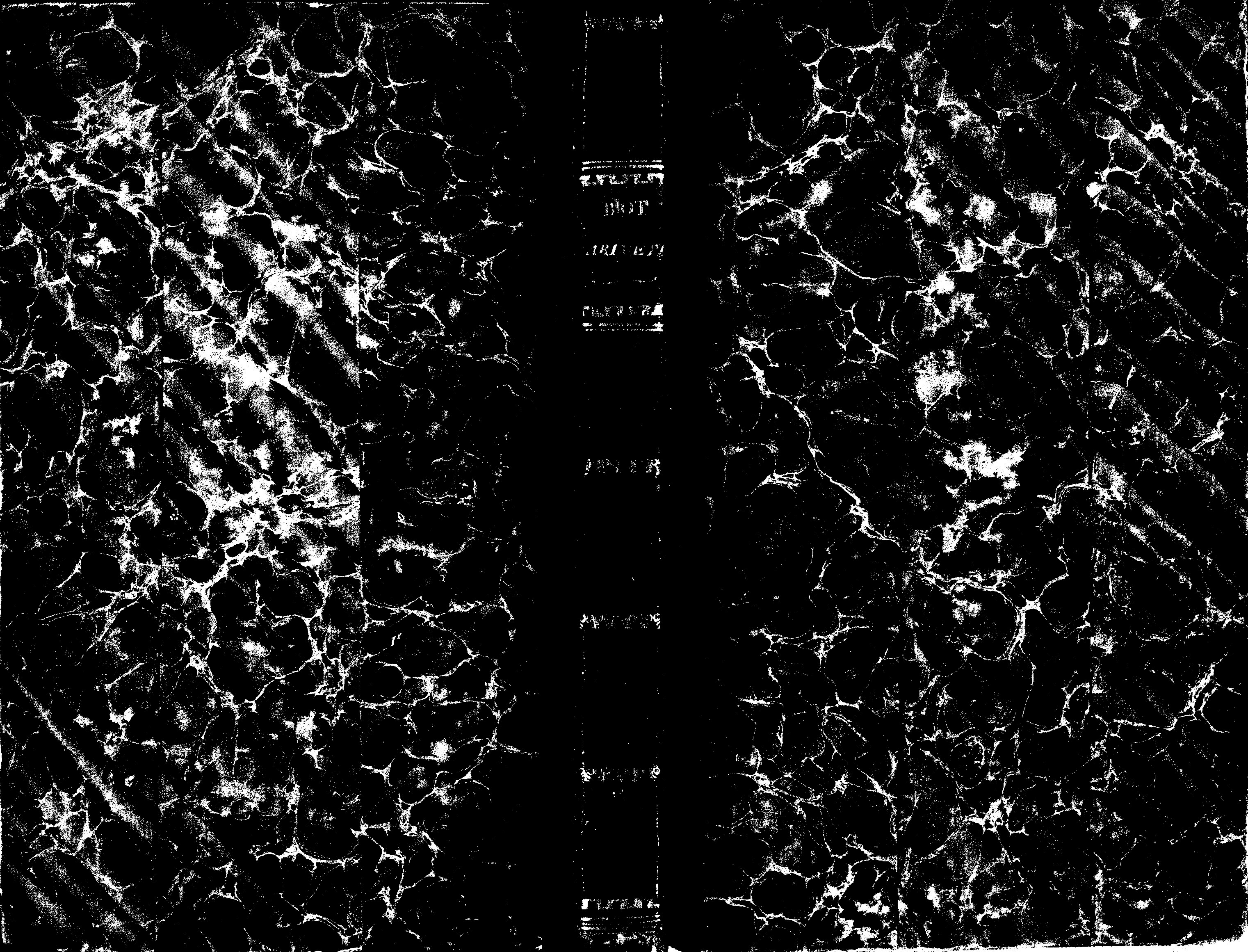
BIOT

TRATTATO ELEMENTARE DI ARITMETICA

DEL SIG. BIOT

TRADOTTO DA UN PROFESSORE DELL' ACCADEMIA DI PISA

CON AGGIUNTE

TERZA EDIZIONE

PISA

PRESSO NICCOLÒ CAPURRO

MDCCCXIII.

GLI EDITORI

La favorevole accoglienza che ha incontrato in tutta l'Italia la traduzione della Geometria di Legendre pubblicata da questi torchj l'anno 1802*; i replicati inviti che abbiamo ricevuto da ogni parte d'imprimere riunite in un sol corpo le cognizioni elementari che la medesima suppone, ci determinarono ad offrire alla luce l'opera presente. Essa contiene tutte le nozioni sì d'Aritmetica che della Teoria delle proporzioni le quali sono necessarie per l'intelligenza della Geometria prenominata. Siccome poi la spiegazione delle semplicissime operazioni algebriche che nella stessa s'incontrano, può facilmente venire esposta dall'institutore a viva voce, di mano in mano che gli se n'offre il bisogno, abbiamo creduto di doverla qui omettere affatto, e così evitare l'inconveniente di dirne troppo, o troppo poco.*

Una fedel traduzione del Trattato elementare d'Aritmetica del Professore Biot ci ha somministrato tutto ciò che riguarda le quattro prime operazioni su' numeri intieri, incomplessi, e complessi, e sulle frazioni ordinarie, e decimali. La chiarezza, la bre-

vità, l'ordine, l'esattezza che vi regnano, rendono a confession generale degli intelligenti un tal libro superiore a quanti di tal genere erano noti finora. Siccome però in esso non vengono esposti i metodi per l'estrazione delle radici quadrate e cubica che ci era necessario far conoscere, vi abbiamo supplito estraendoli quasi per intiero dal Trattato d'Aritmetica di Bézout. Nell'esposizione poi della Teoria delle proporzioni e dei loro usi per la soluzione dei problemi aritmetici, abbiamo insieme riunito quanto ne dicono e il Biot, e il Bézout predetto. Noi non ci siamo permessi che poche e leggiere mutazioni ed aggiunte, soltanto quando ce l'ha prescritto la necessità di rischiarare alcune idee, o di collegar maggiormente fra loro alcune verità, ossivvero di mostrare certe proposizioni le quali non erano comprese nell'opere classiche che abbiamo tradotto, ma erano per altro indispensabili al nostro oggetto.

TRATTATO ELEMENTARE D'ARITMETICA

1. L'idea di *numero* si presenta alla mente allorchè si considera la coesistenza di più individui d'una stessa specie. Quando si vede un uomo e più uomini, una stella e più stelle, si concepisce l'idea dell'unità e della pluralità. Quando si paragona in seguito la pluralità all'unità, si ha l'idea del numero, che si compone colla riunione di più individui o *unità*. Così l'unità aggiunta a se stessa forma il numero due; s'ottiene tre aggiungendo una nuova unità alle due precedenti: e siccome non v'è limite a queste addizioni successive, non si può concepire un termine all'accrescimento dei numeri che possono risultarne. Di fatti, per quanto grande si supponga un numero, ancorchè superasse tutto ciò che possiamo immaginare, è chiaro che aggiungendogli l'unità si formerebbe un numero ancora più grande.

Allorchè si seppero formare così i numeri colla riunione di più unità, il bisogno di sollevare la memoria dovè far sentir presto la necessità di rappresentare tali numeri con de'caratteri. Non è nostro oggetto di parlar qui de' tentativi più o meno ingegnosi che possono essere stati fatti a questo riguardo: ci limiteremo a esaminare le proprietà del nostro sistema di numerazione.

Questo sistema contiene due parti; la nomenclatura de'numeri, o la *numerazione parlata*, e la maniera di esprimere i numeri con caratteri particolari, o la *numerazione scritta*. Parleremo qui di quest'ultima soltanto, poichè l'altra fa parte delle prime nozioni che ci vengono date nell'infanzia.

2. I caratteri o cifre di cui si fa uso per esprimere i numeri, sono i dieci seguenti:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Co'primi nove si rappresentano i numeri da uno fino a nove. Sarebbe stato facile inventare altre cifre per andar oltre; ma si dovè presto sentire, che moltiplicando i caratteri, e indicando ciascun numero con una nuova cifra, si sarebbe ricaduti in una complicazione tanto grande quanto quella che si avea voluto scansare. Per togliere un tale inconveniente, s'immaginò di dare a questi nove caratteri, oltre il loro valore assoluto, un valore dipendente dalla loro situazione; e quest'idea dovuta agli Arabi, o forse ai più antichi popoli dell'Indie, è senza dubbio una delle scoperte più ingegnose dello spirito umano. Così, il carattere 1, che rappresenta l'unità, fu adoprato, avanzandolo d'un posto verso la sinistra, per rappresentare la collezione di dieci unità, che si chiama *diecina*, o *unità del second' ordine*. Il carattere 2, che rappresenta due unità, fu adoprato in simil guisa, per esprimere due diecine o la collezione di venti unità, e così di seguito. Ma a fine di dare alle cifre 1, 2, 3, ec. il posto che dovevano occupare per rappresentare delle diecine, si immaginò un carattere, che non ha per se stesso verun valore, e che serve soltanto a determinare la situazione degli altri; questo carattere si chiama *zero*, e si scrive 0.

L'unità seguita da un zero rappresenta dunque *un' unità del second' ordine* o una diecina, che si scrive 10.

3. Per esprimere i numeri undici, dodici, tredici ec. fino a diciannove, basta sostituire successivamente in quell'espessione le cifre 1, 2, 3 ec. fino a 9 nel posto del carattere zero, e questi numeri si scriveranno.

11, 12, 13 19

Quando si è giunti a 19, l'addizione d'una nuova unità cangia il numero in venti unità o due diecine, che si scrive 20. È facile dopo, sostituendo successivamente in quest'espressione le cifre 1, 2, 3, ec. nel posto del carattere 0, di formare i numeri 21, 22, 23, ec. fino a 29; dopo di che l'addizione d'una nuova unità cangierà il numero in trenta unità, o tre diecine, che si scrive 30.

Si può così contare fino a nove diecine, e aggiungere loro ancora nove unità, il che fa novantanove, o 99; dopo di che l'addizione d'un'unità cangia il numero in dieci diecine, e l'analogia fa presto sentire, che siccome la cifra 1 si è resa propria ad esprimere una diecina tirandola addietro un posto verso la sinistra, si potrà tirandola addietro un altro posto farle esprimere una nuova specie d'unità, che sarà uguale alla collezione di dieci diecine, che si chiama un *centinajo*, o un'*unità del terz' ordine*.

Il carattere zero servirà qui pure a indicare il posto che deve occupare la cifra 1 per valer cento; e in conseguenza, l'unità seguita da due zeri, o 100 rappresenterà un centinajo.

4. Le unità e le diecine che si aggiungeranno dopo per formare i numeri superiori a 100 prenderanno il posto che loro è proprio. Così cent'uno si scriverà 101, cent'undici si scriverà 111. Si vede in questo numero la stessa cifra ripetuta tre volte con valori differenti; nel primo posto cominciando dalla dritta esprime un'unità, nel secondo una diecina, nel terzo un centinajo: è lo stesso dei numeri 444, 333, ec.

5. Seguendo sempre il medesimo metodo, si può esprimere tutti i numeri possibili con dieci caratteri; basta a tal uopo di porre come fondamento di questo sistema di numerazione la convenzione seguente, cioè che *ciascuna cifra esprime unità di dieci in dieci volte maggiori, a misura che vien trasportata addietro dalla destra verso la sinistra*.

6. Per terminare di schiarire ciò che precede,

prenderemo una strada opposta a quella che abbiamo percorso, e mostreremo come si può enunciare un numero composto di quante si voglian cifre.

Prendiamo per esempio il numero 23792.

Questo numero è composto di cinque cifre: la prima verso la destra rappresentando delle unità, la seconda rappresenterà delle diecine, la terza delle centinaja, la quarta delle milliaja, e la quinta delle collezioni di dieci milliaja, o delle *diecine di milliaja*, ovvero delle *unità del quint' ordine*; donde segue che quel numero è uguale a venti mila, più tre mila, più settecento, più novanta, più due, o esprimendosi in una maniera abbreviata, quel numero è ventitre mila settecento novantadue.

Per enunciar ogni altro numero, per quanto grande si sia, non v' è maggior difficoltà. Basta conoscere i nomi che l'uso ha dati alle diverse collezioni d'unità, o ai *differenti ordini d' unità*.

7. Finora abbiamo parlato soltanto delle diecine di milliaja; retrocedendo successivamente d' un posto verso la sinistra, si trovano le centinaja di milliaja, poi il millione che è uguale alla collezione di dieci centinaja di milliaja, quindi le diecine di millioni, le centinaja di millioni; dopo viene il billione, che è uguale alla collezione di dieci centinaja di millioni, e così in seguito; ciò si comprenderà meglio essendo il numero seguente, ove si è scritto sotto ciascuna cifra, il nome dell' ordine d' unità che rappresenta:

24, 897, 321, 580, 346

2	diecine di trillioni.
4	trillioni.
8	centinaja di billioni.
9	diecine di billioni.
7	billioni.
3	centinaja di millioni.
2	diecine di millioni.
1	millioni.
5	centinaja di milliaja.
8	diecine di milliaja.
0	milliaja.
3	centinaja.
4	diecine.
6	unità.

Le cifre di questo numero son divise per mezzo di virgole in membri di tre in tre cominciando dalla destra; ma l'ultimo membro che nell'esempio attuale ha due sole cifre, potrà qualche volta averne una solamente. Si vede che ciascun membro ha le sue unità, le sue diecine, e le sue centinaja; e che di tre in tre cifre soltanto, o sia di milliajo in milliajo s'introduce una nuova denominazione. Per esempio vi sono da principio le unità, le diecine d'unità, le centinaja d'unità; poi vengono le milliaja, le diecine di milliaja, le centinaja di milliaja, e così di seguito.

Di qui resulta che per enunciare un numero, bisogna dividerlo come il precedente in membri di tre cifre, cominciando dalla destra; enunciare ciascuno di questi membri come se fosse solo, ma dare alle sue ultime unità il nome che conviene al posto che occupano.

Applicando questa regola al numero che c'è servito d'esempio, si vedrà facilmente che si legge *ventiquattro trillioni, ottocento novantasette billioni, trecento ventuno millioni, cinquecento ottanta mila, trecento quarantasei unità.*

8. Si scrive un numero pronunziato, collocando successivamente le une a canto all'altre, cominciando dalla sinistra, le cifre che esprimono il numero dell'unità di ciascun'ordine: bisogna aver presente allo spirito la successione di tali ordini per non ometterne alcuno e riempier con degli zeri il posto di quelli che possono mancare. Se si dovesse per esempio scrivere il numero *trecento ventiquattro mila novecento quattro*, si porrebbe 3 per le centinaja di milliaja, 2 per i venti mila, o per le due diecine di milliaja, 4 per le milliaja, 9 per le centinaja; e siccome immediatamente dopo le centinaja vengono le diecine che mancano nel numero proposto, si metterebbe 0 per tenerne il posto, poi si porrebbe la cifra 4 dell'unità; si sarebbe scritto in tal maniera 324904. Parimente, avendo l'attenzione di riempie-

re con degli zeri i posti delle diecine di milliaja e delle diecine che mancano nel numero *cinquecento mila trecento due* si scriverà 500302.

9. Enunciando questo numero come abbiamo fatto, non abbiamo espressa la natura delle sue unità; non abbiamo detto se questo numero era un numero d'uomini, o d'anni, o d'un'altra specie determinata d'individui o di cose.

Quando si considerano così i numeri, facendo astrazione dalla natura delle loro unità, si chiamano *numeri astratti*; quando al contrario si esprime la specie d'unità di cui sono composti, si chiamano *numeri concreti*. Così dieci, venti, trenta sono numeri astratti, come pure dieci volte, venti volte, trenta volte, ec.; invece che dieci anni, venti uomini, o dieci volte un anno, venti volte un uomo sono numeri concreti.

Ora che abbiamo fatto conoscere il sistema di numerazione stabilito fra noi, ci resta a esporre le diverse operazioni che si possono fare su i numeri, col mezzo dei caratteri o cifre di cui abbiamo parlato sopra.

DELL'ADDIZIONE.

10. Abbiamo già veduto come il numero si compone dalla riunione di più unità d'una stessa natura. Ne segue che aggiungendo insieme più numeri composti d'unità della stessa natura, il risultato formerà pure un numero composto della medesima specie d'unità. Questo resultato si chiama *somma*, e l'operazione colla quale si trova la somma di più numeri dati, si chiama *addizione*.

Per andare dal più semplice al più composto, supponiamo che si voglia aggiungere insieme due numeri d'una sola cifra, per esempio 7 e 9.

È chiaro che vi si giungerà aggiungendo 7 volte di seguito l'unità al numero 9, o 9 volte di seguito l'unità al numero 7, il che darà 16 per la somma cercata. Se si volesse aggiungere anche un altro numero, per eresempio 6, ai due precedenti, vi si giungerebbe parimente aggiungendo 6 volte di seguito l'unità alla somma 16 che abbiamo trovato. Queste specie d'addizioni son facili a ritenersi, e l'abitudine le imprime facilmente nella memoria. Ciascuno sa che 4 e 2 fanno 6, che 6 e 3 fanno 9, ec.

Passiamo adesso a' numeri composti di più cifre.

Se si dimandasse, per esempio, d'aggiungere insieme 44 e 68, sarebbe troppo lungo l'agiungere 68 volte l'unità al numero 44, o 44 volte l'unità al numero 68; ma si può giungere allo stesso fine in una maniera più spedita. Di fatti aggiungere insieme 44 e 68, vuol dire aggiungere 4 diecine e 4 unità con 6 diecine e 8 unità, donde si vede che la somma cercata deve contenere 10 diecine, e 12 unità, o un centinajo, una diecina, e 2 unità, cioè questa somma è 112.

Potendo farsi il medesimo ragionamento, qualunque siano i numeri proposti, se ne concluderà che *per trovare la somma di quanti numeri si voglia, bisognerà concepirli decomposti in unità, diecine, centinaja, ec. e aggiungere insieme le unità dello stess' ordine, cioè l'unità colle unità, le diecine colle diecine, e così in seguito. L'addizione proposta si troverà con tal mezzo decomposta in più addizioni parziali, e l'unione di tali somme parziali formerà la somma totale.*

11. Applichiamo questa regola a un esempio, e proponiamoci d'aggiungere insieme i numeri 437, 58, 9 e 9642.

Poichè dobbiamo aggiungere insieme le unità d'uno stess'ordine, per farlo più facilmente e non confondere le cifre d'ordine diverso, scriviamo questi numeri in colonne, come si vede qui, in maniera che le unità del medesimo ordine si trovino nella medesima colonna verticale, e porremo sotto questi numeri il resultato dell' operazione, osservando di separarlo da essi con una linea.

	437
	58
	9
	9642
somma	10146

Fatto questo, ciò che si presenta di più naturale si è di sommare prima la colonna dell'unità, perchè dieci unità formando una diecina, se la somma della colonna dell' unità è un numero composto di diecine e d'unità, si potrà portare alla colonna delle diecine quelle date da una tal somma, e scrivere nel resultato solamente le unità che essa avrà fornito.

Cominciamo dunque dal sommare la colonna delle unità, il che dà per somma 26, o 2 diecine e 6 unità; scriviamo 6 nel risultato, e *riteniamo* le due diecine di più per unirle a quelle che darà la colonna seguente. La somma di questa colonna è 12 diecine, il che, unendovi le 2 diecine *ritenute*, fa in tutto 14 diecine, o 1 centinajo, e 4 diecine; scriviamo 4 sotto la colonna delle diecine, e riteniamo il centinajo di più per unirlo con quelli che darà la colonna seguente; la somma di questa è 10 centinaja, e unendovi il centinajo ritenuto, si ha in tutto 11 centinaja, o 1 milliajo, e 1 centinajo; si scriverà dunque 1 sotto la colonna delle centinaja, ritenendo il migliajo di più per unirlo a quelli che darà la colonna seguente: la somma di questa è 9 milliaja, il che, unendovi il milliajo ritenuto, fa 10 milliaja, o 1 diecina di milliaja; si scriverà dunque o sotto la colonna delle milliaja; e siccome l'addizione è finita, si scriverà al suo posto la diecina di milliaja data all' ultima colonna; talmente che la somma cercata sarà 10146.

Per scansare, nel fare l' addizione, di scordarsi la cifra che si ritiene dalla colonna precedente, è bene cominciare da essa l'addizione della colonna alla quale si deve aggiungerla. Così, nel nostro esempio, dopo avere scritto 6 nel posto delle unità, e ritenuto 2 diecine per la colonna seguente, quando si sommerà questa, si dirà mentalmente 2 e 3 fanno 5, 5 e 5 fanno 10, ec. (*).

12. Secondo ciò che precede, stabiliremo per regola generale, che *se si hanno più numeri da aggiungere insieme, si scriveranno in colonne, osservando di porre le unità d'uno stess'ordine nella medesima colonna verticale, dopo di che si tirerà una linea sotto questi numeri per separarli dal resultato. Si aggiungeranno prima insieme tutti i numeri della colonna delle unità; e se questa somma non supera 9, si scriverà nel risultato, nella colonna delle unità; se supera 9 si scriveranno solo le unità, e si riterranno le diecine di più per portarle alla colonna seguente, sulla quale si opererà nella stessa maniera, come pure su quelle delle centinaja, delle milliaja, ec. Finalmente quando si sarà giunti all'ultima colonna a sinistra, se ne scriverà la somma tale quale si sarà trovata.*

Ecco alcuni esempi d'addizione che potranno servire d'esercizio.

7861	66947	4649
345	46742	928
8023	132684	9298
16229	246373	14875

(*) Cominciando così l'addizione dalla colonna dell'unità, e continuandola da destra a sinistra, si ha, come abbiamo veduto, il vantaggio d'ottenere a ciascuna addizione parziale una cifra del resultato. Non si avrebbe la stessa facilità cominciando l'addizione dalla colonna a sinistra, e continuandola da sinistra a destra; non è già che non si potesse giungere ugualmente al resultato tenendo questa strada, ma essa è in generale più lunga e meno comoda di quella che abbiamo seguito. Siccome non è d'altronde che un oggetto di pura curiosità, giacchè non se ne fa uso, non ne parleremo qui.

DELLA SOTTRAZIONE

13. Dopo aver trovato come si può aggiungere insieme più numeri, cerchiamo come si può togliere un numero da un altro.

L'operazione colla quale si toglie o si *sottrae* un numero da un altro, si chiama *sottrazione*. Il resultato della sottrazione si chiama *resto*, o *differenza*. Questo resto esprime quante unità il maggiore dei due numeri proposti contiene più dell'altro; è dunque l'eccesso del primo sul secondo.

Supponiamo prima il caso più semplice, quello in cui i numeri dati abbiano una sola cifra.

Proponiamoci, per esempio, di togliere 7 da 9.

È chiaro che vi si giungerà togliendo 7 volte di seguito l'unità dal numero 9; talmente che si troverà per resto o differenza 2.

Queste specie di sottrazioni sono facili a ritenersi: così ciascuno sa che togliendo 5 da 8 resta 3; che togliendo 3 da 7, resta 4 ec. Ma se si chiedesse per esempio di togliere 54 da 89, non s'imprenderebbe a togliere 54 volte di seguito l'unità dal numero 89; si rifletterebbe che togliere 54 da 89 vuol dire togliere 5 diecine e 4 unità da 8 diecine e 9 unità; e sottraendo le unità del primo numero da quelle del secondo, e le diecine dell'uno da quelle dell'altro, si vedrebbe nel momento che il resto cercato è composto di 3 diecine e 5 unità, cioè che un tal resto è 35.

Se i due numeri proposti fossero stati 47 e 84, sembra alla prima occhiata che non si sarebbe potuto applicar loro il ragionamento dell'esempio precedente, perchè non si può togliere 7 unità da 4 unità, quantunque sia evidente d'altronde che si può togliere 47 da 84. Ma una tal difficoltà sparirà riguardando il numero 84 come composto di 7 diecine, e di 14 unità, perchè allora la questione si riduce a togliere 4 diecine e 7 unità da 7 diecine e 14 unità; ragionando come abbiamo fatto nell'esempio precedente, si vede che il resto cercato deve contenere 3 diecine e 7 unità, cioè che questo resto è 37.

14. Lo stesso ragionamento applicandosi a tutti i numeri, ne segue che *per togliere due numeri uno dall'altro, bisogna concepirgli ambedue decomposti col pensiero in unità, diecine, centinaja ec., e operare la sottrazione sopra le unità d'uno stess' ordine, cioè togliere le unità dalle unità, le diecine dalle diecine, e così di seguito, osservando di fare questa decomposizione in maniera che in ciascun ordine d'unità il numero del quale si sottrae, superi il numero da sottrarsi. La sottrazione proposta si troverà con tal mezzo decomposta in più sottrazioni parziali, e l'unione dei resti parziali formerà il resto totale.*

Supponiamo, per primo esempio, che bisogni togliere 6457 da 7869; secondo un ragionamento analogo a quello che abbiamo fatto (11) per l'addizione, scriveremo questi due numeri in colonne, come si vede qui, osservando di porre le unità dello stess'ordine nella stessa colonna verticale, e porremo sotto il resultato, osservando di separarnelo con una linea.

$$\begin{array}{r} 7869 \\ 6457 \\ \hline 1412 \\ \hline \end{array}$$

È stato trovato più comodo il cominciare la sottrazione dalla destra che dalla sinistra; onde, toglieremo 7 da 9, il resto sarà 2, che scriveremo nel resultato, sotto la colonna delle unità. Passando alla colonna seguente, si dirà: tolto 5 da 6 resta 1, e si scriverà sotto la colonna delle diecine; quindi per quella delle centinaja, tolto 4 da 8 resta 4, si scriverà 4 sotto la colonna delle centinaja; finalmente a quella delle milliaja, tolto 6 da 7 resta 1, si scriverà 1 sotto la colonna delle milliaja; e siccome la sottrazione è finita, se ne concluderà che il resto cercato è 1412.

15. Potrebbe accadere, come abbiamo preveduto sopra, che nel numero da cui si sottrae, si trovasse una o più cifre di valor minore, o più piccole di quelle dello stess' ordine nel numero da sottrarsi. Supponiamo per esempio che si voglia togliere 19689 da 48397. Dopo avere scritto questi due numeri come si è fatto per l'esempio precedente,

$$\begin{array}{r} 48397 \\ 19689 \\ \hline 28708 \\ \hline \end{array}$$

si vede da principio che non si potrebbe togliere 9 da 7; ma se s'immagina la cifra superiore seguente 9 diminuita d'una delle sue unità che vale una diecina, e si riunisca col pensiero questa diecina colle sette unità, ne resulterà un totale composto di 17 unità, da cui si potrà per conseguenza togliere 9; si avrà per resto 8, che si scriverà sotto la colonna delle unità. Passando a quella delle diecine, non bisogna scordarsi che la cifra superiore 9 è statata diminuita di 1, e per conseguenza vale solo per 8, cioè 8 diecine, donde togliendo la cifra inferiore della stessa colonna, la quale pure esprime 8 diecine, il resto per questa colonna sarà zero. Si scriverà dunque 0 sotto la colonna delle diecine. Passando a quella delle centinaja, non si potrebbe togliere 6 da 3; ma *prendendo in prestito* un milliajo o dieci centinaja dalla cifra seguente 8, la questione sarà ridotta a togliere 6 da 13, il che darà 7 per resto, e si scriverà 7 sotto la colonna delle centinaja. La cifra superiore 8 della colonna seguente, che già per se medesima ha un valore minore di quello della cifra inferiore 9 che bisogna sottrarne, è stata diminuita d'1, e vale solamente per 7, cioè 7 milliaja; ma si vede subito che prendendo in prestito col pensiero un'unità dalla cifra seguente 4 che espime delle diecine di milliaja, quest'unità varrà dieci milliaja, che riunite alla cifra precedente, ridurranno la questione a togliere 9 da 17. Il resto essendo 8, si scriverà 8 sotto la colonna delle milliaja; con quest'operazione, la cifra superiore 4 è stata diminuita di 1 e vale solo 3, e quando se ne toglie 1, dà per resto 2, che si scrive sotto la colonna delle diecine di milliaja; talmente che il resto cercato sarà 28708.

16. Sebbene gli esempj precedenti bastino per mostrare come si deve operare in tutti i casi, ve n'è però uno che non bisogna omettere perchè potrebbe imbarazzare i principianti; ed è quello in cui la cifra inferiore essendo maggiore della cifra superiore, quest'ultima è seguita verso la sinistra da uno o più zeri.

Supponiamo per esempio che si voglia togliere 4569 da 5003.

Si comincierà dal disporre questi numeri secondo la regola del num. 14.

$$\begin{array}{r} 5003 \\ \underline{4569} \\ \underline{434} \end{array}$$

Si vede subito che non si può togliere 9 da 3, nè prendere in prestito dalla cifra superiore seguente, che essendo un zero non ha per se stessa alcun valore; non si può dunque prendere ciò che bisogna per rendere la sottrazione possibile, se non dalla cifra 5 delle milliaja. Ma siccome non v'è bisogno per questo che di 10 unità, bisognerà decomporre 5000 in 4990 e 10, ossia supporre che vi sia 499 nel posto delle tre prime cifre a sinistra 500, e concepire 13 in quello dell'unità. Con tal mezzo gli zeri si trovano cangiati in 9, e la cifra 5 è diminuita d'un'unità. Fatta la sottrazione, viene per resto 434. Questa maniera di ragionare si applica a tutti i casi, e fa vedere che bisogna prendere in prestito un' unità dalla prima cifra significativa a sinistra, aggiungere 10 unità alla cifra sulla quale si opera la sottrazione, e contare tutti gli zeri intermedj per 9.

Se si avesse, per esempio, da togliere 8768 da 10000, si scriverebbero questi due numeri secondo la regola del Num. 14,

$$\begin{array}{r} 10000 \\ 8768 \\ \hline 1232 \\ \hline \end{array}$$

e si troverebbe facilmente che il resto cercato è 1232 (*).

17. Ecco come si può esprimere in regola generale l'operazione della sottrazione esposta qui sopra.

Per togliere un numero da un altro, si scriverà il primo sotto il secondo, osservando che le unità dello stess' ordine siano situate nella stessa colonna verticale, dopo di che si tirerà una linea sotto questi numeri, per separarli dal resultato che si scriverà di sotto. Fatto ciò, si toglierà ciascuna cifra inferiore dalla sua corrispondente superiore, cominciando da dritta, e si scriverà la differenza al di sotto. Quando la cifra inferiore sarà maggiore della superiore, si prenderà in prestito col pensiero dalla cifra superiore della colonna seguente un' unità che ne vale dieci di quella sulla quale si opera, e che unita alla cifra

(*) Negli esempj precedenti abbiamo cominciato la sottrazione dalla dritta; si potrebbe dimandare se sarebbe stato possibile cominciarla dalla sinistra. È chiaro, da ciò che si è veduto sopra, che se tutte le cifre superiori fossero maggiori delle cifre inferiori dello stess' ordine si potrebbe cominciare la sottrazione donde si volesse; ma non sarebbe così se tal condizione non avesse luogo. Se si volesse, per esempio, togliere 789 da 873, e si cominciasse da sinistra, si potrebbe, è vero, togliere 7 centinaja da 8 centinaja, e si avrebbe 1 per resto; ma quando si volesse passare alla colonna seguente, siccome non si potrebbe togliere 8 da 7, bisognerebbe per render possibile la sottrazione tornare sull' operazione precedente. Lo stesso accaderebbe ogni volta che la cifra inferiore fosse maggiore della superiore. Non si prova quest' incoveniente incominciando dalla dritta; perciò l' uso ha consacrato questo metodo.

troppo piccola, renderà la sottrazione possibile. Si considererà dopo come minore d' un' unità la cifra dalla quale si sarà presa in prestito. Finalmente se v'è uno o più zeri fra la cifra su cui si opera, e la prima cifra significativa, si prenderà in prestito da quest' ultima, che perciò diminuirà d'un'unità, e tutti gli zeri intermedj dovranno esser presi per 9.

18. Quando nella stessa colonna la cifra superiore è minore dell'inferiore, abbiamo veduto che bisogna ricorrere alla cifra superiore della colonna seguente, prendere in prestito col pensiero una delle sue unità, e riguardarla dopo come diminuita di 1. È più comodo per la pratica di lasciar sempre alla cifra superiore il valore che aveva prima che se ne fosse preso in prestito un'unità, e di immaginare che la cifra inferiore che se ne deve sottrarre è aumentata di 1. Questa supposizione che d'altronde non influisce sul resultato, ha il vantaggio di sollevar molto la memoria. Nell'esempio precedente, si direbbe dunque, cominciando dalle unità, tolto 8 da 10 resta 2, e si scriverebbe 2 al resultato sotto la colonna delle unità; passando a quella delle diecine, tolto 7 da 10 resta 3, si porrebbe 3 sotto la colonna delle diecine; quindi a quella delle centinaja, tolto 8 da 10 resta 2, e così in seguito sino alla fine dell' operazione.

Uniremo qui alcuni esempj di sottrazione che potranno servire d' esercizio.

16844	103034	49812002
9786	69845	18924983
7058	33189	30887019

DELLA PROVA DELL' ADDIZIONE, E DELLA SOTTRAZIONE

19. Quand' un'operazione è fatta, è importante il verificarla: cerchiamo dunque i mezzi di verificare l' addizione e la sottrazione.

Cominciamo dall'addizione che abbiamo trattato da prima, e riprendiamo l'esempio che avevamo scelto, in cui i numeri proposti erano:

$$\begin{array}{lr} & 437 \\ & 58 \\ & 9 \\ & 9642 \\ \hline \text{e la somma} \ldots\ldots & 10146 \\ & 1120 \\ & \ldots\ldots \\ \hline \end{array}$$

Sommiamo di nuovo ciascuna colonna una dopo l'altra, cominciando questa volta dalla prima a sinistra. La somma di questa colonna è 9, cioè 9 milliaja: e siccome v'è 10 milliaja scritte al resultato, il milliajo di più non può provenire che da ciò che si è ritenuto nella colonna precedente; questa ha dunque dato per somma 11 centinaja; ma siccome non ne dà realmente che 10, bisogna che il centinajo di più venga da ciò che si è ritenuto nella colonna precedente, la quale ha dovuto per conseguenza dare 14 diecine per resultato. Essa non ne fornisce però che 12: per conseguenza le due diecine di più vengono dalla colonna delle unità, che ha dato 26 per somma, e deve ancora riprodurre lo stesso numero, poichè essendo l'ultima non può essere stata aumentata da qualcosa che si sia ritenuta precedentemente. Siccome questa colonna dà realmente per somma 26 unità, se ne concluderà che l'addizione è esatta.

Onde, sommando successivamente ciascuna colonna, cominciando da quella che è la prima a sinistra, se si toglie la somma particolare di ciascuna colonna da quella che si suppone aver essa dato, e se si scrivono i resti successivi provenienti da ciò che si è ritenuto, ciascuno sotto la colonna a cui appartiene, l'ultimo resto, se l'addizione è esatta, dovrà essere zero.

Quest' operazione si chiama la *prova* dell' addizione.

Siccome unicamente per ajutare la memoria si scrivono i resti 1, 1, 2, 0, ciascuno sotto la colonna corrispondente, conviene, a misura che si sono adoperati, segnarli con un punto al di sotto, come si vede qui, affine di non confonderli col resultato dell'operazione. Cerchiamo adesso come si può verificare la sottrazione.

20. Quando si toglie un numero da un altro, il resultato che abbiamo chiamato *resto*, o *differenza* è uguale all'eccesso del primo numero sul secondo. Il primo è dunque uguale al secondo più la differenza. Per verificare se una sottrazione è esatta, bisognerà assicurarsi che questa condizione è soddisfatta. Quest'operazione si chiama la *prova* della sottrazione.

Nel secondo esempio che abbiamo dato di sopra, si vede che la sottrazione è esatta, perchè aggiungendo il resto 28708 con 19689 si ritrova il numero 48397, da cui si era tolto il precedente.

$$\begin{array}{r} 48397 \\ 19689 \\ \hline 28708 \\ \hline 48397 \\ \hline \end{array}$$

DELLA MOLTIPLICAZIONE.

21. Si è veduto (Num. 1.) che aggiungendo l'unità a se stessa, si forma il numero 2; che 3 si ottiene aggiungendo una nuova unità alle due precedenti, e così in seguito. Operare in tal maniera su' numeri è ciò che si chiama duplicarli, triplicarli, e in generale moltiplicarli. Si dice che un numero è duplicato quando è aggiunto a se medesimo una volta, ovvero, il che è lo stesso, quando è ripetuto due volte: si dice che è triplicato quando è aggiunto a se medesimo due volte, o, il che è lo stesso, quando è ripetuto tre volte. Così raddoppiando 4 si avrà 8, e triplicando-

lo si avrà 12 In generale, *moltiplicare* un numero, vuol dire ripeterlo un certo numero di volte.

Si è veduto ne' paragrafi precedenti come si può aggiungere insieme più numeri dati; è chiaro che impiegando lo stesso metodo, potremo aggiungere più volte di seguito un medesimo numero a se stesso, cioè duplicarlo, triplicarlo, e in generale moltiplicarlo. Proponiamoci per esempio d'aggiungere due volte a se medesimo il numero 26; è chiaro che la questione si riduce a ripetere tre volte questo numero. Secondo il metodo del Num. 12, lo scriveremo tre volte di seguito:

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ 26 \\ \hline 78 \\ \hline \end{array}$$

e troveremo 78 per la somma cercata.

22. Quando l'addizione si riduce a ripetere più volte lo stesso numero, prende il nome di *moltiplicazione*, e ciò che abbiamo chiamato *somma* si chiama *prodotto*. Il numero che è stato ripetuto si chiama *moltiplicando*, e quello che indica quante volte è stato ripetuto si chiama *moltiplicatore*. Il moltiplicando e il moltiplicatore si chiamano ancora *fattori* del prodotto.

Nel nostro esempio 26 è il moltiplicando, 3 è il moltiplicatore, e 78 è il prodotto che resulta dalla moltiplicazione di 26 per 3.

Siamo giunti prontamente al resultato in tal ricerca, a motivo della semplicità dell'esempio che avevamo scelto; ma se il moltiplicando e il moltiplicatore fossero numeri grandi, la strada cha abbiamo tenuta diverrebbe lunga e penosa; cerchiamo un mezzo di semplicizzarla.

23. Analizzando quest'operazione, si vede senza difficoltà che avremmo potuto arrivare al resultato in un modo più diretto e spedito; perchè non si è fatto

con quest'addizione, se non che ripetere tre volte le unità del numero 26, e ripetere pure tre volte le sue diecine: cioè si è effettuata successivamente la moltiplicazione sulle unità di diversi ordini del moltiplicando; e siccome è evidente, per la natura dell'operazione, che questa decomposizione non è particolare all'esempio che abbiamo scelto, e che avrà luogo in tutti i casi, se ne conchiuderà che *per moltiplicare un numero per un altro, bisogna concepire il moltiplicando decomposto in unità, diecine, centinaja ec. e operare successivamente la moltiplicazione sulle unità di ciascun ordine. La moltiplicazione proposta si troverà così decomposta in più moltiplicazioni parziali, e l' unione de' prodotti parziali formerà il prodotto totale.*

24. Tentiamo adesso di applicare questa regola ad un esempio.

Per cominciare dal caso più semplice, supponiamo in principio che il moltiplicatore sia un numero d'una sola cifra; che bisogni, per esempio, moltiplicare 956 per 3; per ottenere i prodotti parziali, bisognerà effettuare successivamente la moltiplicazione sulle unità, sulle diecine e sulle centinaja del numero 956, e per conseguenza cercare i prodotti di 6, di 5 e di 9 per 3. Generalizzando quest'osservazione, si vede che per essere in stato d'applicare la regola precedente a tutte le questioni della stessa natura, bisogna conoscere i prodotti a due a due di tutti i numeri di una sola cifra, cioè de' numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

25. Questi prodotti, d'altronde assai semplici, non sono in grandissimo numero, e sarà utile e facile l' imprimerli nella memoria. Si veggono tutti riuniti nella tavola seguente che viene attribuita a Pitagora.

TAVOLA DI PITAGORA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

26. Ecco la formazione di questa tavola.

La prima linea è composta dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; sono i prodotti per 1.

Per avere i prodotti per 2, si aggiungerà ciascun numero una volta a se medesimo, il che formerà la seconda linea composta de' numeri 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Per avere i prodotti per 3, si aggiungerà ciascun numero col suo prodotto per 2, il che formerà la terza linea, composta de' numeri 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, e così di seguito.

È evidente che si otterranno con tal mezzo tutti i prodotti a due a due de' numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

La maniera di servirsi di questa tavola si deduce facilmente dal principio secondo il quale si è formata. Supponiamo, per esempio, che si dimandi il prodotto di 7 per 5. Tutti i prodotti di 5 si trovano nella quinta linea orizzontale; per conseguenza in tal linea si trova il prodotto cercato. Di più questo prodotto deve ancora trovarsi nella settima colonna verticale, che contiene tutti i prodotti di 7 per i numeri 1, 2, 3 ec. Per conseguenza questo prodotto è 35, che è a un tempo stesso in queste due linee.

Indicheremo in seguito col nome di *multipli* di un numero proposto, i suoi diversi prodotti per 2, 3, 4, 5. ec. Per esempio 14, 21, 28, 35, ec. saranno i multipli di 7. Inoltre un numero qualunque dicesi *parte aliquota* de' suoi multipli; e *parte aliquanta* de' numeri che non sono suoi multipli. Così 7 è parte aliquota di 14, 21, 28 ec. ed è parte aliquanta di 15, 16, ... 20, 22, 23..... 27, 29, 30 ec.

27. Esaminando questa tavola, si vede che 7 moltiplicato per 5 è uguale a 5 moltiplicato per 7; che 4 moltiplicato per 3 è uguale a 3 moltiplicato per 4; e in generale che il prodotto resta lo stesso quando i fattori restano gli stessi, qualunque sia l'ordine nel quale si moltiplicano.

L'analogia conduce subito a pensare che questa proprietà si estende a tutti i numeri, ma indipendentemente da qualunque induzione, si può dimostrarla nella maniera seguente, che esporremo prima col mezzo d'un esempio particolare, e che estenderemo dopo al caso il più generale.

Supponiamo che si voglia moltiplicare 5 per 3.

Se si scrive l'unità cinque volte di seguito in una stessa linea orizzontale, e si formano tre di queste linee, come si vede qui:

1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1

è chiaro che la collezione di tutte queste unità sara uguale a tre volte 5, o a 5 moltiplicato per 3.

Ma queste tre linee orizzontali composte di cinque unità per ciascuna, essendo considerate sotto un altro aspetto, sono evidentemente uguali a cinque colonne verticali di tre, cioè a cinque volte tre; dunque 3 moltiplicato per 5 uguaglia 5 moltiplicato per 3.

Quando si considera la questione sotto questo punto di vista, e che si decompone così la moltiplicazione, si vede che la proprietà di cui si tratta non è particolare all'esempio che abbiamo scelto. È pure evidente che quattro linee orizzontali composte di 12 unità per ciascuna, formeranno dodici colonne verticali composte di 4 unità per ciascuna; così 12 moltiplicato per 4 uguaglia 4 moltiplicato per 12; e siccome lo stesso ragionamento si applica ugualmente a tutti i numeri, se ne concluderà, che se *si hanno due numeri da moltiplicare unò per l'altro*, *il prodotto sarà sempre lo stesso*, *in qualunque ordine si moltiplichino*.

Si vede ancora da ciò che precede, che *un fattore indica sempre quante volte l'altro fattore è compreso nel prodotto*.

28. Abbiamo adesso tutte le cognizioni necessarie per risolvere la questione che ci eramo proposta da principio, e che consisteva in moltiplicare 956 per 3.

Per operare con maggior facilità scriviamo il moltiplicatore sotto il moltiplicando, come si vede qui

$$\begin{array}{r} 956 \\ 3 \\ \hline 2868 \\ \hline \end{array}$$

ed effettuiamo successivamente la moltiplicazione sulle unità di ciascun ordine. Cominceremo da quelle della prima cifra a destra, perchè applicando qui un ragionamento analogo a quello che abbiamo fatto Num. 11 per l'addizione, si vedrà facilmente che cominciando così la moltiplicazione dalla destra, potremo sommare nel tempo stesso i prodotti parziali. Cercando dunque prima il prodotto di 6 per 3, questo prodotto è 18, che bisognerebbe scrivere nel resultato per aggiungerlo dopo ai prodotti parziali delle colonne seguenti; ma per non essere obbligati a fare per questo una nuova operazione, si scriverà al resultato solamente le unità contenute in 18, cioè 8; si riterrà la diecina di più per unirla a quelle che darà la colonna seguente; e siccome questa e quelle che sono alla sua sinistra non possono più dare delle unità al prodotto, è chiaro che la cifra 8 apparterrà al resultato, e che si potrà per conseguenza scriverla senza timore d'essere obbligati a tornare su tale operazione. Passando quindi alla colonna seguente, 5 moltiplicato per 3 darà 15, cioè 15 diecine, che unite alla diecina ritenuta fanno 16 diecine; e ragionando come si è fatto per la colonna delle unità, si scriverà 6 sotto la colonna delle diecine, e si riterrà il centinajo di più per aggiungerlo a quelli che darà la colonna seguente. Il prodotto di quest'ultima è 27, cioè 2 milliaja e 7 centinaja, che unite col centinajo ritenuto fanno 2 milliaja e 8 centinaja. Si scriverà dunque 8 sotto la colonna delle centinaja, e siccome non resta niente da moltiplicare, si scriveranno al loro posto le due milliaja di più, talmente che il prodotto cercato sarà 2868 (*).

29. Il metodo tenuto nell'esempio precedente dà per moltiplicare un numero di più cifre per un numero d'una sola, questa regola generale: *scrivere il moltiplicatore sotto le unità del moltiplicando, e tirare una linea sotto il moltiplicatore per separarlo dal prodotto: quindi moltiplicare successivamente tutte le cifre del moltiplicando per il moltiplicatore, cominciando dalla destra. Quando il prodotto parziale potrà essere espresso da una sola cifra, si scriverà come viene; ma se ne esige due, si scriverà solo quella delle unità, e si riterrà l'altra per unirla col pensiero al prodotto della cifra seguente del moltiplicando per il moltiplicatore; si scriverà l'ultimo prodotto parziale tale quale si sarà trovato.*

30. Abbiamo veduto che per moltiplicare un nu-

(*) Cominciando così la moltiplicazione dalla destra si vede che si può colla stessa operazione aggiungere insieme i prodotti parziali; e tal vantaggio è dovuto evidentemente all'avere cominciato così. Non è già che non si possa arrivare al resultato ancora cominciando l'operazione dalla sinistra e continuandola da sinistra a destra, ma questa via è in generale più lunga e meno comoda di quella che abbiamo tenuto. Siccome d'altronde è un'oggetto di semplice curiosità, giacchè non se ne fa uso, non ne parleremo qui.

mero per un altro, bisogna effettuare successivamente la moltiplicazione sopra le unità di ciascun ordine del moltiplicando, e formare poi il prodotto totale aggiungendo i prodotti parziali. Ne segue che se non v'è unità nel moltiplicando, ma solo delle diecine, centinaja ec. non vi sarà unità neppure nel prodotto; che se non v'è nè unità, nè diecine nel moltiplicando, ma solo delle centinaja ec. non vi sarà nè unità nè diecine nel prodotto, per conseguenza *se il moltiplicando è terminato verso la destra da uno o più zeri, si effettuerà la moltiplicazione sulle sole cifre significative, e si porrà alla destra di questo prodotto tanti zeri quanti ne sono alla destra del moltiplicando.*

Uniremo qui alcuni esempj, che potranno servire d'esercizio.

$$\begin{array}{r} 430 \\ 6 \\ \hline 2580 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6000 \\ 4 \\ \hline 24000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34897 \\ 8 \\ \hline 279176 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 982784 \\ 9 \\ \hline 8845056 \end{array}$$

31. Passiamo ora al caso in cui il moltiplicando e il moltiplicatore sono ambedue numeri di più cifre.

Per andare dal più semplice al più composto, supponiamo prima che il moltiplicatore sia 10, e che dobbiamo per esempio moltiplicare 436 per 10. È facile vedere che per effettuare quest'operazione, basta aggiungere un zero alla destra del numero 436, il che darà 4360 per il prodotto cercato. Di fatti con tal mezzo il numero 436 diverrà dieci volte maggiore, giacchè le sue unità diverranno diecine, le sue diecine centinaja, e le centinaja milliaja.

Si dedurrebbe pure da' principj di numerazione sopra mentovati che per moltiplicare 436 per 100, basta aggiungere due zeri alla destra di quel numero, il che dà per prodotto 43600.

Resulta dunque dal nostro sistema di numerazione, che *per moltiplicare un numero per* 10, 100, 1000 *o in generale per l'unità seguita da quanti zeri si vorrà,* *bisogna aggiungere un simil numero di zeri alla destra del moltiplicando.*

32. Quindi ne segue che per moltiplicare un numero per 20, basta moltiplicarlo per 2, e aggiungere un zero alla destra del prodotto: perchè il prodotto di 436, per esempio, per 20 è evidentemente doppio del prodotto di 436 per 10, poichè 20, è uguale a due volte 10. Ora si forma il prodotto per 10 aggiungendo un zero alla destra del moltiplicando; dunque si otterrà il prodotto per 20 aggiungendo un zero alla destra del prodotto per 2; si troverà 8720 per resultato.

Si proverebbe parimente che per moltiplicare un numero per 30, basta moltiplicarlo per 3, e aggiungere un zero alla destra del prodotto, e che per moltiplicare questo medesimo numero per 200, 300 ec. basta moltiplicarlo per 2,3 ec., e aggiungere due zeri alla destra del prodotto.

Dunque in generale *se il moltiplicatore ha una sola cifra significativa, si effettuerà la moltiplicazione per questa cifra significativa, e si aggiungerà alla destra del prodotto tanti zeri quanti ve n'erano nel moltiplicatore.*

33. Siamo adesso in stato di moltiplicare uno per l'altro due numeri di più cifre, qualunque siano il moltiplicando o il moltiplicatore.

Supponiamo, per esempio, che si voglia moltiplicare 792 per 345. Si osserverà che moltiplicare 792 per 345 vuol dire prendere il numero 792, 345 volte, o 5 volte, più 40 volte, più 300 volte; il che decompone la moltiplicazione de' numeri proposti in tre operazioni, nelle quali il moltiplicatore non ha che una sola cifra significativa.

Per effettuarla con più facilità, scriviamo il moltiplicatore sotto il moltiplicando, osservando che le unità dello stesso ordine si trovino collocate nella stessa colonna verticale.

$$\begin{array}{r} 792 \\ 345 \\ \hline 3960 \\ 31680 \\ 237600 \\ \hline 273240 \end{array}$$

Fatto ciò, cominciereremo da moltiplicare 792 per le unità del moltiplicatore, quantunque si possa e con ugual vantaggio, cominciare da qualunque sua cifra si voglia; si moltiplicherà dunque 792 per 5, secondo la regola del Num. 29, e si scriverà il prodotto 3960 che resulterà da questa moltiplicazione.

Si effettuerà quindi la moltiplicazione per la cifra seguente del moltiplicatore, ma siccome questa cifra esprime delle diecine, bisognerà porre un zero alla destra del prodotto, ovvero, il che è lo stesso, scrivere nel posto delle diecine la prima cifra resultante dalla moltiplicazione di 792 per 4. Così il secondo prodotto parziale 31680 sarà collocato sotto il primo, in modo che le unità dello stess' ordine si troveranno nella stessa colonna verticale.

Si effettuerà la moltiplicazione per 3, osservando di porre nel posto delle centinaja la prima cifra di questo prodotto, o di farla precedere da due zeri, e con tal mezzo il terzo prodotto parziale 237600 si troverà posto in colonna sotto i precedenti.

Non resterà dopo altro che fare la somma di questi prodotti parziali, il che si effettuerà col mezzo della regola del Num. 12, e si avrà 273240 per il prodotto cercato.

34. Si può vedere da quest' esempio come bisognerebbe operare in tutti gli altri casi. Fisseremo dunque in principio generale, che *per moltiplicare un numero di più cifre per un numero di più cifre, si moltiplicherà tutto il moltiplicando successivamente per le unità, le diecine, e le centinaja del moltiplicatore, osservando di porre la prima cifra di ciascun*

prodotto sotto le unità dello stess' ordine di quelle della cifra del moltiplicatore che ha dato un tal prodotto. I prodotti parziali trovandosi così disposti in colonna, secondo la regola del Num. 12, *si aggiungeranno insieme per avere il prodotto totale.*

Si è veduto nel Num. 30 che se il moltiplicando è terminato verso la destra da uno o più zeri, basta effettuare la moltiplicazione sulle cifre significative che contiene, aggiungendo alla destra del prodotto tanti zeri quanti ve n'erano alla destra del moltiplicando.

Si è veduto nel Num. 32 che se il moltiplicatore è terminato verso la destra da uno o più zeri, basta effettuare la moltiplicazione per le cifre significative, aggiungendo alla destra del prodotto tanti zeri quanti ve n'erano alla destra del moltiplicatore. *Se dunque il moltiplicando e il moltiplicatore sono terminati tutti due da uno o più zeri, si effettuerà la moltiplicazione sulle sole cifre significative, e si aggiungerà alla destra del prodotto tanti zeri quanti ve ne sono nel moltiplicando e nel moltiplicatore.*

35. Si può, col mezzo delle regole precedenti, risolvere tutte le questioni dipendenti dalla moltiplicazione; ma un' osservazione che non bisogna perdere di vista si è che in tutte le questioni possibili, il moltiplicatore è sempre un numero astratto; e il prodotto è composto d' unità della stessa natura di quelle del moltiplicando.

In fatti, il moltiplicatore indica quante volte si deve ripetere il moltiplicando (Num. 22); è dunque un numero astratto.

Il prodotto non è altro che il moltiplicando ripetuto un certo numero di volte; è dunque composto d' unità della stessa natura di quelle del moltiplicando.

Per far meglio concepire questa verità, proponiamoci un esempio.

Supponiamo che si dimandi quanto si deve pagare per la compra di 4 pezze di panno a 75 scudi la pezza.

In quest'esempio, 75 scudi è il moltiplicando, e 4 è il moltiplicatore; perchè è evidente che la somma che si deve pagare è uguale a quattro volte 75 scudi. Dunque moltiplicando 75 per 4, si avrà 300 scudi per il prodotto cercato, il quale è evidentemente composto di unità della stessa natura di quelle del moltiplicando.

Si vedrebbe parimente che 4 unità di qualunque natura si voglia, come 4 braccia, 4 volumi a 75 scudi ciascuno, costerebbero ugualmente 300 scudi. Dunque la natura delle unità del prodotto dipende solo dalla natura delle unità di cui è composto il moltiplicando.

Terminando quest'articolo, uniremo qui alcuni esempj, su'quali potrà farsi esercizio.

300	526	9648
40	307	5137
12000	2682	67536
	157800	289440
	161482	964800
		48240000
		49561776

DELLA DIVISIONE

36. Abbiamo veduto Num. 27 che quando si moltiplicano due numeri uno per l'altro, ciascuno dei fattori indica quante volte l'altro fattore è contenuto nel prodotto. Di qui nasce la *divisione*, che è *un'operazione colla quale essendo dati un prodotto e uno de' suoi fattori, si trova l'altro fattore.*

Essa serve pure per dividere o partire un numero dato in parti uguali, di cui è dato il numero o il valore: perchè, se si dimandasse per esempio di dividere 78 in 3 parti uguali, bisognerebbe che ciascheduna di queste parti fosse contenuta tre volte in 78. Si dovrebbe dunque riguardare 78 come un prodotto, uno de' di cui fattori fosse 3, e l'altro il numero cercato, che è qui 26.

Parimente se si volesse dividere 78 in parti uguali, ciascuna composta di 26 unità, bisognerebbe cercare quante volte 78 contiene 26, e per conseguenza si dovrebbe riguardare 78 come un prodotto, uno dei cui fattori fosse 26, e l'altro il numero cercato, che è qui 3.

Qualunque sia quello di questi usi che si abbia in vista, la divisione si riduce sempre alla definizione che ne abbiamo dato da principio.

Il numero che si deve dividere si chiama *dividendo*; il fattore noto, e per cui si deve dividere, si chiama *divisore*. Il fattore ignoto che si trova colla divisione si chiama *quoziente*, e indica sempre quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.

37. Onde, per trovare il quoziente comunque sia espressa la questione, che ha dato luogo alla divisione, bisognerà cercare quante volte il dividendo contiene il divisore, e la natura della questione determinerà la natura delle unità del resultato.

Poichè il divisore e il quoziente sono i due fattori d'uno stesso prodotto, ne segue *che il divisore moltiplicato per il quoziente deve riprodurre il dividendo*. Per verificare una divisione, bisognerà dunque assicurarsi che questa condizione è soddisfatta.

Osserveremo di passaggio, che *per verificare una moltiplicazione, bisognerà dividere il prodotto per uno de' suoi fattori, o assicurarsi che il quoziente è uguale all'altro*.

38. In conseguenza di ciò che si è detto, la divisione può farsi col mezzo di sottrazioni ripetute; ma se il dividendo contenesse il divisore un gran numero di volte, l'operazione sarebbe lunga e penosa; cerchiamo dunque di semplicizzarla.

Potrebbe accadere primieramente che il divisore e il quoziente fossero ambedue numeri d'una sola cifra. In tal caso, il dividendo sarà compreso nella tavola di Pitagora che abbiamo spiegato di sopra (Num. 25), perchè essa contiene tutti i prodotti a due a due dei numeri d'una sola cifra; sarà dunque facile col mezzo di questa tavola di trovare il quoziente quando si conoscerà il dividendo, e il divisore. Se fosse proposto, per esempio, di dividere 42 per 6, si vedrebbe tosto che i due fattori del prodotto 42 sono i numeri 7 e 6, e che in conseguenza il quoziente è 7. Queste specie di divisioni, essendo per così dire, gli elementi delle divisioni più complicate, fanno sentire di nuovo la necessità d'imprimersi nella memoria la tavole di Pitagora. Passiamo ora a esempj più composti; ma per disporre gradatamente le difficoltà, supponiamo prima che il divisore sia un numero d'una sola cifra, essendo d'altronde il dividendo qualunque numero si voglia.

39. Supponiamo per esempio, che si voglia dividere 1656 per 3. Si può cangiare la questione in quest'altra: *trovare un numero tale che moltiplicando le sue unità, diecine, centinaja ec., per 3, si ottenga per prodotto le unità, diecine, centinaja ec. del dividendo* 1656.

È visibile che questo numero non avrà unità d'un ordine superiore alle milliaja, perchè se avesse solamente delle diecine di milliaja, vi sarebbero pure delle diecine di milliaja nel prodotto, e ciò non è.

Non avrà neppure unità dell'ordine delle milliaja; perchè se ne avesse solamente una, il prodotto 1656 ne conterebbe almeno 3, e ciò non è.

Questo ci fa conoscere che il milliajo che si trova nel dividendo nasce da ciò che si ritiene allorchè si moltiplica per il divisore 3 le centinaja del quoziente.

Se dunque questo ha una cifra nelle centinaja, questa cifra dev'esser tale, che moltiplicando il numero da essa espresso per 3, si abbia per prodotto 16.

o il multiplo di 3 più prossimo a 16. Questa restrizione è necessaria, a cagione di ciò che si è potuto ritenere nella moltiplicazione delle altre cifre del quoziente per il divisore, e che si è dovuto riunire al prodotto delle centinaja.

Il numero che verifica questa condizione è 5; ma 5 centinaja moltiplicate per 3 danno 15 centinaja, e il dividendo 1656 ne contiene 16. La differenza 1 centinajo proviene dunque da ciò che si è ritenuto nella moltiplicazione delle altre cifre del quoziente per il divisore. Se adesso si toglie il prodotto parziale 15 centinaja, o 1500 dal prodotto totale 1656, il resto 156 conterrà i prodotti delle unità e delle diecine del quoziente per il divisore, e tutto si ridurrà a trovare un numero che moltiplicato per 3 dia 156; questione precisamente simile a quella che ci eramo proposta da principio. Onde quando si sarà trovata la prima cifra del quoziente, come abbiamo fatto nell'esempio precedente, si moltiplicherà il numero che esprime per il divisore; e togliendo questo prodotto totale, si avrà per resultato un nuovo dividendo; sul quale si opererà come sul precedente, e così in seguito finchè il dividendo primitivo sia esaurito.

40. È facilissimo scrivere le operazioni che abbiamo indicate. Si porrà il divisore alla destra del dividendo, come si vede qui; osservando di separarli uno dall'altro con una linea verticale, alla destra della quale si tirerà una linea orizzontale per separare il quoziente dal divisore

$$
\begin{array}{r|l}
1656 & 3 \\ \cline{2-2}
15 & 552 \\ \cline{1-1}
156 & \\
15 & \\ \cline{1-1}
06 & \\
6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

poi cominciando l'operazione dalla sinistra del dividendo, si dividerà prima 16 per 3, il che darà per quoziente 5, che si scriverà nel posto delle centinaja. Moltiplicando quindi il divisore 3 per il quoziente parziale 5, si porterà il prodotto 15 sotto il dividendo parziale 16, e togliendo 15 da 16, verrà per resto 1, cioè un centinajo, che dovrà essere ridotto in diecine, e unito alla colonna precedente; il che si farà abbassando la cifra 5 del dividendo 1656 a canto al resto 1, talmente che si avrà 15 diecine da dividere per 3. Il quoziente sarà 5 cioè 5 diecine, che si scriveranno a canto alle 5 centinaja già trovate, e operando su questo quoziente parziale come sul precedente, si vedrà che non resta niente da riportare alla colonna delle unità del dividendo; si abbasserà dunque la cifra 6, che è la sola che ci resti a dividere, e continuando l'operazione, si troverà 2 unità per ultimo quoziente parziale: si scriverà dunque nel resultato 2 al posto delle unità, talmente che il quoziente totale sarà 452 (*).

41. Se nel corso dell'operazione, alcuno de' dividendi parziali non contenesse il divisore, si scriverebbe zero al quoziente, e si abbasserebbe subito un'altra cifra a canto a quel dividendo parziale, per continuare la divisione.

Ciò accaderebbe se si volesse dividere 1535 per 5,

$$\begin{array}{r|l} 1535 & \;5 \\ \cline{2-2} 15 & 307 \\ \cline{1-1} 035 & \\ 35 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

(*) Non è difficile concepire, perchè la divisione non può sempre operarsi esattamente sopra le unità di ciascun'ordine del dividendo. Nel fare la moltiplicazione si aggiunge al prodotto di ciascuna colonna ciò che si è ritenuto dalla colonna precedente; si deve dunque operando poi la divisione ritrovare in ciascuna divisione parziale, come resto, quel che si è ritenuto, e bisognerebbe per conseguenza riportarlo alla colonna che l'ha fornito. Per questa ragione appunto è più vantaggioso cominciare la divisione dalla sinistra che dalla diritta del dividendo. Si vede ancora di qui che la divisione non è altro che la decomposizione della moltiplicazione.

Operando su questi due numeri come abbiamo fatto nell' esempio precedente, si troverebbe per quoziente 307, osservando qui che siccome la cifra 3 delle diecine del dividendo non contiene il divisore 5, ne resulta che il quoziente non deve avere diecine, poichè la cifra 3 non può allora venire se non da ciò che si è ritenuto nella colonna delle unità, nella moltiplicazione del divisore 5 per il fattore cercato.

42. Il metodo precedente riesce ugualmente quando il divisore è un numero di più cifre. Se si trattasse per esempio di dividere 57981 per 251, si vedrebbe facilmente che il quozieute non ha cifre al di sopra delle centinaja, poichè se avesse solo delle milliaja, il dividendo conterrebbe delle centinaja di milliaja, il che non è; di più questa cifra delle centinaja dovrebbe essere tale che moltiplicata per 251 desse per prodotto 579, o il multiplo di 251 più prossimo a 579, ma minore di questo numero, restrizione necessaria, a cagione di ciò che può essere stato ritenuto nella moltiplicazione delle altre cifre del quoziente per il divisore. Il numero che verifica questa condizione è 2; ma 2 centinaja moltiplicate per 251 fanno 502 centinaja, e il dividendo ne contiene 579; la differenza 77 centinaja proviene dunque da ciò che è stato ritenuto nella moltiplicazione delle unità e diecine del quoziente per il divisore.

Se adesso si toglie il prodotto parziale 502 centinaja, o 50200 dal prodotto totale 57981, il resto 7781 conterrà i prodotti delle unità e delle diecine del quoziente per il divisore, e tutto si ridurrà a trovare un numero che moltiplicato per 251 dia per prodotto 7781, questione perfettamente simile a quella che ci eramo proposta da principio. Onde, quando si sarà trovata la prima cifra del quoziente, si moltiplicherà il numero che essa esprime per il divisore; e togliendo il prodotto parziale dal prodotto totale, si avrà per resultato un nuovo dividendo, sul quale si opererà come sul precedente; e così in seguito, finche il dividendo sia esaurito.

In generale, bisogna sempre per ottenere la prima cifra del quoziente, separare sulla sinistra del dividendo un numero di cifre sufficiente perchè il numero che esse esprimono, considerato come rappresentante unità semplici, possa contenere il divisore, ed effettuare questa divisione parziale.

43. L'operazione si dispone così:

$$\begin{array}{r|l} 57981 & 251 \\ \cline{2-2} 502 & 231 \\ \hline 778 & \\ 753 & \\ \hline 251 & \\ \hline \end{array}$$

Comincieremo dall'effettuare la divisione sulle tre prime cifre del dividendo, il che darà per quoziente 2, che scriveremo nel posto delle centinaja, poichè sono centinaja quelle che consideriamo. Moltiplicando quindi il divisore 251 per il quoziente parziale 2, porteremo il prodotto 502 sotto il dividendo parziale 579; togliendo 502 da 579 verrà per resto 77, cioè 77 centinaja o 770 diecine, che dovranno essere unite alla colonna delle diecine. Per questo, si abbasserà la cifra 8 del dividendo a canto al resto 77, talmente che si avrà a dividere 778 per 251; il quoziente sarà 3 diecine che si scriverà per conseguenza a canto alle centinaja già trovate; e operando su questo quoziente parziale come sul precedente, si avrà per resto 25. Abbassando quindi l'ultima cifra 1 del dividendo, e operando sul dividendo parziale 251 come sugli altri, si vedrà che il dividendo è esaurito, e che il quoziente totale è 231.

44. Sia ancora 423405 da dividere per 485; si scriverebbero prima questi due numeri, come nell'esempio precedente:

$$
\begin{array}{r|l}
423405 & 485 \\ \cline{2-2}
3880 & 873 \\ \cline{1-1}
3540 & \\
3395 & \\ \cline{1-1}
1455 & \\
1455 & \\ \cline{1-1}
0000 &
\end{array}
$$

Le tre prime cifre del dividendo, considerate come se fossero sole, fanno solo 423; bisognerà dunque primieramente effettuare la divisione sulle quattro prime, e cercare il numero che moltiplicato per 485 dà un prodotto uguale a 4234, o immediatamente minore, numero che esprime pure quante volte 485 è contenuto in 4234. Siccome esso non si vede facilmente alla prima occhiata, faremo diversi tentativi per procurare di scoprirlo. Per ciò cercheremo quante volte le 4 centinaja del numero 485 sono contenute nelle 42 centinaja del numero 4234. Esse vi sono contenute 10 volte; non se ne deve però concludere che il quoziente parziale è 10; poichè ciò supporrebbe che il divisore 485 è contenuto nelle tre prime cifre del dividendo 4234. Il quoziente deve dunque essere minore di 10; ma è ancora minore di 9, perchè 9 volte 485 fanno 4365. Finalmente si tenterà 8, e siccome quest' ultimo numero non è troppo grande, si scriverà 8 al quoziente, e si continuerà l'operazione come nell' esempio precedente, osservando a ciascuna divisione parziale d'impiegare, per cercare il quoziente, il metodo ora indicato. Con tal mezzo si troverà che il quoziente totale è 873.

45. Si dovrebbe a rigore cercare direttamente, e per mezzo di sottrazioni successive, quante volte ciascun dividendo parziale contiene il divisore intero; ma siccome questa via sarebbe spesso lunga e penosa, bisogna contentarsi, come si è veduto, di cercare quante volte la parte più grande del dividendo contiene la parte più grande del divisore. Sicco-

me, operando così, non si fa se non una stima approssimata, il quoziente trovato con tal mezzo non è sempre il vero, ma la moltiplicazione serve dopo a correggere ciò che un tal giudizio può avere di erroneo. Così, nella prima divisione parziale dell' esempio precedente, abbiamo conosciuto che il quoziente era minore di 9, perchè 9 volte 485 fanno 4365, che è maggiore del dividendo parziale 4234; e abbiamo veduto dopo due tentativi successivi, che questo quoziente era uguale a 8, quantunque le 4 centinaja del divisore fossero contenute 10 volte con un resto nelle 42 centinaja del dividendo parziale.

Fra i diversi tentativi che si debbono fare a ciascuna divisione parziale per trovare il quoziente, è facile il vedere che non bisogna mai tentare 10; perchè se il quoziente parziale potesse essere uguale a 10, o maggiore di 10, ne seguirebbe che il resto della divisione parziale precedente conterrebbe una o più volte il divisore; il che non potrebbe essere se tal divisione fosse stata fatta con esattezza.

46. La via che abbiamo tenuto negli esempj precedenti potendo applicarsi a tutti i casi, ne dedurremo una regola generale, che enuncieremo nella maniera seguente.

Per dividere un numero per un altro, si scriverà il divisore a destra del dividendo, separando il primo dal secondo con una linea, e facendo un' altra linea sotto il divisore, per segnare il luogo del quoziente. Si prenderà dopo sulla sinistra del dividendo tante cifre quante bisogneranno per contenere il divisore, supponendo che queste cifre esprimano unità semplici; poi si cercherà quante volte questo dividendo parziale contiene il divisore, il che darà una cifra del quoziente totale. Si scriverà questa cifra al suo posto sotto il divisore; si moltiplicherà quindi il divisore per il quoziente parziale trovato; e avendo scritto il prodotto sotto il dividendo parziale, si sottrarrà uno dall' altro, il che darà un resto, alla destra del *quale si abbasserà la cifra seguente del dividendo totale. Si avrà con tal mezzo un nuovo dividendo parziale, sul quale si opererà come sul precedente; si porrà il nuovo quoziente parziale a destra di quello già trovato, e si continuerà ad operare nella stessa maniera, finchè il dividendo totale sia esaurito: allora la divisione sarà finita.*

47. Negli esempi precedenti, abbiamo portato sotto ciascun dividendo parziale il prodotto del divisore per il quoziente parziale corrispondente; ma si può abbreviare quest' operazione non scrivendo un tal prodotto, e facendo la sottrazione a misura che si è moltiplicato ciascuna cifra del divisore. Un esempio basterà per rischiarir questo.

Supponiamo che si voglia dividere 1755 per 39

$$\begin{array}{r|l} 1755 & 39 \\ \hline 195 & 45 \\ 000 & \\ \hline \end{array}$$

dopo avere scritto questi numeri secondo la regola del numero precedente, si vede da prima che bisogna effettuare la divisione sulle tre prime cifre del dividendo, perchè le due prime prese isolatamente non contengono il divisore; dividendo dunque 175 per 39, il quoziente è 4 che si scriverà nel posto delle diecine. Moltiplicando 39 per 4 si dirà: 4 volte 9 fanno 36; ma siccome non si può togliere 36 da 5, si supporrà che vi sia in quella colonna 45, prendendo in prestito quattro unità dalla colonna seguente, e togliendo 36 da 45 resterà 9; si scriverà 9, e si riterrà 4 per aggiungerlo al numero da sottrarsi dalla colonna seguente, secondo l'osservazione del Num. 18. Passando a questa colonna, si dirà: 4 volte 3 fanno 12, e 4 ritenuti fanno 16, tolto 16 da 17 resta 1; si porrà 1 nel resultato, e si avrà 19 per resto totale. Questa maniera di far la divisione è ugualmente semplice, e più breve di quella del Num.

44; è dunque conveniente l'impiegarla nelle operazioni che faremo in seguito.

48. Se il dividendo e il divisore fossero terminati, ciascuno verso la destra, da un certo numero di zeri, si potrebbe toglierne ad ambedue quanti ve ne sono in quello che ne ha meno, e fare dopo la divisione secondo il solito: il quoziente non sarebbe cangiato. Di fatti, il quoziente di 80 per 40 è lo stesso che quello di 8 per 4; poichè 8 diecine devono contenerne 4 tante volte, quante 8 unità contengono 4 unità; parimente il quoziente di 84000 per 400 sarà uguale a quello di 840 per 4, poichè 840 centinaja ne contengono 4 tante volte quante 840 unità contengono 4 unità. Questo ragionamento può estendersi a tutti i casi simili.

Per dividere per 10 un numero terminato sulla destra da più zeri, basterà sopprimerne un solo; per dividerlo per 100, basterà sopprimerne 2; per dividerlo per 20, bisognerà sopprimere un zero, e dividere il resto per 2, e così in seguito. Ciò si deduce naturalmente dal nostro sistema di numerazione, e si accorda con ciò che si è veduto sopra, Num. 31 e 32.

Uniremo qui alcuni esempj di divisione che potranno servir d'esercizio.

144	3	16512	344	3049164	6274
24	48	2752	48	53956	486
00		0000		37644	
				00000	

DELLE FRAZIONI.

49. Gli esempj su' quali abbiamo operato finora; sono stati scelti in maniera che il dividendo contenesse il divisore un certo numero di volte esattamente e senza resto; ma quando si applicano le regole precedenti, accade di rado che i numeri pro-

posti soddisfacciano a tal condizione. Se si volesse per esempio dividere 16 in tre parti uguali, e si dimandasse il valore di ciascuna di queste parti, è chiaro che per giungervi, bisognerebbe dividere 16 per 3; ora, 16 non essendo un multiplo di 3, l'operazione non potrebbe effettuarsi esattamente; ma poichè 16 è maggiore di 15, e minore di 18, numeri che sono i multipli di 3 per 5 e per 6, se ne concluderà che 16 contiene 3 più di 5 volte e meno di 6 volte. Il numero 16 essendo equivalente a 15 più 1, ne resulta pure che sarà diviso in tre parti uguali se si dividono nella medesima maniera gli elementi 15 e 1 di cui è composto; il primo dà 5 e resta a dividere il secondo 1 per 3.

Si vede di qui che per avere in tal caso il valore totale del quoziente, bisognerebbe concepire l'unità divisa in tre parti uguali, e aggiungere una di queste parti alle 5 unità già trovate.

Se si dovesse dividere 239 per 8, secondo la regola del Num. 46,

$$\begin{array}{r|l} 239 & \underline{8} \\ 79 & 29 \\ 7 & \end{array}$$

come mostra l'operazione qui sopra, si avrebbe per ultimo dividendo parziale il numero 79 che non contiene 8 esattamente, ma che cadendo fra' numeri 72 e 80 di cui l'uno contiene 9 volte, e l'altro 10 volte il divisore 8, fa vedere che l'ultima parte del quoziente è maggiore di 9 e minore di 10, e che per conseguenza il quoziente totale cade fra 29 e 30. Moltiplicando dunque la cifra 9 del quoziente per il divisore 8, e togliendo il prodotto dall'ultimo dividendo parziale 79, il resto 7 sarà evidentemente l'eccesso del dividendo 239 sul prodotto de' fattori 29 e 8. Di fatti, avendo colle diverse parti dell'operazione, tolto successivamente dal dividendo 239 il prodotto di ciascuna cifra del quoziente per il divisore, si è evidentemente sottratto il prodotto del quoziente intero per il divisore, o 232; e 29 non essendo dunque se non l'ottava parte di quest'ultimo numero, bisogna per completare il quoziente prendere l'ottava parte del resto 7. Quindi ne segue, che per avere il valor totale del quoziente, si deve concepire l'unità del dividendo divisa in 8 parti uguali, e aggiungere 7 di queste parti alle 29 unità già trovate.

50. Di qui si vede che qualora il dividendo non conterrà esattamente il divisore, l'operazione condurrà a un resto, che sarà l'eccesso del dividendo sul prodotto del divisore per l'unità del quoziente; bisognerà dunque allora per completare il quoziente, concepire l'unità del dividendo divisa in tante parti uguali, quante unità sono nel divisore, e prendere tante di queste parti quante unità vi sono nel resto per unirle alla porzione del quoziente che si è già trovata.

Non è difficile il vedere che ciascuna di queste suddivisioni dell'unità sarà necessariamente minore dell'unità stessa; perciò sono state comprese sotto la denominazione generale di *frazioni*, qualunque sia d'altronde il numero delle parti nelle quali si è suddivisa l'unità.

51. È bene rammentarsi che si riprodurrà un dividendo qualunque aggiungendo al prodotto del divisore per le unità del quoziente il resto che è, secondo ciò che precede, l'eccesso del dividendo su quest'ultimo prodotto.

52. Si vede da ciò che precede, che nella valutazione di queste quantità minori dell'unità, vi sono entrati due elementi; cioè il numero di parti nelle quali si è divisa l'unità, e il numero di queste parti contenute nella frazione che si vuol valutare: perciò, si esprimono le quantità minori dell'unità con due numeri che si scrivono uno sotto l'altro separandoli con una linea. Il numero inferiore che si chiama *denominatore* fa conoscere la specie delle parti che

componpongono la frazione, indicando quante ne bisognano per comporre l'unità principale: il numero superiore che si chiama *numeratore* indica di quante di queste parti è composta la frazione. Così nel primo degli esempj precedenti, la frazione che bisognava scrivere ha per espressione $\frac{1}{3}$, e nel secondo $\frac{7}{8}$. Il numeratore e il denominatore si chiamano insieme *i due termini della frazione*.

Per enunciare queste quantità, è stato convenuto di dare dei nomi a queste specie di divisioni: quando si divide una quantità per 2, 3 o 4 ec. si dice che se ne prende la *metà* o il *terzo*, o il *quarto*, ec.; e le frazioni i di cui denominatori sono 2, 3 o 4 ec. sono *mezzi*, *terzi*, *quarti* ec., tali sono le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ec.

53. Segue da queste definizioni, che *si aumenta una frazione aumentando il suo numeratore, se il suo denominatore resta lo stesso.* Di fatti, poichè non si cangia il denominatore, si concepisce sempre l'unità principale divisa in tante parti in quante lo era innanzi, e siccome si prende un maggior numero di queste parti per formare la nuova frazione, la loro collezione deve pur formare una quantità maggiore nel secondo caso che nel primo. La frazione $\frac{8}{9}$ per esempio è maggiore di $\frac{7}{9}$, la frazione $\frac{13}{30}$ è maggiore d' $\frac{11}{30}$.

Si può dedurre di qui che moltiplicando il numeratore d'una frazione per 2, 3, ec. si rende una tal frazione 2, 3, ec. volte maggiore; poichè non si fa, con tal mezzo, se non che ripeterla un ugual numero di volte. Così $\frac{3}{6}$ è triplo d' $\frac{1}{6}$, e $\frac{10}{21}$ è il doppio di $\frac{5}{21}$.

Reciprocamente *si diminuisce una frazione aumentando il suo denominatore, se il suo numeratore resta lo stesso.* Di fatti, poichè si aumenta il denominatore si concepisce l'unità principale divisa in un numero di parti maggiore di prima; le nuove parti sono dunque minori delle prime; e siccome in ambedue i casi, se ne prende un numero uguale per formare la frazione, ne segue che essa deve esser minore nel secondo caso nel primo. La frazione $\frac{4}{13}$ per esempio è minore di $\frac{4}{9}$, e $\frac{2}{6}$ minore di $\frac{2}{3}$.

Quindi ne segue che moltiplicando il denominatore d'una frazione per 2 o per 3 ec. essa diviene 2 o 3 ec. volte minore. Di fatti, si concepisce allora l'unità principale divisa in 2, 3 ec. volte più parti di prima; queste nuove parti sono dunque 2, 3 ec. volte minori delle prime; e siccome in ambedue i casi se ne prende un numero uguale per formar la frazione, è chiaro che essa deve essere 2, 3 ec. volte minore nel secondo caso che nel primo. Così $\frac{3}{15}$ è il terzo di $\frac{3}{5}$, e $\frac{10}{42}$ è la metà di $\frac{10}{22}$.

È da osservarsi, che nel Num. precedente abbiamo trovato che $\frac{8}{5}$ era pure il terzo di $\frac{3}{5}$, e che $\frac{5}{21}$ erano pure la metà di $\frac{10}{21}$; si deve dunque concluderne che la frazione $\frac{1}{5}$ è uguale a $\frac{3}{15}$, e $\frac{5}{21}$ uguale a $\frac{10}{42}$. Torneremo fra poco su quest'osservazione, e vedremo da che dipende quest'uguaglianza.

Si proverà con considerazioni simili, che si *aumenta una frazione diminuendo il suo denominatore, se il suo numeratore resta lo stesso*; e se ne dedurrà che dividendo il denominatore d'una frazione per 2, 3 ec, si rende tal frazione 2, 3 ec. volte maggiore. La frazione $\frac{3}{5}$ è tripla di $\frac{3}{15}$, e la frazione $\frac{10}{21}$ è doppia di $\frac{10}{42}$.

È a proposito di rimarcare che sopprimere il denominatore d'una frazione è lo stesso che moltiplicarla per un tal numero. Sopprimere per esempio il denominatore 3 nella frazione $\frac{2}{3}$ è lo stesso che cangiarla in 2 interi, o moltiplicarla per 3.

55. Si possono recapitolare come segue le proposizioni precedenti;

Moltiplicando Dividendo	il numeratore	si moltiplca si divide	la frazione
Moltiplicando Dividendo	il denominatore	si divide si moltiplica	la frazione

56. Quindi si vede che le moltiplicazioni, o le di-

visioni fatte sul denominatore, producono le loro inverse sulla frazione. In conseguenza, *se si moltiplicano a un tempo stesso il numeratore e il denominatore d' una frazione per un medesimo numero, la frazione non cangerà valore*; poichè se da un lato, moltiplicando il numeratore, si rende la frazione 2, 3 ec. volte maggiore di prima; dall' altro, colla seconda operazione, se ne prende la metà, il terzo ec., in una parola si divide per lo stesso numero che l'avea moltiplicata da prima. Così $\frac{1}{5}$ è uguale a $\frac{3}{15}$, e $\frac{5}{21}$ sono uguali a $\frac{10}{42}$, come abbiamo veduto di sopra con un altro mezzo (54).

57. Si può dimostrare nella stessa maniera l' inversa della proposizione precedente, cioè che *la divisione simultanea del numeratore e del denominatore per un medesimo numero, non cangia il valore della frazione;* poichè se da un lato, dividendo il numeratore, si rende la frazione 2, 3 ec. volte minore di prima, dall' altro colla seconda operazione, se ne prende il doppio, il triplo ec., in una parola si moltiplica per lo stesso numero che l' avea da prima divisa. Così la frazione $\frac{2}{4}$ è uguale a $\frac{1}{2}$, e $\frac{3}{9}$ è uguale a $\frac{1}{3}$.

57. La proposizione provata di sopra è spesso utile per ridurre una frazione a una forma più semplice di quella sotto cui si era presentata da principio. Supponiamo per esempio che si voglia semplicizzare la frazione $\frac{32}{96}$, è facile vedere che il numeratore e il denominatore sono esattamente divisibili per 2, e che così la frazione proposta $\frac{32}{96}$ è uguale a $\frac{16}{48}$. Ma questa può essere ancora ridotta ad un' espressione più semplice; poichè i suoi due termini sono divisibili ciascuno per 16, e dopo questa divisione, essa si riduce a $\frac{1}{3}$: la frazione proposta $\frac{32}{96}$ è dunque uguale a $\frac{1}{3}$.

Parimente se si avesse la frazione $\frac{24}{72}$ si potrebbe vedere subito che il numeratore e il denominatore sono ugualmente divisibili per 2, il che riduce la frazione proposta a quest'altra più semplice $\frac{12}{42}$; ma 12 e 42 sono ancora divisibili per 2, e effettuando questa divisione la frazione $\frac{12}{42}$ diventa $\frac{6}{21}$; e finalmente siccome 6 e 21 sono ambedue divisibili per 3, se ne concluderà che la frazione $\frac{24}{84}$ è uguale a $\frac{2}{7}$.

59. Qualunque fosse la frazione proposta, si potrebbe spesso giungere a ridurla a un'espressione più semplice, tentando successivamente di dividerla per 2, per 3, per 5, e ciò sarebbe tanto più facile in quanto che si può vedere alla prima occhiata se un numero è divisibile per 2, e che è ugualmente facile l'assicurarsi se è, o no divisibile per 3, 5 ec. come si vedrà in seguito. Ma questa via non è quella che può condurre più speditamente al termine: perchè nell'ultimo esempio dove si trattava di semplicizzare la frazione $\frac{24}{84}$, abbiamo diviso il numeratore e il denominatore due volte di seguito per 2, poi una volta per 3, il che è evidentemente lo stesso che dividerli successivamente per 4 e per 3, o dividerli una sola volta per 12; ed è chiaro che saremmo arrivati assai più brevemente al fine, se ci fossimo accorti fino da principio che 24, e 84 erano ambedue divisibili per 12, poichè effettuando tal divisione, avremmo subito veduto che la frazione proposta era uguale a $\frac{2}{7}$.

Questa frazione $\frac{2}{7}$ non è più suscettibile d'esser ridotta ad una forma più semplice: giacchè il suo numeratore 2, e il suo denominatore 7 non hanno *divisor comune*; la frazione $\frac{2}{7}$ è dunque *irreducibile*. È lo stesso delle frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{13}{21}$ ec.

60. Ne' due esempj precedenti, niente era più facile che il ridurre le frazioni $\frac{32}{96}$, e $\frac{24}{84}$ alla loro più *semplice espressione*; ma se il numeratore e il denominatore della frazione che si vuol ridurre fossero numeri grandi, si vede che tenendo la stessa via, non si giungerebbe che assai difficilmente al resultato, e spesso ancora potrebbe accadere che si credesse irreducibile una frazione che non lo fosse realmente. È dunque importante di avere un metodo si-

curo per ridurre, quando è possibile, le frazioni alla loro più semplice espressione; ed è chiaro che la questione si riduce in ogni caso a trovare il maggior numero che possa dividere a un tempo stesso il numeratore e il denominatore della frazione proposta. Così, per averne la soluzione in una maniera generale, bisogna risolvere questo problema: *Essendo dati due numeri, trovare il loro massimo comun divisore.*

61. Si arriva a conoscere il comun divisore di due numeri andando a tastoni in un modo facile a trovarsi, e che ha il vantaggio di fare avvicinare al fine a ciascun tentativo che si fa. Per spiegarlo chiaramente, prendiamo un esempio.

Siano i due numeri 637 e 143. Il massimo comun divisore di tali numeri non può evidentemente eccedere il minore de' due; convien dunque tentare se il numero 143 che è divisore di se stesso, e dà per quoziente 1, può dividere pure il numero 637, nel qual caso sarebbe egli stesso il massimo comun divisore cercato.

Ma nell'esempio proposto ciò non accade, e si trova un quoziente 4, e un resto uguale a 65.

Ora è visibile che ogni divisore comune ai due numeri 637 e 143 deve dividere pure il resto 65 della loro divisione; perchè il maggiore 637 è uguale al minore 143 moltiplicato per il quoziente 4, più il resto 65 (50); dividendo 637 per il divisore comune cercato, si avrà un quoziente esatto: bisogna dunque che se ne abbia pure uno simile, dividendo per lo stesso divisore la riunione delle parti di cui è composto 637; ora, il prodotto di 143 per 4 si divide necessariamente per il divisor comune che è fattore di 143; bisogna dunque che l'altra parte 65 sia divisibil pure per il medesimo divisore.

Collo stesso ragionamento, si proverà in generale *che ogni divisore comune a due numeri deve dividere il resto della divisione del maggior dei due per il minore.*

Con questo principio, si vede che il comun divisore dei numeri 637 e 143 deve esserlo pure dei numeri 143 e 65; ma l'ultimo non potendo essere diviso per un numero maggiore di se stesso, bisogna dunque provare prima esso. Dividendo 143 per 65, si trova un quoziente 2 e un resto 13; 65 non è dunque il divisore cercato. Con un ragionamento simile a quello che si è fatto per i numeri 637, 143, e per il resto 65 della loro divisione, si vedrà che ogni divisore comune di 143 e di 65 deve esserlo pure dei numeri 65 e 13; ora, il massimo comun divisore di questi ultimi non può superare 13, bisogna dunque tentare se 13 divide 65, il che accade, poichè si ha per quoziente 5; dunque 13 è il massimo comun divisore cercato.

Si può ancora accertarsi che gode di tal proprietà, riprendendo le operazioni in un ordine inverso, come segue: 13 dividendo 65 e 13, dividerà 143 composto di 2 volte 65 più 13; dividendo 65 e 143, dividerà 637 composto di 4 volte 143 più 65; dunque 13 sarà divisore comune de'due numeri proposti. È d'altronde evidente dalla ricerca stessa, che non può esservene uno maggiore di 13, giacchè dovrebbe necessariamente dividere 13.

È comodo in pratica di porre le divisioni successive in seguito l'una dell'altra, e di disporre l'operazione come si vede qui sotto:

$$\begin{array}{r|r|r|r}
637 & 143 & 65 & 13 \\
\hline
 & 4 & 2 & 5 \\
65 & 13 & 0 &
\end{array}$$

Separando i quozienti 4, 2, 5 da' resti scritti al di sotto.

I ragionamenti che ci hanno guidato nell'esempio precedente potendo applicarsi a numeri qualunque, ne dedurremo questa regola generale: *Si troverà il massimo comun divisore di due numeri dividendo il maggiore di essi per il minore, dividendo quindi il* *minore per il resto della prima divisione, poi dividendo questo resto per quello della seconda divisione, poi dividendo questo secondo resto per il terzo resto ossia quello della terza divisione, e continuando così a dividere il resto di ciascuna operazione per quello della seguente, finchè si giunga a un quoziente esatto: l'ultimo divisore sarà il massimo comun divisore cercato.*

62. Ecco due esempj di quest'operazione

9024	3760	1504	752
1504	2	2	2
	752	000	

752 è dunque il massimo comun divisore di 9024 e 3760.

937	17	44	3	2	1
467	19	1	14	1	2
44	3	14	1	0	
		2			

Si vede da quest' ultima operazione che il massimo comun divisore di 937 e 47 è solo 1, cioè che propriamente parlando questi due numeri non hanno divisore comune, poichè tutti i numeri interi, qualunque essi siano, sono tutti divisibili per 1.

Non è difficile di convincersi che la regola del num. precedente deve necessariamente condurre a questo resultato tutte le volte che i numeri proposti non avranno divisore comune; poichè i resti essendo sempre minori del divisore, divengono di mano in mano più piccoli a ciascuna operazione; ed è chiaro che le divisioni si continueranno finchè si avrà un divisore maggiore dell' unità.

63. Col mezzo di questi calcoli, le frazione $\frac{148}{657}$ $\frac{8760}{9024}$ si riducono subito alla lor più semplice espressione, dividendo i due termini della prima per il loro divisore comune 18, e quelli della seconda per il loro divisore comune 752; così si ottiene $\frac{11}{49}$, $\frac{5}{12}$. In

quanto alla frazione $\frac{47}{937}$, essa è assolutamente irreducibile, poichè i suoi due termini non hanno altro divisore comune che l'unità.

64. Non è sempre necessario tentare la ricerca del massimo comun divisore de' due termini della frazione proposta; vi sono, come abbiamo fatto osservare di sopra, delle riduzioni che si offrono da se medesime.

Ogni numero terminato da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8 è necessariamente divisibile per 2. Ciò segue evidentemente dall'essere tali numeri e i seguenti 10, 12, 14, 16, 18 divisibili per 2. Di fatti, qualunque sia il numero proposto, quando si sarà giunti alla divisione delle sue diecine per 2, il resto di tal divisione, se ve n'è uno, non potrà mai esser maggiore d' una diecina; talmente che se l' una cifra è 0, 2, 4, 6, 8, l'operazione finirà sempre col dividere per 2 uno dei numeri 10, 12, 14, 16, 18.

I numeri che godono della proprietà d' esser così divisibili per 2, si chiamano *numeri pari*, perchè possono esser divisi in due parti uguali. Tutti gli altri numeri si chiamano *dispari*.

Ogni numero terminato sulla destra da un 0 o da un 5, è divisibile per 5. Difatti, qualunque sia il numero proposto, quando si sarà giunti alla divisione delle diecine per 5, il resto, se ve n'è uno, non potrà mai esser maggiore di 1, 2, 3, o 4 diecine, talmente che se l'ultima cifra è un 0, o un 5, l'operazione finirà sempre col dividere uno de' numeri 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, tutti divisibili per 5.

Ogni numero, che come 10, 100, 1000, è espresso dall'unità seguita da un certo numero di zeri, può essere decomposto in 9 più 1, 99 più 1, 999 più 1, e così in seguito; i numeri 9, 99, 999, ec. essendo divisibili per 3, e per 9, ne segue che se si divide per 3 o per 9 ogni numero, che come 10, 100, 1000, ec. è composto dell' unità seguita sulla destra da un certo numero di zeri, il resto della divisione sarà 1.

Ora ogni numero che, come 20, 300, 5000, è espresso da una sola cifra significativa seguita sulla destra da un certo numero di zeri, può esser decomposto in più numeri espressi dall'unità seguita sulla destra da un certo numero di zeri: 20 è uguale a 10 più 10, 300 a 100 più 100 più 100, 5000 a 1000 più 1000 più 1000 più 1000 più 1000, e così degli altri. Quindi ne segue che se si divide 20, o 10 più 10 per 3, o per 9, il resto sarà 1 più 1, o 2

Se si divide 300, o 100 più 100 più 100 per 3, o per 9, il resto sarà 1 più 1 più 1, o 3.

In generale, se si divide per 3, o per 9 un numero espresso da una sola cifra significativa seguita sulla destra da un certo numero di zeri, il resto di questa divisione sarà uguale a tante volte 1 quante unità sono nella cifra significativa, cioè sarà uguale alla cifra significativa medesima. Ora ogni numero può esser decomposto in unità, diecine, centinaja, cioè in numeri espressi da una sola cifra significativa; e se si divide ciascuno di questi numeri parziali per 3 o per 9, ciascuna divisione darà per resto una delle cifre significative del numero proposto; per esempio, la divisione delle centinaja darà per resto la cifra delle centinaja, la divisione delle diecine darà per resto la cifra delle diecine, e così delle altre; se dunque la somma di tutti questi resti fosse divisibile per 3, o per 9, è chiaro che la divisione del numero proposto per 3 o per 9 potrebbe farsi esattamente; donde ne segue che se la somma delle cifre d'un numero è divisibile per 3, o per 9, un tal numero è divisibile per 3 o per 9.

Così i numeri 423, 4251, 15342 sono divisibili per 3, perchè la somma delle cifre significative è 9 nel primo, 12 nel secondo e 15 nel terzo.

Parimente 621, 8280, 93428 sono divisibili per 9, perchè la somma delle cifre significative è 9 nel primo, 18 nel secondo, e 27 nel terzo.

Si osservi che ogni numero divisibile per 9 è per questo appunto divisibile per 3, sebbene ogni numero divisibile per 3 non lo sia per 9.

Potremmo fare ancora su diversi altri numeri delle osservazioni analoghe a quelle ora esposte sopra 2, 3, 5 e 9: ma la ricerca di tali proprietà ci allontanerebbe troppo dal nostro soggetto, e perciò non ce n'occuperemo.

I numeri come 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ec. che non possono esser divisi se non che per l'unità e per se stessi, si chiamano *numeri primi*. Due numeri, come 12 e 25, che senza esser primi, non hanno alcun divisore comune, si dicono *primi fra loro*. Una frazione i di cui due termini sono primi fra loro, è necessariamente irreducibile.

65. Dopo questa digressione, riprendiamo l'esame della tavola del Num. 55,

Moltiplicando Dividendo	il numeratore	si moltiplica si divide	la frazione
Moltiplicando Dividendo	il denominatore	si divide si moltiplica	la frazione

e cerchiamo le conseguenze che debbono resultarne.

Si vede subito, alla sola ispezione di questa tavola, che si può moltiplicare una frazione in due maniere, cioè, moltiplicando il suo numeratore, o dividendo il suo denominatore; e che si può pure dividerla in due maniere, cioè, dividendo il suo numeratore, o moltiplicando il suo denominatore; donde segue che la moltiplicazione sola, secondo che si effettua sul numeratore o sul denominatore, basta per operare la moltiplicazione e la divisione delle frazioni per dei numeri interi. Così $\frac{3}{15}$ moltiplicandi per 8 unità fanno $\frac{24}{15}$; $\frac{4}{9}$ divisi per 3 fanno $\frac{4}{27}$, ec.

66. La nozione che abbiamo data delle frazioni ci mette in stato di generalizzare l'idea che abbiamo attaccato alla moltiplicazione, Num. 21. Il moltiplicatore essendo allora un numero intero indicava quante volte si doveva ripetere il moltiplicando; ma

la parola *moltiplicare* estesa alle espressioni frazionarie non porta sempre seco l'idea di accrescimento come per i numeri interi. Per comprendere in una sola definizione tutti i casi, si può dire che *moltiplicare un numero per un altro vuol dire comporre col primo un numero nella stessa maniera che il secondo è composto coll' unità*. Di fatti quando si tratta di moltiplicare per 2, per 3 ec. il prodotto è composto di 2 volte, 3 volte ec. il moltiplicando, come il moltiticatore è composto di 2, 3 ec., unità, e moltiplicare un numero qualunque per la frazione $\frac{1}{5}$ per esempio, vuol dire prenderne la quinta parte. Perchè il moltiplicatore $\frac{1}{5}$ essendo la quinta parte dell' unità, indica che il prodotto deve essere la quinta parte del moltiplicando.

Parimente, moltiplicare per $\frac{4}{5}$ vuol dire prendere sul motiplicando una parte che ne sia i quattro quinti, o eguale a quattro volte un quinto di tal moltiplicando. Diremo dunque che *la moltiplicazione per una frazione, qualunque sia il moltiplicando, ha per oggetto di prendere su tal moltiplicando una parte indicata dalla frazione moltiplicatore*.

È chiaro che quest' operazione è composta di due altre, cioè: d' una divisione e d' una moltiplicazione, nelle quali il divisore e il moltiplicatore sono numeri interi.

Di fatti per prendere, per esempio, $\frac{4}{5}$ d' un numero qualunque, bisogna prima trovarne la quinta parte dividendolo per 5, e ripetere 4 volte questa quinta parte moltiplicandola per 4.

In generale, si vede che *bisognerà sempre dividere il moltiplicando per il denominatore della frazione moltiplicatore, e moltiplicare il resultato per il numeratore di tal frazione*.

Il moltiplicatore essendo minor dell' unità, il prodotto sarà minore del moltiplicando, al quale sarebbe appunto uguale se il moltiplicatore fosse 1.

67. Se il moltiplicando è un numero intero divisibile per 5, per esempio 35, la quinta parte sarà 7; moltiplicando questo risultato per 4, si avrà 28 per i $\frac{4}{5}$ di 35, o per il prodotto di 35 per $\frac{4}{5}$. Se il moltiplicando, sempre intero, non è divisibile esattamente per 5, sia per esempio 32, la divisione per 5 darà per quoziente 6 $\frac{2}{5}$; ripetendo questo quoziente 4 volte, verrà 24 $\frac{8}{5}$.

Questo risultato presenta una frazione, nella quale il numeratore supera il denominatore, ma che è facile a interpretarsi. Di fatti, l'espressione $\frac{8}{5}$ indicando 8 parti di cui 5 riunite compongono l'unità, ne segue che $\frac{8}{5}$ equivale all'unità più 3 quinti dell'unità, o 1 $\frac{3}{5}$: aggiungendo quest'ultima parte alle 24 unità, si avrà 25 $\frac{3}{5}$ per il valore de' $\frac{4}{5}$ di 32.

68. L'esempio precedente ci ha fatto vedere che la frazione $\frac{8}{5}$ rinchiude l'unità, o *un intero*, e $\frac{3}{5}$, e il ragionamento che ci ha dato questa conclusione mostra del pari che ogni espressione frazionaria, il di cui numeratore supera il denominatore, contiene delle unità, o degli intieri, e che *si estraggono questi intieri dividendo il numeratore per il denominatore; il quoziente dà il numero degli intieri contenuti nella frazione*; *e il resto messo in frazione è quello che deve accompagnare il numero degli intieri*.

Di fatti, l'espressio $\frac{307}{53}$, per esempio, indicando 307 parti di cui 53 compongono l'unità, v'è nella quantità rappresentata da questa frazione tante unità quante volte 307 contiene 53; facendo la divisione, si ottiene 5 per quoziente e 42 per resto; questi 42 sono dei cinquantatreesimi d'unità; onde, in vece di $\frac{307}{53}$ si può scrivere 5 $\frac{42}{53}$.

69. L'espressione 5 $\frac{42}{53}$, nella quale gli intieri sono separati, essendo composta di due parti differenti, è spesso utile di tornare all'espressione primitiva $\frac{307}{53}$, ciò si chiama *ridurre un intiero in frazione*.

Per giungervi, *bisogna moltiplicare l'intiero per il* *denominatore della frazione che l'accompagna, aggiungere il suo numeratore al resultato, e dare alla somma il denominatore della stessa frazione.*

Di fatti, bisogna prima convertire i cinque intieri in cinquantatreesimi, il che si effettuerà moltiplicando 53 per 5, giacchè ciascuna unità deve contenere 53 parti; il resultato sarà $\frac{265}{53}$; riunendo questa parte colla seconda $\frac{43}{53}$, verrà $\frac{308}{53}$.

70. Passiamo adesso alla moltiplicazione d'una frazione.

Supponiamo che si debba moltiplicare, per esempio, $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$; secondo il n. 66, l'operazione si riduce a dividere $\frac{2}{3}$ per 5, e a moltiplicare quindi il resultato per 4; e dalla tavola del n. 65, la prima operazione si effettuerà moltiplicando il denominatore 3 del moltiplicando per 5, e la seconda moltiplicando il numeratore 2 del moltiplicando per 4, il che darà per il prodotto cercato $\frac{8}{15}$.

Il ragionamento che ci ha condotti a questo resultato potendo applicarsi ugualmente ad ogni altro esempio, siamo in diritto di concludere che *per moltiplicare una frazione per un'altra, bisogna moltiplicare il numeratore della prima per quello della seconda, e il denominatore della prima per quello della seconda.*

71. Può accadere che si debbano moltiplicare gli uni per gli altri degli intieri uniti a delle frazioni; come per esempio $3\frac{5}{7}$, $4\frac{8}{9}$. Il mezzo più semplice per ottenere il prodotto è di ridurre gli intieri in frazioni, secondo il metodo del n. 69; i due fattori saranno allora espressi da $\frac{26}{7}$, $\frac{44}{9}$, il loro prodotto dà $\frac{1144}{63}$, o $18\frac{10}{63}$ estraendo gli intieri (n. 68)

72. Si dà talora al prodotto di più frazioni il nome *di frazione di frazione*; in tal senso si dice per esempio i $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$. Quest'espressione indica i $\frac{2}{3}$ della quantità rappresentata da $\frac{4}{5}$ dell'unità primitiva, e presa essa stessa per unità. Si riducono queste due frazioni ad una sola colla moltiplicazione (n. 70), e il resul-

tato $\frac{8}{15}$ esprime il valore della quantità cercata riferita all'unità primitiva, cioè, i $\frac{2}{3}$ della quantità rappresentata da' $\frac{4}{5}$ dell'unità equivalgono agli $\frac{8}{15}$ della stessa unità. Se si volesse prendere i $\frac{7}{9}$ di questo resultato, ciò sarebbe lo stesso che prendere i $\frac{7}{9}$ de' $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$, e riducendo queste frazioni ad una sola, si avrebbe $\frac{56}{135}$ per il valore della quantità cercata riferita all' unità primitiva.

73. La parola *contenere* non conviene a tutto rigore ai diversi casi che presenta la divisione, più di quello che la parola *ripetere* convenga a quelli che presenta la moltiplicazione; poichè non si può dire che il dividendo contiene il divisore, quando è minore di questo. Tuttavia, si usa ancora tal espressione, ma solo per analogia e per estensione.

Per generalizzare la divisione, *bisogna riguardare il dividendo come composto col quoziente nella stessa maniera, che il divisore lo è coll'unità*, poichè il divisore e il quoziente sono i due fattori del dividendo (n. 36). Questa considerazione si presta a tutti i casi che può offrire la divisione. Di fatti, quando il divisore è 5, per esempio, il dividendo è uguale a 5 volte il quoziente, e questo è per conseguenza la quinta parte del primo. Se il divisore è una frazione, $\frac{1}{2}$ per esempio, il dividendo non deve essere che la metà del quoziente, ovvero questo dev'essere doppio di quello.

La definizione che abbiamo stabilito conduce facilmente alla maniera di operare, quando il divisore è una frazione. Prendiamo per esempio $\frac{4}{5}$. In tal caso il dividendo dev'essere solamente $\frac{4}{5}$ del quoziente; ma $\frac{1}{5}$ essendo il $\frac{1}{4}$ di $\frac{4}{5}$, avrebbe dunque $\frac{1}{5}$ del quoziente, prendendo il quarto del dividendo, o dividendo per 4. Conoscendo così il $\frac{1}{5}$ del quoziente, non resterebbe che prendere questo resultato 5 volte, ovvero moltiplicarlo per 5, per ottenere il quoziente. In quest'operazione, si divide il dividendo per 4, e si moltiplica il resultato per 5; è dunque (n. 66) come se si fossero presi i $\frac{5}{4}$ del dividendo, o come se si fosse moltiplicato il dividendo per $\frac{5}{4}$, che non è altro se non se la frazione divisore $\frac{4}{5}$ rovesciata.

Quest'esempio mostra dunque che in generale *per dividere un numero qualunque per una frazione, bisogna moltiplicarlo per questa frazione rovesciata.*

Sia per esempio 9 da dividere per $\frac{3}{4}$; ciò si effettuerà moltiplicando 9 per $\frac{4}{3}$, e si troverà $\frac{36}{3}$ o 12. Parimente 13 da dividersi per $\frac{5}{7}$ sarà lo stesso che 13 moltiplicando per $\frac{7}{5}$, o $\frac{91}{5}$. Il quoziente cercato sarà $18\,\frac{1}{5}$ estraendo gl'interi (n. 68).

È chiaro che tutte le volte che il numeratore sarà minore del denominatore, il quoziente supererà il dividendo, poichè il divisore essendo allora minore dell'unità deve essere contenuto nel dividendo un maggior numero di volte dell'unità, la quale presa per divisore dà in ogni caso un quoziente espresso dal dividendo stesso.

74. Quando il dividendo è una frazione, l'operazione si riduce *a moltiplicare* (n. 70) *la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata.*

Sia $\frac{7}{8}$ da dividere per $\frac{2}{3}$; bisognerà moltiplicare secondo il n. precedente $\frac{7}{8}$ per $\frac{3}{2}$, il che darà $\frac{21}{16}$.

È evidente che l'operazione medesima può ancora essere enunciata così: *Per dividere una frazione per un' altra bisogna moltiplicare il numeratore della prima per il denominatore della seconda, e il denominatore della prima per il numeratore della seconda.*

Se vi fossero degli interi uniti alle frazioni proposte, si ridurrebbero in frazioni, e si applicherebbe a' resultati la suddetta regola.

75. È importante l' osservare, che s' indica col mezzo d' un' espressione frazionaria una divisione qualunque, sia che essa possa operarsi in numeri intieri, o altrimenti; $\frac{36}{3}$ per esempio esprime evidentemente il quoziente di 36 per 3 del pari che 12; perchè $\frac{1}{3}$ essendo contenuto 3 volte nell' unità, $\frac{36}{3}$ sa-

ranno contenuti tre volte in 36 intieri, come deve esserlo il quoziente di 36 per 3.

76. Potrebbe sembrare strano l'aver mostrata la moltiplicazione, e la divisione delle frazioni, prima d'aver parlato della maniera di aggiungerle, o sottrarle; ma abbiamo tenuto questa strada, perchè la moltiplicazione e la divisione delle frazioni dipendono immediatamente da' principj esposti innanzi, laddove l'addizione e la sottrazione delle frazioni richiedono una preparazione preliminare. Non dee far meraviglia d'altronde che sia più facile moltiplicare e dividere le frazioni di quello che aggiungerle, e sottrarle, poichè le frazioni derivano dalla divisione, la quale ha per se stessa molta analogia colla moltiplicazione. Si avrà spesso occasione di convincersi di questa verità, che le operazioni da farsi sopra delle quantità sono più facili, quanto più si approsimano all'origine di tali quantità. Ci occuperemo adesso dell'addizione e della sottrazione delle frazioni.

77. Quando le frazioni sulle quali si deve operare hanno lo stesso denominatore, è molto facile aggiungerle, e sottrarle. Di fatti, siccome rappresentano allora quantità della stessa specie, la loro somma o la loro differenza sarà pure composta d'unità della stessa specie. Così $\frac{2}{5}$ più $\frac{1}{5}$ fanno $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{8}$ più $\frac{7}{8}$ fanno $\frac{12}{8}$; $\frac{8}{9}$ meno $\frac{3}{9}$ fanno $\frac{5}{9}$; e in generale, *per aggiungere o sottrarre frazioni che avranno lo stesso denominatore, bisogna formare una frazione il di cui numeratore sia uguale alla somma o alla differenza di quelli delle frazioni proposte, e che abbia per denominatore il denominatore comune. Questa frazione sarà la somma o la differenza cercata.*

78. Le regole precedenti non essendo applicabili se non quando le frazioni che vuole aggiungere o sottrarre hanno il medesimo denominatore, è chiaro che la questione sarebbe risoluta in una maniera generale, se si potesse *ridurre al medesimo denominatore* delle frazioni che abbiano denominatori diffe-

renti. Ora a ciò si giungerà facilmente, partendo da questo principio, *che una frazione non cangia valore quando si moltiplicano i suoi due termini per un medesimo numero* (n. 56); perchè se le frazioni proposte fossero per esempio $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$, moltiplicando i due termini della frazione $\frac{2}{3}$ per 5 denominatore dell'altra, si potrebbe convertirla in $\frac{10}{15}$, e moltiplicando i due termini della frazione $\frac{4}{5}$ per 3 denomiatore dell' altra, si cangerebbe parimente in $\frac{12}{15}$. Quindi si concluderà che in generale ***per ridurre allo stesso denominatore due frazioni di denominatori differenti, bisogna moltiplicare i due termini della prima per il denominatore della seconda, e i due termini della seconda per il denominatore della prima***; ed è visibile, di fatti, che operando così avranno ambedue per denominatore comune il prodotto dei due denominatori.

79. Se si avessero tre frazioni da ridurre allo stesso denominatore, come sarebbe per esempio $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ o $\frac{7}{9}$, è chiaro che vi si arriverebbe riducendo prima le frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{5}$ allo stesso denominatore col mezzo della regola precedente, il che le cangerebbe in $\frac{5}{10}$ e $\frac{6}{10}$, e per ridurre poi $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$ e $\frac{7}{9}$ allo stesso denominatore, si moltiplicherebbe i due termini delle due prime frazioni per 9, e i due termini della terza per 10, il che cangerebbe le frazioni proposte in $\frac{45}{90}$, $\frac{54}{90}$ e $\frac{70}{90}$. È facile vedere che queste due operazioni si riducono a moltiplicare i due termini di ciascuna delle frazioni proposte per il prodotto dei denominatori dell'altre due.

E generalizzando il ragionamento che ci ha condotto a questo resultato, se ne concluderà che *per ridurre allo stesso denominatore quante frazioni si vogliano bisogna moltiplicare i due termini di ciascuna di esse per il prodotto dei denominatori di tutte le altre*. È evidente in fatti che operando così avranno tutte per denominatore comune il prodotto di tutti i denominatori.

Siano per esempio le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ e $\frac{8}{9}$; operando secondo la regola, si moltiplicheranno i due termini della prima frazione per 315 prodotto de' tre numeri 5, 7 e 9; quelli della seconda per 126 prodotto dei tre numeri 2, 7 e 9; quelli della terza per 90 prodotto de' tre numeri 2, 5 e 9; e finalmente quelli della quarta per 70 prodotto de' tre numeri 2, 5 e 7; le nuove frazioni saranno $\frac{315}{630}$, $\frac{252}{630}$, $\frac{270}{630}$, $\frac{560}{630}$.

Vi sono dei casi in cui si può trovare per più frazioni un denominatore comune più semplice di quello che avrebbe per la regola precedente. Siano per esempio le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$. Si vede subito che le frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{5}{6}$ possono essere ridotte al medesimo denominatore, moltiplicando solamente i due termini della prima per 2, numero di volte che il suo denominatore è contenuto in quello della seconda, si avrà così $\frac{4}{6}$ e $\frac{5}{6}$. Sarà lo stesso delle frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$, paragonate fra loro; talmente che le quattro frazioni proposte saranno cangiate in $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{8}$ e $\frac{7}{8}$. Ora si osserverà che i numeri 6 e 8 che formano i nuovi denominatori sono respettivamente uguali a 2 volte 3 e due volte 4; si può dunque negligere il fattore 2 che è loro comune, e moltiplicare solamente i due termini delle due prime frazioni per 4, e quelli delle seconde per 3, il che darà $\frac{16}{24}$, $\frac{20}{24}$ $\frac{18}{24}$, $\frac{21}{24}$. Sarà sempre facile di profittare di quest'osservazione quando si possederà un poco l'abitudine del calcolo.

80. *Quando si vorrà aggiungere o sottrarre frazioni di denominatori differenti, bisognerà cominciare dal ridurle allo stesso denominatore, col mezzo della regola precedente; e operare dopo come si è prescritto al n. 77.*

81. La maniera d'aggiungere delle frazioni con dei numeri interi, o di sottrarre una frazione da un intiero, si deduce immediatamente da ciò che precede; poichè un numero intiero può esser sempre convertito in un'espressione frazionaria di un dato denominatore, n. 69. Effettuato tal cangiamento, non resterà che operare sopra delle frazioni, il che si fa-

rà col mezzo delle regole precedenti. Se si volesse per esempio aggiungere insieme $\frac{2}{3}$ e 4 unità, si cangerebbe le 4 unità in $\frac{12}{3}$, talmentechè la somma cercata sarebbe $\frac{14}{3}$.

Per aggiungere 3 $\frac{2}{7}$ con 5 $\frac{4}{9}$, si ridurrebbero prima gl' intieri in frazioni, il che darebbe $\frac{23}{7}$, $\frac{49}{9}$; con questi resultati si troverebbe $\frac{550}{63}$; o 8 $\frac{46}{63}$, e si vede facilmente che lo stesso metodo si applica a tutti i casi.

Se si volesse togliere $\frac{4}{5}$ da tre unità, si comincerebbe dal convertire le unità in quinti, il che darebbe $\frac{15}{5}$, e operando secondo le regole precedenti si troverebbe $\frac{11}{5}$ o 2 $\frac{1}{5}$ per la differenza cercata.

82. La regola data precedentemente per la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore suppone che un prodotto resultante dalle moltiplicazioni successive di più numeri fra loro non cangi, qualunque sia l'ordine col quale si effettuano queste moltiplicazioni. Una tal verità, che si riguarda quasi sempre come evidente, ha però bisogno d'essere dimostrata.

Bisogna cominciar dal provare che moltiplicare un numero per il prodotto di due altri è lo stesso che moltiplicarlo prima per l'uno d'essi, e moltiplicar poi il prodotto risultante per l'altro. In vece di moltiplicare 3 per 35 prodotto dei numeri 5 e 7, si avrebbe potuto moltiplicare 3 per 5, e moltiplicare dopo il prodotto di questi numeri per 7. La proposizione sarebbe evidente se in vece del numero 3 si prendesse l'unità, perchè 1 moltiplicato per 5 dà 5, e il prodotto di 5 per 7 dà 35, del pari che il prodotto di 1 per 35: ma 3, o qualunque altro numero non essendo che l'unione di più unità, seguirà di questo numero ciò che segue di ciascuna delle unità di cui è composto, cioè i prodotti di 3 per 5 e per 7 ottenuti nell'una e nell'altra maniera essendo nei due casi il triplo de' resultati che dà l'unità moltiplicata per 5 e per 7, saranno necessariamente gli stessi. Si proverebbe nella medesima maniera che se si avesse a moltiplicare 3 per il prodotto de' numeri 5, 7 e 9, ciò sarebbe lo stesso che moltiplicare 3 per 5, poi il prodotto trovato per 7, e quest' ultimo prodotto per 9, e così in seguito, qualunque sia il numero de' fattori.

Per indicare in una maniera compendiosa più moltiplicazioni successive come quelle dei numeri 3, 5 e 7 fra loro, scriveremo 3 per 5 per 7.

Posto ciò, nel prodotto 3 per 5 si può cangiare l'ordine dei fattori 3 e 5 (n. 27), e si avrà tuttora il medesimo prodotto. Di qui ne segue immediatamente che 5 per 3 per 7 è lo stesso che 3 per 5 per 7.

Si può pure cangiare l'ordine dei fattori 3 e 7 nel prodotto 5 per 3 per 7, poichè questo prodotto equivale a 5 moltiplicato per il prodotto de' numeri 3, e 7, si avrà dunque ancora in 5 per 7 per 3 il medesimo resultato de' precedenti.

Riunendo le 3 combinazioni

3 per 5 per 7
5 per 3 per 7
5 per 7 per 3

si vede che il fattore 3 si è trovato successivamente il primo, il secondo e il terzo, e che potrebbe essere lo stesso d'uno qualunque degli altri due. Quest' esempio, nel quale non si è punto considerato il valor particolare di ciascun numero, deve provare che un prodotto di tre fattori non cangia, qualunque ordine si ponga nelle moltiplicazioni.

Se si avesse un prodotto di 4 fattori, come 3 per 5 per 7 per 6, si potrebbe secondo ciò che si è detto, disporre come si volesse i tre primi o i tre ultimi, e fare così passare per tutti i posti uno qualunque di tali fattori. Considerando dopo una delle disposizioni risultanti da queste premutazioni, per esempio questa, 5 per 7 per 3 per 9, vi si potrebbe intervertire l'ordine de' due ultimi fattori, il che darebbe 5 per 7 per 9 per 3, e porrebbe 3 nell' ultimo posto. Si estenderanno senza fatica questi ragionamenti a qualunque numero di fattori si vorrà.

83. Si è veduto ne' Num. 57, 79 il vantaggio che

si può ritrarre dalla decomposizione dei numeri in fattori, per semplicizzare i calcoli relativi alle frazioni; è dunque importante di sapere operare una tal decomposizione. L'esempio seguente mostrerà come vi si giunge.

Sia il numero 360; lo divido prima per 2, e ho per quoziente 180; divido questo quoziente per 2, e viene 90, che si divide ancora per 2 e dà 45; onde vedo già che 360 è uguale a 2 per 2 per 2 per 45. Il numero 45 non essendo più divisibile per 2, lo divido per 3, ed ho 15, che divido ancora per 3 e dà 5, numero primo che non può esser diviso se non da se stesso o dall'unità; ho dunque 45 uguale a 3 per 3 per 5, e per conseguenza 360 uguale a

2 per 2 per 2 per 3 per 3 per 5.

Questi sei fattori essendo numeri primi, sono i fattori *semplici* del numero 360. È visibile che ogni numero non primo può sempre decomporsi così in un certo numero di fattori semplici o primi.

Col mezzo di questi fattori si formano tutti i divisori del numero proposto, disponendoli coi quozienti che danno, come si vede nelle due prime colonne della tavola seguente:

360	1	
180	2	
90	2	4
45	2	8
15	3	6, 12, 24
5	3	9, 18, 36, 72
1	5	10, 15, 20, 30, 40, 45, 60, 90, 120, 180 360.

Ora si vede alla terza linea che il numero è stato diviso due volte di seguito per 2; è dunque divisibile per il prodotto 2 per 2, o per 4, che si scriverà a canto a 2 alla terza linea: il numero essendo stato di nuovo diviso per 2 sarà per conseguenza divisibile per 2 volte 4 o per 8; si scriverà dunque 8 a canto a 2 nella quarta linea. Alla quinta linea, il numero proposto essendo stato diviso ancora per 3, sarà evidentemente divisibile per i prodotti di 3 moltiplicato per ciascuno dei divisori precedenti; si formeranno dunque su questa linea i nuovi divisori composti 6, 12, 24. Continuando così a moltiplicare il fattore semplice di ciascuna linea per tutti i divisori che lo precedono, osservando di non scrivere due volte lo stesso, si avranno tutti i divisori del numero proposto.

DE' NUMERI COMPLESSI

84. Finora abbiamo considerato le frazioni, fatta astrazione dalla natura dell'unità alla quale si concepivano riferite; ma quando si applicano i numeri agli usi della società, la natura dell'unità principale si trova determinata per ciascuna questione. L'uso frequente delle frazioni ne' calcoli civili ha fatto dare de' nomi a quelle che per la natura delle loro unità s'incontrano più spesso. Quindi ne sono derivate le divisioni stabilite nelle monete, ne' pesi, e in generale nelle misure usuali di tutti i paesi.

Presso di noi l'unità monetaria chiamavasi *lira*, l'unità di lunghezza *braccio*, e l'unità di peso *libbra*.

La *lira* si divide in 20 *soldi*, e il *soldo* in 12 *denari*; il denaro si divide in frazioni ordinarie.

Il *braccio* si divide in 20 *soldi*, e il *soldo* di *braccio* in 12 *denari*; il denaro si divide in frazioni ordinarie.

La *libbra* si divide in 12 *oncie*, l'*oncia* in 24 *denari*, il *denaro* in 24 *grani* e il *grano* in frazioni ordinarie.

Un numero composto di lire, soldi, e denari, o di libbre, oncie, denari e grani, o in generale di parti riferite a diverse suddivisioni della medesima unità, si chiama *numero complesso*, per opposizione ai numeri che non sono composti se non d' unità intiere, e d'una sola specie di suddivisione, che si chiamano numeri *incomplessi*. Così 8 lire o 9 braccia, o 4 soldi, o 6 oncie sono numeri incomplessi; e all'opposto 8 lire e 4 soldi, 7 libbre e 6 oncie sono numeri complessi.

Il frequente uso di questi numeri ha fatto trovare de' metodi per sottoporli immediatamente alle quattro operazioni fondamentali dell'Aritmetica: noi andremo adesso successivamente esponendoli.

85. Proponiamoci da principio di aggiungere insieme più numeri composti di lire, soldi e denari, come sarebbero, per esempio,

	Lire 984	Soldi 12	Denari 6
	38	6	9
	1413	14	10
	319	18	2
somma	2756	12	3

Si scriveranno prima questi numeri in colonne, come si vedono qui, in maniera che le unità dello stess' ordine siano poste nelle medesime colonne verticali; poi cominciando l'addizione dalla dritta, si sommeranno prima i denari, e se ne troveranno 27. Ma siccome si è veduto che il soldo vale 12 denari, ne segue che 27 denari forman 2 soldi e 3 denari, si scriverà dunque solamente 3 denari al resultato, e si riterrà 2 per portarsi alla colonna de' soldi. La somma di questa è 20 soldi, che uniti a' 2 ritenuti fanno 22 soldi, si scriverà dunque 2 nella colonna de' soldi e si riterrà 2 per portarsi alla colonna seguente, cioè a quella delle diecine di soldi. La somma di questa colonna è 3 diecine, il che, unendovi le 2 ritenute, fà in tutto 5 diecine di soldi; e siccome si è veduto che 1 lira vale 20 soldi, o 2 diecine di soldi, ne segue che 5 diecine di soldi fanno 2 lire 10 soldi; si scriverà dunque 1 nel posto delle diecine di soldi, e si riterrà 2 per portarsi alla colonna delle lire; allora si continuerà l' operazione al solito, e si troverà con tal mezzo L. 2756. Sol. 12. Denari 3 per la somma cercata.

86. Sebbene l'esempio precedente sia particolare, tuttavia è facile vedere che ogni addizione complessa potrà farsi cogli stessi principj, e si comprende facilmente che lo spirito di questo metodo consiste ad aggiungere separatamente ciascuna specie di unità, cominciando da quelle di minor valore, e a riportare alla specie seguente le unità di tale specie contenute nella somma trovata. Abbiamo riportato alla colonna de' soldi quelli forniti dalla colonna de' denari; parimente se avessimo operato sopra delle libbre, oncie, denari, e grani, avremmo riportato alla colonna de' denari quelli forniti dalla colonna de' grani, alla colonna delle oncie quelle fornite dalla colonna de' denari, e alla colonna delle libbre quelle fornite dalla colonna dell'oncie. Per esercitare i nostri lettori, uniremo qui un altro esempio d'addizione complessa, in cui i numeri proposti sono libbre, oncie, denari, grani; ma ci limiteremo semplicemente ad esporre il calcolo di quest'operazione; e in quanto ai diversi ragionamenti che un tal calcolo suppone, si potrà facilmente supplirvi col mezzo di ciò che si è veduto di sopra.

Lib.	34	5 Onc.	16 Den.	17 Gr.
	16	3	12	5
	127	4	10	11
somma	178	1	15	9

87. Passiamo ora alla sottrazione de' numeri complessi, proponiamoci per esempio di togliere L. 684. S. 17. D. 4 da L. 795. S. 3.

Si scriveranno prima questi due numeri uno sotto l'altro, come nella sottrazione incomplessa, osservando che le unità del medesimo ordine si trovino poste nelle stesse colonne verticali, come si vede qui.

	Lir. 795	Sol. 3	Den. 0
	684	17	4
differenza	110	5	8

Cominciando quindi la sottrazione da destra, si vede che non si può togliere 4 denari da 0 denari; ma prendendo in prestito col pensiero 1 soldo da 3 che ne contiene il numero superiore, questo soldo varrà 12 denari; talmente che l'operazione si ridurrà a togliere 4 da 12; la differenza è 8, che si scriverà al resultato nel posto de' denari. Passando allora alla colonna de' soldi, la cifra 3 del numero superiore è stata diminuita di una delle sue unità, e non vale più se non 2; ma siccome non si può togliere 17 da 2, si prenderà in prestito col pensiero 1 lira dalle 5 che ne contiene il numero 795: questa lira convertita in soldi ne varrà 20; talmente che l'operazione sarà ridotta a togliere 17 da 22; la differenza è 5, che si scriverà sotto la colonna dei soldi, dopo di che si continuerà l'operazione al solito.

Sebbene in quest'esempio non abbiamo operato che sopra numeri composti di lire, soldi e denari, è facile vedere che lo spirito di questo metodo consiste a effettuare successivamente la sottrazione sopra ciascuna specie d'unità, cominciando da quello di minor valore; e se accade che in una di queste operazioni il numero da sottrarsi superi quello da cui si sottrae, si prenderà in prestito col pensiero un'unità dalla specie seguente a quelle che contiene il numero superiore; quest'unità convertita in unità dell'ordine inferiore, renderà la sottrazione possibile. Così, nell'esempio precedente, vedendo che la sottrazione non poteva effettuarsi sulla colonna de'denari, abbiamo preso in prestito 1 soldo dalla colonna de' soldi; se avessimo operato sopra delle libbre, e che la sottrazione non avesse potuto eseguirsi per esempio su'denari, avremmo preso in prestito dalla colonna dell'oncie un'unità di questa specie, che varrebbe per conseguenza 24 denari, il che avrebbe reso la sottrazione possibile. Per esercitare i nostri lettori, uniremo qui il calcolo d'un esempio di sottrazione complessa, in cui i numeri proposti sono libbre, oncie, denari e grani, e secondo ciò che si è detto, sarà facile supplire ai ragionamenti ch' esige una tal operazione.

Lib.	19	4 Onc.	16 Den.	13 Gr.
	4	11	19	15
differenza	14	4	20	22

Quantunque le regole precedenti siano generalmente applicabili a tutti i casi, tuttavia se si dovesse togliere L. 13 S. 8 D. 10 da L. 34 D. 4 non si vede a prima vista come si potrebbe effetuare tal sottrazione. Di fatti scrivendo questi numeri nella solita maniera

	Lir. 34	Sol. 0	Den. 4
	13	8	10
differenza	20	11	6

si vede che non si potrebbe togliere 10 da 4; non si può neppure prendere in prestito dalla colonna dei soldi, poichè non ve ne sono nel numero superiore. Bisogna dunque ricorrere qui a un espediente analogo a quello che abbiamo adoperato (Num. 16) nella sottrazione de' numeri incomplessi; cioè concepire le L 34 del numero superiore diminuite d' una lira, che varrà 20 soldi, o 19 soldi e 12 denari; si lasceranno i 19 soldi alla colonna de' soldi e si aggiungeranno i 12 denari ai 4 che già si hanno. Con tal mezzo, l' operazione sarà ridotta a togliere 10 da 16, il che darà per resto 6, che si scriverà nel posto de' denari. Passando ai soldi, si avrà da togliere 8 da 19, il che darà per resto 11; finalmente alle lire, si avrà da togliere 13 da 33, il che darà per resto 20, che si scriverà nel posto delle lire; talmente che il resto cercato sarà L. 20. S. 11. D. 6.

Si opererebbe in una maniera analoga, qualunque fosse la natura dell' unità de' numeri sui quali si dovesse effettuare la sottrazione; ed è chiaro che in tutti i casi basta ricorrere alla prima cifra significativa che si incontra verso sinistra, e prenderne in prestito col pensiero un' unità, che convertita in unità degli ordini inferiori renderà possibili tutte le sottrazioni precedenti. L'esempio seguente in cui i numeri proposti sono composti di libbre, oncie, denari, e grani non avrà dopo queste riflessioni veruna difficoltà.

Lib.	16	0 Onc.	0 Den.	0 Gr.
	4	3	16	13
differenza	11	8	7	11

88. La prova dell'addizione e della sottrazione complesse si fa per gli stessi principj di quella dell'addizione e sottrazione semplici; non ostante siccome la prima di queste operazioni esige qualche dettaglio di calcolo che potrebbe fare ostacolo ai lettori, ci proporremo di verificare una delle addizioni precedenti, in cui i numeri proposti erano:

	Lir. 984	Sol. 12	Den. 8
	38	6	9
	1413	14	10
	319	18	2
e la somma	2756	12	5
	1122	12	0
	. . . .	. .	.

Possiamo prima verificare l'addizione delle lire colla regola del n. 19; ma in vece di trovare 0 per ultimo resto alla colonna delle unità, troveremo 2 cioè 2 lire; per conseguenza queste 2 lire non possono provenire se non dall'addizione della colonna precedente, che contiene le diecine di soldi; e siccome 2 lire vagliono 4 diecine di soldi, bisogna che questa colonna abbia dato per somma 5 diecine di soldi; ma ne dà realmente 3 sole, le due diecine di più non possono dunque provenire se non dalla colonna precedente, che ha dovuto dare per somma 22 soldi;

essa non ne dà realmente che 20; per conseguenza i 2 soldi di più provengono dalla colonna precedente che contiene i denari; e siccome 2 soldi fanno 24 denari ne segue che questa ha dato per somma 29 denari, e siccome ciò ha luogo di fatti, se ne concluderà che l'addizione è giusta.

Di qui si vede, che di qualunque natura siano le unità che compongono i numeri su' quali si opera, bisogna per verificare un addizione complessa, effettuare la verificazione sopra ciascuna specie d'unità, cominciando da quelle il di cui valore è maggiore, e riportare successivamente all'ordine delle unità di miglior valore i resti provenienti da ciascuna di queste verificazioni parziali, che si faranno d'altronde col mezzo della regola data (n. 19) per la verificazione delle addizioni incomplesse.

In quanto alla sottrazione complessa, bisognerà per verificarla aggiungere il numero da sottrarre colla differenza trovata; la somma, se la sottrazione è esatta, dovrà essere uguale al numero da cui si è sottratto. La ragione di quest'operazione è evidente, secondo ciò che si è veduto (n. 20,) parlando della maniera di verificare la sottrazione semplice.

89. Tratteremo adesso della moltiplicazione complessa; ma per veder meglio come si può esser condotti a tal'operazione, proponiamoci la questione seguente:

Un operajo ha fatto 16 braccia di lavoro a Lire 25 Sol. 12 il braccio; si dimanda quanto si deve dare a quest'operajo.

È chiaro che si deve dargli 16 volte 25 lire 12 soldi; onde per trovare la soluzione della questione proposta, bisogna moltiplicare il numero concreto 25 lire 12 soldi per il numero astratto 16 volte, e il prodotto (n. 35) sarà formato d'unità della stessa natura del moltiplicando, cioè di lire, soldi e denari.

Per eseguire quest'operazione, si scriverà il moltiplicatore sotto il moltiplicando, come si vede qui.

moltiplicando	L. 25	Sol. 12
moltiplicatore	16	
	150	
	250	
per 10 soldi	8	
per 2 soldi	1	12
Prodotto	409	12

dopo di che si ragionerà nel modo seguente.

È chiaro che l'operazione si riduce a ripetere 16 volte 25 lire e 16 volte 12 soldi. Il primo di questi due prodotti parziali si otterrà col mezzo delle regole solite della moltiplicazione, e darà un certo numero di lire. Il secondo prodotto parziale potrebbe ottenersi collo stesso metodo, e darebbe un certo numero di soldi, che bisognerebbe dopo ridurre in lire, se fosse possibile; ma si può giungere al resultato in una via più semplice. Di fatti si può concepire che i 12 soldi del moltiplicando siano decomposti in 10 soldi più di 2 soldi; ora è chiaro che 1 lira moltiplicata per 16 darebbe 16 lire di prodotto; per conseguenza 10 soldi o la metà d'una lira daranno per prodotto 8 lire, che bisognerà scrivere al resultato: e non resterà più che ad effettuare la moltiplicazione sopra i 2 soldi del moltiplicando. Ma siccome 2 soldi sono il quinto di 10 soldi, si avrà per 2 soldi il quinto del prodotto che si è ottenuto per 10, cioè $\frac{1}{5}$ d'8 lire, o 1 lira, $\frac{3}{5}$, e siccome la lira vale 20 soldi, $\frac{1}{5}$ di lira vale 4 soldi, e $\frac{3}{5}$ di lira vagliono 12 soldi. Si scriverà dunque il prodotto parziale 1 lira 12 soldi sotto i precedenti, e sommandoli, si troverà 409 lire 12 soldi per il prodotto totale.

90. Se i numeri fossero

moltiplicando	L. 34	Sol. 19	Den. 3	$\frac{1}{3}$
moltiplicatore	8			
	272			
per 10 soldi	4			
per 5 soldi	2			
per 1 soldo	0	8		
per 4 soldi	1	12		
per 3 denari	0	2		
per 1 denaro . . . . *	0	0	8	
per $\frac{1}{3}$ di denaro	0	0	2	$\frac{2}{3}$
Prodotto	279	14	2	$\frac{2}{3}$

dopo aver scritto il moltiplicatore sotto il moltiplicando, si comincerà dall'effettuare la moltiplicazione di 34 lire numero concreto per 8 numero astratto, il che darà 272 lire per prodotto; quindi si decomporranno per maggior facilità i 19 soldi del moltiplicando in 10 soldi più 5 soldi più 4 soldi, e si effettuerà separatamente la moltiplicazione su queste diverse parti.

Si vede in primo luogo che 10 soldi o la metà d'una lira, daranno 4 lire di prodotto; per conseguenza 5 soldi moltiplicati pure per 8 daranno per prodotto la metà di 4 lire o 2 lire. Per ottenere il prodotto parziale seguente, nel quale il moltiplicando è 4 soldi, bisognerebbe prendere i $\frac{4}{5}$ di quello ottenuto per 5, cioè i $\frac{4}{5}$ di 2 lire, il che sarebbe riducendo queste 2 lire in soldi e impiegando dopo la regola del n. 66; ma è più comodo di prendere prima il quinto di quelle 2 lire, che sarà uguale a 8 soldi, poichè 2 lire vagliono 40 soldi. Questo resultato, che è il prodotto per 1 soldo, è 4 volte minore di quello che cerchiamo, e siccome è solamente *ausiliario*, si cancellerà o si contrassegnerà in qualche maniera per rammentarsi che non dev'essere compreso nel prodotto totale; fatto ciò, se ne scriverà il quadruplo di sotto, il che darà 32 soldi o 1 lira 12 soldi, per il prodotto relativo a 4 soldi. Passando quindi ai denari, siccome 12 denari vagliono 1 soldo, si prenderà per 3 denari il quarto del prodotto ottenuto per 1 soldo, il che darà 2 soldi per risultato. Passando alle frazioni di denaro, per valutare comodamente il prodotto di $\frac{1}{3}$ di denaro, si cercherà prima il prodotto, che darebbe 1 denaro, e sarà evidentemente il terzo di 2 soldi o 8 denari, poichè 2 soldi vagliono 24 denari; per conseguenza il prodotto per $\frac{1}{3}$ di denaro sarà il terzo di 8 denari, o 2 denari più $\frac{2}{3}$; si cancellerà dunque o si contrassegnerà il prodotto ausiliario che si era ottenuto per un denaro, e se ne scriverà il terzo di sotto; sommando tutti questi prodotti parziali, si troverà 279 lire 14 soldi 2 denari $\frac{2}{3}$ per il prodotto totale.

91. Sebbene negli esempi precedenti non abbiamo operato che sopra numeri composti di lire, soldi, e denari tuttavia è facile vedere che lo spirito di questo metodo consiste a decomporre le unità frazionarie che accompagnano le nullità principali del moltiplicando, in maniera che ciascun prodotto parziale sia la metà, o il terzo, o il quarto, o in generale una parte aliquota del prodotto parziale precedente, e ciò può sempre farsi, qualunque sia la natura delle unità di cui è composto il moltiplicando. Se per esempio i numeri proposti fossero:

moltiplicando	6 Lib.	8 Onc.
moltiplicatore	5	
	30	
per 6 Oncie	2	6
per 2 Oncie		10
Prodotto	33	4

dopo avere effettuato la moltiplicazione di 6 libbre per 5, si decomporrebbero le 8 oncie del moltiplicando in 6 oncie più 2 oncie; ora 6 oncie sono la metà d' una libbra, per conseguenza il primo di questi due prodotti parziali sarà uguale alla metà di 5 libbre o a 2 libbre 6 oncie. Il secondo prodotto parziale sarà il terzo del precedente; si prenderà dunque il terzo di 2 libbre 6 oncie, che è 10 oncie, e si aggiungerà al resultato. Sommando questi prodotti parziali, si troverà 33 libbre 4 oncie per il prodotto totale.

Se la decomposizione in parti aliquote delle unità frazionarie che accompagnano il moltiplicando non può farsi in una maniera comoda per il calcolo, vi si supplirà con dei prodotti ausiliarj, come abbiamo fatto in uno degli esempi precedenti.

92. Per ottenere il secondo prodotto parziale del l'ultimo esempio, è bisognato cercare il terzo di 2 libbre 6 oncie. Quest'operazione non era difficile perchè convertendo le 2 libbre in oncie, essa si riduceva a prendere il terzo di 30 oncie, che è evidentemente uguale a 10 oncie; ma è facile vedere da quest'esempio semplicissimo, che per essere in stato di effettuare in ogni caso la moltiplicazione di un numero complesso per un numero incomplesso col mezzo de'metodi precedenti, bisogna sapere dividere un numero complesso per un numero incomplesso.

93. Sebbene questa questione appartenga alla divisione complessa, e secondo l'ordine stabilito fin qui, sembri non dover esser trattata se non dopo l'intiera esposizione della moltiplicazione, nonostante siccome la sua soluzione ci diviene ora d'una necessità assoluta, e d'altronde non esige una lunga digressione, ce ne occuperemo prima d'andare più innanzi. Proponiamoci, per esempio, di dividere 74 lire 12 soldi 9 denari per 16.

È chiaro che la questione sarà risoluta effettuando la divisione sopra ciascuna delle parti del dividendo, cioè sulle lire, sui soldi, e sui denari che lo compongono; a ciò si giungerà nella maniera seguente.

Si scriverà il divisore a destra del dividendo, come nella divisione semplice, separando l' uno dall'altro con una linea, e si farà sotto il divisore un'altra linea orizzontale sotto di cui si metterà il quoziente.

	L.	S.	D.	16 divisore
Dividendo	74	12	9	L. S. D.
	10			4 13 3 $\frac{9}{16}$ quoziente
	20			
	200			
	12			
	212			
	52			
	4			
	12			
	48			
	9			
	57			
resto	9			

Si dividerà prima 74 lire per 16, il che darà 4 lire per quoziente, e 10 lire per resto. Si convertiranno queste 10 lire in soldi, moltiplicandole per 20, perchè 1 lira vale 20 soldi, e unendo il prodotto 200 soldi coi 12 che contiene il dividendo, si avrà 212 soldi per secondo dividendo parziale. La divisione essendo effettuata darà 13 soldi per quoziente, e 4 soldi per resto; si convertiranno questi 4 soldi in denari, moltiplicandoli per 12, perchè 1 soldo vale 12 denari, e unendo il prodotto 48 denari co' 9 che già ne contiene il dividendo, si avrà 57 denari per ultimo dividendo parziale. La divisione essendo effettuata darà 3 denari per quoziente e 9 denari per resto; e siccome le suddivisioni della lira non vanno oltre ai denari, si scriverà questo resto sotto la forma frazionaria, il che darà $\frac{5}{16}$ di denaro, talmente che il quoziente totale sarà 4 lire 13 soldi 3 denari e $\frac{9}{15}$

94. E evidente che lo stesso metodo si applicherebbe con un successo uguale qualunque fosse la natura delle unità del dividendo; e possiamo stabilire per principio generale, che per dividere un numero complesso per un numero incomplesso, *bisogna effettuare successivamente la divisione sulle diverse parti del dividendo, cominciando dalla specie d'unità di maggior valore, convertire i resti di ciascuna divisione parziale in unità dell'ordine inferiore, e unirle colle unità di tal'ordine che contiene già il dividendo. Si otterrà con tal mezzo un dividendo parziale sul quale si opererà come sul precedente, così in seguito, finchè si sia giunti alle ultime suddivisioni dell'unità principale; il resto allora, se v'è, si metterà sotto la forma frazionaria.*

Se si avesse per esempio a dividere 47 libbre, 7 oncie, 2 denari, 12 grani per 30, si troverebbe che il quoziente è 1 libbra 7 oncie 0 denari 21 grani e $\frac{6}{30}$. Uniremo qui per più facilità il calcolo di questa operazione.

Lib. Onc. Den. Gr.	30
47 7 2 12	Lib. Onc. Den. Gr.
	1 7 0 21 $\frac{6}{30}$

17
12
34
170
7
211
1
24
24
2
26
24
104
520
12
636
36
resto 6

95. Se il dividendo, numero complesso, si trova unito a delle frazioni ordinarie, il divisore essendo sempre un numero incomplesso, si ridurrà il resto dell' ultima divisione parziale in frazione della specie di quella del dividendo, e si uniranno ambedue. Con tal mezzo non si avrà più da operare che sopra una frazione, e ciò si farà come si è veduto, n. 65, trattando della divisione delle frazioni per dei numeri intieri.

96. Abbiamo adesso tutte le cognizioni necessarie per effettuare la moltiplicazione e la divisione dei numeri complessi per dei numeri incomplessi. Passeremo al caso in cui il moltiplicando e il moltiplicatore sono ambedue numeri complessi; la questione seguente ce ne porgerà l' occasione.

Un operajo ha fatto 15 braccia 10 soldi di lavoro a 17 lire 4 soldi il braccio; si dimanda quanto bisogna dargli.

Se quest'operajo avesse fatto sole 15 braccia di lavoro, è chiaro che bisognerebbe dargli 15 volte 17 lire 4 soldi; ma siccome ne ha fatto 10 soldi di più, e che 10 soldi fanno un mezzo braccio, ne segue che si deve dargli per questi 10 soldi la metà di 17 lire 4 soldi. Si vede dunque che la questione proposta si riduce a moltiplicare il numero concreto 17 lire 4 soldi per il numero astratto 15 $\frac{1}{2}$, ed è sempre in questo senso che bisognerà concepire la moltiplicazione di due numeri complessi l'uno per l'altro: perchè il moltiplicatore dovendo per la natura della moltiplicazione essere sempre un numero astratto, le unità frazionarie che l'accompagnano dovranno sempre, qualunque sia la loro denominazione, esser considerate come frazioni astratte.

97. Ciò ben compreso, proponiamoci di moltiplicare l'uno per l'altro i due numeri complessi seguenti:

	Lib.	Onc.	Den.	Gr.
moltiplicando Lir. 84 Sol. 6. Den. 3 $\frac{1}{3}$				
moltiplicatore	15	7	12	19
	420			
	840			
per 5 soldi	3	15		
per 1 soldo	0	15		
per 3 denari . . .	0	3	9	
per 1 denaro . . *	0	1	3	
per $\frac{1}{3}$ di denaro .	0	0	5	
per 6 oncie . . .	42	3	1	$\frac{2}{3}$
per 1 oncia . . .	7	0	6	$\frac{5}{18}$
per 12 denari . .	3	10	3	$\frac{5}{36}$
per 1 denaro . . *	0	5	10	$\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{3}{2}$
per 12 grani . . .	0	2	11	$\frac{1}{8}\frac{1}{6}\frac{3}{4}$
per 4 grani . . .	0	0	11	$\frac{1}{2}\frac{8}{5}\frac{4}{9}\frac{1}{5}$
Prodotto .	1317	11	11	$\frac{5}{6}\frac{9}{4}\frac{9}{8}$

È evidente che la questione sarà risoluta effettuando la moltiplicazione sopra tutto il moltiplicando per ciascuna delle parti del moltiplicatore, ed a ciò si perverrà nella maniera seguente.

Dopo avere scritto il moltiplicatore sotto il moltiplicando come nella moltiplicazione semplice, si effettuerà prima la moltiplicazione per le 15 unità del moltiplicatore, il che si farà come si è veduto ne' n. 89 e seguenti, ove si è trattato della moltiplicazione d'un numero complesso per un numero incomplesso.

Si concepiranno quindi le 7 oncie del moltiplicatore decomposte in 6 oncie più 1 oncia; 6 oncie essendo $\frac{1}{2}$ libbra daranno per prodotto la metà di ciò che darebbe 1 libbra, cioè la metà di 84 lire 6 soldi 3 denari $\frac{1}{3}$ o 42 lire 3 soldi 1 den. e $\frac{2}{3}$ che si scriveranno nel risultato.

Per ottenere il prodotto per 1 oncia, si prenderà il sesto di quello ottenuto per 6 oncie, cioè il sesto di 42 lire 3 soldi 1 denaro e $\frac{2}{3}$ questo sesto è 7 lire soldi 6, denari ${}_{1}{}^{5}{}_{8}$ che si scriverà sotto il prodotto parziale precedenle.

Per ottenere il prodotto per 12 denari o $\frac{1}{2}$ oncia, si prenderà la metà di quello trovato per 1 oncia, il che darà 3 lire 10 soldi 3 denari ${}_{1}{}^{5}{}_{8}$, che si scriverà al resultato.

Prima di cercare il prodotto per 16 grani, si cercherà quello che si otterrebbe per 1 denaro; per ciò, si prenderà il dodicesimo di quello ottenuto per 12, questo dodicesimo sarà uguale a o lire 5 soldi 10 denari $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{3}{2}$. Si decomporranno allora i 16 grani in 12 grani più 4 grani, si avrà il prodotto per 12 grani o $\frac{1}{2}$ denaro, prendendo la metà di quello trovato per 1 denaro, e si avrà il prodotto per 4 grani prendendo il terzo di quello ottenuto per 12. Fatto ciò, si cancellerà o si contrassegnerà il prodotto ausiliario o lire 5 soldi 10 denari $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{3}{2}$, che si è ottenuto per 1 denaro, e sommando tutti i prodotti parziali si avrà il prodotto totale.

È chiaro che bisognerà cominciare dal sommare le frazioni che si trovano ne' diversi prodotti parziali. Queste frazioni essendo di denominatori differenti, si applicherà loro la regola del n. 79, per la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore, osservando che nel caso attuale i denominatori sono multipli gli uni degli altri, e si estrarranno quindi colla regola del n. 68 gl'intieri che possono essere contenuti nelle somme delle frazioni proposte.

Si vede prima che $\frac{2}{3}$ più ${}_{1}{}^{5}{}_{8}$ fanno $\frac{1}{1}\frac{7}{8}$, che uniti a ${}_{3}{}^{5}{}_{6}$ fanno $\frac{3}{3}\frac{9}{6}$ o un intiero piu ${}_{1}{}^{1}{}_{2}$; ma ${}_{1}{}^{1}{}_{2}$ è lo stesso che ${}_{2}{}^{2}{}_{5}{}^{1}{}_{9}{}^{6}{}_{2}$, e $\frac{1}{8}\frac{1}{6}\frac{3}{4}$ equivalgono a ${}_{2}{}^{3}{}_{5}{}^{3}{}_{9}{}^{9}{}_{2}$, aggiungendovi $\frac{1}{2}\frac{8}{5}\frac{4}{9}\frac{1}{2}$ si troverà $\frac{2}{2}\frac{3}{5}\frac{9}{9}\frac{6}{2}$, ossia $\frac{5}{6}\frac{9}{4}\frac{9}{8}$. Onde la somma di tutte queste frazioni, alla quale siamo giunti in una maniera molto semplice, è uguale a 1 denaro più $\frac{5}{6}\frac{9}{4}\frac{9}{8}$. Si scriverà solamente la frazione $\frac{5}{6}\frac{9}{4}\frac{9}{8}$ nel risultato, e si riterrà il denaro di più per portarlo alla colonna de' denari. Continuando quindi l'addizione alla solita maniera si troverà 1317 lire 11 soldi 11 denari $\frac{599}{648}$ per il prodotto totale.

98. Si vede facilmente che il metodo seguito in questa moltiplicazione si applica ugualmente, qualunque sia la natura delle unità del moltiplicando, e qualunque sia la dipendenza scambievole delle frazioni astratte del moltiplicatore. Di fatti è facile comprendere che questo metodo consiste in *decomporre queste suddivisioni astratte in maniera che ciascun prodotto parziale sia la metà, il terzo, il quarto o in generale una parte aliquota del prodotto parziale precedente, e ciò si può fare in tutti i casi, ma non in una maniera ugualmente comoda per il calcolo. Quando questa decomposizione non si presenterà sotto una forma assai semplice, si supplirà a questo difetto col mezzo de' prodotti ausiliari,* come abbiamo fatto nell'esempio precedente, *e si cancelleranno o si contrassegneranno dopo questi prodotti per non comprenderli nell' addizione.*

Nell'operazione ora fatta, abbiamo adoperato queste espressioni, *moltiplicare per 6 oncie, per 4 grani ec.* ma ci siamo espressi così solamente per brevità, perchè il moltiplicatore essendo sempre un numero astratto, le suddivisioni frazionarie che contiene, qualunque sia d'altronde la loro denominazione, devono essere considerate come frazioni astratte: ci siamo sufficientemente spiegati su questo soggetto nel n. 96.

99. Ci resta adesso a parlare della divisione d'un numero complesso per un numero complesso, ed a ciò ci condurrà la questione seguente.

Si sono pagate 84 lire 15 soldi 6 denari per 13 libbre 6 oncie di mercanzia; si dimanda il prezzo della libbra.

Se conoscessimo il prezzo di ciascuna libbra di mercanzia, è chiaro che ripetendo 13 volte $\frac{1}{2}$ avremmo il prezzo di 13 libbre 6 oncie, che dovrebbe essere per conseguenza uguale a 84 lire 15 soldi

6 denari. Si vede dunque che la somma proposta 84 lire 15 soldi 6 denari è un prodotto di cui uno dei fattori è il numero astratto $13\frac{1}{2}$, e di cui si tratta di trovare l'altro fattore, che deve essere necessariamente composto di lire, soldi e denari; ciò si farà dividendo il prodotto dato per il fattore noto.

La questione sarebbe risoluta se potessimo farla dipendere dalla divisione di un numero complesso per un numero incomplesso; perchè abbiamo veduto di sopra come si effettuava quest'operazione, ed a ciò si giungerà nella maniera seguente:

Poichè 13 intieri equivalgono a $\frac{26}{2}$, possiamo cangiare il divisore $13\frac{1}{2}$ in $\frac{27}{2}$, talmente che la questione sarà ridotta a dividere 84 lire 15 soldi 6 denari per la frazione $\frac{27}{2}$.

Ora, abbiamo veduto (n. 73) che per dividere un numero intiero per una frazione, bisogna moltiplicarlo per la frazione rovesciata. Onde, per effettuare la divisione per $\frac{27}{2}$, bisogna moltiplicare il dividendo per 2, e dividere il prodotto per 27, e noi siamo in stato di farlo col mezzo dei metodi precedenti.

Di fatti, la moltiplicazione di 84 lire 15 soldi 6 denari per 2, si farà, come si è veduto (n. 89 e seguenti) trattando della moltiplicazione complessa, e darà per resultato 169 lire 11 soldi.

Si dividerà dopo questo nuovo dividendo per 27, il che si farà col metodo esposto n. 93 e seguenti trattando della divisione d' un numero complesso per un numero incomplesso. Ecco il dettaglio di quest'operazione.

L. 169. Sol. 11.	27
7	L. 6. S. 5. D. 7. $\frac{3}{27}$ o $\frac{1}{2}$
20	
140	
11	
151	
16	
12	
32	
160	
192	
3	

Si troverà con tal mezzo 6 lire, 5 soldi, 7 denari $\frac{1}{2}$ per il quoziente cercato, che serve di risposta alla questione proposta, come si può assicurarsene moltiplicandolo per 13 $\frac{1}{2}$, perchè si riprodurrà con quest'operazione la somma proposta 84 lire, 15 soldi, 6 denari.

100. Ci esprimeremmo in una maniera inesatta se dicessimo che nell'esempio precedente siamo giunti alla soluzione dividendo 84 lire, 15 soldi, 6 denari per 13 libbre, 6 oncie; perchè non si può dividere delle lire per delle libbre. Di fatti abbiamo veduto che il divisore non era 13 libbre, 6 oncie, ma 13 volte $\frac{1}{2}$, cioè un numero astratto; ed in questo senso bisogna sempre concepire la divisione complessa, quando per la loro denominazione le unità del divisore non sono della stessa natura di quelle del dividendo. In ogni caso, si deve riguardare il divisore colle suddivisioni che contiene come un numero astratto unito a frazioni astratte, e il quoziente sarà allora composto d'unità della stessa specie del dividendo. Troveremo un altro esempio d'un simil caso nella questione seguente.

Si sono pagate 1374 lire, 12 soldi, 4 denari $\frac{1}{2}$ per

36 libbre 10 oncie, 12 denari, 16 grani di mercanzia; si dimanda il prezzo della libbra.

Prima di intraprendere quest' operazione, si osserverà che poichè la libbra vale 12 oncie, l'oncia 24 denari, e il denaro 24 grani, l'oncia è $\frac{1}{12}$ della libbra, il denaro n'è $\frac{1}{288}$, e il grano $\frac{1}{6912}$. Per conseguenza la questione proposta si riduce a dividere il numero concreto 1374 lire, 12 S., 4 D. $\frac{1}{8}$, per il numero astratto 36 più $\frac{10}{12}$ più $\frac{16}{6912}$. Il quoziente sarà composto d'unità della medesima natura del dividendo, cioè di lire, soldi e denari.

Per ridurre adesso questa divisione a quella d'un numero complesso per un numero incomplesso, si osserverà che il divisore può essere convertito in una sola frazione, il di cui denominatore sia 6912. In fatti, si può cangiare prima le 36 unità in $\frac{432}{12}$, per la regola del n. 69, e aggiungendoli ai $\frac{10}{12}$ che già si hanno, si avrà $\frac{442}{12}$; si ridurrà questa frazione in 288esimi moltiplicando i suoi due termini per 24, il che darà $\frac{10608}{288}$, e aggiungendo loro i $\frac{12}{288}$, che già si hanno, si formerà la frazione $\frac{10620}{288}$. Finalmente si ridurrà questa frazione in 6912esimi, moltiplicando i suoi due termini per 24, il che la cangerà in $\frac{254880}{6912}$, a' quali si aggiungerà $\frac{16}{6912}$; e con tal mezzo il divisore sarà cangiato in una sola frazione astratta che sarà $\frac{254896}{6912}$.

Applicando qui i ragionamenti dell'esempio precedente, vedremo che si otterrà la soluzione della questione proposta, moltiplicando 1374 lire, 12 soldi, 4 denari $\frac{1}{8}$ per 6912, e dividendo il prodotto per 254896; ma si faciliterà quest'operazione riducendo la frazione $\frac{254896}{6912}$ alla sua più semplice espressione; il che si farà dividendo i suoi due termini per 16 (n. 60), e si otterrà la frazione $\frac{15931}{432}$ dello stesso valore della proposta. Si potrà per conseguenza impiegare la frazione $\frac{15931}{432}$ in vece di $\frac{254896}{6912}$, cioè per trovare la soluzione della questione proposta, bisognerà moltiplicare 1374 lire, 12 soldi, 4 denari $\frac{1}{8}$, per 432, e dividere il prodotto per 15931.

La prima di queste due operazioni si farà col mezzo della regola del n. 89, e darà 593834 lire, 12 soldi, 6 denari.

Si dividerà questo prodotto per 15931 col metodo esposto n. 93 e seguenti. Ecco il dettaglio dell'operazione.

Lir. S. D.	
593834 12 6	15931
115904	Lir. S. D.
4387	37 5 6 $\frac{1684}{15931}$
20	
87740	
12	
87752	
8097	
12	
16194	
80970	
6	
97170	
resto 1584	

Il quoziente cercato è 37 lire, 5 soldi, 6 denari e $\frac{1684}{15931}$, e scioglie la questione. Si può assicurarsi della sua esattezza moltiplicandolo per 36 più $\frac{10}{12}$ più $\frac{13}{788}$ più $\frac{16}{6912}$, perchè si ritroverà con tal mezzo il dividendo primitivo 1375 lire, 12 soldi, 4 denari $\frac{1}{8}$.

101. Questi due esempj bastano per mostrare come bisognerebbe operare in ogni caso della medesima natura qualunque fossero le denominazioni e la dipendenza scambievole delle frazioni che accompagnano le unità principali del divisore; e si vede che in tutti i casi bisognerà mettere queste frazioni sotto la forma ordinaria, e ridurre gl'intieri e le frazioni del divisore in una sola e medesima frazione, il che si farà per le unità del divisore colla regola del n.

69 riguardante la riduzione degli intieri in frazioni, e per le frazioni colla regola del n. 79. riguardante la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore. Il divisore si troverà con tal mezzo cangiato in una sola frazione astratta, che si ridurrà *ai suoi minimi termini*, cioè alla più semplice espressione.

Si moltiplichera quindi il dividendo primitivo per il denominatore di questa frazione, e si dividerà il prodotto per il suo numeratore. Queste due operazioni si faranno co'metodi esposti di sopra, e il quoziente che servirà di risposta alla questione proposta, sarà composto d'unità della stessa natura del dividendo primitivo; ciò dipende evidentemente da questo, che essendo un tal dividendo primitivo un numero concreto, e il divisore un numero astratto, il quoziente che è l'altro fattore del dividendo primitivo deve essere un numero concreto composto d'unità della stessa specie del dividendo medesimo (n. precedente.)

102. Ci resta ora a parlare del caso in cui il dividendo e il divisore sono ambedue composti d'unità della stessa natura, come nella questione seguente.

Il prezzo d'una libbra di mercanzia essendo 36 lire, 15 soldi si dimanda quante libbre di tal mercanzia si daranno per 1689 lire, 17 soldi, 9 denari.

È chiaro che se ne daranno tante, quante volte 36 lire, 15 soldi sono contenute in 1689 lire, 17 soldi, 9 denari. Si vede dunque che la soluzione della questione proposta dipende da una divisione complessa, nella quale il dividendo e il divisore sono composti di unità concrete della stessa natura, e che il quoziente sarà un numero *di volte*, poichè il divisore numero concreto essendo uno de'fattori del dividendo, l'altro fattore che è il quoziente deve essere un numero astratto.

Per ottenere questo quoziente, si osserverà che siccome la lira vale 20 soldi, e il soldo 12 denari, il soldo è $\frac{1}{20}$ della lira, e il denaro n'è $\frac{1}{240}$; talmente che mettendo in frazioni ordinarie i soldi e i denari che si trovano nel dividendo e nel divisore, si tratterà solo di dividere 1689 più $\frac{17}{20}$ più $\frac{9}{240}$ per 36 più $\frac{15}{20}$. Ora è facile vedere che il dividendo e il divisore possono essere convertiti ciascuno in una sola frazione. In fatti, si può prima cangiare le 1689 lire del dividendo in $\frac{33780}{20}$ per la regola del n. 69, e aggiungendo loro $\frac{17}{20}$ si avrà $\frac{33797}{20}$. Si convertirà questa frazione in 240esimi, moltiplicando i suoi due termini per 12, il che darà $\frac{405564}{240}$, gli si aggiungerà $\frac{9}{240}$ che già si hanno, e il dividendo si troverà con tal mezzo cangiato in $\frac{405573}{240}$ di lira.

Operando similmente sul divisore esso si cangerà in $\frac{735}{20}$ di lira; e la questione si trova così ridotta a dividere la frazione $\frac{405573}{240}$ per $\frac{735}{20}$: si impiegherà a tal effetto la regola del n. 74 riguardante la divisione delle frazioni le une per le altre, e si avrà per quoziente la frazione $\frac{405573 \text{ per } 20}{736 \text{ per } 240}$

Ora abbiamo veduto che una frazione non cangiava valore quando si dividevano i suoi due termini per un medesimo numero, e siccome 240 è uguale a 12 moltiplicato per 20 si dividerà per 20 i due termini della frazione precedente, il che la cangerà in quest'altra $\frac{405573}{735 \text{ per } 12}$ o effettuando la moltiplicazione indicata $\frac{405573}{8820}$.

Si può osservare che in questa frazione la somma delle cifre del numeratore considerate come esprimenti ùnità semplici è 24, cioè è uguale a 8 moltiplicato per 3, e la somma delle cifre del denominatore considerate pure come esprimenti unità semplici è uguale a 18 cioè a 6 moltiplicato per 3; quindi ne segue (n. 64) che i due termini di questa frazione sono divisibili per 3. Questa riduzione cangerà la frazione in quest'altra più semplice $\frac{135191}{2940}$.

Se si effettuasse la divisione indicata del numeratore per il denominatore, si troverebbe per quoziente $45\frac{2891}{2940}$, cioè 36 lire 15 soldi sono contenute in

1689 lire 17 soldi 9 denari, 45 volte e $\frac{2891}{2940}$: ora, abbiamo veduto che per la somma proposta darebbero tante libbre di mercanzia quante volte il dividendo contiene il divisore; si avrebbe dunque a tal prezzo 45 libbre e $\frac{2891}{2940}$ di libbra.

Quindi si vede che sebbene il quoziente sia un numero di volte, la risposta alla questione proposta è un numero di libbre, e sempre bisognerà concepire in questo senso la divisione complessa, quando il dividendo e il divisore saranno ambedue composti d'unità della stessa natura. Il quoziente in tutti questi casi sarà un numero astratto, che si trasformerà in un numero concreto, la natura delle di cui unità sarà determinata dallo stato della questione che ha condotto alla divisione.

103. La questione che ci eramo proposta è risoluta dal numero 45 libbre, e $\frac{2891}{2940}$ di libbra; ma per la facilità dell'uso, bisogna esprimere la frazione $\frac{2891}{2940}$ col mezzo delle suddivisioni della libbra; perciò il numeratore essendo riguardato come libbre sarà ridotto in oncie moltiplicandolo per 12, e verrà $\frac{34692}{2940}$ d'oncia; estraendo gli intieri da questa frazione, avremo per resultato 11 oncie, e per resto $\frac{2352}{2940}$ d'oncia. Si ridurrà il numeratore di questo resto in denari, moltiplicandolo per 24, il che produrrà $\frac{56448}{2940}$: frazione equivalente a 19 denari più $\frac{588}{2940}$ di denaro.

Si giungerà così, per mezzo di riduzioni successive, a trovare tutte le suddivisioni che deve contenere il quoziente; ed è facile vedere che questa operazione si riduce alla divisione d'un numero complesso per un numero incomplesso, e può effettuarsi colla regola del n. 93, osservando che dopo la conversione di ciascun resto in unità della specie seguente, non v'è niente da aggiungere al dividendo parziale. Abbiamo posto sotto gli occhi del lettore il quadro dell'operazione eseguita così.

	135191 Lib.	2940
	17591	Lib. Onc. Den. Gr.
1.° resto	2891	45 . 11 . 19 . 4 . $\frac{4}{5}$
	12	
	5782	
	2891	
	34692 oncie	
	5292	
2.° resto	2352	
	24	
	9408	
	4704	
	56448 denari	
	27048	
3.° resto	588	
	24	
	2352	
	1176	
	14112 grani	
	2352	

L'ultimo resto 2352 si porrà sotto la forma frazionaria ordinaria, e darà $\frac{2352}{2940}$, o dividendo i due termini di questa frazione per 588, $\frac{4}{5}$; talmente che la risposta alla questione proposta sarà 45 libbre, 11 oncie, 19 denari, 4 grani e $\frac{4}{5}$.

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

104. Si vede da ciò che precede che le operazioni dell' Aritmetica sopra i numeri complessi sono più penose e meno dirette che su' numeri semplici, o incomplessi: ed è facile a concepirsi che tale complicazione resulta in parte dall' essere nelli usi civili ciascuna specie d'unità principale suddivisa in una maniera a lei particolare: così la lira si divide in soldi, o denari, mentre la libbra si divide in oncie, dena-

ri, grani ec., e tutte queste suddivisioni rappresentano frazioni di denominatori differenti.

Si abbrevierebbe molto la fatica, e si semplicizzerebbero singolarmente le operazioni impiegando un solo modo di suddivisione ne' pesi, nelle monete, e nelle misure in generale, e sottoponendo queste suddivisioni a una legge di decrescimento uniforme. A ciò si è giunti in una maniera infinitamente felice, adottando la suddivisione dell' unità principale in parti di dieci in dieci volte piu piccole, e questo modo di decrescimento si è quello che veniva indicato dalla natura stessa del nostro sistema di numerazione.

105. Di fatti il principal fondamento del nostro sistema consiste nel divenire il valor d' una cifra di dieci in dieci volte maggiore, a misura che una tal cifra si trasporta indietro d' un posto verso la sinistra; donde ne segue che andando da sinistra a destra, le unità di ciascun ordine divengono di dieci in dieci volte minori. Così, per esempio, si passa dalle milliaja alle centinaja, dalle centinaja alle diecine, e dalle diecine alle unità; ma in quest' ordine di decrescimento niente obbliga a fermarsi alle unità, e nello stesso modo che l' unità semplice è la decima parte della diecina, si può parimente immaginare delle unità frazionarie che siano la decima parte delle unità semplici, e che dovranno per conseguenza scriversi alla destra di queste.

Similmente si può concepire delle decime di decime o delle centesime dell' unità principale, che dovranno per conseguenza scriversi due posti dopo le unità semplici, cioè alla destra delle decime. Dopo le centesime verranno le millesime, le diecimillesime, ec.; e niente impedisce di spingere tali suddivisioni quanto lungi si vorrà. L' ordine secondo cui decrescono ha fatto loro dare il nome di *frazioni decimali*, e la maniera di scriverle è la stessa che per i numeri intieri: bisogna solo osservare di fissare in una maniera certa il posto delle unità intiere. È stato generalmente convenuto di servirsi a tal effetto d'una *virgola*, che si pone alla destra della cifra che le rappresenta, e per esprimere per esempio 341 più $\frac{1}{10}$, si scrive 341, 1; per esprimere 1347 più $\frac{3}{1000}$ si scrive 1347, 003, e così degli altri.

Se il numero che si vuole scrivere fosse 1326 più $\frac{732}{1000}$, l'operazione non avrebbe maggior difficoltà, perchè la frazione $\frac{732}{1000}$ può decomporsi in $\frac{700}{1000}$ più $\frac{30}{1000}$ più $\frac{2}{1000}$, che equivalgono a $\frac{7}{10}$ più $\frac{3}{100}$ più $\frac{2}{1000}$; donde si vede che il numero proposto deve scriversi così: 1326, 732. Così 37 più $\frac{756}{10000}$ si scriverebbe 37, 0756, perchè $\frac{756}{10000}$ equivalgono a $\frac{7}{100}$ più $\frac{5}{1000}$ più $\frac{6}{10000}$.

Se il numero da esprimersi non contiene unità intiere, si farà uso del carattere o, che non ha valore, per fissare il posto che dovrebbero occupare le unità intiere. Così, $\frac{1}{10}$ si scriverà 0, 1, $\frac{3}{1000}$ si scriveranno 0, 003; parimente $\frac{235}{10000}$ si scriveranno 0, 0235, perchè $\frac{235}{10000}$ equivalgono a $\frac{2}{100}$ più $\frac{3}{1000}$ più $\frac{5}{10000}$.

106. Di qui si vede che *per esprimere in decimali una frazione il di cui denominatore è* 10, 100, 1000, 10000, *o in generale l'unità seguita a dritta da un certo numero di zeri, basta scrivere il numeratore di questa frazione alla dritta delle unità, osservando che il posto nel quale si deve mettere l'ultima cifra di tal numeratore è sempre indicato dal numero degli zeri del denominatore*. Nella frazione 0, 0235 dell'esempio precedente si trovano tante cifre decimali a dritta della virgola, quanti zeri v'erano nel denominatore 10000 della frazione proposta $\frac{235}{10000}$.

Reciprocamente *una frazione decimale può sempre esser convertita in una frazione ordinaria, il di cui numeratore sarà composto delle cifre decimali medesime tali quali sono scritte nel numero proposto, e il di cui denominatore sarà l'unità seguita da tanti zeri quante decimali vi erano a dritta della virgola*. Per esempio o, 56 è lo stesso che $\frac{56}{100}$; o, 36 è lo stesso che $\frac{36}{100}$, e così dell'altre.

107. In quanto alla maniera di enunciare i numeri che contengono delle *parti decimali*, essa è presso a poco la stessa che per quelli che non ne contengono. *Si enunciano al solito le cifre che sono alla dritta della virgola: si enunciano dopo le cifre decimali, come se esprimessero delle unità intiere, e si aggiunge soltanto alla fine il nome che conviene all'ultima specie di decimali che si è nominata*. Il numero 36, 736 si pronuncia 36 unità 736 millesimi: la ragione n'è che o, 736 equivalgono a $\frac{736}{1000}$. Parimente per enunciare il numero 434, 0673, si direbbe 434 unità e 673 dieci-millesime, perchè o, 0673 è lo stesso che $\frac{673}{10000}$; e si direbbe soltanto 673 dieci-millionesime, se non si avesse che o, 0000673.

108. Un'osservazione che non bisogna tralasciare, si è che non si cangia punto il valore delle frazioni decimali, aggiungendo loro o togliendone sulla dritta uno o più zeri. Così o, 5, o $\frac{5}{10}$ è uguale a o, 50, o $\frac{50}{100}$; o, 784 o $\frac{784}{1000}$ è lo stesso che o, 78400, o $\frac{78400}{100000}$. Ciò è evidente da sè, ed è lo stesso che moltiplicare per il medesimo numero 10, 100, 1000 ec. i due termini delle frazioni proposte, il che non altera il loro valore. Profitteremo di quest'osservazione, quando se ne presenterà l'occasione, per semplicizzare i calcoli.

109. Poichè nelle frazioni decimali come nei numeri intieri, le unità di ciascun ordine divengono di dieci in dieci volte maggiori andando da destra a sinistra, le regole che abbiamo date num. 12 per l'addizione de' numeri intieri, si applicheranno ugualmente alle frazioni decimali. Se si proponesse per esempio di aggiungere insieme le frazioni o, 56, o, 003, o, 958, si scriverebbero in colonna come si vedono qui, mettendo le unità dello stess'ordine nella stessa colonna verticale.

$$\begin{array}{rr} & 0,59 \\ & 0,003 \\ & 0,958 \\ \hline \text{Somma} \ldots & 1,521 \end{array}$$

e si troverebbe 1, 521 per la somma cercata.

Se i numeri proposti contenessero delle unità intiere unite alle frazioni decimali, l' operazione non avrebbe maggior difficoltà. Se si avesse per esempio ad aggiungere 19, 35; 0, 3; 84, 5; e 110, 02, si scriverebbe

$$\begin{array}{rr} & 19,35 \\ & 0,3 \\ & 84,5 \\ & 110,02 \\ \hline \text{e si troverebbe} \ldots & 214,17 \end{array}$$ per la somma cercata.

Se dunque si vogliono aggiungere insieme più numeri che contengono delle frazioni decimali, bisognerà scrivere questi numeri in colonna in maniera che le unità dello stesso ordine si trovino situate nelle stesse colonne verticali; fare l' addizione colla regola del num. 12, *come se tutte le cifre de' numeri proposti rappresentassero delle unità intiere, e separare dopo sulla dritta del resultato tante cifre decimali quante ve n' erano in quello dei numeri proposti che ne conteneva di più.*

110. La sottrazione delle frazioni decimali si effettua del pari colla stessa regola che quella dei numeri intieri; ma per scansare ogni imbarazzo nell'applicazione di questa regola, si aggiungerà sulla destra dei due numeri proposti tanti zeri quanti ne bisognano perchè si trovi lo stesso numero di decimali nell'uno e nell' altro. Questa preparazione non cangia in verun modo il valore delle frazioni sulle quali si opera (num. 87).

Se dunque si dovesse togliere 0, 3697 da 0,62, si scriverebbe.

$$\begin{array}{r} 0\ ,\ 6200 \\ \underline{0\ .\ 3697} \end{array}$$

e si troverebbe . . . 0 , 2503 per la differenza cercata.

Se i numeri proposti contenessero delle unità intiere unite a delle frazioni decimali, l'operazione non avrebbe maggior difficoltà. Se si dovesse togliere 7, 364 da 8, 1457 si scriverebbe.

$$\begin{array}{r} 8\ .\ 1457 \\ \underline{7\ .\ 3640} \end{array}$$

e si troverebbe . . . 0 , 7817 per la differenza cercata.

Se dunque si vogliono sottrarre uno dall'altro due numeri che contengono parti decimali, si prepareranno come abbiamo detto di sopra, dopodichè non resterà che fare la sottrazione, come se la virgola fosse soppressa, e tutte le cifre rappresentassero delle unità intiere. Fatta la sottrazione, si separeranno sulla dritta del resultato tante cifre decimali quante ve n' erano in quello de' due numeri proposti che ne conteneva di più.

L'addizione e la sottrazione delle frazioni decimali si verificano come quelle dei numeri interi, cioè colle regole de' numeri 19 e 20. Per non ripeter qui ciò che abbiamo detto allora, ci rimanderemo i nostri lettori.

111. Nelle operazioni precedenti, bisogna portare una grande attenzione a non traslocare la virgola che indica il posto delle unità intiere; perchè si dee comprendere che una tal traslocazione influirebbe sul valore di ciascuna cifra, e perciò su quello del numero medesimo.

Difatti, se si ha il numero 134, 28, e facendo retrocedere la virgola d'un posto a destra si scriva 1342, 8, è chiaro che con quest' operazione la cifra 8, che prima esprimeva de' centesimi, esprime ora de' decimi. Parimente i decimi son diventati unità, le unità diecine, le diecine centinaja, e le centinaja milliaja.

Ciascuna delle parti del numero 134, 28 è dunque divenuta dieci volte maggiore per il traslocamento della virgola, donde segue che il nuovo numero è dieci volte più grande del primo.

Si proverebbe nella stessa maniera che facendo di nuovo retrocedere la virgola d'un posto verso la destra, il numero 13428 che risulterebbe da tale traslocazione sarebbe dieci volte maggiore del numero 1342, 8, e per conseguenza cento volte maggiore di 134, 28.

Se al contrario avanzando la virgola di un posto di più verso la sinistra, si fosse scritto 13, 428, è chiaro che con questa operazione le centinaja del primo numero sarebbero divenute diecine, le diecine unità, le unità decimi ec. Ciascuna delle parti del numero 134, 28 essendo divenuta dieci volte minore con quest'operazione, il nuovo numero sarebbe dieci volte minore del primo.

Si proverebbe nella stessa maniera che avanzando di nuovo la virgola d'un posto sulla sinistra, il numero 1, 3428 che risulterebbe da tale traslocazione sarebbe dieci volte minore del numero 13, 428, e per conseguenza cento volte minore di 134, 28.

Generalizzando i ragionamenti che ci hanno condotto a questi resultati, se ne concluderà che facendo retrocedere verso la destra, o avanzare verso la sinistra d'uno o più posti la virgola che indica il posto delle unità semplici, il numero sul quale si opera si trova moltiplicato o diviso per 10 tante volte successivamente quanti passi ha fatto la virgola in addietro o in avanti.

È facile prevedere dalle considerazioni precedenti il vantaggio che le frazioni decimali hanno sulle frazioni ordinarie; tutte le moltiplicazioni o divisioni che bisogna fare per il denominatore di queste, si effettuano nell'altre coll'aggiungere, o sopprimere un certo numero di zeri, o colla semplice traslocazione della virgola. Adottando queste modificazioni nella teoria delle frazioni ordinarie, se ne deduce tosto quella delle frazioni decimali.

112. Poichè le frazioni decimali possono sempre esser convertite in frazioni ordinarie, la loro moltiplicazione e la loro divisione o fra di loro o per dei numeri intieri si effettuerebbe col mezzo delle regole esposte di sopra per le frazioni ordinarie; ma queste operazioni possono essere considerabilmente semplicizzate col mezzo della proposizione precedente.

Di fatti proponiamoci per esempio di moltiplicare 34, 137 per 9.

Consideriamo per un istante tutte le cifre del moltiplicando come se esprimessero unità intiere, e non tenendo conto della virgola, moltiplichiamo 34137 unità per 9: avremo per prodotto 307233 unità. Ma per la soppressione della virgola, il fattore 34, 137 è divenuto mille volte maggiore; per conseguenza il prodotto che abbiamo trovato è mille volte maggiore di quello che cerchiamo, ed otterremo quest'ultimo dividendo 307233 per 1000, il che si farà separando sulla destra tre cifre decimali, cioè quante ne conteneva il moltiplicando; si avrà con tal mezzo 307, 233 per il prodotto cercato.

Questi ragionamenti potendo ugualmente applicarsi a tutti i casi della stessa natura, se ne concluderà che *per moltiplicare un numero che contiene delle frazioni decimali per un numero intero, bisogna effettuare la moltiplicazione per la regola del* num. 34. *non tenendo conto della virgola, e come se tutte le cifre del moltiplicando esprimessero unità intiere, dopodichè si separerà sulla destra del prodotto tante cifre decimali quante ne conteneva il moltiplicando.*

113. Passiamo adesso al caso in cui il moltiplicando, e il moltiplicatore contengano ambedue delle frazioni decimali. Proponiamoci per esempio di moltiplicare 172, 84 per 36, 003.

Consideriamo prima tutte le cifre di questi due numeri come se esprimessero unità intiere, e moltiplichiamo 17284 per 36003; avremo per prodotto 622275852 unità. Ma per la soppressione della virgola il moltiplicando è divenuto cento volte maggiore, e il moltiplicatore mille volte maggiore; il prodotto trovato è dunque mille volte cento volte, o centomila volte, maggiore di quello che cerchiamo, ed otterremo questo, dividendo 622275852 per 100000, il che si farà separando sulla destra di questo numero cinque cifre decimali, cioè quante se ne trovano nel moltiplicando e nel moltiplicatore prese insieme; si avrà con tal mezzo 6222, 75852 per il prodotto cercato.

E generalizzando questo ragionamento se ne concluderà che *per moltiplicare l'uno per l'altro due numeri che contengano frazioni decimali, bisogna effettuare la moltiplicazione secondo la regola del* num. 34, *senza tener conto della virgola, e separare dopo sulla dritta del prodotto tante cifre decimali quante se ne trovano sì nel moltiplicando che nel moltiplicatore.*

114. Prima di passare alla divisione delle parti decimali, bisogna rammentarsi che una frazione non cangia valore se si moltiplicano i suoi due termini per un medesimo numero; e siccome si è veduto n. 75, che tutti i quozienti di divisione potevano mettersi sotto la forma d'una frazione il di cui numeratore fosse il dividendo, e il denominatore il divisore, è chiaro che non si altererà il quoziente d'una divisione moltiplicando il dividendo e il divisore per un medesimo numero (num. 56).

Proponiamoci adesso di dividere 451, 59 per 13. Secondo ciò che abbiamo detto, si può sopprimere la virgola nel dividendo purchè si mettano due zeri di seguito al divisore; poichè in tal maniera saranno stati moltiplicati l'uno e l'altro per 100, e il quoziente dei due numeri resultati 45159 e 1300 sarà tuttavia quello che si cerca. Con tal mezzo, la questione proposta si riduce a dividere 45159 per 1300, il che si farà nella maniera solita, e darà per quoziente 34 unità e $\frac{959}{1300}$.

Si concluderà da quest'esempio che *per dividere un numero che contiene delle frazioni decimali per un numero intiero bisogna sopprimere la virgola nel dividendo, aggiungere sulla destra del divisore tanti zeri quanti decimali erano nel dividendo, ed effettuare dopo la divisione col mezzo della regola del* num. 46.

115. Vediamo adesso come bisogna operare nel caso in cui il dividendo e il divisore contengano ambedue dei decimali, come se si trattasse per esempio di dividere 315, 432 per 23, 4.

Non si cangerà il divisore aggiungendo due zeri alla sua destra (num. 87), il che darà 23, 400. Ma è chiaro da ciò che si è veduto di sopra, che dopo questa preparazione si può senza alterare il quoziente sopprimere la virgola nel dividendo, e nel divisore; perchè non si farà che renderli ambedue mille volte maggiori. Con tal mezzo, la questione sarà ridotta a dividere 315432 per 23400, donde resulterà per quoziente 13 unità $\frac{21232}{23400}$.

Si concluderà da quest' esempio che *per dividere uno per l'altro due numeri che contengono dei decimali, bisogna mettere alla destra di quello che ne ha meno tanti zeri quanti ne sono necessarj, perchè il numero delle cifre decimali sia lo stesso nel dividendo e nel divisore. Fatta tal preparazione, si sopprimerà la virgola nel dividendo e nel divisore, dopo di che si effettuerà la divisione come per i numeri intieri, col mezzo della regola del* num. 46.

116. È chiaro che se il dividendo non contiene esattamente il divisore, la divisione darà un resto che bisognerebbe mettere sotto la forma frazionaria; ma siccome l'oggetto che si ha in mira impiegando i decimali è di scansare le frazioni ordinarie, si convertirà questo resto in decimali, cioè in decimi, centesimi ec. Per darne un esempio prendiamo una divisione in cui il dividendo sia 441, 49, e il divisore 13.

	45149	1300
	6149	34, 73
resto	949	
decimi	9490	
centesimi	3900	
	0000	

Effettuando la divisione secondo il solito, si trova 34 unità per quoziente, e 949 per resto; ma invece di mettere questo resto sotto la forma frazionaria, si convertirà in decimi moltiplicandolo per 10, o scrivendo un zero alla sua destra, il che darà 9490 decimi. Effettuando la divisione si troverà 7 decimi per quoziente, e 390 decimi per resto. Questo resto essendo moltiplicato per 10 darà 3900 centesimi; effettuando la divisione, si troverà per quoziente 3 centesimi, e siccome non v'è resto, se ne concluderà che il quoziente cercato è 34, 73, come si può assicurarsene moltiplicandolo per il divisore.

È facile vedere che lo stesso metodo si applicherebbe ugualmente àd ogni altro esempio; esso è d'un uso frequente: ma qualora si adoprerà, bisognerà non scordarsi di mettere la virgola a destra della cifra del quoziente che esprime le unità intiere, subito che si sarà trovata una tal cifra. Senza questa precauzione, si rischierebbe di confondere dopo i decimali colle unità intiere, il che cangierebbe il valore del quoziente, e potrebbe portare a grossi errori (*).

117. Poichè le frazioni non sono altro che divisioni indicate, è chiaro che si potrà regolarsi nella stessa maniera per ridurre in frazione decimale una fra-

(*) L' operazione ora effettuata su'decimali non è che un caso particolare di quest'altra più generale: *valutare il quoziente d'una divisione in frazioni d'una specie data*, il che si fa convertendo il dividendo in frazione della stessa specie, o moltiplicandolo per il denominatore dato. Così per valutare in quindicesimi il quoziente di 7 per 3, si moltiplicherà 7 per 15, e si dividerà il prodotto 105 per 3; si avrà 35 quindicesimi, o $\frac{35}{15}$ per il quoziente richiesto.

zione ordinaria. Operando così sulla frazione $\frac{1}{8}$ si troverà che è uguale a 0,125. Si vede qui il dettaglio di quest'operazione; e siccome il quoziente non contiene unità, si è messo un zero per indicarne il posto.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 8 \\ \hline 10 & 0,\ 125 \\ 20 & \\ 40 & \end{array}$$

Se si avesse la frazione $\frac{4}{797}$, si sarebbe obbligati a ridurre il numeratore 4 in millesimi, aggiungendo tre zeri alla sua dritta, e si riempirebbe con degli zeri i posti delle unità, de'decimi, de'centesimi, che si trovano vuoti nel quoziente, si avrebbe

$$\begin{array}{r|l} 4 & 797 \\ \hline 4000 & 0,\ 005018\,(^*) \\ 1500 & \\ 7030 & \\ 654 & \end{array}$$

118. In quest'esempio non si avrà un quoziente esatto, per quanto si spinga lungi la divisione; non si può dunque esprimere questa frazione come la precedente $\frac{1}{8}$ con un numero decimale esatto. Per vedere onde deriva questa circostanza; basta osservare che la via che si tiene per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale, si riduce a moltiplicare il suo numeratore per 10, per 100, per 1000, ec. e

(*) Si può ancora cercare di convertire una frazione data in una frazione d'un'altra specie, ma minore della prima; trasformare per esempio $\frac{3}{4}$ in diciassettesimi. A ciò si giungerà moltiplicando 3 per 17, e dividendo il prodotto per 4: si troverà in tal maniera $\frac{51}{4}$ di diciassettesimo, ó $\frac{12}{17}$ e $\frac{3}{4}$ di diciassettesimo, il che equivale a $\frac{3}{68}$ Il resultato $\frac{12}{17}$ è dunque diverso dal vero di $\frac{3}{68}$.

In quest'operazione come in quella della nota precedente, il principio è lo stesso di quell o sul quale posa l'operazione corrisponden- nel sistema d:cim ale .

siccome per la natura delle frazioni, il denominatore non divide esattamente il numeratore primitivo, la divisione non può terminarsi se non quando divide esattamente uno dei numeri 10, 100, 1000 ec. Ora, questi numeri essendo formati tutti dal numero 10, che è divisibile solo per 2 o per 5, non sono divisibili essi medesimi che per 2 o per 5 o per i numeri che si formerebbero moltiplicando questi più volte di seguito per se stessi; 8 è uno di questi ultimi, poichè è uguale a 2 per 2 per 2.

Per tutte le frazioni che non soddisfanno a tal condizione, quando si vuol ridurle in decimali colla divisione, l'operazione si continua indefinitamente, e non si arriva mai al vero valore della frazione proposta, quantunque si possa però avvicinarvisi quanto si voglia; ma in questo caso un certo numero di cifre del quoziente si ripetono periodicamente nello stess'ordine Se si volesse, per esempio valutare in decimali la frazione $\frac{12}{37}$, si troverebbe per quoziente 0,324324......... resultato che si proseguirà quanto si vorrà ripetendo sempre le medesime cifre 3, 2, 4, ma senza poter mai arrivare al valore esatto della frazione proposta. Di fatti, ciascuno dei resti successivi essendo necessariamente minore del divisore, non può esservi che un numero limitato di resti differenti, e allorchè si sarà giunti di nuovo a un resto uguale ad uno de' precedenti, l'operazione si continuerà nella stessa maniera, e le cifre già ottenute la prima volta torneranno nell'ordine in cui si erano presentate da principio. Si è dato alle frazioni che godono di questa proprietà il nome di *periodiche*. Riducendo ancora le frazioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{22}{7}$ in frazioni decimali si troverebbe 0,3333......, e 3, 142857142857 14.......

Allorchè una quantità può esprimersi con un numero indefinito di cifre, per averne il valore lontano dal vero, meno d'un decimo, d'un centesimo, d'un millesimo ec. basta terminare la frazione decimale alla prima, alla seconda, alla terza ec. cifra, e trascurare le cifre susseguenti: ciò è chiaro da per sè, poichè la quantità proposta cadendo fra il numero frazionario decimale conservato, e il medesimo accresciuto d'unità nella sua ultima cifra, ed essendo la differenza di questi due numeri uguale ad un decimo, un centesimo, un millesimo ec. la differenza fra la quantità proposta ed uno dei medesimi deve essere respettivamente minore di un decimo, un centesimo, un millesimo ec. Così se si vuole in decimali il valore di $\frac{22}{7}$ lontano dal vero meno d'un centesimo, basta prendere della quantità 3, 142857142857 14.... le sole cifre 3, 14; poichè tal quantità cade fra 3,14, e 3, 15; e se se ne vuole il valore lontano dal vero meno d'un millesimo bisognerebbe prendere 3, 142, o piuttosto 3 143, giacchè la quantità 3, 1428571 4... è più prossima a 2, 14300000... che a 3, 14200000... E in generale quando la prima delle cifre trascurate è maggiore di 5, o le due prime sono maggiori di 50, o le tre prime maggiori di 500, e così ec. conviene aumentare d'un'unità l'ultima cifra conservata, per avere un valore più prossimo che si può al vero.

119. Del pari che per le altre frazioni decimali, si può dalle frazioni periodiche ripassare alle frazioni ordinarie di cui esse sono lo sviluppo; a ciò si giungerà col mezzo delle osservazioni seguenti.

Se si riducono in decimali le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$ o in generale l'unità divisa per un numero le di cui cifre siano tutte de'9, si avranno le frazioni periodiche 0, 11111...., 0, 010101 ....., 0, 001001001 ...., e così in seguito, nelle quali il numero delle cifre di ciascun periodo è uguale al numero delle cifre del denominatore delle frazioni generatrici.

Prendiamo adesso un'altra frazione periodica, per esempio la frazione 0, 3333....; essa è evidentemente uguale a 3 moltiplicato per 0, 1111 .... Ora questa frazione 0, 1111.... è uguale a $\frac{1}{9}$; dunque la frazione 0, 3333.... è uguale a $\frac{3}{9}$ o $\frac{1}{3}$, come abbiamo già veduto di sopra.

Se la frazione proposta fosse o, 324324 .... si potrebbe applicarle dei ragionamenti analoghi; poichè dividendola per 324, si vede che essa è uguale a 324 moltiplicato per o, 001001001 ....; ora questa frazione o, 001001 .... è uguale a $\frac{1}{999}$; dunque la frazione o, 324324 .... è uguale a $\frac{324}{999}$, o $\frac{12}{37}$ come già sapevamo.

Generalizzando il ragionamento che ci ha condotti a questo resultato, se ne concluderà che *per avere il valore esatto delle frazioni decimali periodiche, basta considerare da sè la parte che forma un periodo, e sostituirle una frazione il di cui numeratore sia composto delle medesime cifre di quel periodo, e il denominatore d' un ugual numero di* 9 *messi in seguito l' uno dell' altro.*

Questa regola è ugualmente applicabile quando il periodo non comincia se non dopo un certo numero di cifre decimali. Se si avesse per esempio la frazione o, 3241414I .... ove il periodo comincia solo alla terza decimale, si sostituirebbe alla parte periodica la frazione $\frac{41}{99}$, talmente che il valore esatto della frazione sarebbe o, 32 $\frac{41}{99}$; e si deve osservare che la frazione $\frac{41}{99}$ essendo riportata ai centesimi rappresenta $\frac{41}{9900}$; donde segue che la frazione decimale proposta è uguale a $\frac{32}{100}$ più $\frac{41}{9900}$, o $\frac{3209}{9900}$, come si può accertarsene colla divisione.

120. Sebbene tutte le frazioni ordinarie non possano essere esattamente convertite in frazioni decimali, ciò non impedisce l' uso di queste ne' bisogni della società; perchè in tutte le divisioni delle misure adoperate v'è un limite d'approssimazione che sarebbe inutile l'oltrepassare. Ne' calcoli di monete si trascurano ordinariamente le frazioni di denaro, e vi sono dei limiti simili per tutte le altre divisioni usitate. Questi limiti saranno determinati da' nostri bisogni, e fissati secondo la natura di ciascuna unità principale alla seconda o alla terza decimale, alla quale bisognerà fermarsi. Se d'altronde si osserva

che continuando la divisione si va sempre più accostandosi al vero valore della frazione proposta, e che si può con tal mezzo differirne quanto poco si vorrà, si riguarderà un tal inconveniente come nullo, avuto riguardo soprattutto ai gran vantaggi che resultano dall'uso delle frazioni decimali ne' calcoli. Questi motivi hanno fatto adottare il sistema decimale nella nuova divisione de' pesi e misure che è stata fatta in Francia, e che è già stata accettata da qualche altra nazione.

DELLE FRAZIONI CONTINUE.

121. Quando il calcolo conduce a una frazione il di cui numeratore e denominatore sono un poco grandi, senza avere però verun fattore comune, si cercano dei valori prossimi ad una tal frazione, che siano espressi da numeri più semplici per poter formarsene un'idea.

Se si ha per esempio il numero frazionario $\frac{1108}{887}$ se n'estraggono prima gli intieri, e viene 1 e $\frac{215}{887}$. Il primo valor prossimo della frazione proposta è dunque 1, ma è un valor troppo piccolo, poichè si ottiene trascurando la frazione $\frac{216}{887}$.

Ora per formarsi un'idea della frazione $\frac{216}{887}$, si dividano i suoi due termini per 216; si trova 1 per quoziente del numeratore, e $4\,\frac{23}{216}$ per quello del denominatore; quest'ultimo quoziente che si trova compreso per conseguenza fra 4 e 5, ci fa conoscere che la frazione $\frac{216}{887}$ cade fra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$. Fermandosi qui si vede che il secondo valore prossimo dell'espressione $\frac{1108}{887}$ è 1 e $\frac{1}{4}$ o $\frac{5}{4}$, ma che questo valore è troppo grande perchè il vero valore sarebbe uguale a 1

più 1 diviso per 4 e $\frac{23}{216}$, che si scrive così $1\,\cfrac{1}{4\,\frac{23}{216}}$

Per formarsi un'idea esatta dell'espressione $4\,\cfrac{1}{\frac{23}{216}}$, bisogna considerarla come indicante il quoziente dell'intiero 1 diviso per l'intiero 4 accompagnato dalla frazione $\frac{23}{216}$. Se si dividono i due termini di $\frac{23}{216}$ per 23, il quoziente sarà $\dfrac{1}{9\frac{9}{23}}$; negligendo i $\frac{9}{23}$ che accompagnano l'intiero 9, verrà $\frac{1}{9}$ solamente in vece di $\frac{23}{216}$, e per conseguenza $1\dfrac{1}{4\,\frac{1}{9}}$ sarà un terzo valor prossimo di $\frac{1103}{887}$, valore che sarà troppo piccolo, perchè 9 essendo minore del vero quoziente di 216 per 23, la frazione $\frac{1}{9}$ sarà maggiore di quella che deve accompagnare 4, e per conseguenza il divisore $4\,\frac{1}{9}$ sarà maggiore del divisore esatto $4\,\frac{23}{216}$ e il quoziente $\dfrac{1}{4\,\frac{1}{9}}$ minore del vero. Riducendo l'intiero 4 colla frazione che l'accompagna; e facendo la divisione secondo il metodo del num. 74 viene $\frac{9}{37}$ e si ha $1\dfrac{9}{37}$ o $\frac{46}{37}$ per il terzo valor prossimo di $\frac{1103}{887}$.

L' espressione esatta di questo valore essendo

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{9}{23}}}$$

, se dividiamo i due termini $\frac{9}{23}$ per 9, avremo

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{5}{9}}}}$$

; trascurando la frazione $\frac{5}{9}$; resterà

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2}}}$$

. Riducendo prima $9\,\frac{1}{2}$ in frazione, verrà $\frac{19}{2}$: $\dfrac{1}{9\frac{1}{2}}$ sarà dunque $\frac{2}{19}$, e il valore prossimo diverrà $1\cfrac{1}{4\cfrac{2}{19}}$: ora $\cfrac{1}{4\cfrac{2}{19}}$ dà $\frac{19}{78}$; aggiungendovi l'unità viene $1\,\frac{19}{78}$ o $\frac{97}{78}$ per un quarto valor prossimo di $\frac{1103}{887}$, e si proverà come sopra che questo quarto valore è maggiore del vero.

Torniamo all'espressione $1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{5}{9}}}}$ dividiamo i due termini dell'ultima frazione $\frac{5}{9}$ per 5, avremo $\cfrac{1}{1\cfrac{4}{5}}$, e perciò l'espressione precedente si cangerà in $1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{4}{5}}}}}$. Trascurando i $\frac{4}{5}$, la penultima frazione si riduce a $2\cfrac{1}{\cfrac{1}{1}}$, o a $\frac{1}{3}$; poi la seguente $9\cfrac{1}{\cfrac{1}{3}}$ dando $\frac{3}{28}$, la susseguente diviene $4\cfrac{1}{\frac{3}{28}}$ ossia $\frac{28}{115}$; talmente che il quinto valor prossimo è $1\,\frac{28}{115}$, o $\frac{143}{115}$; e questo è minore del vero.

Ciò che si è veduto basta per mostrare come si può proseguire più innanzi; tenendo la stessa strada si otterrà la stessa espressione $1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{1}{1}}}}}$ che ridotta darà il sesto valor prossimo $\frac{240}{193}$ maggiore del vero. E finalmente si otterrà la settima ed ultima espressione $1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{1}{4}}}}}$ che essendo ridotta come le precedenti, riproduce il numero frazionario $\frac{1103}{887}$.

L'espressioni nelle quali si è successivamente cangiata la frazione $\frac{1103}{887}$ si chiamano *frazioni continue*, e si possono in generale definire così: *frazioni il di cui denominatore è composto d'un intiero più una frazione, la quale ha pure per denominatore un intiero più una frazione*, e così in seguito.

122. Esaminando le operazioni del num. precedente, si vede che *per ridurre una frazione ordinaria in frazione continua, bisogna dividere il maggiore de' suoi due termini per il minore; poi il minore per il resto, quindi il primo resto per il secondo resto, il secondo per il terzo, e così di seguito*, ovvero *bisogna effettuare sopra i due termini della frazione proposta l'operazione colla quale* (n. 61) *si trova il loro massimo comun divisore. I quozienti nati dalle successive divisioni saranno i denominatori della frazione continua, la quale terminerà quando si giungerà a una divisione senza resto.*

Si vede pure che *per avere i valori prossimi della frazione proposta bisogna supporre la frazione continua che gli è uguale, terminata successivamente alla prima, indi alla seconda, poi alla terza ec. delle frazioni parziali di cui è composta; e quindi ridurre queste differenti frazioni continue in frazioni ordinarie d' ugual valore; e si avrà così una serie di valori che vanno sempre più accostandosi alla frazione data, e che sono alternativamente maggiori, e minori della medesima.*

123. Le frazioni decimali si riducono facilmente a frazioni ordinarie, (num. 85) quindi possono come queste esprimersi in frazione continua. Eccone due esempj.

Sia dato il numero frazionario decimale 1, 414 2135 per ridursi in frazione continua. Ridotto in frazione ordinaria diventa $\frac{14142135}{10000000}$; applicandovi l'operazione per cercare il massimo comun divisore dei suoi due termini.

14142135	10000000	4142135	1715730	710675	294380
4142135	1	2	2	2	2
	1715730	710675	291380	121915	ec.

si trovano i quozienti 1, 2, 2, 2, 2, ec.; quindi la frazione cercata continua è $1\cfrac{1}{2\cfrac{1}{2\cfrac{1}{2\cfrac{1}{2\ \text{ec.}}}}}$, e i valori prossimi della frazione proposta sono 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$ $\frac{17}{12}$ $\frac{41}{29}$ alternativamente minori, e maggiori del vero.

Sia dato per secondo esempio il numero 3, 1415926, che è uguale alla frazione ordinaria $\frac{31415926}{10000000}$, cui applicando l'operazione del comune divisore

31415926	10000000	1415926	88518	88156	362
1415926	3	7	15	1	243
	88518	530746	362	1575	
		88136		1276	ec.
				190	

si hanno i quozienti 3, 7, 15, 1, ec. onde la frazione continua è $3\cfrac{1}{7\cfrac{1}{15\cfrac{1}{1\ \text{ec.}}}}$, e i valori prossimi della frazione proposta sono 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, ec. alternativamente minori, e maggiori del vero.

124. Abbiamo veduto (num. 118) che vi sono delle frazioni decimali composte d'un numero indefinito di cifre. Se esse sono periodiche, abbiamo insegnato (n. 119) a ridurle a frazioni ordinarie, e quindi non vi sarà difficoltà per ridurle in frazioni continue. Ma se non sono periodiche (come ne vedremo degli esempi num. 132) il metodo del num. 119 è insufficiente, nè se ne trova un altro equivalente. Quindi per ridurle in frazioni continue, siccome non possono dividersi uno per l'altro due numeri composti d'un

numero indefinito di cifre, è necessario terminarle a quell'ordine di decimali che più ci piacerà, e trascurare le decimali seguenti: così, data per esempio la frazione indefinita 3, 14159265358979 32 ec. da ridursi in frazione continua, si può supporla terminata alla settima cifra decimale, e quindi fare l'operazione sulla frazione 3, 1415926. Ma poichè in tal guisa operando, la frazione data viene a rendersi più piccola, e il suo vero valore cade fra la frazione da noi assunta, e questa medesima aumentata d'una unità nella sua ultima cifra, bisogna fare l'operazione del massimo comun divisore sopra ambedue le frazioni fra cui cade la proposta, e ammetter quei soli quozienti successivi che ci vengono dati da ambedue le operazioni. Così per la frazione 3, 14159265358979 32 ec. dopo aver fatto il calcolo sopra 3, 1415926, qual'è nel n. precedente, bisogna ripeterlo sopra 3, 1415927, come segue:

31415927	10000000	1415927	88511	88262	249
1415927	3	7	15	1	354
	88511	530817	249	1356	
		88262		1112	
				116	

ec.

e ammettere i soli quozienti 3, 7, 15 e 1. Volendo una maggiore approssimazione, bisogna assumere un numero maggiore di decimali.

DELLA FORMAZIONE DE' NUMERI QUADRATI, E DELL'ESTRAZIONE DELLA LORO RADICE.

125. Quando si moltiplica un numero per se medesimo, il prodotto che ne risulta si chiama *quadrato* d'un tal numero; così 25 è il quadrato di 5, perchè 25 resulta dalla moltiplicazione di 5 per 5. Il numero che moltiplicato per se medesimo produce il quadrato, si chiama la di lui *radice quadrata* o semplicemente *radice*; così 5 è la radice quadrata di 25.

Un numero di cui si fa il quadrato è dunque nel tempo stesso moltiplicando, e moltiplicatore; esso è quindi due volte fattore del prodotto; perciò questo prodotto o quadrato si chiama ancora *potenza seconda* d'un tal numero; e questo numero si chiama ancora *radice seconda* del suo quadrato.

126. Per fare il quadrato d'un numero non bisogna dunque fare altro che moltiplicarlo per se medesimo secondo le regole ordinarie della moltiplicazione; ma non è ugualmente facile la ricerca inversa, dato cioè un quadrato trovarne, o *estrarne* la radice.

Il metodo che bisogna impiegare a tal oggetto suppone che si conoscano i quadrati de'numeri espressi da una sola cifra; Ecco dunque i primi 9 numeri co'loro quadrati scritti respettivamente di sotto

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Mediante questa tavola, quando si cerca la radice quadrata d'uno de'numeri che sono nel secondo verso, si sa subito che una tal radice è il numero corrispondente nel primo verso.

Si vede pure da questa tavola che il quadrato d'un numero espresso da una sola cifra non ne contiene più di due; 10 che è il numero più piccolo fra tutti quelli che sono espressi da due cifre, ne ha tre nel suo quadrato 100.

Per prepararci ad estrarre la radice seconda quando essa è composta di più d'una cifra, bisogna osservare ciò che succede nella formazione del quadrato.

Per *quadrare* un numero come 54 per esempio

$$\begin{array}{r} 45 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

dopo avere scritto il moltiplicatore come qui si vede, moltiplichiamo al solito la cifra 4 superiore per la cifra 4 inferiore, il che fa evidentemente *il quadrato delle unità*.

Moltiplichiamo quindi la cifra 5 superiore per la cifra 4 inferiore, il che fa il *prodotto delle diecine per le unità*.

Passiamo allora alla seconda cifra del moltiplicatore, e moltiplichiamo la cifra 4 superiore per la cifra 5 inferiore; il che fa il prodotto delle unità per le diecine, o (num. 27) *il prodotto delle diecine per le unità*.

Finalmente moltiplichiamo la cifra 5 superiore per la cifra 5 inferiore, il che fa il *quadrato delle diecine*.

Sommiamo questi prodotti, ed abbiamo per quadrato il numero 2916., che vediamo dunque esser composto *del quadrato delle diecine, più due volte il prodotto delle diecine per le unità, più il quadrato delle unità* del numero 54.

Ciò che abbiamo osservato essendo una conseguenza immediata delle regole della moltiplicazione, non è proprio pel numero 54 più che d'ogni altro numero composto di diecine e d'unità; talmente che si può dire in generale che *il quadrato d'ogni numero composto di diecine e d'unità contiene tre parti, cioè il quadrato delle diecine, due volte il prodotto delle diecine per le unità, e il quadrato delle unità*.

127. Posto ciò, siccome il quadrato delle diecine è di centinaja (poichè 10 per 10 fa 100) è chiaro che questo quadrato delle diecine non può far parte dell'ultima cifra del quadrato totale.

Parimente il doppio del prodotto delle diecine moltiplicate per le unità essendo necessariamente di diecine non può far parte dell'ultima cifra del quadrato totale.

Dunque per tornare dal quadrato 2916 alla sua radice, si può ragionar così:

2916	54 radice
416	
104	
000	

Cominciamo dal trovare le diecine di questa radice; la formazione del quadrato ci fa sperare che v'è in 2916 il quadrato di queste diecine, e che questo quadrato non può far parte delle sue ultime cifre; esso è dunque in 29; e siccome il quadrato più grande contenuto in 29 è 25, concludiamone che il numero delle diecine della radice è 5, e scriviamolo a canto a 2916, come si vede qui sopra.

Tolgo il quadrato 25 da 29; resta 4, a canto a cui abbasso le due altre cifre 16 del numero proposto 2916.

Per trovare adesso le unità della radice, rifletto a cosa contiene il resto 416; esso comprende solamente due parti del quadrato, cioè il doppio delle diecine della radice moltiplicate per le unità, e il quadrato delle unità della radice medesima. Di queste due parti, la prima basta per farci trovare le unità che cerchiamo; poichè siccome è formata dal doppio delle diecine moltiplicate per le unità, se viene divisa per il doppio delle diecine che conosciamo, deve (num. 37) dare per quoziente le unità; resta dunque soltanto a sapersi in qual parte di 416 è contenuto questo doppio delle diecine moltiplicate per le unità; ora abbiamo osservato di sopra che non poteva fare parte dell' ultima cifra; è dunque in 41, bisogna dunque dividere 41 per il doppio 10 delle diecine trovate; scrivo dunque sotto 41 il doppio 10 delle diecine, e, facendo la divisione, il quoziente 4 che trovo, è il numero dell'unità che porto alla destra delle 5 diecine trovate; talmente che la radice cercata è 54.

Ma bisogna osservare, che sebbene il quoziente 4 che abbiamo trovato sia di fatti quello che conviene, pure può accadere talora che il quoziente trovato in tal maniera sia maggiore di quello che è giusto; perchè 41 (cioè la parte che resta dopo la separazione dell'ultima cifra) contiene non solo il doppio delle diecine moltiplicate per le unità, ma ancora le diecine provenienti dal quadrato delle unità; perciò per non avere alcun dubbio sulla cifra delle unità, bisogna usare la verificazione seguente.

Dopo aver trovato la cifra 4 delle unità ed averla scritta nella radice, la porto a canto al doppio 10 delle diecine, il che fa 104, di cui moltiplico successivamente tutte le cifre per lo stesso numero 4, e tolgo i prodotti successivi delle parti corrispondenti di 416; siccome non v'è resto, ne concludo che la radice è di fatti 54.

La verificazione esposta è fondata sulla formazione stessa del quadrato; perchè quando si moltiplica 104 per 4, è chiaro che si forma il quadrato delle unità, e il doppio delle diecine moltiplicate per le unità, vale a dire ciò che completa il quadrato perfetto.

128. Ecco un esempio che mostra la necessità della verificazione predetta. Sia 324 il numero da cui si deve estrarre la radice quadrata.

324	18 radice
224	
28	
000	

Operando come sopra trovo che il numero delle diecine della radice è 1, ed ho il resto 224 che deve contenere il doppio delle diecine moltiplicate per le unità, e il quadrato delle unità; separando l'ultima cifra, resta 22 che deve contenere la prima delle due parti ora menzionate; e siccome il doppio delle diecine è 2, bisognerà dividere 22 per 2 per trovare le unità; il quoziente 11 che ne risulta è certamente troppo grande; infatti se all' 1 diecina trovata della radice bisognasse aggiungere 11 unità, ciò indicherebbe che il numero 1 delle diecine è troppo piccolo, il che non può essere, poichè per trovare le diecine medesime si è estratta la radice del massimo quadrato contenuto nelle centinaja del numero dato. Parimente si proverebbe che 10 è un quoziente troppo grande. E ciò è tanto vero che anche 9 sarebbe troppo grande nel caso attuale; difatti scrivendo 9 a canto a 2, e moltiplicando 29 per 9, secondo ciò che si è prescritto, si avrebbe per resultato 261 che non si può togliere da 224. Non si deve dunque riguardare la divisione di 22 per 2 se non come un mezzo d' approssimazione per trovare le unità, e bisogna diminuire il quoziente ottenuto successivamente d' un' unità, finchè si giunga a un prodotto che non superi il resto 224; il numero 8 soddisfa a tal condizione, poichè 8 per 28 fa 224. La radice cercata è 18.

Di qui si può dedurre in generale, che si debbono sempre rigettare come falsi i quozienti maggiori di 9.

Talora la parte che resta dopo la separazione dell' ultima cifra non conterrà il doppio delle diecine: e in tal caso si dovrà scrivere 0 alla radice.

129 Da ciò che abbiamo detto si conclude che per estrarre la radice quadrata da un numero che non ha più di quattro cifre nè meno di tre, bisogna dopo averne separate con un punto due sulla destra, cercare la radice quadrata del membro che resta a sinistra: questa radice sarà il numero delle diecine della radice totale cercata, e si scriverà accanto al numero proposto, separandonela con una linea.

Si sottrarrà da questo membro il quadrato della radice trovata, e dopo avere scritto il resto al di sotto del membro medesimo, si abbasserà a canto a questo resto le due cifre che si erano separate.

Si separerà con un punto la cifra delle unità del membro abbassato, e si dividerà quel che resta a sinistra per il doppio delle diecine che si scriverà di sotto.

Si scriverà il quoziente a canto alla prima cifra della radice e si scriverà ancora a canto al doppio delle diecine che è servito di divisore.

Finalmente, si moltiplicheranno per questo medesimo quoziente tutte le cifre che si troveranno in quest'ultima linea, e si sottrarranno i loro prodotti a misura che si formeranno dalle cifre che loro corrispondono nella linea superiore; e se il numero da sottrarsi supererà il numero dal quale si deve sottrarre, si correggerà il quoziente trovato, diminuendolo d'un'unità di mano in mano, finchè si giunge a un quoziente tale che non abbia più luogo il predetto inconveniente.

Ecco un esempio di quest'operazione sul numero 7569 di cui si cerca la radice quadrata

$$\begin{array}{r|l} 7569 & 87 \text{ radice} \\ 1169 & \\ 167 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

che si trova essere 87.

130. Dopo aver bene inteso ciò che abbiamo detto sulla radice quadrata de' numeri, che non hanno più di quattro cifre, si concepirà facilmente cosa convien fare quando il numero delle cifre è più grande. Di qualunque numero di cifre debba esser composta la radice, si può sempre concepirla composta di due parti, di cui l'una sia di diecine, e l'altra d'unità; per esempio 874 può esser considerato come rappresentante 87 diecine e 4 unità.

Posto ciò, quando si siano trovate le due prime cifre della radice col metodo esposto, si può pure trovare la terza collo stesso metodo, considerando queste due prime cifre come esprimenti un solo numero di diecine, ed applicando loro per trovare la terza, tutto ciò che è stato detto della prima per trovare la seconda.

Parimente, quando si saranno trovate le tre prime cifre, se deve esservene una quarta, si considereranno le tre prime come esprimenti un solo numero di diecine, a cui si applicherà per trovare la quarta lo stesso ragionamento che si applicava alle due prime per trovare la terza, e così in seguito.

Ma per procedere con ordine, bisogna cominciare dal dividere il numero proposto in membri, ciascuno di due cifre, andando da destra a sinistra; l'ultimo potrà averne una sola.

La ragione di tal preparazione si è, che considerando la radice come composto di diecine e d'unità, bisogna secondo ciò che è stato detto di sopra (num. 127) cominciare dal separare le due ultime cifre a destra per avere nella parte che resta a sinistra il quadrato delle diecine; ma siccome questa parte è essa pure composta di più di due cifre, un ragionamento simile conduce a separarne di nuovo due sulla destra, e così in seguito.

Per dare un esempio di quest'operazione si cerchi la radice quadrata di 76807696.

7680.76.96	8764
128.0	
167	
1117.6	
1746	
7009.6	
17524	
00000	

Dopo aver diviso il numero proposto in membri ciascuno di due cifre andando da destra a sinistra, cerco qual è il massimo quadrato contenuto nel membro 76 che è il primo a sinistra, trovo che esso è

64, la di cui radice è 8, scrivo 8 a canto al numero proposto; e sottraggo 64 da 76, scrivendo il resto 12 sotto a 76; a canto a questo resto abbasso il membro 80 di cui separo l'ultima cifra con un punto; e sotto la parte 128 scrivo 16 doppio della radice trovata; poi divido 128 per 16, e scrivo il quoziente 7 a canto alla 8 della radice, e a canto al doppio 16; moltiplico 167 per il medesimo numero 7, e tolgo da 1280 il prodotto di questa moltiplicazione: mi resta 111 a canto a cui abbasso il membro 76, il che forma 11176: separo l'ultima cifra 6 di questo numero, e sotto la parte 1117 che resta a sinistra scrivo 174 doppio della radice 87; divido 1117 per 174, e avendo trovato 6 per quoziente, scrivo 6 alla radice, e a canto al doppio 174; moltiplico 1764 per questo medesimo numero 6, e tolgo il prodotto da 11176, resta 700; a canto a questo resto abbasso 96 di cui separo l'ultima cifra; sotto a 7009 che resta a sinistra scrivo 1752 doppio della radice trovata 876, e dividendo 7009 per 1752, trovo per quoziente 4 che scrivo alla radice, e a canto al doppio 1752. Moltiplico 17524 per questo medesimo numero 4, e sottraggo il prodotto da 70096; non resta niente; onde la radice quadrata di 76807696 è esattamente 8764.

131. Tutti i numeri non sono quadrati perfetti; osservando la tavola del num. 126 si vede che fra i quadrati di ciascuno de' nove primi numeri, esistono delle lacune che comprendon molti numeri che non hanno radice espressa in numeri intieri; 45 per esempio non è un quadrato, poichè cade fra 36, e 49, la sua radice deve perciò cadere fra 6 e 7; deve cioè essere maggiore di 6, e minore di 7.

Ma tali numeri che non sono quadrati perfetti non possono aver per radici neppure dei numeri frazionarj giacchè il quadrato d'una frazione (che si può sempre supporre ridotta a'suoi minimi termini) è esso pure necessariamente una frazione. Infatti per fare il quadrato d'una frazione, bisogna moltiplicare la frazione per se medesima, cioè fare il quadrato del suo numeratore, e il quadrato del suo denominatore; così il quadrato di $\frac{5}{8}$ è $\frac{25}{64}$: ora non avendo il numeratore e il denominatore della frazione data verun fattore comune, è impossibile che lo abbiano il numeratore e il denominatore della frazione quadrata; poichè nel fare la moltiplicazione non s'introduce verun nuovo fattore, nè si alterano quelli che già vi erano, ma soltanto si ripetono ciascuno respettivamente due volte. La frazione quadrata è dunque per se stessa irreducibile; e perciò non può certamente essere un numero intero sotto forma frazionaria.

Le radici de' numeri non quadrati non potendo esprimersi nè in numeri interi, nè in numeri frazionarj, costituiscono una nuova specie di numeri, che si chiamano perciò *irrazionali*.

Tutti i numeri intieri, o frazionarj sono *commensurabili* coll'unità, vale a dire contengono l'unità, o una parte assegnabile dell'unità, un numero preciso di volte: così 7 contiene 7 volte l'unità, $\frac{9}{5}$ contiene 9 volte la quinta parte dell'unità; e quindi o l'unità stessa, o una sua parte assegnabile serve di *misura comune* al numero proposto e all'unità; così 1 è la misura comune di 7 e d'1, $\frac{1}{5}$ lo è di $\frac{9}{5}$ e d'1.

Ma le radici de' numeri non quadrati non potendo esser rappresentate nè da interi numeri nè da frazionarj, ne segue che in qualunque numero di parti si supponga divisa l'unità, veruna d'esse non potrà servire di misura comune a tali radici, e all'unità. Perciò esse diconsi ancora *numeri incommensurabili*.

132. Accaderà dunque il più delle volte che il numero di cui si chiederà la radice quadrata, non ne avrà alcuna; ma operando sopra il medesimo come se l'avesse, il resultato sarà la radice del quadrato più grande che esso contenga, e alla fine dell'operazione vi sarà un resto.

Se si cerca per esempio la radice di 2276

$$\begin{array}{r|l} 227.\,6 & 47 \\ 67.\,6 & \\ 8\;\;7 & \\ \hline 67 & \end{array}$$

si troverà 47, e avanzerà 67; il che ci fa vedere che il quadrato più grande contenuto in 2275 è quello di 47, ossia 2209.

Sebbene in tali casi non si possa estrarre la radice quadrata esattamente, si può però approssimarvisi quanto si vuole, si può cioè assegnare un valore di tal radice che differisca dal vero di qualsivoglia piccolissima quantità.

Quest'approssimazione si fa comodamente col mezzo dei decimali. Bisogna a tal effetto scrivere di seguito al numero proposto un numero di zeri doppio del numero delle cifre decimali che si vogliono nella radice, fare l'operazione al solito, e separare dopo con una virgola sulla destra della radice un numero di decimali che sia la metà del numero degli zeri aggiunti al numero proposto. Di fatti (num. 113) il prodotto della moltiplicazione dovendo contenere tante decimali quante ve ne sono ne' due fattori insieme, il quadrato (i di cui due fattori sono uguali) deve dunque averne il doppio di quelle che ne ha uno de' fattori, cioè il doppio di quelle che deve averne la radice.

Si dimanda per esempio la radice quadrata di 87567 prossima al vero in maniera che l'errore sia minore di un millesimo.

Per esprimere de'millesimi bisognano tre decimali; è necessario dunque aggiungere sei zeri al numero 87567: onde bisogna estrarre la radice quadrata da 87567000000.

8.75.67.00.00.00	295917
475	
49	
3467	
855	
54200	
5909	
10190.0	
56181	
427190.0	
591827	
129111	

Facendo l'operazione come negli esempj precedenti, si trova che per radice quadrata il numero 295917 distante dal vero di meno d' un' unità; questa è la radice di 8756700000; ma siccome si tratta di quella di 87567 ossia di 87567,000000, separo un numero di cifre decimali nella radice che sia la metà del numero di zeri che ho posti al quadrato, il che mi dà 295, 917 per la radice seconda di 87567 lontana dal vero meno d'un millesimo, poichè la vera radice cade fra 295, 917 e 295, 918, la differenza de' quali numeri è appunto d'un millesimo.

Parimente se si chiede la radice quadrata di 2 lontana dal vero meno d'un cento millionesimo, si estrarrà la radice quadrata di 20000000000000000, che si troverà essere 141421356; separando le otto cifre a destra con una virgola, si avrà 1, 41421356 per la radice quadrata di 2 lontana dal vero meno d'un cento millionesimo (*).

(*) A queste frazioni decimali nate dall'estrazione della radice quadrata non si può applicare il ragionamento del num. 118, in cui si provava che le frazioni decimali nate dalla divisione sono periodiche. Allora il divisore si manteneva costantemente il medesimo; adesso và cangiando ad ogni operazione. Dunque *in generale le frazioni decimali che si ottengono estraendo per approssimazione la radice quadrata da un numero intero non quadrato non sono periodiche*. Questo medesimo discorso potrà farsi quando si parlerà dell'estrazione per approssimazione della radice cuba.

133. Si è già veduto (num. 131) che per fare il quadrato d'una frazione, bisogna fare i quadrati del suo numeratore, e del suo denominatore; dunque reciprocamente per estrarre la radice quadrata d'una frazione, bisogna estrarla dal suo numeratore e dal suo denominatore; così la radice di $\frac{9}{16}$ è $\frac{3}{4}$, perchè quella di 9 è 3, e quella di 16 è 4.

Può accadere però che il numeratore o il denominatore, o ambedue non siano quadrati perfetti; se il solo numeratore non è un quadrato, se n'estrarrà per approssimazione la radice col metodo esposto, e avendo estratta la radice del denominatore, si darà questa per denominatore alla radice del numeratore. Se si cerca per esempio la radice di $\frac{2}{9}$, si estrarrà la radice prossima del numeratore 2, che si troverà essere 1,4, o 1,41, o 1,414, o 1,4142 ec. secondo che si vorrà avvicinarvisi più o meno, e siccome la radice quadrata di 9 è 3, si avrà per radice prossima di $\frac{2}{9}$ la quantità $\frac{1,4}{3}$ o $\frac{1,41}{3}$ o $\frac{1,414}{3}$ o $\frac{1,4142}{3}$ ec. E per non avere più specie di frazioni insieme, si ridurrà il resultato $\frac{1,4142}{3}$ unicamente in decimali, dividendo 1,4142 per 3, il che darà 0,4714 per la radice di $\frac{2}{9}$ espressa puramente in decimali.

Ma se il denominatore non è un quadrato, si moltiplicheranno i due termini della frazione per il denominatore medesimo, il che non cangia in verun modo il valore della frazione, e rende il denominarore quadrato; allora si opererà come nel caso precedente. Per esempio se si dimanda la radice quadrata di $\frac{3}{5}$, si cangerà questa frazione in $\frac{15}{25}$; estraendo la radice quadrata di 15 per esempio fino a tre decimali, si avrà 3, 872; e siccome la radice quadrata di 25 è 5, la radice quadrata di $\frac{3}{5}$ sara $\frac{3,872}{5}$ ovvero effettuando la divisione 0, 774.

134. Se si avessero degli intieri uniti a frazioni, si

ridurrebbero questi intieri in frazioni, (num. 69) e si opererebbe come si è prescritto per una frazione. Così per estrarre la radice di 8 $\frac{3}{7}$, si cangerebbe 8 $\frac{3}{7}$ in $\frac{59}{7}$, e questa (num. 133) in $\frac{413}{49}$ di cui si troverebbe che la radice prossima è $\frac{20,322}{7}$ o 2, 903.

Si può ancora ridurre in decimali la frazione che accompagna l'intiero, ma bisogna osservare d'impiegarvi un numero di decimali pari, e doppio di quello che si vuole avere nella radice (num. 132). Applicando questo metodo a 8 $\frac{3}{7}$ si trasforma in 8, 428571, la di cui radice è 2, 903 come sopra.

Se si dovesse estrarre la radice da una quantità decimale, bisognerebbe avere l'avvertenza di rendere il numero delle cifre decimali pari, se non lo è; ciò si fa scrivendo di seguito alle süe decimali 1, o 3, o 5 ec. zeri, il che non ne cangia il valore; quindi se n'estrae la radice, come se non vi fosse virgola; e dopo aver fatta l'operazione si separa sulla destra della radice con una virgola un numero di cifre decimali che sia la metà di quelle che ve ne sono nel numero proposto; talmente che se la radice non avesse abbastanza cifre per effettuare tal regola, vi si supplirebbe situando degli zeri sulla sinista di tal radice. Così per estrarre la radice quadrata di 21, 935 fino a' millesimi, cerco la radice quadrata di 21, 935000 che è 4, 683; ed essa lo è pure di 21, 935. Si troverà parimente che quella di 0, 542 approssimata fino a' milllesimi è 0, 736, e che quella di 0, 0054 pure fino a' millesimi è 0, 073.

DELLA FORMAZIONE DE' NUMERI CUBI, E DELL'ESTRAZIONE DELLA LORO RADICE.

135. Per formare ciò che si chiama *il cubo* d'un numero, bisogna moltiplicare un tal numero per se stesso, e moltiplicar dopo per il medesimo numero

il prodotto risultante dalla prima moltiplicazione.

Onde il cubo d'un numero è, propriamente parlando, il prodotto del quadrato d'un numero moltiplicato per il numero medesimo; 27 è il cubo di 3, perchè risulta dalla moltiplicazione di 9 quadrato di 3 per lo stesso numero 3.

Il numero di cui si fa il cubo è dunque tre volte fattore nel cubo, per questa ragione il cubo è ancora detto *potenza terza* d'un tal numero. E questo stesso numero si chiama *la radice cubica*, o *terza* del suo cubo; così 3 è la radice cubica di 27 (*).

136. Non v'è dunque bisogno di regole per formare il cubo d'un numero; ma per tornare dal cubo alla sua radice è necessario un metodo.

Prima di tutto convien conoscere i cubi de' numeri composti d'una sola cifra; nella tavoletta seguente vi sono questi numeri, e i loro respettivi cubi.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Quando dunque si dovrà estrarre la radice cubica d'uno de' numeri che sono nel secondo verso della precedente tavola, una tal radice sarà il numero corrispondente nel verso superiore.

I numeri composti di più d'una cifra hanno i loro cubi composti di più di tre cifre: 10 che è il numero più piccolo di tutti quelli di due cifre ha per cubo 1000 che è il più piccolo de' numeri di quattro cifre.

Per trovare il metodo d'estrazione della radice cubica, quando questa è composta di più d'una ci-

(*) In generale si dice che un numero è inalzato alla seconda, terza, quarta, quinta ec. potenza, quando è stato moltiplicato per se medesimo 1, 2. 3. 4 ec. volte consecutive, o quando e 2, 3, 4, 5, ec. volte fattore nel prodotto. Ed il numero medesimo si dice radice seconda, terza quarta, quinta ec delle sue respettive potenze. Così se si prende per esempio il numero 2. 4 è la sua potenza seconda, 8 la terza, 16 la quarta, 32 la quinta ec., e viceversa 2 è la radice seconda di 4, radice terza di 8, quarta di 32 ec. Gli Aritmetici non si occupano ordinariamente che delle sole potenze e radici seconda e terza.

fra, esaminiamo ciò che succede nella formazione del cubo d'un numero composto di diecine e d'unità.

137. Poichè il cubo risulta dal quadrato d'un numero moltiplicato per il numero medesimo, è essenziale rammentarsi qui (num. 126) che *il quadrato d'un numero composto di diecine e d'unità contiene, 1.° il quadrato delle diecine, 2.° due volte il prodotto delle diecine per le unità, 3.° il quadrato delle unità.*

Per formare il cubo, bisogna dunque moltiplicare queste tre parti per le diecine e l'unità dello stesso numero.

Affine di scorgere più distintamente i prodotti che ne risulteranno, diamo a quest' operazione simulata la forma seguente.

Il quadrato delle diecine. Due volte il prodotto delle diecine per le unità. Il quadrato delle unità.	1.° essendo moltiplicato per le diecine darà	Il cubo delle diecine. Due volte il prodotto del quadrato delle diecine moltiplicato per le unità. Il prodotto delle diecine per il quadrato delle unità.
Il quadrato delle diecine. Due volte il prodotto delle diecine per le unità. Il quadrato delle unità.	2.° essendo moltiplicato per le unità darà	Il prodotto del quadrato delle diecine moltiplicato per le unità Due volte il prodotto delle diecine per il quadrato delle unità. Il cubo delle unità.

Dunque radunando questi 6 resultati, e riunendo quelli che sono simili, si vede che *il cubo d'un numero composto di diecine e d'unità contiene quattro parti, cioè il cubo delle diecine, tre volte il quadrato delle diecine moltiplicato per le unità, tre volte le diecine moltiplicate per il quadrato delle unità, e finalmente il cubo delle unità.*

Formiamo in conseguenza di ciò il cubo d'un numero composto di diecine e d' unità, per esempio di 43.

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Prenderemo dunque il cubo di 4 che è 64; ma siccome queste 4 sono diecine, il loro cubo sarà di milliaja, perchè il cubo di 10 è 1000; onde il cubo delle 4 diecine è 64000.

Tre volte 16 o 3 volte il quadrato delle 4 diecine, essendo moltiplicato per le 3 unità, darà 144 centinaja, perchè il quadrato di 10 è 100; onde questo prodotto sarà 14400.

Tre volte 4 o 3 volte le diecine essendo moltiplicate per 9 quadrato delle 3 unità daranno delle diecine, e tal prodotto sarà 1080.

Finalmente il cubo delle unità sarà composto d'unità, e sarà 27.

Sommando queste quattro parti, si avrà 79507 per il cubo di 43; cubo che si sarebbe senza dubbio trovato più facilmente, moltiplicando 43 per 43, e il prodotto 1849 di nuovo per 43, ma qui interessa meno il trovare il valore del cubo, che lo scoprire per mezzo dell' esame delle parti che lo compongono la maniera di tornare alla sua radice.

138. Posto ciò, ecco come ci conterremo per estrarre la radice cubica; prendiamo per esempio il numero 79507.

$$\begin{array}{r|l} 7\ 9\ 5\ 0\ 7 & 43 \text{ radice} \\ \cline{2-2} 1\ 5\ 5.0\ 7 & \\ 4\ 8 & \end{array}$$

Per avere la parte di questo numero che contiene il cubo delle diecine della radice, ne separo le tre ultime cifre nelle quali abbiamo veduto che un tal cubo non può essere compreso, poichè esso è formato di milliaja.

Cerco il massimo cubo contenuto in 79 per mezzo della tavola del num. 136: questo è 64; scrivo la sua radice cubica 4 a canto al numero proposto.

Tolgo il cubo 64 da 79; resta 15 che scrivo sotto 79.

A canto a 15 abbasso 507, il che mi dà 15507, nel qual numero deve esservi tre volte il quadrato delle 4 diecine moltiplicato per le unità, più tre volte le diecine medesime moltiplicate per il quadrato delle unità, più finalmente il cubo delle unità.

Separo le due ultime cifre 07; la parte 155 che resta a sinistra deve contenere tre volte il quadrato delle diecine moltiplicato per le unità, giacchè come abbiamo osservato questo prodotto è formato di centinaja, perciò affine di avere le unità (37) divido questa parte 155 per il triplo del quadrato delle 4 diecine, cioè per 48.

Trovo che 48 sta 3 volte in 155, scrivo dunque 3 alla radice.

Per provare questa radice potremmo comporre le tre parti del cubo che debbono trovarsi in 15507, e vedere se formano 15507, o di quanto ne differiscono; ma è ugualmente comodo di fare questa verificazione, cubando subito 43, cioè moltiplicando 43 per 43 il che produce 1849, e moltiplicando questo prodotto per 43, il che dà finalmente 79507. Onde 43 è esattamente la radice cubica cercata.

139. Se il numero proposto ha più di sei cifre, si ragionerà come nell'esempio seguente.

Sia proposto d'estrarre la radice cubica dal numero 596947688.

```
596.947.688 | 842
 849.47     |
 192        |
 592704     |
-----------
   42436.88
   21168
  596947688
 ----------
 000000000
```

Si considererà la sua radice come composta di diecine e d'unità, e per tal ragione si comincerà dal separare le tre ultime cifre.

La parte 596947 che contiene il cubo delle diecine avendo più di 3 cifre, la sua radice ne avrà più d'una, e per conseguenza avrà delle diecine e delle unità; bisogna dunque, per trovare il cubo di quest'ultime diecine, separare le tre cifre 596.

Posto ciò, cerco il massimo cubo contenuto in 596; esso è 512 la di cui radice cubica è 8; scrivo 8 a canto al numero proposto, e sottraggo 512 da 596; resta 84 che scrivo sotto 596

A canto a 84 abbasso 947, il che mi dà 84947 di cui separo le due ultime cifre.

Sotto la parte 849, scrivo 192 che è il triplo del quadrato della radice 8, e dividendo 849 per 192, trovo per quoziente 4 che scrivo alla radice.

Considero la radice 84 come un solo numero esprimente le diecine della radice cercata, fo il cubo di 84, e trovo 592704 che sottraggo da 596947; ho per resto 4243.

A canto a questo resto abbasso il membro 688, separo le due ultime cifre 88, e divido la parte 42436 per il triplo del quadrato di 84 cioè per 21168, trovo per quoziente 2 che scrivo a canto a 84.

Per verificare la radice 842, ne fo il cubo, e siccome esso si trova uguale al numero proposto sottraendolo da questo resta zero; onde concludo che 842 è la radice esatta di 596947688.

Seguendo il metodo finora esposto si potrà estrarre la radice cubica da un numero composto di qualsivoglia numero di cifre. Importa però il fare alcune osservazioni; 1.° nel corso delle operazioni non si deve mai mettere un quoziente maggiore di 9 alla radice; 2.° se la cifra che si scrive alla radice fosse troppo grande, ciò si scorgerebbe dal non potersi effettuare la sottrazione, e allora si diminuirebbe la radice successivamente d'1, 2, 3 ec. unità finchè la sottrazione diventasse possibile; 3.° quando il divisore fosse maggior del dividendo si porrebbe o alla radice.

140. Non tutti i numeri sono cubi perfetti; quando dunque si dovrà estrarre la radice cubica da un numero non cubo, usando il metodo precedente si troverà la radice cubica del massimo cubo contenuto nel numero proposto, e si avrà un resto all'ultima operazione.

Sarà facile applicar qui un ragionamento analogo a quello del num. 131, e provare che le radici cube de'numeri non cubi non possono esprimersi neppure in numeri frazionarj, e che sono perciò numeri irrazionali, incommensurabili.

Per approssimarsi quanto si vorrà alla radice cubica d'un cubo imperfetto, bisognerà porre di seguito al numero proposto un numero di zeri triplo del numero delle cifre decimali che si vogliono avere nella radice, e ciò per una ragione simile a quella esposta nel num. 132; fare l'estrazione come negli esempi precedenti, e separar poi con una virgola sulla destra della radice tante cifre quante decimali si volevano.

Si cerchi per esempio la radice cubica di 8755 in modo che sia lontana dal vero meno d'un centesimo. Per avere dei centesimi nella radice, cioè due decimali, bisogna che il numero proposto ne abbia sei (num. 113); bisogna dunque porre sei zeri di seguito a 8755.

Onde la questione si riduce a estrar la radice cubica da 8755000000.

```
8.755.000.000   2061
07.55
12
8000
  7550.00
  1200
8741816
    131840.00
    127308
8754552981
      447019
```

Secondo ciò che si è detto sopra, divido questo numero in membri ciascuno di tre cifre andando da destra a sinistra.

L'ultimo membro 8 è un cubo perfetto, la di cui radice cubica 2 scrivo nel posto della radice: sottraendo il suo cubo 8 ho per resto 0, a canto a cui abbasso il membro 755 di cui separo le due ultime cifre 55; sotto la parte restante 7, scrivo 12 triplo del quadrato della radice, e dividendo 7 per 12 trovo 0 per quoziente che scrivo alla radice.

Fo il cubo della radice 20, ed ho 8000 che sottraggo da 8755; ho per resto 755 a canto a cui abbasso il membro 000, di cui separo due cifre sulla dritta; sotto la parte restante 7550 scrivo 1200 triplo del quadrato della radice 20, e dividendo 7550 per 1200 trovo per quoziente 6, che scrivo alla radice.

Fo il cubo della radice 206 che è 8741816, lo sottraggo da 8755000, ho per resto 13184 a canto a cui abbasso l'ultimo membro 000, di cui separo le due ultime cifre. Sotto la parte restante 131840 scrivo 127308 triplo del quadrato della radice trovata 206. Divido 131840 per 127308; trovo per quoziente 1 che scrivo di seguito a 206. Cubo 2061 e avendo tolto da 8755000000 il cubo 8754552981 ho per resto 447019.

La radice cubica prossima di 8755000000 è dun-

que 2061; e perciò quella di 8755, 000000 è 20, 61.
È chiaro che seguitando nella stessa maniera si può portare lungi l'approssimazione quanto più piacerà.

141. Poichè per moltiplicare una frazione per una frazione, bisogna moltiplicare il numeratore per il numeratore, e il denominatore per il denominatore, bisognerà quindi, per fare il cubo d'una frazione, fare il cubo del suo numeratore e del suo denominatore; così il cubo di $\frac{5}{6}$ per esempio si troverà essere $\frac{125}{216}$. Dunque reciprocamente, per estrarre la radice cubica d'una frazione bisognerà estrarre la radice cubica dal suo numeratore e dal suo denominatore. Così la radice cubica di $\frac{27}{64}$ è $\frac{3}{4}$, perchè la radice cubica di 27 è 3, e quella di 64 è 4.

Se il solo denominatore è un cubo, si estrarrà la radice prossima del numeratore, e si darà a questa radice per denominatore la radice cubica del denominatore. Per esempio, se si dimanda la radice-cubica di $\frac{143}{343}$, siccome il numeratore non è un cubo, ne estraggo la radice prossima che sarà 5, 22 lontana dal vero meno di un centesimo; ed estraendo la radice cubica di 343 che è 7, ho $\frac{5,22}{7}$ per la radice prossima di $\frac{143}{343}$; oppure riducendo in decimali, ho 0, 74 per il valore di una tal radice lontano dal vero meno d'un centesimo.

Se il denominatore non è un cubo, si moltiplicheranno i due termini della frazione per il quadrato del denominatore, e allora essendo il nuovo denominatore un cubo, si opererà come si è ora detto. Se si cerca, per esempio, la radice cubica di $\frac{3}{7}$, moltiplico il numeratore e il denominatore per 49 quadrato del denominatore 7, ho $\frac{147}{343}$ che ha lo stesso valore di $\frac{3}{7}$. La radice cubica di $\frac{147}{343}$ è $\frac{5,27}{7}$, o riducendo semplicemente in decimali 0, 75; la radice cubica di $\frac{3}{7}$ è dunque 0, 75 lontana dal vero meno d'un centesimo.

Se vi fossero degli intieri uniti alle frazioni, si convertirebbe il tutto in frazione, e l'operazione sarebbe allora ridotta ad estrarre la radice cubica d'una frazione.

142. Si potrebbe pure, o che vi siano degli intieri, o che non ve ne siano, ridurre la frazione in decimali; ma bisogna aver l'attenzione di spingere questa riduzione fino ad un numero di decimali triplo di quello che se ne vuole nella radice. Così, se si dimandasse la radice cubica di $7\,\frac{3}{11}$ lontana dal vero meno d'un millesimo, si cangerebbe la frazione $\frac{3}{11}$ in 0, 272727272; talmente che, per avere la radice cubica di $7\,\frac{3}{11}$ si estrarrà quella di 7, 272727272, che si troverà essere 1, 937.

Per estrarre la radice cubica d'un numero proposto che contenga dei decimali, bisognerà prepararlo con un numero sufficiente di zeri posti di seguito al medesimo, talmente che il numero delle sue cifre decimali sia o 3, o 6, o 9 ec.; allora se n' estrarrà la radice, come se non vi fosse virgola; e dopo aver fatta l' operazione, si separerà sulla destra della radice con una virgola un numero delle cifre che sia il terzo del numero de' decimali della quantità proposta; talmente che se la radice non avesse abbastanza cifre perchè questa regola avesse la sua esecuzione, vi si supplirebbe con degli zeri posti sulla sinistra di tal radice. Così per estrarre la radice cubica di 6, 54 lontana dal vero meno d'un millesimo, porrò 7 zeri, ed estrarrò la radice cubica di 6540000000, che sarà 1870; ne separerò 3 cifre; poichè ve ne sono 9 decimali nel cubo, ed avrò 1, 870, o semplicemente 1.87 per la radice cubica di 6, 54. Si troverà parimente che quella di 0, 0006 lontana dal vero meno d'un centesimo è 0, 08.

DE' RAPPORTI E DELLE PROPORZIONI.

143. Due quantità possono paragonarsi fra loro sotto due aspetti diversi.

Se paragonandole si vuol conoscere di quanto l'una supera l'altra o n'è superata, conviene sottrarre la minore dalla maggiore; il resto che ne risulta è la *differenza* delle due quantità proposte, e chiamasi *ragione*, o *rapporto aritmetico*. Così se paragono 15 con 8 per conoscere la loro differenza 7, questo numero 7 che è il resultato di tal paragone è il rapporto aritmetico di 15 a 8. E per indicare che si paragonano due quantità sotto questo punto di vista, si scrive un punto fra l'una e l'altra, talmente che 15 . 8 indica che si considera il rapporto aritmetico di 15 a 8.

Se poi paragonando due quantità si vuol conoscere quante volte l'una contiene l'altra o è in essa contenuta, bisogna dividere l'una per l'altra, e il quoziente che ne risulta indica un tal numero di volte, il quale si chiama *rapporto* o *ragione geometrica*. Per esempio, se paragono 3 a 12 per sapere quante volte 3 è contenuto in 12, il numero 4 che esprime questo numero di volte è il rapporto geometrico di 3 a 12. E per indicare che due quantità si paragonano sotto questo punto di vista, si pongono due punti fra l'una e l'altra; quest'espressione 3 : 12 indica che si considera il rapporto geometrico di 3 a 12.

Delle due quantità che si paragonano quella che si enuncia o si scrive la prima, si chiama *antecedente* e la seconda si chiama *conseguente*. Così nel rapporto 3: 12, 3 è l'antecedente, e 12 è il conseguente; ambedue si chiamano i *termini* del rapporto.

144. Se nel rapporto aritmetico l'antecedente è minore del conseguente, la differenza chiamasi *additiva*, perchè aggiunta al primo termine fa nascere il secondo; se poi l'antecedente è maggiore del conseguente, la differenza dicesi *sottrattiva* per la ragione opposta. Così nel rapporto 13 . 15 la differenza 2 è additiva, nel rapporto 15 . 13 è sottrattiva.

Per valutare un rapporto geometrico si può dividere l'antecedente per il conseguente, ovvero il conseguente per l'antecedente; noi seguiremo invariabilmente questa seconda maniera; così il rapporto di 3 a 12 è 4, e il rapporto di 12 a 3 è $\frac{3}{12}$ ovvero $\frac{1}{4}$.

145. Un rapporto aritmetico non cangia quando si aggiunge a ciascuno de' suoi due termini, o quando se ne toglie una stessa quantità; perchè la differenza nella quale consiste il rapporto, resta sempre la medesima. Così il rapporto 7 . 3 è lo stesso che il rapporto 12 . 8 che si ottiene aggiungendo 5 a ciascun termine del primo; ed è lo stesso che quello di 5 . 1 che nasce togliendone 2.

Un rapporto geometrico non cangia quando si moltiplicano o si dividono i suoi due termini per uno stesso numero; poichè il rapporto geometrico essendo il quoziente della divisione del conseguente per l'antecedente, è una quantità frazionaria, che non può cangiare moltiplicando o dividendo i suoi due termini per uno stesso numero. Così il rapporto 3 : 12 è lo stesso che questo 6 : 24 che si ottiene moltiplicando i due termini del primo per 2; ed è lo stesso che quello di 1 : 4 che nasce dividendoli per 3.

Questa proprietà serve a semplicizzare i rapporti geometrici. Per esempio, se dovessi esaminare il rapporto di $6\frac{3}{4}$ a $10\frac{2}{3}$, direi, riducendo tutto in frazione, questo rapporto è lo stesso che quello di $\frac{27}{4}$ a $\frac{32}{3}$, o riducendo al medesimo denominatore è lo stesso che quello di $\frac{81}{12}$ a $\frac{128}{12}$; o finalmente sopprimendo il denominatore 12, cioè moltiplicando i due termini del rapporto per 12, è lo stesso che quello di 81 a 128.

146. Quando quattro quantità sono tali che il rapporto delle due prime sia lo stesso che il rapporto delle due ultime, si dice che queste quattro quantità formano una *proporzione*, o *analogia*, ovvero che sono *proporzionali*; e tal proporzione è *aritmetica* o *geometrica* secondo che i rapporti che vi si considerano sono aritmetici, o geometrici (*).

(*) Queste denominazioni delle ragioni e delle proporzioni sono

Onde la proporzione non è altro che la riunione di due rapporti uguali.

Le quattro quantità 7, 9, 12, 14 formano una proporzione aritmetica, perchè la differenza delle due prime è uguale a quella delle due ultime. Per indicare che sono in proporzione aritmetica, si scrivono così: 7. 9: 12. 14; cioè, si separano con un punto i due termini di ciascun rapporto, e i due rapporti con due punti; e per enunciare la proporzione così scritta, si dice 7 *sta a* 9 *aritmeticamente come sta a* 12 14.

Le quattro quantità 3, 15, 4, 20 formano una proporzione geometrica; perchè 3 è contenuto in 15 tante volte quante 4 è contenuto in 20. Per indicare che sono in proporzione geometrica, si scrivono così: 3 : 15 : : 4 : 20; cioè si separano con due punti i due termini di ciascun rapporto, e i due rapporti con quattro punti; e si legge 3 *sta a* 15 *come* 4 *sta a* 20.

Il primo e l'ultimo termine della proporzione si chiamano *gli estremi*; il secondo e il terzo si chiamano *i medj*.

Siccome vi sono due rapporti, e per conseguenza due antecedenti e due conseguenti, si dice per il primo rapporto *primo antecedente*, *primo conseguente*, e per il secondo, *secondo antecedente*, *secondo conseguente*.

Quando i due termini medj d'una proporzione sono uguali, la proporzione si chiama *proporzione con-*

affatto viziose. Infatti le une sono dette *geometriche* solo perchè gli antichi ne trattarono nella geometria, rappresentando con linee le quantità in esse considerate; ma poichè l'idea primitiva di esse consiste nel *numero di volte* che le quantità paragonate si contengono l'una l'altra, quindi è che propriamente parlando esse appartengono all'Aritmetica, e che per conseguenza il nome di *aritmetiche* non compete all'altre più convenientemente che a queste. E siccome nel linguaggio comune co' vocaboli di *rapporto* e *proporzione* s'intende d'esprimere ciò che noi abbiamo chiamato *rapporto* e *proporzione geometrica*, potrebbe correggersi in linguaggio matematico adottando le predette espressioni volgari, e riserbando il nome di *differenza* e di *equidifferenza* a ciò che si è finora chiamato *rapporto* e *proporzione aritmetica*.

tinua. Così 3 . 7 : 7 . 11 formano una proporzione aritmetica continua; si scrivono così ÷ 3 . 7 . 13; i due punti e la linea che precedono servono ad avvertire che leggendo si deve ripetere il termine medio che qui è 7. La proporzione 5 : 20 :: 20 : 80 è una proporzione geometrica continua, che per abbreviazione si scrive così ∺ 5 : 20 : 80; l'uso dei quattro punti e della linea si è d'avvertire che leggendo si deve ripetere il termine medio che qui è 20.

Si dà il nome di *progressione aritmetica* ad una serie di termini, ciascuno dei quali supera quello che lo precede, o n'è superato d'una stessa quantità. Tali sono le serie ÷ 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. ec. ÷ 68. 63. 58. 53. 48. 43. 38. 33. ec. I due punti separati da una linea che sono al principio della progressione, sono destinati a indicare che enunciando questa progressione si deve ripetere ciascun termine, fuorchè il primo, e l'ultimo, in questa maniera: 1 *sta a* 4 *aritmeticamente come* 4 *sta a* 7 *come* 7 *sta a* 10 ec.

Si chiama *progressione geometrica* una serie di termini, ciascuno dei quali contiene quello che lo precede, o è in esso contenuto uno stesso numero di volte: tali sono per esempio le serie ∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 ec. e ∺ 1458 : 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2. I quattro punti separati da una linea che precedono la progressione hanno lo stesso uso dei due punti che precedono la progressione aritmetica: se ne pongono quattro per avvertire che la progressione è geometrica.

147. La proprietà fondamentale delle proporzioni aritmetiche è che *la somma degli estremi è uguale alla somma de' medj*: per esempio in questa proporzione 3 . 7 : 8 . 12, la somma 3 e 12 degli estremi, e quella 7 e 8 dei medj sono del pari uguali a 15.

Per provare questa proprietà in generale bisogna osservare che il secondo termine è uguale al primo, più la differenza se questa è additiva; ovvero è uguale al primo meno la differenza se questa è sottrattiva, e che il quarto termine è similmente uguale al terzo più o meno la differenza. Donde ne segue che la somma degli estremi composta dal primo e dal quarto termine sarà uguale al primo, più il terzo, più o meno la differenza; parimente la somma dei medj composta del secondo e del terzo termine sarà uguale al primo più o meno la differenza più il terzo. Queste due somme sono dunque composte delle stesse parti, e per conseguenza sono uguali.

Nella proporzione continua essendo i due termini medj uguali fra loro, la somma degli estremi sarà il doppio del termine di mezzo, ovvero il termine medio sarà la metà della somma degli estremi; così per avere un medio aritmetico fra 7 e 15, per esempio, sommando 7 e 15, e prendendo la metà della somma 22, si ha 11 per il termine medio; talmente che $\div 7 . 11 . 15$.

Se in una proporzione aritmetica qualunque si conoscono tre termini, si potrà trovare quello che manca. Supponiamo che si cerchi un estremo: esso si troverebbe se dalla somma degli estremi si togliesse l'estremo cognito; ma la somma degli estremi è uguale a quella de' medj; dunque quando si conoscono due medj e un estremo, si avrà l'estremo incognito sottraendo dalla somma de' medj l'estremo cognito. E similmente si proverà che se si conoscono due estremi e un medio, si avrà il medio incognito togliendo dalla somma degli estremi il medio cognito.

Non estenderemo più oltre la teoria delle proporzioni aritmetiche; ma ci occuperemo piuttosto di quella delle proporzioni geometriche, che è di ben maggiore importanza.

148. La proprietà fondamentale della proporzione geometrica è che *il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj*; per esempio in questa proporzione $3 : 15 :: 7 : 35$, il prodotto di 35 per 3 e quello di 15 per 7 sono del pari 105.

Per dimostrarlo in generale, ricordiamoci che un rapporto geometrico non è altro che il quoziente nato dalla divisione del conseguente per l'antecedente; quindi il conseguente d'un rapporto è uguale al numero esprimente questo rapporto moltiplicato per l'antecedente. Così essendo 5 il rapporto di 3 : 15, il conseguente 15 è uguale all'antecedente 3 moltiplicato per il rapporto 5.

Posto ciò, essendo in qualunque proporzione geometrica il secondo termine uguale al primo moltiplicato per il rapporto, e similmente il quarto uguale al terzo moltiplicato per il rapporto, ne segue che il prodotto degli estremi formato dal primo e dal quarto termine sarà uguale al primo moltiplicato per il terzo e per il rapporto; e parimente il prodotto dei medj formato dal secondo e dal terzo termine sarà uguale al primo moltiplicato per il rapporto e per il terzo. Questi due prodotti sono dunque composti degli stessi fattori, e per conseguenza sono uguali.

Quindi si può prendere il prodotto degli estremi in vece di quello de' medj, e viceversa.

Dunque *nella proporzione geometrica continua il prodotto degli estremi è uguale al quadrato del termine medio*; perchè essendo uguali i due medj, il loro prodotto è il quadrato d'uno d'essi. Dunque per avere un medio geometrico fra due numeri proposti, bisogna moltiplicare questi due numeri insieme, ed estrarre la radice quadrata del prodotto che ne nasce. Così per avere un medio geometrico fra 4 e 9, moltiplicato 4 per 9, la radice quadrata 6 del prodotto 36 è il medio porporzionale cercato.

149. Dalla proprietà fondamentale della proporzione geometrica ne segue che se conoscendo i tre primi termini d'una proporzione si volesse determinare il quarto bisognerebbe moltiplicare il secondo per il terzo, e dividere il prodotto per il primo; poichè è chiaro che si avrebbe il quarto termine dividendo il prodotto dei due estremi per il primo: ora questo prodotto è lo stesso che quello dei medj;

dunque, si avrà pure il quarto termine, dividendo il prodotto de' medj per il primo termine.

Così, se si dimanda qual sarà il quarto termine d'una proporzione, di cui i tre primi siano $3:8::12$, moltiplico 8 per 12, il che mi dà 96 che divido per 3; il quoziente 32 è il quarto termine richiesto; talmente che 3, 8, 12, 32 formano una proporzione; di fatti il primo rapporto è $\frac{8}{3}$ e il secondo è $\frac{32}{12}$ che dividendo i due termini per 4 è parimente $\frac{8}{3}$.

Con un ragionamento simile, si vede che si può trovare un altro termine qualunque della proporzione, quando se ne conoscono tre. *Se il termine che si vuol trovare è uno degli estremi, bisognerà moltiplicare i due medj, e dividere il prodotto per l'estremo cognito; se al contrario si vuol trovare uno dei medj, bisognerà moltiplicare i due estremi, e dividere per il termine medio cognito.*

150. Se quattro quantità non sono in proporzione geometrica, non può il prodotto degli estremi essere uguale al prodotto de' medj. Poichè essendo (num. 148) il prodotto degli estremi uguale al primo termine moltiplicato per il terzo termine e per il secondo rapporto, ed essendo il prodotto de' medj uguale al primo termine moltiplicato per il primo rapporto e per il terzo termine, siccome i due rapporti sono disuguali, questi prodotti hanno un fattore disuguale, e due uguali; quindi devono essere necessariamente disuguali.

Onde *se quattro quantità sono tali che il prodotto degli estremi sia uguale al prodotto de' medj, quelle quattro quantità sono proporzionali.*

Quindi se si hanno due prodotti uguali, e ciascuno di essi sia composto di due fattori, se ne potrà ricavare una proporzione, di cui i due fattori d'un prodotto saranno gli estremi, e i due fattori dell'altro prodotto saranno i medj. Starà dunque un fattore del primo prodotto ad un fattore del secondo, come l'altro fattore di questo secondo prodotto sta all'altro fattore del primo; il che si esprime più brevemente così: *Se due prodotti sono uguali i loro fattori sono reciprocamente proporzionali*. Così essendo 3 per 8 uguale a 4 per 6, si ricava 3 : 4 : : 6 : 8.

151. Dallo stesso principio derivano pure quest'altre proprietà delle proporzioni.

Se quattro quantità sono proporzionali esse resteranno tali ancora se si porranno gli estremi nel posto de' medj e i medj nel posto degli estremi.

La stessa cosa avrà luogo, cioè *la proporzione sussisterà se si cangiano i posti degli estremi, ovvero quelli dei medj*.

Di fatti è facile vedere che in tutti questi casi il prodotto degli estremi sarà sempre uguale a quello de' medj.

Così la proporzione 3 : 8 : : 12 : 32 può fornire tutte le proporzioni seguenti colla sola permutazione de' suoi termini.

3 : 8 : : 12 : 32
3 : 12 : : 8 : 32
32 : 12 : : 8 : 3
32 : 8 : : 12 : 3
8 : 3 : : 32 : 12
8 : 32 : : 3 : 12
12 : 3 : : 32 : 8
12 : 32 : : 3 : 8

Ed è lo stesso di qualunque altra proporzione (*).

152. Poichè si può mettere il terzo termine nel posto del secondo e reciprocamente, si deve concluderne che *si può, senza alterare una proporzione, moltiplicare o dividere i due antecedenti per un me-*

(*) Nell'opere degli antichi, ed in quelle scritte col loro metodo, si trova la parola latina *invertendo* per esprimere i cangiamenti che si può far subire ad una proporzione, mettendo gli estremi nel posto de' medj, e i medj nel posto degli estremi; e quelle di *alternando*, o *permutando* per indicare i cangiamenti che si ottengono cangiando di posto i due medj, ovvero i due estremi.

desimo numero, e che è lo stesso per riguardo ai conseguenti; poichè, facendo una tal permutazione, i due antecedenti della proporzione data formeranno il primo rapporto, e i due conseguenti il secondo. Perciò moltiplicare o dividere i due antecedenti della prima proporzione è allora lo stesso che moltiplicare o dividere i due termini d'un rapporto, ciascuno per uno stesso numero; il che non cangia (num. 145) un tal rapporto. Per esempio, se ho la proporzione 3 : 7 : : 12 : 28, posso, dividendo i due antecedenti per 3, dire 1 : 7 : : 4 : 28, perchè dalla proporzione 3 : 7 : : 12 : 28 si può (n. 151) conchiudere 3 : 12 : : 7 : 28, e dividendo i due termini del primo rapporto per 3, 1 : 4 : : 7 : 28, che (n. 151) può essere cangiata in 1 : 7 : : 4 : 28.

153. *Ogni cangiamento fatto in una proporzione, in guisa tale che l' antecedente o il conseguente sia paragonato alla somma dell' antecedente e del conseguente, e alla loro differenza nella stessa maniera in ciascun rapporto, formerà sempre una proporzione.*

Per esempio, se si ha la proporzione

3 : 12 : : 8 : 32

se ne potrà dedurre le proporzioni seguenti:

3 : 12 *più* 3 : : 8 : 32 *più* 8
o 3 : 12 *meno* 3 : : 8 : 32 *meno* 8
o 12 : 12 *più* 3 : : 32 : 32 *più* 8
o 12 : 12 *meno* 3 : : 32 : 32 *meno* 8.

Poichè se si paragona l'antecedente, è facile vedere che il conseguente aumentato o diminuito dell'antecedente conterrà questo antecedente una volta di più, o una volta di meno di prima; e siccome questo paragone si fa nella stessa maniera per il secondo rapporto, che per la natura della proporzione è uguale al primo, ne segue necessariamente che i due nuovi rapporti saranno pure uguali fra loro.

Se è il conseguente quello che si paragona, lo stesso ragionamento avrà sempre luogo, imaginando che nella proposizione sulla quale si fa un tal cangiamento, si sia posto l'antecedente di ciascun rapporto nel posto del suo conseguente, e il conseguente nel posto dell'antecedente; il che può farsi (num. 151) (*).

154. Siccome ponendo il terzo termine d'una proporzione invece del secondo, e reciprocamente, esiste sempre la proporzione, si deve concludere che i due antecedenti stanno fra loro come i due conseguenti; onde (num. 153) un antecedente starà alla somma o alla differenza degli antecedenti come il respettivo conseguente stà alla somma o alla differenza de' conseguenti; e quindi cangiando di nuovo (151) il posto de' termini medj *un antecedente stà al suo conseguente come la somma o la differenza degli antecedenti stà alla somma o alla differenza dei conseguenti*.

Sia per esempio data la proporzione 3 : 12 : : 8 : 32 avremo (151) quest'altra 3 : 8 : : 12 : 32, e quindi (153) 3 : 8 *più* o *meno* 3 : : 12 : 32 *più* o *meno* 12; e finalmente (151) 3 : 12 : : 8 *più* o *meno* 3 : 32 *più* o *meno* 12.

È chiaro che la prima parte della proposizione ora dimostrata può esprimersi ancora così: se si hanno due rapporti uguali, per esempio, quello di

$$\begin{array}{rr} & 4 : 12 \\ \text{e quello di} & 7 : 21 \\ \hline & 11 : 33 \end{array}$$

si avrà ancora lo stesso rapporto sommando antecedente con antecedente, e conseguente con conseguente.

Dunque, *se si hanno più rapporti uguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come uno degli antecedenti sta al suo*

(*) Nel linguaggio antico s' indicano colla parola *componendo* tutte le proposizioni che si possono dedurre col mezzo dell' addizione da una proporzione data; e colla parola *detraendo*, o più impropriamente *dividendo* quelle che essa può fornire col mezzo della sottrazione.

conseguente. Per esempio se si hanno i rapporti uguali $4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6$; si può dire che 4 *più* 7 *più* 2 stanno a 12 *più* 21 *più* 6, come 4 sta a 12 come 7 sta a 21 ec.

Infatti dopo aver sommato fra loro gli antecedenti de' due primi rapporti, e i loro conseguenti pure fra loro, il nuovo rapporto che come abbiamo veduto è uguale a ciascuno de' due primi, sarà ancora uguale al terzo; per conseguenza si potrà combinarlo del pari con questo, e ne risulterà pure lo stesso rapporto, e così in seguito se vi fossero altri rapporti.

155. *Se due proporzioni hanno i medesimi antecedenti, i loro conseguenti saranno proporzionali fra loro*. Difatti cangiando in ambedue le proporzioni il posto de' medj, (num. 151) il rapporto degli antecedenti della prima proporzione verrà uguale al rapporto de' conseguenti della stessa, e il rapporto degli antecedenti della seconda proporzione verrà uguale al rapporto de' loro conseguenti; onde essendo il rapporto degli antecedenti della prima uguale al rapporto degli antecedenti della seconda, per essere ambedue composti dei medesimi termini, sarà pure il rapporto de' conseguenti della prima uguale al rapporto de' conseguenti della seconda. Così, avendo le due proporzioni

$$2 : 6 :: 3 : 9$$
$$2 : 12 :: 3 : 18$$

se ne ricaverà (n. 151)

$$2 : 3 :: 6 : 9$$
$$2 : 3 :: 12 : 18$$

e quindi $6 : 9 :: 12 : 18$

o ancora (151) $6 : 12 :: 9 : 18$

Con un ragionamento simile si proverà che *se due proporzioni hanno i medesimi conseguenti, i loro antecedenti saranno fra loro proporzionali*.

156. *Se due proporzioni hanno i medesimi estremi, i loro medj saranno reciprocamente proporzio-*

nali. Difatti essendo per dato il prodotto degli estremi della prima proporzione uguale al prodotto degli estremi della seconda, sarà il prodotto de' medj della prima uguale al prodotto de' medj della seconda proporzione; e quindi i fattori di questi prodotti (n. 150) ossia i termini medj saranno fra loro reciprocamente proporzionali.

Così dalle proporzioni 3 : 6 : : 4 : 8
3 : 12 : : 2 : 8
se ne deduce quest'altra 6 : 12 : : 2 : 4

Similmente si dimostrerà che *se due proporzioni hanno i medesimi medj, i loro estremi saranno reciprocamente proporzionali*.

157. Se si hanno due o più rapporti, e se ne moltiplichino gli antecedenti fra loro, e i conseguenti pure fra loro, il rapporto de' prodotti resultanti si chiama *rapporto composto*. Per esempio, avendo i due rapporti 4 : 12 e 5 : 25, il prodotto degli antecedenti 4 e 5 sarà 20, e quello de' conseguenti 12 e 25 sarà 300; il rapporto di 20 a 300 è quello che si chiama rapporto composto de' rapporti di 4 a 12 e di 5 a 25.

Questo rapporto composto è uguale al prodotto de' rapporti da cui resulta; difatti il rapporto di 4 a 12 è 3, quello di 5 a 25 è 5; e 3 volte 5 fanno 15 che è il rapporto di 20 a 300. E ciò deve essere sempre vero: poichè esprimendosi un rapporto con una frazione che ha il conseguente per numeratore e l'antecedente per denominatore, allorchè si moltiplicano fra loro i conseguenti, e gli antecedenti di più rapporti, si viene a formare il prodotto delle frazioni esprimenti i valori de' rapporti medesimi.

Se i rapporti che si moltiplicano sono uguali, il rapporto composto si dice rapporto *duplicato*, quando si sono moltiplicati due rapporti; *triplicato* quando se ne sono moltiplicati tre; *quadruplicato* quando se ne sono moltiplicati quattro, e così in seguito. In tal caso il rapporto composto è la potenza *seconda*, o *terza*, o *quarta* ec. di ciascuno de' rapporti componenti. Per esempio, se si moltiplica il rapporto di 2 a 3 con quello di 4 a 6 che gli è uguale, si avrà il rapporto composto 8 : 18, che si chiamerà rapporto *duplicato* del rapporto di 2 a 3, o di quello di 4 a 6.

158. *Se si hanno due proposizioni, e che si moltiplichino per ordine, cioè il primo termine dell'una per il primo termine dell'altra, il secondo per il secondo, e così in seguito, i quattro prodotti che ne resulteranno staranno in proporzione.*

Poichè moltiplicando così due proporzioni si viene a moltiplicare due rapporti uguali per due rapporti uguali; dunque i due rapporti composti che ne resultano, devono essere uguali; dunque i quattro prodotti devono essere proporzionali.

Così moltiplicando per ordine le due proporzioni.

$$3 : 15 :: 12 : 60$$
$$2 : 4 :: 3 : 6$$

se ne deduce l'altra 6 : 60 : : 36 : 360.

Di qui concludiamo che *i quadrati, i cubi e in generale le potenze simili di quattro quantità proporzionali, sono pure proporzionali;* poichè per formare tali potenze basta moltiplicare la proporzione per se stessa più volte di seguito.

Così moltiplicando la proporzione 2 : 4 : : 3 : 6 una volta, due volte ec. di seguito per se medesima, nascono le proporzioni delle potenze seconde, terze ec. che sono

$$4 : 16 :: 9 : 36$$
$$8 : 64 :: 27 : 216$$

ec.

E similmente *le radici quadrate, cubiche, e in generale le radici simili di quattro quantità proporzionali, sono pure proporzionali;* poichè il rapporto delle radici quadrate de' due primi termini non è altro se non che la radice quadrata del rapporto di questi due termini (n. 133, e 143), ed è lo stesso del rapporto delle radici quadrate de' due ultimi termini; dunque, siccome i due rapporti primitivi sono supposti uguali, le loro radici quadrate saranno altresì uguali; dunque il rapporto delle radici quadrate de' due primi termini sarà uguale al rapporto delle radici quadrate de' due ultimi. Un ragionamento simile può applicarsi alle radici cubiche, quarte ec.

159. Negli esempj finora dati si sono adoprate soltanto quantità razionali; ma le proprietà sì dei rapporti che delle proporzioni hanno luogo egualmente, qualora le quantità paragonate sono irrazionali o tutte o alcune soltanto; poichè la verità delle dimostrazioni che ne abbiamo dato, non dipende punto dall' essere le quantità in esse considerate razionali o nò. Questa riflessione basta per persuadersene in generale; volendo entrare in dettagli e operazioni sopra esempj particolari, bisognerebbe sapere ciò che riguarda la moltiplicazione, e la divisione delle quantità irrazionali, che per esser di quasi niuna utilità in aritmetica suol rimettersi ai trattati elementari d' algebra.

160. Prima di terminare ciò che riguarda le proporzioni, diciamo qualcosa sulla natura delle quantità in esse considerate.

Due quantità concrete che si paragonano fra loro devono necessariamente essere della medesima natura; così per esempio se paragoniamo un tempo di 10 ore con un altro di 20 ore, una lunghezza di 6 miglia con una di 18 miglia, si concepisce facilmente essere il secondo tempo duplo del primo, ed il secondo spazio triplo del primo Ma se volessimo conoscere il rapporto che passa fra 3 miglia e 6 ore, gli sforzi della nostra mente sarebbero vani, nè arriveremmo a formarcene veruna idea.

Spesso però accade, che si paragonano fra loro quantità, la di cui natura era originariamente diversa, ma allora nell'atto di paragonarle si considerano come semplici quantità astratte. Imaginiamo per esempio che un corriere percorra 6 miglia in 2 ore, e che un secondo corriere ne percorra 24 in 8 ore; è chiaro che il rapporto che passa fra lo spazio percorso dal primo e quello percorso dal secondo, è uguale al rapporto che v'è fra il tempo impiegato in percorrerlo dal primo, e quello impiegato dal secondo: onde gli spazj sono proporzionali ai tempi; e quindi può scriversi la proporzione,

6 miglia : 24 miglia : : 2 ore : 8 ore.

Ora facendo su questa proporzione uno de' cangiamenti di cui si è parlato nel num. 151, avremmo l'altra

6 miglia : 2 ore : : 23 miglia : 8 ore.

che finchè si scrive così in numeri concreti, non presenta alla nostra mente veruna idea, giacchè non si può concepire cosa sia il rapporto di 6 miglia a 2 ore, nè quello di 24 miglia a 8 ore. È dunque necessario di considerare prima come astratte le quantità proposte, e allora si potrà dedurre dalla prima proporzione 6 : 24 : : 2 : 8, quest'altra ugualmente vera 6 : 2 : 24 : 8, nella quale i due termini d'un medesimo rapporto erano primitivamente di natura diversa.

USI DELLA TEORIA DELLE PROPORZIONI NELLA SOLUZIONE DEI PROBLEMI ARITMETICI.

161. L'operazione colla quale, dati tre termini qualunque d'una proporzione geometrica, si trova il quarto, si chiama *regola del tre*. Moltissimi quesiti si risolvono mediante quest'operazione. Gli autori della maggior parte de' libri d'aritmetica l'hanno divisa in più specie; ma un tal apparato è inutile, quando si è ben concepito ciò che costituisce la proporzione, e che si comprende bene l'enunciato della questione proposta. Rischiariamo ciò con alcune applicazioni.

Una pezza di panno di 13 braccia è stata pagata 130 lire; si dimanda quanto varrebbe una pezza del medesimo panno, che fosse lunga 18 braccia.

È chiaro che la somma da pagarsi per una pezza del panno di cui si tratta, raddoppierebbe se questa pezza contenesse un numero di braccia doppio del primo; che se questo numero divenisse triplò, il prezzo pure si triplicherebbe, e così degli altri casi; infine, che per la metà o i $\frac{2}{3}$ della pezza non si dovrebbe pagare che la metà o i $\frac{2}{3}$ del prezzo totale.

Dovendo quindi i prezzi delle due pezze di panno essere proporzionali al numero delle braccia che ciascuna di esse contiene, si avrà questa proporzione: $13 : 18 : : 130 : x$, indicando colla lettera x il prezzo ignoto della pezza di 18 braccia: si troverà questo pezzo che è uno degli estremi, moltiplicando (num. 149) fra loro i due medj 18, e 130 il che dà 2340; e dividendo questo prodotto per l'estremo noto 13; il risultato sarà 180, e tante lire importerà la pezza di 18 braccia di lunghezza.

Prendiamo a risolvere questo secondo quesito; un lavorante che ha fatto 216 braccia di lavoro in 9 giorni, quanto tempo impiegherà per farne 300 braccia, supposto che lavori sempre nella stessa maniera?

In questa questione, la quantità incognita è un numero di giorni che deve contenere i 9 giorni impiegati a fare 216 braccia di lavoro, come 300 contiene 216; si ha dunque la proporzione seguente: $216 : 300 : : 9 : x$, e quindi col solito metodo si troverà (num.149) essere $12\frac{1}{2}$ il valore d'x, cioè il numero cercato dei giorni.

162. Tutta la difficoltà dei quesiti di tal natura che si possono incontrare, consiste solamente nella maniera di stabilire la proporzione, ed ecco delle regole sicure per formarla in tutti i casi.

Fra i quattro termini che devono comporre la proporzione, vi sono due numeri che sono d'una stessa specie, e due altri numeri pure d'una stessa specie ma diversa dalla prima. Nell' ultimo esempio due termini esprimevano delle braccia, e gli altri due dei giorni.

Bisogna dunque primieramente distinguere i due termini di ciascuna specie, e quando ciò sarà fatto, si avrà necessariamente il quoziente del termine maggiore della prima specie diviso per il minore della medesima specie, uguale al quoziente del termine maggiore della seconda specie diviso per il minore della specie medesima, il che darà questa proporzione. Il termine minore della prima specie *sta* al termine maggiore della stessa specie, *come* il termine minore della seconda specie *sta* al termine maggiore della specie medesima.

Nell'esempio precedente, questa regola dà subito $216 : 300 :: 9 : x$; perchè il termine incognito deve essere maggiore di 9, a motivo che abbisogna un maggior numero di giorni, secondo che v' è più lavoro da fare.

163. Se fosse proposto di trovare quanti giorni impiegherebbero 27 operaj per eseguire un lavoro che 15 operaj, che lavoravano ugualmente, hanno fatto in 18 giorni, si vedrebbe che bisogna un numero di giorni tanto minore quanto è maggiore il numero degli operaj, e reciprocamente. In questo caso pure v'è proporzione, ma in un ordine inverso; poichè se il numero degli operaj della seconda truppa fosse per esempio triplo di quello della prima, non bisognerebbe loro se non che il terzo del tempo impiegato da questi: il primo numero dei giorni sarebbe dunque quello che dovrebbe contenere il secondo quanto il secondo numero d'operaj contiene il primo.

L'ordine nel quale queste quantità si contengono essendo l'inverso di quello che loro è assegnato dall'enunciato del quesito, si dice che i due numeri degli operaj sono in *ragione inversa*, o *reciproca*, dei numeri dei giorni. Se si paragonassero i due primi e i due ultimi nell'ordine in cui si presentano, il rapporto degli uni sarebbe 3 o $\frac{3}{1}$, e quello degli altri sarebbe $\frac{1}{3}$ frazione inversa di $\frac{3}{1}$.

È chiaro di fatti che si rovescia un rapporto rovesciando la frazione che lo esprime, poichè si fà così passare l'antecedente nel posto del conseguente, e il conseguente nel posto dell'antecedente; $\frac{2}{3}$ o 2 : 3 è l'inverso di $\frac{3}{2}$ o 3 : 2.

La regola del numero precedente semplicizza molto queste considerazioni; poichè prendendo i due numeri d'operaj per le quantità della prima specie, i due numeri de' giorni per quelle della seconda, e ponendo le une e le altre secondo il loro ordine di grandezza, si ha questa proporzione: $15 : 27 :: x : 18$, di cui si troverà il medio ignoto secondo la regola del num. 149, e si avrà 10 per resultato.

164. Diamo alcuni altri esempj per esercitare il lettore.

1.° Un uomo ha impiegato 3575 lire a cambio a ragione di 5 per cento d'interesse l'anno; si dimanda a quanto deve ascendere dopo un anno l'interesse del suo capitale.

L'espressione 5 per 100 d'interesse significa che una somma di 100 lire frutterebbe 5 lire al fine d'un anno. Prendendo dunque i due capitali per le quantità della prima specie, e i due interessi per quelle della seconda, si avrà $100 : 3575 : 5 : x$, proporzione che si riduce a $20 : 3575 :: 1 : x$, secondo l'osservazione del num. 152; e dividendo ancora i due termini del primo rapporto per 5, (n. 145) si trova finalmente $4 : 715 :: 1 : x$, onde x è uguale a $\frac{715}{4}$ o a 178 lire 15 soldi.

Si può anche risolvere questa questione osservando che 5 sono $\frac{1}{20}$ di 100, e che per conseguenza si avrà l'interesse d'una somma qualunque impiegata a un tal frutto, prendendo il ventesimo della medesima. Ora $\frac{1}{20}$ di 3575 è 178 lire 15 soldi, resultato conforme a quello già trovato di sopra (*).

2.° Un mercante ha promesso di pagare 800 lire fra un anno; la sua cedola vien passata a un banchiere, che fa lo sborso anticipato 8 mesi prima dell'epoca del pagamento: si domanda quanto deve dare il banchiere. Il banchiere avendo pagato una somma che non deve riscuotere se non dopo 8 mesi, bisogna necessariamente che trovi nel rimborso che gli verrà fatto l'interesse del suo denaro.

Supponiamo che l'interesse per un anno sia di 6 per 100; l'interesse per 8 mesi ne sarà gli $\frac{8}{12}$ o i $\frac{2}{3}$; dunque una somma di 100 lire impiegata per 8 mesi deve produrre 4 lire d'interesse, cioè quello che l'ha ricevuta deve rendere 104 lire. La somma di 800 lire anticipata dal banchiere non essendo altro che un simile rimborso, si avrà questa proporzione:

$$104 \text{ lire} : 100 \text{ lire} :: 800 : x,$$

donde si avrà lire $769\,\frac{3}{13}$ per il valore d'x, cioè per la somma che deve dare il banchiere (**).

165. La regola di tre si applica ancora a' quesiti nei quali vi sono più di tre quantità date, e prende allora il nome di *regola di tre composta*. Alcuni esempj rischiareranno sufficientemente il suo uso in questa circostanza.

Supponiamo primieramente che si dimandi quante leghe percorrerebbe in 17 giorni un viaggiatore camminando 10 ore per giorno, mentre si sappia

(*) L'operazione con cui si valuta così una somma da pagarsi in futuro, si chiama *regola d' interesse*.

(**) L'operazione per mezzo della quale si valuta così una somma pagata anticipatamente, si chiama *regola di sconto*. Si prende lo sconto in più maniere; ma quella qui esposta è la più rigorosa, trattandosi però d' interesse semplice.

che egli ha impiegati 29 giorni a fare 112 leghe camminando 7 ore il giorno.

Questo quesito può sciogliersi in due maniere; ecco quella che dà luogo alla regola di tre composta.

Il numero di leghe percorse in ciascun caso dipende da due circostanze, dal numero de' giorni del cammino del viaggiatore, e dal numero dell'ore che egli cammina ciascun giorno.

Si può in principio fare astrazione di quest'ultime, e supporre che il numero dell'ore resti lo stesso nel secondo caso che nel primo. Allora la questione sarebbe in questi termini: Un viaggiatore ha impiegato 29 giorni a fare 112 leghe; quante ne farebbe in 17 giorni? e si avrebbe la proporzione $29 : 17 :: 112 : x$. Il quarto termine sarebbe uguale a 112 moltiplicato per 17 e diviso per 29, o $\frac{1904}{29}$ leghe.

Adesso per aver riguardo alla differenza de'numeri dell'ore di cammino, si direbbe: se, camminando 7 ore il giorno, per un certo numero di giorni, questo viaggiatore ha fatto $\frac{1904}{29}$ leghe, quante ne farebbe nel tempo stesso se camminasse 10 ore il giorno? il che condurrebbe alla proporzione seguente,

$$7 \text{ ore} : 10 \text{ ore} :: \frac{1904}{29} \text{ leghe} : x,$$

di cui il quarto termine darebbe $93 \frac{161}{203}$ per il numero di leghe cercato.

La questione si risolverebbe pure osservando che 29 giorni di cammino a 7 ore per giorno, equivalgono a 203 ore di cammino; che 17 giorni a 10 ore per giorno danno 170 ore, e che per conseguenza il problema è ridotto a questa proporzione

$$203 \text{ ore} : 170 \text{ ore} :: 112 \text{ leghe} : x,$$

colla quale si deduce il cammino che deve fare il viaggiatore in 170 ore, da quello che ha fatto in 203.

166. Secondariamente, se 9 operaj lavorando 8

ore per giorno hanno impiegato 24 giorni a scavare un fosso di 65 braccia di lunghezza, 13 di larghezza, e 5 di profondità, quanti giorni bisognerebbero a 71 operaj d'ugual forza de' primi, e che lavorassero 11 ore per giorno, per scavare un fosso di 327 braccia di lunghezza, 17 di larghezza, e 7 di profondità?

Questo quesito molto complicato in apparenza si risolve ugualmente colla regola di tre.

Se tutto, eccetto il numero dei giorni, e il numero degli uomini, fosse simile ne' due casi enunciati, la questione si ridurrebbe a trovare quanti giorni bisognerebbero a 71 uomini per fare il lavoro che 9 uomini hanno eseguito in 24 giorni; si avrebbe dunque (num. 162)

$$9 \text{ uom.} : 71 \text{ uom.} :: x \text{ gior.} : 24 \text{ giorn.}$$

ma qui, invece di calcolare il numero de' giorni mi contento d'indicare, come nel num. 82, i numeri da moltiplicarsi fra loro, e di porre nel denominatore quelli per i quali bisogna dividere: ho così per il numero x dei giorni, $\frac{24 \text{ per } 9}{71}$. Ma i primi operaj lavorando sole 8 ore il giorno, mentre i secondi ne lavorano 11, bisogneranno altrettanti giorni di meno a questi; si avrà dunque

$8 : 11 :: x : \frac{24 \text{ per } 9}{71}$, donde si troverà che il numero dei giorni in questa circostanza è

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8}{71 \text{ per } 11}.$$

Questo numero è quello dei giorni necessarj ai 71 operaj, lavorando 11 ore il giorno, per scavare il primo fosso.

I fossi essendo di lunghezze disuguali, bisognerà un numero di giorni altrettanto maggiore, quanto il secondo sarà maggiore del primo; si avrà così

$$65 : 327 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8}{71 \text{ per } 11} : x,$$

e il numero di giorni relativo a questa nuova circostanza diventa $\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65}$. Avendo riguardo alle larghezze, che sono le stesse per ciascun fosso, ho

$$13 : 18 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65} : x,$$

e per conseguenza il numero di giorni cercato si cangia in $\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13}$. Finalmente essendo diverse le profondità, si ha

$5 : 7 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13} : x$, e il numero di giorni risultante dal concorso di tutte le circostanze è $\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5}$. Effettuando le moltiplicazioni e le divisioni, si arriverà al resultato cercato, 21 giorni $\frac{1190281}{3292725}$.

167. Questo numero è uguale a 24 moltiplicato per la quantità frazionaria

$\frac{9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5}$; ma quest'ultima quantità, che esprime il rapporto del numero de' giorni dato al numero de' giorni cercato, è il prodotto delle frazioni seguenti: $\frac{9}{71}$ $\frac{8}{11}$ $\frac{327}{65}$ $\frac{18}{13}$ $\frac{7}{5}$. Ora, risalendo alle denominazioni dei numeri dati nell'enunciato del quesito si vede che $\frac{9}{71}$ è l'inverso del rapporto de' numeri d'uomini, che preso nell'ordine dell'enunciazione sarebbe 9 a 71, poichè vi sono 9 uomini nel primo caso, e 71 nel secondo; $\frac{8}{11}$ è parimente l'inverso del rapporto del numero d'ore, che ciascuna truppa di operaj deve impiegare a lavorare; $\frac{327}{65}$ $\frac{18}{13}$ e $\frac{7}{5}$ sono i rapporti diretti delle lunghezze, delle larghezze, e delle profondità dei due fossi. Quindi ne segue che il rapporto del numero de' giorni dato al numero de' giorni cercato, è uguale al prodotto di tutti i rapporti diretti e di tutti i rapporti inversi, che resultano dal paragone de' termini relativi a ciascuna delle circostanze del quesito.

Si risolverà la questione semplicissimamente, valutando prima ciascuno di tali rapporti; poichè moltiplicando fra loro le frazioni che gli esprimono, si formerà quella che rappresenta il rapporto della quantità cercata alla quantità data della medesima sua specie. Essa avrà per numeratore il prodotto di tutti i conseguenti, e per denominatore il prodotto di tutti gli antecedenti.

Dall' espressione frazionaria

$\frac{9 \text{ per } 8 \text{ per } 377 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5}$, posta sotto la forma d'un rapporto, e dal numero 24 dei giorni dati, si dedurrà la proporzione seguente:

71 per 11 per 65 per 13 per 5: 9 per 8 per 327 per 18 per 7 : : 24 : x. Questa proporzione dà luogo a una *regola di tre composta,* perchè il rapporto della quantità cercata alla quantità data della medesima specie, è un rapporto *composto*.

168. Ecco un altro quesito che può spesso incontrarsi, e la di cui soluzione dipende da' principj precedenti.

Supposto che 3 *lire* di Francia vagliano 32 *denari sterlini* d'Inghilterra, che 240 denari sterlini vagliano 408 *denari di grosso* d'Olanda, che 50 denari di grosso vagliano 190 *maravedis* di Spagna; si dimanda quanti maravedis fanno 90 lire di Francia.

1.° Poichè 3 lire di Francia fanno 32 denari sterlini, la lira è i $\frac{32}{3}$ del denaro sterlino.

2.° Poichè 240 denari sterlini vagliono 408 denari di grosso, il denaro sterlino è i $\frac{408}{240}$ del denaro di grosso.

3.° Poichè 50 denari di grosso vagliono 190 maravedis, il denaro di grosso è i $\frac{190}{60}$ del maravedis.

Si convertirà dunque la lira di Francia in maravedis, prendendo i $\frac{32}{3}$ de' $\frac{408}{240}$ de' $\frac{190}{50}$, il che darà $\frac{32 \text{ per } 408 \text{ per } 190}{3 \text{ per } 240 \text{ per } 50}$ per il rapporto della lira al maravedis, e moltiplicando questo rapporto per 90, si avrà il valore di 90 lire di Francia espresso in maravedis, cioè $\frac{90 \text{ per } 32 \text{ per } 408 \text{ per } 190}{3 \text{ per } 240 \text{ per } 50}$. Questo numero frazionario è suscettibile d'un' espressione molto più semplice, perchè il numeratore e il denominatore hanno dei fattori comuni. Nel primo 90 e 190 sono divisibili per 10: lo stesso è di 240 e di 50 nel secondo. Operata la divisione verrà $\frac{9 \text{ per } 32 \text{ per } 408 \text{ per } 10}{3 \text{ per } 24 \text{ per } 5}$. Ma 32 nel numeratore essendo divisibile per 8, come pure 24 nel denominatore, si avrà $\frac{9 \text{ per } 4 \text{ per } 408 \text{ per } 10}{3 \text{ per } 3 \text{ per } 5}$; e siccome 3 per 3 fanno 9, si potrà sopprimere questo fattore nel numeratore e denominatore insieme, e ne resulterà $\frac{4 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{5}$ o 6201 $\frac{3}{5}$ maravedis per 90 lire di Francia.

Quest' esempio mostra sufficientemente, come bisognerebbe regolarsi per la riduzione delle misure le une alle altre.

169. Spesso si ha bisogno di dividere un numero in parti proporzionali a numeri dati; l' operazione colla quale vi si giunge si chiama *regola di società*, dall' uso grandissimo che se ne fa nelle compagnie di commercio. Ecco un quesito ad essa appartenente.

Tre mercanti hanno fatto società; il primo ha messo 25000 lire, il secondo 18000, e il terzo 42000; si separano, e vogliono dividere fra loro il benefizio comune che ascende a 57225 lire; si dimanda quanto ciascuno deve aver per sua parte.

Per risolvere questa questione, bisogna considerare che il guadagno di ciascuno di essi deve esser contenuto nel guadagno totale, quanto il suo fondo è contenuto nel fondo totale; poichè quello che avesse fornito per esempio la metà o il terzo del fondo, avrebbe evidentemente diritto alla metà o al terzo del guadagno.

Calcolando dunque il fondo totale, si farà per trovare ciascun guadagno una proporzione simile alla seguente: il fondo totale: al fondo particolare : : il guadagno totale : al guadagno relativo a quel tal fondo.

Nell'esempio proposto, la somma dei fondi è 85000 lire, si avrà dunque 85000 : 25000 : : 57225 : al guadagno del primo mercante,
85000 : 18000 : : 57225 : al guadagno del secondo.
85000 : 42000 : : 57225 : al guadagno del terzo.

Queste tre proporzioni si riducono alle seguenti:
85 : 25 : : 57225 : al guadagno del primo, o 16830 lire $\frac{75}{85}$.

85 : 18 : : 57225 : al guadagno del secondo, o 12118 lire $\frac{20}{85}$.
85 : 42 : : 57225 : al guadagno del terzo, o 28275 lire $\frac{75}{85}$.

Si può ancora presentare la questione sotto questo punto di vista: il primo fondo essendo 25000, o $\frac{25}{85}$ del fondo totale; il primo mercante deve ritirare i $\frac{25}{85}$ del guadagno totale; per la medesima ragione, il secondo mercante il di cui fondo è $\frac{18}{85}$ del fondo totale, avrà diritto ai $\frac{18}{85}$ del guadagno totale; finalmente il terzo mercante avendo fornito $\frac{42}{85}$ del fondo totale, ritirerà pure i $\frac{42}{85}$ del guadagno totale.

Finalmente si può ancora concepire il fondo totale, o *capitale* 85000 diviso in 85 fondi parziali o *azioni* di 1000 lire l'una, determinare il guadagno di ciascuna di queste azioni, che deve essere evidentemente l'85ma parte del guadagno totale, e moltiplicare successivamente questa parte per 25, 18 e 42, considerando i fondi di 25000 l., 18000 l., 42000 l., come riunioni di 25 azioni, di 18 azioni, di 42 azioni.

La questione seguente ha molta analogia con questa.

170. Si deve dividere un'eredità di 67250 lire fra tre persone, di modo che la parte della seconda sia $\frac{2}{5}$ di quella della prima, e la parte della terza sia $\frac{7}{8}$ di quella della seconda.

È chiaro che la parte della terza paragonata a quella della prima sarà i $\frac{7}{8}$ di $\frac{2}{5}$, o $\frac{14}{40}$, ovvero $\frac{7}{20}$.

Le tre parti cercate staranno dunque fra loro nelli stessi rapporti de' tre numeri 1, $\frac{2}{5}$, e $\frac{7}{20}$; riducendo questi al medesimo denominatore, si troverà $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{7}{20}$, e si avrà i tre numeri 20, 8, 7, che saranno proporzionali ai primi; ma la loro somma essendo 35, si vede che se si prendono tre parti che siano espresse dalle frazioni $\frac{20}{35}$, $\frac{8}{35}$, $\frac{7}{35}$, esse staranno fra loro nei rapporti richiesti; il quesito sarà dunque sciolto, prendendo i $\frac{20}{35}$, poi gli $\frac{8}{35}$, poi i $\frac{7}{35}$ di 67250 lire; il che darà le somme dovute agli eredi, secondo la distribuzione prescritta, cioè: 38428 l. $\frac{20}{35}$, 15371 l. $\frac{15}{35}$, e 13450 l.

171. I quesiti di questa natura sono alquanto più complicati, quando nell'enunciato della questione vi sono delle quantità date combinate per via d'addizione e sottrazione colle parti che si cerca di determinare. Per ridurre questo caso al precedente bisogna cercare il resultato di tutte queste quantità date insieme considerate, e servirsene per ridurre il numero proposto da dividersi quale sarebbe stato, se nell'enunciato del quesito non si fosse fatta menzione alcuna delle predette quantità date. Due esempj basteranno per render tutto ciò più chiaro.

1.° Si vuol dividere 6954 lire fra tre persone, in modo che la seconda abbia quanto la prima e 54 lire di più; e la terza abbia quanto le altre due insieme e 78 lire di più.

Senza le 54, e le 78 lire, è chiaro che basterebbe dividere il numero proposto in parti proporzionali ai numeri 1, 1, 2; ma giacchè sono già assegnate 54 lire per la prima persona, e 54 più 78 per la seconda, cominciamo da togliere dal numero proposto la somma di 54 più 54 più 78, ossia 186, e allora avremo 6768 numero da dividersi in parti proporzionali ai numeri 1, 1, 2; tali parti si troveranno essere 1692, 1692 e 3384; quindi le parti cercate saranno evidentemente 1692, 1746, e 3516.

2.° Sia da dividersi 203 in tre parti tali che la seconda sia di 15 unità minore del triplo della prima, e la terza di 10 unità minore del quadruplo della seconda.

La seconda parte dev'esser tripla della prima, meno 15; la terza essendo quadrupla della seconda, meno 10, sarà dodecupla della prima meno 15 preso 4 volte, meno 10, cioè in tutto meno 70. Se dunque la seconda parte crescesse di 15, e la terza di 70, cioè se il numero proposto crescesse di 85, le parti in cui deve dividersi sarebbero proporzionali ai numeri 1, 3, 12. Il numero 203 accresciuto di 84 diventa 288, e diviso questo in parti proporzionali ai numeri predetti, si trovano per tali parti i valori 18, 54, 216; onde le parti in cui deve dividersi il numero proposto 203 saranno 18, 54 meno 15 cioè 39, 216 meno 70 cioè 146.

172. Ecco un altro quesito, che facilmente si scioglie co'principj precedenti.

Vi sono due fontane, la prima delle quali versando sola per 2 ore $\frac{1}{2}$ empie una certa vasca, e la seconda empie la stessa vasca versando sola per 3 ore $\frac{3}{4}$; si dimanda quanto tempo bisognerà perchè venga piena dalle due fontane versanti insieme.

Cerco qual parte della vasca empie la prima fontana in un tempo dato, per esempio in un'ora, e vedo che prendendo la capacità di tal vasca per unità, non devo fare altro che dividere 1 per $2\frac{1}{2}$ o $\frac{5}{2}$, il che dà $\frac{2}{5}$ per la parte cercata. Dividendo del pari 1 per $3\frac{3}{4}$ o $\frac{15}{4}$, ottengo $\frac{4}{15}$ per la porzione della vasca, che vien ripiena in un'ora dalla seconda fontana; le due fontane versando insieme daranno per conseguenza i $\frac{2}{5}$ più i $\frac{4}{15}$ o i $\frac{10}{15}$ della vasca in un'ora. Dividendo dunque 1, o la capacità della vasca, per $\frac{10}{15}$, si avrà il numero d'ore, che metterà a empiersi in questa maniera, e si troverà così $\frac{15}{10}$, o un' ora, e mezza.

Gli autori che hanno scritto sull'aritmetica hanno moltiplicato, e variato queste questioni in molte maniere, e hanno eretto in regole le operazioni che servono a risolverle; ma tutti questi precetti sono per lo meno inutili, perchè un quesito di questo genere vien sempre risoluto facilmente da chi ne sa analizzare l'enunciato, soprattutto quando può servirsi del soccorso dell'algebra; perciò non ne parleremo più lungamente.

173. Non ometteremo però la *regola d'allegazione*, il di cui fine è di far trovare il valor medio di più cose della medesima specie, ma di prezzi diversi. Gli esempj seguenti la faranno sufficientemente conoscere.

Un mercante ha comprato diverse specie di vini, cioè

130	fiaschi	a	10	soldi l'uno
75		a	15	
231		a	12	
27		a	25	

e dopo gli mescola; si dimanda quanto gli costa un fiasco del vino mescolato. È facile vedere, che basta valutare quanto gli costa il miscuglio totale, e quanti fiaschi forma, e dividere dopo il primo di questi resultati per il secondo, per avere il prezzo cercato.

Ora i	130 fiaschi	a	$10^{s.}$	fanno	$1300^{s.}$
	76	a	15	fanno	1125
	231	a	12	fanno	2772
	27	a	20	fanno	540
dunque . .	463 fiaschi		costano		5737 soldi.

Dividendo 5737 per 463, il quoziente $12^{s.}\ 4^{d.}\ \frac{320}{463}$ è il prezzo del fiasco del miscuglio.

174. La regola precedente serve ancora per prendere un medio fra diversi resultati dati dall'esperienza o dall'osservazione, e che non si accordano fra loro. Se si trattasse per esempio di conoscere esattamente la distanza di due punti assai lontani, e che si misurasse, per quanta diligenza si adoprasse in tale operazione, vi sarebbe sempre un poco di incertezza nel resultato, a cagione degli errori che si commettono necessariamente nella maniera di porre le misure le une dopo le altre.

Supponiamo dunque che si sia ripetuta questa operazione più volte di seguito per verificarla, e che due volte si sia trovato braccia $3794.\ 4^{s.}\ 8^{d.}$; che tre altre operazioni abbiano dato $3795^{b.}\ 2^{s.}\ 7^{d.}$, e che finalmente si sia avuto un altro resultato di $3793^{b.}\ 11^{s.}\ 5^{d.}$, questi diversi numeri non essendo uguali, è chiaro che v'è errore in alcuni d'essi, e probabilmente in tutti. Ecco il mezzo che si adopra per diminuirlo. Se ciascuna volta si fosse ottenuta la vera misura, la somma de' resultati sarebbe uguale a 6 volte una tal misura. È evidente che la stessa cosa avrebbe luogo ancora se i resultati ottenuti fossero erronei gli uni per eccesso, gli altri per difetto, in maniera che l'aumento prodotto dalla somma degli eccessi compensasse ciò che manca ai resultati minori del vero valore, e si giungerebbe per conseguenza a conoscere questo vero valore dividendo la somma dei resultati per il loro numero.

Questo caso è troppo particolare per sperare d'incontrarlo spesso; ma accade quasi sempre, che gli errori in un senso distruggono una parte di quelli che sono nell'altro, e la parte che ne resta, trovandosi ripartita ugualmente sopra ciascun risultato è tanto più diminuita, quanto il numero de' resultati è maggiore.

Secondo queste riflessioni, si opererà così: si prenderà

2 volte	3794 . 4 . 8	o	7588 . 9 . 4
3 volte	3795 . 2 . 7	o	11385 . 7 . 9
1 volta	3793 . 11 . 5	o	3793 . 11 . 5
6 resultati che danno in tutto			22767 . 8 . 6 .

Dividendo 22767 . 8 . 6 per 6, si troverà che il valore medio della distanza cercata è 3794 . 11 . 5 .

Del rimanente, per discutere ed apprezzare i vantaggi e gl' inconvenienti di questo metodo, bisogna ricorrere al calcolo della probabilità, e questo soggetto ha occupato i più abili matematici moderni.

FINE.