

PREZZO { *della Parte II. . sc. o. 50.*  
*di tutta l' Opera . . . 1.*

BRUNACCI.

ELEMENTI

DI

ALGEBRA E GEOMETRIA

PARTI II.

GEOMETRIA



**ELEMENTI**  
DI  
**ALGEBRA E GEOMETRIA**

RICAVATI

*DAI MIGLIORI SCRITTORI DI MATEMATICA*

PER OPERA

**DEL CAV. BRUNACCI.**

*EDIZIONE*

RIVEDUTA ED ILLUSTRATA CON NUOVE CORREZIONI ED AGGIUNTE,  
FRA LE QUALI UNA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA  
FONDAMENTALE DELLE PARALLELE.

---

*PARTI II.*  
**GEOMETRIA.**

---

---

**BOLOGNA**  
**PEI TIPI DEL NOBILI E COMP.**  
**1850.**



1941

1942

1943

1944

1945

1946

1947

1948



# ELEMENTI DI GEOMETRIA.

---

## LIBRO PRIMO.

DELLE PROPRIETÀ DEI TRIANGOLI E PARALLELOGRAMI.

---

### DEFINIZIONI.

1. I. Il *punto* è un segno nella quantità senza veruna parte.
2. II. La *linea* è una estensione in lungo senza veruna larghezza.
3. III. E se la linea è terminata, i suoi *termini* saranno i due punti in cui finisce.
4. IV. Dicesi *retta* quella linea che tra i suoi punti si distende egualmente (\*).
5. V. *Superficie* dicesi l'estensione in lunghezza e in larghezza senza veruna profondità.
6. VI. E se la superficie è terminata, i suoi *estremi* sono le linee in cui finisce.
7. VII. Dicesi *piana* quella superficie sopra di cui si può per ogni verso condurre una linea retta che vi appoggi tutti i suoi punti.
8. VIII. L'*angolo piano* è ciò che risulta dall'inclinazione di due linee, le quali nella superficie piana s'incontrino in un punto, e non sieno poste per diritto fra loro.
9. IX. Se le linee contenenti l'angolo saranno amendue rette, tale angolo dirassi *rettilineo*.
10. X. Una linea retta che incontra un'altra, e sta sopra

---

(\*) Essendo stata nell'edizione 4.<sup>a</sup> tolta questa definizione e sostituita quella di Legendre, alcuni dotti Geometri hanno fatto sentire il loro desiderio di vedere nella nuova edizione rimessa quella di prima. Eccola pertanto al suo posto. Avventuratamente ognuno sa che cosa s'intende per linea retta; la cui idea è una di quelle semplici e prime che non possono con parole rendersi più chiare in chi già le ha: nè per sole parole potrebbero prodursi in chi non le avesse.



di essa in maniera che non penda più da questa che da quella parte, dirassi *perpendicolare* alla linea soggetta.

11. XI. E ciascheduno degli angoli uguali che di quà e di là risultano chiamerassi *angolo retto*.

12. XII. L'angolo poi maggiore del retto dirassi *angolo ottuso*, ed il minore del retto *angolo acuto*.

13. XIII. *Figura* dicesi quell'estensione che da uno o più termini è circonscritta, i quali *termini* sono gli estremi da cui è confinata.

14. XIV. Delle figure comprese da linee curve che *curvilinee* si nominano, la più semplice è il *cerchio* o *circolo*, che è una figura piana compresa da una sola linea curva che ritorna in sè stessa (e chiamasi *circonferenza* o *periferia*), a cui tirate quante si vogliano linee rette dal medio punto dentro il piano di essa figura, tutte fra di loro riescono eguali.

15. XV. Quel punto da cui si spiccano le linee tutte uguali dicesi *centro*.

16. XVI. E qualunque retta linea che passi per esso centro, e termini alla circonferenza da ambe le parti opposte, dicesi *diametro*.

17. XVII. La figura compresa da esso diametro e da una delle parti in cui esso sega la circonferenza chiamasi *semicircolo* o *mezzo cerchio*.

18. XVIII. Le figure poi contenute da linee rette chiamansi *rettilinee*, delle quali la più semplice è quella che da tre linee rette comprendesi, e si chiama *figura trilatera*, ovvero *triangolo*; se poi si racchiude da quattro rette linee, si dirà *figura quadrilatera*; e se da più di quattro, *multilatera*.

19. XIX. Di esse figure trilateri, quella che ha tre lati eguali chiamasi *triangolo equilatero*.

20. XX. Quella poi che ha due soli lati uguali dicesi *triangolo isoscele* o *equicrure*.

21. XXI. E quella che sarà compresa da tre lati disuguali si dirà *triangolo scaleno*.

22. XXII. Si possono ancora denominare dagli angoli, dei quali se uno in essa figura trilatera è retto, si dirà *triangolo rettangolo*; se uno è ottuso, chiamerassi *ottusiangolo*, se tutti acuti, dirassi *acuziangolo*.

23. XXIII. Delle figure poi quadrilateri, quella che ha tutti i lati uguali, e ciaschedun angolo retto, si chiama *quadrato*.



24. XXIV. Quella poi che non ha ciascun lato eguale, e però è bislunga, ma ha tutti gli angoli retti, dicesi *rettangolo*.

25. XXV. Quella che ha tutti i lati eguali, ma gli angoli non retti, chiamasi *rombo*.

26. XXVI. Quella poi che ha solamente i lati opposti e gli angoli opposti eguali, ma non è equilatera, nè rettangolo, si nomina *romboide*.

27. XXVII. L'altre figure poi quadrilatera che non hanno tali condizioni si dicono *trapezj* (\*).

28. XXVIII. Si dicono tra di loro *parallele* quelle linee rette che, giacendo nella stessa superficie piana, ancora che si prolungassero in infinito verso qualunque parte, mai converrebbero insieme.

### DIMANDE.

29. I. Si ammetta che da qualunque punto a qualsivoglia altro punto possa tirarsi una linea retta.

30. II. E qualsivoglia data linea possa prolungarsi in infinito quanto sarà di bisogno.

31. III. E da qualunque punto, come centro, con qualsivoglia intervallo che determini il raggio, cioè la distanza della circonferenza dal centro, si possa descrivere un cerchio.

### ASSIOMI (\*\*).

32. I. Quelle cose che sono uguali ad una terza, sono ancora eguali fra loro.

33. II. Se alle cose uguali si aggiungono o si levano al-

(\*) Molti autori intendono per trapezio un quadrilatero che ha due soli lati paralleli.

(\*\*) *Assioma* è una verità evidente da per sé stessa; *Teorema* è una verità che diviene evidente per mezzo di un ragionamento; *Problema* è una quistione proposta che cerca soluzione; *Lemma* una verità impiegata a preparare la dimostrazione di un teorema o la soluzione di un problema; *Proposizioni* chiamasi indifferentemente i teoremi, i problemi, i lemmi; *Corollario* è una conseguenza che deriva da una o più proposizioni; *Scolio* è una osservazione sopra una o più proposizioni, tendente a far vedere il loro legame, la loro utilità, la loro restrizione o la loro maggiore estensione; *Ipotesi* è una supposizione fatta o nell'enunciato d'una proposizione o nel corso di una dimostrazione.

tre eguali, o una medesima ad ambedue comune, ne risultano complessi o residui eguali.

34. III. Se alle cose disuguali si aggiungono o si detraggono cose eguali, o una stessa ad entrambi comune, rimangono gli aggregati o i residui disuguali come prima.

35. IV. Le cose che sono il duplo o la metà di una medesima o di eguali cose, sono pure tra di loro uguali.

36. V. Le cose che sovrapposte si combaciano esattamente, sono altresì uguali.

37. VI. Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è eguale alla somma di esse.

38. VII. Tutti gli angoli retti sono tra di loro uguali.

39. VII. Due linee rette non comprendono internamente spazio alcuno.

40. IX. Incontrandosi due linee rette in un punto, si segano, e non vanno insieme per verun tratto di lunghezza che possa essere un segmento comune ad ambedue, ma subito si separano l'una dall'altra.

### AVVERTIMENTO.

41. *Il maestro che detterà questi elementi, dovrà con opportune figure metter sott'occhio dello studente le cose definite, eseguire le operazioni indicate nelle dimande, e mostrare le verità contenute negli assiomi.*

#### 42. PROPOSIZIONE PRIMA. PROBLEMA (\*).

*Sopra una data retta linea terminata AB costruire un triangolo equilatero. (FIGURA I.)*

*Costruzione.* Dal centro A coll'intervallo AB descrivasi il cerchio BCD (31), e similmente dal centro B coll'intervallo BA descrivasi un altro cerchio ACE. E dal punto C,

(\*) Nella spiegazione di una proposizione di Geometria bisogna distinguere due parti principali, *la costruzione* e *la dimostrazione*. La prima narra tutto ciò che bisogna fare per eseguire la soluzione di un problema o per farsi strada alla dimostrazione di un teorema; la seconda contiene tutta la parte del ragionamento. Alcuni però distinguono un maggior numero di parti più minute. Noi designeremo la costruzione e la dimostrazione nel primo problema e nel primo teorema, e ne lasceremo in seguito fare la distinzione al lettore; avvertendolo che non bisogna poi avere scrupolo di declinar qualche volta dalla regola.



in cui s'incontreranno le loro circonferenze agli estremi punti A, B della data linea AB, si conducano le rette linee CA, CB (29). Dico che il triangolo ABC, quindi risultante, sarà equilatero.

*Dimostrazione.* Essendo A il centro del cerchio BCD, sarà AC uguale ad AB (14): ed essendo ancora B centro del cerchio ACE, sarà pure CB uguale ad AB (14). Dunque le due AC, CB sono altresì uguali tra di loro (32); e però tutti tre i lati del triangolo ABC essendo uguali, sarà esso triangolo equilatero (19). Adunque sopra la data retta linea AB si è formato il triangolo equilatero; Come Doveasi Fare.

#### 43. PROPOSIZIONE II. PROBL.

*Dal dato punto A tirare una linea retta AL uguale ad un'altra data BC. (FIG. 2.)*

Tirisi la retta AB (29), e sopra di essa formisi il triangolo equilatero ABD (42), i di cui lati DB, DA si prolunghino indefinitamente (30), e col centro B all'intervallo BC descrivasi il cerchio CH segante il lato prolungato DB in G. Poscia col centro D all'intervallo DG si descriva l'altro cerchio GK (31) segante il lato prolungato DA in L; sarà così determinata la linea AL cercata.

Son eguali le rette DG, DL (14), come ancora le rette DB, DA (19); levando queste da quelle, cioè DB da DG, e DA da DL, rimarranno uguali le residue BG, AL (33): ma ancora BC è uguale a BG (14); dunque le rette AL, BC sono uguali (32); e però dal dato punto A si è condotta AL uguale alla data retta linea BC; C. D. F.

#### 44. PROPOSIZIONE III. PROBL.

*Date due linee rette disuguali, dalla maggiore AB tagliarne parte AE uguale alla minore C. (FIG. 3.)*

Tirisi dal punto A la retta AD uguale alla C (43), e col centro A descrivasi pel punto D il cerchio DE (31), che segnando la AB in E determinerà la parte AE cercata.

AE è uguale ad AD (14), e però ancora alla data C (32); C. D. F.

## 45. PROPOSIZIONE IV. TEOREMA.

*Se due triangoli  $ABC$ ,  $DEF$  avranno un angolo  $A$  uguale ad un angolo  $D$ , ed intorno ad essi sieno i lati dell'uno uguali ai lati dell'altro, cioè  $AB$  uguale a  $DE$ , ed  $AC$  uguale a  $DF$ , sarà l'ancora la base  $BC$  dell'uno uguale alla base  $EF$  dell'altro, e ciascuno degli altri angoli uguale al suo corrispondente (\*), cioè l'angolo  $B$  all'angolo  $E$ , e l'angolo  $C$  all'angolo  $F$ ; e tutto il triangolo  $ABC$  sarà uguale a tutto il triangolo  $DEF$  (FIG. 4.)*

*Costruzione.* S'intenda applicarsi un triangolo sopra l'altro, di maniera che l'angolo  $A$  si sovrapponga all'angolo  $D$ , e il lato  $AB$  si adatti sopra il lato  $DE$ .

*Dimostrazione.* Si vedrà essere le basi e tutti gli altri angoli uguali. Imperocchè l'altro lato  $AC$  cadrà sopra il lato  $DF$  (altrimenti gli angoli  $A$  e  $D$  non sarebbero uguali contro l'ipotesi), e il punto  $B$  cadrà in  $E$ , e il  $C$  in  $F$ , essendosi supposti quei lati uguali; sicchè la base  $BC$  dovrà adattarsi sopra la base  $EF$ , ed esattamente coprirla; altrimenti le due linee rette comprenderebbero spazio, il che è assurdo (39); che però combaciandosi ambedue le basi, e ciaschedun angolo al suo corrispondente, e tutto il triangolo a tutto il triangolo, saranno uguali le basi ed uguali gli angoli opposti ai lati uguali, ed ambedue gli spazi dei triangoli parimente saranno uguali (36); Come Doveasi Dimostrare.

## 46. PROPOSIZIONE V. TEOR.

*In ogni triangolo equicrura  $ABC$ , gli angoli interni sopra la base sono tra di loro uguali; e prolungando sotto di essa base ambi i lati, gli angoli che ne risultano esternamente saranno pure tra di loro uguali. (FIG. 5.)*

Piglisi qualunque punto  $F$ , nel lato  $AB$  prolungato, e nell'altro lato  $AC$  si ponga ad  $AF$  uguale l' $AG$  (44), indi si tirino le rette  $CF$ ,  $BG$  (29).

Il triangolo  $AFG$  ha lo stesso angolo  $A$  che l'altro triangolo  $AGB$ , e sono i lati  $AF$ ,  $AG$  uguali, come ancora i lati  $AC$ ,  $AB$ ; saranno dunque tra loro uguali anche le basi  $FC$ ,  $GB$ , e altresì l'angolo  $F$  uguaglierà l'angolo  $G$ ,

(\*) *Corrispondenti* diconsi quegli angoli che ne' triangoli sono opposti ai lati uguali.



9

e l'altro  $ACF$  sarà uguale all'altro  $ABG$  (45). Perchè poi dalle linee uguali  $AF$ ,  $AG$  detratte le uguali  $AB$ ,  $AC$ , rimane  $FB$  uguale a  $GC$  (33), e si è provata ancora  $FC$  uguale a  $GB$ , e gli angoli  $F$ ,  $G$  pure uguali; viene che i triangoli  $FBC$ ,  $GCB$  sono uguali (45), e però l'angolo  $FCB$  uguaglierà l'angolo  $GBC$ , e l'angolo  $CBF$ , sarà uguale all'angolo  $BCG$ . Ora dall'angolo  $ACF$  e dall'angolo  $ABG$ , che si sono provati uguali, sottraendo gli angoli uguali  $FCB$ ,  $CBG$ , rimarranno uguali gli angoli residui  $ACB$ ,  $ABC$  (33); dunque nel triangolo equicrure sono uguali gli angoli interni sopra la base, e ancora prolungati i lati al di sotto di essa, gli angoli esteriori  $CBF$ ,  $BCG$  pure sono eguali, perchè ciò si è di già provato; C. D. D.

*Corollario.* Il triangolo equilatero è anche equiangolo.

#### 47. PROPOSIZIONE VI. TEOR.

*Inversamente, se in un triangolo  $ABC$  sono eguali due angoli  $B$ ,  $C$ , ancora i lati opposti ad essi  $AC$ ,  $AB$  saranno uguali. (FIG. 6.)*

Altrimenti se uno dei lati  $AB$  fosse maggiore dell'altro  $AC$ , tagliata  $BD$  uguale ad  $AC$  (44), congiungasi  $CD$  (39).

Avranno i triangoli  $ACB$ ,  $DBC$  intorno gli angoli  $C$ ,  $B$  uguali, ancora i lati uguali  $AC$ ,  $BD$ , e il lato  $BC$  comune, e però uguale in entrambi; dunque sarebbero essi triangoli tra di loro uguali (45): il che è assurdo, perchè sarebbe il tutto uguale ad una sua parte (37). Non è dunque possibile che detti lati  $AB$ ,  $AC$  fossero disuguali, ma erano ambidue uguali; C. D. D:

48. *Corollario.* Un triangolo equiangolo è anche equilatero.

#### 49. PROPOSIZIONE VII. TEOR.

*Dai termini della medesima retta linea  $AB$  tirate due rette  $AD$ ,  $BD$  concorrenti nel punto  $D$ , non si potranno dai medesimi termini  $A$  e  $B$  condurre altre linee  $AC$ ,  $BC$  uguali alle prime, come  $AC$  alla  $AD$ , e  $BC$  a  $BD$ , le quali dalla medesima banda concorrano in un punto  $C$  diverso dall'altro  $D$ . (FIG. 7. e 8.)*

Se ciò si supponesse possibile, o sarebbe (FIG. 7) il loro concorso  $C$  fuori del triangolo  $ADB$ , e il punto  $D$  fuori dell'altro  $ACB$ , o pure uno dei detti concorsi  $C$  sarebbe dentro l'altro triangolo  $ADB$  (FIG. 8). Nel primo caso con-

giunta la  $CD$ , sarebbe ciascuno dei triangoli  $ACD$ ,  $BCD$  equicrure, supponendosi  $AC$  uguale alla  $AD$ , e la  $BC$  uguale a  $BD$ ; dunque l'angolo  $ACD$  sarà uguale all'angolo  $ADC$  (46); ma questo essendo parte dell'angolo  $BDC$ , sarà di esso minore (37); dunque ancora  $ACD$  sarà minore di  $BDC$ , e l'altro  $BCD$  molto minore del medesimo  $BDC$ , a cui dovrebbe essere uguale (45). Dunque non possono le rette uguali alle prime convenire in  $C$  fuori del triangolo  $ABD$ . Nemmeno concorreranno nel secondo caso dentro di esso, perchè prolungate le linee  $BD$ ,  $BC$  in  $F$ , in  $E$ , saranno uguali (46) gli angoli esterni  $ECD$ ,  $CDF$  per l'uguaglianza dei lati  $BC$ ,  $BD$ ; e nel triangolo  $ACD$  per essere  $AC$  uguale ad  $AD$ , saranno pure eguali gli angoli interni  $ACD$ ,  $ADC$  (46); dunque essendo  $ACD$  maggiore di  $ECD$ , sarebbe ancora  $ADC$  maggiore di  $CDF$ , cioè la parte maggiore del tutto: il che è assurdo (37). Dunque non possono le rette  $AC$ ,  $BC$ , uguali alle due  $AD$ ,  $BD$  condotte dagli stessi termini, concorrere dalla medesima banda in un punto diverso dal medesimo  $D$ ; C. D. D.

#### 50. PROPOSIZIONE VIII. TEOR.

*Se due triangoli  $ABC$ ,  $EDF$  avranno i lati  $AB$ ,  $ED$  tra di loro uguali, ed ancora i lati  $AC$ ,  $DF$  uguali, ed inoltre le basi uguali  $BC$ ,  $EF$ , saranno altresì uguali tutti gli angoli corrispondenti ai lati opposti uguali nell'uno e nell'altro triangolo. (FIG. 9.)*

Soprappongasi il triangolo  $ABC$  all'altro  $DEF$ .

Adattate insieme le basi uguali  $BC$ ,  $EF$  gli altri lati uguali si adatteranno parimente insieme; concorrendo colla cima  $A$  nel punto  $D$ ; altrimenti due linee uguali alle prime concorrerebbero in un punto diverso da quello in cui concorrono le altre condotte dai medesimi termini: il che è impossibile (49). Dunque si adatteranno tutti gli angoli corrispondenti, combaciandosi insieme  $A$  con  $D$ ,  $B$  con  $E$ ,  $C$  con  $F$ , essendo sovrapposti i lati che li comprendono; e però saranno i detti angoli uguali (36); C. D. D.

#### 51. PROPOSIZIONE IX. PROBL.

*Dato l'angolo rettilineo  $BAC$ , dividerlo in due parti eguali. (FIG. 10.)*

Preso nel lato  $AB$  qualunque punto  $D$ , si tagli dall'al-



tro lato  $AC$  la parte  $AE$  uguale all'  $AD$  (44), e congiunta  $DE$  (28), sopra di questa dalla banda opposta all' angolo dato si descriva un triangolo equilatero  $DFE$  (42); indi si tiri la retta  $AF$  (29): questa dividerà l' angolo dato in due parti eguali.

Ne' triangoli  $ADF$ ,  $AEF$  essendo uguali i lati  $AD$ ,  $AE$ , il lato  $AF$  comune, e le basi  $FD$ ,  $FE$  altresì uguali, sarà pure l' angolo  $DAF$  uguale all' altro  $EAF$  (50); dunque dalla retta  $AF$  è diviso per mezzo l' angolo dato  $BAC$ ; C. D. F.

## 52. PROPOSIZIONE X. PROBL.

*Data una retta terminata  $AB$ , dividerla in due parti uguali. (FIG. 11.)*

Si faccia sopra di essa il triangolo equilatero  $ACB$  (42), e dividasi per mezzo l' angolo  $C$  colla retta  $CE$  (51), questa taglierà per mezzo in  $E$  la retta  $AB$ .

Ne' due triangoli  $ACE$ ,  $BCE$  essendo il lato  $CA$  uguale a  $CB$ , ed il lato  $CE$  comune, e gli angoli compresi da essi uguali tra loro, la base  $AE$  sarà uguale alla  $BE$  (45); e però tutta l'  $AB$  è divisa ugualmente per mezzo; C. D. F.

## 53. PROPOSIZIONE XI. PROBL.

*Alla data retta linea  $AB$  alzare da un punto  $C$  dato in essa la perpendicolare  $CF$ . (FIG. 12.)*

Preso nella medesima qualunque altro punto  $D$ , si ponga dall' altra parte  $CE$  uguale a  $CD$  (44), e sopra tutta la  $DE$  si formi il triangolo equilatero  $DFE$  (42), e congiunta la retta  $FC$  (29), sarà questa la perpendicolare ricercata.

Ne' triangoli  $DCF$ ,  $ECF$  essendo uguali i lati  $DC$ ,  $CE$ , il lato  $CF$  comune, e le basi  $DF$ ,  $FE$  uguali, sarà l' angolo  $DCF$  uguale al suo adjacente  $ECF$  (50); e però ambedue saranno retti, e la linea  $FC$  perpendicolare alla  $AB$  (10 e 11) ealzata sopra di essa dal dato punto  $C$ ; C. D. F.

## 54. PROPOSIZIONE XII. PROBL.

*Da un punto  $C$  dato fuori della linea  $AB$  indefinitamente prolungata tirarvi sopra una perpendicolare  $CH$ . (FIG. 13.)*

Si pigli dall' altra parte di essa linea qualunque punto  $D$ , e col centro  $C$  all' intervallo  $CD$  descrivasi un arco di cerchio (31), il quale segnerà la data retta in due punti  $G$ ,

E; indi segata per mezzo la  $GE'$  in  $H$  (52), e congiunta  $CH$  (29), sarà questa la perpendicolare ricercata.

Poichè  $GH$  è uguale ad  $HE$ ,  $CH$  comune ai triangoli  $GHC$ ,  $EHC$ , e le basi  $CG$ ,  $CE$  raggi del cerchio uguali (14), sarà l'angolo  $CHG$  uguale al corrispondente  $CHE$  (50), onde l'uno e l'altro è retto, e la  $CH$  è perpendicolare alla retta  $AB$  (10 e 11) tiratavi dal punto  $C$  dato fuori di essa; C. D. F.

### AVVERTIMENTO.

*Essendosi fin qui minutamente citati i numeri delle precedenti proposizioni, delle dimande, degli assiomi e delle definizioni, stimo superfluo il seguitare in avvenire a citarli così; però supponendole ormai notissime, lascerò che i principianti le ritrovino da sè stessi, e solo si citeranno per qualche volta le nuove proposizioni, acciocchè si rendano famigliari.*

#### 55. PROPOSIZIONE XIII. TEOR.

*Quando una linea retta  $EC$  è applicata sopra di un'altra  $AB$ , o farà con essa i due angoli di quà e di là retti, o almeno la somma di essi sarà uguale a due retti. (FIG. 14.)*

Perchè se fosse  $EC$  perpendicolare ad  $AB$ , certo che ne risulterebbero di quà e di là gli angoli retti; ma se è inclinata, si tiri dal medesimo punto  $C$  la perpendicolare  $CD$  alla data  $AB$  (53); dunque gli angoli  $ACD$ ,  $BCD$  saranno due retti; ma si adatta a questi due retti la somma degli altri due  $ACE$ ,  $BCE$ ; dunque ancora questi due angoli presi insieme uguagliano la somma di due retti (36); C. D. D.

#### 56. PROPOSIZIONE XIV. TEOR.

*Se al medesimo punto  $B$  della retta  $AB$  congiunte da destra e da sinistra due rette  $DB$ ,  $CB$  comprenderanno con essa due angoli  $DBA$ ,  $CBA$  per somma uguali a due retti, saranno esse linee  $DB$ ,  $CB$  per diritto fra loro, cioè faranno una sola retta linea  $CBD$ . (FIG. 15.)*

Altrimenti, prolungata la  $CB$ , se 'cadesse fuori della retta  $BD$ , come in  $BE$ , sarebbero pure gli angoli  $EBA$ ,  $CBA$  uguali a due retti (55), cioè ai due  $DBA$ ,  $CBA$ ; dunque tolto di comune  $CBA$ , sarebbero gli angoli  $EBA$ ,  $DBA$



uguali, cioè il tutto alla parte: il che è impossibile; dunque le rette  $CB$ ,  $BD$  sono per diritto fra loro e fanno una retta continua; C. D. D.

### 57. PROPOSIZIONE XV. TEOR.

*Segandosi fra di loro due rette  $AB$ ,  $CD$  nel punto  $E$ , gli angoli contrapposti alla cima  $AEC$ ,  $BED$  saranno uguali. (FIG. 16.)*

Perchè sopra l'  $AB$  stando la  $CE$ , farà gli angoli  $AEC$ ,  $CEB$  uguali a due retti (55): e così ancora la  $BE$  sopra la  $CD$  fa gli angoli  $BED$ ,  $CEB$  uguali a due retti, e però uguali ai due  $AEC$ ,  $CEB$ ; dunque tolto di comune  $CEB$ , resta l'angolo  $AEC$  uguale a  $BED$ . Similmente si proverà essere l'angolo  $CEB$  uguale al suo contrapposto  $DEA$ , facendo pure ciascheduno di questi coll'angolo  $BED$  due angoli uguali a due retti; dunque le rette che si segano fanno gli angoli alla cima contrapposti uguali; C. D. D.

*Corollario.* Da ciò può comprendersi che tutti gli angoli fatti intorno al punto del segamento da due o più linee rette sono uguali a quattro retti.

### 58. PROPOSIZIONE XVI. TEOR.

*Di qualunque triangolo  $ABC$  prolungando un lato  $BC$  verso  $D$ , l'angolo esteriore  $ACD$ , che ne risulta, è maggiore di qualunque dei due interni opposti  $BAC$ ,  $ABC$ . (FIG. 17.)*

Diviso il lato  $AC$  per mezzo in  $E$ , congiunta  $BE$ , si prolunghi in  $F$ , posta  $EF$ , uguale a  $BE$ , indi si congiunga  $FC$ .

I triangoli  $AEB$ ,  $CEF$  intorno alla cima  $E$  avendo gli angoli uguali (57), e i lati  $BE$ ,  $EA$  dell'uno essendo uguali ai lati  $FE$ ,  $EC$  dell'altro, ancora gli altri angoli corrispondenti  $BAE$ ,  $FCE$  saranno uguali; ma l'angolo  $ACD$  è maggiore della sua parte  $FCE$ , dunque è maggiore dell'angolo opposto  $BAE$ . Similmente prolungando il lato  $AC$  in  $G$ , diviso  $BC$  per mezzo in  $H$ , e congiunta  $AH$ , se si prolunga in  $I$  di maniera che  $HI$  riesca uguale ad  $AH$ , congiunta  $IC$ , si proverà nei triangoli  $ABH$ ,  $CIH$  essere l'angolo  $ABH$  uguale ad  $ICH$ , di cui essendo maggiore l'angolo  $BCG$ , il quale uguaglia  $ACD$  (57), esso angolo  $ACD$  parimente sarà maggiore di  $ABH$ ; dunque l'angolo esterno

$\angle ACD$  è maggiore di qualunque interno opposto  $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$ , preso separatamente l'uno dall'altro; C. D. D.

### 59. PROPOSIZIONE XVII. TEOR.

*Due angoli di qualsivoglia triangolo sono sempre minori di due retti. (FIG. 17.)*

Del triangolo  $ABC$  prolungato il lato  $BC$  in  $D$ , l'angolo interno  $\angle BAC$  è minore dell'esterno  $\angle ACD$  (58); dunque di comune aggiungendo l'angolo  $\angle ACB$ , saranno i due  $\angle BAC$  e  $\angle ACB$  presi insieme minori dei due  $\angle ACD$  e  $\angle ACB$ , la cui somma è uguale a due retti (55). Similmente si proverà essere  $\angle ABC$  e  $\angle ACB$ , insieme presi, minori di due retti; dunque sono sempre due angoli d'un triangolo minori di due retti; C. D. D.

### 60. PROPOSIZIONE XVIII. TEOR.

*Se nel triangolo  $ABC$  il lato  $AB$  è maggiore del lato  $AC$  l'angolo  $\angle ACB$  opposto al primo sarà maggiore dell'angolo  $\angle ABC$  opposto al secondo lato. (FIG. 18.)*

Si tagli da  $BA$  la parte  $AD$  uguale ad  $AC$ , e si congiunga  $CD$ .

Sarà l'angolo  $\angle ACD$  uguale ad  $\angle ADC$  (46), e questo è maggiore dell'interno  $\angle ABC$  (58); dunque l'angolo  $\angle ACD$ , e molto più il tutto  $\angle ACB$ , è maggiore dell'angolo  $\angle ABC$ ; C. D. D.

### 61. PROPOSIZIONE XIX. TEOR.

*Inversamente qualunque volta sia l'angolo  $\angle ACB$  maggiore dell'angolo  $\angle ABC$  in un medesimo triangolo, sarà il lato  $AB$  opposto al primo maggiore del lato  $AC$  opposto al secondo. (FIG. 18.)*

Perchè se i lati suddetti fossero uguali, ancora gli angoli  $\angle ACB$ ,  $\angle ABC$  sarebbero uguali; se  $AC$  fosse maggiore di  $AB$ , sarebbe l'angolo  $\angle ABC$  maggiore di  $\angle ACB$  (60); dunque essendo  $\angle ACB$  maggiore di  $\angle ABC$ , bisogna che sia il lato  $AB$  maggiore di  $AC$ ; C. D. D.



## 62. PROPOSIZIONE XX. TEOR.

*In ogni triangolo ADC sono due lati qualunque AD e DC presi insieme maggiori del terzo AC. (FIG. 18.)*

Si prolunghi AD, e pongasi in esso DB uguale a DC: congiungasi BC.

Sarà l'angolo DCB uguale all'angolo B (46); ma ACB è maggiore di DCB; dunque ACB è maggiore dell'angolo B, e però nel triangolo ABC il lato AB sarà maggiore di AC (61): ma AB è uguale ai due lati AD, DC; dunque sono questi maggiori del terzo AC; C. D. D.

## 63. PROPOSIZIONE XXI. TEOR.

*Se dagli estremi della base BC si conducano le rette BD, CD concorrenti nel punto D dentro il triangolo ABC, saranno le due rette BD, CD minori delle due BA, CA; ma quelle conterranno l'angolo BDC maggiore dell'angolo BAC contenuto da queste. (FIG. 19.)*

Si prolunghi BD fino che concorra col lato AC in E.

Saranno le due BA, AE maggiori di BE (62): dunque aggiunta di comune EC, sono BA e AC maggiori di BE, EC; e perchè DE con EC sono maggiori di CD, e aggiunta DB, sono BE ed EC maggiori di BD e CD; dunque a più gran ragione le due BA, AC sono maggiori delle due BD, CD. L'angolo poi BDC è maggiore di CED (58), ed è CED maggiore di BAC; dunque BDC è maggiore di BAC; C. D. D.

64. *Scolio.* ARCHIMEDE stabilisce per assioma o principio geometrico, che di due linee o curve o composte di rette, le quali, terminando agli stessi punti, rivolgono la concavità dalla medesima parte, è maggiore quella la quale comprende l'altra dentro di sè; e che la linea retta è la minima che condur si possa tra due punti; così AFC è maggiore di ADEC; questa maggiore di ABC; e la linea retta AC la minima di tutte. Con tale assioma, che è abbracciato da tutti i geometri antichi e moderni venuti di poi, la proposizione XX e la prima parte della XXI non hanno bisogno di dimostrazione, essendone una immediata conseguenza. (FIG. 20.)

## 65. PROPOSIZIONE XXII. PROBL.

*Date tre linee rette  $A, B, C$ , due delle quali sieno maggiori della terza, formarne un triangolo  $FKG$ . (FIG. 21.)*

Nella retta  $DH$  si distinguano la parti  $FG, GH, FD$  rispettivamente uguali alle date  $A, B, C$ ; e fatto centro in  $F$ , coll'intervallo  $FD$  descrivasi il cerchio  $DK$ ; e fatto centro in  $G$ , coll'intervallo  $GH$  si descriva l'altro cerchio  $HK$ ; e dove questi cerchj concorrono in  $K$ , si congiungano ai centri le rette  $KF, KG$ , sarà  $FKG$  il triangolo ricercato.

Di fatto il lato  $FG$  è uguale ad  $A$ : il lato  $GK$  uguale a  $GH$ , cioè a  $B$ , ed il lato  $FK$  uguale ad  $FD$ , cioè a  $C$ ; dunque si è fatto il triangolo colle date tre linee; C. D. F.

## 66. PROPOSIZIONE XXIII. PROBL.

*Nella data retta linea  $AB$ , al punto  $A$  dato in essa costruire un angolo uguale al dato  $FDE$ . (FIG. 22.)*

Tirata sotto l'angolo dato qualunque retta  $FE$ , si faccia un triangolo con tre linee uguali alle date  $FE, FD, DE$  (65), in maniera che le due  $AB, AC$  uguaglino le due  $ED, DF$ , e la  $BC$  sia uguale alla  $FE$ ; è manifesto che l'angolo  $BAC$  sarà uguale all'angolo dato  $FDE$  (50). Dunque sarà fatto ciò che era proposto.

## 67. PROPOSIZIONE XXIV. TEOR.

*Se due triangoli  $ABC, DEF$  avranno due lati  $AB, AC$  uguali ai due  $DE, DF$ , l'uno all'altro rispettivamente, ma l'angolo  $BAC$  sia maggiore di  $EDF$ , la base  $BC$  sarà altresì maggiore della base  $EF$ . (FIG. 22.)*

Nella linea  $AC$  costituisca al punto  $A$  l'angolo  $BAG$  uguale ad  $EDF$  (66), e fatta la  $AG$  uguale alla  $DF$ , si congiunga  $BG$ , la quale sarà ad  $EF$  uguale (45).

Se il punto  $G$  cade dentro la retta  $BC$ , è chiaro che sarà  $BG$  minore di  $BC$ , essendo una sua parte; se cade sopra, essendo le due date  $AG, BG$  minori delle due  $AC, BC$  (63), ed essendo uguale  $AG$  ad  $AC$ , perchè ciascuna di esse uguaglia  $DF$ , dovrà essere  $BG$  minore di  $BC$ ; se poi il punto  $G$  riesce al di sotto, congiunta  $CG$ , sarà il triangolo  $ACG$  equicrura, onde l'angolo  $ACG$  sarà uguale ad  $AGC$ : ma l'angolo  $BGC$  è maggiore di  $AGC$ , e conseguentemente di  $ACG$ , e molto più di  $BCG$ , dunque  $BC$  è

maggiore di BG (61). Però sempre essendo BC di BG<sup>17</sup> maggiore, sarà pure maggiore di EF; C. D. D.

#### 68. PROPOSIZIONE XXV. TEOR.

*Se il triangolo ABC ha i due lati AB, AC uguali a quelli ED, DF del triangolo DEF, ma la base BC sia maggiore della base EF, l'angolo BAC sarà pure maggiore dell'angolo EDF. (FIG. 22.)*

Perchè se ancora i due angoli BAC, EDF fossero uguali, sarebbero le basi BC, EF uguali (45); e se fosse BAC minore di EDF, sarebbe BC minore di EF, contro l'ipotesi (67). Dunque BAC è maggiore di EDF.

#### 69. PROPOSIZIONE XXVI. TEOR.

*Nei due triangoli ABC, DGE, se i due angoli B, C dell'uno sono eguali agli angoli DGE, GED dell'altro, ed il lato intercetto fra i detti angoli B, C sia uguale al lato GE interposto fra gli altri due angoli del secondo uguali a quelli del primo; o pure un lato AB opposto ad uno di essi angoli C uguagli il lato DG opposto all'angolo E uguale ad esso C, saranno gli altri lati dell'uno uguali a quelli dell'altro, e l'angolo rimanente, al rimanente, e tutto il triangolo primo a tutto il secondo sarà uguale. (FIG. 23.)*

Imperocchè quando BC uguaglia GE, se non fosse ancora CA uguale ad ED, sia uno di essi, per esempio ED, maggiore dell'altro CA, e tagliandone EH uguale ad AC, congiunta GH, riuscirebbe l'angolo EGH uguale all'angolo B (45): ma questo supponevasi uguale a DGE, dunque la parte EGH sarebbe uguale al tutto DGE: il che è impossibile; erano dunque uguali ancora i lati CA e ED, e conseguentemente ancora BA era uguale a GD, e l'angolo A all'angolo GDE, e tutto il triangolo a tutto il triangolo (45). Se poi solamente si supponesse il lato AB uguale a DG, sarebbe ancora BC uguale a GE: altrimenti se fosse uno di essi, per esempio GE, maggiore di BC, posta GI uguale a BC, sarebbe l'angolo GID uguale a BCA (45): ma GID è maggiore di GED (58), dunque BCA non sarebbe uguale a GED, contro l'ipotesi; bisogna dunque che ancora i lati BC, GE sieno uguali, e però ancora AC a DE, e l'angolo A all'angolo GDE; e tutto il triangolo a tutto il triangolo; C. D. D.



## 70. PROPOSIZIONE XXVII. TEOR.

*Se due rette linee  $AB$ ,  $CD$  sono segate da un' altra  $EF$ , in maniera che gli angoli alterni  $AEF$ ,  $DFE$  di quà e di là riescano uguali, esse linee  $AB$ ,  $CD$  saranno parallele. ( FIG. 24. )*

Perchè, se prolungate convenissero in un punto  $G$ , dovrebbe l'angolo esterno  $AEF$  essere maggiore dell' interno  $DFE$  (58): ma gli è uguale; dunque non convengono esse rette  $AB$ ,  $CD$  in veruna parte; e però sono parallele (28); C. D. D.

## 71. PROPOSIZIONE XXVIII. TEOR.

*Parimenti saranno parallele le rette  $AB$ ,  $CD$  se l'angolo esterno  $AGE$  sarà eguale all' interno opposto dalla medesima parte  $CHG$ , ovvero se i due interni della stessa banda  $AGH$ ,  $CHG$  sieno eguali a due retti. ( FIG. 25. )*

Nel primo caso sarà l'angolo  $HGB$ , il quale uguaglia  $AGE$  (57), uguale a  $CHG$  alterno: nel secondo caso essendo  $HGB$  con  $AGH$  uguale a due retti (55), se sono  $AGH$ ,  $CHG$  pure a due retti uguali, bisognerà sia  $HGB$ , uguale al detto  $CHG$  alterno; dunque le rette  $AB$ ,  $CD$  in qualunque di questi due casi debbono essere parallele (79): C. D. D.

72. *Scolio.* Avendo dimostrato nella proposizione precedente che quando le due rette  $AB$ ,  $CD$  ( FIG. 26 ) segate da una terza  $EF$  hanno gli angoli interni dalla stessa banda  $BEF$ ,  $EFD$  eguali a due retti sono esse parallele, ne concluderemo che se pel punto  $E$  si conduce la retta  $LEH$ , la quale sia entro l'angolo  $BEF$ , questa prolungandosi dalla banda di  $H$ , andrà ad unirsi in fine alla  $CD$ , e i due angoli  $HEF$ ,  $EFD$  da quella banda medesima saranno minori di due retti.

Si ammetterà ora senza difficoltà quest' assioma di Euclide ( che in vece di scrivere tra gli assiomi, ho riserbato per maggiore intelligenza a questo luogo ):

„ Se due linee rette sieno segate da una terza in maniera che da una parte ne risultino due angoli interni „ minori di due retti, e dall' altra banda maggiori; prolun- „ gate in infinito quelle due rette dalla banda ove sono gli „ angoli minori, dovranno insieme concorrere. „

## 73. PROPOSIZIONE XXIX. TEOR.

*Segandosi due linee parallele  $AB$ ,  $CD$  da una retta  $EF$ , saranno i due angoli interni da qualunque parte, come  $AGH$ ,  $CHG$ , uguali a due retti, e l'esteriore  $BGE$  uguale all'interno opposto dalla medesima parte  $GHD$ , e gli alterni  $DHG$ ,  $AGH$  tra di loro uguali. (FIG. 25.)*

Perchè se gl'interni  $AGH$ ,  $CHG$  non fossero uguali a due retti, o sarebbero essi o i susseguenti  $BGH$ ,  $DHG$  minori di due retti, onde non sarebbero le rette  $AB$ ,  $CD$  parallele, ma converrebbero insieme (72). Dunque debbono essere i due angoli interni da qualsivoglia parte uguali a due retti, ed a due retti essendo pure eguali tanto i due  $EGB$ ,  $BGH$ , quanto i due  $AGH$ ,  $BGH$ , sarà qualunque di queste coppie uguale ai due interni  $DHG$  e  $BGH$ ; e però tolto di comune esso  $BGH$ , rimarrà  $DHG$  eguale sì all'esterno  $BGE$ , come all'alterni  $AGH$ ; C. D. D.

## 74. PROPOSIZIONE XXX. TEOR.

*Se le rette  $AB$ ,  $CD$  saranno parallele ad una terza  $EF$ , saranno pure tra di loro parallele. (FIG. 27.)*

Perchè segandosi tutte e tre da una retta  $GK$  nei punti  $G$ ,  $H$ ,  $K$ , l'angolo  $AGK$  sarà uguale all'alterni  $GHF$  (73), e questo uguale all'interno opposto  $DKH$ ; dunque i due  $AGK$ ,  $DKH$ , che sono alterni tra le due rette  $AB$ ,  $CD$ , saranno uguali; e però queste rette saranno parallele tra di loro (70), essendo ciascuna parallela alla medesima terza  $EF$ ; C. D. D.

## 75. PROPOSIZIONE XXXI. PROBL.

*Per un dato punto  $H$  tirare una linea  $CD$  parallela ad un'altra linea data  $AB$ . (FIG. 25.)*

Si tiri da esso punto sopra la data linea  $AB$  qualunque retta  $HG$ , indi all'angolo  $AGH$  si faccia uguale l'angolo  $GHD$ . (66)

Sarà la retta  $DHC$  parallela alla data  $AB$  (70); C. D. F.

## 76. PROPOSIZIONE XXXII. TEOR.

*In qualunque triangolo  $ABC$ , prolungando fuori un lato  $BC$  verso  $D$ , sarà l'angolo esterno  $AOD$  uguale ai due interni opposti  $CAB$ ,  $CBA$  presi insieme; e tutti tre gli angoli di esso triangolo  $CAB$ ,  $CBA$ ,  $BCA$  interni sono uguali a due retti. (FIG. 28.)*

Si tiri dal punto  $C$  la retta  $CE$  parallela ad  $AB$  (75).

Sarà l'angolo  $ACE$  uguale all'alterno  $CAB$ , e l'esterno  $ECD$  uguaglierà l'interno opposto  $ABC$  (73); dunque l'angolo  $ACD$  è uguale a tutti due gl'interni opposti  $CAB$ ,  $CBA$ ; e tanto a quello quanto a questi due aggiunto l'angolo rimanente interno  $BCA$ , sono i tre angoli interni  $CAB$ ,  $CBA$ ,  $BCA$  uguali ai due  $ACD$ ,  $BCA$ , i quali uguagliano due retti. Però i tre angoli interni di qualunque triangolo uguagliano due retti; C. D. D.

77. *Corollario*. Se in un triangolo vi sarà un angolo retto o uno ottuso, gli altri due saranno acuti, e nel primo caso ambidue presi insieme faranno un angolo retto.

78. *Corollario*. Se in un triangolo isoscele vi sarà un retto, gli altri due saranno semiretti.

79. *Corollario*. Nel triangolo equilatero ciascun angolo è la terza parte di due retti.

80. Di qui si ricaverà un facil metodo per dividere l'angolo retto in tre parti.

81. *Corollario*. Se due angoli di un triangolo sono eguali a due angoli di un altro, ancora il terzo angolo di questo sarà eguale al terzo di quello.

82. *Corollario*. In qualunque figura rettilinea tutti gli angoli interni sono uguali a tal numero di retti, qual è il doppio numero de' lati, toltine quattro; poichè preso dentro la data figura qualunque punto, indi condotte a ciascun angolo di essa le sue rette, ne risultano tanti triangoli quanti sono i lati della figura stessa; onde gli angoli di essi triangoli sono uguali a tante pajate di retti quanti sono essi lati della figura; ma agli angoli di questa sono congruenti quelli dei triangoli, eccettuati però gli angoli che sono intorno al loro vertice, i quali uguagliano quattro retti pel corollario della Proposizione XV; dunque il numero degli angoli retti attenenti ad essa figura è doppio del numero de' suoi lati, detrattine quattro. Così, se la figura sarà quadrilatera, preso un punto dentro di essa, e da questo condotte agli angoli tante rette quanti sono gli angoli stessi del quadrilatero, ne risulteranno quattro triangoli: gli angoli di questi uguagliano per la proposizione otto retti; sicchè togliendosi da una tal somma i quattro angoli retti che sono intorno al vertice dei triangoli, vi rimangono quattro retti attenenti alla figura quadrilatera.

83. *Corollario*. Gli angoli poi esterni che risultano, prolungando da una sola parte tutti i lati in qualsivoglia figu-



ra, saranno sempre uguali a quattro retti, perchè questi con gli angoli interni fanno tante pajate di retti quanti sono i lati; ma gli angoli interni uguagliano tante pajate di retti quanti sono essi lati, detratte quattro; dunque a questo numero di quattro retti corrispondono gli angoli esterni; dal che rilevasi eziandio che gli angoli esterni d'una figura uguagliano quelli di qualunque altra che sia composta d'un maggiore o minor numero di lati.

84. *Corollario*. La perpendicolare è la più corta di tutte le linee, le quali da un dato punto condurre si possono ad una data linea. In fatti immaginando condotta una perpendicolare ed un'altra retta (cui si dà il nome di obliqua), si vedrà subito che nel triangolo che indi ne risulta, l'obliqua sarà opposta all'angolo retto, e la perpendicolare ad un angolo minore del retto. Sarà quindi l'obliqua più grande della perpendicolare (61).

85. *Corollario*. Da un punto non si può condurre sopra una retta che una sola perpendicolare: se due fossero le perpendicolari, s'incontrerebbe un triangolo che avrebbe i tre angoli presi insieme maggiori di due retti.

86. *Scolio*. Essendo la perpendicolare la più breve linea che condurre si possa da un punto ad una retta, con essa se ne misura la distanza.

### 87. PROPOSIZIONE XXXIII. TEOR.

*Le rette AC, BD che congiungono dalle stesse parti i termini delle rette AB, CD parallele ed eguali, riescono ancor esse uguali e parallele. (FIG. 29.)*

Si connettano colla retta CB gli angoli opposti.

Intorno agli angoli ABC, BCD (i quali si eguagliano, essendo alterni di due parallele) sarà il lato AB uguale al lato CD, ed il lato CB comune; dunque le basi AC, BD sono uguali, e gli altri angoli corrispondenti BCA, CBD pure saranno uguali; e però essendo alterni, le stesse rette AC, BD sono parallele (70); C. D. D.

### 88. PROPOSIZIONE XXXIV. TEOR.

*Ne' quadrilateri, i cui lati opposti sono paralleli, e però chiamansi parallelogrammi, come ABDC, gli opposti lati sono sempre uguali, e gli angoli opposti uguali, e da un angolo all'altro opposto tirata la BC, che dicesi diagonale, rimane detto spazio diviso in due triangoli uguali ABC, DCB. (FIG. 29.)*

I triangoli  $ABC$ ,  $DCB$  sono eguali, perchè hanno il lato comune  $BC$ . e due angoli eguali che sono gli alterni  $ABC$ ,  $BCD$ , e gli altri alterni  $BCA$ ,  $CBD$  (73). Dunque sono eguali i lati  $AC$ ,  $BD$  opposti agli angoli eguali, e per la stessa ragione anche i lati  $AB$ ,  $CD$ ; sono pure eguali gli angoli  $A$ ,  $D$  opposti al lato comune, e gli angoli  $ABD$ ,  $ACD$ , che sono somme di angoli eguali; e la superficie del parallelogrammo è divisa per metà dalla diagonale; C. D. D.

*Definizione.* Riserbandoci di chiamare eguali fra di loro quelle figure che hanno rispettivamente eguali i lati, gli angoli e le superficie, diremo *equivalenti* quelle che hanno le superficie eguali, ma possono avere i lati e gli angoli disuguali (\*).

### 89. PROPOSIZIONE XXXV. TEOR.

*I parallelogrammi  $ABCD$ ,  $BCFE$  sopra la stessa base  $BC$ , fra le medesime parallele  $BC$ ,  $AF$  descritti, sono tra di loro equivalenti. (FIG. 30.)*

Il lato  $AD$  ed il lato  $EF$  essendo uguali al medesimo opposto  $BC$  (88), sono uguali tra loro, ed aggiunta la comune  $DE$ , sarà  $AE$  uguale a  $DF$ ; anche  $AB$  uguaglia  $DC$  (88), e l'angolo  $BAE$  è uguale a  $CDF$ : dunque il triangolo  $ABE$  è uguale all'altro  $CDF$ . Tolto il comune  $DGE$ , saranno equivalenti i trapezj  $ADGB$ ,  $CGEF$ , indi aggiunto all'uno ed all'altro il triangolo  $BGC$ , sarà il parallelogrammo  $ABCD$  equivalente all'altro  $BCFE$ ; C. D. D.

### 90. PROPOSIZIONE XXXVI. TEOR.

*Anche i parallelogrammi  $ABCD$ ,  $EFGH$  tra le stesse parallele  $AH$ ,  $BG$  disposti, e sopra uguali basi  $BC$ ,  $FG$ , saranno tra di loro equivalenti. (FIG. 31.)*

Tirate le rette  $BE$ ,  $CH$ , riusciranno ancor esse parallele (87), essendo le parallele  $BC$ ,  $EH$  uguali, giacchè tanto questa quanto quella è uguale a  $FG$ ; dunque  $BCHE$  è un parallelogrammo equivalente ad  $ABCD$  per essere su la stessa base  $BC$ , ed equivalente pure ad  $EFGH$  (89), con cui ha la medesima base  $EH$  fra le stesse parallele  $AH$ ,  $BG$ ;

---

(\*) Questa distinzione fra l'eguaglianza e l'*equivalenza* è accettata dai geometri moderni. E' molto utile per la chiarezza delle idee, giacchè bisogna fissare che tutte le figure eguali sono equivalenti, ma non tutte le equivalenti sono eguali.

però i detti parallelogrammi  $ABCD$ ,  $EFGH$  sono tra di loro equivalenti; C. D. D.

#### 91. PROPOSIZIONE XXXVII. TEOR.

*I triangoli  $BDC$ ,  $BEC$  costituiti su la medesima base  $BC$ , e tra le stesse parallele  $BC$ ,  $AE$ , sono pure tra di loro equivalenti. (FIG. 31.)*

Tirinsi la  $BA$  parallela a  $CD$ , e la  $CH$  parallela a  $BE$ .

Risultano due parallelogrammi  $ABCD$ ,  $EBCH$ , i quali sono sulla stessa base e fra le medesime parallele, e però sono tra di loro equivalenti (89); dunque i triangoli  $BDC$ ,  $BEC$ , che sono la metà di essi parallelogrammi (88), sono pure tra di loro equivalenti (35); C. D. D.

#### 92. PROPOSIZIONE XXXVIII. TEOR.

*I triangoli  $BCD$ ,  $FHG$  sopra uguali basi  $BC$ ,  $FG$  disposti fra le stesse parallele  $BG$ ,  $DH$  sono pure tra di loro equivalenti. (FIG. 31.)*

Conducansi le rette  $BA$  parallela a  $CD$ , ed  $FE$  parallela a  $GH$ .

Riescono due parallelogrammi  $ABCD$ ,  $EFGH$  sopra basi uguali costituiti e fra le medesime parallele, che però sono tra di loro equivalenti (90); dunque ancora detti triangoli, che sono le loro metà, sono tra di loro equivalenti; C. D. D.

#### 93. PROPOSIZIONE XXXIX. TEOR.

*Se due triangoli  $BAC$ ,  $BDC$  costituiti sopra la stessa base  $BC$ , verso la medesima parte, sono equivalenti, la retta  $AD$ , che le loro cime congiunge, riesce parallela alla base  $BC$ . (FIG. 32.)*

Altrimenti, se non le fosse parallela, si tiri  $AE$  parallela a  $BC$ , la quale seghi il lato  $BD$  sopra o sotto la cima  $D$ , nel punto  $E$ . Congiunta la retta  $CE$ , riuscirebbe il triangolo  $BEC$  equivalente a  $BAC$  (91); e però uguale in superficie all' altro triangolo  $BDC$ , onde la parte sarebbe uguale al tutto: il che è impossibile; dunque l'  $AD$  era parallela alla base  $BC$ ; C. D. D.

#### 94. PROPOSIZIONE XL. TEOR.

*Similmente se sopra due porzioni uguali  $BC$ ,  $EF$  della medesima linea  $BF$  sieno costituiti verso la medesima parte*



*due triangoli equivalenti  $BAC$ ,  $EDF$ , la retta  $AD$  che connette le loro cime sarà parallela a  $BF$ . (FIG. 33.)*

Se tale non fosse, tirata l'  $AH$  parallela a  $BF$  seghebbe il lato  $ED$  in  $H$ , sopra o sotto la cima  $D$ ; e congiunta la  $FH$ , sarebbe il triangolo  $EHF$  equivalente ad  $ABC$  (92), e però uguale in superficie ad  $EDF$ : il che è assurdo; adunque non altra linea che l'  $AD$  può essere parallela a  $BF$ ; C. D. D.

#### 95. PROPOSIZIONE XLI. TEOR.

*Se il parallelogrammo  $ABCD$  ha la stessa base  $BC$  col triangolo  $BEC$  disposto fra le stesse parallele  $BC$ ,  $AE$ , sarà il parallelogrammo duplo di detto triangolo. (FIG. 31.)*

Imperocchè, tirata la retta  $BD$ , saranno i triangoli  $BDC$ ,  $BEC$  equivalenti (91); dunque essendo  $ABCD$  duplo di  $BDC$  (88), sarà pure duplo di  $BEC$ ; C. D. D.

#### 96. PROPOSIZIONE XLII. PROBL.

*Ad un dato triangolo  $ABC$  fare un parallelogrammo equivalente  $FECG$  con un angolo uguale ad un dato  $D$ . (FIG. 34.)*

Dal punto  $A$  condotta la retta  $AG$  parallela alla base  $BC$  (75), e questa per mezzo divisa in  $E$  (52), si faccia l'angolo  $CEF$  uguale al dato  $D$  (66), e condotta  $CG$  parallela ad  $EF$ , sarà il parallelogrammo  $FECG$  il ricercato.

Tirisi la retta  $AE$ , ed essendo uguali le basi  $BE$ ,  $EC$ , sono equivalenti i triangoli  $BAE$ ,  $EAC$  (92), e però sarà  $ABC$  duplo del triangolo  $AEC$ , di cui è ancora duplo il parallelogrammo  $FECG$  (95); sarà dunque al triangolo  $ABC$  equivalente il detto parallelogrammo con l'angolo  $CEF$  uguale al dato  $D$ ; C. D. F.

#### 97. PROPOSIZIONE XLIII. TEOR.

*In ogni parallelogrammo  $ABCE$  condotta la diagonale  $AC$ , e per qualunque punto  $G$  di essa condotte le rette  $IGF$ ,  $HGK$  parallele ai lati  $AB$ ,  $BC$ , saranno i parallelogrammi  $BIGK$ ,  $HGFE$  (che si chiamano complementi) tra di loro equivalenti. (FIG. 35.)*

Imperocchè essendo tutto il triangolo  $ABC$  uguale ad  $AEC$ , il triangolo  $AKG$  uguale ad  $AFG$ , ed il triangolo  $GIC$  uguale a  $GHC$  (88), sarà il rimanente spazio  $BIGK$  uguale al rimanente  $HGFE$ ; C. D. D.

## 98. PROPOSIZIONE XLIV. PROBL.

*Ad una data retta GF, nell'angolo dato D, applicare un paralellogrammo HGFE equivalente ad un dato triangolo L. (FIG. 34 e 35.)*

Si faccia un paralellogrammo IGKB equivalente al dato triangolo L nell'angolo IGK uguale al dato D (96), e posta la data GF per diritto al lato IG, si compisca il paralellogrammo KGFA, e si tiri la diagonale AG, che prolungata concorrerà col lato BI in C, e condotta CE parallela ad AB, si prolunghino ad essa le rette KG, AF in H, E, sarà il paralellogrammo HGFE il ricercato.

In fatti esso è un complemento equivalente all'altro IGKB (97), e però equivalente al dato triangolo L; ed applicato alla data retta GF con l'angolo HGF uguale ad IGK, e però uguale al dato angolo D; C. D. F.

## 99. PROPOSIZIONE XLV. PROBL.

*Alla data retta FG applicare un paralellogrammo GFKL, equivalente ad un dato rettilineo ABCD, con un angolo uguale al dato E. (FIG. 36.)*

Si risolva il rettilineo in triangoli ABD, BCD (ed in più altri, se avesse più lati): indi nel dato angolo E facciasi, applicato alla retta FG, il paralellogrammo FGHI equivalente al triangolo ABC (98), e prolungata la retta GH, si formi nell'angolo IHL, applicato alla retta HI, il paralellogrammo LHIK equivalente all'altro triangolo BCD (e così si prosiegua, se vi sono altri triangoli annessi).

È manifesto che tutto il paralellogrammo GFKL applicato alla retta GF, nell'angolo FGH uguale ad E, sarà equivalente a tutto il dato rettilineo, essendo la prima sua parte equivalente al primo triangolo, e la seconda al secondo, ecc.; C. D. F.

## 100. PROPOSIZIONE XLVI. PROBL.

*Sopra una data retta linea AB descrivere il suo quadrato ABCD. (FIG. 37.)*

Si alzi dal punto A sopra la data AB la perpendicolare AD (53) uguale alla medesima AB, e si tirino DC parallela ad AB, e BC parallela all'AD.

ABCD è per costruzione un paralellogrammo, dunque in esso i lati opposti saranno eguali (88); sicchè per essere

AB eguale a AD, tutti i lati saranno uguali. Di più gli angoli opposti BAD, BCD e ABC, ADC debbono essere eguali (88): ma BAD è retto ed anche ABC, per essere BC parallela ad AD (73); dunque tutti gli angoli sono retti. È dunque ABCD un quadrato (23) descritto sulla retta AB; C. D. F.

#### 101. PROPOSIZIONE XLVII. TEOR.

*In qualunque triangolo rettangolo ABC il quadrato BDEC descritto sopra il lato BC opposto all'angolo retto equivale alla somma dei due quadrati ABFG, ACIH descritti sopra gli altri due lati AB, AC contenenti l'angolo retto A. (FIG. 38.)*

Si tiri la retta ALM parallela a' lati BD, CE, e conducansi le rette FC, AD.

Aggiunto l'angolo ABC all'uno e all'altro de' retti FBA, DBC, sarà l'angolo FBC uguale all'angolo ABD, ed il lato FB essendo uguale al lato AB, ed il lato CB uguale a BD, saranno i triangoli FBC, ABD uguali. Ora essendo CA per diritto con la GA, mercè i due angoli retti BAC, BAG, il triangolo FBC ha la stessa base col quadrato ABFG, ed è tra le medesime parallele; onde ABFG è il duplo del triangolo FBC (95), e similmente il parallelogrammo BLMD è duplo del triangolo ABD; dunque il quadrato ABFG è uguale in superficie a BLMD. Parimente condotte le rette IB, AE, si proveranno uguali i triangoli ICB, ACE, di cui i doppj saranno pure uguali, cioè il quadrato ACIH equivarrà ad LMEC; e però la somma dei due quadrati de' lati AB, AC sarà uguale al quadrato del lato BC opposto all'angolo retto; C. D. D.

#### 102. PROPOSIZIONE XLVIII. TEOR.

*Inversamente, se il quadrato del lato CB uguaglia i due quadrati degli altri lati AB, AC del triangolo BAC, sarà l'angolo CAB opposto al lato BC necessariamente un angolo retto. (FIG. 39.)*

Dal punto A si tiri la perpendicolare AD sopra il lato AC, e prendasi AD uguale alla AB, congiungasi poscia CD.

Sarà il quadrato di essa CD uguale alla somma dei due quadrati di AC e di AD (101), ovvero di AC e di AB, essendo fatta AD uguale ad AB; dunque il quadrato CD è uguale al quadrato BC, ed il lato CD uguale al lato BC



ne' triangoli  $ADC$ ,  $ABC$ , in cui il lato pure  $AD$  uguaglia il lato  $AB$ , ed il lato  $AC$  è comune ad entrambi; dunque l'angolo retto  $CAD$  è eguale all'angolo  $CAB$  (50); e però questo pure è retto, onde esso triangolo  $CAB$  è rettangolo; C. D. D.

## LIBRO II.

### DEI QUADRATI E DEI RETTANGOLI DELLE LINEE.

#### *Definizioni.*

103. I. Ogni parallelogrammo rettangolo dicesi contenuto da quei due lati che sono d'intorno all'angolo retto. (FIG. 40.)

Così, quando si nominerà il *rettangolo*  $ABC$ , o di  $AB$  in  $BC$  (o sieno quelle due linee distinte o congiunte insieme, o l'una parte dell'altra), dovrà intendersi il parallelogrammo  $ABCD$  fatto da tali lati  $AB$  e  $BC$  congiunti insieme ad angolo retto, a' quali lati sono pure uguali gli opposti  $CD$  e  $DA$  paralleli ai due primi. Ed intanto dicesi esso rettangolo contenuto da essi lati, in quanto che sono essi che ne determinano la grandezza.

104. II. In ogni rettangolo  $ABCD$  preso uno dei rettangoli intorno alla diagonale, come  $AEFH$  con i due complementi  $FB$ ,  $FD$ , cioè lo spazio  $ABIFGD$ , si chiamerà *gnomone*. (FIG. 41.)

#### 105. PROPOSIZIONE PRIMA. TEOR.

*Se di due rette  $AB$  e  $C$ , l'una sia segata in più parti  $AE$ ,  $EF$ ,  $FB$ , il rettangolo compreso da essa  $C$  e dall'intera  $AB$  è uguale alla somma de' rettangoli contenuti da essa  $C$  e da ciascheduna di tali parti. (FIG. 42.)*

Alla stessa  $AB$  posta ad angolo retto la  $BD$  uguale alla  $C$ , e compiuto il rettangolo  $ABDG$ , si tirino dai punti  $E$ ,  $F$ , che dividono essa  $AB$ , le rette  $EH$ ,  $FI$  parallele a  $BD$ .

È manifesto che  $ABDG$  uguaglia la somma dei rettangoli in esso compresi  $FBDI$ ,  $EFIH$ ,  $AEHG$ ; ma quello è contenuto dall' $AB$  e dalla  $BD$  uguale a  $C$ , e questi altri si contengono dalle parti  $FB$ ,  $FE$ ,  $AE$  e dalle rette  $FI$ ,  $EH$  uguali a  $BD$ , e però uguali alla stessa  $C$ ; dunque il rettangolo contenuto dall'intera  $AB$  e dalla  $C$  uguaglia la som-

ma de' rettangoli fatti dalla stessa  $C$  e da ciascuna delle parti  $AE$ ,  $EF$ ,  $FB$  dell'intera  $AB$ ; C. D. D. (\*).

#### 106. PROPOSIZIONE II. TEOR.

*Segandosi la retta  $AB$  in due parti  $AD$ ,  $BD$ , il quadrato  $ABGF$  di tutta l' $AB$ , uguaglia la somma dei rettangoli di essa  $AB$  in ciascheduna parte  $AD$ ,  $BD$ . (FIG. 43.)*

Perchè tirata  $DH$  parallela al lato  $AF$ , resta esso quadrato diviso appunto in due rettangoli, l'uno  $FADH$  contenuto dall' $AF$  (ch'eguaglia  $AB$ ) e dalla parte  $AD$ ; l'altro  $DBGH$  contenuto dalla  $BG$  (pure uguale ad  $AB$ ) e dall'altra parte  $DB$ : sicchè essendo il tutto uguale alla somma delle sue parti, il quadrato  $AB$  uguaglia i rettangoli di  $AB$  in  $AD$ , e di essa  $AB$  in  $BD$ ; C. D. D.

#### 107. PROPOSIZIONE III. TEOR.

*Essendo pure segata l' $AB$  nel punto  $D$ , il rettangolo di tutta l' $AB$  nella parte  $AD$  uguaglia il quadrato di essa  $AD$  col rettangolo contenuto da ambe le parti  $AD$  e  $BD$ . (FIG. 44.)*

Si alzi perpendicolarmente ad  $AB$  la retta  $AF$  uguale alla parte  $AD$ , e compiuto il rettangolo  $AFGB$  che è contenuto da tutta l' $AB$  e dalla parte  $AD$ , si tiri la  $DH$  parallela ad  $AF$ .

Sarà  $FADH$  il quadrato di  $AD$ , ed  $HDBG$  il rettangolo contenuto dalle parti  $AD$ ,  $BD$  (perchè  $HD$  è uguale ad  $AD$ ): dunque essendo il rettangolo di  $AD$  in  $AB$ , cioè  $AFGB$ , equivalente a questi due spazj, è manifesto che uguaglia in superficie il quadrato  $AD$ , più il rettangolo  $ADB$ .

#### 108. PROPOSIZIONE IV. TEOR.

*Essendo la retta  $AB$  divisa in  $C$ , il quadrato di tutta l' $AB$  è uguale alla somma de' quadrati delle parti  $AC$ ,  $CB$ , più due rettangoli contenuti da esse parti, cioè da  $AC$  in  $CB$ . (FIG. 45.)*

Descrivasi esso quadrato  $ABDE$ , e tirata la diagonale

(\*) La dimostrazione di questo teorema, come quella degli altri sette che seguono, è intieramente appoggiata all'assioma: *Il tutto è eguale alle sue parti prese insieme.*

BE, venga segata in G dalla CF parallela al lato BD, e si tiri per G la HGI parallela ad AB.

Essendo i lati AB, AE uguali, l'angolo AEB uguaglia l'angolo ABE (46), a cui pure è uguale HGE (73); dunque sono gli angoli GEH, HGE eguali, e però EHGF è il quadrato di HG, cioè di AC; similmente CGIB si mostrerà essere il quadrato di CB, come ancora può dedursi dall'essere tutta la FC uguale ad AB; e la parte FG uguale ad AC, e però la rimanente GC uguale a CB. I due complementi ACGH, FGID sono eguali e contenuti dai lati uguali alle parti AC, CB. Dunque essendo il quadrato ABDE uguale alla somma degli spazj EHGF, CGIB, ACGH, FGID, è manifesto essere uguale alla somma de' quadrati delle parti AC, CB ed a due rettangoli contenuti da esse parti; C. D. D.

109. *Corollario.* I rettangoli che si fanno intorno alla diagonale d'un quadrato sono quadrati; come si è dimostrato EHGF essere quadrato di AC; ed IBCG quadrato di BC.

#### 110. PROPOSIZIONE V. TEOR.

*Se la retta AC è divisa per mezzo in B, ed in parti disuguali nel punto D, il quadrato della metà di essa BC equivale al rettangolo delle parti disuguali AD, DC col quadrato del segmento intermedio BD. (FIG. 46.)*

Si descriva il quadrato di essa BC, il quale sia BCEF, e tirata la diagonale CF: si conduca la DH parallela a CE, la quale seghi la diagonale in G; e si tiri pel punto G la retta IGLK parallela ad AC concorrente coi lati CE, BF in I, L, e con la AK parallela a detti lati in K.

Sarà il rettangolo GIEH uguale a BDGL (97), ed aggiunto di comune il quadrato DGIC, sarà DCEH uguale al rettangolo BCIL, ovvero al rettangolo ABLK uguale a questo, per essere ambidue sopra basi uguali CB, AB (90); ed aggiunto di comune il rettangolo BDGL, sarà lo gnomone HGLBCE equivalente al rettangolo ADGK, il quale è contenuto dalla retta AD e dalla DG uguale a DC: onde apposto ad entrambi il quadrato LGHF, che è quadrato di BD, sarà lo gnomone con tale quadrato, cioè il quadrato intiero BCEF equivalente al rettangolo delle parti disuguali ADC col quadrato della parte intermedia BD; C. D. D.



## 111. PROPOSIZIONE VI. TEOR.

*Se alla retta  $AC$ , divisa per mezzo in  $B$ , si aggiunga per diritto la retta  $CD$ , il rettangolo di tutta la composta  $AD$  nell'aggiunta  $CD$  col quadrato della metà  $BC$  uguaglia il quadrato della  $BD$ , composta della metà e dell'aggiunta. (FIG. 47.)*

Descritto il quadrato  $BDHF$ , e tirata la diagonale  $DF$ , da cui si seghi la  $CE$  parallela a  $BF$  in  $I$ , pel punto  $I$  si tiri la  $GK$  parallela ad  $AD$ , e concorrente coi lati  $DH$ ,  $BF$  in  $G$ ,  $L$ , e con l' $AK$  parallela a  $BF$  in  $K$ .

Sarà il rettangolo  $ABLK$  uguale a  $BCIL$  per essere sopra uguali basi (69); ed è  $BCIL$  uguale all'altro complemento  $GIEH$  (97); dunque  $ABLK$  uguaglia  $GIEH$ ; ed aggiunto ad ambidue il rettangolo  $BDGL$ , sarà tutto il rettangolo  $ADGK$  (cioè contenuto dalla composta  $AD$  e dall'aggiunta  $DC$  uguale a  $DG$ ) equivalente allo gnomone  $BLIEHD$ ; dunque aggiunto ad ambidue il quadrato  $LIEF$  (che è il quadrato della metà  $BC$ ), riesce il rettangolo  $ADC$  col quadrato  $BC$  uguale al detto gnomone collo stesso quadrato, cioè a tutto il quadrato  $BDHF$ ; C. D. D.

## 112. PROPOSIZIONE VII. TEOR.

*Essendo la retta  $AB$  comunque segata in  $C$ , i quadrati di tutta l' $AB$  e di una sua parte  $CB$  equivalgono al duplo del rettangolo di  $AB$  nella stessa  $CB$  col quadrato della rimanente  $AC$ . (FIG. 48.)*

Si descrivano essi due quadrati  $ABDE$  e  $CBKI$ , e condotta nel maggiore la diagonale  $BE$  segante la  $IC$  prolungata in  $G$ , si conduca per  $G$  la  $HL$  parallela ad  $AB$  segante i lati  $AE$ ,  $BC$  in  $H$ ,  $L$ , e continuata la  $CG$  convenga col lato  $ED$  in  $F$ .

Essendo uguali i complementi  $ACGH$ ,  $LGFD$  (97), ed i quadrati  $CGLB$ ,  $ICBK$  fatti sopra lo stesso lato  $CB$ , sarà il rettangolo  $ABLH$  (contenuto da  $AB$  in  $BC$ ) uguale alla somma del rettangolo  $LGFD$  e del quadrato  $ICBK$ ; e però lo gnomone  $AHGFDB$  col quadrato  $ICBK$  uguaglia il duplo del rettangolo di  $AB$  in  $BC$ . Aggiunto dunque da ambe le parti il quadrato  $HGFE$ , che è il quadrato di  $AC$ , sarà tutto il quadrato  $ABDE$  col quadrato  $CBKI$  uguale al duplo rettangolo  $ABC$  col quadrato  $AC$ ; C. D. D.

## 113. PROPOSIZIONE VIII. TEOR.

*Se alla retta AB comunque segata in C si aggiunga per diritto la retta BD uguale a BC, il quadrato della composta AD equivale a quattro rettangoli di AB in BC col quadrato della rimanente AC. (FIG. 49.)*

Descritto il quadrato ADKG e condotte le BI, CH parallele al lato AG, si seghino colla diagonale DG in N, P, e per questi punti sieno tirate le ENM, FPL parallele ad AD e seganti le altre rette CH, BI in O, Q.

È manifesto essere il rettangolo ABNE uguale ad NMKI (97), à cui pure è uguale ONIH, per essere le basi ON, NM tra di loro uguali (come lo sono CB e BD); ed al rettangolo EOPF, che uguaglia QPHI, aggiunto il quadrato BDMN (uguale all'altro ONQP), sarà uguale la loro somma al rettangolo ONIH ed a ciascheduno degli altri due NMKI ed ABNE, contenuto dall' AB e dalla BC, che uguaglia BN, ovvero BD. Dunque lo gnomone AFPHKD è quadruplo del rettangolo di AB in BC; ed aggiunto di quà e di là il rettangolo FPHG, che è il quadrato di AC, sarà tutto il quadrato ADKG equivalente ai quattro rettangoli di AB in BC col quadrato della rimanente AC; C. D. D.

## 114. PROPOSIZIONE IX. TEOR.

*La retta AC essendo segata in parti uguali nel punto B, ed in disuguali nel punto D, saranno i quadrati delle parti disuguali AD, DC il doppio del quadrato della metà AB e del quadrato della linea intermedia BD. (FIG. 50.)*

Si alzi dal punto B ad angoli retti la BE uguale ad AB, e congiunte le rette AE, CE, si tiri la DF perpendicolare anch' essa ad AD, cioè parallela a BE, e posta FG parallela a BD, si congiunga AF.

Essendo i lati AB, BE uguali intorno l' angolo retto B, saranno uguali i due angoli BAE, BEA (46) che uguagliano un altro retto (78), e però saranno semiretti. Similmente gli angoli BEC, BCE per la stessa ragione sono semiretti; dunque è retto l' angolo AEC composto di due semiretti; e saranno ancora semiretti gli angoli EFG, DFC che uguagliano ciascheduno dei due BCF, BEC (73); dunque EG uguaglia GF, cioè BD, e DF uguaglia DC. Pertanto i due quadrati AD, DC equivalgono ai due AD, DF, cioè al quadrato AF (101), ovvero ai due quadrati AE, EF;

ed è il quadrato  $AE$  duplo del quadrato  $AB$ , equivalendo alla somma dei quadrati  $AB$ ,  $BE$  tra di loro uguali; ed il quadrato  $EF$  è parimente duplo del quadrato  $BD$ , equivalendo ai due quadrati  $EG$ ,  $GF$  uguali a quello di  $BD$ . Dunque i quadrati delle parti disuguali  $AD$ ,  $DC$  sono il doppio del quadrato della metà  $AB$  e del quadrato della parte intermedia  $BD$ ; C. D. D.

#### 115. PROPOSIZIONE X. TEOR.

*Se alla retta  $AC$ , divisa egualmente in  $B$ , si aggiunga per diritto un' altra retta  $CD$ , il quadrato della composta  $AD$  e dell' aggiunta  $CD$  sono il duplo del quadrato della metà  $AB$ , e della  $BD$  composta della metà e dell' aggiunta.*  
(FIG. 51.)

Alzata  $BE$  perpendicolare ad  $AB$  ed uguale alla stessa, si congiungano  $AE$ ,  $EC$ ; e tirata la  $DF$  parallela ad  $EB$ , concorra colla  $EC$  in  $F$ , e si tiri  $FG$  parallela a  $BD$ , che convenga colla  $EB$  in  $G$ ; indi congiungasi  $AF$ .

L'angolo  $AEC$  è retto, essendo semiretti gli angoli  $AEB$ ,  $BEC$ , ed ancora gli altri  $DCF$ ,  $DFC$ ,  $CFG$ , come si è provato nell' antecedente proposizione; e però  $DF$  è uguale a  $DC$ , ed  $EG$  uguale ad  $FG$ , cioè alla  $BD$ ; ed il quadrato  $EF$  è duplo del quadrato  $BD$ ; ed il quadrato  $AE$  è duplo del quadrato  $AB$ , a' quali essendo uguale il quadrato  $AF$ , per essere l'angolo  $AEF$  retto; e lo stesso essendo uguale a' quadrati  $AD$ ,  $DF$  (per essere ancora retto l'angolo  $ADF$ ), cioè a' quadrati  $AD$ ,  $DC$ , è manifesto che questi due quadrati  $AD$ ,  $DC$  equivalgono al doppio del quadrato  $AB$  ed al doppio del quadrato  $BD$ ; C. D. D.

#### 116. PROPOSIZIONE XI. PROBL.

*Segare una data retta linea  $AB$  in  $C$  talmente che il rettangolo di essa  $AB$  nella parte minore  $BC$  riesca equivalente al quadrato della rimanente parte maggiore  $AC$ .*  
(FIG. 52.)

Descritto il quadrato di tutta l'  $AB$ , il quale sia  $ABDE$ , si divida per mezzo in  $F$  un lato  $AE$  contiguo ad essa  $AB$ ; e congiunta la retta  $BF$ , si prolunghi  $FA$  verso  $G$  in maniera che sia  $FG$  uguale ad  $FB$ ; indi sopra l' eccesso  $AG$  si descriva il quadrato  $AGIC$ , il cui lato  $IC$  prolungato seghi i lati  $AB$ ,  $ED$  in  $C$  ed  $H$ . Dico essere il punto  $C$  quello in cui è segata la  $AB$ , come si cercava.



Perchè essendo  $AE$  divisa per mezzo in  $F$ , ed aggiuntavi  $AG$ , sarà il rettangolo  $EGA$  (cioè  $EGIH$ , per essere  $GI$  uguale a  $GA$ ) insieme col quadrato  $AF$  equivalente al quadrato  $FG$  (111), cioè al quadrato  $FB$  che uguaglia  $FG$ , o pure ai due quadrati  $AB$ ,  $AF$  che uguagliano esso quadrato  $FB$  (101); però tolto di comune il quadrato  $AF$ , rimane il rettangolo  $EGIH$  equivalente al quadrato  $ABDE$ , e tolto di comune  $ACHE$ , resta il quadrato  $ACIG$  equivalente al rettangolo  $DBCH$ , cioè il quadrato  $AC$  equivalente al rettangolo  $ABC$ ; C. D. F.

#### 117. PROPOSIZIONE XII. TEOR.

*Nei triangoli ottusiangoli, come  $ABC$ , il quadrato del lato  $AC$  opposto all'angolo ottuso è maggiore della somma dei quadrati degli altri due lati  $AB$ ,  $BC$ , e li supera di due rettangoli contenuti da uno di essi lati  $CB$ , e dalla porzione  $BD$  intercetta fra l'angolo  $B$  e la perpendicolare  $AD$  tirata sopra il lato  $CB$  prolungato dall'angolo  $A$  opposto ad esso. (FIG. 53.)*

Imperocchè il quadrato  $AC$  uguaglia i due quadrati  $AD$ ,  $CD$  (101); ma il quadrato  $CD$  equivale a' quadrati  $CB$ ,  $BD$  ed a' due rettangoli  $CBD$  (108); dunque il quadrato  $AC$  equivale a' quadrati  $AD$ ,  $BD$ ,  $CB$  ed a' due rettangoli  $CBD$ , essendo adunque i due quadrati  $AD$ ,  $BD$  presi insieme equivalenti al quadrato  $AB$  (101), ne segue che il quadrato  $AC$  è equivalente a' quadrati  $AB$ ,  $CB$  ed a' due rettangoli  $CBD$ ; C. D. D.

#### 118. PROPOSIZIONE XIII. TEOR.

*Il quadrato del lato  $AC$  opposto ad un angolo acuto  $B$  del triangolo  $ABC$  è minore de' quadrati de' lati  $AB$ ,  $CB$ , dai quali è superato per due rettangoli  $CBD$  compresi da uno de' lati  $CB$ , e dall'intercetta  $DB$  fra l'angolo  $B$  e la perpendicolare condotta sopra  $CB$  dall'opposto angolo  $A$ . (FIG. 54.)*

Imperocchè il quadrato  $CB$  col quadrato  $DB$  equivale a due rettangoli  $CBD$  ed al quadrato  $CD$  (112). Si aggiunga a questi e a quelli il quadrato della perpendicolare  $AD$ , sarà la somma de' quadrati  $CB$ ,  $BD$  ed  $AD$  equivalente alla somma de' due rettangoli  $CBD$ , del quadrato  $CD$  e del quadrato  $AD$ ; ma i due quadrati  $BD$  ed  $AD$  uguagliano il quadrato  $AB$ , e i due quadrati  $CD$ ,  $AD$  il quadrato  $AC$  (101);

dunque i quadrati  $AB$ ,  $CB$  sono uguali al quadrato  $AC$  con due rettangoli  $CBD$ , e però il quadrato  $AC$  è minore dei due quadrati  $AB$ ,  $CB$  della quantità di detti due rettangoli;  $C. D. D.$

#### 119. PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

*Ritrovare un quadrato equivalente ad un dato rettilineo  $A$ .*  
(FIG. 55.)

Si faccia un rettangolo  $BDEF$  equivalente al dato rettilineo  $A$  (99), e si prolunghi  $BD$  in  $G$ , sicchè sia  $DG$  uguale al lato  $DE$ , poscia divisa per mezzo la  $BG$  in  $C$ , dal centro  $C$ , descrivasi col raggio  $CB$  il semicircolo  $BHG$ , a cui si stenda il lato  $DE$ , il quale concorra colla periferia in  $H$ . Dico essere il quadrato  $DH$  equivalente al dato rettilineo  $A$ .

Congiunta  $CH$ , sarà il quadrato  $CH$  uguale a' due quadrati  $CD$ ,  $DH$  (191); ma il raggio  $CH$  uguaglia il raggio  $CG$ ; dunque i due quadrati  $CD$  e  $DH$  uguagliano il quadrato  $CG$ . Ma per essere  $BG$  segata per mezzo in  $C$ , e non per mezzo in  $D$ , esso quadrato  $CG$  equivale al rettangolo  $BDG$  col quadrato  $CD$  (110); dunque il quadrato  $CD$  col quadrato  $DH$  equivale al quadrato  $CD$  col rettangolo  $BDG$ , e però il quadrato  $DH$  equivale ad esso rettangolo  $BDG$  o  $BDEF$ ; ma questo si era fatto equivalente al rettilineo  $A$ ; dunque al medesimo rettilineo è equivalente il quadrato  $DH$ ;  $C. D. F.$

120. *Corollario.* Se da qualunque punto della circonferenza di un circolo si abbassa una perpendicolare sul diametro, il quadrato di questa equivarrà al rettangolo compreso dai segmenti o dalle porzioni del diametro stesso; poichè si è provato essere il quadrato di  $HD$  equivalente al rettangolo di  $BD$  in  $DG$ .

### LIBRO III.

#### DELLE PROPRIETÀ' DEL CERCHIO.

##### *Definizioni.*

121. I. Una linea retta dicesi *tangente* del circhio, se incontrandosi in qualche punto della sua circonferenza, benchè si prolunghi, non la seghi.

122. II. Similmente diconsi *toccare* le circonferenze dei cerchj quando in qualche punto convengono, ma non si segano.

123. III. Diconsi *egualmente* dal centro *distanti* quelle rette linee sopra di cui le perpendicolari condotte da esso centro si trovano uguali. Ogni retta poi che non passa pel centro ed è terminata alla circonferenza, dicesi *corda*.

124. IV. *Segmento* di cerchio chiamasi quella porzione che da un arco di esso e dalla corda al medesimo sottotesa è contenuto.

125. V. *Angolo del segmento* si nomina quello compreso dall'arco e dalla corda sottoposta. Il vertice di quest'angolo è nel punto ove l'arco e la corda si segano.

126. VI. *Angolo poi nel segmento* dicesi qualunque di quelli che dalle rette condotte da ambi i termini della corda a qualunque punto dell'arco sono contenuti.

127. VII. Lo stesso angolo si dice *insistere* sopra l'arco circolare opposto, il quale arco con quello del segmento in cui ritrovasi l'angolo compisce il cerchio.

128. VIII. *Settore* si chiama lo spazio compreso da due raggi del cerchio e dall'arco da essi intercetto.

129. IX. *Segmenti simili* diconsi quelli che comprendono angoli uguali contenuti dalle rette tirate da qualunque punto dell'arco a' termini della corda.

### 130. PROPOSIZIONE PRIMA. PROBL.

*Trovare il centro E d' un dato cerchio ABC. (FIG. 56.)*

Si tiri dentro di esso qualunque retta AC, e dividasi per mezzo in F (52), indi si alzi sopra di essa una perpendicolare FB, la quale seghi la circonferenza in B ed H (53); e divisa pure essa BH per mezzo in E, dico essere questo punto E il centro ricercato.

Se fosse fuori della linea BH, come in G, tirate le linee GA, GC, queste sarebbero uguali; e congiunta GF, che riesce comune a' triangoli GFA, GFC, in cui pure i lati AF, FC sono uguali, sarebbe pure l'angolo AFG uguale al conseguente GFC (59): e però ambidue retti; dunque l'angolo AFG sarebbe uguale all'angolo AFE, che si era pure fatto retto dalla perpendicolare FB: il che è assurdo; dunque il centro non è fuori della retta BH, nè può essere altrove che nel mezzo di essa; e però E è il centro ricercato.

131. *Corollario*. Condotta dunque nel cerchio qualunque corda CA, e dal punto di mezzo F eretta la perpendicolare, in essa deve sempre essere il centro del cerchio.



## 132. PROPOSIZIONE II. TEOR.

*La retta AB, che congiunge due punti A, B della periferia d' un cerchio, giace tutta dentro al medesimo cerchio.*  
( FIG. 57. )

Tra' punti A e B preso qualunque punto D in essa linea, al centro C congiungansi le rette CA, CB, CD.

O saranno gli angoli ADC, BDC retti, o l' uno acuto, l' altro ottuso; sia, per esempio, ADC ottuso o retto, gli altri angoli saranno in esso triangolo acuti (77), e però il lato AC sarà maggiore di CD (61); ma segandosi la circonferenza da essa CD in F, la CF uguaglia il raggio AC; dunque essendo DC minore del raggio CF, il punto D è più vicino al centro che non è la periferia del cerchio; e però qualunque punto D della retta AB si trova dentro al circolo; dunque giace tutta la linea AB dentro al medesimo; C. D. D.

## 133. PROPOSIZIONE III. TEOR.

*Se nel cerchio ABCD il diametro BD sega per mezzo la corda AC, la segnerà ad angolo retto; e inversamente se la sega ad angolo retto in F, ivi la divide per mezzo.*  
( FIG. 58. )

Perchè ne' triangoli AEF, CEF essendo il lato EF comune, se ancora il lato AF uguaglia FC, e la base AE è uguale all' altra EC, gli angoli AFE e CFE saranno uguali, e però retti; e se sono questi retti, essendo ancora gli angoli EAF, ECF uguali (46), ed il lato EF comune, sarà ancora il lato AF uguale ad FC; C. D. D.

## 134. PROPOSIZIONE IV. TEOR.

*Se due corde AB, CD si segano in F, non saranno ivi ambedue divise per mezzo.* ( FIG. 59. )

Dal centro E si conduca la EF. Se fosse AB divisa per mezzo in F, le sarebbe EF perpendicolare (133); e se pure CD fosse divisa per mezzo nel medesimo punto F, sarebbe a questa ancora perpendicolare la stessa EF; dunque l' angolo retto AFE uguaglierebbe il retto CFE, onde il tutto sarebbe uguale alla parte: il che è impossibile. Dunque non si segano l' una e l' altra per mezzo fuori del centro; C. D. D.

## 135. PROPOSIZIONE V. TEOR.

*Se due cerchj  $AB$ ,  $DB$  si seghino in  $B$ , non avranno il medesimo centro  $E$  comune ad entrambi. (FIG. 60.)*

Congiunta al segmento la retta  $EB$ , si tiri qualunque altra  $EAD$  che seghi ambedue le circonferenze, ove sono distinte in  $A$ ,  $D$ .

Se fosse il punto  $E$  centro d'ambi i cerchi sarebbe  $EB$  uguale tanto ad  $EA$ , quanto ad  $ED$ , onde queste due sarebbero uguali tra loro, essendo uguali ad una terza: il che è impossibile, perchè il tutto non può essere uguale ad una parte; dunque tali cerchi non hanno un centro comune  $E$ ; C. D. D.

## 136. PROPOSIZIONE VI. TEOR.

*Parimente, se detti cerchj si toccassero in  $B$ , non potrebbero avere un centro comune  $E$ . (FIG. 61.)*

Perchè, giunta al contatto  $EB$ , e tirata l'altra  $EAD$ , ne seguirebbe lo stesso assurdo come nell'antecedente. Dunque è verissima ancora questa proposta.

## 137. PROPOSIZIONE VII. TEOR.

*Preso dentro al cerchio  $ADC$  il punto  $G$  fuori del centro  $E$ , e condotta pel centro la retta  $GEA$  continuata dall'altra parte in  $B$ , e tirate altre rette  $GF$ ,  $GD$  sarà primieramente la  $GA$  massima di tutte; secondo la  $GF$  più vicina alla massima sarà maggiore della  $GD$  più lontana da essa; terzo la  $GB$  residua del diametro è la minima di tutte; quarto facendo l'angolo  $GEH$  uguale all'altro  $GEF$ , congiunta  $GH$ , riuscirà uguale a  $GF$ ; onde due sole linee si possono tirare tra di loro uguali dal punto  $G$  alla circonferenza; una di quà ed una di là dalla massima. (FIG. 62.)*

Tirati dal centro  $E$  i raggi  $EF$ ,  $ED$ ,  $EH$ , essendo  $EF$  eguale ad  $EA$ , aggiunta ad ambedue la  $EG$ , sarà  $GA$  eguale ai due lati  $GE$ ,  $EF$ , i quali sono maggiori del terzo  $GF$  (62); dunque  $GA$  è maggiore di  $GF$ , e similmente si mostrerebbe maggiore di qualunque altra  $GD$ , che però è la massima di tutte, come in *primo luogo* dovea dimostrarsi.

*Secondo*, essendo nei triangoli  $GEF$ ,  $GED$  il lato  $GE$  comune, ed il lato  $EF$  uguale ad  $ED$ , ma l'angolo  $GEF$  maggiore di  $GED$ , sarà la base  $GF$  maggiore dell'altra

$GD$  (67); e però la retta più prossima alla massima  $GA$  è maggiore della più lontana.

*Terzo*, quindi la  $GB$  direttamente opposta alla massima  $GA$ , e però più remota da essa di qualunque altra, è la minima di tutte, essendo qualunque  $GD$  maggiore di essa, perchè  $GD$  con  $GE$  è maggiore di  $ED$ , e però maggiore di  $EB$ ; onde tolta di comune  $GE$ , rimane  $GD$  maggiore di  $GB$  (62).

*Quarto*, essendo fatti gli angoli al centro uguali  $GEH$ ,  $GEF$  contenuti da lati uguali, perchè  $GE$  comune ed  $EH$  uguale ad  $EF$ , le basi  $GH$ ,  $GF$  saranno pure uguali (45); ma se si tirasse da esso punto  $G$  qualunque altra linea alla circonferenza, sarebbe più vicina o più lontana dalla massima che non sono queste due; dunque due sole linee uguali si possono tirare da un punto che non sia centro alla circonferenza, una di quà ed una di là dalla massima; C. D. D.

### 138. PROPOSIZIONE VIII. TEOR.

*Se il punto  $G$  è preso fuori del cerchio, primieramente condotta pel centro la retta  $GEA$  fino al concavo della circonferenza, sarà questa la massima di tutte. Secondo la  $GF$  più vicina alla massima sarà maggiore della  $GD$  più lontana. Terzo la  $GB$  terminata al convesso della periferia, che continuata passa pel centro, è la minima di tutte. Quarto di tutte le rette terminate al convesso, sempre la  $Gf$  più vicina alla minima è minore della  $Gd$  più lontana. Quinto due sole linee uguali, una di quà ed una di là dalla massima e dalla minima, potranno tirarsi da esso punto  $G$  al concavo o al convesso della circonferenza, facendo al centro gli angoli uguali  $GEH$ ,  $GED$ , ovvero  $GEh$ ,  $GEd$ . (FIG. 63.)*

Il primo ed il secondo si prova come nell' antecedente; il terzo si dimostra ancora, perchè essendo  $Ed$  con  $dG$  maggiore di  $EG$  (62), tolte  $Ed$  ed  $EB$  raggi uguali, rimane  $Gd$  maggiore di  $GB$ ; e così qualunque altra  $Gf$  sarà maggiore di  $GB$ ; e però questa è la minima di tutte.

Il quarto si prova, perchè le due  $Gd$ ,  $dE$  sono maggiori delle due  $Gf$ ,  $fE$  (63); ma  $dE$ ,  $fE$  sono uguali; dunque  $Gd$  è maggiore di  $Gf$ ; e però le più vicine alla minima  $CB$  sopra il convesso del cerchio sono minori delle più lontane.

Il quinto si prova come il quarto della proposizione precedente.



## 139. PROPOSIZIONE IX. PROBL.

*Se da un punto  $E$  dentro al circolo si possono tirare alla circonferenza più di due linee uguali  $EA$ ,  $ED$ ,  $EF$ , sarà quello il centro di esso cerchio. (FIG. 64.)*

Imperocchè da un punto che non fosse centro non si potrebbero tirare se non se due linee uguali (137); C. D. D.

## 140. PROPOSIZIONE X. TEOR.

*Due cerchi non possono segarsi se non in due soli punti. (FIG. 65.)*

Perchè se si segassero in tre punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , condotte dal centro  $E$  di uno di essi le rette  $EA$ ,  $EB$ ,  $EC$  a' segmenti, essendo uguali, dovrebbero essere il punto  $E$  centro ancora dell'altro cerchio (135, 139); C. D. D.

## 141. PROPOSIZIONE XI. TEOR.

*Se due cerchj si toccano al di dentro in  $B$ , la retta che congiunge i loro centri  $E$ ,  $C$ , prolungata, passerà pel contatto  $B$ . (FIG. 66.)*

Condotta la  $CB$  dal punto del contatto al centro  $C$  del cerchio minore, sia, se è possibile, il centro del cerchio maggiore fuori di questa retta, come in  $e$ . Pei punti  $e$ ,  $C$  tirisi la  $eC$ , che taglierà le circonferenze in  $D$ ,  $A$ . Condotta ancora la  $eB$ , sarebbero eguali  $Ae$ ,  $eB$ , quindi anche  $De$  minore o eguale ad  $eB$  (giacchè non è ancora provato che  $A$ ,  $D$  debbono essere due punti distinti, ciò che si farà nella proposizione XIII). Ma per un altro verso la  $De$ ; che è eguale a  $BC$  più  $Ce$ , per essere  $DC$  eguale a  $BC$ , sarebbe maggiore di  $Be$ ; dunque una quantità che per la prima considerazione non può essere che minore o eguale a  $Be$ , per la seconda dovrebbe sempre esserne maggiore; il che ripugna; dunque non era il centro del secondo circolo fuori della retta  $BC$ ; C. D. D.

## 142. PROPOSIZIONE XII. TEOR.

*Ancora toccandosi due cerchj per di fuori in  $B$ , la retta che congiunge i loro centri  $E$ ,  $C$  passerà pel contatto  $B$ . (FIG. 67.)*

Anche in tal caso sia, se è possibile, in  $e$  fuori della retta  $BC$  il centro del cerchio maggiore: tirate  $eC$ ,  $eB$ ; la

eC comprenderebbe i due raggi e non potrebbe essere minore della loro somma, quando per un altro verso dovrebbe sempre essere minore di detta somma per essere un lato in un triangolo, i cui altri due lati sarebbero due raggi. Dunque anche in questo caso non può il centro del secondo cerchio essere fuori della retta BC; C. D. D.

### 143. PROPOSIZIONE XIII. TEOR.

*Due cerchj che si tocchino dentro o fuori, avranno il loro contatto in un sol punto B. ( FIG. 68. )*

Si congiungano i loro centri E, C colla retta CE, che passerà pel contatto B (142); ma se si toccassero in altro punto D, si congiunga ancora la CD.

Perchè CB prolungata passa pel centro E dell' altro cerchio maggiore, sarà la minima di quelle che dal punto C si conducono alla periferia del detto cerchio (138); dunque non è CD uguale a CB, e però non sono ambedue raggi del cerchio, il cui centro è C; dunque non si toccano essi cerchj in altro punto che in B. È facile far la dimostrazione nel caso che si tocchino dentro.

### 144. PROPOSIZIONE XIV. TEOR.

*Nel cerchio le rette AC, BD, se sono uguali, saranno ugualmente distanti dal centro E; e se sono da esso ugualmente distanti, sono tra di loro uguali. ( FIG. 69. )*

Tirate le perpendicolari EF, EG sopra di esse dal centro E, saranno divise per mezzo le rette AC, BD (133), onde sarà AF uguale a BG, se tutta l' AC era uguale a tutta la BD; e congiunti i raggi EA, EB, i cui quadrati sono uguali, saranno altresì i quadrati AF ed FE uguali ai quadrati BG, EG, perchè uguagliano i quadrati de' raggi opposti agli angoli retti F, G (101); dunque essendo uguali i quadrati AF, BG, debbono essere uguali i rimanenti quadrati EF, EG, e però ancora esse perpendicolari sono uguali; onde le rette uguali AC, BD sono ugualmente distanti dal centro E (103). Inversamente le rette che saranno ugualmente distanti dal centro, dovranno essere uguali, perchè i due quadrati AF, FE uguagliando gli altri due BG, GE, essendo tanto questi quanto quelli uguali al quadrato del raggio; siccome il quadrato EF uguaglierà il quadrato EG, ancora i quadrati rimanenti delle AF, BG saranno uguali; ed essendo AF, BG la metà delle rette AC, BD (133), ancora le intere AC, BD riescono uguali; C. D. D.

## 145. PROPOSIZIONE XV. TEOR.

*Delle rette inscritte in un circolo la massima è il diametro , e dell' altre la più vicina IK al centro E è maggiore della più lontana AC. ( FIG. 70. )*

Tirate dal centro sopra le rette AC , IK le perpendicolari EF , EH , si prolunghi questa in G , sicchè sia EG uguale ad EF , e si tiri la BGD parallela ad IK , cui parimente sarà perpendicolare la EG.

DB riuscirà uguale ad AC (144); e congiunti i raggi EI , EK , ED , EB , essendo i due lati IE , KE uguali ai due BE , DE , ma l'angolo IEK maggiore di BED , la base IK è maggiore dell' altra BD (67); e però la più vicina al centro è maggiore della più lontana AC che uguaglia BD . Il diametro è la somma di due raggi , dunque è sempre maggiore di qualunque corda IK , che è sempre minore di detta somma (62); C. D. D.

## 146. PROPOSIZIONE XVI. TEOR.

*La retta EAD tirata dal termine A del diametro AH perpendicolare ad esso sarà tangente del cerchio AB , rimanendo tutta negli altri punti esteriore alla circonferenza : nè potrà inserirsi veruna linea retta LA tra la stessa tangente AE e la circonferenza ; e però l'angolo del semicircolo CAB o CAF sarà maggiore di qualsivoglia angolo acuto LAH , e l'angolo del contatto FAE è minore di qualsivoglia piccolo angolo rettilineo LAE. ( FIG. 71. )*

Tirata dal centro C a qualunque altro punto D della retta EAD , che nel punto A conviene colla circonferenza , la retta CD , questa opposta all'angolo retto CAD sarà maggiore del raggio CA opposto all'angolo acuto CDA (61), e però è maggiore del raggio CB ; dunque il punto D è di là dalla circonferenza ; e così qualunque altro punto di essa linea EAD rimane fuori del cerchio , onde solamente in esso punto A resta toccato dalla retta EAD. Che poi non possa tra la circonferenza e la tangente inserirsi al contatto A veruna retta LA , è manifesto , perchè , condotta dal centro C la perpendicolare CG sopra essa LA , sarà CG minore di CA , come opposta quella ad angolo minore del retto CGA , cui si oppone questa (61); dunque il punto G della retta LA essendo più vicino del raggio al centro C , sarà dentro esso cerchio ; e però la retta LA sega il circolo , e non resta in-



terposta fra la circonferenza e la tangente: onde l'angolo del semicircolo eccede qualunque angolo acuto  $LAC$ , e l'angolo del contatto è minore di qualsivoglia picciolissimo angolo  $EAL$ ; C. D. D.

#### 147. PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

*Da un dato punto  $E$  condurre una tangente  $EA$  al dato cerchio  $FBA$ . (FIG. 72.)*

Congiunta al centro  $C$  del dato cerchio la retta  $EC$  segante la periferia in  $B$ , si descriva col raggio  $CE$  un altro cerchio concentrico  $ED$ , e posta  $BD$  perpendicolare alla  $EC$ , la quale concorra colla periferia di questo secondo cerchio in  $D$ , si congiunga  $CD$  segante la prima data circonferenza in  $A$ ; congiunta  $EA$ , sarà questa la tangente cercata.

I triangoli  $ECA$ ,  $DCB$  avendo intorno al comune angolo  $C$  i lati  $CE$ ,  $CA$  uguali a  $CD$ ,  $CB$ , non solo le loro basi  $EA$ ,  $BD$  saranno uguali, ma ancora gli angoli corrispondenti, e però l'angolo  $EAC$  sarà retto come l'angolo  $DBC$ ; dunque essendo  $AE$  perpendicolare al termine del diametro  $ACF$ , sarà essa  $AE$  tangente (146); C. D. F.

#### 148. PROPOSIZIONE XVIII. TEOR.

*Se la retta  $AE$  tocca il cerchio  $ABF$ , condotta dal centro  $C$  al contatto  $A$  la retta  $CA$ , farà con essa tangente angolo retto. (FIG. 73.)*

Se no, si conduca la  $CD$  perpendicolare ad essa tangente; sarà dunque  $AC$  maggiore di  $CD$  (61); ma  $CB$  uguaglia  $CA$ ; dunque sarebbe la parte  $CB$  del tutto  $CD$  maggiore; C. D. D.

#### 149. PROPOSIZIONE XIX. TEOR.

*Toccandosi il cerchio in  $A$  dalla retta  $AE$ , se dal contatto  $A$  si alza la perpendicolare  $AH$  ad essa tangente, passerà pel centro  $C$  del cerchio. (FIG. 73.)*

Altrimenti se fosse il centro in  $G$  fuori della retta  $AH$ , congiunta  $GA$ , farebbe ancor essa angolo retto con  $AE$  (148); dunque gli angoli  $GAE$ ,  $CAE$  sarebbero uguali, ed il tutto riuscirebbe uguale alla parte; C. D. D.

#### 150. PROPOSIZIONE XX. TEOR.

*Se dai termini dell'arco  $AB$  si conducano due raggi al cen-*

tro  $C$ , e due linee a qualche punto  $D, E, F$  della circonferenza opposta a detto arco, sarà l'angolo  $ACB$  duplo di qualsivoglia di detti angoli  $ADB, AEB, AFB$ . (FIG. 74.)

Nel triangolo  $CEB$  fatto dal raggio  $AC$  prolungato in  $E$  sono gli angoli  $AEB$  e  $CBE$  uguali (46): ma l'angolo esterno  $ACB$  è uguale ad ambidue gl'interni opposti  $AEB, CBE$  (76); dunque  $ACB$  è duplo di  $AEB$ . Quanto all'angolo  $ADB$  fatto sotto l'altro  $AEB$ , congiunta la retta  $DC$ , e prolungata in  $G$ , sarà l'angolo  $GCB$  uguale a' due interni tra di loro uguali  $CDB, CBD$ , e però  $GCB$  è duplo di  $CDB$ ; similmente l'angolo  $GCA$  sarà duplo di  $CDA$ , uguagliando ancor esso i due interni tra di loro uguali  $CDA, CAD$ ; dunque il rimanente  $ACB$  è duplo del rimanente  $ADB$ . Se poi l'angolo  $AFB$  è al di sopra di maniera che la retta  $FC$  prolungata in  $H$  seghi l'angolo centrale  $ACB$ , tanto sarà l'esterno  $ACH$  duplo dell'interno  $AFC$ , quanto il rimanente  $HCB$  duplo di  $CFB$ ; dunque tutto l'angolo  $ACB$  sarà pure il doppio dell'angolo intiero  $AFB$ ; C. D. D.

#### 151. PROPOSIZIONE XXI. TEOR.

*Gli angoli  $ADB, AEB, AFB$ , insistenti al medesimo arco e disposti nello stesso segmento sono tra di loro uguali.* (FIG. 74.)

In fatti ciascuno di essi è la metà dell'angolo fatto al centro  $ACB$  (150); dunque riescono tra di loro uguali; C. D. D.

#### 152. PROPOSIZIONE XXII. TEOR.

*Ogni quadrilatero  $ABCD$  inscritto in un circolo ha la somma degli angoli opposti uguale a due retti.* (FIG. 75.)

Si conducano le diagonali  $AC, BD$ .

Sarà l'angolo  $ABD$  uguale all'angolo  $ACD$  (151), e l'angolo  $DBC$  uguale all'angolo  $DAC$ , dunque tutto l'angolo  $ABC$  uguaglia i due  $DCA, DAC$ , ed aggiunto di quà e di là l'angolo  $ADC$ , sono i due angoli opposti  $ABC, ADC$  del detto quadrilatero uguali a tutti tre gli angoli del triangolo  $ADC$ , i quali sono uguali a due retti (76); C. D. D.

#### 153. PROPOSIZIONE XXIII. TEOR.

*Sopra la stessa retta  $AC$  non possono essere descritti verso la medesima parte due segmenti simili e disuguali  $ADC, ABC$ .* (FIG. 76.)

Condotta da un termine  $C$  la retta  $CBD$  segante le due circonferenze in  $B$ ,  $D$ , congiungansi all'altro termine  $A$  le rette  $BA$ ,  $DA$ .

Se fossero i segmenti simili, sarebbero gli angoli  $ADC$ ,  $ABC$  uguali (129); il che è impossibile, essendo l'uno esterno, l'altro interno opposto del triangolo  $ADB$ ; dunque non possono tali segmenti esser simili; C. D. D.

#### 154. PROPOSIZIONE XXIV. TEOR.

*Simili porzioni di cerchj  $ADC$ ,  $BEF$  descritte sopra linee uguali tra di loro  $AC$ ,  $BF$  sono porzioni uguali. (FIG. 77.)*

Altrimenti soprapponendo l'una all'altra, e adattando la base  $AC$  all'altra uguale  $BF$ , riuscirebbero sopra la stessa linea descritti due segmenti simili e disuguali: il che è impossibile (153); dunque è necessario che dette porzioni sieno uguali; C. D. D.

#### 155. PROPOSIZIONE XXV. PROBL.

*Data una porzione di cerchio  $EAF$ , trovarne il centro  $C$ , per poterne compire tutto il circolo. (FIG. 78.)*

Divisa la corda  $EF$  per mezzo in  $D$ , le si conduca la perpendicolare  $DH$ ; e tirata un'altra qualsivoglia corda  $EA$  dentro la stessa porzione, divisa per mezzo in  $B$ , le si conduca la perpendicolare  $BC$  concorrente in  $C$  con l'altra  $DH$ . Dico essere  $C$  il centro ricercato, di maniera che, congiunta  $CE$ , si potrà con questo raggio compirne il cerchio  $EAH$ .

Il centro di questo circolo debb'essere in qualunque di dette perpendicolari seganti per mezzo esse corde  $EF$ ,  $EA$  (131); e però nel loro concorso  $C$ ; C. D. F.

#### 156. PROPOSIZIONE XXVI. TEOR.

*Ne' cerchj uguali  $ABD$ ,  $EFH$  gli angoli uguali fatti al centro  $ACB$ ,  $EGF$ , o fatti alla circonferenza  $ADB$ ,  $EHF$ , insistono ad archi uguali  $AB$ ,  $EF$ . (FIG. 79.)*

Si conducano le corde  $AB$ ,  $EF$ ; queste saranno uguali, essendo basi di due triangoli  $ACB$ ,  $EGF$ , che intorno agli angoli uguali  $C$ ,  $G$  hanno i lati uguali  $CA$ ,  $GE$  e  $CB$ ,  $GF$ ; dunque essendo le rette  $AB$ ,  $EF$  uguali, ed i segmenti  $ADB$ ,  $EHF$  simili per l'uguaglianza degli angoli in essi contenuti (129), sono porzioni di cerchio uguali (154); però ancora i rimanenti archi  $AB$ ,  $EF$ , sono uguali; C. D. D.



## 157. PROPOSIZIONE XXVII. TEOR.

*Ne' cerchj uguali gli angoli fatti sopra archi uguali  $AB$ ,  $EF$  al centro o alla circonferenza saranno uguali. (FIG. 79.)*

Imperocchè se non fosse l'angolo  $ACB$  uguale ad  $EGF$ , suppongasi uguale ad  $EGI$ ; dunque sarebbe l'arco  $AB$  uguale ad  $EI$  (156), e non ad  $EF$ , contro l'ipotesi; pertanto sono uguali gli angoli  $ACB$ ,  $EGF$  al centro, e così ancora gli altri  $ADB$ ,  $EHF$  fatti alla circonferenza (150), di cui sono dupli quegli altri fatti al centro; C. D. D.

## 158. PROPOSIZIONE XXVIII. TEOR.

*Le corde uguali  $AB$ ,  $EF$  in cerchj uguali ne segano archi uguali, il maggiore  $ADB$  al maggiore  $EHF$ , ed il minore  $AB$  al minore  $EF$ . (FIG. 79.)*

Fatti al centro gli angoli  $ACB$ ,  $EGF$ , saranno uguali, essendo i lati e basi uguali in tali triangoli, dunque l'arco  $AB$  sarà all'altro  $EF$  uguale (156), e però ancora il rimanente  $ADB$  al residuo  $EHF$ ; C. D. D.

## 159. PROPOSIZIONE XXIX. TEOR.

*Ne' cerchj uguali sono gli archi uguali segati da corde uguali. (FIG. 79.)*

Essendo gli archi  $AB$ ,  $EF$  uguali, ancora gli angoli al centro  $ACB$ ,  $EGF$  saranno uguali (157); dunque per essere ancora uguali i lati di detti triangoli, le basi pure  $AB$ ,  $EF$  sono uguali; C. D. D.

## 160. PROPOSIZIONE XXX. PROBL.

*Dato un arco circolare  $AEB$ , dividerlo per mezzo. (FIG. 80.)*

Si divida la corda  $AB$  per mezzo in  $D$ , e vi si alzi la perpendicolare  $DE$ ; dico che questa segnerà l'arco per mezzo in  $E$ .

Congiunte le rette  $AE$ ,  $BE$ , saranno uguali le basi dei triangoli  $ADE$ ,  $BDE$ , in cui il lato  $DE$  è comune, ed i lati  $AD$ ,  $BD$  sono uguali intorno ad angoli retti; ma le rette uguali in cerchj uguali, e però ancora nel medesimo cerchio corrispondono ad archi uguali (158); dunque sono uguali gli archi  $AE$ ,  $BE$  nei quali è diviso l'arco dato  $AEB$  dalla retta  $DE$ ; C. D. F.

## 161. PROPOSIZIONE XXXI. TEOR.

*L'angolo ADB fatto nel semicircolo BEA è retto; l'angolo BAD fatto nel maggior segmento BFAD è acuto; e l'angolo BED fatto nel segmento minore sarà ottuso. (FIG. 81.)*

Congiunta al centro la retta DC, prolunghisi all'altra parte del circolo in F.

Essendo tanto l'angolo ACF duplo di ADF, quanto l'angolo FCB duplo di FDB (150), sarà la somma degli angoli ACF, FCB dupla dell'angolo ADB, ma quella è uguale a due retti; dunque quest'angolo fatto nel semicircolo è retto; però nel triangolo ADB l'angolo A, che è descritto nel segmento maggiore BFAD, è acuto, essendo l'altro ADB retto (77); e perchè nel quadrilatero BEDA i due angoli opposti BAD, BED sono uguali a due retti (152), essendo BAD acuto, l'altro BED nel segmento minore sarà ottuso; C. D. D.

## 162. PROPOSIZIONE XXXII. TEOR.

*Se nello stesso punto B della circonferenza la retta GH tocca il cerchio, e la BD lo sega, l'angolo della tangente e della secante uguaglia quello che si descriverebbe nell'alterno segmento; cioè DBH è uguale all'angolo BAD, e DBG uguale a BED. (FIG. 82.)*

Si conduca pel centro C dal contatto la linea BCA, e congiungasi AD.

Sarà l'angolo CBH retto (148); ed essendo ancora retto nel semicircolo l'angolo ADB (161), gli altri due ABD, BAD saranno uguali pure ad un retto (76), e però uguali ai due ABD, DBH; dunque tolto di comune ABD, rimane l'angolo BAD uguale a DBH. Perchè poi l'angolo BED con l'opposto BAD del quadrilatero ADEB uguaglia due retti (152), come ancora DBH con DBG compisce due retti (55), sarà l'angolo BED uguale a DBG; C. D. D.

## 163. PROPOSIZIONE XXXIII. PROBL.

*Sopra una data retta BD descrivere una porzione di circolo capace di un angolo uguale al dato angolo F. (FIG. 83.)*

Si faccia l'angolo DBH uguale a F (66), e divisa BD per mezzo in E, si alzi EC perpendicolare ad essa, e dal punto B si tiri pure BA perpendicolare a BH; e convenen-

do queste due perpendicolari nel punto  $C$  col raggio  $CB$ , descrivasi un cerchio.

Questo cerchio passerà ancora per  $D$ ; perchè essendo congiunta la  $CD$ , questa riuscirà uguale a  $CB$ , per essere basi de' triangoli rettangoli  $CED$ ,  $CEB$ , ne' quali il lato  $EC$  è comune, ed i lati  $ED$ ,  $EB$  uguali; di più sarà esso circolo toccato dalla  $BH$  (146); però l'angolo  $DAB$  fatto nel segmento che riesce sopra la data retta  $BD$  sarà uguale all'angolo  $DBH$  (162), cioè al dato angolo  $F$ , per la costruzione; C. D. F.

#### 164. PROPOSIZIONE XXXIV. TEOR.

*Da un dato cerchio tagliare una porzione capace dell'angolo uguale al dato  $F$ . (FIG. 83.)*

Si tiri la retta  $BH$  che tocchi in  $B$  il dato cerchio, e si faccia l'angolo  $HBD$  uguale al dato  $F$ , è manifesto che la porzione  $BAD$  sarà capace dell'angolo dato (163); C. D. F.

#### 165. PROPOSIZIONE XXXV. TEOR.

*Se dentro al cerchio  $AGE$  due corde  $AB$ ,  $EG$  si segano in  $F$ , il rettangolo delle parti dell'una equivale a quello delle parti dell'altra, cioè  $AFB$  è equivalente ad  $EFG$ . (FIG. 84.)*

Se si segassero nel centro, sarebbe ciò manifesto, essendo le parti di tali linee tanti raggi uguali del medesimo cerchio; ma essendo il loro concorso  $F$  diverso dal centro  $C$ , si tirino da esso centro  $C$  le perpendicolari  $CD$ ,  $CH$  sopra dette linee, che da queste saranno segate per mezzo (133), e si congiungano  $CF$ ,  $CE$ ,  $CB$ .

Il rettangolo  $AFB$  col quadrato  $DF$  sarà equivalente al quadrato  $DB$  (110); ed aggiunto il quadrato  $CD$ , sarà il rettangolo  $AFB$  coi due quadrati  $DF$ ,  $CD$ , cioè col quadrato  $CF$  (101) equivalente ai due quadrati  $DB$  e  $CD$ , cioè al quadrato del raggio  $CB$ , o dell'altro raggio  $CE$ ; e questo pure essendo equivalente a' quadrati  $EH$ ,  $CH$ , come al rettangolo  $EFG$  col quadrato  $FH$  (110) e col quadrato  $CH$  che è quanto dire al rettangolo  $EFG$  col quadrato  $CF$ , sarà dunque il rettangolo  $AFB$  col quadrato  $CF$  equivalente al rettangolo  $EFG$  col medesimo quadrato  $CF$ ; onde tolto di quà e di là questo quadrato  $CF$ , rimane il rettangolo  $AFB$  equivalente all'altro  $EFG$ ; C. D. D.



## 166. PROPOSIZIONE XXXVI. TEOR.

*Da un punto  $F$  fuori del cerchio tirata la tangente  $FH$  ed una segante  $FBA$ , sarà il quadrato della tangente  $FH$  equivalente al rettangolo  $AFB$  di tutta la segante e della sua parte esteriore. (FIG. 85.)*

Condotta dal centro  $C$  la perpendicolare  $CD$  sopra la segante di cui dividerà per mezzo la parte interna  $AB$  (133), congiungansi i raggi  $CB$ ,  $CH$ .

Abbiamo il quadrato  $FD$  equivalente al rettangolo  $AFB$  col quadrato  $BD$  (111), onde aggiungendo da ambe le parti il quadrato  $CD$ , e riflettendo (101) che i quadrati  $BD$ ,  $DC$  equivalgono al quadrato  $BC$ , e i quadrati  $FD$ ,  $DC$  al quadrato  $FC$ , risulterà il rettangolo  $AFB$  col quadrato del raggio  $BC$  equivalente al quadrato  $FC$ . Da un'altra parte il quadrato  $FC$  equivale alla somma dei quadrati  $FH$ ,  $CH$ , per essere l'angolo  $CHF$  retto (148); dunque il rettangolo  $AFB$  col quadrato del raggio  $BC$  equivale al quadrato  $FH$  col quadrato del raggio  $CH$ , e tolto da ambe le parti il quadrato del raggio, risulterà il rettangolo  $AFB$  equivalente al quadrato della tangente  $FH$ ; C. D. D.

167. *Corollario I.* Quindi se da un medesimo punto  $F$  si tireranno due tangenti  $FH$ ,  $FI$  al medesimo circolo, queste saranno uguali, essendo ciascheduno di tali quadrati equivalente al medesimo rettangolo  $AFB$  della segante condotta dallo stesso punto  $F$ .

168. *Corollario II.* E se più seganti  $FBA$ ,  $FGE$  si conducano da un punto  $F$  allo stesso cerchio, saranno i loro rettangoli  $AFB$ ,  $EFG$  tra di loro equivalenti, essendo ciascheduno di essi equivalenti al quadrato della tangente  $FH$ .

## 169. PROPOSIZIONE XXXVII. TEOR.

*Se il rettangolo di una segante  $AFB$  sarà equivalente al quadrato della retta  $FI$ , che condotta dallo stesso punto  $F$  giunga alla periferia del cerchio, sarà questa  $FI$  tangente di esso. (FIG. 85.)*

Tirata la tangente  $FH$ , il cui quadrato equivale al rettangolo  $AFB$  (166), e però è ancora uguale al quadrato  $FI$ , saranno conseguentemente le rette  $FH$ ,  $FI$  uguali; e condotti i raggi  $CH$ ,  $CI$ , sono pure uguali; e congiunta al centro la retta  $FC$ , è questa lato comune ai due triangoli  $FHC$ ,  $FIC$ ; dunque l'angolo  $FIC$  uguaglia l'angolo  $FHC$ ,

49

il quale è retto (148); pertanto, essendo pure l'angolo  $FIC$  retto, questa  $FI$  sarà tangente (146); C. D. D.

## LIBRO IV.

DELLE FIGURE INSCRITTE E CIRCOSCRITTE AL CERCHIO.

### *Definizioni.*

170. I. Dicesi *inscritta* nel circolo una figura rettilinea quando ciascun angolo di essa tocca la circonferenza.

171. II. Ed allora il circolo dicesi *circoscritto* ad essa figura rettilinea.

172. III. *Circoscritta* poi al cerchio dicesi la figura rettilinea, se ciascun lato di essa tocca la di lui circonferenza.

173. IV. Ed in tal caso dicesi il cerchio *inscritto* in detta figura rettilinea.

### 174. PROPOSIZIONE PRIMA. PROBL.

*In un dato cerchio, il cui diametro è  $AB$ , inscrivere una linea  $AD$  uguale ad una data  $F$ , non maggiore di esso diametro. (FIG. 86.)*

Col centro  $A$  e l'intervallo  $AE$  uguale a  $F$  descrivasi un altro cerchio che seghi in  $D$  quello già dato, è chiaro che, congiunta  $AD$ , sarà uguale al raggio  $AE$ , e però alla data  $F$ ; C. D. F.

### 175. PROPOSIZIONE II. PROBL.

*Nel dato cerchio inscrivere un triangolo  $ABD$  equiangolo ad un altro dato  $IGH$ . (FIG. 87.)*

Si tiri al cerchio in qualche punto  $A$  la tangente  $EAF$  (147), e si faccia l'angolo  $FAD$  uguale all'angolo  $IGH$ , e l'angolo  $EAB$  uguale all'altro  $IHG$ , e congiungansi i punti  $D$ ,  $B$ , in cui queste rette segano il cerchio, con la retta  $DB$ . Dico che il triangolo  $ABD$  sarà il ricercato.

L'angolo  $ABD$  uguaglia l'angolo  $DAF$  (162), e però è uguale all'angolo  $IGH$ ; l'angolo  $ADB$  uguaglia l'angolo  $EAB$ , e però è uguale all'angolo  $GHI$ ; dunque ancora il terzo  $BAD$  uguaglia il terzo  $GIH$  (81); sicchè tutto il triangolo  $ABD$  inscritto nel circolo è equiangolo al dato triangolo  $IGH$ ; C. D. F.

## 176. PROPOSIZIONE III. PROBL.

*Intorno ad un dato cerchio ABD circoscrivere un triangolo EFG equiangolo ad un altro dato IHK. (FIG. 88.)*

Prolungato uno de' lati HK dall' una e dall' altra parte in M, L, si faccia al centro C del dato cerchio l' angolo ACD uguale all' angolo IKL, ed appresso si faccia l' angolo DCB uguale all' altro esterno IHM; indi si tirino ai punti A, D, B le tangenti AG, DE, BF, le quali concorreranno e formeranno un triangolo EFG circoscritto al cerchio ed equiangolo a quello dato.

Che debba risultare un triangolo circoscritto si vede congiungendo due qualunque dei tre punti A, B, D, per esempio, B, D; riescono in fatti gli angoli BDE, DBE minori dei retti CDE, CBE fatti dalle tangenti col raggio, e però quelle tangenti concorrono insieme (72). Perchè poi tanto gli angoli del triangolo BCD, quanto quelli dell' altro BED sono uguali a due retti (76); gli angoli del quadrilatero CBED uguagliano quattro retti, ed essendo i due CDE, CBE retti, saranno gli altri due BCD, BED uguali a due retti, e però uguali ai due angoli IHM, IHK; ma l' angolo BCD fu fatto uguale ad IHM; dunque l' altro BED è uguale ad IHK. Similmente essendo gli angoli ACD ed AGD uguali a due retti, uguaglieranno gli altri due IKL, IKH; dunque essendo fatto ACD uguale ad IKL, è l' altro AGD uguale ad IKH, e però ancora il terzo AFB uguaglia l' altro HIK; dunque il triangolo EFG circoscritto al dato cerchio si è fatto equiangolo al dato triangolo IHK; C. D. F.

## 177. PROPOSIZIONE IV. PROBL.

*In un dato triangolo EFG inscrivere un cerchio ABD. (FIG. 89.)*

Si dividano per mezzo gli angoli FEG, FGE colle rette EC, GC concorrenti in C, e da esso punto C si tirino le perpendicolari CA, CB, CD sopra i tre lati di esso triangolo.

Saranno queste perpendicolari tutte e tre uguali, perchè ne' triangoli CDE, CEB essendo gli angoli DEC, BEC uguali, ed ancora i retti CDE, CBE ed il lato EC comune, ancora gli altri lati CB, CD sono uguali (69); e così ancora ne' triangoli CDG, CAG si proverà CD uguale a CA. Pertanto col centro C e con l' intervallo CA descritto un



cèrchio, passerà pei punti  $A, B, D$ , e sarà toccato dai lati di questo triangolo  $FEG$ , i quali sono ad angoli retti a ciascheduno de' raggi  $CA, CB, CD$  (146); e però sarà inscritto detto circolo nel dato triangolo; C. D. F.

#### 178. PROPOSIZIONE V. PROBL.

*Ad un dato triangolo  $ABD$  circoscrivere un circolo. (FIG. 90.)*

Si taglino per mezzo due lati  $AB, BD$ , in  $E, F$ , e si alzino ad essi le perpendicolari  $EG, FG$  concorrenti in  $G$ , e congiunto il punto  $G$  con tutti e tre gli angoli  $A, B, D$ , il cerchio descritto per qualunque de' raggi  $GA, GB, GD$ , i quali saranno uguali, sarà circoscritto al dato triangolo.

Essendo  $AE$  uguale ad  $EB$  ed  $EG$  comune a' triangoli  $AEG, BEG$ , e gli angoli di quà e di là della retta  $GE$  uguali, perchè retti, la base  $GA$  sarà uguale a  $GB$ ; e similmente ne' triangoli  $BFG, DFG$ , per essere intorno ad angoli retti i lati  $BF, FG, DF, FG$  uguali,  $GB$  sarà uguale a  $GD$  (45); dunque il cerchio passa per tutti gli angoli  $A, B, D$ , e però è circoscritto al dato triangolo  $ABD$ ; C. D. F.

#### 179. PROPOSIZIONE VI. PROBL.

*In un dato cerchio inscrivere un quadrato  $AEBD$ . (FIG. 91.)*

Si tirino pel centro  $C$  due diametri  $AB, DE$ , che ad angoli retti si seghino in esso centro, e si congiungano le rette  $AE, AD, BE, BD$ ; dico che il quadrilineo  $AEBD$  sarà il quadrato inscritto nel dato cerchio.

In fatti di tutti i triangoli  $ACE, ACD, BCE, BCD$  tutti i lati intorno agli angoli retti sono uguali; e però le basi loro  $AE, AD, BE, BD$  parimente si uguagliano (45), e gli angoli  $AEB, EBD, BDA, DAE$  essendo ne' semicircoli, sono retti (161); dunque il quadrilatero  $AEBD$  è un quadrato (29); C. D. F.

#### 180. PROPOSIZIONE VII. PROBL.

*Al dato cerchio  $AEBD$  circoscrivere un quadrato. (FIG. 92.)*

Tirati, come nella precedente, i diametri  $AB, DE$ , che nel centro  $C$  si seghino ad angolo retto, si tirino pei punti  $A, B$  le parallele al diametro  $DE$ , e pei punti  $D, E$  le parallele al diametro  $AB$ : risulterà il quadrilatero  $FIHG$ , che sarà il quadrato cercato.

Quelle parallele ai diametri faranno pure a' termini

de' diametri medesimi angolo retto (73), e però saranno tangenti (146); e tutti i lati  $GH$ ,  $HI$ ,  $IF$ ,  $FG$  saranno uguali al diametro del cerchio, e quindi uguali tra loro; gli angoli pure  $G$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $F$ , in cui convengono esse tangenti, saranno retti, perchè nel parallelogrammo  $FABG$  l'angolo  $G$  uguaglia l'opposto  $FAC$ , ch'è retto, l'angolo  $F$  uguaglia l'angolo opposto  $GBC$ , che pure è retto; e così nel parallelogrammo  $ABHI$  si mostrano gli altri angoli  $H$ ,  $I$  essere retti; dunque  $FIHG$  è un quadrato circoscritto al detto cerchio; C. D. F.

181. *Corollario.* Il quadrato circoscritto al cerchio è sempre doppio del quadrato inscritto, e questo è poi doppio del quadrato del raggio.

### 182. PROPOSIZIONE VIII. PROBL.

*In un dato quadrato  $FGHI$  inscrivere un cerchio. (FIG. 92.)*

Dividansi per mezzo i lati nei punti  $A$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $D$ , e conducansi le rette  $AB$ ,  $ED$ , che si segheranno in  $C$ .

Queste saranno parallele a' detti lati, congiungendo i termini di linee parallele ed uguali (87); però tutte le rette  $CA$ ,  $CE$ ,  $CB$ ,  $CD$  uguagliando la metà de' lati di esso quadrato, saranno uguali fra loro. Se dunque col centro  $C$  e con uno di questi raggi  $CA$  descrivasi un cerchio, passerà per gli altri punti  $E$ ,  $B$ ,  $D$ , e rimarrà toccato da' lati di esso quadrato, essendo qualunque angolo  $CAI$ ,  $CEH$ , ecc. retto, come uguale all'angolo  $H$  ovvero  $G$  opposto nel parallelogrammo  $ABHI$ ,  $DEHG$ , ecc. (88). Dunque detto circolo riesce inscritto nel dato quadrato, C. D. F.

### 183. PROPOSIZIONE IX. PROBL.

*Ad un dato quadrato  $AEBD$  circoscrivere un cerchio. (FIG. 91.)*

Si tirino le diagonali  $AB$ ,  $DE$  concorrenti in  $C$ .

Perchè qualunque triangolo  $AEB$ ,  $EBD$ ,  $BDA$ ,  $DAE$  è isoscele per l'uguaglianza de' lati del quadrato, tutti gli angoli come  $BAE$ ,  $EBA$  sono uguali tra loro e sono semiretti; essendo retto l'angolo  $AEB$ , e gli altri due uguali ad un altro retto (78); dunque tutti gli angoli semiretti  $CAE$ ,  $CEA$ ,  $CEB$ ,  $CBE$ ,  $CBD$ ,  $CDB$ ,  $CDA$ ,  $CAD$  essendo uguali, le rette  $CA$ ,  $CE$ ,  $CB$ ,  $CD$  pure sono uguali; e però fatto centro  $C$ , con l'intervallo  $CA$  descritto un cerchio, passerà per tutti gli altri punti  $E$ ,  $B$ ,  $D$ ; e sarà quello che si cercava; C. D. F.

## 184. PROPOSIZIONE X. PROBL.

*Costruire il triangolo isoscele ABE, i cui angoli alla base AEB, ABE sieno ciascuno il doppio dell'angolo alla cima BAE. (FIG. 93.)*

Dividasi una retta AB in D in maniera che il rettangolo ABD equivalga al quadrato AD (116), e col raggio AB descritto un circolo BEF, si adatti dal punto B alla circonferenza una retta BE uguale all'AD e si congiunga AE, sarà il triangolo ABE il ricercato.

Che esso sia isoscele è manifesto per l'eguaglianza dei raggi. Congiunta poi la retta ED, e circoscritto un cerchio al triangolo ADE, sarà la BE tangente, per essere il di lei quadrato, come quello di AD, equivalente al rettangolo ABD (169); e però l'angolo DEB sarà uguale all'angolo EAD (162); onde, aggiunto di quà e di là l'angolo DEA, sarà l'angolo AEB uguale a' due angoli EAD, DEA, cioè all'angolo esterno BDE (76); ma ancora l'angolo ABE uguaglia l'angolo AEB; dunque gli angoli, BDE, ABE sono uguali, e però il lato DE uguaglia il lato EB, cioè 'il lato AD; dunque ancora l'angolo DEA uguaglia l'angolo EAD; e però sarà l'angolo AEB duplo dell'angolo EAB; C. D. F.

## 185. PROPOSIZIONE XI. PROBL.

*In un dato cerchio inscrivere un pentagono DFGHI equilatero ed equiangolo. (FIG. 94.)*

Fatto un triangolo isoscele ABE, di cui ciaschedun angolo sopra la base sia il doppio dell'angolo A alla cima (184), s'inscriva nel cerchio il triangolo DGH equiangolo allo stesso ABE (175); poi divisi per mezzo ambo gli angoli alla base DGH e DHG colle linee GI, HF, si congiungano le rette GF, FD, DI, IH. Dico che questo sarà un pentagono equilatero ed equiangolo inscritto nel dato circolo.

Gli angoli alla base HG di quel triangolo DHG equiangolo ad ABE essendo il doppio dell'angolo GDH, divisi quelli per mezzo, ne riusciranno tutti i cinque angoli DGI, IGH, GHF, FHD, GDH uguali; e però gli archi sopra di cui essi angoli insistono saranno uguali (156); e però ancora le rette a detti archi sottotese DI, IH, HG, GF, FD sono uguali; onde questo pentagono è equilatero. Essendo poi l'arco DI uguale a FG, aggiunto di comune l'arco IHG, sarà l'arco DIHG uguale all'arco IHGF; e però



l'angolo DFG è uguale all'angolo FDI (157), e così degli altri; dunque esso pentagono è ancora equiangolo; C. D. F.

### 186. PROPOSIZIONE XII. PROBL.

*Ad un dato cerchio IFH circoscrivere un pentagono ABEKL equilatero ed equiangolo. (FIG. 95.)*

S'inscriva nel cerchio il pentagono IDFGH per l'*antecedente*, e dal centro C condotti a qualunque angolo i raggi CI, CD, CF, ecc., si tirino a' medesimi le perpendicolari AB, BE, EK, KL, LA che saranno tangenti del circolo. Dico essere il poligono (\*) da esse compreso un pentagono equilatero ed equiangolo circoscritto al cerchio.

Primieramente è a mostrarsi come il poligono sia equilatero. Ora AI, AH sono uguali perchè tangenti (167), e per la stessa ragione lo sono IB e BD, DE ed EF, ecc.; se dunque si provassero uguali AI ed IB, BD e DE, ecc., verrebbe il perimetro del pentagono a provarsi diviso in dieci parti eguali, di cui ciascun lato abbracciandone due, resterebbe conchiuso ch'esso è equilatero. Convien perciò provare l'eguaglianza di due triangoli come AIC, BIC, per la quale avendosi già nei medesimi gli angoli AIC, BIC retti, e il lato IC comune, non resta più che a provare eguali gli angoli ACI, BCI. Tali angoli saranno eguali se si dimostrerà che sono le metà degli angoli HCI, DCI, i quali sono eguali perchè sono eguali i triangoli HCI, DCI che hanno tutti tre i lati rispettivamente eguali. Ma essendo eguali i triangoli AHC, AIC per avere AH eguale ad AI, AC comune, e gli angoli AHC, AIC retti, è veramente ACI metà di HCI; e per una simile dimostrazione anche BCI metà di DCI; dunque sono ACI, BCI eguali; dunque i triangoli ACI, BCI, e quindi i lati AI, BI sono eguali. Lo stesso ragionamento prova eguali i triangoli BCD, ECD, e quindi i loro lati BD, DE; così tutt' in giro: è dunque provato equilatero il pentagono. Ma per l'eguaglianza provata dei triangoli AHC, AIC risulta CAI metà dell'angolo LAB, e per una simil ragione CBI metà di ABE; dunque essendo CAI eguale a CBI, per l'altra eguaglianza de' triangoli CAI,

(\*) Chiamasi *poligono* qualunque figura i cui lati rettilinei rasserrano una superficie piana, e dicesi suo *perimetro* la somma di tutti i lati che lo contornano.

$\angle CBI$ , è l'angolo  $\angle LAB$  eguale ad  $\angle ABE$ . La stessa dimostrazione ripetuta nelle altre parti del pentagono convince ch'esso è ancora equiangolo; C. D. F.

187. *Corollario.* Nella stessa maniera qualunque figura equilatera ed equiangola sia inscritta nel cerchio, tirate da qualsivoglia angolo le tangenti, si proverà essere similmente la figura circoscritta equilatera ed equiangola.

### 188. PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

*In un dato pentagono equilatero ed equiangolo ABEKL inscrivere un circolo. (FIG. 95.)*

Si dividano per mezzo due angoli prossimi  $\angle LAB$ ,  $\angle ABE$  colle rette  $AC$ ,  $BC$  concorrenti in  $C$ , e da esso punto  $C$  si tirino sopra ciaschedun lato le perpendicolari  $CH$ ,  $CI$ ,  $CD$ ,  $CE$ ,  $CF$ , queste saranno uguali; e però descritto il cerchio con uno de' raggi  $CH$ , passerà per tutti i punti  $H$ ,  $I$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , e sarà toccato dai lati del dato pentagono cui sono perpendicolari essi raggi, onde egli sarà inscritto.

La dimostrazione ha due parti. Primieramente vuolsi provare che tutte le rette  $AC$ ,  $BC$ ,  $EC$ ,  $KC$ ,  $LC$  condotte dal punto  $C$  agli angoli del pentagono riescono eguali e dividono gli angoli per metà. Si considerino i triangoli  $ACB$ ,  $BCE$ ,  $ECK$ , ecc.: il primo di essi è isoscele, perchè gli angoli  $\angle CAB$ ,  $\angle CBA$  sono per costruzione eguali come metà degli angoli eguali del poligono, dunque  $AC$  è eguale a  $CB$ . I triangoli  $ACB$ ,  $BCE$  intorno agli angoli eguali  $\angle CAB$ ,  $\angle CBE$  hanno i lati  $AC$ ,  $BC$  e  $AB$ ,  $BE$  uguali, dunque anche le basi  $CB$ ,  $CE$  sono eguali; onde anche il triangolo  $BCE$  è isoscele, e l'angolo  $\angle CEB$  sarà la metà di  $\angle BEK$ , perchè dev'essere eguale a  $\angle CBE$ , che è la metà di  $\angle ABE$ . Passando ai triangoli  $BCE$ ,  $ECK$  in cui sono eguali gli angoli  $\angle CBE$ ,  $\angle CEK$  e i lati  $CB$ ,  $CE$ ,  $BE$ ,  $EK$ , colla medesima dimostrazione si proverà che  $CK$  uguaglia  $CE$  e divide per metà l'angolo  $\angle EKL$ ; così seguitando in giro a considerare due triangoli contigui, si proverà quanto si è asserito. Ciò fatto, si dimostrano poi subito eguali tutte le perpendicolari  $HC$ ,  $CI$ ,  $CD$ , ecc.; basta in fatti considerare due triangoli come  $AHC$ ,  $ACI$ : questi hanno  $AC$  comune, gli angoli  $\angle HAC$ ,  $\angle IAC$  eguali e sono rettangoli; dunque sono eguali, dunque  $HC$  è uguale ad  $IC$ . Lo stesso ragionamento replicato sui triangoli  $CIB$ ,  $CBD$  prova  $IC$  eguale a  $CD$ , e così tutte in giro quelle perpendicolari si provano eguali; C. D. F.

189. *Corollario.* Così in qualunque figura equilatera ed equiangola divisi per mezzo due angoli prossimi, e dal concorso delle linee dividenti condotte le perpendicolari a' lati, queste riescono uguali, e condotte agli altri angoli dallo stesso concorso altre rette, sono tutte uguali e dividono per mezzo gli altri angoli, come si è provato in questo pentagono, onde al medesimo modo gli si può inscrivere un cerchio.

190. PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

*Intorno al dato pentagono equilatero ed equiangolo IHGFD circoscrivere un cerchio. (FIG. 95.)*

Segati per mezzo due angoli prossimi colle rette IC, HC concorrenti in C, le linee condotte dal punto C a tutti gli altri angoli saranno uguali (189); dunque col raggio CI descritto il cerchio passerà per tutti i detti angoli, e sarà circoscritto al dato pentagono; C. D. F.

191. *Corollario.* Nella stessa maniera potrà circoscriversi un cerchio a qualunque altra figura equilatera ed equiangola.

192. PROPOSIZIONE XV. PROBL.

*In un dato cerchio AEF inscrivere un esagono equilatero ed equiangolo. (FIG. 96.)*

Condotto un diametro AD pel centro C, si applichino nel cerchio due rette di quà e di là dal punto A uguali al raggio AC, quali sieno AB, AG, e congiunte al centro le rette BC, GC, si prolunghino alla periferia in F, E; inditrate le rette BE, ED, GF, FD, rimarrà inscritto nel cerchio un esagono equilatero ed equiangolo.

Essendo i triangoli ABC, AGC equilateri, ciascuno degli angoli di essi ACG ed ACB sarà un terzo di due retti; però ancora BCE, che con gli altri due compisce due retti, sarà un altro terzo di due retti; e però saranno uguali i detti tre angoli e gli opposti alla loro cima ECD, DCF, FCG; onde tutti gli archi opposti a detti angoli e le rette ad essi sottotese sono uguali (149, 156); dunque ABEDFG è un esagono equilatero ed ancora equiangolo, perchè gli angoli GAB, ABE, BED, ecc. insistono a quattro di quegli archi uguali.

193. PROPOSIZIONE XVI. PROBL.

*In un dato cerchio AEH descrivere un quindecagono equilatero ed equiangolo. (FIG. 97.)*



Inscrivasi un pentagono  $AIHGF$  nel dato cerchio (185), ed ancora un triangolo  $ADE$  equiangolo ad un altro equilatero (175), che sarà esso ancora equilatero, il quale abbia uno de' suoi vertici comune con uno di quelli dell'inscritto pentagono. Delle quindici parti della circonferenza ne conterrà cinque l'arco  $AE$ , e tre sole l'arco  $AF$ , e nel residuo  $FE$  vi saranno due di dette parti quintedecime; onde divisa  $FE$  per mezzo in  $K$  (160), saranno  $EK$  e  $KF$  parti quintedecime; ed applicando intorno alla circonferenza le linee rette uguali a ciascheduna delle corde  $EK$ ,  $KF$ , sarà compiuto il quindecagono equilatero ed equiangolo, insistendo qualunque angolo  $FKE$  di esso sopra tredici di quelle quintedecime parti.

194. Alle figure equilatero ed equiangole si dà il nome di *poligoni regolari*.

195. *Scolio*. Dalle cose che si sono dimostrate qui sopra è facile ricavare che, dato un poligono regolare iscritto o circoscritto al circolo, si potrà inscrivere o circoscrivere al cerchio stesso un poligono regolare di un doppio numero di lati; e quindi avendo noi insegnato ad inscrivere e circoscrivere il quadrato, il pentagono, l'esagono, il quindecagono, potremo anche inscrivere o circoscrivere queste serie di poligoni regolari di lati.

|     |     |     |      |      |
|-----|-----|-----|------|------|
| 4,  | 8,  | 16, | 32,  | ecc. |
| 5,  | 10, | 20, | 40,  | ecc. |
| 6,  | 12, | 24, | 48,  | ecc. |
| 15, | 30, | 60, | 120, | ecc. |

## LIBRO V.

### DELLE PROPORZIONI E LORO APPLICAZIONE NELLE FIGURE PIANE.

196. Per intendere questo libro ed i seguenti converrebbe rammentarsi la dottrina delle proporzioni, da noi spiegata nel cap. XI della prima parte. È vero che le quantità che ivi noi paragonammo tra loro, per farne proporzione, erano numeri, e che nella geometria queste esser debbono o linee, o superficie, o solidi; ma se rifletteremo che, stabilita una certa misura per unità, tali quantità potranno allora essere rappresentate da numeri che dicano a quante di quelle unità la quantità equivaleva, svanirà allora ogni dubbio sopra l'applicazione alle quantità geometriche di quelle regole da noi date pei numeri.

Del resto si è fatta la stessa cosa nell'applicare le proporzioni ai bisogni del commercio, come si vede nel cap. XII. Le quantità da mettersi in proporzione erano uomini, mercanzie, danaro, ecc. Esse si rappresentavano da numeri i quali esprimevano che una tal quantità era tante unità di misura della sua specie (\*)

197. Non ostante, in grazia di quelli i quali possono aver cominciato il loro studio dalla geometria, e ritrovarsi a questo libro senz'aver conoscenza della teorica delle proporzioni, io ne rammenterò quì i principj, e nel seguito di questo libro ne dimostrerò geometricamente quelle proprietà che a noi faranno di bisogno; e così lo studio della geometria sarà reso indipendente da quello dell'algebra, onde una si possa sempre intendere senza l'altra.

(\*) E questa è una verità di grande momento. Finora abbiamo considerata la quantità continua senza distinguervi con attenzione le parti, quantunque giudicando del maggiore, del minore, del grande e del piccolo già in qualche modo si sottintendesse l'idea di un rapporto. Adesso bisogna saper concepire ogni linea come un aggregato di tante unità lineari fra loro avvicinate e connesse; ogni superficie un aggregato di tante unità superficiali; ogni solido un aggregato di tante unità solide; e perciò loderei che il maestro insistendo su quest'idea, facesse quì presentire agli allievi (cosa che non turba l'ordine) quanto in seguito è detto al principio del libro IX. Così non urterà più il trovare quì dopo messe in proporzione le linee colle superficie o coi solidi, perchè il rapporto di linea a linea essendo un numero astratto come quello di superficie a superficie, possono benissimo due numeri astratti essere uguali fra loro. Di quì anche s'intenderà nel suo giusto significato l'espressione di moltiplicar linea per linea, o linea per superficie. Questa sarebbe assurda se s'intendesse delle quantità concrete; ma non lo è più riflettendo che non si moltiplica se non il numero astratto esprime una linea con quello esprime un'altra linea od una superficie, e al prodotto dei numeri astratti si affigge poi mentalmente una diversa unità, che è la superficiale nel primo caso, e la solida nel secondo. Da questo punto vedesi la Geometria prendere un nuovo aspetto; all'idea della quantità continua si unisce ora quella della discreta: s'introducono i numeri e le operazioni sui numeri, e quindi può prevedersi come la scienza dei numeri, e più in generale l'analisi sia destinata a consociarsi con potentissima forza alla scienza della estensione.

## Definizioni.

198. I. *Rapporto o ragion geometrica* di due grandezze (siano esse numeri, linee, superficie ecc.) non è altro che l'idea del quanto l'una contiene o è contenuta nell'altra; e però si acquista una tale idea confrontandole fra loro.

199. II. Il numero che esprime come l'una delle grandezze confrontate contiene l'altra è pertanto la misura, ossia la quantità del rapporto, che hanno fra loro le grandezze confrontate.

200. III. La prima delle due grandezze, che si confrontano, chiamasi *antecedente*, la seconda *conseguente*.

201. IV. Se due grandezze A, B hanno tra loro lo stesso rapporto o la stessa ragione come due altre C, D, con esse quattro si forma una *proporzione*, e si dice A sta a B, come C sta a D.

La proporzione stessa s'indica per brevità scrivendo in questa guisa  $A : B :: C : D$ .

202. V. Anche con tre grandezze A, B, C si può fare una proporzione, allorchè la ragione ossia il rapporto della prima alla seconda è lo stesso che quello della medesima seconda alla terza.

203. VI. Delle tre grandezze proporzionali, la seconda chiamasi *media proporzionale* tra la prima e la terza, e questa terza è detta *terza proporzionale* alle due prime.

204. VII. Quando si hanno quattro grandezze proporzionali, l'ultima è quarta proporzionale alle tre altre.

205. VIII. Si dice che le grandezze sono *continuamente proporzionali* o *in proporzione continua* allorchè la prima sta alla seconda, come la seconda alla terza, come questa qui alla quarta, come la quarta ad una quinta, ecc.

206. IX. Allorchè abbiamo una serie di grandezze continuamente proporzionali, la ragione della prima alla terza dicesi *duplicata* di quella della prima alla seconda; e quella della prima alla quarta, *triplicata* di quella della prima alla seconda, e così via via.

207. Riesce più chiaro nominare la ragione duplicata quella dei quadrati, e la triplicata quella dei cubi, come si vedrà dagli esempi.

208. X. Delle grandezze proporzionali diconsi *omologhi* gli antecedenti fra loro, e così i conseguenti.

209. XI. Se le grandezze  $m, n, p, q$ , ecc. sono tali che la prima stia alla seconda conforme una data ragione  $a : b$ ,



e che la seconda stia alla terza conforme un'altra data ragione  $c:d$ , che la terza stia alla quarta conforme un'altra data ragione  $e:f$  ecc. cioè a dire se:

$$m:n::a:b$$

$$n:p::c:d$$

$$p:q::e:f \text{ ecc.}$$

la ragione della prima alla terza (cioè  $m:p$ ) si dice composta delle due prime ragioni  $a:b$ ,  $c:d$ ; e così la ragione della prima alla quarta (cioè  $m:q$ ) si dice composta delle tre ragioni  $a:b$ ,  $c:d$ ,  $e:f$  e via dicendo (\*).

210. XII. Figure rettilinee *simili* si dicono quelle in cui ciascun angolo dell'una eguaglia quello che gli corrisponde nell'altra, e che d'intorno agli angoli eguali hanno i lati proporzionali.

211. XIII. Due lati di una figura diconsi essere reciprocamente proporzionali a due lati di un'altra, allorchè uno di quei lati della prima abbia la stessa ragione ad uno di quei lati della seconda, come quell'altro lato della seconda a quell'altro della prima.

(\*) Per rendere appieno indipendente lo studio degli Elementi di Geometria da quello dell'Algebra (conforme lo scopo propostosi dal chiarissimo Cavalier Brunacci al §. 197. del presente corso) si è creduto ben fatto di sostituire la presente definizione a quella che quivi trovavasi nelle passate edizioni. Se fosse necessaria una tale variazione, lo diranno quei zelanti dell'esattezza geometrica, i quali nelle stesse edizioni confronteranno fra loro i §. 209, 260. Nondimeno chi è alquanto pratico dell'Algebra, s'accorgerà che la nostra definizione geometrica è corrispondente all'aritmetica o algebrica che trovasi nelle precedenti edizioni, la quale è la seguente. *Una proporzione (o piuttosto ragione) si dice composta di più altre, quando la quantità di queste moltiplicate insieme fanno la quantità di quella:* che è quanto dire, allorchè l'antecedente della composta stia al suo conseguente, come il prodotto degli antecedenti delle componenti sta al prodotto dei conseguenti loro.

In effetto sussistendo le suddette proporzioni si avrà:  $an = bm$ ;  $cp = dn$ ;  $eq = fp$  (Alge. 243) e conseguentemente si avrà ancora:  $an \times cp \times eq = bm \times dn \times fp$ , cioè  $acnpeq = bdfmnp$ ; e però dividendo per  $np$  l'uno e l'altro membro si avrà  $aceq = bdfm$ ; cioè  $m \times bdf = q \times ace$ : dunque  $m:q::ace:bdf$  (Algeb. 244.). Ma  $ace$  è il prodotto degli antecedenti,  $bdf$  il prodotto dei conseguenti, dunque la ragione composta  $m:q$  è uguale a quella che sussiste fra il prodotto degli antecedenti e quello dei conseguenti delle componenti sue.

212. XIV. Una retta AB si dirà segata *secondo l'estrema e media ragione* in C se sia tutta alla parte maggiore, come questa parte alla rimanente, cioè  $AB:BC::BC:CA$ . (FIG. 98.)

213. XV. L'*altezza* di qualsivoglia figura è la perpendicolare condotta dalla cima alla base.

### *Assiomi.*

214. I. Le grandezze che hanno la stessa ragione ad una sola e medesima grandezza o a grandezze uguali sono eguali tra loro.

215. II. Le grandezze eguali hanno una stessa ragione ad una sola e medesima grandezza.

216. III. Le grandezze alle quali una sola e medesima grandezza ha una stessa ragione sono eguali.

217. IV. Se paragoniamo due grandezze ad una terza, ne sarà maggiore quella che vi avrà un maggior rapporto, e inversamente.

218. V. Le ragioni uguali ad una stessa ragione o a ragioni eguali saranno eguali tra loro.

219. VI. Quando in due proporzioni tre termini di una sono eguali ai tre omologhi di un'altra, anche il quarto termine della prima è uguale al quarto termine della seconda.

220. VII. Le ragioni composte di altre uguali sono eguali fra loro. Così avendosi

$$\begin{array}{l} a:b::c:d \\ e:f::g:h \end{array}$$

la ragione composta delle ragioni  $a:b$ ,  $e:f$  è uguale alla composta delle ragioni  $c:d$ ,  $g:h$ . (\*).

(\*) L'assioma che nelle altre edizioni si trova in luogo di questo è il seguente: *Se due ragioni si moltiplicano fra loro (cioè che si fa moltiplicando antecedente per antecedente, conseguente per conseguente) per avere una ragione composta di esse due, e se due altre ragioni eguali a quelle prime si moltiplicano parimente tra loro per averne una seconda ragione composta, le due ragioni composte saranno anche uguali tra di loro.*

Ma i Geometri s'accorgeranno che questa proposizione non è certamente un assioma geometrico, ma piuttosto un teorema alge-

221. VIII. Due grandezze hanno tra loro la stessa ragione che le loro metà, i loro terzi, i loro quarti, ecc., come pure i loro doppi, i loro tripli, i quadrupli, ecc., ed in generale i loro multipli od i loro submultipli.

Quindi è che se i termini di una ragione si moltiplicano o si dividono con una stessa quantità, la ragione non cangia valore.

222. Premetto ora la spiegazione di alcuni segni dei quali faremo uso per abbreviare i discorsi sopra le proporzioni.

+ È segno d'aggregazione: si pronunzia *più*, e si scrive  $A + B$  per significare la somma delle due quantità  $A$ ,  $B$ .

— È segno di sottrazione; si pronunzia *meno*, e si scrive  $A - B$  per significare la differenza delle due quantità  $A$ ,  $B$ .

223.  $>$  Significa l'esser maggiore, e si pronunzia *maggiore*. Così  $A > B$  vuol dire che  $A$  supera  $B$ .

$<$  Significa l'esser minore, e si pronunzia *minore*. Così  $A < B$  vuol dire che  $A$  è minore di  $B$ .

$=$  Significa eguaglianza, e si pronunzia *eguale*. Così  $A = B$  vuol dire che  $A$  eguaglia  $B$  (\*).

$\times$  È segno di moltiplicazione. Così  $A \times B$  significa che  $A$  debbe moltiplicarsi per  $B$ .

brico, di cui eccone la dimostrazione. Se le quantità  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ecc. sono tali che

$$\begin{array}{l} a : b :: c : d \\ e : f :: g : h \end{array}$$

si avrà  $ae : bf :: cg : dh$

In effetto: dalle suddette proporzioni si avrà  $ad = bc$ ,  $eh = fg$ ; cioè  $aedh = bfcg$ , cioè  $ae \times dh = bf \times cg$ . Dunque  $ae : bf :: cg : dh$  (Algeb. 244.)

A chi poi non ravvisasse nella proposizione da noi sostituita tutta l'evidenza di un assioma geometrico diremo: che per non dipartirci dall'ordine stabilito dal chiarissimo compilatore di questi Elementi, l'abbiamo quivi inserita, quantunque la dimostrazione di essa, come teorema, la esporremo a guisa di corollario alla proposizione 240.

(\*) Adopereremo questo segno anche per le figure equivalenti quando, non badando alla grandezza del loro perimetro e dei loro angoli, vorremo soltanto esprimere l'eguaglianza delle loro superficie.



## 224. PROPOSIZIONE PRIMA. TEOR.

*I triangoli ACD, BCD e i parallelogrammi ADCQ, BDCP, che hanno la medesima altezza, sono tra loro come le loro basi. (FIG. 99.)*

I.<sup>o</sup> Siano le basi BD, DA commensurabili tra loro; abbiano cioè una misura comune, la quale presa per unità le misuri esattamente; AD sia, per esempio, tre di quelle misure, e BD due. Si avrà intanto  $BD : DA :: 2 : 3$ . Divisa la DA nelle sue tre parti, e la BD in due, siano  $r, q, p$  questi punti di divisione, e si congiungano le rette  $Cp, Cq, Cr$ .

I triangoli  $ACp, pCq, qCD, DCr, rCB$  saranno equivalenti tra loro (92). Ora ACD contiene tre di questi triangoli, mentre BCD ne contiene due; dunque  $BCD : DCA :: 2 : 3$ . Ma (218) due ragioni eguali ad una terza e stessa ragione sono uguali tra loro; dunque  $BCD : DCA :: BD : DA$ .

La ragione dei parallelogrammi sarà anche la stessa, perchè sono doppj dei triangoli (221).

È facile poi vedere che quel ragionamento che abbiamo fatto supponendo che le basi BD, DA stessero tra loro come  $2 : 3$ , si potrebbe applicare a qualunque caso nel quale quelle medesime basi stessero come due qualunque numeri M, N.

II.<sup>o</sup> Se le basi AD, BD sono incommensurabili (\*), se cioè non esiste in natura una tal porzione di linea che esattamente le misuri ambedue, i triangoli sono pur non ostante in ragione delle loro basi. (FIG. 100.)

Imperciocchè il triangolo BCD, stia, s'è possibile, al triangolo ACD, non già come BD sta ad AD, ma come qualunque altra linea DE (maggiore di BD) sta ad AD.

(\*) Perchè due grandezze siano incommensurabili, non è però tolta l'idea del loro rapporto, anzi qui si suppone che realmente questo rapporto vi sia, istituendo ancora la proporzione fra i triangoli e le basi. In tal caso però il rapporto non è un numero intero o fratto, ma ha un valore che non si può assegnare esattamente, quantunque vi si possa avvicinare quanto si vuole. La proprietà di ammettere questo avvicinamento basta a fissare il valore di quel rapporto in modo da non poter essere nè maggiore, nè minore, e noi di tali sorte di numeri abbiamo già avuti degli esempj in algebra nei radicali irrazionali e nei logaritmi.

Si divida  $DA$  in parti uguali, due, quattro, otto, ecc. (52), sinchè una di esse  $NA$  sia minore di  $BE$ . Si prenda  $DF$  multipla di  $NA$  quanto basta per essere appena maggiore di  $DB$ , ed è chiaro che il punto  $F$  cadrà tra  $B$  ed  $E$ , perchè  $BF$  sarà minore di  $AN$ , e questa lo è di  $BE$ .

Frattanto la ragione dei triangoli  $DCF : DCA$  è eguale a quella delle loro basi commensurabili  $DF : DA$ ; ma la ragione  $BCD : DCA$  è per supposizione eguale a quella  $ED : AD$ , e questa ragione è maggiore di quella (217)  $FD : DA$ ; dunque anche la ragione  $BCD : DCA$  sarà maggiore della ragione  $FD : DA$ ; ma  $FD : DA$  eguaglia la ragione di  $DCF : DCA$ ; dunque la ragione  $BCD : DCA$  sarà maggiore della ragione  $DCF : DCA$ ; dunque  $BCD$  (217) sarà maggiore di  $DCF$ : il che è assurdo. Con lo stesso ragionamento si potrebbe provare che il triangolo  $BCD$  non può stare al triangolo  $ACD$  in una ragione minore di quella di  $BD$  a  $DA$ ; dunque  $BCD : ACD :: BD : DA$ ; C. D. D.

225. Così si dimostrerà che i triangoli  $ABC$ ,  $DEF$  fatti sopra basi eguali  $AB$ ,  $DE$  sono tra loro come le altezze  $CH$ ,  $FI$ . (FIG. 101.)

Sia  $BP$  perpendicolare ad  $AB$  ed eguale a  $CH$ . Prendasi  $BQ = FI$ , e congiungansi  $AP$ ,  $AQ$ .

Essendo il triangolo  $ACB = APB$ , ed il triangolo  $AQB = DFE$  (92), la ragione di  $ACB : DFE$  sarà eguale a quella di  $APB : AQB$ ; ma (224)  $APB : AQB :: PB : QB$  ovvero  $:: CH : FI$ ; dunque  $ACB : DFE :: CH : FI$ ; C. D. D.

226. *Corollario.* Questo stesso rapporto avrà luogo nei parallelogrammi che hanno basi eguali, perchè sono essi doppi dei triangoli.

## 227. PROPOSIZIONE II. TEOR.

*Se i parallelogrammi  $ABCD$ ,  $EBGF$  sono equivalenti ed hanno un angolo  $ABC = GBE$ , saranno i lati di essi reciprocamente proporzionali, cioè  $AB : BG :: EB : BC$ .*

*E inversamente, se intorno agli angoli eguali sono i lati reciprocamente proporzionali, essi parallelogrammi saranno equivalenti.* (FIG. 102.)

Posto il lato  $BG$  per diritto ad  $AB$ , sarà pure  $EB$  per diritto a  $CB$ , e prolungate le rette  $FG$ ,  $DC$  convenienti in  $H$ , sarà pure  $CBGH$  un parallelogrammo; e perchè  $ABCD = BEFG$ , sarà (215)  $ABCD : CBGH :: BEFG : CBGH$ ;

ma la prima ragione è quella di  $AB : BG$ , e la seconda è quella di  $EB : BC$  (224); dunque (218)  $AB : BG :: EB : BC$ ; e qualunque volta ciò sia, sarà ancora  $ABCD : CBGH :: BEFG : CBGH$ , dunque (214) sarà  $ABCD = BEFG$ ; C. D. D.

### 228. PROPOSIZIONE III. TEOR.

*Se quattro rette linee sono proporzionali  $A : B :: C : D$ , il rettangolo  $A . D$  (\*) compreso dall'estreme equivale al rettangolo  $B . C$  delle medie; e inversamente, se due rettangoli  $A . D$ ,  $B . C$  sono equivalenti, saranno proporzionali i loro lati reciprocamente presi  $A : B :: C : D$ . (FIG. 103.)*

Perchè essendo posti questi lati intorno ad angoli retti, saranno i lati reciprochi  $A : B :: C : D$ ; dunque i rettangoli sono equivalenti (227); e se tali rettangoli sono equivalenti, i loro lati debbono essere reciprocamente proporzionali (227); C. D. D.

229. Corollario. Segue di qui che *Se tre linee  $A$ ,  $B$ ,  $D$  saranno continuamente proporzionali, cioè  $A : B :: B : D$ , il rettangolo dell'estreme  $A . D$  equivarrà al quadrato della media  $B . B$ ; e inversamente se di tre linee il rettangolo dell'estreme equivale al quadrato della media, esse tre linee saranno continuamente proporzionali.*

### 230. PROPOSIZIONE IV. TEOR.

*Se in un triangolo  $ACD$  si conduce la retta  $BE$  parallela ad un lato  $CD$ , essa taglierà i lati  $AC$ ,  $AD$  proporzionalmente nei punti  $B$ ,  $E$ ; sarà cioè  $AB : BC :: AE : ED$ ; e inversamente qualunque volta una linea  $BE$  segnerà i lati  $AC$ ,  $AD$  proporzionalmente, sarà essa parallela a  $CD$ . (FIG. 105.)*

Conducansi le rette  $CE$ ,  $BD$ , ed essendo i due triangoli (91)  $CBE$ ,  $BED$  tra di loro equivalenti, si avrà (215)  $ABE : BEC :: ABE : BED$ ; ma la ragione  $ABE : BEC$  è (224) eguale ad  $AB : BC$ ; e la ragione  $ABE : BED$  eguaglia quella di  $AE : ED$ ; dunque (218) avremo  $AB : BC :: AE : ED$ ;

(\*) Il rettangolo compreso da due lati d'ora in avanti lo indicheremo per gli stessi lati scritti l'uno accanto dell'altro, postovi tramezzo un punto.



Quanto all' inversa, essendo  $AB : BC :: AE : ED$ , sarà anche  $AEB : BEC :: AEB : EBD$ ; dunque (216)  $BEC = EBD$ ; e però (93)  $BE, CD$  sono parallele; C. D. D.

231. *Corollario.* Di qui segue che  $AC : AB :: AD : AE$  perchè  $AC : AB :: AEC : AEB$ ; ma  $AEC : AEB :: ABD : AEB$ , ed  $ABD : AEB :: AD : AE$ ; dunque  $AC : AB :: AD : AE$ .

232. *Corollario.* Si avrà anche  $AC : BC :: AD : ED$ ; in fatti  $AC : BC :: AEC : BEC$ ; ma  $AEC : BEC :: ABD : EBD$ , ed  $ABD : EBD :: AD : ED$ ; dunque (218)  $AC : BC :: AD : ED$ .

### 233. PROPOSIZIONE V. TEOR.

*Se nel triangolo BAC l'angolo A si divide per mezzo con la retta AD segante la base BC in D, saranno i segmenti della base proporzionali ai lati, cioè  $BD : DC :: AB : AC$ , e inversamente qualunque volta sia  $BD : DC :: AB : AC$ , la retta che congiunge l'angolo A col punto D, taglia per mezzo l'angolo BAC. (FIG. 106.)*

In  $AB$  prolungato si prenda  $AE = AC$ , e congiungansi  $C, E$ . Sarà l'angolo  $E = ECA$  (46)  $= \frac{1}{2} BAC$  (76)  $= BAD$ , e perciò  $CE, AD$  saranno parallele; dunque  $BD : DC :: AC : AE = AC$  (230), inversamente, se stia  $BD : DC :: AB : AC$ , congiungansi i punti  $D, A$ , e fatta la stessa costruzione, cioè presa  $AE = AC$ , avremo  $BD : DC :: AB : AE$ ; quindi  $CE$  (230) sarà parallela a  $DA$ , e però l'angolo  $E = BAD$ , e l'angolo  $ECA = DAC$ ; ma  $E = ECA$ ; dunque  $BAD = DAC$ ; C. D. D.

### 234. PROPOSIZIONE VI. TEOR.

*Nei triangoli equiangoli ABC, ADE i lati che sono intorno agli angoli eguali sono proporzionali, cioè sta  $AB : AD :: AC : AE$ ; ed i lati omologhi sono quei che sono sottoposti agli angoli eguali (FIG. 107.)*

Prendasi sopra  $AB$  la parte  $Ad = AD$ , e sopra  $AC$  la parte  $Ae = AE$ , e congiunta  $de$ , i triangoli  $Ade, ADE$  avendo due lati e l'angolo compreso eguali, saranno eguali (45); avranno dunque l'angolo  $Ade = ADE$ ; ma l'angolo  $ADE = ABC$  per ipotesi, quindi l'angolo  $Ade = ABC$ ; dunque  $de, BC$  saranno parallele; e però (230)  $AB : Ad :: AC : Ae$ ; ma  $Ad = AD, Ae = AE$ ; dunque  $AB : AD :: AC : AE$ ; C. D. D.

235. *Corollario.* Quindi si ha che i triangoli equiangoli sono figure simili (210) (\*).

### 236. PROPOSIZIONE VII. TEOR.

*Se quattro linee  $A, B, C, D$  sono proporzionali; cioè se  $A:B::C:D$ , esse lo saranno ancora permutando od alternando  $A:C::B:D$ , ed invertendo  $B:A::D:C$ .*  
(FIG. 103.)

I. Essendo  $A:B::C:D$ , si ha  $A \cdot D = B \cdot C$  (228); ma il rettangolo  $B \cdot C$  non muta scrivendo  $C \cdot B$  in cambio di  $B \cdot C$ ; dunque  $A \cdot D = C \cdot B$ , e però (228)  $A:C::B:D$ .

II. Essendo (228)  $B \cdot C = A \cdot D$ , sarà  $B:A::D:C$ ; C. D. D.

237. *Corollario.* Avendo dimostrato (234) che nei triangoli CAB, EAD si ha  $AB:AD::AC:AE$ , sarà alternando  $AB:AC::AD:AE$ , e invertendo  $AD:AB::AE:AC$ ;  $AC:AB::AE:AD$ . (FIG. 107.)

### 238. PROPOSIZIONE VIII. TEOR.

*Se le quattro linee  $AB, BC, AD, DE$  sono proporzionali si avrà componendo  $AB+BC:BC::AD+DE:DE$ ; Dividendo  $AB-BC:BC::AD-DE:DE$ ;  
Convertendo  $\left\{ \begin{array}{l} AB:AB+BC::AD:AD+DE, \text{ ovvero} \\ AB:AB-BC::AD:AD-DE; \end{array} \right.$   
ed in fine  $AB+BC:AB-BC::AD+ED:AD-DE$ .*  
(FIG. 108.)

In fatti dal punto A conducansi due rette indefinite AP, AQ, che facciano un angolo qualunque PAQ, sopra il quale si prendano  $AB = A'B', BC = B'C', AD = A'D', DE = D'E'$ , e congiungansi le rette  $ce, BD, CE$ .

(\*) Avevamo definite per figure simili quelle che sono equiangole e che intorno agli angoli eguali hanno i lati proporzionali (210); e qui vediamo, come pure vedremo al n. 241, che una delle condizioni include l'altra. Ritengasi però che questa è proprietà esclusiva dei triangoli; gli altri poligoni possono essere equiangoli e non avere i lati proporzionali e possono avere i lati proporzionali e non essere equiangoli: onde perchè siano simili si esigono in essi ambedue le condizioni.

Essendo per ipotesi  $AB : BC :: AD : DE$ ,  $EC$  è parallela a  $BD$  (230); egualmente essendo  $BC = Bc$ , e  $De = DE$ , sarà anche  $ec$  parallela a  $DB$  (232); dunque

$AC$  ovvero  $AB + BC : BC :: AE$  ovvero  $AD + DE : DE$ ;

$Ac$  ovvero  $AB - BC : Bc$  ovvero  $BC ::$

$Ae$  ovvero  $AD - DE : De$  ovvero  $DE$ ;

$AB : AC$  ovvero  $AB + BC :: AD : AE$  ovvero  $AD + DE$ ;

$AB : Ac$  ovvero  $AB - BC :: AD : Ae$  ovvero  $AD - DE$ ;

$AC$  ovvero  $AB + BC : Ac$  ovvero  $AB - BC ::$

$AE$  ovvero  $AD + DE : Ae$  ovvero  $AD - DE$ ; C. D. D.

239 *Corollario.* Se si ha una serie di quantità proporzionali  $A : B :: C : D :: E : F :: H : I ::$  ecc., è facile dedurre dalle regole spiegate in questa proposizione, che la somma di tutti gli antecedenti starà alla somma di tutti i conseguenti, come un antecedente ad un conseguente, cioè  $A + C + E + H : B + D + F + I :: A : B$ .

#### 240. PROPOSIZIONE IX. TEOR.

*Se quattro grandezze di qualunque specie sono proporzionali tra loro, saranno vere per esse tutte quelle proprietà che nella precedente abbiamo dimostrato per le ragioni delle linee.*

Imperocchè se si prendono delle linee rette, le quali abbiano tra loro lo stesso rapporto o ragione che hanno le grandezze da paragonarsi, potranno applicarvisi le stesse conclusioni, poichè le loro ragioni sono anche le medesime (\*).

(\*) In effetto i rettilinei potendosi ridurre in rettangoli della stessa altezza (99), le rette che sono basi di questi esprimeranno la ragione in che stanno i rettilinei medesimi (224). Così in appresso potrà dimostrarsi che la ragione di due circonferenze o di due archi simili si può rappresentare coi diametri dei rispettivi cerchi; che la ragione di due cerchi o di due settori simili uguagliando quella dei quadrati dei diametri rispettivi potrà rappresentarsi con le due rette che rappresentano la ragione dei quadrati stessi, ed in generale giacchè la ragione di due numeri razionali si può rappresentare mediante due rette, e la ragione che passa fra due grandezze si può rappresentare precisamente, o con un'approssimazione arbitraria mediante due numeri razionali, quindi il rapporto delle stesse grandezze si può rappresentare con quelle rette medesime.



*Corollario I.* Avendosi pertanto due proporzioni nelle quali il secondo termine della prima sia uguale al primo della seconda, e il quarto della prima uguale al terzo della seconda, si conchiuderà (per quel modo d'argomentare che dicesi d'egualità ordinata) che il primo termine della prima sta al secondo termine della seconda, come il terzo della prima al quarto della seconda; cioè a dire, avendosi

$$\begin{array}{l} A : B :: C : D \\ B : E :: D : F \end{array}$$

si dirà che  $A : E :: C : F$

In effetto per le precedenti proposizioni 236, 240, si avrà alternando dalla prima proporzione

$$\begin{array}{l} A : C :: B : D \\ B : D :: E : F \end{array}$$

e dalla seconda

e perciò le ragioni  $A : C$ ,  $E : F$  essendo eguali amendue alla ragione  $B : D$  saranno eguali fra loro, cioè  $A : C :: E : F$ , e però alternando  $A : E :: C : F$ .

*Corollario II.* Mediante queste proposizioni si dimostra eziandio che le ragioni composte di ragioni eguali sono eguali fra loro. E per conseguenza avendosi le grandezze  $A, B, C$  ecc. tali che

$$\begin{array}{l} A : B :: C : D \\ E : F :: G : H \\ M : N :: A : B \\ N : P :: E : F \\ Q : R :: C : D \\ R : T :: G : H \end{array}$$

ed oltre ciò

e così che

si avrà  $M : P :: Q : T$

cioè a dire la ragione  $M : P$  (composta delle ragioni  $A : B$ ,  $E : F$  §. 209.) uguaglia la  $Q : T$ , composta delle ragioni  $C : D$ ,  $G : H$  uguali a quelle. In effetto dalla terza, prima, e quinta delle suddette proporzioni si avrà  $M : N :: A : B :: C : D :: Q : R$  (218) e dalla quarta, seconda, e sesta delle proporzioni medesime si avrà:

$$N : P :: E : F :: G : H :: R : T$$

cioè a dire

$$\begin{array}{l} M : N :: Q : R \\ N : P :: R : T \end{array}$$

dunque per egualità ordinata  $M : P :: Q : T$

*Corollario III.* Nello stesso modo si dimostra che le ragioni doppie o triple ecc. di ragioni eguali, sono eguali fra loro.

## 241. PROPOSIZIONE X. TEOR.

*Se i triangoli  $ABC$ ,  $DEF$  hanno i lati proporzionali  $AB:BC::DE:EF$ , e  $BC:AC::EF:FD$ , avranno ciascun angolo uguale al suo corrispondente, opposto ai lati omologhi. (FIG. 109.)*

Facciasi l'angolo  $FEG = CBA$ , e l'angolo  $EFG = BCA$ ; e convenendo le rette  $EG$ ,  $FG$  in  $G$ , riuscirà l'angolo  $G = BAC$  (81); dunque essendo equiangolo  $EGF$  a  $BAC$ , sarà  $GE:EF::AB:BC$  (234):: $DE:EF$ , quindi  $GE = DE$  (214): similmente sarà  $GF:EF::AC:CB::DF:EF$ , e però ancora  $GF = DF$ ; essendo di più il lato  $EF$  comune ai triangoli  $EGF$ ,  $EDF$ , questi hanno tutti i lati uguali, però sono ancora equiangoli (50); dunque essendo  $EGF$  equiangolo ad  $ABC$ , ancora  $EDF$  è allo stesso  $ABC$  equiangolo; C. D. D.

## 242. PROPOSIZIONE XI. TEOR.

*Se due triangoli  $ABC$ ,  $DEF$  intorno ad angoli  $A = D$  abbiano proporzionali i lati  $AB:AC::ED:EF$ , saranno ancora gli altri angoli uguali, cioè  $B = E$ , ed ancora  $C = F$ , i quali sono sottoposti a' lati omologhi. (FIG. 110, 111.)*

Si ponga nel lato  $AB$  la parte  $AG = DE$ , e la parte  $AH$  del lato  $AC$  facciasi  $= DF$ , congiunta la  $GH$ , sarà  $= EF$ , essendo intorno agli angoli uguali  $A$ ,  $D$  i lati uguali: ma la  $GH$  è parallela a  $BC$  (230), e però gli angoli  $AGH = ABC$ , ed  $AHG = ACB$ ; dunque il triangolo  $ABC$  essendo equiangolo ad  $AGH$ , e questo ad  $EDF$ , sono i triangoli  $ABC$  ed  $EDF$  pure equiangoli; C. D. D.

## 243. PROPOSIZIONE XII. TEOR.

*Nel triangolo rettangolo  $BAC$ , se dall'angolo retto  $A$  si conduce la perpendicolare  $AD$  sopra l'opposta base  $BC$ , saranno i triangoli  $ADB$ ,  $CDA$  simili tra di loro ed a tutto il triangolo  $CAB$ . (FIG. 112.)*

Imperocchè essendo l'angolo retto  $ADB = CAB$ , e l'angolo  $B$  comune a questi triangoli, ancora il rimanente  $DAB$  sarà eguale al residuo  $ACB$ ; dunque sono equiangoli i triangoli  $ADB$ ,  $CAB$  e  $CDA$ ; e però sono simili; C. D. D.

244. Corollario I. Quindi è manifesto che intorno agli

angoli retti de' triangoli simili CDA, ADB saranno proporzionali i lati  $CD : DA :: AD : DB$ .

245. *Corollario II.* E per la similitudine di ciascuno di essi triangoli con l'intero CAB sarà pure  $BC : BA :: BA : BD$ , ed ancora  $BC : CA :: CA : CD$ .

#### 246. PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

*Da una data retta linea AB tagliare una parte aliquota (per esempio una terza parte) AG. (FIG. 113.)*

Si tiri dal punto A una retta indefinita AC, in cui presa qualunque parte DA, si replichi in essa secondo il numero della denominazione che debbe avere la parte di AB (in questo caso tre volte, cioè AD, DE, EF); e congiunto il termine F col punto B, si tiri la retta DG parallela a FB: sarà AG la terza parte di AB, come AD di AF, essendo  $AG : AB :: AD : AF$  (231); C. D. F.

#### 247. PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

*Segare la data retta AB in F, G nell' istessa proporzione in cui sia divisa un'altra AC ne' punti D, E. (FIG. 114.)*

Si congiunga la BC, e ad essa parallele sieno tirate le DF, EG; è manifesto che sarà  $AF : FG :: AD : DE$ , ed  $AG : GB :: AE : EC$ , ed  $FG : GB :: DE : EC$ , ed  $AF : FB :: AD : DC$  (231). Dunque è divisa AB in F, G nell' istessa proporzione in cui AC era segata in D, E; C. D. F.

#### 248. PROPOSIZIONE XV. PROBL.

*Alle date due rette AB, BC trovare la terza proporzionale BD. (FIG. 115.)*

Si ponga BC perpendicolare ad AB, e congiunta AC, si compisca l'angolo retto ACD. Concorrendo la CD con l' AB prolungata in D, sarà BD la terza proporzionale dopo le due AB, BC (244); C. D. F.

#### 249. PROPOSIZIONE XVI. PROBL.

*Date tre linee DE, EF, DG, trovare la quarta proporzionale GH. (FIG. 116.)*

Inclinate in D le rette DE, DG, si ponga EF in diritto alla DE, e congiunta EG, si tiri a questa dal punto



F la parallela FH segante DG prolungata in H. Sarà GH la quarta proporzionale ricercata, essendo pure  $DE : EF :: DG : GH$  (231); C. D. F.

### 250. PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

*Date due rette AE, EB, trovare la media proporzionale EF. (FIG. 117.)*

Poste per diritto AE ed EB, e divisa per mezzo tutta l' AB in C, descrivasi col raggio CA un semicircolo, e si alzi la perpendicolare EF segante la circonferenza in F, sarà questa EF media proporzionale tra le date AE, EB, perchè congiunte le rette AF, BF l'angolo AFB è retto (161), dunque essendo FE perpendicolare alla base del triangolo rettangolo, sta  $AE : EF :: EF : EB$  (244); C. D. F.

### 251. PROPOSIZIONE XVIII. TEOR.

*I triangoli equivalenti ABC, DBE, in cui l'angolo B in ambidue sia uguale, avranno i lati intorno al detto angolo reciprocamente proporzionali, cioè  $AB : BE :: BD : BC$ ; e inversamente, se intorno ad un angolo uguale i lati di due triangoli sono reciprochi, saranno essi triangoli equivalenti. (FIG. 118.)*

Imperciocchè posta in diritto BD a BC, riesce pure BE per diritto a BA, come si è provato ne' parallelogrammi (227); e congiunta CE, essendo  $ABC = DBE$ , sarà  $ABC : CBE :: DBE : CBE$  (215); dunque  $AB : BE :: BD : BC$ , essendo queste proporzionali a' detti triangoli (224); e inversamente, se  $AB : BE :: BD : BC$ , sarà pure  $ABC : CBE :: DBE : CBE$ , e però (214);  $ABC = DBE$ ; C. D. D.

252. *Corollario.* Quando ancora l'angolo DBE non fosse uguale all'altro ABC, ma però con esso compisse due retti, se i lati sono reciprocamente proporzionali, riescono pure equivalenti i triangoli; imperocchè essendo  $AB : BE :: BD : BC$ , posta dall'altra banda la  $BF = BD$ , e congiunta FE, sarà pure  $AB : BE :: BF : BC$ ; e permutando (236)  $AB : BF :: BE : BC$ ; dunque congiunte le rette AE, FC sono parallele (231), ed i triangoli ACF, EFC sono equivalenti; onde, aggiunto FCB, riesce  $ABC = EBF$ ; ma essendo  $BF = BD$ , sarà  $EBF = EBD$ ; dunque  $ABC = EBD$ ; e l'istesso riuscirà ne' parallelogrammi che intorno ad angoli i quali insieme facciano due retti, abbiano i lati reciprochi; perchè essendo

73

il doppio di detti triangoli, essi pure saranno equivalenti,  
(FIG. 119.)

### 253. PROPOSIZIONE XVIV. PROBL.

*Sopra una data retta linea AB descrivere un rettilineo ABHG simile e similmente posto ad un altro dato CDFE.*  
(FIG. 120.)

Si risolva il dato rettilineo CDFE in triangoli CDF, CFE, e sopra la retta AB si faccia l'angolo  $ABH = CDF$ , e l'angolo  $BAH = DCF$ , indi l'angolo  $AHG$  facciasi  $= CFE$ , l'angolo  $HAG = FCE$ , sarà il rettilineo ABHG simile al dato CDFE.

I triangoli ABH, CDF saranno equiangoli; dunque intorno all'angolo  $B = D$  saranno proporzionali i lati  $AB : BH :: CD : DF$ , ed essendo l'angolo  $BHA = DFC$ , ed  $AHG = CFE$ , sarà pure l'angolo  $BHG = DFE$ . Di più essendo  $BH : HA :: DF : FC$ , ed  $HA : HG :: FC : FE$ , si avrà per egualità ordinata  $BH : HG :: DF : FE$  (240 Corol. I.)

### 254. PROPOSIZIONE XX. TEOR.

*I parallelogrammi equiangoli ABCD, ECGF hanno fra loro la ragione composta dei lati, cioè di BC a CG, e di DC a CE* (FIG. 121.)

Pongasi per diritto DC alla CE, riescirà pure BC per diritto alla CG (essendo l'angolo BCD uguale all'angolo ECG) quindi si compia il parallelogrammo DCGH. Il parallelogrammo ABCD all'ugualmente alto DCGH è come la base BC alla base CG, e lo stesso DCGH ad ECGF è come DC a CE (224).

Avendosi pertanto

$$\begin{aligned} ABCD : DCGH &:: BC : CG \\ DCGH : ECGF &:: DC : CE \end{aligned}$$

dunque pel (§. 209) si avrà che il parallelogrammo ABCD sta al ECGF in ragione composta di BC a CG, e di DC a CE; C. D. D.

### 255. PROPOSIZIONE XXI. TEOR.

*Due triangoli simili stanno fra loro in ragion duplicata dei lati omologhi, o sia come i quadrati di questi medesimi lati.* (FIG. 122.)

Sieno due triangoli simili  $ABC$ ,  $DEF$ , e a due dei loro lati omologhi  $BC$ ,  $EF$  sia  $BG$  terza proporzionale (248), e si congiunga  $GA$ . Perchè  $BC$  a  $BA$  stava come  $EF$  a  $ED$ , sarà permutando  $BC : EF :: BA : ED$ ; ma  $BC : EF :: EF : BG$ , dunque  $BA : ED :: EF : BG$ ; onde il triangolo  $DEF = ABG$  (251); e perciò il triangolo  $ABC$  al triangolo  $DEF$  starà come  $ABC$  ad  $ABG$ , cioè come  $BC$  a  $BG$ ; ma  $BC$  a  $BG$  ha ragion duplicata di quella che ha  $BC$  ad  $EF$  (207); dunque  $ABC$  a  $DEF$  ha ragion duplicata di  $BC$  ad  $EF$ ; C. D. D.

256. Ora la ragione di  $ABC$ ,  $DEF$  è quella stessa di  $(BC)^2 : (EF)^2$ : (\*) cioè dei quadrati dei lati omologhi. In effetto oltre la suddetta costruzione, si costruiscano sopra quegli stessi lati  $BC$ ,  $EF$  i loro quadrati (fig. I. Tav. VI) e si tirino le diagonali  $EI$ ,  $BM$ . I triangoli  $BCM$ ,  $EFI$  per essere isosceli e rettangoli, saranno equiangoli (78) e però simili fra loro (235). Quindi si avrà pure  $BCM : EFI :: BC : BG$ . Ma i quadrati  $BCML$ ,  $EFIH$  sono doppij rispettivamente dei triangoli medesimi, dunque si avrà ancora  $BCML : EFIH :: BC : BG$  (221). Essendo pertanto  $ABC : DEF :: BC : BG :: BCML : EFIH$  si avrà finalmente  $ABC : DEF :: BCML : EFIH$  (218) ossia  $ABC : DEF :: (BC)^2 : (EF)^2$ ; cioè a dire i triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi C. D. D.

257. *Corollario.* Se saranno dunque tre linee continuamente proporzionali (205), come  $BC$ ,  $EF$ ,  $BG$ , qualunque triangolo o quadrato fatto sopra la prima  $BC$  ad un simile fatto sopra la seconda  $EF$  sarà come la prima  $BC$  alla terza  $BG$ .

## 258. PROPOSIZIONE XII. TEOR.

*I poligoni simili  $ABCDE$ ,  $FGHIK$  si dividono in triangoli  $ABC$ ,  $FGH$  ed  $ACD$ ,  $FHI$  ed  $ADE$ ,  $FIK$  uguali di*

(\*) Questo modo di scrivere  $(BC)^2$  in cambio di  $BC \cdot BC$ , ed  $A^2$  in cambio di  $A \cdot A$  è preso dall'Algebra. Per capire poi bene come la ragione  $(BC)^2 : (EF)^2$  sia quella stessa delle superficie dei quadrati eretti sui lati  $BC$ ,  $EF$ , consiglio di anticipare qui a leggere la Prop. I. del lib. IX. num. 420, 421, la quale dipendendo interamente dalla proposizione or ora dimostrata nel testo, si capirà senza difficoltà da chi ho prese le idee che ho di sopra raccomandate.



*numero proporzionali a' medesimi poligoni (\*) ed agli altri simili triangoli; e qualunque poligono all' altro simile sta in ragion duplicata dei lati omologhi, o come i quadrati di questi lati. (FIG. 123.)*

Dai vertici A, F di due angoli corrispondenti si spicchino le rette a tutti gli altri angoli, e che così i due poligoni restino divisi in egual numero di triangoli, si vedrà manifestamente.

Vuolsi ora dimostrare che tutti i triangoli corrispondenti ABC, FGH; ACD, FHI, ecc. sono simili. Nei due primi è per ipotesi l'angolo  $B = G$ , ed i lati proporzionali  $AB : BC :: FG : GH$ ; dunque (242) i due triangoli ABC, FGH sono simili. Passando ai secondi ACD, FHI, in essi gli angoli ACD, FHI sono eguali, perchè  $ACD = BCD - BCA$  ed  $FHI = GHI - GHF$ , mentre è  $BCD = GHI$ , e  $BCA = GHF$ ; la proporzionalità poi dei lati intorno a questi angoli eguali, cioè  $AC : CD :: HF : HI$ , si concluderà per egualità ordinata dalle due proporzioni  $AC : CB :: HF : GH$ ;  $CB : CD :: GH : HI$ , di cui la prima è data dai triangoli simili; dunque anche i triangoli ACD, FHI sono simili (242). Allo stesso modo si dimostreranno simili i triangoli ADE, FIK, e tutti i seguenti se ve ne fossero.

Provata la similitudine di tutti questi triangoli, avremo (256)  $ABC : FGH :: (BC)^2 : (GH)^2$ ;  $ACD : FHI :: (CD)^2 : (HI)^2$ ;  $ADE : FIK :: (DE)^2 : (IK)^2$ , ecc. Ora essendo per ipotesi  $BC : GH :: CD : HI :: DE : IK$ ..... sarà anche (\*)  $(BC)^2 : (GH)^2 :: (CD)^2 : (HI)^2 :: (DE)^2 : (IK)^2$  .... e perciò  $ABC : FGH :: ACD : FHI :: ADE : FIK$ ... da cui (239)  $ABC : FGH :: ABC + ACD + ADE + \dots : FGH + FHI + FIK + \dots$ , o sia  $ABC : FGH :: Pol. ABCDE : Pol. FGHIK$ , onde come un triangolo nel primo poligono al suo simile nel secondo, così tutto il primo poligono a tutto il secon-

(\*) Cioè un triangolo del primo poligono sta al triangolo suo corrispondente del secondo poligono, come il poligono primo al secondo.

(\*\*) Se è vera una proporzione  $A : B :: C : D$ , è anche vera l'altra  $A^2 : B^2 :: C^2 : D^2$ , perchè questa risulta dal moltiplicare termine per termine le due proporzioni identicamente eguali  $A : B :: C : D$ ;  $A : B :: C : D$ , operazione che non altera la proporzionalità (220).

do. Per essere poi  $ABC : FGH :: (AB)^2 : (FG)^2$  (256), avremo *Pol.*  $ABCDE : Pol. FGHK :: (AB)^2 : (FG)^2$ , cioè i poligoni simili come i quadrati dei lati omologhi; C. D. D.

259. *Corollario.* Dunque presa una terza proporzionale a due lati omologhi del primo e del secondo rettilineo simile, starà il primo rettilineo al secondo, come il lato del primo a quella terza proporzionale presa dopo il primo ed il secondo lato (256).

### 260. PROPOSIZIONE XXIII. TEOR.

*I rettilinei ABC, DEI simili ad un terzo HFG sono pure simili tra di loro. (FIG. 124.)*

Gli angoli A, B, C sono uguali agli angoli H, F, G, e questi agli angoli D, E, I; dunque ancora gli angoli A, B, C sono uguali a' corrispondenti D, E, I; ed essendo  $AB : BC :: HF : FG$ , ed  $HF : FG :: DE : EI$ , è  $AB : BC :: DE : EI$  (218); e così ancora le ragioni di altri due lati dei rettilinei ABC, DEI saranno uguali; dunque essi rettilinei simili al terzo HFG sono pure simili tra di loro (210); C. D. D.

### 261. PROPOSIZIONE XXIV. TEOR.

*Se quattro linee sono proporzionali  $AB : CD :: EF : GH$ , i rettilinei simili e similmente descritti sopra le prime due AIB, CKD sono parimente proporzionali ad altri due rettilinei simili ELMF, GNOH descritti sopra l'altre due; e inversamente, se quattro rettilinei sopra quattro linee similmente descritti a due a due simili saranno proporzionali, anche le linee saranno proporzionali. (FIG. 125.)*

Imperocchè essendo la ragione di AB a CD uguale alla ragione di EF a GH, la duplicata della prima, ch'è quella del rettilineo AIB al suo simile CKD, sarà pure uguale alla duplicata della seconda, ch'è quella de' simili rettilinei ELMF, GNOH (258); dunque  $AIB : CKD :: ELMF : GNOH$ ; e inversamente essendo proporzionali questi rettilinei a due a due simili, sarà la ragione duplicata di AB a CD uguale alla duplicata di EF a GH che si suppongono i loro lati omologhi; dunque ancora la semplice ragione di AB a CD è uguale alla semplice ragione di EF a GH; e però  $AB : CD :: EF : GH$ ; C. D. D.

## 262. PROPOSIZIONE XXV. TEOR.

*In ogni parallelogrammo ABCD per qualunque punto F della diagonale AC tirate le parallele a' lati, ne risultano intorno alla medesima parallelogrammi AEFG, CHFK tra di loro simili e simili al tutto. (FIG. 126.)*

Riescono equiangoli, e però simili tutti i triangoli AEF, ABC, FHC, e gli opposti a questi; dunque  $AE : EF :: AB : BC :: FH : HC$ ; e sono  $AG = EF$ ,  $AD = BC$ ;  $FK = HC$ ; dunque ancora  $AE : AG :: AB : AD :: FH : FK$ ; dunque tali parallelogrammi sono equiangoli, ed intorno agli angoli uguali hanno i lati proporzionali; e però sono simili al tutto e fra sè stessi; C. D. D.

## 263. PROPOSIZIONE XXVI. PROBL.

*Costruire un rettilineo LMNOP simile ad un dato ABCDE ed equivalente ad un altro dato F. (FIG. 127.)*

Facciasi il rettangolo ABIH equivalente al rettilineo ABCDE (99), ed alla retta BI si adatti pure il rettangolo IBGK = F, e tra le due AB, BG si trovi la media proporzionale LM (250), sopra di cui si descriva il rettilineo LMNOP simile al dato ABCDE (253); sarà questo stesso equivalente a F.

Sta  $ABIH : BIKG :: ABCDE : F :: AB : BG$ ; ma ancora  $ABCDE : LMNOP :: AB : BG$  (essendo questa ragione duplicata della ragione di AB alla media LM, quale pure è la ragione del rettilineo ABCDE al simile LMNOP (268)); dunque  $LMNOP = F$ ; C. D. F.

## 264. PROPOSIZIONE XXVII. TEOR.

*Se nel medesimo angolo A del parallelogrammo ABCD si descriva un simile parallelogrammo AEHI similmente posto, sarà d' intorno alla diagonale AH, ch' è parte del tutto AC. (FIG. 128.)*

Altrimenti, se fosse come il parallelogrammo AEFG, il cui angolo F è fuori del diametro AC, sarebbe  $AE : EF :: AB : BC$  per la similitudine de' parallelogrammi; ma  $AB : BC :: AE : EH$  per la similitudine dei triangoli ABC, AEH; dunque sarebbe  $AE : FE :: AE : EH$ , onde  $EF = EH$ ; il tutto alla parte: il che è impossibile; C. D. D.



## 265. PROPOSIZIONE XXVIII. PROBL.

*Dividere la data retta AB in C nell'estrema e media ragione. (FIG. 129.)*

Dividasi in maniera che il rettangolo ABC sia equivalente al quadrato della rimanente AC (116); sarà dunque tutta l'AB alla parte AC, come la medesima AC alla residua CB (229); dunque tutta l'AB resterà divisa in C, secondo l'estrema e media ragione (212); C. D. F.

## 266. PROPOSIZIONE XXIX. TEOR.

*Nel triangolo rettangolo BAC la somma delle figure simili F, G fatte sopra i lati BA, CA contenenti l'angolo retto A equivale alla figura E simile a ciascuna di esse, descritta sopra il lato BC sottoteso all'angolo retto. (FIG. 130.)*

Pel teorema del 258 abbiamo  $G : F :: (CA)^2 : (AB)^2$ , da cui componendo (238)  $G : G + F :: (CA)^2 : (CA)^2 + (AB)^2$ , ed alternando (236)  $G : (CA)^2 :: G + F : (CA)^2 + (AB)^2$ ; ma lo stesso teorema (258) dà  $G : E :: (CA)^2 : (CB)^2$ , e quindi  $G : (CA)^2 :: E : (CB)^2$ ; dunque  $E : (CB)^2 :: G + F : (CA)^2 + (AB)^2$ ; ma  $(CB)^2 = (CA)^2 + (AB)^2$  (101); dunque  $E = G + F$ ; C. D. D.

267. *Scolio.* Alcuni che si contentano di un linguaggio poco rigoroso e non ammesso nella buona geometria considerano i semicerchj (FIG. 131) come poligoni simili d'infiniti lati, e quindi credono di potere estendere ai medesimi la precedente proposizione. Ecco ciò che ne conseguita. Se nel semicircolo BEC si descriverà il triangolo BAC, che sarà rettangolo in A (161), e sopra gli altri lati AB, AC si descriveranno i mezzi cerchi BGA, CFA, saranno questi due presi insieme uguali in superficie all'altro BEC, onde tolti di comune i segmenti BEA, AHC, rimangono le lunette BGAEB + CFAHC equivalenti al triangolo BAC. E se il punto A è preso nel mezzo dell'arco BAC, esse lunette dall'una e dall'altra parte essendo tra di loro uguali, ciascuna di esse sarà uguale in superficie alla metà del triangolo BAC, come fu proposto da Ippocrate Chio. Il teorema è vero, quantunque inesatto sia il principio assunto per dimostrarlo. La vera dimostrazione non può aversi se non quando sia provato (come lo sarà nel lib. VII) che i cerchj e quindi anche i semicerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri; allora si ripete parola a parola pei tre semi-

cerchj costrutti sui tre lati del triangolo rettangolo <sup>79</sup> BAC  
quanto qui sopra si è detto dei poligoni E , G , F.

### 268. PROPOSIZIONE XXX. TEOR.

*Nei cerchj uguali ABC , EFG gli angoli fatti al centro BDC , FHG , ed ancora quelli fatti alla circonferenza BAC , FEG sono proporzionali agli archi BC , FG , cui insistono , ed ancora i settori BDC , FHC sono come i detti archi , e come gli angoli da loro compresi al centro.*  
( FIG. 132. )

Per ciò che appartiene agli angoli al centro ed ai settori, la proposizione si dimostra nella guisa stessa che la proposizione I.<sup>a</sup> di questo libro , nella quale è detto che i triangoli egualmente alti sono come le basi (\*); sarà dunque  $BC : FG :: BDC : FHG$ ; C. D. D.

Inoltre perchè gli angoli alla circonferenza BAC , FEG sono la metà di quelli al centro BDC , FHG , perciò ancora essi essendo proporzionali a questi angoli fatti al centro, saranno pure come gli archi BC , FG , sopra di cui insistono.

## LIBRO VI.

DEI SOLIDI E DELLE PROPRIETA' DEI PARALLELEPIPEDI.

### *Definizioni.*

269. I. Chiamasi *corpo solido* quello che ha l'estensione in lunghezza, in larghezza ed in grossezza: per esempio M. (FIG. 133.) Ogni solido terminato da facce piane chiamasi anche *poliedro*.

270. II. I *termini* di qualunque solido , da' quali è compreso , sono le superficie.

---

(\*) Per applicare il ragionamento del 224 bisogna intendere ridotti a numeri gli archi BC , FG che fanno qui la figura di basi curvilinee nei triangoli mistilinei BDC , FHG. A questo fine si potrà su questi archi di raggio eguale intendere ripetuta una piccola parte di circonferenza dello stesso raggio presa per unità di misura; se questo archetto replicato quante volte fa bisogno esaurirà ambi gli archi esattamente, essi avranno fra loro un rapporto commensurabile: ma se non sarà possibile di assegnare un archetto che valga a ciò, il loro rapporto sarà incommensurabile.

271. III. Una *linea retta*  $AB$  dicesi *perpendicolare al piano*  $FCE$  quando con tutte le linee  $BF$ ,  $BD$ ,  $BC$ ,  $BE$  tirate dal suo piede  $B$  in detto piano faccia gli angoli retti  $ABF$ ,  $ABD$ ,  $ABC$ ,  $ABE$ . (FIG. 134.)

272. IV. Il *piano*  $HIE$  dirassi *perpendicolare al piano*  $FCE$ , se qualunque retta  $AB$  condotta in uno di essi piani perpendicolare alla comune sezione  $GE$  di ambedue i piani riesca pure all'altro piano  $FCE$  perpendicolare.

273. V. L'*inclinazione della retta*  $AD$  *al piano*  $FCE$  è l'angolo  $ADB$  che risulta, se da un punto sublime  $A$  di essa linea, tirata la perpendicolare  $AB$  sopra esso piano, si tirerà nel medesimo piano la retta  $BD$ , che congiunge i termini d'ambedue queste linee. (FIG. 135.)

274. VI. L'*inclinazione del piano*  $GFCH$  *al piano*  $FCE$  è l'angolo acuto  $ADB$  compreso da due rette linee  $DA$ ,  $DB$  tirate dal medesimo punto  $D$  della comune sezione  $FC$  di ambi i piani in ciascuno di essi perpendicolare all'istessa sezione di maniera che riescano retti gli angoli  $ADC$  e  $BDC$ . (FIG. 136.)

275. VII. Due piani si dirauno *ugualmente o similmente inclinati*, come due altri piani, quando l'angolo dell'inclinazione de' due primi sarà uguale all'angolo dell'inclinazione degli altri.

276. VIII. Piani tra di loro *paralleli* sono quelli che in infinito continuati mai converrebbero insieme.

277. IX. Le *figure solide simili* sono quelle che da piani simili uguali di numero e con uguale ordine disposti sono contenute.

278. X *Uguali e simili* saranno quelle figure solide che da simili ed uguali piani nell'istesso numero e col medesimo ordine saranno comprese (\*).

(\*) Queste due ultime definizioni, tolte le parole *con egual ordine disposti* (le quali non fanno che nascondere le difficoltà senza scioglierle), sono quelle stesse di Euclide che furono fortemente attaccate da Roberto Simson. Della seconda dice questo autore: „ Quand'anche fosse vero che le figure solide contenute da „ piani simili ed eguali di numero e di grandezza siano eguali; a „ ragione nondimeno dovrebbe incolparsi chi formò una definizione „ di una proposizione la quale ha bisogno d'essere dimostrata. Che „ dovrà poi dirsi se questa proposizione non è vera? Non si dovrà „ confessare che per mille e trecento anni furono i geometri su „ questo punto ingannati? ecc. „ In seguito fa vedere che possono



279. XI. *Angolo solido* è l'inclinazione di più di due linee non poste nel medesimo piano e concorrenti in un medesimo punto; o pure è il concorso di più di due angoli piani non posti nel piano medesimo e terminati in un solo punto.

Diconsi poi angoli solidi uguali quelli che posti uno dentro dell'altro perfettamente si combaciano.

280. XII. La *piramide* è una figura solida compresa da più piani convenienti in un punto, e dal piano opposto a tale punto.

281. XIII. Il *prisma* è un solido compreso da più piani parallelogrammi terminati da una parte e dall'altra da due piani poligoni eguali e paralleli.

282. XIV. La *sfera* è una figura solida nata dalla rivoluzione d'un semicircolo intorno al suo diametro tenuto fisso finchè ritorni al medesimo sito donde cominciò a muoversi.

283. XV. Esso diametro fisso dicesi l'*asse* della sfera.

284. XVI. Il *centro* della sfera è quel medesimo punto che serviva di centro al semicircolo genitore.

285. XVII. Il *diametro* di essa sfera è qualunque linea retta che passa pel centro, e termina dall'una e dall'altra parte alla superficie sferica.

286. XVIII. Il *cono* si descrive dalla rivoluzione di un

esservi solidi disuguali terminati da piani eguali, da cui conseguita che possono esservi solidi dissimili terminati da piani simili. Il celebre Legendre per difendere Euclide dice ch'egli ha sottintesa l'esclusione degli angoli solidi rientranti, ammessa la quale, non si riesce più a cogliere in fallo la sua asserzione; ma egli pure conviene essere mal posto un teorema per definizione. Di questo teorema è stata recentemente trovata in Francia dal sig. Cauchy la dimostrazione generale, e può vedersi nella nota XII all'undecima edizione della Geometria dello stesso Legendre. Ivi però questo autore fa osservare che per le seguenti proposizioni degli elementi di Euclide non fa bisogno di tanta generalità, ma unicamente della verità del teorema nel caso in cui gli angoli solidi dei poliedri hanno soltanto tre facce. Quest'ultimo si dimostra assai più facilmente: ne farò in seguito parola in un'altra nota. Intanto conchiudasi che il difetto di cui si è menato tanto rumore si riduce all'aver Euclide mancato di qualche spiegazione circa una verità ch'egli ha creduto forse più chiara di quello che riesca alla comune dei lettori: come è accaduto in qualche caso simile ad altri grandi geometri.

triangolo rettangolo intorno ad uno de' lati contenenti l'angolo retto, il quale rimanga fermo finchè girando la figura triangolare ritorni al medesimo sito donde cominciò a muoversi.

287. XIX. Quel lato fisso, intorno a cui gira il triangolo, si dirà *asse* del cono generato da esso.

288. XX. Il cerchio descritto dal lato che gira si dice *base* di esso cono.

XXI. Stando fermo un lato di qualche rettangolo, rivolto intorno ad esso finchè ritorni al primiero sito, la figura da ciò descritta si dice *cilindro*.

289. XXII. L'*asse* del cilindro è quella linea fissa, intorno a cui girando il rettangolo, lo descrive.

290. XXIII. I cerchj descritti dagli altri due lati opposti di esso rettangolo sono le *basi* di esso cilindro.

Dal modo col quale si generano la sfera, il cono ed il cilindro risulta che se un cilindro, un cono o una sfera sono tagliati con dei piani perpendicolari ai loro assi, le sezioni risultanti saranno cerchj.

291. XXIV. I coni ed i cilindri *simili* sono quelli che hanno gli assi ed i diametri delle basi tra di loro proporzionali, come descritti da triangoli o rettangoli simili e similmente mossi.

292. VXV. Il *cubo* o *esaedro* è una figura solida contenuta da sei quadrati uguali.

293. XXVI. Il *tetraedro*, che è una piramide regolare, è una figura solida contenuta da quattro triangoli uguali ed equilateri.

294. XXVII. L'*ottaedro* è una figura solida compresa da otto triangoli uguali ed equilateri.

295. XXVIII. Il *dodecaedro* è una figura solida contenuta da dodici pentagoni uguali, equilateri ed equiangoli.

296. XXIX. L'*icosaedro* è una figura solida compresa da venti triangoli uguali ed equilateri.

297. XXX. Il *parallelepipedo* è la figura solida contenuta da sei piani, di cui gli opposti sono paralleli.

Chiameremo *equivalenti* quei solidi che hanno eguali le solidità, ma possono avere le superficie e gli angoli solidi disuguali.

#### 298. PROPOSIZIONE PRIMA. TEOR.

*Di una linea retta non può essere una parte BD in un*

*piano ECF, ed un'altra parte di essa DA sollevata dal medesimo piano. (FIG. 137.)*

Altrimenti prolungata la BD in G nell'istesso piano, converrebbero due rette linee GB, ADB in una porzione comune DB: il che è impossibile (40); dunque della linea retta non può esistere una parte nel piano soggetto, ed un'altra parte in un altro piano elevato da esso; C. D. D.

### 299. PROPOSIZIONE II. TEOR.

*Se due linee rette AB, CD si segano in E, stanno in un medesimo piano, e ancora qualunque triangolo DEB consiste nel piano stesso. (FIG. 138.)*

Imperocchè se la parte FEG del triangolo fosse in un piano, ed il resto FDBG in un altro; della retta ED la parte EF sarebbe in un piano, e l'altra parte FD fuori di esso sarebbe sollevata: il che è impossibile (298); dunque il triangolo DEB è in un istesso piano, e così ancora le rette ED, EB sono in esso; nè le porzioni loro CE, AE possono essere sollevate dal medesimo piano; e però le rette AB, CD, che si segano, stanno in un medesimo piano; C. D. D.

### 300. PROPOSIZIONE III. TEOR.

*Se due piani ABG, ECF si segano, la loro comune sezione HD è una linea retta. (FIG. 139.)*

Altrimenti si potrà tirare nel piano ABG la retta HKD, e nell'altro ECF la retta HID, le quali due rette linee comprenderebbero uno spazio; il che è impossibile; dunque la comune sezione è la retta linea HD; C. D. D.

### 301. PROPOSIZIONE IV. TEOR.

*Se la retta AB è perpendicolare a due linee rette CD, EF che si segano in B, sarà ancora perpendicolare al piano che passa per dette linee. (FIG. 140.)*

Si tiri per l'istesso punto B nel piano delle rette date un'altra linea GBH, e posto  $BC = BD$ , e  $BF = BE$ , si congiungano le rette CE, FD seganti la retta GH in G ed H; indi da un punto sublime A della retta AB si tirino le rette AC, AE, AF, AD, AG, AH.

Ne' triangoli CBE, DBF essendo intorno all'angolo



uguale alla cima **B** ancora i lati **CB**, **BE** uguali a' lati **DB**, **BF**, sarà la base  $CE =$  alla base **DF**, e gli altri angoli uguali; e però ne' triangoli **CBG**, **DBH** essendo l'angolo  $BCG = BDH$ , e l'angolo  $CBG = DBH$ , ed il lato  $CB = BD$ , sarà ancora il lato  $CG = DH$ , e l'altro  $BG = BH$  (69.) Similmente ne' triangoli **CAB**, **DAB** essendo  $CB = BD$ , ed il lato **AB** comune, e gli angoli retti in **B** uguali, sarà la base  $AC = AD$ ; e con simile ragione si proverà ne' triangoli **ABE**, **ABF** essere  $AE = AF$ . Dunque ne' triangoli **ACE**, **ADF** essendo ciascun lato dell'uno uguale a ciascun lato dell'altro, saranno ancora gli angoli corrispondenti **ACE**, **ADF** eguali (50): onde ne' triangoli **ACG**, **ADH** vi sono i lati **AC**, **AD** ed i lati **CG**, **DH** uguali intorno a' detti angoli uguali **ACG**, **ADH**; e però la base  $AG = AH$ . Finalmente ne' triangoli **AGB**, **AHB** essendo tutti i lati dell'uno uguali a tutti i lati dell'altro, cioè  $BG = BH$ , ed **AB** comune, ed  $AG = AH$ ; l'angolo  $ABG = ABH$ , i quali però sono retti; onde la linea **AB** con tutte le linee condotte pel punto **B** nel piano che passa per le rette **CD**, **EF**, facendo angoli retti, è perpendicolare a detto piano (275); C. D. D.

### 302. PROPOSIZIONE V. TEOR.

*Se la retta **AB** è perpendicolare a tre linee rette **BC**, **BD**, **BE**, queste tre linee saranno in un medesimo piano. (FIG. 141.)*

Altrimenti il piano che passa per le due **BC**, **BD** segherebbe il piano condotto per le due **AB**, **BE** in un'altra retta linea **BF**, comune sezione di entrambi; onde la retta **AB**, ch'è perpendicolare alle due **BC**, **BE**, farebbe angolo retto ancora colla **BF** esistente nell'istesso piano **CBD** (301); dunque nel piano **ABF** sarebbe l'angolo retto **EBA** uguale al retto **FBA**, la parte al tutto: il che è impossibile; dunque la **BE** era nell'istesso piano delle altre due **BC**, **BD**, e non sollevata da esso; C. D. D.

### 303. PROPOSIZIONE VI. TEOR.

*Se le due rette linee **AB**, **CD** sono perpendicolari al piano **BED**, saranno fra di loro parallele. (FIG. 142.)*

Congiungasi la **BD**, e ad angolo retto **BDE** si tiri nell'istesso piano la  $DE = AB$ , e si congiungano le rette **BE**, **EA**, **AD**.

Essendo intorno agli angoli retti  $ABD$ ,  $BDE$  il lato  $AB = ED$ , ed il lato  $BD$  comune, sarà la base  $AD = BE$ : dunque nei triangoli  $ADE$ ,  $ABE$  essendo  $AD = EB$ ,  $DE = BA$ , e la base  $AE$  comune, l'angolo  $ADE = ABE$ , cioè retto; onde la  $ED$  facendo angolo retto colle tre linee  $BD$ ,  $AD$ ,  $CD$ , queste sono in un medesimo piano (302), ma nel piano delle due  $BD$ ,  $AD$  è ancora l' $AB$  che fa con esse un triangolo (299); dunque le due rette  $AB$ ,  $CD$  sono in un medesimo piano, ed essendo i due angoli interni  $ABD$ ,  $CDB$  retti, esse linee sono parallele; C. D. D.

#### 304. PROPOSIZIONE VII. TEOR.

*La retta  $AC$  che congiunge due punti  $A$ ,  $C$  di due linee parallele  $AB$ ,  $CD$  è nel medesimo piano di esse. (FIG. 143.)*

Perchè se si sollevasse in un altro piano, come  $AEC$ , questo continuato segherebbe il piano delle parallele nella retta  $AC$  (300); dunque due rette linee  $AEC$  ed  $AC$  comprenderebbero spazio: il che è impossibile; C. D. D.

#### 305. PROPOSIZIONE VIII. TEOR.

*Essendo le due rette  $AB$ ,  $CD$  parallele, se una di esse  $AB$  è perpendicolare al piano  $BED$ , ancora l'altra  $CD$  gli sarà perpendicolare. (FIG. 142.)*

Si faccia la costruzione come nella proposizione VI, e con la stessa dimostrazione si proverà essere angoli retti  $EDA$ ,  $EDB$ ; onde la  $ED$  è perpendicolare al piano di esse parallele; onde ancora è retto l'angolo  $CDE$ : ma anche l'angolo  $CDB$  è retto, essendo l'angolo  $ABD$  dell'altra parallela pur retto; dunque ancora la  $CD$  è perpendicolare allo stesso piano; C. D. D.

#### 306. PROPOSIZIONE XIII. TEOR.

*Se le linee rette  $AB$ ,  $CD$  sono parallele ad una terza  $EF$  posta fuori del loro piano, saranno pure esse tra loro parallele. (FIG. 144.)*

Piglisi nella retta  $EF$  un punto  $G$ , da cui nel piano delle due parallele  $AB$ ,  $EF$  si tiri la perpendicolare  $GH$ , e nel piano delle parallele  $EF$ ,  $CD$  la perpendicolare  $GI$ .

Essendo gli angoli  $EGH$ ,  $EGI$  retti, è la  $EG$  perpendicolare al piano  $HGI$ ; dunque ancora le  $AB$  e  $CD$  paral-

le alla  $EG$  sono all'istesso piano perpendicolari (305), e però sono tra di loro parallele (303); C. D. D.

### 307. PROPOSIZIONE X. TEOR.

*Se due rette  $AB$ ,  $CB$  concorrenti in  $B$  sono parallele a due altre  $DE$ ,  $FE$  convenienti in  $E$  fuori del medesimo piano  $ABC$ , saranno gli angoli  $ABC$ ,  $DEF$  tra loro uguali (FIG. 145.)*

Pongasi  $ED = BA$ , ed  $EF = BC$ ; congiunte le rette  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ , saranno uguali e parallele (87); dunque ancora congiunte le due  $AC$ ,  $DF$ , riescono uguali; onde tutti i lati del triangolo  $ABC$  ugagliando i lati dell'altro  $DEF$ , sarà l'angolo  $ABC = DEF$ ; C. D. D.

### 308. PROPOSIZIONE XI. PROBL.

*Da un punto sublime  $A$  tirare la retta  $AB$  perpendicolare al soggetto piano. (FIG. 146.)*

Si tiri in esso piano qualunque retta  $GD$ , a cui dal punto  $A$  si mandi la perpendicolare  $AC$ , ed all'istessa  $GD$  si alzi dal punto  $C$  la perpendicolare  $CB$  nel medesimo piano; indi sopra la  $CB$  dal punto  $A$  tirando la perpendicolare  $AB$ , sarà questa perpendicolare al soggetto piano.

In fatti tirata per  $B$  la  $FBE$  parallela a  $GD$ , siccome  $GC$ , facendo l'angolo retto colla  $CA$  e colla  $CB$ , è perpendicolare al piano  $ACB$ , così ancora la  $FB$  sarà perpendicolare al medesimo piano (305); dunque l'angolo  $ABF$  e l'angolo  $ABC$  sono retti, e però l' $AB$  è perpendicolare al soggetto piano; C. D. F.

### 309. PROPOSIZIONE XII. PROBL.

*Dal punto  $C$  posto nel piano  $EFG$  alzare la  $CD$  perpendicolare al detto piano. (FIG. 147.)*

Da qualunque sublime punto  $A$  si tiri al piano la perpendicolare  $AB$  (308), e congiunta la  $BC$ , si tiri nel piano  $ABC$  la  $CD$  parallela ad  $AB$ ; questa sarà pure perpendicolare al piano (305); C. D. F.



## 310. PROPOSIZIONE XIII. TEOR.

*Dal medesimo punto B non possono essere alzate al piano EFG due perpendicolari BA, BC verso la medesima parte. (FIG. 148.)*

Perchè il piano che passa per le due AB, CB, segando il piano soggetto EFG nella retta BD, sarebbero uguali gli angoli retti ABD, CBD, cioè la parte al tutto: il che è impossibile; C. D. D.

## 311. PROPOSIZIONE XIV. TEOR.

*Se la retta AB è perpendicolare ai due piani DC, EF, questi saranno paralleli. (FIG. 149.)*

Imperocchè, se prolungati convenissero in una retta linea HG, preso in essa un punto I, e condotte in ambi i piani le rette IA, IB, si farebbe un triangolo in cui due angoli BAI, ABI sarebbero due retti: il che è impossibile (69); dunque essi piani sono paralleli.

## 312. PROPOSIZIONE XV. TEOR.

*Se due rette AG, AD congiunte in A sono parallele a due linee EF, EC poste in un altro piano, i due piani DAG, CEF saranno paralleli. (FIG. 150.)*

Conducasi dal punto A sopra il piano CEF la perpendicolare AB, e si tirino in esso piano le BI, BH rette linee parallele alle EF, EC, e conseguentemente parallele alle AG, AD (306); essendo retti gli angoli ABI, ABH, saranno pure gli angoli BAG, BAD retti: e però l'AB sarà perpendicolare ancora al piano DAG; dunque sono questi due piani paralleli (311); C. D. D.

## 313. PROPOSIZIONE XVI. TEOR.

*Se due piani paralleli AB, CD sono segati da un altro piano HEGF, le loro comuni sezioni EH, GF sono due rette parallele. (FIG. 151.)*

Imperocchè, se prolungate convenissero in I, sarebbero parte ne' piani paralleli e parte fuori di essi (perchè ivi non convengono i piani equidistanti): il che è impossibile (298); dunque tali comuni sezioni sono parallele.

## 314. PROPOSIZIONE XVII. TEOR.

*Se due rette  $AEB$ ,  $CFD$  sono segate da piani paralleli  $HI$ ,  $KL$ ,  $MN$ , saranno da essi tagliate proporzionalmente.* (FIG. 152.)

Si tiri nel piano  $HI$  la retta  $AC$ , e nel piano  $MN$  la  $BD$ , e congiunta la  $CB$ , seghi il piano  $KL$  in  $G$ , indi si tirino in esso le rette  $GE$ ,  $GF$ .

Il piano del triangolo  $ACB$  ha le comuni sezioni dei piani paralleli  $AC$ ,  $EG$  tra loro parallele (313), e similmente il triangolo  $CBD$  ha le sezioni  $GF$ ,  $BD$  parallele; dunque  $AE:EB::CG:GB$  (230):  $CF:FD$ ; onde sono proporzionalmente segate le rette  $AB$ ,  $CD$  da essi piani paralleli; C. D. D.

## 315. PROPOSIZIONE XVIII. TEOR.

*Se la retta  $EB$  è perpendicolare al piano  $CD$ , qualunque piano  $EF$  che passi per essa linea sarà perpendicolare al piano soggetto.* (FIG. 153.)

Sia la  $EG$  la comune sezione di detti piani, e da qualunque punto  $H$  di essa si tiri nel piano  $EF$  la  $HI$  parallela ad  $AB$ . Sarà questa pure al piano  $CD$  perpendicolare (305); dunque esso piano  $EF$  sarà perpendicolare al piano  $CD$  (272); C. D. D.

## 316. PROPOSIZIONE XIX. TEOR.

*Se due piani  $CGD$ ,  $EHF$  perpendicolari al soggetto piano  $GKH$  si seghino nella retta  $AB$ , sarà questa perpendicolare al soggetto piano.* (FIG. 154.)

Imperocchè essa  $AB$  sarà perpendicolare alle due comuni sezioni  $EH$ ,  $GD$  di essi piani  $EF$ ,  $CD$  col piano soggetto  $EK$ ; altrimenti se nel piano  $EF$  fosse  $BL$  perpendicolare ad  $EH$ , e nell'altro  $CD$  fosse  $BI$  perpendicolare a  $GD$ , sarebbero esse  $BL$ ,  $BI$  perpendicolari al piano  $EK$  (272): il che si è dimostrato impossibile (310); dunque la comune sezione  $AB$  è perpendicolare al soggetto piano  $EK$ ; C. D. D.

## 317. PROPOSIZIONE XX. TEOR.

*Se l'angolo solido  $BACD$  è contenuto da tre angoli piani  $BAC$ ,  $DAC$ ,  $BAC$ , due di essi saranno maggiori del rimanente.* (FIG. 155.)

Quando fossero tutti e tre eguali, è manifesto essere due maggiori del terzo; ma se sono disuguali, sia  $BAC$  il massimo da cui si levi l'angolo  $BAE = BAD$ ; e tirata la retta  $BEC$ , posta  $AD = AE$ , si congiungano  $BD$ ,  $CD$ .

Essendo nei triangoli  $BAE$ ,  $BAD$ , intorno agli angoli uguali in  $A$ , il lato  $AB$  comune, ed  $AE = AD$ , sarà ancora la base  $BE = BD$ ; ma  $BD + DC$  è maggiore di  $BC$ ; dunque  $DC$  è maggiore di  $EC$ ; onde nei triangoli  $EAC$ ,  $DAC$  essendo il lato  $AC$  comune, ed  $AE = AD$ , ma la base  $EC$  minore della  $DC$ , sarà l'angolo  $EAC$  minore dell'altro  $DAC$  (68); e però essendo  $BAE = BAD$  sono i due  $BAD$ ,  $DAC$  maggiori del massimo  $BAC$ ; C. D. D.

### 318. PROPOSIZIONE XXI. TEOR.

*Qualunque angolo solido  $A$ , composto di quanti si vogliano angoli piani  $BAC$ ,  $CAD$ ,  $DAE$ ,  $EAF$ ,  $FAG$ ,  $GAB$ , avrà sempre la somma di detti angoli minore di quattro retti. (FIG. 156.)*

Si taglino tutte le rette che concorrono in  $A$  con un piano  $BCDEFG$ , che riuscirà la base di una piramide, la cui cima è in  $A$ , e preso in essa base qualunque punto  $I$ , si congiungano le rette  $IB$ ,  $IC$ ,  $ID$ ,  $IE$ ,  $IF$ ,  $IG$ . Essendo tanti i triangoli che da' lati della base si alzano alla cima  $A$  della piramide, quanti i triangoli dai medesimi lati convergenti al punto  $I$  preso dentro la base, tutti gli angoli che sono in quelli uguagliano tutti gli angoli di questi, i quali comprendono tutti gli angoli del poligono di essa base insieme con i quattro retti che sono intorno al punto  $I$ ; ma per essere gli angoli  $BCA$  ed  $ACD$  maggiori di  $BCD$  (317), e così i due  $CDA$ ,  $ADE$  maggiori del  $CDE$  ecc., sono tutti gli angoli adjacenti a' lati del poligono ne' triangoli esterni diretti ad  $A$  maggiori degli angoli adjacenti ad essi lati nei triangoli interni della base convergenti in  $I$ ; dunque gli angoli rimanenti dei triangoli esterni che compongono l'angolo solido  $A$  sono minori degli angoli che hanno intorno al punto  $I$  i triangoli interni della base; e però essendo questi uguali a quattro retti, quelli ne sono minori; C. D. D.

319. *Corollario.* Da questa e dalla precedente proposizione si ricava che con tre angoli piani, la cui somma sia minore di quattro retti, e due dei quali superino il terzo, può comporsi un angolo solido.

320. *Scolio.* Chiamando solidi regolari quei che sono ter-



terminati da piani eguali, equilateri ed equiangoli, è facile vedere che i solidi regolari non possono essere che cinque.

In fatti alla costruzione di un angolo solido non potendosi adoperare meno di tre angoli piani, e questi tutti insieme minori di quattro retti, ne segue che con tre angoli d'esagoni regolari o di figure regolari di un maggior numero di lati non potrà formarsi angolo solido, essendo sempre tre di questi angoli maggiori di quattro retti (82). Non potremo dunque aver solidi regolari terminati da facce esagone o di maggior numero di lati.

I solidi o corpi regolari non potranno dunque farsi che con triangoli equilateri, con quadrati, con pentagoni. Dei triangoli ne possiamo impiegare tre, quattro o cinque per fare un angolo solido (poichè anche cinque angoli di triangoli equilateri sommati insieme non fanno quattro retti), ed allora si hanno gli angoli solidi del *tetraedro*, *ottaedro* ed *icosaedro* (293, 294, 296); dei quadrati, come dei pentagoni, non possiamo impiegarne più di tre per fare un angolo solido, ed allora si hanno gli angoli del *cubo* o *esaedro* e del *dodecaedro* (292, 295) così tutti i corpi regolari che aver si possono in natura sono il tetraedro, il cubo o esaedro, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.

### 321. PROPOSIZIONE XXII. TEOR.

*Il solido AB composto di piani paralleli avrà i piani opposti AG e BD, AC e FB, ecc. parallelogrammi simili ed uguali. (FIG. 157.)*

Il piano AC essendo segato dai piani paralleli AE, BH, le loro comuni sezioni AD, HC sono parallele; e l'istesso piano AC essendo ancora segato da' piani HF, CE paralleli, saranno ancora le rette AH, DC parallele (313); dunque ADCH è un parallelogrammo in cui saranno uguali i lati opposti, cioè  $AD = CH$ , ed  $AH = DC$ . Similmente si proverà essere EDCB un parallelogrammo, e la EB uguale e parallela a DC, e la DE uguale e parallela a BC; ed ADEF un parallelogrammo in cui EF è uguale e parallela a DA, ed ED uguale e parallela a FA. Essendo dunque AH ed EB uguali e parallele all'istessa DC, sono uguali e parallele tra loro, ed altresì EF, AD e CH sono eguali e parallele; dunque l'angolo ADC sarà uguale all'angolo FEB (307); e similmente gli altri angoli DCH, EBG si proveranno uguali: ed è  $AD : DC :: FE : EB$  per l'uguaglianza de' lati o-

91

mologhi; dunque sono simili ed uguali i parallelogrammi opposti  $AC$ ,  $FB$ ; e l'istesso proverassi degli altri  $FD$ ,  $GC$ , e degli  $FH$ ,  $EC$ ; C. D. D.

### 322. PROPOSIZIONE XXIII. TEOR.

*Il solido parallelepipedo  $ABCDR$  segandosi col piano  $EGFH$  parallelo agli opposti  $BTCO$ ,  $ASDR$ , saranno le di lui porzioni  $AEFD$ ,  $BEFC$  proporzionali ai lati  $AE$ ,  $EB$  delle loro basi  $AEHR$ ,  $BEHO$ , ed anche a queste stesse basi. (FIG. 158.)*

Suppongasi primieramente che i lati  $AE$ ,  $EB$  abbiano un rapporto commensurabile, essendo entrambi multipli di una stessa retta che, per esempio, entri esattamente 10 volte in  $AE$ , e 7 volte in  $EB$ ; sarà  $AE:EB::10:7$ . Per tutti i punti delle divisioni tanto di  $AE$  che di  $EB$  s'immaginino condotti tanti piani paralleli ad  $FGEH$ , e risulterà così diviso il parallelepipedo  $AF$  in 10 parallelepipedi, ed  $EC$  in 7, che facilmente pel principio di sovrapposizione si proveranno tutti eguali fra loro; starà dunque  $AF:EC::10:7$ , cioè come i lati  $AE$ ,  $EB$ . Se poi il rapporto di questi ultimi fosse incommensurabile, si supponga  $AF:EC$  non come  $AE:EB$ , ma come  $KE:EB$ , essendo  $KE > AE$ . Dividasi  $EB$  in un numero di parti eguali tanto piccole quanto fa bisogno perchè una retta  $NE$  multipla esattamente di una di esse possa essere maggiore di  $AE$  e minore di  $KE$ ; poi coll'opportuno prolungamento dei piani compiasi il parallelepipedo  $NEHMIFGP$  (che denominerò semplicemente per  $NF$ ). Per ciò che or ora si è dimostrato, starà  $NF:EC::NE:EB$ , o sia  $NF:NE::EC:EB$ ; ma per ipotesi  $AF:KE::EC:EB$ ; dunque  $NF:NE::AF:KE$ ; e poichè in quest'ultima  $KE > NE$  sarà  $AF > NF$ , cioè la parte maggiore del tutto. Non poteva dunque stare  $AF:EC::KE:EB$ , essendo  $KE > AE$ ; in un modo simile si sarebbe provato che la proporzione era ancora falsa, essendo  $KE < AE$ ; dunque bisogna che sia  $AF:EC::AE:EB$ . Siccome poi  $AE:EB::AEHR:BEHO$  (224), avremo anche  $AF:EC::AEHR:BEHO$ , cioè i due parallelepipedi, in cui si divide il totale, proporzionali alle loro basi; C. D. D.

323. *Corollario.* Nell'istessa maniera si proverebbe ancora ne' prismi di qualunque sorta di base poligona, che segati da un piano parallelo alle basi, ne riuscirebbero le porzioni proporzionali alle lunghezze o altezze loro.

*Segandosi un parallelepipedo qualunque HE col piano BDAG che passa per le diagonali de' piani opposti, sarà segato per mezzo. (FIG. 157.)*

Sono i piani opposti uguali e simili parallelogrammi CDAH, BEFG, ed ancora CHGB e DAFE; ed è il piano BDAG comune ai due prismi BCDAHG, BEDAGF eretti sopra i triangoli simili ed eguali GHA ed AFG, a' quali pure corrispondono altri due BCD, DEB simili ed uguali tra di loro e con gli opposti; pertanto essi prismi sono eguali (278); onde il parallelepipedo dal piano BDAG resta diviso per mezzo (\*).

---

(\*) Ecco una proposizione che interamente dipende dalla contrastata def. X. Qui però particolarmente si può domandare, se i due prismi hanno, come è verissimo, tutte le facce simili ed uguali, per qual motivo non si possono far coincidere per sovrapposizione? È notabilissima questa circostanza chiamata da Legendre *simmetria*, per cui generalmente due poliedri terminati da facce simili ed eguali non sono talvolta sovrapponibili. Prima di riconoscere la simmetria nei solidi conviene, ciò ch'è più facile, distinguerla negli angoli. Per farvene una chiara idea, preparate tre angoli piani disuguali, che chiameremo 1, 2, 3, e preso l'angolo 1, unite al suo lato a destra l'angolo 2, poi chiudete l'angolo solido coll'angolo 3; un'altra volta ponete l'angolo 2 non al destro, ma al sinistro lato dell'angolo 1, indi chiudete coll'angolo 3. Avrete due angoli solidi formati da angoli piani uguali, e che nondimeno non potranno sovrapporsi come quelli della def. XI: questi diconsi *simmetrici*, e se ne possono fare anche con più di tre angoli piani. Potranno dunque esservi due poliedri con facce simili ed uguali, ma cogli angoli solidi simmetrici; allora tali solidi non potranno sovrapporsi; l'ordine con cui uno è disposto tra i suoi piani sarà come il rovescio di quello con cui vi è disposto l'altro; l'uno rispetto all'altro riuscirà come la sua immagine veduta in uno specchio piano; tali sono i due prismi di cui si tratta. Che i poliedri simmetrici siano eguali in solidità, non è proposizione evidente; quanto a questi due prismi in cui si divide il parallelepipedo, riferirò più innanzi in una nota al n.º 343 una nuova maniera di dimostrazione rigorosa dedotta dal principio generale che ivi verrà spiegato: e così niente per questa parte mancherà ai nostri elementi, siccome ho accennato nella nota al n.º 278.



## 325. PROPOSIZIONE XXX. TEOR.

*I solidi parallelepìpedi AGHCBFDE, AGHKLMIE posti sopra l'istessa base AGHE, tra gl'istessi piani paralleli AH, FK, coi lati AM, GL ed EI, HK prodotti alle stesse linee dei lati FB, DC prolungate nell'istesso piano, sono sempre parallelepìpedi tra di loro equivalenti.*  
(FIG. 159.)

Essendo  $DC = EH = IK$ , aggiunta CI, è  $DI = CK$ ; ma ancora  $DE = CH$  ed  $EI = HK$ ; dunque il triangolo DEI è simile ed uguale al triangolo CHK, e così ancora i triangoli FAM, BGL sono simili ed uguali. Ancora il parallelogrammo DIMF è simile ed uguale a CKLB; e così DEAF a CHGB, ed EIMA ad HKLG; perciò il prisma triangolare DEIMFA uguaglia il prisma CKHGLB (278) (\*), e tolto di comune CPIMNB, ed aggiunto a' rimanenti pezzi il prisma EPHGNA, riesce il parallelepìpedo AGHCBFDE equivalente all'altro AGHKLMIE; C. D. D.

## 326. PROPOSIZIONE XXVI. TEOR.

*Quando ancora il parallelogrammo IMLK opposto alla base comune EAGH di due parallelepìpedi tra i medesimi piani paralleli non s'incontrasse colla direzione delle rette parallele DC, FB, ad ogni modo essi parallelepìpedi saranno equivalenti.* (FIG. 160.)

Esse rette prolungate DC, FB parallele ad AG e ad IK seghino le altre rette tra di loro parallele IM, KL ne' punti N, O, Q, P, sarà il parallelogrammo NOPQ = DCFB = AEHG; onde, condotte le rette EN, HO, AQ, GP, sarà il parallelepìpedo AEHGPNQO = AEHGBCDF (325); e similmente AGHEIKLM = AEHGPNQO, terminando alle stesse linee prodotte IM, KL; dunque sono ancora equivalenti AEHGBCDF ed AGHEIKLM, posti sull'istessa base e tra gli stessi piani paralleli, benchè non s'incontrino colla direzione delle rette DC, FB; C. D. D.

327. Corollario. È manifesto che se ancora sopra la stessa

---

(\*) Ecco di nuovo citata la def. X. Questi due prismi però non sono simmetrici come quelli della prop. precedente, sono veramente eguali e sovrapponibili.

base IMLK fosse tra gl' istessi piani paralleli descritto un altro parallelepipedo, sarebbe equivalente ad esso AGHEIMLK, e conseguentemente ancora a ciascuno degli altri due AEHGBCDF ed AEHGPNQO; onde ancora i parallelepipedi che hanno basi eguali e sono tra i medesimi piani paralleli, sono tra di loro equivalenti.

### 328. PROPOSIZIONE XXVII. TEOR.

*I solidi parallelepipedi ABCE, PMNC che hanno la medesima altezza BC e le basi equivalenti ABGF, BPML, sono fra loro equivalenti. (FIG. 161.)*

S' intendano collocati in modo che abbiano comune il lato BC e sia il piano BLIC in diritto col piano ABCD come continuazione l' uno dell' altro; compiasi il parallelepipedo BLICHR, e prolungando opportunamente i suoi piani, formisi l' altro parallelepipedo BSXVCL, la cui faccia SXVT sia nello stesso piano della faccia PMNO del secondo parallelepipedo proposto.

Avrassi (322)  $AH : BQ :: AG : BR$ , ed anche  $BQ : SI :: BR : SL$ . Se si alternano queste due proporzioni, la seconda ragione della prima è la stessa che la prima ragione della seconda, onde si ha  $AH : AG :: SI : SL$ . Ora  $SL = BPML$  (89), perchè sono parallelogrammi sulla stessa base BL e fra le stesse parallele; ma per ipotesi  $BPML = AG$ ; dunque  $SL = AG$ , e però nell' ultima proporzione bisogna che sia  $AH = SI$ ; ma SI è equivalente a PMNC (325) per essere sulla stessa base BLIC e fra gli stessi piani paralleli; dunque sono equivalenti i due solidi ABCE, PMNC; C. D. D.

### 329. PROPOSIZIONE XXVIII. TEOR.

*I solidi parallelepipedi AE, GO che hanno la medesima altezza, sono tra di loro come le basi AC, GM. (FIG. 162.)*

Prolungata LG in F, si faccia il parallelogrammo HGF = ABCD, e si compisca il parallelepipedo FGNQRIH tra gli stessi piani paralleli dell' altro: sarà questo parallelepipedo = ABCDTEVS, avendo basi equivalenti e la medesima altezza (328); ma FGNQRIH all' altro GNPLMOQH è come la base alla base (322), cioè come IFGH (che = ABCD) a GLMH; dunque ancora il parallelepipedo AE all' altro GO è come la base AC alla base GM; C. D. D.

330. *Corollario.* Ancora i prismi ugualmente alti sono come le loro basi; perchè se sono basi triangolari, sono la metà dei parallelepipedi eretti sopra i parallelogrammi doppi di tali triangoli; se sono basi poligone, possono dividersi in triangoli, ed essi prismi interi in altrettanti prismi triangolari proporzionali alle loro basi (\*).

### 331. PROPOSIZIONE XXIX. TEOR.

*I solidi parallelepipedi simili HIMKZ, ABDGF stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi IM, EG, o sia in ragione triplicata di questi stessi lati. (FIG. 163.)*

Si prolunghino la retta LM in  $MO = EF$ , la retta IM in  $MN = EG$ , e la retta RM in  $MP = EA$ , e compiuti i parallelogrammi OMN, OMP, NMP, si tirino gli opposti piani paralleli, da cui si formerà il parallelepipedo OPQNM uguale e simile al dato ABDGF, avendo gli stessi angoli solidi e i medesimi parallelogrammi uguali e simili. Prolungati ancora i parallelogrammi, si compiscano i solidi parallelepipedi KLSYM, LTVSQM.

Si avranno (322) queste tre proporzioni,  $IK : MX :: IM : MN$ ;  $MX : MV :: RM : MP$ ;  $MV : OQ :: LM : MO$ ; ma per essere simili i parallelogrammi IMR, PMN e gli altri RML, PMO, si ha (210)  $IM : MN :: RM : MP :: LM : MO$ ; dunque in tutte tre quelle proporzioni si potrà mettere per seconda ragione la stessa  $IM : MN$ . Ciò facciasi, e poi si moltiplichino tutte tre insieme termine per termine (220), e verrà  $IK \times MX \times MV : MX \times MV \times OQ :: (IM)^3 : (MN)^3$  (\*\*),

(\*) La prima parte di questo corollario è manifesta: quanto alla seconda, chiamisi P uno dei due prismi, e B la sua base poligona, poi si designino per  $b, b', b'' \dots$  i triangoli in cui fu diviso il poligono B, e per  $p, p', p'' \dots$  i corrispondenti prismi triangolari che presi tutt'insieme formano il prisma P. Poichè i prismi triangolari di egual altezza stanno come le loro basi, avrassi  $p : b :: p' : b' :: p'' : b'' :: \text{ecc.}$ , quindi (239)  $p + p' + p'' + \dots : b + b' + b'' + \dots :: p : b$ , ossia  $P : B :: p : b$ . Sta dunque alternando, il prisma P ad uno dei prismi triangolari in cui fu diviso, come la sua base poligona alla base triangolare: lo stesso si dirà dell'altro prisma proposto, onde stando questi prismi triangolari come le loro basi, anche i prismi di eguale altezza a basi poligone staranno come queste basi. (Vedi la nota posta qui dopo al n.º 347.)

(\*\*) Questo modo di scrivere  $(IM)^3$  in vece di  $IM \cdot IM \cdot IM$ ,



quindi dividendo la prima ragione per  $MX \times MV$  (221)  $IK : OQ (= BG) :: (IM)^3 : (MN)^3 (= EG)^3$ , cioè i due parallelepipedi proposti come i cubi dei lati omologhi  $IM, EG$ .

La ragione poi dei cubi  $(IM)^3 : (EG)^3$  è la stessa che la triplicata dei lati  $IM, EG$ ; in fatti avendo generalmente  $A : B :: B : C :: C : D$ , si è già veduto (256) essere  $A^3 : B^3 :: A : C$ , se ora di questa e dell'altra  $A : B :: C : D$  si forma un'egualità ordinata, indi si divide la seconda ragione per  $C$ , sorte  $A^3 : B^3 :: A : D$ , dove la ragione  $A : D$  è la triplicata di  $A : B$  (207);  $C. D. D.$

### 332. PROPOSIZIONE XXX. PROBL.

*I parallelepipedi equivalenti  $ACD$ ,  $NPI$  hanno le basi reciproche delle altezze; e quei parallelepipedi in cui le basi sono in ragione reciproca delle altezze, sono tra di loro equivalenti. (FIG. 164.)*

Se avessero uguali altezze i solidi, dovrebbero ancora avere le basi equivalenti (328), per essere tra di loro equivalenti; onde la base del primo alla base del secondo sarebbe come l'altezza di questo all'altezza di quello. Se poi le altezze sono disuguali, essendo quella di  $NPI$  maggiore di quella di  $ACD$ , si tagli  $NPI$  col piano  $OLKM$  parallelo alla base  $HGIQ$ , in altezza uguale a quella del solido  $ACD$  (essendo  $NX$  perpendicolare al piano della base  $HGIQ$ , e segante il piano  $OLKM$  in  $V$ , in maniera che  $VX$  sia uguale all'altezza del solido  $ACD$ ).

Sarà  $ACD : OLIQ :: BZDS : HGIQ$  (320), ma  $ACD = NPI$ ; dunque ancora  $NPI : OLIQ :: BZDS : HGIQ$ ; ma  $NPI : OLIQ :: NH : HO$  (322) ::  $NX, VX$ ; dunque  $BZDS : HGIQ :: NX : VX$ ; e però la base dell'uno alla base del-

$A^3$  in vece di  $A . A . A$  è preso dall'algebra. Che poi la ragione  $(IM)^3 : (MN)^3$  sia quella stessa che hanno fra di loro le solidità dei cubi eretti sui lati  $IM, MN$ , riescirà manifesto dietro l'idea della misura dei solidi, come si dirà al n.º 442. Ma anche senz'altro, ciò si comprende benissimo in virtù di questa stessa proposizione, perchè se immaginiamo di avere, in vece dei parallelepipedi  $IK, OQ$ , i cubi di  $IM, MN$ , che pur sono anch'essi parallelepipedi, ripetendo la stessa dimostrazione conchiuderemo che le solidità di questi cubi stanno come  $(IM)^3 : (MN)^3$ .

97

l'altro è come l'altezza di questo all'altezza di quello; e inversamente essendo  $BZDS : HGIQ :: NX : VX$ , che uguali l'altezza di  $ACD$ , sarà  $ACD : OLIQ :: NPI : OLIQ$ ; e però  $ACD = NPI$ ; C. D. D.

333. *Corollario.* Ancora i prismi triangolari equivalenti essendo la metà di equivalenti parallelepipedo (*per la proposizione XXIV*), debbono aver le basi reciproche delle altezze; e se hanno le basi reciproche delle altezze, debbono essere equivalenti.

### 334. PROPOSIZIONE XXXI. TEOR.

*Essendo tre linee rette A, B, C, continuamente proporzionali, il solido parallelepipedo fatto dalle tre linee date è equivalente al parallelepipedo a lui equiangolo fatto dalla sola media B, cui sieno eguali tutti i suoi lati.* (FIG. 165.)

Sia  $EDKF$  il solido fatto dalle tre rette  $DF = A$ ;  $ED = B$   $DK = C$ ; e  $LMQN$  quello fatto dalle tre  $LM = MN = MQ = B$ . Essendo questi per ipotesi equiangoli, sarà l'angolo solido  $D$  eguale all'angolo solido  $M$ ; quindi (279) se porrem l'angolo solido  $D$  entro l'angolo solido  $M$ , combaceranno essi tra loro, ed il punto  $E$  cadrà in  $L$ , e gli angoli piani di uno cadranno sopra gli angoli piani dell'altro; dunque così situati i parallelepipedo avranno la medesima altezza, che sarà la perpendicolare dal punto  $L$  abbassata sopra le basi  $KDIF$ ,  $MQRN$  che cadono allora l'una sull'altra.

Essendo di più i due parallelogrammi  $KDIF$ ,  $MQRN$ , cioè quelle basi, equivalenti per avere intorno agli angoli eguali i lati reciprocamente proporzionali (251), saranno equivalenti quei due parallelepipedo (328); C. D. D.

### 335. PROPOSIZIONE XXXII. TEOR.

*Se quattro rette linee AB, CD, EF, GH sono proporzionali, due parallelepipedo simili ABK, CDL fatti sopra le prime saranno proporzionali a due altri simili tra di loro EFM, GHN fatti sopra alle ultime.* (FIG. 166.)

Improcchè  $ABK$  a  $CDL$  è in ragione triplicata di  $AB$  a  $CD$  (331); e similmente  $EFM$  a  $GHN$  è in ragione triplicata di  $EF$  a  $GH$ ; dunque essendo  $AB : CD :: EF : GH$ ; ancora la triplicata ragione della prima è uguale alla triplicata della seconda; e però  $ABK : CDL :: EFM : GHN$ ; C. D. D.

## 335. PROPOSIZIONE XXXIII. TEOR.

*Sia il piano CAD perpendicolare ad un altro ADB; se da qualunque punto E del primo si tira la perpendicolare sopra il secondo, cadrà nella loro comune sezione AD.* (FIG. 167.)

Perchè se cadesse fuori in F, tirata nel piano CAD sopra la retta AD la perpendicolare FG, questa pure sarebbe al piano ADB perpendicolare, e congiunta la FG, avrebbe il triangolo EFG in F ed in G due angoli retti: il che è impossibile; C. D. D.

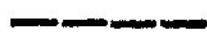
## 337. PROPOSIZIONE XXXIV. TEOR.

*Due prismi d'uguale altezza ABCFED, MGHILK avendo il primo per base il parallelogrammo ABCF doppio della base triangolare MGH dell' altro, sono tra di loro equivalenti.* (FIG. 168.)

Compiuti essi prismi in parallelepipedi, riuscirà la base  $MGHP = ABCF$ , essendo l'una e l'altra doppia del triangolo MGH; dunque tali parallelepipedi ABCEOND e MGHIQKL sono equivalenti, avendo uguale altezza e le basi equivalenti; ma i suddetti prismi sono la metà di tali parallelepipedi (324); dunque ancora essi prismi erano tra loro equivalenti; C. D. D.

## LIBRO VII.

DELLE PIRAMIDI, DEI CONI, DEI CILINDRI  
E DELLA SFERA.



## 338. PROPOSIZIONE PRIMA. TEOR.

*I poligoni simili ABCDE, FGHIK inscritti ne'cerchj sono come i quadrati de' loro diametri AL, FM.* (FIG. 169.)

Condotte le rette EB, EL e KG, KM, essendo l'angolo  $BAE = GFK$ , ed i lati intorno ad essi proporzionali, cioè  $BA : AE :: GF : FK$  per la similitudine dei poligoni, sono simili i triangoli ABE, FGK; onde l'angolo  $ABE = FGK$ ; ma a quello è uguale l'angolo ALE, ed a questo si



uguaglia l'angolo FMK (151); dunque i triangoli ALE, FMK hanno uguali gli angoli in L ed in M, e inoltre gli angoli AEL, FKM retti (161); però ancora essi triangoli sono simili; onde  $AE:AL::FK:FM$ , e permutando  $AE:FK::AL:FM$ , sicchè il poligono fatto sopra il lato AE al simile fatto sopra il lato FK sta come il quadrato AL al simile quadrato FM (259); C. D. D.

339. *Corollario.* Dalla medesima dimostrazione si raccoglie che i contorni dei poligoni simili inscritti nel cerchio sono tra loro come i diametri o come i raggi. In fatti avendo noi dimostrato che  $AE:FK::AL:FM$ , sarà ancora  $AB:GF::AL:FM$ , e così di tutti gli altri lati; avremo perciò  $AE:FK::AB:FG::BC:GH$  ecc.  $::AL:FM$ , e quindi  $AE+AB+BC+ecc.:FK+FG+GH+ecc.::AL:FM::\frac{AL}{2}:\frac{FM}{2}$ .

340. *Lemma.* Date due quantirà diseguali AB, C (o sieno linee o superficie o solidi), se dalla maggiore si tolga AD che ne sia la metà, e dalla rimanente DB si tolga DE che sia la metà di essa, e così di mano in mano si continui a fare, riuscirà finalmente il resto minore della data quantità C. (FIG. 170.)

È così evidente la verità di questo lemma, che può prendersi per assioma.

A maggior ragione poi se dalla data AB si toglie AD maggiore della metà di essa, e dalla rimanente DB la DE maggiore della sua metà, e dalla EB si tolga EL maggiore della metà di quella ecc., alla fine il resto LB sarà minore della data C.

### 341. PROPOSIZIONE II. TEOR.

*I cerchj ABT, EFN sono proporzionali a' quadrati dei loro diametri AC, EG. (FIG. 171.)*

Se non è vero che sia  $(AC)^2:(EG)^2::cerch. ABT:cerch. EFN$ , suppongasi  $(AC)^2:(EG)^2::cerch. ABT:Z$ , essendo Z uno spazio minore o maggiore del cerchio EFN. Sia primieramente  $Z < cerch. EFN$ , talchè manchi a Z un altro spazio X, che essendovi aggiunto darebbe  $Z+X=cerch. EFN$ . Inscrivasi nel cerchio EFN il quadrato EHGF, poi divisi per metà gli archi HNG, GMF, ecc., inscrivasi l'ottagono regolare HNGMFLEO; poi inscrivasi il poligono regolare di 16 lati ecc. Togliendo al cerchio il quadrato in-

scritto, se gli toglie più della sua metà, perchè esso quadrato è metà del quadrato circoscritto evidentemente maggiore del cerchio: togliendo alla residua superficie, cioè alla somma dei quattro segmenti  $GNH$ ,  $GMF$ ,  $FLE$ ,  $EOH$ , i quattro triangoli  $HNG$ ,  $GMF$ , ecc., se le toglie pure più della sua metà, perchè ciascuno di questi triangoli, per esempio  $HNG$ , è metà del rettangolo  $HPQG$ , e quindi è più della metà del segmento in cui è inscritto. Così seguendo ad inscrivere poligoni di un doppio numero di lati, la somma dei segmenti per cui il nuovo poligono differisce dal cerchio sarà sempre minore della semisomma dei segmenti lasciati dal poligono antecedente; e ciò facendo finchè fa d'uopo si arriverà finalmente ad un poligono inscritto che lascerà la somma dei segmenti, per cui differisce dal cerchio, minore della quantità  $X$  (340). Chiamisi  $S$  questa somma, e  $P$  quel poligono: sarà  $P + S = \text{cerch. EFN}$ , e quindi  $P + S = Z + X$ ; ma per ipotesi  $S < X$ ; dunque  $P > Z$ . Ora s'inscriva nell'altro cerchio  $ABT$  un poligono  $p$  simile a  $P$ , e si avrà (338)  $(AC)^2 : (EG)^2 :: p : P$ ; ma si era supposto  $(AC)^2 : (EG)^2 :: \text{cerch. ABT} : Z$ ; dunque  $p : P :: \text{cerch. ABT} : Z$ ; nella qual ultima proporzione essendo come si è mostrato  $P > Z$ , dovrebbe essere  $p > \text{cerch. ABT}$ , e questo è un assurdo perchè un poligono non può essere maggiore del cerchio in cui si è inscritto: è dunque falso che sia  $Z < \text{cerch. EFN}$ . Vediamo se possa essere  $Z > \text{cerch. EFN}$ ; in tal caso suppongasi  $(EG)^2 : (AC)^2 :: \text{cerch. EFN} : R$ , essendo  $R$  un altro spazio. Poichè dalla prima proporzione supposta si ha invertendo  $(EG)^2 : (AC)^2 :: Z : \text{cerch. ABT}$ , sarà  $Z : \text{cerch. ABT} :: \text{cerch. EFN} : R$ , dove essendo per ipotesi  $\text{cerch. EFN} < Z$ , dovrà essere  $R < \text{cerch. ABT}$ . Dunque nella proporzione  $(EG)^2 : (AC)^2 :: \text{cerch. EFN} : R$  sarebbe il quadrato di un diametro al quadrato di un altro diametro, come il cerchio di quel primo diametro ad uno spazio minore del cerchio corrispondente all'altro diametro; il che per la prima parte di questa dimostrazione si è mostrato impossibile. Non può dunque essere  $Z$  nè minore nè maggiore del cerchio  $EFN$ ; resta che sia  $Z = \text{cerch. EFN}$ , onde fattane la sostituzione nella proporzione sin da principio supposta, si ha  $(AC)^2 : (EG)^2 :: \text{cerch. ABT} : \text{cerch. EFN}$ ; C. D. D.

342. *Corollario I.* Quindi si ha che un cerchio ad un altro sta come qualunque poligono inscritto nel primo al simile poligono inscritto nel secondo cerchio, essendo tutti proporzionali ai quadrati dei diametri.

343. *Corollario II.* Meditando sullo spirito di questa dimostrazione si sale ad un principio generale e importantissimo. Qui si è veduto che possono inscrivarsi nei cerchj i quadrati che lasciano la somma de' segmenti residui minore della metà de' cerchj; poi gli ottagoni che lasciano la somma de' segmenti minore della semisomma dei primi segmenti; poi i poligoni di 16 lati, di cui vale lo stesso, e così via via; e che stando tanto i quadrati, come gli ottagoni, come i poligoni seguenti sempre nella ragione dei quadrati dei diametri, anche i cerchj stàvano nella stessa ragione. Ne conchiuderemo generalmente che se in due grandezze superficiali o solide possono inscrivarsi quantità maggiori della metà di esse, talchè i residui spazj siano minori di detta metà; e in questi residui altre quantità che lascino residui minori della semisomma dei primi, e così sempre in modo che la somma degli ultimi spazj residui possa divenir minore d'ogni quantità data (340); qualora la somma delle quantità inscritte nella prima grandezza stia sempre alla somma corrispondente di quelle inscritte nella seconda in una data ragione, anche le grandezze proposte stanno nella stessa ragione (\*).

---

(\*) Un'applicazione di questo principio generale somministra la rigorosa dimostrazione della Prop. XXIV. del Lib. prec., siccome ivi si accennò in una nota. Eccola in compendio, consigliando lo studioso a meditarla dopo che avrà ben intese le Prop. IV e V di questo libro. Primieramente conviene osservare che il lemma del n.º 340 è capace di maggior estensione, come si dirà in una nota al n.º 376: e deve ammettersi anche quando le quantità che continuamente si tolgono sono sempre maggiori della sola quarta parte dei residui precedenti. Conseguentemente anche nel dettato del presente n.º 343 deve concedersi quest'altra maniera d'inscrivere di continuo dentro due grandezze altre grandezze per ottenerne residui minori d'ogni quantità assegnabile. Ora se nel parallelepipedo del n. 324 si conducono pei punti di mezzo dei lati due piani paralleli alle facce di esso che sono eziandio facce parallelogramme nei due prismi: è facile provare che questi due piani s'intersecano in una linea comune anche a quel piano condotto per le diagonali e dividente i due prismi. Vedonsi allora questi due prismi divisi ciascuno in un parallelepipedo e in altri due prismi minori. Si riconosce che il parallelepipedo nell'uno è in tutto eguale e sovrapponibile al parallelepipedo nell'altro, e che in ciascuno il parallelepipedo è maggiore della quarta parte di esso prisma. Seguitando a divide-



## 344. PROPOSIZIOOE III. TEOR.

*Ogni piramide ABCD triangolare può dividersi in due piramidi AEGH, EBF I uguali e simili (\*) tra se e con l'intera, ed in due prismi EICKF, EHGDKF tra di loro equivalenti, la cui somma però sarà maggiore della metà della data piramide ABCD. (FIG. 172.)*

Tagliati per mezzo tutt' i lati nei punti E, H, G, K, F, I, e congiunte le rette EH, HG; GE, EI, IF, FK, KH, HI, IK, EF, le quali segando sempre due lati proporzionalmente, sono parallele agli opposti lati, è manifesto essere uguali i triangoli AEH, EBI, e simili tra di sè ed all'intero ABC: parimente i triangoli AEG, EBF sono uguali e simili ad ABD; e così accade nei triangoli uguali AHG, EIF simili ad ACD, e negli altri due HEG, IBF tra loro uguali e simili a CBD; dunque le piramidi AEGH, EBF I sono uguali e simili tra di sè e coll'intera ABCD (277, 278). I prismi poscia che restano EIGHKF, EHGDKF sono ugualmente alti, e quello ha per base il parallelogrammo ICKF doppio del triangolo IFK, e però doppio della base triangolare FKD di questo altro prisma, essendo  $IFK = FKD$  nel parallelogrammo IFDK; però sono prismi equivalenti (337); ma il primo è maggiore della piramide IKCH, la quale è uguale a qualunque delle altre due, per esempio ad AEGH; dunque ambidue questi prismi sono maggiori dell'altre due piramidi, e però sono più della metà dell'intera piramide ABCD; C. D. D.

re nella stessa maniera i prismi residui, anche in essi risultano dei parallelepipedi di cui ciascuno, che sta nello spazio d'uno dei prismi primitivi, ha il suo eguale nello spazio dell'altro: e così sempre. È manifesto che la somma di tutti i parallelepipedi in cui si è diviso il primo prisma eguaglia la somma di tutti i parallelepipedi in cui si è diviso il secondo; dunque il rapporto fra queste somme di grandezze inscritte essendo sempre quello dell'eguaglianza, anche i prismi, da cui esse vengono a differire meno d'ogni quantità assegnabile, sono in solidità fra di loro uguali.

(\*) Per noi che intendiamo figure eguali quelle che hanno tutte le loro parti costituenti eguali, sembra inutile, dopo averle dette eguali fra sè, dirle anche simili: si mette nondimeno per significare che all'eguaglianza degli angoli particolarmente si bada.

## 345. PROPOSIZIONE IV. TEOR.

*Le due piramidi triangolari ugualmente alte  $ABCD$ ,  $LMON$  se si dividono come nella precedente, in due simili uguali piramidi e ne' due prismi equivalenti, e ciascuna delle particolari piramidi similmente dividasi come le intiere, e quelle che ne risultano pure dividansi come le altre, e così di mano in mano; come la base  $CBD$  della prima piramide alla base  $OMN$  della seconda; così saranno tutti i prismi fatti in quella a tutti gli altrettanti prismi fatti in questa. (FIG. 172 e 173.)*

Essendo divisi per mezzo tutt' i lati delle intiere piramidi, come nella costruzione della precedente proposizione, siccome sono esse egualmente alte, ancora i prismi  $FEHGDK$ ,  $TRPQNV$  sono egualmente alti; e però sono come le loro basi  $FKD$ ,  $TVN$  (330), e queste sono, come le intiere basi  $CBD$ ,  $OMN$ , quadruple di tali triangoli; dunque i prismi  $FEHGDK$  e  $TRPQNV$ , ed ancora i loro doppij, cioè i due  $FEHGDK + FEHKCI$ , e i due  $TRPQNV + TRPVOS$  sono come le basi dell' intiere piramidi  $CBD$  ed  $OMN$ . Che se si farà la costruzione stessa nelle piramidette  $AEGH$ ,  $LRPQ$ , e nelle altre due  $EBFI$ ,  $RMTS$ , i prismi dell' una a quelli dell' altra saranno pure come il triangolo  $EHG : RPQ :: BIF : MST :: CBD : OMN$ ; e così riuscirà sempre; dunque (239) la somma di tutti i prismi che si fossero inscritti nella piramide  $ABCD$ , e quella d' altrettanti inscritti nella piramide  $LMON$  saranno sempre come le basi di esse piramidi  $BCD$ ,  $MON$ ; C. D. D.

## 346. PROPOSIZIONE V. TEOR.

*Le piramidi triangolari ugualmente alte  $ABCD$ ,  $LMON$  sono come le basi loro  $BCD$ ,  $MON$ . (FIG. 172 e 173.)*

Imperocchè, fatta in esse la costruzione dei prismi (come nella precedente proposizione), riescono le somme di essi proporzionali alle basi  $BCD$ ,  $MON$ ; ma sono tali che i primi due prismi sono maggiori della metà di esse piramidi (344), e gl' inscritti nelle piramidette residue sono più della metà di esse, ecc.; dunque la piramide intiera  $ABCD$  all' ugualmente alta  $LMON$  è nella ragione delle basi  $BCD$ ,  $MON$  (343); C. D. D.

## 347. PROPOSIZIONE VI. TEOR.

*Le piramidi ABCED e FHIKLG ugualmente alte con ogni sorta di basi poligone BCDE e HGLKI sono pure tra di loro come le dette basi. (FIG. 174.)*

Dividansi le basi poligone colle diagonali CD, GI, GK nei loro triangoli; si vedranno esse piramidi coi piani che passano per la loro cima e per dette diagonali divise in tante piramidi triangolari ugualmente alte, le quali saranno come le loro basi triangolari (346). Si potrà quindi formare una serie di quantità proporzionali, fra tutte le piramidi triangolari in cui si scompone una delle proposte, come ABCED, e le loro basi triangolari: in seguito sommando gli antecedenti e i conseguenti (239), si conchiuderà che la piramide intera ABCED sta ad una delle piramidi triangolari che la compongono ACDE, come l'intero poligono BCED al triangolo CDE. Similmente si proverà che l'altra proposta FHIKLG sta alla triangolare FGHI come il poligono HIKLG al triangolo GHI; ma *pir.* ACDE : *pir.* FGHI :: CDE : GHI (346); dunque se ne conchiuderà l'intera piramide ABCED all'ugualmente alta FHIKLG come la base poligona alla base poligona (\*); C. D. D.

(\*) Questa dimostrazione è in tutto simile a quella che abbiamo posta in nota al n.º 330 pei prismi di eguale altezza a basi poligone. Può qui ed in molti altri casi nascere una difficoltà che sarà bene di prevenire e di togliere. Chiamate  $P, p$  due piramidi di eguale altezza, e  $B, b$  le loro basi, finchè si ha  $P : p :: B : b$ , si concepisce chiaramente che il rapporto di due solidi può essere eguale a quello di due superficie; ma quando la proporzione è alternata e si ha  $P : B :: p : b$ , il rapporto  $P : B$  sembra di cose eterogenee come di solido a superficie, e quindi inconcepibile. Ma io ho già raccomandato d'intendere per le qualità che si mettono in proporzione non altro più che i numeri esprimenti il rapporto di ciascuna delle quantità concrete alla sua rispettiva unità di misura; quindi  $P, p$  non sono che numeri esprimenti quante volte l'unità di solidità entra nelle due piramidi, e similmente  $B, b$  non sono che numeri esprimenti quante volte l'unità superficiale entra nelle basi: e però il rapporto  $P : B$  non è che un numero astratto diviso per un altro numero astratto, dove non vi è più nulla di ripugnante. In generale ritengasi (e questa cognizione gioverà in tutte le matematiche applicate) che il rapporto quand'è fra due cose omogenee, può concepirsi il numero astratto che nasce dal confronto



*Corollario.* Le piramidi che hanno eguali altezze e basi equivalenti sono equivalenti.

### 348. PROPOSIZIONE VII. TEOR.

*Ogni prisma triangolare ABCDEF può dividersi in tre piramidi equivalenti ACBF, ACDF, CDEF. (FIG. 175.)*

Si tirino le diagonali de' parallelogrammi AC, CF, FD. I triangoli ACB, ACD essendo uguali, saranno pure equivalenti le piramidi ugualmente alte ACBF, ACDF (347), e parimente essendo uguali i triangoli ADF, DEF, sono pure equivalenti le piramidi ACDF, CDFE della medesima altezza (347); dunque le tre piramidi in cui resta diviso il prisma sono tra loro equivalenti; C. D. D.

349. *Corollario.* Quindi ogni piramide è la terza parte del prisma eretto sopra l'istessa base alla medesima altezza, quantunque fossero le basi poligone, potendo risolversi in piramidi e prismi triangolari dell'istessa altezza eretti sopra i triangoli in cui dividesi qualunque poligono.

### 350. PROPOSIZIONE VIII. TEOR.

*Le piramidi simili triangolari ABCD, EFGH sono in triplicata ragione dei loro lati omologhi AB, EF. (FIG. 176.)*

Si compiscano i parallelogrammi CABK, GEFR intorno a' lati de' triangoli simili CAB, GEF, ed intorno a' simili triangoli CAD, GEH i parallelogrammi CADI, GEHP; e parimente ne' simili triangoli DAB, HEF sieno compiuti i parallelogrammi DABN, HEFO; onde tirati i piani opposti, ne risulteranno due simili parallelepipedi DICABNMK, HPGEFOQR, i quali saranno in triplicata ragione de' loro lati omologhi AB, EF (331); ma essendo tali parallelepipedi doppj de' prismi IDNBAC, PHOFEH (324); e questi tripli delle piramidi ABCD, EFGH (348), sono que' parallelepipedi sestupli di queste piramidi; dunque ancora esse piramidi simili sono in triplicata ragione de' loro lati omologhi AB, EF; C. D. E.

immediato delle quantità concrete: ma quando si enuncia fra cose eterogenee, deve intendersi il numero che si ha dalla divisione l'uno per l'altro di due numeri già astratti, i quali sono già essi i rapporti di ciascuna delle quantità considerate alla sua rispettiva unità di misura.

351. *Corollario I.* Ancora le piramidi simili di base poligona saranno in triplicata ragione de' lati omologhi, perchè i poligoni simili dividendosi in simili triangoli, ne risultano simili piramidi triangolari, ciascuna coppia essendo in triplicata ragione de' lati omologhi, la quale riesce la medesima in ciascuna coppia de' lati corrispondenti in qualunque triangolo; e però la somma di tali piramidi triangolari erette sopra un poligono alla somma di altrettante simili erette sopra l'altro poligono simile è pure in triplicata ragione dei loro lati omologhi (\*).

352. *Corollario II.* Anzi con un simile ragionamento si può provare che due qualunque poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi. In fatti partendo da due angoli solidi corrispondenti, si possono tirare nei due poliedri tanti piani (quasi colle stesse viste con cui nella proposizione XXI del lib. V si tirarono le linee per dividere i poligoni simili) i quali li dividano nello stesso numero di piramidi simili a due a due fra di loro: ciò fatto, stando tutte queste piramidi in ragion triplicata dei lati omologhi, sarà facile il provare che le loro somme o sia i due poliedri stanno nella stessa ragione.

### 353. PROPOSIZIONE IX. TEOR.

*Le piramidi triangolari equivalenti hanno le basi reciproche delle altezze, e quelle piramidi, le cui basi sono delle altezze loro reciproche, sono pure equivalenti.*

Imperocchè essendo le piramidi la terza parte dei prismi eretti sopra all'istesse basi e alle medesime altezze (348), quando le piramidi sono equivalenti, sono pure equivalenti i prismi, e quando i prismi sono equivalenti, sono equivalenti le piramidi; ma i prismi equivalenti hanno le basi reciproche delle altezze; e se le loro basi sono reciproche delle altezze, i prismi sono equivalenti (333); dunque ancora le piramidi, se equivalenti sono, hanno le basi reci-

---

(\*) Chi bramasse più disteso questo ragionamento, come quello del corollario seguente, potrà comporselo facilmente modellandolo su quello della proposizione XXI, lib. V. Quello pure che si è messo nella nota al n.º 330 potrà insegnare come s'abbiano a maneggiare le proporzioni per distendere la dimostrazione di alcuni enunciati nel testo in questo e nel seguente libro.

proche delle altezze; e se le basi loro sono reciproche delle altezze, debbono essere piramidi equivalenti; C. D. D.

354. *Corollario.* Ancora le piramidi che hanno le basi poligone, se sono equivalenti, avranno le basi reciproche alle altezze; e inversamente essendo le basi reciproche alle altezze, saranno piramidi equivalenti. Di fatto immaginiamo due piramidi triangolari di eguale altezza delle proposte, i cui triangoli di base siano equivalenti ai poligoni basi di quelle: saranno esse rispettivamente equivalenti alle proposte, e quindi equivalenti anche fra di loro: dunque esse avranno le basi reciproche alle altezze; dalla qual proporzione, se ai triangoli si sostituiscano i poligoni equivalenti, si rileva quanto si enunciò: si ragionerà similmente per la viceversa. Un simile discorso poteva tenersi sotto il numero 333 per provare la stessa proposizione nei prismi.

### 355. PROPOSIZIONE X. TEOR.

*I prismi e le piramidi che hanno basi equivalenti sono fra di loro come le altezze.*

Siano  $P, p$  i due prismi,  $A, a$  le loro altezze,  $B, b$  le loro basi; s'immaginino formati due quadrati  $Q, q$  equivalenti ai poligoni  $B, b$  (119), che riusciranno eguali fra loro per essere secondo l'ipotesi  $B = b$ , e quindi s'intenda sul quadrato  $Q$  eretto un parallelepipedo  $S$  alla stessa altezza  $A$  del prisma  $P$ , e similmente sul quadrato  $q$  un altro parallelepipedo  $s$  equiangolo ad  $S$ , all'altezza  $a$  del prisma  $p$ .

Poichè anche i parallelepipedi sono prismi, avremo (330)  $P : S :: B : Q$ ; ma  $B = Q$ , dunque  $P = S$ ; similmente si prova  $p = s$ . Ora i due parallelepipedi  $S, s$  sono tali che l'uno può considerarsi parte dell'altro, onde (322)  $S : s :: A : a$ , dove mettendo  $P, p$  per  $S, s$ , cui sono rispettivamente eguali in solidità,  $P : p :: A : a$ ; C. D. D.

Le piramidi godono della stessa proprietà, perchè sono le terze parti dei prismi sulle stesse basi eretti alla medesima altezza (349).

### 356. PROPOSIZIONE XI. TEOR.

*Il cono è sempre la terza parte del cilindro alla medesima altezza eretto sopra l'istessa base circolare EHM. (FIG. 171.)*

S'immaginino un cilindro ed un cono eretti sullo stesso cerchio di base EHM ad una stessa altezza, qualunque poi questa sia; per provare che il cono sta al cilindro come 1 : 3



faremo uso del principio generale del n.º 343 nel modo seguente. Inscritti al cerchio EHM prima il quadrato EHGF, poi l'ottagono, poi il poligono di 16 lati, ecc., s'intendano eretti sul quadrato, sull'ottagono, sul poligono di 16 lati, ecc. altrettanti prismi  $P, P', P'' \dots$  alla stessa altezza del cilindro a cui tutti riusciranno inscritti. Dico che l'eccesso in solidità del cilindro sul prisma  $P$  sarà meno della metà del cilindro, l'eccesso del cilindro sul prisma  $P'$  sarà meno della metà dell'eccesso antecedente, e così sempre, onde la differenza tra il cilindro e i successivi prismi potrà divenir minore d'ogni data (340). Per convincersi di ciò vuolsi prima, dal tener fisso il teorema che i prismi d'eguale altezza stanno come le basi, rilevare che il prisma, il quale sopra il quadrato circoscritto al cerchio di base potrebbe erigersi alla stessa altezza del cilindro, sarebbe il doppio del prisma inscritto; che il prisma, sempre a quell'altezza, eretto sul rettangolo HPQG sarebbe il doppio di quello eretto sul triangolo HNG, ecc.; poi applicare parola a parola alle differenze in solidità del cilindro sui successivi prismi inscritti quanto si è detto (341) per provare che la differenza in superficie del cerchio sui successivi poligoni inscritti poteva divenir minore d'ogni data. Se ora sul quadrato, sull'ottagono, sul poligono di 16 lati, ecc. immaginiamo erette altrettante piramidi  $p, p', p'' \dots$  alla medesima altezza del cono e aventi il loro vertice nel vertice istesso di questo cono, riusciranno esse tutte inscritte al cono, e con un ragionamento affatto simile al superiore si proverà che la differenza in solidità tra il cono e le successive piramidi può divenir minore di ogni assegnabile. Ciò premesso, stando (349)  $p : P :: 1 : 3$ , e anche  $p' : P' :: 1 : 3$ , e anche  $p'' : P'' :: 1 : 3$ , e così sempre, starà (343) anche il cono al cilindro come  $1 : 3$ ; C. D. D.

### 357. PROPOSIZIONE XII. TEOR.

*I cilindri egualmente alti sono come i cerchj ABT, EHM delle loro basi. (FIG. 171.)*

Facciasi nel cilindro che ha la base EHM l'iscrizione dei successivi prismi  $P, P', P'' \dots$  come nell'antecedente, e inscritti nel cerchio ABT simili poligoni a quelli che sono base dei prismi  $P, P', P'' \dots$  s'inscrivano in egual modo in quel cilindro altrettanti prismi  $p, p', p'' \dots$ . Uno qualunque dei primi prismi starà al suo corrispondente dei se-

condi come i poligoni di base o come i quadrati dei diametri delle basi (330, 338); onde avremo  $P:p :: (EG)^2 : (AC)^2$ ; ed anche  $P':p' :: (EG)^2 : (AC)^2$ , ecc., e però (343) anche il cilindro al cilindro come  $(EG)^2 : (AC)^2$  o come *cerch.* EHM : *cerch.* ABT (341); C. D. D.

358. *Corollario I.* I cilindri egualmente alti sono come i prismi egualmente alti fatti sopra simili poligoni inscritti nelle loro basi circolari.

359. *Corollario II.* I coni egualmente alti sono come le loro basi, e anche come le piramidi inscritte in essi sopra simili poligoni inscritti nelle loro basi circolari.

### 360. PROPOSIZIONE XIII. TEOR.

*I cilindri simili ABDC, EFHG, o i coni simili inscritti in essi sono in ragione triplicata de' diametri CD, GH delle loro basi. (FIG. 177.)*

Dall'asse del maggiore MI si tagli la parte IN uguale all'asse KL del minore, e pel punto N si faccia passare un piano parallelo alla base, che ci farà il cerchio QR. Indis' intenda eretto un prisma sopra il poligono CODP inscritto nella base circolare, che pervenga all'altezza dell'asse MI, e nella base GVH dell'altro cilindro sia pure un simile poligono inscritto GVHX, ed elevato un prisma all'altezza del cilindro LK. Il prisma dell'altezza MI a quello dell'altezza NI sarà come MI a NI (324) = LK; ma  $MI:LK :: CD:GH$  (per la similitudine de' cilindri (291)); dunque il prisma dell'altezza MI a quello della altezza NI è come semplicemente CD a GH. Ma il prisma dell'altezza NI all'altro inscritto dentro il minor cilindro, dell'uguale altezza LK, è come le base CODP alla simile base GVHX (330), cioè come il quadrato CD al quadrato GH (338); e però in ragione duplicata di CD a GH; dunque la ragione del prisma dell'altezza MI a quello dell'altezza LK è composta della semplice e della duplicata ragione dei diametri; e però è in ragione triplicata di essi CD, GH. Ma questi prismi accostandosi indefinitamente a' cilindri cui sono inscritti, secondo che si aumenta il numero de' lati delle loro basi, come tante volte si è detto, debbono avere la ragione medesima che detti cilindri (343); dunque essi cilindri simili sono pure in ragione triplicata de' loro diametri CD, GH. Ma i coni simili inscritti in detti cilindri essendo la terza parte di essi (356), sono nell'istessa ragione di essi cilindri

dunque anche i coni sono in triplicata ragione dei diametri delle loro basi  $CD, GH$ ; C. D. D.

361. *Corollario.* È manifesto essere tanto i cilindri quanto i coni simili in triplicata ragione ancora de' loro assi proporzionali a' diametri.

### 362. PROPOSIZIONE XIV. TEOR.

*Se un cilindro è segato con un piano parallelo alle basi, le sue porzioni saranno come i loro assi.*

Questa proposizione si prova come la XXIII. del libro precedente, che nel corollario avevamo già estesa ai prismi di qualunque sorta.

### 363. PROPOSIZIONE XV. TEOR.

*I coni e i cilindri di base uguale sono tra loro come le altezze.* (FIG. 177.)

Quanto a' cilindri di base uguale, è come se fossero porzioni segate dal medesimo cilindro col piano parallelo alla base; che però essendo come i loro assi (362), sono come le altezze; e quanto a' coni che sono un terzo dei cilindri, ai quali sono inscritti (356), è chiaro dover essere ancor essi nell'istessa ragione degli assi.

### 364. PROPOSIZIONE XVI. TEOR.

*Ne' coni o cilindri equivalenti  $BAC, EDF$  le basi  $BC, EF$  sono reciproche alle altezze; cioè come  $DM$  ad  $AL$ ; e inversamente, qualunque volta sieno reciprocamente  $BC:FE::MD:AL$ , que' coni o cilindri saranno equivalenti.* (FIG. 178.)

Se le altezze cilindriche sono uguali, ancora le basi saranno uguali negli uguali cilindri: essendo poi disuguali, dalla maggiore  $DM$  si tagli la  $OM$  uguale alla minore  $AL$ , e si tagli il cilindro col piano  $IH$ , condotto pel punto dell'asse  $O$  parallelo alla base  $EF$ .

Sarà  $DM:OM(=AL)::EDF(=BAC):FOE$  (363); ma  $BAC:FOE::base\ BC:base\ EF$  (357); dunque  $DM:AL::base\ BC:base\ EF$ . Inversamente se  $DM:AL::base\ BC:base\ EF$ , posta  $OM=AL$ , sarà  $EDF:EOF::base\ BC:base\ EF::BAC:EOF$ ; dunque  $EDF=BAC$ . E lo stesso accade nei coni che sono la terza parte di essi cilindri; C. D. D.



## 365. PROPOSIZIONE XVII. TEOR.

*I cilindri ed i prismi stanno tra loro in ragion composta delle basi e delle altezze. (FIG. 178.)*

Siano BP, FK i due cilindri, e dal più alto FK tagliasi FH in altezza eguale a BP.

I due cilindri BP, FH avendo eguali altezze, saranno proporzionali alle basi (357); ed i due cilindri FH, FK avendo egual base, saranno proporzionali alle altezze (353); quindi si hanno le due proporzioni  $BP : FH :: BVCV : FTET$ ;  $FH : FK :: MO (= LA) : MD$ , che moltiplicate (220) ci danno  $BP \times FH : FH \times FK :: BVCV \times LA : FTET \times MD$ , e quindi (221)  $BP : FK :: BVCV \times LA : FTET \times MD$ ; C. D. D.

Pei prismi si fa la medesima dimostrazione (330, 355). Sono poi anche i coni e le piramidi in ragion composta delle basi e delle altezze, poichè i coni e le piramidi sono la terza parte dei cilindri e dei prismi.

## 366. PROPOSIZIONE XVIII. TEOR.

*Se i raggi AC, FO dei due semicircoli ABE, FGH si dividono proporzionalmente in M e N, di modo che sia  $AC : MC :: FO : ON$ , e nei punti M, N s'innalzino le perpendicolari MP, NQ,*

*Dico che sarà ancora  $AC : PM :: FO : QN$ . (FIG. 179.)*

Congiungansi le rette PC, QO, e l'angolo MCP sarà eguale a NOQ; poichè se fosse maggiore, facciasi  $MCR = NOQ$ , ed i due triangoli MCR, NQO saranno allora simili; per lo che avremo  $RC : CM :: QO : NO$ ; ma per ipotesi  $QO : NO :: PC : CM$ ; dunque  $RC : CM :: PC : CM$ ; dunque  $RC = PC$  il che è assurdo. Neppure l'angolo PCM potrebbe essere minore di QON; dunque gli sarà eguale.

Saranno dunque simili i due triangoli PCM, QON; quindi  $PC : PM :: QO : QN$ , ovvero  $AC : PM :: OF : QN$ ; C. D. D.

## 367. PROPOSIZIONE XIX. TEOR.

*Le sfere sono in triplicata ragione dei loro raggi. (FIG. 180.)*

Siano CAD, LMH due semicerchi che, ravvolgendosi attorno ai semidiametri AB, MN generino le mezze sfere. Si divida AB in un certo numero di parti uguali BE, ed egualmente dividasi MN nello stesso numero di parti uguali NK; si compiscano i rettangoli inscritti e circoscritti nel

semicircolo CAD, ed i soli inscritti nell'altro LMH. L'eccesso di tutt' i rettangoli circoscritti sopra gl' inscritti è la somma dei rettangoletti, dei quali ciascuno inscritto differisce dal suo circoscritto; e questa somma è eguale al rettangolo circoscritto CDFG.

Ora supponiamo che il semicerchio CAD coi rettangoli si ravvolga intorno all' immobile semidiametro AB; i rettangoli inscritti e circoscritti genereranno dei cilindri inscritti e circoscritti all' emisfero, posti gli uni sopra gli altri: e la somma degli eccessi (dei quali i circoscritti cilindri supereranno gl' inscritti) sarà eguale in solidità al cilindro circoscritto generato dal rettangolo CDFG.

Se dividasi il raggio AB in un doppio numero di parti eguali, che saranno le metà delle prime, e poi si costruiscano similmente i rettangoli inscritti e circoscritti che generino in egual modo i cilindri, la somma degli eccessi dei circoscritti sugl' inscritti sarà eguale in solidità ad un cilindro il quale riuscirà la metà di CF, e quindi sarà la metà dell'eccesso antecedente. Allo stesso modo si proverà che seguitando a dividere il raggio AB in un numero doppio di parti, l'eccesso totale dei circoli circoscritti sugl' inscritti diventa sempre la metà dell' antecedente, e quindi può divenir minore d' ogni solido assegnato (340).

Da ciò a più forte ragione si conchiude che la somma dei cilindri inscritti potrà farsi avvicinare all' emisfero in modo da differirne d' una quantità minore d' ogni assegnabile, e quindi se queste somme nei due emisferi conservino sempre fra loro la stessa ragione, dovranno stare nella stessa ragione anche gli emisferi e le sfere intere (343). Ora essendosi divisi i raggi BA, NM nello stesso numero di parti eguali, starà  $AB : BE :: MN : NK$ ; quindi pel lemma precedente  $AB : EI :: MN : KO$ ; le quali due proporzioni conducono a quest' altra  $BE : EI :: NK : KO$ . Dunque i due cilindri PI, QO sono simili (291), e però stanno come i cubi dei loro assi BE, NK (361); ma per essere  $BE : NK :: AB : MN$ , è anche  $(BE)^3 : (NK)^3 :: (AB)^3 : (MN)^3$ , e però  $PI : QO :: (AB)^3 : (MN)^3$ . Nella stessa maniera si proverà che due altri cilindri qualunque che si corrispondono nei due emisferi stanno come i cubi dei raggi, e però anche la somma di tutti quelli di un emisfero alla somma di tutti quelli dell' altro emisfero come i cubi dei raggi (239), e ciò sempre qualunque sia il numero dei cilindri; dunque anche le sfere stanno in questa ragione; C. D. D.

## LIBRO VIII.

DEI PRINCIPALI TEOREMI D' ARCHIMEDE SUL CILINDRO  
E SULLA SFERA.

368. *Scolio.* I precedenti libri si riferiscono alla prima epoca della geometria, cioè alla geometria dei tempi di Euclide, e contengono in massima parte gli elementi composti da questo grand' uomo. Il presente si riferisce alla seconda epoca, cioè alle scoperte d' Archimede.

*Definizioni.*

369. I.<sup>o</sup> *Settore di sfera* chiamasi il solido generato dal ravvolgimento di un settor circolare attorno ad un suo raggio.

370. II.<sup>o</sup> *Segmento di sfera* è quel solido generato da un segmento circolare che avvolgesi attorno il raggio che divide in mezzo la corda e l' arco del segmento.

*Assiomi.*

371. I.<sup>o</sup> Di due linee curve o composte di rette, o di rette e curve, le quali terminano agli stessi estremi e volgono la concavità dalla medesima parte, è sempre maggiore quella che entro di sè comprende l'altra. Abbiamo anche altrove citato questo assioma (64).

372. II.<sup>o</sup> Di due superficie curve o composte di superficie piane, o di piane e curve, le quali terminano agli stessi estremi e volgono la concavità dalla medesima banda, è maggiore quella che comprende entro di sè l'altra.

## 373. PROPOSIZIONE PRIMA. TEOR.

*Le circonferenze dei cerchj stanno tra loro come i raggi o come i diametri. (FIG. 171.)*

Come sta il raggio  $mC$  al raggio  $nG$ , così stia la circonferenza  $VKST$  ad una retta  $W$ ; dico che la retta  $W$  dovrà esser eguale all'altra circonferenza  $LONM$ .

In fatti sia, s'è possibile, la circonferenza  $LONM$  maggiore della linea  $W$ , e la superi di una quantità o linea  $Z$ , inscriviamo nel cerchio un quadrato, quindi un ottagono, e così di mano in mano, e sarà il contorno del quadrato minore di quello dell' ottagono; questo minore di quello del poligono di 16 lati (371), e così via via: tutti questi contorni in conseguenza si avvicineranno tanto più alla lunghezza della periferia, quanto più cresce il numero dei loro



lati, dalla quale potranno differire d'una quantità minore di qualunque data. Imperocchè se  $EpL$  rappresenta il lato di un simile poligono circoscritto al circolo (\*), starà il lato circoscritto al lato inscritto, ovvero tutto il contorno del poligono circoscritto a tutto il contorno dell'inscritto:  $np : nq$ ; quindi la differenza dei due contorni sarà proporzionale a  $pq$ ; ma  $pq$  può divenire minore di qualunque data grandezza col crescere il numero dei lati (\*\*); dunque anche la differenza tra un poligono circoscritto ed il suo simile inscritto potrà divenir minore di qualunque grandezza data; ma il contorno di un poligono circoscritto è maggiore della periferia, e questa è maggiore del contorno dell'inscritto (371); dunque a maggior ragione la differenza tra la periferia ed un poligono regolare inscritto potrà divenir minore di qualunque grandezza data.

Sia ora  $EQHNGMFL$  quel poligono il cui contorno differisce dalla circonferenza di una grandezza minore della assegnata  $Z$ , ed il contorno di questo poligono sarà allora maggiore della linea  $W$ . Inscrivasi nell'altro cerchio un simile poligono  $AKBSCTDVA$ , e si avrà (339)  $mC : nG ::$  contorno  $AKB$  ecc. : cont.  $EOH$  ecc.; ma per ipotesi  $mC : nG ::$  circonferenza  $VKST : W$ ; dunque cont.  $AKB$  ecc. : cont.  $EOH$  ecc. :: cir.  $VKST : W$ ; ma il contorno  $AKB$  ecc. è minore della circonferenza cui è inscritto; quindi anche il contorno  $EOH$  ecc. sarà minore di  $W$ ; ma lo troviamo maggiore, sarebbe perciò nel tempo stesso maggiore e minore: il che è assurdo; dunque non può la linea  $W$  esser minore della circonferenza  $LONM$ . Similmente usando i perimetri de' poligoni circoscritti, si dimostrerà che non le può essere maggiore; le sarà dunque eguale; e però cir.  $VKST : \text{cir. } LONM :: mC : nG :: 2mC : 2nG$ ; C. D. D.

(\*) Di tali poligoni e della loro similitudine si ragiona qui dopo al n.º 402, e può fin d'ora vedersi quanto ivi sta esposto.

(\*\*) Potrebbe cercarsi ancora qualche dimostrazione sul divenire  $pq$  minore d'ogni data. Ora essendo (101)  $(nL) = (nq)^2 + (qL)^2$ , se ne deduce (vedasi da chi non sa l'algebra la dimostrazione posta qui dopo al n.º 426)  $nq = \sqrt{(nL)^2 - (qL)^2}$ , e quindi per essere  $pn = nL$ ,  $pq = nL - \sqrt{(nL)^2 - (qL)^2}$ , dalla quale espressione si vede che  $pq$  diventa più piccola, quanto più lo diventa  $qL$ , riducendosi a zero quando  $qL = 0$ . Ma  $qL$  può divenir minore d'ogni data essendo la semicorda di un arco che si suddivide sempre per metà (340); dunque lo stesso succede anche di  $pq$ .

374. *Corollario*. Quindi si ha che una circonferenza sta ad un'altra, come il contorno di qualunque poligono inscritto nella prima al contorno di un simile poligono inscritto nella seconda.

375. *Corollario*. Dal modo col quale si è dimostrata questa proposizione può dedursi generalmente „ che se in due „ date grandezze superficiali o solide inscrivansi o circoscrivansi altre grandezze le quali conservando sempre la stessa proporzione tra loro, a quelle continuamente si avvicinino a segno di differirne di una quantità minore di ogni data, la stessa ragione che sarà tra le quantità inscritte o circoscritte, sarà ancora tra le due grandezze intorno a cui queste erano circoscritte o inscritte. „

376. *Scolio*. Questo principio geometrico è più generale di quello contenuto nel corollario II (343) (\*). Quello era la base del *metodo di Esaustione*, anzi un tal metodo consisteva in quel principio, ed il principio del precedente corollario nelle mani di Archimede, e di quei che lo hanno seguito di poi, ha dato nascita al così detto *metodo dei limiti*.

(\*) Più generale è questo principio di quello del 343, perchè quello limitava le sue viste alle quantità inscritte, e questo può estendersi a quantità che si avvicinano continuamente in qualunque modo a due altre; quello assegnava un modo solo, secondo il quale dovevano scemare le successive differenze fra le grandezze proposte e le altre in esse inscritte, onde divenir minori d'ogni quantità assegnabile: e in questo supponendo che si sappia essere possibile in mille maniere di pervenire alle differenze minori d'ogni quantità data, non si prescrive alcuna legge ai successivi avvicinamenti. Ma qui appunto è dove vuolsi aver cautela nell'usare di questo secondo principio. Nel primo Euclide vuole che nulla si pronunzii se prima non è dimostrato che colle successive grandezze inscritte si toglie sempre ai residui la loro metà o più di essa, e in ciò pretende troppo, perchè anche togliendo sempre ai residui il loro terzo, anche togliendo sempre il loro quarto, ecc., si giunge ad un residuo minore d'ogni assegnabile; ma a gran ragione esige che s'indaghi prima se il residuo possa divenir tale, perchè egli ben sapea che da una quantità continuando anche senza fine a levar delle parti, può il residuo mantenersi sempre tutt'altro che inassegnabile. Per darne fra i mille un esempio, se da una quantità voi sottraete il suo terzo, e poi dal resto una parte eguale al terzo della già sottratta, e poi dal seguente resto ancora una parte eguale al terzo della ultimamente tolta, e così sempre; il residuo anche dopo una infinità di sottrazioni sarà l'intera metà della pri-

## 377. PROPOSIZIONE II. TEOR.

*Il cerchio è eguale in superficie ad un triangolo che abbia per base la periferia, e per altezza il raggio. (FIG. 181.)*

Si circoscriva al cerchio  $F'HG$  un poligono regolare, per esempio un esagono  $ABCDEF$ , e preso  $LM$  eguale al contorno del poligono, e nel nostro caso al sestuplo di un lato  $AB$ , vi si alzi la perpendicolare  $LP$  eguale al raggio  $E'F'$ . Congiunta  $PM$ , il triangolo  $PLM$  sarà equivalente al poligono. In fatti i triangoli  $AE'B$ ,  $PLM$  avendo eguali altezze, saranno tra loro come le basi; dunque  $AE'B$  sarà la sesta parte di  $PLM$ ; ma  $AE'B$  è anche la sesta parte di tutto il poligono; dunque  $PLM$  sarà eguale in superficie all'intero poligono  $ABC$  ecc. Rappresentiamo ora per  $LQ$ , la circonferenza  $F'HG$ , e congiunta  $PQ$ , dico che il triangolo  $PLQ$  eguaglierà in superficie il cerchio  $F'HG$ .

Di fatto se circoscriveremo al cerchio dei poligoni sempre di un maggior numero di lati, e faremo i triangoli  $PLR$ , che ad essi sono equivalenti; come i poligoni si avvicineranno al cerchio per differirne di una grandezza minore di ogni data (\*), in egual modo i triangoli che a quei poligoni corrispondono, si avvicineranno sempre al triangolo  $PLQ$ , perchè  $PLR : PLQ :: LR : LQ$  (224), e  $LR$  può farsi differire meno d'ogni grandezza lineare da  $LQ$  (373); dunque la ragione ch'è tra un poligono  $ABC$  ecc. ed il triangolo  $PLM$ , sarà ancora tra il cerchio ed il triangolo  $PLQ$  (375); dunque il cerchio  $F'HG$  eguaglierà in superficie il triangolo  $PLQ$ ; C. D. D.

378. *Corollario I.* Dunque il rettangolo contenuto dalla mezza periferia e dal raggio, ovvero dall'intera periferia e dalla metà del raggio, è equivalente al cerchio.

379. *Corollario II.* Egualmente il rettangolo contenuto

ma grandezza: di queste cose chi sa l'algebra si convincerà facilmente. Badi dunque lo studioso a non conchiudere troppo presto che una quantità, la quale si avvicina continuamente ad un'altra, lasci finalmente una differenza minore d'ogni assegnabile; ma se ne convinca prima o alla maniera di Euclide, o in un'altra non men sicura.

(\*) Questo si può provare alla maniera di Euclide, come si è fatto dei poligoni inscritti al n.° 341; anzi se avessimo adoperati i poligoni inscritti in vece dei circoscritti, come era indifferente, la cosa era già colà dimostrata.



dal quarto della periferia e dal diametro equivarrà al cerchio; onde il cerchio starà al quadrato circoscritto come il quarto della circonferenza sta al diametro.

### 380. PROPOSIZIONE III. TEOR.

*La superficie (\*) di un cilindro (288) eguaglia il rettangolo contenuto dall'asse del cilindro e dalla periferia della base.*

Circoscrivansi ed inscrivansi al cerchio, base di un cilindro, due poligoni regolari dello stesso numero di lati, e sopra questi s'innalzino due prismi retti i quali vadano a terminare al piano superiore della base del cilindro. Uno di questi prismi sarà circoscritto, l'altro inscritto al cilindro. Ciascuno di questi prismi avrà tante facce (escluse le basi) quanti sono i lati di quei poligoni, e ciascuna faccia sarà un rettangolo che ha per base un lato di poligono, e per altezza quella del prisma o del cilindro; così la superficie del prisma circoscritto sarà eguale al rettangolo contenuto dall'altezza del cilindro e dal contorno del poligono circoscritto: e la superficie del prisma inscritto sarà eguale al rettangolo contenuto dalla medesima altezza e dal contorno del poligono inscritto. Ora quei due contorni, moltiplicando il numero dei lati dei poligoni, possono differire tra di loro di una quantità minore di ogni data; dunque di questa proprietà godranno anche le superficie dei due prismi; dunque a maggior ragione la superficie di un prisma circoscritto potrà differire dalla superficie del cilindro di una quantità minore di ogni data, giacchè la superficie del cilindro è più piccola di quella del prisma circoscritto, e più grande di quella dell'inscritto (372).

Ora facciansi due rettangoli, l'uno che abbia per altezza quella del cilindro, e per base il contorno di un poligono circoscritto; l'altro che abbia la stessa altezza, e per base la circonferenza del cerchio. Il primo rettangolo eguaglierà la superficie del prisma, ed il secondo, io dico, eguaglierà la superficie del cilindro.

Di fatto, se circoscriviamo al cilindro dei prismi di un

(\*) Nella parola superficie non comprendonsi le basi: volendo comprendere anche queste, si direbbe *superficie totale*. Lo stesso vale per la superficie dei prismi, delle piramidi e dei coni.

maggior numero di facce, e facciamo i rettangoli corrispondenti; come le superficie di quei prismi si avvicinano sempre a quella del cilindro per differirne di una quantità minore di ogni data, in egual modo quei rettangoli si avvicineranno al rettangolo fatto dall'altezza del cilindro e dalla circonferenza, stando con esso nella ragion delle basi, ragione i cui due termini possono (373) farsi differire meno d'ogni quantità data.

Dunque come sta la superficie di un prisma a quella del rettangolo che ha la stessa di lui altezza e la base eguale al contorno del poligono: così starà la superficie del cilindro a quella del rettangolo fatto dall'altezza stessa e dalla circonferenza (375). Ma i primi due termini di questa proporzione si eguagliano; si eguaglieranno quindi anche i secondi: dunque la superficie di un cilindro è uguale al rettangolo contenuto dalla sua altezza e dalla periferia della sua base; C. D. D.

381. Rappresentandosi le superficie cilindriche per dei rettangoli, saranno, in conseguenza, a loro comuni le proprietà di queste figure; quindi 1.<sup>o</sup> i cilindri egualmente alti avranno le superficie proporzionali alle periferie delle basi, e perciò anche ai diametri, 2.<sup>o</sup> le superficie cilindriche di basi eguali saranno proporzionali alle loro altezze; 3.<sup>o</sup> le cilindriche superficie simili hanno la ragione duplicata dei diametri delle loro basi, ed anche la ragion duplicata dei loro lati, cioè delle loro altezze; 4.<sup>o</sup> le superficie cilindriche stanno tra loro in ragion composta delle altezze e dei diametri delle basi; 5.<sup>o</sup> le superficie cilindriche equivalenti avranno le altezze in ragion reciproca delle periferie o dei diametri delle basi.

382. La superficie totale di un cilindro eguaglia un rettangolo contenuto dalla periferia della base, e da una retta che sia la somma dell'altezza del cilindro e del raggio (377).

### 383. PROPOSIZIONE IV. TEOR.

*Un cilindro eguaglia in solidità un parallelepipedo rettangolo della stessa altezza, la cui base sia un rettangolo equivalente al cerchio base del cilindro.*

Inscrivansi nel cilindro i successivi prismi  $P, P', P''$ .... come al 356, e tutti i loro poligoni di basi si mutino (99) in tanti rettangoli aventi un lato comune col rettangolo proposto che equivale al cerchio; poi sopra di questi si erigano

altrettanti parallelepipedo rettangoli  $p, p', p'' \dots$  della stessa altezza del cilindro. Come i prismi  $P, P', P'' \dots$  si avvicinano al cilindro in modo da differirne d'una quantità inasognabile, così i parallelepipedo  $p, p', p'' \dots$  stando come le basi, si avvicinano a quello che ha per base il rettangolo equivalente al cerchio; ma è sempre (330)  $P = p; P' = p'; P'' = p''$ , ecc; dunque anche il cilindro equivale a quel parallelepipedo (375); C. D. D.

384. *Corollarj.* Un cilindro ed un prisma di eguale altezza stanno fra loro come il cerchio base del cilindro al poligono base del prisma. Perchè intendasi (383) cangiato il cilindro in un parallelepipedo rettangolo di eguale altezza colla base equivalente alla base circolare, questo parallelepipedo starà al prisma come il suo rettangolo di base al poligono (330), e mettendo il cilindro pel parallelepipedo equivalente, e il cerchio pel rettangolo equivalente, si ha la proporzione enunciata.

385. Un cono equivale ad una piramide che abbia la stessa altezza, e per base un poligono equivalente al cerchio base del cono.

386. Un cono ad una piramide di eguale altezza sta come il suo cerchio di base al poligono base di essa.

### 387. PROPOSIZIONE V. TEOR.

*Trovare un cerchio di superficie eguale a quella di un dato cilindro. (FIG. 182.)*

La superficie del cilindro HC essendo eguale al rettangolo contenuto dalla periferia ABCD e dall'altezza o lato del cilindro AH, e la superficie della sua base essendo eguale al rettangolo contenuto dalla stessa periferia e dalla metà del raggio ED, starà la superficie del cilindro a quella della base ABCD, come AH sta ad  $\frac{ED}{2}$ , ovvero come 2 AH ad ED.

Ora si prenda una media proporzionale (250) LN tra 2 AH ed ED, e come raggio, descrivono un cerchio NOP, sarà questo il ricercato cerchio eguale in superficie alla superficie cilindrica. In fatti i due cerchj ABCD, NOP staranno come i quadrati dei loro raggi ED, LN (341); ed essendo ED, LN, 2 AH tre linee continuamente proporzionali, i quadrati di ED, LN saranno tra loro come la prima ED alla terza 2 AH (259); dunque i due cerchj NOP, ABCD



saranno tra loro come  $2AH:ED$ ; ma nella stessa ragione sta la superficie cilindrica al cerchio  $ABCD$ ; dunque la superficie cilindrica uguaglierà il cerchio  $NOP$ ; C. D. F.

### 388. PROPOSIZIONE VI. TEOR.

*La superficie di un cono eguaglia il triangolo che ha per base la periferia della base del cono, e per altezza il lato del cono (\*). (FIG. 183.)*

Si circoscriva al circolo  $BOI$ , base del cono retto  $ABOI$ , un poligono regolare  $CDEFGH$ , dai cui angoli conducansi le rette al vertice del cono  $A$ ; avremo allora formata una piramide circoscritta al cono, la quale avrà tante facce triangolari eguali quanti sono i lati del poligono. Facciansi ora due triangoli  $LMP$ ,  $LMQ$  dotati della stessa altezza  $LM$  uguale ad un apotema del cono  $AB$ , e le cui basi siano  $MP$  contorno del poligono, e  $MQ$  periferia del cerchio.

Con un ragionamento simile a quello fatto per le superficie cilindriche dimostreremo che, moltiplicando le facce della piramide, la superficie di questa si approssimerà tanto a quella del cono, a segno di differirne di una quantità minore di ogni data; che la superficie della piramide eguaglierà sempre quella di un triangolo  $LMP$  che abbia per base il contorno del poligono su cui appoggiasi la piramide, e per altezza l'apotema del cono; e che in fine pel principio (375) la superficie del cono sarà eguale al triangolo  $LMQ$  che ha per altezza l'apotema o lato, e per base la circonferenza della base del cono; C. D. D.

389. *Corollarj.* La superficie del cono sarà in conseguenza eguale al rettangolo che ha per base la periferia, e per altezza la metà dell'apotema del cono, ovvero al rettangolo che ha per altezza l'apotema, e per base la semiperiferia.

390. Risulta dalla precedente proposizione che le superficie coniche seguiranno le leggi stesse dei triangoli. Così 1.° le superficie coniche, le quali hanno eguali lati o apotemi, saranno proporzionali alle periferie, e quindi ai diametri delle loro basi; 2.° quelle di egual base seguiranno la ragione degli apotemi; 3.° le superficie coniche simili

---

(\*) Chiamo *lato del cono o apotema* l'ipotenusa del triangolo rettangolo che genera il cono, e questa è la linea retta che dal vertice va a qualunque punto della periferia della base.

staranno tra loro in ragione duplicata dei diametri delle loro basi, ed anche in ragione duplicata dei loro lati od apotemi; 4.° due qualunque di queste superficie sono in ragion composta degli apotemi e dei diametri delle basi; 5.° due superficie coniche equivalenti hanno gli apotemi in ragion reciproca dei diametri delle basi.

### 391. PROPOSIZIONE VII. TEOR.

*La superficie di un cono sta alla sua base come l'apotema al raggio della base. (FIG. 183.)*

In fatti tanto quella superficie quanto quella base sono eguali a due triangoli i quali hanno per basi la stessa periferia, e per altezza l'apotema ed il raggio; sono esse adunque proporzionali a quelle altezze; C. D. D.

392. *Corollarj.* La superficie di un cono generato dalla rivoluzione di un triangolo equilatero ABD che si ravvolge attorno alla perpendicolare AF è doppia del cerchio BGDE. (FIG. 184.)

393. La superficie del cilindro è alla superficie del cono sulla stessa base eretto alla medesima altezza come l'asse del cilindro alla metà dell'apotema del cono. Queste due superficie in fatti sono espresse da due rettangoli (380, 389), i quali hanno per basi la stessa periferia, e per altezze l'asse del cilindro e la metà dell'apotema del cono.

### 394. PROPOSIZIONE VIII. PROBL.

*Trovare un cerchio che sia eguale alla superficie di un cono. (FIG. 184.)*

La superficie conica ABGDE sta al cerchio BGDE come  $BA : FB$  (391). Ora trovisi una media proporzionale tra BF e BA, la quale sia LM; io dico che il cerchio descritto col raggio LM sarà uguale alla superficie conica ABGDE.

In fatti il cerchio BGDE sta al cerchio fatto con LM come il quadrato di FB al quadrato di LM (341); ma il quadrato di FB al quadrato di LM sta come  $FB : BA$ , per essere FB, LM, BA continuamente proporzionali; dunque il cerchio BGDE sta al cerchio del raggio LM come  $FB : BA$ ; ma in questa stessa ragione stava il cerchio BGDE alla superficie conica; dunque la superficie conica ABGDE è eguale al cerchio del raggio LM; C. D. F.

395. *Lemma.* Un trapezio ABCD, di cui due lati AB, CD

siano paralleli, è equivalente al rettangolo contenuto dall'altezza  $AF$  e dalla  $GE$  parallela alla base  $DC$ , condotta dal punto  $G$  preso nella metà di  $AD$ . (FIG. 185.)

In fatti condotte dai punti  $G$  ed  $E$  le perpendicolari  $KP$ ,  $HI$  a quei lati paralleli, potremo dimostrare che i due triangoli  $GPD$ ,  $EIC$  entro il trapezio sono eguali ai due  $GKA$ ,  $EBH$  fuori di lui; quindi sarà  $ABCD = KHIP$ , cioè al rettangolo contenuto dalla base  $PI$  ovvero  $GE$ , e dall'altezza  $KP$  ovvero  $AF$ .

### 396. PROPOSIZIONE XI. TEOR.

*La superficie del tronco di cono  $ABED$  è eguale al rettangolo contenuto dalla porzione dell'apotema  $AD$  e dalla circonferenza  $mpn$  della sezione che si fa con un piano parallelo alle basi  $AB$ ,  $ED$  ed equidistante da esse.* (FIG. 186.)

Costruiscasi il triangolo rettangolo  $GIK$ , di cui la base  $IK$  sia la periferia  $DE$ , e l'altezza  $GI$  sia l'apotema  $FD$  dell'intero cono. Prendansi  $GH = FA$ ,  $GL = Fm$ , e condotte  $HN$ ,  $LM$  parallele ad  $IK$ , dico primamente che queste eguagliano le periferie  $AB$ ,  $mn$ . In fatti nei triangoli simili  $FAB$ ,  $FDE$  è  $FD : FA :: DE : AB :: \text{perif. } DE : \text{perif. } AB$  (373) e negli altri simili  $GHN$ ,  $GIK$ ,  $GI : GH :: IK : HN$ ; confrontando termine per termine queste due proporzioni, si ha  $GI = FD$ ,  $GH = FA$ ,  $IK = \text{perif. } DE$ ; dunque bisogna che sia  $HN = \text{perif. } AB$ ; similmente si prova  $LM = \text{perif. } mpn$ . Ora essendo la superficie conica  $FDE$  eguale al triangolo  $GIK$  (388), e la superficie conica  $FAB$  eguale al triangolo  $GHN$ , sarà la superficie del tronco di cono  $ABED$  eguale al trapezio  $HNKI$ , cioè eguale al rettangolo contenuto da  $HI$  e da  $LM$  (395), ovvero da  $AD$  e dalla periferia  $mpn$ ; C. D. D.

397. *Corollario.* Essendo poi  $LM$  eguale alla metà della somma di  $HN$  con  $IK$ , ciò ch'è facile a dimostrarsi (\*),

(\*) Per veder ciò basta abbassare dai punti  $M$ ,  $N$  e dalla metà di  $HN$  tre perpendicolari ad  $IK$ . Resterà  $LM$  divisa in tre parti, di cui una eguaglia una delle due fra loro eguali in cui è divisa  $HN$ , e le altre due si veggono eguali a due delle quattro in cui è divisa  $IK$ , le quali a due a due si eguagliano pure fra loro; quindi riesce evidente l'enunciato.



sarà anche la suddetta superficie eguale al rettangolo contenuto dalla porzione dell'apotema  $AD$  e dalla semisomma delle due periferie delle basi.

### LEMMI.

398. Circoscritto ad un cerchio un poligono regolare di un numero pari di lati come  $ABCDEF\dots$ , la diagonale  $AF$  che unisce due suoi angoli opposti passa pel centro del circolo. In fatti intendansi condotte dal centro  $O$  le rette a tutti gli angoli del poligono; da una parte delle due rette  $AO$ ,  $OF$  si ha un'egual somma di angoli eguali che dall'altra parte; quindi ciascuna somma è eguale a due retti, e però le due  $AO$ ,  $OF$  formano una retta sola. (FIG. 187.)

Se l'anzidetto poligono circoscritto ha un numero tale di lati che la sua metà sia un numero dispari, vi saranno due suoi lati opposti, come  $CD$ ,  $LI$  paralleli alla diagonale  $AF$ : se poi questa metà è ancora un numero pari, ciò non avrà luogo. In ambi i casi due lati, come  $BC$ ,  $ML$  che si corrispondono per egual distanza da un'estremità  $A$  della diagonale  $AF$ , se si prolungassero, andrebbero a concorrere in un punto di questa diagonale prolungata. Il raggio poi condotto al punto di contatto  $Q$  d'un lato qualunque  $BC$  è perpendicolare a questo lato e lo divide per mezzo. Tutte queste cose o sono chiare per sè, o volendone la dimostrazione, essa è assai facile.

399. Abbiansi tre grandezze  $A$ ,  $B$ ,  $C$ : se le due differenze  $A - B$ ,  $B - C$  tra la prima e la seconda, e tra la seconda e la terza possono diventare minori d'ogni grandezza assegnabile, tale può anche diventare la differenza  $A - C$  tra la prima e la terza. In fatti è facile provare che tale differenza eguaglia la somma delle altre due, e quindi necessariamente diventa inassegnabile quando inassegnabili diventano le due parti di cui è composta.

Viene da ciò che se una retta si avvicina sempre ad un'altra in modo da differirne d'una grandezza lineare minore d'ogni data, anche il quadrato fatto sull'una al quadrato fatto sull'altra si avvicina in modo da differir meno d'ogni grandezza superficiale. Perchè siano  $A$ ,  $B$  le due rette, e sia  $C$  una terza proporzionale: essendo  $A : B :: B : C$ , quando  $B$  avesse differenza inassegnabile con  $A$ , l'avrebbe anche  $C$  con  $B$ , quindi anche  $C$  con  $A$ : ma quei due quadrati stanno come  $A : C$ ; dunque ecc. Usando di una quarta continua proporzionale, si proverà similmente che anche i cu-

bi fatti su quelle due rette possono avvicinarsi fra loro a segno da lasciare una differenza in solidità minore d'ogni assegnabile.

#### 400. PROPOSIZIONE X. TEOR.

*Circoscritto al cerchio  $RQSq$  il poligono  $ABCD \dots$  di un numero pari di lati, se facciasi rotare tutta la figura intorno la retta  $BF$ , il cerchio descriverà una sfera, e il poligono un solido, la di cui superficie sarà eguale al rettangolo contenuto dalla circonferenza  $RQSq$  e dall'asse  $AF$ . (FIG. 187.)*

Il solido generato dalla rotazione del poligono sarà terminato alle estremità da due coni generati dai triangoli  $ABb$ ,  $FEe$ , e in tutto il restante sarà formato di molti tronchi di coni, come quello generato dal trapezio  $BCcb$ , in mezzo ai quali potrà esservi o non esservi un cilindro generato dal rettangolo  $CDdc$  (398), ma che da noi si suppone per maggiore generalità. Condotte tutte le rette  $BbM$ ,  $QPq$ , ecc., che riescono perpendicolari all'asse, faremo vedere che la superficie di ciascuna delle parti di questo solido eguaglia il rettangolo contenuto dalla circonferenza  $RQSq$  e dal particolare pezzo dell'asse che ad essa parte corrisponde.

Incomincisi dalla superficie del cono generato da  $ABb$ . Condotto il raggio  $Oy$  perpendicolare ad  $AB$ , i due triangoli  $ABb$ ,  $AOy$  rettangoli ed aventi in  $A$  un angolo comune sono simili, onde  $Ab : Ay :: Bb : Oy :: (373) \text{perif. } Bb : \text{perif. } Oy (= RQSq)$ ; e però  $Ab \times \text{perif. } RQSq = Ay \times \text{perif. } Bb$  (228); ma quest'ultimo rettangolo eguaglia la superficie del cono  $ABb$  (389); dunque tal superficie eguaglia il rettangolo contenuto dalla *perif.*  $RQSq$  e dal pezzo  $Ab$  dell'asse.

Si passi alla superficie di un qualunque tronco di cono. Condotto il raggio  $OQ$  sul lato  $BC$ , e  $Bn$  perpendicolare a  $Cc$ , i due triangoli  $OPQ$ ,  $BCn$  riescono simili perchè sono rispettivamente simili ai triangoli  $xQz$ ,  $BQx$ , i quali risultando dal triangolo rettangolo  $BQz$  per mezzo della perpendicolare  $Qx$  sono simili fra di loro (243). Si avrà dunque  $Bn (= bc) : BC :: PQ : OQ :: \text{perif. } PQ : \text{perif. } OQ (= RQSq)$ ; quindi  $bc \times \text{perif. } RQSq = BC \times \text{perif. } PQ$ ; ma quest'ultimo rettangolo eguaglia la superficie del tronco (396); dunque tal superficie eguaglia anche il rettangolo contenuto dalla *perif.*  $RQSq$  e dal pezzo  $bc$  dell'asse.

Quanto alla superficie del cilindro che sta nel mezzo, essa eguaglia il rettangolo contenuto da  $cd$  e dalla periferia di  $ON$ , che è poi  $RQSq$  (380).

Dunque la superficie totale del solido circoscritto alla sfera sarà uguale alla somma dei rettangoli contenuti dalla circonferenza  $RQSq$  e da ciascuna delle porzioni  $Ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $de$ ,  $eF$ , cioè eguale al rettangolo contenuto dalla circonferenza  $RQSq$  e dall'asse  $AF$ ; C. D. D.

401. *Corollario.* Da questa dimostrazione segue che anche una qualunque porzione della superficie di quel solido, come  $ACL$ , generata da una porzione di poligono  $ABC$ , è eguale al rettangolo contenuto dalla circonferenza  $RQSq$  e dalla porzione dell'asse  $Ac$ .

402. *Lemma.* Se conducansi dal centro le rette  $OF$ ,  $OH$ , ecc. a tutti gli angoli del poligono circoscritto, e tutti i punti  $S$ ,  $X$ , ecc. in cui queste tagliano la circonferenza si congiungano colle rette  $SX$ ,  $XZ$ , ecc., risulterà un poligono inscritto  $SXZV$ .... simile al circoscritto, e che nella rotazione della figura genererà un solido inscritto alla sfera del quale tutte le parti saranno rispettivamente simili a quelle del solido circoscritto: e le due superficie di questi solidi col moltiplicare i lati dei poligoni generatori potranno farsi differire tra loro d'una quantità minore d'ogni data.

Che il poligono inscritto sia equiangolo al circoscritto, se ne convince subito chi riflette a due triangoli come  $HOF$ ,  $XOS$  che hanno l'angolo in  $O$  comune e sono isosceli, onde riescono equiangoli. In seguito si rilevano le proporzioni  $XS : HF :: OX : OH :: XZ : HI$ , ecc., onde i poligoni hanno anche i lati proporzionali, e però sono simili (210). Simili pure si provano i triangoli  $afS$ ,  $EeF$ , da cui  $af : fS :: Ee : eF$ ; dunque i coni generati da questi triangoli hanno i raggi delle loro basi proporzionali agli assi, e però sono simili (291). Quindi riesce facile provare che anche tutti i tronchi di coni corrispondentisi nei due solidi ed i cilindri di mezzo sono simili per avere i raggi delle basi proporzionali alle altezze; pertanto i due solidi constano di parti rispettivamente simili. Avendo poi provata la superficie del solido circoscritto eguale al rettangolo contenuto dal suo asse  $AF$  e dalla periferia di  $RO$ , sarà egualmente quella dell'inscritto eguale al rettangolo contenuto dal suo asse  $RS$  e dalla periferia di  $mO$ , la quale è una perpendicolare sul lato  $RW$ . Dunque dette  $S$ ,  $s$  quelle due superficie, avremo  $S : s :: 2AO \times \text{perif. } RO : 2RO \times \text{perif. } mO$ ; e mettendo pel rapporto  $2AO : 2RO$  il suo eguale  $lO : mO$ , e per l'altro  $\text{perif. } RO : \text{perif. } mO$  il suo eguale  $lO : mO$ , risulta  $S : s :: (lO)^2 : (mO)^2$ . Ma si è veduto (373) che le due rette  $lO$ ,  $mO$  possono dif-



ferire fra loro meno di ogni quantità assegnabile, e quindi anche i loro quadrati (399); dunque anche le superficie  $S, s$ , e a più forte ragione la superficie  $S$  e quella della sfera potranno ridursi a differenza inassegnabile.

### 403. PROPOSIZIONE XI. TEOR.

*La superficie della sfera è uguale al rettangolo contenuto dalla circonferenza del suo circolo generatore e dal suo diametro (FIG. 187.)*

Immaginiamo fatti due rettangoli i quali abbiano per altezza la circonferenza del cerchio  $RQSq$ , ed uno abbia per base l'asse  $AF$  del solido circoscritto alla sfera, l'altro il diametro  $RS$  della sfera; come il primo rettangolo eguaglia la superficie di quel solido (400), così io dico che il secondo rettangolo eguaglierà la superficie della sfera. In fatti se noi supponiamo che continuamente crescano di numero i lati del poligono circoscritto, la superficie del solido ch'esso genererà si avvicinerà sempre più alla superficie della sfera, a segno di differirne di una grandezza minore di ogni data (402); e se per ogni solido si fa il rettangolo corrispondente che ne uguagli la superficie, questo rettangolo, diminuendo sempre di base, si avvicinerà tanto al rettangolo contenuto dalla circonferenza  $RQSq$  e dal diametro  $RS$ , da differir da lui di una quantità minore di ogni data; dunque la ragione che avrà la superficie del solido di rivoluzione al rettangolo che gli corrisponde, sarà la stessa che quella che avrà la superficie della sfera al rettangolo contenuto dalla circonferenza  $RQSq$  e dal suo diametro (375); ma la prima è una ragione d'uguaglianza; quindi sarà tale anche la seconda; dunque la superficie della sfera eguaglierà il rettangolo contenuto dalla circonferenza  $RQSq$  e dal diametro  $RS$ ; C. D. D.

404. *Corollarj.* Da una dimostrazione simile a quella della precedente proposizione potremo (401) inferire che la superficie di un segmento di sfera  $gRV$  eguaglia un rettangolo contenuto dalla circonferenza del cerchio generatore  $RQSq$  e dall'altezza  $Rc$  del segmento.

405. La superficie della sfera è eguale a quattro cerchj generatori. Uno di questi cerchj in fatti eguaglia il rettangolo contenuto dalla periferia e dalla quarta parte del diametro, mentre la superficie della sfera è eguale a quello contenuto dalla periferia e dal diametro stesso.

Un cerchio che abbia per raggio il doppio del raggio della sfera eguaglia in superficie la sfera. In fatti, stando i cerchj come i quadrati dei raggi, quello che ha raggio doppio sarà dell'altro quadruplo, come appunto era la superficie della sfera.

#### 406. PROPOSIZIONE XII. TEOR.

*La superficie di un segmento di porzione sferica  $hQRqZ$  è eguale al cerchio che ha per raggio la corda  $Rh$  condotta dal vertice del segmento alla circonferenza della sua base  $hZ$ . (FIG. 187.)*

Imperciocchè, essendo (405) la superficie della sfera  $RQSq$  eguale ad un cerchio che ha doppio raggio di lei, cioè al cerchio che ha per raggio  $RS$ , e stando la superficie della sfera a quella del segmento  $hQRZ :: RS : Rd$  (essendo esse rappresentate da due rettangoli che hanno per altezza la stessa periferia e per basi  $RS$ ,  $Rd$ ), sarà anche il cerchio che ha per raggio  $RS$  alla superficie del segmento sferico  $hQRZ :: RS : Rd$ ; ma essendo  $RS$ ,  $Rh$ ,  $Rd$  continuamente proporzionali (245); sta  $RS : Rd ::$  il quadrato di  $RS$  al quadrato di  $Rh$  (259); dunque anche il cerchio che ha per raggio  $RS$  sta alla superficie del segmento come il quadrato di  $RS$  al quadrato di  $Rh$ ; ma come stanno tra di loro questi due quadrati, così sta il cerchio che ha per raggio  $RS$  al cerchio che ha per raggio  $Rh$ ; dunque starà la superficie del cerchio che ha per raggio  $RS$  alla superficie del segmento, come lo stesso cerchio al cerchio che ha per raggio  $Rh$ ; dunque la superficie del segmento  $hQRqZ$  sarà eguale al cerchio del raggio  $Rh$  (216); C. D. D.

#### 407. PROPOSIZIONE XIII. TEOR.

*La superficie del cilindro  $ECDF$  circoscritto alla sfera eguaglia la superficie della sfera.*

*E se il cilindro e la sfera si segano con piani  $KON$  perpendicolari all'asse  $AB$ , i singoli segmenti della superficie cilindrica eguaglieranno i singoli segmenti della superficie sferica. (FIG. 188.)*

Essendo la periferia della base del cilindro eguale ad un cerchio massimo della sfera, ed essendo l'asse o l'altezza del cilindro lo stesso diametro della sfera, il rettangolo contenuto dalla periferia della base e dall'altezza, il

quale esprime la superficie del cilindro (380), sarà eguale al rettangolo contenuto dalla periferia di un cerchio massimo o generatore della sfera e dal suo diametro, il quale rettangolo esprime la superficie della sfera (403); dunque quelle due superficie si eguaglieranno.

Di più il segmento cilindrico EKNF è eguale al rettangolo contenuto dalla periferia KN e dall'altezza o asse AO, ovvero dalla periferia di un cerchio massimo della sfera e dall'altezza AO; ma questo rettangolo appunto è eguale alla superficie del segmento sferico LAI; dunque la superficie del segmento cilindrico eguaglierà quella del corrispondente segmento sferico; C. D. D.

### LEMMI.

408. I due solidi, uno circoscritto e l'altro inscritto alla sfera come al n.º 402, possono ridursi a differir fra loro meno d'ogni grandezza data, e quindi a maggior ragione ciò avrà luogo tra il solido circoscritto e la sfera. (FIG. 187.)

Tali solidi sono formati di parti tutte proporzionali ai cubi dei lati dei poligoni generatori: in fatti quanto ai coni simili stando essi (361) come i cubi degli assi, si vede subito che stanno anche come i cubi degli apotemi; quanto ai cilindri, la cosa è già provata (361); e quanto ai tronchi simili di cono, si dimostra come segue (FIG. 183.)

Siano HCBM, GEDM i trapezj generatori, e compiansi i triangoli ABM, FDM, i quali riescono simili, come pure i triangoli ACH, FEG. Dunque *con.* ABM : *con.* FDM ::  $(AB)^3 : (FD)^3$ , ed anche *con.* ACH : *con.* FEG ::  $(AC)^3 : (FE)^3$ ; ma è facile provare  $AB : FD :: AC : FE :: CB : ED$ ; dunque in queste due proporzioni può sostituirsi alle ragioni  $(AB)^3 : (FD)^3$  ed  $(AC)^3 : (FE)^3$  la stessa  $(CB)^3 : (ED)^3$ ; ciò fatto, si ha (238) *con.* ABM — *con.* ACH : *con.* FDM — *con.* FEG ::  $(CB)^3 : (ED)^3$ , o sia i due tronchi come i cubi dei lati troncati. Poichè dunque la ragione dei cubi dei lati di quei poligoni riesce tutt'in giro la stessa, si prova al solito (339) che quei due solidi intieri stanno come  $(AM)^3 : (RW)^3$  (F. 187), ovvero come  $(IO)^3 : (mO)^3$ , perchè  $AM : RW :: IO : mO$ ; ma le due rette IO, mO (373), e quindi anche i loro cubi (399) possono differire di una quantità minore d'ogni assegnabile; dunque ciò pure avviene di quei due solidi.

409. Chiamando *tangente* di una sfera un piano che, esteso quanto si voglia, non ha colla di lei superficie che un punto comune; se questo piano sia QN, ed O il punto



di contatto con la sfera  $OEF$ , il raggio  $AO$ , condotto a quel punto di contatto, sarà perpendicolare al piano tangente  $QN$ . (FIG. 189.)

In fatti seghinsi il piano tangente e la sfera con due piani i quali passino pel punto di contatto  $O$  e pel centro  $A$ ; questi due piani produrranno due cerchj  $OEF$ ,  $OMH$  nella sfera, e due rette  $IL$ ,  $OC$  nel piano tangente, le quali saranno tangenti dei due cerchj nello stesso punto  $O$ ; dunque  $AO$  sarà perpendicolare alle due rette  $OC$ ,  $IL$  (148); e però  $AO$  sarà perpendicolare al piano  $QN$  (301); C. D. D.

#### 410. PROPOSIZIONE XIV. TEOR.

*Ogni sfera eguaglia in solidità un cono che ha per base una superficie eguale a quella della sfera, e per altezza il di lei raggio. (FIG. 190.)*

Primieramente è a vedersi come si possa alla sfera circoscrivere un poliedro che differisca da essa tanto in superficie che in solidità meno d'ogni grandezza assegnabile. S'immagini pertanto circoscritto il solido generato dal poligono (400, 408); poi a tutti i cerchj di base dei coni, dei tronchi di cono e del cilindro si concepiscano circoscritti dei poligoni di un egual numero di lati in modo che facendo passare dei piani per tali lati e pei vertici dei coni, risultino piramidi circoscritte a questi coni: facendo passare altri piani pei lati dei poligoni circoscritti alle due basi circolari dei tronchi di cono, si abbiano tronchi di piramide circoscritti ai tronchi di cono, e così anche un prisma circoscritto al cilindro. Risulterà tutt'insieme un poliedro il quale sarà circoscritto alla sfera, perchè tutte le sue facce non avendo di comune colla superficie del solido generato dal poligono altro che una retta la quale non ha comune che un punto colla sfera, non avranno anch'esse che un punto comune colla superficie della sfera, e quindi vi saranno tangenti (409). Ora si è detto quanto basta a provare (380, 383, 386, 389) che quel prisma, quelle piramidi, quei tronchi di piramide potranno farsi differire dai solidi cui sono circoscritti, tanto in superficie che in solidità, meno d'ogni grandezza assegnabile; dunque quel poliedro potrà differire meno d'ogni grandezza assegnabile tanto in superficie che in solidità da quel solido, il quale pure a sua posta può meno d'ogni grandezza assegnabile differire tanto in superficie che in solidità dalla sfera (402, 408); dunque (399) anche il polie-

dro potrà differire dalla sfera, cui è circoscritto meno d'ogni grandezza assegnabile tanto nella superficie che nella solidità.

Ciò premesso quel poliedro potrà risolversi in tante piramidi aventi per base una dopo l'altra le sue facce; e tutte per altezza (409) il raggio della sfera; e se costruiscasi una piramide LMNP, la cui base sia un poligono eguale alla superficie di quel poliedro, e la cui altezza sia il raggio della sfera, quel poliedro eguaglierà in solidità questa piramide, siccome facilmente si prova componendo (239) le proporzioni esprimenti come qualunque piramide di quello sta alla piramide egualmente alta LMNP nella ragione delle basi (347). Ora facciasi anche un cono ABED di asse eguale al raggio della sfera, e il cui cerchio di base eguagli la di lei superficie; starà (386) *con.* ABED : *pir.* LMNP come la base alla base, o sia come la superficie sferica a quella del poliedro, le quali potendo differire fra loro meno d'ogni grandezza assegnabile, lo stesso avverrà delle solidità di quel cono e di quella piramide. Il poliedro adunque circoscritto alla sfera si avvicina continuamente ad essa, e così la piramide LMNP al cono ABED, ed ambi lasciano differenze che possono ridursi minori d'ogni grandezza assegnabile; dunque la ragione che passa tra il poliedro e la piramide LMNP, che è di eguaglianza, dovrà passare tra la sfera e il cono ABED (375); e così la sfera è provata eguale in solidità a quel cono che ha per altezza il di lei raggio, e per base un cerchio eguale alla di lei superficie; C. D. D.

411. *Corollario.* Nel medesimo modo si può dimostrare che un settore di sfera eguaglia un cono, la cui base è la superficie del settore, e la cui altezza è il raggio della sfera.

#### 412. PROPOSIZIONE XV. TEOR.

*Il cilindro retto sta alla sfera cui è circoscritto, tanto rispetto alla solidità quanto alla superficie totale, in ragione sesquialtera, cioè come 3 : 2. (FIG. 188.)*

In fatti il cilindro retto ED è triplo del cono ACD avente la medesima base CD e la medesima altezza BA (356); ma il cono ACD è doppio del cono QCD che, avendo la medesima base, ha per altezza il raggio BQ (363); dunque il cilindro ED sarà sestuplo del cono QCD: ora la sfera ALBI equivale ad un cono che, avendo per altezza

BQ, ha per base la di lei superficie (410), cioè un circolo quadruplo di CGD; ma questo cono è quadruplo del cono QCD, perchè con egual altezza ha base quadrupla (357); dunque la sfera sarà quadrupla dello stesso cono QCD; quindi il cilindro retto ED starà alla sfera ALBI come il sestuplo del cono QCD al quadruplo di esso, cioè  $:: 6 : 4$  ovvero  $:: 3 : 2$ .

La superficie della sfera è eguale a quattro cerchj massimi (405). Pur anche a quattro cerchj massimi è eguale la superficie del cilindro retto circoscritto alla sfera (407). Ora la superficie totale del cilindro retto sarà eguale alla semplice superficie, più i due cerchj EHF, CGD che ne formano le basi; ma questi due cerchj sono eguali a due cerchi massimi della sfera; dunque la superficie totale del cilindro retto circoscritto alla sfera sarà eguale a sei cerchi massimi della sfera; dunque la superficie totale del cilindro retto sarà a quella della sfera inscritta come  $6 : 4$  ovvero  $3 : 2$ ; C. D. D.

413. *Corollario.* Dunque nei due solidi, cilindro retto circoscritto alla sfera e sfera, regna questa ammirabile proprietà che le solidità stanno tra loro come le superficie totali.

*Scolio.* Archimede, primo geometra dell' antichità e scopritore di questo insigne teorema, apprezzò a tal segno questa scoperta, che volle fosse scolpito sul suo sepolcro, in vece del proprio nome.

## LIBRO IX.

### DELLA MISURAZIONE DELLE QUANTITÀ GEOMETRICHE.

#### *Definizioni.*

414. I.<sup>o</sup> *Unità di misura* dicesi una grandezza alla quale per comune convenzione si paragonano le altre della medesima specie per misurarle.

415. II.<sup>o</sup> *Misurare* una grandezza vuol dire trovare il numero delle volte che l' *unità di misura* entra nella grandezza da misurarsi. Quando si parla di superficie, questa operazione dicesi *quadrare*; e quando si parla di solidi, *cubare*.

416. III.<sup>o</sup> *Misura* poi di una grandezza è il suindicato numero di unità di misura.

417. Così la misura di una grandezza è un numero, le cui unità e parti di unità non sono unità astratte, ma significano unità di misura e parti di essa; in questo senso



è legittima l'espressione: *tal grandezza eguaglia tal numero*. Considerando poi la grandezza misurata dirimpetto a quella che l'ha misurata, il detto numero *di volte* esprime la ragione o il rapporto geometrico che passa tra quelle due grandezze, e questo è numero astratto.

Se la linea C rappresenta l'unità di misura lineare, per esempio un metro, e la linea AB contiene quattro volte e due terzi l'unità C, sarà la misura di AB quattro volte e due terzi di metro; sarà allora  $AB = 4\frac{2}{3}$ , e starà  $AB : C :: 4\frac{2}{3} : 1$ . (FIG. 191.)

Eguualmente se E rappresenta un metro quadrato, ed il rettangolo MP contiene dodici volte lo spazio E, sarà la superficie o l'area del rettangolo  $= 12$ , e si avrà  $MLPN : E :: 12 : 1$ . In fine se il parallelepipedo F contenesse un metro cubo H 18 volte e tre quarti, sarà la solidità del parallelepipedo metri cubi  $18\frac{3}{4}$ , quindi  $F = 18\frac{3}{4}$ , ed  $F : H :: 18\frac{3}{4} : 1$ .

418. IV.° *Grandezza commensurabile con un'altra* dicesi quella della quale si può assegnare in numeri intieri o fratti il rapporto geometrico di essa con la seconda.

419. V.° *Incommensurabile con un'altra* è quando quel rapporto non può esattamente esprimersi con un numero intiero o fratto.

#### 420. PROPOSIZIONE PRIMA. TEOR.

*Rappresentando pel quadratino E l'unità di misura superficiale, e per un di lui lato lp l'unità di misura lineare, dico che la misura della superficie del rettangolo MNPL sarà eguale al prodotto numerico dei lati LP, LM (\*) intorno all'angolo retto.* (FIG. 191.)

In fatti sia  $a$  la misura di LP, e  $b$  quella di LM (416), ad avremo  $LP = a$ ,  $LM = b$ , quindi  $LP : lp :: a : 1$ ;  $LM : lm :: b : 1$  (417). Ma i parallelogrammi equiangoli stando tra loro (254) in ragion composta delle basi e delle altezze, si avrà  $MLPN : mlpn :: LP \cdot LM : lp \cdot lm :: a \cdot b : 1$ ; ma per ipotesi  $mlpn = 1$ ; dunque  $MLPN = a \cdot b = LP \cdot LM$ ; C. D. D.

421. *Corollarj*. Se il rettangolo da misurarsi fosse quadrato, allora moltiplicheremo un lato per sè medesimo, ed il prodotto n' esprimerà la superficie.

(\*) Si è già notato sotto il n.° 196 come debba intendersi l'espressione di moltiplicare una linea per un'altra, o una linea per una superficie.

432. La superficie di un parallelogrammo ABDC (FIG. 192.) eguaglia il prodotto della base CD nell'altezza AE, perchè il parallelogrammo equivale al rettangolo che ha la base e l'altezza eguali alla base ed altezza di esso parallelogrammo (89). Sapremo in conseguenza misurare le superficie dei prismi, le quali sono composte di facce parallelogramme.

423. La superficie di un triangolo CAD eguaglia il prodotto della sua base nella metà dell'altezza, ovvero il prodotto dell'altezza nella metà della base; il triangolo in fatti è la metà di un rettangolo che ha la sua altezza e la sua base (95). Le superficie delle piramidi, essendo composte di triangoli, si sapranno misurare dal momento che sappiamo come misurare un triangolo.

424. La superficie di un poligono regolare è eguale al suo contorno moltiplicato per la metà della perpendicolare abbassata dal centro sopra un di lui lato; in fatti il poligono regolare eguaglia un triangolo che abbia per base quel contorno, e per altezza quella perpendicolare medesima (224).

425. Potendosi ogni figura rettilinea dividere in triangoli, ed avendo insegnato a trovare la superficie di un triangolo, sapremo in conseguenza misurare la superficie di qualunque figura piana rettilinea. Le superficie dei tronchi di prisma e di piramide si misureranno col prendere la misura dei trapezj che le compongono.

426. *Dichiarazione.* Il quadrato di un numero  $n$  s'indica per  $n^2$ , la sua radice quadra per  $\sqrt{n}$ ; questi modi di scrivere sono presi dall'algebra, e noi li rammentiamo per coloro che non hanno fatto precedere allo studio della Geometria quello di tale scienza. Ora però che le cose geometriche vestono di lor natura l'espressione algebrica, avvertiamo che non ci è più possibile supporre un'ignoranza totale in fatto d'algebra per alcuni dei risultamenti seguenti.

#### 427. PROPOSIZIONE II. TEOR.

*La diagonale di un quadrato è una linea incommensurabile col lato di esso. (FIG. 193.)*

In fatti nel quadrato ABCD condotta la diagonale AC, si ha  $AC^2 = AB^2 + BC^2$  (101); ma facendo  $AB = BC = a$ , si ha  $AB^2 = BC^2 = a \cdot a = a^2$ , e quindi  $AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ , onde  $AC^2 = 2a^2$ . Sarà dunque il quadrato della diagonale AC espresso dal numero  $2a^2$ ; quindi AC sarà espressa da quel numero che moltiplicato per sè stesso sarà

$2a^2$ ; dunque  $AC = a\sqrt{2}$ ; ma non vi è un numero nè intero, nè fratto che moltiplicato per sè stesso faccia esattamente 2; non si può quindi assegnare esattamente in numero intero o fratto il rapporto che passa tra AC ed AB; e però queste due linee sono incommensurabili tra loro (419); C. D. D.

428. *Lemma.* Se AD è un diametro, AB, BC due archi eguali del medesimo cerchio, e DB, DC le corde degli archi DHB, DHC (i quali si chiamano i supplementi degli archi AB, ABC), si avrà sempre  $(DB)^2 = \frac{1}{2} AD \times DC + \frac{1}{2} (AD)^2$ . (FIG. 194.)

In DA prolungato prendasi  $AF = DC$ ; congiungansi le rette BF, BA, BC, ed i raggi CE, BE. Essendo i due angoli FAB, BAD eguali a due retti, ed a due retti essendo anche eguali gli angoli DCB, BAD (152) del quadrilatero ABCD inscritto, sarà  $BAF = BCD$ . Di più  $BA = BC$ ,  $AF = DC$  per costruzione; dunque i due triangoli FBA, DBC saranno eguali; quindi  $DB = BF$ ; e l'angolo  $F = ADB = DBE$ ; onde i due triangoli DEB, DBF, isosceli sono anche equiangoli; quindi sono simili, e però  $DE (= \frac{1}{2} AD) : DB :: DB : DF$ ; dunque  $(DB)^2 = \frac{1}{2} AD \cdot DF$ ; ma  $DF = DC + AD$ ; dunque  $(DB)^2 = \frac{1}{2} AD \times DC + \frac{1}{2} (AD)^2$ ; C. D. D.

429. *Corollario.* Supponendo il diametro  $AD = 2$ , si avrà  $DB^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times DC + \frac{1}{2} \times 4 = DC + 2$ , e però  $DB = \sqrt{DC + 2}$ ; cioè: *Se si aggiunge alla corda del supplemento di un arco dato il numero 2, la radice quadra di quella somma sarà il valore della corda del supplemento della metà di quell' arco dato.*

### 530. PROPOSIZIONE III. TEOR.

*Assegnare il rapporto del diametro alla circonferenza di un cerchio* (FIG. 194.) (\*)

Supponiamo l' arco  $ABC = \frac{1}{3}$  della semicirconferenza; allora l'angolo AEC sarà  $= \frac{1}{3}$  di due angoli retti, ed il triangolo AEC essendo equilatero, la corda AC sarà eguale al raggio AE. Ora fatto, come qui sopra,  $AD = 2$ , sarà  $AE = AC = 1$ .

(\*) I geometri, incominciando da Archimede, non sono riusciti a trovare questo rapporto esatto; anzi è stato dimostrato ch'è impossibile ottenerlo. Si sono quindi rivolti a cercarlo per approssimazione.



L'angolo ACD è retto, dunque  $DC^2 = AD^2 - AC^2 = 4 - 1$  per ipotesi; dunque  $DC^2 = 3$ , quindi  $DC = \sqrt{3} = 1,7320508075$  ecc.

Frattanto conoscendo la corda del supplemento dell'arco AC, terza parte della semiperiferia, noi avremo, suddividendo successivamente gli archi, e seguendo la proposizione del precedente corollario, per le corde dei supplementi i valori seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} = \sqrt{(2 + 1,7320508075)} = 1,9318516525, \\ \frac{1}{12} = \sqrt{(2 + 1,9318516525)} = 1,9828897227, \\ \frac{1}{24} = \sqrt{(2 + 1,9828897227)} = 1,9957178465, \\ \frac{1}{48} = \sqrt{(2 + 1,9957178465)} = 1,9989291743, \\ \frac{1}{96} = \sqrt{(2 + 1,9989291743)} = 1,9997322757, \\ \frac{1}{192} = \sqrt{(2 + 1,9997322757)} = 1,9999330678, \\ \frac{1}{384} = \sqrt{(2 + 1,9999330678)} = \sqrt{3,9999330678}. \end{array} \right.$$

Essendo questo ultimo numero 3,9999330678 il quadrato della corda del supplemento della 384.<sup>ma</sup> parte della semicirconferenza, se lo sottrarremo dal quadrato del diametro ch'è 4, avremo per resto 0,0000669322, che sarà il quadrato della corda di quest'arco; la sua radice quadra adunque  $\sqrt{0,0000669322}$ , ch'è  $= 1,00818121$ , sarà la misura di questa corda. Ora moltiplichiamo questo numero per 768 = al numero dei lati del poligono intiero, la semicirconferenza del quale ne contiene 384, ed avremo il prodotto 6,28317 = al perimetro o alla somma dei lati del poligono regolare di 768 lati inscritto nel cerchio, ma siccome un poligono di un sì gran numero di lati coincide quasi col cerchio circoscritto, così 6,28317 sarà il valore approssimato della circonferenza del cerchio, il cui diametro è  $= 2$ ; ovvero (373) 3,1416, essendo il diametro  $= 1$ ; dunque in questo cerchio la *circonferenza* starà al diametro :: 3,1416:1, e però anche in qualunque altro cerchio (373); C. D. F.

## 431. PROPOSIZIONE IV. TEOR.

*Stimare il grado di approssimazione che dà l' ora trovato rapporto. (FIG. 194.)*

Sia MN un lato di quel poligono di 768 lati inscritto nel cerchio; sia PQ il lato del simile poligono circoscritto, ed il contorno dell' inscritto starà al contorno del circoscritto come EO:ER, essendo ER la perpendicolare condotta dal centro sul lato MN.

Ora  $MN = 0,00818121$  (430), dunque  $ON = \frac{1}{2} MN = 0,0040906$ ; ma  $ER = 1$ , ed  $EO^2 = EN^2 - ON^2 = 1 - (0,0040906)^2 = 0,99998327$ ; quindi  $EO = 0,99999163$ ; dunque  $0,99999163 : 1 :: 6,28317$ : *al quarto termine* che sarà 6,28322; il contorno adunque del poligono circoscritto sarà 6,28322, mentre quello dell' inscritto è 6,28317. Questi due contorni differiranno tra loro della quantità 0,00005; e la circonferenza, ch' è maggiore del poligono inscritto, e minore del circoscritto, differirà dunque assai meno dal valore di 6,28317 di ciò che vi differisce il contorno del poligono circoscritto; dunque essendo 2 il diametro di un cerchio; il numero 6,28317 non differisce dal valore esatto della periferia neppure di  $\frac{5}{100000}$  ovvero di una ventimillesima parte del raggio.

432. *Scolio.* Archimede è stato il primo che, circoscrivendo ed inscrivendo al cerchio un poligono regolare di 96 lati, abbia trovato l' approssimato rapporto del diametro alla circonferenza. Egli lo espresse con i numeri 7 e 22; quindi secondo questo geometra il diametro sta alla circonferenza come 7:22. Questo rapporto è sufficientemente esatto per gli usi pratici nelle diverse arti e mestieri, ma in realtà è troppo grande, di fatto svolta in decimali la frazione  $\frac{22}{7}$ , se ne trova il valore espresso da 3,142857.... che alla terza decimale si manifesta maggiore di quello da noi trovato 3,1416, il quale per ciò che or ora diremo si riconosce anch' esso un poco maggiore del vero. Il rapporto di 113:355 dato da Pietro Mezio, svolto in decimali equivale a 3,14159292.... e non falla se non alla settima decimale; è perciò assai più accurato e a questo pregio unisce l' altro di essere espresso in poche cifre facili a ritenersi a memoria. I matematici però hanno altri mezzi ben migliori per trovare questo rapporto

che sogliono esprimere colla lettera  $\pi$ ; vi fu chi lo spinse a 127 decimali; eccone le prime venti,  $\pi = 3,14159265358979323846...$  Dopo tutto questo dovremo avvezzarci a riguardare  $\pi$  come un numero fisso e noto niente meno di quello che sia un radicale irrazionale, per esempio, la radice quadra di 2.

433. Sia  $r$  il raggio di un qualunque cerchio, la sua circonferenza sarà espressa da  $2\pi r$ ; poichè stando i diametri dei cerchj come le loro circonferenze (373), e avendo trovato che  $\pi$  è la circonferenza di quel cerchio che ha il diametro 1, avremo  $1 : 2r :: \pi$  alla circonferenza cercata, che risulta  $= 2\pi r$ .

#### 434. PROPOSIZIONE V. TEOR.

*Misurare la superficie di un cerchio.*

Il cerchio è eguale ad un triangolo che ha per base la circonferenza, e per altezza il raggio (377); ma il triangolo si misura moltiplicando la base per la metà dell'altezza o l'altezza per la metà della base (422); dunque la misura di un cerchio eguaglierà il prodotto della circonferenza nella metà del raggio, ovvero del raggio nella metà della circonferenza; C. D. F.

Se dunque per  $r$  esprimasi il raggio, essendo (433)  $2\pi r$  la circonferenza, la superficie del cerchio sarà espressa dal prodotto  $\frac{r}{2} \times 2\pi r$ , o sia da  $\pi r^2$ .

435. *Corollario.* Preso il rapporto d'Archimede, il quadrato del diametro sta all'area del cerchio  $:: 14 : 11$ . In fatti il quadrato del diametro è  $4r^2$ ; dunque questo quadrato al cerchio starà  $:: 4r^2 : \pi r^2 :: 4 : \pi$ ; il qual rapporto, messa per  $\pi$  la frazione  $\frac{22}{7}$  diventa  $4 : \frac{22}{7} :: 28 : 22 :: 14 : 11$ .

#### 436. PROPOSIZIONE VII. TEOR.

*Misurare la superficie di un cilindro del quale si conosce l'altezza ed il raggio della base.*

Conosciuto il raggio, se ne avrà la circonferenza (433). Ora la superficie di un cilindro essendo eguale ad un rettangolo, la cui base sia la circonferenza suddetta, e la cui altezza quella del cilindro (380), ne segue che avremo la ri-



cercata misura moltiplicando la periferia della base del cilindro per la di lui altezza o pel di lui lato; C. D. F.

Se dunque  $a$  è l'altezza del cilindro, ed  $r$  il suo raggio, la sua superficie sarà espressa da  $2\pi ar$ .

#### 437. PROPOSIZIONE VII. TEOR.

*Misurare la superficie di un cono o di un tronco di cono, del quale sia dato il raggio o i raggi delle basi ed il lato.*

Essendo la superficie di un cono retto eguale ad un triangolo che abbia per base la periferia della base del cono, e per l'altezza l'apotema od il suo lato (388), sarà la misura di quella superficie eguale al prodotto del lato nella metà della periferia della base; C. D. F.

Sia  $l$  il lato del cono,  $r$  il raggio della sua base; ne risulta la superficie  $= \pi lr$ .

Essendo poi la superficie di un tronco di un cono retto eguale ad un rettangolo che ha per altezza il lato del tronco, e per base la semisomma delle due periferie delle di lui basi (397), la cercata misura sarà eguale al prodotto del lato di quel tronco nella semisomma su indicata; C. D. F.

Siano  $R$ ,  $r$ , i raggi delle due basi,  $l$  il lato del tronco, e la superficie sarà espressa da  $\pi l (R + r)$ .

#### 438. PROPOSIZIONE VIII. PROBL.

*Misurare la superficie di una sfera di cui conoscesi il raggio.*

Dalla cognizione del raggio si ricava quella della periferia di un circolo massimo della sfera (433). Ora la superficie della sfera eguagliando un rettangolo contenuto dalla di lei periferia e dal diametro (403), se ne avrà la misura moltiplicando la detta periferia pel doppio del raggio dato; C. D. F.

Se quindi  $r$  è il raggio della sfera,  $4\pi r^2$  ne è la superficie

439. *Corollario.* Egualmente, data l'altezza di un segmento sferico ed il raggio della sfera cui appartiene, se ne avrà la misura della superficie moltiplicando l'altezza data per la periferia di quel raggio dato (404).

Detta pertanto  $h$  l'altezza del segmento, la superficie viene  $= 2\pi hr$ .

## 440. PROPOSIZIONE IX. TEOR.

*Rappresentando pel piccolo cubo H l'unità di misura dei solidi, per una di lui faccia orsq l'unità di misura superficiale, e per un di lui lato oq l'unità di misura lineare,*

*Dico che la solidità di un qualunque prisma MAB 'sarà eguale al prodotto numerico della misura o {superficie della base AB nell'altezza di esso MN. (FIG. 195.)*

In fatti sia  $a$  la misura della base AEB, e  $b$  quella dell'altezza MN (416); ed avremo  $AEB = a$ ,  $MN = b$ ; ma essendo il piccolo cubo H ancora esso un prisma, e stando i prismi tra loro in ragion composta delle basi e delle altezze (365), si avrà  $MAB : H :: AEB \times MN : oqrs \times oX$ , ovvero  $MAB : H :: a \times b : 1$ ; ma per ipotesi  $H = 1$ ; dunque  $MAB = a \times b$ , cioè il prisma MAB eguale al prodotto della base nell'altezza; C. D. D.

441. *Corollarj.* La misura di un parallelepipedo rettangolo sarà eguale al prodotto de' suoi tre lati intorno all'angolo retto; uno di essi in fatti è l'altezza del parallelepipedo, e gli altri due col loro prodotto formano la base (420).

442. La misura di un cubo si avrà dal prodotto di un suo lato moltiplicato due volte in sè medesimo; così se  $a$  è un lato, la misura del cubo è  $a \times a \times a$ , che si scrive  $a^3$ .

443. La solidità di una piramide qualunque eguaglia il prodotto della base nella terza parte dell'altezza, o quello dell'altezza nella terza parte della base; essa in fatti è eguale alla terza parte di un prisma avente la medesima base e la medesima altezza di lei: di qui la misura di un poliedro.

Un poliedro si dividerà in piramidi che si calcoleranno separatamente, e la somma di esse sarà la solidità del poliedro. S'egli è regolare, condotte dal centro a tutti gli angoli del poliedro delle rette che lo dividano in tante piramidi eguali quante ha facce, una di queste piramidi eguaglierà il terzo della sua base (ch'è una faccia del poliedro) moltiplicata per la perpendicolare condotta dal centro su questa faccia; onde il poliedro sarà il prodotto del raggio della sfera inscritta pel terzo della di lui superficie.

## 444. PROPOSIZIONE X. TEOR.

*La solidità di un cilindro eguaglia il prodotto della base nell'altezza.*

Essendo un cilindro equivalente ad un parallelepipedo che ha per base un rettangolo equivalente alla base del cilindro, e per altezza la stessa altezza del cilindro (383), e la solidità di un parallelepipedo misurandosi dal prodotto della base nell'altezza, ne segue che la solidità del cilindro eguaglierà il prodotto della sua base nell'altezza; C. D. D.

Perciò chiamando  $a$  l'altezza del cilindro, ed  $r$  il suo raggio, è la sua solidità  $= \pi ar^2$ .

445. *Corollario.* La solidità di un cono è eguale al prodotto della base nel terzo dell'altezza, o dell'altezza nella terza parte della base; egli in fatti è la terza parte di un cilindro che ha la medesima base e la medesima altezza di lui (357).

Se  $a$  è l'altezza del cono, ed  $r$  il raggio della base, la sua solidità è espressa da  $\frac{1}{3} \pi ar^2$ .

#### 446. PROPOSIZIONE XI. PROBL.

*Misurare la solidità di un tronco di cono ADEB. (FIG. 186.)*

Compito il cono FDE, il dato tronco ABED è la differenza tra i due coni FDE, FAB, quindi la misura di lui è la differenza delle due misure di quelli.

Per trovare l'altezza OF della porzione di cono che manca, nel piano del triangolo DFE condotta BZ perpendicolare a DE, si avrà  $EZ : ZB (=OC) :: BO : OF$ , cioè la differenza dei raggi CE, OB delle due basi sta all'altezza del tronco, come il raggio della base minore all'altezza OF del restante del cono.

Trovata OF, dei due coni FDE, FAB conosceremo le basi e le altezze, si sapranno in conseguenza misurare (445); la differenza pertanto di quelle due misure sarà la solidità del proposto tronco di cono; C. D. F.

Siano  $R, r$  i raggi delle due basi, ed  $a$  l'altezza del tronco: si trova espressa da  $\frac{ar}{R-r}$  l'altezza del piccolo cono,

e da  $a + \frac{ar}{R-r} = \frac{aR}{R-r}$  quella del cono intiero: quindi fatte le espressioni delle solidità dei due coni (445), e tolta l'u-



na dall' altra , si trova per la solidità del tronco la formola  
 $\frac{1}{3} \pi a \left( \frac{R^3 - r^3}{R - r} \right)$ , che riducesi colla divisione  $\frac{1}{3} \pi a (R^2 + Rr + r^2)$

#### 447. PROPOSIZIONE XII. TEOR.

*La solidità di una sfera è eguale alla superficie moltiplicata nella terza parte del raggio.*

Essendo una sfera eguale al cono che ha per base un cerchio eguale alla superficie della sfera , e per altezza il raggio della sfera (410), e misurandosi il cono pel prodotto della base nel terzo dell' altezza (445), ne segue che la solidità della sfera sarà eguale alla di lei superficie (cioè a quel numero che ne rappresenta la misura) moltiplicata pel terzo del raggio; C. D. D.

La solidità dunque di una sfera di raggio  $r$  risulta espressa da  $\frac{4}{3} \pi r^3$ .

448. *Corollario.* Preso il rapporto d' Archimede  $7:22$ , troveremo che la solidità della sfera sta a quella del cubo circoscritto come  $11:21$ . In fatti se  $2r$  è il diametro, il cubo circoscritto è espresso da  $8r^3$ , quindi il cubo alla sfera come

$8r^3 : \frac{4}{3} \pi r^3 :: 24 : 4\pi :: 6 : \pi$ ; il qual rapporto, messa per

$\pi$  la frazione  $\frac{22}{7}$ , diventa  $6 : \frac{22}{7} :: 42 : 22 :: 21 : 11$ .

#### 449. PROPOSIZIONE XIII. TEOR.

*La solidità di un settore sferico si misura moltiplicando la superficie del di lui segmento pel terzo del raggio.*

Egli in fatti eguaglia un cono che ha per base quella superficie, e per altezza il raggio della sfera cui appartiene il settore.

Essendo dunque  $r$  il raggio,  $h$  l' altezza del segmento, risulta la solidità del settore  $= \frac{2}{3} \pi h r^2$ .

450. *Corollario.* Per misurare la solidità di un segmento sferico basterà dalla solidità del settore detrarre quella del cono su cui si appoggia il segmento.

Ora essendo  $h$  l' altezza del segmento, quella di detto

142.  
 cono è  $r - h$ ; onde chiamato  $y$  il raggio della sua base, la sua solidità sarà (445)  $\frac{1}{3} \pi (r - h) y^2$ ; ma considerato nel cerchio che genera la sfera,  $y$  è una media proporzionale (250) fra le due rette  $h$ ,  $2r - h$ ; dunque  $y^2 = h (2r - h)$ , e però quel cono è espresso da  $\frac{1}{3} \pi h (r - h) (2r - h)$ . Tolta questa all'espressione  $\frac{2}{3} \pi h r^2$  della solidità del settore, si ha, dopo qualche riduzione, espressa la solidità del segmento dalla formola  $\pi h^2 (r - \frac{1}{3} h)$ .

FINE DELLA GEOMETRIA.

# ELEMENTI

## DI

### TRIGONOMETRIA PIANA.

---

451. **L**a *Trigonometria* piana è la scienza che insegna a risolvere o misurare i triangoli rettilinei.

452. *Risolvere* o *misurare* i triangoli vuol dire saper assegnare in numeri tutti i loro lati e tutti i loro angoli, il che si ottiene se di queste sei parti, cioè dei tre lati e dei tre angoli, ne siano conosciute tre, tra le quali un lato.

453. *Scolio*. E qui giova rilevare una distinzione importante tra il saper assegnare i lati o gli angoli per via di mezzi meccanici, e il saperli assegnare in numeri. Dalla precedente Geometria (45, 50, 69, 76, 101, ecc.) si sarà potuto conchiudere che dei sei elementi di un triangolo fissatine tre, gli altri tre erano anch'essi necessariamente determinati, escluso però il caso in cui i tre dati siano i tre angoli, perchè tutti i triangoli simili allora vi soddisfarebbero, ed osservato anche un altro caso che lascia un dubbio fra due triangoli. Questo ha luogo quando sono dati due lati ed un angolo opposto ad uno di essi, come (FIG. 196) nei due triangoli  $ACB$ ,  $DCB$ , i quali hanno  $AC = DC$ ,  $CB$  comune, e comune anche l'angolo  $B$ , e nondimeno non sono eguali. Ma con tutto quel che si è detto, se fossero dati in numeri tre dei sei elementi (415), non si saprebbero ancora trovar le misure degli altri tre. Questo intento si ottiene per mezzo delle dottrine che ora andiamo a spiegare e che divideremo in due sezioni. Nella prima esporremo le proprietà di alcune linee tirate nel cerchio che chiamansi *trigonometriche*; e nella seconda ne mostreremo l'uso per la risoluzione dei triangoli. La prima di queste due parti vuol essere distinta dalla seconda: essa forma un ramo particolare di matematica ben più esteso di quello che richiegga la risoluzione dei triangoli, la quale non è che uno fra i suoi tanti e preziosi vantaggi.



## SEZIONE PRIMA.

I  
PROPRIETÀ DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE.*Principj e Definizioni.*

454. Si è già detto (*arit.* 68) che la circonferenza del circolo dividesi in due maniere, una sessagesimale, e l'altra centesimale, e si è detto pure in che tali divisioni consistano e come siano fatte.

455. Essendo gli angoli fatti al centro di una circonferenza proporzionali agli archi intercetti tra le loro gambe (268), si sono presi gli archi per la misura degli angoli, anzi il numero dei gradi che gli archi contengono; così si dice un angolo di 82 gradi, 54 primi e 12 secondi, e per brevità di scrivere così:  $82^\circ$ ,  $54'$ ,  $12''$ , e s'intende un angolo (il vertice del quale è preso per centro di una circonferenza descritta con raggio qualunque) che intercetta, con le sue gambe prolungate, se fia bisogno, un arco di  $82^\circ$ ,  $54'$ ,  $12''$ .

Designando dunque in appresso gli angoli o gli archi colle lettere A, B, C... intenderemo le loro misure numeriche espresse in gradi o minuti dell'una e dell'altra divisione, con Q esprimeremo costantemente la quarta parte della circonferenza, o sia il *quadrante* che corrisponde all'angolo retto e che nella divisione sessagesimale è  $90^\circ$ , e  $100^\circ$  nella centesimale.

456. *Supplemento* d'un angolo è ciò che gli manca a fare due retti; così se l'angolo è A il suo supplemento è espresso da  $2Q - A$ . *Complemento* di un angolo è ciò che rimane togliendo l'angolo dato dall'angolo retto; così se l'angolo è A, il suo complemento è sempre  $Q - A$ : quando A è maggiore del quadrante, il complemento risulta negativo, e allora in vece di essere quell'angolo che aggiunto al dato forma il retto, è l'angolo che bisogna levare dal dato per ridurlo al retto.

457. Consideriamo primieramente un angolo acuto BCD (FIG. 197.)

*Seno* di un arco BD o dell'angolo BCD chiamasi la perpendicolare AB condotta da una estremità B sopra il raggio CD, il quale va all'altra estremità D. L'intercetta AC chiamasi *coseno*; AD *senoverso*.

È provato (133) che CD taglia per metà la corda BZ

e l' arco  $BDZ$ , e quindi *il seno è la metà della corda dell' arco doppio*.

458. Sieno perpendicolari la  $CF$  alla  $CD$ , la  $BE$  alla  $CF$ , sarà la  $BE$  il seno, la  $CE$  il coseno, la  $EF$  il senoverso dell' angolo  $BCF$  o dell' arco  $BF$  (457). Ma sono eguali la  $BE$  alla  $AC$ , e la  $CE$  alla  $AB$ , e l' angolo  $BCF$  all'  $ABC$ , ciascun dei quali è complemento (456) dell' angolo  $BCD$ , *Dunque il coseno di un angolo è seno del complemento di esso angolo, e inversamente.*

*Cosenoverso* di un angolo o di un arco è il senoverso del complemento di esso angolo o arco.

459. Se dall' estremità  $D$  dell' arco  $BD$  conducasi la  $DG$  ad angolo retto al raggio  $CD$ , finchè si rincontri con l' altro  $CB$  prolungato, la  $DG$  acquista il nome di *tangente*, e la  $CG$  di *secante* così dell' angolo  $BCD$ , come dell' arco  $BD$ .

460. Per la stessa ragione la  $FH$  essendo tangente, la  $CH$  secante dell' angolo  $BCF$ , complemento dell' angolo  $BCD$ , la prima si nomina *cotangente*, la seconda *cosecante* di esso angolo  $BCD$ . È quindi la  $DG$  cotangente, la  $CG$  cosecante dell' angolo  $BCF$ : e però *la cotangente di un angolo è tangente del complemento di esso angolo, e inversamente; e del pari la cosecante di un angolo è secante del complemento di esso angolo, e inversamente.*

461. *Scolio.* Per iscrivere queste linee, cui si dà il nome generale di *linee trigonometriche*, si usano le seguenti abbreviature:

*Sen.*  $BD$  in vece di *seno dell' arco*  $BD$ ; *cos.* in vece di *coseno*; *tang.*, *cot.*, *sec.*, *cosec.* in vece di *tangente*, *cotangente*, *secante*, *cosecante*; *sen. v.*, *cos. v.* per *senoverso*, *cosenoverso*; ed in fine si scrive  $R$  per dinotare il raggio del cerchio cui appartengono le linee trigonometriche.

462. Ci serviremo subito di questi modi di scrivere per esprimere in formole le cose ora dette; sarà dunque, fatto  $BD = A$ ,

$$\begin{array}{ll} \text{sen. } A = & \text{cos. } (Q - A); & \text{cot. } A = & \text{sen. } (Q - A) \\ \text{tang. } A = & \text{cot. } (Q - A); & \text{cot. } A = & \text{tang. } (Q - A) \\ \text{sec. } A = & \text{cosec. } (Q - A); & \text{cosec. } A = & \text{sec. } (Q - A) \\ \text{sen. v. } A = & \text{cos. v. } (Q - A); & \text{cos. v. } A = & \text{sen. v. } (Q - A) \\ \text{sen. v. } A = & R - \text{cos. } A; & \text{cos. v. } A = & R - \text{sen. } A \end{array}$$

463. Vi sono degli archi le cui linee trigonometriche go-

dono di proprietà particolari. Se l'angolo BCD è semi-retto, sarà  $AB = AC$ ,  $CD = DG$ ; quindi  $\text{sen. } \frac{1}{2} Q = \text{cos. } \frac{1}{2}$

$Q$ ,  $\text{tang. } \frac{1}{2} Q = R = \text{cot. } \frac{1}{2} Q$ . Se l'arco BD fosse  $\frac{1}{3} Q$ , sarebbe contenuto dodici volte nella circonferenza, quindi sarebbe la metà dell'arco corrispondente al lato dell'esagono inscritto che equivale al raggio; e poichè il seno è sempre la metà della corda dell'arco doppio, sarà  $\text{sen. } \frac{1}{3} Q = \frac{1}{2} R$ .

464. Le linee trigonometriche sono rette che misuransi (415) coll'unità lineare, la quale è arbitraria e indipendente dall'unità angolare che si è presa per la misura degli angoli, talchè mutandosi questa, può quella conservarsi. Per esempio nella divisione sessagesimale è  $\frac{1}{3} Q = 30^\circ$ , e nella

centesimale  $\frac{1}{3} Q = 33^\circ \frac{1}{3}$ ; però l'arco è espresso in due maniere, mentre il seno in ambi i casi è espresso egualmente da  $\frac{1}{2} R$ .

465. Se l'angolo C cresca e divenga, verbigrazia, DCM, anche il seno ML, la tangente DK e la secante CK sono evidentemente maggiori di quelle dell'angolo BCD. Ma sono al contrario minori il coseno CL, la cotangente FI e la cosecante CI. Che se in vece l'angolo C diminuisca fino ad annichilarsi, allora la CB si confonde con la CD, ed il punto B col D; donde è chiaro che dell'arco BD nascente od estinguentesi il coseno e la secante eguagliano il raggio; la cotangente e la cosecante sono infinite; il seno e la tangente si annientano, divenendo in D un punto medesimo, e perciò privi di ogni grandezza.

Ora seguiti l'angolo a crescere fino al quadrante, è chiaro che il seno e la cosecante divengono eguali al raggio col quale si confondono, il coseno e la cotangente eguali allo zero; la tangente e la secante all'infinito, poichè, divenute parallele, non possono più riscontrarsi.

Il seno dell'angolo retto è visibilmente il maggiore dei seni, siccome il diametro è la maggiore delle corde; ei porta quindi anche i nomi di *seno totale*, *seno massimo*.

Queste cose si conchiusero ora dietro la semplice ispe-



zione della figura: sarà bello vederle in seguito confermate dalle formole.

466. Passiamo a considerare l'angolo ottuso DCO.

È facile accorgersi che dalla estremità O dell'arco DO non si può tirare la perpendicolare sul raggio CD, ma bensì sul suo prolungamento CP dall'altra parte; è però questa perpendicolare OP il seno. Così pure la CO non può andare a tagliare la tangente geometrica KU del punto D del cerchio, se non si prolunga al di sotto; è quindi DU la tangente trigonometrica. Dietro le stesse viste si rileva CP il coseno, CU la secante. Il complemento poi dell'angolo DCO è il suo eccesso FCO sul retto (456), di cui è FN tangente, e CN secante; dunque FN, CN saranno la cotangente e la cosecante dell'angolo ottuso DCO.

Ora vuolsi provare che *tutte le linee trigonometriche dell'angolo ottuso sono eguali in grandezza a quelle del suo supplemento, ma solamente alcune hanno il segno contrario*. Il supplemento dell'arco DO è TO, ma per contare tutti due gli archi partendo dalla stessa origine D, prendasi DB = TO, e potrà considerarsi DB il supplemento di DO. Ora è facile provare  $OP = BA$ ;  $PC = CA$ ;  $DU = DG$ ;  $CU = CG$ ;  $FN = FH$ ;  $CN = CH$ , nelle quali equazioni si leggono tutte le linee trigonometriche dell'arco DO eguali a quelle del suo supplemento DB.

Solamente è da notarsi che i coseni PC, CA, le tangenti DU, DG, le cotangenti FN, FH vanno in senso direttamente contrario; quindi non è da dubitarsi che i coseni, le tangenti e le cotangenti dell'angolo ottuso debbano aver segno negativo. Restano i seni PO, BA, le secanti CU, CG e le cosecanti CN, CH, di cui dovrebbe rilevarsi che i primi e le terze debbono aver segno eguale, e le seconde segno diseguale; ma come ciò non vedesi comodamente nella figura, ne riserberemo la dimostrazione a quel luogo dove nell'esame delle formole verrà confermato quanto si è qui conchiuso sull'ispezione della figura.

467. Scrivendo in formole questi risultamenti, chiamisi l'arco  $DB = A$ ; sarà il supplemento  $DO = 2Q - A$ , e si avrà.

$$\begin{array}{llll} \text{sen. } (2Q - A) = & \text{sen. } A; & \text{cos. } (2Q - A) = - & \text{cos. } A \\ \text{tang. } (2Q - A) = - & \text{tang. } A; & \text{cot. } (2Q - A) = - & \text{cot. } A \\ \text{sec. } (2Q - A) = - & \text{sec. } A; & \text{cosec. } (2Q - A) = & \text{cosec. } A \end{array}$$

E se dicasi B il complemento  $Q - A$  dell'arco A, avre-

mo  $2Q - A = Q + B$ ; fatta la sostituzione nelle suddette equazioni, di cui trasforminsi i secondi membri mediante le formole del 462, risulterà

$$\begin{array}{llll} \text{sen. } (Q + B) = & \cos. B; & \cos. (Q + B) = - & \text{sen. } B \\ \text{tang. } (Q + B) = - & \cot. B; & \cot. (Q + B) = - & \text{tang. } B \\ \text{sec. } (Q + B) = - & \text{cosec. } B; & \text{cosec. } (Q + B) = & \text{sec. } B \end{array}$$

le quali formole contengono l'angolo ottuso  $Q + B$  e il suo complemento  $B$ , e corrispondono a quelle del 462 per l'angolo acuto.

468. Se ingrandiscasi l'arco  $DO$  fino a  $2Q$ , il seno e la tangente sono nulli, la cotangente e la cosecante infinite, il coseno e la secante eguali al raggio. Ciò può rilevarsi dalla figura, ma meglio dalle formole come in appresso.

#### 469. PROBLEMA PRIMO.

*Trovare la relazione che passa tra il seno, il coseno ed il raggio di un arco qualunque  $A$ . (FIG. 197.)*

Sia  $BD$  quell'arco, ed il triangolo  $CAB$  essendo rettangolo, ci darà  $CB^2 = CA^2 + AB^2$  (101), e sostituendo le denominazioni trigonometriche  $R^2 = \cos.^2 A + \text{sen.}^2 A$ , equazione che conterrà la cercata relazione; C. D. F.

470. *Corollario.* Date dunque due di queste tre cose  $R$ ,  $\cos. A$ ,  $\text{sen. } A$ , si troverà sempre la terza, ed avremo  $R = \sqrt{(\text{sen.}^2 A + \cos.^2 A)}$ ;  $\text{sen. } A = \sqrt{(R^2 - \cos.^2 A)}$ ;  $\cos. A = \sqrt{(R^2 - \text{sen.}^2 A)}$ .

#### 471. PROBLEMA II.

*Dati il seno ed il raggio di un arco o di un angolo  $A$ , trovarne la tangente, la cotangente, la secante e la cosecante. (FIG. 197.)*

Osservo primieramente che potremo prendere per dato il coseno (470). Ora essendo i triangoli  $ABC$ ,  $CDG$ ,  $CFH$  simili, stanno  $AC : AB :: CD : DG$ ,  $DG : CD :: CF : FH$ ,  $AC : BC :: CD : CG$ ,  $AB : BC :: CF : CH$ ; e sostituendo in queste proporzioni le denominazioni trigonometriche, si avrà

$$\text{I.}^\circ \quad \text{Cos. } A : \text{sen. } A :: R : \text{tang. } A = \frac{R \times \text{sen. } A}{\text{cos. } A};$$

$$\text{II.}^\circ \quad \text{Tang. } A : R :: R : \text{cot. } A = \frac{RR}{\text{tang. } A} = \frac{R \times \text{cos. } A}{\text{sen. } A}$$

$$\text{III.}^\circ \quad \text{Cos. } A : R :: R : \text{sec. } A = \frac{RR}{\text{cos. } A};$$

$$\text{VI.}^\circ \quad \text{Sen. } A : R :: R : \text{cosec. } A = \frac{RR}{\text{sen. } A};$$

472. *Scolio I.* I triangoli che ci hanno somministrate le relazioni superiori (471) essendo rettangoli, ci danno anche  $CD^2 = CG^2 - DG^2$ ,  $CF^2 = CH^2 - HF^2$ , e quindi

$R^2 = \text{sec.}^2 A - \text{tang.}^2 A$ ,  $R^2 = \text{cosec.}^2 A - \text{cot.}^2 A$ ,  
dalle quali equazioni si ricava

$$\text{Sec. } A = \sqrt{(R^2 + \text{tang.}^2 A)} = \frac{RR}{\text{cos. } A} \quad (471).$$

$$\text{Cosec. } A = \sqrt{(R^2 + \text{cot.}^2 A)} = \frac{RR}{\text{sen. } A} \quad (471).$$

473. *Scolio II.* Quanto si è stabilito sinora compete ad un cerchio di qualsivoglia grandezza, il di cui raggio fu da noi espresso generalmente per  $R$ . Ma se per questo si adotti un valore determinato, allora ogni linea trigonometrica, relativa ad un angolo dato, assume lunghezza immutabile corrispondente al raggio. È chiaro, a cagion d'esempio, che niun'altra retta maggiore o minore di  $AB$  può esser seno dell'arco  $BD$ , mentre il raggio sia la  $CD$ . Che se vogliasi raggio la  $CQ$ , tosto il seno sarà la  $DG$  (457); ma  $CB : AB :: CG : DG$ ; dunque la grandezza dei seni d'un arco o di un angolo dato è proporzionale a quella dei raggi.

La stessa relazione facilmente si scuopre con ogni altra linea trigonometrica. Pertanto, se dicasi  $L$  una di esse pel raggio  $R$ , e l'altra  $L'$  pel raggio  $R'$ , starà  $R : L :: R' : L' = \frac{LR'}{R} = LR'$ , se facciasi  $R = 1$ , come per la speditezza dei calcoli si pratica. Laonde, se sia computata in numeri la grandezza di una linea trigonometrica relativamente al raggio  $R = 1$ , basterà moltiplicare il valore numerico di  $L$  per quello di un altro qualunque raggio  $R'$ , ed avrassi l'espressione numerica della stessa linea rispettivamente a questo secondo raggio.



474. *Scolio III.* Si può colle formole trovate confermare quanto si è detto al n.° 465. Al crescer di un arco, sappiamo solamente che cresce anche il seno, e tosto la formola  $\cos. A = \sqrt{R^2 - \text{sen.}^2 A}$  dirà che diminuisce il coseno. Quindi l'esame delle formole I, II, III e IV fa subito capire che crescono la tangente e la secante, e diminuiscono la cotangente e la cosecante. Facciasi  $A = 0$ , e sapendosi che  $\text{sen. } 0 = 0$ , viene  $\cos. 0 = R$ ; in seguito le suddette quattro formole danno  $\text{tang. } 0 = \frac{R \times 0}{R} = 0$ ;  $\text{cot. } 0 = \frac{R^2}{0} = \text{in-}$   
 finito;  $\text{sec. } 0 = \frac{R^2}{R} = R$ ;  $\text{cosec. } 0 = \frac{R^2}{0} = \text{infinito}$ . Facendosi  $A = Q$ , e sapendo che  $\text{sen. } Q = R$ , viene  $\cos. Q = 0$ , e per le stesse quattro formole  $\text{tang. } Q = \frac{R^2}{0} = \text{infinito}$ ;  $\text{cot. } Q = \frac{R \cdot 0}{R} = 0$ ;  $\text{sec. } Q = \frac{R^2}{0} = \text{infinito}$ ;  $\text{cosec. } Q = \frac{R^2}{R} = R$ ; tutto in conformità a quanto in quel luogo si è detto.

475. *Scolio IV.* L'arco DZ contato da D verso Z in senso opposto a quello secondo il quale si è preso l'arco DB dovrà dirsi negativo (alg. 79); anche il suo seno AZ essendo direttamente opposto ad AB, sarà negativo; ma il coseno CA essendo lo stesso di quello dell'arco DB, resta positivo: dunque *di un arco negativo il seno è negativo, e il coseno è positivo*. Per avere con sicurezza i segni delle altre linee trigonometriche di un arco negativo qualunque  $-A$ , sapendosi che  $\text{sen. } A = -\text{sen. } A$ ,  $\cos. -A = \cos. A$ , li dedurremo per le regole dell'algebra dalle formole I, II, III e IV., e quindi sarà

$$\begin{array}{lll} \text{sen. } -A = -\text{sen. } A; & \cos. -A = & \cos. A \\ \text{tang. } -A = -\text{tang. } A; & \text{cot. } -A = - & \text{cot. } A \\ \text{sec. } -A = & \text{sec. } A; & \text{cosec. } -A = -\text{cosec. } A \end{array}$$

### 476. PROBLEMA III.

*Dati i seni ed i coseni di due archi e di due angoli A, B. trovare il seno ed il coseno della loro somma e della loro differenza. (FIG. 198.)*

Sia  $BC = B$ ,  $CE = A$ ,  $BE = A + B$ . Del primo arco BC sarà CD il seno, DA il coseno; e del secondo sarà EF

il seno, FA il coseno. Sarà poi EH il seno della somma BE, ed HA il coseno della stessa.

Dai triangoli simili ADC, AFL si ha  $AD : CD :: AF : FL$ , ovvero  $\cos. B : \sin. B :: \cos. A : FL$ ; quindi  $EL = FE + FL = \sin. A + \frac{\sin. B \times \cos. A}{\cos. B}$ . Essendo anche simili i triangoli CAD GAH, GEF, LEH, si avrà prendendo il primo e il quarto  $AC : AD :: EL : EH$  o sia  $R : \cos. B :: \sin. A + \frac{\sin. B \times \cos. A}{\cos. B} : \sin. (A + B)$ ; dunque

$$I. \sin. (A + B) = \frac{\sin. A \times \cos. B + \sin. B \times \cos. A}{R}.$$

Al presente, se l'arco B assumasi negativo, avremo tosto (476).

$$II. \sin. (A - B) = \frac{\sin. A \times \cos. B - \cos. A \times \sin. B}{R}.$$

Pongasi in quest'ultima equazione  $Q - A$  in vece di  $A$ , e si avrà

$$\sin. \{Q - A - B\} = \frac{\sin. (Q - A) \times \cos. B - \cos. (Q - A) \times \sin. B}{R};$$

ma  $\sin. (Q - A) = \cos. A$ ;  $\cos. (Q - A) = \sin. A$ ;

$\sin. \{Q - A - B\} = \cos. (A + B)$  (462); dunque

$$III. \cos. (A + B) = \frac{\cos. A \times \cos. B - \sin. B \times \sin. A}{R};$$

se poi il segno dell'arco B di positivo facciasi negativo in questa formola, nasce (475)

$$IV. \cos. (A - B) = \frac{\cos. A \times \cos. B + \sin. A \times \sin. B}{R}.$$

477. *Scolio I.* Le quattro formole precedenti sono fondamentali e fa d'uopo ritenerle a memoria. Ammessa la loro generalità per qualunque valore degli archi  $A, B$  (\*), si può

(\*) Ma sono poi veramente generali queste formole? La maniera con cui le abbiamo dimostrate lo lascia in dubbio, perchè in essa si supponea il caso limitatissimo che ambi gli archi  $A, B$ , ed anche l'arco  $A + B$  della loro somma fossero minori del quadrante. Vero è che rifacendo da capo più volte in altra maniera la dimostrazione, si possono provare le stesse formole per quanto uno dei due archi, o ambedue, o la loro somma passino il quadrante

far pendere da esse tutta la teorica degli angoli. Suppongan-  
si solamente  $\text{sen. } Q = R$ ,  $\text{cos. } Q = 0$ , e le due II. e IV.,  
ove facciasi  $A = Q$ , danno  $\text{sen. } (Q - B) = \text{cos. } B$ ,  $\text{cos. } (Q - B)$   
 $= \text{sen. } B$ , che sono le prime due del n.° 462: le altre dello  
stesso numero potranno similmente dimostrarsi colle formole  
del problema seguente, le quali, come vedremo, pendono  
da queste quattro. Posto  $A = B = Q$ , la I e III danno  $\text{sen. } 2Q = 0$ ,  
 $\text{cos. } 2Q = -R$ , come al n.° 468; quindi le due  
II e IV, fatto  $A = 2Q$ , danno

$\text{sen. } (2Q - B) = \text{sen. } B$ ,  $\text{cos. } (2Q - B) = -\text{cos. } B$ ,  
come al n.° 467. La I e la III, fatto  $A = Q$ , danno pure  
 $\text{sen. } (Q + B) = \text{cos. } B$ ,  $\text{cos. } (Q + B) = -\text{sen. } B$ ,  
come al 467. Sapendo che  $\text{sen. } 0 = 0$ ,  $\text{cos. } 0 = R$ , alla II  
si può far dire che il seno di un angolo negativo è negativo  
col fare  $A = 0$ ; e similmente alla IV, che il coseno del me-  
desimo angolo è positivo. Dalla IV, fatto  $B = A$ , si cava il  
teorema  $R^2 = \text{cos.}^2 A + \text{sen.}^2 A$  del n.° 469, ecc. ecc.

478. *Scolio II.* D' ora innanzi abbrevieremo, ponendo sem-  
pre 1 in vece di R (473). Nei casi ove il raggio sia di al-  
tro valore, s' introdurrà debitamente il simbolo R in qua-  
lunque formola, riducendo, col mezzo di esso, omogenei  
tutti i termini, cioè di una stessa dimensione o sia di egual  
numero di fattori, non computati i numerici. Nelle frazioni,  
se il numero dei fattori del denominatore si sottragga da  
quello del numeratore, il residuo costituisce la dimensione  
della frazione (*alg.* 78). Nominando  $x, y$  due linee trigono-  
metriche, sia, per cagion d' esempio, un' equazione di que-  
sta forma:  $5x^3 - 3x = xy + \frac{y^2}{x} + 2$ . Qui essendo  $5x^3$  di tre

dimensioni,  $3x$  di una sola,  $xy$  di due,  $\frac{y^2}{x}$  di una, 2 di nes-

o la semicirconferenza; ma non è possibile in tal guisa di giungere  
a quella assoluta generalità voluta dallo spirito dell' analisi che am-  
mette tutti i valori positivi, negativi, irrazionali, nulli e anche  
immaginarj. Avviene qui come del binomio di Newton, di cui può  
darsi negli elementi una dimostrazione pel caso particolare dell' e-  
sponente intero e positivo; ma la dimostrazione generale è riserba-  
ta al calcolo più elevato. Le suddette formole sono veramente ge-  
nerali, e tali le convince la dimostrazione che ne dà Lagrange  
(*Calcul des Fonct.* L. X.) la quale però non può qui aver luogo.



sunà, il raggio sarà convenevolmente introdotto scrivendo

$$5x^3 - 3R^2x = Rxy + \frac{R^2y^2}{x} + 2R^3 (*).$$

#### 479. PROBLEMA IV.

*Date le stesse cose del precedente problema, trovare la tangente, la cotangente, la secante e la cosecante dell' arco  $A+B$  e dell' arco  $A-B$ .*

Essendo (471)  $\text{tang. } (A+B) = \frac{\text{sen. } (A+B)}{\text{cos. } (A+B)}$ , si avrà

(476)  $\text{tang. } (A+B) = \frac{\text{sen. } A \times \text{cos. } B + \text{cos. } A \times \text{sen. } B}{\text{cos. } A \times \text{cos. } B - \text{sen. } A \times \text{sen. } B}$ , e dividendo ogni termine di questa frazione per  $\text{cos. } A \times \text{cos. } B$  si ha

$$\text{I. Tang. } (A+B) = \frac{\text{tang. } A + \text{tang. } B}{1 - \text{tang. } A \times \text{tang. } B}.$$

Assumendo  $B$  negativo, questa formola si muta nella seguente:

$$\text{II. Tang. } (A-B) = \frac{\text{tang. } A - \text{tang. } B}{1 + \text{tang. } A \times \text{tang. } B}.$$

Essendo (471)  $\text{cot. } (A+B) = \frac{1}{\text{tang. } (A+B)}$ , si avrà

$$\text{III. Cot. } (A+B) = \frac{1 - \text{tang. } A \times \text{tang. } B}{\text{tang. } A + \text{tang. } B};$$

$$\text{IV. Cot. } (A-B) = \frac{1 + \text{tang. } A \times \text{tang. } B}{\text{tang. } A - \text{tang. } B}.$$

È anche (471)  $\text{sec. } (A+B) = \frac{1}{\text{cos. } (A+B)}$ , dunque

$$\text{V. Sec. } (A+B) = \frac{1}{\text{cos. } A \times \text{cos. } B - \text{sen. } A \times \text{sen. } B};$$

(\*) Quando, fatto  $R=1$ , si maneggiano le formole più semplici che risultano, poi quelle de' risultamenti finali si tornano a rendere omogenee coll' introduzione del raggio  $R$ : tali ultime formole sono quelle stesse a cui si sarebbe arrivato per una via più intralciata, se ritenuto il raggio  $R$  nelle prime da cui si partì, si fosse pure conservato in tutti i calcoli intermedj. Di ciò non suole il principiante persuadersi in un momento, ma l' esercizio e la riflessione gliene fanno poi venir la fede.

$$\text{VI. Sec. } (A - B) = \frac{1}{\cos. A \times \cos. B + \text{sen. } A \times \text{sen. } B}$$

Similmente si trovano le cosecanti.

480. *Scolio.* Con queste formole si può completare la dimostrazione di tutto ciò che da principio si era conchiuso sull'ispezione delle figure, come avvertimmo al n.º 477.

#### 481. PROBLEMA V.

*Dalle formole ritrovate dedurne quelle altre che sono di uso più frequente nelle trasformazioni.*

Dalle formole I, II, III e IV del n.º 476 nascono visibilmente le quattro che seguono:

$$\text{I. Sen. } (A + B) + \text{sen. } (A - B) = 2\text{sen. } A \times \cos. B$$

$$\text{II. Sen. } (A + B) - \text{sen. } (A - B) = 2\cos. A \times \text{sen. } B$$

$$\text{III. Cos. } (A + B) + \cos. (A - B) = 2\cos. A \times \cos. B$$

$$\text{IV. Cos. } (A - B) - \cos. (A + B) = 2\text{sen. } A \times \text{sen. } B.$$

482. Dalle I e III facendo  $B = A$  si hanno

V.  $\text{Sen. } 2A = 2\text{sen. } A \cos. A$ . VI.  $\text{Cos. } 2A = 2\cos.^2 A - 1$ , e quest'ultima mettendo per 1 la quantità eguale  $\text{sen.}^2 A + \cos.^2 A$  (469) si muta nella seguente:

$$\text{VII. Cos. } 2A = \cos.^2 A - \text{sen.}^2 A.$$

Tali formole danno (471) le linee trigonometriche dell'arco doppio per quelle dell'arco semplice. Dividendo, per un esempio, la V per la VII., poi il secondo membro per  $\text{sen. } A \cos. A$  in ambi i termini della frazione, viene

$$\text{VIII. Tang. } 2A = \frac{2}{\cot. A - \text{tang. } A}.$$

Dalle III e IV facendo  $A = B = \frac{1}{2} C$  si hanno due equazioni fra  $\cos. C$  e  $\cos.^2 \frac{1}{2} C$ ,  $\cos. C$  e  $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} C$ , da cui

$$\text{IX. Cos. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1 + \cos. C}{2}}; \text{X. Sen. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1 - \cos. C}{2}}$$

formole che conducono (471) alle altre linee trigonometriche della metà di un arco dato per quelle dell'arco intero. Per un esempio, dividendo la X per la IX, poi moltiplicando sotto e sopra la frazione sotto il radicale nel secondo membro per  $1 - \cos. C$ , indi estraendo la radice, si ottiene

$$\text{XI. Tang. } \frac{1}{2} C = \frac{1 - \cos. C}{\text{sen. } C}.$$

483. Pongansi  $A + B = M$ ,  $A - B = N$ , ciò che dà  $A = \frac{1}{2}(M + N)$ ,  $B = \frac{1}{2}(M - N)$ : quindi fatte le sostituzioni nelle formole I, II, III e IV, queste diventano

$$\begin{aligned}\text{XII. } \text{Sen. } M + \text{sen. } N &= 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(M + N) \cos. \frac{1}{2}(M - N) \\ \text{XIII. } \text{Sen. } M - \text{sen. } N &= 2 \cos. \frac{1}{2}(M + N) \text{sen. } \frac{1}{2}(M - N) \\ \text{XIV. } \text{Cos. } M + \text{cos. } N &= 2 \cos. \frac{1}{2}(M + N) \cos. \frac{1}{2}(M - N) \\ \text{XV. } \text{Cos. } N - \text{cos. } M &= 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(M + N) \text{sen. } \frac{1}{2}(M - N)\end{aligned}$$

Se dividansi la XII per la XIV, la XIII per la XV, la XII per la XIII, la XIV per la XV, e quindi si trasformino i secondi membri introducendo le tangenti e le cotangenti per le formole I e II del n.° 471, sortono le seguenti:

$$\begin{aligned}\text{XVI. } \frac{\text{sen. } M + \text{sen. } N}{\text{cos. } M + \text{cos. } N} &= \text{tang. } \frac{1}{2}(M + N) \\ \text{XVII. } \frac{\text{sen. } M - \text{sen. } N}{\text{cos. } N - \text{cos. } M} &= \text{cot. } \frac{1}{2}(M + N) \\ \text{XVIII. } \frac{\text{sen. } M + \text{sen. } N}{\text{sen. } M - \text{sen. } N} &= \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(M + N)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(M - N)} \\ \text{XIX. } \frac{\text{cos. } M + \text{cos. } N}{\text{cos. } N - \text{cos. } M} &= \frac{\text{cot. } \frac{1}{2}(M + N)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(M - N)}\end{aligned}$$

Queste ed altre simili formole che possono dedursi dalle precedenti, equivalgono ad altrettanti teoremi: per esempio, la XVIII dice che la somma e la differenza dei seni di due archi stanno fra loro come le tangenti della semisomma e della semidifferenza dei medesimi archi; un teorema analogo pei coseni ci è somministrato dalla XIX.

Altre ben molte formole potrebbero comporsi dietro le già trovate, e sono a vedersi negli estesi trattati; lo studioso ha quì aperto un campo ove fare di sue forze un esercizio che gli riuscirà di gran vantaggio nel progresso.

#### 484. PROBLEMA VI.

*Costruire la tavola che contiene gli archi espressi in parti del raggio = 1 e del raggio = 10000000000.*

Abbiamo già detto (464) che gli archi si misurano con una unità particolare indipendente dalla lineare con cui si misurano il raggio e le linee trigonometriche: è bene in tanti casi ridurre queste due unità ad una sola. In fatti supponendo che una formola presenti insieme archi e rette



(come accade quando si fa uso delle serie, e quando nei calcoli pratici, trattandosi di archi piccoli, si sostituiscono questi ai loro seni, ecc.), se ritengonsi distinte le due unità di misura per gli archi e per le rette, vi ha una specie di eterogeneità, e potendosi cambiar l'una senza cambiar l'altra, non resta determinato il numero finale a cui conduce la formola. È dunque necessario in tali casi intendere gli archi ridotti a rette e misurati come le rette; in un arco rettificato le sue divisioni di secondo in secondo, di grado in grado, ecc. non segnano più che parti aliquote di una retta.

Ora sia  $A$  un arco espresso in secondi, e vogliasi la sua espressione  $X$  in parti del raggio  $= 1$ . La semicirconferenza  $2Q$  rettificata è espressa (433) dal numero  $\pi$ ; dunque intendendo per  $2Q$  un'espressione in secondi, si caverà  $X$  dalla proporzione  $2Q : \pi :: A : X$ , e si avrà

$$I. X = \frac{\pi}{2Q} \cdot A$$

Nella divisione sessagesimale è  $2Q = 648000''$ , e nella centesimale  $2Q = 2000000''$ , quindi calcolando in decimali il coefficiente costante  $\frac{\pi}{2Q}$ .

*Div. sess.* II.  $X = (0,00000484813681109536 \dots) A$

*Div. cent.* III.  $X = (0,00000157079632679489 \dots) A$ .

In queste formole facendo  $A = 1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ , ecc. si avranno tutti i valori di  $X$  corrispondenti, che si potranno disporre in una tavola la quale sarà la cercata.

Se il raggio è  $R = 10000000000$ , la semiperiferia è  $\pi R$  (433), quindi le due formole precedenti diventano

*Div. sess.* IV.  $X = (48481,3681109536 \dots) A$

*Div. cent.* V.  $X = (15707,9632679489 \dots) A$

#### 485. PROBLEMA VII.

*Costruire la tavola che contiene i seni, coseni, tangenti, ecc. di tutti gli archi cominciando da  $1''$  in parti del raggio  $= 10000000000$ .*

Conosciuto il seno di  $1''$ , si possono per ciò che or ora diremo avere i seni di tutti gli altri archi; per ottener poi *sen.  $1''$*  basta riflettere che un arco sì piccolo coincide qua-

si col suo seno, onde si potranno pigliare per questo seno i valori di  $X$  dati dalle IV e V del n.º precedente, ove facciasi  $A = 1$ . Ciò non consente coll' estremo rigore, perchè i veri valori di  $\text{sen. } 1''$  trovati con altri metodi sono

$$\text{Div. sess. sen. } 1'' = 48481,3681109242 \dots$$

$$\text{Div. cent. sen. } 1'' = 15707,9632679425 \dots$$

il primo dei quali differisce alla ottava decimale, e il secondo alla nona da quello del corrispondente arco di  $1''$ ; ma tal differenza è insensibile, e però vi è qualche autore che confonde anche teoricamente (il che non è molto plausibile) le due espressioni dell' arco e del seno di  $1''$  in parti del raggio. Ora prendiamo la formola I del n.º 481, introduciamovi il raggio  $R = 10000000000$  (478), e fattovi  $B = 1''$  indi  $A = 1'', 2'', 3'' \dots (m-1)''$ , ne dedurremo

$$R \text{ sen. } 2'' = 2 \cos. 1'' \text{ sen. } 1''$$

$$R \text{ sen. } 3'' = 2 \cos. 1'' \text{ sen. } 2'' - \text{sen. } 1'' R$$

.....

$$R \text{ sen. } m'' = 2 \cos. 1'' \text{ sen. } (m-1)'' - \text{sen. } (m-2)'' R;$$

dove si vede che avendo  $\text{sen. } 1''$ , e quindi  $\cos. 1''$  (469), si possono ottenere di secondo in secondo i seni di tutti gli archi.

I coseni si possono avere quando si conoscono i seni (469); ma trovato  $\cos. 1''$ , si hanno più speditamente dalla formola III (481) uno dopo l' altro di secondo in secondo come i seni dalla I.

Le tangenti, cotangenti, ecc. si ottengono (471) dalla cognizione dei seni e coseni.

Ho accennato un metodo col quale si può formare anche con precisione la richiesta tavola, e ciò serva a farsene una chiara idea, la fatica però sarebbe immensa, onde chi veramente volesse darsi a questo travaglio, avrebbe bisogno di mezzi che glielo agevolassero, e che possono vedersi negli estesi trattati. Le tavole ora si hanno già belle e costrutte.

486. Avverto che trovati i seni, coseni, ecc. fino all' arco  $\frac{1}{2} Q$ , la tavola è terminata e basta per tutti gli archi seguenti. In fatti sia un arco  $\frac{1}{2} Q + A$  maggiore di  $\frac{1}{2} Q$  e minore di  $Q$ , il suo complemento è (456)  $\frac{1}{2} Q - A$ , quindi il seno, il coseno, la tangente, la cotangente, ecc. di  $\frac{1}{2} Q + A$  eguagliano (462) rispettivamente il coseno, il se-

no, la cotangente, la tangente, ecc. di  $\frac{1}{2} Q - A$ , i quali secondo la supposizione entrano nella tavola. Sia un arco  $Q + A$  maggiore del quadrante; si può fare in due maniere: o prenderne l'eccesso  $A$  sopra il quadrante, e allora il seno, il coseno, la tangente, ecc. dell'arco proposto sono il coseno, il seno, la cotangente, ecc. di questo eccesso; o prenderne la differenza a  $2Q$  che ne forma (456) il supplemento, e allora le linee trigonometriche di questo supplemento (461) sono quelle stesse dell'arco proposto, ritenuti però in ambi i casi i segni come sono dati dalle formole (467).

487. Ma la suddetta tavola non è quella di cui si faccia grand'uso nei calcoli trigonometrici. Si è veduto (alg. cap. IX) il grande vantaggio dei logaritmi per render più semplici le operazioni sui numeri: essi dunque si adoperano sempre nel calcolo numerico di tutte le formole algebriche, e quindi anche di quelle che or ora daremo per la risoluzione dei triangoli. Allora non giova tanto sapere i numeri esprimenti i seni, coseni, ecc. di tutti gli archi in parti del raggio, quanto sapere i logaritmi di questi numeri, e però sulla tavola precedente se ne è costrutta un'altra in cui si ritrovano tali logaritmi. Questa è quella di cui si fa un uso continuo; in essa non sono riportati i numeri corrispondenti ai logaritmi, e in fatti non era necessario, perchè volendo, per esempio, trovare il logaritmo di *sen. A*, cioè di quel numero che esprime *sen. A* in parti del raggio 10000000000, senza conoscere questo numero, basta l'indicazione dell'arco  $A$  in gradi, minuti e secondi, come meglio si vedrà dall'ispezione delle tavole.

Se mi si chiede la ragione perchè siasi preso il grandissimo raggio 10000000000 per quello delle tavole (ed era in fatti arbitrario pigliarne un altro diverso), dirò che ciò si è fatto perchè i numeri esprimenti i seni, coseni, ecc. di tutti gli archi in parti del raggio contenessero sempre degl'interi, e quindi i loro logaritmi fossero tutti positivi. Negli usi pratici non occorrono mai angoli che siano frazioni così piccole di un secondo da poter condurre a logaritmi negativi. Il raggio essendo 10000000000, il suo logaritmo è 10.

Convorrà che lo studioso si provveda delle tavole logaritmiche dei seni, coseni, tangenti, ecc., le quali vanno unite d'ordinario a quelle dei logaritmi dei numeri



naturali. Noi ci dispensiamo d'insegnare il modo pratico di farne uso, perchè sulle prefazioni delle medesime suole esservene una chiara e distesa esposizione; altronde l'esercizio è in ciò il miglior maestro (\*).

---

(\*) Citiamo qui come al n.° 194 dell'algebra la prefazione alle tavole logaritmiche pubblicate dall'I. R. Stamparia di Milano nel 1820; dove l'uso delle medesime è brevemente e diligentemente dichiarato.

## SEZIONE II.

APPLICAZIONE DELLA TEORICA PRECEDENTE  
 ALLA RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI.

## CAPO PRIMO.

## TEOREMI.

488. I. *In ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa equivale alla somma dei quadrati degli altri due lati.*

Questo teorema è già assai noto e dimostrato al n.° 101.

489. II. *In ogni triangolo rettangolo 1.° la tangente di un angolo acuto eguaglia il prodotto del raggio nel lato opposto diviso pel lato adjacente: 2.° il seno eguaglia il prodotto del raggio nel lato opposto diviso per l'ipotenusa. 3.° il coseno eguaglia il prodotto del raggio nel lato adjacente diviso per l'ipotenusa. (FIG. 199.)*

Sia ABC il triangolo rettangolo, A uno de' suoi angoli acuti: rappresenti AR il raggio delle tavole, e condotto l'arco Rc, si abbassi dal punto c la perpendicolare cb, e s'innalzi dal punto R la perpendicolare RT. Avremo  $Ab = \cos. A$ ,  $cb = \sin. A$ ,  $RT = \tan. A$ ; e i triangoli simili Abc, ART, ABC daranno le tre proporzioni.

$$AB : BC :: AR (= R) : RT (= \tan. A);$$

$$AC : CB :: Ac (= R) : cb (= \sin. A);$$

$$AC : AB :: Ac (= R) : Ab (= \cos. A);$$

le quali dimostrano il teorema annunciato.

490. III. *In un triangolo qualunque i lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti. (FIG. 200.)*

Si circoscriva al triangolo qualunque ABC un cerchio; quindi dal centro o con un raggio oc, il quale rappresenti il raggio delle tavole, si descriva un circolo concentrico, poi tirate le oA, oB, oC, si conducano le corde ba, ac, bc, nascerà un triangolo abc che facilmente si prova simile al dato ABC. Dunque  $AB : AC :: ab : ac$ , ed anche  $AB : AC ::$

$$\frac{ab}{2} : \frac{ac}{2} :: ah : ai, \text{ avendo condotte le } op, oe \text{ perpendicolari}$$

alle corde  $ba$ ,  $ac$ ; ma  $ah = \text{sen. } ap = \text{sen. } bca$  (150);  $\frac{1}{2} ai = \text{sen. } ae = \text{sen. } abc$  (150); e gli angoli  $abc = ABC$ ,  $bca = BCA$ ; dunque  $AB : AC :: \text{sen. } BCA : \text{sen. } ABC$ , ovvero  $AB : AC :: \text{sen. } C : \text{sen. } B$ . Nel medesimo modo dimostreremo che  $AB : BC :: \text{sen. } C : \text{sen. } A$ ; quindi i lati staranno tra loro come i seni degli angoli opposti.

491. IV. *In ogni triangolo la somma di due lati è alla loro differenza come la tangente della metà della somma dei due angoli opposti a questi lati è alla tangente della metà della loro differenza.* (FIG. 200.)

Dalla proporzione  $AB : AC :: \text{sen. } C : \text{sen. } B$  già dimostrata (490) si deduce (238)

$AB + AC : AB - AC :: \text{sen. } C + \text{sen. } B : \text{sen. } C - \text{sen. } B$ ; ora dalla formola XVIII del n.º 483, facendo  $M = C$ ,  $N = B$ , si ha  $\text{sen. } C + \text{sen. } B : \text{sen. } C - \text{sen. } B :: \text{tang. } \frac{1}{2} (C + B) : \text{tang. } \frac{1}{2} (C - B)$ , e però anche  $AB + AC : AB - AC :: \text{tang. } \frac{1}{2} (C + B) : \text{tang. } \frac{1}{2} (C - B)$ , come si è enunciato.

492. *Lemma.* Se da un punto  $A$  preso fuori di un cerchio si conducono due rette  $AC$ ,  $AE$  che segano la circonferenza nei punti  $F$ ,  $C$ ,  $G$ ,  $E$ , si ha la proporzione  $AC : AE :: AG : AF$ . In fatti i due rettangoli  $AC \times AF$ ,  $AE \times AG$  sono fra di loro equivalenti (168); e quindi hanno i loro lati reciprocamente proporzionali (228). (FIG. 201.)

493. V. *In ogni triangolo  $ABC$ , se da uno degli angoli si abbassa una perpendicolare sul lato opposto, si avrà sempre questa proporzione: il lato  $AC$ , sul quale o sul prolungamento del quale cade la perpendicolare, sta alla somma  $AB + BC$  degli altri due lati, come la differenza  $AB - BC$  degli stessi sta alla differenza dei segmenti  $AD$  e  $DC$ , o alla loro somma, secondo che la perpendicolare cade dentro o fuori del triangolo.* (FIG. 201.)

In fatti, preso per centro  $B$  con un intervallo eguale a  $BC$ , descrivasi il cerchio  $CEF$ , e prolunghisi il lato  $AB$  finchè lo incontri in  $E$ ; allora sarà  $AC : AE :: AG : AF$  (492); ma  $AE = AB + BC$ ;  $AG = AB - BG = AB - BC$ ;  $AF = AD - DF = AD - DC$  nel caso che la perpendicolare cada entro il triangolo, ed  $AF = AD + DF = AD + DC$  se cade fuori; dunque avremo nel primo caso  $AC : AB + BC :: AB - BC : AD - DC$ ; e nel secondo  $AC : AB + BC :: AB - BC : AD + DC$ .

494. VI *In un triangolo qualunque il coseno di un angolo eguaglia il prodotto del raggio nella somma dei qua-*



*drati dei lati che comprendono quell'angolo diminuita del quadrato del lato opposto, e divisa pel doppio prodotto dei due primi lati.*

Sia il triangolo ABC (FIG. 201), e per brevità si chiamino  $a, b, c$  i lati BC, AC, AB opposti agli angoli A, B, C, dicasi ancora  $x$  il segmento AD determinato dalla perpendicolare BD abbassata dall'angolo B sul lato AC o sul suo prolungamento. L'altro segmento DC sarà  $b - x$  nel primo caso, e  $x - b$  nel secondo, e in ambi i casi il teorema precedente (493) condurrà alla proporzione.

$$b : c + a :: c - a : 2x - b,$$

dalla quale si ricava  $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$ .

Ora pel teorema II n.º 3.º (489), nel triangolo rettangolo ABD abbiamo  $\cos. A = \frac{R \cdot AD}{AB} = \frac{Rx}{c}$ , da cui sostituito il valore di  $x$ , si deduce

$$\cos. A = R \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

formola in cui si legge il teorema.

495. *Scolio.* Questo teorema basta esso solo alla risoluzione di tutti i triangoli rettilinei, perchè da esso si possono dedurre per mere considerazioni analitiche tutti quegli altri che in tale risoluzione si adoperano, come può vedersi negli appositi trattati. Noi ne abbiamo fatta dipendere la dimostrazione dai teoremi antecedenti, e ciò per provvedere alla brevità; ma può essa aversi direttamente considerando due triangoli (FIG. 199.) come ATB, ARC pei due casi in cui la perpendicolare cade dentro o fuori della base, e facendo in un angolo A la costruzione del triangolo Abc tra il raggio delle tavole, il seno ed il coseno.

496. VII. *In qualunque triangolo il quadrato del seno della metà di un angolo eguaglia il prodotto del quadrato del raggio e di due altri fattori, i quali si ottengono togliendo uno dopo l'altro i due lati che comprendono quell'angolo dalla metà dell'intero perimetro: tutto poi essendo diviso pel prodotto di questi lati.*

Dalla formola X del num.º 482 si ha, quadrandò,  $2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} C = 1 - \cos. C$ ; messo dunque A per C, e introdotto il raggio R per l'omogeneità, risulta  $2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A = R^2 - R \cos. A$ .

Sostituiscasi in questa formola a  $\cos. A$  il suo valore trovato pel teorema precedente, e diventerà

$$2\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A = R^2 \left( 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right).$$

Ora si osservi che  $1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 + 2bc - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc}$ ; se poi facciasi il perimetro  $a + b + c = p$ ; è  $a + b - c = p - 2c$ ,  $a + c - b = p - 2b$ , onde l'ultima espressione può cambiarsi in quest'altra  $\frac{(p - 2c)(p - 2b)}{2bc}$ . Se ne eseguisca la sostituzione, indi si divida per 2, e verrà

$$\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A = R^2 \cdot \frac{(\frac{1}{2}p - b)(\frac{1}{2}p - c)}{bc}.$$

formola in cui si legge il teorema enunciato.

*Scolio.* Altri teoremi e quindi altre formole potrebbero trovarsi tra i lati di un qualunque triangolo rettilineo e le linee trigonometriche de' suoi angoli o di altri angoli multipli o summultipli; ma i già dimostrati bastano anche a sovrabbondanza per la risoluzione di tutti i triangoli rettilinei, come apparirà dal capo seguente.

## CAPO II.

### RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI.

#### §. I.

#### *Risoluzione dei triangoli rettangoli.*

497. Sia ABC un triangolo rettangolo in B (fig. 199), cui denominiamo  $a, b, c$  i tre lati opposti agli angoli A, B, C. Gioverà rammentarsi che i due angoli acuti A, C sono complementi l'uno dell'altro, perchè ambidue presi insieme formano un retto (77), conosciuto uno, è dunque conosciuto anche l'altro. Ciò posto, i differenti problemi che si possono aver da risolvere sopra i triangoli rettangoli riduconsi sempre a questi quattro casi.

498. 1.<sup>o</sup> Caso. È data l'ipotenusa  $b$  con un lato  $c$ . Per conoscere gli angoli acuti abbiamo dal teorema II. (489)

$\text{sen. } C = \cos. A = \frac{Rc}{b}$ , formola che si calcolerà per mezzo de' logaritmi; onde risulterà

$$L \text{ sen. } C = L \cos. A = L R + L c - L b.$$

Esempio. Sia l'ipotenusa  $b = 529$ , il lato  $c = 372$ : ecco l'operazione:

$$\begin{array}{r} L R = 10,000000 \\ L c = 2,570543 \\ \hline \text{Som. } 12,570543 \\ - L b = 2,723456 \\ \hline \end{array}$$

$$L \text{ sen. } C = L \cos. A = 9,847087.$$

Ora si cerchi nelle tavole dei logaritmi dei seni qual è quell'angolo del cui seno il logaritmo sia 9,847087, e si troverà l'angolo  $44.^{\circ} 41'$  prossimamente (divisione sessagesimale) tanto è dunque l'angolo  $C$ , ed  $A = 90.^{\circ} - 44.^{\circ} 41' = 45.^{\circ} 19'$ .

È più spedito usare i complementi aritmetici per evitare le sottrazioni dei logaritmi (alg. 196); gli adopreremo negli esempi seguenti.

Per trovar poi il terzo lato  $a$ , abbiamo dal teorema I (488) la formola  $a^2 = b^2 - c^2 = (b + c)(b - c)$ , che si calcola facilmente coi logaritmi, e dà

$$L a = \frac{1}{2} L (b + c) + \frac{1}{2} L (b - c).$$

Si poteva anche dedurre dopo aver trovato uno degli angoli acuti come nel caso 3.° seguente.

499. 2.° Caso. Sono dati due lati  $a$ ,  $c$ . Per conoscere gli angoli acuti abbiamo dal teorema II. (489)

$$\text{tang. } A = \cot. C = \frac{Ra}{c}, \text{ quindi}$$

$$L \text{ tang. } A = L \cot. C = L R + L a - L c.$$

Esempio. Sia  $a = 426$ ;  $c = 700$ ; ecco l'operazione:

$$\begin{array}{r} L R = 10,0000000 \\ L a = 2,6294096 \\ \text{Comp. al } L c = 7,1549120 \\ \hline \end{array}$$

$$L \text{ tang. } A = L \cot. C = 9,7843216$$

Cerco nelle tavole l'angolo della cui tangente il logaritmo sia 9,7843216, e trovo che è l'angolo  $31.^{\circ} 19'. 30''$ ; tale dunque è  $A$ , quindi  $C = 58.^{\circ} 40'. 30''$ .



L'ipotenusa  $b$  si ha dal teorema I che dà  $b = \sqrt{a^2 + c^2}$ , ma questa formola non è comoda pel calcolo logaritmico, onde torna meglio dedurre  $b$  dopo la cognizione d'uno degli angoli acuti come nel caso 4.° seguente

500. 3.° Caso. Si conosce l'ipotenusa  $b$  con un angolo acuto  $A$ .

La formola  $\cos. A = \frac{Rc}{b}$  (489) dà  $c = \frac{b \cos. A}{R}$ , e quindi

$$L c = L b + L \cos. A - L R.$$

L'altro lato  $a$  si avrà pure essendo  $a = \frac{b \sin. A}{R}$ , e quindi

$$L a = L b + L \sin. A - L R.$$

501. 4.° Caso. È dato un lato  $a$  con uno degli angoli acuti  $A$ .

La formola  $\tan. A = \frac{Ra}{c}$  (489) dà

$$L c = L R + L a - L \tan. A,$$

e l'altra formola  $\sin. A = \frac{Ra}{b}$  (489) dà

$$L b = L R + L a - L \sin. A.$$

Si hanno dunque  $c$ ,  $b$ , e in conseguenza tutto è noto.

## §. 2.

### *Risoluzione dei triangoli obliquangoli.*

502. Sia  $ABC$  un triangolo qualunque (FIG. 201), e si nominino  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i tre lati opposti agli angoli  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Incominciamo dall'osservare che essendo noti due angoli, resta noto anche il terzo, che è il supplemento della loro somma (76). I differenti problemi che possono aver luogo a fine di determinare tre dei sei elementi quando sono noti gli altri tre, si riducono ai quattro casi seguenti.

503. 1.° Caso. È dato il lato  $a$  con due angoli del triangolo. I due angoli cognitivi faranno conoscere il terzo: in seguito si troveranno i due lati  $b$ ,  $c$  per le due proporzioni (teor. III, 490)  $\sin. A : \sin. B :: a : b$ ;  $\sin. A : \sin. C :: a : c$ , dalle quali trovati i quarti termini e poi presi i logaritmi, risulta

$$L b = L a + L \sin. B - L \sin. A$$

$$L c = L a + L \sin. C - L \sin. A.$$

504. 2.° Caso. Sono dati due lati  $a$ ,  $b$  con un angolo  $A$  opposto ad uno di essi. Si ha la proporzione (490)  $a : b :: \sin. A : \sin. B$ , dalla quale

$$L \sin. B = L \sin. A + L b - L a.$$

Troveremo così *sen. B*, ma ci resterà un dubbio sopra l'angolo che vi corrisponde, potendo questo essere tanto un angolo acuto come l'ottuso che ne è supplemento (466); ciò va di conformità con quanto sin da principio si è detto (453) di due triangoli che soddisfanno entrambi alla stessa quistione. Se però l'angolo dato *A* è ottuso, allora è certo che *B* dev'essere acuto, altrimenti la somma dei tre angoli del triangolo passerebbe i due retti: e se essendo *A* acuto, è  $b < a$ , *B* deve ancora essere acuto come opposto a lato minore (60); non resta dunque l'ambiguità che nel caso in cui si combinano le due condizioni di *A* acuto e di  $b > a$ .

Conosciuti gli angoli *A*, *B*, e quindi il terzo *C*, si troverà il lato *c* per mezzo della proporzione *sen. A*:*sen. C*::*a*:*c*. Poteva però aversi *c* direttamente dalla formola del teorema VI (494) risolvendo una equazione di secondo grado: ma tale valore non sarebbe comodo a calcolarsi coi logaritmi.

505. 3.º Caso. Sono dati due lati *b*, *c* con l'angolo compreso *A*. Conoscendo l'angolo *A* si conoscerà la somma degli altri due angoli  $B + C = 2Q - A$  e la loro semisomma  $\frac{1}{2}(B + C) = Q - \frac{1}{2}A$ ; in seguito si calcolerà la loro semidifferenza per la proporzione (teor. IV, 491)  $b + c : b - c :: \text{tang. } \frac{1}{2}(B + C) : \text{tang. } \frac{1}{2}(B - C)$ . Avuta così la semidifferenza  $\frac{1}{2}(B - C)$ , se questa si aggiunge alla semisomma  $\frac{1}{2}(B + C)$ , si avrà il più grande angolo *B*; e se si toglie, si avrà il più piccolo *C* (alg. 124).

Esempio. Sia  $b=865, c=519, A=96^\circ, 36'$ ; ecco l'operazione

$$\begin{array}{rcl}
 b = & 865 & \\
 c = & 519 & \\
 \hline
 b + c = & 1382 & \\
 b - c = & 348 & \\
 \hline
 Q = & 90^\circ \quad 0' & \\
 Q - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(B + C) = & 41^\circ \quad 42' & \\
 L \text{ tang. } \frac{1}{2}(B + C) = & 9,9498619 & \\
 L (b - c) = & 2,5415792 & \\
 C . L (b + c) = & 6,8594920 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$L \text{ tang. } \frac{1}{2}(B - C) = 9,3509331.$$

Cerco nelle tavole questo *logaritmo-tangente*, e trovo  $\frac{1}{2}(B - C) = 12^\circ \quad 38' \quad 42''$ ; dunque

$$B = \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(B - C) = 41^\circ \quad 42' + 12^\circ \quad 38' \quad 42'' = 54^\circ \quad 20' \quad 42''$$

$$C = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C) = 41^\circ \quad 42' - 12^\circ \quad 38' \quad 42'' = 29^\circ \quad 3' \quad 18''$$

Gli angoli *A*, *B*, *C* essendo conosciuti, potrà aversi il terzo lato *a* dalla proporzione *sen. B*:*sen. A*::*b*:*a*. Può anche aversi *a* dalla formola del teorema VI, che dà

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - \frac{2}{R} bc \cos. A};$$

ma questa non è comoda a calcolarsi coi logaritmi. È nondimeno utilissima in altre applicazioni, e da essa si ottengono a motivo del teorema III (490) anche per *sen. B*, *sen. C* formole espresse per *b*, *c*, *sen. A*, *cos. A*.

506. 4.° Caso. Sono dati i tre lati *a*, *b*, *c*. Per avere i tre angoli *A*, *B*, *C*, si può per mezzo di una perpendicolare scomporre il triangolo dato in due triangoli rettangoli i quali, trovati prima i valori dei segmenti coll'uso del teorema V (493), si calcolano a parte. Più diretta all'intento è la formola del teorema VI (494) che dà *cos. A* pei tre lati, e in egual modo anche *cos. B*, *cos. C*; ma non può calcolarsi facilmente coi logaritmi. La soluzione più elegante è data dalla formola del teorema VII (496), la quale, presi i logaritmi, diventa

$$2L \text{ sen. } \frac{1}{2} A = 2LR + L(\frac{1}{2}p - b) + L(\frac{1}{2}p - c) - Lb - Lc.$$

Esempio. Sia  $a = 184$ ,  $b = 144$ ,  $c = 64$ ; ecco il quadro della operazione:

|                                               |                          |
|-----------------------------------------------|--------------------------|
| $a = 184$                                     |                          |
| $b = 144$                                     | $\frac{1}{2}p = 196$     |
| $c = 64$                                      | $\frac{1}{2}p - b = 52$  |
| <hr style="width: 50px; margin: 0;"/>         | $\frac{1}{2}p - c = 132$ |
| $a + b + c = p = 392$                         |                          |
| $2L R = 20,0000000$                           |                          |
| $L(\frac{1}{2}p - b) = 1,7160033$             |                          |
| $L(\frac{1}{2}p - c) = 2,1205739$             |                          |
| $C. Lb = 7,8416375$                           |                          |
| $C. Lc = 8,1938200$                           |                          |
| <hr style="width: 100px; margin: 0;"/>        |                          |
| $2L \text{ sen. } \frac{1}{2} A = 19,8720347$ |                          |
| $L \text{ sen. } \frac{1}{2} A = 9,9360174$   |                          |

Cercato nelle tavole questo logaritmo, si trova  $\frac{1}{2} A = 59.^\circ 39'. 23'', 7$ ; dunque  $A = 119.^\circ 18'. 47'', 4$ . Applicando lo stesso calcolo agli angoli *B*, *C*, si trova  $B = 43.^\circ 1'. 53'', 6$ ;  $C = 17.^\circ 39'. 19'' 0$ . La somma di questi tre angoli viene precisamente  $180^\circ$ , o sia due retti, come in fatti dev'essere. Ciò prova l'eccellenza del metodo e l'esattezza delle tavole: è però raro questo accordo perfetto; la differenza (sempre che sia piccola) tra la somma dei tre angoli e  $180^\circ$  si divide in tre parti eguali, e così distribuito l'errore sopra i tre angoli, restano questi corretti.

FINE.





# DIMOSTRAZIONE

## DEL

### QUINTO POSTULATO D'EUCLIDE

#### ESPOSTA

#### DA CAMMILLO MINARELLI.

---

**N**on pochi maraviglieranno alla vista di un nuovo opuscolo intorno all'elementare proposizione di Geometria, che imprendo a dimostrare (a). Imperocchè da venti e più secoli, o essa da alcuni si riconosce ed ammette siccome d'incontrastabile evidenza, o con più ragione volendo altrimenti giudicarne, invano sinora ne fu cercata da chiarissimi ingegni tale dimostrazione, che al tutto potesse rendere paghi i Geometri più severi. Per la qual cosa potrei per avventura sentirmi dire, avermi gettato tempo e fatica dietro ad impresa vana, o d'impossibile riuscita. A liberarmi in qualche parte da simile taccia, prego primieramente quelli, che riguardano la proposizione di Euclide qual assioma (b) a considerare se la medesima ha tutti

---

(a) La proposizione posta da Euclide per quinto postulato, la quale nel presente opuscolo si prende a dimostrare, è la seguente: *Se due rette nello stesso piano tagliate da una terza fanno gli angoli interni dalla medesima parte minori di due retti, esse concorreranno.*

(b) Euclide come tutti gli altri Geometri dopo le definizioni espone due serie di principii: i postulati, e gli assiomi. Queste parole però egli non le adopera rigorosamente in quel senso nel quale ora da noi sono usate. Imperocchè egli chiama postulati tutti quei principii, che siccome incontestabilmente veri o fattibili si usano soltanto ne' ragionamenti della scienza che s'imprende a trattare: e assiomi, o comuni sentenze tutti quegli altri che nella teorica d'ogni scienza sono adoperati.

quei caratteri , che si vogliono a riputarla tale. La parola assioma altra idea non ci presenta che quella di una proposizione semplicissima , nella quale si afferma una verità sì evidente , che senza soffrire un' interna repugnanza , niun uomo ragionevole potrebbe dubitarne. Ora si potrà chiamare semplicissima la nostra proposizione , dove si hanno a considerare due linee , che tagliate da un'altra fanno due angoli minori di due retti ; ove può accadere che uno di essi sia acuto , e che l'altro sia o ottuso , o retto , o parimente acuto , o uguale a quello , o disuguale ? In essa si ravvisa forse quella schietta semplicità , la quale si riconosce in tutte l'altre , che diciamo propriamente *assiomi* ? Oltre che potrà dirsi la verità , che in essa si annunzia , di sì incontrastabile evidenza da non desiderarne dimostrazione , se tale non la riconobbero giammai tanti , e tanti sommi Geometri ed antichi , e moderni ? Aristotile , Tolomeo , Proclo , Possidonio , Clavio , Simpson , Tacquet , Boscovich , Volfio , Varignon , D' Alembert , Bezout , Suzanne , Saladini , Franceschini , Canterzani , Legendre debbonsi certamente in tal novero collocare. Imperocchè questi tutti o cercano altre strade onde pervenire allo stesso fine , o seguirono le tracce di quegli altri , da cui furono preceduti. E tranquillamente pensando , chi sarà quegli , il quale dopo aver veduto in Geometria volersi anche dimostrare che nel triangolo equicrure gli angoli alla base sono fra loro eguali ; che se due rette s' incontrano , gli angoli opposti sono eguali ; e per fino che due lati del triangolo sono maggiori del terzo , non debba a più ragione aspettarsi che la nostra proposizione sia parimente con ogni rigore addimostrata ?

Dalle quali cose sembrami potersi arguire che se alcuni eccellenti maestri , insegnando la teorica delle parallele , propongono come assioma la proposizione stessa , a ciò forse s' indurranno , perchè parrà loro che tutti gli altri metodi e principii , che a tal proposito furono adoperati , non siano essi pure evidenti , o di bastevole chiarezza.

In effetto : per non servirsi dell' assioma stesso , vuo-



le alcuno provare, seguendo Proclo ed Aristotile, che la retta, che taglia una parallela incontra anche l'altra; e a tal fine stabilisce due principj. Primo: che se due rette s'incontrano, prolungandole si possono allontanare oltre ogni limite. Secondo: che la distanza fra le parallele è sempre una quantità limitata. Ora ognun vede che l'idea dell'illimitata distanza di quelle prime linee è un'astrattezza che per convincersene converrebbe dimostrare che in alcun luogo esse sono lontane più di una qualunque quantità: e questo provato, converrà allor dimostrare anche il secondo principio; poichè reso evidente il primo, potrà a ragione dubitarsi potere accader lo stesso nelle parallele.

Altri poi slanciandosi alla contemplazione di uno spazio infinito, e delle parti eguali e disuguali, in che lo immaginano diviso (c) mostrano che due rette non sono parallele, quando tagliate da una terza fanno retto uno degli angoli interni, e l'altro acuto. Ma le dimostrazioni di questa specie, soggiunge per tutti il sommo Galilei (d) non sono di necessità concludenti; giacchè gli attributi di eguale, maggiore, o minore, come sono proprii delle quantità terminate, non possono da noi tenersi che abbiano luogo eziandio negl'infiniti, senza correr rischio d'ingolfarci in un pelago di sottilità e di contraddizioni incomprensibili.

Nel caso di due rette tagliate come sopra, il Clavio citato dal Grandi e da altri, dopo aver dimostrato che le medesime per certi tratti successivi s'avvicinano da una banda e si discostano dall'altra, si è limitato a conchiudere che due punti dell'una non potrauno mai essere equidistanti dall'altra. Ma tale conclusione ognun vede non discendere meramente dalle premesse; giacchè per tal modo d'argomentare si potrebbe mostrare assurda una verità; cioè che due punti di una circonferenza non potessero giammai essere da un'altra linea ugualmente lontani.

Possidonio, seguito da Boscovich e da molt'altri, è

(c) Traduzione italiana della Geometria di Legendre.

(d) Discorsi. Giornata prima.

uno di quelli, che secondo alcuni, ha meglio diffinito le parallele dicendo: che una retta è parallela ad un'altra, allorchè i suoi punti sono da questa sempre equidistanti. Ma dietro questa diffinizione si sarebbe dovuto mostrare, come per un punto fuori di una retta si può condurre a questa una parallela. Questo poi non si è fatto; e per qual ragione? Perchè (risponde d'Alembert) la diffinizione involse in se stessa il diffinito: avvegnachè la posizione di una retta, essendo fissata da due punti, ne discende che se due punti della prima sono equidistanti dall'altra, si dovrebbe provare in appresso che anche gli altri punti di quella sono tutti egualmente lontani dalla seconda.

Varignon chiama due linee parallele, allorchè tagliate amendue da una terza fanno gli angoli alterni eguali. Ma da questa diffinizione non poteva dedurre senza prova, com'egli fa, che le stesse linee tagliate amendue da un'altra in punti diversi, faranno anche con questa gli angoli alterni fra loro eguali: e prendendo la diffinizione nel senso che egli l'adopera, essa allora meriterà eccezioni somiglianti a quelle, che si convengono alla dimostrazione di Possidonio.

Nè con più felice riuscita a' nostri giorni il Signor Kircher ha procurato perfezionare la ingegnosa ed originale teorica delle parallele del celebre Legendre: imperocchè dopo avere introdotto fra simili proposizioni elementari l'idea di una linea che perpendicolarmente scorre sopra un'altra, prova in appresso che la linea descritta dal punto supremo della mobile sarà retta; e ciò col prendere ad assioma una proposizione, che è tanto evidente, anzi equivale all'altra che vuol dimostrare.

Tali, o somiglianti ragionamenti che per brevità volentieri tralascio, potrebbero essere addotti dai seguaci d'Euclide, affine di mostrare che non hanno gran torto se, anche nella teorica delle parallele riputarono il metodo Euclideo non inferiore ad alcun altro. Nondimeno spero che tutti meco converranno essere il metodo di M.<sup>r</sup> Legendre per acume ed originalità più d'ogni altro degnis-

simo di lode. E a dir vero quantunque veggiamo che si potrebbe per un punto interno ad un angolo condurre una retta concorrente ad un sol lato, pure non sarebbe soverchia cortesia il concedere a M.<sup>r</sup> Legendre il suo postulato; cioè di condurre pel punto D (Tav. VI. fig. 2.) la retta FE che incontri amendue i lati AB, AC prolungati indefinitamente: poichè sebbene dopo avere congiunto mediante retta il punto D ad un punto E della AB prolungata, la retta ED è fissata di posizione; non difficilmente però si comprende che l'arbitrario punto E può prendersi tale che prolungando la AC, questa in un punto F incontri la indefinita ED. E però forse troppo rigidi e scrupolosi sono quelli che ricusano a M.<sup>r</sup> Legendre questo postulato dicendo che ad ammetterlo se gli concederebbe in fin fine più di ciò che allo stesso Euclide si vuol diniegare. Intorno alle quali sottigliezze altri pure sia giudice, che per me dirò intanto che se Legendre non avesse ancora interamente perfezionata la teorica delle parallele, ci ha però luminosamente resi accorti che se pochi pensieri di più avesse consagrati al medesimo subbietto, egli più ch'altri era capace di finalmente condurla alla desiderata perfezione.

E qui mi giova riprendere l'ordine del mio ragionamento, dal quale l'esame delle altrui opinioni mi ha per alcun poco dilungato: e però dico che non con poca ragione si dee desiderare una dimostrazione rigorosa del nostro teorema; poichè da esso deducendosi evidentemente la più gran parte delle verità Geometriche, non abbiassi a dire che quasi tutta la Geometria poggia sopra un principio, la cui verità ha mestieri più ch'altre di essere dimostrata. E siccome l'ombra di un picciolissimo neo, che si scorgesse nel luogo più visibile di una veste bianchissima, offenderebbe la veduta del riguardante; così la pura luce di quella certezza, di che sovra ogn'altra umana scienza la Geometria risplende, mal volentieri può vedersi offuscata da nebbia qualsiasi di dubbiezza.

E veramente l'utile maggiore che ci proviene da questa scienza non si ravvisa cotanto nella sua diretta ap-



174  
plicazione agli umani bisogni ; come nella perfezione che per essa acquista l'umano intelletto ; imperocchè l'agevolare l'acquisto di quella attitudine , onde tanto abbisognamo ad investigare la verità e a francamente distinguerla dall'incerto e dal falso , è il frutto più squisito che dalla Geometria si raccoglie.

Ma da che trae origine poi quell'inesausto fonte da cui s'attinge maraviglioso diletto , nello studio della Geometria ? A ben dentro investigare , agevolmente si conosce provenire dalla contemplazione , che fa il Geometra , vedgendo come da quei pochi evidenti fatti , da cui si diparte , può da se ragionando con pari certezza elevare il suo spirito alla sicura conoscenza di tanti astrusissimi arcani della natura ; e quindi ancora argomentare come sia infinita , ed ineffabile la possanza e la sapienza di quel primo amore , che fu largo all'uomo del dono ammirabile della ragione. Conseguentemente per giungere alla dimostrazione dello stesso vero , quanto è minore il numero de' principii che come indimostrabili noi assumiamo , e quanto più saranno questi evidenti , il nostro spirito mostrandosi ne' suoi atti tanto più potente e sicuro , consegue eziandio tanto maggior diletto e perfezione.

Dopo le quali cose spero che ognuno meco converrà , che nello studio delle scienze assai male si farebbe a rimanersene con qualsiasi dubbiezza ed oscurità , o ad anteporre la persuasione al convincimento , quando questo non difficilmente possa ottenersi ; e così mi sarà dato a sperare che non ispregevole , ma utile debba riputarsi il fine , a cui si dirige la presente operetta.

Prego pertanto i miei lettori a giudicare con imparziale severità , se per avventura con questa mia fatica fossi giunto al bramato segno : e se in qualche paralogismo ( come è facile ) io pure fossi caduto , vedrò volentieri pubblicate le giuste censure , che mi si convengono ; affinchè meco si ricredano coloro , che avessi tratto in inganno ; e s'illustri quella scienza , la contemplazione delle cui verità può bensì dilettermi , ma non mai un vano suono d'immeritata lode.

1. *Probl.* Sottrarre una retta da un' altra. (Euclide lib. 1. Prop. III) (\*).

2. *Cor.* Da ciò si ha modo a sottrarre quante volte si può una retta da un' altra; e così trovare prossimamente, o precisamente quante volte vi è contenuta.

3. *Teor.* Se un angolo di un triangolo è uguale a quello d' un altro, ed i lati intorno agli stessi angoli sieno eguali, i medesimi due triangoli sono in tutto eguali. (Eucl. Prop. IV).

4. *Teor.* Due triangoli sono eguali, se i lati del primo ad uno ad uno sono eguali a quelli dell' altro. (Eucl. Prop. VIII).

5. *Probl.* Per un punto d' una retta tirare a questa una perpendicolare. (Eucl. Prop. XI)

6. *Probl.* Per un punto fuori di una retta condurre a questa una perpendicolare. (Eucl. Prop. XII).

7. *Teor.* Insistendo una retta sopra un' altra la somma degli angoli è uguale a due retti. (Eucl. Prop. XIII).

8. *Cor.* La somma di tutti 'gli angoli, che sono attorno ad un punto, è uguale a quattro retti.

9. *Teor.* L' angolo esterno di un triangolo è maggiore di ognuno degl' interni opposti. (Eucl. Prop. XVI).

10. *Teor.* Due angoli d' un triangolo sono minori di due retti. (Eucl. Prop. XVII.).

11. *Cor.* Ogni triangolo avrà almeno due angoli che saranno acuti.

12. *Cor.* In un triangolo isoscele o equicrure gli angoli alla base (essendo uguali, Eucl. Prop. V.) saranno acuti, e prolungando la base stessa, gli angoli esterni saranno ottusi (7).

---

(\*) Di queste Proposizioni alle prime ventiquattro non si aggiunge dimostrazione, essendo le medesime secondo il metodo di Euclide tutte rigorosamente dimostrate innanzi alla vigesima nona del libro primo; cioè a dire innanzi quella, dove Euclide comincia a far uso del suo quinto Postulato.

13. *Cor.* Quindi ancora se per un punto di una retta, che incontra un'altra obliquamente, si tira a questa una perpendicolare (6), la stessa perpendicolare la incontrerà dalla banda dell'angolo acuto.

14. *Cor.* Per un punto fuori di una retta non si può tirare a questa che una sola perpendicolare.

15. *Teor.* Due lati di un triangolo sono maggiori del terzo. (Eucl. Prop. XX).

16. *Cor.* La linea retta è la più breve, che possa tirarsi da un punto ad un altro.

17. *Probl.* Per un dato punto di una retta tirarne un'altra, che faccia con questa un angolo dato. (Eucl. Prop. XXIII).

18. *Cor.* Da ciò si ha modo a sottrarre una o più volte un angolo da un altro, e così rilevare quante volte o precisamente, o prossimamente vi sia contenuto.

19. *Teor.* Se due triangoli hanno le basi disuguali, ma gli altri lati eguali, gli angoli opposti alle basi sono disuguali come queste. (Eucl. Prop. XXV).

20. *Cor.* Se un triangolo ha due lati ad uno ad uno eguali a quelli di un altro, e che la base del primo non sia maggiore della base del secondo, l'angolo opposto a quella non sarà maggiore dell'angolo opposto a questa.

21. *Teor.* Se un lato e gli angoli adjacenti di un triangolo sono eguali rispettivamente ad un lato e agli angoli adjacenti di un altro, essi triangoli sono in tutto eguali. (Eucl. Prop. XXVI).

22. *Teor.* Se due rette segate da una terza fanno gli angoli alterni uguali, oppure l'angolo esterno eguale all'interno opposto dalla medesima parte, oppure gli angoli interni dalla medesima banda uguali a due retti, quelle due linee saranno parallele. (Eucl. Prop. XXVII, XXVIII).

23. *Cor.* Due rette che siano perpendicolari ad una terza saranno parallele fra loro.

24. *Cor.* Quindi ancora si avrà modo per un punto fuori di una retta di tirare a questa una parallela.

25. *Teor.* Se due triangoli rettangoli hanno l'ipotenusa ed un cateto eguale, essi saranno in tutto eguali. (*fig. 3*).

Essendo gli angoli C, e G retti, ed il lato  $AC = DG$ , e l'ipotenusa  $AB = DF$ , ne deriva che se i lati BC, FG non fossero eguali, uno di essi FG sarebbe minore, e però EG ad esempio sarebbe eguale a BC; e conducendo la ED il triangolo DEG sarebbe pienamente eguale al triangolo



$ABC$  (3) ed in conseguenza  $AB = DE$ ; ma essendo pure  $DE = AB$ , il triangolo  $DEF$  sarebbe equicrura, e però l'angolo  $DFE$  ottuso (12), cioè il triangolo  $DEF$  avrebbe un angolo retto ed un altro ottuso, il che è impossibile (11). Dunque i lati  $BC$ ,  $FG$ , non potendo essere minori l'uno dell'altro, saranno eguali; e però i due triangoli saranno eguali (3). Come dovevasi dimostrare.

26- *Teor.* Se due quadrilateri  $ABCD$ ,  $EFGH$  hanno il lato  $AB = EG$ ;  $BC = GH$ ,  $DC = FH$ ; e l'angolo  $B = G$ , e  $BCD = GHF$  i medesimi quadrilateri saranno in tutto eguali (*fig. 4*).

Condotta  $AC$ , ed  $EH$ ; il triangolo  $ABC$  è eguale perfettamente all'altro  $EGH$  (3) e però il lato  $AC = EH$ , e l'angolo  $ACB = EHG$ ; e per conseguenza dagli angoli  $BCD$  e  $GHF$  eguali togliendo gli eguali  $ACB$ ,  $EHG$ , ancora gli angoli residui  $ACD$ ,  $EHF$  saranno eguali fra loro, e però anche i due triangoli  $ACD$ ,  $EHF$  saranno perfettamente eguali (3), e quindi tutto il quadrilatero  $ABCD$  eguale perfettamente al quadrilatero  $EFGH$ . C. D. D.

27. *Cor.* Da ciò si conosce evidentemente come si può costruire un quadrilatero eguale ad un altro.

28. *Teor.* Nel quadrilatero  $ABDC$ , se i lati  $AC$ ,  $BD$  sono eguali, e l'angolo  $ACD$  sia eguale all'altro  $BDC$ , anche gli altri due angoli saranno fra loro eguali (*fig. 5*).

Conducansi le diagonali  $AD$ ,  $BC$ . I triangoli  $ACD$ ,  $BDC$  sono perfettamente eguali (3) e però il lato  $AD = BC$ ; quindi ancora i triangoli  $ABC$ ,  $BAD$ , avendo tutti e tre i lati eguali, saranno perfettamente eguali (4), e però l'angolo  $BAC$  sarà eguale all'altro  $ABD$ . C. D. D.

29. *Teor.* Se un quadrilatero  $ABCD$  avrà gli angoli  $C$ , e  $BDC$  retti, e i lati  $AC$ ,  $BD$  eguali fra loro: dico che il lato  $CD$  non sarà maggiore di  $AB$  (*fig. 6*).

Sopra la  $CD$  prolungata indefinitamente verso  $K$  s'intendano costruiti l'uno dietro l'altro i quadrilateri  $BLED$ ,  $LMFE$  ecc. eguali al  $ABDC$  (27) e si consideri che supponendosi  $CD$  maggiore di  $AB$  di una qualche quantità  $Cz$ , cioè  $CD = AB + Cz$  avverrebbe che questa retta  $Cz$  confrontata ad un'altra doppia della  $AC$ , cioè ad una retta eguale ad  $AC + KQ$ , si troverebbe esservi contenuta un determinato numero di volte o esattamente o con un avanzo minore di essa (2). Sia pertanto sette il numero di queste volte, e per conseguenza meno di otto volte. In tal caso adunque  $8Cz$  supererebbe di una quantità  $Ax$  la retta  $AC + KQ$  cioè:

$$8Cz = AC + KQ + Ax$$

Ma conforme la supposizione fatta a principio avendosi

$$CD = AB + Cz$$

si avrebbe ancora

$$8CD = 8AB + 8Cz$$

dove sostituendo ad  $8Cz$  il suddetto suo equivalente, si avrebbe:

$$8CD = 8AB + AC + KQ + Ax$$

e però  $8CD > 8AB + AC + KQ$

Ma  $8CD$  è uguale alle basi di otto rettangoli successivi, cioè alla retta  $CK$ ; ed  $8AB$  è uguale alla somma dei lati opposti alle stesse basi, cioè alla linea  $ABLMPQ$ , dunque sostituendo, si avrebbe finalmente

$$CK > ABLMPQ + AC + KQ$$

che è quanto dire, la retta  $CK$  sarebbe maggiore della linea spezzata  $CABLMPQK$ , il che è assurdo (16). Ma qualunque fosse quel numero di volte con simigliante ragionamento s'incorrerebbe nella stessa assurdità, dunque è impossibile la fatta supposizione, che è quanto dire il lato  $CD$  non è maggiore del lato  $AB$ . C. D. D.

30. *Lemma.* In un triangolo rettangolo  $ABC$  la somma degli angoli adiacenti all'ipotenusa  $AB$  non è maggiore di un retto. (*fig. 7.*).

Nel punto  $B$  s'innalzi  $BD = AC$ , e perpendicolare a  $CB$  (5), quindi si conduca la retta  $AD$ . Nei triangoli  $ACB$ ,  $ABD$  il lato  $AB$  è comune,  $DB = AC$ , e  $CB$  non è maggiore di  $AD$  (29), perciò l'angolo  $CAB$  non è maggiore di  $ABD$  (20), ma siccome  $CBA + ABD$  sono eguali ad un retto, dunque  $CAB + ABC$  non è maggiore di un retto. C. D. D.

31. *Teor.* La somma degli angoli d'un triangolo qualunque  $ABC$  non è maggiore di due retti. (*fig. 8.*).

Siano in questo triangolo gli angoli  $B$ ,  $ACB$  acuti (11); e si cali dal vertice del terzo angolo  $A$  la  $AD$  perpendicolare a  $BC$  (6) la quale cadrà fra  $B$  e  $C$ . (13). Ora gli angoli  $DAC + DCA$  non sono maggiori d'un retto (30) e così gli angoli  $DAB + ABD$  non maggiori d'un retto (30) però tutti e quattro questi angoli, o sia la somma degli angoli del triangolo  $ABC$  non è maggiore di due retti. C. D. D.

32. *Cor.* Gli angoli di un quadrilatero essendo eguali a quelli di due triangoli, essi non saranno maggiori di quattro retti.

33. *Teor.* Nel quadrilatero  $ABCD$  se il lato  $AB$  è mag-

giore di  $CD$ , ed amendue gli angoli  $B$ , e  $D$  sieno fra loro eguali, l'angolo  $ACD$  è maggiore di  $A$ . (*fig. 9.*)

Si prenda  $EB = CD$  e si conduca  $EC$ . L'angolo  $CEB$  è maggiore di  $A$  (9), ed è eguale ad  $ECD$  (23) dunque anche l'angolo  $ACD$  maggiore di questo, sarà sempre più grande di  $A$ .

34. *Teor.* Se  $AB$  è maggiore di  $CD$  ed amendue perpendicolari a  $BC$ , conducendo dal punto  $A$  una perpendicolare alla  $AB$ , essa non potrà passare per  $D$  nè per alcun punto  $P$  od  $O$  della  $DC$ . (*fig. 10.*)

La perpendicolare non potrà essere  $AP$  perchè il triangolo  $AQB$  avrebbe due angoli retti, il che è assurdo (10) e se essa perpendicolare passasse pel punto  $D$ , siccome  $DC$  è minore di  $AB$  l'angolo  $ADC$  sarebbe maggiore dell'angolo  $BAD$  retto (33) e però esso  $ADC$  ottuso, ed in conseguenza il quadrilatero  $ABCD$  avrebbe gli angoli maggiori di quattro retti, il che è pure assurdo (32); nello stesso modo si dimostra che non potrà passare pel punto  $O$ . Dunque ecc.

35. *Cor.* Siccome la perpendicolare  $AN$  non può incontrare  $BC$  (23) nè la terminata  $DC$  (34), dunque prolungata indefinitamente passerà superiormente al punto  $D$ .

36. *Teor.* Nel quadrilatero  $ABDC$ , essendo i lati  $AC$ ,  $BD$  eguali fra loro e perpendicolari a  $CD$ , la somma de' suoi angoli sarà eguale a quattro retti. (*fig. 11.*)

*Cost.* Sopra la  $CD$  prolungata indefinitamente verso  $R$  s'intendano costruiti l'un dietro l'altro i quadrilateri  $EFHG$ ,  $ILNM$  ecc., eguali al quadrilatero  $ABDC$  (27) quindi a piacere si prolunghi  $CA$  sino in  $a$ , e dal punto  $a$  si conduca ad  $aC$  la perpendicolare indefinita  $ar$  (6) che si stenderà superiormente ai punti  $B$ ,  $F$ ,  $L$  ecc. (35) quindi si prendano della stessa  $ar$  le porzioni  $ab$ ,  $ef$ ,  $il$  ecc. l'una dietro l'altra, ed eguali ad  $AB$ ; finalmente si conduca  $Bb$ ,  $Ff$ ,  $Ll$  ecc.

*Dim.* Se gli angoli del quadrilatero  $ABCD$  fossero eguali a quattro retti meno una qualunque quantità  $P$ ; si consideri primieramente che una tale quantità  $P$  confrontata alla somma di tre retti, si troverebbe in questa contenuta o precisamente o prossimamente un determinato numero di volte (18). Sia pertanto sette il numero di queste volte, e per conseguenza meno di 8. Dunque  $8P$  supererebbe di una quantità  $Q$  la somma di tre retti; cioè  $8P$  eguaglierebbe 3 retti più  $Q$ , e però rappresentando con  $R$  un angolo retto si avrebbe  $8P = 3R + Q$ :

In secondo luogo si consideri che se conforme la stessa



supposizione gli angoli del quadrilatero  $ABDC$  fossero eguali a quattro retti meno la quantità  $P$ , unendogli cogli angoli del quadrilatero  $abcd$ , i quali non possono essere più di quattro retti (32) si avrebbe che gli angoli  $a + c + A + C + b + d + B + D$  sarebbero al più eguali ad 8 retti meno  $P$ , dalla qual somma levati gli angoli  $a + c + A + C$  che sono eguali a 4 retti (7) gli angoli residui  $b + d + B + D$  sarebbero al più eguali a 4 retti meno  $P$ ; ed aggiungendo a questi gli angoli dei quadrilateri  $efhg$ ,  $EFHG$  ne risulterebbe che gli angoli  $b + e + d + g + B + E + D + G + f + h + F + H$  sarebbero al più eguali a 12 retti meno  $2P$ , e da tal somma levati gli angoli  $b + e + d + g + B + E + D + G = 8$  retti (7. 8) ne risulta che gli angoli  $f + h + F + H$  sarebbero al più eguali a 4 retti meno  $2P$ ; e così procedendo si avrebbe che gli angoli  $x + z + X + Z$  sarebbero eguali al più a 4 retti, meno 8 volte  $P$ ; ma  $8P = 3R + Q$ . Dunque la somma degli angoli  $x + z + X + Z$  sarebbe eguale a  $4R - 3R - Q$  ossia ad  $R - Q$ , cioè minore di un retto. Ma per essere il solo angolo  $Z$  eguale ad un retto, gli stessi quattro angoli sono anzi maggiori di un retto, dunque l'ipotesi induce in assurdo, e però la somma degli angoli del quadrilatero  $ABCD$  non potrà essere minore di quattro retti. Ma non sono nemmeno maggiori (32) dunque saranno eguali a 4 retti. C. D. D.

37. *Cor.* Nello stesso quadrilatero  $ABDC$  gli angoli alla base sono retti: dunque la somma degli altri due sarà uguale a due retti: ma questi pure sono eguali fra loro (28), dunque ognuno di essi sarà la metà di quella somma; e però sarà retto; cioè nello stesso quadrilatero, tutti gli angoli sono retti.

38. *Teor.* Gli angoli di un triangolo qualunque  $ABC$  sono eguali a due retti (*fig. 12.*).

Siano gli angoli  $ABC$ ,  $ACB$  acuti (11). Si cali dal vertice  $A$  la perpendicolare  $AD$  (13); quindi dai punti  $B$ , e  $C$  s'innalzino le perpendicolari  $BF$ ,  $CE$  alla  $BC$  (5) ed uguali alla  $AD$ , e si conduca  $AE$ ,  $AF$ . Il quadrilatero  $ADCE$  ha l'angolo  $E$  retto (37) perciò i due triangoli  $AEC$ ,  $ACD$  saranno perfettamente eguali (25); e però l'angolo  $ACE = CAD$ : ma gli angoli  $ACE + ACD$  sono eguali ad un retto, dunque gli angoli  $ACD$ ,  $DAC$  presi insieme sono eguali ad un retto. Nello stesso modo si dimostra che gli angoli  $BAD$ ,  $ABD$  insieme sono eguali ad un retto, dunque la somma di questi quattro angoli, o sia degli angoli del triangolo  $ABC$  sarà eguale a due retti. C. D. D.

39. *Cor.* Se due angoli di un triangolo sono eguali a due angoli di un altro; anche il terzo angolo di quello uguaglierà il terzo di questo.

40. *Teor.* Gli angoli di un quadrilatero sono eguali a quattro retti.

Gli angoli di un quadrilatero per essere eguali a quelli di due triangoli, saranno eguali a quattro retti (38).

41. *Cor.* Se un quadrilatero ha tre angoli retti avrà retto anche il quarto.

42. *Cor.* Se un quadrilatero avrà due angoli interni dalla stessa parte eguali a due retti, anche gli altri due angoli saranno eguali a due retti.

43. *Teor.* Se due rette  $AF$ ,  $BG$  essendo tagliate da una terza  $AC$  fanno gli angoli interni dalla stessa parte  $FAC$ ,  $ACG$  eguali a due retti, tagliate amendue da un'altra in qualunque modo faranno anche con questa gli angoli interni dalla stessa parte eguali a due retti. (*fig. 13.*)

Se sono tagliate come dalla  $FG$  la proposizione è manifesta (42) se sono tagliate dalla  $BD$  o dalla  $CE$  si tiri  $FG$ , e si avrà che gli angoli  $EFG + CGF$  sono eguali a due retti (42), e però anche  $FEC + ECG = 2$  retti, come  $FDB + DBG$  (42). Dunque ecc.

44. *Cor.* Le stesse linee tagliate in qualunque modo fanno gli angoli alterni eguali fra loro, e l'esterno eguale all'interno opposto.

45. *Teor.* Un quadrilatero  $ABDC$ , che abbia tutti gli angoli retti avrà i lati opposti uguali (*fig. 14.*)

Si conduca la diagonale  $BC$ .

Ne' triangoli  $ABC$ ,  $BDC$  l'angolo  $x = z$  (44) l'angolo  $u = y$  (44) e il lato  $BC$  è comune. Dunque i triangoli  $ABC$ ,  $BDC$  sono eguali (21), e però  $AC = BD$ , ed  $AB = CD$ .

46. *Teor.* Se per un punto  $D$  dell'ipotenusa  $AB$  di un triangolo rettangolo  $ABC$  si conduce una perpendicolare ad un cateto  $BC$ , la medesima incontrerà questo in un punto  $E$ , fra  $B$  e  $C$  (*fig. 15.*).

In effetto; una tale perpendicolare non cadrà in  $C$  perchè l'angolo  $ACB$  essendo retto, non potrà esserlo ancora il suo minore  $DCB$ . Non cadrà in  $B$  perchè il triangolo  $DCF$  avrebbe l'angolo  $DCF$  ottuso, e l'angolo  $DFC$  retto, cioè due angoli la cui somma sarebbe maggiore di due retti, il che è assurdo (10). Essendo poi l'angolo  $ABC$  acuto (11) non può cadere nemmeno in  $G$  (13), dunque cadrà in un punto  $E$  fra  $B$  e  $C$ .

47. *Teor.* Se l'angolo  $A$  è acuto, e del lato  $AR$  si prenda ad arbitrio la parte  $AM$ , e successivamente le parti  $MN$ ,  $NP$ ,  $PQ$  ecc. eguali alla  $AM$ , e finalmente dai punti  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  ecc. si abbassino le  $MB$ ,  $NC$ ,  $PD$  ecc. perpendicolari ad  $AF$ , ancora le porzioni  $BC$ ,  $CD$  ecc. intercette fra queste perpendicolari saranno tutte eguali ad  $AB$ . (*fig. 16.*)

Dal punto  $N$  si tiri  $NT$  perpendicolare a  $PD$  la quale cadrà fra i punti  $P$ ,  $D$  (46) fatto ciò si consideri in primo luogo che essendo le  $MB$ ,  $PD$  perpendicolari alla  $AF$ , l'angolo esterno  $AMB$  sarà eguale all'interno opposto  $NPT$  (44). Si consideri in secondo luogo che i triangoli  $AMB$ ,  $NPT$  oltre un angolo retto, avendo come sopra gli angoli  $AMB$ ,  $NPT$  eguali, ancora il terzo angolo  $A$  del primo sarà eguale a  $PNT$  del secondo (39). Ma negli stessi triangoli per la proposizione il lato  $AM$  del primo uguaglia l' $NP$  del secondo, dunque i medesimi sono pienamente eguali (21) e però  $AB = NT$ . Siccome poi il quadrilatero  $NTDC$  ha per costruzione tre angoli retti avrà retto anche il quarto (41). Dunque  $CD$  sarà esso pure eguale a  $NT$  (45) e però i lati  $AB$ ,  $CD$  per essere amendue eguali al terzo  $NT$  sono eguali fra loro. Ma la stessa dimostrazione ha luogo parimente in riguardo alle altre porzioni  $BC$ ,  $DE$ ,  $EF$  ecc. dunque è vera la proposizione; C. D. D.

48. *Cor.* Se  $AN$  è dunque doppia di  $AM$  ancora  $AC = 2 AB$ , se  $AP = 3 AM$  ancora  $AD = 3 AB$ , e così se  $AR = 5 AM$  si avrà pure  $AF = 5 AB$  e via dicendo.

49. *Cor.* Se l'angolo  $A$  è acuto, ed  $AVX$  retto, le linee  $AP$ ,  $VX$  concorreranno (*fig. 16.*).

Sulla  $AP$  prolungata indefinitamente si prenda ad arbitrio un punto  $M$ , e da questo si cali la perpendicolare  $MB$  (13) e quindi si cerchi quante volte precisamente, o prossimamente la  $AB$  è contenuta in  $AV$  (2), e trovandosi che il numero di queste volte fosse ad esempio quattro, e però minore di cinque si avrà  $5AB$  maggiore di  $AV$ .

Ciò stabilito si prendano successivamente sulla  $AP$  prolungata, le porzioni  $MN$ ,  $NP$ ,  $PQ$ ,  $QR$  eguali alla  $AM$ , e si cali dal punto  $R$  la  $RF$  perpendicolare ad  $AV$  prolungata: in appresso si consideri che essendo  $AR$  quintuplo di  $AM$ , ancora  $AF$  sarà quintuplo di  $AB$  (48) e però maggiore di  $AV$ ; dunque il punto  $V$  si troverà fra  $A$  ed  $F$ . Ma la perpendicolare  $VX$  non può incontrare l'altra perpendicolare  $RF$  (23), dunque essa perpendicolare  $VX$  prolungata in-



definitamente s' incontrerà in un punto Z della AP prolungata; C. D. D. (\*).

50. *Teor.* Per un punto C preso fuori di una retta AB; non si può condurre che una sola retta EF che sia parallela alla AB. (*fig.* 17.).

Dal punto C si tiri CD perpendicolare ad AB (6. 14), quindi pel punto C si tiri EF perpendicolare a CD (5); conforme tale costruzione le rette EF, AB essendo ambedue perpendicolari ad una terza CD, dunque le stesse rette sono parallele fra loro (23). Ma tirando una qualunque altra retta MN pel punto C questa farà con CD un angolo acuto NCD, dunque le CN, DB prolungate convenientemente s' incontreranno (49) e però non saranno parallele; C. D. D.

51. *Cor.* Di due rette parallele fra loro se una di esse è tagliata da una terza, questa medesima prolungata convenientemente incontrerà l' altra ancora.

52. *Teor.* Se due rette AC, BD nello stesso piano tagliate da una terza AB fanno gli angoli interni CAB ABD dalla stessa parte minori di due angoli retti, esse concorreranno. (*fig.* 18 ).

Si prolunghi BD verso G, e al punto A si faccia l'angolo  $EAB = ABG$  (17). Quindi si consideri che siccome l'angolo ABG col ABD è eguale a due retti (7) così ancora l'angolo EAB col medesimo ABD farà due retti; e però AE sarà parallela a BD (22), dunque le rette AC, BD concorreranno (51); C. D. D.

(\*) Ammettendo per brevità questa proposizione qual assioma, la dimostrazione del quinto postulato d'Euclide si otterrà pel solo mezzo delle seguenti proposizioni.



# INDICÉ DELLE MATERIE

## CONTENUTE NELLA PARTE II.

---

### ELEMENTI DI GEOMETRIA.

|      |                                                                                       |      |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|
| LIB. | I. <i>Delle proprietà dei triangoli e parallelogrammi . . . . .</i>                   | pag. | 3   |
| LIB. | II. <i>Dei quadrati e dei rettangoli delle linee. . . . .</i>                         | „    | 27  |
| LIB. | III. <i>Delle proprietà del cerchio . . . . .</i>                                     | „    | 34  |
| LIB. | IV. <i>Delle figure inscritte e circoscritte al cerchio . . . . .</i>                 | „    | 49  |
| LIB. | V. <i>Delle proporzioni e loro applicazione nelle figure piane . . . . .</i>          | „    | 57  |
| LIB. | VI. <i>Dei solidi e delle proprietà dei parallelepipedì . . . . .</i>                 | „    | 79  |
| LIB. | VII. <i>Delle piramidi, dei coni, dei cilindri e della sfera. . . . .</i>             | „    | 98  |
| LIB. | VIII. <i>Dei principali teoremi d' Archimede sul cilindro e sulla sfera . . . . .</i> | „    | 113 |
| LIB. | IX. <i>Della misurazione delle quantità geometriche . . . . .</i>                     | „    | 131 |

### ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA PIANA.

|      |                                                                                           |   |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----|
| SEZ. | I. <i>Proprietà delle linee trigonometriche . . . . .</i>                                 | „ | 143 |
| SEZ. | II. <i>Applicazione della teorica precedente alla risoluzione de' triangoli . . . . .</i> | „ | 160 |
| CAP. | I. <i>Teoremi . . . . .</i>                                                               | „ | ivi |
| CAP. | II. <i>Risoluzione de' triangoli . . . . .</i>                                            | „ | 163 |
|      | § 1. <i>Risoluzione de' triangoli rettangoli. . . . .</i>                                 | „ | ivi |
|      | § 2. <i>Risoluzione de' triangoli obliquangoli . . . . .</i>                              | „ | 165 |
|      | <i>DIMOSTRAZIONE del quinto Postulato d' Euclide . . . . .</i>                            | „ | 169 |



*Die 16. Martii 1826.*

**VIDIT**

Pro Eminentissimo, ac Reverendissimo D. D.

**CAROLO CARD. OPPIZZONIO**

Archiep. Bononiensi

F. Paullus Antonius Barbetti Ord. Min. Conv.

---

*Die 17. Martii 1826.*

**VIDIT**

Pro Excelso Gubernio

Dominicus Mandini S. T. D. Coll. Prior Parochus

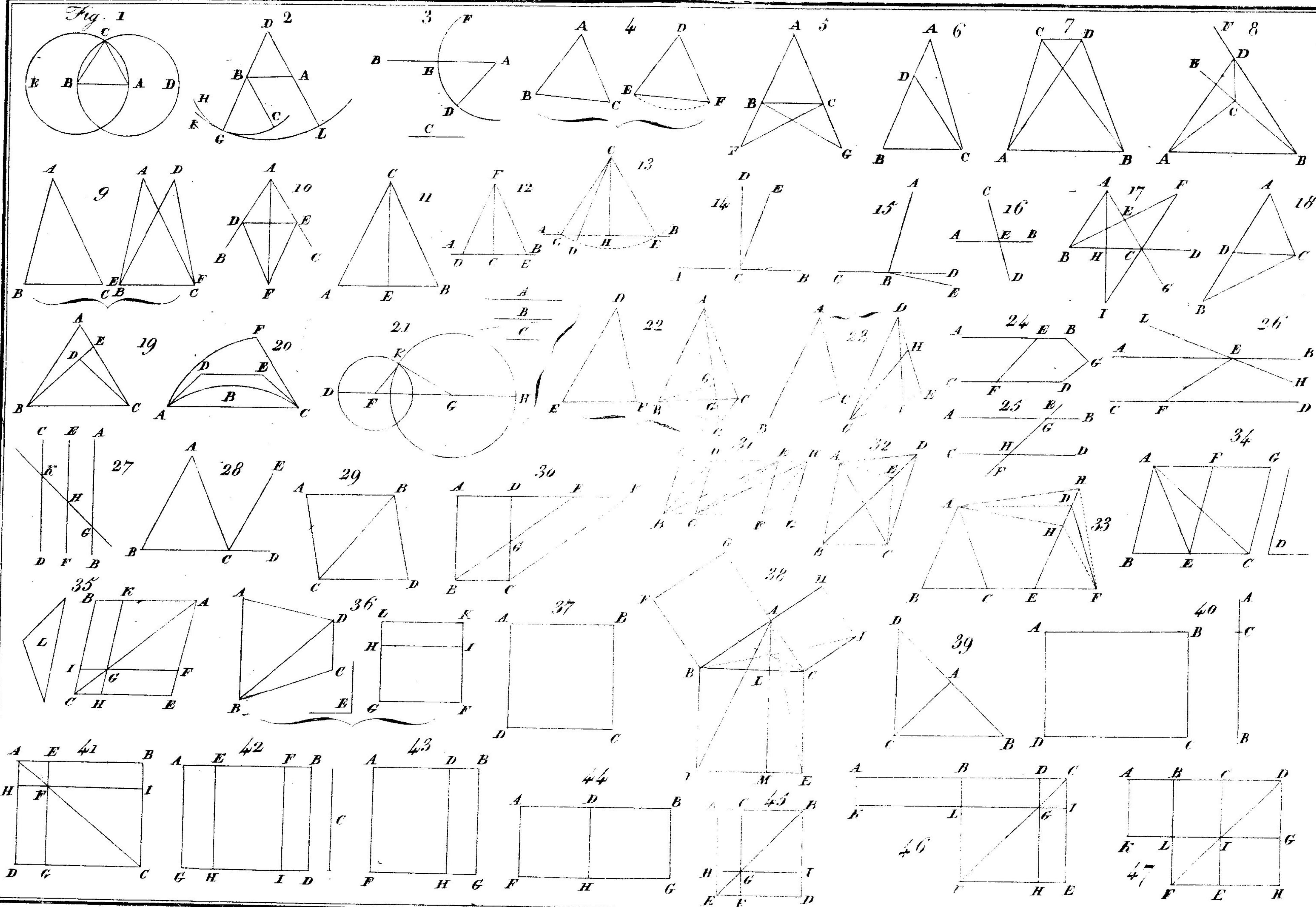
et Exam. Synod.

---

*Die 17. Martii 1826.*

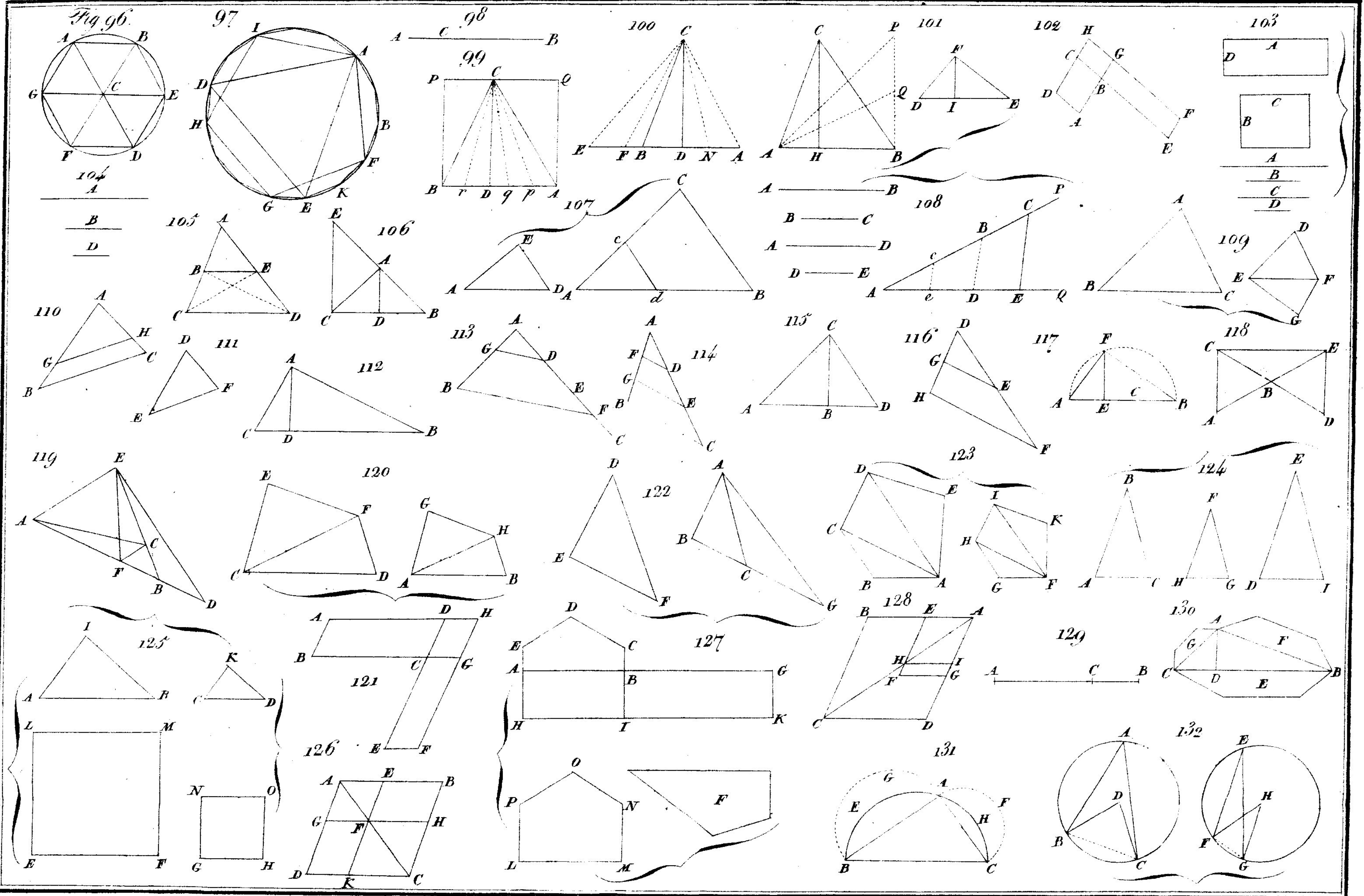
**REIMPRIMATUR**

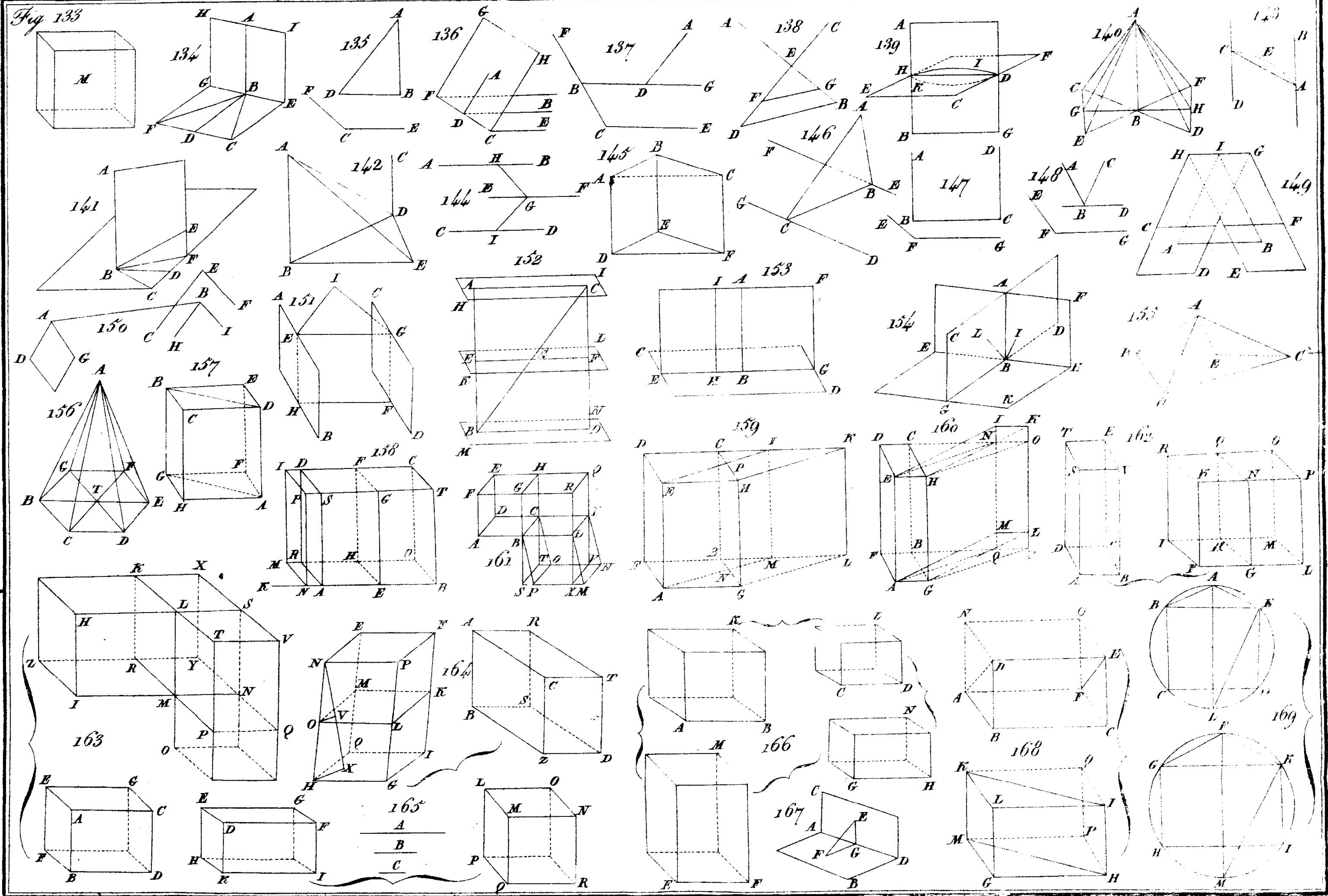
Leopoldus Archip. Pagani Provic. Gen.













*Fig. 170.*

