

PREZZO { *della Parte I. . sc. o. 50.*
di tutta l'Opera . . „ 1. —.

BRUNACCI.

ELEMENTI

DI

ALGEBRA E GEOMETRIA

PARTI I.

ALGEBRA

ELEMENTI
DI
ALGEBRA E GEOMETRIA

RICAVATI

DAI MIGLIORI SCRITTORI DI MATEMATICA

PER OPERA

DEL CAV. BRUNACCI.

EDIZIONE

RIVEDUTA ED ILLUSTRATA CON NUOVE CORREZIONI ED AGGIUNTE,
FRA LE QUALI UNA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA
FONDAMENTALE DELLE PARALLELE.

PARTI I.
ALGEBRA.

BOLOGNA
PEI TIPI DEL NOBILI E COMP.
1850.

AVVERTIMENTO

DELL' EDITORE.

Il corso di Matematica elementare compilato dal chiarissimo Cavalier Brunacci si reputa a tutta ragione ottima scorta nell' insegnamento della Geometria e dell' Algebra. Di tale verità se ne avrà buon argomento o si riguardi lo spaccio ch' ebbero le replicate e copiose edizioni che di esso in brevissimo tempo si fecero, o il cospicuo novero dei professori che spontaneamente lo serbano a testo delle lezioni loro. Per la qual cosa noi portiamo opinione che favorevole accoglimento avrà in Italia quest' edizione, che dello stesso corso noi pubblichiamo: e tanto più che per opera di un nostro benevolo aggiungiamo un' inedita dimostrazione del quinto postulato d' Euclide, e presentiamo il quinto li-

bro della Geometria scevro affatto da quelle mende, che per vero rendono in qualche parte lo studio degli elementi di essa dipendente da quello dell' Algebra. In tal guisa diamo modo di giungere pienamente al fine propostosi dal suddetto celebre compilatore, il quale nella sua prefazione si mostra persuaso che presentando la Geometria elementare meno astrattezze dell' Algebra, avviene ancora che più agevolmente possiamo introdurci alle Matematiche incominciando dalla Geometria stessa.

AVVERTIMENTO

DELL' AUTORE.

Un libro che in picciol volume contenesse soltanto tutte quelle elementari dottrine di Algebra e di Geometria che debbono dettarsi nel breve periodo di un anno scolastico: un libro che, senza essere soverchiamente conciso, desse campo allo studente di meditare ed al maestro d'aggiungere: un libro in fine adattato a formare l'insegnamento degli agrimensori, ad esser base di quello degl'ingegneri e della gioventù che si dedica allo studio delle scienze fisiche e morali, era generalmente desiderato.

Risoluto io di riempire questo vuoto, conobbi esser più prudente consiglio ricavarlo dai migliori scrittori di Matematica, che comporlo di nuovo.

Ed in quanto all'Aritmetica ed all'Algebra, nel che consiste la Prima Parte, sono serviti di guida gli elementi di *La-Caille*, ai quali con tanto successo lavorarono e l'abate *Marie* ed i nostri Italiani *Canovai* e *Del Ricco*. Oltre alcune aggiunte di poco momento, vi sono scritte

di nuovo la dottrina delle frazioni continue, la dottrina degli esponenti e delle potenze, quella dei logaritmi, quella dei problemi indeterminati di primo grado, e la risoluzione delle equazioni letterali e numeriche del terzo e quarto grado: le opere elementari di *Eulero*, di *Bezout*, di *Bossut*, di *Clairaut*, di *Riccati*, di *Saladini*, di *Paoli*, di *Ruffini* e di altri molti sono state consultate e talvolta messe a contribuzione nello scrivere i cangiamenti qui sopra riferiti: per il che mi lusingo che il mio travaglio possa essere cortesemente ricevuto dal Pubblico.

La Seconda Parte di questi Elementi contiene la *Geometria* e la *Trigonometria* piana.

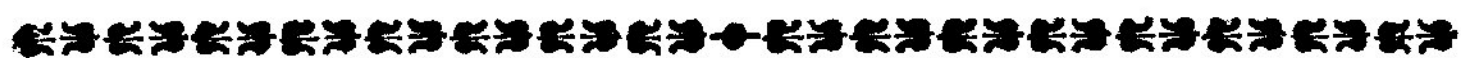
La Geometria da me prescelta è quella d' *Euclide*, volgarizzata dal celebre *Guido Grandi*. Vi ho cangiata la dottrina delle proporzionali sostituendo agli *egualmente moltiplici* alcuni principj e modi di dimostrazione che ho attinti nelle spiegazioni al quinto libro di *Euclide*, date dal sommo *Galileo*, nella Geometria di *Tommaso Simpson* ed in altre di accreditati scrittori. Non ho voluto a bella posta far uso delle Teoriche spiegate nell' *Algebra*, onde possa incominciare anche dalla Geometria, il che io reputo meglio, chi vorrà erudirsi negli elementi delle *Matematiche*, tenendo per guida questo libretto.

Affinchè poi nulla manchi a coloro i quali apprendono le Geometrie per applicarle alle arti dell' *agrimensore* e dell' *ingegnere*, ho creduto opportuno l'aggiungere due libri, dei quali l'uno contiene i più importanti teoremi *del cilindro e della sfera* ritrovati dal Geometra di *Siracusa*, e l'altro tratta della *misurazione delle quantità geometriche*.

E per la *Trigonometria* me ne ha somministrati i fondamenti il ristretto che di questa scienza ha pubblicato l'illustre *Cagnoli*, se non che ho dato altra forma alla dottrina della risoluzione dei *triangoli rettangoli* ed *obliquangoli*, e l'ho corredata di esempj.

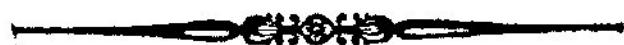
Del resto io non mi sono mai valuto nei primi quattro libri, e solo l'ho fatto con parsimonia negli altri, di

quei segni che, presi in prestito dall'Algebra, sogliono⁷ usarsi per esprimere l'*eguaglianza*, la *disuguaglianza*, la *somma*, la *sottrazione* delle quantità geometriche; tenendo in ferma opinione che se questa usanza ci arreca qualche piccolo vantaggio coll'abbreviare alcun poco il discorso nelle dimostrazioni, quasi interamente si perde il pregio più importante della Geometria, quello cioè di avvezzare i giovani a ragionati dialoghi.



ELEMENTI

D' ALGEBRA E DI GEOMETRIA.



1. Gli elementi dell' Algebra e della Geometria formano la base delle matematiche discipline, anzi ne sono la parte più elementare.

Queste matematiche han per oggetto la stima, la misura, il confronto, ed in generale le proprietà di quelle cose tutte nelle quali o sono o si concepiscono essere alcune parti, cui si dà il nome di *quantità*.

2. I Geometri distinguono due generi di quantità: l' una che chiamano *discreta*, e che risulta da varie parti tra loro disgiunte e divise, e delle quali, senza aver riguardo alla grandezza di ciascuna, non vuolsene considerare che la moltitudine, il numero; l' altra che essi appellan *continua*, per esser composta di varie parti continuate e connesse tra loro, e della quale si considera la grandezza, l' estensione.

Le quantità del primo genere dan soggetto all' *Aritmetica*; quelle del secondo alla *Geometria*.

3. Si distinguono due sorte di Aritmetica: l' *ordinaria*, che ha per oggetto il calcolo dei numeri, e la *speciosa* o l' *Algebra*, che, rappresentando i numeri per segni più generali, è una più generale Aritmetica.

4. La prima parte di questo trattato comprende l' una e l' altra Aritmetica; ma l' ordinaria vi è esposta assai in succinto, e quanto basta soltanto per rammentarne le operazioni a chi l' abbia già appresa una volta per abitudine.

PARTE PRIMA.

ELEMENTI DI ARITMETICA.

CAPO PRIMO.

DEGL' INTERI.

5. È inutile definir l' *unità* e la *pluralità*: tutti ne hanno un'idea distinta. Ma poichè la pluralità risulta da unità particolari, per distinguere una pluralità dall'altra s'immaginò il *numero*, che è la riunione di molte unità. Quindi tre, sei, venti uomini riuniti doveano essere espressi con numeri o segni differenti: e potendo concepirsi infiniti uomini, pareva necessaria per esprimerli un'infinità di segni, la cui moltitudine avrebbe oppressa la memoria e scoraggiati i più intrepidi calcolatori. Perciò tutti i numeri si espressero ingegnosamente con la combinazione delle dieci *cifre* sì note:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
zero, uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove.

6. Le ultime nove diconsi *cifre significative*, mentre la prima nulla significa se è sola; ma a destra d'un'altra le dà per convenzione un valore dieci volte più grande; così, per esprimer *dieci*, o l' *unità di diecina*, si scrive 10; per esprimer *venti*, si scrive 20; *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, *novanta* si scrivono 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. Ogni cifra a destra d'un'altra la rende, come lo zero, *dieci volte più grande*. Un 5, un 4 e un 6 scritti così „ 546 „, sono dunque l'espressione del numero *cinquecento quarantasei* ecc.

7. Le tre cifre 546 formano la *classe* delle *unità*: tre altre poste in dritto alla sinistra così „ 921546 „, formano la classe delle *migliaja*, e si pronunziano „ *novecento ventun mille cinquecento quarantasei* „: quindi seguon pure a sinistra le classi dei *milioni* e delle *migliaja di milioni*, dei *bilioni*, e delle *migliaja di bilioni*, dei *trilioni* e delle *migliaja di trilioni* ecc.; e si vede che delle tre cifre d'ogni classe l'una a destra contiene *unità*, l'altra *diecine*, l'ultima *centinaja*, tutte le quali sono semplici nella prima classe, son di *migliaja* nella seconda, di *milioni* nella terza ecc. Onde il numero 1 030 010 000 125 812 600 003 diviso in clas-

si, si leggerà: *mille trenta triloni, diecimila bilioni, cento venticinque mila ottocento dodici milioni, seicento mila, tre*; e il numero *sei triloni, due mila milioni, sette*, dividendolo in classi, si scriverà: 6 000 000.002 000 000 007; ed è facile dopo ciò di *pronunziar qualunque numero scritto in cifre, e di scrivere in cifre qualunque numero pronunziato.*

8. I numeri sono *interi o rotti*. Nei primi ogni unità è un tutto; come due uomini, sette, mille ecc.; negli altri ogni unità è parte d'un tutto; come due terzi di lega, sette ventesimi ecc. (*)

9. Del resto l'Aritmetica o aumenta i numeri, il che si chiama *somma*, o li diminuisce, il che dicesi *sottrazione*: da queste due dipendono tutte l'operazioni sui numeri. Cominciamo dagl'interi.

Somma.

10. Non vi è difficoltà per *sommare* o raccogliere insieme dei numeri *semplici* o che non passan 10: così 5, 7, 4 sommati fanno 16, e per abbreviare il discorso, si scrive $5 + 7 + 4 = 16$. Il segno $+$, destinato alla somma, si pronunzia *più*; il segno $=$ significa egualità, e si pronunzia *eguale*.

11. Se i numeri da sommarsì son *composti*, per esempio, se si cerchi la somma di 432 e di 363, ecco la regola: 1.^o scrivo questi numeri l'un sotto l'altro, onde le unità siano sotto le unità, le diecine sotto le diecine, le centinaja sotto le centinaja ecc.: 2.^o tiro una linea al di sotto, e andando da destra a sinistra, prendo la somma delle unità; se ella non passa 9, la scrivo sotto la colonna delle unità; se passa 9, scrivo le unità e serbo le diecine per aggiungerle alla colonna seguente: 3.^o prendo nel modo stesso la somma delle diecine, delle centinaja ecc. e la scrivo sotto alle colonne corrispondenti. Così nella prima colonna dico: $2 + 3 = 5$; scrivo 5 al di sotto: nella seconda, $3 + 6 = 9$; pongo 9: nella terza, $4 + 3 = 7$, scrivo 7: la somma cercata è 795. Ma se debbo sommar tre numeri, 6078, 9198, 483, li scrivo l'un sotto l'altro secondo la regola, e dico: $8 + 8 + 3$

432
363
—
795

(*) Ordinariamente in aritmetica si considerano numeri *astratti*; cioè dicendo *due, tre, cento; mille*, non si pensa più nè a uomini nè a leghe ecc.; ma si forma un'idea universale, e si resta indifferente alla fine delle operazioni di rivolgere i numeri alla rappresentazione dell'una piuttosto che dell'altra quantità concreta.

$= 19$, o sia una diecina e 9 unità; scrivo 9 sotto la colonna dell'unità, e tengo la diecina per la seguente. Dico poi: $1 + 7 + 9 + 8 = 25$; scrivo 5 sotto la seconda colonna, e tenute le due diecine per la seguente, dico: $2 + 0 + 1 + 4 = 7$, e pongo 7; finalmente dico: $6 + 9 = 15$, e perchè questa è l'ultima colonna, scrivo 15 tutto di seguito: la somma è 15759. Per assicurarsene, si rifaccia l'operazione prendendo la somma delle colonne di basso in alto; se si operò bene, deve tornar la stessa. Ma bisogna abituarsi a ben separar le colonne, a ben formar le cifre e a non dimenticar di aggiungere alla colonna seguente ciò che si ritenne nella precedente.

$$\begin{array}{r} 6078 \\ 9198 \\ 483 \\ \hline 15759 \end{array}$$

Sottrazione.

12. La sottrazione fa trovar la *differenza* di due quantità date, cioè il resto di una di esse quando se ne è tolta l'altra. Nei numeri semplici si trova senza calcolo. Per esempio, togliendo 2 da 5, rimane 3, differenza fra 2 e 5. Questa operazione [si esprime così: $5 - 2 = 3$ (il segno $-$ significa *meno*).

13. Ecco la regola dei numeri composti. *Metto il più piccolo sotto al più grande, come nel sommare, e tiro una linea: scrivo poi sotto ciascuna colonna gli eccessi delle unità, diecine, centinaja ecc. del maggiore sulle unità, diecine, centinaja ecc. del minore, e ho la differenza fra i due numeri.* Così, per sottrarre 243 da 695, li scrivo come vedete, e dico: $5 - 3 = 2$ che pongo sotto la colonna delle unità: $9 - 4 = 5$ che scrivo tra le diecine: $6 - 2 = 4$ che pongo tra le centinaja: la differenza cercata è dunque 452.

$$\begin{array}{r} 695 \\ 243 \\ \hline 452 \end{array}$$

14. *Allorchè la cifra inferiore è più grande della superiore, aggiungo a questa una diecina presa dalla prossima cifra a sinistra; e dalla cifra così aumentata sottraggo l'inferiore e scrivo l'eccesso: manca perciò un'unità alla cifra superiore che segue.* Così, per sottrarre 38 da 64, dico: $4 - 8$ non si può: stacco un'unità dal 6 e la trasporto alla colonna delle unità dove ella val 10, aggiungendo queste 10 unità alle 4 dico: $14 - 8 = 6$; poi $5 - 3 = 2$: la differenza è 26.

15. Se la cifra che segue a sinistra sia zero, o se esso stesso sia seguito da altri zeri, si andrà indietro fino alla cifra da cui può staccarsi un'unità. La decomposizione di quest'unità cangia in tanti 9 gli zeri precedenti, e resta

una diecina per la cifra che è più piccola dell' inferiore. Per sottrarre 18 da 200, dico: $0 - 8$ non si può; l'unità staccata dal 2 si decompone in dieci diecine, se ne lascian 9 in luogo del secondo zero, e posta la decima in luogo del primo, dico: $10 - 8 = 2$; $9 - 1 = 8$; $1 - 0 = 1$, e resta 182. Così, per sottrarre 1296 de 3000, dirò: $0 - 6$ non si può; dunque $10 - 6 = 4$; $9 - 9 = 0$; $9 - 2 = 7$; $2 - 1 = 1$, e resta 1704.

200
18
—
182
3000
1296
—
1704

16. La sottrazione si fa anche in altro modo. Per sottrarre 2964 da 4571 si dirà: dalla cifra inferiore 4 non può andarsi alla superiore 1 che è più piccola, ma andando a 11, la differenza è 7 che scrivo, e porto 1 perchè sono andato a 11: parimente da 6 + 1 (= 7) andando a 7, la differenza è 0 che scrivo: quindi da 9 non può andarsi a 5, ma andando a 15, la differenza è 6 che scrivo, e porto 1: in fine da 2 + 1 (= 3) andando a 4, la differenza è 1 che scrivo, e il resto è 1607.

4571
2964
—
1607

17. Per verificare la sottrazione, *sommo il resto col minor numero, e se la somma eguaglia il maggiore, l'operazione è ben fatta*; poichè un tutto debb' eguagliar le sue parti prese insieme.

Moltiplicazione.

18. La moltiplicazione fa trovar senza gran calcolo la somma di un numero che si vuol prender più volte. Così, per trovar la somma di 12 preso 9 volte, in vece di sommar 9 volte il 12, il che sarebbe assai lungo, si moltiplica, e si trova in un tratto che la somma è 108.

19. In quell' esempio, 12 si chiama il *moltiplicando*, 9 il *moltiplicatore*, e 108 il *prodotto*: in generale, il moltiplicando e il moltiplicatore si chiamano i *fattori* del prodotto.

20. Se in luogo di sommar nove 12 si sommino dodici 9, verrà la stessa somma 108; onde, *preso ad arbitrio l' uno de' due numeri per moltiplicando, l' altro sarà moltiplicatore, e il prodotto non varierà*.

21. Se i numeri sono semplici, si vede facilmente che per esempio, il prodotto di 2 moltiplicato per 3 è 6, il che si esprime così: $2 \times 3 = 2 \cdot 3 = 6$ (il segno $\times$, o il punto messo tra due numeri, significa *moltiplicato per*); così $3 \times 4 = 12$; $7 \cdot 5 = 35$ ecc. Imparati perciò i prodotti di tutte le combinazioni dei numeri semplici da $2 \times 2 = 4$ fino a $9 \times 9 = 81$, per moltiplicare i composti, come 32 per 24, 1.^o pongo il moltiplicatore (questo è per lo più il minore) sot-

to il moltiplicando, e tiro una linea; 2.^o scrivo da destra a sinistra il prodotto di ciascuna cifra del moltiplicando per ciascuna del moltiplicatore; così dico: $2 \times 4 = 8$, scrivo 8; $3 \times 4 = 12$, scrivo 12; poi scrivo pur da destra a sinistra (sotto la colonna delle diecine) il prodotto del moltiplicando per le diecine del moltiplicatore, e dico: $2 \times 2 = 4$, scrivo 4 sotto le diecine: $3 \times 2 = 6$, scrivo 6 a sinistra; 3.^o sommo questi due prodotti parziali, e il prodotto totale è 768.

32
24
—
128
64
—
768

22. Di fatto, moltiplicar 32 per 24 significa sommare il 32 quattro volte e due diecine di volte (18); ma sommandolo quattro volte, vengono 8 unità, 2 diecine, 1 centinajo; e sommandolo due diecine di volte, vengono 4 diecine e 6 centinaja: dunque poichè l'unità, le diecine ecc. debbono collocarsi nelle loro rispettive colonne (11), scrivendo i prodotti parziali con la regola data, si otterrà il vero prodotto totale.

Debba moltiplicarsi 564 per 249. Scritti i due numeri l'uno sotto l'altro, moltiplico tutto il 564 per le 9 unità del moltiplicatore, dico: $4 \times 9 = 36$, scrivo 6 e porto 3; $6 \times 9 = 54$, $+ 3 = 57$, scrivo 7 e porto 5; $5 \times 9 = 45$, $+ 5 = 50$, scrivo tutto il 50, perchè la moltiplicazione per la prima cifra è finita. Moltiplico per le 4 diecine del moltiplicatore il 564, dicendo: $4 \times 4 = 16$, scrivo 6 tra le diecine e porto 1; $6 \times 4 = 24$, $+ 1 = 25$, scrivo 5 e porto 2; $5 \times 4 = 20$, $+ 2 = 22$, scrivo 22. Infine moltiplico 564 per le 2 centinaja del moltiplicatore, dicendo: $4 \times 2 = 8$, scrivo 8 tra le centinaja; $6 \times 2 = 12$, scrivo 2 e porto 1; $5 \times 2 = 10$, $+ 1 = 11$, scrivo 11. Il prodotto totale è 140436.

564
249
—
5076
2256
1128
—
140436

23. Quando vi sono degli zeri al fin dell'uno o dei due fattori, si moltiplicano le altre cifre, e si uniscono al prodotto gli zeri tralasciati: così, per moltiplicar 120 per 120 preso $12 \times 12 = 144$, si ha 14400.

24. Per riprova, dalla somma 15 delle cifre 5, 6, 4 del moltiplicando tolgo quante volte si può il 9; lo stesso faccio dalla somma di quelle del moltiplicatore: i due avanzi 6, 6 li moltiplico tra loro, e dal prodotto 36 tolgo il 9 quante volte si può, notando l'avanzo zero; se l'operazione è ben fatta, debbe anche aversi l'avanzo zero, togliendo quante volte si può il 9 dalla somma delle cifre del prodotto. Questa prova, che a suo luogo dimostreremo, è detta del 9. È fallace

6 0
6 0

se lo sbaglio consista nell'aver messi o fralasciati in prodotto dei 9 e degli zeri, o nell'avervi talune cifre di tanto maggiori delle esatte, quanto altre ne sono minori.

Divisione.

25. La divisione fa trovar quante volte un numero è contenuto in un altro; e come non vi può essere contenuto se non quante volte ne può essere sottratto, la divisione è una compendiosa sottrazione. Così, per saper quante volte il 120 contiene il 4, in vece di sottrarre il 4 da 120 quante volte si può, il che sarebbe assai lungo, divido e trovo subito che lo contiene 30 volte.

26. In questo esempio, 120 si chiama il *dividendo*, 4 il *divisore*, e 30, che mostra quante volte il 4 entra in 120, dicesi il *quoziente*.

27. Perciò, 1.^o *il prodotto del divisore pel quoziente è eguale al dividendo*: onde un quoziente è esatto, se moltiplicato pel divisore, riproduca il dividendo; e poichè il dividendo è un prodotto i cui fattori sono il divisore ed il quoziente, dato un prodotto ed un fattore, se quello si divide per questo, si avrà l'altro fattore; 2.^o *per far d'una quantità un dato numero di parti uguali, la divido per questo numero, ed il quoziente darà la grandezza di ciascuna parte*: così nell'esempio precedente il 120 è diviso in 4 parti eguali, ciascuna delle quali è 30.

28. Ora se i numeri da dividersi sono semplici facilmente si vede che, per esempio, 8 contien 4 appunto 2 volte, o che il quoziente di 8 diviso per 4 è 2; ciò si esprime

così: $\frac{8}{4} = 8 : 4 = 2$ (la linea o i due punti messi in questo modo tra il dividendo e il divisore significano *diviso per*);

così $\frac{16}{2} = 8$; $15 : 3 = 5$.

Quando il quoziente non è esatto (come se si divida 9 per 4, dove il 9 contiene il 4 più di 2 volte, ma meno di 3, e perciò il quoziente vero è fra 2 e 3), scrivo per quoziente il più piccolo dei due numeri fra cui è il vero quoziente, e allato ad esso il resto diviso pel numero divisore. Per esempio, dico: 9 contiene 4 due volte e più, ma non tre volte: scrivo dunque 2 per quoziente, e resta 1: onde

de $\frac{9}{4} = 2 \frac{1}{4}$, cioè 9 diviso per 4 ha 2 per quoziente; ma

resta ancora un' unità del 9 da dividersi in quattro parti.

$$\text{Così } \frac{7}{2} = 3 \frac{1}{2} ; \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}.$$

OSSERVAZIONI. I. Se il divisore è più grande del dividendo, come se debba dividersi 4 per 7, si scrive $\frac{4}{7}$, e questo è il quoziente. Tali quozienti, e generalmente tutte le espressioni indicanti divisione per mezzo di una linea o di due punti, si chiamano *rotti o frazioni*.

29. II. Una quantità che può dividersi senza resto per un'altra è *multipla* di questa; cioè *dupla*, *tripla* ecc. se il quoziente è 2, 3 ecc.: e questa è *summultipla* o *aliquota* della prima, cioè *suddupla*, *suttripla* ecc. se entra nella prima 2, 3 ecc. volte. Così 10 è duplo di 5; 18 è triplo di 6, 8 è multiplo di 4 e di 2; ogni numero è multiplo di 1 ecc.: all'incontro 2 è summultiplo di tutti i numeri pari; 5 lo è di tutti i numeri terminati in 5 o in 0 ecc. Ma la quantità che, divisa per un'altra, lascia un *resto*, dicesi *prima* a quest'altra, e ambedue si chiaman *prime tra loro*: così 8 e 5, 14 e 3 son primi tra loro. Per *resto* s'intende quel numero il quale, essendo minore del divisore, tolto che sia dal dividendo rende esatta la divisione.

Ogni numero intero non multiplo di altro numero maggiore dell'unità si chiama *numero primo*: un numero primo adunque, eccettuato il 2, non potrà esser pari, onde tutti i numeri primi si troveranno compresi nella serie dei numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, ecc. Per trovarli, conviene da questa serie escludere gl'impari multipli, come 9, 15, 21, ecc.: quei che restano saranno i primi.

Par questa esclusione osservo che cominciando dopo il 3, e prendendo i numeri della serie di tre in tre, come 9, 15, 21, 27 ecc., sono questi divisibili per tre, quindi da escludersi; cominciando dopo il 5, e prendendoli di cinque in cinque, come 15, 25, 35 ecc., sono divisibili per 5, e quindi da escludersi; cominciando dopo il 7, e prendendoli di sette in sette, sono divisibili per 7, quindi da escludersi, e così di seguito. I numeri che resteranno dopo tutte queste esclusioni saranno primi. Ne è chiara la ragione: ogni numero è maggiore del precedente di 2; così i numeri presi di tre in tre differiranno tra loro di 6, ed il primo essendo 9, di-

visibile per 5, saranno tutti divisibili per 3: i numeri presi di cinque in cinque differiranno di 10, ed il primo essendo 15, divisibile per 5, saranno tutti egualmente divisibili per 5 ecc. Ecco una tavola dei primi 306 numeri primi.

Tavola dei numeri primi sino a 2017.

1	139	337	557	769	1013	1249	1499	1753
2	149	347	563	773	1019	1259	1511	1759
3	151	349	569	787	1021	1277	1523	1777
5	157	353	571	797	1031	1279	1531	1783
7	163	359	577	809	1033	1283	1543	1787
11	167	367	587	811	1039	1289	1549	1789
13	173	373	593	821	1049	1291	1553	1801
17	179	379	599	823	1051	1297	1559	1811
19	181	383	601	827	1061	1301	1567	1823
23	191	389	607	829	1063	1303	1571	1831
29	193	397	613	839	1069	1307	1579	1847
31	197	401	617	853	1087	1319	1583	1861
37	199	409	619	857	1091	1321	1597	1867
41	211	419	631	859	1093	1327	1601	1871
43	223	421	641	863	1097	1361	1607	1873
47	227	431	643	877	1103	1367	1609	1877
53	229	433	647	881	1109	1373	1613	1879
59	233	439	653	883	1117	1381	1619	1889
61	239	443	659	887	1123	1409	1621	1901
67	241	449	661	907	1129	1423	1627	1907
71	251	457	673	911	1151	1427	1637	1913
73	257	461	677	919	1153	1429	1657	1931
79	263	463	683	929	1163	1433	1663	1933
83	269	467	691	937	1171	1439	1667	1949
89	271	479	701	941	1181	1447	1669	1951
97	277	487	709	947	1187	1451	1693	1973
101	281	491	719	953	1193	1453	1697	1979
103	283	499	727	967	1201	1459	1699	1987
107	293	503	733	971	1213	1471	1709	1993
109	307	509	739	977	1217	1481	1721	1997
113	311	521	743	983	1223	1483	1723	1999
127	313	523	751	991	1229	1487	1733	2003
131	317	541	757	997	1231	1489	1741	2011
137	331	547	761	1009	1237	1493	1747	2017

30. Quando un numero non è primo, vi è spesso bisogno di conoscerne i divisori. Per averli, per esempio, del 980, ne tento successivamente le divisioni pei numeri primi 2, 3, 5, 7 ecc., seguitando a dividere per uno stesso numero quante volte si può.

Posso poi cominciare la divisione da qualunque numero primo: comincio dal minore.

$\frac{980}{2}$ mi dà 490;

è dunque il 2 un di-

visore. $\frac{490}{2}$ mi dà

245; è il 2 un' altra

volta divisore. $\frac{245}{3}$

non mi dà quoto in-

Divi- dendi	Divisori semplici	Divisori composti
980	1	
490	2	
245	2	4
49	5	10. 20.
7	7	14. 28. 35. 70. 140.
1	7	49. 98. 196. 245. 490. 980.

tiero; non è il 3 un divisore. $\frac{245}{5}$ mi dà 49; è il 5 un di-

visore. $\frac{49}{5}$ non dà quoto intiero. $\frac{49}{7}$ mi dà 7; è il 7 un divi-

sore. $\frac{7}{7}$ mi dà 1; è il 7 divisore un' altra volta.

I numeri 1, 2, 2, 5, 7, 7 chiamansi *divisori semplici* di 980, e sono i di lui elementi, perchè $980 = 1 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7$.

Per avere i divisori composti, la regola più semplice è la seguente. Disposti in colonna, come nell' esempio, i divisori semplici, si cominci dal 2.^o (esclusa l' unità), si moltiplichi col primo, e il prodotto si metta alla destra nella stessa linea del 2.^o divisor semplice. Passando al 3.^o, si moltiplichino per esso tutti i divisori che gli stanno al disopra, cioè i due semplici e il composto già trovato; i tre divisori composti che ne risultano si scrivano l' uno dopo l' altro alla destra dopo il 3.^o divisor semplice. Si passi al 4.^o, moltiplicando similmente con esso tutti i divisori semplici e composti che gli stanno al disopra, e si scrivano i prodotti tutti in linea dopo il 4.^o divisor semplice. Così si faccia sem-

pre sino all'ultimo, avvertendo bene di non mai tornar a scrivere i prodotti già ottenuti. Facendo a questa maniera, non ci fuggirà alcun composto.

31. Sia ora il dividendo un numero composto, e il divisore un numero semplice: 1.^o cerco quante volte il divisore sta nella prima cifra a sinistra del dividendo (poichè così si fa sempre la divisione): 2.^o scrivo il quoziente sotto alla corrispondente cifra del dividendo: 3.^o cangio in diecine l'avanzo, se vi è, l'unisco alla cifra seguente, e replico le operazioni finchè sian divise tutte le cifre del dividendo. Così per dividere 7953 per 3, scrivo

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 7953} \\ \underline{2651} \end{array}$$

il divisore a sinistra, e poi dico: in 7 quante volte entra il 3? 2 volte; scrivo 2 sotto il 7: unisco l'avanzo 1 cangiato in 10 al 9 seguente, onde ho 19, e dico: in 19 quante volte il 3? 6 volte; scrivo 6 sotto il 9, e il resto 1 unito al 5 seguente fa 15: quindi trovo 5 e poi 1 per quozienti senza resto; onde 3 entra 2651 volte in 7953.

32. OSSERVAZIONI. I. Si comincia la divisione a sinistra affinchè i resti delle prime cifre possano unirsi alle seguenti: cominciando a destra, bisognerebbe spesso tornare indietro. II. Se la prima cifra del dividendo è più piccola del divisore, si dividono subito le prime due. III. Quando fatta una divisione non vi è resto, e la cifra seguente è più piccola del divisore, si mette zero nel quoziente, e la cifra avanzata si unisce al solito con la seguente se vi è; lo zero nel quoziente conserva il valor rispettivo delle altre cifre. IV. Bisogna ricominciar la divisione e farla meglio quando il resto, che sempre debb'esser più piccolo del divisore, lo eguaglia o lo supera. V. Non si può mai metter più di 9 nel quoziente, perchè la nostra aritmetica è decimale.

33. In fine se il dividendo e il divisore sono numeri composti; se, per esempio, ho da dividere 147475 per 362, scrivo questi due numeri come sopra;

$$\begin{array}{r} 407 \frac{141}{362} \\ 362 \times 147475 \\ \underline{2675} \\ 140 \end{array}$$

poi dico: le tre prime cifre 147 del dividendo non contengono le tre del divisore, astraendo dal valor relativo di 147; dunque prendo le prime quattro 1474, e dico: il 3 in 14 entra 4 volte e resta 2, che col seguente 7 dà 27, e il 6 (seconda cifra del divisore) entra pur 4 volte in 27 e resta 3, che col seguente 4 dà 34, in cui l'ultima cifra 2 del divisore entra pure 4 volte; scrivo dunque 4 nel quoziente, che si pone lungo una linea condotta sul dividendo. Moltiplico il divisore 362

pel quoziente trovato 4, e sottraggo a mente il prodotto dal dividendo 1474, dicendo: $4 \times 2 = 8$, e andando a 14 (16), resta 6 che scrivo sotto, e porto 1; $4 \times 6 = 24$, $+ 1 = 25$, e andando a 27, resta 2 che scrivo accanto a 6, e porto 2; $3 \times 4 = 12$, $+ 2 = 14$, e andando a 14, resta zero.

Accanto al resto 26 abbasso la quinta cifra 7 che segno con un punto per riconoscere di mano in mano ove io sono, e ho da dividere 267 per 362, il che non essendo possibile, scrivo zero nel quoziente, ed abbassata l'ultima cifra 5, ho da dividere 2675 per 362. Dico dunque: il 3 in 26 entra 8 volte e resta 2, che col seguente 7 dà 27; ma il 6 in 27 non entra 8 volte, torno dunque da capo e dico: il 3 in 26 entra 7 volte e resta 5, che col seguente 7 dà 57, e il 6 in 57 entra pur 7 volte e avanza 15, che col seguente 5 dà 155, in cui entra pur 7 volte l'ultima cifra 2 del divisore; scrivo dunque 7 nel quoziente, e per 7 multiplico il divisore 362, dicendo: $2 \times 7 = 14$, e andando a 15, resta 1 che scrivo sotto, e porto 1; $6 \times 7 = 42$, $+ 1 = 43$, e andando a 47, resta 4 che scrivo accanto a 1, e porto 4; $3 \times 7 = 21$, $+ 4 = 25$, e andando a 26, resta 1 che scrivo accanto a 41, e il quoziente completo è

$$407 \quad \frac{141}{362}.$$

34. *La riprova si fa aggiungendo il resto al prodotto del divisore pel quoziente: la loro somma debbe uguagliare il dividendo. Poichè se 362 è contenuto 407 volte in 147475 col resto 141, bisogna che $362 \times 407 + 141 = 147475$. Quindi la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, e queste due regole si servono scambievolmente di prova.*

Si fa anche la riprova sopprimendo i 9 contenuti, 1.^o nel divisore, 2.^o nel quoziente, 3.^o nel prodotto dei loro resti, 4.^o nel dividendo, e i due ultimi resti debbono essere eguali come nella moltiplicazione (24). Ma se la divisione ha un resto, bisogna sommarlo col prodotto dei resti del divisore e del quoziente, e togliere dalla somma i 9: così il resto del divisore 362 e del quoziente 407 è 2: il loro prodotto è 4, che col resto 141 dà 145: tolto il 9, resta 1 che restando anche dal dividendo 147475, $\frac{2 \mid 1}{2 \mid 1}$ mostra esatta l'operazione.

35. Se il dividendo è formato da una cifra seguita da quanti si vogliono zeri, per esempio 5000, ed il divisore è 9, l'avanzo della divisione eguaglia sempre la prima cifra;

in fatti $5000 = 5 \times 1000 = 5 \times 999 + 5$: e così si può sempre scomporre il numero in due parti, di cui la prima sia la cifra moltiplicata in un numero composto di tanti 9 quanti sono gli zeri nel dividendo, e la seconda sia la stessa cifra: allora si vede che la prima parte, essendo divisibile per 9, non influisce sul resto.

Segue di qui che per sapere quale avanzo si avrebbe dal dividere un qualunque numero per 9, o dal togliere da esso il 9 quante volte si può, basterà sommare le cifre componenti quel numero; e levando quante volte si può il 9 da questa somma, l'avanzo che si otterrà, sarà il cercato: di fatto levare il 9 quante volte si può dal 5736 è lo stesso che levarlo dalla somma $5000 + 700 + 30 + 6$, ossia pel ragionamento precedente applicato ai primi tre numeri in essa, è lo stesso che levarlo dalla somma $5 + 7 + 3 + 6$.

Lo stesso vale per la divisione di un numero per 3 (*).

CAPO II.

DEI ROTTI.

Natura dei rotti in generale, loro valore e loro paragone.

36. **L'**intero diviso in parti eguali si riproduce dalla loro riunione; se dunque se ne lasci qualche parte, egli sarà un *rotto* o una *frazione*.

L'idea di frazione comprende perciò il *numero* e la *specie* delle parti eguali in cui fu diviso l'intero: così $\frac{4}{5}$ (che si pronunzia *4 diviso per 5* o *quattro quinti*) esprime la somma di 4 parti delle 5 eguali in cui l'intero fu diviso; il numero superiore 4 le numera, e si chiama *numeratore*; l'inferiore 5 le nomina, e dicesi *denominatore*: ambedue sono i *termini del rotto*.

(*) Queste ed altre simili proprietà dei numeri si dimostrano subito da chi possiede i principj dell'Algebra. Dicasi lo stesso in tutto il capo seguente circa la teorica delle frazioni, di cui non si possono ben penetrare le regole se non col maneggio delle frazioni letterali. La ricerca di tali algebriche dimostrazioni, altronde assai facili, potrà in seguito servire allo studioso di utile esercizio.

37. Un rotto è *proprio*, *apparente* o *improprio*, secondo che il numeratore è minore, eguale o maggiore del denominatore: così $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{12}$ ecc. sono proprij, perchè sono meno di

tutte le parti dell' intero o dell' unità; $\frac{4}{4} = 1 = \frac{11}{11}$ ecc. (28) so-

no apparenti, perchè son tutte parti dell' unità; $\frac{12}{4} = 3$,

$\frac{103}{20} = 5 + \frac{3}{20}$ ecc. sono improprij, perchè sono più di tutte le parti dell' unità.

38. *Di due rotti con lo stesso numeratore, quello che ha un minor denominatore, è più grande; così $\frac{1}{2}$ è più di $\frac{1}{4}$: con lo stesso denominatore, quello è più grande che ha un maggior numeratore; così $\frac{2}{3}$ sono più di $\frac{1}{3}$.*

39. Il valor di un rotto non si altera, o si moltiplichino o si dividano i suoi termini per un medesimo numero. Di fatto, se il denominatore di un rotto si moltiplica per 2, 3, 4 ecc., le parti che questo rappresenta, saranno la metà, la terza, la quarta parte di ciò ch' erano prima, perchè l' unità sarà allora divisa in un numero doppio, triplo, quadruplo ecc. di parti. Se il numeratore di un rotto si moltiplica per 2, 3, 4 ecc., le parti che questo rappresenta, sono doppie, triple, quadruple ecc. di numero di ciò ch' erano prima: ora, siccome è lo stesso prendere una parte che prenderne due eguali ciascuna alla metà; tre eguali ciascuna alla terza parte; quattro eguali alla quarta, e così via via; non si altererà la quantità che esprime un rotto col moltiplicare i di lui termini per lo stesso numero. Il ragionamento inverso prova che un rotto non rimane alterato dal dividere ambedue i suoi termini per uno stesso numero.

40. Onde vi è un' infinità di rotti dello stesso valore, benchè espressi in termini differenti; così $\frac{36}{72} = \frac{18}{36} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, ove i due termini del primo sono divisi per 2, quei del secondo per 3, e quei del terzo per 6, che han dato $\frac{1}{2}$, visibilmente eguale ai precedenti, e che si ha subito, dividendo i termini del primo per 36.

Operazioni preliminari sui rotti.

41. *Trasformar gl' interi in rotti.* Si dà a un intero la forma di rotto, 1.^o col dargli 1 per denominatore: così 6 è $= \frac{6}{1}$, $8 = \frac{8}{1}$ ecc., 2.^o col moltiplicarlo per un dato denominatore: così per ridur 6 al denominatore 7, si scrive $\frac{6 \cdot 7}{7} = \frac{42}{7} = 6$. Per ridurre a un sol rotto un intero con rotto, si moltiplica l'intero pel denominatore del rotto, si aggiunge il numeratore al prodotto, e della somma si fa il numeratore del rotto cercato: così $6 \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$, e $3 \frac{41}{22} = \frac{67}{22}$.

42. *Ridur più rotti allo stesso denominatore.* Moltiplico i termini di ciascun rotto pel prodotto dei denominatori di tutti gli altri, e i nuovi rotti hanno il valor di prima e un denominator comune (39): così per ridurre $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{4}$ allo stesso

denominatore, moltiplico per 4 tutto il rotto $\frac{1}{5}$, e per 5 tutto il rotto $\frac{3}{4}$, ed ho $\frac{4}{20}$ e $\frac{15}{20}$. Del pari per ridurre i rotti

$\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, moltiplico per 7.4 il rotto $\frac{2}{3}$, per $3 \cdot 4$ il rotto $\frac{5}{7}$, per $3 \cdot 7$ il rotto $\frac{3}{4}$, ed ho $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{63}{84}$.

43. *Ridurre un rotto alla più semplice espressione.* Se il numeratore è più grande del denominatore, si divida quello per questo; così $\frac{12}{4}$; $\frac{8}{3}$ si riducono a 3 e $2 \frac{2}{3}$. Quindi se pos-

sono dividersi senza resto per uno stesso numero i termini del rotto, egli diverrà più semplice, senza cangiare valore (39).

Per ridurre più semplice un rotto; si fa anche uso di certe proprietà dei numeri, delle quali ecco le più facili a tenersi a mente. I.^o Ogni numero pari è divisibile per 2; co-

sì $\frac{128}{432} = \frac{8}{27}$ dividendo quattro volte per 2. II.^o Ogni numero che finisce in 0 è divisibile per 10, e quindi per 2 e per 5; così $\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$. III.^o Ogni numero che finisce in 5 è divisi-

bile per 5 ; di fatto quel numero moltiplicato per 2 terminerebbe in 0, e sarebbe divisibile per 2 e per 5, quindi ridiviso per 2 resterà divisibile per 5 ; così $\frac{15}{85} = \frac{3}{17}$. IV.° Ogni numero tale che la somma delle cifre sia un multiplo di 3, è divisibile per 3 (35) ; così $\frac{288}{351} = \frac{96}{117} = \frac{32}{39}$; se di più il numero divisibile per 3 è pari, può dividersi per 6. V.° Ogni numero è divisibile per 9, se la somma delle sue cifre è multipla di 9 (35).

44. Ma in generale si riduce un rotto alla più semplice espressione col dividerne i termini pel loro massimo comun divisore. Per averlo, divido il maggior termine pel minore, e se nulla avanza, il minore è il divisore cercato: se vi è un resto, divido per esso il minor termine, e se nulla avanza, il resto è il divisor cercato: se avvi resto, con questo secondo divido il primo resto, e nulla avanzando, è il secondo il divisore che io cerco: con un nuovo resto ripeto la divisione e proseguo finchè avanzi zero; il resto che precede zero è il massimo comun divisore: perciò se l'ultimo resto è 1, il rotto è irriducibile o i suoi termini sono primi tra loro. Così per ridurre $\frac{91}{294}$, 1.° divido 294 per 91, ed

ho 3 di quoziente e 21 di primo resto; 2.° divido 91 per 21, e vien 4 di quoziente e 7 di secondo resto; 3.° divido 21 per 7, ed ho 3 di quoziente e zero di resto: perciò 7 è il massimo comun divisore, e $\frac{91}{294} = \frac{13}{42}$.

Si può disporre l'operazione in questa guisa:

45. Dimostriamo che il 7 è massimo e comune divisore di quel rotto. Il ragionamento è lo stesso per qualunque. Il 7 di-

vide esattamente il 21: dividerà dunque anche $4 \times 21 + 7$, cioè 91; dividerà egualmente $3 \times 91 + 21$, cioè 294; sarà dunque il 7 divisore comune di 91 e di 294.

Un divisore di 294 e 91, cioè di $3 \times 91 + 21$ e 91, se è massimo, converrà che sia tale anche per 21 e 91, cioè per 21 e $4 \times 21 + 7$; e che lo sia egualmente

	294	quoti
	91	3
1.° resto .	21	4
2.°	7	3
3.°	0	

per 7 e 21: il 7 adunque sarà questo massimo comun divisore (*).

Somma e sottrazione de' rotti.

46. Per sommare o sottrarre i rotti li riduco allo stesso denominatore (42), che scrivo sotto la somma o differenza dei numeratori: così riduco $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}$ (il + è per la somma, il — per la sottrazione) a $\frac{3}{6} \pm \frac{2}{6}$, ed ho la somma di $\frac{5}{6}$, o la differenza $\frac{1}{6}$. Se vi sono interi con rotti, riduco tutto a rotto (41): così $4 \frac{1}{2} \pm 2 \frac{1}{3} = \frac{9}{2} \pm \frac{7}{3} = \frac{27 \pm 14}{6}$, e la somma è $6 \frac{5}{6}$, la differenza $2 \frac{1}{6}$.

Moltiplicazione dei rotti.

47. Se un rotto $\frac{2}{13}$ debba moltiplicarsi per un intero 5, dovrà prendersi cinque volte (18), il che dà $\frac{2 \cdot 5}{13} = \frac{10}{13}$; dunque se dovrà moltiplicarsi per $\frac{5}{3}$, dovrà prendersi la terza parte delle volte di ciò che si è preso dianzi: il prodotto dovrà essere la terza parte di ciò ch'era dianzi, cioè a dire le parti indicate dal prodotto dovranno essere la terza parte in grandezza di quelle che ci dette la moltiplicazione per 5. Allora erano tredicesime, saranno ora trentanovesime: sarà dunque $\frac{2}{13} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{39}$; cioè

Per moltiplicare un rotto per un intero o un intero per un rotto, si moltiplica per l'intero il numeratore del rotto, o se ne divide pel medesimo intero il denominatore.

Per moltiplicare più rotti fra loro, si forma una frazione il cui numeratore è il prodotto di tutti i numeratori, e il cui denominatore è il prodotto di tutti i denominatori.

(*) La dimostrazione apparirà più chiara in algebra.

48. Onde 1.^o il prodotto di due rotti proprij, come $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$, è minore di ciascun fattore, poichè moltiplicando $\frac{5}{7}$ per 1, si avrebbe appunto $\frac{5}{7}$; dunque moltiplicando per $\frac{3}{4}$, cioè per meno di 1, debbe aversi meno di $\frac{5}{7}$: 2.^o per avere un rotto d' intieri, basta moltiplicar tra loro al solito il rotto e gl'intieri: così, volendo $\frac{3}{7}$ di 10, si fa $\frac{3}{7} \cdot 10 = \frac{30}{7}$, perchè una settima parte di 10 è $\frac{10}{7}$ (27), onde tre settime sono $\frac{30}{7}$: 3.^o per avere un rotto di rotto, come $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{7}$, il rotto $\frac{2}{7}$ fa figura di un intero A; ma $\frac{4}{5}$ di A = $\frac{4}{5} \times A$; dunque $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{8}{35}$. Perciò $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ di $\frac{4}{5}$.

49. Se i fattori sieno intieri con rotti, li riduco ad un solo rotto: così $3 \frac{2}{9} \cdot 7 \frac{1}{3} = \frac{29}{9} \cdot \frac{22}{3} = \frac{638}{27}$.

OSSERVAZIONI. I. Se un rotto dee moltiplicarsi per un multiplo o summultiplo del denominatore, si riduce prima di moltiplicare: così $\frac{5}{12} \cdot 2 = \frac{5}{6}$. II. Se debbano moltiplicarsi più rotti, si cancellino prima, se vi sono, i numeri comuni ai termini del prodotto: così $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Divisione dei rotti.

50. Se un rotto $\frac{3}{4}$ debbe dividersi per due, il quoto dovrà essere la metà di $\frac{3}{4}$, cioè un rotto che c'indichi tre parti, ciascuna delle quali sia la metà di un quarto: sarà questo quoto $\frac{3}{8}$; dunque se dovrà dividersi per $\frac{2}{5}$, il quoto dovrà

essere cinque volte maggiore; cioè $\frac{15}{8}$: sarà dunque $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} =$
 $\frac{15}{8} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}$; cioè

Si divide un rotto per un intero o moltiplicandone il denominatore, o dividendone il numeratore.

Si divide un intero per un rotto moltiplicandolo pel denominatore del rotto e sottoponendo al prodotto per denominatore il numeratore del rotto.

Si divide una frazione per un'altra rovesciando i termini di quella che fa da divisore, e poi moltiplicando fra di loro le due frazioni.

51. Il quoziente di $\frac{3}{4}$ divisi per un rotto proprio $\frac{2}{5}$ è maggiore del dividendo; poichè divisi $\frac{3}{4}$ per 1, si ha $\frac{3}{4}$; dunque divisi per $\frac{2}{5}$, cioè per meno di 1, debbe aversi più di $\frac{3}{4}$.

52. Se i numeri sieno intieri con rotti, li riduco in un sol rotto; così $5 \frac{1}{2} : 2 \frac{2}{3} = \frac{11}{2} : \frac{8}{3} = \frac{33}{16}$.

OSSERVAZIONI. I. Se i rotti hanno lo stesso denominatore, il quoziente è formato dai due numeratori: così $\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$.

II. Se i termini del dividendo sono multipli o summultipli di quelli del divisore, si riduce prima di dividere: così $\frac{9}{19} : \frac{3}{7} = \frac{21}{19}$.

Frazioni o rotti decimali.

53. I rotti decimali hanno per denominatore l'unità con uno o più zeri: tali sono i rotti $\frac{3}{10}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{541}{1000}$ ecc., e in questa forma sono soggetti al calcolo degli altri rotti. Ma alcune regole particolari ci danno per questi un compendio.

Ogni cifra alla destra d'un'altra le dà un valor decuplo (6): così per iscrivere 3 diecine, si pone 0 alla destra di 3 e si scrive 30; dunque per iscrivere 3 decimi, basta por 3 alla destra di 0, e scrivere 03. Si è però convenuto

di separar gl' interi dai decimi con una virgola, e in vece di scrivere $\frac{3}{10}$, si scrive 0,3; così $0,2 = \frac{2}{10}$; $0,7 = \frac{7}{10}$, ecc.

Dunque del pari come per iscrivere cinquecento si fa 500; così per iscrivere cinque centesimi si fa 0,05 ecc. In generale si scrive il numeratore come gl' interi, e il denominatore sottinteso è l'unità con tanti zeri quante sono cifre a destra della virgola.

Segue di qui che un decimale non altera il suo valore, aggiungendovi quanti si vogliono zeri alla destra; così $0,05 = \frac{5}{100} = \frac{50}{1000} = \frac{500}{10000} = 0,50 = 0,0500$ ecc.

54. Da ciò si rileva che 2,9654 è un' espressione compendiosa di $2 + \frac{9}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{4}{10000}$ che può ridursi a $2 + \frac{9654}{10000}$, o a $\frac{29654}{10000}$.

Somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione dei rotti decimali.

55. Per sommare o sottrarre i decimali, scrivo i numeri l' un sotto l' altro, osservando che le virgole sieno nella stessa colonna: poi li sommo o li sottraggo al solito, e scrivo la virgola sotto l' altre.

4852,791	
4,00745	6,00435
0,0049	0,17
Som. 4856,80335	Diff. 5,83435

56. La moltiplicazione dei decimali si fa senza curar le virgole, come nei numeri interi; ma *quanti sono i decimali presi insieme nei fattori, tante cifre a destra si separano colla virgola nel prodotto*, in cui se non ne sieno abbastanza, si supplisce a sinistra con degli zeri, come nel quarto esempio seguente. La riprova si fa al solito.

43,7	2,4542	4,12	21,32
13	0,053	3,7	0,000103
1311	73626	2884	6396
437	122710	1236	2132
568,1	0,1300726	15,244	0,00219596

Di fatto $4,12 \times 3,7 = \frac{412}{100} \times \frac{37}{10}$ (54) dà un prodotto di millesimi (53) che si esprimono con tre decimali, cioè quanti ne hanno i fattori.

57. Si moltiplica un decimale per 10, 100, 1000 ecc. con tirar la virgola a destra per tante cifre quanti sono zeri nel moltiplicatore: così $45,3289 \times 100 = \dots\dots\dots 4532,89 \dots$; $0,007854 \times 10000 = 78,54$.

58. La divisione dei decimali si fa al solito, ma *si separano nel quoziente tante cifre a destra quanti decimali ha il dividendo più del divisore*.

$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 2,3115 \overline{) 6,9345} \end{array}$	$\begin{array}{r} 2,6 \\ \hline 3,22 \overline{) 8,445} \\ 2005 \\ 73 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2,44 \\ \hline 20,074 \overline{) 49,10000} \\ 89520 \\ 92240 \\ 11944 \end{array}$
---	--	--

Di fatto $8,445 : 3,22 = \frac{8445}{1000} : \frac{322}{100}$ dà un quoziente di decimi (51) che si esprimono con un decimale, ed appunto il dividendo ne ha uno più del divisore.

59. Se il divisore ha più decimali del dividendo (3.° esempio), si aggiungono a quest'ultimo degli zeri che non ne alterano il valore (53): e volendo considerare i resti delle divisioni, si aggiungono nuovi zeri; così (2.° esempio), aggiunti tre zeri al resto 73, si ha il quoziente 2,6226 con un resto 228 ecc.

60. Si divide un decimale per 10, per 100 ecc. con avanzare la virgola di uno, di due posti ecc. verso la sinistra: così $124,65 : 100 = 1,2465$.

Trasformazione e utilità dei decimali.

61. I rotti decimali si trasformano in un'infinità d'altri dello stesso valore col solo aggiungere uno, due, tre zeri ecc. alla destra del rotto (53); e però $0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 = \text{ecc.}$

Quindi possono sopprimersi gli zeri finali di un rotto decimale, senz'alterarne il valore; ma sopprimendo altre cifre, il valore scemerebbe: così 0,683 e 0,68 differiscono di $\frac{3}{1000}$.

62. Per altro la differenza è tanto minore quante più sono le cifre del rotto che si ritengono; così 0,680003 scema solo di $\frac{3}{1000000}$ soppressa l'ultima cifra 3; onde possono trascurarsi dei decimali senza diminuirne molto il valore.

Si corregge però almeno in parte l'errore, aggiungendo un'unità all'ultima cifra restante, se la soppressa supera 5, poichè 5 è una mezza unità dell'ordine contiguo a sinistra; onde se la cifra soppressa è minore di 5, l'errore sarà meno d'una mezza unità; se è 5, sarà d'una mezza unità aggiungendo o non aggiungendo 1; e se supera 5, l'errore sarà più d'una mezza unità non aggiungendolo.

63. Nei calcoli ordinarij spesso bastano sei decimali, e anche due o tre se le circostanze non esigono grande esattezza; così prenderò senza error sensibile 15,3 per 15,3049: ma se 15,3 debba poi moltiplicarsi per numeri grandi, come 8476, i decimali soppressi produrranno un errore di circa 42 interi.

64. Di due decimali con le stesse prime cifre quello è maggiore che ha qualche cifra significativa di più; così 0,763 è maggiore di 0,76.

E se le prime cifre non son le stesse, il più grande è quello che le ha maggiori: così 0,54 supera 0,53999, benchè a questo secondo si aggiungessero infinite cifre: onde 0,5399 è minore di 0,54 e maggiore di 0,539; e 0,53992 si accosta più a 0,54 che 0,5399.

Di qui la principale utilità dei decimali per l'accostarsi sempre più al valor rigoroso che spesso non può aversi. Tutte le Matematiche offrono esempj di queste *approssimazioni*; eccone alcuni cavati dall'Aritmetica.

65. Dividendo 147475 per 362, il quoziente è $407 \frac{140}{362}$; ma la forma di questo rotto è incomoda se si tratti di valutarlo. Lo trasformo dunque in un altro del valore stesso o che vi si accosti quanto si vuole.

Aggiungo degli zeri al resto di divisione onde continuarla; e poichè quest'aggiunta ingrandisce di 10, 100, 1000 volte ecc. il dividendo, correggo l'errore e colloco i quozienti tra i decimi, centesimi, millesimi ecc. Aggiunti tre zeri al resto 141, divido 141000 per 362; scrivo il quoziente 389 tra i decimali, e se tre mi bastino, trascuro il

resto 182. Perciò $407 \frac{141}{362} = 407,389$ che differisce dal vero men di un millesimo.

66. Così i rotti ordinarij si trasformano in decimali o eguali o approssimati quanto piace: per esempio, $\frac{1}{2}$ si trasforma in 0,05 esattamente; poichè aggiunto uno zero al numeratore 1, si ha 5; onde $\frac{1}{2} = 0,5$. Ma $\frac{1}{3}$ dà solo un' approssimazione; perchè aggiunti gli zeri, il quoziente è 3 in infinito; quindi $\frac{1}{3} = 0,333$ ecc. Il rotto $\frac{1}{7}$ è nello stesso caso; messo in decimali, dà il *periodo* 0,142857 142857 142857 ecc.; onde ripetendolo, si ha l' approssimazione che si vuole, senza bisogno di calcolo. In generale non può esattamente ridursi in decimali un rotto ordinario se le stesse cifre tornino con lo stesso ordine. Il denominatore dà il limite più lontano del loro ritorno; per esempio, il denominatore 7 indica che, riducendo $\frac{1}{7}$ in decimali, le cifre non possono ricomparire nello stesso ordine più tardi del settimo luogo. Se ne vede la ragione riflettendo che in questa divisione i resti non possono essere che 6 numeri differenti, cioè 1, 2, 3, 4, 5, 6; e che perciò dopo la sesta divisione al più tardi bisogna che i medesimi resti tornino a comparire. Torneranno dunque anche i medesimi quoti nelle divisioni seguenti. Spesso però le cifre del periodo ritornano prima del luogo segnato dal denominatore, come si vede nel rotto $\frac{1}{3}$.

67. Viceversa avendo una frazione decimale e volendo passare alla frazione ordinaria equivalente, bisognerà distinguere due casi. Se la frazione decimale è terminata, si formerà con tutta la parte decimale il numeratore di una frazione, a cui si darà per denominatore l'unità con tanti zeri quanti sono i decimali, e si cercherà poi di ridurre il rotto a più semplice espressione. Così $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Se la frazione decimale è periodica, il rotto or-

dinario equivalente avrà per numeratore il periodo, e per denominatore un numero composto di tanti 9 quanto sono le cifre del periodo, e potrà poi ridursi a più semplice espressione. Così $0,142857\ 142857\ \text{ecc.} = \frac{142857}{999999}$, frazione

che divisa ne' suoi due termini per 142857 si riduce a $\frac{1}{7}$. La prima di queste due regole è fondata sulla natura stessa de' decimali (53); quanto alla seconda, ci ricorderemo di darne la dimostrazione in Algebra.

Altri rotti.

La specie dei rotti è relativa all'unità di cui son parte; e poichè le scienze, l'arti e la società usano diverse sorte d'unità, ecco i nomi dei loro rotti più comuni.

68. La *circonferenza del circolo* fu divisa in 360 parti eguali, chiamate *gradi* (si preferì il numero 360 ad ogni altro inferiore e superiore, perchè ha più divisori esatti con

minor quantità di cifre); onde il grado è $\frac{1}{360}$ della sua cir-

conferenza: ma bisognando spesso diverse parti del grado, si considerò anch'esso come un'unità divisa in 60 parti e-

guali o *minuti*; onde ogni minuto è $\frac{1}{60}$ di grado ed $\frac{1}{21600}$ di

circonferenza: per avere una misura ancor più precisa si suddivise il minuto *primo* in 60 *secondi*, il secondo in 60 *terzi* ecc.; onde la circonferenza ha 1296000 secondi e 77760000 terzi, ed il grado è 3600 secondi e 216000 terzi.

Si sono dati dei segni a queste diverse parti, ed in vece di scrivere 18 *gradi*, 34 *minuti*, 53 *secondi*, 26 *terzi*, si scrive $18^{\circ}\ 34'\ 53''\ 26'''$. Presentemente è in uso anche un'altra divisione della circonferenza in 400 gradi, del grado in 100 minuti, del minuto in 100 secondi, ecc.

69. La divisione del tempo in *giorni* è antica quanto il mondo, e si divise arbitrariamente il giorno in 24 parti e-

guali, che formarono le *ore*; l'ora è dunque $\frac{1}{24}$ di giorno e

si suddivide come il grado in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi*, ecc. Il giorno è dunque $= 1440' = 86400'' = 5184000'''$. È stata introdotta anche una divisione decimale del giorno, ma fu poco seguita.

70. Si sono stabilite le unità per le misure di lunghezza, di superficie, di volume, di peso e di moneta. Queste unità sono diverse nei diversi paesi. Col moderno sistema decimale si è procurato di rendere queste unità universali, o almeno di stabilire un mezzo di confronto fra le misure di un paese e quelle di un altro. Un tal sistema assai filosofico lega tutte quelle unità fra di loro e colla natura onde garantirle da ogni alterazione: eccolo in succinto.

Si è preso per unità delle misure di lunghezza il *metro* o sia la quarantamilionesima parte di un meridiano terrestre. Se ne sono formati dei summultipli e dei multipli. I summultipli sono il *decimetro*, il *centimetro*, il *millimetro*, che equivalgono rispettivamente $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ di metro. I mul-

tipli sono il *decametro*, l'*ettometro*, il *chilometro*, il *miriametro*, corrispondenti a 10, 100, 1000, 10000 metri.

L'unità di misura di superficie è il *metro quadrato*; per le misure agrarie si è preso il *decametro quadrato* ed anche l'*ettometro quadrato*.

L'unità per le misure di volume è il metro cubo. La sua millesima parte, o il decimetro cubo, si è presa come unità di misura di capacità pei liquidi, e chiamasi *litro*. Esso ha i suoi summultipli, cioè il *decilitro*, il *centilitro*, il *millilitro*, corrispondenti a $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ di litro; e i suoi multipli, che sono il *decalitro*, l'*ettolitro*, il *chilolitro*, equivalenti a 10, 100, 1000 litri.

Preso il millilitro o il centimetro cubo, ed empiuto di acqua distillata vicina a congelarsi, il suo peso nel vuoto fu stabilito come unità di peso detta *grammo*. I suoi summultipli sono il *decigrammo*, il *centigrammo*, il *milligrammo*, che valgono $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ di grammo; ed i multipli

chiamansi *decagrammo*, *ettogrammo*, *chilogrammo*, *miriagrammo* (*quintale metrico*), corrispondenti a 10, 100, 1000, 10000, 100000 grammi. Il chilogrammo dicesi anche la nuova *libbra*.

L'unità di moneta è il franco o lira italiana, il cui peso è di 5 grammi, e che deve contenere $\frac{9}{10}$ di argento fi-

no e $\frac{1}{10}$ di lega. Sonovi i pezzi summultipli e multipli.

71. Riesce però necessario conoscere anche le altre unità di misura: eccone alcune.

La *tesa* francese si divide in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*. Il piede di Parigi corrisponde a metri 0,32484.

Il *piede* inglese si usa talvolta dagli artisti; vale metri 0,30480.

Il *klafter* di Vienna equivale a metri 1,89661.

Il *braccio* di Milano si suddivide in 12 *once*, l'uncia in 12 *punti*, il punto in 12 *atomi*. Il braccio corrisponde a metri 0,59494.

Il *trabucco* di Milano eguaglia brac. 4, once 4, punti 8.

La *pertica* è una misura di superficie che contiene 96 trabucchi quadrati.

La *libbra* di Milano è di due sorte; una si divide in 28 *once*, e l'altra in 12, e in entrambe l'uncia si divide in 24 *denari*, il denaro in 24 *grani*. La prima equivale a chilogrammi 0,76252; la seconda a chilogrammi 0,32679.

La *lira* di Milano si suddivide in 20 *soldi*, il soldo in 12 *denari*; una lira vale franchi 0,76752.

Non vale citarne di più.

72. Per sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere queste diverse specie, qualora siano le decimali, si fa come si è insegnato (55, 56, 58). Se poi non sono decimali, per sommarle si scrivono le une sotto le altre le parti del nome stesso, quindi si sommano le colonne al solito, scrivendo il resto, tolte, se si può, le specie maggiori che si portano alla colonna seguente. Così le stesse specie si sottraggono; e se l'inferiore è più grande, si toglie una unità dalla colonna che segue nel numero superiore per decomporla in tante unità della specie di quelle da sottrarsi. Per la moltiplicazione e la divisione premettiamo quanto segue.

73. Chiamasi numero caratteristico quello che esprime quante volte debba ripetersi la specie minore per ridurla alla maggiore. Così il numero caratteristico del piede rispetto alla tesa è 6, perchè bisogna riunire 6 piedi onde formare una tesa; il numero caratteristico dell'uncia rispetto alla libbra è 12, quello del denaro rispetto all'uncia è 24, e $24 \times 12 = 288$ rispetto alla libbra. Quindi un numero di specie superiore si riduce all'inferiore moltiplicandolo pel numero caratteristico della specie a cui vuol ridursi. Così volendo ridur 5 gradi in minuti, si moltiplica 5 per 60. Viceversa per ridurre il numero di specie inferiore in frazione

di specie superiore bisogna dividerlo pel suo numero caratteristico. Così volendo ridurre 6 secondi a frazione di grado, bisognerà dividere 6 per 3600, essendo 3600 il numero caratteristico del secondo rispetto al grado.

74. Per moltiplicare e dividere diverse quantità contenenti varie specie di rotti summultiple le une delle altre soglionsi dare delle regole più o meno facili. La più semplice e fors' anche la più breve è quella di ridurre tanto il moltiplicando che il moltiplicatore, tanto il dividendo che il divisore in parti dell' ultima specie. Allora non si ha più che a fare una moltiplicazione o una divisione come nei numeri intieri, e il prodotto o il quoziente che riesce espresso in parti di specie minore potrà poi ridursi in parti della specie maggiore nel modo insegnato.

Queste sono le regole principali dell' Aritmetica. Per insegnare in un modo più generale *la formazione delle potenze, l' estrazione delle radici, la regola del tre, ecc.*, premetteremo i principj del calcolo algebrico.

ELEMENTI D' ALGEBRA.

CAPO III.

PRIME NOZIONI E REGOLE.

75. **L'** algebra è una specie d' Aritmetica universale, i cui principali vantaggi sono, 1.^o di far vedere in un modo generale ciò che l' Aritmetica dimostra per casi particolari; 2.^o di condurre prontamente a risultamenti che rare volte l' Aritmetica ottiene senza lunghe ed incerte operazioni; 3.^o di esprimere con singolar laconismo questi stessi risultamenti che l' Aritmetica esprime con molte parole; 4.^o di risolvere un' infinità di problemi che l' Aritmetica non potrebbe; 5.^o di dare all' Aritmetica stessa in operazioni complicate molti metodi che diminuiscono la fatica.

Ogni scienza ha il suo linguaggio: l' Algebra lo ha più singolare delle altre, e conviene cominciare dal rendersi familiari le sue espressioni.

76. Tutte le cifre hanno un valore determinato: così la

cifra 3, che può significare egualmente 3 pollici, 3 tese, 3 leghe, ecc., non può significare cento o mille: onde le cifre non sono segni sì generali da rappresentare tutte le quantità possibili; perciò si pensò ad altri *segni*, il cui valore non determinato potesse variare ad arbitrio. Questi segni sono le lettere dell'alfabeto volgare e greco, le quali di più hanno talora un piccolo *apice*, come a' , b'' , che si legge *a prima*, *b seconda*, ecc.; ciascun le conosce, e sono suscettibili di qualunque valore, che dato loro in principio si conserva poi per tutta l'operazione (*).

77. Si chiama dunque *espressione algebrica* tutto ciò che è notato con lettere, e si rappresentano con certi altri *segni* le diverse operazioni che possono farsi su queste espressioni; così, per sommare a , b , si scrive $a + b$; per sottrarre c da d , si scrive $d - c$; per esprimere b maggiore di a , si scrive $b > a$; e per esprimerlo minore, si fa $b < a$. La moltiplicazione di x per y s'indica con $x \times y$ o con $x \cdot y$, anzi si stima fatta quando una lettera è seguita da una o più altre senza interruzione di segni; così $xy = x \times y$, $abc = a \times b \times c$. La divisione di a per b si accenna con $\frac{a}{b}$ o con $a : b$. Tutto come nei numeri.

78. Si chiama *monomio o termine* una quantità che non è unita ad altre coi segni $+$, $-$. Se il monomio non ha divisore, dal numero delle sue lettere è formato il numero delle sue *dimensioni*; così a è un monomio di una dimen-

(*) Salire dai numeri alla generalità delle quantità algebriche è, non può negarsi, un passo de'più arditì che fatti abbia umana mente; e non è possibile renderselo in un momento familiare. Lo studioso però vi riuscirà senza affannarsi tornando tratto tratto a meditare i due seguenti punti: 1.º che le quantità algebriche hanno rimpetto ai numeri un'idea universale simile a quelle dei generi, come di *cosa*, *sostanza*, *ente*, ecc. rimpetto alle specie ed agl'individui; 2.º che un'espressione in qualunque modo composta di segni algebrici e di lettere (a cui si dà anche il nome di *formola*) rappresenta come un quadro di operazioni da eseguirsi, del quale la forma resta sempre invariata, quantunque nelle diverse applicazioni numeriche conduca a diversi risultamenti; e ciò (dicendolo a titolo di semplice similitudine) come nel sillogismo logico, la cui forma è sempre la stessa, sebbene nei varj casi di ragionamento variandovi in tante maniere le premesse, se ne deducano diversissime conseguenze.

sione; mn lo è di due, bcd di tre; ecc.; se il monomio è un rotto, la differenza dei due numeri delle lettere componenti i termini del rotto forma il numero delle dimensioni del monomio; così $\frac{zz}{\phi}$ è di una dimensione; $\frac{\omega}{\mathfrak{S}}$ di niuna $\frac{hlp}{cr}$ di

una, ecc. Si chiama *binomio*, *trinomio*, ecc. la riunione di due, tre, ecc. termini; e in generale più termini riuniti diconsi *polinomio*, che dicesi *omogeneo* se tutti i suoi termini abbiano lo stesso numero di dimensioni.

79. I termini sono o *positivi* o *negativi*; quelli sono preceduti dal $+$, questi dal $-$, con che s'indica che gli uni sono opposti agli altri nel loro modo di esistere: così se un credito si nota col $+$, un debito dovrà notarsi col $-$; se una linea che da un punto va a destra o all'insù, si esprime col $+$, un'altra che dal punto stesso vada a sinistra o all'ingiù, dovrà esprimersi col $-$; se un movimento in una certa tal direzione si esprime col $+$, un altro nella direzione contraria dovrà esprimersi col $-$. Ora, poichè un credito si annulla da un egual debito, lo zero sta in mezzo tra i termini positivi e i negativi; ed *un termine si dirà positivo o negativo se sarà maggiore o minore di zero*. Del resto, quando il primo termine d'un polinomio non ha segno, si ha per positivo (*)

80. Spesso occorrono i termini stessi in un polinomio, come $a + a + a - b - b + d$: allora si scrivono una sola volta, segnando con una cifra a sinistra quante volte debbono ripetersi. Quindi $a + a + a - b - b + d$ diventa $3a - 2b + d$, e la cifra 3, 2 che precede i termini, si chiama *coefficiente*; s'ella manchi, il coefficiente è 1; così la lettera d è un'espressione compendiosa di $1d$, $fh - pq = 1fh - 1pq$, ecc.

(*) La giusta idea della quantità negativa tiensi ad una sottile distinzione, che è la seguente. Quando pensiamo alla quantità positiva, non abbiamo di mira che una sola maniera d'esistere, e quando pensiamo alla quantità negativa, abbiamo nello stesso tempo in vista due maniere d'esistere; l'una della quantità che si considera, l'altra di una quantità sottintesa ed indeterminata in grandezza, rispetto alla quale la quantità considerata ha una maniera d'esistere opposta. Lo studioso se ne persuaderà più che si farà provetto nel calcolo.

81. Una quantità moltiplicata per se stessa o si scrive due, tre, ecc. volte di seguito senza segno (77), come aa , prodotto di a per a ; aaa , prodotto di aa per a ecc.; o con una cifra a destra ed in alto si accenna quante volte ella dovrebbe scriversi: così a^2 è un compendio di aa ; $a^3 = aaa$, $a^4 = aaaa$, ecc. Queste cifre in alto diconsi *esponenti*, nè bisogna confonderle coi coefficienti: i coefficienti indicano somma, e gli esponenti moltiplicazione: così $3a = a + a + a$, mentre $a^3 = aaa$, e se $a = 5$, diviene $3a = 15$ ed $a^3 = 125$.

82. Se l'esponente manchi, egli è l'unità: così bc è lo stesso che $b^1 c^1$, $xxxxyyz = x^3 y^2 z^1$. Per distinguere poi l'esponente numerico n dal numero n d'apici, questo si scrive (n) : così a^n esprime a moltiplicata $n - 1$ volte per se stessa, ma $a^{(n)}$ significa a con gli apici n .

83. Si riuniscono allo stesso coefficiente i soli *termini simili*, cioè *formati con le stesse lettere, ognuna con uno stesso esponente*: così $a + 3a + 4a$ sono termini simili, poichè la stessa a è presa una, tre, quattro volte: possono dunque riunirsi allo stesso coefficiente e scrivere $8a$.

84. Se quel $+ 3a$ fosse $- 3a$, la stessa quantità a sarebbe sottratta tre volte; onde da $a + 4a$ tolto $3a$, resterebbe $2a$; che se si abbia $a + 3a - 4a$, i positivi distruggeranno i negativi. Queste *riduzioni* sono frequentissime; eccone la regola:

Bisogna ridurre ad un solo termine o scancellare i termini simili. Si scancellano se con coefficienti eguali hanno segni contrarj: così $2a + b - 2a - b$ va a zero. Si riducono ad un solo termine se hanno lo stesso o contrario segno; allora la somma o la differenza dei loro coefficienti è il coefficiente del nuovo termine; così $f^2 - 3x + 4f^2 - 8x = 5f^2 - 11x$, $\frac{3}{4}\pi + 2\phi - \frac{1}{4}\pi - 15\phi = \frac{1}{2}\pi - 13\phi$.

È uso di seguire l'alfabeto nelle lettere di ciascun termine: così si scrive piuttosto abc che cba ; piuttosto $\gamma\pi$ che $\pi\gamma$; ciò contribuisce a far meglio conoscere i termini simili.

Somma algebrica.

85. Per sommare le quantità algebriche, basta scriverle l'une dopo l'altre coi segni che hanno, e farne la riduzione se ha luogo: così la somma di cdn , $4m^2$ è $cdn + 4m^2$;

quella di $xy + z^3$, $u - t - z^3$ è $xy + u - t$; quella di $2m + 3n - q$, $q - 2m - 3n$ è zero; e di $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ è $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Sottrazione algebrica.

86. Per sottrarre una quantità algebrica da un'altra, le cambio i segni e la scrivo allato all'altra, fatta la riduzione se ha luogo: così sottraggo p da r , scrivendo $r - p$; sottraggo $m^3 - n^4 - g$ da $x^3 z - u^2$, scrivendo $x^3 z - u^2 - m^3 + n^4 + g$, e per sottrarre $\frac{c}{d}$ da $\frac{a}{b}$ scrivo $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

Questa mutazione di segni nella quantità da sottrarsi è chiara quando si muta $+$ in $-$, poichè per indicare la sottrazione d'una quantità positiva p , bisogna darle la forma negativa $-p$ (179): ma non par sì chiaro che per sottrarre una quantità negativa $-p$ bisogna scrivere $+p$.

Rammentiamoci però che la quantità sottratta dee col resto della sottrazione rendere la quantità da cui si sottrasse (22); ora questa non si riavrebbe senza mutare i segni alla quantità da sottrarsi; per esempio, se $-g$ fu sottratto da c , il resto sarà $c + g$, perchè sommando $c + g$ con $-g$, torna c .

87. Si osservi che per indicar la differenza positiva di due quantità a , b , qualunque di esse sia la maggiore, si adopera il particolar segno ω , e si scrive $a \omega b$, il che vuol dire nel tempo stesso $a - b$ se $a > b$, e $b - a$ se $a < b$.

Moltiplicazione algebrica.

Ogni termine algebrico è composto di quattro parti: del segno che lo precede, del coefficiente a cui è unito, delle lettere che contiene, e degli esponenti di esse. Ora la moltiplicazione di due termini algebrici esige delle regole per tutte queste parti.

88. Regola pei segni. *I fattori con segni simili danno il prodotto col $+$; con segni diversi lo danno col $-$* ; così $a \times b = ab$, $-a \times -b = ab$, $a \times -b = -ab$, $-a \times b = -ab$. Di fatto moltiplicare, per esempio, -4×6 significa sommare sei volte il numero -4 , ciò che dà -24 (85); or ora dimostreremo che $-a \times -b = ab$.

89. Regola pei coefficienti. *I coefficienti si moltiplicano*

insieme come nell' *Aritmetica*, e il loro prodotto è il coefficiente del prodotto algebrico: così $3a \times 9b = 27 ab \dots$

$$\frac{1}{2} c \times \frac{1}{2} p = \frac{1}{4} cp = \frac{cp}{4},$$

90. Regola per le lettere. *Le lettere*, come si è detto (77), *intendonsi moltiplicate quando sono scritte di seguito senza segno intermedio*: così $12x \times 5y = 60xy$; $60xy \times 3az = 180axyz$.

91. Regola per gli esponenti. *Quando una lettera con esponente dee moltiplicarsi per la lettera stessa pur con esponente*, bisogna scriverla con un esponente eguale alla somma dei due primitivi: così $8a^2 b^3 \times 4a^5 b = 32 a^7 b^4$. Questa regola viene dalla passata; poichè $8a^2 b^3 \times 4a^5 b = 8aa bbb \times 4aaaaa b = 32aaaaaaa bbbb = 32a^7 b^4$ (81) Ciò supposto:

92. La moltiplicazione dei polinomj si fa moltiplicando ciascun termine d' un fattore per ciascun termine dell' altro e in fine si riduce se occorra. Debba moltiplicarsi $a + 3c - d$ per $2a - d$; moltiplico primieramente a per $2a$ (il prodotto è $2a^2$); quindi $+ 3c$ per $2a$, ($+ 6ac$); poi $- d$ per $2a$, ($- 2ad$). Passo al secondo termine del moltiplicatore, e moltiplico a per $- d$, ($- ad$); poi $+ 3c$ per $- d$, ($- 3cd$); in fine $- d$ per $- d$, ($+ d^2$). Sommo tutti questi prodotti, e fatta la riduzione, ho per prodotto totale $2a^2 + 6ac - 3ad - 3cd + d^2$. Ecco degli altri esempj.

$$\begin{array}{r} a + x \\ a - x \\ \hline a^2 + ax \\ - ax - x^2 \\ \hline a^2 \qquad - x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + 3c - d \\ 2a - d \\ \hline 2a^2 + 6ac - 2ad \\ - ad - 3cd + d^2 \\ \hline \text{Somma} \\ \text{ridotta} \quad 2a^2 + 6ac - 3ad - 3cd + d^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline a^3 + 2a^2c - abc \\ - a^2b - 2abc + b^2c \\ \hline a^3 - a^2b + 2a^2c - 3abc + b^2c \end{array}$$

93. I rotti algebrici si moltiplicano come i numerici:

$$\text{così } \frac{x}{y} \times \frac{u}{z} = \frac{ux}{yz} \dots\dots\dots \frac{c}{d} \times \frac{m+n}{p+q} = \frac{cm+cn}{dp+dq} \dots\dots\dots$$

$$\frac{a+b}{1-x} \times \frac{a-b}{1+x} = \frac{a^2-b^2}{1-x^2}.$$

94. Talvolta la moltiplicazione s'indica solamente, e si cuoprono i fattori con una linea o si chiudono tra parentesi: così il prodotto di $a + 3d - d^2$ per $b^2 - 6d^2$ si scrive

$$\overline{a + 3d - d^2} \times \overline{b^2 - 6d^2} \text{ ovvero } (a + 3d - d^2)(b^2 - 6d^2).$$

Quando i fattori sono molti, come $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$, ed occorra effettuare l'operazione, moltiplico i primi due, poi il loro prodotto pel terzo, e così via via.

95. Ecco la dimostrazione che $- \times - = +$. Debba moltiplicarsi $c - a$ per $d - b$. Moltiplicando $c - a$ per d , ho $cd - ad$: ma questo prodotto è troppo grande, perchè non debbo prendere $c - a$ un numero d di volte, ma $d - b$ volte; conviene adunque che da quel prodotto io levi $c - a$ tante volte quante l'ho preso di più, cioè b volte; $c - a$ preso b volte è $cb - ba$, e sottratto da $cd - ad$, mi somministra $cd - ad - bc + ab$: ove vedo che $-a \times -b$ mi ha dato in prodotto il termine ab .

Osservo poi ch'è assurdo il dire che $+ \times +$ dà $+$; che $+ \times -$ dà $-$; che $- \times -$ dà $+$ ecc., perchè sono le quantità che si moltiplicano, non i segni; ma l'uso autorizza tali locuzioni.

Divisione algebrica.

96. Anche nella divisione si osservano alcune regole pei segni, pei coefficienti, per le lettere e per gli esponenti.

Regola pei segni. Si è dimostrato che $-4 \times 6 = -24$; dunque (27) $\frac{-24}{-4} = 6$, e $\frac{-24}{6} = -4$, cioè anche nella divisione le quantità con segni simili danno il quoziente col $+$, e con segni diversi lo danno col $-$.

Regola pei coefficienti. I coefficienti si dividono come nell'Aritmetica, scrivendone il quoziente esatto se sono divisibili senza resto, o formandone un rotto se non lo sono.

Regola per le lettere. Poichè $a \times b = ab$, sarà (27) $\frac{ab}{b} = a$, ovvero $\frac{ab}{a} = b$, cioè dalle lettere del dividendo si scancellano quelle del divisore, e ciò che resta è il quoziente; così se si chieda quante volte m entra in mpr , si risponderà che vi entra pr volte, poichè scancellando m da mpr , resta pr per quoziente. Non trovandosi nel dividendo

le lettere stesse del divisore, se ne forma un rotto come nei numeri.

Regola per gli esponenti. Quando una lettera con esponente debbe dividersi per la stessa lettera pur con esponente, bisogna scriverla nel quoziente con un esponente eguale alla differenza dei due primitivi; così dividendo $6a^4b^3$ per ab^2 , il quoziente sarà $6a^{4-1}b^{3-2} = 6a^3b$. Questa regola viene della passata; poichè se dal dividendo $6aaaaabbbb$ si scancelli il divisore abb , resta il quoziente $6a^3b$.

97. Ora per dividere $4ac^3de^3$ per $-2bd^3e^3f$, io dico: -4 diviso per $-2 = -2$: passo alle lettere e scancello nel dividendo quelle del divisore, formando un rotto dell'altre:

$$\text{quindi il quoziente cercato è } -\frac{2ac^3}{bd^2f}. \text{ Così } \frac{3abc}{3abc} = 1 \dots$$

$$\frac{-4bd}{2bd} = -2 \dots \frac{3a^2b}{5ac} = \frac{3ab}{5c} \dots -\frac{12abd}{3a} = -4bd \dots \frac{4a^3b^2d}{4abd}$$

$$= a^2b, \text{ ecc.}$$

98. Queste regole si applicano ai rotti de' polinomj se una stessa quantità è in tutti i termini del dividendo e del divisore: così

$$\frac{ax - 2abx}{ax + ax^2} = \frac{1 - 2b}{1 + x}, \text{ tolta } ax \text{ a tutti i termini, e messo } 1 \text{ in suo luogo ov' è sola (80). Del pari}$$

$$\frac{3x^2}{3ax^2 + 3b^2x^2} = \frac{1}{a + b^2}; \frac{4a^2x^2 + 3a^3b^2x}{a^3x - a^2bx} = \frac{4x + 3ab^2}{1 - b}.$$

99. I polinomj si dividono come nell' Aritmetica, e per minor fatica si *ordinano* i termini, onde il primo abbia una lettera (comune al dividendo e al divisore) col massimo esponente; il secondo abbia la lettera stessa coll' esponente prossimamente minore ecc. Ecco un dividendo e un divisore ordinati per a :

$$a^2 + 2ab + b^2 \qquad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Potevano anche ordinarsi per b : si preferisce però la lettera che non ha lo stesso esponente in più termini; per esempio, si è preferita x a b e c nella divisione seguente.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{l} -3x^3 + cx \\ 9b^2x^5 - 3b^2cx^4 - 3b^2cx^3 + b^2c^2x^2 \\ -3b^2x^2 + b^2cx \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} -9b^2x^5 + 3b^2cx^4 \\ \hline 0 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{l} -3b^2cx^3 + b^2c^2x^2 \\ + 3b^2cx^3 - b^2c^2x^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

dico dunque: $\frac{9b^2x^5}{-3b^2x^2} = -3x^3$, che pongo al quoziente:

moltiplico per esso il divisore e sottraggo il prodotto $9b^2x^5 - 3b^2cx^4$ dal dividendo. Per questo lo scrivo sotto di esso con i segni mutati (86), quindi condotta sotto una linea, cerco se ha luogo la riduzione (84) per iscrivere sotto a quella linea la quantità ridotta; veggio che due termini si distruggono; abbasso dunque ciò che resta, cioè

$-3b^2cx^3 + b^2c^2x^2$. Continuo e dico: $\frac{-3b^2cx^3}{-3b^2x^2} = +cx$ quo-

ziente; per lui moltiplico il divisore, e sottratto il prodotto $-3b^2cx^3 + b^2c^2x^2$, nulla resta; dunque il quoziente è $-3x^3 + cx$. Moltiplicandolo pel divisore, trovo il dividendo; dunque l'operazione è buona.

100. Serviranno d'esercizio espressioni simili a questa:

$\frac{a^3+m^3}{a+m}$ che fanno nascere

dei nuovi termini nel dividendo, mentre si prosegue la divisione. Il quoziente è qui $a^2 - am + m^2$.

Dividendo $1-x^{12}$ per $1-x$, il quoziente è $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}$.

Così $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\text{ecc.}$ all'infinito ed $\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-\text{ecc.}+\text{ecc.}$ in infinito.

101. La divisione dei rotti algebrici per interi o per altri rotti, o d'un intero per un rotto, segue le stesse regole de' numerici (50): così si divide $\frac{m}{n}$ per $\frac{s}{t}$ scrivendo $\frac{mt}{ns}$, si divide $\frac{b}{c}$ per $4m$ scrivendo $\frac{b}{c \cdot 4m} = \frac{b}{4cm}$; si divide x per $\frac{p}{q}$ scrivendo $\frac{qx}{p}$.

102. Questi rotti si riducono poi all'espressione più semplice con ordinarne i termini, e quindi o risolverli nei loro

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 a+m \overline{) a^3+m^3} \\
 \underline{-a^3-a^2m} \\
 1.^{\circ} \text{ Resto } -a^2m+m^3 \\
 \underline{+a^2m+am^2} \\
 2.^{\circ} \text{ Resto } am^2+m^3 \\
 \underline{-am^2-m^3} \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

fattori (94), o cercarne il massimo comun divisore: così poichè $x^2 + px = x(x + p)$, e $bm x + bmp = bm(x + p)$, sarà $\frac{px + x^2}{bm x + bmp} = \frac{x(x + p)}{bm(x + p)} = \frac{x}{bm}$; parimente giacchè dividendo $a^2 - x^2$ per $a + x$, si trova un quoziente esatto, sarà $a + x$ il massimo comun divisore di $\frac{a + x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a - x}$. Ma

non sempre si conoscono sì presto i fattori delle quantità algebriche, ed il metodo per trovarli richiede ulteriori dottrine.

103. La regola per la ricerca del massimo comun divisore fra i due termini di un rotto algebrico è in tutto simile a quella del n.º 44. *Ordinati i due polinomj termini del rotto, si assuma per dividendo quello ove la lettera per cui si è ordinato è a più alto esponente, e si divida per l'altro. Col resto dividasì il divisore; col secondo resto dividasì il primo resto; col terzo resto il secondo, e così sempre sino che si arriva ad una divisione senza resto; l'ultimo divisore è il massimo comun divisore cercato.*

Per dimostrarla premettiamo alcune riflessioni sulla divisione algebrica. Rappresentiamo per A un polinomio da dividersi, per B il divisore, per a il quoziente, e per C il resto; avremo $A = Ba + C$, perchè è proprietà costante della divisione che il dividendo eguaglia il prodotto del divisore nel quoziente più il resto (27). Riflettendo a questa eguaglianza, si vede che se A, B hanno un fattor comune F, deve averlo anche il resto C, perchè se così non fosse, dividendo tanto A che la quantità $Ba + C$ a lui eguale per quel fattore, sarebbe una quantità divisibile esattamente per F identica con un'altra non divisibile esattamente per F, cosa assurda. Collo stesso raziocinio si prova che se B e C hanno un fattore comune, deve averlo anche A.

Or ecco la dimostrazione. Siano A, B i due termini del rotto, A il dividendo, B il divisore, a il quoziente, C il resto, avremo..

$$\text{I. } A = Ba + C.$$

Assumo C divisore di B, sia b il quoziente, D il resto, sarà pure.....

$$\text{II. } B = Cb + D.$$

Dividasì C per D, e sia c il quoziente, E il resto, avrassi ancora....

$$\text{III. } C = Dc + E.$$

Alla quarta divisione di D per E suppongo che non rimanga resto, onde essendo d il quoziente, si abbia.....

$$\text{IV. } D = Ed.$$

Ci siamo fermati alla quarta divisione; ma si vedrà manifestamente che se le divisioni dovessero essere in maggior numero, il ragionamento seguente sarà lo stesso. Ora esaminando le quattro eguaglianze I, II, III e IV, la prima ci dice che il massimo comun divisore dei termini A, B del rotto deve dividere anche C; la II fa vedere che se B, C hanno quel fattore, deve averlo anche D: la III, che avendolo C, D, deve averlo anche E, che è l'ultimo divisore. Col ragionamento inverso essendo E ed anche D (per la IV) esattamente divisibile per E, lo sarà pure anche C (per la III), ed essendolo D, C, lo sarà anche B (per la II), ed essendolo C, B, lo sarà anche A (per la I). Dunque pel primo ragionamento il massimo comun divisore di A, B dev'essere fattore dell'ultimo divisore E; il massimo fattore che possa esservi in E è tutto lo stesso E; ma pel secondo ragionamento E è divisore di A, B; dunque ecc.

Un'osservazione che agevola tale ricerca è che dei due termini del rotto posso sempre moltiplicare o dividere l'uno per qualunque quantità che non abbia alcun fattore comune coll'altro; ciò non altera il divisore cercato, che per ipotesi dev'essere comune ad ambedue. In pratica la studioso potrà osservare che nella suddetta operazione non si tien conto dei quoti, e che è appunto in questi dove influiscono le alterazioni prodotte da quelle moltiplicazioni e divisioni.

Per un esempio piglio il rotto
$$\frac{(B) \quad 12x^2 - 15xy + 3y^2}{(A) \quad 6x^3 - 6x^2y + 2xy^2 - 2y^3}$$
 ed osservo 1.° che A può dividersi per 2, ma non B, e B per 3, ma non A; divido dunque, e viene
$$\frac{(B') \quad 4x^2 - 5xy + y^2}{(A') \quad 3x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3}$$
 2.° che per poter dividere A' per B', giusta il metodo, converrebbe moltiplicare A' per 4, e ciò può farsi, giacchè 4 non ha alcun divisore comune con B': moltiplico dunque, e poi dividendo A'' per B', resta (C) $19xy^2 - 19y^3$: 3.° che C può dividersi per $19y^2$, ma non B'; divido dunque, e C diventa (C') $x - y$, per cui dividendo B', nulla avanza; dunque C' è il massimo comun divisore di A, B, da cui si ha
$$\frac{12x - 3y}{6x^2 + 2y^2} (*)$$

(*) Colle lettere accentate si sono volute indicare la quantità alterate con moltiplicazioni o divisioni secondo l'ultima osservazione.

104. Si può quì dimostrare la riprova del 9 adoprata per la moltiplicazione e per la divisione (24, 34). Siano M , N i due numeri da moltiplicarsi; sia P il prodotto, $P = MN$. Indicando per m , n , a , b dei numeri interi, M , N avranno sempre la forma $M = 9m + a$, $N = 9n + b$; quindi $P = 81mn + 9an + 9bm + ab$; quindi si vede che a dividere per 9 il P , o a levare quante volte si può 9 da P , si avrà lo stesso avanzo che a levare quante volte si può il 9 da ab , perchè tutti gli altri termini del prodotto sono divisibili esattamente per 9, e non danno resto. *Dunque se leveremo quante volte si può il 9 da M , o dalla somma delle sue cifre (35), e ne troveremo un avanzo a ; se faremo lo stesso da N , e troveremo l'avanzo b ; se egualmente leveremo i 9 da P , e ne avremo l'avanzo c ; se in fine levando i 9 dal prodotto ab , si ricaverà l'avanzo e , quando la moltiplicazione sia ben fatta, debb' essere $c = e$.* Si rifletta sino di quì al vantaggio che ha l'algebra sull'aritmetica per dimostrare le proprietà dei numeri (*).

105. In conseguenza di questo stesso vantaggio si può anche dimostrare in un tratto di penna la seguente elegantissima regoletta aritmetica. *Per moltiplicare i numeri che sono tra 5 e 10, per es. 7 per 8, facendo pugno con ambe le mani, si alzino tre dita nella destra mano, due nella sinistra, tante essendo le unità delle quali quei fattori superano 5: le dita alzate, che ora sono cinque, si prendano per decine, ed avremo cinquanta; le dita serrate di una mano si moltiplichino per quelle dell'altra, ed avremo di prodotto 6, che aggiunto al 50 ci darà 56 pel prodotto di 7×8 .*

Siano $5 + x$; $5 + y$ i numeri da moltiplicarsi: saranno x , y le dita alzate: $5 - x$, $5 - y$ quelle serrate. Ora $(5 + x)(5 + y) = 25 + 5x + 5y + xy$ (92), ed aggiungendo e levando la stessa quantità $5x + 5y$, si avrà $(5 + x)(5 + y) = 25 + 5x + 5y + xy + 5x + 5y - 5x - 5y$, ovvero $(5 + x)(5 + y) = 25 + 10x + 10y + xy - 5x - 5y$, ovvero $(5 + x)$

(*) Adoperando un numero qualunque h per divisore in vece del 9, la precedente dimostrazione vale egualmente; essendo cioè $M = hm + a$, $N = hn + b$, è $P = h(hmn + bm + an) + ab$. Quindi alcuni aritmetici hanno proposta la prova del 7, dell' 11, ecc. Il 9 però va preferito agli altri numeri per la facilità di divider per esso, stante la sua proprietà riferita al n.º 35.

$(5 + y) = 25 - 5x - 5y + xy + 10(x + y)$, ed in fine (94)
 $(5 + x)(5 + y) = (5 - x)(5 - y) + (x + y)10$, il quale
 risultamento dice a chi ve la sa leggere la regola enunciata.

Usi della divisione algebrica.

106. Dal (101) si ha $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{ecc.}$ all'infinito: il quoziente adunque di 1 diviso per $1 - x$ è composto di un numero infinito di termini. Simili quozienti chiamansi *serie infinite*; e quella frazione dicesi *ridotta* o *svilupata in serie infinita*; anzi si dà in generale il nome di *serie* a qualunque numero di termini i quali procedono con qualche regola. L'eguaglianza $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{ecc.}$ non è rigorosamente esatta, quando non si supponga che la serie non si termini mai; se finiamo la serie a x^3 , per esempio, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$, sarebbe un'eguaglianza erronea, e cesserebbe di esser tale aggiungendovi il resto $\frac{x^4}{1-x}$ della divisione (100) continuata sino a x^3 ; senza quel resto vi sarebbe un errore tanto maggiore, quanto più grande è il resto.

107. Rappresentando x un numero qualunque, l'eguaglianza $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{ecc.}$ è esatta; qualunque valore si dia a x ; così se in vece di x poniamo $-y$, si avrà $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \text{ecc.}$

Per ridurre in serie il rotto più generale $\frac{c}{a+b}$, osservo che $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \times \frac{1}{1 + \frac{b}{a}}$, e perciò facendo $y = \frac{b}{a}$ si avrà

$$(1). \dots \frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \text{ecc.} \right). \text{ È anche}$$

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{b} \times \frac{1}{1+\frac{a}{b}}, \text{ dunque si avrà egualmente (II) } \dots\dots$$

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{b} \left(1 - \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^3}{b^3} + \text{ecc.} \right). \text{ Abbiamo così due}$$

serie per esprimere lo stesso rotto $\frac{c}{a+b}$.

108. Le serie (I), (II) si suppongono continuate all'infinito. Se volessero terminarsi dopo i quarti termini; cioè dopo $\frac{b^3}{a^3}$, $\frac{a^3}{b^3}$ allora, perchè quelle eguaglianze non fossero erronee, converrebbe che, sotto le parentesi ci aggiungessimo (106) i resti $\frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{1}{1+\frac{a}{b}}$, $\frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$, e si avrebbe perciò

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{1}{1+\frac{a}{b}} \right),$$

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{b} \left(1 - \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}} \right).$$

Quei due resti rappresentano le somme di tutti i termini che in infinito compongono le serie, eccettuate i primi quattro in ciascuna serie.

Quelle eguaglianze poi sussistono, qualunque valori si diano ad a e b . Se si fa $a=b$, si ha $\frac{c}{2a} = \frac{c}{a} \left(1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{c}{2a}$, e si vede che se a quelle serie non avessimo aggiunti i resti, avremmo erroneamente avuto

$$\frac{c}{2a} = \frac{c}{a} \cdot 0 = 0.$$

Facciamo nella serie (I), $b=-a$, ed avremo

$$\frac{c}{a-a} = \frac{c}{0} = \frac{c}{a} (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ecc.})$$

all'infinito: dunque una qualunque quantità divisa per zero sarà eguale ad una quantità moltiplicata nella somma di un

numero infinito di unità; e per questo si suol dire che $\frac{c}{0}$ significa l'infinito.

109. Facciamo ora $c = 1$, $a = 1$, $b = 10$, ed avremo per la serie (I)

$$\frac{1}{11} = 1 - 10 + 100 - 1000 + \frac{10000}{11}, \text{ e per la (II)}$$

$$\frac{1}{11} = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{110000} \right).$$

Se noi avessimo trascurati i due resti, si vede chiaramente che, prendendo la prima eguaglianza $\frac{1}{11} = 1 - 10 + 100 -$

1000 , avremmo fatto un grandissimo errore; avremmo preso una quantità minore della vera di $909 \frac{1}{11}$; mentre pren-

dendo la seconda, l'errore sarebbe stato insensibile. È facile anche vedere che prendendo più termini in quelle serie, nella prima cresce sempre l'errore che si commette trascurando il resto; nella seconda scema sempre; quindi la prima serie, ci allontana sempre dal vero valore, mentre la seconda vi ci approssima. Le serie come la prima chiamansi *divergenti*, e *convergenti* quelle come la seconda.

Generalmente la serie (I) è divergente quando $a < b$, convergente quando $a > b$. La serie (II) è all'opposto. *Il resto che si trascura è lo stesso rotto moltiplicato per una quantità; se questa scema col crescere il numero dei termini della serie, l'errore è tanto più piccolo, quanto è più grande il numero dei termini che si prendono; se cresce, allora l'errore diviene sempre maggiore.*

Quella quantità poi cresce coll'aumentare il numero dei termini se il valore dei termini va sempre crescendo, e scema se va scemando, come si vede nelle due serie numeriche del (109).

110. Delle due serie (I), (II) del (107), una qualunque basta per lo sviluppo di qualunque frazione in serie. Sia

la frazione $\frac{m}{n}$. Decomponiamo il denominatore in due parti,

e sia $n = a + b$, ed allora la frazione da svilupparsi sarà

$\frac{m}{a + b}$. Questa decomposizione si può fare in un numero

infinito di maniere, ed è per noi arbitraria; quindi una frazione si potrà sviluppare in un numero infinito di serie diverse.

Per esempio, la serie (I) ci dà

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \text{ecc.} \right).$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \text{ecc.} \right).$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \text{ecc.} \right).$$

Nelle diverse forme che possono darsi alle due parti a , b nelle quali si decompone il divisore n , e nello sviluppo in questi casi della frazione $\frac{m}{a+b}$ consiste tutta quella dottrina che appartiene allo sviluppo delle frazioni in serie per mezzo della divisione.

Frazioni continue.

III. Sia $\frac{B}{A}$ una frazione propria. Si eseguisca sopra i suoi due termini la stessa operazione che si fa per la ricerca del massimo comun divisore (44, 103), quantunque a diverso oggetto. Chiamando a, b, c, d , ecc. i successivi quozienti, C, D, E , ecc. i successivi resti, avremo come allora I. $A = Ba + C$; II. $B = Cb + D$; III. $C = Dc + E$; IV. $D = Ed$; supponendo che la quarta divisione sia senza resto; ma niente ostando che l'operazione possa protrarsi a molto maggior numero di divisioni.

Nella frazione proposta $\frac{B}{A}$ poniamo in luogo del denominatore la sua quantità eguale per la I, ed avremo $\frac{B}{A} = \frac{B}{Ba+C}$. Dividendo i due termini di quest'ultima frazione per B , verrà

$$\frac{B}{A} = \frac{B}{Ba+C} = \frac{1}{a + \frac{C}{B}}.$$

Operando similmente coi valori II, III, IV, otterremo

$$\frac{C}{\bar{B}} = \frac{C}{Cb + D} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}}$$

$$\frac{D}{\bar{C}} = \frac{D}{Dc + E} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}}$$

$$\frac{E}{\bar{D}} = \frac{E}{Ed} = \frac{1}{d}.$$

Sostituendo nell'ultima espressione trovata eguale in valore a $\frac{B}{A}$, quella eguale a $\frac{C}{\bar{B}}$, quindi nella nuova espressione che risulta, la eguale a $\frac{D}{\bar{C}}$, e in ciò che di nuovo risulta, il valore di $\frac{E}{\bar{D}}$, viene

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a + \frac{C}{B}} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}}} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{E}{D}}}} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}}$$

A queste espressioni, nelle quali successivamente si cambia la frazione proposta $\frac{B}{A}$, si dà il nome di *frazioni continue*.

112. Le successive divisioni che hanno luogo nelle frazioni continue, finiscono quando si giunge ad una frazione $\frac{E}{\bar{D}} = \frac{E}{Ed}$, nella quale il denominatore è multiplo del numeratore. Ecco degli esempj:

$$\frac{7}{19} = \frac{1}{2 + \frac{5}{7}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{5}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

$$\frac{21}{54} = \frac{1}{2 + \frac{12}{25}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{9}{12}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

nè si potrebbero continuare ulteriormente le divisioni.

Di quì si vede come qualunque frazione possa cangiarsi in frazione continua; nè questa operazione ha alcuna difficoltà. Si osservi che le quantità a, b, c, d ; ecc., le quali insieme ad altrettante unità unicamente compongono la frazione continua, sono i successivi quoti delle divisioni, quegli stessi che si trascuravano nella ricerca del massimo comun divisore. Vi sono delle frazioni continue che non finiscono mai, ma queste procedono da altri principj.

113. Per cambiare poi una frazione continua in una frazione ordinaria, conviene tenere la strada inversa. Così

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b}} = \frac{b}{ab + 1}, \quad \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} = \frac{1}{a + \frac{c}{bc + 1}} = \frac{bc + 1}{abc + a + c}$$

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{d}{cd + 1}}} = \frac{1}{a + \frac{cd + 1}{bcd + b + d}}$$

$$= \frac{bcd + b + d}{abcd + ab + ad + cd + 1}; \text{ e così di seguito.}$$

114. Quando per ridurre una frazione continua ad una frazione ordinaria non si prendono tutte le divisioni o tutti i termini che la compongono, allora la frazione ordinaria che si ritrova non è eguale esattamente alla frazione continua, ma sempre più vi si accosta, quante più divisioni si considerano. Questo avvicinamento si fa in tal guisa che le successive frazioni ordinarie che si trovano prendendo una, due, tre ecc. divisioni, sono alternativamente maggiori e minori del vero valore della frazione continua, sempre

più però accostandosi ad esso; talchè il vero valore della proposta è sempre compreso tra i valori in due consecutive fra esse, come prima e seconda, seconda e terza ecc.; e le differenze fra tali frazioni ordinarie vanno sempre scemando: la differenza tra la prima e la seconda è maggiore della differenza tra la seconda e la terza; questa, maggiore di quella tra la terza e la quarta; e così via via.

Ecco come si dimostra. Abbia la frazione continua tre termini, onde sia $\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$ ed il suo valore esatto sarà

$$\frac{bc + 1}{abc + a + c}. \text{ Ora } \frac{bc + 1}{abc + a + c} - \frac{1}{a} = -\frac{c}{a(abc + a + c)};$$

$$\frac{bc + 1}{abc + a + c} - \frac{b}{ab + 1} = \frac{1}{(ab + 1)(abc + a + c)}; \text{ dunque } \frac{1}{a}$$

è maggiore del vero valore della frazione; $\frac{b}{ab + 1}$ è mi-

nore; giacchè la prima differenza è negativa, la seconda positiva. Astraendo poi dai segni la seconda differenza è minore della prima; in fatti se sottraggasi la prima alla se-

conda, viene $\frac{a - abc - c}{a(ab + 1)(abc + a + c)}$ quantità negativa, perchè essendo b, c numeri intieri, è manifesto che nel numeratore la parte negativa supera la positiva.

Se si supponesse che la frazione continua avesse quattro termini, egualmente si proverebbe che, preso un termine solo, si avrebbe una frazione maggiore della vera; presi due termini, minore; presi tre, maggiore; e che questi valori sempre più si accostano al vero valore della frazione. Lo stesso si dica per qualunque numero di termini abbia la frazione continua.

115. Si ricava di qui il metodo di cangiare una frazione numerica in altre composte di minor numero di cifre che ad essa sempre più si approssimino: ciò si fa sviluppando la proposta in frazione continua; quindi la continua in frazioni ordinarie, prendendo uno, due, tre ecc. de' suoi termini, secondo la maggiore approssimazione che si brama.

Per esempio la frazione $\frac{1415926535}{10000000000}$ si cangia nella seguente frazione:

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{1} \\
 7 + \frac{1}{1} \\
 15 + \frac{1}{1} \\
 1 + \frac{1}{1} \\
 292 + \frac{1}{1} \\
 1 + \frac{1}{1} \\
 1 + \frac{1}{1} \\
 6 + \frac{1}{1} \\
 2 + \frac{1}{1} \\
 13 + \frac{1}{1} \\
 3 + \frac{1}{1} \\
 1 + \frac{1}{1} \\
 12 + \frac{1}{3}
 \end{array}$$

di cui prendendo uno, due, tre termini ecc., si hanno le frazioni ordinarie $\frac{1}{7}$; $\frac{15}{106}$; $\frac{16}{113}$; $\frac{4687}{33102}$; $\frac{4703}{33215}$ ecc., delle quali la prima è maggiore della proposta; la seconda, minore; la terza, maggiore; la quarta, minore, e così via via; di modo che la proposta si trova sempre in mezzo a due qualunque frazioni consecutive. Il valore poi della seconda più si avvicina alla proposta, di quello che faccia il valor della prima; la terza si avvicina più alla proposta della seconda ecc. Sviluppando in decimali queste frazioni, si possono vedere questi successivi e sempre maggiori avvicinamenti.

CAPO IV.

RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI PRIMO GRADO.

116. **P**er quanto noi non siamo inoltrati nell'algebra al di là delle prime quattro regole elementari, somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione; pure siamo già in situazione di risolvere dei problemi, dei quali sarebbe malagevole cercare la soluzione per mezzo dell'Aritmetica ordinaria.

Un problema è una specie di enigma da indovinare. Ora non è possibile di sciogliere l'enigma senza qualche cognizione a lui relativa, e senza dei rapporti tra ciò che si sa e ciò che si cerca.

La risoluzione dei problemi matematici è fondata su questi rapporti che chiamansi *condizioni del problema*. Si tratta solo di esprimere queste condizioni in modo da dedurre la notizia di ciò che non si sapeva, il che si ottiene col paragone delle quantità note ed ignote. Le prime diconsi *le date del problema*, e si usa di esprimerle con le prime lettere a, b, c , ecc., ovvero α, β, γ , ecc. Le altre si chiamano *incognite*, e si notano con l'ultime lettere x, y, z, ϕ, ω , ecc. Ogni formola ch'esprime l'eguaglianza di due o più quantità, si chiama *equazione*. Il segno d'eguaglianza divide l'equazione in due *membri*, e il sinistro è il *primo*, e il destro il *secondo*.

117. L'equazioni si dividono in diversi gradi, secondo il più alto esponente che vi ha l'incognita, se vi è un'incognita sola: purchè essa non entri in qualche denominatore, nel qual caso bisognerà mandar via i denominatori nel modo che si dirà in seguito prima di giudicare del grado dell'equazione. Così $x = a$, $ax + c = 0$ sono equazioni di primo grado: $x^2 = a$, $ax^2 + bx = c$ sono del secondo grado: $y^3 + my^2 + ny = c$ è del terzo, e così via via; se poi vi sono più incognite nella stessa equazione, dalla maggior somma degli esponenti delle incognite d'un medesimo termine si deduce il grado dell'equazione: così $z + b = y - c$ è un'equazione di primo grado: $xy + ax = c$ è del secondo: $x^3 + xy^2 + ay^2 = my$, $xyz + cx^2 = y^2$ sono del terzo, ecc.

Si aggiunge poi il nome *identiche* a quelle equazioni che hanno il primo membro effettivamente eguale al secondo, per esempio: $3x^2 = x^2 + 2x^2$, $a + 2 = a + 3 - 1$, ecc.

Il grado poi dell'equazione, cui conduce un problema, si dice il grado stesso del problema; onde noi ora ci occuperemo della soluzione di quei problemi i quali dipendono da equazioni di primo grado.

Equazioni del primo grado.

118. Riunire in un membro dell'equazione tutti i termini noti, e lasciar nell'altro l'incognita sola, *positiva, senza coefficiente, senza divisore e senza esponente*, questo è ciò che si chiama *risolver un'equazione*; poichè una quantità

eguale a quantità note non è più incognita. Ora le operazioni che guidano all'intento per un'equazione del primo grado, si riducono a due assiomi.

119. I. *Se ai due membri d' un' equazione si aggiungano o si tolgano quantità eguali, i due membri resteranno eguali.* Con questo mezzo si ha l' incognita sola e positiva; poichè se sia $a + 2b = 4c - 3x$, si aggiugnerà $3x$, ai due membri, e se ne toglierà $a + 2b$, onde venga $a + 2b + 3x - a - 2b = 4c - 3x + 3x - a - 2b$: riducendo, si avrà $3x = 4c - a - 2b$. Dunque: *per trasportare una quantità da un membro all' altro, basta scancellarla nell' uno e scriverla con opposto segno nell' altro.*

120. II. *Se i due membri d' un' equazione si moltiplichino o si dividano per quantità eguali, i due membri resteranno eguali.* Con ciò si ha l' incognita senza coefficiente e senza divisore; poichè se sia $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{f} + m = px + \frac{cx}{f} + n$, 1.º trasporto $px + \frac{cx}{f}$ nel primo membro, e m nel secondo, e riducendo viene $\frac{ax}{b} - px = n - m$; 2.º moltiplico i due membri pel divisore di x , ed ho $ax - bpx = bn - bm$, cioè $(a - bp)x = b(n - m)$; 3.º divido i due membri pel coefficiente totale di x , e ottengo $x = \frac{b(n - m)}{a - bp}$.

121. Non vi è equazione del primo grado che con questo piccolo numero di principj non si risolva; tutta la difficoltà consiste nell'arrivarvi, cioè nell'esaminare le condizioni proposte e nel combinarle in modo che ne risultino due diverse ed eguali espressioni. Ma non vi sono precetti per questo, e solamente il lungo esercizio e gli esempj possono dare quella facilità e quell'avvedutezza che conducono all'equazione d'un problema. Ecco varj di questi esempj.

122. I. Un padre ha il sestuplo dell'età del suo figlio, e la somma dell'età d'ambidue è di 91 anni. Qual è l'età del figlio e del padre?

Mentre gli Aritmetici si perderebbero in tentativi, l'Algebrista dirà così: chiamo x l'età del figlio; dunque per la condizione del problema l'età del padre sarà $6x$. Ora queste due età sommate fanno 91 anni, dunque $7x = 91$,

ed ecco il problema messo in equazione; dunque (120) si avrà $x = \frac{91}{7} = 13$, e perciò il figlio ha 13 anni; il padre dunque ne ha 78, poichè $13 + 78 = 91$. Così è risoluto il problema e verificata la soluzione, poichè ella soddisfa alla condizione proposta.

II. Si cerca un numero tale che il suo prodotto per 4, il suo quoziente per 5, e il suo moltiplicatore facciano $12\frac{1}{2}$.

Chiamando x il numero cercato, si avrà $4x + \frac{x}{5} + 4 = 12\frac{1}{2}$; dunque (119) $4x + \frac{x}{5} = 8\frac{1}{2}$, quindi (120) $20x + x = 42\frac{1}{2} = \frac{85}{2}$, e finalmente $x = \frac{85}{2 \cdot 21} = 2\frac{1}{42}$; di fatto $\frac{85}{42} \times 4 + \frac{85}{42 \cdot 5} + 4 = 12\frac{1}{2}$, condizione del problema. Per indovinare coll' Aritmetica questo numero, quante prove e quanti calcoli sarebbero bisognati!

III. Un terremoto abbattè in un giorno solo la metà delle case di una città; nel giorno dopo, un terzo; e la duodecima parte negli altri giorni, di modo che restano in piedi 63 case. Di quante case era composta la città?

Sia x il numero che si cerca; $\frac{x}{2}$ sarà il numero delle case cadute nel primo giorno: $\frac{x}{3}$ e $\frac{x}{12}$ esprimeranno le cadute negli altri giorni: e poichè la città era composta delle case cadute e di quelle che restano, si avrà per equazione del problema $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 63 = x$. Si moltiplichi l'equazione per 12 (120), e si avrà $6x + 4x + x + 756 = 12x$, e riducendo, $11x + 756 = 12x$, cioè (119) $x = 756$; onde la città conteneva 756 case.

IV. Tre amici, che chiameremo B, C, D, hanno presi in comune dei biglietti di lotto. Il giuoco di B + quello di C fa 21 lira, quello di B e D fa 24 lire, e quello di C e D ascende a 27 lire, Quanto ha messo ciascuno?

Sugpongo $a = 21$, $c = 24$, $f = 27$ e x il danaro di B,

dunque $a - x$ è quello di C, e $c - x$ quello di D. Ora, secondo il problema, queste due ultime poste fanno 27 lire. Dunque $a - x + c - x = f$, dal che deduco (119, 120)

$$x = \frac{a + c - f}{2} = 9 \text{ lire, il che mi dà 12 e 15 lire per le}$$
 poste di C e D.

123. Al primo aspetto pareva indispensabile il riguardare le tre quantità del danaro posto come tante incognite differenti; ma osservandovi meglio, si vede che, determinata una sola di esse, restano determinate anche le altre. Concludiamo da ciò che il numero delle incognite non dipende dal numero delle quistioni particolari del problema, ma bensì dalla relazione ch'è tra le condizioni di esso. Non è però che non si fosse egualmente avuta la soluzione introducendo tre incognite; ma in generale bisogna sempre cercare le soluzioni più semplici.

V. Un padre lascia al figlio maggiore 1000 scudi e $\frac{1}{6}$ di ciò che resta; al secondo 2000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto; al terzo 3000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto, e così fino all'ultimo. Fatte le parti, si trova che i figli hanno avuta tutti l'eredità per egual porzione. Si cerca 1.º quanto era l'asse paterno; 2.º quanti erano i figli; 3.º qual fu la parte di ciascuno.

Queste tre quistioni potrebbero far credere che vi fossero tre incognite nel problema: eppure, conosciuto l'asse paterno, si conosce tutto. Di fatto, tolti da esso i 1000 scudi + $\frac{1}{6}$ del resto, che vanno al maggiore, basta dividere l'eredità per questa parte del maggiore, e il quoziente farà conoscere il numero delle parti eguali e perciò quello de' figli. Cerchiamo dunque l'asse paterno.

Lo chiamo x , e per brevità pongo $a = 1000$, poi dico: quando il maggiore ha presi 1000 scudi, l'eredità resta $x - a$: ma di questo resto egli dee averne $\frac{1}{6}$; dunque

la sua parte è $a + \frac{x - a}{6} = \frac{5a + x}{6}$.

Ora questa parte eguaglia quella de' suoi fratelli; dun-

que basta cercare il valore algebrico della parte, per esempio, del secondo, per avere l'equazione e conoscere x .

L'eredità, toltane la parte del maggiore, resta x

$$\frac{5a+x}{6} = \frac{5x-5a}{6}$$
 Di questo resto il secondo dee avere

2000 sc. $= 2a$, onde rimarrà l'eredità $\frac{5x-5a}{6} - 2a =$

$\frac{5x-17a}{6}$, il cui sesto è $\frac{5x-17a}{36}$: onde la parte del secon-

do è $2a + \frac{5x-17a}{36} = \frac{55a+5x}{36}$. Si ha dunque l'equa-

zione $\frac{5a+x}{6} = \frac{55a+5x}{36}$. Moltiplicando i due membri per

36, si ha $30a + 6x = 55a + 5x$, onde $x = 25a = 25000$; dunque la parte di ciascun figlio è di 5000 scudi, ed erano cinque fratelli (*).

Pongo tre problemi, dei quali annunzio i dati in generale, dando il valor finale dell'incognita senza il ragionamento e il calcolo che vi conducono: onde questi vengano per suo utile esercizio suppliti dallo studioso.

VI. Un uomo morendo lascia un numero h di scudi da distribuire alla sua vedova, a un numero q di figli, e a un numero p di figlie. Vuole che la madre riceva n volte la porzione di un figlio, e che un figlio riceva m volte quella d'una figlia: quanto a ciascuno?

Sia x la porzione di una figlia.

$$x = \frac{h}{p + (q + n)m}.$$

VII. Ho comperate alcune braccia di panno a ragione di m scudi per ogni n braccia: le ho rivendute a ragione di p scudi per ogni q braccia, e ho guadagnato h scudi in totale: si domanda il numero x delle braccia di panno.

(*) Similmente si sarebbe potuto trovare la parte del 3.^o eguale a $\frac{455a+25x}{216}$, che eguagliata a quella del 1.^o o del 2.^o darebbe un'al-

tra equazione. Se questa fosse diversa dalla prima, il problema sarebbe di quelli che or ora chiameremo *più che determinati*, e quindi impossibile. Ma questa seconda equazione conduce allo stesso valore di x che si ottiene dalla prima.

$$x = \frac{hnq}{np - mq}.$$

VIII. Cerco un numero x tale, che se si moltiplica per m , poi tolgasi n ; indi il resto si moltiplichi per m^1 , e tolgasi n^1 , indi il nuovo resto si divida per p ; il numero risultante dopo queste operazioni sia minore del primitivo x di un altro numero dato q .

$$x = \frac{nm^1 + n^1 - pq}{mm^1 - p}.$$

124. Passiamo ai problemi a più incognite.

IX. Trovare due quantità di cui è data la somma e la differenza.

Sia a la somma, b la differenza, x la quantità maggiore, y la minore. Si avranno dunque le due equazioni $x + y = a$, $x - y = b$. Esprimono queste le due condizioni del problema, e quindi le due proprietà che aver debbono i numeri che io ricerco. A queste due equazioni, le quali sono vere nel tempo stesso (giacchè in virtù dei due valori delle incognite, quando una si verifica, debbe anche l'altra verificarsi), si dà il nome di *simultanee*. Per trovare poi questi valori, prendo da ciascuna delle due equazioni il valore di x , ed ho $x = a - y$, $x = b + y$; e poichè $x = x$, sarà anche $a - y = b + y$, onde $2y = a - b$, ed $y = \frac{a - b}{2}$; ma era $x = a - y$; dunque sostituendovi il valore di y ora trovato, si ha $x = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}$.

Che questi due valori di x , y soddisfacciano alle condizioni del problema, o rendano identiche le due equazioni simultanee, si vedrà facilmente sostituendoveli. E di fatto

$$\frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} = a; \quad \frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2} = b.$$

Considerando i ritrovati valori di x , y , concluderemo in generale, che, *Data la somma e la differenza di due quantità, la maggiore eguaglia sempre la metà della somma e della differenza, e la minore eguaglia la metà della somma, meno la metà della differenza.*

Applicazioni. Una casa di due piani ha 35 piedi d'altezza, ed il primo piano è 4 piedi più alto del secondo. Quale è l'altezza dei due piani?

Sarà $a = 35$, $b = 4$, dunque $x = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b = 19 \frac{1}{2}$

ed $y = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b = 15 \frac{1}{2}$.

Due pietre pesano libbre 2878, e l'una è libbre 156 meno dell'altra: quanto pesa ciascuna?

$a = 2878$, $b = 156$; dunque $x = 1517$, $y = 1361$.

125. Per generalizzare la soluzione dei problemi a due incognite risolviamo le due equazioni

$$px + qy = a, \quad mx + ny = b.$$

Prendiamo il valore di x da ciascuna, ed avremo

$$x = \frac{a - qy}{p}; \quad x = \frac{b - ny}{m}; \quad \text{quindi} \quad \frac{a - qy}{p} = \frac{b - ny}{m}.$$

$$am - mqy = bp - npy; \quad (mq - np) y = am - bp.$$

Da quest'ultima si cava subito il valore di y ; questo potrà sostituirsi in una delle equazioni date per trovare quello di x ; saranno

$$x = \frac{bq - an}{mq - np} \quad y = \frac{am - bp}{mq - np}.$$

Intanto osserviamo che se avessimo avuta una sola equazione, mai avremo potuto trovare il valore delle incognite; e che perciò erano necessarie appunto due equazioni.

X. Avendo dei gettoni nelle mani, ne prendo uno dalla destra e lo passo nella sinistra, e con ciò ne ho un egual numero in ambedue; ma se ne avessi passati due dalla sinistra alla destra, questa ne avrebbe avuti il doppio dell'altra. Quanti gettoni erano da principio in ciascuna mano?

Siano x quei della destra, y quei della sinistra: si avrà per la prima condizione $x - 1 = y + 1$, e per la seconda $x + 2 = 2(y - 2)$; equazioni che si riducono a $x - y = 2$; $x - 2y = -6$. Paragoniamo queste con le generali, e si avrà $p = 1$; $q = -1$; $a = 2$; $m = 1$; $n = -2$; $b = -6$, e quindi

$$x = \frac{bq - an}{mq - np} = \frac{(-6)(-1) - 2(-2)}{1(-1) - (-2)} = \frac{6 + 4}{-1 + 2} = 10;$$

$y = 8$. Avevo dunque 10 gettoni nella destra, 8 nella sinistra.

IX. Un orefice ha fatto pagare per tre onces d'oro e cinque d'argento 318 lire. Ha fatto pagare altresì 522 lire per 5 onces d'oro e 7 d'argento; quale è il prezzo dell'oncia d'oro e d'argento?

Posti x, y i valori cercati, si ha $3x + 5y = 318$; $5x + 7y = 522$; quindi $p = 3$; $q = 5$; $a = 318$; $m = 5$; $n = 7$; $b = 522$; e fatte le opportune sostituzioni nei valori di x, y , si troverà $x = 96$ prezzo di un' oncia d' oro, $y = 6$ prezzo di una d' argento.

126. Sono stati comperati tre cavalli, i cui prezzi sono tali che il primo con la metà del prezzo del secondo e del terzo vale 25 zecchini; il secondo con un terzo del prezzo degli altri due, 26; il terzo con la metà del prezzo degli altri due, 29. Quale è il prezzo di ciascun cavallo?

Chiamando x, y, z i tre prezzi cercati, l'equazioni del problema saranno $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 25$, $y + \frac{x}{3} + \frac{z}{3} = 26$;

$z + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 29$, le quali, fatti sparire i rotti (120), divengono I.^o $2x + y + z = 50$; II.^o $x + 3y + z = 78$; III.^o $x + y + 2z = 58$.

Ricavo i valori di x da tutte e tre l'equazioni, ed ottengo $x = 25 - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$; $x = 78 - 3y - z$; $x = 58 - y - 2z$; eguaglio il primo di questi valori col secondo, ed il secondo col terzo; ottengo allora queste due equazioni

$$25 - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 78 - 3y - z; \quad 58 - y - 2z = 78 - 3y - z,$$

le quali si riducono a queste (119, 120) $5y + z = 106$; $2y - z = 20$, tra le due incognite y, z . Ricaviamo da queste due ultime equazioni i valori di y , ed avremo

$$y = \frac{106 - z}{5}; \quad y = \frac{20 + z}{2}, \text{ e questi, eguagliati tra loro ci}$$

danno l'equazione $\frac{106 - z}{5} = \frac{20 + z}{2}$, che si riduce a 212

$- 2z = 100 + 5z$, che finalmente ci dà $7z = 112$, $z = 16$. Sostituiamo questo valore di z in uno di quei di y , e si a-

vrà $y = \frac{106 - 16}{5} = \frac{90}{5} = 18$. I valori poi di z, y , sosti-

tuiti in uno di quei della x , ci danno $x = 8$. Così di quei cavalli uno costava 8, uno 16, uno 18 zecchini.

Se questi tre valori di x, y, z si sostituissero in quelle tre equazioni simultanee, da cui dipende la soluzione del problema, si troverebbero identiche, e quindi soddisfatte le condizioni di esso.

Osserviamo anche quì che se avessimo avuto una o due sole equazioni, non avremmo potuto trovare il valore delle incognite, e che perciò erano appunto necessarie tre equazioni o tre condizioni nel problema.

Si potrebbe generalizzare la soluzione di un problema a tre incognite, risolvendo collo stesso metodo queste tre equazioni generali

$mx + ny + lz = a; px + qy + rz = b; gx + ey + hz = c;$
il calcolo però sarebbe assai laborioso.

127. Rammentando quanto abbiamo osservato nei problemi a due e tre incognite, e riflettendo al metodo col quale si risolvono, che facilmente si vede potersi estendere alla soluzione dei problemi di un qualunque numero d'incognite, concluderemo, *Che per risolvere un problema a più incognite è necessario che si abbiano tante equazioni quante incognite.* In questo caso il problema si chiama *determinato*: quando nei problemi vi sono più incognite che equazioni, si chiamano essi *indeterminati*, e ne parleremo altrove: diconsi all'incontro *più che determinati* quando vi sono più equazioni che incognite; e se tutte queste equazioni esprimono condizioni in sostanza diverse il problema è impossibile a risolversi.

Così se si proponesse a sciogliere lo stesso problema IX, ma vi si aggiungesse la condizione, *Che la metà della prima quantità sommata colla metà della seconda facesse c*; allora, oltre quelle due equazioni $x + y = a$, $x - y = b$, se ne avrebbe un'altra $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = c$, ed il problema sarebbe

più che determinato. Questa terza equazione però si riduce alla $x + y = 2c$; e se non è $2c = a$, il problema è impossibile a risolversi: quando poi fosse $2c = a$, allora la terza equazione è la prima medesima; ed in sostanza le tre condizioni si riducono alle prime due.

128. La strada tenuta per giungere a trovare il valore delle incognite consiste nel ricavare dalle tre equazioni, per esempio, di un problema a tre incognite, due equazioni le quali contengano un'incognita di meno, e da queste due dedurne un'altra che contenga un'incognita meno di esse; e finalmente trovare da quest'ultima equazione il valore dell'incognita ch'è rimasta. Questa operazione di fare successivamente sparire delle incognite dall'equazioni chiamasi *eliminazione delle incognite*; ed *eliminare* dicesi il fare questa operazione.

Al metodo adoperato nei numeri antecedenti per eliminare le incognite può sostituirsi un altro più semplice e breve. Questo è appoggiato ad un assioma che dipende da quello del numero 119, ed è: *Due o più equazioni combinate tra loro per mezzo della somma o della sottrazione, della moltiplicazione o della divisione danno sempre per risultato un'equazione.* In conseguenza di questo assioma le due equazioni del problema IX, $x + y = a$, $x - y = b$ sommate ci danno $2x = a + b$, quindi $x = \frac{a+b}{2}$; sottratte danno $2y = a - b$, quindi $y = \frac{a-b}{2}$.

Nel problema X, delle due equazioni $x - 1 = y + 1$; $x + 2 = 2y - 4$, sottratta la prima dalla seconda, si ha $3 = y - 5$; $y = 8$, onde $x = 10$.

Nel problema XI, delle due equazioni $3x + 5y = 318$; $5x + 7y = 522$ si moltiplichino (120) la prima per 5, e la seconda per 3: esse divengono $15x + 25y = 1590$; $15y + 21x = 1466$, dalle quali, sottraendo la seconda dalla prima, si ha $4y = 24$; $y = 6$, quindi $x = 96$.

Ed in generale nell'equazioni del (125) $px + qy = a$; $mx + ny = b$, per eliminare un'incognita, per esempio la x , si moltiplichino la prima equazione pel coefficiente m che ha la x nella seconda, e si avrà $mpx + mqy = am$; quindi si moltiplichino la seconda pel coefficiente che ha la x nella prima, e si avrà $mpx + npy = bp$: di queste due equazioni si sottragga l'una dall'altra, e trovandosi in esse la x collo stesso coefficiente, essa sparirà, e si avrà $mqy - npy = am - bp$; perciò $y(mq - np) = am - bp$, e finalmente $y = \frac{am - bp}{mq - np}$; se si farà lo stesso per mandar via y da quelle equazioni, otterremo una equazione che ci darà $x = \frac{bq - an}{mq - np}$.

129. Nel caso di tre incognite consideriamo le tre equazioni del problema XII; I. $2x + y + z = 50$; II. $x + 3y + z = 78$; III. $x + y + 2z = 58$. Tolgo la prima dalla seconda, e viene IV. $2y - x = 28$; moltiplico la seconda per 2, e ne tolgo la terza, il che mi dà V. $5y + x = 98$; in fine sommo la quarta e la quinta, e trovo $7y = 126$; quindi $y = 18$, valore che, sostituito nella quarta, dà $x = 8$, onde, posti nella terza i valori di x , y , si ha $z = 16$. In

generale se con questo metodo si volessero risolvere le tre equazioni (126) $mx+ny+lz=a$; $px+qy+rz=b$; $gx+ey+hz=c$; ecco come si procederebbe: per eliminare da esse un' incognita, per esempio la x , cioè per ottenere facilmente dell' equazioni che non la contengano, si moltiplichino ciascuna equazione pel prodotto dei coefficienti che ha la x nelle altre due, ed otterremo allora tre equazioni, ognuna delle quali avrà lo stesso coefficiente di x . Quindi se sottrarremo la prima dalla seconda, e la seconda dalla terza, avremo due nuove equazioni tra y e z , le quali si tratteranno come abbiamo insegnato (128). Otterremo allora i valori per y e z , che, sostituiti in una delle tre proposte, ci daranno il valore dell' altra incognita x .

Facilmente si comprende che questo metodo si estende a qualunque numero di equazioni tra un egual numero d' incognite.

130. Passiamo ora a dimostrare la regola data per la conversione in frazioni ordinarie delle frazioni decimali periodiche (67). Opereremo sulla frazione $0,142857\ 142857$ ecc., ma si vedrà chiaramente che il metodo è generale per qualunque altra frazione decimale periodica. Chiamisi s il valore della detta frazione, e avremo

$$s = 0,142857\ 142857\ \text{ecc.}$$

Si moltiplichino questa equazione per 1000000, cioè per l' unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del periodo, e sortirà

$$1000000\ s = 142857,142857\ 142857\ \text{ecc.}$$

Tanto in questa come nella precedente equazione la parte decimale è la stessa; se dunque si sottragga la prima equazione dalla seconda, questa parte decimale sparirà e resterà

$$999999\ s = 142857$$

da cui

$$s = \frac{142857}{999999}$$

cioè il valore della frazione decimale è uguale ad una frazione ordinaria, il cui numeratore è il periodo, e il cui denominatore è un numero composto di tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Per procedere alla soluzione dei problemi di gradi più elevati, è necessario trattenersi a dare ulteriori dottrine di Algebra.

CAPO V.

DELLE POTENZE E DELLE RADICI DEI MONOMI

131. **S**e una quantità a si moltiplichi per sè stessa, per derivarne un prodotto aa ; se questo prodotto si moltiplichi per a , per derivarne un secondo prodotto aaa ; se con la stessa regola se ne ricavi un terzo prodotto $aaaa$; un quarto $aaaaa$, ecc.; e tutti questi prodotti compendiatamente, come si è detto (81), si scrivano l'un dopo l'altro, avremo la serie di termini a, a^2, a^3, a^4, a^5 , ecc. a^m . Si chiama questa *la serie delle potenze* della quantità a . Il primo termine a è la *prima*; il secondo a^2 la *seconda*; il terzo a^3 la *terza*; in generale il termine *emmesimo* a^m è la *potenza emmesima* di a . I numeri 2, 3, 4, 5, ecc. m , i quali si trovano scritti sopra quelle lettere, e che diminuiti di una unità indicano quante volte a si è moltiplicata per se medesima, si sono chiamati (81) *esponenti*. Per analogia si dà l'unità per esponente alla prima potenza; così $a = a^1$.

132. Dopo di ciò è facile far le potenze di qualunque quantità; così $9, \frac{3}{4}, 5b$ si alzano alla seconda potenza moltiplicandoli per sè stessi una volta, il che dà $9 \cdot 9 = 9^2 = 81$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$; $5b \cdot 5b = 5^2 b^2 = 25b^2$; per elevare alla terza potenza $\frac{3b}{c}$, si farà $\frac{3b}{c} \cdot \frac{3b}{c} \cdot \frac{3b}{c} = \frac{3^3 b^3}{c^3} = \frac{27b^3}{c^3}$; e la potenza emmesima di $\frac{7cz}{3x}$ sarà $\frac{7^m c^m z^m}{3^m x^m}$. E-

gualmente si possono avere le 2.^e potenze dei numeri naturali
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ecc.,
e queste sono

(Q) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, ecc.
che s'indicano per

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2$, ecc.

Le 3.^e potenze poi di quei numeri naturali sono

(C) 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343; ecc.

e s'indicano $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3$, ecc.
Nel medesimo modo possono farsi le potenze dei gradi superiori.

133. Riprendiamo la serie

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \text{ecc. } a^m.$$

Il primo tetmine a , dal quale si deducono tutti gli altri, relativamente ad essi chiamasi *radice*; radice *seconda* relativamente ad a^2 ; *terza* riguardo ad a^3 , ecc.; così 9 è la

radice seconda di 81; $\frac{3}{4}$ la radice seconda di $\frac{9}{16}$; $\frac{3b}{c}$ la radi-

ce terza di $\frac{27b^3}{c^3}$; $\frac{7cz}{3x}$ la radice *emmesima* di $\frac{7^m c^m z^m}{3^m x^m}$.

La quantità a , ovvero a^1 si chiama anche *potenza lineare*; a^2 dicesi anche *quadrato*; a^3 *cubo*; così la radice seconda chiamasi anche radice *quadra*; e la terza, radice *cuba*: nomi presi dalla Geometria.

134. Essendo la radice della potenza seconda una quantità che moltiplicata in sè stessa rende quella potenza, ne segue che se la quantità c , ovvero c^1 si prende per una potenza seconda, dovrà la sua radice esser tale che moltiplicata in sè medesima renda c^1 . In due maniere s'indica que-

sta radice seconda di c , col segno $\sqrt{}$ posto avanti alla c , ovvero col dare alla stessa c l'esponente $\frac{1}{2}$, o col dividere

per 2 l'esponente 1 ch'essa ha; così $\sqrt{c}$, ovvero $c^{\frac{1}{2}}$ indi-

ca la radice seconda o quadra di c : onde $\sqrt{c} \times \sqrt{c} = c$;

$c^{\frac{1}{2}} \times c^{\frac{1}{2}} = c$. Nello stesso modo riguardando c come una po-

tenza terza, o come un cubo, con $\sqrt[3]{c}$, ovvero $c^{\frac{1}{3}}$ se ne

rappresenta la sua radice terza o cuba: onde $\sqrt[3]{c} \times \sqrt[3]{c} \times \sqrt[3]{c}$

$= c^1 = c$; $c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{1}{3}} = c^1 = c$; $\sqrt[n]{c}$, ovvero $c^{\frac{1}{n}}$ indica

la radice ennesima di c , ovvero quella quantità che moltiplicata $n - 1$ volte per sè medesima rende per prodotto la

stessa c . Generalmente la radice ennesima di una potenza c^m , cioè quella quantità che moltiplicata $n - 1$ volte per

sè medesima rende c^m , s'indica con $\sqrt[n]{c^m}$, ovvero $c^{\frac{m}{n}}$; co-

sì $\sqrt[2]{c^3} \sqrt[2]{c^3} = c^{\frac{6}{2}} = c^3$. Il segno $\sqrt{}$ chiamasi *radicale*; il nume-

ro posto sopra di esso, *esponente*, *indice* o *grado* del radicale; ordinariamente quando si tratta della radice quadra, il 2 sul

radicale non si scrive, ma vi si sottintende.

Come per far la potenza di un monomio si fa la potenza di tutti i numeri e lettere che lo compongono, così per estrarne la radice bisognerà estrarla da ciascuno de' suoi numeri e lettere: onde $\sqrt[3]{8c^2b} = (8c^2b)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{c^2} \times \sqrt[3]{b} = 8^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}$

Dunque, giusta questi principj, come gli esponenti interi indicano *alzamento a potenze*, i fratti indicano *estrazioni di radici*.

135. Per indicare la moltiplicazione di una quantità a^1 per sè medesima una, due, tre volte, ecc. basta aggiungere una, due, tre, ecc. unità all'esponente 1, e scrivere a^2 , a^3 , a^4 , ecc.; ora per indicare la divisione di una quantità a per sè medesima una, due, tre volte, ecc. abbiamo convenuto di sottrarre una, due, tre, ecc. unità dall'esponente 1 di a^1 ; si ha dunque $\frac{a^1}{a} = a^{1-1} = a^0 = 1$; $\frac{a^1}{aa} = \frac{a^1}{a^2} = a^{1-2} = a^{-1} = \frac{1}{a}$; $\frac{a^1}{aaa} = \frac{a^1}{a^3} = a^{1-3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; ed in

generale $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Dunque estendendo il nome di potenza per qualunque quantità che abbia un esponente, stabiliremo: *Che la potenza zero di qualunque quantità eguaglia sempre l'unità*, così $c^0 = 5^0 = (3x)^0 = \left(\frac{4xy}{z}\right)^0 = 1$.

Che la potenza negativa significa l'unità divisa per quella stessa potenza, ma positiva; che la potenza fratta indica sempre una radice dello stesso nome, e di qui segue, I.° che non si altera una quantità moltiplicandosi per un'altra elevata alla potenza zero; II.° che in una frazione le lettere del numeratore possono passarsi nel denominatore e inversamente, purchè si cangino i segni ai loro esponenti; III.° che i segni radicali possono cangiarsi in esponenti fratti e inversamente.

136. Se si hanno due potenze intere della stessa quantità, come a^m , a^n , da moltiplicarsi tra loro, basta scrivere a con la somma dei due esponenti $m+n$; si avrà così $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; di fatto $a^3 \cdot a^2 = aaa \cdot aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}$, ed è facile generalizzare la dimostrazione. Questa regola ha luogo ancora e si verifica qualunque siano la potenze negative o fratte; di fatto

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}; \quad a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n},$$

e se $n = m + p$, ovvero se $m = n + p$, si ha $a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1}{a^p} = a^{-p} = a^{m-n}$; ovvero $a^m \cdot a^{-n} = \frac{a^{n+p}}{a^n} = a^p = a^{m-n}$;

e per le potenze fratte $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{e}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^e} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^e} = \sqrt[n]{a^{m+e}} = a^{\frac{m+e}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{e}{n}}$. Così $c^{-2} \cdot c^{-5} = c^{-7}$; $c^{\frac{1}{4}} \cdot c^{\frac{2}{4}} = c^{\frac{3}{4}}$.

137. Per elevare una quantità, che ha già un esponente, a potenza, altro non si fa che moltiplicare quell' esponente pel grado della potenza; onde a^2 elevato alla terza potenza è $a^{2 \cdot 3} = a^6$; $(a^{-2})^3 = a^{-6}$; in generale $(a^m)^n = a^{mn}$. Se non fosse così, dal risultamento a^{mn} estraendo la radice ennesima dello stesso grado della potenza, ciò che si fa col dividere l'esponente mn per n (234), non ritornerebbe la quantità a^m . Così si ha $a^{\frac{3}{5}}$ elevato alla terza potenza

$$= a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{9}{5}} = a^{\frac{3 \cdot 3}{5}} \text{ e } \sqrt[3]{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{9}{5 \cdot 3}} = a^{\frac{3}{5}}.$$

138. Raccogliamo insieme le regole per calcolare le potenze della stessa quantità. La somma e la sottrazione si fanno al solito; ecco le altre operazioni.

I.° Si moltiplicano due potenze col dar per esponente alla lettera comune la somma degli esponenti.

$$\text{Così } m^3 \cdot m^5 = m^8; \quad 5^{-3} \cdot 5^2 = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$$

II.° Si dividono col dar per esponente alla lettera comune la differenza tra gli esponenti del dividendo e del divisore.

$$\text{Così } c^7 : c^5 = c^{7-5} = c^2; \quad p^{\frac{1}{2}} : p^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{6}};$$

$$4 : 4^3 = 4^{1-3} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2}.$$

III.° Si alzano alla potenza moltiplicando il loro esponente pel dato: così c^2 alla terza diviene $c^{2 \cdot 3} = c^6$; a^m all'ennesima diviene a^{mn} .

IV.° Se ne estrae una data radice dividendo il loro e-

esponente per quello della radice; così $\sqrt[n]{c^6} = c^{\frac{6}{n}} = c^2$; $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$ e la potenza emmesima di $a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{nm}{m}} = a^n$.

Siamo ora nel caso di far qualunque moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza ed estrazioni di radici, di monomj. Così

$$\begin{aligned} \frac{3x^2a^3}{5cb^2} \times \frac{15x^3b^4}{7a^4c} &= \frac{3 \cdot 15x^5a^3b^4}{5 \cdot 7a^4b^2c^2} = \frac{9x^5a^{3-4}b^{4-2}}{7c^2} = \frac{9x^5a^{-1}b^2}{7c^2} \\ &= \frac{9x^5b^2}{7ac^2}; \left(\frac{5ab^3}{7ce^2}\right)^3 = \frac{5^3a^3b^9}{7^3c^3e^6} = \frac{125a^3b^9}{343c^3e^6} = \frac{125}{343} a^3 b^9 c^{-3} e^{-6} \\ &= \frac{125c^{-3}e^{-6}}{343a^{-3}b^{-9}}; \sqrt[3]{2^6a^3b^9} = 2^{\frac{6}{3}} a^{\frac{3}{3}} b^{\frac{9}{3}} = 2^2 ab^3 = 4ab^3; \sqrt[5]{ab^2c^8} = \end{aligned}$$

$$a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{8}{5}}; \sqrt[4]{a^4b^3c^2} = a^{\frac{4}{4}} b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{2}{4}} = a^1 b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{\frac{4ch}{9e^2}} = \frac{2c^{\frac{1}{3}}h^{\frac{1}{3}}}{3e^{\frac{2}{3}}}.$$

139. Per prendere il radicale di una quantità, se ne divide l'esponente pel grado della radice: ora quando questa divisione riesce senza resto, la radice si chiama *razionale* o *commensurabile*; e nel caso diverso chiamasi *irrazionale*, *incommensurabile*, ed anche *sorda*.

La formola delle radici razionali è $\sqrt[n]{a^{mn}}$, perchè $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$; e $\sqrt[n]{a^{mn+p}}$, essendo $p < n$; è la formola delle

irrazionali, perchè $\sqrt[n]{a^{mn+p}} = a^{\frac{m+p}{n}}$.

140. Le quantità sotto i segni radicali le abbiamo sinora considerate positive. Se fossero negative, ecco cosa succede. Se il primo termine della serie delle potenze (133) fosse negativo $-a$, essa diverrebbe $-a, +a^2, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -$ ecc., dal che si vede che le potenze pari sono sempre positive, qualunque sia la radice positiva o negativa. Segue di qui che le quantità negative non potranno esser considerate come potenze pari, nate dalla moltiplicazione di una quantità negativa per sè medesima: sarà dunque impossibile avere una radice di grado pari d'una quantità negativa. Per ciò le espressioni di questa forma

$\sqrt[2n]{-a}$, ovvero $(-a)^{\frac{1}{2n}}$, ove n è intero, diconsi *immaginarie*: $\sqrt{-3c}$; $\sqrt[4]{-a^2c^5}$; $\sqrt{-2}$ sono altrettanti *immagj*; le altre radici non immaginarie diconsi *reali*.

141. Come agl' interi si può dar la forma di rotti, ed i rotti cangiarsi di aspetto, senza che il lor valore si alteri, così gli esponenti, senza cangiar di valore, prender potranno diverse forme, e quindi le potenze diverso aspetto.

$$\text{Così } a^1 = a^{\frac{2}{2}} = a^{\frac{3}{3}} = a^{\frac{m}{m}} = \sqrt[2]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[m]{a^m};$$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mh}{nh}} = \sqrt[nh]{a^{mh}}$; onde alle quantità razionali si può dare la forma di radicali del grado che si vuole. Se si hanno adunque diverse potenze, possono tutte ridursi allo stesso grado, riducendo i loro esponenti a rotti dello stesso

denominatore; così $a^2 + 3b \sqrt[3]{c} + 2 \sqrt[3]{e^n} = a^2 + 3bc^{\frac{1}{3}} + 2e^{\frac{n}{3}}$

$= a^{\frac{12}{6}} + 3^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} c^{\frac{2}{6}} + 2^{\frac{6}{6}} e^{\frac{3n}{6}} = \sqrt[6]{a^{12}} + \sqrt[6]{3^6 b^6 c^2} + \sqrt[6]{2^6 e^{3n}}$. Si vede pertanto come in una espressione qualunque i radicali di grado diverso ridur si possono allo stesso. I radicali si riducono anche a minor espressione, come i rotti improprij ed

interi e rotti; così $3 \sqrt[3]{a^3} = 3a^{\frac{3}{3}} = 3a^{1+\frac{1}{3}} = 3a \sqrt[3]{a}$; $2 \sqrt[3]{2500} [= 2 \sqrt[3]{4 \cdot 5^4}] = 2 \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}} = 2 \cdot 5 \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 10 \sqrt[3]{20}$.

142. Questi cangiamenti di forme alle potenze sono specialmente utili per rendere talvolta più semplici i risultamenti della somma, della sottrazione, della moltiplicazione, della divisione, dell' elevamento a potenza, e dell' estrazione di radici delle quantità monomie o polinomie, le quali contengano radicali; operazioni che si fanno nel modo stesso che indicammo per le ordinarie quantità algebriche.

Così per sommare $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $2 \sqrt[3]{a}$, $-3 \sqrt[3]{b}$, si fa $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + 2 \sqrt[3]{a} - 3 \sqrt[3]{b} = 3 \sqrt[3]{a} - 2 \sqrt[3]{b}$; per sottrarre $5 \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2b}$ da $3 \sqrt[3]{2b} + 6 \sqrt[3]{7} - 4x \sqrt[3]{y}$, si fa $3 \sqrt[3]{2b} + 6 \sqrt[3]{7} - 4x \sqrt[3]{y} - 5 \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{2b} = 4 \sqrt[3]{2b} + \sqrt[3]{7} - 4x \sqrt[3]{y}$. Per la moltiplicazione si ha $3 \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \times 4 \sqrt[3]{\frac{a^3}{b}} = 12 \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \sqrt[3]{\frac{a^3}{b}} = 12 \sqrt[6]{\frac{a^2}{b^2}} \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^3}} = 12 \sqrt[6]{\frac{a^{11}}{b^5}} = 12 a \sqrt[6]{\frac{a^5}{b^5}}$.

143. Anche sopra le quantità immaginarie si fanno le operazioni algebriche che abbiamo insegnate sulle quantità reali; anzi talvolta in queste operazioni esse perdono il carattere d'immaginario. Siccome poi qualunque immaginario

$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$, così basterà insegnare a trattare

$\sqrt{-1}$. Ora $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \{\sqrt{-1}\}^2 = \{(-1)^{\frac{1}{2}}\}^2 = (-1)^1 = -1$;

$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$;

$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \cdot -1 = 1$;

$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 1 \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$

ecc.; e per la divisione $\sqrt{-1} : \sqrt{-1} = 1$.

Si voglia adesso moltiplicare $a + b\sqrt{-1}$ per $a - b\sqrt{-1}$, ed avremo $a^2 - ab\sqrt{-1} + ab\sqrt{-1} - b^2\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = a^2 + b^2$, e gl'immaginarj sono spariti.

Osserviamo sino di qui che, considerata l'unità come un quadrato, essa ha due radici seconde $+1, -1$, poichè $1 \cdot 1 = 1, -1 \cdot -1 = 1$, e quindi si ha $\sqrt{1} = 1$, ovvero $\sqrt{1} = -1$. Si badi ora di non concluderne $-1 = 1$; tanto -1 quanto 1 producono, moltiplicati in sè stessi, il medesimo quadrato 1 ; ma non segue che essi siano eguali prima di questa moltiplicazione.

Considerata l'unità come quarta potenza, essa [ha quattro radici quarte, cioè $+1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$, poichè $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 = 1, \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 1, -\sqrt{-1} \cdot -\sqrt{-1} \cdot -\sqrt{-1} \cdot -\sqrt{-1} = 1$, e quindi $\sqrt[4]{1} = 1$, ovvero $\sqrt[4]{1} = -1$, ovvero $\sqrt[4]{1} = \sqrt{-1}$, ovvero $\sqrt[4]{1} = -\sqrt{-1}$.

Considerata poi come cubo, ha tre radici terze. La prima è $+1$, ma le altre due non si vedono così facilmente come le seconde e le quarte, e per averle conviene fare il cubo di un binomio, della qual cosa parliamo nel capo seguente (146).

CAPO VI.

DELLE POTENZE DEI POLINOMJ.

144. La potenza emmesima di qualunque polinomio $a + b + c + d + \text{ecc.}$ s'indica in uno di questi due modi: $(a + b + c + d + \text{ecc.})^m$, ovvero $\overbrace{a + b + c + d + \text{ecc.}}^m$; e quest'espressione significa il prodotto di quel polinomio moltiplicato in se stesso $m - 1$ volta. Incominciamo dal binomio elevato alla potenza m , cioè da $(a + b)^m$, nel quale a, b significano due quantità qualunque, e sia $m = 2$; si

avrà allora $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$; ora a^2 è il quadrato del primo termine del binomio; $2ab$ è il doppio prodotto di questo primo termine pel secondo; b^2 è il quadrato del secondo: dunque concluderemo: *Il quadrato di un binomio qualunque contiene tre termini, cioè, 1.º il quadrato del primo termine; 2.º il doppio prodotto del primo nel secondo; 3.º il quadrato del secondo.*

Questa regola non soffre alcuna eccezione; ecco come l'algebra s'innalza a risultamenti generali, mentre l'aritmetica non vi giunge che per analogia, andando d'esempio in esempio.

Quanto ai segni sono essi tutti positivi, se i termini del binomio hanno lo stesso segno; se lo hanno diverso, il solo doppio prodotto è negativo.

Dopo ciò è facile vedere che il quadrato di $ax + yz$ è $a^2x^2 + 2axyz + y^2z^2$; così $(3mn - 4m^2)^2 = 9m^2n^2 - 24m^3n + 16m^4$, $(x + \frac{1}{2}a)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$.

145. OSSERVAZIONE. Per compire il quadrato di un binomio, quando si hanno già i due primi termini di questo quadrato, basta aggiungere loro il quadrato della metà del *coefficiente totale* del secondo termine. (Chiamo così tutto ciò, sia in cifre, sia in lettere, che moltiplica in questo secondo termine la quantità, la quale è radice del primo.) Se avessi, per esempio, $x^2 + 2ax$ da compire, prenderei la metà di $2a$, coefficiente totale del secondo termine $2ax$, ed aggiungerei il suo quadrato a^2 agli altri due termini $x^2 + 2ax$: avrei allora $x^2 + 2ax + a^2$ quadrato perfetto del binomio $x + a$. Per compire il quadrato $x^2 + ax$ basta aggiungervi $\frac{a^2}{4}$, e si ha $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$; per compire $x^2 - \frac{b^2x}{p}$ basta aggiungervi $\frac{b^4}{4p^2}$, e si ha $x^2 - \frac{b^2x}{p} + \frac{b^4}{4p^2} = \left(x - \frac{b^2}{2p}\right)^2$.

146. Se $m = 3$, allora il binomio $a + b$ debb'essere moltiplicato due volte per sè medesimo per darci il cubo $(a + b)^3$. Si ha quindi $(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; donde si ricava *Che il cubo di un binomio qualunque contiene quattro termini: 1.º il cubo del primo termine del binomio; 2.º il triplo del quadrato di questo primo termine moltiplicato pel secondo; 3.º il triplo del qua-*

drato del secondo moltiplicato pel primo; 4.^o il cubo del secondo.

Quanto ai seguiti, essi sono tutti positivi quando quei del binomio lo sono, come mostra la formola superiore. Quando i due segni del binomio sono negativi, anche tutti quei del cubo lo sono; così

$$(-m-2n)^3 = -m^3 - 6m^2n - 12mn^2 - 8n^3;$$

$$(-a-1)^3 = -a^3 - 3a^2 - 3a - 1.$$

Quando dei due termini del binomio uno è negativo, quei del cubo sono alternativi: ed i termini negativi sono quei che contengono le potenze impari della parte del binomio dotata del segno $-$; così

$$(-p+q)^3 = -p^3 + 3p^2q - 3pq^2 + q^3;$$

$$(2ax-x^2)^3 = 8a^3x^3 - 12a^2x^4 + 6ax^5 - x^6.$$

Se un termine del binomio è immaginario, i segni cambiano dopo due termini; così

$$\begin{aligned} (a+b\sqrt{-1})^3 &= a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} \\ &= a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Rispetto a questo ultimo cubo osservo che se si fa $b = a\sqrt{3}$, ovvero $b = -a\sqrt{3}$, svaniscono gl'immaginarj, ed otteniamo $(a+a\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1})^3 = a^3 - 9a^3$, come pure $(a-a\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1})^3 = a^3 - 9a^3$. Facendo ora $a = -\frac{1}{2}$, ci viene $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})^3 = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} = 1$;

$$(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})^3 = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} = 1.$$

Di qui si ricava $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{1}$; $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{1}$; e

queste sono le altre due radici terze dell'unità, delle quali si è parlato (143).

147. Le regole per formare il quadrato ed il cubo di un binomio ci danno il mezzo di dimostrare due eleganti proprietà dei quadrati e dei cubi dei numeri naturali. Prendendo le differenze dei termini consecutivi della serie (Q) dei quadrati (131), si ha la serie 3, 5, 7, 9, 11, 13 ecc. di quelle differenze, ed esse sono tali che una supera sempre di 2 quella che precede. Che ciò debba succedere, si dimostra così: Siano $a, a+1, a+2$ tre numeri interi consecutivi, ed i loro quadrati saranno a^2, a^2+2a+1, a^2+4a+4 . Sottraendo poi il primo dal secondo, il secondo dal terzo, si hanno due differenze consecutive $2a+1, 2a+3$, delle quali la seconda supera la prima di 2, qualunque sia a .

Se noi ora prendiamo le differenze dei termini consecutivi della serie (C) dei cubi (131), si ha la serie 7, 19, 37, 61, 91, 127 ecc., i termini della quale non pare che

serbino alcuna regola; ma prendendo la differenza di questi termini consecutivi, si forma la serie 12, 18, 24, 30, 36 ecc.; ciascuno dei numeri che la compongono supera di 6 quello che lo precede.

Indicando per a , $a+1$, $a+2$, $a+3$ quattro numeri interi consecutivi, le differenze dei loro cubi sono $3a^2+3a+1$; $3a^2+9a+7$; $3a^2+15a+19$. E se togliamo la prima differenza dalla seconda, la seconda dalla terza, si hanno i due numeri $6a+6$, $6a+12$, dei quali il secondo supera il primo di 6, qualunque sia a .

148. Se $m=4$, $(a+b)^4$ indicherà la quarta potenza del binomio, e questo avrà cinque termini:
 $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Se $m=5$, si avrà
 $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, e questa potenza conterrà sei termini. Generalmente una potenza conterrà sempre un termine di più del numero indicato dal di lei esponente (*).

Ma quale sarà ella la formola generale di una qualunque potenza $(a+b)^m$? Newton soddisfece a questa importante ricerca, e questa sola scoperta sarebbe bastata per immortalarlo, s'ei non avesse avuto mille altri titoli maggiori di gloria.

149. Una potenza qualunque di un binomio algebrico contenendo segni, coefficienti, lettere ed esponenti, le quali cose tutte formano i di lei termini, è necessario primieramente avere delle regole generali per queste diverse parti.

Queste regole sonosi ricavate dall'esame della forma delle potenze fatte qui sopra; ed avendo osservato che si mantenevano giuste per qualunque potenza che si facesse effettivamente con la moltiplicazione, abbiamo per analogia concluso che debbono conservarsi vere nelle potenze di qualunque grado.

(*) In tutte queste potenze si osservi che dopo il massimo coefficiente ritornano gli stessi coefficienti precedenti, ma con ordine inverso. Si renderà evidente che ciò dev'essere così, se si rifletta che se avessimo preso il binomio $b+a$ in vece di $a+b$, avremmo ottenute le medesime potenze scritte con ordine inverso, in modo che l'ultimo termine diventerebbe il primo, il penultimo il secondo, ecc. Questa osservazione ci toglie la metà della fatica; perchè basta giungere nelle potenze pari sino al coefficiente medio, e nelle dispari fino al primo de' due medj, gli altri essendo i coefficienti già ritrovati presi inversamente (Paoli, elem. P. I, cap. IV, num. 18).

1.° La regola pei segni non ha difficoltà. Se ambi i termini del binomio sono positivi, tutti quei della potenza sono positivi; se ambi i termini del binomio sono negativi, per le potenze pari tutt' i termini sono positivi; e per le impari, tutti negativi; se uno dei termini del binomio è positivo, l' altro negativo, i termini della potenza sono alternativi, avendo il segno — quei termini ove trovansi le potenze dispari della quantità negativa del binomio.

2.° La regola per le lettere è questa: il primo ed ultimo termine sono formati dalla prima e dall' ultima lettera del binomio rispettivamente, e gli altri termini le contengono ambedue moltiplicandosi tra loro.

3.° Quella per gli esponenti c' insegna che il primo termine di tutte le potenze, alle quali s' innalza un binomio, è formato dalla prima parte di questo binomio elevato alla potenza di cui si tratta; che nei termini seguenti l' esponente di questa prima parte diminuisce successivamente di un' unità, mentre l' esponente della seconda aumenta colla stessa regola; che in fine questa diminuzione gradatamente continua sino all' ultimo termine, ove la seconda parte del binomio resta sola con un esponente eguale a quello della potenza dimandata.

Così la potenza sesta di $p - q$, astraendo dai coefficienti, è $(p - q)^6 = p^6 - p^5q + p^4q^2 - p^3q^3 + p^2q^4 - pq^5 + q^6$.

La regola dei coefficienti si ricava dal considerare i coefficienti nelle prime potenze.

$$1.^a \dots a + b$$

$$2.^a \dots a^2 + 2ab + b^2$$

$$3.^a \dots a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4.^a \dots a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$5.^a \dots a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Il coefficiente nel primo termine in tutte queste potenze è l' unità;

Quello del secondo è sempre eguale al grado della potenza;

Quello del terzo eguaglia la metà del prodotto di quello del secondo moltiplicato per l' esponente, che ha la lettera a nello stesso secondo;

Quello del quarto è eguale alla terza parte del prodotto di quello del terzo moltiplicato per l' esponente, che ha l' a nel terzo medesimo;

Il coefficiente del quinto è eguale a $\frac{1}{4}$ del prodotto di

quello del quarto moltiplicato per l' esponente di a nel quarto stesso, e così via via.

150. Con queste regole formando i coefficienti delle potenze di gradi più elevati, si hanno gli stessi risultamenti appunto che si otterrebbero con la moltiplicazione: così

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \frac{5 \cdot 4}{2} a^3b^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3} a^2b^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} a b^4 \\ + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} b^5;$$

$$(p+q)^7 = p^7 + 7p^6q + \frac{7 \cdot 6}{2} p^5q^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} p^4q^3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^3 q^4 \\ + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^2q^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} pq^6 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} q^7 \\ = p^7 + 7p^6q + \frac{7 \cdot 6}{2} p^5q^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} p^4q^3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} p^3 q^4 \\ + \frac{7 \cdot 6}{2} p^2q^5 + 7pq^6 + q^7.$$

Noi quindi per analogia stabiliremo che queste stesse leggi sian vere per qualunque potenza intera $(a+b)^m$, onde la formola per rappresentare lo sviluppo di qualunque potenza emmesima del binomio sarà

$$(a \pm b)^m = a^m \pm ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}b^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4}b^4 \dots$$

e così sino all' ultimo termine che avrà questa forma

$$\pm \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-(m-1))}{2 \cdot 3 \dots m} b^m.$$

Questa è la celebre formola del *binomio di Newton*.

151. Ella si può dimostrare anche senza l' analogia in questa guisa. Essendo n un numero intiero e determinato, supponiamo d' aver ottenuto con le successive moltiplicazioni

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3}b^3$$

+ ecc.,

io dico che essendo vera questa equazione (come di fatto è, giacchè l'abbiamo supposta venuta dalla effettiva moltiplicazione), sarà tale e si conserverà legittima se in vece di n poniamo $n+1$; che sarà cioè $(a+b)^{n+1} = a^{n+1}$

$$+ (n+1) a^n b + \frac{(n+1)n}{2} a^{n-1} b^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \text{ecc.}$$

In fatti se moltiplichiamo il valore di $(a+b)^n$ per $a+b$; otterremo la potenza $(a+b)^{n+1}$, la quale sarà $(a+b)^{n+1}$

$$= a^{n+1} + n a^n b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \text{ecc.}$$

$$+ a^n b + n a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^3 + \text{ecc.}$$

$$\text{Ora } \frac{n(n-1)}{2} + n = \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) n = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{n-2}{3} + 1 \right) \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 3} \text{ ecc. ; dunque sostituendo}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (n+1) a^n b + \frac{(n+1)n}{2} a^{n-1} b^2 +$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \text{ecc.}$$

$$\text{Ora la formola } (a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \text{ecc.}$$

essendo vera quando in essa si pone $n+1$ in vece di n , lo sarà ancora quando si pone $n+2$ in vece di $n+1$; quando si pone $n+3$ in vece di $n+2$; ed in generale sarà vera per qualunque numero m indeterminato, purchè sia intero e positivo.

152. La generalità di questa formola è tale ch'essa è vera ancora qualunque sia m anche negativo o fratto; ma la dimostrazione della verità di essa in questi casi non può avervi senza ulteriori dottrine di analisi. Noi dunque la supporremo, ed i nostri lettori ne vedranno la dimostrazione nell'introduzione al calcolo sublime.

153. La formola del binomio di Newton serve anche pei

polinomj: così si ha $(a+b+c)^2 = (a+p)^2$, facendo $p=b+c$, quindi $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ap + p^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$. Onde il quadrato del trinomio ha sei termini: *I tre quadrati dei termini del trinomio, e i tre doppj prodotti dei medesimi termini presi due a due.*

Si ricaverà di qui come può farsi qualunque potenza di qualunque polinomio.

154. Posta $m=-m$ nella formola del binomio (150), si ha

$$(a+b)^{-m} = \frac{1}{(a+b)^m} = a^{-m} - ma^{-m-1}b + \frac{m(m+1)}{2} a^{-m-2}b^2$$

— ecc.

$$= \frac{1}{a^m} - m \frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^{m+3}}$$

+ ecc.,

ed in questo caso la formola non si termina mai.

Si faccia $m=1$, e sarà

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \text{ecc.}$$

$$= \frac{1}{a} \left\{ 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \text{ecc.} \right\}.$$

È questa la medesima serie che la divisione (107) ci ha data per lo sviluppo di una frazione in serie. Ciò prova l'esattezza del binomio di Newton anche nel caso delle potenze negative, e ci mostra che nella formola del binomio si ha un altro metodo per lo sviluppo delle frazioni in serie più facile e sollecito del primo.

Per qualche esercizio facciamo lo sviluppo delle potenze emmesime dei due binomj $(a+b\sqrt{-1})^m; (a-b\sqrt{-1})^m$; in oltre ci sarà utile per l'avvenire. Avremo pertanto

$$\begin{aligned}
 (a \pm b \sqrt{-1})^m &= a^m \pm m a^{m-1} b \sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 \\
 &\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \sqrt{-1} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 \\
 &\pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 \sqrt{-1} - \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

E ponendo

$$M = a^m - \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 - \text{ecc.}$$

$$N = m a^{m-1} b - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m \dots (m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 - \text{ecc.}$$

avremo

$(a + b \sqrt{-1})^m = M + N \sqrt{-1}$; $(a - b \sqrt{-1})^m = M - N \sqrt{-1}$; e di qui si ricava che la somma delle due quantità immaginarie $(a + b \sqrt{-1})^m + (a - b \sqrt{-1})^m$ è $+M + N \sqrt{-1} + M - N \sqrt{-1} = 2M$, cioè ad una quantità reale.

Se la potenza m è numero fratto, M , N sono serie composte di un numero infinito di termini.

CAPO VII.

DELLE RADICI DEI POLINOMJ E DELLE RADICI

DEI NUMERI.

155. **L'**ESTRAZIONE delle radici è l'operazione inversa della formazione delle potenze: in questa si cerca il prodotto d'una quantità per se stessa; in quella si ha il prodotto e si cerca la quantità o radice. Ella è facile a trovarsi nelle quantità algebriche commensurabili; e poichè si è dato il metodo pei monomj, resta a darlo pei polinomj.

156. Sia la quantità $a^2 - 2ax + x^2$ di cui si cerca la radice quadra. Se questa quantità di tre termini è un quadrato perfetto, la sua radice sarà un binomio (144); il primo dei tre termini sarà il quadrato della prima parte del binomio; il secondo sarà il doppio prodotto delle due parti; il terzo sarà il quadrato della seconda parte. Troverò dunque la prima prendendo la radice quadra di a^2 . Ora

$\sqrt{a^2} = a$; scrivo dunque a in radice. Sottratto il suo quadrato a^2 dalla quantità proposta, mi resta $-2ax + x^2$.

Ma perchè $2ax$ debb'essere il doppio prodotto della prima parte a della radice nella seconda, si conoscerà questa seconda dividendo $-2ax$ pel doppio di a , cioè per $2a$: il quoziente è $-x$ che scrivo non solo in radice, ma anche accanto al divisore $2a$; e se $-x$ è la seconda parte della radice, moltiplicando $-x$ per tutta la quantità $2a-x$, e sottraendo il prodotto dal primo avanzo $-2ax + x^2$, non debb'esservi resto: di fatto così avviene, onde $a-x$ è la radice cercata; ma potrebbe esser anche $-a+x$, perchè anche

$$\begin{array}{r} \text{Rad. } a-x \\ \hline a^2 - 2ax + x^2 \\ - a^2 \\ \hline 0 - 2ax + x^2 \\ / \quad + 2ax - x^2 \\ \hline 2a-x \\ 0 \end{array}$$

$$(-a+x)(-a+x) = x^2 - 2ax + a^2.$$

157. E questa (sia detto di passaggio) è l'origine dell'*ambiguità del radicale quadrato*, il quale, come si vede, è suscettibile egualmente del segno $+$ e del segno $-$. Di fatto troveremo spesso l'occasione di dargli il doppio segno $\pm$, che si pronunzia *più o meno*, e che sempre è sottinteso quando non si scrive: così $\sqrt{c^2}$ equivale a $\pm \sqrt{c^2}$, cioè vale egualmente $+c$ e $-c$, senza che possa prendersi l'un valore piuttosto che l'altro, se pure lo stato della quistione non esclude uno dei due valori; e lo escluderebbe di fatto, se si sapesse che il quadrato c^2 è nato da $+\times +$; o da $-\times -$; poichè in tal caso la radice sarebbe solamente $+c$ ovvero $-c$.

158. Quando le quantità sono semplici, come $a^2 - 2ax + x^2$, basta un'occhiata per vedere se hanno una radice esatta o no; in altro caso si ordini la data quantità, e si osservi se abbia termini incompatibili con un *quadrato perfetto*; non è difficile il conoscerli dai coefficienti, dagli esponenti, dai segni ecc. (144): così $2a^2 + 2ab + b^2 \dots c^4 - 2c^2d^2 - d^4 \dots nm^3 - m^2n^2 + 1$ non sono quadrati perfetti, ed è superfluo cercarne la radice esatta.

159. Osservata almeno la possibilità dell'estrazione richiesta, si procederà come sopra (156), ripetendo le medesime operazioni quante volte bisognerà. Ecco per disteso due altri esempj.

Si cerca la radice quadra di $4p^6 + 16p^3q^2 + 16q^4$.

$$\begin{array}{r}
 \text{Radice} \quad | \quad 2p^3 + 4q^2 \\
 \hline
 \quad \quad 4p^6 + 16p^3q^2 + 16q^4 \\
 \quad \quad - 4p^6 \\
 \hline
 \text{Divisore} \quad 4p^3 + 4q^2 \quad \begin{array}{r} 0 \quad + 16p^3q^2 + 16q^4 \\ - 16p^3q^2 - 16q^4 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}
 \end{array}$$

Sia $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^3 + 2b^2c^3 + c^6$ di cui si vuole la radice quadra.

$$\begin{array}{r}
 \text{Radice} \quad | \quad a^2 - b^2 - c^3 \\
 \hline
 \quad \quad a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^3 + 2b^2c^3 + c^6 \\
 \quad \quad - a^4 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \begin{array}{r} 0 \quad - 2a^2b^2 + b^4 \\ \quad \quad + 2a^2b^2 - b^4 \\ \hline \end{array} \\
 \text{I. Div. } 2a^2 - b^2 \quad \quad \quad \begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad - 2a^2c^3 + 2b^2c^3 + c^6 \\ \quad \quad + 2a^2c^3 - 2b^2c^3 - c^6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \\
 \text{II. Div. } 2a^2 - 2b^2 - c^3
 \end{array}$$

160. Prescindendo da poche accidentalità, si opera sui numeri come sulle lettere; poichè fatto $a = 20$, $b = 6$, sarà $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (20 + 6)^2 = 400 + 240 + 36 = 676$; ma anche $26 \times 26 = 676$; dunque i quadrati e delle quantità algebriche e dei numeri contengono le stesse parti, e però sono soggetti alle stesse regole di estrazione.

161. Le differenze accidentali tra le lettere e i numeri nascono dalla confusione che soffrono le cifre $400 + 240 + 36$, quando si riuniscono in un sol numero 676, con che i quadrati delle parti e i loro doppij prodotti non posson più riconoscersi. Perciò *Il numero, di cui si vuol la radice, si divide in membri di due cifre, cominciando da destra; cosicchè se le cifre sono in numero impari, l'ultimo membro a sinistra è d'una sola cifra.*

162. Di fatto, moltiplicando per sè stesso un numero terminato in uno, due, tre zeri ecc., si ha un prodotto che termina in due, quattro, sei zeri ecc., e però uno zero occupa fino alle decine del prodotto, due zeri fino alle migliaia ecc.; dunque a più forte ragione moltiplicando per sè stesso un numero terminato in *cifre significative*, la prima

di queste occuperà almeno e le unità col suo quadrato, e le decine co' suoi doppij prodotti (143); la seconda occuperà almeno e le centinaja col suo quadrato, e le migliaia co' suoi doppij prodotti ecc. ecc.: la sola ultima cifra non occuperà che un solo luogo del prodotto quando il quadrato di essa, ch'è l'ultimo a formarsi, non supererà la decina anche con le unità che vi si portano. Di quì la divisione del quadrato in membri di due cifre, l'ultimo dei quali può essere di una sola.

163. Ma perchè la prima cifra della radice può occupare talora non solo le decine, ma anche le centinaja, le migliaia ecc. del quadrato, *bisogna cominciare sempre l'estrazione a sinistra*, con che gli eccessi delle cifre si riportano di mano in mano ai loro luoghi come nella divisione. In queste due sole avvertenze l'estrazione numerica differisce dall'algebraica.

164. Vogliasi la radice quadrata di 7873636. Diviso in membri (161) il dato numero, 1.° prendo la radice del maggior quadrato contenuto nel primo membro a sinistra (156, 163); ella è 2 che pongo in radice, e sottratto il suo quadrato da 7 (156), resta 3; 2.° unisco a questo resto il secondo membro 87, onde ho 387; e come in 8 o (computato il resto 3) in 38 dee contenersi il doppio prodotto della prima nella seconda parte della radice, così nel 7 dee trovarsi il quadrato della seconda (162); raddoppio dunque la prima parte 2 (156), e fatto un punto sotto il 7 per escluderlo dalla divisione che sono per fare, divido 38 per 4; il quoziente sarebbe 9 che dovrei scrivere e in radice e accanto al divisore 4 (156) = ma poichè $9 \times 49 > 387$, onde non potrei fare la sottrazione, scemo al solito il quoziente d'una unità, e scrivo 8 e in radice e accanto al divisore 4; tolto 8×48 da 387 (156), resta 3; 3.° unisco a questo resto il terzo membro 36, e fatto un punto sotto 6, raddoppio la radice 28, e per 56 dovrei partir 33; ma la divisione non è possibile, onde scrivo zero in radice ed abbasso l'ultimo membro 36 accanto al resto 336; 3.° fatto un punto sotto l'ultimo 6, raddoppio la radice 280, e per 560 divido 3363; il quoziente è 6 che scrivo e in radice e accanto a 560, e poichè tolto 6×5606 da 33636, nulla resta, la radice esatta del dato numero è 2806.

| Rad. 2806

7, 87, 36, 36

I. Div. 48 / 3 87

II. Div. 56 / 3 36 36

III. Div. 5606 / 000 00

La prova dell'operazione si fa togliendo il 9 da 2806, 2806 che sono i fattori del quadrato, e da 7873636 che debb' esserne il prodotto (24). Ecco delle radici da estrarre per esercizio :

$$\sqrt{4243600} = 2060, \sqrt{30008484} = 5478, \sqrt{76807696} = 8764$$

165. È raro che un numero preso a caso sia un quadrato perfetto. Allora s' indica l' estrazione col segno radicale e si estraе quella parte di radice che si può : così la radice di 108 è $\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$; la radice di 360 è $\sqrt{360} = \sqrt{6^2 \cdot 10} = 6\sqrt{10}$, ecc. Quando poi non occorre molta esattezza, si fa l' estrazione al solito, e si trascura il resto che neppure darebbe un' unità di più per la radice : e se questo voglia pur valutarsi, si aggiungono successivamente due zeri ad ogni resto, ed estraendo la radice, si ha in decimali il valor cercato.

166. Per esempio trovo che 624 è la radice prossima di 389489 col resto 113. Aggiungo due zeri al dato numero, e duplico al solito 624 : indi per 1248 divido 1130, e ho per quoziente zero che scrivo nel primo luogo dei decimali ; aggiungo due altri zeri, duplico 6240, e dividendo per 12480, ho per quoziente 9, ecc.

$$\begin{array}{r} \sqrt{38,94,89,00,00, \text{ ecc.}} \\ 624,09 \text{ ecc.} \\ \hline 38,94,89,00,00, \text{ ecc.} \\ 1248 \swarrow 1130000 \text{ ecc.} \\ 124809 \swarrow 6719, \text{ ecc.} \end{array}$$

167. Si estraе la radice da un rotto estraendola da ciascuno de' suoi termini. Così $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, poichè $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \dots$ $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, poichè $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, ecc. Ma se i due termini del rotto non sono numeri quadrati, s' indica l' estrazione col segno radicale, o si riduce il rotto in decimali, e se ne estraе quindi la radice.

Per estrarre la radice quadra dai decimali, bisogna render pari, se non lo è, il loro numero con degli zeri che già non ne alterano il valore (61) ; quindi s' estraе la radice al solito, e fatta l' operazione, si separa a destra della radice un numero di cifre che sia la metà del numero dei decimali della quantità data : così la radice di 21,935, volendo tre decimali, si ha con estrar la radice di 21,935000, ed è 4,683 : la radice di 0,0054, pure con tre decimali, è 0,073.

168. Si vede da tutto ciò che l' estrazione delle radici dipende dalla divisione, come la formazione delle potenze dalla moltiplicazione (161).

Dell' estrazione della radice cuba.

169. Ragionando sulla natura dei polimonj elevati al cubo, si è trovato il modo di estrarne la radice cuba, come si è fatto per la quadra. Sono però queste regole sì complicate, ed è sì raro di metterle in uso, che appena occorre di apprenderle.

Debba estrarsi la radice cuba di $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$. È chiaro che ella debbe avere due termini (146), il primo dei quali, cioè la radice cuba di a^3 , è a che scrivo; ne formo il cubo, lo sottraggo da a^3 , e mi resta $6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$. Quindi dico: in questo resto dee contenersi il triplo prodotto del quadrato del primo termine a trovato pel secondo che cerco: alzo dunque a al quadrato a^2 , lo triplico, ed ho $3a^2$, per cui divido il resto, dicendo: $\frac{6a^2b}{3a^2} = 2b$; ma

se $+ 2b$ è il secondo termine della radice, la somma del suo prodotto per $3a^2$, del prodotto del suo quadrato per $3a$, e del suo cubo debb' eguagliare il resto della quantità, come appunto avviene; dunque $a + 2b$ è la radice cuba cercata.

170. Pei numeri bisogna conoscere prima i cubi delle cifre semplici. Rad. cub. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Cubi 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729
sui quali ragionando come sui quadrati (162), si trova che bisogna dividere il dato cubo in membri di tre cifre.

Vogliasi la radice cuba di 74088.

Lo divido in membri, ed è chiaro che la radice dovrà aver due cifre. Dico dunque: la più vicina radice cuba del primo membro 74 è 4 che scrivo in radice: sottraggo da 74 il cubo di 4, e ho il resto 10, a cui unisco la prima cifra zero del secondo membro per avere 100 che divido per 48, triplo del quadrato di 4; il quoziente è 2 che però non iscrivo in radice, se prima non trovo in lui le qualità necessarie per esservi cioè sottratto da 100 il prodotto di 2 in 48; ab-

basso allato al resto 4 la seconda cifra 8 del secondo membro, ed ho 48, da cui sottraggo 48, triplo prodotto del quadrato del quoziente 2 per la prima cifra 4; accanto al

$$\begin{array}{r}
 142 \\
 \hline
 74,088 \\
 -64 \\
 \hline
 48 \swarrow 100 \\
 -96 \\
 \hline
 48 \\
 -48 \\
 \hline
 8 \\
 -8 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

resto (che quì è 0) abbasso l'ultima cifra 8 del secondo membro, ed ho 8; e poichè il cubo del quoziente 2 si può sottrarre da 8, nè lascia resto, 2 è la seconda cifra della radice.

Altro esempio che facilmente si intenderà dal precedente.

Volendosi aver riguardo all' avanzo, bisognerebbe cercar dei decimali per radice, e questi si trovano aggiungendo al dato numero tre zeri tante volte quanti decimali si vogliono, e continuando l'estrazione nel modo stesso,

$$\begin{array}{r}
 |174 \\
 \hline
 5,305,472 \\
 -1 \\
 \hline
 43 \\
 3 \swarrow -21 = 3 \cdot 1^2 \cdot 7 \\
 \hline
 220 \\
 -147 = 3 \cdot 1 \cdot 7^2 \\
 \hline
 735 \\
 -343 = 7^3 \\
 \hline
 3924 \\
 867 \swarrow -3468 = 3 \cdot 17^2 \cdot 4 \\
 \hline
 4567 \\
 -816 = 3 \cdot 17 \cdot 4^2 \\
 \hline
 37512 \\
 -64 = 4^3 \\
 \hline
 37448 \text{ resto}
 \end{array}$$

La radice cuba d' un rotto si estrae con estrarla da ciascuno de' suoi termini: così $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, poichè $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, poichè $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Ma se i due termine del rotto non sono numeri cubi, s'indica l'estrazione del segno radicale, estraendo quella parte di radice che si può (141), o si riduce il rotto in decimali, per quindi estrarne la radice.

Per cavar la radice cuba dai decimali, si riduce il dato numero ad avere 3, 6, ovvero 9, ecc. decimali col mezzo degli zeri: quindi se n' estrae la radice come se non vi fosse virgola, e fatta l'operazione, si separa con una virgola a destra della radice un numero di cifre che sia il terzo del numero dei decimali della quantità data: così per cavar la radice cuba da 6,54, volendo tre decimali, metterei sette zeri e caverei la radice cuba da 654000000, che sarà 1870; ne separerei tre cifre, poichè si hanno 9 decimali nel cubo, e avrei 1,870, ovvero 1,87 per radice cuba

di 6,54: così troverei che quella di 0,00006, volendo due decimali, è 0,08.

Del resto per apprendere ad estrarre le radici cube dai numeri vale più assai sentirne spiegare e metter in uso le regole da un maestro, che leggerne sopra un libro una minutissima descrizione.

*Metodo d' estrarre per approssimazione le radici
di qualunque grado.*

171. La formola del binomio di Newton (150); la quale come si è detto (152) è anche vera per le potenze fratte, serve per l'estrazione delle radici che sono potenze frazionarie (134). Essa ci dà però le radici per approssimazione, giacchè quando l'esponente è fratto, è composta di un numero infinito di termini.

Pongasi dunque $\frac{m}{n}$ in luogo di m , e quella formola (150) si cambierà nella seguente:

$$(I) \quad (a \pm b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n} a^{\frac{m-n}{n}} b + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} a^{\frac{m-2n}{n}} b^2 \\ \pm \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} a^{\frac{m-3n}{n}} b^3 + \frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n} a^{\frac{m-4n}{n}} b^4 \\ \pm \text{ecc.}$$

Ecco alcune applicazioni.

Vogliasi la radice quadra di $1 \pm x^2$. Sarà nel nostro caso $a = 1$, $b = x^2$; $m = 1$, $n = 2$, e la formola generale ci darà

$$(1) \quad \dots (1 \pm x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^6}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^8}{8} \\ \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^{10}}{10} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{x^{12}}{12} \pm \text{ecc.}$$

serie che si potrà continuare a piacimento, essendone manifesta la elegantissima legge, per cui i coefficienti sono frazioni che hanno per numeratori i prodotti successivi dei numeri impari, e per denominatori quelli dei numeri pari.

Vogliasi la radice cuba di $1 \pm x^3$, e facendo $a = 1$, $b = x^3$, $m = 1$, $n = 3$, avremo

$$(2) \quad \dots (1 \pm x^3)^{\frac{1}{3}} = 1 \pm \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^6}{6} \pm \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6} \cdot \frac{x^9}{9} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \frac{x^{12}}{12} \pm \text{ec.}$$

serie di cui pure è manifesta la legge; giacchè i numeri che formano i coefficienti e gli esponenti vanno sempre crescendo di 3.

172. Ma per rendere la formola (I) più atta all'estrazione approssimata delle radici gioverà trasformarla come segue. Facciasi $a = c^n$; $\pm b = y$, e dopo qualche riduzione quella formola potrà mettersi sotto la seguente forma:

$$(II) \quad (c^n + y)^{\frac{m}{n}} = c^m \left\{ 1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{y}{c^n} + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} \cdot \frac{y^2}{c^{2n}} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} \cdot \frac{y^3}{c^{3n}} + \frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n} \cdot \frac{y^4}{c^{4n}} + \text{ecc.} \right\}$$

Se $m = 1$, $n = 2$, questa ci dà

$$\sqrt{c^2 + y} = c + \frac{y}{2c} - \frac{y^2}{8c^3} + \frac{y^3}{16c^5} - \frac{5y^4}{128c^7} + \frac{7y^5}{256c^9} - \text{ecc.}$$

Se $m = 1$, $n = 3$, abbiamo

$$\sqrt[3]{c^3 + y} = c + \frac{y}{3c^2} - \frac{y^2}{9c^5} + \frac{5y^3}{81c^8} - \frac{10y^4}{243c^{11}} + \frac{22y^5}{729c^{14}} - \text{ecc.}$$

In queste serie i coefficienti numerici sono queglii stessi delle (1), (2) ridotti; quindi essendo nota la legge, possono continuarsi a piacere. Altre serie particolari per le radici quarte, quinte, ecc. possono dedursi dalla (II).

173. Or ecco come si fa uso di queste formole. Volendo estrarre la radice $(n)^{\text{esima}}$ da un numero proposto A che non è una potenza $(n)^{\text{esima}}$ esatta, si fa $A = c^n + y$, si scompone cioè il numero A in due parti, di cui la prima c^n sia una potenza $(n)^{\text{esima}}$ esatta, e l'altra y un numero qualunque positivo o negativo. Tale scomposizione può farsi in infinite maniere, ma bisogna sempre scegliere quella che dà per l' y , astraendo dal segno, il più piccol numero, perchè altrimenti le serie sarebbero poco convergenti. Così volendo la radice quadra di 8, osservo che $8 = 2^2 + 4 = 3^2 - 1 = 4^2 - 8$, ecc.; ma fra tutte queste maniere colle quali posso ridurre 8 alla forma $c^2 + y$, sceglierei la $3^2 - 1$ per la ragione anzidetta. Fatta questa scomposizione, si conoscono c , y , e la (II), ove facciasi $m = 1$, dà

$$(III) \quad \sqrt[n]{A} = c \left\{ 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{y}{c^n} + \frac{1-n}{n \cdot 2n} \cdot \frac{y^2}{c^{2n}} + \frac{(1-n)(1-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} \cdot \frac{y^3}{c^{3n}} + \text{ecc.} \right\}$$

Il secondo membro non contiene radicali, ma solamente potenze intere che si possono sempre eseguire. Se ne prendano tre, quattro o più termini, trascurando gli altri, e il nu-

mero che sorte dalla riunione de' termini che si ritengono sarà un valore approssimato di $\sqrt[n]{A}$.

Più termini della serie si ritengono, più la radice riesce approssimata; ma se ci annoja il calcolarne molti, e nondimeno bramiamo un' approssimazione inoltrata, possiamo fare così. Sulle prime teniamo conto di due o tre termini solamente, e avremo un numero, che chiamo p , per radice non molto approssimata. Facciamo di questo p la potenza n . e p^n differirà da A , onde sarà $p^n - A = d$; ma potremo conoscere la differenza d . Siccome dunque è anche $p^n - d = A$, potremo ricominciare l' operazione adoperando $p^n - d$ in vece di $c^n + y$, cioè mettendo p in luogo di c , e $-d$ in luogo di y . Questa seconda volta con due o tre termini avremo un' approssimazione assai forte. Così può farsi una terza, una quarta volta ecc.

Vi è un artificio col quale si fanno convergere rapidamente le serie, e che è sempre praticabile con felice successo. Consiste questo nel moltiplicare e dividere insieme il numero di cui si cerca la radice per una potenza esatta dello stesso grado. Si cerca allora la radice del numeratore della frazione nel modo anzidetto, e la serie che ne nasce si divide per la radice del denominatore, la quale secondo l' ipotesi è sempre esatta; per esempio, volendo $\sqrt{2}$, moltiplico e divido 2 pel quadrato 25, ed ho $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \frac{\sqrt{50}}{5}$; cerco dunque la radice di 50, per cui osservo $50 = 7^2 + 1$, scomposizione buonissima per l'uso della formola (III); sarà $\sqrt{2}$ eguale alla serie che ne nasce divisa in tutti i suoi termini per 5. È anche $2 = \frac{9800}{4900} = \frac{99^2 - 1}{70^2}$; quindi

$\sqrt{2} = \frac{1}{70} \sqrt{99^2 - 1}$, trasformazione migliore della precedente.

174. Può anche ottenersi dal binomio di Newton un'altra formola che conduce a serie più convergenti. Si osservi che

$$a + b = \frac{a}{1 - \frac{b}{a+b}}, \text{ onde } (a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left\{ 1 - \frac{b}{a+b} \right\}^{-\frac{m}{n}}, \text{ e svol-}$$

gendo colla formola del binomio

$$(IV) \quad (a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left\{ 1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{m(m+n)}{n \cdot 2n} \left(\frac{b}{a+b} \right)^2 + \frac{m(m+n)(m+2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} \left(\frac{b}{a+b} \right)^3 + \frac{m(m+n)(m+2n)(m+3n)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n} \left(\frac{b}{a+b} \right)^4 + \dots \right\}$$

Da questa si ottiene, dopo le sostituzioni, per $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{(c^n + y)}$ la seguente:

$$(V) \quad \sqrt[n]{A} = c \left\{ 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{y}{A} + \frac{1+n}{n \cdot 2n} \cdot \frac{y^2}{A^2} + \frac{(1+n)(1+2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} \cdot \frac{y^3}{A^3} + \dots \right\}.$$

Mediante questa serie e l'uso del moltiplicatore si ottengono con gran prestezza radici molto approssimate.

Per un esempio, troviamo la radice di $2 = \frac{2 \cdot 70^2}{70^2} = \frac{99^2 - 1}{70^2}$,

e la (V) ci dà

$$\sqrt{2} = \frac{99}{70} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2 \cdot 70^2} + \frac{3}{2^5 \cdot 70^4} - \frac{5}{2^7 \cdot 70^6} + \text{ecc.} \right\}$$

Prendendo pel valore di $\sqrt{2}$ il solo primo termine $\frac{99}{70}$, esso differisce dal vero meno di $\frac{7}{100000}$; prendendo due altri termini e riducendo tutto in decimali, si ha $\sqrt{2} = 1,41421356237\dots$ di cui anche l'ultima decimale è esatta.

CAPO VIII.

RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DEL SECONDO GRADO.

175. **L'** utilità delle dottrine spiegate nei due capitoli precedenti s'incomincia subito a riconoscere, applicandosi alla risoluzione di quei problemi, le condizioni dei quali, scritte in linguaggio algebrico, danno equazioni del secondo grado.

Oltre i due assiomi dei numeri 119, 120, conviene porne un altro per ottenere la risoluzione di queste equazioni, cioè: *Se i membri di una equazione si elevano alla medesima potenza, sia essa intiera, fratta, positiva o negativa, non si altera perciò l'equazione, non cessa cioè il primo di eguagliare sempre il secondo.*

Equazioni del secondo grado.

176. Ogni equazione del secondo grado può rappresentarsi con questa formola $x^2 + px = q$, in cui p e q sono quantità note. Trovata dunque la risoluzione di questa, saranno risolte generalmente tutte l'equazioni del secondo grado. Ora è evidente, 1.^o che per avere in tal caso il valore di x , bisogna estrar la radice quadra dalla equazione $x^2 + px = q$; 2.^o che se $p = 0$, quest'equazione diventa $x^2 = q$, onde (175) $x = \pm \sqrt{q}$; e sostituendo il valor di q , si avrà per x o un numero intero o un rotto approssimato quanto si vuole (166). Questa prima supposizione esige dunque la sola estrazione delle radici numeriche. Il radicale è affetto dal doppio segno a cagione del doppio valore che ha l'incognita (157).

Ma se p non è zero, come succede ordinariamente, bisogna *compiere il quadrato* del primo membro (145), e aggiungere al secondo la stessa quantità. Ora perchè $x^2 + px$ sia un quadrato perfetto, bisogna aggiungere $\frac{p^2}{4}$; dunque

$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$, e perciò (175) $x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$; onde

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

177. Quando q sarà positivo, il radicale sarà quantità positiva, poichè $\frac{p^2}{4}$ è necessariamente positivo (140). Onde

o la sostituzione dei valori di q e di $\frac{p^2}{4}$ produrrà un quadrato (nel qual caso il radicale sarà commensurabile), o darà un numero non quadrato, e il radicale sarà incommensurabile, ma *reale*, e potrà aversi per approssimazione.

Il segno $\pm$ indica che si hanno per x due diversi valori chiamati generalmente *radici dell'equazione*; onde ogni equazione del secondo grado ha due radici; cioè

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}, \text{ ed } x = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

178. Spesso però avviene che queste radici sono *immagi-*

narie. Supponiamo che nella quantità radicale $q + \frac{p^2}{4}$ la quantità q sia negativa. Possono darsi tre casi: 1.° $q < \frac{p^2}{4}$; allora il positivo supererà il negativo, e il resto della sottrazione essendo positivo, il radicale è reale; 2.° $q = \frac{p^2}{4}$; allora il radicale sparirà, e il doppio valor di x si ridurrà a $-\frac{p}{2}$, cioè le due radici dell'equazione $x^2 + px = q$ saranno eguali; 3.° $q > \frac{p^2}{4}$; allora la quantità negativa superando la positiva, il resto sarà negativo; ed il segno radicale conterrà una quantità negativa.

Ora la radice quadra d'una quantità negativa è immaginaria, cioè non è possibile il trovare una quantità che, moltiplicata in sè stessa, dia un prodotto negativo. In fatti, questa quantità sia positiva o negativa, il suo quadrato è sempre positivo (140). Il valore adunque dell'incognita x contiene una quantità che è immaginaria, cioè impossibile ad ottenersi, e che non esiste in natura.

179. Scorsi tutti i casi della risoluzione generale delle equazioni del secondo grado, resta a farne l'applicazione a qualche problema.

I. Trovare un numero tale che il suo settuplo col suo quadrato dia 144.

Chiamo x questo numero; dunque il suo quadrato è x^2 , e la condizione del problema si esprimerà con l'equazione $x^2 + 7x = 144$. Compiendo il quadrato, avrò $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 144 + \frac{49}{4}$, ed estraendo la radice e trasponendo, verrà $x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{144 + \frac{49}{4}}$; riducendo allo stesso denominatore la quantità sotto il segno, trovo $x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4}}$: ma $\sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}$; dunque $x = -\frac{7}{2} \pm \frac{25}{2}$. Preso il segno +, si ha $x = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2} = 9$, e preso il segno -,

si ha $x = -\frac{7}{2} - \frac{25}{2} = -16$. E di fatto il quadrato di 9, $= 81$, con sette volte 9, $= 63$, dà 144; come pure il quadrato di -16 , $= 256$, con sette volte -16 , $= -112$, dà 144. Ecco un esempio della doppia soluzione, di cui l'equazioni del secondo grado sono suscettibili.

180. In vece di far distesamente il calcolo di questo problema, bastava paragonar l'equazione $x^2 + 7x = 144$ con l'equazione generale (176) $x^2 + px = q$, e si sarebbe avuto $p = 7$, $q = 144$; onde, sostituiti questi valori nella formula $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(q + \frac{p^2}{4}\right)}$; sarebbe nato $x = 9$, e $x = -16$.

II. Trovare un numero tale che, sottraendo 2 dal suo quadrato; il resto sia 1.

Sia x il numero cercato, e avremo $x^2 - 2 = 1$, onde trasponendo $x^2 = 3$, ed estraendo la radice $x = \pm \sqrt{3}$: dunque la radice quadra di 3 presa o in $+$ o in $-$ soddisfarebbe al problema con due soluzioni; ma essendo ella inassegnabile, bisognerà contentarsi d'una radice approssimata.

III. Dividere il numero 10 in due parti tali che il loro prodotto sia 100.

È chiara l'impossibilità di questo problema; ma il calcolo la dimostra. Sia $a = 10$, $b = 100$, x una delle parti cercate; l'altra dunque sarà $a - x$, e il loro prodotto $ax - x^2$; onde l'equazione è $ax - x^2 = b$. Trasponendo i due membri per render positivo il quadrato $-x^2$, si avrà $x^2 - ax = -b$. Il paragone di questa equazione con la formula dà $p = -a$, $q = -b$, onde, sostituendo, si avrà $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-b + \frac{a^2}{4}\right)} = 5 \pm \sqrt{\left(-100 + \frac{100}{4}\right)} = 5 \pm \sqrt{-75}$.

Ora la radice d'una quantità negativa è immaginaria (178) ed impossibile ad ottenersi; dunque è impossibile il divider 10 in due parti che moltiplicate facciano 100. Ed ecco come l'algebra risolve tutte le quistioni: ne dà la soluzione, se vi è, e non essendovi, lo fa conoscere: che si può bramar di più?

IV. Alcune persone presero una vettura che le conducesse al loro destino pel prezzo di 342 lire. Fatto il viaggio, tre di queste scapparono senza pagar la loro parte; ma quelle che restarono, per supplire alla mancanza, det-

tero ciascuna 19 lire di più che non avrebbero dovuto dare, e così furono pagate le spese della vettura. Si cerca quanti erano i viaggiatori.

Prima di sciogliere il problema, si osservi che questo ammasso di parole non serve spesso che ad imbrogliarlo. Riduciamolo a' suoi veri termini.

Un numero x di persone debbono pagare per egual porzione la somma di 342 lire. Due non pagando la loro parte, l'altre pagano in loro vece, il che importa a ciascuna 19 lire di più. Qual è il numero x ?

Si dirà dunque: la parte di ciascuno, se tutti avessero pagato, sarebbe stata di $\frac{342^{lire}}{x}$; tre non pagando, la

parte dei rimanenti è $\frac{343}{x-3}$; ma questa aumenta di 19 lire;

dunque l'equazione è $\frac{342}{x-3} - \frac{342}{x} = 19$. Fatte le operazioni

necessarie, si troverà $x^2 - 3x = 54$, e paragonando questo risultato con la formola $x^2 + px = q$, si avrà $p = -3$, $q = 54$

onde $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(54 + \frac{9}{4}\right)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{225}{4}\right)} = \frac{3}{2} \pm \frac{15}{2} = 9$,

ovvero -6 . La prima delle due soluzioni è evidentemente quella che si cerca; la seconda è relativa ad un'altra esposizione del problema. Erano dunque nove i viaggiatori, sei dei quali pagando 57 lire per uno hanno formata la somma di 342 lire.

La radice negativa -6 serve al problema inverso, cioè: Un numero x di persone debbono pagare per egual porzione la somma di 342 lire; sopraggiungono tre altre persone che, pagando la loro parte, diminuiscono di 19 lire la porzione delle prime. Qual è il numero x ? In fatti risolvendo questo problema, si troverebbero le radici $+6$ e -9 .

V. Un generale vorrebbe disporre un corpo di truppe in battaglione quadrato, ma nella sua prima disposizione trova 124 uomini di più, e aggiungendo un uomo ad ogni fila, trova 129 uomini di meno. Qual è il numero delle sue truppe?

Sia $a = 124$, $b = 129$, x il numero dei soldati che formano una fila nella prima disposizione; sarà $x + 1$ il loro numero nella seconda; e poichè la doppia disposizione fu fatta con lo stesso numero di truppe, questo numero sarà

espresso in due maniere, dalle quali risulterà l'equazione $x^2 + a = x^2 + 2x + 1 - b$.

A prima vista si crederebbe questo un problema del secondo grado; ma trasponendo (119), resta $x = \frac{a+b-1}{2}$, for-

mola che con semplici sostituzioni farà conoscere l'incognita in tutt' i casi simili. Qui, per esempio, si troverà che $x = 126$; onde $x^2 = 15876$, e per conseguenza $x^2 + x$, o sia $15876 + 124 = 16000$. Questo generale avea pertanto sotto i suoi ordini 16000 uomini.

181. Ecco qualche problema del secondo grado a due incognite.

VI. Si cercano due numeri tali che il triplo del loro prodotto eguagli e il doppio della loro somma e la differenza dei loro quadrati.

Sia x il più grande dei numeri, y il minore. Per la prima condizione sarà $2(x+y) = 3xy$, e per la seconda $3xy = x^2 - y^2$: onde $2(x+y) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, e perciò $2 = x - y$; $2 + y = x$; questo valore di x , sostituito in $3xy = x^2 - y^2$, dà $4y + 4 = 3y^2 + 6y$, onde (176) si trova $y = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$, ed $x = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$. Questi due numeri soddisfanno alle condizioni del problema.

VII. Il numero degli scudi di A, B è tale che la loro somma sottratta dai loro quadrati fa 78, ma unita al loro prodotto fa 39. Quali sono questi numeri? Li chiamo x ed y , e dalle condizioni del problema ricavo queste due equazioni $x^2 + y^2 - x - y = 78$; $x + y + xy = 39$. Prendendo da questa il valore di y , e sostituendolo nella prima, si viene ad un'equazione di quarto grado $x^4 + x^3 - 77x^2 - 273x + 1404 = 0$, la quale non appartiene in conseguenza a quelle delle quali parliamo.

Un tale inconveniente s'incontra, generalmente parlando, in tutti i problemi i quali dipendono dalla risoluzione di due equazioni di secondo grado di questa forma

$$x^2 + ay^2 + byx + cx + ey = m; \quad x^2 + fy^2 + gxy + hx + ly = n:$$

talvolta però la natura loro è tale che facilmente da esse si può dedurre un'equazione ad un'incognita sola del secondo grado, come avveniva nel problema VI; e talvolta si può istituire la ricerca del problema in tal modo che le equazioni cui si giunge abbiano il su indicato pregio. Per esempio, nel problema superiore sia $2x$ la somma dei due

numeri cercati; $2y$ la loro differenza; dunque (124) il maggiore sarà $x+y$, il minore $x-y$. Si avrà perciò, I.^o $(x+y)^2 + (x-y)^2 - 2x = 78$, cioè $x^2 + y^2 - x = 39$; II.^o $(x+y)(x-y) + 2x = 39$, ossia $x^2 - y^2 + 2x = 39$. Sommando le due equazioni, verrà $2x^2 + x = 78$, che risolta dà $x = -\frac{1}{4} + \frac{25}{4} = 6$, onde $y^2 = 39 + x - x^2 = 9$, $y = 3$, e

i numeri cercati $x+y=9$, $x-y=3$.

VIII. Si cercano due numeri p, q dei quali è data la somma n , ed il triplo prodotto m delle loro radici cube: avremo l'equazioni $p+q=n$, $3\sqrt[3]{pq}=m$. La seconda ci dà $pq = \frac{m^3}{27}$, e quindi $4pq = \frac{4}{27}m^3$: la prima equazione quadrata ci dà $p^2 + 2pq + q^2 = n^2$, da cui togliendo $4pq = \frac{4}{27}m^3$, si ha $p^2 - 2pq + q^2 = n^2 - \frac{4}{27}m^3$, quin-

di $p-q = \pm \sqrt{n^2 - \frac{4}{27}m^3}$; avremo pertanto (124)

$$p = \frac{n + \sqrt{n^2 - \frac{4}{27}m^3}}{2}, \quad q = \frac{n - \sqrt{n^2 - \frac{4}{27}m^3}}{2}$$

ovvero

$$p = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3}, \quad q = \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3}.$$

Abbiamo presi i segni superiori; prendendo gl'inferiori, si ha la medesima soluzione, perchè p si cangia in q , e inversamente. Sarà utile questo problema per la risoluzione delle equazioni di terzo grado.

IX. Si cercano due numeri x, y tali che $x+y=-a$; $xy=b$. Sostituendo nella prima equazione il valore di y ricavato dalla seconda, e riducendola, si ha per determinare x l'equazione $x^2 + ax + b = 0$: avremmo la stessa equazione in y se avessimo eliminato x : le due radici l'adunque di quella equazione del secondo grado, o i due valori che si trovano per x , sono gli stessi che quei che si troverebbero per y ; ma x ed y non possono essere eguali tra loro, giacchè in questo caso il problema sarebbe più che determinato ed

in generale non solubile (127); dunque delle due radici quadrate di $x^2 + ax + b = 0$, una sarà il valore di x , l'altra quello di y .

Da tutto questo ricaveremo che in una equazione qualunque di secondo grado della forma $x^2 + ax + b = 0$, *Il coefficiente del secondo termine col segno mutato eguaglia la somma delle sue radici; l'ultimo termine ne eguaglia il prodotto.* Questo teorema potrebbe verificarsi con le formole del (177).

CAPO IX.

DEI LOGARITMI.

182. **C**ONSIDERIAMO l'equazione $n = b^l$, in cui supponiamo n numero dato. Delle due altre quantità b , l può essere data l e non b , e può essere data b e non l . Se è data l , e si cerca b , si ha $b = \sqrt[l]{n}$, onde si ottiene b con una estrazione di radice secondo le dottrine insegnate; ma se mai fosse data b , e si cercasse quell'esponente l intero o fratto che rende la potenza b^l eguale al dato numero n , la quistione sarebbe di nuovo genere. Eppure non vi è difficoltà a concepire che possa esservi questo esponente l , qualunque sia la quantità b a cui si deve affiggere. *Questo numero, che dato per esponente ad una quantità assunta arbitraria in origine, ma tenuta poi costantemente fissa, forma una potenza eguale ad un numero dato, chiamasi il logaritmo di quest'ultimo*, e s'indica così: $l = Ln$, ovvero $l = \text{Log. } n$.

183. Se |tenendo sempre fisso per b uno stesso valore, mettiamo successivamente per n tutti i numeri possibili, bisognerà che tutte le volte mutiamo anche l'esponente l per render sempre $b^l = n$. Ad ogni valore dunque di n corrisponderà un particolare valore di l , che avrà con esso un'intima relazione, e rimpetto a tutti i numeri messi in luogo di n si formeranno altrettanti valori corrispondenti di l . Questi secondi sono i logaritmi dei primi, e il loro complesso chiamasi un *sistema logaritmico* costruito sulla *base* b . Siccome a b possono originariamente darsi valori diversi e infiniti, così potranno costruirsi infiniti sistemi logaritmici. Il sistema più comune è fondato sulla base 10.

184. Ecco alcune immediate conseguenze di questa teorica. *Il logaritmo della base in ogni sistema è l'unità.* In fatti se si fa $n = b$ (182), si ha $b = b^1$, da cui si vede $1 = Lb = 1$. *Il logaritmo dell'unità è zero.* Se nella medesima equazione (182) pongasi $n = 1$, si otterrà $1 = b^l$, equazione che non può sussistere (135) se non è $l = L1 = 0$.

185. Si possono facilmente dimostrare altri quattro importanti teoremi, in cui sta la principale utilità di questa dottrina, che è di tanto uso in tutte le matematiche pure e miste, e che debbesi a Nepero, barone di Scozia.

Siano P, Q, R tre numeri, i cui logaritmi siano p, q, r , onde abbiassi $p = LP; q = LQ; r = LR$; si avranno pure (182) le equazioni $P = b^p; Q = b^q; R = b^r$.

Suppongasì $R = PQ$, e sarà $b^r = b^p \cdot b^q = b^{p+q}$, e perciò $r = p + q$, o sia $LR = L(PQ) = LP + LQ$. Dunque *il logaritmo di un prodotto eguaglia la somma dei logaritmi dei fattori.*

Suppongasì $R = \frac{P}{Q}$, e si avrà $b^r = \frac{b^p}{b^q} = b^{p-q}$, e perciò $r = p - q$, o sia $LR = L\frac{P}{Q} = LP - LQ$. Dunque *il logaritmo di un quoziente eguaglia la differenza dei logaritmi del dividendo e del divisore.*

Suppongasì $R = P^h$, ed avrassi $b^r = b^{ph}$, quindi $r = ph$, ovvero $LR = LP^h = h LP$. Dunque *per avere il logaritmo di una potenza, basta prendere il logaritmo della radice e moltiplicarlo pel grado della potenza.*

Suppongasì $R = \sqrt[h]{P} = P^{\frac{1}{h}}$, sarà $b^r = b^{\frac{p}{h}}$, quindi $r = \frac{p}{h}$, ovvero $LR = L\sqrt[h]{P} = \frac{LP}{h}$. Dunque *per avere un logaritmo di una radice, basta prendere il logaritmo della potenza e dividerlo pel grado della radice.*

186. Intenderemo d'ora innanzi che la base b sia 10, quantunque molte delle cose che diremo convengano anche ad una base qualunque.

I logaritmi delle potenze esatte della base sono numeri interi. Così essendo $10 = 10^1; 100 = 10^2; 1000 = 10^3; 10000 = 10^4$, ecc., saranno (182) $1 = L10; 2 = L100; 3 = L1000; 4 = L10000$, ecc.

I logaritmi degli altri numeri interi hanno un valore a

cui si può bensì approssimare finchè si vuole, ma non si può mai ottenere esattamente. Un esempio gioverà per intendere questo. Vogliasi il logaritmo di 2; chiamato x questo logaritmo, si avrà (182) $2 = 10^x$. Si capisce subito che x non può essere l'unità, e molto meno un numero maggiore dell'unità. Sarà forse dunque una frazione? Rispondo: rigorosamente parlando, non sarà nemmeno una frazione, perchè 10 elevato ad esponente frazionario è quantità incommensurabile, e quindi non può mai essere precisamente eguale a 2. Nondimeno si può trovare una frazione per x , che faccia avvicinare il valore di 10^x quanto si vuole al 2.

È facile a persuadersi che x debb' essere minore di $\frac{1}{2}$

che cioè $10^{\frac{1}{2}}$ è maggiore di 2, perchè il quadrato di $10^{\frac{1}{2}}$ è 10, e quello di 2 è 4; ora questo è molto minore del primo. Egualmente $\frac{1}{3}$ è anche un valor troppo grande per x ,

cioè $10^{\frac{1}{3}}$ è maggiore di 2, perchè il cubo di $10^{\frac{1}{3}}$ è 10, mentre quello di 2 fa soltanto 8. Ma, al contrario, se si facesse $x = \frac{1}{4}$, sarebbe un troppo piccolo valore per x , poichè la quarta potenza di $10^{\frac{1}{4}}$ essendo 10, e quella di 2 essendo 16, quindi è chiaro che $10^{\frac{1}{4}}$ è minore di 2.

Si vede pertanto che x , cioè L_2 è $< \frac{1}{3}$, $> \frac{1}{4}$, ovvero minore di $\frac{4}{12}$, e maggiore di $\frac{3}{12}$. Così potremmo esaminare qualunque frazione compresa tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, e trovare se è maggiore o minore del vero valore di x . Tentando, per esempio, con $\frac{2}{7}$, che è rotto $< \frac{1}{3}$ e $> \frac{1}{4}$, bisognerebbe che 10^x , ovvero $10^{\frac{2}{7}}$, fosse $= 2$; ovvero che la settima potenza di $10^{\frac{2}{7}}$, cioè 10^2 , ovvero 100, fosse eguale alla settima potenza di 2; ma questa è 128, dunque il $\frac{2}{7}$ non è abbastanza gran-

de, acciocchè elevato il 10 a quella potenza si abbia 2; dunque L_2 è $> \frac{2}{7}$; dunque L_2 è $> \frac{2}{7}$ e $< \frac{1}{3}$.

Esperimentando un'altra frazione compresa tra $\frac{2}{7}$ ed $\frac{1}{3}$, per esempio $\frac{3}{10}$, si troverà che L_2 sta tra $\frac{3}{10}$ ed $\frac{1}{3}$, ovvero tra

$\frac{9}{30}$ e $\frac{10}{30}$: egli è maggiore del primo e minore del secondo:

così andremo sempre più restringendo i limiti tra i quali si trova il valore di x o di L_2 , di modo che quando la differenza dei due limiti sarà tanto picciola che si creda di non doverla apprezzare, si potrà prendere uno di quei limiti per logaritmo del 2.

Così per tutti i numeri interi si possono trovare delle frazioni che date per esponenti al 10 formino una potenza di un valore prossimo quanto si vuole al dato. Queste frazioni si possono allora prendere pei logaritmi di quei numeri, onde a questa maniera si possono avere i logaritmi di tutti i numeri interi. Non è però veramente in questo modo che si sono trovati i logaritmi; altre teoriche, altri metodi servono a ciò, e i lettori li troveranno nell'introduzione al calcolo sublime.

187. *I logaritmi delle frazioni che hanno l'unità per numeratore, e per denominatore le potenze intere della base*

sono i numeri interi negativi Così $\frac{1}{10} = 10^{-1}$; $\frac{1}{100} = 10^{-2}$;

$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$, ecc.; dunque $(182) - 1 = L \frac{1}{10}$, $- 2 =$

$L \frac{1}{100}$; $- 3 = L \frac{1}{1000}$, ecc.

I logaritmi di tutte le frazioni proprie sono negativi.

In fatti abbiamo (135) $L \frac{P}{Q} = LP - LQ$; se dunque Q è

maggiore di P , la differenza è negativa, perchè di due numeri uno maggiore dell'altro, il logaritmo del maggiore è maggiore di quello del minore. Si vede di qui come dati i logaritmi dei numeri interi, si hanno anche quelli di tutte le frazioni.

I logaritmi dei numeri negativi si tengono per immagi-

narj. In fatti nell' equazione $n = b^l$, sinchè b è positivo, dando ad l valori positivi o negativi, è sempre b^l quantità positiva, e non può mai tenersi se non per assurdo eguale ad una quantità n negativa.

188. I logaritmi dei numeri naturali, eccettuati quei che sono potenze intiere del 10, sono frazioni comprese tra zero ed 1; tra 1 e 2; tra 2 e 3; tra 3 e 4, ecc., secondo che il numero naturale è tra 1 e 10; tra 10 e 100; tra 100 e 1000; tra 1000 e 10000, ecc. (186); e per avere una uniformità e semplicità nei computi di queste frazioni si sono ridotte in decimali, di modo che i logaritmi si esprimono con frazioni decimali.

Gl' interi separati dalla virgola indicano il numero delle cifre che ha il numero naturale cui appartiene quel logaritmo; e quest' interi chiamansi la *caratteristica*; ordinariamente non vi è che una sola cifra separata dalla virgola, ed è questa cifra la caratteristica del logaritmo.

189. Tutti questi logaritmi si sono raccolti in tavole, che chiamansi le tavole logaritmiche. Ve ne sono di quelle calcolate da 1 fino a 100000 e anche di più, e si hanno dei mezzi per supplire al difetto quando i numeri di cui si cercano i logaritmi oltrepassano le tavole; ne faremo or ora qualche parola. Si possono dunque aver dalle tavole i logaritmi di tutti i numeri interi ed anche dei fratti (187).

190. Laboriosissima fu la compilazione di queste tavole, quantunque meno di quello che si può credere, perchè da un logaritmo di un numero se ne deducono subito infiniti altri. Per esempio, sia $a = L 2$, e si avrà (185.) $L 20 = L 2. 10 = L 2 + L 10 = a + 1$; $L 200 = L 2 + L 100 = a + 2$; $L 2000 = a + 3$, ecc.; $L 4 = L 2^2 = 2 L 2 = 2a$; $L 8 = L 2^3 = 3 L 2 = 3a$, ecc.; $L 40 = L 2^2. 10 = 2a + 1$; $L 800 = L 2^3. 100 = 3a + 2$, ecc.; $L 50 = L \frac{100}{2} = 2 - a$;

$L 25 = L \frac{100}{4} = 2 - 2a$, ecc.

191. Per dare un' idea del modo con cui sono fatte queste tavole, seguono i logaritmi dei numeri naturali da 1 sino a 200.

TAVOLA DEI LOGARITMI

dei numeri naturali da 1 sino a 200.

Num.	Logaritmi.	Num.	Logaritmi.	Num.	Logaritmi.	Num.	Logaritmi.
0		30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243
1	0,000000	31	1,491362	61	1,785330	91	1,959041
2	0,301030	32	1,505150	62	1,792392	92	1,963788
3	0,477121	33	1,518514	63	1,799341	93	1,968483
4	0,602060	34	1,531479	64	1,806180	94	1,973128
5	0,698970	35	1,544068	65	1,812913	95	1,977724
6	0,778151	36	1,556303	66	1,819544	96	1,982271
7	0,845098	37	1,568202	67	1,826075	97	1,986772
8	0,903090	38	1,579784	68	1,832509	98	1,991226
9	0,954243	39	1,591065	69	1,838849	99	1,998635
10	1,000000	40	1,602060	70	1,845098	100	2,000000
11	1,041393	41	1,612784	71	1,851258	101	2,004321
12	1,079181	42	1,623249	72	1,857332	102	2,008600
13	1,113943	43	1,633468	73	1,863323	103	2,012837
14	1,146128	44	1,643453	74	1,869232	104	2,017033
15	1,176091	45	1,653213	75	1,875061	105	2,021189
16	1,204120	46	1,662758	76	1,880814	106	2,025306
17	1,230449	47	1,672098	77	1,886491	107	2,029384
18	1,255273	48	1,681241	78	1,892095	108	2,033424
19	1,278754	49	1,690196	79	1,897627	109	2,037426
20	1,301030	50	1,698970	80	1,903090	110	2,041393
21	1,322219	51	1,707570	81	1,908485	111	2,045323
22	1,342423	52	1,716003	82	1,913814	112	2,049218
23	1,361728	53	1,724276	83	1,919078	113	2,053078
24	1,380211	54	1,732394	84	1,924279	114	2,056905
25	1,397940	55	1,740363	85	1,929419	115	2,060698
26	1,414973	56	1,748188	86	1,934498	116	2,064458
27	1,431364	57	1,755875	87	1,939519	117	2,068186
28	1,447158	58	1,763428	88	1,944483	118	2,071882
29	1,462398	59	1,770852	89	1,949390	119	2,075547
30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243	120	2,079181

Num.	Logaritmi.	Num.	Logaritmi.	Num.	Logaritmi.	Num.	Logaritmi.
120	2,079181	140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273
121	2,082785	141	2,149219	161	2,206826	181	2,257679
122	2,086360	142	2,152288	162	2,209515	182	2,260071
123	2,089905	143	2,155336	163	2,212188	183	2,262451
124	2,093422	144	2,158362	164	2,214844	184	2,264818
125	2,096910	145	2,161368	165	2,217484	185	2,267172
126	2,100371	146	2,164353	166	2,220108	186	2,269513
127	2,103804	147	2,167317	167	2,222716	187	2,271842
128	2,107210	148	2,170262	168	2,225309	188	2,274158
129	2,110590	149	2,173186	169	2,227887	189	2,276462
130	2,113943	150	2,176091	170	2,230449	190	2,278754
131	2,117271	151	2,178977	171	2,232996	191	2,281033
132	2,120574	152	2,181844	172	2,235528	192	2,283301
133	2,123852	153	2,184691	173	2,238046	193	2,285557
134	2,127105	154	2,187521	174	2,240549	194	2,287802
135	2,130334	155	2,190332	175	2,243038	195	2,290035
136	2,133539	156	2,193125	176	2,245513	196	2,292256
137	2,136721	157	2,195900	177	2,247973	197	2,294466
138	2,139879	158	2,196657	178	2,250420	198	2,296665
139	2,143015	159	2,201397	179	2,252853	199	2,298853
140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273	200	2,301030

192. Siccome $LM \cdot 10 = 1 + LM$; $LM \cdot 100 = 2 + LM$, ecc.,
e $L \frac{M}{10} = LM - 1$; $L \frac{M}{100} = LM - 2$, ecc.; così concludere-
mo che aggiungendo una, due, tre ecc. unità alla caratte-
ristica, o detraendovele, il numero cui risponderà il nuo-
vo logaritmo sarà il numero primiero moltiplicato ovvero
diviso per 10, 100, 1000, ecc.

193. Si trovano alcune tavole nelle quali non sono scrit-
te le caratteristiche dei logaritmi: è però facile supplirvi
prendendo una caratteristica di tante unità quante sono le
cifre, meno una, del numero di cui si cerca il logaritmo
(188).

194. Per trovare il logaritmo di un numero maggiore del

più grande delle tavole, per esempio di 546828, supponendo che le tavole non si estendano al di là di 10000, si tolgano tante delle ultime cifre del numero finchè ei sia compreso tra quei delle tavole. Nel nostro caso si tolgano le ultime due, 2, 8, e resterà 5468: alla caratteristica del logaritmo di 5468 si aggiungano due unità, e si avrà allora il logaritmo di 546800, che sarà prossimamente quello che si cerca.

~~Per~~ Per trovare il numero corrispondente ad un logaritmo maggiore di quei delle tavole, si diminuisca di tante unità la caratteristica sinchè il logaritmo si trovi tra quei delle tavole: preso allora il numero che corrisponde al logaritmo delle tavole più prossimo al logaritmo dato, ed aggiuntivi tanti zeri quante furono le unità detratte dalla caratteristica, si avrà prossimamente il numero che si cerca.

Si opererà al contrario se si aumenteranno alcune cifre nel numero, o si accresceranno unità ad una caratteristica. Ma così facendo non si ha che un' approssimazione. Le regole più esatte sono fondate sull' uso delle parti proporzionali, e qui non possono aver luogo perchè nulla ancora si è detto delle proporzioni. I lettori le troveranno sulle prefazioni che ordinariamente precedono le tavole logaritmiche, di cui bisognerà che si provvedano (*).

195. Le tavole logaritmiche servono per eseguire colla più sorprendente facilità qualunque moltiplicazione, divisione, alzamento a potenza, estrazione di radice; imperciocchè per la moltiplicazione e divisione altro non si ha da fare che sommare e sottrarre, e per l' elevamento a potenza ed estrazione di radice basta solo saper moltiplicare e dividere.

Di fatto, se vorranno moltiplicarsi due numeri P , Q tra di loro, si cercheranno nella tavola, e presine i loro logaritmi, per esempio p , q , si sommeranno, e si avrà $p + q$. Si cercherà questa somma tra i logaritmi, e trovando che accanto ad essa vi corrisponde il numero R , sarà questo (185) il cercato prodotto.

(*) Nel libretto di tavole logaritmiche pubblicato dalla I. R. Stamperia di Milano l'anno 1820 fu per la prima volta posta una prefazione. dove, ommessa tutta la parte teorica, non si è atteso che a mostrare con diligenza l'uso facile e pratico di esse tavole: e si sono presi di mira tutti i casi che possono occorrere; e si è inseguito a ottenere risultamenti per quanto è possibile esatti.

Volendo dividere P per Q , si sottrarrà il logaritmo di Q da quel di P , ed il numero R che nella tavola corrisponderà, o avrà per logaritmo la differenza $p - q$, sarà il quoto (185).

Per elevare P ad una potenza $4.^a$, per esempio, si moltiplicherà per 4 il logaritmo di P , e si cercherà quel numero R che corrisponde ad un logaritmo $4p$; sarà questo la potenza $4.^a$ di P (185).

Per avere la radice, per esempio, $3.^a$ di P , se ne dividerà per 3 il logaritmo p , e cercando nelle tavole qual numero corrisponde al logaritmo $\frac{p}{3}$, sarà quel numero la radice cercata (185).

Ecco qualche esempio.

Debbasi moltiplicare 36 per 74: si prenda il logaritmo di 36 L. 36 = 1,556303
quello di 74 L. 74 = 1,869232
si sommino , somma = 3,425535

Il numero 3,425535 sarà il logaritmo del prodotto cercato. Siccome la caratteristica è 3, si cerchi questo logaritmo tra quei che appartengono ai numeri di quattro cifre (188). Nella tavola dei logaritmi si trova 3,426534, che non è il nostro, ma n'è il più prossimo, e corrisponde a 2664: sarà dunque 2664 il prodotto cercato. Per moltiplicare 282 per 130, si ha L. 282 = 2,450249

$$\text{L. } 130 = 2,113943$$

$$\text{Som.} = 4,564192$$

e questa somma sarà il logaritmo del prodotto cercato.

Supponendo che le tavole non vadano al di là di 10000, quel logaritmo non vi si trova: diminuisco adunque di una unità la caratteristica, e cercando 3,564192, trovo che vi corrisponde 3666; dunque 36660 è il prodotto cercato.

Si debba dividere 1665 per 15: si operi così:

$$\text{L. } 1665 = 3,221414$$

$$\text{L. } 15 = 1,176091$$

$$\text{Diff.} = 2,045323.$$

Questa differenza è il logaritmo del quoto. Essa corrisponde nelle tavole a 111, dunque $\frac{1665}{15} = 111$. Per divide-

$$\text{re } 7846 \text{ per } 389, \text{ si ha } \text{L. } 7846 = 3,894648$$

$$\text{L. } 389 = 2,589950$$

$$\text{Diff.} = 1,304698$$

Se si cerca nelle tavole questo logaritmo o il suo più prossimo, si trova 1,301030, corrispondente al 20.

Si ha dunque 20 per quoziente approssimato: per averlo più esatto si cerchi l'ottenuta differenza con la caratteristica 3, si cerchi cioè 3,304698, o il più prossimo a lei; troviamo allora 3,304491, che corrisponde al num. 2016. Questo numero è cento volte più grande del vero (192). Il vero adunque sarà $\frac{2016}{100} = 20,16$, quoziente assai più approssimato (194).

Per fare la potenza terza di 45, se ne cercherà il logaritmo: è questo 1,544068, che moltiplicato per 3, diviene 4,632204, al quale diminuita una unità dalla caratteristica corrisponde prossimamente 4288: dunque la potenza cercata sarà prossimamente 42880 (194). Se le tavole fossero state più estese, l'avremmo trovata esatta.

Volendo la radice quarta di 2903, si prenda il logaritmo di 2903, che è 3,462847: si divida per 4, e si avrà 0,865711, il quale, cercato con tre unità nella caratteristica, ci farà trovare 7341, corrispondente a 3,865755: sarà dunque 7,341 la cercata radice quarta prossimamente.

196. Si è immaginato un compenso per dispensarsi ancora dalla sottrazione dei logaritmi, e ridurre questa operazione alla semplice somma: ciò si fa per mezzo di certi numeri che chiamansi *complementi aritmetici*.

Il *complemento aritmetico* di un logaritmo si trova togliendo da 9 ciascuna cifra di questo logaritmo, eccettuata l'ultima a destra che si toglie da 10; così il complemento aritmetico di un logaritmo si trova a mente con la semplice ispezione delle figure. Di fatto si vede subito che il complemento aritmetico di 3,728785 è 6,271215, che si ha togliendo le cifre 3, 7, 2, 8, ecc. da 9, e l'ultima 5 da 10; così il complemento aritmetico di 2,854406 è 7,145594.

I complementi aritmetici servono a cangiare le sottrazioni in somme; così se si voglia sottrarre 3,486098 da 5,040321, si prenda il complemento aritmetico del logaritmo da sottrarsi, che è 6,513902, e si sommi coll'altro logaritmo; da questa somma, che è 11,554223, si tolga una unità dalla prima cifra a sinistra; e siccome questa cifra è l'unità stessa, resterà 1,554223, che sarà la ricercata differenza. Ecco l'operazione 5,040321

Compl. arit. di 3,486098 . . . = 6,513902

Som. 11,554223

Da cui tolta l'unità a sinistra. . . 1,554223.

In fatti 'prendere il complemento aritmetico di un logaritmo P è lo stesso che sottrarre P da 10; la somma dunque del complemento con un altro logaritmo Q equivale a $10 - P + Q$, da cui togliendo una decina d'interi secondo la regola, resta $Q - P$, che è la differenza dei logaritmi.

Se due fossero stati i logaritmi da sottrarsi, avremmo presi due complementi, ed avremmo tolte due unità dalla prima cifra a sinistra della somma totale. Generalmente dal risultamento di una intiera operazione si debbono togliere tante unità dalla prima cifra della somma, quanti furono i complementi aritmetici introdotti in essa.

E quì raccomando l'esercizio.

197. Termino questo capitolo col riportare alcune delle più usitate trasformazioni delle quantità logaritmiche che s'incontrano nell'Algebra, e coll'accennare l'uso dei logaritmi nella risoluzione delle equazioni che hanno l'incognita per esponente (*).

$$Lab = La + Lb \dots L \frac{a}{b} = La - Lb.$$

$$La^m = m La. \dots La^{-m} = -m La.$$

$$La^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} La. \dots La^{-\frac{m}{n}} = -\frac{m}{n} La.$$

$$Labcd \text{ ecc.} = La + Lb + Lc + Ld \text{ ecc.}$$

$$L \frac{abc}{de} = La + Lb + Lc - Ld - Le.$$

$$La^m p^b c^q = m La + b Lp + q Lc.$$

$$L \frac{ax^n}{r^z} = La + n Lx - z Lr.$$

$$L \frac{ab + bc}{m + n} = Lb + L(a + c) - L(m + n).$$

$$L \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} L(x^2 + y^2).$$

$$L \left(\frac{a + x}{a - x} \right) = L(a + x) - L(a - x).$$

$$L(a^2 - x^2) = L(a + x) + L(a - x).$$

(*) In questi esempj la lettera b esprime una quantità qualunque, non già la base come sul principio di questo capo.

$$L \sqrt[4]{(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2} L(a + x) + \frac{1}{2} L(a - x).$$

$$Lz^3 + \frac{3}{4}Lz = \frac{15}{4}Lz = Lz^{\frac{15}{4}} = Lz^3 \sqrt[4]{z^3}.$$

$$L \sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n} L(a - x) + \frac{m}{n} L(a^2 + ax + x^2).$$

$$L \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{(a + x)^2} = \frac{1}{2} L(a + x) + \frac{1}{2} L(a - x) - 2L(a + x) \\ = \frac{1}{2} L(a - x) - \frac{3}{2} L(a + x)$$

$$L 3a^2 + La^4 + 5L3 = L3 + 2La + 4La + 5L3 = 6L3 + 6La = 6L3a = L(3a)^6.$$

Per avere il valore di x dall'equazione $a^x = b$, si farà $x La = Lb$, quindi $x = \frac{Lb}{La}$; per l'equazione $a^x = \frac{b^{mx-n}}{c^{qx}}$ si

ha $x La = (mx - n)Lb - qxLc$, e quindi $x = \frac{nLb}{mLb - qLc - La}$.

CAPO X.

DELLE RAGIONI E DELLE PROPORZIONI.

198. **D**ate due quantità, si può sottrarre l'una dall'altra per trovarne la differenza, e si può dividere altresì l'una per l'altra per saperne il quoziente. {La prima operazione mostra la quantità di cui una grandezza supera l'altra; la seconda nota il numero delle volte che l'una contiene l'altra. La differenza delle due quantità si chiama il *rapporto* o la *ragione aritmetica* di queste quantità: il quoziente d'una di esse divisa per l'altra si chiama il *rapporto* o la *ragione geometrica* di queste quantità (denominazioni poco felici, ma consacrate da un uso antico).

Paragonando pertanto 59 con 13, per sapere di quanto il 39 supera il 13, $39 - 13 = 26$, e la ragione aritmetica di 39 a 13 è 26. Paragonando i medesimi numeri 39 e 13, per sapere quante volte 13 è contenuto in 39, divido 39 per 13, il quoziente 3 è la ragione geometrica di 39 a 13;

e se si fosse diviso 13 per 39, il quoziente sarebbe stato $\frac{1}{3}$.

Ma si avverta una volta per sempre che negli esempj seguenti valuteremo i rapporti geometrici, dividendo la maggiore quantità per la minore.

199. Siccome ogni paragone suppone almeno due termini, si è convenuto di chiamar l'uno *antecedente*, l'altro *consequente* della ragione, sia aritmetica, sia geometrica, che ne risulta. Così ogni ragione aritmetica è la differenza tra l'*antecedente* e il *consequente*, e ogni ragione geometrica è il quoziente d'uno di questi due termini diviso per l'altro.

200. Quando due quantità hanno fra loro una differenza eguale a quella che trovasi fra due altre quantità, si dice che questi quattro termini sono in *proporzione aritmetica*. I numeri 7 e 4, per esempio, differiscono di 3, come i numeri 8 e 5; dunque questi numeri sono in proporzione, e per indicarlo si è convenuto di scrivere $7 : 4 :: 8 : 5$, il che significa, 7 sta aritmeticamente a 4 come 8 a 5.

Segue da ciò che due ragioni aritmetiche eguali formano sempre una proporzione aritmetica. Ecco alcuni esempj di queste sorte di proporzioni $24 : 12 :: 60 : 48$ $1002 : 1000 :: 2 : 0$.

Quando due quantità hanno il quoziente medesimo che due altre, queste quattro quantità sono in *proporzione geometrica*. Se si divide, per esempio, 12 per 6 e 18 per 9, il quoziente è 2; dunque i numeri 6, 12, 9 e 18 formano una proporzione geometrica che si nota nella maniera seguente... $6 : 12 :: 9 : 18$, o pure $6 : 12 = 9 : 18$, e si pronunzia 6 sta a 12 come 9 a 18.

Concludiamo dunque che *Due ragioni geometriche eguali formano sempre una proporzione geometrica*: $2 : 6 :: 5 : 15$ $7 : 63 :: 1 : 9$.

201. Vi è un'altra specie di proporzione che dicesi *armonica*, e consiste in quattro termini, il primo dei quali sta geometricamente all'ultimo, come la differenza tra il primo ed il secondo alla differenza tra il terzo ed il quarto: così 6, 8, 14, 21 sono in proporzione armonica, perchè $6 : 21 :: 8 - 6 : 21 - 14 :: 2 : 7$. Questa proporzione è poco in uso tra i matematici.

202. Il primo e l'ultimo termine di una proporzione si chiamano *estremi*; il secondo e terzo, *medj*: e se, paragonando due ragioni geometriche insieme, il primo antecedente stia al suo conseguente, come il secondo conseguente al suo antecedente, si dice allora che questi due ultimi termini sono in *ragione inversa* de' due primi; come $13 : 26$... $14 : 7$;

se poi il primo antecedente sia al suo conseguente, come il secondo al suo; si dice che i due ultimi termini sono in *ragione diretta* de' due primi.

203. Si chiamano *proporzioni continue* quelle ove il conseguente della prima ragione serve d'antecedente alla seconda.

Esempio delle aritmetiche $10 : 18 :: 18 : 16$
e si scrive più in breve $\div 10 : 18 : 26$

Esempio delle geometriche $6 : 24 :: 24 : 96$
e si scrive $\div\div 6 : 24 : 96$.

In tal caso il secondo termine si chiama il *medio proporzionale*, aggiungendo la parola *aritmetico* o *geometrico*, secondo la qualità della proporzione.

204. Da più ragioni eguali si ha un numero di quantità proporzionali, e se le proporzioni sieno continue, la serie di queste ragioni eguali forma una *progressione*, la cui specie si determina dalla natura delle ragioni che la compongono. Ecco una progressione aritmetica:

$1 : 3 :: 3 : 5 :: 5 : 7 :: 7 : 9$, ecc. Si scrive $\div 1 : 3 : 5 : 7 : 9$, ecc. Ecco una progressione geometrica:

$1 : 2 :: 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 ::$ ecc. Si scrive $\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : \text{ecc.}$

Delle proporzioni e progressioni aritmetiche.

205. Trovata una formola generale delle proporzioni aritmetiche, le proprietà di essa si stenderanno generalmente a tutt'i casi particolari. Occupiamoci in questa ricerca. Si è detto (200) che una proporzione aritmetica risulta da due ragioni aritmetiche eguali: dunque se troveremo l'espressione generale di due di queste ragioni, ne risulterà l'espressione generale delle proporzioni aritmetiche.

Sia a l'antecedente della prima ragione, b il suo conseguente, d la differenza, e si avrà $a - b = \pm d$, secondo che a sarà maggiore o minore di b , onde $b = a \mp d$; dunque posto nella ragione $a : b$ il valor di b , ogni ragione aritmetica sarà rappresentata dalla ragione di $a : a \mp d$. Posta ora $c : f$ un'altra ragione della differenza medesima d , si troverà come prima $c - f = \pm d$, onde $f = c \mp d$; dunque ogni ragione aritmetica eguale a quella di $a : a \mp d$ può rappresentarsi da $c : c \mp d$, e l'espressione di due ragioni aritmetiche eguali, e perciò la formola cercata per tutte le proporzioni aritmetiche: $a : a \mp d :: c : c \mp d$.

206. Dunque 1.° in qualunque ragione aritmetica l'an-

tecedente diminuito o accresciuto della differenza eguaglia il conseguente.

207. Dunque 2.^o in ogni proporzione aritmetica la somma degli estremi eguaglia la somma dei medj, poichè la somma degli estremi nella formola precedente è $a + c \mp d$, e tale è pure quella dei medj. Questa è la più utile proprietà delle proporzioni aritmetiche, così ogni volta che si avrà $a : b :: c : d$, se ne inferirà $a + d = b + c$.

208. Dunque 3.^o se in una proporzione aritmetica uno degli estremi è incognito, si troverà subito il suo valore. Così volendo il quarto termine della proporzione $17 : 29 :: 13 : x$, si ha (207) $17 + x = 29 + 13$, onde $x = 29 + 13 - 17 = 25$. Se è incognito uno dei medj, si vede come dee farsi a conoscerlo.

Dunque 4.^o in ogni proporzione aritmetica continua la somma degli estremi è doppia del medio, poichè allora la proporzione $a : b :: c : d$ si cangia in questa $a : b :: b : d$, onde $a + d = 2b$.

209. Dunque 5.^o per trovare il medio proporzionale aritmetico x tra due termini a, b , si scriverà $a : x :: x : b$; onde $\frac{a+b}{2} = x$, cioè il medio proporzionale aritmetico tra due

quantità date eguaglia la metà della somma di esse.

210. Dunque 6.^o le progressioni aritmetiche potranno esprimersi con la formola seguente, ove ogni termine differisca egualmente da quello che lo precede (203) $\div a : a \mp d : a \mp 2d : a \mp 3d : a \mp 4d : a \mp 5d$ ecc.: il segno $-$ è per le *progressioni decrescenti*, il $+$ per le *crescenti*.

211. Dunque 7.^o ciò che si avvera in questa formola, debbe avverarsi in tutte le progressioni aritmetiche. Ora qui la somma dei termini egualmente distanti dagli estremi è sempre costante, cioè eguaglia la somma degli estremi o la somma dei medj, o il doppio del medio se il numero de' termini è impari: così il secondo termine $a \mp d$ e il penultimo $a \mp 4d$ sommati danno $2a \mp 5d$, somma evidentemente eguale a quella degli estremi $a + a \mp 5d$. I medj sono $a \mp 2d$ e $a \mp 3d$, la cui somma è parimente $2a \mp 5d$.

Si verifichino questi risultamenti nella seguente progressione $\div 7 : 12 : 17 : 22 : 27 : 32 : 37 : 42 : 47$.

212. Dunque 8.^o può aversi un termine qualunque in una progressione aritmetica, conoscendone il primo termine a , la differenza d e il numero de' termini n sino al cercato compreso: poichè si vede dalla formola che un termine qualunque eguaglia la somma del primo a e del prodotto

della differenza comune d nel numero dei termini precedenti: onde chiamando ω il termine cercato, si avrà sempre $\omega = a \mp d (n - 1)$; o semplicemente $\omega = a + d (n - 1)$, intendendo per d un numero positivo o negativo.

213. Dunque 9.° *la somma dei termini d'una progressione aritmetica qualunque eguaglia il prodotto della somma degli estremi per la metà del numero dei termini.* Di fatto la somma degli estremi è $a + \omega$: ma di queste somme ve n'è in una progressione un numero eguale alla metà del numero dei termini (211), cioè un numero $\frac{n}{2}$; chiamata dunque s la somma dei termini, si avrà generalmente $s = (a + \omega) \frac{n}{2} = \frac{an + \omega n}{2}$.

214. Dopo tutto ciò, non si troverà difficoltà nel risolvere i due seguenti problemi:

I.° Dati due termini a ed ω , si cerca come inserir fra loro un numero m di medj proporzionali, in modo che ne risulti una progressione aritmetica.

Questo problema sarà risoluto subito che si conoscerà la differenza della progressione cercata. Si sa pertanto (212) che $\omega - a = d (n - 1)$, e si vede che in questo caso $n = m + 2$; dunque $\frac{\omega - a}{m + 1} = d$, differenza cercata.

215. Esempj. Si vorrebbero intercalare sei termini fra 4 e 32. Fate $a = 4$, $\omega = 32$, $m = 6$ ed avrete $\frac{\omega - a}{m + 1} = \frac{28}{7} = 4 = d$: dunque la progressione cercata sarà.

$$\div 4 : 8 : 12 : 16 : 20 : 24 : 28 : 32 .$$

Si vogliono inserir quattro termini fra 13 e 7. Faccio

$$a = 13, \omega = 7, m = 4, \text{ ed ho } d = \frac{7 - 13}{5} = -\frac{6}{5} .$$

La progressione è decrescente, e bisogna sottrarre da ciascun termine la differenza comune, e la progressione sarà

$$\div 13 : 11 \frac{4}{5} : 10 \frac{3}{5} : 9 \frac{2}{5} : 8 \frac{1}{5} : 7 .$$

216. II.° Sia a il primo termine d'una progressione aritmetica, l'ultimo ω , la differenza d , il numero dei termini n , e la loro somma s : si cercano delle formole che facciano conoscere immediatamente il valore di due qualunque di queste cinque quantità, date che siano le altre tre.

Dall' equazione $\omega = a + d (n - 1)$ (212) si ottiene I.^a
 $a = \omega - d (n - 1)$; dall' altra $s = \frac{an + \omega n}{2}$ (213) si ha II.^a
 $a = \frac{2s}{n} - \omega$, e se i valori di n, ω presi dall' una si sostituiscono nell' altra, troveremo III.^a $a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\omega + \frac{d}{2}\right)^2 - 2ds}$;
 IV.^a $a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$; in fine due qualunque di queste quattro danno la V.^a $\omega - \frac{d(n-1)}{2} = \frac{s}{n}$. Poichè dunque ciascuna delle cinque formole contiene quattro lettere, se si prenderanno i loro valori, avremo venti formole che sciolgono il problema e possono disporsi nella seguente maniera:

	Date.	Si ha.	FORMOLE.
217.	ω, d, n	a	$a = \omega - d (n - 1).$
218.	ω, n, s		$a = \frac{2s}{n} - \omega.$
219.	ω, d, s		$a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\omega + \frac{d}{2}\right)^2 - 2ds}.$
220.	d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2}.$
221.	a, d, n	ω	$\omega = a + d (n - 1).$
222.	a, n, s		$\omega = \frac{2s}{n} - a.$
223.	a, d, s		$\omega = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{2ds + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2}.$
224.	d, n, s		$\omega = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2}.$
225.	a, ω, n	d	$d = \frac{\omega - a}{n - 1}.$
226.	a, n, s		$d = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}.$
227.	a, ω, s		$d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}.$
228.	ω, n, s		$d = \frac{2(\omega n - s)}{n(n-1)}.$

	Date.	Si ha.	FORMOLE.
229.	a, ω, d	n	$n = 1 + \frac{\omega - a}{d}.$
230.	a, ω, s		$n = \frac{2s}{a + \omega}.$
231.	a, d, s		$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left(\frac{a}{d} - \frac{1}{2}\right)^2\right)}.$
232.	ω, d, s		$n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\omega}{d} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right)}.$
233.	a, ω, n	s	$s = \frac{n(a + \omega)}{2}.$
234.	a, d, n		$s = n \left(a + \frac{d(n-1)}{2} \right).$
235.	a, d, ω		$s = \left(\frac{\omega + a}{2} \right) \left(1 + \frac{\omega - a}{d} \right).$
236.	ω, d, n		$s = n \left(\omega - \frac{d(n-1)}{2} \right).$

APPLICAZIONI. I. Si sa dopo Galileo che cadendo un corpo per solo impulso di gravità, scorre nel primo minuto" 15 piedi incirca, 45 ne scorre nel minuto" che segue, e così successivamente in progressione aritmetica. Si cerca per quanto spazio sarà caduto alla fine di sei secondi.

Questo problema si riduce a trovar la somma d'una progressione il cui primo termine $a = 15$ piedi, la differenza $d = 30$, e il numero de' termini $n = 6$; dunque (234)

$$s = n \left(a + \frac{d(n-1)}{2} \right) = 6 \left(15 + \frac{30 \cdot 5}{2} \right) = 540,$$

onde il corpo avrà percorsi 540 piedi dopo 6".

II. Un viaggiatore vorrebbe arrivare in 4 giorni al suo destino, accelerando ogni giorno di 3 leghe; per ottener l'intento bisogna che l'ultimo giorno faccia leghe $29 \frac{1}{2}$: quante ne dovè fare il primo giorno.

In questo problema si conosce $\omega = 29 \frac{1}{2}$, $d = 3$, $n = 4$,

e però (217) $a = \omega - d(n-1) = 20 \frac{1}{2}$, cioè il viaggiatore

fece nel primo giorno leghe $20\frac{1}{2}$. Si troverebbe anche (236) che tutto il viaggio dei quattro giorni è di leghe $100 = s$.

III. Se si fosse cercato in quanti giorni il viaggiatore avrebbe fatte le 100 leghe, facendone $20\frac{1}{2}$ nel primo giorno ed avvantaggiandone 3 ogni giorno, si dovea far uso della formola che dà il valore di n quando son note a, d, s , per cui (231) si sarebbe trovato $n = 4$.

IV. Uno multato per più mesi di seguito ha pagate 6 lire pel primo mese, e 102 lire per l'ultimo; ogni mese la multa era maggiore di 12 lire: per quanti mesi ha pagato?

Qui si conosce $a = 6^{lire}$, $\omega = 102^{lire}$, $d = 12$, e si cerca n : dunque (229) $n = 1 + \frac{\omega - a}{d} = 1 + \frac{102 - 6}{12} = 9$, cioè per 9 mesi ha durato la multa.

V. In un ammasso di palle da cannone disposte in progressione aritmetica crescente suppongo che vi siano 18 ordini, ciascuno de' quali contenga due palle più del vicino, e che siano in tutto 360 palle; dimando quante ve ne sono nell'ultimo ordine?

Poichè si conosce d, n, s , si avrà (224) $\omega = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2}$
 $= 20 + 17 = 37$.

VI. Date le medesime, cose, quante ve ne saranno nel prim'ordine? $a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2} = 20 - 17 = 3$ (220).

237. OSSERVAZIONE. Una progressione aritmetica qualunque $\div a : a \mp d : a \mp 2d : a \mp 3d : a \mp 4d : a \mp 5d$, ecc. è una serie di termini derivati successivamente l'uno dall'altro per mezzo di una stessa legge di derivazione; e questa legge consiste nell'accrescere e diminuire un termine qualunque di una stessa quantità d per ricavarne da esso il termine che segue.

C A P O XI.

DELLE PROPORZIONI E PROGRESSIONI GEOMETRICHE.

238. Poichè le proprietà delle proporzioni aritmetiche si deducono sì facilmente dalla formola $a : a \mp d :: c : c \mp d$, ecco un metodo egualmente generale per conoscere le proprietà delle proporzioni geometriche. Sia a l'antecedente

d'una ragione geometrica, e sia b il suo conseguente, sarà $\frac{b}{a}$ l'espressione generale del rapporto di questi due ter-

mini (198). Sia q questo rapporto, e si avrà $\frac{b}{a} = q$, onde $b = aq$. Sicchè la ragione $a : b$ si cangia in $a : aq$.

239. Sia c l'antecedente d'un'altra ragione, e sia d il suo conseguente, sarà $\frac{d}{c}$ l'espressione del rapporto dei due

termini; e se questo eguagli quello di $\frac{b}{a}$, si avrà $\frac{d}{c} = q$,

onde $d = cq$. Potrà dunque sostituirsi la ragione $c : cq$ a $c : d$; sicchè i due rapporti che si suppongono eguali possono essere rappresentati da quelli di $a : aq$ e di $c : cq$.

240. Dunque 1.^o Ogni proporzione geometrica è rappresentata dalla formola $a : aq :: c : cq$, e le proprietà di questa possono applicarsi a tutte le proporzioni geometriche. Ora la più utile proprietà è che il prodotto acq degli estremi è eguale al prodotto aqc de' medj; dunque *In ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi eguaglia quello de' medj*.

241. Dunque 2.^o dati tre termini d'una proporzione, è facile trovare il quarto; poichè se è uno degli estremi, come in $a : b :: c : x$, si avrà $ax = bc$, onde $x = \frac{bc}{a}$; se è uno de' medj, come in $a : y :: c : d$, si avrà pure $ad = cy$ onde $y = \frac{ad}{c}$.

242. Ma se la ragione di $a : b$ sia inversa a quella di $c : x$, avremo (202) $a : b :: x : c$, ovvero $a : b :: \frac{1}{c} : \frac{1}{x}$, onde $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ ed $x = \frac{ac}{b}$. Qui però non parliamo che delle ragioni dirette.

243. Dunque 3.^o da ogni proporzione geometrica, come $a : b :: c : d$, si può aver sempre un'equazione, cioè $ad = bc$.

244. E reciprocamente *Da un'equazione qualunque può aversi una proporzione*: così se sia $mn = pq$, si avrà $m : p :: q : n$; se sia $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$, si avrà (92) $a+x : b+y :: b-y : a-x$; e se sia $xy = 1$, si avrà $x : 1 :: 1 : y$, cioè una proporzione continua (203).

245. Ora in tutte le proporzioni di questa specie il prodotto degli estremi è eguale al quadrato del medio; poichè se nella proporzione generale $a:b::c:d$ si suppone $b=c$, si ha la proporzione continua $a:b::b:d$, ed $ad=b^2$; onde per inserire un medio proporzionale geometrico x tra due quantità date a, d , bisogna estrar la radice quadra dal loro prodotto; così per trovare il medio proporzionale tra 3 e 12, si fa $\div 3:x:12$, onde $x^2=36$ ed $x=6$.

246. Dunque 4.^o in quattro grandezze proporzionali possono mettersi gli estremi in luogo de' medj (inversione che si esprime da alcuni con la parola *invertendo*): si può mettere un medio o un estremo in luogo dell' altro (e ciò si dice *alternando*); e in generale tutte le mutazioni che non distruggono l'eguaglianza del prodotto degli estremi e de' medj, lasciano intatta la proporzione. Se, per esempio, si ha $a:b::c:d$, niuna delle seguenti permutazioni turberà l'eguaglianza de' due rapporti

$$\begin{array}{lll} b:a::d:c & b:d::a:c & d:b::c:a \\ a:c::b:d & c:a::d:b & c:d::a:b, \end{array}$$

perchè si avrà in tutte $ad=bc$: anzi se voglia farsene un' infinità d' altre sommando, sottraendo, moltiplicando, dividendo ecc., sarà sempre permesso, purchè si salvi l'eguaglianza de' due prodotti; così se sia $a:b::c:d$, sarà

$$\begin{array}{ll} a \pm b : b :: c \pm d : d & a : a \pm b :: c : c \pm d \\ a \pm b : a \mp b :: c \pm d : c \mp d & na : b :: nc : d, \end{array}$$

ed anche $a^m : b^m :: c^m : d^m$ $a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} :: c^{\frac{1}{n}} : d^{\frac{1}{n}}$, poichè essendo $ad=cb$, sarà anche $a^m d^m = b^m c^m$ ed $a^{\frac{1}{n}} d^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}$

247. In generale *Le potenze intere o rotte di uno stesso nome delle quantità proporzionali sono proporzionali.*

248. Dunque 5.^o date due proporzioni $a : aq :: c : cq$, $g : gp :: h : hp$, i loro prodotti, termine per termine, son proporzionali, cioè $ag : agpq :: ch : chpq$, poichè $agchpq = agpqch$. Del pari divisi i quattro termini d' una proporzione pei quattro d' un' altra, i quozienti sono in proporzione.

249. Dunque 6.^o *In una serie di ragioni geometriche eguali la somma degli antecedenti sta a quella de' conseguenti, come un antecedente al suo conseguente, o come la somma di un qualunque numero d' antecedenti a quella di un numero stesso di conseguenti.* Poichè nella serie dei termini proporzionali $a : aq :: c : cq :: e : eq :: g : gq$ regna un quoziente stesso q tra la somma degli antecedenti $a + c + e + g$ e la somma dei conseguenti $(a + c + e + g) q$, come tra un an-

tecedente qualunque a e il suo conseguente c , o tra un qualunque numero d' antecedenti e il numero stesso di conseguenti. Anzi la proporzione sussiste generalmente in tutti i casi simili, quando il prodotto degli estremi eguaglia quello dei medj come nella formola seguente che rappresenta questi casi: $a + c + e + g : (a + c + e + g) q :: a : aq :: a + c + e : (a + c + e) q$.

250. Quì osserveremo 1.^o che essendo data una ragion geometrica qualunque, si può col moltiplicare o col dividere i suoi due termini per una stessa quantità formarne una serie d' altre che le siano perfettamente eguali: poichè sia $a : aq$ la ragion data, e m il moltiplicatore de' suoi due termini, si avranno i prodotti am , amq che visibilmente hanno tra loro il rapporto stesso q dei due a e aq . Divi-

dendo per n questi due termini, i quozienti $\frac{a}{n}$, $\frac{aq}{n}$ avrebbero

similmente lo stesso rapporto q ; onde *Una ragion geometrica non cangia valore, o si moltiplichino o si dividano i suoi due termini per una stessa quantità*: e poichè ogni rotto può riguardarsi come una ragione geometrica, resta dimostrato (il che già insegnammo (39)) che la moltiplicazione e la divisione dei due termini di un rotto qualunque per una stessa quantità non altera mai il valore di questo rotto.

E di quì segue che *Due quantità qualunque hanno tra loro lo stesso rapporto che le loro metà, i loro terzi, ecc. e tutte le loro parti simili*: così si ha sempre

$$a : b :: \frac{a}{2} : \frac{b}{2} :: \frac{a}{10} : \frac{b}{10} :: \frac{a}{p} : \frac{b}{p}.$$

251. Osserveremo 2.^o che si chiama *ragione composta* il rapporto de' prodotti di due o più ragioni geometriche, moltiplicate antecedente per antecedente, e conseguente per conseguente: così $mnp : qrs$ è una ragione composta di tre *ragioni semplici*, $m : q$, $n : r$, $p : s$, che possono mettersi

anche sotto questa forma $\frac{m}{q}$, $\frac{n}{r}$, $\frac{p}{s}$. Ma quando una ragione

è composta di due ragioni eguali, allora dicesi *ragione duplicata*: così la ragione di $ab : abqq$ è una ragione duplicata delle ragioni eguali $a : aq$ e $b : bq$. Quando vi sono tre ragioni eguali, il rapporto de' prodotti rispettivi chiamasi *ragione triplicata*, ecc.

252. Una ragion duplicata è eguale a quella dei quadrati dei termini di una qualunque delle ragioni semplici

di cui è composta, e la triplicata è la stessa che quella dei cubi. Di fatto siano le due ragioni eguali $a : aq$ e $b : bq$, è evidente che la ragione duplicata $ab : abq^2$ è espressa dal medesimo quoziente q^2 che quella de' quadrati $a^2 : a^2q^2$ dei due primi termini, o quella di $b^2 : b^2q^2$, quadrati dei due ultimi, ecc.

253. Cerchiamo ora le proprietà delle progressioni geometriche. Si sa (204) che una progression geometrica è una serie di termini i quali, a riserva del primo e dell'ultimo, sono tutti alternativamente antecedenti e conseguenti d'una serie di ragioni eguali. Ora l'egualità di queste ragioni si manifesta per l'identità del quoziente che le esprime. Perciò la seguente formola può rappresentare qualunque progressione geometrica $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : \dots aq^n$.

254. In questa formola gli esponenti di q sono in progressione aritmetica, poichè a cagione di $q^0 = 1$ (135) si può scrivere $\div aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : \dots aq^n$. Facendo $a = 1$, quest'ultima formola diventa $\div q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4 : \dots q^n$, ed esprime la serie delle potenze intere di una quantità qualunque q ; onde le potenze successive e intere d'una medesima quantità forman sempre una progressione geometrica. Non così le potenze successive e frazionarie, perchè i loro esponenti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ecc. non sono in progressione aritmetica: onde *Se gli esponenti di diverse potenze d'una medesima quantità sono in progressione aritmetica, i termini affetti da questi esponenti sono in progressione geometrica.*

Esempj $\div q^2 : q^5 : q^8 : q^{11}$ ecc. $\div b^1 : b^3 : b^5 : b^7$ ecc.; in generale $\div aq^m : aq^{m+d} : aq^{m+2d} : aq^{m+3d}$ ecc., i cui esponenti sono in progressione aritmetica, e i cui termini sono evidentemente in progressione geometrica, poichè regna sempre fra essi uno stesso quoziente q^d .

255. Tornando alla formola generale $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$ ecc., osservo che il prodotto di due termini egualmente lontani dagli estremi è sempre uguale a quello di essi estremi, il quale similmente è uguale al prodotto degl'intermedi se il numero de' termini è pari, o al quadrato del medio se è impari. Di fatto $aq \times aq^3 = a. aq^4 = aq^2 \times aq^2$; lo stesso dunque si avvera in tutte le progressioni.

256. Osservo altresì che il primo termine della formola sta al terzo come il quadrato del primo al quadrato del secondo; poichè si ha $a : aq^2 :: a^2 : a^2q^2$, e parimente $a : aq^3 :: a^3 : a^3q^3$; in generale due termini qualunque stan-

no fra loro come il primo al secondo alzati alla potenza indicata dall'intervallo che separa i due termini dati: dunque la proprietà ha luogo in tutte le progressioni.

257. Si vede ancora dalla medesima formola che qualunque termine è uguale al prodotto del primo pel quoziente elevato ad una potenza indicata dal numero dei termini precedenti; il sesto termine, per esempio aq^5 , non è altro che il prodotto del primo termine a pel quoziente q elevato alla quinta potenza. Chiamando dunque ω il termine che si cerca, e n il numero di tutt' i termini della progressione, si avrà generalmente $\omega = aq^{n-1}$.

258. In fine sia s la somma dei termini d'una progressione geometrica qualunque, di cui conoscasi il primo termine a , l'ultimo ω , e il quoziente q ; ed essendo tutti i termini d'una progressione, a riserva dell'ultimo, antecedenti, si può rappresentare la somma degli antecedenti per $s - \omega$; essendo similmente tutt' i termini della progressione medesima, a riserva del primo, conseguenti, la somma dei conseguenti si potrà esprimere per $s - a$. Ma in una serie di ragioni geometriche eguali, e per conseguenza in qualsivisia progression geometrica, la somma degli antecedenti sta a quella de' conseguenti come un antecedente al suo conseguente (249); dunque $s - \omega : s - a :: a : aq$; donde si deduce

$$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}, \text{ formola che unita alla precedente risolve un}$$

problema analogo a quello già risoluto (216) nelle progressioni aritmetiche.

259. Date in una progressione geometrica tre delle cinque quantità seguenti, a primo termine, ω ultimo, n numero dei termini, s loro somma, q loro quoziente, trovare immediatamente l'una delle altre due.

Già si hanno (257, 258) l'equazioni, I.^a $\omega = aq^{n-1}$; II.^a $\omega = s - \left(\frac{s-a}{q} \right)$; e se i valori di a , q presi dall'una

si sostituiranno nell'altra, troveremo III.^a $\omega = \frac{sq^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$;

IV.^a $(s-\omega)\omega^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)a^{\frac{1}{n-1}}$; e poichè due qualunque di queste quattro danno la V.^a $aq^{n-1} = s - \left(\frac{s-a}{q} \right)$, avremo al solito (216) le venti formole così disposte.

Date.	Si ha.	FORMOLE.
260.	ω, s, n	$(s-a) a^{\frac{1}{n-1}} = (s-\omega) \omega^{\frac{1}{n-1}}$
261.	ω, q, n	$a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$
262.	ω, q, s	$a = \omega q - sq + s$
263.	q, n, s	$a = s \left(\frac{q-1}{q^n-1} \right)$
264.	a, q, n	$\omega = a q^{n-1}$
265.	a, n, s	$(s-\omega) \omega^{\frac{1}{n-1}} = (s-a) a^{\frac{1}{n-1}}$
266.	a, q, s	$\omega = s - \frac{(s-a)}{q}$
267.	q, n, s	$\omega = s q^{n-1} \left(\frac{q-1}{q^n-1} \right)$
268.	a, ω, n	$q = \sqrt[n-1]{\left(\frac{\omega}{a} \right)}$
269.	a, n, s	$q^n - \frac{s}{a} q + \frac{s}{a} - 1 = 0$
270.	a, ω, s	$q = \frac{s-a}{s-\omega}$
271.	ω, n, s	$q^n - \frac{s}{s-\omega} q^{n-1} + \frac{\omega}{s-\omega} = 0$
272.	a, ω, q	$n = 1 + \frac{L\omega - La}{Lq}$
273.	a, ω, s	$n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)}$
274.	a, q, s	$n = \frac{L(sq - s + a) - La}{Lq}$
275.	ω, q, s	$n = 1 + \frac{L\omega - L(\omega q - sq + s)}{Lq}$

	Date.	Si ha.	FORMOLE.
276.	a, ω, n		$s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\frac{1}{n-1} \omega^{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n-1} a^{\frac{1}{n-1}}}$
277.	a, q, n	s	$s = a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$
278.	a, ω, q		$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$
279.	ω, n, q		$s = \frac{\omega}{q^{n-1}} \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$

280. APPLICAZIONI. I. Si è cavato in cinque volte del vino da una botte, seguendo una progressione geometrica crescente, il cui ultimo termine è 243 fiaschi, ed il quoziente è 3: quanti fiaschi si sono cavati la prima volta?

Si conosce $\omega = 243$, $q = 3$, $n = 5$, onde (261)

$$a = \frac{\omega}{q^{n-1}} = \frac{243}{3^4} = \frac{243}{81} = 3$$
; cioè la prima volta si cavarono 3 fiaschi di vino.

II. Uno giocando raddoppia sempre la sua posta, e perde dieci volte di seguito; la prima volta giocò 3: quanto perde alla decima?

Si ha $a = 3^{\text{lire}}$, $q = 2$, $n = 10$; dunque (264) $\omega = aq^{n-1} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$.

III. Suppongo che la popolazione d'un paese ben costumato, libero ed abbondante sia cresciuta uniformemente ogni anno con tale rapidità che di dieci mila anime che vi erano prima, se ne trovino 14641 in capo a quattro anni: con qual progressione si è fatto questo aumento?

$a = 10000$, $\omega = 14641$, $n = 5$ (perchè al principiar dei quattro anni già si ha il primo termine 10000); dunque (268) $q \sqrt[n-1]{\left(\frac{\omega}{a}\right)} = \sqrt[4]{\frac{14641}{10000}} = \frac{11}{10}$, quoziente della progressione, onde le 10000 anime divennero sul fine del primo anno 11000, e perciò l'aumento annuale fu di $\frac{1}{10}$.

IV. Un litigante ostinato ha speso in varie liti 121000^{lire}. La prima gli è costata 1000^{lire}, l'ultima 81000^{lire}, e le spese delle altre liti sono medie proporzionali tra questi due estremi: si cerca il numero delle liti perdute.

$a = 1000^{\text{lire}}$, $\omega = 81000^{\text{lire}}$, $s = 121000^{\text{lire}}$; dunque (273)

$$n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)} = 1 + \frac{L81000 - L1000}{L120000 - L40000} =$$

$$1 + \frac{L \left(\frac{81000}{1000} \right)}{L \left(\frac{120000}{40000} \right)} = 1 + \frac{L81}{L3} = 1 + \frac{4L3}{L3} = 5.$$

V. Un dissipatore ha consumato in cinque mesi quanto aveva, quadruplicando in ogni mese la spesa che nel primo fu di 300 zecchini: cerco il suo patrimonio. $a = 300$, $q = 4$,

$n = 5$, onde (277) $s = a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = 300 \left(\frac{4^5 - 1}{3} \right) =$
 $100.1023 = 102300$ zecchini.

281. VI. Inserire un numero m di medj proporzionali geometrici tra due termini dati a , ω . Abbiamo a , ω , $n = m + 2$.

Ora (268) $q = \sqrt[n-1]{\left(\frac{\omega}{a}\right)} = \sqrt[m+1]{\left(\frac{\omega}{a}\right)}$; dunque la progressione cercata sarà

$$\div a : \sqrt[m+1]{a^m \omega} : \sqrt[m+1]{a^{m-1} \omega^2} : \sqrt[m+1]{a^{m-2} \omega^3} \dots : \omega.$$

Se vuol farsene un' applicazione inserendo quattro medj proporzionali tra a e ω , basta fare $m = 4$, e si avrà

$$\div a : \sqrt[5]{a^4 \omega} : \sqrt[5]{a^3 \omega^2} : \sqrt[5]{a^2 \omega^3} : \sqrt[5]{a \omega^4} : \omega.$$

282. VII. Tra i termini consecutivi d' una progressione geometrica inserire un numero p di medj proporzionali.

Sia rappresentata da $\div aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \text{ecc.}$ la progressione di cui si tratta: se inserite tra gli esponenti consecutivi de' suoi termini un numero p di medj proporzionali aritmetici, è chiaro (254) che i termini i quali avranno per esponenti questi medj aritmetici, saranno i medj proporzionali geometrici cercati: sicchè per inserire cinque di questi termini nella formola si scriverà

$$\div aq^0 : aq^{\frac{1}{6}} : aq^{\frac{2}{6}} : aq^{\frac{3}{6}} : aq^{\frac{4}{6}} : aq^{\frac{5}{6}} : aq^1 : aq^{\frac{7}{6}} : aq^{\frac{8}{6}}, \text{ ecc.}$$

283. OSSERVAZIONE. Egualmente che al num.^o 237 si

può osservare che una qualunque progressione geometrica $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : \text{ecc.}$ è una serie di termini derivati l'uno dall'altro con una stessa regola o legge di derivazione: consiste questa legge nel moltiplicare un termine qualunque per una stessa quantità q , per ricavare da esso il termine che lo segue.

C A P O XII.

DELLA REGOLA DEL TRE E DI ALCUNE ALTRE
CHE NE DIPENDONO.

284. **D**ATI tre termini, si ha spesso bisogno di conoscerne un quarto che sia loro proporzional-geometrico, e si sa (241) ch'è facile il trovarlo. La regola or *diretta* ed ora *inversa* (242) che si adopera, si chiama *regola del tre*, semplice applicazione della proprietà fondamentale delle proporzioni geometriche (240).

Dei tre dati termini, due sono *omogenei* o della medesima specie, l'altro è *solitario* o di specie diversa, a cui poi viene omogeneo il quarto cercato; e dei due omogenei, l'uno è con interrogazione, l'altro è senza. Ora per istabilire un metodo costante, *I tre termini si dispongono sempre in modo che l'omogeneo senza interrogazione occupi il primo luogo a sinistra, quindi segua il solitario, e in fine l'altro omogeneo*: avvertendo che se la regola sia *inversa*, il solitario e il suo omogeneo cercato dovranno esser *denominatori dell'unità* (242, 246). Dopo ciò si opera al solito (241).

Esempj. Quanto costano *lib.* 25 d'argento, supposto che *lib.* 1 costi 52^{lire}? Qui il termine solitario è 52^{lire}, l'omogeneo con interrogazione è *lib.* 25, l'altro è *lib.* 1;

dunque $1 : 52 :: 25 : x = \frac{25 \cdot 52}{1} = 1300^{\text{lire}}$: volendo il prezzo

di *lib.* 70, supposto che *lib.* 14 costino 714^{lire}, si fareb-

be $14 : 714 :: 70 : x = \frac{714 \cdot 70}{14} = 3570^{\text{lire}}$. Ma se si pro-

ponesse questo quesito: 57 artefici fanno una certa opera in 5 giorni, in quanto la faranno 19 artefici? La regola sarebbe *inversa*, perchè quanto è *minore* il numero dei lavoratori, tanto è *maggiore* il tempo necessario a terminare un

lavoro; dunque $57 : \frac{1}{5} :: 19 : \frac{1}{x}$ ed $x = \frac{5 \cdot 57}{19} = 15$ giorni.

285. Osservate 1.^o che se il primo dei tre termini abbia un fattor comune con uno o con ambedue gli altri, si può render più semplice il calcolo sopprimendo il comune fattore (250): così in vece di calcolar $66 : 14 :: 121 : x$, divisi per 2 i primi due termini, e per 11 il primo e il terzo, si calcola $3 : 7 :: 11 : x = \frac{77}{3}$.

286. Osservate 2.^o che le regole del tre inverse si conoscono paragonando il primo termine col secondo dopo aver fatta la disposizione insegnata (284). Se crescendo l'uno, deve crescere anche l'altro, la regola è diretta; al contrario se crescendo l'uno, deve l'altro diminuire, la regola è inversa. L'uso dà la facilità di fare questo giudizio.

287. Posto ciò, aggiungiamo due o tre esempj di queste due sorte di regole. I.^o Sei squadroni hanno consumato un magazzino di foraggio in 54 giorni: in quanti giorni l'avrebbero consumato 9 squadroni?

Quanto è *maggiore* il numero degli squadroni, tanto *minor* tempo ci vuole pel consumo medesimo. La regola è dunque inversa; perciò $6 : \frac{1}{54} :: 9 : \frac{1}{x}$; dunque $x = \frac{54 \cdot 6}{9} = 36$ giorni.

II.^o Sono state date 36 lire per distribuirsi a 32 poveri: quante ce ne vorrebbero per 72 poveri a cui si volesse dare la stessa elemosina?

Si ha $32 : 36 :: 72 : x$, che ridotta diviene $8 : 9 :: 72 : x$, e quindi $1 : 9 :: 9 : x = 81$.

III.^o Sapendosi che la lunghezza del metro sta a quella del braccio comune di Milano :: 1,6808 : 1, si cerca a quanti metri x corrisponderanno braccia 225 e 6 once, cioè braccia 225,5. Si ha $1,6808 : 1 :: 225,5 : x$, poichè quanto maggiore è il metro del braccio, cioè 1,6808 di 1, il numero delle braccia debb' essere altrettanto maggiore del numero dei metri:

avremo adunque $x = \frac{225,5 \cdot 1}{1,6808}$, $x = \frac{2255000}{16808} = 134,162$

prossimamente. Tale è la regola nella riduzione di tutte le misure.

288. IV.^o Si proponga ora questo quesito: 20 uomini hanno fatte 160 tese di lavoro in 15 giorni: quante ne farebbero in 12 giorni 30 uomini?

Questa è una *regola del tre composta*, così chiamata perchè i due termini omogenei sono ragioni composte. In fatti il lavoro risulta non solo dalla ragione 20 : 30 degli uomini, ma

anche dall' altra $15 : 12$ dei giorni. Perciò moltiplicando gli antecedenti e i conseguenti (251), i termini omogenei saranno 20×15 e 30×12 , e si avrà $20 \times 15 : 160 :: 30 \times 12 : x = 192$.

289. V.^o Ma sia proposto quest' altro quesito: 20 uomini scavando un canale debbono asciugare giornalmente 36 piedi cubici d' acqua per fare in un certo tempo 160 tese di lavoro: quante ne faranno nel tempo stesso 30 uomini asciugando giornalmente 64 piedi cubici d' acqua?

È chiaro che ad un *maggior* numero di lavoranti corrispondendo un *maggior* lavoro, la regola per questa parte è diretta; ma poichè ad un *maggiore* impedimento, quale è la necessità di asciugare l' acqua, corrisponde un lavoro *minore*, la regola per l' altra parte è inversa (286). Quindi i due lavori sono in ragione diretta $20 : 30$ degli uomini, e in ragione inversa $\frac{1}{36} : \frac{1}{64}$ dei piedi cubici d' acqua; componendo

dunque le ragioni, si avrà $\frac{20}{36} : 160 :: \frac{30}{64} : x = 135$.

La regola del tre composta si chiama dagli aritmetici ora regola del *cinque*, ora regola del *sette*, ora del *nove*, ecc., secondo che sono due, tre o quattro ecc. i rapporti che si debbono moltiplicare tra di loro per istituire la proporzione (*).

(*) Nel far uso della regola del tre possono i meno cauti prendere dei grandi sbagli; non sarà dunque inutile l'entrare su di ciò in qualche disamina. Siano proposti questi quesiti: I. *Per coprire un muro quadrato largo 6 braccia vi vogliono 20 braccia di certa stoffa; quante braccia ve ne vorranno per coprire un altro muro quadrato largo 10 braccia?* II. *Vi sono due palle formate d'eguale materia e poste ad eguale distanza da uno che le mira. Questi le vede sotto i diametri di 5 e di 9 pollici; supponendo che la prima pesi 25¹/₂ libbre, quanto peserà la seconda?* III. *Un sasso lanciato in alto verticalmente percorre nel primo secondo di tempo 20 metri d' altezza; quanti ne avrà percorsi dopo 8 secondi?* ecc. Se tu presenti questi quesiti ad un aritmetico il quale non badi ad altro che alla cantilena con cui si enuncia un quesito di regola del tre, egli te gli scioglie tutti colla solita proporzione, e ritrova che per coprir quel secondo muro vi vorranno braccia $33 \frac{1}{3}$ di quella stoffa; che la seconda palla pesa libb. 45; che dopo gli 8 secondi il sasso sarà ascenso a metri 160 di altezza; quando veramente la stof-

290. Ecco alcune altre regole di grandissimo uso nella società.

Regola di compagnia. Tre amici hanno fatto borsa comune pel giuoco. Il primo ha messi 117 scudi; il secondo 72; il terzo 54. Essi ne hanno perduti 93: quanto perdè ciascuno?

fa che coprirà quel muro sarà *braccia* $55\frac{5}{9}$: quella seconda palla peserà lib. $145\frac{4}{5}$; e il sasso al tempo indicato già da circa 3 secondi sarà ricaduto in terra, non essendo salito che a metri $33\frac{3}{5}$ prossimamente.

Questi esempj serviranno a convincere che non bisogna mai adoperare la regola del tre se non quando è manifesto che l'incognita debba essere geometricamente proporzionale ad una data. Una quantità può dipendere in infinite maniere da un'altra; la proporzionalità non è che una sola fra tutte queste maniere di dipendenza. Sia x una incognita, m una data; ogni quesito di regola del tre semplice diretta conduce ad una equazione della seguente forma $x = Am$, dove A è un coefficiente *costante*, che cioè resta sempre lo stesso anche mutando la m , purchè non si mutino gli altri dati della quistione. Per esempio nel quesito II del testo si aveva

$x = \frac{36}{32} \cdot 72$; se in vece di 72 i secondi poveri fossero stati

100, sarebbe venuto $x = \frac{36}{32} \cdot 100$: se 200, $x = \frac{36}{32} \cdot 200$, ecc., restando

sempre il coefficiente $\frac{36}{32}$. Un quesito di regola del tre semplice in-

versa conduce ad una equazione della forma $x = \frac{A}{m}$; e generalmente ogni

quesito di regola del tre composta conduce ad una equazione $x = A \frac{mnp \dots}{fgh \dots}$, essendo A un coefficiente costante formato dalle date

senza interrogazione; e fra le date con interrogazione: $m, n, p \dots$ quelle della ragione diretta, ed $f, g, h \dots$ quelle della ragione inversa. Ma la incognita x può essere eguale a una quantità fatta di m in diversa maniera di Am . Così tra i quesiti superiori il primo suppone $x = Am^2$, il secondo $x = Am^3$, il terzo $x = Am - Bm^2$, ecc., come i lettori sapranno a suo tempo. Il trovare la forma delle formole contenenti le quantità date, a cui debbono essere eguali le incognite, è in somma l'oggetto di tutte le mate-

Convien dividere la perdita totale in proporzione dei tre capitali 117, 72, 54: si dirà dunque: il capitale totale 243 alla perdita totale 93, come il capitale parziale di un giuocatore alla rispettiva sua perdita: ecco l'operazione:

$$243 : 93 :: \left\{ \begin{array}{l} 117 : x = \frac{117 \cdot 93}{243} = 44 + \frac{189}{243} \\ 72 : x = \frac{72 \cdot 93}{243} = 27 + \frac{135}{243} \\ 54 : x = \frac{54 \cdot 93}{243} = 20 + \frac{162}{243} \end{array} \right.$$

Som. 93

Simili operazioni si verificano aggiungendo le perdite o i guadagni di tutt' i socj; la somma eguaglia sempre o la perdita totale o il guadagno.

291. Quando i capitali messi a frutto sono tenuti per diversi tempi, la regola di compagnia chiamasi *composta*. Tre

matiche; non è quì luogo di parlarne, ma quì benissimo si può comprendere che ciò può essere in infiniti modi, e che il volere assumere per tutte le quistioni la forma *Am* è un volere errare stranamente.

Se dunque è così facile ingannarsi, come potremo accertarci del quando abbia ad usarsi la regola di proporzione? Richiedesi esame e ragionamento. Ecco alcune riflessioni per facilitar l'uno e l'altro. La proporzionalità può venire da tre principj, o da una necessità nell'ordine fisico o metafisico che la esiga; o da una convenzione umana che ragionevolmente l'introduca; o dal nostro arbitrio, che quantunque non a tutto rigore, pure per qualche motivo la presupponga. Per esempio, che in fisica le forze si abbiano a prendere proporzionali alle velocità, è necessario, perchè è legge di natura; che i prezzi delle merci debbano essere proporzionali alle misure, è cosa conveniente, ma può essere altrimenti, e in fatti nei prezzi delle pietre preziose si segue la ragione dei quadrati dei pesi; che nel quesito IV del testo s'abbia a prendere il lavoro proporzionale al tempo, è una nostra ¹³⁶⁰ supposizione, e vi possono essere delle ragioni in contrario, perchè la fatica più a lungo protratta scema la forza de' lavoratori e ritarda il lavoro: similmente nel V per intorbidar le proporzioni può riflettersi che affondandosi la fossa, cresce per questo solo la difficoltà di cavar acqua. Corrispondentemente i risultamenti sono sicuri, ragionevoli, approssimati. Se esaminando la dipendenza della quantità incognita dalle date, si vegga che la proporzionalità non può accettarsi sotto niuno di questi tre aspetti, si cerchi la verità per altra via: questa è fallace.

amici A , B , C hanno guadagnato 1660^{lir.} 12.^{s.} con i fondi messi in accomandita. Si scioglie la società, e vuol dividersi il guadagno in ragione dei capitali. Quello di A è di 4500^{lir.} per sei mesi; quello di B è di 3000 per otto mesi; quello di C è di 2250 per dieci mesi.

Moltiplicate subito ciascun capitale pel tempo ch'è stato impiegato, e dite poi: La somma di tutti questi prodotti è al guadagno totale, come ciascun prodotto in particolare è alla parte proporzionale del guadagno che cerco.

$$\begin{array}{r} 4500 \\ 6 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3000 \\ 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2250 \\ 10 \\ \hline \end{array}$$

$$A \dots 27000; \quad B \dots 24000; \quad C \dots 22500$$

La somma di questi prodotti è 73500, ed essendo 12^{s.} = 0, 6 di lira, 10 ho

$$73500 : 1660, 6 :: \left\{ \begin{array}{l} 27000 : x \\ 24000 : x' \\ 22500 : x'' \end{array} \right.$$

ovvero dividendo per 300 il primo termine e ciascuno dei terzi,

$$245 : 1660, 6 :: \left\{ \begin{array}{l} 90 : x = 610 + \frac{4}{245} \\ 80 : x' = 542 + \frac{58}{245} \\ 75 : x'' = 508 + \frac{85}{245} \end{array} \right.$$

$$\text{Som. } 1660 + \frac{147}{245}$$

Il rotto $\frac{147}{245}$ si riduce a $\frac{3}{5} = 12$ soldi.

292. *Regola d'alligazione.* Consiste questa nel trovare il prezzo medio o ragguagliato di una mescolanza composta di molte cose diverse, delle quali sono dati i prezzi e le quantità; o nel trovare qual porzione di queste cose convenga prendere, onde la mescolanza abbia un dato prezzo.

Per risolvere i varj problemi sulle alligazioni propongono gli aritmetici alcune regole che, oltre essere senza dimostrazione, non lasciano ben comprendere la natura della quistione. Non sarà dunque inutile richiamare questa dottrina ai principj algebrici, tanto più che sarà in seguito facile dedurne le diverse regole aritmetiche.

Siano $p, q, r, s \dots$ le quantità da mescolarsi, $a, b, c, d \dots$ i rispettivi loro prezzi, m il prezzo della mescolanza, e Q la

sua quantità. Avverto che colle diverse lettere $p, q, r, s \dots$ intendo numeri esprimenti le misure di varie quantità di diversa qualità, ma tutte suscettibili d'essere misurate alla stessa maniera. Per esempio, se si vogliono mischiare diverse qualità di liquidi, p esprimerà un numero di litri del primo liquido, q un numero di litri del secondo, ecc., e Q un numero di litri del liquido misto. Questi numeri possono essere cogniti ed incogniti. I prezzi poi sono sempre riferiti all'unità di misura applicata alle diverse quantità. Così dicendo il prezzo di p è a , intendo che l'unità di misura applicata alla quantità p (per esempio un litro riempito del liquido p) vale a lire. Dicasi lo stesso se le misure fossero in pesi, ecc. Anche i prezzi $a, b, c, d \dots$ debbono essere tutti omogenei, cioè espressi o tutti in lire, o tutti in soldi, ecc.

Ciò premesso, se l'unità di p vale a , p varrà ap : così $q, r, s \dots$ varranno $bq, cr, ds \dots$. La quantità Q della mescolanza sarà la somma $p + q + r + s + \dots$ delle quantità mescolate (quantunque i fisici abbiano in alcuni casi su di ciò di che obbiettare), e quindi il suo prezzo totale $m(p + q + r + s + \dots)$. Ma il prezzo totale del composto deve eguagliare la somma dei prezzi totali dei componenti, dunque

(A) $ap + bq + cr + ds + \dots = m(p + q + r + s + \dots)$.
da questa equazione pendono tutti i problemi sulle alligazioni. Eccone l'applicazione ai casi più frequenti:

1.º Caso. Date le quantità mescolate $p, q, r \dots$ coi rispettivi loro prezzi, trovare il prezzo m della mescolanza.

L'equazione (A) dà
$$m = \frac{ap + bq + cr + \dots}{p + q + r + \dots},$$

dove si legge la regola che danno gli aritmetici.

Esempio. A qual prezzo debbe vendersi il marco di una lega composto con sei marchi d'argento a 48 lire e 12 marchi d'argento a 36 lire per non perdere nè guadagnare? Abbiamo $p = 6, q = 12; a = 48, b = 36$, dunque il prezzo cercato

$$m = \frac{48 \cdot 6 + 36 \cdot 12}{6 + 12} = 40 \text{ lire.}$$

293. 2.º Caso. Dati i prezzi $a, b, c \dots$ delle quantità da mescolarsi e il prezzo m della mescolanza, si cercano le quantità $p, q, r \dots$.

Vedesi subito che il problema è indeterminato, perchè si hanno più incognite e la sola equazione (A), (127): esso dunque è capace di un numero infinito di soluzioni. Vi è però un metodo particolare di soluzione applicabile al no-

stro caso, che merita di essere osservato, e di cui in fatti ci serviremo.

Siano due sole le quantità da mescolarsi, onde l'equazione (A) si riduca $ap + bq = m(p + q)$. A questa soddisfanno i seguenti valori $p = \alpha(m - b)$; $q = \alpha(a - m)$ qualunque sia α : non vi è che provare la sostituzione per restarne convinto. Assumeremo dunque questi due valori per le incognite p, q , dando all'arbitraria α quel valore che più ci piace. La regola d'aritmetica suppone $\alpha = 1$.

Esempio. Un mercante di vino vorrebbe mescolare del vino a 15 soldi il fiasco con vino ad 8 soldi per averne di quello ch'ei potesse vendere a 12 soldi il fiasco, quanto dovrà prenderne di ciascuna qualità?

Abbiamo $a = 15$, $b = 8$, $m = 12$, dunque $p = 4\alpha$, $q = 3\alpha$, e possiamo dare ad α quel valore che più ci aggrada.

Facciamo $\alpha = 1$, e quindi $p = 4$, $q = 3$. Dunque concludo che tre fiaschi di vino ad 8 soldi mescolati con 4 fiaschi a 15 faranno del vino a 12 soldi.

Se le quantità da mescolarsi sono tre, onde si abbia l'equazione $ap + bp + cr = m(p + q + r)$, soddisfaranno i valori

$$\begin{aligned} p &= \alpha(b - m) + \beta(c - m) \\ q &= -\alpha(a - m) + \gamma(c - m) \\ r &= -\beta(a - m) - \gamma(b - m) \end{aligned}$$

essendo α, β, γ , qualunque, come può provarsi. Avremo quindi un maggior arbitrio.

Esempio. Voglia il mercante di vino mischiar tre sorte di vini a 15, 10 e 8 soldi il fiasco per vendere il misto a 12 soldi. Avremo $a = 15$, $b = 10$, $c = 8$, $m = 12$: quindi

$$p = -2\alpha - 4\beta; \quad q = -3\alpha - 4\gamma, \quad r = -3\beta + 2\gamma.$$

Facciamo $\alpha = \beta = -1$, $\gamma = 0$, e concluderemo che 6 fiaschi di vino a 15 soldi, 3 a 10 soldi, 3 a 8 soldi mescolati insieme faranno 12 fiaschi di vino a 12 soldi.

Se le quantità da mischiarsi fossero quattro, soddisfaranno in generale all'equazione (A) i valori.

$$(B) \begin{cases} p = \alpha(b - m) + \beta(c - m) + \gamma(d - m) \\ q = -\alpha(a - m) + \delta(c - m) + \varepsilon(d - m) \\ r = -\beta(a - m) - \delta(b - m) + \zeta(d - m) \\ s = -\gamma(a - m) - \varepsilon(b - m) - \zeta(c - m) \end{cases}$$

dove si hanno sei arbitrarie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. È facile ve-

dere la formazione di questi valori generali pel caso di un maggior numero di componenti. Le arbitrarie $\alpha, \beta, \gamma \dots$ che crescono in numero anche oltre il numero delle $p, q, r \dots$ (ciò che è assai osservabile), lasciano a colui che deve far la mistura un arbitrio di cui può giovare per diminuire o accrescere le quantità d'alcuno de' componenti secondo l'interesse particolare ch'egli può avervi. Le regole d'aritmetica non sono che casi assai particolari e imperfetti delle formole precedenti.

3.^o Caso. Sta tutto come nel caso precedente, colla sola differenza che sono date alcune fra le $p, q, r \dots$.

Se fossero date tutte, a riserva di una, il problema sarebbe determinato; diversamente è sempre indeterminato, ma però tanto meno del precedente quante più si conoscono delle $p, q, r \dots$. Le regole fondate sulle proporzioni che quì danno gli aritmetici sono poco felici. La maniera più semplice è di servirsi a dirittura dell'equazione (A) ridotta a questa forma.

(C) $(a - m)p + (b - m)q + (c - m)r + (d - m)s + \dots = 0$, ove dopo aver messe tutte le quantità cognite, quelle che rimangono si prendano tutte arbitrarie, fuori d'una.

Esempio. In tempo di carestia un fornajo vuol far pane con orzo, segale e grano per venderlo 4 soldi la libbra. Ha staja $8\frac{1}{2}$ di grano per far pane a 5 soldi. Il pane di segale costerebbe 3 soldi, 8 den.; quello d'orzo 1 soldo, 6 den. Quanta segale ed orzo dovrà egli unire al grano?

Abbiamo $a = 60^{\text{den.}}$, $b = 44^{\text{den.}}$, $c = 18^{\text{den.}}$, $m = 48^{\text{den.}}$, $p = 8\frac{1}{2}$. L'equazione (C) si riduce a $12. 8\frac{1}{2} - 4q - 3r = 0$. Possiamo porre arbitrariamente $q = 3$, e dall'equazione sorte $r = 3$. Potrà dunque il fornajo mischiare quel grano con 3 staja di segale e 3 di orzo.

4.^o Caso. Sta tutto come nel caso 2.^o, ma solamente si ha di più la quantità $Q = p + q + r + s + \dots$ della mescolanza. Anche quì piuttosto che usar le regole d'aritmetica, prenderemo l'equazione (A), ove il secondo membro è tutto cognito, e disporremo arbitrariamente delle $p, q, r \dots$ fuori di una.

Esempio. Si hanno tre sorte di caffè: la prima è da 50 soldi la libbra; la seconda da 38; la terza da 24: per farne 64 libbre da vendersi a 30 soldi, come si dovranno mescolare?

Abbiamo $a = 50$, $b = 38$, $c = 24$, $m = 30$, $Q = 64$. L'equazione (A) diventa $50p + 38q + 24r = 30 \cdot 64$. Dispo-

nendo di due delle p, q, r col porre arbitrariamente $p = q = 9\frac{3}{5}$, viene $r = 44\frac{4}{5}$, e questi valori soddisfanno alla quistione.

OSSERVAZIONE. Qualora si volessero $p, q, r \dots$ in numeri interi, il caso 2.^o può risolversi ancora alla stessa maniera, mettendo per le arbitrarie $\alpha, \beta, \gamma \dots$ dei numeri interi: ma questi due ultimi casi abbisognerebbero delle dottrine che si daranno quì dopo, parlando dei problemi indeterminati.

294. La *regola di falsa posizione* serve a trovare un numero incognito per mezzo di un numero supposto. Deb-
basi trovar, per esempio, un numero di cui la metà, il quarto e il quinto facciano 456.

Suppongo 20 il numero cercato; ma $\frac{20}{2} + \frac{20}{4} + \frac{20}{5} = 19$ dunque la supposizione è falsa. Per altro, giacchè due quantità sono tra loro come le lor parti simili (250) posso riguardar l'una come la somma degli antecedenti d'una serie di termini proporzionali, l'altra come la somma de' conseguenti: ora queste somme sono tra loro (249) come un numero qualunque d'antecedenti a un egual numero di conseguenti; dunque $\frac{20}{2} + \frac{20}{4} + \frac{20}{5} (= 19)$ sono a $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} (= 456)$ come 20 al numero cercato x , cioè $19 : 456 :: 20 : x = 480$, valore che si sarebbe anche avuto resolvendo l'equazione accennata $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 456$.

Quanto tempo vi vorrebbe a riempire una vasca apren-
do a un tempo stesso quattro orifizj, il primo dei quali la riempirebbe da sè solo in 2 ore, il secondo in 3, il terzo in 5, il quarto in 6?

Suppongo che vi voglia 1 ora; dunque il primo orifizio ne empirebbe in questo tempo $\frac{1}{2}$, il secondo $\frac{1}{3}$, il terzo $\frac{1}{5}$, e il quarto $\frac{1}{6}$; ora $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{216}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{6}{5}$, e per-
ciò $\frac{6}{5} : 1$ ovvero $6 : 5 :: 1 : x = \frac{5}{6} = 50'$

Tre negozianti hanno perduto in società 1400^{lire} da ri-
partirsi a proporzione dei capitali; quello del primo egua-

glia i due altri, e quello del secondo è doppio di quello del terzo: cerco la perdita di ciascuno.

Suppongo il capitale del terzo 3^{lire} ; dunque quello del secondo è 6^{lire} , e quello del primo 9^{lire} , e però

$$18 : 2400 \text{ ovvero } 3 : 400 :: \begin{cases} 3 : x = 400 \\ 6 : x' = 800 \\ 9 : x'' = 1200 \end{cases}$$

ed altri infiniti numeri formati come 18 avrebbero dato lo stesso risultamento (*).

295. Spesso non basta una sola supposizione per risolvere questi problemi; allora se ne fa una seconda: di quì la *regola di doppia falsa posizione*.

Esempio. Per impegnare al lavoro un artefice pigro gli si promettono 3 lire il giorno, con che in ciascun giorno in cui non lavora, in vece di guadagnare, perda del suo 24 soldi; dopo quindici giorni riceve solamente 24 lire: quanti giorni ha lavorato?

Suppongo 6 giorni: ma in tal caso avrebbe ricevuto $7^{\text{lire}} 4^{\text{sol.}}$, mentre ha ricevuto 24^{lire} ; dunque io sono in errore di $16^{\text{lire}} 16^{\text{sol.}}$, cioè di $16,8^{\text{lire}}$ in meno; donde rilevo che l'artefice ha travagliato più che sei giorni. Suppongo dunque 12 giorni; ma allora avrebbe ricevuto $32^{\text{lire}} 8^{\text{sol.}}$, mentre ha solo ricevuto 24^{lire} ; dunque l'errore è di $8^{\text{lire}} 8^{\text{sol.}}$, cioè di $8,4^{\text{lire}}$ in più.

Dispongo così i numeri supposti e i corrispondenti errori

Pos. I.	6 ^g	Pos. II.	12 ^g
Er. —	16,8	Er. +	8,4

e moltiplico la prima posizione pel secondo errore, la seconda pel primo. I prodotti sono 50,4 e 201,6: li sommo, divido la somma 252 per la somma degli errori 25,2 (i segni +, — non si attendono) e ho 10, numero cercato. Se i numeri supposti avessero dati due errori con lo stesso segno,

(*) Questo quesito è diverso dai precedenti in quanto che non si fa quì il supposto dei capitali per trovare i capitali che restano ancora incogniti, ma solamente per distribuire proporzionalmente la perdita. Chiamato x il capitale del terzo, è $2x$ quello del secondo, $3x$ quello del primo, $6x$ il capitale totale: fatte le proporzioni come nel testo, l' x svanisce e si hanno gli stessi risultamenti. Appartiene dunque questo quesito più alla regola di compagnia che a quella di falsa posizione.

avrei divisa la differenza dei prodotti per quella degli errori: così, supposto che l'artefice abbia travagliato non più 12 giorni, ma 9, l'errore in meno sarà di $4,2^{\text{lire}}$; dunque $9 \times 16,8 = 151,2$ e $6 \times 4,2 = 25,2$; e poi $151,2 - 25,2 = 126$; $16,8 - 4,2 = 12,6$, ed in fine $\frac{126}{12,6} = 10$ come sopra.

296. Dunque la regola consiste nel supporre un numero in cui si sperimentano le condizioni del problema, e se vi soddisfa, il problema è risoluto. Ma se non vi soddisfa, si nota l'errore o positivo o negativo, e si suppone un altro numero di cui pur si nota l'errore. Quindi si moltiplica la prima posizione pel secondo errore, e la seconda pel primo: se i segni sono diversi, la somma de' prodotti si divide per quella degli errori; se i segni sono gli stessi, si divide la differenza de' prodotti per quella degli errori: il quoziente è il numero cercato.

Altro esempio. Giuocando insieme due amici, quello che giuoca meglio scommette $12^{\text{sol.}}$ contro 8 ad ogni partita. Dopo averne fatte dieci, l'altro gli paga $20^{\text{sol.}}$; quante partite ha vinte?

Sieno 6; l'altro dunque ne ha vinte 4, e sarebbero pari: il primo errore è perciò -20 . Ma sieno 8; l'altro dunque gli sarà debitore di $40^{\text{sol.}}$, e il secondo errore sarà $+20$. dal che si vede senza calcolo che ne ha vinte 7. In fatti la somma dei prodotti è 280; quella degli errori è 40 e $\frac{280}{40} = 7$.

Si può applicare questa regola a molti di quei problemi che abbiamo già risolti. Si può anche abbreviarla nella maniera seguente.

297. Dopo avere supposti due numeri e determinati i loro errori, moltiplicate la differenza de' due numeri pel più piccolo errore; e dividetene il prodotto per la somma degli errori o per la loro differenza, secondo che hanno ambedue un diverso segno o lo stesso: il quoziente è quello che debbe aggiungersi o sottrarsi dal numero che ha dato il più piccolo errore. Con errori di segno diverso, si aggiunge quando questo numero è il minore dei due, e si sottrae quando è il maggiore. Con errori di medesimo segno, si sottrae quando questo numero è il minore, e si aggiunge quando è il maggiore. La somma o il resto darà il numero cercato.

Quattro servitori ricevono delle gratificazioni; il più vecchio ha 200^{lire} più del secondo; questo 300^{lire} più del terzo; il terzo 400^{lire} più dell'ultimo, e la gratificazione dell'ultimo è un quarto di quella del primo: quanto ha ciascuno?

Suppongo che il primo abbia 2000^{lire} nel qual caso l'ultimo ne ha 1100; ma un quarto di 2000^{lire} è 500^{lire}; dunque Er. + 600. Suppongo pertanto che il più antico abbia 1600^{lire}, il cui quarto è 400^{lire}; ma allora l'ultimo ha 700^{lire}; dunque Er. + 300. Moltiplico la differenza dei due supposti pel più piccolo errore; il prodotto è 120000^{lire} che divido per 300, differenza de' due errori; il quoziente è 400^{lire}. Ora il numero che corrisponde al più piccolo errore è il più piccolo, e i segni sono i medesimi; bisogna dunque sottrarre 400 da 1600 per avere il numero cercato 1200^{lire}.

298. Per dimostrar questa regola basta sciogliere questo problema: *Date le condizioni per trovare un certo numero, dati due numeri o posizioni che non le adempiano, e dati gli errori risultanti dalle posizioni, trovare il numero.*

Sia x questo numero, $gx = c$ l'equazione esprime le condizioni per trovarlo, a, b le due posizioni, e m, n i due errori primieramente con diverso segno; dunque $gx = c$ si cangerà in $ga = c \pm m$, $gb = c \mp n$, equazioni che moltiplicate l'una per n , l'altra per m ; e poi sommate, divengono $gan + gbm = cn + cm$, onde $\frac{c}{g} = x = \frac{an + bm}{n + m}$, come prescrive la regola (296). Che se gli errori abbiano il segno stesso, l'equazioni saranno $ga = c \pm m$, $gb = c \pm n$, che moltiplicate l'una per n , l'altra per m , e poi sottratte, danno $gan - gbm = cn - cm$, onde $\frac{c}{g} = x = \frac{an - bm}{n - m}$, come parimente prescrive la regola (296).

Quanto al compendio (297), sia $\pm y$ la correzione da farsi al numero a che ha dato il più piccolo errore $\pm m$; dunque $a \pm y = x = \frac{an \pm bm}{n \pm m}$, cioè $\pm y = \frac{\pm bm \mp am}{n \pm m} = \frac{\pm m(b-a)}{n \pm m}$, ed $x = a \pm y = a \pm \frac{m(b-a)}{n \pm m}$, come insegnammo (297).

299. Vedesi che la regola di doppia falsa posizione può usarsi per trovare il valor dell'incognita in quei problemi

che conducono ad equazioni di primo grado. Se le incognite sono in maggior numero, ne è fastidiosa l'applicazione, e gli aritmetici istessi vi hanno rinunciato. Non si usa pei problemi di grado più elevato (*).

300. La *regola d'interesse* ha per oggetto di stabilire la somma dovuta pel danaro impiegato con certe condizioni. Essa può variarsi all'infinito, il che rende in molti casi il calcolo complicato assai. Noi ci limiteremo ai più comuni.

1.° Un usuraio ha dato 15600^{lire} all'8 per cento l'anno: si domanda la somma che se gli deve in cinque anni per rimborsarlo e pagargli l'interesse del suo danaro.

Sia $p = 15600^{\text{lire}}$ che si chiama *principale*, *fondo* o *capitale*; sia $t = 5$ anni, tempo in cui corre l'interesse; sia r il frutto di 1^{lira} in un anno o nel tempo che 100^{lire} ne fruttano 8 (si trova r dicendo: se 100^{lire} ne danno 8, cosa darà nello stesso tempo 1^{lira}? $100 : 8 :: 1 : r = 0,08$): sia finalmente s la somma dovuta pel fondo e per gl'interessi.

(*) Qualora la regola di doppia falsa posizione si applichi ai problemi di grado più elevato, e in generale al ritrovamento del valore di x in una equazione $X = c$, dove X rappresenti una formula nota che in qualunque modo contenga l'incognita x , non si giungerà a dirittura al vero valore come nelle equazioni di primo grado, ma se ne otterrà uno falso o al più uno approssimato. Il decidere se debba aversi un valore approssimato o no spetta ad un'analisi che qui non può aver luogo. Per le equazioni di secondo grado, essendo $x^2 + px = q$; potrà aversi l'approssimazione quando $p > 1$, astrazion fatta dal segno. La ragione è che in tal caso il valore di x è eguale ad una serie il cui primo termine è $\frac{an \pm hm}{n \pm m}$, e gli altri termini procedono per le potenze crescenti

di $\frac{1}{p}$; siccome dunque si trascurano questi termini, l'errore è piccolo se $p > 1$, e grande se $p = 1$, o $p < 1$. Ma anche nei problemi di primo grado, che scritti in algebra danno una equazione,

come $\frac{a + bx}{c + ex} = f$, in cui l'incognita entra nei denominatori, se

si applica la regola suddetta, si hanno risultamenti falsi; e la ragione è che allora più non ha luogo la dimostrazione del n° 298. Non è però difficile in questi casi invertire in tal maniera l'enunciato del problema che l'incognita non abbia ad entrare in denominatori, e allora la regola serve.

Ora se 1 lira in un anno frutta r , p lire in t anni frutteranno $x = prt$ (288): sommando dunque il capitale p e l'interesse prt , si avrà in generale la somma domandata

$$s = p + prt; \text{ donde si ricava } p = \frac{s}{rt+1} \dots r = \frac{s-p}{pt} \dots t = \frac{s-p}{pr} :$$

sostituiti i valori, viene $s = 15600 + 15600 \times 0,08 \times 5 = 21840^{\text{lire}}$. Proponendo la questione così: In capo a cinque anni è stata pagata per capitale e interessi all'8 per cento la somma di 21840^{lire} : qual era il fondo? Bisognava sostitui-

re questi valori nella formola $p = \frac{s}{rt+1}$, che avrebbe dato 15600^{lire} ; così troveremo il tempo o l'interesse, date le altre tre cose.

301. 2.^o Un negoziante dee pagar 1000^{lire} l'anno, ma per bisogno di danaro chiede di ritenerle per pagare poi gli arretrati con gl'interessi al 5 per 100: che dovrà dopo 8 anni?

Sia a la *rendita*, *annualità* o *pensione* da pagarsi ogni anno; sia r l'interesse d'una lira in un anno; t il tempo dopo di cui saran pagati gl'interessi e gli arretrati; s la loro somma, e dico: La rendita si paga al fine dell'anno, onde il negoziante pel primo anno non debbe alcun interesse, ma al fine del second'anno dovrà ar , al fine del terzo $2ar$, e così di seguito sino al fine dell'ultimo in cui dovrà $ar(t-1)$. Ora quest'interessi formano una progressione aritmetica, il cui primo termine è zero, l'ultimo è $ar(t-1)$, e il numero de' termini è t . La loro somma sarà dunque (233) $\frac{art(t-1)}{2}$, che riunita al debito della

rendita dee formar la somma degli arretrati e degl'interessi; dunque $s = art \frac{(t-1)}{2} + at = [r(t-1) + 2] \frac{at}{2}$;

donde si ricava $\dots a = \frac{2s}{[r(t-1)+2]t} \dots r = \frac{2(s-at)}{at(t-1)} \dots$

$$t = \sqrt{\left\{ \frac{2s}{ar} + \left(\frac{2-r}{2r} \right)^2 \right\} + \frac{r-2}{2r}}.$$

Sostituendo i valori, si troverà $s = 0,05 \times 7 + 2 \times \frac{8000}{2} = 9400^{\text{lire}}$.

302. Questi quesiti appartengono alla regola d'interesse *semplice*. I due seguenti si risolvono per la regola d'inte-

resse *composto*: si chiama così il frutto del capitale e dei frutti di esso capitale.

3.^o Una parte dei beni di un pupillo consiste in 20000^{lire} impiegate al 5 per 100. In capo a un anno questa somma è resa col frutto pattuito; ma trovatone subito l'impiego allo stesso frutto, si forma un nuovo capitale delle 20000^{lire} e del frutto prodotto in un anno; così sono impiegati al finir del terz'anno il fondo e i frutti del secondo, e così per sei anni: che avrà il pupillo per questa parte?

Sia $p = 20000^{\text{lire}}$ che sono qui il principale, sia $t = 6$ anni, $s =$ alla somma cercata, $r =$ all'interesse semplice di una lira, $q = 1^{\text{lira}} + r =$ ad una lira col suo interesse (si trova q con questa proporzione: se 100^{lire} ne danno 105 al fin d'un anno, che darà 1^{lira}? cioè $100 : 105 :: 1 : q = 1,05$). Ora se 1^{lira} capitale produce q capitale e frutto in un anno, q capitale produrrà q^2 capitale e frutto nel secondo, poichè $1 : q :: q : q^2$; onde la somma dovuta per 1^{lira} e pel suo interesse in due anni sarà q^2 ; così sarà q^3 per 3 anni, e q^t per un numero t di anni. Ma poichè 1^{lira} produce q^t in un tempo t , anche p^{lire} produrranno $p q^t$ nel tempo medesimo: e perciò $s = p q^t = 20000 \times 1,05^6 = 20000 \times 1,3401 = 26802^{\text{lire}}$, meno quattro o cinque soldi.

303. 4.^o Un banchiere riscosse nel 1776 una rendita di 2400^{lire} che impiegò al 4 per 100 nel 1777, onde al fine di quest'anno ricevè 2400^{lire} della rendita e 96^{lire} dell'interesse; e così impiegò ogni anno fino al 1784 la rendita dell'anno precedente con gl'interessi degli altri anni: se al finir del 1783 i suoi debitori lo avessero rimborsato, quanto avrebbe ricevuto?

Sia $a = 2400^{\text{lire}}$, $t = 8$ anni, $r = 0,04$, interesse annuo di 1^{lira}, $q = 1 + r = 1,04$, s somma cercata. Sarà a il credito del banchiere nel 1776; $2a + ar (= a + aq)$ il suo credito nel 1777; $a + a + aq + ar + arq (= a + aq + aq^2)$ il suo credito nel 1778, e così successivamente fino al suo credito dopo t anni, espresso da $a + aq + aq^2 \dots + aq^{t-1}$. Ora la somma di questa progressione è (278)

$$\frac{q \times q^{t-1} - 1}{q - 1} \times a = \frac{q^t - 1}{r} \times a; \text{ onde il credito dopo un}$$

numero t d'anni è $s = \frac{q^t - 1}{r} \times a$, formola che dà qui

$$s = \frac{(1,04)^8 - 1}{0,04} \times 2400 = 22114 \text{ lire con piccolissimo errore.}$$

DELLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI
DI TERZO GRADO.

304. Il cubo di un binomio $a + b$ essendo (146) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ovvero $a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, se facciamo $x = a + b$, avremo $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$: sarà dunque $a + b$ la radice di questa equazione del terzo grado $x^3 - 3abx = a^3 + b^3$.

La radice pertanto di un'equazione proposta $x^3 - mx = n$ si avrà facilmente se potremo dividere la n in due parti p, q , tali che il triplo della radice cuba del loro prodotto $3\sqrt[3]{pq} = m$; in fatti sarà allora $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Questo problema risoluto al num. (181, VIII) ci dà $p = \frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}$, $q = \frac{1}{2}n - \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}$;

$$\text{onde } x = \sqrt[3]{\left\{ \frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)} \right\}} + \sqrt[3]{\left\{ \frac{1}{2}n - \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)} \right\}},$$

e questa è la radice cercata. Una tal formola chiamasi *Cardanica*, perchè si attribuisce a *Cardano*, quantunque vogliasi che altro analista italiano la sapesse prima di lui.

305. Un'equazione di secondo grado avendo due radici (177), si è sospettato che quella di terzo ne avesse tre, quella di quarto, quattro, ecc. Questo sospetto si è poi cambiato in verità d'analisi, poichè dimostreremo qui dopo al numero 329 che un'equazione ha tante radici quante unità sono nel numero che esprime il suo grado (*).

Siano dunque α, β, γ le tre radici dell'equazione di terzo grado $x^3 - mx - n = 0$; già ne conosciamo una, e sia questa α : ecco come troveremo le altre due. Allo stesso

(*) Può chi studia o chi insegna anticipare in questo luogo la dimostrazione posta al citato n.º 329: nè per questo abbisogna di cognizioni oltre quelle che già si suppongono note per le cose precedenti. Di ciò abbiamo un esempio nel Paoli, il quale ne' suoi elementi prima della risoluzione delle equazioni di 3.º grado ci parla delle proprietà generali delle equazioni.

numero 329 verrà dimostrato che se α è una radice di una equazione ridotta ad avere zero per 2.^o membro, il suo primo membro è sempre divisibile esattamente per $x - \alpha$; e che il quoziente posto eguale a zero dà un'altra equazione di grado inferiore, le cui radici sono le altre radici dell'equazione proposta. Nel nostro caso adunque dividasi il trinomio $x^3 - mx - n$ per $x - \alpha$ nel modo insegnato (99), e avremo per quoziente $x^2 + \alpha x + \alpha^2 - m$, e per resto $\alpha^3 - m\alpha - n$. Questo resto è zero, perchè esso altro non è se non il primo membro dell'equazione proposta ove si è sostituito α ad x , e per essere α una radice, deve tale sostituzione ridurre quel primo membro a zero. Chi voglia restarne anche più convinto, non ha che a mettere in quel resto al luogo di α il suo valore $\sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}\right)}}$.

Posto il quoziente eguale a zero, abbiamo l'equazione di 2.^o grado $x^2 + \alpha x + \alpha^2 - m = 0$, le cui radici saranno le due altre radici β , γ di quella di 3.^o grado. Risolvasi adunque quest'equazione, e si avrà

$$\beta = \frac{-\alpha + \sqrt{4m - 3\alpha^2}}{2}; \quad \gamma = \frac{-\alpha - \sqrt{4m - 3\alpha^2}}{2}.$$

Per dare a questi valori una forma più elegante; mettiamo $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ per α , $3\sqrt[3]{pq}$ per m (p, q s'introducono per brevità in cambio dei loro valori fatti in m, n , e dati superiormente). La quantità sotto il radicale diventa $12\sqrt[3]{pq} - 3(\sqrt[3]{p})^2 - 6\sqrt[3]{pq} - 3(\sqrt[3]{q})^2$, che si riduce a $-3(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q})^2$. Sostituendo adunque ed estraendo la radice, si ha dopo qualche riduzione

$$\beta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{p} + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{q}$$

$$\gamma = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{p} + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{q}.$$

In questi valori i coefficienti di $\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}$ sono radici cubiche dell'unità (143).

Rimettendo per p, q i loro valori, concluderemo che le tre radici o i tre valori di x che soddisfanno all'equazione $x^3 - mx - n = 0$ sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
\text{I.}^\circ \quad x &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}n - \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}} \\
\text{II.}^\circ \quad x &= \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}} + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}n - \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}} \\
\text{III.}^\circ \quad x &= \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}} + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}n - \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}}.
\end{aligned}$$

306. Quando la quantità $\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}$ è reale, cioè quando $\frac{1}{27}m^3 < \frac{1}{4}n^2$, la prima radice è reale, e le altre due immaginarie per causa del fattore $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ che vi si trova; quando poi $\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}$ è immaginaria, cioè quando $\frac{1}{27}m^3 > \frac{1}{4}n^2$, allora tutte e tre le radici, per quanto si presentino sotto aspetto immaginario, sono però in sostanza reali.

Di fatto rappresentiamo in questo caso $\frac{1}{2}n$ per a , $\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{27}m^3\right)}$ per $b\sqrt{-1}$, ed avremo

$$\begin{aligned}
x &= (a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}; \\
x &= \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} (a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}; \\
x &= \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} (a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Ora sviluppando per mezzo del binomio di Newton le potenze fratte $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, $(a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ si è trovato (154) $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = M + N\sqrt{-1}$, $(a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = M - N\sqrt{-1}$, rap-

presentando per M, N due serie di quantità reali; dunque

$$x = M + N\sqrt{-1} + M - N\sqrt{-1};$$

$$x = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)(M + N\sqrt{-1}) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)(M - N\sqrt{-1});$$

$$x = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)(M + N\sqrt{-1}) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)(M - N\sqrt{-1});$$

e dopo le moltiplicazioni e riduzioni

$$x = 2M; \quad x = -M - N\sqrt{3}; \quad x = -M + N\sqrt{3},$$

dove non vi sono più immaginari.

Questo caso, nel quale le tre radici essendo reali si presentano sotto aspetto immaginario, il quale non può togliersi che per mezzo delle serie, chiamasi *caso irreducibile*.

307. Se l'equazione da risolversi fosse stata $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, e non $x^3 - mx = n$, sarebbe stato prima necessario di ridurla alla forma di quest'ultima facendo da essa sparire il secondo termine ax^2 . Per questo si cangerà l'incognita x in un'altra diminuita di un terzo del coefficiente a , e faremo $x = y - \frac{1}{3}a$; sarà allora in fatti

$$\left(y - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(y - \frac{1}{3}a\right) + c = 0; \text{ e fatto}$$

l'opportuno sviluppo e riduzione, si ha $y^3 - \left(\frac{1}{3}a^2 - b\right)y$

$$= \frac{1}{3}ab - \frac{2}{27}a^3 - c, \text{ equazione in cui manca il secondo ter-}$$

mine, quello cioè che contiene il quadrato dell'incognita, ed è della forma di quella da noi risolta. Trovato per mezzo di quest'ultima equazione trasformata il valore di y , se da esso sottrarremo un terzo di a , avremo quello di x .

308. Facciamo un esempio. Sia $x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$: per iscancellarne il secondo termine si faccia

$$x = y - \frac{-6}{3} = y + 2, \text{ e si avrà } y^3 + y = 2; \text{ quindi parago-}$$

nata con $x^3 - mx = n$, si avrà $m = -1$, $n = 2$, e perciò la prima radice sarà

$$y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{1}{27}}} =$$

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{21}}{9}} =$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{27+6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27-6\sqrt{21}}{27}\right)}.$$

$$\text{in fine } y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{(27+6\sqrt{21})} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{(27-6\sqrt{21})}.$$

Le altre due sono immaginarie (306).

Per quanto la trovata radice sia doppiamente irrazionale, pure talvolta avviene per una fortunata combinazione che i binomj sono cubi perfetti, e ciò succede appunto qui; imperocchè il cubo di $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ è $\frac{216+48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$, ed

il cubo di $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$ è $\frac{216-48\sqrt{21}}{8} = 27 - 6\sqrt{21}$, abbiamo

$$\text{allora } y = \frac{3+\sqrt{21}}{2 \cdot 3} + \frac{3-\sqrt{21}}{2 \cdot 3} = 1 (*).$$

Essendo $y = 1$, sarà $x = y + 2 = 3$, e questa è la radice reale della proposta equazione.

Le due altre sono

$$y = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{21}}{2 \cdot 3} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{21}}{2 \cdot 3} = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$$

$$y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{21}}{2 \cdot 3} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{21}}{2 \cdot 3} = \frac{-1-\sqrt{-7}}{2},$$

e quindi $x = \frac{3+\sqrt{-7}}{2}$, $x = \frac{3-\sqrt{-7}}{2}$ saranno le due radici immaginarie.

309. Io lascio a' miei lettori il dedurne da quelle formole generali (305) le radici pei due casi nei quali si ha $m = 0$, ovvero $n = 0$ nell'equazione $x^3 - mx = n$, ed il farne le considerazioni che vi appartengono.

310. Risolviamo ora questo problema. Trovare tre numeri p , q , r tali che la loro somma eguagli una quantità data $-a$ sia cioè $p+q+r = -a$; la somma dei loro prodotti due a due $pq+pr+rq = b$, ed il prodotto di tutti e tre $pqr = -c$.

Ora dalla prima di quelle equazioni si ricava $q+r$

(*) Queste radici cubiche dei binomj sembrano qui quasi indovinate, giacchè non si vede che siano state ritrovate dietro un qualche metodo. Nondimeno questo metodo c'è, ma per essere troppo lungo non può qui aver luogo; possono gli studiosi consultare il Paoli, Elem. d'algebra, P. I, cap. XIII. n.º 53. Esso però conduce ancora alla risoluzione di un'equazione di terzo grado.

$= -a - p$, e dalla seconda $qr = b - p(q + r)$, le quali ci danno $qr = b + pa + p^2$. Questo valore di qr sostituito nella terza ci dà $-c = bp + ap^2 + p^3$ ovvero
 (e). . . . $p^3 + ap^2 + bp + c = 0$, equazione del terzo grado, dalla quale si avrà il valore di p .

Se in vece di eliminare q, r , avessimo eliminati p, r , ovvero p, q , avremmo trovato per q o per r equazioni simili a quelle per p ; e quindi gli stessi tre valori che l'equazione (e) ci dà per p , gli avremmo per q e per r . Siccome poi questi tre numeri p, q, r non possono essere eguali tra loro, giacchè allora il problema sarebbe più che determinato, quindi non sempre risolubile (127); così delle tre radici che ci darà l'equazione (e), una sarà il valore di p , una di q , ed una di r .

311. Da tutto questo ricaveremo che: *Data ad una qualunque equazione del terzo ordine questa forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, il coefficiente del secondo termine col segno mutato eguaglia la somma delle sue tre radici; il coefficiente del terzo col suo segno eguaglia i prodotti delle radici due a due; l'ultimo termine col segno mutato eguaglia il prodotto delle tre radici.*

Questo bel teorema si potrebbe verificare con le formole generali del (305). Per un caso particolare si prenda l'equazione $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, di cui le radici sono 1, 2, 3, e si vedrà che i coefficienti sono formati appunto secondo l'indicata proprietà.

CAPO XIV.

DELLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONI DEL QUARTO GRADO.

312. **P**er risolvere quest'equazioni faremo uso dell'elegantissimo metodo d'Eulero. Una radice dell'equazione di quarto grado abbia questa forma $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r}$, ove le lettere p, q, r significano le radici di una equazione del terzo $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, di modo che (311) sia $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$, $pqr = h$.

Ciò posto, quadriamo la formola adottata, e si avrà $x^2 = p + q + r + 2\sqrt[3]{pq} + 2\sqrt[3]{pr} + 2\sqrt[3]{qr}$; ma $p + q + r = f$, dunque $x^2 - f = 2\sqrt[3]{pq} + 2\sqrt[3]{pr} + 2\sqrt[3]{qr}$.

Quadriamo di nuovo quest'ultima equazione, ed avremo

$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqrr} + 8\sqrt{pqqrr}$; ovvero $x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4(pq + pr + qr) + 8(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{pqr}$, e quindi $x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4g + 8x\sqrt{h}$, che si riduce così

$$(e) \dots x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0;$$

e di questa equazione una delle radici è sicuramente $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, essendo p, q, r radici dell'equazione del terzo grado $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$.

Sia dunque proposta l'equazione $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$, della quale si vogliono le radici. Paragoniamola con la formola trovata sopra, onde ottenere i valori di f, g, h , ed

avremo 1.° $2f = a$, quindi $f = \frac{a}{2}$; 2.° $8\sqrt{h} = b$, quindi $h = \frac{b^2}{64}$;

3.° $f^2 - 4g = -c$, quindi $\frac{a^2}{4} - 4g + c = 0$; $g = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c$.

Saranno dunque conosciuti i coefficienti di questa equazione $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, ed in conseguenza (305, 307) le sue radici o i valori di p, q, r . Sarà pertanto $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ una radice della proposta.

313. Pare a prima vista che questo metodo non dia che una sola delle radici dell'equazione proposta; ma se si considera che ciascun segno $\sqrt{}$ può essere preso tanto negativamente quanto positivamente, ci accorgeremo subito che questa formola contiene tutte e quattro le radici.

Anzi se volessero ammettersi tutt'i cangiamenti possibili dei segni, avremmo otto valori diversi per x ; ma non tutti possono rappresentare le cercate radici. Se noi ci rammentiamo che $\sqrt{pqr}$ debb'essere eguale a $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$, con-

cluderemo che, se $\frac{1}{8}b$ è positivo, il prodotto dei termini

$\sqrt{p}, \sqrt{q}$ e $\sqrt{r}$ debb'egualmente essere positivo, e se $\frac{1}{8}b$ è negativo, tale anche esser debbe quel prodotto.

Da quegli otto valori adunque escluderemo tutti quei che nel primo caso non renderanno il detto prodotto positivo, e nel secondo caso tutti quei che non lo renderanno negativo. Avremo pertanto

$$\text{Per } \frac{1}{8} b \text{ positivo } \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r}; \\ x = \sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{r}; \\ x = -\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{r}; \\ x = -\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r}; \end{array} \right.$$

$$\text{Per } \frac{1}{8} b \text{ negativo } \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{r}; \\ x = \sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r}; \\ x = -\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r}; \\ x = -\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{r}. \end{array} \right.$$

314. Sia ora proposta, per esempio, l'equazione

$$x^4 - 12x^2 - 16x\sqrt[3]{3} - 16 = 0 \quad (*),$$

e paragonata con l'equazione generale del (312), si avrà

$$a = 12, \quad b = 16\sqrt[3]{3}, \quad c = 16, \quad \text{e quindi}$$

$$f = \frac{a}{2} = \frac{12}{2} = 6; \quad h = \frac{b^2}{64} = \frac{16 \cdot 16 \cdot 3}{64} = 12; \quad g = \frac{12 \cdot 12}{16} + \frac{16}{4} = 13.$$

Sarà dunque $z^3 - 6z^2 + 13z - 12 = 0$ l'equazione del terzo grado, le di cui radici formano quelle della proposta. Ora quest'equazione l'abbiamo risolta (308), ed abbiamo trovato (indicando per p, q, r le radici)

$$p = 3; \quad q = \frac{3 + \sqrt[3]{-7}}{2}; \quad r = \frac{3 - \sqrt[3]{-7}}{2}.$$

Avvertendo poi che $\frac{1}{8} b = \frac{16\sqrt[3]{3}}{8} = 2\sqrt[3]{3}$ è positivo, le radici della proposta saranno (313)

$$x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt[3]{-7}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt[3]{-7}}{2}};$$

$$x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt[3]{-7}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt[3]{-7}}{2}};$$

$$x = -\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt[3]{-7}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt[3]{-7}}{2}};$$

$$x = -\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt[3]{-7}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt[3]{-7}}{2}}.$$

(*) Quando i radicali nelle equazioni non involgono l'incognita, come in questo esempio, si può a dirittura giudicare del grado dell'equazione. Ma bisogna avvertire che in tal caso i radicali non possono intendersi col doppio segno, ma solamente con uno dei due; altrimenti per evitare l'ambiguità bisognerebbe quadrare l'equazione, e allora qui si avrebbe un'equazione di ottavo grado.

Per decidere se questi valori siano reali o immaginari, converrà trasformarli usando un artificio che ha luogo in altri casi. Se si eleva una quantità a quadrato, e poi se ne torna ad estrarre la radice quadra, certamente non se ne altera il valore, ma spesso se ne cambia utilmente la forma. Ciò avviene nel nostro caso. Eleviamo a quadrato i due binomi

$$\sqrt{\left\{ \frac{1}{2} (3 + \sqrt{-7}) \right\}} + \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} (3 - \sqrt{-7}) \right\}};$$

$$\sqrt{\left\{ \frac{1}{2} (3 + \sqrt{-7}) \right\}} - \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} (3 - \sqrt{-7}) \right\}},$$

e troveremo che il primo quadrato si riduce a 7, e il secondo a -1, quindi il primo binomio equivarrà a $\sqrt{7}$, e il secondo a $\sqrt{-1}$; e però le quattro radici saranno

$\sqrt{3} + \sqrt{7}$; $\sqrt{3} - \sqrt{7}$; $-\sqrt{3} + \sqrt{-1}$; $-\sqrt{3} - \sqrt{-1}$
due reali e due immaginarie.

315. L'equazione generale da noi risolta (312) mancava del secondo termine, ove si trova la terza potenza dell'incognita: ora noi mostreremo che ogni equazione generale $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ può sempre trasformarsi in un'altra nella quale manchi il secondo termine. Basta per

questo supporre $x = y - \frac{1}{4}a$, e fatto lo sviluppo della quantità

$$\left(y - \frac{1}{4}a\right)^4 + a\left(y - \frac{1}{4}a\right)^3 + b\left(y - \frac{1}{4}a\right)^2 + c\left(y - \frac{1}{4}a\right) + d,$$

si vedrà che i termini ove si trovano le terze potenze di y si distruggono da sè medesimi, e che l'equazione trasformata sarà di questa forma $y^4 + my^2 + ny + l = 0$, e quindi paragonabile con quella del (312).

Trovati poi i valori di y , basterà da essi togliervi $\frac{1}{4}a$ per avere quei di x , cioè le radici della proposta, cui non mancava alcun termine.

316. Se l'equazione da risolversi fosse $x^4 - ax^2 - c = 0$, allora, senza passare pel metodo spiegato, se ne possono avere speditamente le radici in questa guisa. Facciasi $x^2 = y$, e l'equazione diverrà $y^2 - ay - c = 0$, la quale è del secondo grado. Siano le radici $y = q'$, $y = r'$, ed avremo $q' = \frac{a + \sqrt{(a^2 + 4c)}}{2}$, $r' = \frac{a - \sqrt{(a^2 + 4c)}}{2}$, e $x^2 = q'$; $x^2 = r'$,

quindi $x = +\sqrt{q'}$; $x = -\sqrt{q'}$; $x = +\sqrt{r'}$; $x = -\sqrt{r'}$, e queste saranno le quattro radici cercate.

E quando nell'equazione da risolversi non vi fossero

che due soli termini, fosse cioè $x^4 - c = 0$, si avrebbe $x = \sqrt[4]{c} = \sqrt[4]{c} \cdot \sqrt[4]{1}$; e quindi (143) $x = +\sqrt[4]{c}$; $x = -\sqrt[4]{c}$; $x = +\sqrt[4]{-1} \cdot \sqrt[4]{c}$; $x = -\sqrt[4]{-1} \cdot \sqrt[4]{c}$, delle quali quattro radici due sono sempre immaginarie.

317. Vediamo come le radici ottenute con questi ripieghi combinano con quelle che ci somministrano le formole generali del (313).

Paragonata l'equazione $x^4 - ax^2 - c = 0$ con quella del (312), si ha $b = 0$, quindi $h = 0$, e l'equazione del terzo grado diviene $z^3 - fz^2 + gz = 0$, cui soddisfa $z = 0$, è dunque $z = 0$ una radice: dividendo poi quell'equazione per z , si riduce del secondo grado $z^2 - fz + g = 0$, e sostituiti

i valori di f e di g , si ha $z^2 - \frac{a}{2}z + \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c = 0$, ov-

vero $(z - \frac{1}{4}a)^2 = -\frac{1}{4}c$. Questa ci dà $z = \frac{a + 2\sqrt{-c}}{4}$,

$z = \frac{a - 2\sqrt{-c}}{4}$. I valori adunque di p , q , r saranno

$p = 0$, $q = \frac{a + 2\sqrt{-c}}{4}$, $r = \frac{a - 2\sqrt{-c}}{4}$, ed una delle quattro radici, per esempio la prima, sarà

$$x = \sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{r} = \frac{\sqrt{(a + 2\sqrt{-c})} + \sqrt{(a - 2\sqrt{-c})}}{2}.$$

Ora abbiamo (316) trovata questa radice espressa così $x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 + 4c)}}{2}}$; quindi è che se i due metodi sono

esatti le due espressioni della medesima radice, per quanto diverse nella forma, dovranno in sostanza esser le stesse. Ci persuaderemo che di fatto lo sono col fare i quadrati di ambedue quelle espressioni. Lascio ai miei lettori la cura di confrontare le altre radici.

318. Tralascio di ricercare i contrassegni generali ai quali si può riconoscere dalla considerazione dei coefficienti se un'equazione del quarto grado ha alcune o tutte le sue radici immaginarie, poichè quantunque questa indagine non dipenda che dalle cose dette quì sopra, pure essa è un poco complicata, ed appartiene alla teorica generale dell'equazioni.

319. Termino poi questa dottrina colla risoluzione di un problema simile a quello del (310). Si cercano quattro quan-

tà tali che la loro somma sia $= -a$; la somma dei loro prodotti due a due sia $= b$; quella dei loro prodotti tre a tre sia $= -c$, e il prodotto di tutte e quattro sia $= d$.

Siano p, q, r, s le quantità cercate, ed avremo le quattro equazioni $p + q + r + s = -a$; $pq + pr + ps + qr + qs + rs = b$; $pqr + pqs + prs + qrs = -c$; $pqrs = d$, dalle quali ricaveremo $q + r + s = -a - p$; $qr + qs + rs = b - p(q + r + s)$; $qrs = -c - p(qr + qs + rs)$; sostituisco successivamente nella seconda di queste ultime equazioni il valore di $q + r + s$ avuto dalla prima: nella terza il valore della somma $qr + qr + rs$ ricavato dalla seconda; e nella $pqrs = d$ il valore di qrs ottenuto dalla terza, e successivamente risulterà $qr + qs + rs = b + ap + p^2$; $qrs = -c - bp - ap^2 - p^3$; $d = -cp - bp^2 - ap^3 - p^4$, e quindi $p^4 + ap^3 + bp^2 + cp + d = 0$.

E qui con un ragionamento simile a quello del (310) si proverà che le quattro radici dell'equazione del quarto grado in p somministrano le quattro quantità cercate; e poi ne concluderemo che in una qualunque equazione di quarto grado di questa forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Il coefficiente del secondo termine col segno mutato eguaglia la somma delle di lei radici; il coefficiente del terzo termine col suo segno eguaglia la somma dei prodotti delle radici a due a due; il coefficiente del quarto col segno mutato eguaglia la somma dei prodotti delle radici tre a tre, mentre l'ultimo termine eguaglia il prodotto di tutte e quattro le radici.

CAPO XV.

DELLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI INDETERMINATI DEL PRIMO GRADO

320. Si vogliono due numeri tali che la loro somma faccia 10. L'equazione di questa condizione è $x + y = 10$, dalla quale si ricava $x = 10 - y$. Convien pertanto assegnare un valore ad y per avere quello di x , e siamo padroni di dare ad y quel valore che più ci piace; non è dunque determinato il valore di x , se non in conseguenza di quello di y che resta al nostro arbitrio.

Per ogni valore di y se ne avrà uno di x , e potendo l' y avere infiniti valori intieri o fratti, positivi o negativi, si avranno infiniti valori per x , quindi infinite soluzioni del

problema, e per questo si chiamano tali sorte di problemi *indeterminati*.

Se però vogliamo che i valori di x , y siano numeri interi o positivi, allora le soluzioni che può avere il problema non sono infinite di numero. Noi possiamo fare $y = 1, = 2, = 3, = 4, = 5, = 6, = 7, = 8, = 9$, ed allora $x = 9, = 8, = 7, = 6, = 5, = 4, = 3, = 2, = 1$. Abbiamo in questo modo nove soluzioni del problema, le quali si riducono a cinque, giacchè le prime quattro sono le medesime che le ultime quattro, nè possono aversene altre in numeri interi e positivi.

S' intenderanno dunque sempre nella dottrina seguente vincolate le incognite da queste due condizioni: 1.^o che i loro valori siano numeri intieri; 2.^o che siano numeri positivi. Tali condizioni riducono talvolta a pochissime od anche a nessuna le soluzioni che senza di esse sarebbero di numero infinito. I problemi indeterminati sottoposti alle medesime soglionsi da alcuni chiamare *semideterminati*. La prima delle due condizioni è quella che dà luogo al metodo seguente; la seconda non fa che restringere i risultamenti della prima.

321. Convengasi che le lettere $a, b, c \dots \alpha, \beta, \gamma \dots$ abbiano qui dopo ad esprimere numeri positivi o negativi, ma però sempre interi. L'equazione qui sopra trattata era della forma $x + y = m$, dove tanto x che y avevano per coefficiente l'unità. Se si avesse una equazione della forma $x = by + c$, potremmo a dirittura dare ad y valori interi arbitrarj, ed x prenderebbe sempre valori interi. Dicasi lo stesso per riguardo ad y nell'equazione $ax = y + c$, da cui $y = ax - c$, dando in vece i valori interi arbitrarj all' x . Ma se è proposta l'equazione $ax = by + c$; dando ad y dei valori interi, non è detto che debbano risultare valori interi anche per l' x ; perchè $x = \frac{by + c}{a}$ può risultar

frazionario. Per risolvere dunque la quistione in questo caso si usa un artificio, e consiste nel far dipendere tanto x che y da una terza arbitraria ω in modo che i loro valori siano così fatti: $x = \alpha\omega + \beta$; $y = \gamma\omega + \delta$, e che questi sostituiti poi nell'equazione data la soddisfacciano sempre qualunque sia ω . Vedesi allora che dando ad ω i valori interi arbitrarj, x , y prendono sempre valori interi. Or ecco come si giunge all'intento. Avendosi $x = \frac{by + c}{a}$,

si tolgano nel secondo membro tutti gl' interi , quando vi siano , e l' avanzo che rappresentiamo per $\frac{b'y + c'}{a}$ si eguagli ad un' altra incognita z ; si avrà allora $\frac{b'y + c'}{a} = z$, e quindi $y = \frac{az - c'}{b'}$. Si tolgano da quest' ultima frazione gl' interi , se vi siano , ed essa o il suo avanzo $\frac{b''z + c''}{b'}$ si eguagli ad un numero intero u , si avrà allora $\frac{b''z + c''}{b'} = u$, e quindi $z = \frac{b'u - c''}{b''}$. Si continui l' operazione finchè si

giunga ad una equazione di questa forma $\frac{t + m}{n} = \omega$, dove il coefficiente dell' incognita t nel numeratore della frazione è l' unità , e si avrà $t = n\omega - m$; da questo valore di t risalendo troveremo il valore delle altre incognite , e finalmente avremo x, y espresse in numeri interi , formati da numeri cogniti e dall' ω secondo la forma che abbiamo detto. Tratteniamoci a far degli esempj che rischiariranno la teorica generale.

322. 1.° Vogliansi tutt' i valori interi o positivi di x e di y nell' equazione $3x = 4y + 5$.

Si avrà in questo caso $x = \frac{4y + 5}{3} = y + 1 + \frac{y + 2}{3}$.

Faccio l' avanzo $\frac{y + 2}{3} = z$, e sarà $y = 3z - 2$. Pongo il

valore di y in quello di x , cioè in $\frac{4y + 5}{3}$, ed ho

$$x = \frac{12z - 8 + 5}{3} = 4z - 1 ; \text{ dunque } y = 3z - 2, x = 4z - 1 ;$$

e per z potremo prendere qualunque numero intero , eccettuato lo zero , perchè questo renderebbe y e x negativi. Se si fa pertanto $z = 1, 2, 3, 4, 5$, ecc., avremo queste soluzioni $\begin{cases} y = 1, 4, 7, 10, 13, \text{ ecc.} \\ x = 3, 7, 11, 15, 19, \text{ ecc.} \end{cases}$. Così il problema avrà un numero infinito di soluzioni anche in numeri interi. I valori della y formano una progres-

sione aritmetica, la cui differenza è 3 coefficiente della x nell'equazione data, e quei della x ne formano un'altra, la cui differenza è 4 coefficiente della y nella detta equazione: ne vedremo or ora la ragione.

II.^o Voglio in numeri interi tutt' i valori positivi di x e di y nell'equazione $9x = 2000 - 13y$.

$$\text{Io farò } x = \frac{2000 - 13y}{9} = 222 - y + \frac{2-4y}{9}; \frac{2-4y}{9} = \frac{1}{3}z;$$

$$\text{quindi } y = \frac{2-9z}{4} = -2z + \frac{2-z}{4}; \frac{2-z}{4} = u;$$

quindi $z = 2 - 4u$. Trovato il valore di z , si avrà quello di y , che sarà $y = 9u - 4$, e quello di x , che sarà $x = 222 - 9u + 4 + 2 - 4u = 228 - 13u$.

Dunque $x = 228 - 13u$; $y = 9u - 4$. Prendendo ora per u tutt' i numeri interi positivi dall' 1 sino a quello esclusivamente che rende $228 - 13u$, quantità negativa, si avranno le seguenti soluzioni del problema:

$$\begin{aligned} \text{così } u &= 1, 2, 3, 4 \text{ ecc.}, 17 \\ \text{darà } \begin{cases} y &= 5, 14, 23, 32 \text{ ecc.}, 149; \\ x &= 215, 202, 189, 176 \text{ ecc.}, 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Anche quì i valori delle incognite formano due progressioni: non è però il caso che le dà; sono esse una conseguenza del metodo, ed ecco come.

Suppongasi che α, β siano due valori di x, y che soddisfacciano all'equazione $ax = by + c$; dico che vi soddisfaranno questi altri più generali; $x = b\omega + \alpha$; $y = a\omega + \beta$. Di fatto sostituendo viene un'equazione che si riduce ad $a\alpha = \beta b + c$, la quale per ipotesi si avvera da sè medesima. Vedesi adunque che conoscendo per qualsivisia mezzo due soli valori di x, y , si possono trovare tutti gli altri mettendo qualunque numero intero per ω nelle formole $b\omega + \alpha$; $a\omega + \beta$; e vedesi di più che tutti questi valori, facendo $\omega = 1, 2, 3, 4$, ecc., debbono essere per l' x , $\alpha + b, \alpha + 2b, \alpha + 3b, \alpha + 4b$, ecc., progressione aritmetica che ha per differenza b coefficiente dell' y ; e per l' y , $\beta + a, \beta + 2a, \beta + 3a$, ecc., progressione aritmetica che ha per differenza a coefficiente dell' x .

323. III.^o. Un mercante è debitore di 1200^{lire}: in mancanza di danaro offre in pagamento una stoffa di 7^{lire} al braccio, e un'altra di cinque lire: in quanti modi potrà pagare il suo debito?

Siano x le braccia della prima stoffa, y quelle della

seconda, e sarà $7x + 5y = 1200^{\text{lire}}$. Ecco l'operazione per risolvere questa equazione:

$$x = \frac{1200 - 5y}{7} = 171 + \frac{3 - 5y}{7}; \quad \frac{3 - 5y}{7} = z; \quad \text{quindi}$$

$$y = \frac{3 - 7z}{5} = -z + \frac{3 - 2z}{5}; \quad \frac{3 - 2z}{5} = u, \quad \text{quindi } z = \frac{3 - 5u}{2}$$

$$= 1 - 2u + \frac{1 - u}{2}; \quad \frac{1 - u}{2} = \omega, \quad \text{quindi } u = 1 - 2\omega;$$

$$z = 1 - 2(1 - 2\omega) + \omega = 5\omega - 1; \quad y = -(5\omega - 1) + u = 2 - 7\omega$$

$$x = 171 + 5\omega - 1 = 170 + 5\omega.$$

Le soluzioni adunque del problema si avranno dando ad ω tutt'i valori interi negativi da zero sino a quel numero intero, esclusivamente, che rende $170 + 5\omega$, quantità negativa. Fatto $\omega = 0$, si ha $y = 2$, $x = 170$; fatto $\omega = -1$, si ha $y = 9$, $x = 165$, ecc.; sono questi i diversi modi nei quali il mercante può fare il pagamento. Quanti debbano essere si vedrà facilmente. Questo problema serve a far vedere che l'arbitraria di sussidio ω può prendere valori negativi, a differenza delle incognite x , y che per la seconda delle condizioni stabilite (320) debbono sempre essere positive.

324. IV.° Si dimandano due numeri tali che il sestuplo di uno superi di 7 il quadruplo dell'altro.

Posti x , y questi due numeri, si avrà $6x - 4y = 7$, quindi $x = \frac{4y + 7}{6}$. Poniamo al solito

$$\frac{4y + 7}{6} = z, \quad \text{e si avrà } y = \frac{6z - 7}{4} = z - 1 + \frac{2z - 3}{4};$$

$$\frac{2z - 3}{4} = u, \quad \text{quindi } z = \frac{4u + 3}{2} = 2u + 1 + \frac{1}{2}.$$

E qui si giunge ad una frazione $\frac{1}{2}$, ch'è impossibile ridurre a numero intero; e ciò prova che il problema è assurdo: lo avremmo potuto riconoscere per tale, osservando che la differenza di due numeri pari, come sono $6x$ e $4y$, non può essere un numero dispari, quale è 7.

In generale quando i problemi indeterminati contengono qualche assurdo, l'ultimo risultamento del calcolo lo discopre; poichè o viene un numero pari da dividersi per un dispari, o un minore per un maggiore, ciò che non può dare per quoziente un numero intero.

Ma, senza tentare la soluzione, si può subito ricono-

scere se un' equazione $ax = by + c$ ammette una soluzione in numeri interi, osservando se a, b hanno qualche fattore comune che non sia nel tempo stesso fattore di c : quando ciò succedesse, l' equazione non è solubile: eccone la dimostrazione. Rappresentando per f questo fattore comune, sia $a = mf$; $b = nf$, onde abbiassi $mfx = nfy + c$, da cui $mx - ny = \frac{c}{f}$; se c non è divisibile per f , $\frac{c}{f}$ è sempre una frazione; ma in quest' ultima equazione il primo membro è un numero intero, perchè m, n sono interi, e x, y lo debbono essere per ipotesi; dunque sarebbe un numero intero eguale ad una frazione, cosa sempre assurda.

OSSERVAZIONE. Noi abbiamo finora riscontrati nell' algebra tre modi coi quali essa ci avverte che un problema a lei commesso per la soluzione è un problema impossibile a risolversi, perchè, contenendo in sè qualche contraddizione, la quantità che si cerca non può esistere in natura. Nel primo il risultamento dell' algebra contiene l' immaginario $\sqrt[n]{-1}$; nel secondo contiene $L(-n)$; e nel terzo $\frac{2n+1}{2m}$,

ovvero $\frac{2m}{2n+1}$ ch'esser debbe numero intero; così abbiamo già tre sorte d' immaginarj.

325. Finora non abbiamo considerato che una equazione a due incognite. Abbiassi adesso la seguente $ax + by + cz = d$, e vogliansi x, y, z in numeri intieri e positivi. Se α, β, γ sono tre valori di x, y, z che soddisfanno alla equazione, vi soddisfaranno anche i seguenti $x = b\xi + c\zeta + \alpha$; $y = -a\xi + c\lambda + \beta$; $z = -a\zeta - b\lambda + \gamma$, dove ξ, ζ, λ sono arbitrarie da prendersi in modo che abbiano a risultare per x, y, z valori positivi. Di fatto sostituendo, l' equazione si riduce $a\alpha + b\beta + c\gamma = d$, la quale secondo l' ipotesi è avverata. Per trovare dunque questi primi valori α, β, γ avuti i quali, si hanno tutti gli altri, può farsi così. Se ne prenda uno, per esempio γ , arbitrariamente; allora facendo $d - \gamma c = n$ numero noto, possono trovarsi α, β nella equazione $a\alpha + b\beta = n$ secondo la maniera insegnata (321). Un simil metodo si può estendere ad una equazione di primo grado che contenga qualunque numero d' incognite.

Se avessimo due equazioni $ax + by + cz = m$; $a'x + b'y + c'z = m'$ fra tre incognite x, y, z , il problema sarebbe ancora indeterminato. Per trovare x, y, z in numeri

interi e positivi, si cominci ad eliminare una delle incognite, per esempio x ; e l'eliminazione eseguita secondo la maniera generale (128) conduce all'equazione

$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z = am' - ma'$$

fra due sole incognite; ma nei casi particolari sommando o sottraendo le equazioni date si giunge spesso più presto all'intento. Risolvasi questa equazione col metodo solito (321), e troveremo $y = \alpha\omega + \beta$; $z = \lambda\omega + \delta$. In seguito sostituendo questi valori in una delle date o in una combinazione di esse, ci verrà un'equazione della seguente forma $Ax = B\omega + C$, ove A, B, C saranno numeri interi e conosciuti. Questa risolveremo di nuovo al modo solito (321), e troveremo $x = \alpha'\theta + \beta'$; $\omega = \gamma'\theta + \delta'$. Sostituendo il valore di ω in quelli di y, z , avremo le tre incognite così espresse

$$x = \alpha'\theta + \beta'; y = \alpha\gamma'\theta + \alpha\delta' + \beta; z = \gamma\gamma'\theta + \gamma\delta' + \delta,$$

ove θ è arbitraria. Vi sono certi contrassegni per riconoscere a dirittura se le equazioni proposte sono solubili o no, e chi vi prende pratica se ne serve con vantaggio; per non dilungarci in essi, diremo che generalmente se il problema non è solubile, il calcolo lo discuoopre. Un tal metodo di soluzione è sempre applicabile quando si ha un maggior numero di equazioni, minore però del numero delle incognite, e unito al precedente risolve qualunque problema indeterminato di primo grado.

326. Occorrono frequentemente certi problemi d'analisi indeterminata che conducono ad equazioni a più incognite di una forma particolare: eccone alcuni.

V.° Trovare un numero x che, diviso per dei numeri noti a, b , dia per resti due altri numeri noti m, n .

Siano y, z i quozienti delle due divisioni, quantunque questi numeri veramente non si cerchino, bisognerà passare per essi onde conoscere il numero x . La proprietà della divisione (27) già tante volte usata ci dà $x = ay + m$; $x = bz + n$; dalle quali $ay = bz + n - m$. Troveremo dunque col metodo sopra citato (321) i valori di y, z , e da uno di essi ricaveremo il cercato di x .

Esempio. Si cerca un numero che essendo diviso per 11 dia il resto 3; e diviso per 19, il resto 5.

Si hanno le equazioni $x = 11y + 3$; $x = 19z + 5$, e da esse $11y + 3 = 19z + 5$; $11y = 19z + 2$; $y = z + \frac{8z + 2}{11}$

$$\frac{8z + 2}{11} = u; z = \frac{11u - 2}{8} = u + \frac{3u - 2}{8};$$

$$\frac{3u - 2}{8} = w; u = \frac{8w + 2}{3} = 2w + \frac{2w + 2}{3};$$

$$\frac{2w + 2}{3} = \varphi; w = \frac{3\varphi - 2}{2} = \varphi + \frac{\varphi - 2}{2};$$

$$\frac{\varphi - 2}{2} = t; \varphi = 2t + 2; \text{ e risalendo}$$

$$w = 2t + 2 + t = 3t + 2;$$

$$u = 6t + 4 + 2t + 2 = 8t + 6;$$

$$z = 8t + 6 + 3t + 2 = 11t + 8;$$

$$y = 11t + 8 + 8t + 6 = 19t + 14;$$

$x = 11(19t + 14) + 3 = 209t + 157$, indicando per t qualunque numero intero e positivo. Il problema adunque avrà un numero infinito di soluzioni; il numero però più piccolo che soddisfarà alla quistione sarà $x = 157$.

VI.° Trovare un numero x che, diviso per dei numeri noti a, b, c , dia per resti altri tre numeri noti m, n, p .

Avremo le tre equazioni $x = ay + m; x = bz + n; x = cu + p$. Le due prime danno $ay = bz + n - m$ che risolveremo come sopra, trovando così $x = \alpha t + \beta$. Questo valore di x paragonato col terzo dato somministra un'altra equazione $cu = \alpha t + \beta - p$ che risolveremo al solito, ottenendo $t = \alpha' \theta + \beta'$. Avremo allora

$$x = \alpha (\alpha' \theta + \beta') + \beta = \alpha \alpha' \theta + \alpha \beta' + \beta,$$

ove θ è arbitraria, e questo sarà il valore cercato.

E qui si vede come regolarsi se il numero cercato aver dovesse simili proprietà.

Esempio. Si cerca un numero che, essendo diviso per 11, dia il resto 3; diviso per 19, il resto 5; e diviso per 29, il resto 10.

Ecco le tre equazioni del problema $x = 11y + 3; x = 19z + 5; x = 29u + 10$. Il valore di x che soddisfa alle prime due condizioni è $x = 209t + 157$; avremo perciò $209t + 157 = 29u + 10$, ovvero $29u = 209t + 147$; equazione che risolta ci dà $t = 29\theta - 10$; quindi $x = 209(29\theta - 10) + 157, x = 6061\theta - 1933$, ove θ rappresenta tutt' i numeri interi e positivi, i quali rendono il valore di x positivo. Il minimo valore che aver possa θ si è 1, ed

llora $x = 4128$.

327. Con questo metodo si sciolgono molti problemi relativi al calendario. Vogliasi l'anno dell'era cristiana, in cui si ebbe 17 del ciclo solare, 6 di ciclo lunare, e 5 d'indizione.

È noto che il ciclo solare è un periodo di 28 anni, il lunare di 19, e l'indizione di 15. Questi periodi si sono cominciati insieme a contare partendo da un medesimo anno non molto lontano da quello della creazione del mondo, quantunque a fissar bene quest'ultimo vi siano dei dispareri. Per evitare ogni quistione a noi basterà di sapere che quell'anno del cominciamento comune dei periodi precede di 4713 anni il principio della nostra era cristiana. Si dice poi che un anno ha, per esempio, 17 di ciclo solare, intendendo che, dopo compiuto l'ultimo ciclo solare intero sono con lui passati 17 anni dei 28 del ciclo seguente, senza curare quanti cicli siano passati prima; dicasi lo stesso del ciclo lunare e della indizione.

Sia dunque x l'anno cercato contato dal principio comune dei periodi; siano y , z , u rispettivamente i numeri dei cicli interi di sole, di luna e d'indizione compiuti prima dell'anno cercato; potrà quest'anno essere espresso in tre maniere, cioè da $x = 28y + 17$, da $x = 19z + 6$, e da $x = 15u + 5$. Devesi adunque trovare per x un numero intero che soddisfaccia a queste tre equazioni, essendo anche y , z , u dei numeri interi. La soluzione di questo problema, che io rilascio a' miei lettori, ci dà $x = 7980\omega + 6485$; facendo $\omega = 0, 1, \text{ecc.}$, si ha $x = 6485, 14465, \text{ecc.}$

Gli anni adunque contati dal cominciamento comune dei tre cicli che hanno le tre condizioni richieste sono 6485, 14465, ecc.; sottraendo da tutti 4713 per ridurli ad anni della nostra era, si hanno 1772, 9752, ecc. Pertanto non vi è stato finora che l'anno 1772 della nostra era che abbia avuto 17 di ciclo solare, 6 di lunare e 5 d'indizione: e non ve ne sarà nessun altro fino all'anno 9752.

CAPO XVI.

DELLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONI NUMERICHE.

328. **B**isogna ben 'distinguere due metodi assai diversi con cui si può risolvere un'equazione. Il primo è quello che assegna le radici con formole algebriche fatte coi coefficienti della equazione espressi come in essa generalmente con lettere. Ma ve n'è un secondo, il quale dà a dirittura per la radice un valore che sostituito al luogo dell'incognita soddisfa l'equazione, senza però lasciar vedere il modo con cui questo valore dipende direttamente dai coefficienti. Parlando del primo metodo, noi abbiamo assegnate quelle formole per le equazioni di 1.^o, 2.^o, 3.^o e 4.^o grado: al di là niuno è finora riuscito a darle; il secondo è estendibile anche alle equazioni di gradi superiori. Quando è data una equazione ove i coefficienti sono numeri assegnati, e vuolsene la radice espressa in numeri, si possono seguire due vie. Se è una equazione non al di sopra del 4.^o grado, si può alla prima maniera prender la formola generale della radice e sostituire ai coefficienti i valori noti; avverto però che spesso non si potrà giungere all'intento perchè s'incontreranno i casi irriducibili. Del secondo metodo che può usarsi per questa ricerca intendo ora di fare qualche parola; siccome esso si appoggia a considerazioni sui valori numerici dei coefficienti, e non bada alla forma di quelle formole che potessero generalmente esprimere le radici, chiamasi metodo di risolvere le *equazioni numeriche*,

329. Ecco le proprietà generali a tutte le equazioni, che servono di fondamento alla dottrina seguente. Incominciamo a fissar bene che per radice di una equazione, quando questa è ridotta ad avere zero per secondo membro, s'intende quella quantità che sostituita al luogo dell'incognita fa che il primo membro diventi identicamente zero. Prenderemo a trattare un'equazione di 4.^o grado, ma i ragionamenti saranno applicabili ad un'altra equazione di grado qualunque.

Avendo l'equazione $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, fingiamo che a ne rappresenti una radice; dico che il polinomio del primo membro è divisibile esattamente per $x - a$. Si provi in fatti ad eseguire la divisione, e si troverà un

quoziente della forma $x^3 + A'x^2 + B'x + C'$, e un resto che sarà $a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D$. Ora questo resto è zero, perchè è lo stesso primo membro dell'equazione, ove si è sostituito ad x l' a che è radice; dunque la divisione riesce esattamente. Moltiplicando il quoziente pel divisore, si riprodurrà il dividendo, e però è manifesto che l'equazione proposta potrà scriversi anche così:

$$(x - a)(x^3 + A'x^2 + B'x + C') = 0.$$

Se ora b sia una radice dell'equazione di 3.^o grado $x^3 + A'x^2 + B'x + C' = 0$, sarà pure una radice della proposta di 4.^o grado, perchè b per ipotesi sostituito ad x rende zero la quantità $x^3 + A'x^2 + B'x + C'$, dunque rende zero anche $(x - a)(x^3 + A'x^2 + B'x + C')$ che sappiamo essere eguale al primo membro della proposta.

Dividendo $x^3 + A'x^2 + B'x + C'$ per $x - b$, la divisione riesce esattamente per la stessa ragione or ora detta; il quoziente è della forma $x^2 + A''x + B''$, e quindi

$$x^3 + A'x^2 + B'x + C' = (x - b)(x^2 + A''x + B'');$$

per cui la proposta potrà scriversi

$$(x - a)(x - b)(x^2 + A''x + B'') = 0.$$

Alla stessa maniera essendo c una radice dell'equazione di 2.^o grado $x^2 + A''x + B'' = 0$, potrà questa dividersi esattamente per $x - c$; il quoziente potrà rappresentarsi per $x + A'''$; e sarà $x^2 + A''x + B'' = (x - c)(x + A''')$. Fatto $d = -A'''$, questo secondo fattore $x - d$ è della stessa forma di $x - c$, e può dirsi di esso quello che di questo si è detto. Eseguendo le sostituzioni, si vede che l'equazione proposta di 4.^o grado può mettersi sotto la forma $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = 0$, essendo a, b, c, d le quattro radici.

Dimostrata questa proprietà, si dimostra ancora per una via più diretta il teorema del n.^o 319; perchè svolgendo il prodotto accennato si ha

$$x^4 - (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 - (abc + abd + acd + bcd)x + abcd = 0,$$

la quale equazione debb'essere identica colla proposta $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, onde confrontando i coefficienti si vede scritto quel teorema.

330. Dall'analisi precedente è facile conchiudere in generale, che in qualunque equazione il prodotto di tutte le

radici eguaglia l'ultimo termine. Di qui si ricava un metodo ben facile per trovare le radici commensurabili o razionali della equazione, quando ve ne sono. Si cerchino tutt' i divisori dell' ultimo termine (perciò chiamasi *metodo dei divisori*), e se l' equazione ha radici razionali, certo che queste debbono essere fattori dell' ultimo termine (329), e quindi ritrovarsi tra i di lui divisori. Sostituiremo adunque per x i diversi divisori tanto presi col segno $+$ quanto col $-$, perchè le radici possono esser positive o negative, e quei che soddisfaranno all' equazione ne saranno radici.

Per esempio: $x^4 - 10x^3 + 30x^2 - 25x - 66 = 0$. Cercando i divisori di 66, come è detto (30), si troverà che questi sono

Positivi $+ 1, + 2, + 3, + 6, + 11$;

Negativi $- 1, - 2, - 3, - 6, - 11$.

Dei positivi non soddisfa all' equazione che il 6, e dei negativi il $- 1$; l' equazione adunque avrà due sole radici commensurabili, cioè $x = 6, x = - 1$.

Per avere le altre due radici, basta dividere successivamente la proposta equazione pei due fattori $x - 6$; $x + 1$, ovvero pel loro prodotto $x^2 - 5x - 6$, ed otterremo allora l' equazione del secondo grado $x^2 - 5x + 11 = 0$, della quale converrà cercar le radici col metodo del (176).

331. I gran tentativi che bisogna fare per provare se i divisori sono radici dell' equazione rendono questo metodo assai lungo, quando l' ultimo termine ha molti divisori; ecco perciò alcune osservazioni le quali, non mai trascurate, serviranno a scartarne un gran numero. Sono queste fondate sullo sviluppo del prodotto $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, indicate, al solito, per a, b, c, d le radici dell' equazione di quarto grado.

1.° Se i termini dell' equazione saranno con segni alternativi, come $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$, tutte le radici della proposta saranno positive; sarà quindi inutile tentare i divisori negativi.

2.° Se tutt' i termini dell' equazione saranno positivi, come $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, tutte le radici della proposta saranno negative; sarà quindi inutile tentare i divisori positivi.

Le medesime regole hanno luogo per l' equazioni di qualunque grado.

3.° Se, l' equazione non essendo ne' su indicati casi,

l'ultimo termine è positivo; essa ha due radici positive e due negative; e se questo è negativo, l'equazione può avere tre radici negative ed una positiva, ovvero tre radici positive ed una negativa.

E per l'equazioni di terzo grado l'ultimo termine positivo indica due radici positive ed una negativa; e l'ultimo termine negativo, due negative ed una positiva.

4.° In una equazione cui manchi il secondo termine, la somma delle radici positive eguaglia quella delle negative.

5.° In una equazione vi sono tante radici positive quante sono le variazioni dei segni, e tante negative quante le successioni. Dicesi esservi una *successione* di segni quando due termini consecutivi hanno lo stesso segno; *variazione* quando hanno segni diversi; così l'equazione del (330), cioè $x^4 - 10x^3 + 30x^2 - 25x - 66 = 0$, ha una successione e tre variazioni. La dimostrazione di questa bella proprietà delle radici reali dell'equazione è riserbata all'*Introduzione al calcolo sublime*.

E qui avverto che queste regole suppongono che l'equazione non abbia radici immaginarie: l'esistenza di queste radici le rende inesatte.

332. Trovata col metodo dei divisori una radice a dell'equazione di quarto grado, se divideremo questa equazione per $x - a$, si avrà per quoziente un'equazione di terzo, le cui tre radici saranno le altre tre radici della proposta.

Anzi con una medesima operazione esamineremo se un dato divisore è radice dell'equazione, e quando lo sia, otterremo l'equazione di terzo grado, la quale contiene le altre tre radici della proposta.

Abbiasi da risolvere l'equazione del quarto grado $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; rappresentiamo per a un divisore di s , e se questo è radice commensurabile, la proposta sarà divisibile per $x - a$ (329). Ne sia $x^3 - kx^2 + mx - n = 0$ il quoziente (k, m, n debbono rappresentare numeri interi, perchè tali supponiamo i coefficienti p, q, r, s), ed il prodotto $(x - a)(x^3 - kx^2 + mx - n)$ dovrà essere lo stesso primo membro della proposta. Eseguiamo la moltiplicazione, ed avremo $x^4 - (k + a)x^3 + (m + ak)x^2 - (n + am)x + an$, quantità che, eguagliata a zero, debb'essere la stessa equazione $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; sarà adunque $p = k + a$; $m + ak = q$; $n + am = r$; $an = s$, dalle quali equazioni si ricava

$$n = \frac{s}{a}, m = \frac{r-n}{a}, k = \frac{q-m}{a}, i = \frac{p-k}{a}.$$

Quando a non soddisfaccia a tutte le condizioni rappresentate da queste equazioni, non potrà essere radice. Osserviamo che mentre esaminiamo se il divisore a è radice, si trovano nel tempo stesso i coefficienti dell'equazione di terzo grado formata dalle altre tre radici della proposta.

333. Sia in esempio l'equazione

$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$: tutti i suoi segni essendo alternativi non potranno esservi radici negative: esamineremo soltanto i divisori positivi (331).

TAVOLA DELL' OPERAZIONE GENERALE
ED APPLICATA ALL' ESEMPIO

Divisori a di	Valori di	Valori di	Valori di	Ultima condizione
$s = 15$	$n = \frac{s}{a}$ $= \frac{15}{a}$	$m = \frac{r-n}{a}$ $= \frac{20-n}{a}$	$k = \frac{q-m}{a}$ $= \frac{23-m}{a}$	$i = \frac{p-k}{a}$ $= \frac{9-k}{a}$
15 5 3 1	3 5	5	6	1

Il solo divisore 3 soddisfa a tutte le condizioni; quindi egli è la sola radice commensurabile della proposta.

L'equazione poi del terzo grado $x^3 - 6x^2 + 5x - 5 = 0$ ne contiene le altre tre radici.

Prendendo per secondo esempio l'equazione

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0,$$

si vedrà che questa non può avere più radici reali che due positive ed una negativa; converrà dunque esperimentare i divisori tanto in più quanto in meno, e si troverà che il solo -7 soddisfa a tutte le condizioni; quindi -7 sarà la sola radice commensurabile della proposta, la quale, di-

visa per $x + 7$, ci dà l'equazione del secondo grado $x^2 - 5x + 2 = 0$.

334. Siccome l'unità è divisore di qualunque numero, così in ogni equazione esperimentaremo prima l'unità per vedere se possa esserne radice. In questo caso non seguiremo la regola del numero antecedente, ma sostituiremo a drittura l'unità e le di lei potenze nell'equazione per vedere se il primo membro riducesi a zero.

335. Ecco il metodo dato da Newton onde facilitare la ricerca dei divisori che possono sperimentarsi per vedere se siano radici dell'equazione.

Lo espongo per una equazione di quarto grado, ma vale anche per quelle degli altri gradi.

Sia l'equazione $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$

Se facciamo $x = t + 1$, $x = t$, $x = t - 1$, avremo queste tre trasformate:

$$\text{I.}^a \dots M + 1 - p + q - r + s = 0;$$

$$\text{II.}^a \dots M' + s = 0;$$

$$\text{III.}^a \dots M'' + 1 + p + q + r + s = 0;$$

indicando per M , M' , M'' le rispettive totalità dei termini che contengono le incognite t .

Ora le radici dell'equazione I.^a, cioè i valori di t , sono eguali a quelle della proposta diminuite di un'unità. Le radici della II.^a sono quelle stesse della proposta, e le radici dell'equazione III.^a eguagliano quelle della proposta accresciute dell'unità.

Segue di qui che quei numeri radici della proposta, i quali si troveranno tra i divisori di s , ultimo termine della II.^a diminuiti di un'unità si troveranno anche tra quei della quantità $1 - p + q - r + s$, ultimo termine della I.^a, ed accresciuti dell'unità, tra quei della quantità $1 + p + q + r + s$, ultimo termine della III.^a Per questo disposti i divisori di quelle tre quantità in tre linee, scrivendo nella linea di mezzo quei dell'ultimo termine s ; nella superiore quei di $1 - p + q - r + s$, e nell'inferiore quei di $1 + p + q + r + s$, si esamineranno soltanto i divisori che diminuiti di 1 si trovano nella linea superiore, ed accresciuti di 1, nell'inferiore.

Osserviamo che le due quantità, i di cui divisori compongono la prima e la terza linea, altro non sono che il primo membro dell'equazione proposta medesima nella quale si fa $x = 1$, $x = -1$.

336. Si cerchino, per esempio, le radici razionali dell'e-

quazione $x^3 - 5x^2 - 18x + 72 = 0$. Se la proposta non ha radici immaginarie, due saranno le radici reali positive, ed una la negativa.

Facciamo $x = 1$, ed il primo membro della proposta sarà $1 - 5 - 18 + 72 = 50$: fatto poi $x = -1$, il detto primo membro sarà $-1 - 5 + 18 + 72 = 84$; converrà dunque cercare i divisori dei tre numeri 50, 72, 84. Eccone la tavola.

Divisori di $\begin{cases} 50... 1, 2, 5, 10, 25, 50. \\ 72... 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. \\ 84... 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84. \end{cases}$

Tra tutt' i divisori di 72 presi positivamente non vi sono che il 2, il 3 ed il 6, i quali diminuiti dell' unità siano divisori di 50, ed aumentati dell' unità, divisori di 84: questi adunque sono i soli che possono essere radici della proposta.

Presi poi i divisori del 72 negativamente, non vi è che il -4 ; il quale diminuito di 1, cioè diventando -5 , sia divisore di 50, ed aumentato di 1, cioè diventando -3 , sia divisore di 84. Dunque tra i negativi non avvi che il -4 , il quale esser possa radice della proposta.

Sottometteremo dunque alla prova del numero (334) i quattro divisori 2, 3, 6, -4 , e troveremo che le radici sono 3, 6 e -4 .

337. Sinora si suppose che i coefficienti dell' equazione fossero numeri interi: se questi fossero rotti; ecco come si farebbero sparire.

Sia l' equazione $t^3 - \frac{k}{a} t^2 + \frac{m}{b} t - \frac{n}{c} = 0$, e si avrà $abct^3 - bckt^2 + acmt - abn = 0$. Facciamo $abct = x$, e quindi $t = \frac{x}{abc}$, e fattane la sostituzione ed opportuna riduzione, avremo $x^3 - bckx^2 + a^2bc^2mx - a^3b^3c^2n = 0$, equazione senza frazioni nei coefficienti.

Trovare le radici per approssimazione.

338. In mancanza delle radici esatte dell'equazioni, cercansi le approssimate. Il metodo ch'espongo è quello di Newton, e suppone che già si conosca un numero il quale sia prossimo alla radice, insegnando a ricavare da questo dei valori sempre più prossimi.

Si cerchi, per esempio, la radice di $x^2 = 20$. Si vede che x è maggiore di 4 e minore di 5. Supponiamo dunque $x = 4 + p$, e si avrà $x^2 = 16 + 8p + p^2 = 20$; ma essendo p una frazione, e per conseguenza minore dell'unità, il suo quadrato sarà sempre più piccolo dell'unità, e potrà trascurarsi parlandosi di approssimazione: resterà dunque, per determinare p , quest'equazione $8p = 4$, quindi $p = \frac{1}{2}$. La radice adunque di venti sarà prossimamente $4\frac{1}{2}$. Per avvicinarsi anche più al vero valore di $\sqrt{20}$, si faccia $x = 4,5 + p$, e si avrà, per determinare p , l'equazione $20,25 + 9p = 20$, e quindi $p = -\frac{0,25}{9} = -0,028$, da cui si ha $x = 4,472$.

Continuando nella stessa guisa ci avvicineremo sempre più al vero valore di $\sqrt{20}$.

In generale sia l'equazione $x^2 = a$, e sappiasi che $x > n$ e $< n + 1$. Facciamo $x = n + p$, ed avremo, per determinare p , l'equazione $n^2 + 2np = a$; quindi

$$p = \frac{a - n^2}{2n}, \text{ ed } x = n + \frac{a - n^2}{2n} = \frac{n^2 + a}{2n}.$$

Per avvicinarsi di più al vero valore della radice, si faccia $x = \frac{n^2 + a}{2n} + q$, e sostituendo questo valore di x

nella proposta, e trascurando q^2 , si avrà l'equazione che ci darà il valore di q , il quale, aggiunto al già trovato valore di x , ci darà una più prossima radice dell'equazione. Da questa poi potremo ricavarne un'altra, e così via discorrendo. Avremo in questa guisa

$x = n$, e più prossimamente

$x = n + p$, e più prossimamente

$x = n + p + q$, e più prossimamente

$x = n + p + q + r$, ecc.

Ma, senza fare queste successive sostituzioni, è facile

vedere che per avere q basta sostituire nel valore di p , $n + p$ in vece di n , e si ha $q = \frac{a - (n + p)^2}{2(n + p)}$; per avere r , basta sostituire nel valore di p , $n + p + q$, e si ha allora

$$r = \frac{a - (n + p + q)^2}{2(n + p + q)}, \text{ ecc.}$$

Questa riflessione abbrevia moltissimo il metodo.

Anzi, senza cercare i valori di q , r ecc., se faremo

$$n' = \frac{n^2 + a}{2n}, \text{ si avrà la terza approssimazione}$$

$$x = n + p + q = \frac{n'^2 + a}{2n'}; \text{ e facendo}$$

$$n'' = \frac{n'n' + a}{2n'}, \text{ si avrà la quarta approssimazione}$$

$$x = n + p + q + r = \frac{n''n'' + a}{2n''}; \text{ e così delle altre.}$$

339. Spiegato il metodo in casi semplicissimi, usiamolo nei più composti.

Sia proposta l'equazione $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, della quale il numero n avvicini una radice. Facciamo $x = n + p$, e perchè p debb'essere per ipotesi una quantità piccola, giacchè egli è la differenza tra la vera radice ed il valor supposto n , così trascureremo le potenze superiori alla prima: avremo in questa guisa

$$x^2 = n^2 + 2np; \quad x^3 = n^3 + 3n^2p, \text{ donde risulterà}$$

$$n^3 + 3n^2p + an^2 + 2anp + bn + bp + c = 0, \text{ e quindi}$$

$$p = -\frac{c + n^3 + an^2 + bn}{3n^2 + 2an + b}$$

Sarà dunque la radice più approssimata

$$x = n - \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b} = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b}.$$

Col medesimo ragionamento del numero antecedente si dimostrerà che potremo avere una radice anche più approssimata $x = n + p + q$, se rappresentato per n' il ritrovato valore di x , prenderemo $x = \frac{2n'^3 + an'n' - c}{3n'n' + 2an' + b}$.
Eguale-
mente, fatto n'' questo valore di x , ci approssime-

remo alla vera radice prendendo $x = \frac{2n''^3 + an''n'' - c}{3n''n'' + 2an'' + b}$;

e così via via.

340. Per esempio : sia l'equazione $x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0$, e paragonata con la formola generale ci darà $a = 2$, $b = 3$, $c = -50$, e quindi

$$p = -\frac{n^3 + 2n^2 + 3n - 50}{3n^2 + 4n + 3}, \text{ ed } x = \frac{2n^3 + 2n^2 + 50}{3n^2 + 4n + 3}. \text{ Ora } x = 3$$

non essendo molto lontano dal vero valore della radice, si porrà 3 per n , e si avrà l'approssimazione $x = \frac{61}{21}$.

Sostituendo nel valore di $x, \frac{61}{21}$ per n , si avrebbe una maggiore approssimazione

Per un altro esempio sia l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$, e se ne ricerchi una radice per approssimazione.

Facciamo $a = 0$, $b = -2$, $c = -5$, e si avrà

$$x = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b} = \frac{2n^3 + 5}{3n^2 - 2}$$

Ora, fatto $n = 2$, si ha $x = \frac{21}{10} = 2,1$. Facciamo

$n = \frac{21}{10}$, e si avrà $x = 2,0946$. Si potrebbe spingere l'approssimazione anche più avanti (*).

(*) Il Lagrange nella nota V al suo trattato della risoluzione delle equazioni numeriche chiama ad esame questo metodo di trovar le radici per approssimazione, e fa vedere ch'esso non è sempre buono, e che anzi in alcuni casi può allontanare dal vero valore in vece di avvicinarvi; ne sia dunque avvertito lo studioso. Il metodo non può essere sicuro che per la ricerca della più grande o della più piccola radice reale in una equazione che abbia tutte le radici reali, o che avendone d'immaginarie, la parte reale di queste sia minore della più grande radice reale o maggiore della più piccola; ma non è cosa di un momento il decidere se una equazione proposta abbia questi pregi. Del resto quanto si è detto può servire per dare un'idea di queste quistioni ai principianti:

341. Per avere poi un valore di n dal quale cominciare le approssimazioni, ecco come in generale ci regoleremo.

Riprendiamo l'equazione del terzo ordine

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, nella quale a, b, c possono essere positive o negative. Facciasi $x = y + h$, ed avremo $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$, essendo

$$A = a + 3h,$$

$$B = 3h^2 + 2ah + b$$

$$C = h^3 + ah^2 + bh + c.$$

Ora prendiamo per h il più piccolo numero che rende le quantità A, B, C positive, ed allora l'equazione in y avrà le radici tutte negative. Posto ciò, se indichiamo per $-e$ una delle radici della trasformata, avremo $y = -e$, quindi $x = h - e$. Dal che concluderemo che h sarà un numero maggiore della più gran radice positiva della proposta, giacchè qualunque valore di x , cioè $h - e$, è sempre minore di h .

Prenderemo adunque per n la quantità h , e partendo da essa, ci avvicineremo sempre più alla radice dell'equazione.

Per esempio: sia l'equazione $x^3 - 7x + 7 = 0$, e paragonisi con la formola, avremo allora $a = 0, b = -7, c = 7$, quindi $A = 3h; B = 3h^2 - 7; C = h^3 - 7h + 7$: il minor valore di h , che rende le quantità A, B, C positive, è $h = 2$; per trovar dunque una radice della proposta, cominceremo dal supporre $x = n = 2$, ed avremo per prima approssimazione $x = 1 \frac{4}{5}$.

Se l'equazione proposta avesse tutti i segni positivi, allora le di lei radici sarebbero tutte negative, e perciò ponendo $-x$ in vece di x , ella si trasformerebbe in un'altra, nella quale tutte le radici sarebbero positive. Per questa nuova equazione cercheremo il numero h , e quindi la radice approssimata di essa, la quale, mutato il segno, diverrebbe la radice negativa della proposta.

342. Quanto abbiamo detto per l'equazione di terzo grado può estendersi anche a quelle del quarto. Colle dottri-

ma i veri metodi da chi ama veder il fondo delle cose non potranno altrove rinvenirsi che nella suddetta opera del Principe degli Analisti.

ne di quest'ultimo capitolo non abbiamo avuto altro scopo che di mostrare come nell'atto pratico si può avere una radice o esatta o approssimata di una equazione dei primi quattro gradi, e d'invogliare i nostri lettori a studiare la teorica generale delle equazioni, ch'è una delle più belle ed interessanti che abbia l'analisi.

FINE DELLA PRIMA PARTE.