inter moles maſſæ argenteæ, & maſſæ aureæ, ad differentiam inter moles coronæ, & maſſæ aureæ, ita eſt pondus coronæ, ad pondus argenti. quod eſt in corona.

Poriſma hoc poſtea in formam Theorematis vniuerſalius propoſitum demonſtrabimus.

C

Reſolutio tertia.



SEd quæratur pondus auri, quod eſt in corona; id eſto A. ergo pondus argenti erit P -- A. ſimiliter menſura aquę mole æqualis auro, quod eſt in corona eſto E. ergo G — E, erit menſura aquę mole ęqualis argento. Et quoniam eſt vt pondus aureę maſſę ad pondus auri, quod

D eſt in corona, ita moles eiuſdem maſſę ad molem eiuſdem auri, erit.

vt P ad A ita D ad E

Et factum ſub extremis æquale erit ei, quod fit ſub medijs, hoc eſt

P in E ęquabitur D in A

Æquę quoniam eſt vt pondus maſſę argenteę ad pondus argenti, quod eſt in corona, ita moles eiuſdem maſſę ad molem eiuſdem argenti, erit

vt P ad P -- A, ita B ad G -- E

Et factum ſub extremis ęquabitur facto ſub medijs, hoc eſt

Et factum sub extremis æquabitur facto sub medijs, hoc est A

G in P -- E in P æquabitur B in P -- in A

Sed ostensum est E in P æquari D in A, ergo per additionem æqualium æqualibus.

G in P æquabitur B in P + D in A -- B in A.

Hic non potest auferri vtrimque B in P. nam cum B maior sit, quam G erit & B in P maius, quam G in P, ergo addatur vtrobique B in A & auferatur D in A. itaque

G in P + B in A -- D in A æquabitur B in P.

Auferatur quoque vtrinque G in P. ergo

B in A -- D in A æquabitur B in P -- G in P

Seu quod idem est B -- D in A æquabitur B -- G in P B

Et reuocata ad proportionem æqualitate erit

vt B -- D ad B -- G, ita P ad A

Porisma.

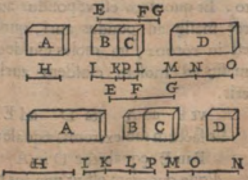
Vt differentia inter moles massæ argenteæ, & massæ aureæ ad differentiam inter moles massæ argenteæ, & coronæ, ita est pondus coronæ ad pondus auri, quod est in corona.

Ex hoc Porismate, & ex præcedenti proponam Theorema vniuersale quod est huiusmodi.

Theorema. C

Si trium corporum æque ponderantium primum, & tertium fuerint generis diuersi, secundi autem portio sit eiusdem generis cum corpore primo, reliqua vero eiusdem generis cum corpore tertio. erit vt differentia inter moles primi, & tertij ad differentiam inrer moles primi, & secundi, ita pondus vnius corporum, ad pondus portionis corporis secundi, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio.

Sint tria corpora æque ponderantia A, BC, D, quorum primum, & tertium sint generis diuersi; portio autem secundi vtpote B sit eiusdem generis, cum corpore A, reliqua vero portio C eiusdem generis cum corpore D. Dico vt differentia inter moles corporum A, & D, ad differentiam inter moles corporum A, & BC, ita esse pondus vnius corporum ad pondus portionis C. D



Sit enim portionis B pondus EF, portionis autem C pondus FG; ergo totius corporis BC, vel ipsius A, aut D pondus erit EG. Deinde corporis A, sit moles H, portionis vero B moles

IK

A Ik, portionis autem C moles K L, corporis vero D moles MO.

Quoniam igitur est vt pondus corporis D ad pondus portionis C, hoc est vt E G ad F G, ita moles ipsius D ad molem ipsius C hoc est ita MO ad KL, corpora enim eiusdem generis eamdem habent rationem in pondere, quam in mole, vt est demonstratum in nostro Archimede promoto; quare quod fit ab extremis E G, & k L, æquale erit ei quod fit à medijs F G, & M O.

Sumantur autem M N, I P. vtraque æqualis ipsi H. Quoniam igitur est vt pondus corporis A, ad pondus portionis B, hoc est vt E G ad E F, ita moles H ad molem I K; factum ab extremis E G, & I K æquale erit facto à medijs E F, & H. vel & M N. sed ostensum est id quod fit ex E G, & K L æquale esse ei quod fit ex F G, & M O. ergo per additionem æqualium

B æqualibus, quod fit ex E G, & I K, vna cum eo quod ex E G, & k L. hoc est id quod fit ex E G, & I L, æquale erit ei, quod fit ex E F, & M N, vna cum eo quod ex F G, & M O. sed quod fit ex E F, & M N, æquale est ei, quod ex E G, & M N, minus eo quod ex F G, & M N. ergo quod fit ex E G, & I L, æquale erit ei, quod fit ex F G, & M O, vna cum eo, quod ex E G, & M N, minus eo quod fit ex F G, & M N. In prima quidem figura demonstratio sic procedet. Auferatur vtrinque id quod fit ex E G, & M N ergo quod fit ex E G, & I L, minus eo, quod ex E G, & M N, vel & I P, hoc est id quod fit ex E G, & P L, æquale erit, quod ex F G, & M O, minus eo, quod fit, ex F G, & M N. hoc est ei quod fit ex F G, & NO; quare æqualitate ad proportionem reuocata, erit vt N O ad P L, ita E G ad F G, hoc est vt dif-

C ferentia inter moles corporum A, & D primi videlicet, & tertij ad differentia inter moles corporum A, & B C primi, & secundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quę est eiusdem generis cum corpore tertio D.

In secunda vero figura demonstratio procedet in hunc modum. Addatur vtrobique id quod fit ex F C, & M N, & auferatur id quod ex F G, & M O; fiet id quod fit ex E G, & I L, vna cum eo quod ex F G, & M N, minus eo quod ex F G, & M O, æquale ei quod fit ex E G, & M N. auferatur quoque id quod fit ex E G, & I L: ergo quod fit ex F G, & M N, minus eo, quod ex F G, & M O, hoc est id quod ex F G, & O N, ęquale erit ei, quod ex E G, & M N, vel I P, minus eo, quod ex E G, & I L, hoc est ei, quod fit ex E G, & L P. quare reuocata ad proportionem æqualitate, erit vt O N ad L P, ita E G ad F G. hoc est

D vt differentia inter moles corporum A & D primi videlicet, & tertij, ad differentiam inter moles corporum A & B C primi & secundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio D, quod erat ostendendum.

Sit corona mixta ex auro, & argento 50. librarum, & oporteat inuenire quantum sit in ea argenti, & quantum auri. Sumantur duæ massę eiusdem ponderis, atque corona. vna ex auro, altera ex argento. & ponatur in aliquod vas aqua plenum; massa aurea, quę eijciat 6. sextarios aquę. Similiter ponatur & corona: eaque eijciat septem sextarios, eodem modo posita & massa argētea eijciat 11. sextarios; massa igitur aurea æqualis erit mole sex sextarijs aquæ corona vero 7. se-

sextarijs; massa autem argentea 11. sextarijs. Fiat igitur vt differentia molis massæ aureæ, & molis massæ argenteæ, hoc est vt S ad differentiam molium massæ aureæ, & coronæ, hoc est ad 1, ita pondus coronæ quod est 50. ad 10, erunt* igitur 10. lib. argenti in corona, auri vero 40. A

ex antec. theor.

Sed ponantur conuerso ordine prædictæ massæ nimirum prima in ordine sit massa argentea, tertia vero aurea, & fiat vt differentia molium massæ argenteæ, & massæ aureæ. hoc est vt S ad differentiam molium massæ argenteæ & coronæ, hoc est ad 4: ita pondus coronæ quod est 50. lib. ad 40. erit igitur pondus auri, quod est in corona 40. lib. pondus vero argenti 10. lib.

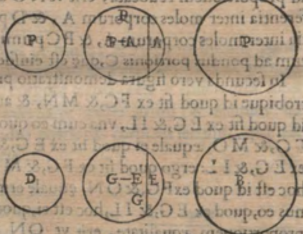
Eodem modo inuenietur pondus argenti, vel auri, quæ sunt in corona, si aquæ eiectæ è vase sumantur ad rationem ponderis, quemadmodum eas sumpsimus ad rationem mensuræ. corpora enim eiusdem generis eamdem habent rationem in pondere, quam in mole. eijciat enim massa aurea è vase tres libras aquæ; corona vero $3\frac{1}{5}$. massa autem argentea $5\frac{1}{5}$. Fiat igitur vt differentia inter 3, & $5\frac{1}{5}$ quæ est $2\frac{1}{5}$ ad differentiam inter 3 & $3\frac{1}{5}$, quæ est $\frac{1}{5}$; ita 50. lib. ad 10. libras, hoc est ad pondus argenti, quod est in corona. illud ipsum pondus quod supra inueniebatur. B

Aliter & Problema resoluam, & Theorema demonstrabo.

Resolutio quarta.

Iisdem positis quæratur pondus argenti, quod est in corona. illud esto A. ergo P - A erit pondus auri, mensura autem aquæ mole æqualis argento, quod est in corona esto E. ergo mensura aquæ mole æqualis auro erit G - E. ponitur enim G mensura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam est vt pondus massæ aureæ ad pondus auri, quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad moles eiusdem auri, erit C

massa aurea corona massa argentea



vt P ad P - A ita D ad G - E D

Nunc studium adhibendum est vt deueniamus ad aliquam proportionem cuius tres termini sint cogniti. id autem tali fiet argumentatione.

ergo per conuersionem rationis erit vt P ad A ita D ad D - G + E

sed est vt P ad A ita B ad E

hoc est vt pondus massæ argenteæ ad pondus argenti quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem argenti; ergo erit

vt B ad E, ita D, ad D - G + E

& per mutando erit vt B, ad D, ita E ad D - G + E

& diuidendo vt B - D, ad D, ita G - D ad D - G + E

&

A & rursus permutando vt B -- D ad G -- D ita D ad D -- G + E
sed ostensum est supra esse vt P ad A ita D ad D -- G + E
ergo erit vt B -- D ad G -- D ita P ad A.

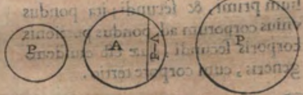
In hac igitur proportione cogniti sunt tres termini, atque est ea ipsa proportionalium series, quæ per antecedentes Resolutiones inuenta est, cum de pondere argenti, quod est in corona quærebatur. atque adeo idem Porisma deducitur.

Porisma.

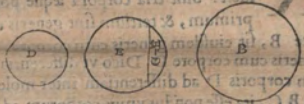
Vt differentia molis massæ argenteæ, & molis massæ aureæ ad differentiam molis coronæ, & molis massæ aureæ, ita est pondus coronæ ad pondus ar-
B genti; quod est in corona.

Resolutio quinta.

Sed quæratur pondus auri existentis in corona. id esto A. ergo pondus argenti erit P -- A; mensura autem aquæ mole æqualis auro, quod est in corona esto E. ergo mensura aquæ mole æqualis argento erit G -- E. ponitur enim G mensura aquæ mole æqualis toti coronæ. Et quoniam est vt pondus massæ argenteæ ad pondus argenti, quod est in corona. ita moles eiusdem mas-
C sæ ad molem eiusdem argenti, erit



vt P ad P -- A
ita B ad G -- E
Et per conuersionem rationis
vt P ad A ita B ad B - G + E
sed est vt P ad A ita D ad E



hoc est vt pondus massæ aureæ ad pondus auri, quod est in corona, ita moles eiusdem massæ ad molem eiusdem auri, ergo erit
vt B ad B -- G + E ita D ad E
et permutando vt B ad D ita B -- G + ad E
D & diuidendo vt B -- D ad D ita B -- G ad E
& rursus permutando vt B -- D ad B — G ita D ad E
sed est vt D ad E ita P ad A
cum sit vt moles massæ aureæ ad molem auri, quod est in corona; ita pondus eiusdem massæ ad pondus eiusdem auri. ergo erit
vt B — D ad B -- G ita P ad A

Dantur igitur tres proportionis termini, atque est ea ipsa proportionalium series, quæ per alias resolutiones inuenta est, cum de pondere auri, quod est in corona quærebatur. atque adeo idem porisma deducetur.

A

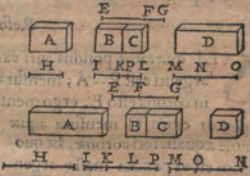
Porisma.

Vt differentia molium massæ argenteæ, & massæ aureæ, ad differentiam molium massæ argenteæ, & coronæ; ita est pondus coronæ ad pondus auri, quod est in corona.

Ex hoc, & antecedentes Porismate proponemus vnum Theorema vniuersale illud ipsum, quod supra proposuimus, sed alia via demonstratio procedet, cum & Resolutio alia via processerit.

Theorema.

Si trium corporum æque ponderantium primum, & tertium fuerit diuersi generis, secundi autem portio sit eiusdem generis cum corpore primo; reliqua vero eiusdem generis cum corpore tertio; erit vt differentia molium primi & tertij ad differentiam molium primi, & secundi; ita pondus vnius corporum ad pondus portionis corporis secundi, quæ est eiusdem generis, cum corpore tertio. B



Resumantur superioris Theorematis figura, & repetantur eadem verba idest. Sint tria corpora æque ponderantia A, BC, D, quorum primum, & tertium sint generis diuersi; portio autem secundi, vtpote B, sit eiusdem generis cum corpore A: reliqua vero portio eiusdem generis cum corpore D. Dico vt differentia inter molem corporis A, & molem corporis D ad differentiam inter molem corporis A, & molem corporis B C, ita esse pondus vnius corporum ad pondus portionis C. C

Sit enim portionis B pondus E F portionis autem C pondus FG. ergo totius corporis BC pondus erit EG, quod quidem pondus erit & corporum A, & D. corporis autem A sit moles H: portionis vero B moles I K, & portionis C moles K L; corporis vero D moles MO. & sumantur M N, I P æquales ipsi H. Quoniam igitur est vt pondus corporis A ad pondus portionis B, hoc est vt EG ad EF, ita moles ipsius A ad molem ipsius B, hoc est, ita H, vel I P ad I K: erit per conuersionem rationis vt E G ad G F, ita I P ad P k. sed vt E G, ad G F, ita est quoque M O ad k L, est enim vt pondus corporis D ad pondus portionis C, ita moles ipsius D ad molem ipsius C. in prima quidem figura sic concludo. ergo vt M O ad K L, ita erit I P ad P k. & permutando vt M O ad I P, hoc est, ad M N, ita K L ad P K & diuidendo vt O N ad N M, ita L P ad P K. & rursus permutando erit O N ad L P, vt N M, vel I P ad P k; sed ostensum est supra esse & E G ad G F vt I P ad P K, ergo & O N ad L P, ita erit E G ad G F, hoc est vt diffe- D

ren-

A rentia inter moles corporum A D ad differentiam inter moles corporum A & B C, ita pondus vnius corporum, aut pondus portionis C, quæ est eiusdem generis cum corpore tertio.

In secunda vero figura concludo in hunc modum. ergo vt I P ad P K, ita erit M O ad k L, & permutando vt I P. vel N M ad M O, ita P k ad K L, & diuidendo vt N O ad O M, ita P L ad L k, & rursus permutando erit vt N O ad P L, ita O M ad L k. sed vt O M ad L k, ita est E G ad G F, hoc est vt moles corporis D ad molem corporis C; ita pondus eiusdem corporis G ad pondus eiusdem corporis C. ergo vt N O ad P L, ita erit E G ad G F. hoc est vt differentia inter moles corporum A D ad differentiam inter moles corporum A & B C, ita pondus vnius corporum ad pondus portionis C, quæ est eiusdem

B generis cum corpore tertio. quod erat ostendendum.

Sed facilius atque exactius deprehendetur portio argenti quod, est in corona si ipsa corona & massæ illæ ponderentur in aqua, quemadmodum in nostro Archimede promoto docuimus.

Lemma I.

Si fuerint lineæ quodcumque æqualiter sese excedentes. Composita ex extremis æqualis erit vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis, & si fuerit numerus linearum impar; mediæ duplæ æqualis erit.

C SInt lineæ quodcumque æqualiter sese excedentes A B C D F E.

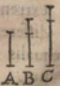
Dico compositam ex extremis A F æqualem esse vnicuique compositarum ex B E, vel ex C D, vel mediæ duplæ; si numerus linearum est impar.

Quoniam enim si ab extrema F auferatur. excessus quo superat, proximam E, reliqua æqualis erit E. similiter à secunda B, ablato excessu, quo superat primam A, reliqua æqualis erit A. Si igitur æqualibus A, & B multatæ addantur æquales F, multata & E composita ex A & F multata; æqualis erit compositæ ex B multata & E.

Restituantur excessus ablati tum ipsi B, tum ipsi F, qui quidem excessus sunt ęquales, nam æqualiter lineæ sese excedunt. ergo composita ex A & F tota,

D æqualis erit compositæ ex B tota & E. Eadem ratione ostendemus compositam ex C D, æqualem esse compositæ ex B E. quare & compositæ ex A F.

Sed sit numerus linearum A B C impar. eadẽ ratione ostendemus compositam ex extremis A C æqualẽ esse mediæ duplæ. nam C contracta excessu, quo superat mediã B, æqualis est ipsi B; A vero protracta eodẽ excessu æqualis erit eidem B. quare composita ex A C æqualis erit B duplæ. quare constat propositum.



Idem aliter breuius ostendemus.

Sint lineæ quodcumque æqualiter sese excedentes, quarum prima sit B. exces-

cessus autem, quo sese excedunt A. ergo secunda erit B ✠ A. tertia vero B A
✠ A 2, & sic deinceps. exponatur igitur series huiusmodi linearum. et erunt

B B ✠ A B ✠ A 2 B † A 3 B † A 4 B ✠ A 5

Manifestum est composita ex extremis æquale esse vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis. nam compositæ ex extremis B, & B † A 5, est B 2 ✠ A 5 quanta etiam est composita ex secunda B ✠ A & B ✠ A 4, ac etiam quanta est composita ex tertia B ✠ A 2 & B † A 3. Æque manifestum est si numerus linearum fuerit impar compositam ex extremis æqualem esse mediæ duplæ.

Lemma II.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. Dupla composita ex omnibus, multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum. B

NVmerus enim linearum erit par aut impar. sit par. Quoniam igitur composita ex extremis æqualis est vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis per antecedens Lemma, & æqualis quoque sibi ipsi: ideo composita ex omnibus, totuplex erit compositæ ex extremis, quot sunt binæ lineæ, & consequenter dupla composita ex omnibus, totuplex compositæ ex extremis; quot sunt lineæ.

Sed sit numerus linearum impar. Quoniam igitur composita ex extremis æqualis est vnicuique compositarum è duabus æque distantibus ab extremis, & æqualis quoque sibi ipsi, ideo composita ex omnibus, excepta media, totuplex erit compositę ex extremis, quo sunt binę lineę, excepta media, & per consequens dupla composita ex omnibus, excepta media, totuplex erit com- C
lem. 1 positæ ex extremis, quot sunt lineę, excepta media; sed dupla media* æqualis est compositę ex extremis. ergo dupla composita ex omnibus, totuplex erit compositę ex extremis, quot sunt lineæ. Itaque dupla composita ex omnibus multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum. quod erat demonstrandum.

Lemma III.

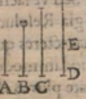
Si fuerit lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. Differentia extremarum continuata excessu, multiplex est ipsius excessus per numerum linearum. D

SInt lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D I, & ab extrema D I, quæ sit maxima auferatur D E æqualis minimæ A ergo differentia extremarum erit E I. producatur autem E I in F, vt sit I F æqualis excessui. Dico E F multiplicem esse ipsius I F per numerum linearum.

Quoniam enim A prima differt à secunda quidem B. per excessum æqualem I F, à tertia vero C per duplum excessum I F, à quarta autem D I per triplum excessum, ac denique ab extrema seu maxima per

ex-

A excessum multiplicem, per numerum linearum, dempta vna, hoc est differentia extremarum, multiplex est ipsius excessus per numerum linearum dempta vna, & consequenter differentia extremarum continuata excessu, multiplex est ipsius excessus per numerum linearum. quod erat ostendendum.



Lemma IV.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. Est vt dupla composita ex omnibus, ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum continuata excessu ad excessum.

B

QVoniam enim dupla composita ex omnibus * multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum, per quem numerum etiam differentia extremarum continuata excessu, * multiplex est ipsius excessus. ergo quotuplex est dupla composita ex omnibus, compositæ ex extremis, totuplex; erit differentia extremarum continuata excessu, ipsius excessus; quare vt dupla composita ex omnibus ad compositam ex extremis, ita erit differentia extremarum, continuata excessu ad excessum. quod erat ostendendum. lem. ii ex antec.

Problema II.

C Data minima & maxima linearum æqualiter sese excedentium & composita ex omnibus; inuenire singulas. Oportet autem duplam compositam ex omnibus multiplicem esse compositæ ex extremis per numerum binario maiorem.

Resolutio.

SIt data minima B, maxima vero D, composita autem ex omnibus G. Oportet inuenire singulas.

Quæratur excessus, is esto A. Quoniam igitur est vt dupla composita ex omnibus, ad compositam ex extremis; ita differentia extremarum continuata excessu, ad excessum; erunt proportionales.

D G 2 D + B D -- B + A A.

Sed factum sub extremis æquale est ei, quod fit sub medijs, ergo

G 2 in A æquabitur (D Q -- D in B + D in A
(+ D in B -- B Q + B in A

Hoc est G 2 in A æquabitur D Q + D in A -- B Q + B in A

Auferantur vtrinque D in A, & B in A, vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

G 2 in A -- D in A -- B in A æquabitur D Q -- B Q

Seu quod idem est G 2 -- D -- B in A æquabitur D Q -- B Q

Et æqualitate ad proportionem reuocata; proportionales erunt.

G 2 — D — B D ✠ B D — B A. A

Sed vt facilior reddatur via ad Theorematis demonstrationem, quę per vestigia Resolutionis progredi debet, curandum est, vt datarum magnitudinum characteres quam paucissimi existant; multitudo enim characterum obruit quodammodo ipsa vestigia, & inuoluit. Itaque cum in resoluendo Problemate plures characteris, (siue aggregatum datarum magnitudinum, siue differentiam significantes) simul semper, vel in vna æqualitatis parte, vel in vtraque existant; tunc ipsum aggregatum, vel differentia poterit vno tantum charactere designari. Igitur in superiori Resolutione quoniam characteris D ✠ B vel D — B semper simul existunt; poterit pro D ✠ B substitui F, & pro D — B substitui H. Substituantur & procedat Resolutio, vt supra. Quoniam

Ie m. 4 igitur * proportionales sunt B

G 2 F H ✠ A A

factum sub extremis æquale erit ei, quod fit sub medijs; nempe

G 2 in A æquabitur F in H ✠ F in A.

Auferatur vtrinque F in A, vt cognita ab incognitis distinguantur, ergo

G 2 in A — F in A æquabitur F in H.

Seu quod idem est G 2 — F in A æquabitur F in H

Et æqualitate ad proportionem reuocata, proportionales erunt

G 2 -- F F H A

ea ipsa proportionalium series, quæ per antecedentem resolutionem inueniebatur.

Porisma. C

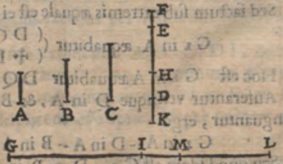
Vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis, ad compositam ex extremis; ita est differentia extremarum ad excessum.

Hoc Porisma in formam Theorematis ita proponetur.

Theorema.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes, est, vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & composiæ ex extremis, ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum ad excessum.

Sint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D E, sitque G I æqualis compositæ ex omnibus, & producatur maxima E D in k, vt sit D k æqualis minimæ A, cui quoque æqualis fiat D H. erit igitur E H differentia extremarum; E k vero composita ex extremis. Rursus producatur H E in F, vt sit E F æqualis D



ex-

A excessui, quo lineæ sese excedunt. Dico differentiam duplæ G I, & rectæ E k ad ipsam E K esse, vt H E ad E F. Duplicetur enim G I in L. & ab ipsa auferatur L M æqualis k E. Quoniam igitur est * vt G L ad k E, ita H F ad lem. 4
ad F E, rectangulum sub G L, & F E * æquale erit rectangulo sub K E, & H F, 16 sexti
hoc est rectangulis k E H, k E F; auferatur vtrinque rectangulum K E F. ergo rectangulum sub G L, & E F minus rectangulo K E F, hoc est minus rectangulo sub L M, & E F, æquale erit rectangulo k E H; sed rectangulum sub G L, & E F minus rectangulo sub L M, & E F æquale est rectangulo sub G M, & E F: ergo rectangulum sub G M, & E F, æquale erit rectangulo K E H; quare * vt G M ad K E ita erit H E ad E F. quod erat ostendendum. 16 sexti

Alia breuiori, ac faciliori via & Problema resoluam, & Theorema de-
B monstrabo.

Ijsdem datis. quæratur excessus vt in antecedenti.

Resolutione. is esto A. Et quoniam * proportionales sunt. lem. 4

G 2. D ✢ B. D -- B ✢ A A

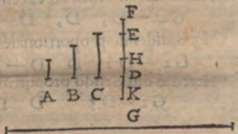
Et diuidendo proportionales erunt

G 2 -- D -- B D ✢ B D — B A

Ea ipsa proportionalium series, quæ per priorem resolutionem inuenta est. itaque proponetur idem Theorema; sed alia ratione demonstrabitur.

Si fuerint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes. est vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis; ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum ad excessum.

C Sint lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D E; sitque G æqualis compositæ ex omnibus, & producatur maxima E D in k, vt sit D K æqualis minimæ A, cui quoque æqualis fiat D H. erit igitur E H differentia extremarum; E K vero composita ex extremis. Rursus producatur H E in F, vt sit E F æqualis excessui, quo lineæ sese excedunt. Dico differentiam inter duplam G, & rectam E K ad ipsam E k esse, vt H E ad E F. Quoniam



enim est * vt dupla G ad E K, ita H F ad E F; erit diuidendo vt differentia, lem. 4
D qua G dupla superat E K ad E k, ita H E ad E F; quod erat ostendendum.

Sint numeri æqualiter sese excedentes, quorum minimus, idemque primus est 3; maximus vero 13; summa autem omnium 48, & oportet inuenire singulos. Fiet vt differentia summæ omnium duplæ, & summæ extremorum, ad summam extremorum, ita differentia extremorum, ad excessum, hoc est vt 80 ad 16, ita 10 ad 2. itaque 2 erit excessus; atque adeo progresio numerorum 3. 5. 7. 9. 11. 13. quorum summa est 48.

Pro-

 A

Problema III.

Data secunda linearum æqualiter sese excedentium, & composita ex extremis, itemque composita ex omnibus. inuenire singulas. Oportet autem duplam compositam ex omnibus multiplicem esse compositæ ex extremis, per numerum binario maiorem.

HOc Problema in duos Casus diuidam, primus erit cum dupla cōposita ex omnibus multiplex est compositæ ex extremis per numerū maiorem ternario, secundus autem cum ea multiplex est per ipsum ternarium.

Resolutio primi Casus.

SIt data secunda B; composita vero ex extremis D; composita autem ex omnibus G. sitque dupla G multiplex ipsius D per numerum maiorem ternario, ergo numerus linearum æqualiter sese excedentium ternario maior erit. quoniam dupla composita ex omnibus* multiplex est compositæ ex extremis per numerum linearum. B

lem. 1

Excessus igitur, de quo quæratur esto A, ergo B — A erit minima, quæ si auferatur à D composita ex extremis; reliqua D -- B ✠ A erit maxima; à qua si auferatur minima, quæ est B -- A, reliqua D — B 2 ✠ A 2 erit differentia maxmæ, & minimæ, hoc est extremarum.

Et quoniam ex antecedente Theoremate est, vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compoxtæ ex extremis ad compositam ex eztremis, ita differentia extremarum ad excessum; ideo proportionales erunt. C

G 2 — D, D, D — B 2 ✠ A 2, A

Et diuidendo proportionales erunt

G 2 — D 2 D D — B 2 ✠ A A

Iterum diuidendo proportionales erunt

G 2 -- D 3 D D -- B 2 A

Porisma.

Vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & triplæ compositæ ex extremis, ad compositam ex extremis; ita est differentia compositę ex extremis, & duplæ secundæ, ad excessum.

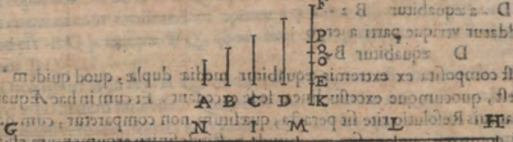
Ex hoc Porismate proponetur Theorema huiusmodi. D

Theorema.

Si numerus linearum æqualiter sese excedentium fuerit ternario maior, erit vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & triplæ co mpositæ exextremis ad compositam ex extremis; ita differentia compositæ ez extremis, & duplæ secundæ ad excessum.

SInt lineæ quotcumque æqualiter sese excedentes A, B, C, D, E F, quarum numerus sit ternario maior, & ponatur G I æqualis compositæ ex om-

A omnibus, eaque duplicetur in H. ergo G H multiplex est compositæ ex extremis, per numerum ternario maiorem. quoniam dupla composita ex omni-



B bus* multiplex est compositæ ex extremis, per numerum linearum. itaque lem. 2
ipsa G H maior est, quam tripla composita ex extremis. sumatur igitur in G H recta H L æqualis compositæ ex extremis; cui quoque æqualis sumatur L M, similiter eidem æqualis, sumatur M N. reliqua igitur G N erit differentia duplæ compositæ ex omnibus & compositæ ex extremis. Deinde sumatur E O æqualis primæ A vel E K, & fiat K P dupla secundæ B. cum igitur P K dupla secundæ superet O K duplam primam, excessu P O; simpla secunda superabit simplam primam dimidio excessu P O. Secetur ergo P O bifariam in Q. erit P Q, vel Q O excessus, quo lineæ sese excedunt. Dico igitur G H ad N M esse vt F P ad P Q, hoc est differentiã duplæ compositæ ex omnibus, & triplæ compositæ ex extremis ad composi-
C tam ex extremis, esse vt differentia compositæ ex extremis, & duplæ secundæ ad excessum. Quoniam enim ex antecedente Theoremate est, vt differentia duplæ compositæ ex omnibus, & compositæ ex extremis ad compositam ex extremis, ita differentia extremarum ad excessum, hoc est vt G L ad L M; ita F O ad O Q. erit diuidendo vt G M ad M L, hoc est ad M N, ita F Q ad Q O, hoc est ad Q P, & rursus diuidendo erit G N ad N M ita F P ad P O. quod erat ostendendum.

Sint numeri æqualiter sese excedentes, quorum secundus sit 5; summa autem extremorum 14. summa vero omnium 35. & oporteat inuenire singulos. Fiet vt differentia summæ omnium duplæ, & triplæ summæ extremorum ad summam extremorum; ita differentia summæ extremorum & duplæ
D secundæ ad excessum: hoc est vt 28 ad 14, ita 4 ad 2. itaque 2 erit excessus, atque adeo progressio numerorum 3 5 7 9 11, quorum secundus est 5 summa vero extremorum 14. summa autem omnium 35.

Resolutio secundi Casus.

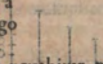
Sit data secunda B composita ex extremis D: composita ex omnibus G, cuius dupla sit multiplex ipsius D per ternarium, hoc est sit tripla ipsius D. ergo tres erunt lineæ æqualiter sese excedentes. oportet inuenire primam, & tertiam.

Prima esto A, ergo D -- A erit tertia, composita autem ex prima, & tereia ponitur D. rursus quoniam prima quidem est A. secunda vero B., excessus, quo secunda B superat A primam, erit B -- A. is excessus addatur secundæ B, fiet tertia B 2 -- A, at eadem tertia est D -- A, ergo A

D -- a æquabitur B 2 -- a

Addatur vtrique parti a ergo

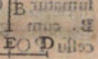
D æquabitur B 2



lem. 1 hoc est composita ex extremis æquabitur mediæ duplæ, quod quidem * verum est, quocumque excessu lineæ sese excedant. Et cum in hac Æquatione quamuis Resolutio rite sit peracta, quæsitum non comparetur, cum dato, vt tali comparatione quæsita magnitudo possit definiri; argumentum est primam linearum de qua quæritur cuiuscumque longitudinis exhibitam; modo ea minor sit, quam data secunda, Problemati satisfacere, idque B ita fit manifestum.

Sit data secunda, hoc est media trium linearum æqualiter sese excedentium B; composita autem ex extre-

lem. 1 mis C D ea * erit dupla ipsius B, Oportet inuenire extremas. secetur C D vtcumque in F, & sit C F minor, quam F D. Dico lineas æqualiter sese excedentes, esse



lem. 1 C F B F D. Quoniam enim C D * æqualis est duplæ B, secta C D bifariam in E, erit vtraque ipsarum C E, E D æqualis ipsi B; sed C E superat C F primam excessu F E, quo etiam tertia F superat ipsam E D. ergo & secunda B superabit primam C F excessu F E, atque tertia C F D B secundam. Itaque lineæ C F B F D æqualiter sese excedunt, atque earum media est ipsa B data, & composita ex extremis data C D, factum est igitur quod oportuit.

In numeris sit secundus numerus, hoc est medius 5. summa extremorum erit. 10. ponatur pro primo numero quilibet numerus quinario minor, vtpote 1 tertius erit 9, & numeri 1, 5, 9, æqualiter sese excedentes Problemati satisfaciunt.

Sed ponatur pro primo numero 2. tertius erit 8, & numeri 2 5 8 æqualiter sese excedentes problemati satisfaciunt.

Item ponatur pro primo numero $2\frac{1}{4}$, tertius erit $7\frac{1}{2}$, atque numeri $2\frac{1}{2}$ 5 $7\frac{1}{2}$ æqualiter sese excedentes Problemati satisfaciunt. D

Quomodo Problemata impossibilia cognoscantur.

Caput II.

Interdum contingit, vt Problema propositum sit impossibile. Istam impossibilitatem Resolutio arguit exhibens impossibilem Aequationem. Nam quotiescumque Resolutio Problematis incidit in Aequationem impossibilem; argumentum est Problema impossibile esse. Aequationem auté impossibilem voco cũ inea minor magnitudo proponitur æquari maiori, quod

A quod quidem absurdum, vel aperte cernitur, vel arguitur ex eo, quod ipsa æquatio tunc inexplicabilis redditur; nam cum Æquatio explicari nequit, causa est ipsa Æquationis inæqualitas. idque sic demonstrabo.

Proponatur B in $A - AQ$ æquari BQ. hæc Æquatio non potest explicari; nam ad eam explicandam oportet à quadrato dimidiæ coefficientis B, quod est $BQ\frac{1}{4}$ auferre BQ, quod fieri non potest; cum sit BQ maius, quam $BQ\frac{1}{4}$.

Dico igitur B in $A - AQ$, minus esse BQ, hoc est in proposita Æquatione æqualitatem non esse. Quoniam enim ponitur AQ auferri a B in A, & id quod remanet æquari BQ; erit AQ minus quam B in A. quare & A minor erit quam B. atque adeo B in A minus, quam BQ, & per consequens B in $A - AQ$ multo minus. In proposita igitur Æquatione non
B est æqualitas. quod erat ostendendum.

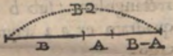
Problema I.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus vna cum quadrato differentiæ partium æquale sit quadratis partium.

Resolutio.

Sit data recta linea $B\,2$, quam oportet secare, ita vt rectangulum sub partibus, vnà cum quadrato differentiæ partium æquale sit quadratis partium.

C Factum iam sit, & dimidia differentia partium esto a. ergo pars* maior erit $B + A$; pars autem minor $B - a$. Et quoniam rectangulum sub $B + a$ & $B - a$ vna cum quadrato ex $a\,2$ æquale est quadratis ex $B + a$, & $B - a$, sic enim ponitur secta data recta linea $B\,2$, ideo co 2. probl. 1 lib. 3



$$BQ - aQ + aQ\,4 \text{ æquabitur } BQ\,2 + aQ\,2$$

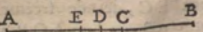
hoc est $BQ + aQ\,3$ æquabitur $BQ\,2 + aQ\,2$

auferatur vtrinque BQ, & $aQ\,2$; ergo

$$AQ \text{ æquabitur } Bq.$$

D vnde & A æquabitur B, pars toti, quod est absurdum. Cum igitur Resolutio incidat in Æquationem impossibilem, argumentum est Problema impossibile esse; quæ quidem impossibilitas repetendo Resolutionis vestigia ita ostendetur.

Sit enim si fieri potest recta aB secta in C, ita vt rectangulum sub partibus AC, Cb vna cum quadrato differentiæ earundem æquale sit quadratis aC, Cb, & sumatur AE æqualis Cb. ergo differentia partium



a c, C B erit E C. secetur autem A B bifariam in D. Quoniam igitur rectangulum A C b, vnà cum quadrato E C, hoc est cum quadrato D C quater. æquale est quadratis A C, C B, sic ponitur secta A b; ipsum autem rectangulum A C b, vna cum quadrato D C* æquale est quadrato A D, vel quod idem est rectangulum A C B æquale est quadrato a D, minus quadrato D L; ideo quadratum a D minus quadrato D C, plus quadrato D C quater, hoc est quadratum a D, vnà cum quadrato D C ter, æquale erit quadratis a C c b, hoc est* duplo quadratorum a D, D c. auferatur vtrinque quadratum a D, & duplum quadrati D c, ergo reliquum quadratum D c reliquo quadrato a D æquale erit. vnde & recta D c æqualis rectæ a D, vel D b pars toti, quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium, æquale sit quadratis partium. Itaque Problema imposibile est. quod erat ostendendum.

5 secundi A

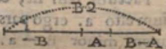
6 secundi B

Problema II.

Datum rectam lineam secare, vt triplum rectangulum, sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium, æquale sit quadrato totius rectæ.

Resolutio.

Sit data recta linea b 2 secunda vt petitur. Factum iam sit, & dimidia differentia partium esto A. ergo b + a erit pars maior b — a pars minor. Et quoniam triplum rectangulum sub b + a, & b — a vnà cum quadrato ex a 2 æquale est quadrato ex b 2, ergo. C



B Q 3 -- a Q 3 + a Q 4 æquabitur b Q 4

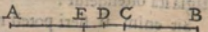
hoc est b Q 3 + a Q æquabitur b Q 4

auferatur vtrinque b Q 3; ergo

A Q æquabitur b Q.

vnde & A æquabitur b pars toti, quod est absurdum. Cum igitur æquatio imposibilis sit; Problema quoque imposibile est. Idque sic demonstrabimus. D

Sit si fieri potest recta a b secta in c; ita vt triplum rectangulum a c b, vnà cum quadrato differentiæ partium a c, c b æquale sit quadrato totius a b, & sumatur a E æqualis C B. ergo differentia inter A C, C B erit E C, deinde secetur A B bifariam in D.



5 secundi ergo rectangulum A C B, vna cum quadrato D C* æquale est quadrato A D, vel D B. seu quod idem est rectangulum A C B, æquale erit quadrato D B,

mi-

A minus quadrato D C. & conſequenter triplum rectanguli A C B æquale triplo quadrati D B, minus triplo quadrati D C. ſed ponitur triplum rectanguli A C B vnà cum quadrato E C, hoc eſt cum quadruplo quadrati D C æquari quadrato A B, ergo triplum quadrati D B, minus triplo quadrati D C, vna cum quadruplo quadrati D C, hoc eſt triplum quadrati D B, vna cum quadrato D C, æquabitur quadrato A B, hoc eſt quadruplo quadrati D B. auferatur vtrinque triplum quadrati D B. ergo reliquum quadratum DC reliquo quadrato D B æquale erit. quare & recta D C æqualis rectæ D B. quod eſt abſurdum. Non poteſt igitur ſecari recta linea, vt triplum rectangulum ſub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale ſit quadrato totius lineæ. Itaque Problema impoſsibile eſt quod era
B oſtendendum.

Problema III.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium vna cum quadrato partis minoris æquale ſit rectangulo ſub tota, & parte maiore.

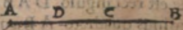
Reſolutio.

SIt data recta linea B, quam oportet ſecare vt dictum eſt: Factum iam ſit & pars maior eſto A. ergo pars minor erit B -- A,
C atq; differentia partiũ erit A 2 -- B. Et quoniá rectangulum ſub B, & A 2 - B vnà cum quadrato ex B - A æquale eſt rectangulo ſub B, & A.

B in A 2 B Q ✢ B Q ✢ A Q -- B in A 2 æquabitur B in A hoc eſt A Q æquabitur B in A pars toti. quod eſt abſurdum.

Problema igitur impoſsibile eſt, idque demonſtrabimus hac ratione.

Sit ſi fieri poteſt recta A B ſecta in C, vt rectangulum ſub tota A B & differentia partium A C, C B, vna cum quadrato partis minoris C B ſit æquale rectangulo ſub ipſa A B, & parte maiore A C.



& ſumatur C D æqualis C B. Quoniam igitur ſecta eſt A B in C, vt rectan-
D gulum B A D (hoc eſt ſub tota & differentia partium) vna cum quadrato C B æquale ſit rectangulo B A C, ipſum autem rectangulum B A D, vnà cum quadrato C B, æquale eſt quadrato A C. hoc demonſtratum eſt ſub Theoremate primo libri primi, ideo quadratum A C, æquale erit rectangulo B A C pars toti; quod eſt abſurdum. Non poteſt igitur ſecari recta linea, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium vna cum quadrato partis minoris æquale ſit rectangulo ſub tota & parte maiore. atque adeo Problema impoſsibile eſt. quod erat oſtendendum.

 A

Problema IV.

Datam rectam lineam ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale ſit quadrato partis maioris.

Reſolutio.

SIt data recta linea B ſecanda in duas partes, quemadmodum Problema iubet. Factum iam ſit, & pars maior eſto A, ergo minor pars erit B -- A atque differentia partium erit A 2 -- B. Et quoniam rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale eſt quadrato partis maioris.

B

B in A 2 - B Q æquabitur A Q.

Addatur vtrique parti B Q, & auferatur A Q, vt cognita ab incognitis ſeparentur. ergo

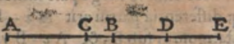
B in A 2 -- A Q æquabitur B Q

Et explicata æquatione.

B æquabitur A. totum videlicet parti, quod eſt abſurdum.

Cum igitur Æquatio ſit impoſsibilis; Problema quoque impoſsibile eſt, idque ſic demonſtrabimus.

Sit ſi fieri poteſt recta A B ſecta in C, ita vt rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale ſit quadrato rectæ A C partis maioris. & fiat C D æqualis A C. ergo differentia partium A C, C B erit B D. Fiat quoque B E æqualis A B. C



Quoniam igitur rectangulum A B D, quod fit ſub tota, & differentia partium ponitur æquale quadrato A C; ipſum autem rectangulum A B D, æquale eſt rectangulo D A B, minus quadrato A B; ideo rectangulum D A B, minus quadrato A B æquale erit quadrato A C. addatur vtrique parti quadratum A B. ergo rectangulum D A B, hoc eſt C A B bis (recta enim D A dupla eſt ipſius A C) ſeu quod idem eſt rectangulum C A E (eſt enim A E dupla ipſius A B) æquale erit quadratis A C, A B. deinde, auferatur vtrinque quadratum A C, ergo rectangulum C A E, minus quadrato A C, hoc eſt rectangulum A C E æquale erit quadrato A B. quod eſt abſurdum; quadratum enim A B æquale eſt rectangulo A C E, vna cum quadrato C B. Non poteſt igitur ſecari recta linea, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium æquale ſit quadrato partis maioris. Itaque Problema impoſsibile eſt. quod erat oſtendendum. D

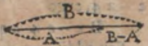
A

Problema V.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota & dupla parte maiore æquale sit quadratis, quæ fiunt à tota, & à parte maiore.

Resolutio.

Sit data recta linea B secanda, vt petitur. Factum iam sit, & pars maior esto A. ergo minor pars erit B -- A, & quoniam rectangulum sub B, & A dupla, æquale est quadratis ex B & A



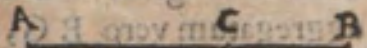
B in A 2 æquabitur B Q + A Q

B Auferatur vtrinque A Q, vt cognita ab incognitis separentur, ergo

B in A 2 -- A æquabitur B Q

Et explicata Æquatione B æquabitur A, totum parti, quod est absurdum. Problema igitur propositum impossibile est, idque, ita ostendetur.

Sit si fieri potest recta linea A B secta in partes A C, C B, quarum maior sit A C, ita vt rectangulum sub A B, & A C dupla, hoc est vt rectangulum B A C bis, æquale sit quadratis A B, A C,



& auferatur vtrinque quadratum A C, ergo rectangulum B A C bis, minus quadrato A C. æquale erit quadrato A B. sed rectangulum B A C bis, æquale est rectangulo B C A bis, vna cum quadrato A C bis, & consequenter

C rectangulum B A C bis minus quadrato A C æquale rectangulo B C A bis vna cum quadrato A C. ergo rectangulum B C A bis vna cum quadrato A C, æquale erit quadrato a B quod est absurdum. quadratum enim A B* æquale est rectangulo B C a bis, vna cum quadratis a C, C B. Non potest igitur secari recta, vt rectangulum sub tota, & dupla parte maiore æquale sit quadratis totius, & partis maioris. atque adeo Problema propositum impossibile est, quod erat ostendendum.

*4 secundi

Problema VI.

Super data base triangulum constituere, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiæ crurum, atque differentia crurum sit dupla excessus,

D quo crus maius superatur à base.

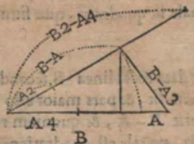
Resolutio.

Sit data basis trianguli, de quo quæritur B, & oporteat inuenire triangulum.

Factum iam sit, & excessus, quo basis superat crus maius esto a. ergo differentia crurum erit a 2, & consequenter differentiam segmentorum basis a 4. Et quoniã basis b superat crus maius excessu a; erit ipsum crus B -- a, sed crus maius superat crus minus excessu a 2. ergo crus minus erit B -- a 3; atque adeo aggregatum crurum erit B 2 -- a 4.

Et

theor. 8 secundi Et quoniam est * vt differentia crurum ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, hoc est vt a 2 ad a 4, ita B ad B 2; erit B 2 aggregatum crurum; sed idem aggregatum crurum inuentum est esse B 2 -- a 4, ergo A



B 2 -- a 4 æquabitur B 2

Seu addito vtrobique a 4 B 2, æquabitur B 2 + a 4. quod est absurdum.

Cum igitur Æquatio sit impossibilis; Problema quoque impossibile est, idque ostendetur hac ratione. B

Sit triangulum a B C, in cuius basim B C, quæ sit maior crure maiore a B cadat perpendicularis a D. ex centro A, interuallo a C describatur circulus secans basim B C in E, crus vero a B in F, ipsumque productum in G. differentia igitur crurum a B, a C est B F: aggregatum vero B G, differentia autem segmentornm B D, D C est B E. Rursus centro B interuallo b C alius circulus describatur secans ipsam b G in H. excessus igitur, quo b C superat crus a b, erit a H. & sit si fieri potest b E dupla ipsius b F, itemque b F dupla ipsius a H. Quoniam igitur b C æqualis est C

compositæ ex b a, a H; ipsa vero a b æqualis theor. 1 compositæ ex a C, & b F, hoc est & a H dupla erit b C æqualis compositæ ex a C, & a H tripla; sed cum ipsa b C æqualis sit compositæ ex b a, & a H, dupla b E æqualis erit compositæ ex b a, a c, & quadrupla a H, hoc est ex b G & quadrupla a H, sed quoniam est, vt b F ad b E, ita b C ad b G, ipsa autem b E ponitur dupla ipsius b F: ideo & b G dupla erit ipsius b C hoc est erit b G æqualis duplæ b C; sed dupla b C ostensa est æqualis compositæ ex b G, & quadrupla a H. ergo b G æqualis erit compositæ ex eadem b G, & quadrupla a H. quod est absurdum. Non potest igitur inueniri triangulum, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiæ crurum. atque differentia crurum dupla excessus, quo basis superat crus maius. itaque Problema impossibile est. quod erat ostendendum. D

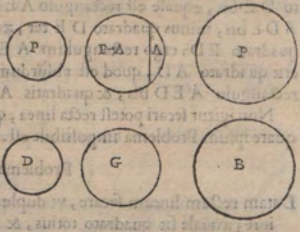
Problema VII.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota & dimidia differentia partium, vna cum rectangulo sub partibus æquale sit partium quadratis.

A

Resolutio.

Sit data recta linea B 2, quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit, & dimidia differentia esto A, ergo * B + A erit pars maior, B − A pars minor. Et quoniam rectangulum sub B 2, & A vna cum rectangulo sub B + A, & B − A æquale est quadratis ex B + A, & B − A. Corol. 2 Probl. 1



B

B 2 in A + B Q − A Q, æquabitur B Q 2 + A Q 2

Dematur vtrinque A Q 2, & B Q. ergo

B 2 in A − A Q 3 æquabitur B Q

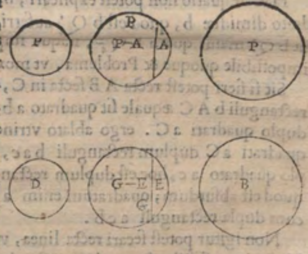
& omnibus per 3 diuisis vt numerus quadratorum reducatur ad vnitatem

B $\frac{2}{3}$ in A − A Q æquabitur B Q $\frac{1}{3}$.

Hæc Æquatio impossibilis est quoniam explicari non potest nam ad eam explicandam deberet B Q $\frac{1}{3}$ auferri ex B Q $\frac{1}{9}$ quod fieri non potest, maius enim est B Q $\frac{1}{3}$ quam B Q $\frac{1}{9}$. Cum igitur Resolutio incidat in Æquationem impossibilem, Problema quoque impossibile est. idque sic demonstrabimus.

C

Sit si fieri potest recta A B secta in C, ita vt rectangulum sub tota A B & dimidia differentia partium A C, C B, vna cum rectagulo A C B sub partibus æquale sit quadratis partium A C, C B; & sumatur A E æqualis C B, ergo differentia partium A C, C B erit E C. quare secta E C bifariam in D, erit E D dimidia differentia partium A C, C B. Et quoniam rectangulum



D

A C B, vna cum quadrato D C, * æquale est quadrato A D, dempto communi quadrato D C, rectangulum A C B æquale erit quadrato A D, minus quadrato D C, sed cum rectangulum sub A B, E D, vna cum rectangulo A C B, æquale sit quadratis A C, C B, sic enim ponitur A B secta, ideo si loco rectanguli A C B sumatur quadratum A D, minus quadrato D C, rectangulum sub A B, D E vna cum quadrato A D, minus quadrato D C, æquale erit quadratis A C, C B, hoc est * duplo quadratorum A D, D C. auferatur vtrinqne duplum quadrati D C, & quadratum A D, ergo rectangulum A B, D E, minus

5 secundi

9 secundi

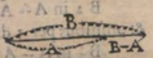
nus quadrato D C, ter hoc est rectangulum A D E bis, minus quadrato D E A
ter æquale erit quadrato A D. sed rectangulum A D E bis, minus quadrato D E bis, æquale est rectangulo A E D bis, & consequenter rectangulum A D E bis, minus quadrato D E ter, æquale rectangulo A E D bis, minus quadrato E D. ergo rectangulum A E D bis, minus quadrato E D, æquale
4 secundi erit quadrato A D, quod est absurdum. quadratum enim A D * æquale est rectangulo A E D bis, & quadratis A E, E D.

Non igitur secari potest recta linea, quemadmodum Problema fieri iubet. quare ipsum Problema impossibile est. quod erat ostendendum.

Problema VIII.

Datam rectam lineam secare, vt duplum rectangulum sub tota, & parte ma- B
iore; æquale sit quadrato totius, & duplo quadrato partis maioris.

Resolutio.



Sit data recta linea B secanda vt petitur. Factum iam sit & pars maior. esto A. ergo pars minor erit B -- A. Et quoniam duplum rectangulum sub B, & A æquale est quadrato ex b, & duplo quadrati ex A.

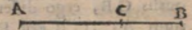
B in A 2 æquabitur b Q + A Q 2

Et ablato vtrinque A Q 2, vt cognita ab incognitis separentur.

B in A 2 -- A Q 2 æquabitur B Q

& consequenter b in A -- Q æquabitur b Q $\frac{1}{2}$ C

Hæc Æquatio non potest explicari; nam ad eam explicandam debet à quadrato dimidiæ b, quod est b Q $\frac{1}{4}$ auferri B Q $\frac{1}{2}$. quod fieri non potest cum sit b Q $\frac{1}{2}$ maius quam b Q $\frac{1}{4}$, itaque impossibilis est hæc æquatio, atque adeo impossibile quoque & Problema, vt mox demonstrabo.



Sit si fieri potest recta A B secta in C, vt duplum rectanguli b A C æquale sit quadrato a b, vnà cum duplo quadrati a C. ergo ablato vtrinque duplo quadrati a C duplum rectanguli b a c, minus duplo quadrato a c, hoc est duplum rectanguli a c b; æquale erit quadrato a b.
4 secundi quod est absurdum; quadratum enim a b * æquale est quadratis a c, c b, vna D
cum dupla rectanguli a c b.

Non igitur potest secari recta linea, vt Problema iubet. itaque ipsum Problema impossibile est. quod erat ostendendum.

Problema IX.

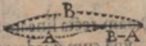
Datam rectam lineam secare, vt rectangulum triplum sub partibus æquale sit totius lineæ quadrato.

Re-

A Resolutio.

SIt data recta linea B, quam oportet secare, vt triplum rectangulum sub partibus æquale sit quadrato totius B.

Factum iam sit, & vna pars esto A. ergo altera erit B -- A. Et quoniam triplum rectangulum sub partibus æquale est quadrato totius B



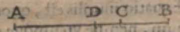
B in A 3 -- A q 3 æquabitur B q

Et omnibus per 3 diuisis, vt numerus quadratorum ad vnitatem deducatur. ergo

B in A -- A q æquabitur B q $\frac{1}{3}$

B Impossibilis est hæc Æquatio, quippe quæ non potest explicari. nam ad eam explicandam oportet à quadrato dimidiæ B quod est B q $\frac{1}{4}$ auferre B q $\frac{1}{3}$, quod quidem fieri non potest; maius enim non potest auferri a minore. Cum igitur Æquatio sit impossibilis; Problema quoque impossibile est; idque sic demonstrabitur.

Sit si fieri potest recta AB secta in C, ita vt triplum rectangulum ACB sub partibus æquale sit quadrato totius AB. ergo simplum rectangulum ACB sub æquale erit tertiæ parti quadrati AB, & ideo maius erit quarta parte eiusdem quadrati AB; hoc est maius erit quadrato dimidiæ



C AB, quæ sit AD. sed quadratum AB * æquale est rectangulo ACB, vna cum quadrato DC, ergo rectangulum ACB maius erit eodem rectangulo ACB, vna cum quadrato DC. quod est absurdum. Non potest igitur secari recta linea, vt triplum rectangulum sub partibus æquale sit quadrato totius. itaque Problema impossibile est. quod erat ostendendum. 5 secundi

Simili ratione ostendetur omne Problema cuius Resolutio incidit in Æquationem impossibilem, impossibile esse.

Quomodo Problemata vana, seu nugatoria cognoscantur.

Caput tertium.

D EXpositis quæ ad cognitionem Problematum impossibilium pertinent: sequitur vt dicam quomodo Problemata vana, seu nugatoria cognoscantur. ea enim Problematibus impossibilibus ex diametro opponuntur. nam Problema impossibile dicitur, cum id quod Problema iubet nulla ratione fieri potest. Problema autem vanum, seu nugatorium appellatur, cum id quod Problema fieri iubet quacumque ratione fiat Problemati satisfit, vel cum Problema infinitis modis construi potest.

Quotiescumque igitur Resolutio Problematis rite peracta incidit in Æquationem inutilem, argumentum est Problema vanum esse, ac nugatorium. Æquationem autem inutilem voco, cum in ea eadem magnitudines ijsdem ma-

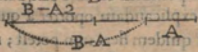
magnitudinibus adæquantur, vel etiam cum datæ magnitudines, datis tantum magnitudinibus expulso quæsito adæquantur; quia tunc nulla fit comparatio dati & quæsiti propter quem finem instituta est Æquatio. A

Problema I.

Datam recta lineam secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium, vnà cum quadrato partis minoris, æquale sit quadrato partis maioris.

Resolutio.

Sit data recta linea B, quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit & pars minor esto A, ergo maior erit B -- A, atque differentia partium erit B -- A 2. & quoniam rectangulum sub tota, & differentia partium, vna cum quadrato partis minoris, æquale sit quadrato partis maioris. B

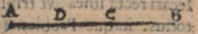


$$BQ - B \text{ in } A\,2 + AQ \text{ æquabitur } BQ + AQ - B \text{ in } A\,2$$

In hac Æquatione sunt ex vtraque parte eædem magnitudines. ergo ipsa Æquatio inutilis est, quod argumentum est Problema vanum esse, ac nugatorium. nempe vtcumque data recta linea secetur Problemati satisfieri; quod quidem verum est: demonstrauimus enim sub Theoremate primo libri primi, si recta linea secetur vtcumque rectangulum sub tota, & differentia partium, vnà cum quadrato partis minoris, æquale esse quadrato partis maioris. C

Sed illud ipsum ostendemus eadem ratione quà supra resolutum est.

Secetur recta A B vtcumque in C, & sit pars minor C B, cui æqualis sumatur C D, ergo differentia partium A C, C B erit A D. Dico rectangulum B A D vna cum quadrato C B æquale esse quadrato A C. Quoniam enim rectangulum B A D æquale est quadrato A B, minus rectangulo A B D, hoc minus rectangulo A B C bis, cum sit B D. dupla ipsius B C. Addatur vtrobique quadratum B C. ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato B C, æquale erit quadratis A B, B C, minus rectangulo A B C bis; sed & quadratum A C (cum recta A C sit differentia the. 2. primi inter A B, B C) * æquale est quadratis A B, B C, minus rectangulo A B C bis, ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato B C, æquale erit quadrato A C, quod erat ostendendum. D

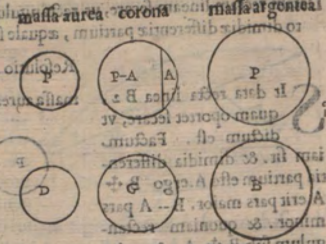


Problema II.

Datam rectam lineam secare, vt quadrata partium æqualia sint quadrato differentiæ partium vna cum duplo sub partibus rectangulo.

Re-

A **Resolutio.**



Sit data recta linea B 2. quā oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit & dimidia differentia partium esto A ergo pars maior* erit B + A. pars vero minor B -- A.

Et quoniam quadrata ex B + A & B -- A æqualia sunt quadrato ex A dupla, vna cum duplo

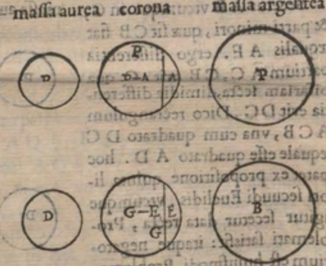
B rectanguli sub B +, & B -- A

BQ2 + AQ2 æquabitur AQ4 + BQ2 - aQ2

hoc est BQ2 + AQ2 æquabitur AQ2 + BQ2

Hæc Æquatio inutilis est, cum in ea eædem magnitudines ijsdem magnitudinibus adæquentur. quod argumentum est Problema vanum esse, ac negatorium. idest vtcumque data recta secetur Problemati satisfieri, idque verum est. nam secta recta linea vtcumque, quadrata partium æqualia sunt quadrato differentiæ, partium, vna cum duplo rectangulo sub partibus. Hoc licet ostensum sit sub Theoremate secundo lib. primi, tamen hic quoque ex ipsa Resolutione demonstrationem eliciam.

cō. aprob. libri primi



C Secetur recta linea A B vtcumque in C. & parti minori, quæ sit C B fiat æqualis A E, ergo differentia partium A C, C B erit E C, quæ si secetur bifariam in D, erit dimidia differentia D C. Dico quadrata A C, C B æqualia esse quadrato E C, vna cum duplo rectanguli A C B. Quoniam enim A B secta est in partes æquales in D, & in partes inæquales in C

D quadratum A D* æquale rectangulo A C B, vna cum quadrato D C. & consequenter duplum quadrati A D æquale duplo rectanguli A C B, vna cum duplo rectanguli A C B, vna cum duplo quadrati A C, addito communi duplo quadrati D C, duplum quadratorum A D, D C æquale erit duplo rectanguli A C B, vna cum quadruplo quadrati D C, hoc est vna cum quadrato E C. sed duplum quadratorum A D, D C* æquale est quadratis A C, C B, ergo quadrata A C, C B æqualia erunt duplo rectanguli A C B vna cum quadrato E C. quod erat ostendendum.

5 secundi

9 secundi

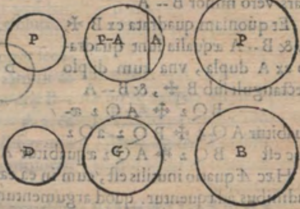
A

Problema III.

Datam rectam lineam secare, vt rectangulum sub partibus vna cum quadrato dimidiæ differentiæ partium, æquale sit quadrato semisis datæ.

Resolutio.

massa aurea . corona . massa argentea.



Sit data recta linea B 2, quam oportet secare, vt dictum est. Factum iam sit. & dimidia differentia partium esto A. ergo [ex 2. probl. 1 lib. primi] $B + A$ erit pars maior. $B - A$ pars minor. & quoniam rectangulum sub $B + A$, & $- A$, vna cum quadrato ex A æquale est quadrato ex B

B

$BQ - AQ + AQ$ æquabitur BQ:

hoc est BQ æquabitur BQ.

Cum igitur in hac Æquatione eadem magnitudo eidem magnitudini æquetur, ipsa Æquatio inutilis est, & ideo Problema vanum, ad negatorium. vtcumque enim data recta secetur Problemati satisfiet. idque sic demonstrabo.

Secetur A B vtcumque in C, massa aurea corona massa argentea C

& parti minori, quæ sit C B fiat æqualis A E. ergo differentia partium A C, C B. erit E C, qua bifariam secta, dimidia differentia erit D C. Dico rectangulum A C B, vna cum quadrato D C æquale esse quadrato A D. hoc patet ex propositione quinta libri secundi Euclidis. vtcumque igitur secetur data recta, Problemati satisfit: itaque negatorium est huiusmodi Problema. quod erat ostendendum.

D

Problema IV.

Super data base triangulum constituere, quod habeat differentiam crurum dimidiæ basi æqualem.

A

Resolutio.

SIt data basis $B\,2$, super qua oportet triangulum constituere, cuius crurum differentia sit æqualis dimidiæ basi. Factum iam sit. ergo differentia crurum erit B. è vertice autem trianguli cadat perpendicularis. in basim secans ipsam basim in duo segmenta, quorum differentia esto A. ergo segmentum maius erit $B + A\,\frac{1}{2}$, segmentum vero minus $B - A\,\frac{1}{2}$. & quoniam est, vt * differentia crurum trianguli ad differentiam segmentorum basis, ita basis ad aggregatum crurum, hoc est vt B ad A, ita $B\,2$ ad $A\,2$, ergo $A\,2$ erit aggregatum crurum, sed differentia eorundem crurum est B; ergo crus maius erit * $A + B\,\frac{1}{2}$ crus autem minus $A - B\,\frac{1}{2}$. & quoniam quadratum cruris maioris * æquale est quadratis, quæ fiunt à segmento maiori, & à perpendiculari. si à quadrato cruris maioris auferatur quadratum segmenti maioris, remanebit quadratum perpendicularis. à quadrato igitur ex $A + B\,\frac{1}{2}$ quod est $AQ + BQ\,\frac{1}{4} + B$ in A, auferatur quadratum ex $B + A\,\frac{1}{2}$ quod est $BQ + AQ\,\frac{1}{4} + B$ in A. remanebit $AQ\,\frac{1}{4}\;BQ\,\frac{1}{4}$ pro quadrato perpendicularis. Corol. ij prob. 1 lib. 2 / ibid. / 47 primi

B

C Æque quoniam quadratum cruris minoris * æquale est quadratis, quæ fiunt à segmento minori, & à perpendiculari; si à quadrato cruris minoris auferatur quadratum segmenti minoris, remanebit quadratum perpendicularis, à quadrato igitur ex $A - B\,\frac{1}{2}$, quod est $AQ + BQ\,\frac{1}{4} - B$ in A, auferatur quadratum ex $B - A\,\frac{1}{2}$, quod est $BQ + AQ\,\frac{1}{4} - B$ in A; remanebit $AQ\,\frac{1}{4} - BQ\,\frac{1}{4}$ pro quadrato perpendicularis; sed quadratum eiusdem perpendicularis inuentum est esse $AQ\,\frac{1}{4} - BQ\,\frac{1}{4}$. ergo ibid.

$$AQ\,\tfrac{1}{4} - BQ\,\tfrac{1}{4} \text{ æquabitur } AQ\,\tfrac{1}{4}\;BQ\,\tfrac{1}{4}.$$

Inutilis est igitur hæc Æquatio, dum ex vtraque parte eædem magnitudines existant. atque adeo Problema vanum, ac nugatorium. nam super eadem base innumera triangula constituentur, in quibus differentia crurum æqualis erit dimidiæ basi, vt in hac quæ sequitur compositione perspicuum erit.

D

Compositio.

SIt data basis A B, super qua constituere oportet triangulum, vt differentia eius crurum sit æqualis dimidiæ basi. Secetur A B bifariam in C, & sumatur A D maior, quam A C, & reliqua D B secetur bifariam, & ad rectos angulos in E à recta G E, & duplicetur A D in F, & secetur C F bifariam in H, & centro A interuallo A H describatur arcus secans rectam E G in G, & connectantur G A, G B. Dico triangulum G A B, G A B, esse de quo quæritur. A

Centro enim G interuallo G D describatur circulus secans crus A G in I, productum vero in K. is circulus* transibit per punctum D; cum sint æquales D E, E B, ex constructione. Et quoniam A B dupla est ipsius A C, & A F dupla ipsius A D erit vt A C ad A B, ita A D ad A F. quare rectangulum C A F sub extremis æquale erit rectangulo D A B sub medijs; sed vt rectangulum I A K* æquale est rectangulo D A B. ergo rectangula I a k, C a F æqualia erunt, sed rectangulum quidem I a k æquale est quadrato a I, & rectangulo a I K, hoc est & rectangulo a I G bis; rectangulum vero C a F æquale est quadrato a C, & rectangulo a C F, hoc est & rectangulo a C H bis. ergo quadratum a I, & rectangulum a I G bis, æqualia erunt quadrato a C, & rectangulo a C H bis.

3 tertij

co. 36 tertij

B

Et quoniam æquales sunt a G, a H, ex constructione, erunt æqualia & eorum quadrata; sed quadrato a G æqualia sunt quadrata a I, I G, & rectangulũ a I G bis; quadrato autem a H, æqualia sunt quadrata a C, C H, & rectangulũ a C H bis, ergo quadrata a I, I G, & rectangulum a I G bis, æqualia erunt quadratis a C, C H, & rectangulo a C H bis, sed quadratum a I, & rectangulum a I G bis, ostensa sunt æqualia quadrato a C, & rectangulo a C H bis. ergo & reliquum quadratum I G reliquo quadrato C H æquale erit. vnde & recta I G æqualis rectæ C H, quare cum sint æquales a G, a H, erit & reliqua a I æqualis reliquæ a C. hoc est dimidiæ a B. Ad datam igitur basim a B constitutum est triangulum G a b, cuius crurum differentia æqualis est dimidiæ basi. quod erat faciendum. C

Scholium.

In compositione Problematis sumpta est in base A B, recta a D pro differentia segmentorum a E, E b ad libitum solummodo maior est, quam a C dimidia basis, quoniam differentia segmentorum basis trianguli maior est, quam differentia crurum, vt demonstrauimus in libro secundo Lem. primo ante Compositionem Problematis tertij. differentia autem crurum debet esse æqualis dimidiæ basi, ex iussu Problematis, & ita constitutum est triangulũ, quale Problema postulat. Itaque innumera triangula super eadem base A b possunt constitui, vt habeant eamdem conditionem, quare huiusmodi Problema vanum est ac nugatorium. D

Problema V.

Super data base triangulum constituere, in quo differentia segmentorum basis sit dupla differentiæ crurum, ipsaq. differentia crurum sit dupla excessus, quo crus maius superat basim.

Re-

A ## Resolutio.

SIt data basis trianguli B, & oporteat iussum facere. Ponatur constitutum esse triangulum; & differentia qua crus maius superat basim esto A. ergo differentia crurum erit A 2; differentia vero segmentorum basis A 4. Et quoniam crus maius superat basim B excessu A, erit crus maius B + A, & consequenter crus minus B -- A; differunt enim crura per A 2, atque adeo aggregatum crurum erit B 2. sed re-

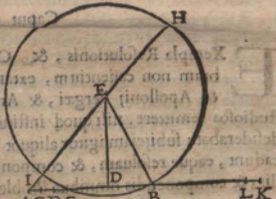
B ctangulum sub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem, *æquale est rectangulo sub differentia segmentorum basis, & ipsa base, ergo Th. 6 secundi

B in A 4 æquabitur B in A 4

Inutilis est hæc Æquatio cum in ea eædem magnitudines, ijsdem magnitudinibus æquentur. quare pronunciabimus Problema propositum esse nugatorium, quod quidem verum est. nam super eadem base innumera triangula possunt constitui habentia conditiones, quas Problema præscribit, vt in compositione quæ sequitur manifestum fiet.

C ## Compositio.

SIt data basis AB, super qua constituendum est triangulum habens differentiam segmentorum basis duplam differentiæ crurum, atque differentiam crurum duplam excessus, quo crus maius superat basim. Abscindatur à data base AB quæcumq; portio AC; reliqua vero C b secetur bifariam in D, & ex D erigatur perpendicularis indefinita D E, rursus secetur A C bifariam in F, similiter & a f



D secetur bifariam in G, & centro b intervallo b G describatur arcus secans perpendicularem D E in E, & connectantur E A, E b. Dico in triangulo E A b differentiam segmentorum A D, D b duplam esse differentiæ crurum E A, E b. atque differentiam crurum duplam excessus, quo crus maius E A superat basim A b. Centro enim E intervallo E b describatur circulus secans crus A E in I, ipsumq. productũ in H, & duplicetur a b in K, & sumatur k L æqualis a G. ergo reliqua b L æqualis erit b G, vel b E, atque adeo tota G L æqualis diametro I H, sed ipsa *GL* æqualis est F k; cum sint G F, L K æquales. ergo & F K æqualis erit *IH*, est autem & re-

[30. 3. tertij] & rectangulum I A H * æquale rectangulo C A B, hoc est duplo rectanguli A
[th. 3 lib. 2] F a B, seu quod idem est rectangulo F a k, quare A I * æqualis erit a F. itaque A C differentia segmentorum A D, D B, dupla erit A I differentiæ crurum E A, E B.

Et quoniam crus E B superatur à crure quidem E A excessu A I, hoc est A F, à base vero a B excessu a G ex constructione. ideo crus E a superabit basim a B excessu G F, cuius dupla est a F, vel a I differentia crurum. Ad datam igitur basim a B constitutum est triangulum E a B, in quo a C differentia segmentorum a D, D B dupla est a I differentiæ crurum E a, E B, ipsaque a I dupla est excessus, quo crus maius E a superat basim a B. quod faciendum erat. B

Scholium.

In hac Problematis Compositione sumpta est in base a B recta a C pro differentia segmentorum a D, D B quanta libuit, & constitutum est triangulum conditiones habens, quas Problema exigit; itaque innumera triangula possunt super eadem base constitui, cum in data base a B sumpto puncto C vbicumque, cæterisque, vt supra peractis, Problematis satisfiat; quare Problema huiusmodi vanum est, ac nugatorium. Atque simili ratione ostendemus omne Problema, cuius resolutio rite peracta incidit in Æquationem inutilem vanum esse, ac nugatorium.

De Resolutione, & Compositione Problematum, quæ sub Algebram non cadunt. C

Caput quartum.

EXempla Resolutionis, & Compositionis Problematum sub Algebram non cadentium, extant multa in libris Pappi Alexandrini, & Apollonij Pergæi, & Archimedis; quare potui ad ea exempla studiosos remittere, nisi quod institutio mei operis hanc quoque sui partem desiderabat; subijciam igitur aliquot Problemata, quæ sub Algebram non cadunt, eaque resoluam, & componam, Methodo, qua veteres in resoluendis, & componendis omnibus Problematibus vtebantur. D

Problema I.

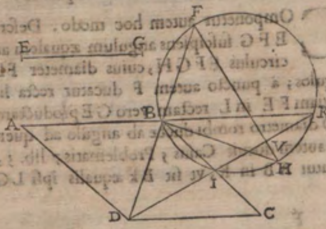
Rombo dato, & vno latere producto aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quæ ad oppositum angulum pertingat.

Resolutio.

SIt datus rombus A B C D, data autem recta linea E G, & producatur A B indefinitè in k. Oportet sub angulo C b K aptare rectam lineam ipsi E G æqualem, ita vt ad oppositum angulum A D C pertingat.

Sit

A Sit iam factum ducta nimirum recta DIk sit IK æqualis EG, & circa triangulum BIK describatur circulus quem DB diameter rombi producta secet in F deinde secetur angulus CBk bifariam à recta BH secante circulum in H, & connectatur FH,



Quoniam igitur BD diameter rombi secat angulum ABC bifariam, angulus D

B BC æqualis erit angulo ABD; sed & angulus FBk, æqualis est angulo ABD; sunt enim ad verticem, ergo angulus DBC æqualis erit angulo FBk; sed & anguli CBH, kBH sunt æquales, ex constructione. ergo per additionem æqualium æqualibus anguli FBH, DBH, æquales erunt, ac proinde recti; quare semicirculus erit FB, IH, atque adeo recta FH diameter circuli. & cum sint æquales anguli IBH, KBH, ex constructione; erunt æquales & circumferentiæ IH, HK quibus ipsi anguli insistunt, & consequenter æquales erunt & reliquæ circumferentiæ IF, kF, ac proinde æquales & anguli FHI, FHk æqualibus circumferentijs insistentes. est autem

C & recta IH æqualis rectæ HK, cum sint æquales circumferentiæ IH, HK, & VH communis vtrique triangulo IVH, KVH, ergo erunt * æquales, & IV, Vk. quare diameter FH secat rectam IK in V ad rectos angulos. in figura sunt intelligendæ IH HK lineæ ductæ

& quoniam recta Ik data est magnitudine, cum sit æqualis datæ EG; intelligatur ipsa IK, positione quoque data, nulla positionis rombi dati habita ratione, tanquam non esset positione datus, hoc modo liberum est datæ rectæ lineæ EG æqualem alteram IK. positione & magnitudine datam exponere. Quoniam igitur data est Ik positione, & magnitudine, & datus angulus IBK magnitudine, cum sit angulus externus dati rombi; portio circuli IBk erit * positione, & magnitudine data; quare & totus circulus, sed def. 8. dat. & diameter FH * datur positione; ea enim secat rectam Ik positione, & 29 dat.

D magnitudine datam bifariam, & ad angulos rectos, ergo * dabitur & punctum F. cum sit in circumferentia circuli positione dati. 25 dat.

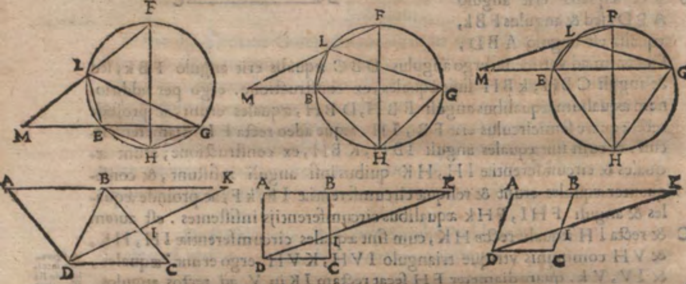
Ducatur autem à puncto F recta FBD secans circumferentiam FBI in B; rectam vero kI productam in D, ita vt BD sit æqualis diametro rombi ducta ab angulo, ad quem aptata pertingit; hoc autem fieri posse demonstrauimus lib. 3. Probl. 7 casu 5. ergo ipsa FD positione data erit atque * dabitur & punctum B cum sit in circumferentia circuli positione dati, sed 25 dat. datur & punctum K, cum sit extremitas rectæ Ik positione, & magnitudine datæ, ergo dabitur & recta BK.

Com-

A

Compositio.

COmponetur autem hoc modo. Describatur in E G portio circuli E F G suscipiens angulum æqualem angulo C B K, & compleatur circulus E F G H, cuius diameter F H secet ipsam E G ad rectos angulos; à puncto autem F ducatur recta linea F L M secans circumferentiam F E in L rectam vero G E productam in M, ita vt L M sit æqualis B D diametro rombi ductæ ab angulo ad quem aptanda pertingere debet; hoc autem docuit Casus 5 Problematis 7 lib. 3, & connectatur L G, & producatur A B in K, vt sit B k æqualis ipsi L G. & connectatur D k secans



latus B C in I. Dico rectam I K æqualem esse datæ E G. Connectantur enim L E, E H, H G. Quoniam igitur portio circuli E F G suscipit angulum æqualem angulo C B K, angulus E L G æqualis erit angulo C B K. B

Et quoniam quadrilateri L E, H G in circulo anguli E H G, E L G oppositi æquales sunt duobus rectis, & æquales quoq; duobus rectis anguli A b C, C b K, erunt anguli A b C, C b K angulis E H G, E L G æquales, & ablatis æqualibus angulis C b K, E L G, reliqui A b C, E H G æquales erunt. sed angulum A b C secat b D diameter rombi bifariam; similiter & angulū E H G secat bifariam diameter circuli F H, cum sint æquales anguli E H G, F H G æqualibus circumferentijs E F, F G insistentes. ergo anguli D b C, E H F æquales erunt. sed angulus E H F quadrilateri E H, F L in circulo æqualis est angulus M L E externo, & opposito. ergo & angulus D b C æqualis erit angulo M L E. quare additis æqualibus angulis C b K, E L G, totus angulus D b k toti angulo M L G æqualis erit; sed & latera D b, b k lateribus M L, L G equalia sunt, alterum alteri, ex constructione, triangula igitur D b k, M L G æqualium erunt laterum, & angulorum. atque adeo angulus K, æqualis erit angulo L G M: sed & angulus I b k trianguli I b K æqualis est angulo E L G trianguli, E L G, vt demonstrauimus, & latus b k æquale lateri C

teri

A teri L G, ex constructione; * erit & basis I k basi E G æqualis. Sub angulo igi- 26 primi
tur C B k aptata est I k æqualis E G datæ, atque pertingit ad angulum A D C,
quod erat faciendum.

Problema II.

Rombo dato, & productis duobus lateribus angulum rombi continentibus inter ipsa latera aptare magnitudine datam rectam lineam, & quæ per oppositum angulum transeat. Oportet autem ipsam magnitudine datam non esse minorem ea recta linea, quæ per extremitatem diametri rombi ad rectos angulos ducta, inter producta latera interijcitur.

B Resolutio.

Sit datus rombus A B, C D, data autem recta linea E G. Oportet inter producta latera B A, b C aptare rectam lineam æqualem ipsi E G, ita, vt per punctum D transeat.

Sit iam aptata recta I D K æqualis E G, & circa triangulum I B K describatur circulus, quem B D diameter rombi producta secet in H; erunt igitur æquales anguli I B H, H B K. diameter enim rombi b D secat angulum C B A bifariam; quare æquales erunt & circumferentiæ I H, H k, quibus ipsi anguli insistunt, & æquales rectæ I H, H K. agatur autem diameter circuli H F secans rectam I K in V. cum
C igitur æquales sint circumferentiæ I H, H K erunt æquales & reliquæ circumferentiæ I F, K F. quare & anguli F H I, F H K ipsis circumferentijs insistentes, æqui quales erunt. est autem & I H æqualis H K, cum sint æquales circumferentiæ I H, H K, & V H communis est vtrique triangulo I V H, k V H, ergo erunt æquales & I V, V H: quare diameter F H * secat rectam I K ad rectos angulos. Et quoniam I k data est magnitu- 16 tertij
D dine, cum sit æqualis datæ E G intelligatur ipsa I K positione quoque data, nulla positionis rombi dati habita ratione, ac si non esset positione datus.

Quoniam igitur data est I k positione, & magnitudine, & datus angulus I B k magnitudine. cum sit angulus dati rombi portio circuli I B k; erit * positione, & magnitudine data. quare & totus circulus, sed * datur positione, & diameter F H secans bifariam, & ad rectos angulos rectam I K positione, & magnitudine datam, ergo * dabitur & punctum H, cum sit & circũferentia circuli positione dati. Ducatur autẽ à puncto H recta H D B secans rectã V I in D, circũferentiam vero I F in B, ita vt D b sit æqualis diametro rombi ductę, ab an- def. 8 dat. 29 dat. xxv dat.

S3

angulo ad quem aptata pertingit, quemadmodum docet Casus quartus Pro-
25 dat. blematis 7 lib. 3. ergo ipsi HB positione data erit, quare dabitur & punctum B, cum sit in circumferentia circuli positione. & magnitudine dati. sed datur & punctum k, cum sit extremitas rectæ I k positione & magnitudine datæ. ergo & recta B k positione & magnitudine data erit.

Compositio.

Componetur autem hoc modo. ducatur rombi diameter BD, cui ad rectos angulos per punctum D ducatur recta NDO secans producta rombi latera in punctis NO. & si quidem ON sit æqualis EG, factum iam erit, quod proponebatur. si vero EG sit maior, quam ON, minor autem esse non potest sic determinatum est. describatur in EG portio circuli ELG suscipiens angulum æqualem angulo ABC, & compleatur circulus ELGH, cuius circumferentia EkG secetur bifariam in H, à quo puncto ducatur diameter HF secans rectam EG in V, eam secabit bifariam, & ad rectos angulos. ab eodem puncto H ducatur recta HML, secans EV in M, circumferentiam vero EF in L, ita vt ML sit æqualis BD diametro rombi, quemadmodum docuit Casus 4 Probl. 7. lib. 3. ipsa autem DB minor est quam VF, vt infra demonstrabimus, & connectatur LG, cui æqualis ponatur Bk, & per punctum D ducatur recta KDI secans latus BC productum in I, & connectatur LE. quoniam igitur portio circuli ELG suscipit angulum æqualem angulo ABC, angulus ELG æqualis erit angulo ABC. sed angulum ELG secat LH bifariam, cum sint æquales circumferentiæ EH, HG. similiter & angulum ABC secat BD diameter rombi bifariam. ergo angulus HLG trianguli MLG, æqualis erit angulo DBK triãguli BDk. est autem & latus LG lateri BK æquale, atque latus LM lateri BD ex constructione. ergo triangula MLG, DBk æqualium erunt laterum, & angulorum. itaque angulus LGM æqualis erit angulo BkD. Cum igitur trianguli LGE angulus LGE æqualis sit angulo bkI trianguli bkI, & angulus ELG æqualis angulo IbK, vt est demonstratum, atque latus LG æquale lateri bK, ex constructione; erit & EG ipsi IK æquale. itaque inter producta rombi latera bA, bC apta-

ta

A ta est recta linea k I æqualis datæ E G, eaque transit per punctum D. quod erat faciendum.

At vero B D minorem esse quam V F sic demonstrabimus. Connectantur E F, F G. Quoniam igitur portio circuli E L G suscipit angulum æqualem angulo N B A angulus E F G, æqualis erit angulo N B O; quare & dimidius dimidio, nempe angulus V F G angulo D B O, angulos enim E F G, N B O secant re-
B ctæ F V, B D bifariam, sed & angulus F V G æqualis est angulo B D O, cum sit vterque rectus. ergo & reliquus reliquo æqualis erit, quare similia erunt triangula B D O, F V G. vt igitur O D ad E B, ita erit G V ad V F; sed O D minor est, quam G V, cum O N dupla ipsius O D minor sit, quam G E dupla rectæ G V, ergo & D B minor erit, quam V F. quod erat ostendendum.

Determinauimus oportere rectam E
C G non esse minorem quam O N; ipsa enim O N minima est omnium, quæ per punctum E ductæ inter producta latera B A, B C interijciuntur, idque ita fit manifestum.

Ducatur per punctum D aliâ vtcumque recta linea I D k. Quoniam igitur æquales sunt anguli D B N, D B O, & æquales quoque B D N, B D O, quia recti; erit & reliquus D N B, reliquo D O B æqualis. quare similia erunt trian-
D gula B D N, B D O, & æqualia quoque, cum latus B D commune sit vtrique. vnde N D æqualis erit ipsi D O, & quoniam angulus D N B ostensus est æqualis angulo D O B, qui maior est angulo K videlicet interno, & opposito; erit & angulus D N B maior angulo k, ab angulo igitur D N B abscindatur angulus D N B æqualis angulo k æquiangula erunt triangula D P N, D O K, quoniam æqua-

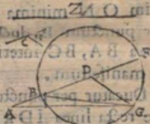
les

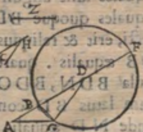
les habent & angulos ad D. quare vt D K ad D O, ita erit D N ad D P, sed D k maior est, quàm D O. ergo & D N maior erit, quàm D P. atque adeo & ipsa D O, cum sit æqualis D N, maior erit, quàm D P. itaque quatuor proportionalium D k, D O, D N, D P minima est D P, maxima vero D k. quare k P composita ex maxima, & minima maior erit, quam O N composita ex reliquis, & consequenter K L multo maior. Atque eadem ratione ostendetur ipsa O N minor omnibus alijs. Minima est igitur omnium O N. quare manifesta est Determinatio. A

Problema III.

Data base trianguli differentia laterum & angulo verticis inuenire triangulum. B

SIt data basis trianguli z differentia laterum A B, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum. Ponatur iam factum & sit illud triangulum D A G cuius basis A G esto æqualis ipsi z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, ac denique differentia laterum D A, D G quæ sit A B esto positione, ac magnitudine data. Quoniam igitur D A, D G differunt per A B erunt D B, D G æquales, itaque centro D interuallo D B vel D G describatur circulus quem secet A D continuata in F, & duo iungatur D G. Quoniam igitur datus est angulus A D G dabitur & angulus F d G, vt reliquus è duobus rectis, ergo dabitur quoque & angulus F B G, vt dimidius anguli F d G C
est enim angulus F d G ad centrum duplus anguli F B G ad circumferentiam, sed positione est B d, & po-
29 dat. sitione quoque punctum B, erit* igitur positione &
B G & quoniam in ipsam B G à dato puncto A du-
31 dat. 25 dat. cta est A G magnitudine data, dabitur* ipsa A G positione quoque quare* & punctum G, sed datur
& angulus d G B, est enim æqualis angulo d G B, æ-
29 dat. 25 dat. qualibus existentibus d B, d G: ergo dabitur* G d positione* quare & punctum quoque d dabitur. Quoniam igitur datæ sunt positione extremitates A, d, G datarum positione A d, d G ipsæ quoque magnitudine datæ erunt. D





Componetur autem sic. Producatur A B in F, & fiat angulus F B G æqualis dimidio eius quem relinquit è duobus rectis angulus C: hoc est dimidio anguli H & in B G ponatur A G æqualis Z, & angulo G B d æqualis constituatur angulus B G d erunt igitur æquales d B, d G quare differentia laterum d A, D G trianguli d A G erit ipsa A B data. Describatur ex d centro ad interuallum d G, vel d B circulus quem secet A F in F, erit igitur angulus F d G ad centrum duplus anguli F B G ad circumferentiam, sed eiusdem anguli F B G du-

A duplus est quoque & angulus H ex constructione, ergo angulus F D G angulo H æqualis erit, vnde & angulus A D G ad verticem trianguli æqualis angulo C: est autem & basis a G æqualis datæ Z ex constructione. Constructum est igitur triangulum d a G, quod facere oportebat.

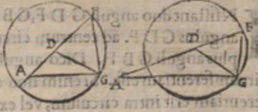
Lemma.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, basis vero semidiameter, & ducatur linea recta; non ex centro circuli, sed ab altera extremitate aggregati laterum, constituens cum eo angulum æqualem dimidio, qui est ad verticē trianguli, angulo, illa recta linea in circulum incidet.

B Sit triangulum D A G, cuius basis A G, & centro A interuallo A G describatur circulus, & producatur A D in F, vt sit D F æqualis B G aggregatum igitur laterum A D, D G erit A F: à puncto autem F ducatur F I, faciens angulum A F I, æqualem dimidio anguli A D G; Dico ipsam F I in circulum incidere, si enim non incidit, cadit extra qualis est F E. itaque continuetur D G, donec secet ipsam F E in E. Quoniam igitur externus angulus A D E trianguli d E F æqualis est duobus internis d F E, d E F, quorum vnus nempe D F E, ponitur dimidius ipsius A d E erit & reliquus d E F ipsius A d E dimidius æquales igitur erunt anguli d F E,

C d E F, & ideo æquales rectæ d F, d E quod est absurdum, ponitur enim d F æqualis d G. Recta igitur F I in circulum incidet, quod erat demonstrandū.

Aliter sit triangulum d A G, cuius basis A G, & centro d interuallo d G, describatur circulus, secans A d productam in F. & iungatur F G, erit angulus A F g æqualis dimidio anguli A D G: hic enim est ad centrum ille ad circumferentiam. Si igitur ex A centro ad interuallū A G circulus describatur ipsum tanget, vel secabit recta linea F G, ideoq. in ipsū circulum incidet, quod erat demōstrādū.



D

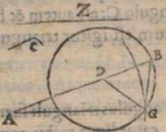
Problema IV.

Data base trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulū. Probl. 15 lib. ij

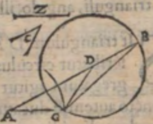
Sit data basis trianguli Z aggregatum laterum A B, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum d A G, cuius basis A G esto æqualis ipsi Z, aggregatum vero laterum A d, d G æquale ipsi A B, magnitudine, ac positione datæ, & angulus A d G ad verticē æqualis angulo C, iūgatur autē B g.

Quoniam igitur composita ex A d, d G æqualis est ipsi A B ablata cōmuni A d, reliqua d G, reliquæ d B æqualis erit, & ideo circulus ex d centro descriptus ad interuallū D g, transibit per B; describatur erit igitur angulus A d g ad centrum, duplus anguli B ad circumferētiam, sed datur angulus A D G, ergo dabitur & angulus B, & est



39 dat. positione A B, ergo * & B G positione erit, sed in ipsam B G à dato puncto A ducta est A G magnitudi-
xxxi dat. ne data, ergo dabitur * ipsa A G positione quoque, &
35 dat. xxix dat. datum * erit punctum G, & data * quoque positione G D, datur enim angulus D g B, quia æqualis est dato D B G æqualibus existentibus D B, D G, quare & pūctum D dabitur. Quoniam igitur datæ sunt extremitates A, D, G, datarum positione A D, D G, ipsæ quoque magnitudine datæ erunt.



Componetur autem Problema hoc modo. Centro A, interuallo datæ Z æquali describatur circulus, & fiat angulus A B G æqualis dimidio anguli C ex antecedēte igitur Lemmate recta B G incidet in circulum sub A cētro descriptum incidat in G, & iungatur A G, & fiat angulo B æqualis angulus B G D, erit igitur D G æqualis D B addita communi A D composita ex A d, d G, erit æqualis A B. Centro autē D interuallo d B, vel d G describatur circulus B G erit igitur angulus A d g ad centrū duplus anguli B ad circūferentiā, sed & angulus C duplus est anguli B ex constructione, ergo angulus A d E angulo C æqualis erit, est autem & basis A G æqualis datæ Z ex constructione. Constructum est igitur triangulum D A G quale construendū proponebatur.

Lemma.

Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ circuli insisterint, duplus autem fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit.

INsistant duo anguli G D F, G B F eidem circuli circumferentiæ G F, & sit angulus G D F. ad centrum circuli, atque duplus anguli G B F. Dico angulum G B F ad circumferentiam esse. Si enim non est ad circumferentiam erit intra circulum, vel extra. Sit primū si fieri potest intra circulum, & producatur B g vsque ad circumferentiam in C, & iungatur F C, erit igitur angulus G D F ad cētrum duplus anguli g C F ad circumferentiam, sed duplus est & anguli g B F ex hypotesi, ergo angulus g B F angulo g C F æqualis erit externus interno, quod est absurdum, angulus igitur g B F non est intra circulum.

Deinde sit angulus g B F extra circulum ipsum igitur circulum secabit, vel vtraque rectarum G B, F B, vel saltem vna secet ipsa g B in puncto C, & iungatur F C erit igitur angulus g D F ad centrum duplus anguli G C F ad circumferentiam, sed duplus est & anguli B ex hypotesi,

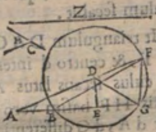
er-

A ergo angulus G C F angulo B æqualis erit externus interno, quod est absurdum. angulus igitur D B F non est extra circulam, sed neque intra circulum, vt est ostensum, ergo ad circumferentiam erit, quod erat demonstrandum.

Problema V.

Data differentia segmentorum basis trianguli aggregato laterum, & angulo verticis inuenire triangulum.

B Sit data differentia segmentorum basis trianguli A B aggregatum laterum Z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.



Inuentum iam sit, & sit illud triangulum D A G, in quo perpendicularis D E, & centro D interuallo D G quod sit minus latus describatur circulus secans latus A D productum in F, , tertij basim vero A G in B erunt* igitur B E, E G æquales, vnde differentia segmentorum A F, E G erit A b esto igitur ipsa A b positione, ac magnitudine data, composita vero ex lateribus A D, D G, hoc est ipsa A F esto

C æqualis Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & iungantur B F, F G. Quoniam igitur datur angulus A D G dabitur angulus F D G, vt reliquus è duobus rectis dabitur quoq; angulus F B G, vt dimidius anguli F D g angulus enim F D G ad centrum duplus est anguli F B G ad circumferentiam positione igitur* erit B F, quia positione est & A D, & quoniam datum est pun- xxix dat.

ctum A, à quo in B F ducta est A f magnitudine data dabitur* ipsa A f positio- 31 dat.

ne quoq; vnde dabitur* & punctum F, & quoniam datus est angulus A D g ad xxv dat.

centrum datus erit & angulus A f G circumferentiam, vt eius dimidius, atque data* erit positione f G, vnde datum* erit & punctum G, & data* quoq; positione G D, quia datus est angulus D G f etenim æqualis est dato angulo D f g ratione æqualium laterum D G, D f, quare datum* erit & punctum D. Quo- xxix dat. 25 dat. 29 dat. 25 dat.

D niam igitur datæ sunt extremitates A, D, G, datarum positione A D, D G, A G, ipsæ quoque magnitudine erunt.

Componetur autem hoc modo. Producatur A B in G, & fiat angulus G B F æqualis dimidio eius quem relinquit è duobus rectis angulus C, hoc est dimidio anguli h, & in B F ponatur A F æqualis Z, & fiat angulus A F G, æqualis dimidio anguli C, angulus vero F G D æqualis angulo A f G erunt igitur æquales d G, d F, addita communi A d composita ex lateribus A d, d G, trianguli d A G æqualis erit ipsi A f, hoc est Z datæ.

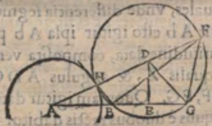
Deinde centro D interuallo D G, vel D f describatur circulus F E. Quoniá igitur angulus C duplus est anguli A F G ex constructione similiter & an-

gulus A D G ad centrum duplus eiusdem anguli A F G ad circumferen- A
tiam erit angulus A D G ad verticem dato angulo C æqualis, quare & angulus F D G angulo H, sed angulus H duplus est anguli F B G ex constructione, ergo & angulus F D G eiusdem anguli F B G duplus erit, sed angulus F D G est ad centrum, & insistit circumferentiæ F G, cui etiam & angulus F B G insistit ergo ex antecedente Lemmate angulus F B G ad circũfe-
3 tertij rentiam erit iã agatur ipsi A G perpendicularis D E erunt igitur* æquales B E, E G erit ipsa A B data. Constructum est igitur triangulum D A G, vt facere oportebat.

Lemma I.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia vero laterum semi- B
diameter, & ducatur recta linea non ex centro circuli, sed ab altera extremitate differentiæ segmentorum basis constituens cum ea angulum æqualem dimidio; qui est ad verticem trianguli angulo, illa recta linea circulum secabit.

SIt triangulum D A G, in quo perpendicularis d E secet basim A G in E, & centro d interuallo d G, quod sit minus latus describatur circulus secans latus A d productum in punctis H F basim vero A G in B; laterum igitur d A, d G differentia erit A H, differentia vero segmentorum A E, E G erit A B, iungantur autem B H, F G.



C

Quoniam igitur quadrilaterum F G, B H est in circulo anguli H B G, H F G ex aduerso duobus rectis sunt æquales, sed & anguli H B G, H B A æquales sunt duobus rectis, ergo anguli H B G, H F G angulis H B G, H B A æquales erunt, dempto communi angulo H B G reliquus H F G reliquo H B A æqualis erit, sed angulus H F G ad circumferentiam dimidius est anguli H D G ad centrum ergo & angulus H B A eiusdem anguli A D G dimidius erit. Dico igitur circulum sub A centro interuallo A H descriptum secari à B H: manifestum est autem ipsam B H in eum incideret. Quoniam punctum H est in circumferen-
tia, si igitur eum non secat tangit, tangat si fieri potest contactus erit in H, D
18 tertij & iungatur B F ergo* rectus erit angulus A H B, & ideo æqualis recto
27 primi H B F qui est in semicirculo; quare parallelæ* erunt A F, B F, quod est absurdum: conueniunt enim in F. Non igitur B H tangit circulum, cuius centrum A sed secat, quod erat demonstrandum.

Lemma II.

Secet circulus sub A centro recta linea B H L in punctis H L, & per punctus H quod sit propius ad B ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B minorem esse recto.

Di-

A Diuidatur enim H L bifariam in E, & iungatur A E rectus igitur erit angulus A E H, ac proinde angulus F H A recto minor: tres enim interni anguli trianguli A E H duobus rectis sunt æquales, sed angulus E H A æqualis est angulo I H B: sunt enim ad verticem, ergo & angulus I H B erit recto minor quod erat demonstrandum.

Problema VI.

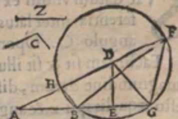
Data differentia segmentorum basis trianguli differentia laterum & angulo verticis inuenire triangulum. Prob. 30 lib. 1

B Sit data differentia segmentorum basis trianguli A B differentia laterum Z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit & sit illud triangulum D A G, in quo perpendicularis D E & centro D interuallo D G, quod sit minus latus describatur circulus secans latus D A in H, basim vero A G in B differentia igitur segmentorum A E, E G erit erit A B, differentia vero laterum D A, D G erit A H. Esto igitur A B positione, atque magnitudine data ipsa vero A H esto æqualis datæ Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & producatur A D vsque ad circumferentiam in F, & iungantur H B, B F, F G. Quoniam igitur quadrilaterum F G, B H est in circulo, anguli H B G, H F G ex

C aduerso duobus rectis erunt æquales, sed & anguli H B G duobus rectis sunt æquales, ergo anguli H B G, H F g angulis H B g, H B A æquales erunt, auferatur vtrinque angulus H B g, reliquus igitur H F g reliquo H b A æqualis erit, sed angulus A d g ad centrum duplus est anguli A F g ad circumferentiam, ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, sed datur angulus A D G, dabitur ergo & H B A, quare dabitur

* B H positione, & quoniam à dato, puncto A in ipsam B H ducta est A H magnitudine data dabitur* A H positione quoque & propter datum angulum H B F est enim, rectus in semicirculo data* erit B F positione & datum* quoque pun-



29 dat.
31 dat.
29 dat.
25 dat.
26 dat.

D ctum F & ideo data* magnitudine H F & quoniam æquales sunt H D, D F dabitur punctum D, sed datur & punctum G, ergo dabitur D G* positione & magnitudine, sed datur & punctum A, ergo & A D, A E positione* & magnitudine datæ erunt. ibid. ibid.

Componetur autem sic. centro A interuallo rectæ Z æquali describatur circulus, & fiat angulus A B H æqualis dimidio anguli C, ex antecedente igitur quod primo loco præmissum est Lemmate, B H secabit ipsum circulum secet in punctis H L, & per punctum H, quod sit proprius ad B ducatur recta linea A h I, ipsi autem B h ducatur perpendicularis B F. Quoniam

niam igitur ex antecedente quod secundo loco præmissum est Lémmate, A angulus h B minor est recto & angulus F B h rectus, erunt ambo simul duobus rectis minores, & ideo coibunt rectæ lineæ A I, B F, coeant in F, & secetur h F bisariam in d, & centro D, interuallo D h vel D F, describatur circulus eius circumferentia transibit per B propter angulum h B F rectum. Deinde producatur A B donec secet circulum F B h in G, & iungantur D G,

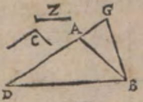
F G & ipsi A G ducatur perpendicularis D E erunt igitur æquales B E, E G, & ideo differentia segmentorum A E, E G erit ipsa A B data. Similiter quoniam æquales sunt D h, D G vt semidiametri differentiæ laterum A D, D G B
erit A h, cui æqualis est Z data ex constructione. Superest igitur vt angulus A D G ad verticem trianguli D A G æquetur angulo C, id autem ita fit manifestum. Quoniam enim quadrilaterum F G, B h est in circulo anguli h B G, h F G ex aduerso duobus rectis erunt æquales, sed & anguli h B G, h B A sunt æquales duobus rectis, ergo anguli h B G, h F G angulis h B G, H B A, æquales erunt: dempto communi angulo H B G, reliquus H F G reliquo H B A æqualis erit, sed anguli H F G ad circumferentiam duplus est angulus H D G ad centrum ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, sed & angulus C duplus est anguli H b A ex constructione, ergo angulus A D G angulo C æqualis erit, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum D a G quale construendum proponebatur. C

Problema VII.

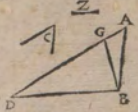
Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & basim, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus triangulum verticis ambientibus, a b: differentia inter latus reliquum & basim z angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factũ iam sit & sit illud triangulũ a b D, cuius latus A b esto positione, ac magnitudine datum, differentia vero inter reliquum latus a D & basim D b esto æqualis ipsi z, & angulus D A B ad verticem æqualis angulo C. Ponatur autem D G æqualis D B, differentia igitur ipsarum A D, D B erit A G D
& iungatur G B. Quoniam igitur datus est angulus D a B datus erit & angulus G a B, vt reliquus è duobus rectis, hic autem in prima figura ad primum Casum partinens, in secunda vero figura quæ ad secundum Casum pertinet angulus D A B idem est quod angulus G a b, quocumque igitur Casu
29 dat. datur angulus G a B est autem positione a B ergo* positione est & a g, sed
27 dat. & magnitudine ponitur enim æqualis ipsi z, ergo* punctum g datum erit
xxvi dat. sed datum est & B, ergo* g B positione erit & magnitudine, atque adeo dabitur
39 dat. angulus a g B quia datur* triangulum a g B specie & in secunda figura da-



A dabitur quoq; & D g B vt reliquus è duobus rectis, itaque in vtraque figura dabitur angulus D B g. est enim ęqualis 19 dat.
ipsi D g B æqualibus existentibus D g, D B quare * B D 25 dat.
positione erit & ideo * positione quoq; & punctũ D, ac pro- 26 dat.
pterea * ipsæ B D, a D magnitudine quoque datæ erunt.



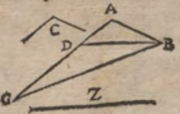
Componetur autem hoc modo. Constituatur angulo C æqualis angulus B a D, & ponatur ipsi z æqualis a g, & iungatur g B, & angulo D g B æqualis constituatur angulus G B D, & B D occurrat ipsi A D in D, erunt igitur D G, D B æquales, & ideo differentia inter la-
B tus a D, & basim d B trianguli a b d erit a g hoc est z data: est autem & angulus d a b ad verticem æqualis angulo c ex constructione, & latus a b ipsum datum Constructum est igitur triangulum a b d, vt facere oportebat.

Problema VIII.

Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, datoque aggregato reliqui lateris, & basis, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus a b composita vero ex reliquo latere & base z & angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet iuuenire triangulum.

C Ponatur iam factum & sit illud triangulum a b d, cuius latus a b esto positione, ac magnitudine datum, composita vero ex reliquo latere a d, & base d b esto æqualis ipsi z, & angulus ad verticem a æqualis angulo C. Producatur autem a d in G. vt sit d G æqualis d b erit igitur a G æqualis compositæ ex a d, d b & iungatur G b. Quoniam igitur positione est a b & datus est angulus 29 dat.
A erit A G * positione data, sed data est & magnitudine ergo & * punctum G 27 dat.
datum erit datur autem & B dabitur * ergo G B positione & magnitudine atq; 26 dat.
adeo dabitur & angulus g, quia triangulum * A B G datur specie; est autem an- 39 dat.



gulo, G æqualis angulus G B D ratione æqualium D B, D g quare & ipse G B D datus erit, positione 29 dat.
igitur * erit B D quare & * punctum D. Quoniam 25 dat.
D igitur positione datarũ d b, d a, dati sũt termini A, D, B, ipsæ magnitudine quoque datæ erunt. Componetur autẽ sic angulo C constituatur æqualis angulus B A G, & ponatur A G æqualis ipsi z, & iuncta G B, constituatur quoque angulus F B D æqualis angulo G erunt igitur D B, D G æquales addita cõmuni D A composita ex latere A D, & base D B trianguli A B D æqualis erit ipsi a g hoc est z datæ: est autem & angulus ad verticem A æqualis angulo C ex constructioue & latus A B ipsum datum. Constructum est igitur triangulum A B D quod facere oportebat.

FINIS.