CAMERA
DI
MATEMATICA

VOL. I.

ELEMENTI
DI MATEMATICA

DI

ANDREA CARAFFA

DELLA COMPAGNIA DI GESU'

PROFESSORE DI MATEMATICHE NEL COLLEGIO ROMANO

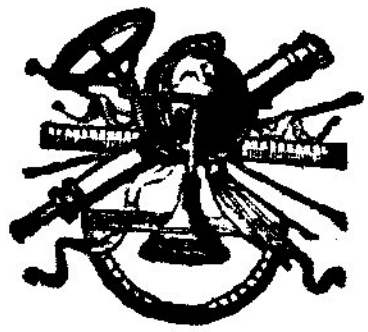
PARTE PRIMA

TRADOTTA DALL' IDIOMA LATINO

CON ANNOTAZIONI

DA

PAOLO VOLPICELLI



ROMA

TIPOGRAFIA BOULZALER

1836.

QVESTE . PAGINE

CHE

PLACIDO . ZVRLA

DI . S. CHIESA . CARDINALE . AMPLISSIMO

VIVENTE . ACCETTAVA

IN . LVCE . OGGI . VENVTE

ALLA . MEMORIA . DI . LVI

PER . GRATITVDINE

PAOLO . VOLPICELLI

DEVOTAMENTE

CONSACRA

PREFAZIONE

Nello scrivere questi elementi di matematica mi proposi di accoppiare, per quanto può farsi rigore e semplicità nel dimostrare; mi proposi altresì di ridurre ovunque l'ampia materia a certi principali capi, dai quali tutto il resto, quasi da fonti primari si deducesse: poichè l'animo resta sopraffatto dalla moltitudine delle cose disparate; e comecchè ne apprenda ciascuna facilmente, tuttavia non s'impossessa della somma e del nesso delle medesime. Aggiungo qua è là degli esempi atti a schiarire i metodi, affinchè più copioso riesca il profitto degli scolari.

Tocco la dottrina delle probabilità; non perchè io stimi del tutto certa l'applicazione dell' astratta teorica degli eventi probabili ai casi fisici, ma per dare un qualche saggio di siffatte non tanto solide quanto celebrate questioni. Rispetto ai problemi spettanti alla sorte, molte cause e molte circostanze concorrono; come, trattandosi dei dadi, la forma e il peso loro, l'inclinazione del piano, il modo di prendere e di gittare il dado, ecc. ... Tutte queste cagioni poi, nè appartengono indistintamente a ciascun caso possibile, nè possono ridursi a calcolo. Per verità ciò è ben conosciuto da coloro, i quali veg-

gono nel giuoco del lotto venire un numero più spesso, un altro rimanersi anche per più giorni di seguito: il medesimo s'intenderà se, presi due dadi, e continuamente gittati, si contino i tiri da farsi, prima che una determinata loro combinazione produca p. e. il numero sei dall' una e dall' altra parte.

Di siffatta dottrina abuserebbe chi volesse l'autorità degli scrittori e de' testimoni rappresentare coi numeri, o investigare l'espressione numerica di alcuna probabile innocenza, o reità. La matematica si deve circoscrivere tra i proprii limiti, nè si debbono fra loro paragonare numericamente se non quelle cose, le quali appartenendo alla classe delle quantità, possono veramente rappresentarsi coi numeri.

In questa prima parte tratto dell' aritmetica, e dell' algebra; e comincio dalle prime e più semplici nozioni; tratterò delle altre materie nella seconda, e terza parte: nel rimanente in questi elementi niente si troverà, o d'inaudito pei geometri, o di nuovo per gli esercitati nelle matematiche discipline; e basterà che sieno essi di scorta a chi vuole internarsi negli arcani ancor più reconditi delle matematiche.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NELLA PRIMA PARTE.

(N. B. *I numeri corrispondono ai paragrafi.*)

ARITMETICA.

Che significa matematica, ed aritmetica. 1.

Scrittura, ed enunciazione dei numeri. 2, 3, 4.

Distinzione dei numeri in interi, e fratti; similmente in razionali, ed irrazionali. 5, 6, 8.

Frazioni decimali. 7.

Alcune universali nozioni circa le fondamentali operazioni sui numeri.

Somma, e sottrazione. 9, 10.

Moltiplicazione, e divisione. 11, 12, ... 21.

Innalzamento a potenze, ed estrazione di radici. 22, 23, ... 28.

Delle quattro prime operazioni eseguite sui numeri razionali di espressione decadica:

cioè 1.° sui numeri interi. 29, 30, ... 45.

2.° sulle frazioni in generale. 54, 55.

3.° sulle frazioni decimali. 56, 57, ... 60.

4.° sopra certe altre particolari frazioni. 64.

Metodo per trovare il massimo comun divisore di due numeri. 46, 47.

Numeri primi fra loro, e primi in sè. 48.

Quel numero N primo in sè, che divide il prodotto P. M. K ... necessariamente dividerà qualcuno dei fattori P, M, K, ... Quindi se N non divide veruno dei P, M, K, ..., nè anche dividerà P. M. K. . . . 45, 50.

Fatte alcune osservazioni circa l' esatta divisibilità dei numeri per 2, 3, 5, 9, si passa al metodo per trovare i divisori tutti di un dato numero. 51, 52.

Come conoscere se una frazione, salvo il suo valore, possa ridursi a più semplici termini. 53.

Si dimostra come le altre frazioni possano in decimali trasformarsi, e come la divisione dei numeri possa, mediante le decimali stesse, protrarsi oltre le cifre intere del quoto. 61, 62.

Nel tralasciare senza errore sensibile le ultime decimali, non è da omettere ogni riguardo per una maggiore accuratezza. 63.

Si propongono alcune osservazioni circa le potenze, e le radici. 65, 66, ... 71.

ALGEBRA.

Delle quantità algebriche reali, e dei loro segni. 72, ... 77.

Alcune universali nozioni circa le prime operazioni sulle quantità.

Somma, e sottrazione. 78, 79, ... 83.

Moltiplicazione, e divisione. 84, 85, ... 89.

Innalzamento a potenze, ed estrazioni di radici. 90, ... 95.

Oltre alle quantità reali, si riguardano in algebra, e si sottopongono alle operazioni algebraiche, anche le espressioni immaginarie. 96, ... 99.

Delle prime quattro operazioni eseguite sui polinomi.

Somma, e sottrazione. 100, 101.

Moltiplicazione, e divisione. 102, 104, ... 108.

Se due numeri sono tali, che ognuno si possa risolvere in due quadrati, si potrà il prodotto loro in due modi similmente risolvere in due quadrati. 103.

Determinare se due polinomi abbiano un fattor comune. 107.

Delle altre due operazioni sui polinomi.

1.° Innalzamento a potenze di esponente intero e positivo. 109.

Dimostrazione della formula newtoniana per gli esponenti interi, positivi, e negativi. 110, 112.

Principj delle combinazioni, e permutazioni. 111. I°.

Se il numero intero N non contiene il numero k, primo in sè, fra' suoi fattori, lo stesso k sarà fattore del numero $N^{k-1}-1$. Quì trova luogo il teorema del chiarissimo Fermat. 111. II.°

Se il numero N risulta di n cifre, rappresentate con a, b, c, ... y, z; sarà

$$N = 10^{n-1}a + 10^{n-2}b + 10^{n-3}c + \ldots + 10y + z.$$

Da ciò deriva, che sommate le cifre 1^a, 3^a, 5^a, ... del numero N, similmente le 2^a, 4^a, 6^a, ..., sarà N divisibile per 11 senza residuo, quante volte la differenza fra l'una e l'altra somma sia $= 0$, ovvero sia esattamente divisibile per 11. 111. III.°

2.° Estrazione di radici. 113, 114, 115, 116.

Si applica il metodo per estrarre le radici dai polinomi, alla estrazione delle radici dai numeri. 117, 118, ... 122.

Si propongono alcune generali osservazioni circa l' equazioni.

Che debba intendersi per le radici di un' equazione, che pel suo grado, ecc. . . 123, 124.

Il prodotto di più fattori immaginari non si annulla, se non sia qualcuno di essi $= 0$. 125.

Nella equazione

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

si può liberare il primo termine dal coefficiente a_0, qualunque sieno le $a_0, a_1, \ldots, a_n$. 126.

Teorica della eliminazione. 127, 128.

Metodo per liberare un' equazione dai termini radicali. 129.

Equazioni determinate, ed indeterminate. 130.

Alcune osservazioni che riferisconsi ai valori variabili delle formule, agl' incrementi e decrementi delle medesime, all' espressioni immaginarie, ecc. ..., e che oltre ad essere utili per altre ricerche, lo sono ancora per conoscere le proprietà dell' equazioni. 131, 1°, 2°, ... 8.°

Si risolvono l'equazioni determinate di primo e secondo grado, comunque sieno i coefficienti dei termini loro, cioè reali, o immaginari. 132, ... 135.

Risoluzione dell' equazione $x^n - (a + b\sqrt{-1}) = 0$;

1.° essendo $n = 2^m$. 136.

2.° essendo $n = 2i + 1$. 137, 138, 139.

3.° essendo $n = 2^r(2k + 1)$. 140.

Varie proprietà dell' equazioni determinate.

Posti A, B, ... H, K, reali, all' equazione

$$[z]\ x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Hx + K = 0$$

apparterrà per lo meno una radice reale, se n è impari, ed almeno due, positiva l'una negativa l'altra, se n è pari, ed insieme $k < 0$. 141.

Sia $k < 0$; degli altri coefficienti se ve ne sono > 0, questi (principiando da A, e con ordine procedendo verso H), suppongansi essere o uno, o due, o più, o quanti si vogliano, sino ad H. Certamente l'equazione non mancherà di una radice reale e positiva, ma una sola ne avrà cosiffatta. 142.

Esprimano $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ i valori numerici dei

coefficienti A , B , C , . . . H , K ; e rappresentata con α la radice reale e positiva dell' equazione

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_{n-1} x - a_n = 0 ,$$

denoti a il massimo di tutti gli a_1 , a_2 , ... a_n ; sarà

$$\alpha < a + 1 . \qquad 143.1.^{\circ}$$

Sarà compreso α fra il massimo e il minimo dei numeri

$$na_1 , (na_2)^{\frac{1}{2}} , \ldots (na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} , (na_n)^{\frac{1}{n}} \qquad 143.2.^{\circ}$$

Comunque sieno i coefficienti A , B , . . . H , K , reali cioè o immaginari, si dimostra esservi sempre uno o più valori $x = \beta' + \delta'\sqrt{-1}$, atti a soddisfare all' equazione $[z] = 0$: inoltre si dà il modo col quale prossimamente ottenere $\beta' + \delta'\sqrt{-1}$. 144.

Il polinomio $[z]$ è il prodotto di n fattori di primo grado della seguente forma

$$x-h , x-i , x-l , \ldots x-t :$$

e poichè svanisce

$$(x-h)(x-i)(x-l) \ldots (x-t) ,$$

qualunque de' valori h , i , l , ... , t si prenda per x, e non può svanire altrimenti ; perciò all' $[z] = 0$ apparterranno certamente n radici , e non diverse da quelle che vengono determinate dalle formule $x-h = 0$, $x-i = 0$, . . . $x-t = 0$. 145.

Se in una equazione del grado $n.^{mo}$ il coefficiente del primo termine $= 1$, sarà il coefficiente del secondo, preso col segno contrario, eguale alla somma di tutte le radici ; il coefficiente del terzo , preso col proprio segno , eguale alla somma dei prodotti binari ; il coefficiente del quarto, preso col segno contrario, alla somma dei prodotti ternari ; e così appresso : l'ultimo termine poi , preso col proprio segno o col segno contrario , secondo che sarà n pari od impari, eguaglierà il prodotto di tutte insieme le radici. 146.

Se una delle radici si annulla, sarà $K = o$; annullandosene due insieme, oltre $K = o$, sarà eziandio $H = o$; ecc. Cangiati i segni di tutte le radici, si cangerà il segno del secondo termine dell' equazione, il terzo rimarrà, il quarto si cangerà, e così appresso. 146. 1.°2.°

Saranno moltiplicate le radici tutte dell' equazione $[z] = o$ per la quantità a, se ciascun termine della equazione stessa si moltiplichi rispettivamente per ciascuno della serie $1, a, a^2, \ldots a^n$. 146. 3.°

L'equazione $[z] = o$ può liberarsi da tutte le frazioni de' coefficienti, senza che il primo termine acquisti un coefficiente nuovo. 146. 4.°

Liberare un' equazione dal secondo termine. 146. 5.°

Se A, B, ... H, K suppongonsi reali, non potrà l'equazione $[z] = o$ ammettere alcuna radice immaginaria $u+v\sqrt{-1}$, senza che ammetta insieme la sua coniugata $u-v\sqrt{-1}$. Oltre a ciò : il polinomio $[z]$ è risolvibile in fattori reali di primo, o secondo grado. 147.

I coefficienti A, B, ... H, K suppongansi razionali ed interi, se vi abbia qualche radice reale e razionale, si troverà la medesima fra i divisori interi dell' ultimo termine ; dei quali se niuno soddisfi all' equazione, potrà con sicurezza inferirsene, che l'equazione non ammette alcuna radice razionale. 147.

Frazioni della forma $\frac{o}{o}$. 148.

Risoluzione dell' equazione di terzo e quarto grado a coefficienti reali. 149, 150, ... 155.

Delle formule intere e simmetriche in ordine alle radici dell' equazioni, e del modo per determinarle prossimamente, quando sieno reali ; ove anche si fa qualche osservazione circa la dottrina della eliminazione.

Cosa intender si debba per le suddette formule, e come si determinano i valori delle medesime. 156, 157, ... 159.

Quindi si passa

1.° al modo col quale si determinano prossimamente le radici reali di quell' equazioni, che sono prive di radici eguali, ed hanno coefficienti reali. 160. 1.° 2.° ... 9.°

2.° al metodo col quale si rendono solitarie le radici eguali di una equazione. 160. 10.° 11.°

3.° a qualche osservazione sulla dottrina della eliminazione. 162. 163.

Delle equazioni indeterminate.

Si risolve l'equazione

$$Nx = My - A = 0 ;$$

similmente la

$$Nx = My + Pz + Qu + \ldots - A = 0 ;$$

e così più altre, come le

$$Nx = My + Pz - A = 0 \quad , \quad N_1x = M_1y + P_1z - A_1 = 0 ,$$

a condizione che le incognite x , y , z , u , ... sieno intere. 164, 165, ... 168.

Sotto la medesima condizione si risolve l'equazione

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots}{A_1 + B_1x + C_1x^2 + \ldots} ;$$

come ancora la

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx_n}{A_1} \ldots (f) \qquad 169, 170.$$

Se A_1 è un numero primo in sè, nè divide accuratamente K, e l'equazione (f) si risolva in interi per valori della $x < A_1$, il numero di questi non sarà $> n$. 171.

Si dimostrano varie proprietà dei numeri, con altrettante formule (f'') ed (f_2), l'ultima delle quali (f_2) coincide nel teorema del chiarissimo Wilson. 172. 173.

Si propongono alcune osservazioni circa la particolar equazione

$$y = \frac{x^2 + A}{A_1} ,$$

da doversi risolvere in interi. 174.

Quindi si passa a certe altre equazioni, similmente da doversi risolvere in interi, che a quella si associano. 175, 176.

Se la somma di quattro quadrati $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, si moltiplichi per la somma di altri quattro $a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$, il prodotto similmente risulterà dalla somma di quattro quadrati. 177.

Qualunque numero, o risulta di un quadrato, o può riguardarsi qual somma di due, di tre, o di quattro quadrati. 178.

Si propone a risolvere l'equazione

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

per x, y razionali. 179, 180, ... 183.

Si propongono anche le

$$y^3 = A^3 + Bx + Cx^2 + Dx^3 ,$$

$$y^3 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 ,$$

$$y^3 = Cx^2 + Dx^3$$

da risolversi per x ed y razionali. 184.

Delle quantità medie.

Che s'intende col nome di tali quantità. 185.

Se h è media fra le a, a', a'', ..., preso un qualunque fattore r, sarà eziandio il prodotto rh medio fra le ra, ra', ra'', ... 186.

Con b, b', b'', ... indicate n quantità del medesimo segno,

e con a, a', a'', . . . altrettante, sia dello stesso segno, sia di segno diverso, sarà

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$$

media fra le $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ecc. 187.

Il polinomio $ab + a'b' + a''b'' + \ldots$ uguaglia il prodotto di $b + b' + b'' + \ldots$ in una qualche media fra le a, a', a'', . . . 188.

Se la quantità h si ponga media fra le a, a', a'', . . . , e sia B un qualche valor numerico, sarà B^h media fra B^a, $B^{a'}$, $B^{a''}$, ecc. . . . 189.

Rappresentati con B, B', B'', . . . C, C', C'', . . . alcuni valori numerici, sarà

$$\sqrt[C+C'+C''+\ldots]{B\,B'\,B''\ldots}$$

media fra le $\sqrt[C]{B}$, $\sqrt[C']{B'}$, $\sqrt[C'']{B''}$, ecc. 190.

Se il valor numerico H è medio fra le B, B', B'', . . . , ancora sarà la potenza H^a media fra le B^a, B'^a, B''^a, ecc. . . . 191.

Delle ragioni, proporzioni, e progressioni.

Si distinguono le ragioni geometriche dalle aritmetiche: qual è l'antecedente, e quale il conseguente di una ragione: quale una proporzione geometrica, e quale un' aritmetica: quando una di due quantità dicesi essere all' altra direttamente, e quando inversamente. 192, 193.

Nella proporzione geometrica il prodotto degli estremi eguaglia quello de' medi; nell' aritmetica poi la somma degli estremi eguaglia quella de' medi. 194.

Cosa è una media proporzionale geometrica, e cosa una media proporzionale aritmetica. 194.

Se in una proporzione geometrica $a : b = a' : b'$, rappresentano a, b, a', b' numeri interi, ed a, b sono primi fra loro, saranno $b' = nb$, $a' = na$, rappresentando n un valore numerico intero. 195.

In una proporzione geometrica la somma o la differenza dei termini della prima ragione, sta al secondo o al primo, come la somma o la differenza dei termini della seconda ragione, al secondo o al primo: di nuovo la somma dei termini della prima ragione, sta alla differenza dei medesimi, come la somma dei termini della seconda, alla loro differenza. 196.

Se più geometriche ragioni sono eguali, starà la somma degli antecedenti a quella de' conseguenti, come qualunque antecedente al suo conseguente. 197.

Moltiplicati fra loro i primi termini di più geometriche proporzioni, similmente i secondi, i terzi, i quarti, saranno i prodotti proporzionali. Lo stesso avviene nelle proporzioni aritmetiche, se alla moltiplicazione dei termini sostituiscasi la somma dei medesimi. 198.

Che s'intende col nome di ragioni composte. 198.

Se più ragioni geometriche sono eguali, la somma dei prodotti di ciascun' antecedente nel rispettivo conseguente, sarà media geometrica proporzionale, tra la somma degli antecedenti quadrati, e la somma de' conseguenti quadrati. 199.

Cosa è una progressione geometrica, cosa un' aritmetica, e come si ottiene la somma dell' una e dell' altra. 200, 201, 202.

Dato il primo termine, l'ultimo, e il numero de' termini di una progressione geometrica o aritmetica, trovare gli altri termini intermedi. 203.

Dei logaritmi.

Che debba intendersi per quantità esponenziali, che per logaritmi dei numeri, che pei vari sistemi dei logaritmi, e che per la base del sistema. 204.

Quando i logaritmi dei numeri divengono positivi, e quando negativi: il logaritmo dell' unità è sempre = o ; il logaritmo poi della base è sempre = 1. 205.

Se più logaritmi nel medesimo sistema costituiscono un' aritmetica progressione, i numeri corrispondenti ne formeranno una geometrica. 206.

Il logaritmo di un prodotto eguaglia la somma dei logaritmi dei fattori ; il logaritmo poi del quoto eguaglia il logaritmo del dividendo meno il logaritmo del divisore. Inoltre : il logaritmo della potenza di qualunque dato numero si ottiene moltiplicando il logaritmo dello stesso numero per l'esponente della potenza : il logaritmo poi della radice si ottiene dividendo il logaritmo del numero pel grado della radice medesima. 207, 208.

Che s' intende pel sistema volgare dei logaritmi, e come si sono calcolate le tavole volgari dei logaritmi, mediante la successiva investigazione dei medi proporzionali. 209.

I logaritmi di due numeri conservano sempre lo stesso rapporto in qualunque sistema. 210.

Caratteristica dei logaritmi. 211, 212.

Mediante i logaritmi si può determinare il valore della incognita, che in certe equazioni trovasi negli esponenti. 213.

Della soluzione dei problemi.

L'equazioni alle quali si giunge mediante la soluzione dei problemi, alle volte si offrono spontaneamente ; però spesso fa d'uopo qualche artificio per giungere ad esse ; e questo deve variare secondo la natura dei problemi stessi : nè possono darsi regole generali per dedurre l'equazioni dalle condizioni date : si propongono alcuni esempi. 214, 215.

I valori negativi delle incognite soddisfano certamente all'equazione d'onde nascono, ma non sempre alla questione proposta ; nondimeno vi si adattano, fatta in essa qualche modificazione. 216.

Nel risolvere i problemi si giunge spesso all' equazione, trovando

due espressioni diverse della stessa quantità, che uguagliate danno l'equazione medesima: però è da por mente che tali espressioni derivino da condizioni diverse. 217, 218.

Si deve nella soluzione dei problemi attendere diligentemente al modo di denominare. 219.

Alcuni cenni sull' arte d'indovinare. 220.

Delle serie.

Nozioni generali delle serie. 221.

Serie algebriche. 222, 223, 224, 225.

Formula Lagrangiana d'interpolazione. 226.

Serie algebrico-geometriche. 227.

Serie d'un altro particolar genere. 228.

Serie ricorrenti. 229, 230, 231, 232.

Convergenza, e divergenza delle serie.

Cosa deve intendersi per serie convergente, e cosa per serie divergente. 233.

Se la serie

$$t_1 , t_2 , t_3 , \ldots \quad (b)$$

è convergente, uno, due, o più, o quanti si vorranno dei termini

$$t_n , t_{n+1} , t_{n+2} , \ldots ,$$

cominciando sempre dal primo t_n, insieme presi, convergeranno verso il limite $= 0$; e viceversa. 234.

Avuto riguardo soltanto ai numerici valori, pongasi che il termine $\frac{t_{n+1}}{t_n}$, crescendo n indefinitamente, converga verso un certo limite fisso k. La serie (b) sarà convergente se $k < 1$, sarà poi divergente se $k > 1$. 235, 236.

Se nascesse $k = 1$, non se ne potrebbe dedurre la convergenza della serie ; poichè siffatta equazione può conciliarsi egualmente con la divergenza della medesima. 237, 238, 239.

Dello svolgimento in serie di alcune formule.

Si premettono varie nozioni. 240.

Si svolgono in serie

1.° e^z , a^z. 241.

2.° $L(1+z)$, $L(k+z)$. 242, 243.

Si dimostra eziandio lo sviluppo in serie della formula $(1+z)^{\mu}$, nella ipotesi dell' esponente μ nè intero positivo, nè intero negativo. 244.

Alcune annotazioni sulle serie immaginarie.

Che debba intendersi per serie immaginaria convergente , e che per divergente. 245.

Donde possa conoscersi quando una serie immaginaria sia convergente, o divergente. 246.

Delle serie spettanti alle formule a^z , $L(1+z)$, $(1+z)^{\mu}$, quando in luogo di z si ponga una espressione immaginaria. 247, 248.

Si aggiungono alcune cose degli esponenziali immaginari. 249.

Di alcune proprietà delle grandezze infinitesime.

Che debba intendersi per siffatte grandezze, che per base, e ordine delle medesime. 250.

Fra due quantità infinitesime quella di ordine più elevato diviene finalmente, in quanto al valore numerico, e costantemente poi si conserva, minore dell' altra di ordine inferiore. 251.

Un polinomio formato da quantità infinitesime di vari ordini, deve riguardarsi come infinitesimo di quell' ordine che di tutti è il minimo. 252.

Un prodotto di più quantità infinitesime di vari ordini, deve riguardarsi appartenere a quell' ordine rappresentato dalla lor somma. 253.

Quali variazioni subisca l'ordine di una quantità infinitesima, quando si passa da una base all' altra. 254.

Delle frazioni continue.

Quante volte una data formula si riduce alla espressione.

$$\frac{a'}{q'} + \frac{a''}{q''} + \frac{a'''}{q'''} + \ldots$$

essa dicesi trasformata in frazione continua. Se ne fa vedere un esempio nella formula $\frac{z_{x+1}}{z_x}$, in cui z_x è tale, che si ha

$$z_x - z_{x+1} = \frac{c}{x(x+1)} z_{x+1} .$$ 255.

Si propongono varie osservazioni circa la frazione continua

$$\frac{v}{u - \frac{v^2}{3u - \frac{v^2}{5u - \ldots}}}$$

nella ipotesi di v e u interi. 256.

Una frazione continua si trasforma in serie, e viceversa. 257, 258.

Frazioni continue, e periodiche. 259.

Fatto $a' = a'' = a''' = \ldots = 1$, onde si abbia la frazione continua

$$\frac{1}{q'} + \frac{1}{q''} + \ldots ,$$

si dimostrano le principali proprietà, e l'uso della frazione stessa. 260, 261, 262.

ELEMENTI

DI

MATEMATICA

PARTE PRIMA.

ARITMETICA

1

La matematica paragona fra loro le grandezze, in quanto sono capaci di aumento e decremento, e cerca i rapporti fra le medesime. Misurando una grandezza per mezzo di un' altra della stessa specie, presa per unità, otterremo la numerica espressione della prima; così potremo esprimere le grandezze coi numeri, e ridurre il paragone loro al paragone fra questi. Di qui facilmente s' intende perchè nel dare gli elementi di matematica cominciamo dall'aritmetica, da quella parte cioè delle matematiche la quale tratta delle fondamentali operazioni sui numeri. Queste sono la somma, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l' innalzamento a potenza, e la estrazion di radici; le quali tutte brevemente spiegheremo, dopo aver detto della notazione, e della enunciazione de' numeri. Dissi brevemente, poichè crediam bene doversi in questi elementi curare assai la brevità. Che se a taluno sembreranno certe cose dette con poca chiarezza, sovvengasi che ancor la voce del maestro deve far qualche cosa.

DELLA NOTAZIONE ED ENUNCIAZIONE DE' NUMERI.

2

Nell'aritmetica decadica di cui ci serviamo, i numeri si notano con le seguenti cifre, 0 (zero, nulla), 1 (uno), 2 (due), 3 (tre), 4 (quattro), 5 (cinque), 6 (sei), 7 (sette), 8 (otto), 9 (nove); nè più fanno d' uopo: imperciocchè ciascun complesso di dieci unità si trasforma tosto in una nuova unità cioè *decina*; similmente dieci decine in un *centinajo*, dieci centinaja in un *migliajo*, . . . Per esprimere cioè le decine di unità, come unità di un grado più elevato, basteranno quelle sole cifre: inoltre le decine delle decine, come unità di due gradi più elevate, potranno con le stesse cifre denotarsi, e così appresso. Per distinguere poi questi diversi gradi di unità, ci serviamo di una

opportuna collocazione di cifre ; da che sono convenuti gli aritmetici che all' infimo grado si appartenga l' ultima sede a destra , e che progredendo verso sinistra, il valore delle unità in ciascuna sede divenga sempre decuplo del prossimo precedente. Si osservi la seguente tavola.

Contiene la sede											
eccetera	11ma	10ma	9na	8va	7ma	6ta	5ta	4ta	3za	2da	1ma
	le decine di migliaja di milioni	le migliaja di milioni	le centinaja di milioni	le decine di milioni	le migliaja di migliaja , o milioni	le centinaja di migliaja	le decine di migliaja	le migliaja , o le decine di centinaja	le centinaja , o le decine degli aggregati di dieci	le decine, o gli aggregati di dieci unità semplici	le unità semplici

Considerando le sei prime sedi conosceremo potersi esse in certo modo dividere in due ordini , uno de' quali , formato delle tre prime , abbraccia semplicemente le unità , le decine , e le centinaja ; l'altro composto delle tre posteriori , comprende le unità , decine, e centinaja di migliaja. Similmente riguardando alle sei seguenti sedi, conosceremo che nelle tre prime (7^{ma}, 8^{va}, 9^{na}) si contengono le unità , decine , e centinaja di milioni , e che nel-

le seguenti tre (10^{ma}, 11^{ma}, 12^{ma}) si contengono le unità, decine, e centinaja di migliaja di milioni, del tutto come per le prime sei sedi; se non che le sei posteriori appartengono ai milioni. Nella stessa guisa quelle sedi che si stendono dalla 12^{ma} alla 18^{va} contengono primieramente le unità, decine, e centinaja di bilioni, poi le unità, decine, e centinaja di migliaja di bilioni, e così appresso.

Inoltre se in qualche parte mancano o le unità, o le decine, o le centinaja, suole occuparsi la sede loro collo zero: così rimane inalterato il valore delle altre unità.

4

Dalle cose dette deriva il modo usitatissimo, e di enunciare i numeri che ci si offrono già espressi per cifre, e di esprimere con queste quelli enunciati debitamente. Riguardo a ciò resta solo da notare che nell'enunciazione de' numeri si comincia da sinistra procedendo verso destra. Perciò il numero per e.

734567038

si enuncia così: *settecento trentaquattro milioni*, *cinquecento sessantasette mila*, *trentotto*: ed il numero

783047692111000720

sette trilioni, *ottocento trenta mila*, *quattrocento settantasei bilioni*, *novecento ventun mila*, *cento dieci milioni*, *settecento venti*: similmente

300004200036710000000

trecento trilioni, *quattro mila dugento bilioni*, *trentasei mila settecento dieci milioni* (1).

(1) *Per leggere agevolmente i numeri composti dietro la nomenclatura stabilita, gioverà dividerli con virgole in periodi di sei cifre ognuno. Ma per leggere i numeri, non è unico il metodo esposto che dicesi proprio degl' italiani e tedeschi; avvene un altro usato dai francesi e dagl'inglesi, che gioverà accennare. In questo secondo metodo la variazione del nome dato alle unità di ordine diverso ricorre subito, non dopo ogni*

6

Se si adottasse un diverso sistema di cifre, diverso eziandio sarebbe il modo e di scrivere, e di profferire i numeri (2).

5

Una grandezza presa per unità può immaginarsi divisa in più parti eguali. Ora se di queste parti alcune solamente se ne

---

sei, ma bensì dopo ogni tre sedi. Perciò 1.° *le due nomenclature vanno pari passo sino alle* centinaja *di* milioni, *ovvero sino alle unità di ordine nono inclusivamente, e nel resto diversificano.* 2.° *per leggere a questo modo i numeri composti gioverà dividerli in periodi ciascuno di tre cifre: così per leggere i numeri già citati, potranno essi dividersi come siegue,*

7,830,476,921,110,000,720
300,004,200,036,710,000,000,

e quindi si enunceranno,

sette quintilioni, ottocento trenta quadrilioni, quattrocento settanta sei trilioni, novecento ventun bilioni, cento dieci milioni, settecento venti:
trecento quintilioni, quattro quadrilioni, dugento trilioni, trentasei bilioni, settecento dieci milioni.

3.° *il medesimo numero composto, profferito e non iscritto con cifre, può rappresentare una diversa grandezza, secondo la diversa nomenclatura che per esso si adotta, la quale non sempre apparisce dall'enunciato del numero stesso. Per es. se si enunci* ventisette bilioni, settecento milioni, due mila uno, *saremo incerti se scrivere*

27,000700,002001, *ovvero* 27,700002001,

grandezza minore assai della prima. Perciò in questi casi ad evitar l'equivoco, fa d' uopo avvertire a quale delle due nomenclature il numero proposto appartiene.

(2) *A ben distinguere e calcolare le grandezze in concreto, bisogna un sistema aritmetico; però non è necessario che questo sia il* decadico, *già esposto ed universalmente ricevuto; imperocchè adottandosi più o meno cifre che in quel-*

prendano, si avrà un'altra grandezza minore della unità, cioè si avrà una frazione propriamente detta. Ma per esprimer ciò fanno d' uopo due numeri, uno che denoti in quante parti sia divisa l' unità, e che dicesi *denominatore*; l' altro che esprima il numero delle parti prese, e che appellasi *numeratore*.

Ambedue poi questi numeri sono divisi da una lineola per modo, che il numeratore sta sopra, e il denominatore sotto alla medesima. Così per e. se debba misurarsi uno spazio alquanto più lungo di tre piedi, ma più corto di quattro, e il *piede* preso per unità s' immagini diviso in dodici parti eguali, lo spazio poi oltre i tre piedi, si estenda sino a cinque delle duodecime parti, la lunghezza dello spazio sarà espressa da 3, e dalla frazione $\frac{5}{12}$, cioè da tre intere unità, e da cinque duodecime parti di essa.

6

Di qui nasce la distinzione de'numeri in interi e fratti, che si dicono ancora con vocabolo comune *razionali*. Ora deve osservarsi, che generalmente si chiamano frazioni, sebbene impropriamente, quei numeri eziandio, che quantunque maggiori della unità, conservano tuttavia la forma frazionaria, come p. e. $\frac{9}{4}$, la quale numerica espressione dimostra, che debbono pren-

---

lo, se ne ponno formare infiniti altri, tutti sufficienti a rappresentare qualunque grandezza. Così potrebbe formarsi un sistema di due, di tre, di quattro, di cinque cifre ec., che perciò dovrebbe chiamarsi binario, ternario, quaternario, quinario, ec.

Ma è da riflettere che adottando un sistema numerico, nel quale il numero delle cifre sia maggiore o minore di dieci, si toglierebbe nel primo caso la semplicità, e si graverebbe soverchiamente la memoria dei principianti: nel secondo, per la pochezza de'caratteri, si renderebbero i numeri assai più composti, e perciò i calcoli più complicati, e si difficulterebbe la idea distinta delle grandezze. Ora il sistema decadico ovvia egualmente bene agl' inconvenienti dell' uno e dell' altro dei casi suddetti, tenendo fra questi una mezzana via; perciò è che trovasi di preferenza stabilito.

dersi nove quarte parti della unità, e ciò equivale manifestamente a prendere due unità con un quarto della medesima.

7

Le frazioni che hanno per denominatore un numero *decadico*, per e. $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{9}{1000}$, diconsi decimali. E poichè la decima parte della unità equivale a dieci centesimi, la centesima a dieci millesimi, eccetera . . . perciò queste frazioni, omesso il denominatore, sogliono più speditamente rappresentarsi a guisa d'interi (§.2:3:4) cosicchè, con quell'ordine con cui le unità semplici da destra a sinistra sono seguite dalle decine, centinaja, migliaja . . ., con quello stesso le medesime, interposta una virgola, sono seguite da sinistra a destra dalle decime, centesime, millesime . . . della unità; come in questi numeri si scorge,

35,2406; 2,023; 0,0026.

Il primo significa trentacinque unità, due decime parti di essa, quattro centesime, niuna millesima, sei dieci millesime; o che è lo stesso, trentacinqne unità, e due mila quattro cento sei dieci millesime.

Il secondo significa due unità, niuna decima, due centesime, tre millesime; ovvero due unità, e venti tre millesime.

Il terzo, niuna unità, niuna decima, niuna centesima esprime, ma solo due millesime, e sei dieci millesime, ovvero ventisei diecimillesime.

8

Presa una certa unità, non si potrà per mezzo di essa esattamente rappresentare una data grandezza, salvo che o la unità stessa misuri a puntino quella grandezza, o divisa e suddivisa quanto si vuole, giungasi finalmente a tali parti che possano dare quella misura. Supponiamo che manchi l'una e l' altra di queste due condizioni. Accresciuto continuamente il numero delle parti eguali in cui la unità si divide, e perciò queste parti sempre più diminuite, decresceranno continuamente le porzioni della grandezza che impediscono l'esatta sua misura. Laonde, queste porzioni trascurate, nasceranno dalle successive misure più e più numeri razionali, che sebbene non presentino la vera ed esatta espressione della grandezza, sempre più ad essa si avvicineranno. Tali

espressioni, a cui si accostano i prefati numeri razionali, tanto più quanto più si vuole, senza mai poterle agguagliare, si riguardano come i limiti di quegli stessi numeri razionali, e sogliono appellarsi numeri *irrazionali*. Per ora gioverà questo cenno sui numeri irrazionali. Nel resto tanto i numeri razionali, quanto gl'irrazionali, si esprimono altresì con le lettere dell' alfabeto.

ALCUNE UNIVERSALI NOZIONI SOPRA LE FONDAMENTALI OPERAZIONI SUI NUMERI.

Somma.

9

Al numero A aggiungendo il numero B, o, che è lo stesso, facendo che A riceva l'aumento B, conseguiremo un terzo numero che dicesi *somma*, e che si esprime con

$$A + B :$$

il segno + si enuncia colla parola *più*. Fra tanto, senza dimostrazione, suole tenersi per evidente, che la somma di più numeri rimane la stessa, qualunque sia l'ordine col quale fra loro si uniscono.

Sottrazione.

10

Dal numero A sottraendo il numero B, o, che è lo stesso, facendo che A subisca il decremento B, otterremo un terzo numero che dicesi differenza, e che si rappresenta con

$$A - B :$$

il segno — si profferisce colla voce *meno*. E' manifesto poi che la differenza A — B è un tal numero D, al quale se aggiungasi B, si ottiene una somma eguale al numero A, cioè

$$D + B = A :$$

il segno = denota un' equazione, D + B dicesi primo membro dell' equazione, A secondo.

Moltiplicazione.

11

Allora diciamo che il numero A si moltiplica pel numero B, quando sottoponiamo A alle operazioni medesime alle quali si sottopone la unità per ottenere B. Il numero che da ciò risulta chiamasi prodotto di A per B, e si denota per una qualunque delle tre seguenti espressioni

$$A \times B \ , \ A \cdot B \ , \ AB :$$

A dicesi moltiplicando, B moltiplicatore. Ora B può essere o razionale (intero, o fratto), o irrazionale.

Sia 1.° B intero. Certamente otterremo B aggiungendo più e più volte a sè stessa la unità. Perciò a conseguire il prodotto A.B, bisognerà tante volte similmente aggiungere a sè stesso il numero A, cioè sommare insieme tanti numeri ciascuno $= A$, quante sono le unità in B.

Sia 2.° B fratto, sia m il suo numeratore, ed n il suo denominatore. Poichè si ottiene B dividendo la unità (§. 5 : 6) in n parti eguali, ed aggiungendo una qualunque di queste tante volte a sè stessa, quante sono le unità di m, otterremo perciò il prodotto A.B dividendo A in n parti eguali, ed aggiungendo una qualunque di queste parti tante volte a sè stessa quante sono le unità di m.

Sia 3.° B irrazionale. Concepiscasi A successivamente moltiplicato per quei razionali numeri che (§. 8) si accostano di continuo a B. Apparirà facilmente che i prodotti così formati si accosteranno incessantemente ad un certo limite. In questo limite consisterà il prodotto A·B. (3).

12

Similmente potendosi riguardare lo zero come limite de' numeri razionali che decrescono continuamente, riguarderemo il prodotto A.o come limite di quei prodotti, che si ottengono moltiplicando successivamente A per numeri razionali sem-

(3) *Così la moltiplicazione delle grandezze irrazionali rientra in quella dei numeri razionali dalla quale dipende.*

pre decrescenti. E poichè siffatti prodotti debbono incessantemente diminuirsi per modo, che si avvicinino di più in più allo zero, perciò sarà (4)

$$A.o = o .$$

13

I numeri h, k, m, n si pongano interi. Dividere la frazione $\frac{1}{k}$ in n parti eguali, equivale (§. 5 : 6) a dividere la unità in $k.n$ parti similmente eguali. Dunque la parte n^{ma} della frazione $\frac{1}{k}$ si esprimerà per $\frac{1}{k.n}$; onde siegue che la parte n^{ma} della frazione $\frac{h}{k}$ sarà $\frac{h}{n.k}$, che presa tante volte, quante sono le unità che si trovano in m, avremo $\frac{h.m}{k.n}$. Quindi (§. 11 . 2.°)

$$\frac{h}{k} \cdot \frac{m}{n} = \frac{h.m}{k.n} \text{ (5).}$$

14

Il prodotto dei numeri A, B rimane lo stesso, sia che ri-

(4) *Esprima x una variabile capace di valori numerici continuamente decrescenti, cosicchè abbiasi lim. $x = o$; sarà per quanto si è detto,*
lim. $A.x = A.o$, e lim. $A.x = o$, onde $A.o = o$.
(5) *Supposto $n = 1$ avremo*

$$\frac{h}{k} . m = \frac{h.m}{k}$$

Perciò 1.° si moltiplicano fra loro due frazioni, dividendo il prodotto dei numeratori per quello dei denominatori. 2.° si moltiplica una frazione per un intero, dividendo pel denominatore il prodotto dell' intero e del numeratore.

tengasi A per moltiplicando, e B per moltiplicatore, sia viceversa che abbiasi B per moltiplicando, ed A per moltiplicatore, cioè sarà

$$A.B = B.A.$$

I numeri A, B si pongano interi. Certamente (§. 9 : 11.1°) otterremo il prodotto B . A aggiungendo a sè stessa ciascuna unità di B tante volte, quante sono le unità che si trovano in A, e raccogliendo le parziali somme così nate, in una somma totale. Ma è manifesto che ciò equivale ad aggiungere A tante volte a sè stessa, quante sono le unità contenute in B. Dunque A.B = B.A.

E poichè la moltiplicazione in numeri fratti si riconduce alla moltiplicazione in interi (§. 13), senza dubbio valerà tale asserzione anche rispetto ad A, B fratti.

Pertanto ciò che fu asserito vale per A, B razionali. Ora non altro fa di mestieri perchè s'intenda (§. 11 . 3.°) lo stesso egualmente valere per A, B irrazionali.

Sia che AB si moltiplichi per C, sia che A si moltiplichi per BC, nell' uno e nell' altro caso si avrà lo stesso prodotto. Sarà cioè

$$AB.C = A.BC.$$

I numeri A, B, C si pongano interi. Poichè AB eguaglia A tante volte ripetuto, quante sono le unità in B, perciò AB·C eguaglierà A tante volte similmente ripetuto, quante unità si contengono in BC, cioè (§. 11 . 1°)

$$AB.C = A.BC.$$

Ora dalle cose dimostrate (§. 13) intendiamo aver luogo la stessa verità eziandio per A, B, C fratti; e da quanto si è detto (§. 11 . 3°), anche per A, B, C irrazionali.

Quindi poi dalle cose dimostrate (§. 14) siegue che un prodotto di tre numeri persiste sempre il medesimo, qualunque sia l'ordine col quale fra loro si moltiplicano (6).

(6) *Abbiamo infatti* (§. 14)

E' facil cosa estender ciò a quattro, cinque . . . . . numeri.

I numeri A, B, C, . . . da moltiplicarsi fra loro, sogliono con un comune vocabolo chiamarsi fattori di quel numero, che dalla moltiplicazione di essi risulta.

Divisione.

16

Allora diciamo dividere A per B quando ricerchiamo un tal numero, il cui prodotto per B eguagli A. Il numero A dicesi dividendo, B divisore, ciò che nasce poi dalla divisione dicesi quoto.

Quindi se propongasi a dividere la unità per un numero intero n, la questione si ridurrà a trovare la parte n^{ma} della unità, e conseguentemente il quoto si esprimerà (§. 5) per $\frac{1}{n}$.

Di nuovo se debba dividersi A per n, saremo condotti a cercare la parte n^{ma} dello stesso A. Laonde se per A si assuma un intero m, poichè quella n^{ma} parte eguaglia la parte n^{ma} della unità tante volte ripetuta, quante sono le unità in m, il quoto si esprimerà (§. 6) con $\frac{m}{n}$.

Generalmente la espressione $\frac{A}{B}$ suole adoperarsi per indicare il quoto che nasce dalla divisione di A per B, comunque si riguardino i numeri A, B. Inoltre lo stesso quoto suole ancora esprimersi con A : B.

$$AB = BA\,,\ AC = CA\,,\ BC = CB\,;$$

quindi

$$ABC = BAC\,,\ ACB = CAB\,,\ BCA = CBA$$

onde (§. 14) *sarà*

$$ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA.$$

17

I numeri m , n , h , k sieno interi. Il quoto risultante dalla divisione del numero fratto $\frac{h}{k}$ per l'altro $\frac{m}{n}$ eguaglia il prodotto delle due frazioni $\frac{h}{k}$, $\frac{n}{m}$; cioè (§.13)

$$\frac{h}{k} : \frac{m}{n} = \frac{h}{k} \cdot \frac{n}{m} = \frac{h.n}{k.m} .$$

Imperocchè si moltiplichi $\frac{h}{k} \cdot \frac{n}{m}$ pel divisore $\frac{m}{n}$; nascerà (§. 13 : 14) il prodotto

$$\frac{h}{k} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} = \frac{h}{k} \cdot \frac{mn}{mn} = \frac{h}{k} ,$$

eguale cioè al dividendo; perciò (§. 16) eccetera (7).

18

Si esprimano con m , n , h , k , e con p , q , i , l dei numeri interi. Si avrà (§. 17 : 13 : 15)

---

(7) *Nella equazione*

$$\frac{h}{k} : \frac{m}{n} = \frac{h.n}{k.m}$$

pongasi prima $n = 1$, *poi* $k = 1$, *avremo*

$$\frac{h}{k} : m = \frac{h}{k.m} \quad , \quad h : \frac{m}{n} = \frac{hn}{m}$$

Dunque 1.° *si divide una frazione per un'altra, moltiplicando quella per questa rovesciata.* 2.° *Si divide una frazione per un intero, dividendo il numeratore per l'intero moltiplicato pel denominatore.* 3.° *Si divide un intero per una frazione, moltiplicando quello per questa rovesciata.*

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{h}{k}} \cdot \frac{\frac{p}{q}}{\frac{i}{l}} = \frac{mk}{nh} \cdot \frac{pl}{qi} = \frac{mpkl}{nqhi} = \frac{mp}{nq} : \frac{hi}{kl} = \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}{\frac{h}{k} \cdot \frac{i}{l}},$$

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{h}{k}} : \frac{\frac{p}{q}}{\frac{i}{l}} = \frac{mk}{nh} : \frac{pl}{qi} = \frac{mikq}{nlhp} = \frac{mi}{nl} : \frac{hp}{kq} = \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{i}{l}}{\frac{h}{k} \cdot \frac{p}{q}}.$$

19

Qualunque sieno i numeri A, B, C, D razionali cioè, o irrazionali, facilmente ora s'intende (§. 8 : 11 . 3° : 18) che sarà sempre

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}, \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}.$$

20

Abbiamo (§. 19 : 16)

$$\frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{C} = \frac{A}{B};$$

similmente

$$\frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{C}} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{C} = \frac{A}{B}.$$

Siegue da ciò che non cangia il valore del numer o $\frac{A}{B}$, se tanto il numeratore quanto il denominatore si moltiplichi, o si divida per lo stesso numero.

Dalle cose ora dette apparisce come i numeri

$$\frac{A}{B}\ ,\ \frac{E}{F}\ ,\ \frac{H}{K}\ \ldots\ ,$$

dotati di numeratore diverso, possano generalmente ridursi, senza cangiarne il valore, ad avere un medesimo denominatore. Si farà cioè questa operazione moltiplicando numeratore e denominatore di ogni numero pel prodotto dei denominatori degli altri. Così, salvi i valori, si ridurranno i due

$$\frac{A}{B}\ ,\ \frac{E}{F}$$

agli altri due

$$\frac{A.F}{B.F}\ ,\ \frac{E.B}{B.F}\ ,$$

forniti dello stesso denominatore: i tre

$$\frac{A}{B}\ ,\ \frac{E}{F}\ ,\ \frac{H}{K}\ ,$$

si ridurranno ai tre seguenti

$$\frac{A.F.K}{B.F.K}\ ,\ \frac{E.B.K}{B.F.K}\ ,\ \frac{H.B.F}{B.F.K}\ ,$$

ridotti similmente allo stesso denominatore. Quindi

$$\frac{A}{B}+\frac{E}{F}=\frac{A.F}{B.F}+\frac{E.B}{B.F}=\frac{A.F+E.B}{B.F}\ ,$$

$$\frac{A}{B}-\frac{E}{F}=\frac{A.F}{B.F}-\frac{E.B}{B.F}=\frac{A.F-E.B}{B.F}\ ,$$

eccetera . . . . .

Innalzamento a potenze.

22

Se di tre numeri A, B, P supponiamo P formarsi di A per via di moltiplicazione, come B formasi della unità per via di somma, si dirà essere A una *radice*, P la sua *potenza*, e B l'*esponente*, col quale si denota il *grado* della potenza stessa. La potenza P suole indicarsi per A^B.

Queste cose premesse, innalzare A alla potenza del grado B, non altro significa fuorchè determinare il numero A^B. L'esponente B può essere, o razionale (intero, o fratto), o irrazionale.

Sia 1.° B intero, cosicchè abbiasi

$$B = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots,$$

eguale cioè alla somma di più unità. Avremo

$$A^B = A \times A \times A \times \ldots\ldots$$

Che è quanto dire A^B sarà il prodotto di tanti fattori ognuno $= A$, quante sono le unità da sommarsi per formare B. Perciò la prima potenza del numero A sarà lo stesso A; la potenza seconda il prodotto di due fattori A; la terza il prodotto di tre fattori medesimi, e così appresso. La potenza seconda suole chiamarsi eziandio *quadrato*, e la terza *cubo*.

Sia 2.° B fratto, ed abbia m per numeratore, n per denominatore. Affinchè per via di somma si formi della unità l'esponente $\frac{m}{n}$, deve prima determinarsi la parte n^{ma} della unità, cioè un tal numero, che aggiunto n volte a sè stesso produca uno; poi questo numero deve tante volte sommarsi, quante sono le unità di m. Dunque per ottenere la potenza $A^{\frac{m}{n}}$, farà d'uopo prima determinare un tal numero α, che tra loro moltiplicati n fattori eguali allo stesso α, abbiasi A; poscia formare un prodotto di m fattori ciascuno eguale ad α. In questo prodotto consiste la potenza $A^{\frac{m}{n}}$. Quindi sarà (1°)

$$A^{\frac{m}{n}} = \alpha^m.$$

Sia 3.° B irrazionale. Presi per B successivamente quei razionali numeri, che ad esso del continuo si accostano, per poco

che si ponga mente apparirà, che le potenze così prodotte, si accosteranno sempre più ad un certo limite. In questo limite consiste la potenza A^B .

23

Riguardo alla potenza di cui è zero il grado, essa dovrà riguardarsi (§. 12) come limite, al quale continuamente si accostano quei valori, che riceve A^B , quando per B si adoperano numeri razionali continuamente decrescenti. Ma questo limite $= 1$. Dunque

$$A^0 = 1.$$

La minor proposizione in ordine ad $A = 1$ è evidente; in tal caso infatti anche il numero α (§. 22. 2°) sarà sempre $= 1$. Negli altri casi provasi da questo, che diminuiti sempre più i numeri razionali da sostituirsi a B, il numero α continuamente si accosterà alla unità crescendo, o decrescendo, secondo che A sarà minore, o maggiore di uno (8).

---

(8) *Col nome di limite s' intende un valore fisso al quale indefinitamente si accostano i valori successivi di qualche variabile, cosicchè la differenza fra quello e questi, divenga minore di qualunque data grandezza, quanto si voglia piccola. Ciò premesso, potendo lo zero* (§. 12.) *riguardarsi come limite dei numeri continuamente decrescenti; è chiaro che* A^0 *potrà riguardarsi come limite delle potenze nate dalla* A^B, *quando l' esponente B riceva successivamente quei numeri a suoi valori. Dunque potrà in questa ipotesi stabilirsi lim.* $A^B = A^0$; *ma lim.* $A^B = 1$, *dunque* $A^0 = 1$.

Per mostrar poi che lim. $A^B = 1$, *sia 1.°* $A = 1$; *avremo* (§. 22 . 2°) $A^B = 1^{\frac{m}{n}} = \alpha^m$, *ed* $\alpha^n = 1$; *onde* $\alpha^m = 1$, *ed* $A^B = 1^{\frac{m}{n}} = 1$; *dunque*

$$lim.\ A^B = 1.$$

Sia 2.° $A < 1$, *sarà* $A^B = A^{\frac{m}{n}} = \alpha^m$, *quindi* $\alpha^n = A$; *e perciò* $\alpha^n < 1$, *ed* $\alpha < 1$: *ora crescendo n indefinitamente*

Esprimano B, C numeri interi. Il prodotto di tanti fattori $= A$, quante sono le unità in $B + C$, potrà evidentemente esprimersi (§. 22. 1°) tanto per $A^B \cdot A^C$, quanto ancora per A^{B+C}.

Rappresentino B, C numeri fratti, quali si riducano, se fa d'uopo, allo stesso denominatore (§. 21), cosicchè abbiasi

$$B = \frac{m}{n}, \quad C = \frac{h}{n}, \quad B + C = \frac{m+h}{n}.$$

Dalle cose ora dette il prodotto di tanti fattori, ciascuno eguale ad α, quante sono le unità contenute in $m + h$, potrà esprimersi per $\alpha^m \cdot \alpha^h$, ed anche per α^{m+h}. Ma (§. 22. 2°)

$$\alpha^m \cdot \alpha^h = A^{\frac{m}{n}} \cdot A^{\frac{h}{n}} = A^B \cdot A^C, \text{ ed } \alpha^{m+h} = A^{\frac{m+h}{n}} = A^{B+C} \quad (9).$$

non sussisterebbe $\alpha^n = A$, *ove* α *non andasse sempre crescendo; dunque lim.* $\alpha = 1$, *e lim.* $\alpha^m = 1$; *onde*

$$lim.\ A^B = lim.\ A^{\frac{m}{n}} = lim.\ \alpha^m = 1.$$

Sia 3.° $A > 1$, *avremo* $\alpha^n = A$, *perciò anche* $\alpha > 1$; *ora crescendo n indefinitamente, non sussisterebbe* $\alpha^n = A$, *se* α *non andasse sempre decrescendo; dunque lim.* $\alpha = 1$, *e lim.* $\alpha^m = 1$; *e perciò*

$$lim.\ A^B = lim.\ A^{\frac{m}{n}} = lim.\ \alpha^m = 1.$$

Ora non potendo A ricevere altri valori fuorchè i tre da noi considerati, ne discende dover essere sempre lim. $A^B = 1$, *e conseguentemente* $A^0 = 1$.

(9) *Per conoscere più facilmente la verità della*

$$\alpha^{n+h} = A^{\frac{m+h}{n}} = A^{B+C}$$

Quel prodotto adunque si esprime tanto per $A^B.A^C$, quanto ancora per A^{B+C}.

Pertanto se B, C sono numeri razionali, certo quel numero che si esprime per $A^B \,.\, A^C$, si esprimerà parimente per A^{B+C}. Dunque lo stesso valerà (§. 22. 3°) per B, C irrazionali. Perciò qualunque sieno B, C, sempre sarà

$$A^B.A^C = A^{B+C} ;$$

e generalmente

$$A^B.A^C.A^D.A^E. \ldots = A^{B+C+D+E+\ldots}.$$

Inoltre ciascuno facilmente intende (§. 22. 1°) essere ancora

$$A^m.C^m.D^m \ldots = (A.C.D. \ldots)^m.$$

Che se, come ponemmo (§. 22. 2°) $A = \alpha \,.\, \alpha \ldots$, così poniamo $C = \upsilon \,.\, \upsilon \ldots$, $D = \delta \,.\, \delta \ldots$, eccetera, saranno

$$A^{\frac{m}{n}} \,.\, C^{\frac{m}{n}} \,.\, D^{\frac{m}{n}} \ldots = \alpha^m.\upsilon^m.\delta^m \ldots,$$

$$(A.C.D \ldots)^{\frac{m}{n}} = (\alpha.\upsilon.\delta \ldots)^m.$$

Dunque

$$A^{\frac{m}{n}} \,.\, C^{\frac{m}{n}} \,.\, D^{\frac{m}{n}} \ldots = (A.C.D \ldots)^{\frac{m}{n}} ;$$

e generalmente (§. 22 . 3°)

$$A^B.C^B.D^B \ldots = (A.C.D \ldots)^B. \quad (10)$$

---

facciasi $m + h = p$, *otterremo* (§. 22. 2°) $\alpha^p = A^{\frac{p}{n}}$; *e sostituendo il valore di p avremo l'equazione precedente*

(10) *Abbiamo* (§. 22 . 2°)

$$A^{\frac{m}{n}} = \alpha^m \,,\; C^{\frac{m}{n}} = \upsilon^m \,;\; D^{\frac{m}{n}} = \delta^m, \ldots$$

La potenza A^B elevata alla potenza del grado C, si rappresenti per $(A^B)^C$; e si faccia primieramente $B = m$, $C = h$; quindi $B = \frac{m}{n}$, $C = \frac{h}{k}$. Nel primo caso abbiamo (§. 22. 1°)

$$(A^m)^h = A^{mh}.$$

In quanto al secondo caso, sia β un numero tale, che moltiplicati k fattori fra loro ciascuno $= \beta$, emerga (§. 22. 2°) un prodotto $= \alpha$. Nascerà perciò A dalla moltiplicazione di nk fattori ciascuno $= \beta$, e sarà

Moltiplicando insieme queste equazioni avremo

$$A^{\frac{m}{n}} C^{\frac{m}{n}} D^{\frac{m}{n}} \ldots = \alpha^m \gamma^m \delta^m \ldots = (\alpha \gamma \delta \ldots)^m.$$

Ma essendo $A = \alpha^n$, $C = \gamma^n$, $D = \delta^n$, ... *sarà eziandio*

$$A\,C\,D \ldots = \alpha^n \gamma^n \delta^n \ldots = (\alpha \gamma \delta \ldots)^n.$$

Dunque fatto per compendio

$$A\,C\,D \ldots = H, \quad ed \quad \alpha \gamma \delta \ldots = \omega,$$

avremo $H = \omega^n$, *cioè* (§. 22.2°) $H^{\frac{m}{n}} = \omega^m$; *e sostituendo i valori di* H, ω, *avremo*

$$(ACD..)^{\frac{m}{n}} = (\alpha \gamma \delta \ldots)^m; \text{ onde } A^{\frac{m}{n}} C^{\frac{m}{n}} D^{\frac{m}{n}} \ldots = (ACD\ldots)^{\frac{m}{n}}.$$

Dunque sarà generalmente

$$A^B C^B D^B \ldots = (A\,C\,D \ldots)^B;$$

vale a dire un prodotto di potenziali, ciascuno con egual esponente, si ottiene coll'innalzare a questo il prodotto delle loro basi.

$$A^{\overline{nk}}{}^{\overline{mh}} = \beta^{mh}.$$

Abbiamo poi (§. 22 . 2°)

$$(A^{\overline{n}}{}^{\overline{m}})^{\overline{k}}{}^{\overline{h}} = (\alpha^m)^{\overline{k}}{}^{\overline{h}} = (\beta^m)^h = \beta^{mh};$$

dunque

$$(A^{\overline{n}}{}^{\overline{m}})^{\overline{k}}{}^{\overline{h}} = A^{\overline{n.k}}{}^{\overline{m.h}}$$

e generalmente (§. 22. 3°) qualunque sieno B, C sarà

$$(A^B)^C = A^{B.C} \qquad (11)$$

---

(11) *Nel primo caso la equazione* $(A^m)^h = A^{mh}$ *si riconosce vera riflettendo essere* $(A^m)^h = A^m . A^m . A^m \ldots .$, *cioè eguale ad un prodotto di h fattori, ciascuno eguale ad* A^m; *per conseguenza sarà eziandio* $(A^n)^h = A . A . A \ldots$, *cioè eguale ad un prodotto di m h fattori, ciascuno eguale ad A; e perciò dovremo stabilire*

$$(A^m)^h = A^{mh}.$$

Nel secondo caso poniamo $\beta^k = \alpha$, *e siccome* α *è tale per ipotesi, che innalzata alla potenza del grado n produce A, cioè* $\alpha^n = A$; *così avremo* $\beta^{kn} = \alpha^n = A$, *e perciò* (§. 22 . 2°)

$$A^{\overline{nk}}{}^{\overline{mh}} = \beta^{mh}.$$

Inoltre abbiamo evidentemente $(A^{\overline{n}}{}^{\overline{m}})^{\overline{k}}{}^{\overline{h}} = (\alpha^m)^{\overline{k}}{}^{\overline{k}}$; *ma essendo* $\beta^{km} = \alpha^m$; *sarà* β^m *un numero tale, che moltiplicati k fattori, ognuno* $= \beta^m$ *si produrrà* α^m, *e perciò* (§. 22 . 2°)

$(\beta^m)^h = (\alpha^m)^{\overline{k}}{}^{\overline{h}}$, *dunque*

Suppongasi in $\frac{A^B}{A^C}$ B maggiore di C, e primieramente sia $B = m$, $C = h$, dipoi (§. 24) $B = \frac{m}{n}$, $C = \frac{h}{n}$. Siccome nel primo caso A^m risulta da m fattori ciascuno $= A$, ed A^h da h fattori ciascuno $= A$, tra loro moltiplicati, certamente (§. 20) potranno togliersi dal numero $\frac{A^m}{A^h}$, salvo il suo valore, quei fattori che sono comuni al numeratore ed al denominatore: ciò fatto si ridurrà il denominatore alla unità, il numeratore poi al prodotto di $m - h$ fattori, ciascuno $= A$. Dunque

$$\frac{A^m}{A^h} = \frac{A^{m-h}}{1} = A^{m-h}.$$

Nel secondo caso abbiamo (§. 22 . 2° : 25 : 21)

$$\frac{A^{\frac{m}{n}}}{A^{\frac{h}{n}}} = \frac{\alpha^m}{\alpha^h} = \alpha^{m-h} = (A^{\frac{1}{n}})^{m-h} = A^{\frac{m-h}{n}} = A^{\frac{m}{n} - \frac{h}{n}}.$$

Dalle quali cose concludiamo (§. 22 . 3°) essere

$$\left(A^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{h}{k}} = (\alpha^m)^{\frac{h}{k}} = (\beta^m)^h = \beta^{mh},$$

e perciò

$$\left(A^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{h}{k}} = A^{\frac{mh}{nk}};$$

quindi (§. 22 . 3°) *avremo generalmente*

$$(A^B)^C = A^{B.C};$$

cioè s' innalza una qualunque potenza ad un' altra moltiplicando il grado della prima per quello della seconda.

$$\frac{A^B}{A^C} = A^{B-C}$$

anche per B, C irrazionali. Se pongasi B minore di C, col medesimo ragionamento si otterrà

$$\frac{A^B}{A^C} = \frac{1}{A^{C-B}} \quad (12)$$

Estrazion di radici.

27

Dal numero A estrarre la radice indicata col numero B, significa trovare un tal numero R, che elevato alla potenza del grado B riproduca A. Il numero B col quale si nota il grado della radice R, si chiama l'*indice* di essa, e la radice suole rappresentarsi con $\sqrt[B]{A}$.

La radice di secondo grado dicesi eziandio *quadrata*, di terzo *cubica*. È solito che la radice quadrata, soppresso l'indice, si rappresenti con $\sqrt{A}$.

28

Essendo come sopra m, n numeri interi, siccome A^m eguaglia (§. 11. 1° : 22 . 2°) il prodotto di $m.n$ fattori ciascuno $= \alpha$, certamente $\sqrt[n]{A^m}$ eguaglierà il prodotto di m fattori $= \alpha$, perciò (§. 22 . 2°)

(12) *Dunque la divisione fra potenze aventi la base medesima si fa lasciando la sola unità nel luogo della potenza minore, e sottraendo l' esponente di questa dall' esponente dell' altra.*

$$\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}} \quad (13).$$

Inoltre (§. 25) abbiamo

$$A = (A^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}; \qquad \text{dunque} \qquad \sqrt[\frac{n}{m}]{A} = A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$$

DELLE QUATTRO PRIME OPERAZIONI IN QUANTO SI ESEGUISCONO SUI NUMERI RAZIONALI DI ESPRESSIONE DECADICA.

Somma degl' interi.

29

Se debba sommarsi un numero con un altro di solo una cifra, che si dice semplice, ognuno all'istante troverà il numero

---

(13) *Abbiamo* (§. 22 . 2°)

$$A^{\frac{m}{n}} = \alpha^m \text{ , } A = \alpha^n \text{ , } \textit{quindi } (\S.\ 25)\ A^m = (\alpha^n)^m = \alpha^{mn};$$

dunque

$$\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[n]{\alpha^{mn}}.$$

Nel secondo membro di questa equazione si cerca un numero (§. 27), *che elevato alla potenza n riproduca* α^{mn}, *ma questo non può essere che* α^m, *dunque*

$$\sqrt[n]{A^m} = \alpha^m; \textit{ e perciò } \sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}.$$

Dunque ogni radice eguaglia una potenza con esponente fratto, avente per numeratore l'esponente della quantità posta sotto al vincolo radicale, per denominatore l' indice della radice stessa; e viceversa.

che ne risulta. In quanto ai numeri di più cifre che diconsi composti, qualora con qualche esempio la cosa venga dichiarata, sarà manifesto a chiunque tutto il processo dell' operazione. Abbiansi pertanto da sommare i numeri 32478, 397, 96061, 42. Si dispongano gli uni sotto gli altri per modo, che le unità sieno sottoposte alle unità, le decine alle decine, le centinaja alle centinaja, e così successivamente; dipoi sotto i numeri tutti si conduca una linea, e cominciato dalla colonna delle unità, dicasi $8 + 7 = 15$, $15 + 1 = 16$, $16 + 2 = 18$. Si ottiene dunque da questa colonna una decina, e otto unità. Perciò nella sede delle unità si scriva 8, e quella decina si annoveri tra le decine della seguente colonna, dicendo $1 + 7 = 8$, $8 + 9 = 17$, $17 + 6 = 23$, $23 + 4 = 27$: si hanno così due centinaja, e sette decine. Laonde scrivasi 7 nella sede delle decine, e le due centinaja si trasportino nella seguente colonna delle centinaja, dicendo, $2 + 4 = 6$, $6 + 3 = 9$, $9 + 0 = 9$; in questa guisa si hanno solo nove centinaja. Si ponga dunque 9 nella sede delle centinaja. Ora si vada nella colonna delle migliaja, e si avrà solamente $2 + 6 = 8$; la qual cifra 8 dee porsi nella sede delle migliaja. Nell'ultima colonna delle decine di migliaja si trova $3 + 9 = 12$ vale a dire un sol centinajo di migliaja, e due decine di migliaja. Scrivendo adunque 2 ed 1 nelle convenienti sedi (5ta e 6ta), si otterrà la richiesta somma dei quattro numeri; cioè

32478
397
96061
42
128978

$$32478 + 397 + 96061 + 42 = 128978.$$

30

Dunque il processo della operazione consiste generalmente in questo, che i numeri di ciascuna colonna si uniscono come se fossero unità, e dalla somma che ne nasce si trasportano tante unità nella colonna seguente, quante sono le decine sommate nella precedente sopra le unità. Poichè mentre da una qualunque colonna progrediamo alle altre verso sinistra, il valore di ciascuna cifra nella sede seguente si reputa decuplo del prossimo precedente.

Sottrazione degl' interi.

31

Dovendo sottrarsi un numero semplice da un altro semplice, o da uno composto fra 9 e 19, ciascuno subitamente otterrà il numero residuo. Per quello riguarda gli altri numeri dovrà per modo sottoporsi al minuendo il sottraendo, che le unità corrispondano alle unità, le decine alle decine e così del resto: poi condotta una linea, e cominciato dalle unità, si tolga ciascuna cifra inferiore dalla superiore, e si ponga ogni residuo sotto la linea nella rispettiva sede. A questo modo si avrà un numero, che sarà la differenza dei numeri dati.

Esempio.

Dal numero 267896 debba sottrarsi il numero 3104. Scrivasi questo sotto quello come vedesi qui eseguito: dipoi dicasi $6-4=2$, $9-0=9$, $8-1=7$, $7-3=4$, i quali residui sono da collocarsi sotto alla linea, come del pari è qui praticato. Ma poichè alle due ultime note del minuendo niuna ne corrisponde nel sottraendo, esse debbonsi scrivere sotto alla linea con quell' ordine che s'incontrano nel minuendo, affinchè abbiasi la differenza richiesta

```
267896
  3104
------
264792
```

$$267896 - 3104 = 264792.$$

32

Che se in alcun luogo la nota inferiore si trovi maggiore della superiore, questa si aumenterà di dieci unità, che si prenderanno dalla nota prossimamente seguente, la quale perciò si avrà poi come diminuita di uno (§. 2).

Esempio.

Debba sottrarsi 2974 da 3581. Non potendosi togliere il numero 4 da 1, aggiungansi a questo dieci unità, e dicasi $11 - 4 = 7$; così la cifra superiore 8 prossimamente seguente sarà scema di uno, poichè da

```
3581
2974
----
 607
```

quella fu tolto per aumentare di dieci la precedente nota ; quindi $7 - 7 = 0$. Progredendo oltre , poichè il numero 9 non può togliersi da 5 , a questo di nuovo si aggiungeranno dieci unità , e si avrà $15 - 9 = 6$. Per aver aumentato il numero 5 di dieci unità , l' ultima nota 3 sarà priva di uno ; e poichè $2 - 2 = 0$, perciò la richiesta differenza sarà

$$3581 - 2974 = 607.$$

33

Spesso accade che uno o più zeri seguono la nota da aumentarsi. Allora da quella che s' incontra la prima dopo gli zeri , si prenda la unità , ed immediatamente si trasporti nella sede dell'ultimo zero , dove valerà dieci. Da questa sede dovrà parimente trasportarsi una delle dieci unità nella sede del penultimo zero , ove di nuovo valerà dieci ; e così finchè giungasi alla nota che deve aumentarsi di dieci unità. Per tal modo avverrà che ogni zero diverrà nove , e la nota che dopo questi è la prima , si diminuirà di uno.

Esempio.

Propongasi a sottrarre il numero 143975 da 180002. Saranno $12-5=7$, $9-7=2$, $9-9=0$, $9-3=6$, $7-4=3$, $1-1=0$; onde la richiesta differenza sarà

$$180002 - 143975 = 36027$$

$$\begin{array}{r} 180002 \\ 143975 \\ \hline 36027 \end{array}$$

34

La ragione dell'operazione è manifesta ; perciocchè si tolgono le unità dalle unità , le decine dalle decine , ec. . . . Per assicurarsi poi che la operazione stessa fu eseguita esattamente , si aggiunga la differenza trovata al sottraendo. Se non vi fu errore, certo la somma eguaglierà (§. 10) il minuendo.

Moltiplicazione degl' interi.

35

Per conoscere il prodotto di due numeri semplici si scriva l' uno dei due tante volte in serie verticale, quante sono le unità nell' altro, per quindi farne la somma, ed ottenere così (§. 11 . 1°) il richiesto prodotto. Ma onde i principianti abbiano alla mano siffatti prodotti, ecco la tavola pittagorica

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ora l'uso di questa tavola da solo un esempio apparirà. Si dimanda v. gr. il prodotto di 8 in 7. L' una delle due cifre p. es. 8 si cerchi nella linea superiore orizzontale, l' altra poi 7 nella prima linea verticale: si discenda inoltre verticalmente dalla cifra 7 finchè si giunga alla medesima serie orizzontale in cui è l' altra cifra 8. Si cadrà sull' areola contenente il numero 56. Sarà 56 il richiesto prodotto.

Per effettuare la moltiplicazione de'numeri composti, si terrà questo metodo. Si ponga il moltiplicatore sotto al moltiplicando; e condotta una linea si moltiplichino tutte le cifre del moltiplicando per ciascuna del moltiplicatore, cominciando a destra nell' uno e nell' altro; e le decine che si formano in eseguire tali moltiplicazioni si separino, per sommarle col prodotto della medesima cifra del moltiplicatore nella prossima seguente del moltiplicando. I prodotti che nascono da ciascheduna cifra del moltiplicatore per tutte le altre del moltiplicando, si scrivano *distintamente* sotto la linea in serie discendente per modo, che le unità di ciascuno stieno sotto quella cifra, per la quale si eseguisce la moltiplicazione. Ora la somma di tutti quelli sarà il prodotto richiesto.

Esempio.

Si chiede il prodotto di 824 in 59. Pongasi 59 sotto 824 come qui vedesi: dipoi, condotta una linea, dicasi $4.9 = 36$: si scriva 6 sotto al 9, cifra moltiplicante, e si separino tre decine, da unirsi al prodotto seguente $2.9 = 18$: si avrà $18 + 3 = 21$: si scriva 1, ed aggiungendo 2 al prodotto $8.9 = 72$, scrivasi 74.

```
 824
  59
-----
7416
4120
-----
48616
```

Moltiplicate tutte le cifre del numero superiore per 9, dovranno le medesime moltiplicarsi per 5. Dicasi adunque $4.5 = 20$: scrivasi *o* in guisa che stia sotto al 5, cifra moltiplicante, ed aggiugnendo 2 al seguente prodotto $2.5 = 10$ si avrà 12: scrivasi 2, ed aggiunto 1 al prodotto $8.5 = 40$ si scriva 41. I numeri così disposti si sommino: sarà manifesto essere

$$824.59 = 48616.$$

Similmente se propongansi di trovare i prodotti di 3045 in 267, e di 9486 in 2103, saranno

$$3045.627 = 813015,$$

$$9486.2103 = 19949058.$$

```
 3045
  267
------
21315
18270
6090
------
813015
```

```
 9486
 2103
------
28458
0000
9486
18972
------
19949058
```

37

La ragione dell' operazione facilmente s' intende da quanto si è detto (§. 2 : 3), e da quel principio, che le parti prese insieme agguagliano il tutto.

Divisione degl' interi.

38

Se propongasi a dividere il numero *m* per l' altro *n*, manifestamente il quesito può ridursi (§. 16), o a trovare quante volte *n* si contiene in *m*, o a determinare qual parte del numero *m* tocchi a ciascuno, in ipotesi che debbasi *m* distribuire egualmente in tanti, quante sono le unità di *n*. Le quali cose notate propongasi a dividere v. gr. il numero 741 per 3. Si ponga innanzi al dividendo il divisore, con una linea intermedia; poi cominciando a sinistra del dividendo dicasi; quante volte il 3 si contiene in 7? Risp. 2. Scrivasi adunque 2 dall'altra parte del dividendo, con una lineola similmente interposta; ed il prodotto 2.3 = 6 sottraggasi da 7, e si appressi al residuo 1 la cifra 4, che nel dividendo siegue immediatamente l' altra 7 già divisa. Dicasi da capo, quante volte il 3 entra in 14? Risp. 4. Aggiungasi la cifra 4 alla prima 2, dopo la lineola verso destra, e il prodotto 4.3=12 si tolga da 14. Al residuo 2 si appressi la seguente cifra 1, e dicasi, quante volte 3 in 21? Risp. 7. Scrivasi 7, e il prodotto 7.3 = 21 si tolga da 21. Rimarrà nulla, e il quoto richiesto sarà 247; cioè

```
3/741/247
  6
 --
  14
  12
 ---
  21
  21
 ---
  00
```

$$\frac{741}{3} = 247.$$

39

Ciascuno potrà rendersi ragione della operazione così. Si cercò quante volte il 3 si contiene in 7, ed ebbesi 2 per prima nota del quoto, vale a dire si trovò che a ciascuno de' tre

capi potevano toccare due centinaja. Il prodotto 2.3 = 6, che non giunge a 7, si sottrasse da 7, per determinare quante centinaja restassero; cioè uno, che congiunto alla cifra 4 del dividendo, si ridusse a 14 decine, le quali dovendosi ancora distribuire, si chiese perciò di nuovo: quante volte il 3 si contiene in 14? Certo non potè ottenersi più di 4 per cifra del quoto. Si conobbe di qui non potersi dare a ciascun capo che 4 decine oltre le due centinaja: e poichè 4.3 = 12, e 14 − 12 = 2, restarono due decine ancora da distribuirsi, le quali coll' ultima cifra del dividendo, si ridussero a 21 unità semplici. Ora per trovare quante unità dovessero darsi a ciascuno, si chiese di nuovo; 3 in 21 quante volte si contiene? ed ebbesi 7 per ultima cifra del quoto, la quale moltiplicata per 3 producendo appuntino 21, niente rimase più a dividersi.

40

Se fosse dato a dividersi v. gr. il numero 2368 per 4, certamente a ciascun capo non potrebbe toccare verun migliajo, non trovandosi nel dividendo che due sole migliaja. Laonde queste ridotte a centinaja, si dirà; quante volte il 4 in 23? e procedendo come sopra si avrà

$$\frac{2368}{4} = 592.$$

4/2368/592
20
36
36
008
8
0

41

Se dopo compiuta la divisione abbiasi qualche residuo dall' ultima sottrazione, dovremo aggiungere alle cifre ottenute una frazione che abbia per numeratore quell'ultimo residuo, e per denominatore lo stesso divisore. Così v. gr. dividendo il numero 6719 per 5, otterremo il quoto $1343 + \frac{4}{5}$. La ragione si è che non potendo a ciascun capo toccare unità intere di quel residuo, si concepisce ogni unità divisa in tante parti, quanti sono i capi ne' quali la divisione si propone a fare, che

5/6719/1343 4/5
5
17
15
21
20
19
15
4

sono espressi dal divisore; e dovendosi dare a ciascuno di essi una egual parte delle singole unità, ogni capo ne riceverà tante, quante sono le unità di quel residuo; vale a dire riceverà una frazione (§. 5), il cui numeratore sarà quell'ultimo residuo, il denominatore poi lo stesso divisore.

42

Sin qui ponemmo per divisore un numero semplice. Sia ora da dividersi v. gr. 26641 per 372. Istituendo la operazione sulle prime cifre del dividendo, le quali offrano un numero eguale, o prossimamente maggiore del divisore (§. 40), dicasi; quante volte il 3 si contiene in 26? Vi si contiene per verità otto volte; però non si tratta solo della prima cifra del divisore, ma bensì di tutto il divisore stesso, che moltiplicato pel quoto non deve dare un prodotto maggiore del dividendo; ora 372.8 (= 2976) è maggiore della parte 2664, che prima fu tolta a dividersi. Prendasi adunque la cifra prossimamente minore di 8, cioè 7, la quale moltiplicata per 372 dà il prodotto 2604, che sottratto da 2664 lascia 60. Scrivasi dunque 7 nel quoto, e si apponga la cifra 1 al residuo 60. Da capo dovrà dividersi il numero 601 per 372. Dicasi pertanto; 3 quante volte entra in 6? Vi si contiene ben due volte, ma perchè il prodotto 372.2(= 744) supera la seconda parte 601 del dividendo, certo dovrà prendersi l'unità, e scriversi nel quoto appresso alla cifra 7. E poichè sottratto 372.1(=372) da 601 si ottiene il residuo 229 minore del divisore 372, nè rimane altra cifra del dividendo da unirsi a quel residuo, perciò (§. 41) si aggiungerà al numero 71 la frazione $\frac{229}{372}$, e sarà

$$372/26641/71\tfrac{229}{372}$$
$$2604$$
$$601$$
$$372$$
$$229$$

$$\frac{26641}{372} = 71 + \frac{229}{372}.$$

43

Semplice o composto essendo il divisore, facilmente s'intende, che l'operazione procede quasi nel modo stesso; se non che nel secondo caso avviene sovente, che attendendo solo alla prima cifra del divisore, si prenda quella del quoto maggiore

del dovere. Ma poichè moltiplicato il divisore per questa cifra si ottiene un numero maggiore di quello dal quale deve sottrarsi, perciò l' errore tosto sarà emendato.

Possiamo ancora con altro criterio conoscere se quella cifra del quoto sia o no la vera. Dopo che si è determinato quante volte la prima cifra del divisore contengasi nella prima, o nelle due prime cifre della parte dividenda, veggasi primieramente se ciò che resta alla prima cifra del divisore, unito alla cifra seguente della parte dividenda, e considerato per decine, sia bastevole perchè tante volte almeno si contenga in esso la seconda cifra del divisore; come ancora se il suo resto congiunto all' altra seguente cifra della parte dividenda basti alla terza del divisore; e così successivamente fino all' ultima. Ove tutto si trovi bastare, la predetta cifra del quoto sarà evidentemente la vera; in contrario dovrà scemarsi di uno. Così nell' esempio di sopra (§. 42) si dimanda 3 in 26 quante volte? Si trova 8, ed alla cifra 3 sopravanza 2, che unito alla seguente cifra 6 della parte dividenda, dà 26; nel qual numero si contiene meno di otto volte la seconda cifra 7 del divisore. Perciò è da ritenersi 7 invece di 8. Preso adunque 7 rimarrà 5 alla prima cifra del divisore, il qual resto congiunto alla seguente nota 6 della parte dividenda darà 56, e conseguentemente alla seconda cifra del divisore sopravanzerà 7, che unito all' altra seguente nota 4 della parte dividenda fornisce 74, in cui la terza cifra 2 del divisore si contiene più di sette volte; onde siegue che tutto il divisore 372 si contiene sette volte nella parte 2664 del dividendo.

44

È da osservarsi poter essere che sottratto il prodotto del divisore nella cifra del quoto, abbiasi così tenue residuo, che anche unito alla cifra seguente del dividendo, rimanga tuttavia minore del divisore stesso. Allora si scriverà zero nel quoto, ed inoltre si unirà la seguente cifra del dividendo al residuo per continuare l' operazione.

Così nell' esempio d' appresso; poichè sottratto 1644 da 1673, il residuo 29 congiunto alla cifra 6 ancora è minore del divisore 548, si scrive *o* nel quoto, e congiunta la cifra 4 col 296, si cerca quante volte in 2964 sia contenuto il divisore.

```
548/167364/305 224/548
    1644
    ----
    2964
    2740
    ----
     224
```

45

Moltiplicando il divisore per la parte intera del quoto, ed aggiungendo al prodotto l' ultimo residuo, nel caso che vi abbia; se la somma eguaglierà il dividendo, avremo la prova che la divisione fu con esattezza eseguita: poichè non verificandosi questa eguaglianza, certo qualche errore sarà occorso.

46

Il numeratore N sia contenuto q' volte in M e resti R'; il residuo R' sia contenuto q'' volte in N e resti R''; R'' sia contenuto q''' volte in R', e resti R''' e così appresso. Sarà (§. 16)

$$\begin{aligned} M &= Nq' + R' , \\ N &= R'q'' + R'' , \\ R' &= R''q''' + R''' , \\ R'' &= R'''q^{IV} + R^{IV} , \\ R''' &= R^{IV}q^{V} + R^{V} , \text{ eccetera . . . (14)} \end{aligned}$$

Ora supposto che il residuo p. es. R^{IV} divida esattamente il divisore prossimo precedente R''', cosicchè abbiasi $R^{V} = 0$; lo stesso R^{IV} dividerà esattamente anche il numero $R'''q^{IV} + R^{IV}$ $(= R'')$, e quindi il numero $R''q''' + R'''$ $(= R')$, e perciò ancora il numero $R'q'' + R''(= N)$, e per conseguenza parimente il numero $Nq' + R'$ $(= M)$. Cioè il residuo R^{IV} sarà l'esatta comune misura dei numeri M, N, o il comun loro fattore.

Inoltre non potrà esservi alcun' altra maggior comune misura dei numeri stessi M, N. Infatti suppongasi K comune loro misura, e maggiore di R^{IV}. Poichè per ipotesi adunque K

---

(14) *Essendo per ipotesi* $\frac{M}{N} = q' + \frac{R'}{N}$, *se moltiplicheremo tutto per N, avremo la prima equazione*

$$M = Nq' + R' ;$$

e nello stesso modo le altre seguenti.

esattamente misura i due numeri M , N , misurerà per la prima equazione ancora il residuo R′ , quindi per la seconda misurerà eziandio il residuo R″ , laonde per la terza misurerà parimente il residuo R‴ , e conseguentemente per la quarta anche il residuo R^{IV} : cioè il numero maggiore K esattamente misurerà il minore R^{IV} : lo che non potendo avverarsi , siegue non poter esservi altra comune misura dei numeri M , N maggiore di R^{IV} (15).

47

Di qui deriva il metodo per trovare il massimo comun divisore di due numeri. Dividasi il maggior numero pel minore , questo dividasi di nuovo pel residuo della prima divisione , da capo questo residuo dividasi per quello della seconda , e così appresso finchè giungasi ad nn residuo , che divida esattamente il residuo prossimo precedente. Siffatto residuo sarà il massimo comun divisore. Così p. es. si trova essere = 21 il massimo divisor comune dei numeri 189 , e 147.

147/189/1
147
42
42/147/3
126
21
21/ 42/2
42
00

48

Se quell' ultimo residuo sarà = 1 , ciò significherà (§. 46) non appartenere ai numeri dati altra misura , o altro fattor comune , dalla unità in fuori ; come ognuno può verificare in 15 e 154; e similmente in 19 e 31 (16). Sebbene 15 e 154 non abbiano alcun fattor comune , pure l' uno e l' altro risultano da

(15) *Questa dimostrazione , come chiaro apparisce , sta fondata nell' assioma , che se un numero è divisore esatto di uno de' due membri di qualsiasi equazione , dovrà esserlo anche dell' altro.*

(16) *Per opposito se ai numeri dati non apparterrà verun divisor comune , quell' ultimo residuo dovrà eguagliare la unità , come s'intende , posto mente alla natura dei residui* R' , R'' , R''' , ...

fattori suoi propri fra loro moltiplicati; poichè $15=3.5$, $154=2.7.11$: gli altri poi 19, 31 non risulteranno nè da fattori comuni, nè da fattori propri. I numeri 15 e 154, e gli altri di tal sorta diconsi *primi fra loro*: i numeri poi 19 e 31 e tutti quelli così formati diconsi *primi in sè*.

49

Quel numero N primo in sè, che divide esattamente il prodotto PM, necessariamente sarà esatto divisore di uno de' due fattori P, M. Il numero N non divida esattamente il fattore M, cosicchè valgano le superiori equazioni (§. 46). Valeranno eziandio le seguenti (§. 11 : 37)

$$\begin{aligned} PM &= PNq' + PR' \\ PN &= PR'q'' + PR'' \\ PR' &= PR''q''' + PR''' \\ PR'' &= PR'''q^{IV} + PR^{IV} \\ PR''' &= PR^{IV}q^{V} + PR^{V} \end{aligned}$$

Ma N per ipotesi divide PM; dunque per la prima equazione dividerà pure il prodotto PR', e quindi per la seconda dividerà ancora il prodotto PR'', onde per la terza parimente il prodotto PR''', e conseguentemente per la quarta il prodotto PR^{IV}, e così appresso. Ma perchè N si suppone primo in sè, i residui R', R'', R''' . . . . decresceranno per modo che si dovrà finalmente giungere alla unità (§. 48) (17). Dunque il numero N dividerà certo P.1, cioè l'altro fattore P: onde ec...

50

Ora facilmente si viene a conoscere, che quel numero primo in sè che divide esattamente il prodotto P.M.K.H . . . . , dovrà

(17) *Poichè N per ipotesi non divide esattamente M, ed è primo in sè, perciò questi numeri non ammetteranno altro comun divisore fuorchè la unità; laonde* (§. 47 : 48) *i residui*

eziandio dividere qualcuno de' fattori P , M , K , H . . . (18).

Quindi se N non dividerà veruno dei medesimi P , M , K... neppure dividerà P.M.K.H. . . . (19).

51

Non sarà fuor di proposito mostrare come si trovano i divisori tutti di un dato numero , i quali cioè sono contenuti nello stesso numero senza residuo alcuno. Prima però gioverà osservare alcuna cosa relativamente a siffatta questione : 1.° il numero , la cifra ultima del quale è pari , cioè 2 , 4 , 6 , 8 , è multiplo di 2 , e quindi può dividersi esattamente per 2 ; poichè tutto il

---

R', *R''*, *R'''* . . . *dovranno diminuirsi continuamente, e si giungerà per ultimo alla equazione*

$$PR^{(n-2)} = PR^{(n-1)} + PR^{(n)},$$

in cui sarà $R^{(n)} = 1$; *onde ec.*

(18) *Infatti decomponendo PMKHG . . . nei due fattori P ed MKHG . . , quindi MKHG . . . nei due M e KHG . . , poi KHG . . . nei due K ed HG . . ; e così finchè occorra , dovrà N pel dimostrato principio* (§. 49) *dividere esattamente o P, o M, o K, o qualunque altro fattore del dato prodotto.*

(19) *Poichè se N dividesse P.M.K.H . . . dovrebbe per quello si è ora dimostrato , dividere alcuno de' fattori P , M , K , H . . . , lo che non consente l' attuale ipotesi ; onde ec. Questa medesima verità ha luogo anche quando N sia primo coi fattori del prodotto , senza esserlo in sè ; e si dimostra brevemente così. Primieramente deve osservarsi che il mass. comun divisore fra due numeri non cangia se uno di questi si moltiplichi o si divida per un fattore non contenuto nell' altro ; come ognuno da sè facilmente può verificare. Quindi sarà 1 il mas. com. div. fra N e P , fra N e PM , fra N e PMK , fra N e PMKH , ecc. . . . ; perchè niuno dei fattori di P , M , ec. si contiene in N. Dunque se un numero non divide veruno dei fattori di un prodotto per esser primo coi medesimi , non dividerà il prodotto stesso , col quale sarà eziandio primo.*

numero è pari. 2.° Il numero, la cifra ultima del quale è impari, cioè 1, 3, 5, 7, 9, non può esattamente dividersi per 2; imperciocchè supera di 1 il multiplo binario. 3.° Il numero che termina in zero è multiplo di 10, e conseguentemente di 2 e di 5: poichè almeno ha un fattore 10, e perciò anche 2 e 5, giacchè $10 = 2.5$. 4.° Il numero che termina con 5 può esattamente dividersi per 5; poichè eguaglia un numero terminato da zero + 5; per es. $75 = 70 + 5$. 5.° Il numero, le di cui note prese come tante unità danno una somma esattamente divisibile per 9, può sempre dividersi esattamente per 9. Ciò siegue perchè i numeri decadici 10, 100, 1000, eccetera, divisi per 9, lasciano ciascuno il residuo = 1, e quindi i numeri 20, 200..., 30, 300..., 40, 400..., 50, 500..., 60, 600..., 70, 700..., 80, 800..., 90, 900... divisi per 9 danno i residui 2, 2..., 3,3..., 4, 4..., 5, 5..., 6, 6..., 7, 7..., 8, 8..., 0, 0... Venga proposto per es. il numero 53721. Poichè

$$53721 = 50000 + 3000 + 700 + 20 + 1,$$

perciò il quoto $\frac{53721}{9}$ eguaglierà un certo numero intero aumentato di

$$\frac{5+3+7+2+1}{9},$$

che similmente risulterà intero, quante volte le cifre del numero proposto daranno una somma esattamente divisibile per 9. 6.° Poichè il 9 contiene il 3 senza residuo, si dimostrerà similmente che il numero, le cifre del quale prese per unità danno una somma esattamente divisibile per 3, sarà multiplo dello stesso 3 (20).

---

(20) *Sia proposto per es. il numero* 25314, *sarà evidentemente*

$$\frac{25314}{3} = 2 \times \frac{10000}{3} + 5 \times \frac{1000}{3} + 3 \times \frac{100}{3} + 1 \times \frac{10}{3} + \frac{4}{3}$$

Dopo queste premesse, veniamo al metodo per trovare i divisori tutti di un dato numero M. Fra i numeri *primi* 2, 3, 5, 7, 11, 13 . . . si cerchi il minimo divisore del numero M: cioè se M sarà pari dividasi per 2; se impari, e non possa dividersi esattamente nè per 3, nè per 5 (§. 51.4.°6°), si tenti la divisione per 7; quindi se nè pure il numero 7 divide esattamente M, si adoperi il divisore 11, e così in seguito. Trovato un tal minimo divisore, si scriva in disparte, e similmente il corrispondente quoto q. Questa medesima operazione si eseguisca sopra il quoto q, e si prosiegua in siffatta guisa, finchè nasca l'ultimo quoto $= 1$. Questi divisori *primi in sè* si moltiplichino fra loro, combinandoli due a due, tre a tre, quattro a quattro eccetera . . ., ed i prodotti così nati saranno tutti gli altri divisori del numero proposto.

Esempio.

Sia $M = 420$; saranno i divisori *primi in sè* 2, 2, 3, 5, 7	I quoti corrispondenti saranno $q = 210$, $q' = 105$, $q'' = 35$, $q''' = 7$, $q^{IV} = 1$

$$= 2\left(3333 + \frac{1}{3}\right) + 5\left(333 + \frac{1}{3}\right) + 3\left(33 + \frac{1}{3}\right) +$$

$$1\left(3 + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3};$$

dunque il quoto $\frac{25314}{3}$ *eguaglierà un certo numero intero* $(= 8433)$ *aumentato del numero*

$$\frac{2 + 5 + 3 + 1 + 4}{3},$$

che similmente sarà intero, se il suo numeratore sarà multiplo di 3. *Dunque ec.*

Prodotti binari	Prodotti ternari	Prodotti quaternari
2.2=4	2.2.3=12	2.2.3.5=60
2.3=6	2.2.5=20	2.2.3.7=84
2.5=10	2.2.7=28	2.2.5.7=140
2.7=14	2.3.5=30	2.3.5.7=210
3.5=15	2.3.7=42	
3.7=21	2.5.7=70	Prodotto quinario
5.7=35	3.5.7=105	2.2.3.5.7=420

Perciò i divisori del dato numero 420 saranno
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210, 420.

Nè potrebbe trovarsi alcun altro divisore: poichè se prendasi un numero in sè primo, e diverso dai divisori 2, 3, 5, 7, parimente in sè primi; questo non dividendo esattamente veruno di siffatti divisori, al certo (§. 50) neppur dividerà il prodotto 2.2.3.5.7 = 420.

Dalle cose dette (§. 47 : 51) facilmente s' intende come possa conoscersi se il numeratore, e il denominatore di una frazione ammettano qualche fattore comune, pel quale l'uno e l'altro possa dividersi, ed il numero fratto possa ridursi, salvo il suo valore, a minori termini. Così dato per es. $\frac{2910}{63570}$, apparisce che il numeratore e il denominatore può esattamente dividersi per 10 (§. 51), onde

$$\frac{2910}{63570} = \frac{291}{6357}.$$

Inoltre avendosi

$$2 + 9 + 1 = 12 \quad , \quad 6 + 3 + 5 + 7 = 21$$

potranno il numeratore 291, e il denominatore 6357 dividersi esattamente (§. 51) per 3, onde

$$\frac{291}{6357} = \frac{97}{2119}.$$

42

Ora cercando il massimo comun divisore fra 97 e 2119, si giungerà alla unità; perciò questi numeri saranno in sè primi, nè potrà spingersi oltre la riduzione dei medesimi. Se fosse stato cercato in principio il massimo comun divisore dei numeri 2910 e 63570, si sarebbe trovato $= 30$, e si sarebbe giunto alla medesima espressione $\frac{97}{2119}$.

Somma e sottrazione dei numeri fratti.

54

I numeri fratti si sommano, o si sottraggono fra loro riducendoli prima, se faccia d'uopo, allo stesso denominatore; poi aggiungendo, o sottraendo i numeratori, e dividendo la somma o la differenza de' medesimi pel comun denominatore (§. 21).

Esempi di somma.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}\ ,\quad 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$$

$$3+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=3+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=3+\frac{9}{12}+\frac{4}{12}=$$

$$3+\frac{13}{12}=4\frac{1}{12}\ .$$

Esempi di sottrazione.

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{5}=\frac{35}{40}-\frac{24}{40}=\frac{35-24}{40}=\frac{11}{40}\ ,\quad 23-\frac{8}{9}=22+\frac{9}{9}-\frac{8}{9}$$

$$=22\frac{1}{9}\ ,\quad 15\frac{1}{6}-12\frac{5}{7}=15+\frac{7}{42}-12-\frac{30}{42}=14+$$

$$\frac{42}{42}+\frac{7}{42}-12-\frac{30}{42}=2+\frac{49}{42}-\frac{30}{42}=2\frac{19}{42}\ .$$

Moltiplicazione e divisione dei numeri fratti.

55

Se i numeri fratti debbono fra loro moltiplicarsi, o dividersi, non fa d'uopo ridurli al medesimo denominatore. Poichè in quanto alla moltiplicazione, basta moltiplicare fra loro i numeratori non meno che i denominatori, onde nasca il nuovo numeratore e denominatore della frazione, che sarà il prodotto richiesto. Per quello poi riguarda la divisione, il numeratore (§. 19) del dividendo deve moltiplicarsi pel denominatore del divisore, e il denominatore di quello pel numeratore di questo. Apparisce (§. 11 . 2° : 16) che se il moltiplicatore, e il divisore sono frazioni proprie (§. 5), il prodotto sarà minore del moltiplicando, il quoto maggiore del dividendo.

Esempi di moltiplicazione.

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{11}=\frac{3.7}{5.11}=\frac{21}{55}\ ,\quad \frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{5}=\frac{5.7.2}{6.8.5}=\frac{7.2}{6.8}=\frac{7.2}{6.2.4}$$

$$=\frac{7}{6.4}=\frac{7}{24}\ ,\quad 12\cdot\frac{3}{4}=\frac{12}{1}\cdot\frac{3}{4}=\frac{12.3}{1.4}=\frac{4.3.3}{4}=9\ ,$$

$$10\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{20+1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{21}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{21}{14}=\frac{3.7}{2.7}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}\ .$$

Esempi di divisione.

$$\frac{5}{13}:\frac{2}{7}=\frac{5.7}{13.2}=\frac{35}{26}=1\frac{9}{26}\ ,\quad 11:\frac{3}{5}=\frac{11.5}{1.3}=\frac{55}{3}=18\frac{1}{3}\ ,$$

$$\frac{2}{9}:19=\frac{2}{9}:\frac{19}{1}=\frac{2.1}{9.19}=\frac{1}{171}\ ,\quad 3\frac{2}{3}:7\frac{5}{6}=\frac{9+2}{3}:\frac{42+5}{6}$$

$$=\frac{11}{3}:\frac{47}{6}=\frac{11.6}{3.47}=\frac{11.2.3}{3.47}=\frac{22}{47}\ .$$

Delle stesse operazioni sulle frazioni decimali.

56

Queste frazioni si trattano come gl'interi : se non che deve riguardarsi alla virgola (come ora diremo) per la quale vengono separate da quelli : oltre a ciò deve osservarsi che a qualunque frazione decimale ponno, salvo il suo valore, aggiungersi tanti zeri in fine, quanti piacerà. Che se gli zeri si aggiungano innanzi, fra la virgola e l' ultima cifra a sinistra, si cangerà per modo il valore della frazione, che diverrà dieci, cento, mille, . . . volte minore, secondo che uno, due, tre, . . . zeri saranno stati così prefissi (§. 7). Per es. sarà

$$0{,}39 = 0{,}390 = 0{,}3900 = 0{,}39000 \text{ , eccetera.}$$

Ma 0,39 sarà dieci volte maggiore di 0,039, cento volte di 0,0039, mille di 0,00039, eccetera.

57

Ora sommando fra loro le frazioni decimali, o l' una dall' altra sottraendole, la virgola della somma o differenza dovrà trovarsi nella stessa linea verticale, in cui trovansi le virgole di quelle frazioni, che si sommano o si sottraggono.

Esempi di somma		*Esempi di sottrazione*	
2,0456	0,08901	16,02000	2,01491
15,96845	9,87412	3,84156	1,83567
0,900312	2,901	12,17844	0,17924 ;
18,914362	12,86413		

cioè

$$2{,}0456 + 15{,}96845 + 0{,}900312 = 18{,}914362 \text{ ,}$$

$$0{,}08901 + 9{,}87412 + 2{,}901 = 12{,}86413 \text{ ;}$$

e (§. 56)

$$16{,}02 - 3{,}84156 = 16{,}02000 - 3{,}84156 = 12{,}17844,$$

$$2{,}01491 - 1{,}83567 = 0{,}17924.$$

58

Facendosi la moltiplicazione, dovrà la virgola talmente allogarsi nel prodotto, che separi a destra tante cifre, quante sono le note decimali ne' due fattori. Si cerchi e. g. il prodotto di 0,31 per 0,4. Essendo la frazione 0,31 cento volte minore di 31, e 0,4 dieci volte minore di 4, il prodotto 31×4 sarà mille volte maggiore del cercato prodotto 0,31×0,4; perciò 31×4 si cambierà in 0,31×0,4, se in quello si adatti la virgola per modo, che lasci dietro a sè tre cifre decimali, quante cioè ve ne sono nei due fattori 0,31 e 0,4. Che se le cifre del prodotto non saranno tante quante le decimali nell' uno e nell' altro fattore, chiaro apparisce che dovranno anteporsi all'ultima cifra del prodotto a sinistra tanti zeri (§. 56) finchè il numero di quelle decimali sia eguagliato.

Esempi di moltiplicazione.

15,05	2,00006
3,12	0,034
3010	800024
1505	600018
4515	
46,95600 = 46,956	0,06800204;

cioè

$$15{,}05 \times 3{,}12 = 46{,}956 \ , \ 2{,}00006 \times 0{,}034 = 0{,}06800204.$$

59

In quanto alla divisione, dovendo il quoto moltiplicato pel divisore riprodurre il dividendo (§. 16), al certo nel quoto e di-

visore le cifre decimali dopo la virgola dovranno insieme essere tante (§. 58), quante nel dividendo. Quindi se compiuta la divisione si trovino più cifre decimali nel dividendo, che nel quoto e divisore unitamente, si dovranno innanzi al primo porre tanti zeri (§. 56), quante saranno le cifre di avanzo nel dividendo. Aggiungendo poi degli zeri in fine del dividendo otterremo, se farà d'uopo, che le cifre decimali non mai sieno di meno in esso, che nel divisore: e. g. (21).

$$\frac{845{,}63}{3{,}127} = \frac{845{,}630}{3{,}127} = \frac{845{,}63oo}{3{,}127} = \ldots.$$

Esempi della divisione.

15,231/112,7094/7,4	0,123/0,00121155/0,00985
106 617	1107
60924	1045
60924	984
0	615
	615
	0

cioè

$$\frac{112{,}7094}{15{,}231} = 7{,}4\ ,\quad \frac{0{,}00121\ 155}{0{,}123} = 0{,}00985.$$

60

Ci valeremo dello stesso aumento di zeri alla fine del dividendo, semprechè non abbia questo tante cifre, quante si

(21) *Perciò la divisione delle decimali si fa come quella degl' interi, avvertendo però di separare nel quoto, con una virgola opportunamente allogata, tante cifre a destra, quante basteranno perchè il quoto moltiplicato pel divisore produca il dividendo.*

richiedono per eseguire la divisione p. es.

$$\frac{2,314}{356,27} = \frac{2,31400}{356,27} = \frac{2,314000}{356,27} \text{ ec. . . . .}$$

e così dedurremo essere

$$\frac{2,314}{356,27} = 0,0064 \ldots$$

356,27/2,314000/0,0064 . . . .
213762
176380
142508
33872

61

Apparisce ora come le altre frazioni possano (§. 54) trasformarsi in decimali, e come la divisione possa continuarsi oltre le cifre intere del quoto, mediante le decimali. Così p. es.

$$\frac{229}{372} = \frac{229,000 \ldots}{372} = 0,6155 \ldots,$$

e perciò (§. 42)

$$\frac{26641}{372} = 71\frac{229}{372} = 71,6155 \ldots .$$

62

Spessissimo avviene, che non abbia fine la divisione con cui si effettua la predetta trasformazione delle frazioni. Ma poichè i residui che si ottengono col dividere, sono sempre minori del divisore, senza dubbio avverrà che finalmente dovranno riprodursi gli stessi resti, e perciò le stesse cifre del quoto. (22). Così e. g. troveremo

---

(22) *Dal dover essere i resti sempre minori del divisore*

$$\frac{3}{88} = 0{,}05681818\ldots, \quad \frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$$

Sovente accade che di più note decimali si omettano le ultime senza errore sensibile; p. e. ritenute le decime, e le centesime si trascurino le millesime, o adoperate anche queste, si lascino le diecimillesime, eccetera. Ma non conviene fare queste omissioni senza usare affatto altra diligenza. Osserveremo a tal fine quanto siegue.

I.° Se la prima delle note omesse supera il cinque, o è lo stesso cinque seguito a destra da altre decimali, l' ultima di quelle che si ritengono dovrà aumentarsi di uno. Abbiasi p. es. da un calcolo la frazione 0,32156, e faccia d'uopo, neglette le ultime due cifre, adoperare le millesime. Dovrà piuttosto prendersi 0,322 che 0,321; poichè la differenza

$$0{,}322 - 0{,}32156 = 0{,}32200 - 0{,}32156 = 0{,}00044$$

è minore della

$$0{,}32156 - 0{,}321 = 0{,}00056:$$

cioè manca più in 0,321, che non avanza in 0,322 per eguagliare 0,32156.

II.° Omettendosi la cifra cinque, non seguita da altre decimali, se l' ultima di quelle ritenute si aumenti di uno, o non si aumenti affatto, si farà lo stesso errore; nel primo caso per eccesso, nel secondo per difetto. Così nella frazione 0,785 omesse le millesime sarà

$$0{,}79 - 0{,}785 = 0{,}790 - 0{,}785 = 0{,}005,$$

e parimente

$$0{,}785 - 0{,}78 = 0{,}005.$$

---

discende chiaramente che il numero delle cifre componenti un periodo in qualunque decimale, al più sarà eguale al divisore stesso, diminuito di uno.

III.° Se la prima delle note trascurate sarà minore di cinque, sebbene sia seguita da altre anche maggiori, pure l'errore commesso aumentando di uno l'ultima delle note ritenute, sarà maggiore di quello che sarebbe non aumentandola. Abbiansi p. es. da ritenere nella frazione 0,3467498 le diecimillesime, omesse le ultime tre cifre. Si avrà

$$0{,}3468 - 0{,}3467498 = 0{,}3468000 - 0{,}3467498 = 0{,}0000502,$$

$$0{,}3467498 - 0{,}3467 = 0{,}0000498;$$

cioè manca meno in 0,3467 che non avanza in 0,3468, per eguagliare 0,3467498.

64

Sebbene la divisione decadica delle unità sia comodissima, come ognuno intende per le cose ora dette sulle frazioni decimali, nulladimeno negli usi comuni sogliamo il più delle volte dividere le ore, le libbre, e le altre unità ben diversamente. Così dividiamo le ore in 60 minuti primi (60′), ciascun minuto primo in 60 secondi (60″), ciascun secondo in 60 terzi (60‴), e così appresso. Similmente le libbre in 12 oncie, ciascun oncia in 8 ottave, eccetera.

Ora per sommare, o sottrarre tra loro, e per moltiplicare o dividere per qualche numero i pesi, le misure, od altro simile, dovremo valerci dello stesso metodo usato nelle altre frazioni di medesima specie: giacchè anche le parti nelle quali dividiamo la libbra, l'oncia . . . . sono effettivamente frazioni, a cui per questo non apponiamo denominatore, perchè già è manifesto quante di esse fanno d'uopo a formare una delle parti prossimamente maggiori.

Esempio di somma.

lib.	onc.	ott.
25.	11.	7.
9.	8.	6.
1.	10.	4.
37.	7.	1.

Esempio di sottrazione.

lib.	onc.	ott.
24.	7.	6.
12.	8.	7.
11.	10.	7.

Nel primo esempio riunendosi 17 ottave, una soltanto ri-

marrà nel suo luogo, l' altre 16 poi formando due once, aumenteranno di due unità il numero di queste. Si produrranno così 31 once, che daranno due unità al numero delle libbre, e lasceranno 7 once da segnarsi nel proprio luogo.

Nel secondo esempio non potendosi togliere 7 ottave a 6, prendasi uno dal numero delle once, che vale 8 ottave, e da 14 sottratte 7 resteranno 7. Similmente non potendosi togliere 8 dalle 6 once restanti, si prenda dalle libbre uno, che risulta di 12 once, e da 18 si sottragga 8; avanzeranno 10. Finalmente dalle restanti 23 libbre tolgasi 12, e si avrà 11.

In quanto alla moltiplicazione e divisione, sieno per es. da moltiplicarsi, o dividersi.

lib.	onc.	ott.
3.	4.	6.

pel numero $2\frac{2}{3}$. Poichè quattr' once valgono quattro dodicesime parti di libbra, e sei ottave valgono sei novantaseesime parti di libbra, si esprimerà tanto il moltiplicando, quanto il dividendo per

$$3 + \frac{4}{12} + \frac{6}{96} = 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{16} = 3 + \frac{19}{48} = \frac{163}{48};$$

onde il prodotto richiesto sarà

$$\frac{163}{48} \cdot \frac{8}{3} = \frac{163}{18} = 9\frac{1}{18} = \begin{array}{ccc} \text{lib.} & \text{onc.} & \text{ott.} \\ 9. & 0. & 5.\frac{1}{3} \end{array};$$

ed il quoto sarà

$$\frac{163}{48} : \frac{8}{3} = \frac{489}{384} = 1\frac{105}{384} = \begin{array}{ccc} \text{lib.} & \text{onc.} & \text{ott.} \\ 1. & 3. & 2.\frac{1}{4} \end{array}.$$

Poichè la parte $\frac{1}{18}$ di libbra equivale a $12 \cdot \frac{1}{18}\left(= \frac{12}{18} = \frac{2}{3}\right)$ di oncia; da cui sebbene non abbiasi verun oncia, si hanno contuttociò $8 \cdot \frac{2}{3}\left(= \frac{16}{3}\right)$ parti di ottava; cioè 5 intere ottave,

$+\frac{1}{3}$. Similmente la frazione $\frac{105}{384}$ si riduce a 3 onc. e $2\frac{1}{4}$ ott.

SI PROPONGONO ALCUNE OSSERVAZIONI CIRCA LE POTENZE E LE RADICI.

65

La potenza di un dato numero facilmente si determina quando l'esponente è intero (§. 22 . 1°). Così per es.

$1^2=1.1=1$, $2^2=2.2=4$, $3^2=3.3=9$, $4^2=4.4=16$, $5^2=25$,

$6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$, $11^2=121$, ec. . . .

Similmente

$1^3=1.1.1=1$, $2^3=2.2.2=8$, $3^3=3.3.3=27$, $4^3=4.4.4=64$,

$5^3=5.5.5=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $10^3=1000$,

$11^3=1331$, eccetera . . .

Così ancora

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3.3}{5.5}=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25},$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^3=\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{2.2.2}{7\cdot7\cdot7}=\frac{2^3}{7^3}=\frac{8}{343},$$

$$(3,1)^2=3,1\,.\,3,1=9,61,$$

$(1,01)^3=1,01\,.\,1,01\,.\,1,01=1,030301$ ec. . . .

66

Assai più difficile riesce innalzare i numeri a potenza di esponente fratto (§.22.2°), o ciò che torna allo stesso (§.28) dai numeri estrarre la radice; ma di ciò altrove. Giova frattanto

avvertire che se non esiste alcun numero in sè primo (§. 48) e fattor comune dei numeri a, b, certamente non esisterà (§. 50) alcun numero primo in sè che sia fattor comune dei prodotti $a.a.a\ldots$, $b.b.b\ldots$ Perciò in questa ipotesi niuna delle potenze $\frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^4}{b^4}, \frac{a^5}{b^5}$ ec. . . . . sarà numero intero (23).

67

Di qui manifestamente discende che i numeri interi, se non hanno le radici di un dato grado (§. 27) in interi, non l'avranno neppure in frazioni (24). Così, poichè la potenza seconda di

---

(23) *Se a, b, non ammettendo verun fattor comune primo in sè, lo ammettessero i prodotti $aaaa\ldots = a^n$, e $bbb\ldots = b^n$, questo fattore non potrebbe trovarsi che in a e in b, perciò sarebbe distrutta la ipotesi, nella quale restando, è chiaro che la potenza $\frac{a^n}{b^n}$ non sarà un intero, ma bensì una frazione spogliata dei fattori primi in sè, comuni al numeratore e al denominatore. E siccome qualunque numero è un prodotto di numeri primi in sè, così la $\frac{a}{b}$ sarà una frazione qualunque ridotta alla maggior possibile semplicità, e tale sarà eziandio la sua potenza qualunque $\frac{a^n}{b^n}$.*

(24) *Infatti supponiamo che un numero qualunque N non ammetta la sua radice n^{ma} in interi, bensì in frazioni. Questa ridotta alla più semplice forma si presenti con $\frac{a}{b}$, saranno a, b numeri primi fra loro, e non ammetteranno perciò verun fattore in comune; quindi dovrà essere*

$$\frac{a^u}{b^u} = N$$

due è 4, e di tre è 9, sarà 2 la radice seconda di quattro e 3 la radice seconda di nove: ma siccome i numeri 5, 6, 7, 8 compresi fra 4 e 9 non hanno la radice in interi, nemmeno l'avranno in fratti.

68

Suppongasi ora la differenza $3 - 2 (= 1)$ divisa in quante parti si voglia eguali, ed ognuna rappresentata da ω. I numeri 2, 3 cogli altri razionali compresi potranno esprimersi a questo modo

$$2, 2+\omega, 2+2\omega, 2+3\omega, 2+4\omega \ldots 2+1 \ldots (q).$$

Aumentato poi continuamente il numero delle particelle ω, e perciò queste medesime particelle sempre più diminuite, la differenza fra due qualunque numeri consecutivi (q) scemerà del continuo, cosicchè diverrà minore di qualunque numero razionale quanto si voglia piccolo: e lo stesso dovrà dirsi dei rispondenti quadrati, che non oltrepasseranno i confini 4 e 9. Dunque fra questi quadrati si presenteranno più e più numeri razionali, che si accosteranno continuamente a

$$5, 6, 7, 8;$$

ed a quelli numeri corrisponderanno fra i (q) altri ed altri numeri razionali, che sempre più si avvicineranno a

$$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8},$$

senza mai giugnervi. E siccome tali espressioni non possono (§. 67) esattamente ottenersi in numeri razionali, dovremo ascriverle fra i numeri irrazionali (§. 8). Così dimostreremo che le espressioni

---

lo che è assurdo, poichè $\frac{a^n}{b^n}$ (§. 66) *non può essere intero. Dunque se un numero intero non ha una qualunque sua radice in interi neppure l' avrà in frazioni.*

$$\sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{121}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[4]{83},$$

e molte altre di tal natura debbono annoverarsi fra i numeri irrazionali: anzi queste veramente sono quelle che sovente dagli scrittori di cose matematiche sogliono particolarmente chiamarsi irrazionali; imperocchè quelle irrazionali espressioni, che non derivano dalla estrazione di radici, si chiamano eziandio con denominazione comune trascendenti (25).

69

I numeri $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[k]{B}$ possono (§. 28 : 21) trasformarsi a questo modo

$$\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{k}{nk}} = \sqrt[nk]{A^k}, \quad \sqrt[k]{B} = B^{\frac{1}{k}} = B^{\frac{n}{kn}} = \sqrt[nk]{B^n};$$

e così possono ridursi, salvi i valori, al medesimo grado. Data per es. $\sqrt{11}$, e $\sqrt[3]{5}$, nascerà (26)

$$\sqrt{11} = \sqrt[2.3]{11^3} = \sqrt[6]{1331}, \quad \sqrt[3]{5} = \sqrt[2.3]{5^2} = \sqrt[6]{25}.$$

70

Abbiamo (§. 28 : 24 : 25)

$$\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}\sqrt[n]{C}...=A^{\frac{1}{n}}.B^{\frac{1}{n}}.C^{\frac{1}{n}}...=(A.B.C...)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{A.B.C...}, \text{ e}$$

(25) *Da ciò deve concludersi che diconsi trascendenti quelle irrazionali espressioni che da tutt' altro derivano fuorchè da estrazione di radici.*

(26) *Di qui apertamente deriva come ridurre più radici di grado diverso al grado medesimo, conservando i rispettivi loro valori.*

$$\sqrt{A.B...H^n.K^n...} = A^{\frac{1}{n}} . B^{\frac{1}{n}} ... H^{\frac{n}{n}} . K^{\frac{n}{n}} ... = H.K... \sqrt[n]{AB...} \quad (27).$$

Quindi per esempio

$$\sqrt{2} . \sqrt{3} = \sqrt{6} \ , \ \sqrt{2} . \sqrt{8} = \sqrt{16} = \ , \text{ e}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{2.3^2} = 3\sqrt{2} \ , \ \sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{3.2.3^3} = 2.3\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}.$$

71

Inoltre abbiamo (§. 28 : 22 . 2° : 24 : 25 : 19)

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{C}} = \frac{A^{\frac{1}{n}}}{C^{\frac{1}{n}}} = \frac{\alpha}{\nu} = \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{n}{n}} = \left(\frac{\alpha^n}{\nu^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{A}{C}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{A}{C}} \quad (28).$$

Così per esempio

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \ , \ \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2.$$

---

(27) *Ora manifestamente apparisce come si moltiplichino fra loro i radicali dello stesso grado, e come si riducano più semplici i radicali che hanno sotto al vincolo dei prodotti.*

(28) *Nasce di qui la pratica per dividere fra loro i radicali di grado medesimo, la quale consiste nel dividere una per l'altra le grandezze del dividendo e divisore, ponendo poscia il quoto sotto il vincolo ad esse comune.*

ALGEBRA

72

Il segno + posto innanzi al numero B denota (§. 9 : 10) che B serve ad aumentare un certo numero A : il segno — posto innanzi allo stesso B indica (§. 10) che B è destinato a diminuire A. Questi segni cioè modificano il significato de' numeri cui si riferiscono, quasi come i nomi aggettivi modificano il significato de' sostantivi. Ora quel numero al quale sta posto innanzi al segno +, dicesi *positivo*, e quello cui si premette il segno —, dicesi *negativo*.

Quindi una data grandezza, (§. 1) in quanto si paragona con un' altra della stessa specie presa per unità, rappresentasi per un mero numero, o valore numerico : in quanto poi viene destinata all' aumento o alla diminuzione d' un' altra data grandezza, esprimasi per un numero positivo o negativo.

73

I numeri assoluti per es. A, cui non è premesso veruno dei segni +, —, si riguardano come positivi ; d'onde viene che un numero positivo egualmente si rappresenti per es. con + B che con B. Inoltre i numeri + B e —B dello stesso valore B, ma non dello stesso segno, diconsi opposti fra loro.

74

In quella guisa che + B e B godono (§. 73) dello stesso significato, così ne godranno + (+ B) e + B : similmente si è convenuto di prendere per sinonimi + (— B) e — B.

Inoltre come (§. 73) + B e — B, così + (+B) e — (+B) si ritengono per opposti fra loro : lo stesso ha luogo per convenzione riguardo a + (— B) e — (— B).

75

Le quantità reali algebriche sono costituite dai numeri po-

sitivi e negativi, e si rappresentano con le lettere dell'alfabeto, in modo che possa per es. k denotare tanto il numero $+B$, quanto il nnmero $-B$: nel primo caso la quantità rappresentata con k dicesi positiva, nel secondo negativa. Positiva o negativa che sia k, dovranno $+k$ e k (§. 74) riguardarsi come sinonimi; $+k$ e $-k$ come opposte fra loro. Diconsi oltre a ciò eguali fra loro quelle quantità, che hanno lo stesso valore numerico, e lo stesso segno.

76

O denoti H un numero, od una quantità algebrica, pongasi $a = +H$, $b = -H$. Avremo (§ 74 : 75)

$$+a = +H \quad , \quad +b = -H \ ,$$

e però avremo ancora

$$-a = -H \quad , \quad -b = +H \ ;$$

imperciocchè ogni membro delle formule inferiori è opposto al suo corrispondente nelle superiori. Ora se invece di a e b sostituiscansi i valori presupposti $+H$ e $-H$, si avrà

$$\left.\begin{aligned} +(+H) &= +H \quad , \quad +(-H) = -H \ , \\ -(+H) &= -H \quad , \quad -(-H) = +H \ . \end{aligned}\right\} (i).$$

Il segno di ciascun secondo membro dicesi *prodotto* dei due segni del corrispondente primo. Apparisce poi che questo prodotto niente ha di comune con quello che ai numeri si appartiene (§. 11).

77

Dalla sola ispezione delle formule (i) s' intende che il prodotto di segni conformi è $+$; di segni poi contrari è $-$: similmente se l'uno de' due segni è $+$, il prodotto dovrà essere l'altro segno. Quindi ove abbian luogo più segni, si potrà prescindere dai segni $+$ se vi sieno, e riguardati gli altri $-$, questi evidentemente daranno un prodotto $+$ o $-$, secondo che saranno di

numero pari, o impari (29). Comunque poi si dispongano i segni, chiaro apparisce, che da' segni medesimi nascerà sempre lo stesso prodotto.

ALCUNE UNIVERSALI NOZIONI CIRCA LE PRIME OPERAZIONI SULLE QUANTITA'.

Somma e sottrazione.

78

Sommare delle quantità significa trovare un' altra quantità, (si dice somma) che adoperata per aumentare o diminuire (secondo che è positiva o negativa) un certo numero, produca lo stesso aumento o la stessa diminuzione, che produrrebbero quelle stesse quantità da sommarsi, adoperate successivamente a questo medesimo fine. Così per es. poichè aumentare un certo numero prima di sei unità, e poi diminuirlo di venti unità, è quanto diminuire il medesimo di quattordici unità, perciò -14 sarà la somma della quantità $+6$ e -20.

79

La somma delle quantità s'indica congiungendo le medesime coi segni propri di ciascuna: è poi lecito sopprimere il segno della prima quantità, se questo sia $+$. Quindi la somma delle

$$a, b, c, -g, -h, -k \ldots .$$

si esprime per

---

(29) *Presi due a due i segni negativi, se questi saranno pari di numero, dovranno senza più nascere tante coppie, ognuna delle quali* (§. 76) *produrrà* $+$, *onde il prodotto dei segni tutti sarà* $+$: *se poi quelli saranno impari di numero, resterà sempre un solo* $-$, *perciò* (§. 76) *il prodotto medesimo sarà* $-$.

$$a + b + c - g - h - k \ldots .$$

In questa espressione ciascuna delle quantità a, b, c, $-g-h\ldots$ si chiama *monomio*, l'espressione stessa poi dicesi *polinomio*, i *termini* del quale sono quegli stessi monomi.

Se il polinomio risulta di due, tre, quattro . . . termini, suole con particolar nome chiamarsi binomio, trinomio, quatrinomio . . . .

80

Quando un certo numero riceve successivamente vari aumenti e decrementi, l' aumento o la diminuzione totale rimarrà sempre la stessa, qualunque sia l'ordine col quale si facciano sul numero quegli aumenti e decrementi. Perciò s' indicherà sempre la stessa somma (§. 79 : 78), qualunque sia l'ordine col quale si scrivano le quantità da sommarsi. Così

$$a + b + c - g - h - k \ldots = a - g + b - h + c - k \ldots .$$
$$= -g - h + a + b - k + c \ldots .$$

Inoltre si ha (§. 76. *i*)

$$a + b + c - g - h - k \ldots . = + (+a) + (+b) + (+c) +$$
$$(-g) + (-h) + (-k) \ldots = + (+a + b + c - g - h - k \ldots),$$

similmente

$$-a - b - c + g + h + k \ldots = -(+a) - (+b) - (+c) -$$
$$(-g) - (-h) - (-k) \ldots = -(+a + b + c - g - h - k \ldots).$$

Cioè due polinomi rappresenteranno due quantità opposte fra loro, quante volte l' uno dei due abbia i termini tutti opposti a quelli dell' altro.

81

Se in un polinomio si trovi più volte lo stesso termine collo stesso segno, basterà scriverlo sol una volta con un numero

avanti (dicesi *coefficiente*) il quale denoti quante volte quel termine trovasi ripetuto. Così per compendio di espressione, scriveremo il polinomio

$$a - h - c + a - h + a - h - g - h$$

nel seguente modo,

$$3a - 4h - c - g.$$

I termini opposti fra loro, se ve ne sieno, si tolgono, salvo il valore del polinomio. Così

$$m - e - 5m + 8e - f = m - e - m - 4m + e + 7e - f = -4m + 7e - f.$$

82

Sottrarre una quantità k da un'altra h significa trovare una certa quantità Δ, alla quale se aggiungasi k ne nasca una somma $= h$, cioè (§. 79)

$$\Delta + k = h.$$

Aggiungasi ora $-k$ ad ambedue i membri; si avrà (§.79)

$$\Delta + k - k = h - k, \quad \text{ovvero (§. 81)} \quad \Delta = h - k;$$

e fatto prima $k = +g$, poi $k = -g$, saranno (§. 76. *i*)

$$\Delta = h - (+g) = h - g,$$

$$\Delta = h - (-g) = h + g.$$

Cioè si sottrae una quantità da un'altra aggiungendo a questa una quantità opposta a quella. Δ chiamasi la differenza.

83

La quantità h dicesi maggiore o minore della quantità k, secondo che la differenza $h - k$ è positiva o negativa. Quindi le quantità positive sono da riguardarsi sempre come maggiori delle negative, e queste debbono reputarsi tanto maggiori, quan-

to è minore il valore delle medesime (30). Il segno > posto fra due grandezze, significa che la precedente è maggiore della seguente, per lo contrario il segno < denota che la prima è minore della seconda; per es.

$$+6 > +2 \ , \ +5 > -10 \ , \ -8 < -6.$$

Moltiplicazione e divisione

84

Il prodotto di due quantità da moltiplicarsi fra loro è una grandezza, il valor numerico della quale eguaglia il prodotto (§. 11) dei numerici valori delle prime, e il segno della quale consiste (§. 76) nel prodotto dei segni delle medesime. Una di

---

(30) *Supposto m il minuendo, ed s il sottraendo, se m−s sarà positivo, avremo pel principio stabilito m>s, se poi sarà negativo, avremo m<s; e ciò indipendentemente dai segni delle nominate grandezze. Nel primo caso supposto m positivo, ed s negativo, sarà, mettendo in evidenza i segni, m > −s; dunque le quantità positive sono da riguardarsi sempre come maggiori delle negative. Inoltre supposti m, n negativi, sarà similmente −m > −s; ma perchè sia positiva la differenza, come si richiede in questo caso, dovrà il valore numerico di s superare sempre quello di m. Perciò se rappresenteremo con s, s′, s″, s‴ . . . dei valori numerici successivamente crescenti avremo*

$$-m > -s \ , \ -s > -s' \ , \ -s' > -s'' \ , \ -s'' > -s''' \ . . ;$$

e perciò

$$-m > -s > -s' > -s'' > -s''' \ . . .$$

Dunque le grandezze negative debbono reputarsi tanto maggiori, quanto è minore il valore delle medesime.

queste quantità dicesi *moltiplicando*, l'altra *moltiplicatore*, ed ambedue *fattori*.

Le quali cose presupposte, apparisce da quanto si è detto (§. 15 : 77), che il prodotto di più quantità rimarrà sempre lo stesso, qualunque sia l'ordine col quale fra loro si moltiplichino.

85

La moltiplicazione delle quantità s' indica come quella dei numeri (§. 11). Quindi (§. 84)

$$\left.\begin{array}{l} +h \times +k = +hk \quad , \quad +h \times -k = -hk \, , \\ -h \times +k = -hk \quad , \quad -h \times -k = +hk. \end{array}\right\} (i')$$

86

Dividere una quantità h per un' altra k, equivale a cercare una certa quantità q, il di cui prodotto per k eguagli h, cioè

$$kq = h \, ;$$

dicesi h *dividendo*, k *divisore*, q *quoto*: la divisione poi delle quantità si rappresenta come quella de' numeri (§. 16)

$$q = \frac{h}{k} \quad , \quad q = h : k.$$

87

Esprimano H, K, Q i valori numerici delle quantità h, k, q. Sarà (§. 86 : 84)

$$KQ = H \text{ , e perciò } \frac{KQ}{K} = \frac{H}{K} \text{ , ovvero } Q = \frac{H}{K} \, .$$

Inoltre poichè il prodotto dei segni del quoto e divisore deve riprodurre il segno del dividendo, perciò (§. 85)

$$\left.\begin{aligned} \frac{+h}{+k} &= +q = +\frac{h}{k}\ , \quad \frac{+h}{-k} = -q = -\frac{h}{k}\ , \\ \frac{-h}{+k} &= -q = -\frac{h}{k}\ , \quad \frac{-h}{-k} = +q = +\frac{h}{k}\ . \end{aligned}\right\} (i''')$$

Dunque il valore numerico del quoto proveniente dalla divisione di una quantità per un' altra, sarà lo stesso che il quoto emergente dai numerici valori delle quantità medesime; il segno poi consisterà nel prodotto dei loro segni.

88

I valori numerici delle quantità a, b, c, d . . . si esprimano con A, B, C, D . . . . Certamente il valore numerico della quantità $\frac{a.c}{b.d}$ sarà $\frac{\text{A.C}}{\text{B.D}}$, ovvero (§.19) $\frac{\text{A}}{\text{B}} \cdot \frac{\text{C}}{\text{D}}$; ed il suo segno sarà quello del prodotto (§. 77 : 87) dei segni delle quantità $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Dunque (§. 84)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}\ .$$

Similmente si dimostra che sarà (§. 87)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}\ .$$

E poichè $\frac{c}{c} = 1$, perciò non v'ha bisogno d'altro perchè abbiasi ancora

$$\frac{a.c}{b.c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b}\ , \quad \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a.c}{b.c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b}\ ,$$

del tutto come nei numeri (§. 20).

89

Facilmente s' intende ancora , che il prodotto di $a+b+c+\ldots$ per k , cioè $(a+b+c+\ldots)\,k$, ritiene lo stesso valore numerico , e lo stesso segno della somma de' prodotti ak , bk , ck . . . , onde sarà

$$(a+b+c\ldots)\,k = ak+bk+ck+\ldots$$

Similmente

$$\frac{1}{k}(a+b+c+\ldots) = \frac{1}{k}a+\frac{1}{k}b+\frac{1}{k}c+\ldots$$

cioè

$$\frac{a+b+c+\ldots}{k} = \frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}+\ldots$$

Innalzamento a potenza ed estrazione di radici.

90

Estendendo le cose già dette (§. 22 . 1.° 2° : 27) sulle potenze e radici numeriche di esponenti e indici espressi da numeri razionali , a potenze e radici di quantità , il grado delle quali sia m ovvero $\frac{m}{n}$ (rappresentano m ed n numeri interi) avremo queste definizioni.

1.° Innalzare la quantità a alla potenza del grado m , significa formare un prodotto di tanti fattori ciascuno $= a$, quante sono le unità in m : a dicesi radice , la potenza stessa poi si esprime per a^m.

2.° Rappresenti θ una quantità tale, che moltiplicati fra loro n fattori ciascuno $= \theta$ ne nasca a. Elevare la quantità a alla potenza del grado $\frac{m}{n}$ significa formare un prodotto di tanti fattori ciascuno $= \theta$ quante sono le unità in m cioè ,

$$a^{\frac{m}{n}} = \theta^m \text{ , ed } a^{\frac{1}{n}} = \theta.$$

Quindi se, come ponemmo $a = \theta . \theta \ldots\ldots$, così poniamo $c = \nu . \nu \ldots$, sarà (§. 88)

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{\theta}{\nu}\right)^m = \frac{\theta^m}{\nu^m} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{c^{\frac{m}{n}}} \quad (31).$$

3.° La radice della quantità a, accennata dall'indice m od $\frac{m}{n}$, è una quantità, che elevata alla potenza del grado m o $\frac{m}{n}$, riproduce a.

---

(31) *Per bene intendere la equazione* $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{\theta}{\nu}\right)^m$, *dalla quale deriva l' altra* $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{c^{\frac{m}{n}}}$, *riflettiamo essere per ipotesi* $\frac{a}{c} = \frac{\theta^n}{\nu^n} = \left(\frac{\theta}{\nu}\right)^n$; *e perciò sarà* $\left(\frac{\theta}{\nu}\right)$ *tal grandezza, che moltiplicati fra loro n fattori ciascuno* $= \frac{\theta}{\nu}$ *si produrrà* $\frac{a}{c}$, *dunque* (§.22.2°) *sarà* $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{\theta}{\nu}\right)^m = \frac{\theta^m}{\nu^m} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{c^{\frac{m}{n}}}$

91

Come con m, n, così con m', m'' . . . n', n'' . . . si esprimano numeri interi, e con a', a'' . . . similmente che con a si esprimano delle quantità positive o negative. Certo quel ragionamento di che ci siamo valuti (§. 24 : 25 : 28), quello stesso ci condurrà facilmente alle

$$a^m \cdot a^{m'} \cdot a^{m''} \ldots = a^{m + m' + m'' + \ldots}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m'}{n'}} \cdot a^{\frac{m''}{n''}} \ldots = a^{\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \ldots}$$

$$a^m \cdot a'^m \cdot a''^m \ldots = (a \cdot a' \cdot a'' \ldots)^m ,$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a''^{\frac{m}{n}} \ldots = (a \cdot a' \cdot a'' \ldots)^{\frac{m}{n}} ,$$

$$(a^m)^{m'} = a^{mm'} , \quad (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m.m'}{n.n'}} ,$$

92

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n} , \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \theta .$$

Elevare la quantità a alla potenza notata con indice negativo $-m$, o $-\frac{m}{n}$, non è altro che dividere la unità per a^m, o per $a^{\frac{m}{n}}$, cioè sarà

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} , \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} ,$$

le quali manifestamente conducono alle seguenti

$$a^{-m} \cdot a^m = 1 , \quad a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = 1 , \quad a^m = \frac{1}{a^{-m}} , \quad a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} .$$

93

Ciascun vede essere ancora (§. 88 : 91)

$$a^{-m} \cdot a^{-m'} \cdot a^{-m''} \ldots = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^{m'}} \cdot \frac{1}{a^{m''}} \ldots = \frac{1}{a^m . a^{m'} . a^{m''} \ldots}$$

$$= \frac{1}{a^{m + m' + m'' + \ldots}} = a^{-(m + m' + m'' + \ldots)} = a^{-m - m' - m'' - \ldots};$$

e similmente

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{m'}{n'}} \cdot a^{-\frac{m''}{n''}} \ldots = a^{-\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'} - \frac{m''}{n''} - \ldots},$$

$$a^{-m} \cdot a'^{-m} \cdot a''^{-m} \ldots = (a \cdot a' \cdot a'' \ldots)^{-m},$$

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a'^{-\frac{m}{n}} \cdot a''^{-\frac{m}{n}} \ldots = (a . a' . a'' \ldots)^{-\frac{m}{n}},$$

$$(a^{-m})^{m'} = a^{-mm'} = (a^m)^{-m'}, \quad (a^{-m})^{-m'} = a^{mm'} = (a^m)^{m'},$$

$$(a^{-\frac{m}{n}})^{\frac{m'}{n'}} = a^{-\frac{m.m'}{n.n'}} = (a^{\frac{m}{n}})^{-\frac{m'}{n'}} \text{ eccetera.}$$

94

Inoltre o m pongasi $>$ ovvero $< m'$, e quindi (§. 26) o abbiasi

$$\frac{a^m}{a^{m'}} = a^{m-m'}, \text{ ovvero } \frac{a^m}{a^{m'}} = \frac{1}{a^{m'-m}},$$

poichè (§. 92)

$$\frac{1}{a^{m'-m}} = a^{-(m'-m)} = a^{m-m'},$$

perciò sarà nell' uno e nell' altro caso

$$\frac{a^m}{a^{m'}} = a^m \cdot \frac{1}{a^{m'}} = a^m \cdot a^{-m'} = a^{m-m'}.$$

Ora θ' significhi una tal grandezza, che moltiplicati fra loro nn' fattori ciascuno $= \theta'$ ne risulti a. Avremo (§. 90 . 2.° 92)

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m'}{n'}}} = \frac{a^{\frac{mn'}{nn'}}}{a^{\frac{m'n}{nn'}}} = \frac{\theta'^{mn'}}{\theta'^{m'n}} = \theta'^{mn'-m'n} = a^{\frac{mn'-m'n}{nn'}}, \quad (32)$$

e conseguentemente

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m'}{n'}}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{m'}{n'}} \quad (33).$$

95

Circa l' equazione (§. 91)

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \theta$$

si hanno a fare delle osservazioni, secondo che la quantità a è positiva o negativa, ed il numero n è pari $(= 2i)$, o impari $(= 2i + 1)$ (34). Sieno A, α i valori numerici delle quantità a, θ (35); e poniamo 1.° $a = +A$ ed $n = 2i$, 2.°

---

(32) *Infatti per ipotesi abbiamo* $\theta' = a^{\frac{1}{nn'}}$.

(33) *Dunque si dividono fra loro due potenze di egual base, dando ad essa per esponente la differenza fra gli esponenti del dividendo e divisore.*

(34) *Le formule* $2i$ *e* $2i+1$ *rappresentano rispettivamente tutti i numeri pari, e impari. Dicesi pari quel numero che può esattamente dividersi per* 2, *ed impari quello che non può così esattamente dividersi. Perciò chiamando* N *un qualunque numero intero, ed* i *il quoto della sua divisione per* 2, *se il numero sarà pari avremo* $N=2i$, *se impari dovrà essere* $N=2i+1$.

(35) *La quantità* θ *e tale per ipotesi, che moltiplicati fra loro* $2i$ *fattori ciascuno* $= \theta$ *si ottiene* A.

$a = +\mathrm{A}$ ed $n = 2i + 1$, 3.° $a = -\mathrm{A}$ ed $n = 2i + 1$, 4.° $a = -\mathrm{A}$ ed $n = 2i$. Poichè (§. 77)

$$+\mathrm{A} = (+\alpha)^{2i} = (-\alpha)^{2i},$$

potrà nel primo caso adoperarsi $\theta = +\alpha$, ed anche $\theta = -\alpha$, e sarà

$$\sqrt[2i]{+\mathrm{A}} = \pm\alpha.$$

Nel secondo abbiamo solamente (§. 77)

$$+\mathrm{A} = (+\alpha)^{2i+1}, \text{ e } \sqrt[2i+1]{+\mathrm{A}} = +\alpha.$$

Nel terzo (§. 77)

$$-\mathrm{A} = (-\alpha)^{2i+1}, \text{ e } \sqrt[2i+1]{-\mathrm{A}} = -\alpha.$$

Finalmente nel quarto caso, siccome non può essere che moltiplicati fra loro $2i$ fattori, ciascuno de' quali sia $= +\alpha$ ovvero $= -\alpha$, ne nasca (§. 77) un prodotto negativo, così non potrà corrispondere alla espressione $\sqrt[2i]{-\mathrm{A}}$ alcun valore fra i razionali o irrazionali, e perciò niun significato avrà essa.

L' espressioni alle quali non può corrispondere alcun valore nè razionale nè irrazionale, diconsi immaginarie; e così col nome stesso distinguonsi da quelle, che corrispondono a quantità reali.

96

Oltre le quantità reali, consideriamo nell' algebra anco le espressioni immaginarie, e le suggettiamo alle operazioni algebriche. Così la espressione immaginaria $\sqrt{-1}$ non altrimenti si tratta, che se fosse una quantità reale, il cui quadrato $= -1$.

Quindi per es. (§. 70 : 77 : 85 : 86 : 90)

$$\sqrt{\mathrm{A}}.\sqrt{-1} = \sqrt{-\mathrm{A}}, \quad \sqrt{-\mathrm{A}}.\sqrt{-\mathrm{B}} = \sqrt{\mathrm{A}}.\sqrt{-1}\sqrt{\mathrm{B}}.\sqrt{-1} =$$

$$\sqrt{\mathrm{AB}}.(\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{\mathrm{AB}}, \quad -a\sqrt{-1}.b\sqrt{-1} = -ab(\sqrt{-1})^2 = ab,$$

$$\frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = \frac{a}{b}\ ,\ (\sqrt{-1})^{2i} = \pm 1\ ,\ (\sqrt{-1})^{2i+1} = \pm\sqrt{-1}\ ;$$

nelle due ultime vale il segno superiore se il numero i è pari, l' inferiore se é impari (36).

97

Comunque si presentino le espressioni immaginarie, noi le ridurremo alla forma $u + v\sqrt{-1}$, acconciamente cioè determinando, se faccia d' uopo, le quantità reali u, v. Frattanto si osservi quanto siegue: annullandosi v si reputa nullo eziandio il termine $v\sqrt{-1}$, ed $u + v\sqrt{-1}$ s'intende ridotto alla quantità reale u: inoltre la equazione immaginaria

$$a + b\sqrt{-1} = h + k\sqrt{-1}$$

si riguarda come una simbolica rappresentanza dell'cquazioni reali

$$a = h\ ,\ b = k\ (37).$$

---

(36) *Infatti essendo* $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$, *si vede chiaramente che se nelle potenze* $(\sqrt{-1})^{2i}$, $(\sqrt{-1})^{2i+1}$, *i fattori* $(\sqrt{-1})^2 = -1$ *saranno di numero* pari, *il prodotto loro sarà positivo, se di numero* impari, *sarà il prodotto stesso negativo. Ma in queste due diverse potenze i fattori* $(\sqrt{-1})^2 = -1$ *sono di numero* i, *dunque secondo che* i *è pari od impari, varrà il segno superiore o inferiore nei prodotti stessi.*

(37) *Si avverta che siffatte equazioni sono dedotte dalla prima per sola convenzione.*

98

Dicemmo (§. 95) che la radice n^{ma} della quantità a può avere o due, o uno, o niun valore; ma ciò deve in tendersi dei

valori reali: poichè se si considerino tutte le espressioni, sieno reali sieno immaginarie, le quali alla potenza n^{ma} innalzate riproducono a, bene altramente la cosa procederà. Così poichè

$$+16 = (+2)^4 = (-2)^4 = (+2\sqrt{-1})^4 = (-2\sqrt{-1})^4,$$

perciò alla radice quarta della grandezza + 16, corrisponderanno i quattro valori diversi

$$+2\ ,\ -2\ ,\ +2\sqrt{-1}\ ,\ -2\sqrt{-1}.$$

Altrove dimostreremo che alla radice n^{ma} di qualunque grandezza corrispondono sempre n valori fra loro distinti, dei quali uno o due potranno essere reali (§. 95), gli altri tutti immaginari.

99

Posto ciò, anche alla potenza $a^{\frac{m}{n}}$ corrisponderanno n valori fra loro distinti, purchè l'esponente $\frac{m}{n}$ sia ridotto a' minimi termini. Suppongasi ora che all'esponente $\frac{m}{n}$ si dieno più e più valori, sempre più prossimi al numero irrazionale B. Certamente crescendo (§. 8) il denominatore n oltre qualunque dato limite, i valori immaginari di quella potenza cresceranno sempre di numero; e di quì è che non possa conseguirsi definitamente il significato delle algebriche espressioni a^B, a^{-B} (38).

Le conseguiamo però (§. 22) quante volte a sia positiva, e quelle si riguardino quali espressioni aritmetiche, cioè come se equivalessero alle due A^B, A^{-B}.

Lo stesso deve dirsi della potenza a^0, il cui senso si stabilisce definitivamente (§. 23), quando equivale alla espressione

(38) *I valori infatti che a queste algebriche espressioni si addicono, sono indefiniti nel numero, e perciò il significato di esse non potrà mai definitivamente ottenersi.*

aritmetica A°. Che se riguardisi a° come semplice espressione (§. 94) del quoto

$$\frac{a^m}{a^m} = 1,$$

niuna difficoltà potrebbe al certo aver luogo.

DELLE PRIME QUATTRO OPERAZIONI ESEGUITE SUI POLINOMI.

Somma.

100

Proponendosi a sommare dei polinomi, la somma s'indica unendo (§. 79) i termini di tutti coi propri segni. Incontrandosi poi de' termini costituiti da lettere e da esponenti medesimi, (si dicono simili), avrà luogo per le cose premesse (§. 81) una riduzione; poichè non altrimenti sarà, che se ricorresse il medesimo termine con lo stesso, o contrario segno. Dati per es. i polinomi

$$a^2 + 4ab + 3b^2 - h \ , \ -a^2c + 8ab - 3b^2 + 2g \ ,$$

$$7a^2c - 13ab - 5b^2 - h - k + bc \ ,$$

la somma s'indicherà per

$$a^2 + 4ab + 3b^2 - h - a^2c + 8ab - 3b^2 + 2g + 7a^2c - 13ab$$

$$- 5b^2 - h - k + bc \ ,$$

che manifestamente si riduce così

$$a^2 - ab - 5b^2 - 2h + 6a^2c + 2g - k + bc.$$

Similmente (§. 97)

$$(u + v\sqrt{-1}) + (u - v\sqrt{-1}) = 2u + (v - v)\sqrt{-1} = 2u.$$

Gioverà scrivere uno sotto l'altro i termini simili, soprattutto se molti ve n'abbiano, affinchè più facilmente si raccolga la somma dei medesimi.

Sottrazione.

101

Un polinomio si sottrae dall'altro a questo aggiungendo (§. 100) quello coi segni cangiati (§. 81 : 82). Debba p. es. da $a^2 + 4ab - 3b^2 - hk$ sottrarsi $2a^2 - ab - 3b^2 + h - k$.

Sarà $(a^2 + 4ab - 3b^2 - hk) - (2a^2 - ab - 3b^2 + h - k) =$

$$a^2 + 4ab - 3b^2 - hk - 2a^2 + ab + 3b^2 - h + k =$$

$$- a^2 + 5ab - hk - h + k.$$

Così ancora

$$(u + v\sqrt{-1}) - (u - v\sqrt{-1}) = u + v\sqrt{-1} - u + v\sqrt{-1} = 2v\sqrt{-1}.$$

Moltiplicazione.

102

Un polinomio si moltiplica per l'altro, moltiplicando tutto il primo per ciascun termine del secondo (§. 89), e poscia riunendo i prodotti in somma, che manifestamente rappresenterà il prodotto dei polinomi dati. Così p. es. (§. 84 : 91 : 96)

$$(a - bc - k)\,(ac - bc^2 + ck) = ac\,(a - bc - k) - bc^2(a - bc - k)$$

$$+ ck(a - bc - k) = a^2c - abc^2 - ack - abc^2 + b^2c^3 + bc^2k$$

$$+ ack - bc^2k - ck^2 = a^2c - 2abc^2 + b^2c^3 - ck^2\,,$$

$$(a + b\sqrt{-1})\,(c + e\sqrt{-1}) = c(a + b\sqrt{-1}) + e\sqrt{-1}(a + b\sqrt{-1})$$

$$= ac + bc\sqrt{-1} + ae\sqrt{-1} + eb(\sqrt{-1})^2 = ac - eb + (bc + ae)\sqrt{-1}\,;$$

74

e similmente

$$(u + v\sqrt{-1})(u - v\sqrt{-1}) = u^2 + uv\sqrt{-1} - uv\sqrt{-1} - v^2(\sqrt{-1})^2$$

$$= u^2 - v^2(\sqrt{-1})^2 = u^2 + v^2$$

(l' espressioni immaginarie $u + v\sqrt{-1}$, ed $u - v\sqrt{-1}$ diconsi coniugate tra loro) ,

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

(il prodotto della somma e differenza di due quantità eguaglia la differenza de' loro quadrati),

$$(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n)(1 - z) = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n)$$

$$- (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n)z = 1 + (z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n)$$

$$- (z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n) - z^{n+1} = 1 - z^{n+1}. \quad (39)$$

Poichè (§. 102)

$$(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2 \quad , \quad (h + k\sqrt{-1})$$

$$(h - k\sqrt{-1}) = h^2 + k^2 \quad , \quad (a + h\sqrt{-1})(h + k\sqrt{-1})$$

$$= ah - bk + (ak + bh)\sqrt{-1} \quad , \quad (a - b\sqrt{-1})(h - k\sqrt{-1})$$

$$= ah - bk - (ak + bh)\sqrt{-1} \; ;$$

perciò

$$(a^2 + b^2)(h^2 + k^2) = [ah - bk + (ak + bh)\sqrt{-1}]\ [ah - bk$$

$$- (ak + bh)\sqrt{-1}].$$

---

(39) *Questo è un caso particolare del prodotto*

$$(a^n + a^{n-1}z + a^{n-2}z^2 + \ldots + az^{n-1} + z^n)(a - z) = a^{n+1} - z^{n+1}.$$

Ma è (§. 102)

$$[ah - bk + (ak + bh)\sqrt{-1}]\,[ah - bk - (ak + bh)\sqrt{-1}] =$$

$$(ah - bk)^2 + (ak + bh)^2 ;$$

dunque

$$\left.\begin{aligned} &(a^2 + b^2)\,(h^2 + k^2) = (ah - bk)^2 + (ak + bh)^2. \\ &\text{Permutato } h \text{ in } k, \text{ e } k \text{ in } h, \text{ sarà eziandio} \\ &(a^2 + b^2)\,(h^2 + k^2) = (ak - bh)^2 + (ah + bk)^2. \end{aligned}\right\} (g)$$

Dalle formule (g) manifestamente si deduce, che se due numeri sono tali da potersi ciascuno risolvere in due quadrati, il prodotto loro potrà doppiamente risolversi in due quadrati. Per es.

$$40 = 6^2 + 2^2 , \text{ e } 58 = 7^2 + 3^2 ;$$

sarà perciò

$$40.58 = (6.7 - 2.3)^2 + (6.3 + 2.7)^2 = (6.3 - 2.7)^2 + (6.7 + 2.3)^2 ;$$

cioè

$$40.58 = 36^2 + 32^2 = 4^2 + 48^2 .$$

Di quì apprendiamo che l' uso delle immaginarie espressioni può valere per indagare le proprietà delle quantità reali.

Divisione.

104

Allora dicesi un polinomio essere ordinato per qualche lettera, quando nel primo suo termine si trova la massima potenza della lettera medesima, nel secondo, la potenza prossimamente minore, e così di mano in mano. A questo modo

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

è ordinato per a. Che se più termini contengano la medesima potenza di quella lettera, dovranno considerarsi per un termine solo.

Ora se debba un polinomio dividersi per un altro, prima si ordineranno ambedue per una stessa lettera; poi si dividerà il primo termine del dividendo pel primo del divisore, e si noterà il quoto, come nell'aritmetica (§. 38): per questo quoto si moltiplicherà tutto il divisore; se ne sottrarrà il prodotto dal dividendo, e notato il residuo, si ripeterà l'operazione con lo stess' ordine sino alla fine. Eccone un esempio

divisore *dividendo* *quoto*

$$h + k \;/\; h^2 + kh - zh - kz \;/\; h - z$$

$$\begin{array}{r} -h^2 - kh \\ \hline -zh - kz \\ +zh + kz \\ \hline 0 \end{array}$$

Ordinati cioè per la lettera h tanto il dividendo quanto il divisore, si divida il primo termine h^2 pel primo h; si avrà $\frac{h^2}{h} = h$: scrivasi h nel quoto, e il prodotto $h(h+k)$ si sottragga dal dividendo. Nascerà $-zh - kz$, di per se ordinato rapporto ad h. Si divida nuovamente il primo termine di questo residuo pel primo del divisore; si otterrà $\frac{-zh}{h} = -z$: scrivasi $-z$ nel quoto, e dal medesimo residuo si sottragga il prodotto $-(h+k)z$; nulla rimarrà, e sarà

$$\frac{h^2 + kh - zh - kz}{h + k} = h - z.$$

Nella stessa guisa otterremo

$$\frac{h^3 + k^3}{h + k} = h^2 - hk + k^2$$

$$h + k \;/\; h^3 + k^3 \;/\; h^2 - kh + k^2$$

$$\begin{array}{r} -h^3 - kh^2 \\ \hline -kh^2 + k^3 \\ +kh^2 + hk^2 \\ \hline +hk^2 + k^3 \\ -k^2h - k^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

105

La ragione dell'operazione si fa manifesta (§.86) dall'eseguirsi questa parzialmente, sottraendo sempre dal dividendo il prodotto del divisore nella parte trovata del quoto. Ma poichè ciascuna quantità si ordina per la stessa lettera, e la divisione costantemente si eseguisce tra i primi termini delle quantità medesime, perciò nè si troveranno nel quoto termini simili, nè avrà luogo riduzione veruna in quelli che dalle parziali divisioni emergono.

106

Se compiuta la divisione abbiasi un resto, si apporrà una frazione, avente per numeratore quel resto, e per denominatore lo stesso divisore. Così per es. si troverà

$$\frac{h^3 + 3kh^2 + 3k^2h + 2k^3}{h+k} = h^2 + 2kh + k^2 + \frac{k^3}{h+k}.$$

Può continuarsi la divisione anche a questo modo

$$h+k \mid k^3 \mid \frac{k^3}{h} - \frac{k^4}{h^2} + \frac{k^5}{h^3} - \ldots$$

$$\begin{array}{r}
-k^3 - \frac{k^4}{h} \\
\hline
-\frac{k^4}{h} \\
+\frac{k^4}{h} + \frac{k^5}{h^2} \\
\hline
+\frac{k^5}{h^2} \\
-\frac{k^5}{h^2} - \frac{k^6}{h^3} \\
\hline
-\frac{k^6}{h^3}
\end{array}$$

eccetera.

Quindi abbiamo

$$\frac{k^3}{h+k} = \frac{k^3}{h} - \frac{\frac{k^4}{h}}{h+k} = \frac{k^3}{h} - \frac{k^3}{h+k}\cdot\frac{k}{h},$$

$$\frac{k^3}{h+k} = \frac{k^3}{h} - \frac{k^4}{h^2} + \frac{k^3}{h+k}\cdot\frac{k^2}{h^2},$$

$$\frac{k^3}{h+k} = \frac{k^3}{h} - \frac{k^4}{h^2} + \frac{k^5}{h^3} - \frac{k^3}{h+k}\cdot\frac{k^3}{h^3};$$

e generalmente

$$\frac{k^3}{h+k} = \frac{k^3}{h} - \frac{k^4}{h^2} + \frac{k^5}{h^3} - \ldots \mp \frac{k^{n+2}}{h^n} \mp \frac{k^3}{h+k}\cdot\frac{k^n}{h^n} \quad (a);$$

valgono i segni superiori quando n è impari, e gl'inferiori quando n è pari (40).

Ora se il valore $\frac{k}{h}$ è < 1, crescendo n oltre qualunque dato numero quanto si voglia grande, il termine

$$\mp \frac{k^3}{h+k}\cdot\frac{k^n}{h^n} \ldots (r_n)$$

decrescerà per modo che si approssimerà sempre più a llo zero; ma ciò conduce il polinomio

$$\frac{k^3}{h} - \frac{k^4}{h^2} + \frac{k^5}{h^3} - \ldots \mp \frac{k^{n+2}}{h^n}$$

ad appressarsi continuamente alla quantità fissa

---

(40) *Essendo in questa serie positivi quei termini che hanno impari gli esponenti, è chiaro che in essa valeranno i segni superiori o gl'inferiori, secondo che sarà n impari o pari.*

$$\frac{k^3}{h+k} \ldots (s);$$

questa dunque equivalerà alla serie

$$\frac{k^3}{h}, -\frac{k^4}{h^2}, +\frac{k^5}{h^3}, - \ldots\ldots, (a')$$

indefinitamente protratta, e potrà veramente scriversi

$$\frac{k^3}{h+k} = \frac{k^3}{h} - \frac{k^4}{h^2} + \frac{k^5}{h^3} - \ldots\ldots (a''),$$

riguardando il termine (r_n) come annullato nel suo limite. Delle due (s), (r_n) una dicesi la somma della serie (a'), l'altra il suo residuo dopo il termine n^{simo}.

Che se il valore $\frac{k}{h}$ sia $=$ ovvero $>$ 1, al certo crescendo n, il residuo (r_n) o persisterà costante, o diverrà continuamente maggiore: per la qual cosa se non abbiasi riguardo ad (r_n), nè la (s) rappresenterà la (a'), nè valerà perciò la (a'').

Fatta in ciascun termine della (a) la divisione per k^3, avremo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{h+k} = \frac{1}{h} - \frac{k}{h^2} + \frac{k^2}{h^3} - \ldots \pm \frac{k^{n-1}}{h^n} \mp \frac{1}{h+k} \cdot \frac{k^n}{h^n}; \\ &\text{e fatto } h = 1, \text{ sarà} \\ &\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 - k^3 + \ldots \pm k^{n-1} \mp \frac{k^n}{1+k} \ (41). \end{aligned}\right\} (a''')$$

(41) *Dobbiamo quì ancora osservare che se k sarà* < 1, *crescendo n, il termine* $\mp \frac{k^n}{1+k}$ *decrescerà sempre più, e continuamente si accosterà allo zero, cosicchè posto n indefinitamente grande, potrà riguardarsi vera la seguente equazione*

Se due polinomi ammettano un fattore comune, questo si troverà collo stesso metodo adoperato pei numeri (§. 47). Giova peraltro preparare i primi termini di ogni dividendo e del corrispondente divisore in modo, che possa l'uno per l'altro esattamente dividersi senza frazione. A questo fine si avverta che non si altera il divisor comune fra due quantità se l'una si moltiplichi o si divida, per quello che nell'altra non si contiene come fattore. Un esempio porrà ciò in chiaro. Sieno

$$z^3 + 4z^2 + z - 6 \ldots (g) \quad , \quad 5z^2 + 9z - 18 \ldots (g').$$

Il primo termine z^3 della quantità (g) non può dividersi senza frazione pel primo $5z^2$ della quantità (g'), non avendo z^3 per fattore il 5; nè (g') si può esattamente dividere per lo stesso 5. Perciò si moltiplichi (g) per 5, affinchè abbiasi

$$5z^3 + 20z^2 + 5z - 30 \ldots (g'');$$

ed il fattore comune alle due (g'), (g''), lo sarà pure alle due (g), (g'). Si divida ora (g'') per (g'); il quoto sarà z, il residuo $11z^2 + 23z - 30$, che similmente si moltiplichi per 5, onde possa continuarsi la divisione senza frazione; nascerà

$$55z^2 + 115z - 150 \ldots (g'').$$

Divisa la quantità (g''') per (g'), il quoto sarà 11, il re-

$$\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 - k^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Ma se k *sarà* $=$ *ovvero* > 1, *il termine suddetto al crescere di* n, *o rimarrà costante, o crescerà anch' esso, e perciò non potrà questo termine omettersi nella seconda* (a'''). *Così fatto* $k = 1$ *questa ci darà* $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, *qualunque sia il numero intero* n.

siduo $16z + 48\,(= 16z + 16.3)$, pel quale ora deve dividersi la (g'); ma poichè fra i fattori della quantità (g') nè si contiene il numero 16, nè alcun fattore dello stesso 16, omesso perciò in $16z + 48$ il fattore 16, ci valeremo del divisore

$$z + 3 \ldots (g^{IV}).$$

La divisione si eseguisce senza residuo: dunque le quantità proposte (g), (g') hanno (§. 46) un fattor comune (g^{IV}). Sono in realtà

$$z^3 + 4z^2 + z - 6 = (z + 3)(z^2 + z - 2),$$

$$5z^2 + 9z - 18 = (z + 3)(5z - 6).$$

E inoltre (g^{IV}) il massimo fattor comune delle stesse (g), (g') (§. 46); in quanto cioè divisi (g) e (g') per (g^{IV}), l'espressione $\frac{(g)}{(g')}$, salvo il suo valore (§. 88), si riduce alla forma la più semplice,

$$\frac{z^3 + 4z^2 + z - 6}{5z^2 + 9z - 18} = \frac{z^2 + z - 2}{5z - 6}.$$

Circa la divisione delle immaginarie espressioni, noteremo quanto siegue

1.° Poichè

$$i\left(\frac{h}{i} + \frac{k}{i}\sqrt{-1}\right) = h + k\sqrt{-1};$$

perciò (§. 86 : 96)

$$\frac{h + k\sqrt{-1}}{i} = \frac{h}{i} + \frac{k}{i}\sqrt{-1}$$

2.° Poichè (§. 102)

$$\frac{(a + b\sqrt{-1})(c - e\sqrt{-1})}{c^2 + e^2}(c + e\sqrt{-1}) = a + b\sqrt{-1};$$

per questo (§. 86 : 96)

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+e\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1})(c-e\sqrt{-1})}{c^2+e^2} = \frac{ac+be}{c^2+e^2} + \frac{bc-ae}{c^2+e^2}\sqrt{-1}.$$

DELLE ALTRE DUE OPERAZIONI SUI POLINOMI.

Innalzamento a potenze di esponente intero e positivo.

109

Queste potenze nascono dalla moltiplicazione successiva della loro radice (§. 90 . 1°). Così (§. 102)

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = x^2+2xy+y^2,\\ (x+y)^3 &= (x+y)^2(x+y) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}\right\}(g)$$

eccetera . . . ,

qualunque nel resto sieno x ed y, reali cioè o immaginarie (§.96); poichè le immaginarie espressioni similmente che le reali, sono alcune volte indicate da una sola lettera, come se pongasi p. e. $k\sqrt{-1} = y$. Quindi apparisce che il quadrato di un binomio contiene il quadrato del suo primo termine, il doppio prodotto del primo nel secondo, ed il quadrato del secondo termine. Similmente il cubo di un binomio contiene il cubo del suo primo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo nel secondo, il triplo prodotto del primo nel quadrato del secondo, ed il cubo del secondo termine; ec. . . .

Facciasi nelle (g)

$$x = a+b\ ,\ = a+b+c\ ,\ \text{ec. . . .}$$

esse produrranno

$$\left.\begin{aligned}
&(a+b+\gamma)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\gamma + \gamma^2 \ , \\
&(a+b+c+\gamma)^3 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)\gamma + \gamma^2 \\
&= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)\gamma + \gamma^2 \ , \text{ ec. . .} \\
&(a+b+\gamma)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2\gamma + 3(a+b)\gamma^2 + \gamma^3 \ , \\
&(a+b+c+\gamma)^3 = (a+b+c)^3 + 3\,(a+b+c)^2\gamma \\
&+ 3(a+b+c)\gamma^2 + \gamma^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3\,(a \\
&+ b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2\gamma + 3(a+b+c)\gamma^2 + \gamma^3
\end{aligned}\right\} (g')$$

eccetera . . . .

Oltre a ciò prese

$$x = -\tfrac{1}{2} \ , \ y = \pm \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1} \ ,$$

la seconda delle (g) darà (§. 88 : 9¹)

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{-1+3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \left(\frac{3.3^{\frac{1}{2}}}{8} - \frac{3.3^{\frac{1}{2}}}{8}\right)\sqrt{-1} = 1 \ , \\
&\left(\frac{-1-3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \left(-\frac{3.3^{\frac{1}{2}}}{8} + \frac{3.3^{\frac{1}{2}}}{8}\right)\sqrt{-1} = 1 \ .
\end{aligned}\right\} (g'').$$

Denoti n un qualunque numero intero e positivo, e si abbia il polinomio

$$1 + nz + \frac{n(n-1)}{2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}z^3 + \ldots (p_n) \ ,$$

che non prosiegue oltre $n+1$ termini: poichè il termine $\overline{n+2}^{mo}$ e gli altri seguenti contengono il fattore $n - n = 0$. Il prodotto di (p_n) in $1 + z$ sarà

$$\left.\begin{array}{l} 1 + nz + \dfrac{n(n-1)}{2} z^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3} z^3 + \ldots \\ \quad + z \quad + nz^2 \quad + \dfrac{n(n-1)}{2} z^3 + \ldots \end{array}\right\} =$$

$$1 + (n+1)z + \frac{(n+1)n}{2} z^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{2.3} z^3 + \ldots\ldots,$$

che termina dopo $n + 2$ termini, e che rappresenterà indubitatamente (§. 90) la potenza $\overline{n+1}^{ma}$ del binomio $1 + z$, se (p_n) rappresenta la potenza n^{ma} dello stesso $1 + z$. Ora in (p_n) si aumenti di uno il numero n, e protratti i termini fino al fattore $= 0$, si esprima con (p_{n+1}) il polinomio risultante. Ciascun vede che (p_{n+1}) sarà lo stesso che quel primo prodotto, laonde se vale la equazione

$$(1 + z)^n = p_n$$

valerà eziandio l'altra

$$(1 + z)^{n+1} = p_{n+1}:$$

quindi è che se (p_n) rappresenta la prima (§. 22 : 90) potenza del binomio $1 + z$ quando si assume $n = 1$, rappresenterà la seconda potenza quando si assume $n = 2$, e perciò la terza quando $n = 3$, la quarta quando $n = 4$, e così appresso. Ma veramente si ha

$$(p_1) = 1 + z = (1 + z)^1;$$

dunque generalmente

$$p_n = (1 + z)^n:$$

sarà cioè

$$(1 + z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} z^3 + \ldots (e);$$

qualunque sia z, reale cioè od immaginaria.

Fatto $z = \dfrac{y}{x}$, nascerà (§. 21 : 88)

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^n = \frac{(x+y)^n}{x^n} = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{y}{x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{y^2}{x^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2\quad 3}\cdot\frac{y^3}{x^3} + \ldots;$$

e quindi (§. 94: 99) la formula Newtoniana del binomio,

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \ldots (e'),$$

nella quale procedono in guisa i termini, che l'$\overline{m+1}^{mo}$ di essi manifestamente sarà espresso da

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1.2.3\ldots m}x^{n-m}y^m \ldots (e'') \quad (42).$$

---

(42) *Essendo la* (e'') *il termine generale dello sviluppo della potenza* n^{ma} *di un binomio, dovranno dalla* (e'') *stessa derivare i termini tutti di tale sviluppo, e le proprietà de' medesimi. Considerando infatti questa formula vediamo quanto siegue*

1.° *Qualunque termine, prescindendo dal primo (che è sempre la potenza* n^{ma} *della prima parte del binomio) è un prodotto di tre fattori, de' quali il primo (dicesi coefficiente) è una frazione avente per numeratore il prodotto de' numeri da n, fino ad n diminuito del numero de' termini precedenti meno uno; e per denominatore il prodotto da* 1, *fino al numero de'termini precedenti. Il secondo fattore è la prima parte del binomio stesso, elevata ad n diminuito del numero de' termini precedenti. Finalmente il terzo è la seconda parte, innalzata a questo medesimo numero.*

Concludesi da ciò che un termine qualunque, dal primo in fuori, si forma del suo precedente, moltiplicandone il coefficiente per l'esponente della prima parte; poi dividendo que-

Preso cioè $m = 1, = 2, = 3 \ldots$, si convertirà la (e') nel secondo, terzo, quarto .... termine della formula (e'), e perciò dicesi (e'') il termine generale della serie

$$\frac{n}{1} x^{n-1}y \;,\; \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}y^2 \;,\; \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3}y^3 \;, \ldots\ldots$$

Si faccia nella (e')

$$x = a + b \;,\; = a + b + c \text{, ecc. } \ldots$$

Avremo

---

sto prodotto pel numero de' termini precedenti quello che si vuole; inoltre diminuendo di 1 *l'esponente della prima parte; e finalmente aumentando di altrettanto quello della seconda.*

2.° *Se la seconda parte del binomio sarà negativa, saranno negativi nello sviluppo i termini tutti, affetti da potenze impari di questa parte. Perciò immaginando prefisso alla* (e'') *il doppio segno* $\mp$, *dovremo valerci del superiore se m sarà pari, dell' inferiore se sarà impari.*

Concludiamo da ciò che la potenza n^{ma} *di qualunque differenza binomia, si sviluppa in termini alternativamente positivi e negativi.*

3.° *Essendo per ipotesi intero e positivo l'esponente della potenza, tutti i coefficienti de' termini dello sviluppo saranno numeri interi. Infatti possono i coefficienti in proposito concepirsi* (§. 109) *nati dalla moltiplicazione e dalla somma di altri coefficienti sempre interi; e però ecc.* ....

Concludiamo di qui la seguente proprietà de' numeri, cioè che ove abbiansi due prodotti di numeri interi, uno da n fino ad $n - (m - 1)$, *l'altro da* 1 *fino ad m, il primo sarà esattamente divisibile pel secondo.*

4.° *Prendendo per* $m + 1$ *primieramente* $n + 1$, *poi* 2 *ed n, quindi* 3 *ed* $n - 1$, *inoltre* 4 *ed* $n - 2$, *e così appresso, determineremo facilmente dalla* (e'') *i termini equidistanti dagli estremi dello sviluppo da essa rappresentato, e concluderemo che tanto gli estremi quanto gli equidistanti dagli estremi hanno, due a due, lo stesso coefficiente, e gli esponenti permutati.*

$$
\left.\begin{aligned}
&(a+b+y)^n = (a+b)^n + n(a+b)^{n-1}y \\
&+ \frac{n(n-1)}{1.2}(a+b)^{n-2}y^2 + \ldots + y^n \;,\; (a+b+c+y)^n \\
&= (a+b+c)^n + n(a+b+c)^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}(a+b+c)^{n-2}y^2 \\
&+ \ldots + y^n = (a+b)^n + n(a+b)^{n-1}c \\
&+ \frac{n(n-1)}{1.2}(a+b)^{n-2}c^2 + \ldots + c^n + n(a+b+c)^{n-1}y \\
&+ \frac{n(n-1)}{1.2}(a+b+c)^{n-2}y^2 + \ldots + y^n = \text{ecc. } \ldots
\end{aligned}\right\} (e''')
$$

Soggiungiamo alcune cose le quali o riguarderanno in qualche modo i coefficienti della formula (e'), o mostreranno l'uso della stessa (e') nell' investigare certe proprietà dei numeri.

I.° Di n lettere a, b, c, d . . . la prima a con le altre b, c, d . . . costituisce $n-1$ binari ab, ac, ad . . . ; la seconda b con le altre a, c, d . . . costituisce parimenti $n-1$ binari ba, bc, bd . . . , e così appresso. Dunque il numero di tutti questi binari sarà $n(n-1)$.

Il binario ab costituisce $n-2$ ternari abc, abd . . . . . con l' altre lettere c, d . . . ; il binario ac costituisce $n-2$ ternari acb, acd . . . con le b, d . . . eccetera. Laonde il numero de' ternari tutti sarà $n(n-1)(n-2)$.

Similmente si trova essere $n(n-1)(n-2)(n-3)$ il numero de' quaternari, eccetera . . . .

Si riferisce a ciò la dottrina delle permutazioni, in cui si hanno per distinti fra loro quei binari, ternari, . . . ne' quali entrano le stesse lettere diversamente disposte, per es. abc, acb ...

Che se tali binari, ternari . . . si considerino per uno stesso binario, ternario . . . . , allora qualsivoglia binario s'incontrerà due volte p. e. ab, ba; unendosi cioè a con b, e b con a : inoltre qualsivoglia ternario si riprodurrà sei volte ; unendosi cioè qualunque delle tre lettere coi binari delle altre, per

es. *a* con *bc* e *cb* : similmente qualsivoglia quaternario si ritroverà ventiquattro volte ; unendosi cioè qualunque delle quattro lettere coi ternari delle altre , per es. *a* con *bcd* , *bdc* , *cbd* , *cdb* , *dbc* , *dcb* , e così in seguito. Perciò non avuto riguardo , come suol farsi nelle mere combinazioni , all' ordine col quale sono disposte le lettere ; i binari , ternari , quaternari . . . saranno di numero

$$\frac{n\,(n-1)}{2}\ ,\ \frac{n(n-1)\,(n-2)}{2.3}\ ,\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\ ,\ \ldots \quad (43)$$

Giova quì di passaggio notare una sol cosa. Avuto nuovamente riguardo all' ordine col quale si dispongono le lettere , pongasi di più che i binari , ternari . . . facciansi ancora colla ripetizione della medesima lettera per es. *aa* , *aab* , *aaa* . . . Ai binari $n(n-1)$ dovranno aggiungersi n binari *aa* , *bb* , *cc* . . . , per ottenere nella ipotesi in cui siamo il total numero dei binari , che perciò sarà

$$n(n-1)+n=n^2.$$

Moltiplicando il numero n^2 de' binari pel numero n delle lettere si avrà , nella stessa ipotesi , n^3 pel numero de' ternari , e nello stesso modo sarà n^4 il numero de' quaternari , ec. . . . .

II.° Esprima k un numero primo in sè (§. 48): sarà k fattore del numero $(h+1)^k-h^k-1$; poichè (§. 110. *e'*)

$$(h+1)^k-h^k-1=kh^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2.}h^{k-2}+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots3.2}{2.3.4\ldots(k-1)}h \quad (44).$$

(43) *Per conseguenza il numero delle combinazioni di n cose prese r ad r , ovvero il numero degli* r^{nari} *delle cose medesime , sarà*

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{2.3.4\ldots r}$$

(44) *Se k non fosse primo in se , potrebbe contenere per fattore uno dei numeri* 2 , 3 , 4 . . . $k-1$; *e perciò il secondo membro di questa equazione non sarebbe manifestamente divisibile per k , come lo è nell' attuale ipotesi.*

Pertanto posto $h = 1$, $= 2$, $= 3$ ec. . . . , ciascuno dei numeri

$$2^k - 2 \text{ , } 3^k - 2^k - 1 \text{ , } 4^k - 3^k - 1 \text{ , } 5^k - 4^k - 1 \text{ , } 6^k - 5^k - 1 \text{ , ec. . .}$$

avrà un fattore k. Lo stesso dunque dovrà dirsi dei

$$2^k - 2 \text{ , } (2^k - 2) + (3^k - 2^k - 1) \text{ , } (2^k - 2) + (3^k - 2^k - 1) + (4^k - 3^k - 1) \text{ ,...}$$

ovvero dei

$$2^k - 2 \quad , \quad 3^k - 3 \quad , \quad 4^k - 4 \quad , \quad 5^k - 5 \ . \ . \ . \ ,$$

e generalmente di $N^k - N$.

Ma abbiamo

$$N^k - N = N(N^{k-1} - 1) \text{ ;}$$

dunque se un numero intero N non contiene k tra i suoi fattori, lo stesso k sarà certamente (§.49) fattore del numero $N^{k-1} - 1$.

III.° Suppongasi che N risulti di n cifre, rappresentate con a , b , c . . . y , z. Apparisce dalle cose dette (§. 1 : 22) essere

$$N = 10^{n-1} a + 10^{n-2} b + 10^{n-3} c + \ldots + 10y + z \ldots (e^{IV}) :$$

dato per es. il numero 34541, saranno $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $y = 4$, $z = 1$, $n = 5$, e

$$34541 = 10^4 . 3 + 10^3 . 4 + 10^2 . 5 + 10 . 4 + 1.$$

Ora la (e^{IV}) può scriversi a questo modo

$$N = (11 - 1)^{n-1} a + (11 - 1)^{n-2} b + (11 - 1)^{n-3} c + \ldots + (11 - 1) y + z \text{ ;}$$

inoltre sviluppate le potenze del binomio, e rappresentati con N′ ed N″ due numeri interi, avremo per n pari (§. 77)

$$N = 11N' - a + b - c + \ldots - y + z \text{ ,}$$

e per n impari

$$N = 11N'' + a - b + c - \ldots - y + z \text{ (45).}$$

(45) *Nello sviluppo di qualunque delle potenze* $(11-1)^{n-1} a$,

Sommate adunque le cifre 1^a, 3^a, 5^a . . . e similmente le cifre 2^a, 4^a, 6^a . . . del numero N, questo si dividerà certo esattamente per 11, quante volte la differenza fra l'una e l'altra somma risulti = 0, ovvero sia divisibile per 11 senza residuo.

Se la (e^{IV}) si scrivesse così

$$N = (9+1)^{n-1}a + (9+1)^{n-2}b + (9+1)^{n-3}c + \ldots + (9+1)y + z,$$

facilmente se ne dedurrebbe quanto già dimostrammo (§. 51 . 5°).

112

Se nella (*e* : §. 110) facciasi $n = -1$, si produrrà (§. 77)

$$(1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$

senza che termini mai la formula : e poichè questa equazione vale appunto (§. 92 : 106) per quei valori di z, che sono compresi fra i limiti + 1 e − 1, si potrà certamente fra questi limiti estendere la formula (*e*) all'esponente $n = -1$. Quindi avremo (§. 93 : 91)

$$(1-z)^{-n} = (1-z+z^2-z^3+\ldots)^n = 1 - nz(1-z+z^2-z^3+\ldots) + \frac{n(n-1)}{2}z^2(1-z+z^2-z^3+\ldots)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}z^3(1-z+z^2-z^3+..)^3 + \ldots$$

$$= 1 - nz(1-z+z^2-z^3+\ldots) + \frac{n(n-1)}{2}z^2(1 - 2z + 3z^2 - \ldots)$$

$(11-1)^{n-2}b$, ... *i termini tutti, salvo gli ultimi, saranno un multiplo di* 11, *e perciò la loro somma potrà esprimersi, come si è fatto, per* 11.N', *ovvero per* 11.N''. *Se poi sarà n pari l'ultimo termine a dello sviluppo di* $(11-1)^{n-1}a$ *starà in sede pari, onde sarà negativo; l'ultimo termine b dello sviluppo di* $(11-1)^{n-2}b$ *starà in sede impari, onde sarà positivo; e così alternativamente : accaderà il contrario se n sarà impari* (*nota* 42.2°).

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}z^3(1-3z+\ldots)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}z^4(1-..)..$$

$$=1-nz+\frac{n^2+n}{2}z^2-\frac{n^3+3n^2+2n}{2.3}z^3+\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{2.3.4}z^4-\ldots$$

$$=1-nz+\frac{n(n+1)}{2}z^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}z^3+\ldots. \quad (46);$$

valerà cioè la formula (*e*) fra quei limiti, anche per tutti gli altri esponenti interi e negativi. Lo stesso dimostreremo altrove riguardo agli esponenti fratti, positivi o negativi che sieno.

Estrazione di radici.

Il metodo per estrarre le radici facilmente si raccoglie dalla stessa formazione delle potenze (§. 90 : 109 : 110). Cogli esempi ciò si renderà manifesto.

Debba estrarsi la radice quadrata dal polinomio $u^4+2u^3v+u^2v^2+2u^2z+2uvz+z^2$. Ecco il processo dell'operazione

$$(p)\quad u^4+2u^3v+u^2v^2+2u^2z+2uvz+z^2 \;\Big\}\; \text{Radice } u^2+uv+z$$

$$-u^4$$

$$(r_1)\quad 2u^3v+u^2v^2+2u^2z+2uvz+z^2$$

$$-2u^3v-u^2v^2$$

$$(r_2)\quad 2u^2z+2uvz+z^2$$

$$-2u^2z-2uvz-z^2$$

$$0$$

(46) *Si giunge a questo risultamento stabilendo*

$$(1-z+z^2-z^3+\ldots)^n=[1-z(1-z+z^2-z^3+\ldots)]^n,$$

Ordinato cioè (p) rispetto alla lettera per es. u (§. 104), si estragga la radice quadrata dal primo termine u^4; si avrà $\sqrt{u^4} = u^{\frac{4}{2}} = u^2$, primo termine della cercata radice: scrivasi u^2 in radice, e si tolga da (p) il quadrato di u^2; sarà (r_1) il residuo, il cui primo termine $2u^3v$ si divida pel doppio del termine trovato u^2; il quoto sarà uv, che dovrà scriversi accanto allo stesso u^2 per secondo termine della cercata radice. Il nuovo termine uv della radice si moltiplichi e pel doppio del primo u^2, e per se stesso; il prodotto poi $uv(2u^2 + uv)$ sottraggasi da (r_1). Se non resterà nulla, sarà certo (§. 109.g) $u^2 + uv$ la radice quadrata del polinomio (p): ma tutto ciò sottratto da (p) ancora resta (r_2), segno cioè che la radice non risulta di solo due termini. Laonde si avrà il terzo (§. 109.g') dividendo il primo termine $2u^2z$ del residuo (r_2) pel doppio del primo termine u^2 della parte già trovata $u^2 + uv$, e scrivendo in radice il quoto z. Si moltiplichi ora z pel doppio di $u^2 + uv$, e per se stessa, per togliere da (r_2) il prodotto $z(2u^2 + 2uv + z)$. Se nascesse un' altro residuo (r_3), si otterrebbe collo stesso metodo (§. 109 . g') da (r_3) il quarto termine della radice, mediante u^2+uv+z; e così appresso. Ma nell'attual caso abbiamo $(r_3) = 0$; laonde (§. 95)

$$\sqrt{(p)} = \pm (u^2 + uv + z).$$

Di quì (§. 98 : 90 . 2°) i due valori della potenza $(p)^{\frac{2m+1}{2}}$ (47),

$$(u^2 + uv + z)^{2m+1}, \quad -(u^2 + uv + z)^{2m+1}.$$

114

Si cerca $\sqrt{1 + z}$. Abbiamo

sviluppando questa potenza, non che quelle del polinomio $(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots)$ *nate dallo sviluppo della prima; e poscia sommando fra loro i termini che abbracciano potenze identiche della* z.

(47) *Al numeratore dell'esponente di* (p) *si è data la forma* $2m + 1$, *affinchè l' esponente medesimo fosse ridotto all' espressione frazionaria la più semplice* (§. 99).

$$(p) \qquad 1 + z\left\{1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4} - \frac{5z^4}{2^7} + \ldots\right.$$

$$(r_1) \qquad \frac{-1}{z}$$

$$(r_2) \qquad \frac{-z - \frac{z^2}{2^2}}{-\frac{z^2}{2^2}}$$

$$(r_3) \qquad \frac{+\frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} - \frac{z^4}{2^6}}{\frac{z^3}{2^3} - \frac{z^4}{2^6}}$$

$$(r_4) \qquad \frac{-\frac{z^3}{2^3} - \frac{z^4}{2^4} + \frac{z^5}{2^6} - \frac{z^6}{2^8}}{-\frac{5z^4}{2^6} + \frac{z^5}{2^6} - \frac{z^6}{2^8}}$$

eccetera . . .

In questo esempio può l'operazione continuarsi all'infinito, e poichè

$$(1 + z) - 1^2 = (r_1) \quad , \quad (1 + z) - (1 + \frac{z}{2})^2 = (r_2) \quad , \quad (1 + z)$$

$$-(1+\frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^3})^2 = (r_3) \quad , \quad (1 + z) - (1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4})^2 = (r_4) \, ,$$

eccetera . . . . .

perciò se i residui (r_1), (r_2), (r_3) . . . decresceranno per modo che (r_n), crescendo n oltre qualunque dato numero quanto si voglia grande, sempre più si accosti allo zero, sarà nel limite (§.106)

$$(1 + z) - (1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^3} + \ldots)^2 = 0 \, ,$$

ovvero

$$1 + z = \left(1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^3} + \ldots\right)^2,$$

e conseguentemente

$$\sqrt{1 + z} = \pm\left(1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4} - \ldots\right).$$

Questa serie medesima nasce dalla (*e* . §. 110), preso $n = \frac{1}{2}$.

115

Propongasi ad estrarre la radice cubica dal polinomio

$$u^6 + 3u^5v + 3u^4v^2 + u^3v^3 + 3u^2v^2z + 3uvz^2 + z^3 + 3u^4z + 6u^3vz + 3u^2z^2;$$

ordinato per u, sarà

$$(p)\ \left\{\begin{array}{l} u^6 + 3u^5v + 3u^4v^2 + u^3v^3 + 3u^2v^2z + 3uvz^2 + z^3 \\ \qquad + 3u^4z + 6u^3vz + 3u^2z^2 \end{array}\right\}\ u^2 + uv + z$$

$$\begin{array}{l} -u^6 \\ \hline (r_1)\ \left\{\begin{array}{l} 3u^5v + 3u^4v^2 + u^3v^3 + 3u^2v^2z + 3uvz^2 + z^3 \\ \qquad + 3u^4z + 6u^3vz + 3u^2z^2 \end{array}\right. \\ -3u^5v - 3u^4v^2 - u^3v^3 \\ \hline (r_2)\ \left\{\begin{array}{l} 3u^4z + 6u^3vz + 3u^2v^2z + 3uvz^2 + z^3 \\ \qquad + 3u^2z^2 \end{array}\right. \\ -3u^4z - 6u^3vz - 3u^2v^2z - 3uvz^2 - z^3 \\ \qquad - 3u^2z^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Estratta cioè la radice cubica dal primo termine u^6 del polinomio (p), si avrà (§. 91) il primo termine $\sqrt[3]{u^6} = u^{\frac{6}{3}} = u^2$

della cercata radice, e sottrattone il cubo da (p), resterà (r_1). Diviso il primo termine $3u^5v$ del residuo (r_1) pel triplo quadrato $3u^4$ della trovata radice, ne porgerà uv per secondo termine della radice cercata. Il prodotto del triplo quadrato dello stesso u^2 in uv è $3u^5v$; il prodotto del triplo di u^2 nel quadrato di uv è $3u^4v^2$; il cubo di uv è u^3v^3. Laonde (§. 109.g) dovrà sottrarsi $3u^5v + 3u^4v^2 + u^3v^3$ da (r_1). Il primo termine del nuovo residuo (r_2) è $3u^4z$; il quadrato $(u^2 + uv)^2$ ha per primo termine u^4, e diviso quel $3u^4z$ pel triplo $3u^4$ di questo, si otterrà (§. 109 . g') il terzo termine z della cercata radice. Il triplo prodotto di $(u^2 + uv)^2$ in z è $3u^4z + 6u^3vz + 3u^2v^2z$, il triplo prodotto di $u^2 + uv$ in z^2 è $3u^2z^2 + 3uvz^2$, il cubo di z è z^3; e poichè sottratti tutti questi termini da (r_2) non resta nulla, perciò

$$\sqrt[3]{(p)} = u^2 + uv + z.$$

Inoltre abbiamo ancora (§. 98 e 109 . g'')

$$\sqrt[3]{(p)} = \frac{-1 + 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}(u^2 + uv + z),$$

$$\sqrt[3]{(p)} = \frac{-1 - 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}(u^2 + uv + z).$$

Di qui derivano facilmente (§. 90 . 2°) i tre valori della potenza $(p)^{\frac{3m\pm1}{3}}$ (48),

$$(u^2+uv+z)^{3m\pm1},$$

$$\left[\frac{-1 + 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}(u^2 + uv + z)\right]^{3m\pm1},$$

$$\left[\frac{-1 - 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}(u^2 + uv + z)\right]^{3m\pm1}.$$

(48) *Al numeratore dell'esponente di* (p) *si è data la forma* $3m \pm 1$, *perchè l'esponente stesso frazionario fosse ridotto alla espressione la più semplice* (§. 99).

Non altro fa d' uopo per intendere in qual modo possa estrarsi la radice 4^a, 5^a . . . dai polinomi. Generalmente troveremo il primo termine della radice n^{ma}, estraendo (§. 91) la radice n^{ma} dal primo termine del polinomio, poi continueremo l' operazione moltiplicando per n la potenza $\overline{n-1}^{ma}$ del primo termine della trovata radice e dividendo per questo prodotto il primo termine di ciascun residuo; quindi espressa con H tutta la radice avanti ottenuta, e con K la nuova parte di essa, rappresentata dal quoto risultante da quella divisione, dovrà da quel medesimo residuo sottrarsi (§. 110. $e'.e''$) il polinomio

$$nH^{n-1}K + \frac{n(n-1)}{2}H^{n-2}K^2 + \ldots + K^n.$$

Si applica lo stesso metodo alla estrazione delle radici numeriche.

Suppongasi che il numero intero M risulti di m note. Poichè (§. 111. III.° e^{IV}) 10^m è il minimo degli interi composti di $m+1$ note, e 10^{m-1} è il minimo degl'interi composti di m note, perciò la potenza M^n nè potrà giungere (§. 25) a 10^{mn}, nè esser minore di $10^{(m-1)n}$. Ma (111. III.° e^{IV}) 10^{mn} è il minimo degli interi composti di $mn+1$ note, e $10^{(mn-1)n}$ è il minimo degl'interi che hanno $(m-1)n+1$ note; dunque le note di cui risulta M^n nè ponno essere più di mn, nè meno di $mn-(n-1)$. Laonde se M^n, cominciando dalle unità, si divida in classi ciascuna di n cifre; lasciando poi che l' ultima classe a sinistra risulti delle note che avanzeranno, sieno pur queste di numero eguali o minori di n; certamente si otterranno m classi, tante cioè quante sono le cifre del numero M.

Di qui manifestamente si deduce, che dato un numero intero P, dal quale debba estrarsi la radice n^{ma}, se partendo dalle unità, si divida P in classi ciascuna delle quali contenga n cifre, lasciando all' ultimo periodo quelle che avanze-

ranno . . . . , e si ottengano k classi , tante al certo saranno le cifre intere della cercata radice , quante le unità di k. Debba per es. estrarsi la radice quadrata del numero 18738872 1 : il medesimo dovrà dividersi a questo modo 1/87/38/87/21 , e la cercata radice avrà cinque cifre. Che se dallo stesso numero debba estrarsi la radice quarta , esso dovrà dividersi così 1/8738/8721, e la radice stessa comprenderà tre cifre.

118

Riguardate adunque le cifre intere soltanto , e queste rappresentate con a , b , c . . . z , sarà (§. 111 . III.° $e^{l\nu}$)

$$\sqrt[n]{\mathrm{P}} = 10^{k-1}a + 10^{k-2}b + 10^{k-3}c + \ldots + z.$$

Inoltre (§. 24 : 25)

$(10^{k-1}a)^n = a^n \,.\, 10^{kn-n}$, $n(10^{k-1}a)^{n-1} \,.\, 10^{k-2}b =$

$na^{n-1}b \,.\, 10^{kn-n-1}$, $(10^{k-1}a + 10^{k-2}b)^n = (10a+b)^n \,.\, 10^{kn-2n}$,

$n(10^{k-1}a + 10^{k-2}b)^{n-1} \,.\, 10^{k-3}c = n(10a+b)^{n-1}c \,.\, 10^{kn-2n-1}$,

$(10^{k-1}a + 10^{k-2}b + 10^{k-3}c)^n = (10^2a + 10b + c)^n \,.\, 10^{kn-3n}$,

$n(10^{k-1}a + 10^{k-2}b + 10^{k-3}c)^{n-1} \,.\, 10^{k-4}d =$

$n(10^2a + 10b + c)^{n-1}d \,.\, 10^{kn-3n-1}$,

$(10^{k-1}a + 10^{k-2}b + 10^{k-3}c + 10^{k-4}d)^n =$

$(10^3a + 10^2b + 10c + d)^n \,.\, 10^{kn-4n}$, eccetera.

Da ciò facilmente si deduce 1.° che la potenza n^{ma} della prima cifra a della radice n^{ma}, da estrarsi dal numero P, è compresa tutta nell'ultima classe a sinistra dello stesso P ; 2.° che la potenza $\overline{n-1}^{ma}$ dello stesso a , moltiplicata per n e per la seconda cifra b della radice , non oltrepassa la prima cifra della seconda classe , a contare da sinistra ; 3.° che la potenza n^{ma} della parte $\overline{10a+b}$ non va oltre la seconda classe ; 4° che la potenza $\overline{n-1}^{na}$ dalla stessa $10a+b$, moltiplicata per n e

per la terza cifra c della radice, non si estende oltre la prima cifra della terza classe; 5.° che la potenza n^{ma} della parte $10^2a + 10b + c$ non oltrepassa la terza classe; ecc. (49).

119

Conosciute (§. 65) le potenze delle cifre 1, 2, 3, 4 ... 9, conseguiremo tosto la prima nota a della radice n^{ma} da estrarsi dal numero P; poichè (§. 118. 1.°) la potenza a^n o costituisce l'ultima classe a sinistra del numero P, o è la massima fra le potenze n^{me} d'interi, le quali si contengono in quella classe. Le altre cifre b, c, d . . . si ottengono manifestamente con lo stesso metodo, che indicammo (§. 116); purchè le divisioni e le rispondenti sottrazioni si eseguiscano soltanto nelle debite note (§. 118) dei residui.

Qui ancora dobbiamo notare quello stesso che già osservammo (§. 44) nella divisione. Se la potenza $\overline{n-1}^{ma}$ della radice già ottenuta moltiplicata per n, porgerà un prodotto maggiore del numero che per esso deve dividersi, sarà = o la corrispondente cifra della radice.

120

Facciasi $P \cdot 10^{hn} = P'$; sarà

(49) *Infatti, a contar sempre dalla destra, 1.° la potenza* a^n *essendo moltiplicata per* $10^{(k-1)n}$, *sarà seguita da* $(k-1)n$ *zeri, che occuperanno* $k-1$ *classi di* P: *2.° il prodotto* $na^{n-1}b$ *essendo moltiplicato per* $10^{(k-1)n-1}$, *sarà seguito da* $(k-1)n-1$ *zeri, che occuperanno* $k-1$ *classi, eccettuata l'ultima sede dell'ultima di queste classi*: *3.° il prodotto* $(10a+b)^n$ *essendo moltiplicato per* $10^{(k-2)n}$ *sarà seguito da* $(k-2)n$ *zeri, che occuperanno* $k-2$ *classi medesime*: *4.° il prodotto* $n(10a+b)^{n-1}c$ *essendo moltiplicato per* $10^{(k-2)n-1}$ *sarà seguito da* $(k-2)n-1$ *zeri, che occuperanno* $k-2$ *classi suddette, esclusa l'ultima sede dell'ultima di queste classi*: *eccetera . . . .*

$$P = \frac{P'}{10^{hn}}, \text{ e } (\S.\ 71 : 28)\ \sqrt[n]{P} = \frac{\sqrt[n]{P'}}{10^{h}}.$$

Quante volte cioè dall' ultima sottrazione si ottenga un residuo, potrà mediante un' opportuna giunta di zeri (50), continuarsi l' operazione in decimali quanto si vorrà; e la stessa $\sqrt[n]{P}$ risulterà di k cifre intere, e di h decimali.

121

Pongasi che il numero P, dal quale deve estrarsi la radice n^{ma}, oltre le k classi di cifre intere (§. 117) abbia ancora delle cifre decimali. Certamente il numero di queste si potrà, salvo il valore, aumentare aggiungendo dei zeri (§. 56), se faccia d'uopo, in guisa da ridurlo ad rn; e soppressa la virgola (§. 7) si convertirà P in un intero Q di $k + r$ classi: saranno adunque $k + r$ le cifre intere in $\sqrt[n]{Q}$; e poichè $P = \frac{Q}{10^{rn}}$, perciò (§.71:28) $\sqrt[n]{P} = \frac{\sqrt[n]{Q}}{10^{r}}$. Cioè le r cifre a destra in $\sqrt[n]{Q}$ porgeranno altrettante cifre decimali in $\sqrt[n]{P}$ (51).

---

(50) *La giunta dei zeri da farsi al residuo, per continuare in decimali l'estrazion di radice, consiste nell'apporre al medesimo un numero di zeri sempre multiplo del grado della radice che si estrae.*

(51) *Siegue da ciò che per estrarre la radice dalle frazioni decimali, o dai numeri composti d'interi e decimali, dovrà con una giunta di zeri* (§. 56) *sempre ridursi il numero delle cifre decimali ad esser multiplo del grado della radice che si cerca.*

Premesse queste cose, è manifesto come debba operarsi perchè non resti nulla in fine della operazione, quante volte la radice possa esattamente ottenersi, e perchè, ove ciò non abbia luogo, resti un numero all' infinito decrescente, e si progredisca sempre più verso il vero valore della radice (§. 68 : 114). Ecco gli esempi della radice quadrata, e cubica.

I.° Sieno $n = 2$, P $= 56169$, e perciò $k = 3$. Avuto riguardo soltanto alle cifre intere, sarà (§. 118)

$$\sqrt{56169} = 10^2a + 10b + c.$$

$$\begin{array}{r|l} 5/61/69 & 237 \\ \hline 4 & \\ \hline 16/1 & \\ 129 & \\ \hline 326/9 & \\ 3269 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

La massima potenza d' interi fra quelle che sono di secondo grado, e si contengono nell' ultima classe a sinistra, è 4 : quindi (§. 119) $a^2 = 4$, $a = 2$. Sottratto $a^2(=4)$ da quella classe, resta 1, a cui unita (§. 118.2°) la prima cifra 6 della classe prossima seguente, nascerà il numero 16, da dividersi per $2a(=4)$ per ottenere b : ma non può assumersi (§. 118 . 3°) $b = \frac{16}{4} = 4$, imperocchè $4(2.10a + 4) = 176 > 161$; e poichè preso il numero prossimamente minore 3, emerge $b(2.10a+b) < 161$, perciò $b = 3$. Sottratto 129 da 161, il residuo è 32, al quale unita la prima cifra 6 della terza classe (§. 118 . 4°), si otterrà il numero 326, da dividersi per $2(10a + b) = 46$, per ottenere la terza cifra c della radice. Il quoto 7 somministra il numero $c(2.10^2a + 2.10b + c) = 3269$, non maggiore di quello da cui deve sottrarsi (§. 118.5°) ; perciò $c = 7$: e poichè dopo compiuta la sottrazione non resta nulla, ciò sarà indizio che la cercata radice risulta solamente di cifre intere, e che è precisamente $= 237$.

II.° $n = 2$, e P $= 38068{,}692544$, onde (§. 120) $r = 3$, Q $= 38068692544$; ed avuto riguardo alle sole cifre intere (§. 118),

$$\sqrt{Q} = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f.$$

Ora

$a = 1$, $2a = 2$, $b = 9$, $b(2.10a + b) = 261$, $2(10a + b) = 38$, $c = 5$, $c(2.10^2a + 2.10b + c) = 1925$, $2(10^2a+10b+c) = 390$, $d = 1$, $d(2.10\,a + 2.10^2b + 2.10c + d) = 3901$, $2(10^3a + 10^2b+10c+d) = 3902$, $e = 1$, $e(2.10^4a + 2.10^3b + 2.10^2c + 2.10c + e) = 39021$, $2(10^4a + 10^3b +10^2c+10d + e) = 39022$, $f = 2$,

$f(2.10^5a + 2.10^4b + 2.10^3c + 2.10^2d + 2.10e + f) = 780444$,

$3/80/68/69/25/44 \Big\} 195112$

1

28/0

26 1

1 96/8

1 92 5

4 36/9

3 90 1

46 82/5

39 02 1

7 80 44/4

7 80 44 4

0

e niente avanza dall' ultima sottrazione. Dunque la $\sqrt{P'}$ risulterà soltanto di cifre intere, e sarà $\sqrt{Q} = 195112$, e conseguentemente

$$\sqrt{P} = \frac{\sqrt{Q}}{10^3}, \text{ cioè } \sqrt{38068,692544} = 195,112 \quad (52).$$

III.° $n = 3$, $P = 143877824$, onde (§. 117) $k = 3$, e (§. 118)

$$\sqrt[3]{P} = 10^2a + 10b + c.$$

Ma (§. 119)

---

(52) *Per eseguire speditamente l' estrazione della radice quadrata si osservi che, dopo sottratto il quadrato della sua prima cifra, qualunque sottraendo nasce apponendo all'ultimo divisore l' ultima cifra della radice trovata, e moltiplicando per questa cifra il numero così formato. Ripresi gli esempi sopra esposti, vediamo la pratica di questa regola.*

$a^3 = 125$, $a = 5$, $3a^2 = 75$,

$b = 2$, $3.10^2a^2b + 3.10ab^2$

$+ b^3 = 15608$, $3(10a + b)^2 = 8112$,

$c = 4$, $3(10^2a + 10b)^2c + 3(10^2a$

$+ 10b)c^2 + c^3 = 3269824$,

143/877/824 ⟩ 524
125

188/77
156 08
---
32 698/24
32 698 24

0

e non avanza verun residuo dall' ultima sottrazione. Dunque

$$\sqrt[3]{143877824} = 524 \quad (53).$$

IV.° Sieno finalmente $n = 3$, $P = 74394516$; si avranno

5/61/69 | 237
4
---
4) 16/1
129
---
46) 3 26/9
3 269

0

43 467
3 7
---
129 3269

3/80/68/69/25/44 | 195112
1
---
2) 28/0
261
---
38) 196/8
1925
---
390) 436/9
3901

3902) 4682/5
39021

39022) 78044/4
780444

0

29 385
9 5
---
261 1925

39011 39021
1 1

39011 39021

390222
2

780444

(53) *Si osservi che nella estrazione della radice cubica, dopo sottratto il cubo della sua prima cifra, qualunque sottraendo si compone sommando fra loro il divisore ultimo, il triplo prodotto della radice trovata (tranne l'ultima sua cifra) per questa cifra medesima, il quadrato della cifra stessa; e moltiplicando tal somma per essa cifra.*

$a^3 = 64$, $a = 4$,
$3a^2 = 48$, $b = 2$,
$3.10^2a^2b + 3.10ab^2$
$+ b^3 = 10088$, $3(10a$
$+ b)^2 = 5292$, $c = 0$,
$3(10^2a + 10b)^2c$
$+ 3(10^2a + 10b)c^2$
$+ c^3 = 0.$

74/394/516/000/000/.. } 42057..
64
103/94
100 88
3 065/16
3065 160/00
2649 151 25
416 008 750/00
371 384 341 93
44 624 408 07 eccetera . . .

Dall' ultima sottrazione avanza il numero 306516; perciò continuando l' operazione (§. 120) otterremo

$3(10^2a + 10b + c)^2 = 529200$, $d = 5$
$3(10^3a + 10^2b + 10c)^2d + 3(10^3a + 10^2b$
$+ 10c)d^2 + d^3 = 264915125$,

Seguendo questa pratica l'estrazione della radice cubica sarà molto spedita : vediamolo riprendendo gli esempi sopra esposti.

143/877/824	524		
125	75	8112	
75) 188/77	30	624	
15608	4	16	
8112) 32698/24	7804	817456	
32698 24	2	4	
0	15608	3269824	

$3(10^3a + 10^2b + 10c + d)^2 = 53046075$, $e = 7$,

$3(10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d)^2e$

$+ 3(10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d)e^2 + e^3 = 3713843419 3$,

eccetera . . . .

Sarà cioè

$\sqrt[3]{P'} = 42057 \ldots$; onde $\sqrt[3]{P} = 420{,}57 \ldots$ (54).

74/394/516/000/000 | 42057

64

48) 103/94 | 48 — 529200 — 24 — 6300 — 4 — 25

100 88

5292) 3 065/16 | 5044 — 52983025 — 2 — 5 | 10088 — 264915125

529200) 3065160/00

2649151 25

53046075) 416008 750/00 | 53046075 — 88305 — 49 | 5305490599 — 7 | 37138434193

371384 341 93

44624 408 07

(54) *Propongasi per un altro esempio ad estrarsi la radice 4.ª dal numero* 337340256 1 ; *avremo*

$$\sqrt[4]{Q} = 10^3a + 10b + c$$

Si propongono alcune generali osservazioni.

123

Qualunque termine, col segno cangiato può trasportarsi, salva la eguaglianza, dall' uno nell'altro membro di un' equazione: poichè ciò manifestamente si riduce a sommare o sottrarre da ambo i membri la stessa quantità (§. 82). Per siffatto trasporto possono i termini tutti di un'equazione in un sol membro collocarsi, cosicchè nell' altro solo rimanga lo zero.

124

Nella equazione

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Hx + K = 0$$

$a^4 = 16$, $a = 2$, $4a^3 = 32$, $b = 4$

$$\begin{array}{rl} 4a^3b & = 128 \\ 6a^2b^2 & = 384 \\ 4a\,b^3 & = 512 \\ b^4 & = 256 \\ \hline & 171776 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 33|7340|2561 \\ 16 \\ \hline 177|340 \\ 171776 \\ \hline 55642|561 \\ 55642\ 561 \\ \hline 0 \end{array} \Big\} 241$$

$4(10a+b)^3 = 55296$, $c = 1$

$$\begin{array}{rl} 4(10a+b)^3c & = 55296 \\ 6(10a+b)^2c^2 & = 3456 \\ 4(10a+b)\,c^3 & = 96 \\ c^4 & = 1 \\ \hline & 55642561 \end{array}$$

si denotino con A, B, C . . . H, K delle quantità date, reali, o immaginarie, (diconsi coefficienti de'termini ai quali appartengono) per n un numero intero e positivo, e per x una incognita da determinarsi per modo, che verifichi l' equazione. Posto ciò allora diciamo che *risolvesi* una equazione quando vengono effettivamente a determinarsi i valori della incognita x: questi valori si chiamano *radici* della equazione, che dicesi del grado medesimo al quale ascende la massima potenza della incognita, cioè del grado n^{mo}. Così l' equazione $x^3 - 2x + 4 = 0$ sarà del terzo grado; e siccome dal prendere od

$$x = -2 \text{ , od } x = 1 + \sqrt{-1} \text{ , od } x = 1 - \sqrt{-1}$$

la medesima è soddisfatta (55), perciò

$$-2 \text{ , } 1 + \sqrt{-1} \text{ , } 1 - \sqrt{-1}$$

diconsi le sue radici, la prima reale, l' altre immaginarie.

Facciansi

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = A_2 + B_2\sqrt{-1},$$

$$(A_2 + B_2\sqrt{-1})(e + f\sqrt{-1}) = A_3 + B_3\sqrt{-1},$$

$$(A_3 + B_3\sqrt{-1})(g + h\sqrt{-1}) = A_4 + B_4\sqrt{-1},$$

eccetera . . . . .

$$(A_{n-1} + B_{n-1}\sqrt{-1})(u + v\sqrt{-1}) = A_n + B_n\sqrt{-1} \quad (56);$$

si avranno (§. 102 : 103. g) le

(55) *Qualunque di questi tre valori si ponga in luogo della* x *nella citata equazione, il suo primo membro, eseguite tutte le operazioni, sarà di per se nullo, nel che la verificazione consiste dell' equazione medesima.*

(56) *Queste eguaglianze s' intenderanno facilmente se si rifletta che il prodotto di due o più immaginarie si riduce* (§. 102) *alla forma* $A + B\sqrt{-1}$.

$$A_2^2 + B_2^2 = (a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2)\,,$$

$$A_3^2 + B_3^2 = (A_2^2 + B_2^2)\,(e^2 + f^2)\,,$$

$$A_4^2 + B_4^2 = (A_3^2 + B_3^2)\,(g^2 + h^2)\,,$$

eccetera . . . .

$$A_n^2 + B_n^2 = (A^2_{n-1} + B^2_{n-1})\,(u^2 + v^2)\ (57)\,;$$

onde generalmente avremo

$$A_n^2 + B_n^2 = (a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2)\,\ldots\,(u^2 + v^2) \quad [l].$$

Ma non può essere

$$A_n + B_n\sqrt{-1} = 0\,,$$

senza che sia nel medesimo tempo

$$A_n = 0\ ,\ B_n = 0\ ,\ \text{cioè}\ A_n^2 + B_n^2 = 0\,,$$

(57) *Tali equazioni si ottengono, istituendo per ognuna un calcolo simile a quello istituito, per ottenere la* (g) *del* §. 103. *Infatti volendo calcolare la prima sarà*

$$(a + b\sqrt{-1})\,(c + d\sqrt{-1}) = ac - bd + (bc + ad)\sqrt{-1}$$

$$(a - b\sqrt{-1})\,(c - d\sqrt{-1}) = ac - bd - (bc + ad)\sqrt{-1}\,;$$

e fatto in queste

$$ac - bd = A_2$$

$$bc + ad = B_2\,,$$

si moltiplichino fra loro; avremo per prodotto

$$(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2) = A_2^2 + B_2^2\,:$$

similmente si otterranno le altre. Dal prodotto poi di tutte si otterrà la [*l*], *come dal prodotto delle presupposte si otterrebbe la*

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1})(e + f\sqrt{-1})\,\ldots\,(u + v\sqrt{-1}) = A_n + B_n\sqrt{-1}.$$

e perciò se non si annulli qualcuno dei binomi

$$a^2 + b^2 \ , \ c^2 + d^2 \ , \ e^2 + f^2 \ , \ldots . \ u^2 + v^2 .$$

Quindi siegue che non si annullerà un prodotto di più fattori immaginari, se qualcuno di essi non si annulla (58).

126

Nella equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

può il primo termine spogliarsi del coefficiente a_0, qualunque nel resto sieno le a_0 , a_1 , a_2 . . . a_{n-1} , a_n. Poichè fatto

$$\frac{a_1}{a_0} = \mathrm{A} \ , \ \frac{a_2}{a_0} = \mathrm{B}, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_0} = \mathrm{H} \ , \ \frac{a_n}{a_0} = \mathrm{K},$$

ovvero

$$a_1 = a_0 \mathrm{A} \ , \ a_2 = a_0 \mathrm{B} \ , \ldots a_{n-1} = a_0 \mathrm{H} \ , \ a_n = a_0 \mathrm{K},$$

potrà quella equazione scriversi nel modo seguente

$$a_0 (x^n + \mathrm{A} x^{n-1} + \mathrm{B} x^{n-2} + \ldots + \mathrm{H} x + \mathrm{K}) = 0.$$

Ma non è $a_0 = 0$, da che altrimenti non sarebbe $a_0 x^n$ il primo termine della equazione, dovrà essere dunque (§. 125)

(58) *Infatti chiaramente apparisce che* $A_n + B_n \sqrt{-1}$, *prodotto di fattori immaginari, non può annullarsi se non si annullano separatamente* A_n, B_n, *ovvero* $A_n^2 + B_n^2$, *o finalmente se non si annulla* [*l*], *ma per ciò necessita l' annullamento di uno de' suoi fattori, lo che importa l' annullamento di uno dei fattori del prodotto* $A_n + B_n \sqrt{-1}$; *dunque l' annullamento di un prodotto di fattori immaginari esige che uno di questi sia nullo.*

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Hx + K = o\,,$$

perciò eccetera . . . (59).

127

Se due equazioni contengono qualche grandezza ω elevata a potenze di esponente intero, e debbano ambedue verificarsi pel medesimo valore della stessa ω, potrà da queste dedursi una terza equazione del tutto priva di quella grandezza. Gli esempi porranno ciò in chiaro.

I.° Sieno

$$\omega + P = o\,,\ \omega + P' = o.$$

Fatta la sottrazione, sarà

$$P - P' = o.$$

Così date le

$$a\omega + bv - c^2 = o\,,\ h\omega - kv - r^2 = o\,;$$

saranno

$$P = \frac{bv - c^2}{a}\,,\ P' = -\frac{kv + r^2}{h}\,,$$

e perciò

$$\frac{bv - r^2}{a} + \frac{kv + r^2}{h} = o.$$

Trattando le proposte equazioni a questo modo, si viene ad *eliminare* ω dalle medesime.

---

(59) *Perciò data una equazione potremo sempre trasformarla in un'altra, il primo termine della quale abbia per coefficiente la unità. Di questa forma di equazioni sempre si farà uso in appresso.*

II.° Sieno

$$\omega^2 + P\omega + Q = 0 \ , \ \omega^2 + P'\omega + Q' = 0.$$

Fatta la sottrazione , nascerà

$$(P-P)\,\omega + Q - Q' = 0 \ , \text{ ovvero } \ \omega + \frac{Q-Q'}{P-P'} = 0 \ . \ . \ . \ . \ (\Delta).$$

Si moltiplichi (Δ) per ω , cosicchè sia

$$\omega^2 + \frac{Q-Q'}{P-P'}\,\omega = 0 \ ,$$

questa sottratta dall' una o dall' altra delle date , per es. dalla prima , darà

$$\left(P - \frac{Q-Q'}{P-P'}\right)\omega + Q = 0 \ , \text{ ovvero } \ \omega + \frac{Q}{P - \frac{Q-Q'}{P-P'}} = 0 \ldots (\Delta').$$

Ora (Δ) , (Δ') Somministrano

$$(\Delta) - (\Delta') = 0 \ ,$$

nella quale manca ω. Così date le

$$\omega^2 - v\omega + v^2 = 0 \ , \ \omega^2 - av + a^2 = 0 \ ,$$

saranno

$$P = -v \ , \ Q = v^2 \ , \ P' = 0 \ , \ Q' = -av + a^2 \ ,$$

e perciò

$$(\Delta) = \omega - \frac{v^2 + av - a^2}{v} = 0 \quad , \quad (\Delta') = \omega + \frac{v^3}{av - a^2} = 0 \ ,$$

$$(\Delta) - (\Delta') = -\frac{v^2 + av - a^2}{v} - \frac{v^3}{av - a^2} = 0 \ ,$$

ovvero

$$v^4 + av^3 - 2a^3v + a^4 = 0.$$

Che se si dessero

$$\omega^2 - \nu^2 - k^2 = 0 \ , \ \omega\nu - h^2 = 0 \ ,$$

primieramente si ridurrebbe la seconda alla forma

$$\omega^2 - \frac{h^2\omega}{\nu} = 0 \ ,$$

moltiplicandola per ω, e dividendola per ν; di poi si avrebbero

$$P = 0 \ , \ Q = -\nu^2 - k^2 \ , \ P' = -\frac{h^2}{\nu} \ , \ Q' = 0 \ ,$$

onde

$$(\Delta) - (\Delta') = -\frac{\nu(\nu^2 + k^2)}{h^2} + \frac{h^2}{\nu} = 0 \ ,$$

ovvero

$$\nu^4 + k^2\nu^2 - h^4 = 0.$$

III.° Generalmente se propongonsi le

$$\omega^n + P\omega^{n-1} + Q\omega^{n-2} + R\omega^{n-3} + \ldots + U\omega + V = 0 \ldots (\delta)$$

$$\omega^n + P'\omega^{n-1} + Q'\omega^{n-2} + R'\omega^{n-3} + \ldots + U'\omega + V' = 0 \ldots (\delta') \ ,$$

avremo

$$(\delta) - (\delta') = (P - P')\omega^{n-1} + (Q - Q')\omega^{n-2} + (R - R')\omega^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + (U - U')\omega + V - V' = 0 \ldots (\delta'') \ ,$$

e fatto per compendio

$$\frac{Q - Q'}{P - P'} = Q_1 \ , \ \frac{R - R'}{P - P'} = R_1 \ \ldots \ \frac{U - U'}{P - P'} = U_1 \ , \ \frac{V - V'}{P - P'} = V_1 \ ,$$

sarà

$$\frac{(\delta'')}{P - P'} = \omega^{n-1} + Q_1\omega^{n-2} + R_1\omega^{n-3} + \ldots + U_1\omega + V_1 = 0 \ldots (\delta''') \ ;$$

inoltre

$$(\delta''') \cdot \omega = \omega^n + Q_1\omega^{n-1} + R_1\omega^{n-2} + \ldots + V_1\omega = 0 \ldots (\delta^{IV}) \ ,$$

$$(\delta)-(\delta^{IV})=(P-Q_1)\omega^{n-1}+(Q-R_1)\omega^{n-2}+\ldots+(U-V_1)\omega+V=0\ldots(\delta^V);$$

e fatto

$$\frac{Q-R_1}{P-Q_1}=Q_2,\ldots\frac{U-V_1}{P-Q_1}=U_2,\ \frac{V}{P-Q_1}=V_2,$$

nascerà

$$\frac{(\delta^V)}{P-Q_1}=\omega^{n-1}+Q_2\omega^{n-2}+\ldots+U_2\omega+V_2=0\ldots(\delta^{VI})$$

Ora se le operazioni eseguite sopra la (δ) e (δ'), si rinnovassero sopra le (δ'') e (δ^{IV}), si otterrebbero due altre equazioni, nelle quali la potenza massima della quantità ω sarebbe indicata coll'esponente $n-2$. Nella stessa guisa dalle due nuove equazioni si perverrebbe ad altre due, nelle quali la potenza massima della stessa ω sarebbe espressa coll'esponente $n-3$, e così nel resto, finchè se ne otterrebbero due contenenti la sola potenza prima di ω, dalle quali finalmente dedurrebbesi (I°) una equazione affatto priva di quella grandezza (60).

---

(60) *Suppone questo metodo di eliminazione che le due proposte sieno dello stesso grado rispetto alla incognita da eliminarsi; circostanza che non verificandosi di per se, può agevolmente ottenersi, o come viene indicato dall' autore rispetto alle equazioni*

$$\omega^2-\nu^2-k^2=0\ ,\ \omega\nu-k^2=0;$$

o come siegue, abbassando cioè il grado di quella fra le due proposte che lo ha maggiore. Infatti pongasi che nelle proposte

$$(\delta)\ \omega^m+P\omega^{m-1}+Q\omega^{n-2}+\ldots+U\omega+V=0,$$

$$(\delta')\ \omega^n+P'\omega^{n-1}+Q'\omega^{n-2}+\ldots+U'\omega+V'=0,$$

abbiasi $m>n$, *cioè* $m=n+p$. *Moltiplicando la* (δ') *per*

Da tre equazioni possono eliminarsi due quantità, che in quelle si trovino combinate con altre quantità, e che si suppongano soddisfare, ciascuna con un valore medesimo, all'equazioni stesse. Abbiansi per es.

ω^p avremo

$$\omega^m + P'\omega^{m-1} + Q'\omega^{m-2} + \ldots + U'\omega^{p+1} + V'\omega^p = 0 ,$$

e dividendo questa equazione successivamente per le diverse potenze di ω, cioè per

$$\omega^0 , \omega^1 , \omega^2 , \omega^3 \ldots \omega^{p-1}$$

si avrà

$$\omega^m = -(P'\omega^{m-1} + Q'\omega^{m-2} + \ldots + U'\omega^{p+1} + V'\omega^p)$$

$$\omega^{m-1} = -(P'\omega^{m-2} + Q'\omega^{m-3} + \ldots + U'\omega^p + V'\omega^{p-1})$$

$$\omega^{m-2} = -(P'\omega^{m-3} + Q'\omega^{m-4} + \ldots + U'\omega^{p-1} + V'\omega^{p-2})$$

eccetera . . .

$$\omega^{m-p+1} = \omega^{n+1} = -(P'\omega^n + Q'\omega^{n-1} + \ldots + U'\omega^2 + V'\omega).$$

Ora è chiaro che sostituendo il valore di ω^{n+1} in quello di ω^{n+2}, questo nel valore di ω^{n+3}, e così continuando a sostituire fino ad ω^m, i valori di

$$\omega^m , \omega^{m-1} , \omega^{m-2} \ldots \omega^{n+2} , \omega^{n+1} ,$$

saranno espressi tutti con potenze di ω non maggiori della n^{ma}; e perciò sostituiti nella (δ) sarà il suo grado abbassato fino all' n^{mo}; e le due proposte (δ) (δ') avranno la incognita da eliminarsi elevata allo stesso esponente, quindi potranno assoggettarsi all' esposto metodo di eliminazione. Sia per esempio da eliminarsi la y dalle due seguenti equazioni

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0 ,$$

$$y^2 + A'y + B' = 0.$$

$$az + a'y + a''x + a''' = 0\,,$$

$$bz + b'y + b''x + b''' = 0\,,$$

$$cz + c'y + c''x + c''' = 0.$$

Combinando la prima colla seconda per eliminare la z, avremo (§. 127 I°)

$$P = \frac{a'y + a''x + a'''}{a}\,,\quad P' = \frac{b'y + b''x + b'''}{b}\,,$$

donde

$$\frac{a'y + a''x + a'''}{a} - \frac{b'y + b''x + b'''}{b} = 0.$$

Moltiplicando la seconda per y^2, *e poi dividendo come si è insegnato, avremo*

$$y^4 = -A'y^3 - B'y^2\,,\quad y^3 = -A'y^2 - B'y\,,$$

e quindi

$$y^4 = A'^2y^2 + A'B'y - B'y^2.$$

Laonde sostituiti questi valori nella prima delle proposte essa diverrà

$$[A'(A'-A) + B - B']y^2 + [B'(A'-A) + C]y + D = 0$$

che facilmente si riduce (§. 126) *alla seguente*

$$y^2 + My + N = 0.$$

Ora essendo le proposte ridotte al medesimo grado rapporto ad y, *potrà sulle medesime agevolmente praticarsi l' esposto metodo di eliminazione, il quale consiste.*

1.° *Nel ridurre le proposte allo stesso grado rapporto alla incognita da eliminarsi.*

2.° *Nel dividerle pel coefficiente del primo loro termine, e poscia sottrarle una dall'altra, per ottenere così una equazione di differenza col grado diminuito di uno.*

Combinando per lo stesso fine la prima colla terza avremo

$$P = \frac{a'y + a''x + a'''}{a} \quad , \quad P' = \frac{c'y + c''x + c'''}{c} \, ,$$

e conseguentemente

$$\frac{a'y + a''x + a'''}{a} - \frac{c'y + c''x + c'''}{c} = 0.$$

Per escludere ora la y dalle due nuove equazioni, abbiamo

$$P = \frac{\frac{a''x + a'''}{a} - \frac{b''x + b'''}{b}}{\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}} \quad , \quad P' = \frac{\frac{a''x + a'''}{a} - \frac{c''x + c'''}{c}}{\frac{a'}{a} - \frac{c'}{c}} \, ,$$

donde

$$P - P' = \ldots = 0 \quad (61).$$

---

3. *Nel dividere questa equazione di differenza pel coefficiente del suo primo termine, moltiplicandola poscia per la incognita stessa al primo grado, e quindi sottraendola da una delle proposte, per ottenere la seconda equazione di differenza, col grado anch'essa diminuito di uno.*

4.° *Nell'operare sulle ottenute due equazioni di differenza come si è fatto sulle proposte, per avere due altre equazioni, ambedue diminuite di uno nel grado. E' chiaro che seguitando ad operare in siffatta guisa, si giungerà ad una coppia di equazioni di differenza, nelle quali la incognita da eliminarsi sarà al primo grado, per cui agevolmente si otterrà la richiesta eliminazione.*

(61) *Ecco i valori delle tre incognite, dedotti dalle tre proposte col processo dimostrato, e gli studiosi potranno esercitarsi nel verificarli*

Generalmente da m equazioni possono eliminarsi $m-1$ quantità y, z, u, . . . Imperciocchè combinando la prima equazione colla seconda, terza, quarta . . . conseguiremo $m-1$ nuove equazioni prive affatto della quantità per es. y; queste potranno collo stesso artificio ridursi ad $m-2$ equazioni nelle quali manchi la z, e così appresso, finchè si giunga ad una sola equazione non contenente veruna delle $m-1$ quantità.

129

Di qui nasce il metodo generale per liberare una equazione dai termini radicali. Sia

$$p\sqrt[n]{x} + q\sqrt[n']{y} + r\sqrt[n'']{z} + \ldots = 0,$$

$$x = \frac{ab'c''' - ac'b''' + bc'a''' - ba'c''' + ca'b''' - cb'a'''}{ac'b'' - ab'c'' + ba'c'' - bc'a'' + cb'a'' - ca'b''}$$

$$y = \frac{ab'''c'' - ac'''b'' + bc'''a'' - ba'''c'' + ca'''b'' - cb'''a''}{ac'b'' - ab'c'' + ba'c'' - bc'a'' + cb'a'' - ca'b''}$$

$$z = \frac{a'''b'c'' - a'''c'b'' + b'''c'a'' - b'''a'c'' + c'''a'b'' - c'''b'a''}{ac'b'' - ab'c'' + ba'c'' - bc'a'' + cb'a'' - ca'b''}.$$

Osservando queste formule si rileva facilmente come da tre equazioni, simili alle proposte fra tre incognite, possano immediatamente dedursi i valori delle medesime. Poichè ciascuna incognita eguaglia una frazione col denominatore formato dalle sei permutazioni del ternario abc, per modo che in esse la seconda lettera porti un apice, la terza due, e i segni sieno alternatamente contrari. Il numeratore poi di ognuna si forma cangiando i segni a questo denominatore, e sostituendo al coefficiente della incognita cercata l'ultimo termine dell' equazione ad esso coefficiente relativa. Un canone simile serve alla determinazione di quante incognite si vogliano fra un egual numero di equazioni di primo grado.

la quale contenga m termini radicali. Si faccia

$$\sqrt[n]{x} = h \ , \ \sqrt[n']{y} = k \ , \ \sqrt[n'']{z} = l \ , \ \ldots \ ;$$

si avranno le seguenti $m + 1$ equazioni

$$ph + qk + rl + \ldots = 0 \ ,$$

$$x - h^n = 0 \ , \ y - k^{n'} = 0 \ , \ z - l^{n''} = 0 \ , \ \ldots \ ,$$

colle quali eliminate le m quantità h, k, l . . . , rimarrà una sola equazione senza termini radicali (62).

(62) *Per esercizio di calcolo propongasi a liberare dai radicali la equazione*

$$2\sqrt{ay} = \sqrt{ay^2 - b}.$$

Fatto

$$\sqrt{ay} = x \ , \ \sqrt[3]{ay^2} = z \ ,$$

avremo

$$(1) \ \ldots \ z - 2x - b = 0$$

$$(2) \ \ldots \ z^3 - ay^2 = 0$$

$$(3) \ \ldots \ x^2 - ay = 0 ,$$

equazioni dalle quali debbono eliminarsi la x e la z. Moltiplicando la (1) per z^2, e poi da questa sottratta la (2) avremo

$$z^2 - \frac{ay^2}{2x + b} = 0 \ ,$$

da cui sottraendo la (1) moltiplicata per z otterremo

$$z - \frac{ay^2}{(2x + b)^2} = 0 \ ,$$

Un' equazione dicesi *determinata* se contiene una sola incognita, *indeterminata* se ne contiene più, giacchè quella come vedremo ammette una, o un limitato numero di soluzioni, questa poi ne ammette infinite: al che si appartiene la soluzione de' problemi, ne' quali cioè date certe quantità si propone la ricerca di altre non date. Certo esprimendosi le condizioni de' problemi per mezzo di equazioni, può accadere che quelle sieno tante quante le incognite, o sieno meno, o sieno più.

Determinare due numeri, la somma de' quali sia $= a$, *e la differenza* $= b$. In questo problema si hanno due incognite x, y, e parimente due equazioni, cioè

$$x + y = a \ , \ x - y = b.$$

---

dalla quale sottratta la (1) *conseguiremo*

$$(2x + b)^3 - ay^2 = 0.$$

Da questa sottraendo la (3) *moltiplicata per* $8x$, *risulterà*

$$x^3 + \frac{(6b^2 + 8ay)x + b^3 - ay^2}{12b} = 0 \ ,$$

che diminuita della (3) *darà*

$$x + \frac{12aby + b^3 - ay^2}{6b^2 + 8ay} = 0.$$

Moltiplicando questa per x, *e poi sottrattane la* (3) *avremo*

$$x + \frac{ay(6b^2 + 8ay)}{12aby + b^3 - ay^2} = 0.$$

Finalmente sottraendo fra loro queste due ultime equazioni si otterrà

$$ay(8ay + 6b^2)^2 - (12aby + b^2 - ay^2)^2 = 0 \ ,$$

equazione tutta in y, *priva di termini radicali come si voleva.*

Si cercano due uumeri la somma de'quali sia $= c$. Quì si offrono due incognite x, y, e si ottiene solo una equazione

$$x + y = c.$$

Trovare due numeri x, y, *la somma de'quali sia* $= a$, *la differenza* $= b$, *ed il prodotto* $= c$. Qui abbiamo due incognite x, y, e tre equazioni

$$x + y = a \ , \ x - y = b \ , \ xy = c.$$

Nel primo caso potrà ottenersi una equazione (§. 128) la quale contenga una sola incognita, e il problema dicesi *determinato*; nel secondo si otterrà una equazione con almeno due incognite, e il problema si dice *indeterminato*; nel terzo finalmente si dice *più che determinato*, e sarà impossibile la soluzione del medesimo, se per avventura non accada, che determinate le incognite per altrettante equazioni, le rimanenti vengano con ciò a verificarsi.

Quì aggiungiamo alcune cose utili, oltrechè per diverse altre ricerche, per conoscere ancora le proprietà dell' equazioni.

1.° Sia il polinomio

$$az^n + bz^{n-1} + cz^{n-2} + \ldots + hz + k \ldots (p),$$

in cui le quantità a, b, $c \ldots h$, k si riguardino reali e fisse, la z poi riguardisi anch'essa come reale, ma tutto insieme come variata perpetuamente, in guisa che la differenza fra due suoi qualunque successivi valori sia capace di attenuazione indefinita. Anche la variazione del polinomio avverrà sempre per gradi manifestamente capaci di attenuazione indefinita: per la qual cosa se nella variazione continua il valore di (p) passi dallo stato positivo al negativo, o viceversa, passerà per lo zero prima di ricevere siffatto cambiamento; cioè fra quei valori della variabile z, ai quali rispondono $(p) > 0$, e $(p) < 0$, sarà compreso senza dubbio un certo valore z_m, al quale risponderà la equazione

$$az_m^n + bz_m^{n-1} + cz_m^{n-2} + \ldots + hz_m + k = 0 :$$

attesochè i due valori qualunque che (p) riceve l' uno prima,

l'altro dopo il cambiamento . . ., essendo affetti da segni contrari, non potranno dare una differenza capace di attenuazione indefinita se non, diminuita sempre più la distanza loro dal punto del cambiamento, convergano ambedue sempre verso lo zero, ed ivi si annullino (63).

Inoltre, accostandosi (p) indefinitamente allo zero, crescerà per modo il valore della quantità $\frac{1}{(p)}$ da superare qualsivoglia valore dato comunque grande: di più, quel valore passerà con (p) dallo stato positivo al negativo, e viceversa; e poichè fatto $(p) = 0$ si converte $\frac{1}{(p)}$ in $\frac{1}{0}$, perciò $\frac{1}{(p)}$ da $>$ non diverrà < 0, e viceversa, se non dopo esser passato per $\frac{1}{0}$. La espressione $\frac{1}{0}$ si considera come il limite al quale converge una quantità che si suppone crescere indefinitamente, e si nota per ∞, o per $-\infty$, secondo che quel passaggio si fa dalla parte positiva o dalla negativa. Sebbene a questo limite mai si giunge, non di rado avviene che si faccia uso del medesimo.

2.° Nel polimonio (p) suppongasi che il valore della quantità z continuamente diminuisca. Al certo il polinomio

$$az^n + bz^{n-1} + cz^{n-2} + \ldots + hz ,$$

e perciò anche la frazione

(63) *Infatti sieno α ed α' due qualunque valori successivi della variabile z, pel primo de'quali il polinomio (p) divenga $+Z$, e pel secondo $-Z'$; avremo la differenza de' due valori di (p) espressa da $Z + Z'$. Ed affinchè questa differenza diminuisca indefinitamente per dei valori di z compresi fra α ed α', dovranno Z e Z', perchè positivi, accostarsi sempre più allo zero, e finalmente ambedue annullarsi. Dunque se in un polinomio della forma (p), sostituiti due valori alla variabile z, si ottengano risultamenti di segno contrario, fra quei valori ve ne sarà almen' uno, capace di annullare il polinomio stesso.*

$$\frac{az^n + bz^{n-1} + cz^{n-2} + \ldots + hz}{k}$$

sempre più decrescerà. Ma ciò non può accadere se il valore del numeratore non divenga finalmente, e continui ad essere minore di quello del denominatore costante; dunque nella ipotesi in cui siamo diverrà finalmente e continuerà ad essere $(p) >$ ovvero < 0, secondo che k sarà $>$ ovvero < 0.

Che se il valore di z si supponga crescere indefinitamente, tutto il polinomio diverrà costantemente del segno del termine az^n. Ciò apparisce dal potersi quel polinomio scrivere così

$$z^n \left(a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} + \ldots + \frac{h}{z^{n-1}} + \frac{k}{z^n} \right).$$

3.° Talvolta i valori delle formule dopo giunti allo zero od a $\pm \infty$, tornano in dietro senza oltrepassare quei limiti, sia che vi giungano dalla parte positiva, sia dalla negativa, come si vede nelle

$$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 \;,\; -z^2 + 2z - 1 = -(z-1)^2 \;,\; \pm \frac{1}{(z-1)^2},$$

fatto z da $<$ gradatamente > 1.

Avviene ancora che il valore decrescente di una formula cominci a crescere, o crescente cominci a decrescere senza prima giungere allo zero, od a $\pm \infty$. Ciò si manifesta nelle

$$z^2 - 2z + 2 \;,\; -z^2 + 2z - 2 \;,\; \pm \frac{1}{z^2 - 2z + 2},$$

fatto in esse come sopra z da $<$ gradatamente > 1 (64).

(64) *Infatti abbiamo*

$$z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1$$

$$-z^2 + 2z - 2 = -(z-1)^2 - 1$$

$$\pm \frac{1}{z^2 - 2z + 2} = \pm \frac{1}{(z-1)^2 + 1}.$$

Generalmente il valore di una formula ove cangia il decremento in aumento, ivi ha un certo *minimo* ; ivi poi ha un *massimo* , ove cangia l'incremento in decremento.

4.° Talora si giunge più volte allo zero, ovvero a $= \infty$ con passaggio, o senza: così crescendo z da zero oltre 2 nelle formule

$$(z-1)(z-2) \quad , \quad (z-1)^2(z-2)^2 \ ,$$

si giunge due volte allo zero, con passaggio in una, senza passaggio nell'altra.

Anche si ottengono talora più variazioni di aumento in decremento, o viceversa, senza che prima si arrivi allo zero, ovvero a $= \infty$. Per es. crescendo z da zero oltre 2, la formula $(z-1)^2 (z-2)^2 + 1$ due volte diviene $= 1$, ed ivi il suo decremento si cangia in aumento (65).

5.° Se la espressione immaginaria $M + N\sqrt{-1}$ esprime la somma, e $P+Q\sqrt{-1}$ la differenza delle $a+b\sqrt{-1}$, $c+d\sqrt{-1}$, si avranno le

---

Ora da questi secondi membri si scorge facilmente, che sebbene z *cresca, finchè sarà* < 1, *il termine* $(z-1)^2$ *diminuirà, e conseguentemente i valori numerici delle due prime formule diminuiranno, mentre quello della terza crescerà. Ma crescendo* z, *dopo esser divenuto* $= 1$, *accaderà il contrario, cioè i valori delle due prime formule evidentemente cresceranno, e il valore della terza diminuirà, senza che quelle sieno passate per lo zero, e questa per* $= \infty$.

(65) *Crescendo la* z, *finchè sarà* < 1 *il valore della formula in proposito diminuirà, ma posto* $z = 1$ *il valore della medesima diverrà minimo, e continuando a crescere la* z, *si cangerà per la prima volta il decremento della formula in aumento, finchè fatto* $z = \frac{3}{2}$ *si avrà il valor massimo della formula. Crescendo ancora la* z, *diminuirà da capo la formula, finchè fatto* $z = 2$ *si avrà nuovamente il valor minimo della medesima; e continuando la* z *ad aumentarsi, cangerà per la seconda volta la formula il decremento in aumento, senza mai essersi annullata.*

$$(M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}} = [a^2 + b^2 + 2(ac + bd) + c^2 + d^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$(P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} = [a^2 + b^2 - 2(ac + bd) + c^2 + d^2]^{\frac{1}{2}} \text{ (66)};$$

estraendo le radici quadrate, o indicandole, qui riguardiamo solo i valori positivi delle medesime.

Ma non può essere (§. 103.g)

$$(ac + bd)^2 > (a^2 + b^2)(c^2 + d^2);$$

adunque il valore numerico del binomio $ac + bd$ non supererà il prodotto $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$, e lo stesso binomio non oltrepasserà i limiti $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$, $-(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$.

Laonde niuna delle due $(M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}$, $(P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}}$ oltrepasserà i limiti (67)

$$[a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(c^2+d^2)}+c^2+d^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(c^2+d^2)},$$

$$[a^2+b^2-2\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(c^2+d^2)}+c^2+d^2]^{\frac{1}{2}} = \pm[\sqrt{(a^2+b^2)}-\sqrt{(c^2+d^2)}].$$

6.° Supposte le

$$M_1 + N_1\sqrt{-1} = (M + N\sqrt{-1}) + (e + f\sqrt{-1}),$$

$$M_2 + N_2\sqrt{-1} = (M_1 + N_1\sqrt{-1}) + (g + h\sqrt{-1}),$$

eccetera . . . ,

---

(66) *Essendo per ipotesi*

$$M + N\sqrt{-1} = a + c + (b + d)\sqrt{-1}$$

$$P + Q\sqrt{-1} = a - c + (b - d)\sqrt{-1}$$

sarà (§.97)

$$M = a + c \ , \ N = b + d \ , \ P = a - c \ , \ Q = b - d$$

onde ec. . . .

(67) *Cioè niuna di quelle due espressioni sarà maggiore di* $\sqrt{(a^2 + b^2)} + \sqrt{(c^2 + d^2)}$, *niuna minore di* $\pm[\sqrt{(a^2 + b^2)} - \sqrt{(c^2 + d^2)}]$; *ed in questa valerà quel segno che la renderà positiva.*

non potrà mai essere

$$(M_1^2 + N_1^2)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{(M^2 + N^2)} + \sqrt{(e^2 + f^2)},$$

$$(M_2^2 + N_2^2)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{(M_1^2 + N_1^2)} + \sqrt{(g^2 + h^2)},$$

eccetera . . . ,

e conseguentemente non potranno verificarsi le

$$(M_1^2 + N_1^2)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{(a^2 + b^2)} + \sqrt{(c^2 + d^2)} + \sqrt{(e^2 + f^2)},$$

$$(M_2^2 + N_2^2)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{(a^2+b^2)} + \sqrt{(c^2+d^2)} + \sqrt{(e^2+f^2)} + \sqrt{(g^2 + h^2)},$$

eccetera . . . (68).

7.° Se pongasi che i due polinomi

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \quad , \quad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$$

rimangano eguali, sostituendo in luogo di z qualunque degli $n+1$ valori particolari z_0 , z_1 , z_2 . . . z_n , si avrà

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = c_0 \ , \ a_1 = c_1 \ , \ a_2 = c_2 \ , \ \ldots \ a_n = c_n \end{array}\right\} (h).$$

Sieno infatti

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \ldots + a_n z_0^n = p_0 \\ a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \ldots + a_n z_1^n = p_1 \end{array}\right\} (A)$$

eccetera . . .

$$a_0 + a_1 z_n + a_2 z_n^2 + \ldots + a_n z_n^n = p_n ;$$

(68) *Cioè posto*

$$M_n + N_n\sqrt{-1} = (a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) + (e + f\sqrt{-1}) + (g + h\sqrt{-1}) + ecc. ,$$

in cui le quantità a , b , c , d . . . *possono essere positive , o negative , non potrà mai verificarsi*

$$(M_n^2 + N_n^2)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{(a^2+b^2)} + \sqrt{(c^2+d^2)} + \sqrt{(e^2+f^2)} + \sqrt{(g^2+h^2)} + ec.$$

Avremo per ipotesi

$$\left.\begin{aligned} c_0 + c_1 z_0 + c_2 z_0^2 + \ldots + c_n z_0^n &= p_0 \\ c_0 + c_1 z_1 + c_2 z_1^2 + \ldots + c_n z_1^n &= p_1 \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

eccetera . . .

$$c_0 + c_1 z_n + c_2 z_n^2 + \ldots + c_n z_n^n = p_n .$$

Ora quei valori di a_0, a_1, a_2 . . . , a_n che si ottengono (§. 128) dalle $n + 1$ equazioni (A), sono manifestamente gli stessi che quelli che si ottengono dalle $n + 1$ (C); dunque eccetera . . . .

8.° Quindi se i predetti polinomi rimangano eguali, comunque si prenda la z, senza dubbio avranno luogo le equazioni (h) (69).

Risoluzione delle equazioni determinate di primo e secondo grado.

132

L' equazione di primo grado si riduce a questa forma (§. 126)

$$x + \mathrm{A} = 0 \text{ , donde } x = -\mathrm{A} \ldots (i) ,$$

qualunque sia nel resto A, reale cioè o immaginaria.

133

Ogni equazione di secondo grado può generalmente rappresentarsi così

(69) *Cioè dall'eguaglianza dei polinomi proposti, discende l' eguaglianza de' coefficienti delle medesime potenze della* variabile *ad essi comune.*

$$x^2 + Ax + B = 0 \ldots (i'').$$

Facciasi $A = 0$, affinchè abbiasi

$$x^2 + B = 0, \text{ e perciò } x^2 = -B \ldots (i'').$$

Sia primieramente B reale: si avranno (§. 95 : 96 : 97)

$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{-B}\ ,\ x = -\sqrt{-B} \\ \text{se } B < 0, \text{ ed} \\ x = B^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\ ,\ x = -B^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} \\ \text{se } B > 0. \end{array}\right\} (i''')$$

Rimane poi a vedere se la incognita x ammetta o no anche altri valori. Per tal fine si ponga

$$x = u + v\sqrt{-1},$$

in cui le quantità reali u, v sono da determinarsi per modo, che soddisfacciano alla equazione

$$(u + v\sqrt{-1})^2 + B = 0,$$

o, ch'è lo stesso, (§. 97) alle due

$$u^2 - v^2 = -B\ ,\ 2uv = 0.$$

Ora perchè queste si verifichino, fa d'uopo supporre od

$$u = 0\ ,\ v^2 = B\ ,\ \text{ovvero } v = 0\ ,\ u^2 = -B:$$

di queste supposizioni l'una non può conciliarsi se non con $B > 0$, e l'altra se non con $B < 0$; dalla prima otteniamo

$$u = 0\ ,\ v = \pm B^{\frac{1}{2}}\ ,\ x = u + v\sqrt{-1} = \pm B^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1};$$

dalla seconda

$$v = 0\ ,\ u = \pm\sqrt{-B}\ ,\ x = u + v\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-B}:$$

dal che siegue non esservi altri valori per la incognita x fuorchè i sopraddetti (i''').

Si ponga in secondo luogo B immaginaria; cioè sia

$$-\mathrm{B} = a + b\sqrt{-1}\,,$$

cosicchè debba risolversi la equazione

$$x^2 = a + b\sqrt{-1} \ldots (i^{IV}).$$

Fatto come sopra

$$x = u + v\sqrt{-1}\,,$$

le quantità reali u, v si dovranno determinare in guisa, che soddisfino alla equazione

$$(u + v\sqrt{-1})^2 = a + b\sqrt{-1}.$$

Questa equazione si divide nelle due

$$u^2 - v^2 = a\,,\ 2uv = b\,,$$

onde

$$a^2 + b^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2\,,$$

e conseguentemente

$$u^2 + v^2 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

la quale anche deriva immediatamente dalla (*l.* §. 125) (70).

(70) *Infatti posto*

$$(u + v\sqrt{-1})\,(u + v\sqrt{-1}) = a + b\sqrt{-1}\,,$$

la (*l* §. 125) *somministra*

$(u^2 + v^2)\,(u^2 + v^2) = a^2 + b^2$, *donde* $u^2 + v^2 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$.

A questa primieramente si aggiunga, poi si tolga la prima di quelle due; nasceranno le seguenti

$$2u^2 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} + a \ , \ 2v^2 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} - a \ ;$$

onde

$$u = \pm \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \right)^{\frac{1}{2}} , v = \pm \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \ldots (i^{\nu}) ;$$

e poichè per essere $2uv = b$, il valore $x = u + v\sqrt{-1}$ diviene

$$x = u + \frac{b}{2u} \sqrt{-1} ,$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$x = \frac{b}{2v} + v\sqrt{-1} ,$$

perciò sarà

$$\left. \begin{aligned} x = \pm [& \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{b}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2+b^2}+a)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{-1}], \\ \text{ovvero, che è lo stesso} & \\ x = \pm [& \frac{b}{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2 + b^2}-a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\sqrt{a^2 + b^2}-a)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \sqrt{-1}]. \end{aligned} \right\} (i^{\nu\prime})$$

Si proponga per es. l'equazione

$$x^2 + \sqrt{-1} = 0 ;$$

saranno $a = 0$, $b = -1$, e perciò

$$x = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1} \right).$$

135

Vengo alla equazione generale di secondo grado (§. 133.i'). Comunque si prendano A e B, reali cioè o immaginarie, potrà

la (i') scriversi a questo modo

$$\left.\begin{array}{l} \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+B-\frac{A^2}{4}=0\,, \\ \text{onde} \\ \left(x+\frac{A}{2}\right)^2=-\left(B-\frac{A^2}{4}\right)\ (71)\,, \end{array}\right\}\ (i^{IVII})$$

la quale avendo la stessa forma della (i''), o della (i^{IV}), si risolverà relativamente a $x+\frac{A}{2}$, come le stesse (i''), (i^{IV}) già sono state risolute rapporto ad x. Dunque supposta $B-\frac{A^2}{4}$ reale, si avranno

$$x+\frac{A}{2}=\pm\sqrt{-\left(B-\frac{A^2}{4}\right)}\,,$$

$$x+\frac{A}{2}=\pm\left(B-\frac{A^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\ ;$$

perciò

$$\left.\begin{array}{l} x=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}\ \ (72)\ \text{se}\ \ B-\frac{A^2}{4}<0\,, \\ \text{ed}\ \ x=-\frac{A}{2}\pm\left(B-\frac{A^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\ \text{se}\ \ B-\frac{A^2}{4}>0. \end{array}\right\}\ (i^{VIII})$$

---

(71) *La* (i') *acquista tal forma aggiungendo e togliendo* $\frac{A^2}{4}$ *al suo primo membro, nel quale con ciò si presenterà il quadrato* $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2$.

(72) *Paragonando la formula solutiva*

Che se $B - \frac{A^2}{4}$ suppongasi immaginario, cosicchè abbiasi

$$-\left(B - \frac{A^2}{4}\right) = a + b\sqrt{-1}\ ,$$

sarà

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{A}{2} &= u + \frac{b}{2u}\sqrt{-1}\ ; \\ \text{ovvero, ciò che equivale (73),} & \\ x + \frac{A}{2} &= \frac{b}{2v} + v\sqrt{-1}\ , \end{aligned}\right\} (i^{IX})$$

presi u, v dalle (i^{V} . §. 134).

$$x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$$

con la equazione

$$x^2 + Ax + B = 0$$

dalla quale si è dedotta, concluderemo che la incognita di qualunque equazione di secondo grado, eguaglia la metà del coefficiente del suo secondo termine, preso col segno contrario, più o meno la radice di un binomio, avente per primo termine il quadrato di quella metà, e per secondo l' ultimo termine della equazione stessa, preso col segno contrario.

(73) *Supposto*

$$-\left(B - \frac{A^2}{4}\right) = a + b\sqrt{-1}\ ,$$

sarà per le ($i^{V\,11}$)

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = a + b\sqrt{-1}.$$

Sia data per es. la

$$x^2-(7+\sqrt{-1})x+10+2\sqrt{-1}=0\,:$$

saranno

$$A=-7-\sqrt{-1}\quad,\quad B=10+2\sqrt{-1}\,;$$

quindi

$$-\left(B-\frac{A^2}{4}\right)=2+\frac{3}{2}\sqrt{-1}\,,\text{ ed }a=2\,,\ b=\frac{3}{2}\,.$$

Per la qual cosa

$$x=\frac{7+\sqrt{-1}}{2}\pm\left\{\frac{\left(\sqrt{4+\frac{9}{4}}+2\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.\frac{3}{2\,.\,2^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{4+\frac{9}{4}}+2\right)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1}\right\}=\frac{7+\sqrt{-1}}{2}\pm\left(\frac{3+\sqrt{-1}}{2}\right);$$

cioè

$$x=5+\sqrt{-1}\quad,\quad x=2.$$

Considerando il binomio $x+\frac{A}{2}$ *complessivamente , facciasi*

$$x+\frac{A}{2}=u+v\sqrt{-1}\,;$$

avremo

$$(u+v\sqrt{-1})^3=a+b\sqrt{-1}\,,$$

donde appunto si ricavarono i valori u , v *dati dalle* (*i'* §.134).

Risoluzione dell' equazione.

$$x^n - (a + b\sqrt{-1}) = 0 \ldots (f)$$

136

Il grado n può esser pari od impari: rappresentati con m, r, k, i dei numeri interi > 0, nel primo caso n si esprimerà o per 2^m, o per $2^r(2k+1)$ (74), nel secondo per $2i+1$. Principiando da $n = 2^m$, potrà sostituirsi alla (f) il sistema delle seguenti equazioni .

$$x^2 = z_2\,,\ z_2^{\,2} = z_3\,,\ z^2{}_3 = z_4 \ldots z^2{}_{m-1} = z_m\,,\ z^2{}_m = a + b\sqrt{-1}.$$

Dall'ultima di queste si deduce (§. 134)

$$z_m = \pm (u + v\sqrt{-1}),$$

e fatta la sostituzione nella penultima sarà

$$z^2{}_{m-1} = u + v\sqrt{-1}$$

$$z^2{}_{m-1} = -(u + v\sqrt{-1}).$$

Di qui (§. 134) si deducono quattro valori per z_{m-1}, che successivamente sostituiti nell' antipenultima, produrranno otto valori per z_{m-2}, e così continuando sino alla $x^2 = z_2$, si conseguiranno finalmente tanti valori per x idonei a verificare la (f), quante unità si contengono nell' esponente $n = 2^m$ (75).

---

(74) *Qualunque numero pari, o è potenza di* 2, *ovvero è un prodotto di una potenza di* 2, *e di un altro numero impari. Nel primo caso il numero pari sarà espresso da* 2^m, *nel secondo da* $2^r(2k+1)$: *nè potendosi dare altro caso da questi diverso, tali espressioni serviranno a rappresentare qualunque numero pari.*

(75) *Imperciocchè ognuno di questi n valori equivale per fatto di calcolo alla* $\sqrt[n]{a+b\sqrt{-1}}$, *che verifica evidentemente la stessa* (f).

Sia ora n impari, e prima si faccia $b = 0$, poi $a = 0$, affinchè la (f) si riduca alle

$$x^{2i+1} = a \quad , \quad x^{2i+1} = bV-1 \ldots (f').$$

La prima delle (f') sarà soddisfatta prendendo (§. 95)

$$x = a^{\frac{1}{2i+1}}, \text{ se } a>0; \text{ ed } x = -(-a)^{\frac{1}{2i+1}}, \text{ se } a<0.$$

Sarà soddisfatta la seconda prendendo (§. 95:96)

$$x = (-1)^i b^{\frac{1}{2i+1}} V-1, \text{ se } b>0, \text{ ed}$$

$$x = (-1)^{i+1} (-b)^{\frac{1}{2i+1}} V-1, \text{ se } b<0 \text{ (76).}$$

(f'')

Nella stessa ipotesi del grado impari, sebbene niuna delle due a, b svanisca, pure vi sarà qualche valore della x avente la forma solita (§. 97), e proprio a soddisfare alla equazione (f). Questa proposizione si dimostra così.

Nel binomio

$$x^n - (a + bV-1) \ldots (f'')$$

abbiasi la x per variabile, e sia $\beta + \delta V-1$ uno qualunque de' suoi valori: si ridurrà (§. 110) $(\beta + \delta V-1)^\alpha$ alla $\beta_1 + \delta_1 V-1$, e sarà (§. 125.*l*)

(76) *Apparirà chiaramente che questi valori soddisfanno alle* (f') *sostituendoli nelle medesime, giacchè si otterrà con ciò*

$$\beta_1^2 + \delta_1^2 = (\beta^2 + \delta^2)^n \quad (77).$$

Indicando poi con ω, k, f dei numeri positivi; facciansi

$$(\beta + \delta\sqrt{-1})^n - (a + b\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1}$$

$$(\beta^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} = \omega \ , \ (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = k \ , \ (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} = f;$$

e supposto

$$\omega^n > k \quad , \quad \omega > \sqrt[n]{k},$$

non sarà f (§. 131 . 5.°) minore di $\omega^n - k$, nè perciò di k se

---

una identicità. Pongasi per es. l'ultimo di tali valori nella seconda delle (f'), *ed avremo*

$$[(-1)^{i+1}(-b)^{\frac{1}{2i+1}}\sqrt{-1}]^{2i+1} = b\sqrt{-1},$$

ovvero

$$(-1)^{2i^2+3i+1}(\sqrt{-1})^{2i+1}(-b) = b\sqrt{-1},$$

e quindi (§. 96)

$(\mp 1)(\pm\sqrt{-1})(-b) = b\sqrt{-1}$, *e finalmente* $b\sqrt{-1} = b\sqrt{-1}$.

(77) *Avendosi*

$$(\beta + \delta\sqrt{-1})^n = \beta_1 + \delta_1\sqrt{-1},$$

o, ch'è lo stesso

$$\beta_1 + \delta_1\sqrt{-1} = (\beta + \delta\sqrt{-1})(\beta + \delta\sqrt{-1}).....,$$

sarà (§. 125 . *l*)

$$\beta_1^2 + \delta_1^2 = (\beta^2 + \delta^2)(\beta^2 + \delta^2)..... = (\beta^2 + \delta^2)^n.$$

$$\omega^n > 2k \text{ , } \omega > (2k)^{\frac{1}{n}} \ldots (f'') \text{ (78) ;}$$

al contrario, fatto (§. 137)

$$\left.\begin{array}{l} \delta = 0, \text{ ed } x^n = \beta^n = a, \\ \text{ovvero} \\ \beta = 0, \text{ ed } x^n = (\delta\sqrt{-1})^n = b\sqrt{-1}, \end{array}\right\} (f')$$

sarà f minore di k; da che nel primo caso abbiamo $p = 0$, $q = -b$, onde $f =$ al valore numerico di solo b; nel secondo $p = -a$, $q = 0$, e conseguentemente $f =$ al valore numerico di solo a: che se prendansi $\beta = 0$, $\delta = 0$, ossia $x = 0$, nascerà $f = k$. Adunque al minimo di tutti i valori che, variata la x, riceve f, corrisponderà un qualche valore $x = \beta' + \delta'\sqrt{-1}$ diverso dallo zero, ma tale da non soddisfare alla

(78) *Ci valeremo del segno* $\not<$ *per esprimere che una grandezza non può essere minore di un' altra. Così* $M \not< N$ *significherà che* M *non può divenir minore di* N. *Ciò premesso poichè abbiamo*

$$(\beta + \delta\sqrt{-1})^n - (a + b\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1} \text{ ,}$$

ovvero

$$\beta_1 + \delta_1\sqrt{-1} - (a + b\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1} \text{ ,}$$

sarà (§. 131 . 5°)

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \not< \pm [(\beta_1^2 + \delta_1^2)^{\frac{1}{2}} - (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}];$$

ma

$$\beta_1^2 + \delta_1^2 = (\beta^2 + \delta^2)^n \text{ ,}$$

dunque avremo

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \not< \pm [(\beta^2 + \delta^2)^{\frac{n}{2}} - (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}],$$

ch' è quanto dire

condizione (f^{IV}) (79). Questo valor minimo si rappresenti con $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$, cosicchè sia

$$(\beta' + \delta' \sqrt{-1})^n - (a + b\sqrt{-1}) = p' + q'\sqrt{-1};$$

si ponga inoltre

$$\beta + \delta\sqrt{-1} = \beta' + \delta'\sqrt{-1} + \varphi.$$

Sarà (§. 110 . e''')

$$p + q\sqrt{-1} = (\beta' + \delta'\sqrt{-1} + \varphi)^n - (a + b\sqrt{-1}) =$$
$$p' + q'\sqrt{-1} + n(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{n-1}\varphi +$$
$$\frac{n(n-1)}{2}(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{n-2}\varphi^2 + \ldots + \varphi^n,$$

la quale, denotando γ un numero pochissimo > 0, e preso

$$\varphi = -\gamma\frac{p' + q'\sqrt{-1}}{n(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{n-1}} \ldots\ldots (f^{VI}),$$

$$f \not< = (\omega^n - k);$$

e supposto $\omega^n > k$, *sarà* $f \not< \omega^n - k$.

(79) *Le soluzioni delle equazioni*

$$x^n = a \;,\; x^n = b\sqrt{-1}$$

si conoscono (§. 137); *perciò le grandezze* β, δ *sono in questo caso da considerarsi come note. Inoltre a dichiarare che la* f *ammette un valor minimo, si rifletta che pei valori della* x *soddisfacenti alla condizione* $\omega > (2k)^{\frac{1}{n}}$ *si ha* $f \not< k$; *pei valori* $x = \beta$, $x = \delta\sqrt{-1}$ *si ha* $f < k$; *e finalmente pel valore* $x = 0$ *si ha* $f = k$; *dunque* la variabile sempre positiva f, *per lo meno una volta varia il suo decremento in aumento, e perciò* (§. 131 . 3°) *ammette un minimo fra' suoi va-*

riceve questa forma (§. 108 . 2°)

$$p + q\sqrt{-1} = (p' + q'\sqrt{-1})\,[1 - \gamma + (\nu_1 + \lambda_1\sqrt{-1})\,\gamma^2 + (\nu_2 + \lambda_2\sqrt{-1})\,\gamma^3 + \ldots + (\nu_{n-1} + \lambda_{n-1}\sqrt{-1})\,\gamma^n] \ldots (f^{VII}) \quad (80).$$

Fatto quindi per compendio

---

lori minore del numero positivo k, *che dovrà corrispondere ad un valore almeno della* x, *diverso dallo zero. Perciò se rappresentisi con* $\beta' + \delta'\sqrt{-1}$ *il valore della* x *corrispondente a quel minimo, nè saranno simultaneamente* $\beta' = 0$, $\delta' = 0$, *nè sarà soddisfatta la condizione*

$$\omega > (2k)^{\frac{1}{n}}, \text{ ovvero } (\beta'^2 + \delta'^2)^{\frac{1}{2}} > (2k)^{\frac{1}{n}};$$

poichè nel primo caso nascerebbe $f = k$, *e nel secondo* $f > k$.

(80) *Per giungere a questa equazione si osservi che sostituendo il valore di* φ *avremo*

$$p + q\sqrt{-1} = p' + q'\sqrt{-1} - (p' + q'\sqrt{-1})\gamma + \frac{(n-1)(p' + q'\sqrt{-1})^2\gamma^2}{2n(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^n}$$

$$- \frac{(n-1)(n-2)(p' + q'\sqrt{-1})^3\gamma^3}{2 \cdot 3\, n^2(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{2n}} \cdots - \frac{(p' + q'\sqrt{-1})^n\gamma^n}{n^n(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{n(n-1)}},$$

e ponendo (§. 108 . 2°)

$$\frac{(n-1)(p' + q'\sqrt{-1})}{2n(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^n} = \nu_1 + \lambda_1\sqrt{-1}$$

$$\frac{-(n-1)(n-2)(p' + q'\sqrt{-1})^2}{2.3\, n^2(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{2n}} = \nu_2 + \lambda_2\sqrt{-1}$$

. . . . . .

$$\frac{-(p' + q'\sqrt{-1})^{n-1}}{n^n(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{n(n-1)}} = \nu_{n-1} + \lambda_{n-1}\sqrt{-1}$$

avremo la (f^{VII}).

$$(\nu_1^2 + \lambda_1^2)^{\frac{1}{2}} = \theta_1 \ldots \ldots (\nu^2_{n-1} + \lambda^2_{n-1})^{\frac{1}{2}} = \theta_{n-1}$$

conchiuderemo che, non annullandosi $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$, non potrà f superare (§. 125 ; 131 . 6°)

$$(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \gamma + \theta_1 \gamma^2 + \theta_2 \gamma^3 + \ldots + \theta_{n-1} \gamma^n) \quad (81) ;$$

(81) *Si giunge a questo risultamento operando come segue sulla* (f^{VII}) ; *la quale primieramente ne dà*

$$p + q\sqrt{-1} = p' + q'\sqrt{-1} + (-p'\gamma - q'\gamma\sqrt{-1}) +$$

$$(\nu_1 + \lambda_1\sqrt{-1})(p'\gamma^2 + q'\gamma^2\sqrt{-1}) + (\nu_2 + \lambda_2\sqrt{-1})(p'\gamma^3 + q'\gamma^3\sqrt{-1})$$

$$+ \ldots + (\nu_{n-1} + \lambda_{n-1}\sqrt{-1})(p'\gamma^n + q'\gamma^n\sqrt{-1}) ;$$

quindi fatto

$$p' + q'\sqrt{-1} + (-p'\gamma - q'\gamma\sqrt{-1}) = (1-\gamma)p' + (1-\gamma)q'\sqrt{-1}$$

$$(\nu_1 + \lambda_1\sqrt{-1})(p'\gamma^2 + q'\gamma^2\sqrt{-1}) = A_1 + B_1\sqrt{-1}$$

$$(\nu_2 + \lambda_2\sqrt{-1})(p'\gamma^3 + q'\gamma^3\sqrt{-1}) = A_2 + B_2\sqrt{-1}$$

. . . . . .

$$(\nu_{n-1} + \lambda_{n-1}\sqrt{-1})(p'\gamma^n + q'\gamma^n\sqrt{-1}) = A_{n-1} + B_{n-1}\sqrt{-1} ,$$

e sostituendo questi valori avremo (§. 131 . 6°)

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \geq (1-\gamma)(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}} + (A_1^2 + B_1^2)^{\frac{1}{2}} +$$

$$(A_2^2 + B_2^2)^{\frac{1}{2}} + \ldots + (A^2_{n-1} + B^2_{n-1})^{\frac{1}{2}} ;$$

ma poichè abbiamo (§. 125)

$$(\nu_1^2 + \lambda_1^2)(p'^2\gamma^4 + q'^2\gamma^4) = A_1^2 + B_1^2$$

$$(\nu_2^2 + \lambda_2^2)(p'^2\gamma^6 + q'^2\gamma^6) = A_2^2 + B_2^2$$

. . . . . .

$$(\nu^2_{n-1} + \lambda^2_{n-1})(p'^2\gamma^{2n} + q'^2\gamma^{2n}) = A^2_{n-1} + B^2_{n-1} ,$$

e poichè la frazione γ può talmente diminuirsi da produrre (§. 131 . 2°)

$$\left.\begin{array}{l} \gamma > \theta_1\gamma^2 + \theta_2\gamma^3 + \ldots + \theta_{n-1}\gamma^n \\ \text{ovvero} \\ 1 > \theta_1\gamma + \theta_2\gamma^2 + \ldots + \theta_{n-1}\gamma^{n-1} \end{array}\right\} (f^{VIII}),$$

ne segue che se non isvanisce $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$, indubitatamente vi sarà un tal numero γ, e perciò un tal valore $x = \beta + \delta\sqrt{-1}$, diverso da $x = \beta' + \delta'\sqrt{-1}$, al quale corrisponderà $f < (p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$, lo che non potendo evidentemente avverarsi, dovrà essere

$$(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

e per conseguenza

$$(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^n - (a + b\sqrt{-1}) = 0 \quad (82).$$

Poichè adunque si annulla (f''') quando ad x si sostituisce $\beta' + \delta'\sqrt{-1}$, chiaro apparisce la verità della proposizione.

---

perciò sostituendo avremo

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \gtrless (1-\gamma)(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}} + (\nu_1^2 + \lambda_1^2)^{\frac{1}{2}}(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}\gamma^2 + \ldots + (\nu^2_{n-1} + \lambda^2_{n-1})^{\frac{1}{2}}(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}\gamma^n,$$

e per conseguente

$$f \gtrless (p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \gamma + \theta_1\gamma^2 + \theta_2\gamma^3 + \ldots + \theta_{n-1}\gamma^n),$$

come stabilisce l'autore.

(82) *A questa conclusione si giunge facilmente, poichè sempre potendosi soddisfare alla condizione* (f'^{III}), *il fattore*

$$1 - \gamma + \theta_1\gamma^2 + \theta_2\gamma^3 + \ldots \theta_{n-1}\gamma^n$$

eguaglierà una frazione, che rappresenteremo con $\frac{r}{t}$; *quindi*

Dallo stesso processo di questa dimostrazione può dedursi ancora il modo di avvicinarsi sempre più al valore $\beta' + \delta' \sqrt{-1}$. Poichè indicato con x_1 il valore della x (§. 137 . f'') che soddisfa ad una delle (f^{IV} §. 138), e fatto

$$x_1^n - (a + b\sqrt{-1}) = p_1 + q_1\sqrt{-1} \ , \ \varphi_1 = -\gamma \frac{p_1 + q_1\sqrt{-1}}{n x_1^{n-1}},$$

si determinino i corrispondenti θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_{n-1}$; e presa la γ_1 fra le frazioni per es. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ . . . , per modo che soddisfi alla condizione (f^{VIII}), si pongano

$$x_1 + \varphi_1 = x_2 \ , \ x_2^n - (a + b\sqrt{-1}) = p_2 + q_2\sqrt{-1} \ ,$$

onde si possa operare similmente rispetto x_2, ed avere $x_2 + \varphi_2 = x_3$, e così successivamente.

I termini della serie

$$(p_1^2 + q_1^2)^{\frac{1}{2}} \ , \ (p_2^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}} \ , \ (p_3^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots$$

perchè decrescono continuamente, perciò x_1, x_2, x_3 . . . si accosteranno sempre più a $\beta' + \delta'\sqrt{-1}$. (83).

---

non annullandosi $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$ *sarà*

$$f > \frac{r}{t} \ (p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}},$$

e conseguentemente

$$f < (p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}};$$

ma ciò non può verificarsi, per essere $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$ *il minimo fra tutti i valori di* f, *dunque dovrà essere*

$$(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

(83) *Come nella ipotesi che non isvanisca* $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$ *ver-*

Qui è da osservare che uno stesso minimo può corrispondere a dividersi valori della quantità variata (§. 131 . 4°), per la qual cosa non si esclude dalla superiore dimostrazione la moltiplicità dei valori della x atti a verificare la (f).

rebbe ad aversi (§. 138) $(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} < (p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$, *così nel nostro caso sarà*

$$(p_2^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}} < (p_1^2 + q_1^2)^{\frac{1}{2}}, \; (p_3^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}} < (p_2^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}} \ldots,$$

cioè i termini

$$(p_1^2 + q_1^2)^{\frac{1}{2}}, \; (p_2^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}}, \; (p_3^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}} \ldots.$$

incessantemente decresceranno, perciò ec.

Abbiasi per es. da rintracciare il valore della x, *soddisfacente alla equazione*

$$x^3 - (-5 + 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}) = 0.$$

Pongasi $x^3 = 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$, *conforme alla seconda* (f^{v} §. 138);

avremo (§. 137 . f'') $x_1 = -2^{\frac{1}{6}}\sqrt{-1} = -1,122461\sqrt{-1}$. *Sostituendo questo valore nella proposta sarà*

$$(-2^{\frac{1}{6}}\sqrt{-1})^3 - (-5+2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}) = 5$$

onde $p_1 = 5$, $q_1 = 0$, *e perciò* $\varphi_1 = \gamma_1 \frac{5}{3.2^{\frac{1}{3}}}$. *Ora per determinare* γ_1 *sostituiscasi il valore di* $x_1 + \varphi_1 = x_2$ *nella proposta, ed avremo*

$$\left(\gamma_1 \frac{5}{3.2^{\frac{1}{3}}} - 2^{\frac{1}{6}}\sqrt{-1}\right)^3 - \left(-5 + 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right) =$$

Sia per ultimo $n = 2^r(2k+1)$: invece di (f), ossia di $x^{2^r(2k+1)} - (a + b\sqrt{-1}) = 0$ sarà lecito sostituire il sistema delle due equazioni

$$x^{2^r} = z \ , \ z^{2k+1} = a + b\sqrt{-1}.$$

$$= 5\left(1 - \gamma_1 - \gamma_1^2 \frac{5}{3.2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{-1} + \gamma_1^3 \frac{5^2}{3^2.2}\right)$$

onde $r_1 = 0$, $\lambda_1 = -\frac{5}{3.2^{\frac{1}{2}}}$, $r_2 = \frac{5^2}{3^2.2}$, $\lambda_2 = 0$, *che però*

$$\theta_1 = \frac{5}{3.2^{\frac{1}{2}}} \ , \ \theta_2 = \frac{5^2}{3^3.2} \ ; \ \textit{e quindi}$$

$$1 > \frac{5}{3.2^{\frac{1}{2}}}\gamma_1 + \frac{5^2}{3^3.2}\gamma_1^2 \ , \ \textit{ovvero} \ 1 > \frac{5}{4,242}\gamma_1 + \frac{25}{54}\gamma_1^2 \ ,$$

a cui soddisfa il valore $\gamma_1 = \frac{1}{10}$, *laonde sarà*

$$x_2 = \frac{5}{3.2^{\frac{1}{3}}.10} - 2^{\frac{1}{6}}\sqrt{-1} = \frac{1}{3.2^{\frac{4}{3}}} - 2^{\frac{1}{6}}\sqrt{-1} = 0,1323 - 1,1225\sqrt{-1}.$$

Sostituiscasi ora questo valore nella proposta , ed avremo

$$\left(\frac{1}{3.2^{\frac{4}{3}}} - 2^{\frac{1}{6}}\sqrt{-1}\right)^3 - \left(-5 + 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right) = \frac{1945}{432} - \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}\sqrt{-1} \ ,$$

Dalla seconda di queste abbiamo (§. 139)

$$z = \beta' + \delta'\sqrt{-1},$$

e perciò la prima si trasforma nella

$$x^{2^p} = \beta' + \delta'\sqrt{-1},$$

la quale si risolve per le cose già dette (§. 136) (84).

---

onde $p_2 = \frac{1945}{432}$, $q_2 = -\frac{1}{\frac{5}{2^2}}$, *e sarà* $p_1^2 + q_1^2 > p_2^2 + q_2^2$,

cioè $25 > \frac{3788857}{186624}$. *Dopo ciò stabiliremo*

$$\varphi_2 = -\gamma_2 \frac{\frac{1945}{432} - \frac{\sqrt{-1}}{\frac{5}{2^2}}}{3\left(\frac{1}{3.2^{\frac{4}{3}}} - 2^{\frac{1}{6}}\sqrt{-1}\right)^2} = -\gamma_2 \frac{\frac{1945}{432} - \frac{\sqrt{-1}}{\frac{5}{2^2}}}{\frac{1}{3.2^{\frac{8}{3}}} - 3.2^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{-1}}{2^{\frac{1}{6}}}}$$

$$= \gamma_2 \frac{4{,}502314 - 0{,}17677\sqrt{-1}}{3.727273 + 0{,}89089\sqrt{-1}} = \gamma_2.1{,}0325 - \gamma_2.0{,}318\sqrt{-1}.$$

Ora per determinare γ_2 *sostituiscasi il valore* $x_2 + \varphi_2 = x_3$ *nella proposta, ed avremo così i nuovi valori di* v_1, λ_1, v_2, λ_2, *e quindi quelli di* θ_1, θ_2 *donde si argomenterà il valore di* γ_2, *dal quale nascerà quello di* x_3, *che sostituito nella proposta darà i valori di* p_3, q_3, *e si verificherà* $p_2^2 + q_2^2 > p_3^2 + q_3^2$. *Continuando questo processo di calcoli troveremo che i valori* x_1, x_2, x_3 ... *si accosteranno sempre più ad una delle radici della proposta equazione.*

(84) *Il valore o i valori dedotti* (§. 136) *dalla*

Alcune proprietà dell' equazioni determinate.

141

Sia

$$[z] \quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Hx + K = 0$$

una equazione del grado n^{mo}.

Supposte reali le A, B, C . . . H, K, e presi per x due valori similmente reali, se da uno si ottiene $[z] > 0$, e

$$x^{2^r} = \beta' + \delta' \sqrt{-1}$$

soddisfano tutti alla proposta, giacchè ciascuno elevato al grado della medesima produce $a + b\sqrt{-1}$. *Infatti abbiamo* (§. 139)

$$z = \sqrt[2k+1]{a + b\sqrt{-1}} = \beta' + \delta' \sqrt{-1},$$

e quindi

$$x^{2^r} = \sqrt[2k+1]{a + b\sqrt{-1}} = \beta' + \delta' \sqrt{-1}$$

laonde (§. 136)

$$x = \sqrt[2^r(2k+1)]{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt[2^r]{\beta' + \delta' \sqrt{-1}} = \beta'' + \delta'' \sqrt{-1}$$

e perciò

$$(\beta'' + \delta'' \sqrt{-1})^{2^r(2k+1)} = a + b\sqrt{-1}.$$

Dunque il sistema di quelle due equazioni può sostituirsi alla proposta.

dall'altro $[z] < 0$, l' equazione avrà qualche radice reale compresa fra quei valori: poichè fra l' uno e l'altro vi sarà certamente (§. 131 . 1°) un real valore, che preso per x annullerà il primo membro della $[z]$.

Di qui segue che, essendo n impari, indubitatamente la equazione avrà per lo meno una radice reale; poichè (§. 131. 2°) preso per x un valore negativo abbastanza grande, sarà $[z] < 0$, e presone uno positivo di sufficiente grandezza, sarà $[z] > 0$.

Segue ancora che essendo n pari, ed insieme $K < 0$, l'equazione avrà per lo meno due radici reali, positiva l'una, negativa l'altra: poichè fatto $x = 0$, si ottiene $[z] < 0$; quindi rappresentato con Δ un valore abbastanza grande, nascerà (§. 131. 2°) $[z] > 0$ prendendo tanto $x = \Delta$ quanto $x = -\Delta$.

142

Sia $K < 0$, e fra gli altri coefficienti, se ve n'abbiano > 0, questi (principiando da A, e con ordine procedendo verso H) si suppongano essere o uno, o due, o più, o quanti si vorranno sino ad H. Certamente l' equazione non mancherà di radice reale e positiva, ma una sola ve n' avrà cosiffatta.

Imperciocchè rappresentando con $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$ i valori numerici de'coefficienti A, B . . . H, K, e con m un numero intero e positivo $< n$, potrà scriversi la $[z]$ in questo modo

$$[z'] \; x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_m x^{n-m}$$

$$- a_{m+1} x^{n-m-1} - \ldots - a_{n-1} x - a_n = 0,$$

e riguardarsi la $[z']$ come il prodotto dei due fattori x^{n-m} ed

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_m - \left(\frac{a_{m+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-m-1}} + \frac{a_n}{x^{n-m}} \right) \; [z''].$$

Ciascun vede che nella variazione continua (§. 131 . 1°) della quantità x da $x = 0$ ad $x = +\infty$, tanti saranno i passaggi del polinomio $[z']$ per lo zero, quanti quelli del fattore $[z'']$ (85). Ora la parte

(85) *Infatti se, annullandosi l'altro fattore* x^{n-m}, *si an-*

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

dello stesso $[z'']$ progredisce da a_m verso $+\infty$, l'altra

$$-\left(\frac{a_{m+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-m-1}} + \frac{a_n}{x^{n-m}}\right)$$

da $-\infty$ a zero, e però tutto $[z'']$, crescendo continuamente, anderà da $-\infty$ a $+\infty$; dunque passerà $[z'']$, e conseguentemente $[z']$ per lo zero, ma solo una volta (86); perciò ec.

Quindi denotando μ quella radice reale e positiva, è manifesto che a qualunque valore della $x > \mu$ corrisponderà un valore del polinomio $[z'] > 0$, così che progredendo x da μ a $+\infty$, progredirà $[z']$ da zero a $+\infty$.

143

Preso $m = 0$, la $[z']$ diverrà

$$[z'''] \quad x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_{n-1} x - a_n = 0;$$

e indicata con α la radice reale e positiva di questa equazione, sarà $[z'''] > 0$ se $x > \alpha$, e crescendo x da α sino a $+\infty$, crescerà $[z''']$ da zero a $+\infty$. In quanto alla radice medesima noteremo quanto siegue. 1.° Si esprima con a il massimo di tutti i coefficienti $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-1}, a_n$, sarà

$$\alpha < a + 1.$$

---

nullasse $[z']$, *dovrebbe verificarsi* $a_n = 0$, *contro l'ipotesi. Dunque i passaggi per lo zero di* $[z']$ *sono tanti quanti quelli di* $[z'']$.

(86) *Infatti ponendo* $x = 0$ *si ottiene* $[z''] = -\infty$, *e ponendo* $x = \infty$ *si ottiene* $[z''] = \infty$; *dunque variando* x *come si è detto, crescerà* $[z']$ *da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *e perciò una sol volta passerà per lo zero, mediante un valore reale e positivo della* x.

Tale asserzione abbisogna di essere dimostrata solo per $\alpha > 1$. Essendo pertanto

$$[z^{IV}]\ \alpha^n = a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n ,$$

sarà

$$\alpha^n < a(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha + 1) ,$$

ovvero (§. 102)

$$\alpha^n < a\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} ;$$

quindi

$$\alpha - 1 < a\frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n} < a , \text{ ed } \alpha < a + 1.$$

2.° La $[z^{IV}]$ somministra

$$1 = \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \frac{a_n}{\alpha^n} ,$$

onde si raccoglie che i quoti

$$\frac{a_1}{\alpha} , \frac{a_2}{\alpha^2} , \ldots \frac{a_{n-1}}{\alpha^{n-1}} , \frac{a_n}{\alpha^n} ,$$

o saranno tutti $= \frac{1}{n}$, o altri $>$ ed altri $< \frac{1}{n}$; perciò

$$\frac{na_1}{\alpha} , \frac{na_2}{\alpha^2} , \ldots \frac{na_{n-1}}{\alpha^{n-1}} , \frac{na_n}{\alpha^n} ;$$

e quindi ancora

$$(g) \quad \frac{na_1}{\alpha} , \frac{(na_2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha} , \ldots \frac{(na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}{\alpha} , \frac{(na_n)^{\frac{1}{n}}}{\alpha} ,$$

o saranno tutti $= 1$, o altri $>$ ed altri < 1 : dunque la radice α starà fra il massimo e il minimo dei numeri

$$(g') \quad na_1 , (na_2)^{\frac{1}{2}} , \ldots (na_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} , (na_n)^{\frac{1}{n}} \quad (87).$$

Sia ora generalmente nel polinomio $[z]$

$$A = c_1 + d_1\sqrt{-1} , \; B = c_2 + d_2\sqrt{-1} \ldots K = c_n + d_n\sqrt{-1} ,$$

e riguardata la x come una grandezza continuamente variata, esprima $\beta + \delta\sqrt{-1}$ uno qualunque de' suoi valori; si faccia inoltre

$$[z] = p + q\sqrt{-1} , \; [z] - (\beta + \delta\sqrt{-1})^2 = p_1 + q_1\sqrt{-1} , \text{ e}$$

$$(c_1^2 + d_1^2)^{\frac{1}{2}} = k_1 , \; (c_2^2 + d_2^2)^{\frac{1}{2}} = k_2 \ldots , \; (c_n^2 + d_n^2)^{\frac{1}{2}} = k_n ,$$

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} = f , \; (p_1^2 + q_1^2)^{\frac{1}{2}} = f_1 , \; (\beta^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} = \omega .$$

Al certo f_1 non supera (§. 125 . *l* : 131 . 6°)

$$k_1\omega^{n-1} + k_2\omega^{n-2} + \ldots + k_n \quad (88).$$

---

(87) *Se i quoti* (g) *saranno tutti* $= 1$, *i numeri* (g') *saranno tutti* $= \alpha$: *se poi gli stessi quoti saranno in parte* $>$, *ed in parte* < 1 , *non potrà essere* α *nè uguale nè minore del minimo, nè uguale nè maggiore del massimo fra quei numeri. Poichè nel primo caso niuno dei* (g) *sarebbe* < 1 , *e nel secondo niuno dei medesimi sarebbe* > 1 , *contro la ipotesi. Dunque in ogni equazione* $[z'']$ *a coefficienti ognuno* < 0 , *tranne il primo, l' unica radice* α *reale e positiva che in essa dovrà esistere,* 1.° *sarà minore del massimo coefficiente numerico dell'equazione stessa, aumentato della unità;* 2.° *starà fra il massimo* e *il minimo dei numeri* (g'). *E se volesse supporsi che dei* (g) *altri fossero* $= 1$, *altri* < 1 , *ed altri* > 1 , *con egual ragionamento si giungerebbe alla stessa conseguenza.*

(88) *Perchè ciò s' intenda riflettasi che possiamo* (§. 110 : 108 . 2°) *stabilire queste relazioni*

Ora se f_1 non supera ω^n, certo (§. 125.*l*: 131.5°) non sarà f minore di $\omega^n - f_1$, nè perciò di (89)

$$\omega^n - k_1\omega^{n-1} - k_2\omega^{n-2} - \ldots - k_n \quad [z^r].$$

Denotando poi α la radice positiva (§. 143) della equazione $[z^r] = 0$, abbiamo costantemente $[z^r] > 0$ se $\omega > \alpha$; quindi non isvanirà f se $\omega > \alpha$, e però la equazione $[z] = 0$ non sarà soddisfatta per quei valori della $x = \beta + \delta\sqrt{-1}$ che somministrano $(\beta^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} > \alpha$.

Oltre a ciò, procedendo ω da α verso $+\infty$, procede $[z^r)$

$$(c_1 + d_1\sqrt{-1})(\beta + \delta\sqrt{-1})^{n-1} = a_1 + b_1\sqrt{-1}$$

$$(c_2 + d_2\sqrt{-1})(\beta + \delta\sqrt{-1})^{n-2} = a_2 + b_2\sqrt{-1}$$

eccetera . . .
Quindi avranno luogo eziandio le seguenti (§. 125 . *l*)

$$(c_1^2 + d_1^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2 + \delta^2)^{\frac{n-1}{2}} = (a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}} = k_1\omega^{n-1}$$

$$(c_2^2 + d_2^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2 + \delta^2)^{\frac{n-2}{2}} = (a_2^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}} = k_2\omega^{n-2}$$

eccetera . . .
Le quali cose premesse, poichè abbiamo per ipotesi

$$(c_1 + d_1\sqrt{-1})(\beta + \delta\sqrt{-1})^{n-1} + (c_2 + d_2\sqrt{-1})(\beta + \delta\sqrt{-1})^{n-2} +$$

$$\ldots\ldots + c_n + d_n\sqrt{-1} = p_1 + q_1\sqrt{-1},$$

così avremo (§. 131 . 6°)

$$(p_1^2 + q_1^2)^{\frac{1}{2}} \geq (a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}} + (a_2^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}} + \ldots + (c_n^2 + d_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

ovvero

$$f_1 \geq k_1\omega^{n-1} + k_2\omega^{n-2} + \ldots + k_n.$$

(89) *Ripresa la* $[z] - (\beta + \delta\sqrt{-1})^n = p_1 + q_1\sqrt{-1}$, *e fat-*

da zero verso $+\infty$; cresce dunque la f indefinitamente con ω, e perciò il minimo di tutti i valori che riceve la f pei cangiamenti della x, corrisponderà a dei valori di ω ed x, che non oltrepassano un certo determinato limite (90).

Quel valor minimo si rappresenti con $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$, al quale corrisponda $x = \beta' + \delta'\sqrt{-1}$, cosicchè sia

to in essa $(\beta + \delta\sqrt{-1})^n = \beta_1 + \delta_1\sqrt{-1}$, *sicchè abbiasi* (§. 125 . *l*)

$$(\beta^2+\delta^2)^{\frac{n}{2}} = (\beta_1^2 + \delta_1^2)^{\frac{1}{2}} = \omega^n, \text{ sarà}$$

$$(p + q\sqrt{-1}) - (p_1 + q_1\sqrt{-1}) = \beta_1 + \delta_1\sqrt{-1};$$

quindi (§. 131 . 5°),

$$(\beta_1^2 + \delta_1^2)^{\frac{1}{2}} \geq (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + (p_1^2 + q_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

ovvero $\omega^n \geq f + f_1$; *perciò se sarà* $f_1 \geq \omega^n$ *avremo* $f \leq \omega^n - f_1$, *e conseguentemente*

$$f \leq \omega^n - k_1\omega^{n-1} - k_2\omega^{n-2} - \ldots - k_n.$$

(90) *In questo luogo riflettasi primieramente che posto* $\omega > \alpha$, *sarà* (§. 143) $[z^\nu] > 0$, *cioè*

$$\omega^n > k_1\omega^{n-1} + k_2\omega^{n-2} + \ldots + k_n,$$

e perciò $f_1 < \omega^n$; *dunque dovrà essere ancora* $f < [z^\nu]$: *laonde posto* $\omega > \alpha$ *non si annullerà* f, *ecc. ecc.*

Secondariamente si scorge che la f essendo una variabile sempre positiva, non potrà a meno di non ammettere un valor minimo fra tutti quelli di cui è capace. Finalmente è chiaro che questo valor minimo di f corrisponderà a dei valori di x ed ω tali, da non superare un certo determinato limite; cioè il minimo di f corrisponderà ad un x che renda $\omega \geq \alpha$; *poichè crescendo f indefinitamente con ω fra i limiti* $\omega = \alpha$ *ed* $\omega = +\infty$, *ne viene che fatto* $\omega > \alpha$ *si ottiene per f un valore maggiore di quello che si otterrebbe facendo* $\omega = \alpha$.

$$(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^n + A(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{n-1} +$$
$$B(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{n-2} + \ldots\ldots + K = p + q'\sqrt{-1};$$

si faccia inoltre

$$\beta + \delta\sqrt{-1} = \beta' + \delta'\sqrt{-1} + \varphi,$$

sarà

$$p + q\sqrt{-1} = (\beta' + \delta'\sqrt{-1} + \varphi)^n + A(\beta' + \delta'\sqrt{-1} + \varphi)^{n-1} +$$
$$B(\beta' + \delta'\sqrt{-1} + \varphi)^{n-2} + \ldots\ldots + K,$$

che potrà così esprimersi (§. 110)

$$p+q'\sqrt{-1} = p'+q'\sqrt{-1}+(r_1+s_1\sqrt{-1})\varphi+(r_2+s_2\sqrt{-1})\varphi^2 + \left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\} [z^{VI}]$$
$$\ldots\ldots + (r_{n-1} + s_{n-1}\sqrt{-1})\varphi^{n-1} + \varphi^n \quad (91)$$

Pongasi 1.° che non si annulli $r_1 + s_1\sqrt{-1}$; denotando con γ un numero > 0, e preso

$$\varphi = -\gamma\,\frac{p' + q'\sqrt{-1}}{r_1 + s_1\sqrt{-1}},$$

si ridurrà la $[z^{VI}]$ a questa forma (§. 110 : 108. 2°)

$$p + q'\sqrt{-1} = (p' + q'\sqrt{-1})\,[1 - \gamma + (v_1 + \lambda_1\sqrt{-1})\gamma^2 + \ldots$$
$$\ldots + (v_{n-1} + \lambda_{n-1}\sqrt{-1})\gamma^n].$$

Pongasi 2.° che si annulli $r_1 + s_1\sqrt{-1}$, e fra le espressioni

$$r_1 + s_1\sqrt{-1},\ r_2 + s_2\sqrt{-1} \ldots,\ r_{n-1} + s_{n-1}\sqrt{-1}$$

(91) *A questa forma di equazione si giunge facendo le indicate sostituzioni nel polinomio* $[z]$, *e quindi ordinandolo rapporto alle potenze ascendenti di* φ, *e dando ai coefficienti delle medesime la consueta forma delle espressioni immaginarie, simboleggiata generalmente con* $r_h + s_h\sqrt{-1}$.

la prima di quelle che non isvaniscono venga rappresentata con $r_m + s_m\sqrt{-1}$: esisterà certamente (§. 108 . 2° : 136 . . . . 140) qualche valore

$$\varphi = \gamma\,(\varkappa + \downarrow\sqrt{-1}),$$

pel quale sarà soddisfatta la equazione

$$\varphi^m = -\gamma^m \frac{p' + q'\sqrt{-1}}{r_m + s_m\sqrt{-1}};$$

e fatte le sostituzioni nella $[z^{VI}]$ nascerà (§. 110 : 108 . 2°) una equazione di questa forma

$$p + q\sqrt{-1} = (p' + q'\sqrt{-1})\,[1 - \gamma^m + (v_1 + \lambda_1\sqrt{-1})\gamma^{m+1} + (v_2 + \lambda_2\sqrt{-1})\,\gamma^{m+2} + \ldots + (v_{n-m} + \lambda_{n-m}\sqrt{-1})\,\gamma^n]\ (92).$$

---

(92) *Parlando solo del 2.° caso, giacchè la nota* (80) *offre lo schiarimento al 1.°, avremo*

$$[z^{1^V}] \quad p + q\sqrt{-1} = p' + q'\sqrt{-1} + (r_m + s_m\sqrt{-1})\varphi^m + (r_{m+1} + s_{m+1}\sqrt{-1})\varphi^{m+1} + (r_{m+2} + s_{m+2}\sqrt{-1})\varphi^{m+2} + \ldots$$
$$\ldots\ldots + (r_{n-1} + s_{n-1}\sqrt{-1})\varphi^{n-1} + \varphi^n.$$

Ma facendo

$$\varphi^m = -\gamma^m \frac{p' + q'\sqrt{-1}}{r_m + s_m\sqrt{-1}}$$

si ha (§. 108 . 2° : 136 .... 140)

$$\varphi = \gamma(\varkappa + \downarrow\sqrt{-1})$$

e perciò (§. 108 . 2°)

$$(r_m + s_m\sqrt{-1})\,\varphi^m = -\gamma^m(p' + q'\sqrt{-1})$$

$$(r_{m+1} + s_{m+1}\sqrt{-1})\,\varphi^{m+1} = \frac{-\gamma^{m+1}(p' + q'\sqrt{-1})(\varkappa + \downarrow\sqrt{-1})}{r_m + s_m\sqrt{-1}}\,(r_{m+1} + s_{m+1}\sqrt{-1}) =$$

Valendoci qui di quello stesso ragionamento che usammo (§. 138) dopo aver ottenuto la (f^{VII}), dedurremo tanto nel 1.° quanto nel 2.° caso $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ (93): perciò

$$(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^n + A(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{n-1} + B(\beta' + \delta'\sqrt{-1})^{n-2} + \ldots + K = 0.$$

Donde manifestamente concludiamo che qualunque sieno i coefficienti A, B . . . H, K della equazione $[z] = 0$, vi saranno sempre uno, o più valori $x = \beta' + \delta'\sqrt{-1}$ atti a sod-

---

$$= \gamma^{m+1}(p' + q'\sqrt{-1})(\nu_1 + \lambda_1\sqrt{-1}),$$

$$(r_{m+2} + s_{m+2}\sqrt{-1})\varphi^{m+2} =$$

$$= -\frac{\gamma^{m+2}(p' + q'\sqrt{-1})(\chi + \psi\sqrt{-1})^2}{r_m + s_m\sqrt{-1}}(r_{m+2} + s_{m+2}\sqrt{-1}) =$$

$$= \gamma^{m+2}(p' + q'\sqrt{-1})(\nu_2 + \lambda_2\sqrt{-1}),$$

. . . . . .

$$(r_{n-1} + s_{n-1}\sqrt{-1})\varphi^{n-1} =$$

$$= -\frac{\gamma^{n-1}(p' + q'\sqrt{-1})}{r_m + s_m\sqrt{-1}}(\chi + \psi\sqrt{-1})^{n-m-1}(r_{n-1} + s_{n-1}\sqrt{-1}) =$$

$$= \gamma^{n-1}(p' + q'\sqrt{-1})(\nu_{n-m-1} + \lambda_{n-m-1}\sqrt{-1}),$$

$$\varphi^n = -\frac{\gamma^n(p' + q'\sqrt{-1})(\chi + \psi\sqrt{-1})^{n-m}}{r_m + s_m\sqrt{-1}} =$$

$$= \gamma^n(p' + q'\sqrt{-1})(\nu_{n-m} + \lambda_{n-m}\sqrt{-1});$$

e fatte queste sostituzioni nella $[z_1^{VI}]$, *avremo l'equazione sopra espressa.*

(93) *Ragionando come al* §. 138, *stabiliscasi*

$$(\nu_1^2 + \lambda_1^2)^{\frac{1}{2}} = \theta_1, (\nu_2^2 + \lambda_2^2)^{\frac{1}{2}} = \theta_2, \ldots (\nu^2_{n-m} + \lambda^2_{n-m})^{\frac{1}{2}} = \theta_{n-m}, \ldots$$

$$\ldots\ldots (\nu^2_{n-1} + \lambda^2_{n-1})^{\frac{1}{2}} = \theta_{n-1};$$

disfare alla medesima, ovvero, ciò che equivale, la equazione $[z] = 0$ avrà sempre una o più radici, reali o immaginarie.

Alquanto poi considerando apparirà (§. 139), che preso ad arbitrio un valore $x_1 = \beta_1 + \delta_1 \sqrt{-1}$, potrà nell' uno e l'altro caso da x_1 dedursi $x_2 = x_1 + \Phi_1$, così da x_2 trarsi $x_3 = x_2 + \Phi_2$, eccetera; cosicchè x_1, x_2, x_3, . . . si accostino sempre più a $\beta' + \delta'\sqrt{-1}$ (94). Nel resto le condizioni da verificarsi

---

non isvanendo $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$, *avremo* (§. 131 . 6° : 125 . *l*) *nel* 1.° *e nel* 2.° *caso rispettivamente*

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \gtrless (p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \gamma + \theta_1\gamma^2 + \theta_2\gamma^3 + \ldots + \theta_{n-1}\gamma^n)$$

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \gtrless (p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \gamma^m + \theta_1\gamma^{m+1} + \theta_2\gamma^{m+2} + \ldots + \theta_{n-m}\gamma^n).$$

E poichè la frazione γ *può talmente diminuirsi da produrre* (§. 131 . 2°)

$$\gamma > \theta_1\gamma^2 + \theta_2\gamma^3 + \ldots + \theta_{n-1}\gamma^n$$

$$\gamma^m > \theta_1\gamma^{m+1} + \theta_2\gamma^{m+2} + \ldots + \theta_{n-m}\gamma^n,$$

ovvero

$$[z^{VII}] \quad 1 > \theta_1\gamma + \theta_2\gamma^2 + \ldots + \theta_{n-1}\gamma^{n-1}$$

$$[z^{VIII}] \quad 1 > \theta_1\gamma + \theta_2\gamma^2 + \ldots + \theta_{n-m}\gamma^{n-m},$$

ne siegue che se non isvanisce $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$, *sarà tanto nel* 1.° *quanto nel* 2.° *caso*

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} < (p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}},$$

lo che opponendosi alla ipotesi dalla quale siamo partiti, cioè che $(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}$ *sia il minimo fra tutti li valori di* f, *ne segue che dovrà essere*

$$(p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

in ambedue i casi; perciò ecc.

(94) *Vedi la nota* 83 *pag.* 140.

$$1 > \theta_1 \gamma + \theta_2 \gamma^2 + \ldots + \theta_{n-1} \gamma^{n-1} \ldots [z^{VII}]$$

$$1 > \theta_1 \gamma + \theta_2 \gamma^2 + \ldots + \theta_{n-m} \gamma^{n-m} \ldots [z^{VIII}],$$

una nel primo, l'altra nel secondo caso, possono così esprimersi

$$[z^{IX}] \quad \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1} - \theta_1 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-2} - \theta_2 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-3} - \ldots - \theta_{n-1} > 0$$

$$[z^{X}] \quad \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-m} - \theta_1 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-m-1} - \theta_2 \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-m-2} - \ldots - \theta_{n-m} > 0.$$

In quanto alla $[z^{IX}] > 0$, denotando θ il massimo fra $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots \theta_{n-1}$, la equazione $[z^{IX}] = 0$ darà (§. 143) il valore positivo di $\frac{1}{\gamma} < \theta + 1$; perciò fatto $\frac{1}{\gamma} = \theta + 1$, avremo $[z^{IX}] > 0$, e conseguentemente preso $\gamma = \frac{1}{\theta + 1}$, sarà soddisfatta la condizione $1 > [z^{VII}]$ (95).

Riguardo poi alla $[z^{X}] > 0$, significando θ il massimo fra i valori $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_{n-m}$, similmente dimostrasi, che la condizione $1 > [z^{VIII}]$ verrà soddisfatta per mezzo di $\gamma = \frac{1}{\theta + 1}$.

145

Si rappresenti per h una radice reale o immaginaria della equazione $[z] = 0$, sarà

(95) *Perciò a soddisfare la* (f^{VIII}) *del* §. 138, *invece di tentare per* γ (§. 139) *i valori* $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \ldots$. *basterà porre* $\gamma = \frac{1}{\theta + 1}$.

$$K = -h^n - Ah^{n-1} - Bh^{n-2} - \ldots - Hh\,;$$

perciò

$$[z] = x^n - h^n + A(x^{n-1} - h^{n-1}) + B(x^{n-2} - h^{n-2}) + \ldots + H(x-h).$$

Ma in generale abbiamo (§. 102)

$$\left(\frac{x}{h}\right)^m - 1 = \left\{1 + \frac{x}{h} + \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{x}{h}\right)^{m-1}\right\}\left(\frac{x}{h} - 1\right),$$

e quindi

$$x^n - h^m = (x^{m-1} + hx^{m-2} + h^2x^{m-3} + \ldots + h^{m-1})(x-h).$$

Dunque riducesi $[z]$ a questa forma

$$(x-h)(x^{n-1} + B_1x^{n-2} + C_1x^{n-3} + \ldots + H_1x + K_1).$$

Similmente, rappresentata con i una radice reale o immaginaria della equazione

$$[z^{XI}]\ x^{n-1} + B_1x^{n-2} + C_1x^{n-3} + \ldots + H_1x + K_1 = 0\,,$$

si ridurrà nella stessa guisa la $[z^{XI}]$ alla

$$(x-i)\,(x^{n-2} + C_2x^{n-3} + D_2x^{n-4} + \ldots + H_2x + K_2)\,,$$

e così appresso; laonde si risolverà finalmente la $[z]$ in un prodotto di n fattori di primo grado, aventi questa forma

$$x-h\,,\ x-i\,,\ x-l\,,\ \ldots\ x-t\,,$$

cioè

$$[z^{XII}]\ x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Hx + K = (x-h)(x-i)(x-l)\ldots(x-t).$$

Ma poichè la $[z^{XII}]$ e si annulla, qualunque delle n quantità h, i $\ldots$ t si prenda per x, e non può in altro modo (§.125 annullarsi, perciò la equazione $[z] = 0$ avrà certamente n radici, ma non altre che le determinate dalle formule

$$x-h = 0\,,\ x-i = 0\,,\ x-l = 0\,,\ \ldots\ x-t = 0.$$

Ognun vede che fatto come nel §. 126

$$\mathrm{A} = \frac{a_1}{a_0}, \ \mathrm{B} = \frac{a_2}{a_0} \ldots . \ \mathrm{H} = \frac{a_{n-1}}{a_0}, \ \mathrm{K} = \frac{a_n}{a_0},$$

sarà

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x-h)(x-i)(x-l)\ldots(x-t).$$

146

Il prodotto degli n fattori $x-h$, $x-i$, $\ldots$ $x-t$ è formato per modo, che preso $i = h$, $l = h$, $\ldots$ $t = h$, si riduce (§. 110 . e') ad

$$x^n - nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} - \ldots \mp h^n.$$

Di qui facilmente ricavasi (§. 111 . I.°) che quel prodotto sarà

$$x^n - (h + i + \ldots + s + t)x^{n-1} +$$

$$(hi + hl + \ldots + ht + il + \ldots + st)\,x^{n-2} + \ldots \mp hi \ldots st,$$

e perciò avremo (§. 145 [z^{XII}] : 131 . 7.°)

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{A} &= h + i + \ldots + s + t, \\ \mathrm{B} &= hi + hl + \ldots + ht + il + \ldots + st, \\ &\text{eccetera} \ldots . \\ \mp\mathrm{H} &= hil \ldots s + hil \ldots t + \ldots + il \ldots st, \\ \pm\mathrm{K} &= hil \ldots rst. \end{aligned}\right\} [z^{XIII}].$$

Da ciò apparisce che quando in una equazione di grado n^{mo} il coefficiente del primo termine = 1, il coefficiente del secondo, preso col segno contrario, eguaglia la somma di tutte le radici; il coefficiente del terzo, preso col segno proprio, eguaglia la somma de' prodotti binari delle medesime; il coefficiente del quarto, preso col segno contrario, eguaglia la somma de' prodotti ternari di esse; e così successivamente: l' ultimo termine poi, preso col proprio segno o col segno contrario, secondo che

sarà n pari o impari, eguaglia il prodotto di tutte insieme (96).

Di qui si deduce 1.° che se una delle radici per es. h si annulla, sarà $K = 0$; se due v. g. h ed i si annullano a un tempo, oltre $K = 0$ sarà eziandio $H = 0$, eccetera . . . . . 2.° che cambiati i segni delle radici tutte, si cambierà nell' equazione il segno del secondo termine, rimarrà quello del terzo, cambierassi quello del quarto, e così appresso. 3.° Che sostituiti ah, ai, al, . . . in vece di h, i, l, . . .; i coefficienti A, B . . . H, K diverranno aA, a^2B, . . . a^{n-1}H, a^nK: si moltiplicheranno cioè le radici tutte dell'equazione $[z] = 0$ per la quantità a, ogni qual volta ciascun termine dell' equazione stessa si moltiplichi per ciascuno della serie 1, a, a^2, a^3 . . . . . a^n. 4.° Che la equazione $[z] = 0$ potrà facilmente spogliarsi di tutte le frazioni dei coefficienti, senza che il primo suo termine acquisti un coefficiente diverso dalla unità: imperciocchè rappresentati con b, c, d, . . . i denominatori di quelle frazioni, basterà per questo moltiplicare ciascun termine della equazione per ciascuno della serie

$$1, (bcd \ldots), (bcd \ldots)^2 \ldots (bcd \ldots)^n.$$

Le radici poi della equazione così formata, non saranno altro che quelle di $[z] = 0$ moltiplicate per bcd . . . . 5.° Che se invece delle h, i, l, ... sostituiscansi le $h + a$, $i + a$, $l + a$, ... si aumenteranno le radici tutte della quantità a, ed il coefficiente A si cambierà in $A - na$. Quindi se in $[z] = 0$ si ponga $x - \frac{A}{n}$ in vece della x, nascerà una equazione priva di secondo termine.

---

(96) *Risultando dalle* [zXIII] *che i coefficienti debbono prendersi col segno contrario o proprio, secondo che sono in sede pari od impari nella equazione cui appartengono, è chiaro che se il grado n sarà pari od impari, l' ultimo termine K starà in sede impari o pari, e perciò esso dovrà prendersi col segno proprio nel primo caso, col contrario nel secondo, affinchè eguagli il prodotto di tutte le radici della equazione stessa.*

In [z] suppongansi reali i coefficienti A , B . . . H , K. Sostituito alla x prima $u + v\sqrt{-1}$, poi $u - v\sqrt{-1}$, giacchè si ha generalmente (§. 110 . *e'*)

$$(u + v\sqrt{-1})^m = U_1 + V_1\sqrt{-1} ,$$

$$(u - v\sqrt{-1})^m = U_1 - V_1\sqrt{-1} ,$$

quindi nel primo caso si ridurrà [z] ad $U + V\sqrt{-1}$, nel secondo ad $U - V\sqrt{-1}$; ma non può una di tali espressioni essere = o senza che lo sia parimenti l' altra ; dunque in quella ipotesi non potrà la equazione [z] = o ammettere una radice immaginaria $u + v\sqrt{-1}$, senza che ammetta eziandio la sua coniugata (§. 102) $u - v\sqrt{-1}$: perciò il numero delle radici immaginarie non potrà essere che pari. Abbiamo ancora

$$(x - u - v\sqrt{-1})\ (x - u + v\sqrt{-1}) = (x - u)^2 + v^2 ;$$

che però nella medesima ipotesi il polinomio [z] si potrà risolvere in fattori reali , di primo o di secondo grado.

Inoltre se i coefficienti A , B . . . K sono interi, non avrà l' equazione [z] = o alcuna radice reale e razionale veramente fratta : ciò è manifesto e per le cose dette (146 : z^{XIII}) , e perchè una frazione , il denominatore della quale non misuri esattamente il numeratore , congiunta con altra quantità , non può dare un intero , salvo che questa con cui si congiunge non sia una frazione dello stesso denominatore (97). Quin-

(97) *Supponendo che la* [z] = o *a coefficienti interi ammetta una radice razionale veramente fratta, dovrà essere, per quello si è detto , ripugnante almeno la prima delle* [z^{XIII}] §. 146. *Se ne ammetterà due , sarà certo ripugnante la seconda delle stesse* [z^{XIII}] ; *e così appresso. In genere se la* [z] = o *ammetterà r di simili radici , senza dubbio la* r^{ma} *delle citate equazioni sarà impossibile , o che è lo stesso , il termine* $\overline{r+1}^{mo}$ *della stessa* [z] = o *sarà fratto , contro l'ipotesi.*

di se nell' equazione spogliata di qualunque frazione si abbia qualche radice reale e razionale, questa certamente si troverà fra i divisori interi dell'ultimo termine; de'quali se niuno soddisfi alla equazione, certamente potrà inferirsene che la medesima non ha veruna radice razionale.

148

Giova qui di passaggio notare che se nella

$$\frac{x^n + Ax^{n-1} + \ldots + K}{x^m + Mx^{m-1} + \ldots + R}$$

sostituiscasi ad x qualunque radice, nata dal numeratore, ma non comune, al denominatore, o viceversa; la frazione proposta diverrà $= 0$, ovvero $= \infty$; ma preso per x il valore di una radice comune tanto al numeratore quanto al denominatore, (se di siffatte ve ne sieno) la frazione avrà o qualche valore definito diverso dallo zero, o sarà $= 0$, ovvero $= \infty$, secondo che il numero delle radici di quel valore sarà nel numeratore, o eguale, o maggiore, o minore che nel denominatore. E poichè la frazione stessa tanto nel primo, quanto nel secondo e terzo caso (purchè conservi tutti i fattori) prende la forma $\frac{0}{0}$, quindi è che tal forma si dice indeterminata (98).

---

(98) *Suppongasi che il numeratore ed il denominatore della frazione in proposito abbiano il primo p, il secondo q radici, ciascuna = a. Fatto* (§. 145).

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots + K = (x-a)^p P,$$

$$x^m + Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + \ldots + R = (x-a)^q Q,$$

la frazione medesima prenderà questa forma

$$\frac{(x-a)^p P}{(x-a)^q Q},$$

Della risoluzione dell' equazioni di terzo e quarto grado a coefficienti reali.

149

Nella equazione $[z] = 0$ fatto $n = 3$, e tolto (§. 146 : 5°) il secondo termine, si avrà

$$x^3 + Hx + K = 0 \ldots\ldots (r);$$

a risolver la quale pongasi

$$x = u + v:$$

si avrà

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v);$$

onde

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0.$$

Questa ricade nella (r) se prendansi u e v per modo, che sussistano insieme le

$$\left.\begin{aligned} uv &= -\frac{H}{3}, \\ u^3 + v^3 &= -K. \end{aligned}\right\} (r')$$

---

nella quale posto a in luogo della x, secondo che p sarà $=$, $>$, *ovvero* $< q$, *la frazione diverrà nel primo caso* $= \frac{P}{Q}$, *valore determinato diverso dallo zero; nel secondo* $= 0$; *e nel terzo* $= \infty$. *Ma se i fattori* $(x-a)$ *comuni ai due termini non si sopprimano, la frazione stessa in ognuno dei tre casi precedenti riceverà la forma* $\frac{0}{0}$, *la quale perciò si dovrà dire indeterminata.*

Adunque la risoluzione della equazione (r) dipende dalla risoluzione delle due (r'). Ma u^3 e v^3 sono (§. 146) radici della equazione

$$z^2-(u^3+v^3)z+u^3v^3=0\,,$$

ovvero, per le (r'), della

$$z^2+\mathrm{K}z-\frac{\mathrm{H}^3}{27}=0\ldots.\ (r'').$$

Laonde se con z_1, z_2 si denotino le radici della equazione (r''), si avranno (§. 115) per u i tre seguenti valori

$$z_1^{\frac{1}{3}},\ \frac{-1+3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}\,z_1^{\frac{1}{3}},\ \frac{-1-3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}\,z_1^{\frac{1}{3}};$$

e per v questi altri

$$z_2^{\frac{1}{3}},\ \frac{-1+3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}\,z_2^{\frac{1}{3}},\ \frac{-1-3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}\,z_2^{\frac{1}{3}}\ (99);$$

e poichè u, v, onde risulti la x dalla loro somma, fa d' uopo che soddisfino alla prima delle (r); perciò, avendosi

$$\left(\frac{-1+3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}\right)\left(\frac{-1-3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}\right)=1\ \ (100),$$

(99) *Essendo* $u=\sqrt[3]{z_1}$, *e* $v=\sqrt[3]{z_2}$, *i primi tre valori sono relativi alla potenza* $z_1^{\frac{1}{3}}$, *ed i secondi tre alla* $z_2^{\frac{1}{3}}$.

(100) *Ciò costituisce il criterio per la formazione delle tre radici della* (r).

le radici (§. 145) x_1, x_2, x_3 della equazione (r) saranno così espresse

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= z_1^{\frac{1}{3}} + z_2^{\frac{1}{3}} \\ x_2 &= \frac{-1 + 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2} z_1^{\frac{1}{3}} + \frac{-1 - 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2} z_2^{\frac{1}{3}} \\ x_3 &= \frac{-1 - 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2} z_1^{\frac{1}{3}} + \frac{-1 + 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2} z_2^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} (r''')$$

Quanto alle z_1, z_2, saranno (§. 135 : *i*VIII)

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{H^3}{27}} \\ z_2 &= -\frac{K}{2} - \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{H^3}{27}} \end{aligned}\right\} (r^{IV})$$

se $\frac{K^2}{4} + \frac{H^3}{27} > 0$;

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -\frac{K}{2} + \left(-\frac{K^2}{4} - \frac{H^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} \\ z_2 &= -\frac{K}{2} - \left(-\frac{K^2}{4} - \frac{H^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} (r^{V})$$

se $\frac{K^2}{4} + \frac{H^3}{27} < 0$.

150

Si prenda l'equazione di secondo grado

$$x^2 + 2ax + a^2 - 3c = 0,$$

le di cui radici

$$-a+\sqrt{3c}\ ,\ -a-\sqrt{3c}$$

sono reali o immaginarie, secondo che $c >$ ovvero $< o$. Affinchè tal equazione divenga di terzo grado, e priva del secondo termine, deve moltiplicarsi (§. 146) per $x - 2a = o$ (101); si avrà così

$$x^3-3(a^2+c)x+6ac-2a^3=o:$$

quindi

$$\frac{H}{3}=-a^2-c\ ,\ \frac{K}{2}=3ac-a^3,$$

e conseguentemente

$$\frac{K^2}{4}+\frac{H^3}{27}=(3ac-a^3)^2-(a^2+c)^3=-9a^4c+6a^2c^2-c^3=-c(3a^2-c)^2;$$

il qual valore essendo negativo o positivo, secondo che $c >$, ovvero $< o$, ne siegue che la quantità $\frac{K^2}{4}+\frac{H^3}{27}$ sarà $< o$ nel caso delle radici x_1, x_2, x_3 tutte reali (102); sarà poi $> o$ nel caso di due radici immaginarie; che se $c = o$, avremo

$$\frac{K^2}{4}+\frac{H^3}{27}=o$$

---

(101) *Moltiplicando per questo fattore di primo grado la proposta, diventa essa di terzo grado con la somma delle sue tre radici nulla; dovrà perciò esser priva del secondo termine.*

(102) *Dunque nel caso in cui si verifichi* $\frac{K^2}{4}+\frac{H^3}{27}<o$, *le tre radici della* (r) *saranno reali, e ciò non ostante le formule* (r''') *vestiranno tutte l' aspetto immaginario, dal quale non essendosi mai potute liberare con esatti processi algebrici, si è detto* irriducibile *il caso medesimo.*

e perciò sarà

$$\left.\begin{aligned} x_1 = 2a = -2\left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ x_2 = x_3 = -a = \left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} (r^{VI})$$

151

Poichè i secondi membri delle (r''') debbono essere reali (§. 150) ove sia $\frac{K^2}{4} + \frac{H^3}{27} < 0$; e poichè

$$\gamma^3 - z_1 = 0$$

ne somministra (§. 138 : 139)

$$\gamma = z_1^{\frac{1}{3}} = \beta' + \delta'\sqrt{-1} ;$$

al certo se facciasi

$$t^3 - z_2 = 0$$

si avrà

$$t = z_2^{\frac{1}{3}} = \beta' - \delta'\sqrt{-1} \ (103) ,$$

e saranno

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2\beta' \\ x_2 &= -\beta' - 3^{\frac{1}{2}}\delta' \\ x_3 &= -\beta' + 3^{\frac{1}{2}}\delta' \end{aligned}\right\} (r^{VII})$$

(103) *Le formule* (r'') , §. 149 , *non differiscono fra loro che nel segno della seconda parte , perciò avendosi* $z_1^{\frac{1}{3}} = \beta' + \delta'\sqrt{-1}$ *dalla prima di esse , dovrà necessariamente aversi* $z_2^{\frac{1}{3}} = \beta' - \delta'\sqrt{-1}$ *dalla seconda.*

Esempi.

1.° Sia proposta la equazione

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 20 = 0$$

la quale, (§. 146 : 5°) fatta la sostituzione di $x + 2$ in luogo della x, si trasformerà in

$$x^3 - 9x + 10 = 0 :$$

saranno adunque

$$H = -9, K = 10, \text{ e } \frac{K^2}{4} + \frac{H^3}{27} = -2 < 0,$$

perciò (§. 149 : r^v)

$$z_1 = -5 + 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} = (1 + 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})^3$$

$$z_2 = -5 - 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} = (1 - 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})^3;$$

onde

$$z_1^{\frac{1}{3}} = 1 + 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \; z_2^{\frac{1}{3}} = 1 - 2^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

e conseguentemente (§. 151)

$$\beta' = 1 \quad , \quad \delta' = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Quindi (r^{VII})

$$x_1 = 2, \; x_2 = -1 - \sqrt{6}, \; x_3 = -1 + \sqrt{6},$$

ai quali valori aggiunto 2, si avranno le radici della proposta equazione così espresse, 4, $1 - \sqrt{6}$, $1 + \sqrt{6}$.

II.° Abbiasi ancora

$$x^3 + 3x - 14 = 0;$$

saranno

$$H = 3, K = -14, \text{ e } \frac{K^2}{4} + \frac{H^3}{27} = 50 > 0.$$

Però (§. 149 : r^{IV})

$$z_1 = 7 + \sqrt{50} = (1 + \sqrt{2})^3 \ , \ z_2 = 7 - \sqrt{50} = (1 - \sqrt{2})^3 ;$$

onde

$$z_1^{\frac{1}{3}} = 1 + \sqrt{2} \ , \ z_2^{\frac{1}{3}} = 1 - \sqrt{2},$$

e conseguentemente (§. 149 : r^{III})

$$x_1 = 2 \ , \ x_2 = -1 + 6^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} \ , \ x_3 = -1 - 6^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

III.° Sia finalmente

$$x^3 - 12x + 16 = 0 ;$$

saranno

$$H = -12 , K = 16, \text{ e } \frac{K^2}{4} + \frac{H^3}{27} = 0;$$

perciò (§. 150 : r^{VI})

$$x_1 = -4 \ , \ x_2 = x_3 = 2.$$

152

Si noti qui di passaggio, che se i coefficienti H , K fossero immaginari, si determinerebbero prima le z_1 , e z_2 mediante le (i^{IX} : §. 135) , poi le $z_1^{\frac{1}{3}}$ e $z_2^{\frac{1}{3}}$ per le cose dette (§. 138 : 139). Passiam' ora all' equazioni di quarto grado.

153

Nella equazione $[z] = 0$ fatto $n = 4$, e tolto (§. 146 : 5°) il suo secondo termine si avrà

$$x^4 + Gx^2 + Hx + K = 0 \ . \ . \ . \ (r^{VIII}) ;$$

a risolver la quale pongasi

$$x = u + v + w.$$

Si avrà

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw);$$

ed ancora

$$[x^2 - (u^2 + v^2 + w^2)]^2 = 4(uv + uw + vw)^2 =$$

$$4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w);$$

finalmente

$$x^4 - 2(u^2+v^2+w^2)x^2 - 8uvwx + (u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) = 0$$

Questa poi ricade nella (r^{VIII}), se assumansi u, v, w per modo, che sussistano insieme le seguenti

$$2(u^2 + v^2 + w^2) = -G, \quad 8uvw = -H,$$

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = K,$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= -\frac{G}{2}, \quad uvw = -\frac{H}{8}, \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 &= \frac{G^2}{16} - \frac{K}{4}. \end{aligned}\right\} (r^{IX})$$

La risoluzione adunque della (r^{VIII}) dipende dalla risoluzione delle tre (r^{IX}). Ma u^2, v^2, w^2 sono (§. 146) radici della equazione

$$z^3 - (u^2 + v^2 + w^2)z^2 + (u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)z - u^2v^2w^2 = 0,$$

ovvero della

$$z^3 + \frac{G}{2}z^2 + \left(\frac{G^2}{16} - \frac{K}{4}\right)z - \frac{H^2}{64} = 0 \ldots (r^X).$$

Però se con z_1, z_2, z_3 si esprimano le radici dell' equazione (r^X), saranno (§. 133 : 134 : i^{VII} : i^{VI})

$$u = \pm\sqrt{z_1}\ ,\ v = \pm\sqrt{z_2}\ ,\ w = \pm\sqrt{z_3}\ (104).$$

E poichè le u , v , w debbono essere tali , affinchè dalla loro somma nasca x , da soddisfare alla seconda delle (r^{IX}) ; perciò le radici x_1 , x_2 , x_3 , x_4 della equazione (r^{VIII}) si esprimeranno così

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_2 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ x_3 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ x_4 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \end{aligned}\right\} (r^{\text{XI}})$$

se H $<$ o , ed

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ x_2 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_3 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_4 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \end{aligned}\right\} (r^{\text{XII}})$$

se H $>$ o (105).

(104) *Avendosi* $u^2 = z_1$, $v^2 = z_2$, $w^2 = z_3$ *si avranno le tre citate equazioni , per le quali dovremo valerci delle* (i''' : §. 133) *quante volte la grandezza posta sotto il radical vincolo sia reale , e delle* (i^{VI} §. 134) *se la grandezza medesima sia immaginaria.*

(105) *Se* $H <$ o , *la seconda delle* (r^{IX}) *avrà il secondo suo membro positivo ; perciò i tre valori delle* u , v , w *che debbono a quella soddisfare , dovranno combinarsi per modo , che il prodotto loro sempre sia positivo ; come appunto si verifica nelle* (r^{XI}). *Accaderà il contrario se* $H >$ o , *dacchè il prodotto stesso dovrà essere sempre negativo , e perciò avrà necessariamente luogo il sistema delle* (r^{XII}). *Adunque la seconda delle* (r^{IX}) *costituisce il criterio per la formazione delle quattro radici della* (r^{VIII}).

Esempio.

Sia data la equazione

$$x^4 - 12x^2 - 16.3^{\frac{1}{2}}x - 16 = 0.$$

saranno

$$G = -12\ ,\ H = -16.3^{\frac{1}{2}}\ ,\ K = -16;$$

perciò la (r^X) diventerà

$$z^3 - 6z^2 + 13z - 12 = 0\ ,$$

le cui radici sono

$$z_1 = 3\ ,\ z_2 = \frac{3 + 7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}\ ,\ z_3 = \frac{3 - 7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{2}.$$

E poichè $H < 0$, perciò

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{\frac{(3+7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2}} + \sqrt{\frac{(3-7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2}},$$

$$x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{(3+7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2}} - \sqrt{\frac{(3-7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2}},$$

$$x_3 = -\sqrt{3} + \sqrt{\frac{(3+7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2}} - \sqrt{\frac{(3-7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2}},$$

$$x_4 = -\sqrt{3} - \sqrt{\frac{(3+7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2}} + \sqrt{\frac{(3-7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2}}.$$

Ma (§. 134 : i^{VI})

$$\sqrt{\frac{(3 \pm 7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})}{2}} = \frac{7^{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{-1}}{2};$$

dunque le quattro radici della proposta equazione si ridurranno alle seguenti

$$\sqrt{3} + \sqrt{7}\ ,\ \sqrt{3} - \sqrt{7}\ ,\ -\sqrt{3} + \sqrt{-1}\ ,\ -\sqrt{3} - \sqrt{-1}.$$

154

Avendosi dalla seconda delle (r^{IX})

$$z_1 z_2 z_3 = \frac{H^2}{64},$$

una per lo meno (§. 141 : 147) delle radici z_1, z_2, z_3, per es. z_1 sarà positiva, le altre poi z_2, z_3 saranno ambedue o positive, o negative, o immaginarie. Nel primo caso le radici x_1, x_2, x_3, x_4 della equazione (r^{VIII}) si otterranno tutte reali: nel secondo tutte immaginarie, salvo che non sia $z_2 = z_3$; imperciocchè posta questa eguaglianza, nel secondo caso due saranno le radici reali della (r^{VIII}), e due le immaginarie. Nel terzo caso finalmente si avranno ancora due radici reali della stessa (r^{VIII}), e due immaginarie (106).

155

Come notammo riguardo alla (r), così riguardo alla (r^{VIII}) noteremo di passaggio che, se i coefficienti G, H, K sono immaginari, si determineranno le z_1, z_2, z_3 per le cose dette (§. 152), e quindi le $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ mediante le $(i^{III} : i^{VI} : §. 133 : 134)$.

---

(106) *In questo terzo caso dovendo essere le* z_2, z_3 *ambedue immaginarie, sarà* (§. 147)

$$z_2 = A + B\sqrt{-1}, \quad z_3 = A - B\sqrt{-1},$$

onde (§. 134 : i^{VI}) *avremo*

$$\sqrt{z_2} = A_1 + B_1\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{z_3} = A_1 - B_1\sqrt{-1}.$$

Sostituiti questi valori tanto nelle (r^{XI}) *quanto nelle* (r^{XII}), *sempre si avranno per la* (r^{VIII}) *due radici reali, e due immaginarie.*

Delle formule intere e simmetriche rapporto alle radici dell' equazioni.

156

Una formula dicesi intera in ordine alle radici, che contiene, di un' equazione, quante volte abbia il denominatore libero dalle medesime: dicesi poi simmetrica se, vicendevolmente cambiate l' una nell' altra due qualunque radici, tuttavia si rimanga la stessa; come può vedersi nei secondi membri delle [z^{XIII}]: le formule di tal sorta saranno indicate da noi con S.

157

Le radici h, i, l, p . . . s, t dell' equazione $[z] = 0$ si pongano ineguali; e 1.° si prenda $n = 2$, onde la medesima si riduca (§. 145) alla

(107) $x^2 + Ax + B = (x-h)(x+h+A) = (x-i)(x+i+A) = 0$.

La formula S ordinata rapporto ad i (§. 104) si divida per $i + h + A$; si giungerà ad un residuo R' privo della radice i; e rappresentato il quoto per Q', sarà

$$S = Q'(i + h + A) + R'.$$

La stessa S ordinata rapporto ad h si divida per $h + i + A$; si perverrà ad un residuo R'' privo della radice h; ed espresso con Q'' il quoto, sarà

$$S = Q''(h + i + A) + R''.$$

Ma (§. 146)

---

(107) *Essendo* (§. 146) $-A = h + i$, *sarà* $-i = h + A$, *laonde* $x - i = x + h + A$, *e similmente* $x - h = x + i + A$. *Però la forma di questi fattori dipende* (§. 145) *da una legge che verrà dichiarata generalmente nella nota* (109).

$$i + h + A = h + i + A = 0 ;$$

poichè dunque si suppone simmetrica la S, perciò sarà

$$S = R' = P_0 h^m + P_1 h^{m-1} + \ldots + P_{m-1} h + P_m$$

$$S = R'' = P_0 i^m + P_1 i^{m-1} + \ldots + P_{m-1} i + P_m \quad (108).$$

Dei residui R' ed R'' il primo si divida per $h^2 + Ah + B$, il secondo per $i^2 + Ai + B$, e si esprimano con Q''', Q^{IV} i quoti, e con R''', R^{IV} i nuovi residui; avremo

$R' = Q'''(h^2 + Ah + B) + R'''$, $R'' = Q^{IV}(i^2 + Ai + B) + R^{IV}$:

ma

$$h^2 + Ah + B = 0 \ , \ i^2 + Ai + B = 0 ;$$

dunque

$$S = R''' \ , S = R^{IV} ,$$

nei quali residui non si contengono affatto le radici h, i; altrimenti si avrebbero le

$$S = p_0 h + p_1 \ , \ S = p_0 i + p_1 ;$$

cioè dire l'equazione di primo grado

$$p_0 x + p_1 = S$$

sarebbe soddisfatta da due valori ineguali $x = h$, $x = i$; lo che non può aver luogo (§. 145).

(108) *A ben comprendere in questo ed in altri simili casi la forma de'polinomi che rappresentano il valore di S riflettasi, che per la supposta simetria, le divisioni da cui nascono i residui R', R'' sono tali da cangiarsi l'una nell'altra solo permutando h in i, o viceversa; ragion vuole adunque che que' residui si cangino similmente l' uno nell' altro per le medesime permutazioni. Ma ciò importa evidentemente, che ordinato R' per h ed R'' per i, sieno gli stessi i coefficienti delle corrispondenti potenze di h ed i: dunque ecc. . . . .*

Si prenda 2° $n=3$ sicchè l'equazione $[z]=0$ si riduca (§.145) alla

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C =$$

$$=(x-h)[x^2+(h+A)x+h^2+Ah+B]=(x-i)[x^2+(i+A)x+i^2+Ai+B]$$

$$=(x-l)[x^2+(l+A)x+l^2+Al+B]=0 \text{ (109) :}$$

saranno

$$x^2+(h+A)x+h^2+Ah+B=(x-i)(x+i+h+A)=0$$

$$x^2+(i+A)x+i^2+Ai+B=(x-l)(x+l+i+A)=0$$

$$x^2+(l+A)x+l^2+Al+B=(x-h)(x+h+l+A)=0$$

---

(109) *Essendo* γ *una qualunque radice della equazione* $[z]=0$ *di grado* n^{mo}, *sarà* (§. 145)

$$[z]=x^n-\gamma^n+A(x^{n-1}-\gamma^{n-1})+B(x^{n-2}-\gamma^{n-2})+\ldots+H(x-\gamma)$$

esattamente divisibile (§. 102) *per* $x-\gamma$. *Fatta questa divisione, ed ordinato il quoziente per le potenze discendenti della* x, *avremo*

$$x^{n-1}+B_1x^{n-2}+C_1x^{n-3}+\ldots+H_1x+K_1=0,$$

in cui sarà

$$B_1=\gamma+A,\quad C_1=\gamma^2+A\gamma+B,\quad D_1=\gamma^3+A\gamma^2+B\gamma+C,$$

. . . . . .

$$H_1=\gamma^{n-2}+A\gamma^{n-3}+\ldots+G,\quad K_1=\gamma^{n-1}+A\gamma^{n-2}+\ldots+H.$$

Dunque dividendo la $[z]=0$ *per uno qualunque* $x-\gamma$ *de' suoi fattori semplici, l'equazione che se ne otterrà, oltre ad avere il grado diminuito di uno, avrà qualunque de' suoi coefficienti, cioè l'* $\overline{r+1}^{mo}$ *espresso da un polinomio in* γ, *di grado* r, *e coi primi* $r+1$ *coefficienti della proposta similmente disposti. Facilmente ora s'intenderanno le decomposizioni in fattori, qui ed appresso eseguite, sopra l'equazioni.*

Ora se per $l+i+h+\mathrm{A}$ dividasi S ordinata per l, si giungerà ad un residuo privo della radice l; ordinato questo per i, e diviso per $i^2+(h+\mathrm{A})i+h^2+\mathrm{A}h+\mathrm{B}$ darà (1.°) un residuo R′ contenente la sola radice h; e sarà

$$S = \mathrm{R}' = \mathrm{P}_0 h^m + \mathrm{P}_1 h^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}_{m-1} h + \mathrm{P}_m.$$

Similmente se S, prima ordinata per h, si divida per $h+l+i+\mathrm{A}$, di poi ordinata per i si divida per $i+h+l+\mathrm{A}$, nascerà nel primo caso un residuo privo della radice h, nel secondo un residuo privo della radice i; de' quali residui, ordinato l' uno per l e diviso per $l^2+(i+\mathrm{A})l+i^2+\mathrm{A}i+\mathrm{B}$, ordinato l' altro per h e diviso per $h^2+(l+\mathrm{A})h+l^2+\mathrm{A}l+\mathrm{B}$, nascerà dalla prima divisione un residuo R″ contenente la sola radice i, e dalla seconda un residuo R‴ contenente la sola l, e saranno, a cagione di S simmetrica

$$S = \mathrm{R}'' = \mathrm{P}_0 i^m + \mathrm{P}_1 i^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}_{m-1} i + \mathrm{P}_m$$

$$S = \mathrm{R}''' = \mathrm{P}_0 l^m + \mathrm{P}_1 l^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}_{m-1} l + \mathrm{P}_m.$$

Si divida ora R′ per $h^3+\mathrm{A}h^2+\mathrm{B}h+\mathrm{C}$, R″ per $i^3+\mathrm{A}i^2+\mathrm{B}i+\mathrm{C}$, R‴ per $l^3+\mathrm{A}l^2+\mathrm{B}l+\mathrm{C}$, e rappresentino Q′, Q″, Q‴ i quoti, R^{IV}, R^{V}, R^{VI} i nuovi residui. Saranno

$$\mathrm{R}' = \mathrm{Q}'(h^3+\mathrm{A}h^2+\mathrm{B}h+\mathrm{C}) + \mathrm{R}^{\mathrm{IV}},$$

$$\mathrm{R}'' = \mathrm{Q}''(i^3+\mathrm{A}i^2+\mathrm{B}i+\mathrm{C}) + \mathrm{R}^{\mathrm{V}},$$

$$\mathrm{R}''' = \mathrm{Q}'''(l^3+\mathrm{A}l^2+\mathrm{B}l+\mathrm{C}) + \mathrm{R}^{\mathrm{VI}},$$

ma

$$h^3+\mathrm{A}h^2+\mathrm{B}h+\mathrm{C}=0,\quad i^3+\mathrm{A}i^2+\mathrm{B}i+\mathrm{C}=0,\quad l^3+\mathrm{A}l^2+\mathrm{B}l+\mathrm{C}=0;$$

dunque

$$S = \mathrm{R}^{\mathrm{IV}},\quad S = \mathrm{R}^{\mathrm{V}},\quad S = \mathrm{R}^{\mathrm{VI}};$$

ne' quali residui non si contengono le radici h, i, l; imperciocchè altrimenti sarebbero

$$S = \mathrm{R}^{\mathrm{IV}} = p_0 h^2 + p_1 h + p_2,$$

$$S = \mathrm{R}^{\mathrm{V}} = p_0 i^2 + p_1 i + p_2,$$

$$S = \mathrm{R}^{\mathrm{VI}} = p_0 l^2 + p_1 l + p_2;$$

cioè l' equazione

$$p_0x^2 + p_1x + p_2 = S\,,$$

sebbene di un grado inferiore al terzo, verrebbe tuttavia soddisfatta da tre ineguali valori

$$x = h\,,\ x = i\,,\ x = l\,,$$

il che (§. 145) non può essere.

Prendasi 3° $n = 4$, onde l' equazione $[z] = 0$ si riduca (§. 145) alla

$$x^4 + \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{D} =$$

$$(x-h)[x^3+(h+\mathrm{A})x^2 + (h^2+\mathrm{A}h+\mathrm{B})x + h^3+\mathrm{A}h^2+\mathrm{B}h+\mathrm{C}\,]=$$

$$=(x-i)[x^3 + (i+\mathrm{A})x^2 + (i^2+\mathrm{A}i+\mathrm{B})x + i^3 + \mathrm{A}i^2 + \mathrm{B}i + \mathrm{C}\,]=$$

$$=(x-l)[x^3+ (l+\mathrm{A})x^2 + (l^2+\mathrm{A}l+\mathrm{B})x+l^3 + \mathrm{A}l^2 + \mathrm{B}l + \mathrm{C}\,]=$$

$$=(x-p)[x^3+(p+\mathrm{A})x^2+(p^2+\mathrm{A}p+\mathrm{B})x+p^3+\mathrm{A}p^2+\mathrm{B}p+\mathrm{C}\,]=0.$$

Ma

$$x^3 + (h+\mathrm{A})x^2 + (h^2+\mathrm{A}h+\mathrm{B})x + h^3 + \mathrm{A}h^2 + \mathrm{B}h + \mathrm{C} =$$

$$=(x-i)[x^2 + (i+h+\mathrm{A})x + i^2 + hi + h^2 + \mathrm{A}(i+h) + \mathrm{B}] = 0\,,$$

$$x^2 + (i+h+\mathrm{A})x + i^2 + hi + h^2 + \mathrm{A}(i+h) + \mathrm{B} =$$

$$= (x-l)(x+l+i+h+\mathrm{A}) = 0.$$

Laonde (2°) se S ordinata per p si divida per $p+l+i+h+\mathrm{A}$, ed il residuo ordinato per l si divida per $l^2 + (i+h+\mathrm{A})l + i^2 + hi + h^2 + \mathrm{A}(i+h) + \mathrm{B}$, ed il nuovo residuo ordinato per i si divida per

$$i^3 + (h+\mathrm{A})i^2 + (h^2+\mathrm{A}h+\mathrm{B})i + h^3 + \mathrm{A}h^2 + \mathrm{B}h + \mathrm{C}\,,$$

giungeremo al residuo R' privo delle radici i, l, p; e sarà

$$S = \mathrm{R}' = \mathrm{P}_0h^m + \mathrm{P}_1h^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}_{m-1}h + \mathrm{P}_m.$$

Similmente

$$x^3 + (i + \mathrm{A})x^2 + (i^2 + \mathrm{A}i + \mathrm{B})x + i^3 + \mathrm{A}i^2 + \mathrm{B}i + \mathrm{C} =$$

$$= (x-l)[x^2 + (l + i + \mathrm{A})x + l^2 + il + i^2 + \mathrm{A}(l+i) + \mathrm{B}] = 0\,,$$

onde

$$x^2 + (l + i + \mathrm{A})x + l^2 + il + i^2 + \mathrm{A}(l + i) + \mathrm{B} =$$

$$= (x-p)(x + p + l + i + \mathrm{A}) = 0\,,$$

le cui radici sono h, p. Quindi (2°) se S ordinata rapporto ad h si divida per $h + p + l + i + \mathrm{A}$, e il residuo ordinato rapporto a p, si divida per

$$p^2 + (l + i + \mathrm{A})p + l^2 + il + i^2 + \mathrm{A}(l + i) + \mathrm{B}\,,$$

e il nuovo residuo ordinato rapporto ad l si divida per

$$l^3 + (i + \mathrm{A})l^2 + (i^2 + \mathrm{A}i + \mathrm{B})l + i^3 + \mathrm{A}i^2 + \mathrm{B}i + \mathrm{C},$$

si giungerà ad un residuo R'' privo delle radici h, p, l; e sarà, a cagione di S simmetrica,

$$S = \mathrm{R}'' = \mathrm{P}_0 i^n + \mathrm{P}_1 i^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}_{m-1} i + \mathrm{P}_m.$$

Similmente si troverà

$$S = \mathrm{R}''' = \mathrm{P}_0 l^m + \mathrm{P}_1 l^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}_{m-1} l + \mathrm{P}_m$$

$$S = \mathrm{R}^{\mathrm{IV}} = \mathrm{P}_0 p^m + \mathrm{P}_1 p^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}_{m-1} p + \mathrm{P}_m.$$

Ora dividasi R' per

$$h^4 + \mathrm{A}h^3 + \mathrm{B}h^2 + \mathrm{C}h + \mathrm{D}\,,$$

R'' per

$$i^4 + \mathrm{A}i^3 + \mathrm{B}i^2 + \mathrm{C}i + \mathrm{D}\,,$$

R''' per

$$l^4 + \mathrm{A}l^3 + \mathrm{B}l^2 + \mathrm{C}l + \mathrm{D}\,,$$

R$^{\mathrm{IV}}$ per

$$p^4 + \mathrm{A}p^3 + \mathrm{B}p^2 + \mathrm{C}p + \mathrm{D}\,;$$

e si esprimano per Q', Q'', Q''', Q$^{\mathrm{IV}}$ i quoti, e per R$^{\mathrm{V}}$, R$^{\mathrm{VI}}$, R$^{\mathrm{VII}}$, R$^{\mathrm{VIII}}$ i residui. Saranno

$$\mathrm{R}' = \mathrm{Q}'(h^4 + \mathrm{A}h^3 + \ldots + \mathrm{D}) + \mathrm{R}^{\mathrm{V}}\,,\quad \mathrm{R}'' = \mathrm{Q}''(i^4 + \mathrm{A}i^3 + \ldots + \mathrm{D}) + \mathrm{R}^{\mathrm{VI}},$$

$R''' = Q'''(l^4 + Al^3 + \ldots + D) + R^{VII}$, $R^{IV} = Q^{IV}(p^4 + Ap^3 + \ldots + D) + R^{VIII}$.

Ma

$$h^4 + Ah^3 + \ldots + D = 0 \ , \ i^4 + Ai^3 + \ldots + D = 0$$

$$l^4 + Al^3 + \ldots + D = 0 \ , \ p^4 + Ap^3 + \ldots + D = 0 ;$$

dunque

$$S = R^V \ , \ S = R^{VI} \ , \ S = R^{VII} \ , \ S = R^{VIII} ;$$

ne' quali residui non si contengono le radici h , i , l , p ; altrimenti sarebbero

$S = R^V = p_0 h^3 + p_1 h^2 + p_2 h + p_3$, $S = R^{VI} = p_0 i^3 + p_1 i^2 + p_2 i + p_3$,

$S = R^{VII} = p_0 l^3 + p_1 l^2 + p_2 l + p_3$, $S = R^{VIII} = p_0 p^3 + p_1 p^2 + p_2 p + p_3$,

cioè l'equazione

$$p_0 x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = S ,$$

sebbene di un grado inferiore al quarto , sarebbe soddisfatta nondimeno dai quattro valori

$$x = h \ , \ x = i \ , \ x = l \ , \ x = p ;$$

lo che non può avvenire (§. 145).

158

Non fa di mestieri altro per istabilire quanto appresso : rappresenti v il polinomio $[z]$ quando in $[z]$ si pone $x = h$; v_1 il polinomio

$$[z_1] = \frac{[z] - v}{x - h}$$

quando in $[z_1]$ si pone $x = i$; v_2 il polinomio

$$[z_2] = \frac{[z_1] - v_1}{x - i}$$

quando in $[z_2]$ si pone $x = l$; v_3 il polinomio

$$[z_3] = \frac{[z_2] - v_2}{x - l}$$

quando in $[z_3]$ si pone $x = p$; . . . ; v_{n-1} il polinomio

$$[z_{n-1}] = \frac{[z_{n-2}] - v_{n-2}}{x - s} = x + s + \ldots + i + h + \mathrm{A}$$

quando in $[z_{n-1}]$ si pone $x = t$ (110). Se la S, ordinata per t, si divida per v_{n-1}, si giungerà al residuo R′ privo della radice t; se R′ ordinato rapporto ad s dividasi per v_{n-2}, si giungerà ad un residuo R″ privo delle due t ed s; . . . . . ; se $\mathrm{R}^{(n-2)}$ ordinato per i si divida per v_1, si giungerà ad un residuo $\mathrm{R}^{(n-1)}$ avente la sola radice h, e sarà

$$S = \mathrm{R}_{n-1} = \mathrm{P}_0 h^m + \mathrm{P}_1 h^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}_{m-1} h + \mathrm{P}_m.$$

Questa equazione sussisterà ancorchè pongasi per h in $\mathrm{R}^{(n-1)}$ qualunque delle altre radici $i, l \ldots t$ (111). Pertanto o con questo

---

(110) *Il ragionamento istituito* (§. 157) *per l' equazioni di* 2.°, 3.°, *e* 4.° *grado, si generalizza ora per un'equazione di grado qualunque; e similmente a quanto fu praticato in quei tre casi rappresentansi da*

$$[z_1], [z_2], [z_3], \ldots, [z_{n-1}]$$

i fattori ne'quali (§. 145) *può decomporsi la* $[z] = 0$, *ognuno con una radice meno del precedente, e da* v, v_1, v_2, v_3, ..., v_{n-1} *i fattori medesimi, non escluso* $[z]$, *quando si ponga in essi una delle radici che contengono in luogo della incognita* x.

(111) *Seguendo infatti un' altr' ordine rispetto alle divisioni di S, e de'suoi residui pei successivi fattori* v_{n-1}, v_{n-2} .... *invece di giungere ad un residuo ordinato per le potenze della radice h, potremmo giungere ad un'altro, ordinato per le*

metodo, o con qualunque altro si trasformi S nel polinomio

$$P_o h^m + P_1 h^{m-1} + \ldots + P_{m-1} h + P_m ;$$

purchè l'equazione

$$P_o h^m + P_1 h^{m-1} + \ldots + P_{m-1} h + P_m = S$$

continui a sussistere, anche quando nel primo membro in vece di h si ponga qualunque altra delle radici i, l, ... t, ordinato il polinomio per h, e diviso per v, sempre si giungerà ad un residuo $R^{(n)}$ privo di tutte le radici h, i, l . . . s, t, e sarà

$$S = R^{(n)}.$$

Il residuo $R^{(n)}$ è una formula intera rapporto ad A, B ... H, K; poichè in ciascuno dei divisori v_{n-1}, v_{n-2} . . . . v_1, v il primo termine ha per coefficiente l'unità.

I coefficienti A, B, . . . H, K suppongansi continuamente variati, per modo che una o più delle differenze $h-i$, $h-l$ ... $i-l$, $i-p$, . . . diminuiscano indefinitamente. Comunque continuino a diminuire, varrà sempre l'equazione $S = R^{(n)}$; varrà dunque anche annullandosi tali differenze: onde si conclude che l'asserzione ora stabilita sussisterà quand'anche l'equazione $[z] = 0$ ammetta delle radici eguali.

Inoltre può avvenire che prima di giungere al residuo $R^{(n)}$, qualcuno de'precedenti residui R', R'', . . . $R^{(n-1)}$ risulti libero da tutte le radici h, i, . . . t: allora, cessata l'operazione, quel residuo si riterrà pel valore della formula S (112).

potenze della radice qualunque γ; *ed essendo* S *simmetrica, avremo egualmente*

$$P_o \gamma^m + P_1 \gamma^{m-1} + \ldots + P_{m-1} \gamma + P_m = S.$$

(112) *Deve qui notarsi che per qualunque forma della funzione simmetrica* S, *la teorica esposta gode il van-*

Esempi.

I.° Sia

$$S = i^2l + il^2 + l^2h + lh^2 + h^2i + hi^2 ;$$

avremo

$$n=3 , [z] = x^3 + Ax^2 + Bx + C , v = h^3 + Ah^2 + Bh + C ,$$

$$[z_1] = x^2 + (h + A)x + h^2 + Ah + B , v_1 = i^2 + (h+A)i + h^2 + Ah + B$$

$$[z_2] = x + i + h + A , v_2 = l + i + h + A ,$$

$$R' = (A + 3h)i^2 + (3h^2 + 4Ah + A^2)i + Ah^2 + A^2h ,$$

$$R'' = -3h^3 - 3Ah^2 - 3Bh - AB ;$$

e finalmente

$$R''' = S = 3C - AB.$$

II.° Sia

$$S = (h-i)^2(h-l)^2 \dots (h-t)^2(i-l)^2(i-p)^2 \dots (i-t)^2 \dots (s-t)^2 ;$$

e primieramente pongasi $n = 2$ affinchè abbiasi

$$S = (h-i)^2.$$

Saranno

$$[z] = x^2 + Ax + B , v = h^2 + Ah + B , R' = 4h^2 + 4Ah + A^2$$

$$[z_1] = x + h + A , v_1 = i + h + A , R'' = S = A^2 - 4B.$$

Pongasi 2° $n = 3$ affinchè abbiasi

$$S = (h-i)^2(h-l)^2(i-l)^2.$$

---

taggio di guidarci alla cognizione del valore di S, seguendo sempre lo stesso processo di calcolo; purchè sieno cogniti i coefficienti di quella equazione, le radici della quale concorrono simmetricamente a formare la funzione medesima.

Le radici dell'equazione

$$x^2 + (h + \mathrm{A})x + h^2 + \mathrm{A}h + \mathrm{B} = 0$$

sono (§. 157 : 2°) i ed l; quindi (1.°)

$$(i-l)^2 = (h + \mathrm{A})^2 - 4(h^2 + \mathrm{A}h + \mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 - 3h^2 - 2\mathrm{A}h - 4\mathrm{B},$$

e identicamente

$$(x-i)(x-l) = x^2 + (h + \mathrm{A})x + h^2 + \mathrm{A}h + \mathrm{B};$$

onde

$$(h-i)(h-l) = h^2 + (h + \mathrm{A})h + h^2 + \mathrm{A}h + \mathrm{B} = 3h^2 + 2\mathrm{A}h + \mathrm{B}.$$

Dunque

$$S = (3h^2 + 2\mathrm{A}h + \mathrm{B})^2(\mathrm{A}^2 - 3h^2 - 2\mathrm{A}h - 4\mathrm{B}).$$

Ora se invece dell'equazione

$$x^2 + (h + \mathrm{A})x + h^2 + \mathrm{A}h + \mathrm{B} = 0$$

si considerasse (§. 157 . 2.°) primieramente la

$$x^2 + (i + \mathrm{A})x + i^2 + \mathrm{A}i + \mathrm{B} = 0,$$

secondariamente la

$$x^2 + (l + \mathrm{A})x + l^2 + \mathrm{A}l + \mathrm{B} = 0,$$

la prima somministrerebbe (1.°)

$$S = (3i^2 + 2\mathrm{A}i + \mathrm{B})^2(\mathrm{A}^2 - 3i^2 - 2\mathrm{A}i - 4\mathrm{B})$$

la seconda

$$S = (3l^2 + 2\mathrm{A}l + \mathrm{B})^2(\mathrm{A}^2 - 3l^2 - 2\mathrm{A}l - 4\mathrm{B}).$$

Adunque ordinato per h il secondo membro

$$(3h^2 + 2\mathrm{A}h + \mathrm{B})^2(\mathrm{A}^2 - 3h^2 - 2\mathrm{A}h - 4\mathrm{B}),$$

e fattane la divisione per $h^3 + \mathrm{A}h^2 + \mathrm{B}h + \mathrm{C}$, nascerà il residuo $\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{A}^3\mathrm{C} - 4\mathrm{B}^3 - 27\mathrm{C}^2 + 18\mathrm{ABC}$; e perciò sarà

$$S = A^2B^2 - 4A^3C - 4B^3 - 27C^2 + 18ABC.$$

Similmente fatto $n = 4, 5$, eccetera . . . si determinerà il corrispondente valore di S.

Quante volte riesca $S = 0$, sarà certo indizio che l'equazione $[z] = 0$ ammette radici eguali. Inoltre se tutte le radici saranno ineguali, e di più saranno interi i valori numerici de' coefficienti A, B, C . . . H, K, risulterà (§. 158) il valor numerico di $S =$, ovvero > 1 (113).

160

Questo esempio ne porge occasione a dire alcuna cosa sul modo col quale possono determinarsi prossimamente le radici reali di quelle equazioni, che son prive di radici eguali, ed hanno i coefficienti A, B, C, . . . reali. Pertanto 1.° (§. 144) non potendo l' equazione $[z] = 0$ essere soddisfatta per valori della $x = \beta + \delta\sqrt{-1}$ che dieno $(\beta^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} > \alpha$, ed essendo nell' attuale ipotesi (§. 142)

$$k_1 = a_1 \ , \ k_2 = a_2 \ , \ \ldots \ k_n = a_n \ ,$$

se $\beta^{(m)} + \delta^{(m)}\sqrt{-1}$ rappresenti una qualunque delle radici $h, i, l, \ldots$ della stessa $[z] = 0$, sarà certamente (§. 143) il numero $(\beta^{(m)2} + \delta^{(m)2})^{\frac{1}{2}}$ minore del massimo, fra

$$a_1 + 1 \ , \ a_2 + 1 \ , \ \ldots \ a_n + 1 \ ,$$

ovvero fra

$$na_1 \ , \ (na_2)^{\frac{1}{2}} \ , \ (na_3)^{\frac{1}{3}} \ , \ \ldots \ (na_n)^{\frac{1}{n}} .$$

Quindi facilmente si determinerà un numero c maggiore di

(113) *Ciò è manifesto dal riflettere che la S* (§. 158) *eguaglia sempre l'ultimo residuo* $R^{(n)}$, *formula intera de' coefficienti della* $[z] = 0$.

$(\beta^{(m)2} + \delta^{(m)2})^{\frac{1}{2}}$: ove dobbiamo notare che se la radice fosse reale, $(\beta^{(m)2} + \delta^{(m)2})^{\frac{1}{2}}$ non sarebbe altro fuorchè il valore numerico della radice stessa (114).

2.° Le differenze

$$h-i\ ,\ h-l\ ,\ \ldots\ i-l\ ,\ \ldots\ ,$$

ovvero

$$(\beta'-\beta'')+(\delta'-\delta'')\sqrt{-1}\ ,\ (\beta'-\beta''')+(\delta'-\delta''')\sqrt{-1}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ (\beta''-\beta''')+(\delta''-\delta''')\sqrt{-1}\ ,\ \ldots\ldots\ldots$$

danno (§. 131 : 5.°)

$$[(\beta'-\beta'')^2+(\delta'-\delta'')^2]^{\frac{1}{2}}\ (=r')<2c\ ,$$

$$[(\beta'-\beta''')^2+(\delta'-\delta''')^2]^{\frac{1}{2}}\ (=r')<2c\ ,$$

eccetera . . . . . (115).

Ma (§. 111 : 1.°) il numero delle differenze stesse $=\frac{n(n-1)}{2}$; dunque messa da parte una qualunque di queste differenze, p. e. $h-i$, il prodotto dei numeri r'', r''' . . . corrispondenti

---

(114) *Il numero* $(\beta^{(m)2}+\delta^{(m)2})^{\frac{1}{2}}$ *non potendo essere* (§. 144) *maggiore di* α, *ed essendo* (§. 142) $\alpha<a+1$, *sarà eziandio quel numero* $<a+1$. *Quindi per determinare* $c>(\beta^{(m)2}+\delta^{(m)2})^{\frac{1}{2}}$, *basterà prendere* $c=a+1$. *Finalmente se la radice fosse reale, sarebbe* $\delta^{(m)}=0$, *e la radice stessa* $=\beta^{(m)}$; *perciò quel numero in tal caso eguaglierebbe il valore numerico di quella radice.*

(115) *Abbiamo* (§. 131 : 5.°) *che* $[(\beta'-\beta'')^2+(\delta'-\delta'')^2]^{\frac{1}{2}}$ *non può essere maggiore di* $(\beta'^2+\delta'^2)^{\frac{1}{2}}+(\beta''^2+\delta''^2)^{\frac{1}{2}}$; *ma per le cose ora dimostrate questa grandezza è* $<2c$, *dunque dovrà essere anche* $[(\beta'-\beta'')^2+(\delta'-\delta'')^2]^{\frac{1}{2}}<2c$. *La stessa conclusione avrà luogo rapporto alle differenze delle altre radici.*

alle altre differenze rimarrà minore di

$$(2C)^{\frac{n}{2}(n-1)-1}.$$

Quindi posto

$$\frac{r'\,r''\,r'''\,\ldots\ldots}{(2C)^{\frac{n}{2}(n-1)-1}} = \mu,$$

ciascuno degli r', r'', r''' . . . supererà il numero μ (116).

3.° Il prodotto dei quadrati delle differenze fra le radici della equazione $[z] = o$ può esprimersi (§. 147) a questo modo

(116) *Essendo*

$$r''\,r'''\,r^{IV}\ldots < (2C)^{\frac{n}{2}(n-1)-1},$$

sarà

$$\frac{r''\,r'''\,\ldots\ldots}{(2C)^{\frac{n}{2}(n-1)-1}} < 1,$$

e divisa per questa diseguaglianza l'equazione

$$\frac{r'\,r''\,r'''\,\ldots\ldots}{(2C)^{\frac{n}{2}(n-1)-1}} = \mu$$

nascerà $r' > \mu$: *similmente ricaveremo* $r'' > \mu$, $r''' > \mu$, *ecc.* . . . . .

$$S=[(\beta'-\beta'')+(\delta'-\delta'')\sqrt{-1}]^2\,[(\beta'-\beta''')+(\delta'-\delta''')\sqrt{-1}]^2\ldots$$

$$[2\delta'\sqrt{-1}]^2[(\beta'-\beta'')+(\delta'+\delta'')\sqrt{-1}]^2[(\beta'-\beta''')+(\delta'+\delta''')\sqrt{-1}]^2\ldots$$

$$[(\beta''-\beta''')+(\delta''-\delta''')\sqrt{-1}]^2\ldots[(\beta''-\beta')+(\delta''+\delta')\sqrt{-1}]^2$$

$$[2\delta''\sqrt{-1}]^2\,[(\beta''-\beta''')+(\delta''+\delta''')\sqrt{-1}]^2\ldots[(\beta'''-\beta')+$$

$$(\delta'''+\delta')\sqrt{-1}]^2\,[(\beta'''-\beta'')+(\delta'''+\delta')\sqrt{-1}]^2\,[2\delta'''\sqrt{-1}]^2\ldots$$

$$[(\beta'-\beta'')+(-\delta'+\delta'')\sqrt{-1}]^2\,[(\beta'-\beta''')+(-\delta'+\delta''')\sqrt{-1}]^2\ldots$$

$$[(\beta''-\beta''')+(-\delta''+\delta''')\sqrt{-1}]^2\ldots\ldots = = [(\beta'-\beta'')^2+$$

$$(\delta'-\delta')^2]^2[(\beta'-\beta''')^2+(\delta'-\delta''')^2]^2\ldots 4\delta'^2[(\beta'-\beta'')^2+(\delta'+\delta'')^2]^2$$

$$[(\beta'-\beta''')^2+(\delta'+\delta''')^2]^2\ldots[(\beta''-\beta''')^2+(\delta''-\delta''')^2]^2\ldots 4\delta''^2[(\beta''-\beta''')^2+$$

$$(\delta''+\delta''')^2]^2 4\delta'''^2\ldots\ldots (117).$$

(117) *Per bene intender ciò devesi primieramente riflettere, che la forma immaginaria può servire a rappresentare anche le radici reali della* $[z]=0$, *essendo rispetto ad esse nullo il coefficiente di* $\sqrt{-1}$: *in secondo luogo che le radici immaginarie in qualunque equazione trovansi coniugate* (§. 147). *Così posto che le radici di un' equazione sieno rappresentate da*

$$\beta'+\delta'\sqrt{-1}\ ,\ \beta'-\delta'\sqrt{-1}\ ,\ \beta''+\delta''\sqrt{-1}\ ,\ \beta''-\delta''\sqrt{-1}\ ,$$

sarà

Di qui s' inferisce (2.°) che estratta la radice quadrata dal valore numerico della formula S, e indicata la radice positiva con ξ, sarà

$$r' \; r'' \; r''' \; \ldots = \xi \; ; \quad (118)$$

$$S = (2\delta'\sqrt{-1})^2[(\beta'-\beta'')+(\delta'-\delta'')\sqrt{-1}]^2[(\beta'-\beta'')+(\delta'+\delta'')\sqrt{-1}]^2 \times$$
$$[(\beta'-\beta'')+(-\delta'-\delta')\sqrt{-1}]^2[(\beta'-\beta'')+(-\delta'+\delta'')\sqrt{-1}]^2(2\delta''\sqrt{-1})^2.$$

In terzo luogo considerando i due fattori binomi

$$[(\beta'-\beta'')+(\delta'-\delta'')\sqrt{-1}]^2 \; , \; [(\beta'-\beta'')+(-\delta'+\delta'')\sqrt{-1}]^2 \; ,$$

questi darranno (§. 102) *il prodotto*

$$[(\beta'-\beta'')^2+(\delta'-\delta'')^2]^2 \; ;$$

e così degli altri presi opportunamente due a due. Quindi chiaro apparisce come il primo prodotto rappresentante il valore di S possa trasformarsi nel secondo; nel quale valerà il segno positivo se il numero de' suoi fattori monomi sarà pari, e il negativo se impari.

(118) *Riflettasi che operando come nel* (2°) *sopra le* $\frac{n(n-1)}{2}$ *differenze fra le radici della* $[\Xi] = 0$, *si ottiene due volte ciascuno di quei radicali binomi: cioè*

$$[(\beta'-\beta'')^2+(\delta'-\delta'')^2]^{\frac{1}{2}} = [(\beta'-\beta'')^2+(-\delta'+\delta')^2]^{\frac{1}{2}} = r'$$
$$[(\beta'-\beta'')^2+(\delta'+\delta')^2]^{\frac{1}{2}} = [(\beta'-\beta')^2+(-\delta'-\delta'')^2]^{\frac{1}{2}} = r''$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Perciò estratta la radice quadrata dal secondo prodotto che rappresenta S, e fatta la sostituzione degli r diversamente accentati si avrà

$$\sqrt{S} = r' \; r'' \; \ldots \times r' \; r'' \; \ldots = \xi.$$

e perciò

$$\mu = \frac{\xi}{\frac{n}{(2c)^2}(n-1) - 1}.$$

4.° Se tutte le radici, ovvero alcune soltanto, p. e. h, i, l, sono reali, è chiaro che r', r'' non saranno altro fuorchè i valori numerici delle differenze $h-i$, $h-l$. Il numero μ adunque sarà minore della minima fra le differenze delle radici reali (119).

5.° Se $\xi =$, ovvero > 1, come avviene (§. 159 : II.°) quando sono interi i valori numerici de'coefficienti A, B, ... (120), potrà il numero μ determinarsi mediante la formula

$$\mu = \frac{1}{\frac{n}{(2c)^2}(n-1) - 1}.$$

6.° Denoti N tal numero intero, che sia immediatamente $> \frac{c}{\mu}$; sarà $c < N\mu$; e perciò (1.°) ciascun valore numerico delle radici reali sarà minore di $N\mu$ (121). Da ciò concludesi che queste radici sono comprese tutte fra i limiti $-N\mu$, $+N\mu$.

Così nell'esempio proposto sarà

$$\sqrt{S} = 2\delta'[(\beta'-\beta'')^2 + (\delta'-\delta'')^2]^{\frac{1}{2}}[(\beta'-\beta'')^2 + (\delta'-\delta'')^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$[(\beta'-\beta'')^2+(\delta'+\delta'')^2]^{\frac{1}{2}}[(\beta'-\beta'')^2 + (\delta'+\delta'')^2]^{\frac{1}{2}}.2\delta'' = r'r'.r'r''.r''r^{IV}.$$

(119) *Infatti* (2°) *il numero* μ *è minore di qualunque degli* r', r'', r''' . . . ; *perciò anche del minimo fra essi.*

(120) *In tal caso* (§. 159. II.°) *abbiamo* $S =$, *ovvero* > 1 ; *laonde* (3.°) *anche* $\xi = 1$ $S =$, *ovvero* > 1.

(121) *Chiamando* r *una qualunque radice reale della* $[z] = 0$, *abbiamo* (1°) $c > r$; *ma* $N\mu > c$, *dunque* $N\mu > r$.

7.° Stabilita la serie

$$-N\mu, -(N-1)\mu, \ldots -3\mu, -2\mu, -\mu, 0, \mu, 2\mu, 3\mu, \ldots, (N-1)\mu, N\mu, (g)$$

poichè sottratto qualunque termine dall'immediatamente seguente, resta sempre il numero μ minore (4.°) della minima differenza fra le radici reali, perciò una soltanto delle radici medesime potrà essere contenuta fra due termini successivi della serie (g).

8.° Quindi (§. 141) fatto in $[z]$ prima $x = -N\mu$, poi $x = -(N-1)\mu$, poi $x = -(N-2)\mu$, e così appresso, affinchè a questo modo $[z]$ riceva successivamente i valori

$$O', O'', O''', \text{ ecc. } \ldots (g'),$$

se O', O'' . . . risulteranno tutti positivi, o tutti negativi, non avrà l'equazione $[z] = 0$ veruna radice reale; che se risulteranno parte positivi e parte negativi, tante saranno le radici reali della stessa $[z] = 0$, quanti nella serie di quei valori i passaggi dallo stato positivo al negativo, ovvero dal negativo al positivo; e ciascuna radice sarà compresa fra i due termini consecutivi della (g), ai quali corrispondono nella (g') i due valori l'uno > 0, l'altro < 0.

9.° Si esprimano questi termini per x_1 ed $x_2 = x_1 + \mu$, il primo de' quali dia p. e. $[z] < 0$, il secondo $[z] > 0$; e pongasi

$$y = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \frac{\mu}{2}.$$

La radice dell'equazione $[z] = 0$ sarà compresa tra i limiti x_1 ed y se, sostituito y in luogo di x in $[z]$, nasca $[z] > 0$; sarà compresa fra i limiti y ed x_2, se quella sostituzione somministri $[z] < 0$: del resto i nuovi limiti, o sieno x_1 e y, od y e x_2, la differenza loro sarà $= \frac{1}{2}\mu$. Nella ipotesi de'nuovi limiti x_1 ed y facciasi

$$y_1 = \frac{x_1 + y}{2} = x_1 + \frac{\mu}{4},$$

in quella poi de'nuovi limiti y ed x_2 facciasi

$$y_1 = \frac{y + x_2}{2} = x_2 - \frac{\mu}{4} \text{ (122).}$$

Nel primo caso la radice dell'equazione $[z] = 0$ sarà tra x_1 ed y_1 se sostituito y_1 in vece della x in $[z]$ emerga $[z] > 0$; sarà tra y_1 ed y se quella sostituzione dia $[z] < 0$.

Nel secondo caso sarà compresa la radice tra y ed y_1, se sostituito y_1 alla x in $[z]$ si abbia $[z] > 0$; sarà compresa tra y_1 ed x_2, se da quella sostituzione nasca $[z] < 0$: nell'uno e nell'altro caso poi la differenza de'limiti sarà $= \frac{\mu}{4}$.

Si perverrà così ad altri e altri limiti fra' quali si troverà quella radice, e che saranno disgiunti dagl'intervalli

$$\mu, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{4}, \frac{\mu}{8}, \frac{\mu}{16}, \ldots;$$

e poichè quest' intervalli continuamente decrescono, perverremo in fine a due limiti così fra loro vicini, che l'uno o l'altro di essi potrà riguardarsi come la radice prossima dell' equazione $[z] = 0$.

10.° Se l'equazione $[z] = 0$ contiene radici eguali, e perciò $\mu = 0$, dovrà farsi in modo che le medesime rimangano solitarie. Suppongasi che l' equazione $[z] = 0$ contenga n' radici $= h$, n'' radici $= i$, ecc. . . . . ; le due formule

---

(122) *Avendosi* $y = x_1 + \frac{\mu}{2}$, *ed* $x_2 = x_1 + \mu$, *sarà*

$$y_1 = \frac{y + x_2}{2} = \frac{x_1 + \frac{\mu}{2} + x_2}{2} = \frac{x_1 + \mu + x_2 - \frac{\mu}{2}}{2} =$$

$$= x_2 - \frac{\mu}{4}.$$

$[z]$, e $P'[= nx^{n-1} + A(n-1)x^{n-2} + B(n-2)x^{n-3} + \ldots + 1.H]$

avranno un tale fattor massimo M comune, che sarà

$$M = (x-h)^{n'-1}(x-i)^{n''-1} \ldots ;$$

perciò trovato (§. 107) M, diviso $[z]$ per M, ed espresso per Q il quoto, le radici dell'equazione

$$Q = 0$$

saranno solitarie, e soddisfaranno alla $[z] = 0$.

Imperciocchè si ha (§. 145)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{[z]}{x-h} = x^{n-1} + (h + A)x^{n-2} + (h^2 + Ah + B)x^{n-3} + (h^3 + \\ &+ Ah^2 + Bh + C)x^{n-4} + \ldots + h^{n-1} + Ah^{n-2} + Bh^{n-3} + \ldots + H, \\ &\frac{[z]}{x-i} = x^{n-1} + (i + A)x^{n-2} + (i^2 + Ai + B)x^{n-3} + \ldots \\ &+ i^{n-1} + Ai^{n-2} + \ldots + H, \end{aligned}\right\} (k)$$

ecc. . . . . .

Quindi fatto per compendio

$$h + i + l + \ldots + s + t = S_1, \; h^2 + i^2 + l^2 + \ldots + s^2 + t^2 = S_2,$$

$$h^3 + i^3 + l^3 + \ldots + s^3 + t^3 = S_3, \text{ ecc. } \ldots,$$

sarà

$$\frac{[z]}{x-h} + \frac{[z]}{x-i} + \ldots\ldots + \frac{[z]}{x-t} = nx^{n-1} + (S_1 + nA)x^{n-2} +$$

$$+ (S_2 + AS_1 + nB)x^{n-3} + (S_3 + AS_2 + BS_1 + nC)x^{n-4} + \ldots$$

$$\ldots + S_{n-1} + AS_{n-2} + BS_{n-3} + \ldots + nH.$$

E poichè

$$\frac{[z]}{x-h} = 0, \; \frac{[z]}{x-i} = 0, \ldots \text{ danno } (\S.\ 146)$$

$-(h+\mathrm{A}) = i+l+\ldots+t$, $-(i+\mathrm{A}) = h+l+\ldots+t$,

$\ldots\ldots$, $-(t+\mathrm{A}) = h+i+l+\ldots\ldots+s$,

$h^2+\mathrm{A}h+\mathrm{B} = \mathrm{B}-h(i+l+\ldots\ldots+t)$, $i^2+\mathrm{A}i+\mathrm{B} =$

$\mathrm{B}-i(h+l+\ldots+t)$, $\ldots t^2+\mathrm{A}t+\mathrm{B} = \mathrm{B}-t(h+i+\ldots+s)$,

$-(h^3+\mathrm{A}h^2+\mathrm{B}h+\mathrm{C}) = -\mathrm{C}-h(il+\ldots+it+\ldots+st)$,

$-(i^3+\mathrm{A}i^2+\mathrm{B}i+\mathrm{C}) = -\mathrm{C}-i(hl+\ldots\ldots+ht+\ldots\ldots+st)$,

$\ldots\ldots-(t^3+\mathrm{A}t^2+\mathrm{B}t+\mathrm{C}) = -\mathrm{C}-t(hi+\ldots\ldots+hs+\ldots)$,

ecc. . . . ,

e però (§. 146)

$$\left.\begin{aligned} &S_1+n\mathrm{A} = (n-1)\mathrm{A} \\ &S_2+\mathrm{A}S_1+n\mathrm{B} = n\mathrm{B}-2\mathrm{B} \\ &S_3+\mathrm{A}S_2+\mathrm{B}S_1+n\mathrm{C} = n\mathrm{C}-3\mathrm{C} \\ &\text{ecc. . . . ;} \end{aligned}\right\} (g'')\ (123)$$

laonde avremo altresì

$$\frac{[z]}{x-h}+\frac{[z]}{x-i}+\ldots+\frac{[z]}{x-t} = [\mathrm{P}].$$

Ma nell'ipotesi in cui siamo

$$\frac{[z]}{x-h}+\frac{[z]}{x-i}+\ldots+\frac{[z]}{x-t} = (x-h)^{n'-1}(x-i)^{n''}\ldots$$

---

(123) *S' intenderanno facilmente i secondi membri delle* (g'') *riflettendo che per le superiori equazioni, e pel* §. 146, *la somma de' coefficienti de' termini* $\overline{r+1}^{mi}$ *delle* (k) *eguaglia* n *volte il coefficiente* $\overline{r+1}^{mo}$ *della* $[z] = 0$, *meno* r *volte uno*

$(x-s)(x-t) + (x-h)^{n'}(x-i)^{n''-1} \ldots (x-s)(x-t) + \ldots .$

$+ (x-h)^{n'}(x-i)^{n''} \ldots (x-s).$

Dunque il fattor massimo

$$(x-h)^{n'-1}(x-i)^{n''-1} \ldots = \mathrm{M}$$

sarà comune alle formule [z] e [P'] ; perciò ecc. . . .

11.° Come [P'] si deriva da [z] , così

[P''] $[= n(n-1)x^{n-2} + \mathrm{A}(n-1)(n-2)x^{n-3} + \mathrm{B}(n-2)(n-3)x^{n-4}$

$+ \ldots + 2.1.\mathrm{G}]$

si deriva da [P'] ; così pure

[P'''] $[= n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \mathrm{A}(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} +$

$\mathrm{B}(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} + \ldots + 3.2.1.\mathrm{F}]$

da [P''], eccetera : dunque quelle radici $= h$, $= i$, . . . che si contengono nell' equazione [P'] = o in numero di $n'-1$, $n''-1 \ldots$, le medesime saranno contenute in numero di $n'-2$, $n''-2 \ldots .$ nell' equazione [P''] = o , in numero di $n'-3$, $n''-3$, ... nell'equazione [P'''] = o , eccetera. Quindi conoscendo qualche radice dell'equazione [z] = o , facilmente scorgeremo se sia o no solitaria. Sarà tale quante volte sostituendola in vece della x non isvanirà [P'] , sarà duplice se per la medesima sostituzione svanirà la sola [P'] ; triplice se [P'] , [P''] svaniranno entrambi , eccctera (124).

qualunque degli r^{nari} *delle sue radici ; cioè meno r volte il coefficiente* $\overline{r+1}^{mo}$ *dell' equazione stessa.*

(124) *Concludesi dal fin qui detto , che ove un'equazione abbia radici eguali , altrettante meno una dovrà averne l'equazione che da quella si deriva , moltiplicando ciascun suo termine pel rispettivo esponente della* x *, e poscia dividendola tutta per* x.

161

L'equazioni (g'' : 160 : 10.°) somministrano

$$S_2 = A^2 - 2B\,;$$

donde si conclude che se abbiasi

$$A^2 - 2B < 0\,,$$

alcune almeno delle radici di $[z] = 0$ saranno immaginarie. Similmente

$S_3 = 3AB - A^3 - 3C$, $S_4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D$, ecc...(125).

162

Oltre all' equazione $[z] = 0$ abbiasi anche la

$$[z]\ x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Ux + V = 0\,,$$

---

(125) *Le* (g'') *pertanto somministrano la somma delle potenze delle radici di qualunque equazione, purchè l'esponente loro non superi quello dell'equazione stessa diminuito di* 1 ; *dall'ultima infatti delle* (g'') *si deduce*

$$S_{n-1} = -\,AS_{n-2} - BS_{n-3} - \ldots - (n-1)\,H.$$

Per determinare il valore di S_n, *anche quando* $m = n + p$, *essendo* p *un intero, si moltiplichi per* x^p *la* $[z] = 0$, *che così acquisterà* p *radici ognuna* $= 0$; *quindi sostituiscansi ad* x *una dopo l'altra le* n *primitive radici* h, i, l . . . ; *avremo* n *equazioni, che sommate daranno*

$$S_m = -\,AS_{m-1} - BS_{m-2} - CS_{m-3} - \ldots - KS_p\,;$$

in cui fatto successivamente $p = 0$, 1, 2, 3 ..., *otterremo i valori di* S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, . . . *espressi pe' coefficienti della* $[z] = 0$.

le radici della quale sieno h' , i' . . . u' , v'. Eliminata (§. 127) la x nascerà una terza equazione

$$[\xi'] = 0$$

tra i coefficienti A , B . . . H , K , P , Q . . . U , V , che dovrà necessariamente esser soddisfatta dai medesimi coefficienti onde

$$[z] = 0 \ , \ [\xi] = 0$$

si verifichino ambedue pel medesimo valore della x (126) : ora dalle cose dette (§. 158) facilmente otterremo una nuova equazione parimenti espressa per A , B , ... H , K , P , Q , ... U , V, che potrà sostituirsi alla $[\xi'] = 0$. Infatti ambedue le $[z] = 0$, $[\xi] = 0$ manifestamente si verificano pel medesimo valore della x , quante volte svanisca qualcuno dei binomi $h-h'$, $h-i'$, . . . $h-v'$, $i-h'$, $i-i'$, . . . $i-v'$, $l-h'$, $l-i'$, ecc. . . ; fatto adunque

$$[\xi''] = (h-h')(h-i')...(h-v')(i-h')(i-i') \ldots (i-v')(l-h')(l-i')...$$

potrà invece di $[\xi'] = 0$ surrogarsi $[\xi''] = 0$ (127) : resta da otte-

---

(126) *Che la* $[\xi'] = 0$ *debba rimanere soddisfatta da quei coefficienti stessi è manifesto , perchè qualunque sia il metodo adoperato per eliminare la* x *dalle due proposte , sempre questo dovrà equivalere a sostituire in una di esse i valori della* x *dedotti dall'altra ; ed attesa la coesistenza , dovranno quei valori soddisfare all' equazione in cui sono sostituiti ; cioè la risultante* $[\xi'] = 0$ *, dovrà rimaner soddisfatta per la sua forma , ovvero , che è lo stesso , pei coefficienti medesimi delle proposte.*

(127) *Eliminando la* x *dalle* $[z] = 0$ $[\xi] = 0$ *, l'equazione risultante* $[\xi'] = 0$ *dovrà contenere le condizioni di coesistenza delle proposte da cui si deriva. Ma queste sono appunto espresse dal prodotto* $[\xi'']$ *che è un composto dei coefficienti delle proposte medesime ; dunque calcolato (§. 158) questo prodotto , ed eguagliato a zero , il medesimo rappresenterà la* $[\xi'] = 0$ *, e potrà sostituirsi ad essa. A questo modo si otterrà la eliminazione della* x *con un metodo totalmente*

nersi $[\xi'']$ espressa per que'coefficienti. E' identicamente (§. 145)

$$(x-h')(x-i')\ldots(x-\nu') = x^m + \mathrm{P}x^{m-1} + \mathrm{Q}x^{m-2} + \ldots + \mathrm{U}x + \mathrm{V},$$

onde

$$(h-h')(h-i')\ldots(h-\nu') = h^m + \mathrm{P}h^{m-1} + \ldots + \mathrm{U}h + \mathrm{V},$$

$$(i-h')(i-i')\ldots(i-\nu') = i^m + \mathrm{P}i^{m-1} + \ldots + \mathrm{U}i + \mathrm{V},$$

eccetera . . . . ;

e però

$$[\xi''] = (h^m + \mathrm{P}h^{m-1} + \ldots + \mathrm{U}h + \mathrm{V})(i^m + \mathrm{P}i^{m-1} + \ldots + \mathrm{U}i + \mathrm{V})\ldots$$

$$(t^m + \mathrm{P}t^{m-1} + \ldots + \mathrm{U}t + \mathrm{V}) :$$

ma il secondo membro di questa equazione è una formula intera e simmetrica in ordine ad h, $i \ldots t$; si otterrà dunque (§. 158) $[\xi']$ espressa per A, B . . . K, P, Q . . . V.

Se i coefficienti A, B . . . K, P, Q . . . V sieno dati per la variabile γ, e per quantità costanti, cosicchè sieno interi rapporto ad γ; oltre a ciò, se gli esponenti delle variabili x e γ in ciascun termine della formula $[z]$ dieno insieme presi una somma non $> n$; in ciascun termine poi della formula $[\xi]$ dieno una somma non $> m$: al certo il massimo esponente della quantità γ in $[\xi'']$ non sarà $> mn$. Imperocchè nell' ipotesi in cui siamo gli esponenti della quantità γ in

A, B, C . . . H, K, P, Q, R . . . U, V

non superano i numeri

1, 2, 3 . . . $n-1$, n, 1, 2, 3 . . . $m-1$, m.

diverso da quello esposto nel §. 127; *si otterrà cioè mediante le funzioni simmetriche delle radici di una delle proposte.*

Dunque comecchè si aumenti la γ indefinitamente, tuttavia nè le ragioni

$$\frac{A}{\gamma}, \frac{B}{\gamma^2} \cdots \frac{H}{\gamma^{n-1}}, \frac{K}{\gamma^n}, \quad \frac{P}{\gamma}, \frac{Q}{\gamma^2}, \cdots \frac{U}{\gamma^{m-1}}, \frac{V}{\gamma^m},$$

nè perciò le radici θ dell'equazioni

$$\theta^n + \frac{A}{\gamma}\theta^{n-1} + \frac{B}{\gamma^2}\theta^{n-2} + \ldots + \frac{H}{\gamma^{n-1}}\theta + \frac{K}{\gamma^n} = 0,$$

$$\theta^m + \frac{P}{\gamma}\theta^{m-1} + \frac{Q}{\gamma^2}\theta^{m-2} + \ldots + \frac{U}{\gamma^{m-1}}\theta + \frac{V}{\gamma^m} = 0,$$

avranno valori indefinitamente crescenti (128). Ma paragonando la prima di queste equazioni con $[z] = 0$, la seconda con $[\xi] = 0$, otteniamo (§. 146 : 3.°) $\theta = \frac{x}{\gamma}$ (129); dunque nè alle ragioni

---

(128) *Dal modo col quale sappiamo che le radici dipendono* (§. 146) *dai coefficienti di un equazione chiaro apparisce, che se in essa i coefficienti non possono ricevere valori indefinitamente crescenti, questi neppure converranno alle sue radici; e perciò i valori di* θ *non potranno essere indefinitamente crescenti.*

(129) *La prima delle superiori equazioni si ottiene dalla* $[z] = 0$, *moltiplicando ciascun termine di questa per ciascuno della serie*

$$1, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma^2} \cdots, \frac{1}{\gamma^{n-1}}, \frac{1}{\gamma^n};$$

la seconda dalla $[\xi] = 0$ *moltiplicandola similmente per ciascuno della serie*

$$1, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma^2} \cdots, \frac{1}{\gamma^{m-1}}, \frac{1}{\gamma^m}.$$

Ma con ciò le radici x *delle* $[z] = 0$, $[\xi] = 0$ *divengono*

$$\frac{h}{\gamma}, \frac{i}{\gamma} \cdots \frac{s}{\gamma}, \frac{t}{\gamma}, \frac{h'}{\gamma}, \frac{i'}{\gamma}, \cdots \frac{u'}{\gamma}, \frac{v'}{\gamma},$$

nè perciò al prodotto

$$\frac{(h-h')}{\gamma}\frac{(h-i')}{\gamma}\cdots\frac{(h-v')}{\gamma}\frac{(i-h')}{\gamma}\frac{(i-i')}{\gamma}\cdots,$$

ovvero (§. 162) a $\frac{[\xi'']}{\gamma^{m.n}}$, competeranno valori indefinitamente crescenti quando γ cresca in infinito: ciò manifestamente richiede che il massimo esponente della quantità γ in $[\xi']$ non sia $> mn$.

Dell'equazioni indeterminate.

Se debba soddisfarsi comunque ad una equazione indeterminata, si potranno trovare infinite soluzioni sostituendo ad ogni incognita, tranne una, dei valori arbitrari; perocchè ciascuna sostituzione fornirà la sua equazione determinata, che darà i corrispondenti valori dell' incognita lasciata. Che se l'equazione indeterminata debba essere soddisfatta sotto alcune condizioni aggiunte, spesso riesce definito il numero delle soluzioni, ed alcune volte anche nullo. Propongasi pertanto 1.° a risolvere l'equazione

$$\mathrm{N}x = \mathrm{M}y - \mathrm{A} = 0 \ldots (i)$$

sotto la condizione che le incognite x, y sieno intere; de-

(§. 146 : 3°) $\frac{x}{y}$; *dunque avremo dall'equazioni sopra espresse* $\theta = \frac{x}{y}$.

notano M , N numeri interi > o , ed A un intero positivo o negativo ; inoltre M , N , A sono privi di fattore comune.

Se M , N non sono primi fra loro , rappresentato con C il comun fattor massimo di essi , onde abbiasi

$$M = M'C \ , \ N = N'C \ ,$$

nascerà

$$N'x \mp M'y = \frac{A}{C} \ ;$$

equazione che , per essere impossibile, fa conoscere anche la impossibilità della richiesta soluzione : adunque resta che M , N stabiliscansi primi fra loro.

165

Posto M > N si risolva la (*i*) rispetto ad x , sarà

$$x = \frac{A \mp My}{N} \ \ldots \ (i').$$

Esprimano (§. 46) R , R′ , R″ . . . i residui che si ottengono dividendo M per N , N per R′ , R′ per R″, ecc. . . ; a' , a'' , a''' . . . i residui che si hanno dividendo A per N , a per R′ , a' per R″ , ecc. . . . ; k' , k'' , k''' . . . quantità intere ed arbitrarie.

In (*i'*) rigettati gl' interi da $\frac{M}{N}$, $\frac{A}{N}$, facciasi

$$\frac{a' \mp R'y}{N} = k' \ , \text{ sarà } y = \frac{\mp a' \mp Nk'}{R'} \ \ldots \ (i'') \ ;$$

di nuovo in (*i''*) rigettati gl'interi da $\frac{N}{R'}$, $\frac{a'}{R'}$, si prenda

$$\frac{\mp a'' \mp R''k'}{R'} = k'' \ , \text{ sarà } k' = \frac{a'' \mp R'k''}{R''} \ \ldots \ (i''') \ ;$$

di nuovo in (i''') rigettati gl'interi da $\frac{R'}{R''}$, $\frac{a''}{R''}$, si ponga

$$\frac{a''' \mp R'''k''}{R''} = k''' \text{ , sarà } k'' = \frac{\mp a''' \mp R'''k'''}{R''} \quad \ldots\ldots (i^{IV}) ;$$

così continuando avremo

$$k''' = \frac{a^{IV} \mp R''' k^{IV}}{R^{IV}} \text{ , } k^{IV} = \frac{\mp a^{V} \mp R^{IV} k^{V}}{R^{V}} \text{ , ecc. } \ldots\ldots (i^{V}).$$

Ora poichè M , N suppongonsi primi fra loro , i residui R' , R'' , R''' . . . decresceranno in guisa che finalmente (§. 48) dovrà giungersi all'unità : sia p. e. $R^{IV} = 1$; la prima delle (i^{V}) darà $k''' = a^{IV} \mp R''' k^{IV}$; quindi retrocedendo per le (i^{IV}) , (i''') , (i'') , (i') troveremo le quantità y , x (130).

Esempi.

I.° Sia data l'equazione

$$3x \mp 7y - 5 = 0 ;$$

saranno

$$N = 3 \text{ , } M = 7 \text{ , } R' = 1 \text{ , } A = 5 \text{ , } a' = 2 ;$$

e perciò dalle (i''') , (i'') avremo le

$$y = \mp 2 \mp 3k' \text{ , } x = 7k' - 3 ,$$

per le quali soddisfasi alla equazione data, comunque si prenda la quantità intera k'.

(130) *Si avverta che i valori delle quantità* x , y *determinati a questo modo saranno sempre interi , purchè intera si prenda la quantità arbitraria dalla quale dipendono. Infatti supponendoli frazionari , sarebbero i numeri* k' , k'' , k''' , . . . *frazionari anch' essi ; lo che non può avverarsi.*

II.° $33x \mp 59y - 1 = 0$;

$N = 33$, $M = 59$, $R' = 26$, $R'' = 7$, $R''' = 5$, $R^{IV} = 2$, $R^{V} = 1$, $A = a' = a'' = a''' = a^{IV} = a^{V} = 1$; perciò dalle (i^{V}), (i^{IV}), (i'''), $k^{IV} = \mp 1 \pm 2k^{V}$, $k''' = -2 + 5k^{V}$, $k'' = \mp 3 \pm 7k^{V}$, $k' = -11 + 26k^{V}$, e dalle (i''), (i'),

$$y = \mp 14 \pm 33k^{V}, \quad x = -25 + 59k^{V}.$$

III.° $17x \mp 21y + 500 = 0$;

$N = 17$, $M = 21$, $R' = 4$, $R'' = 1$, $A = -500$, $a' = -7$, $a'' = -3$; perciò dalla (i''') $k' = -3 \pm 4k''$, e dalle (i''), (i),

$$y = \mp 11 + 17k'', \quad x = -43 \pm 21k''.$$

IV.° $5x \mp 9y - 34 = 0$;

$N = 5$, $M = 9$, $R' = 4$, $R'' = 1$, $A = 34$, $a' = 4$, $a'' = 0$; conseguentemente da (i''') $k' = \pm 4k''$, e dalle (i''), (i'),

$$y = \mp 1 + 5k'', \quad x = 5 \pm 9k'':$$

In questi esempi ciascun vede che se α, β esprimono due valori delle incognite x, y soddisfacenti alla equazione (i), cosicchè abbiasi

$$N\alpha \mp M\beta - A = 0,$$

tutti gli altri saranno rappresentati dalle

$$\left.\begin{aligned} y &= \beta \pm Nk \\ x &= \alpha + Mk; \end{aligned}\right\} (i^{VI})$$

il numero intero k può essere positivo o negativo. Che poi ciò valga sempre e costantemente, si dimostra sostituendo $\alpha + Mk$ e

$\beta \equiv Nk$ in luogo di x, γ nella (i), la quale perciò riducesi ad

$$N\alpha \equiv M\beta - A = 0 \quad (131).$$

166

Se inoltre le quantità intere x, γ debbano essere > 0, facilmente s'intende dalle formule (i^{VI}) che il numero delle soluzioni sarà finito, o nullo rispetto ad

$$Nx + M\gamma - A = 0;$$

(131) *Conosciuta dunque una soluzione* α, β *della* (i), *si conosceranno tosto le altre tutte mediante le* (i^{VI}). *Vediamo ora come possano determinarsi le espressioni generali di* α, β. *Sieno* p', p'', p''' . . . *i fattori primi di* M, *che potranno tutti conoscersi col metodo esposto al* §. 52, *e pongasi*

$$x = Ax', \quad y = Ay';$$

la (i) *si trasformerà perciò nella*

$$Nx' \equiv My' - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

e fatto

$$Nx' = 1 - (1 - N^{p'-1})(1 - N^{p''-1})(1 - N^{p'''-1}) \quad . \quad . \quad .,$$

sarà evidentemente x' *intero. Laonde avremo*

$$\equiv p'p''p''' \ldots y' = (1 - N^{p'-1})(1 - N^{p''-1})(1 - N^{p'''-1}) \quad . \quad . \quad .;$$

e siccome M *ed* N *sono primi fra loro, perciò*

$$1 - N^{p'-1}, \quad 1 - N^{p''-1}, \quad 1 - N^{p'''-1}, \quad . \quad . \quad .$$

saranno (§. 111.II.°) *rispettivamente divisibili per* $p', p'', p''', \ldots$, *e sarà intero anche* y'. *Quindi è che le cercate espressioni saranno*

infinito poi rispetto ad

$$Nx - My - A = 0 \quad (132).$$

Così nell' ipotesi in cui siamo, ciascun vede (esem. §. 165) che l'equazioni

$$3x + 7y - 5 = 0, \quad 33x + 59y - 1 = 0, \quad 17x + 21y + 500 = 0,$$

non ammettono veruna soluzione; che una ne ammette l'equazione

$$5x + 9y - 34 = 0,$$

cioè $y = 1$, $x = 5$, la quale si ha dal porre $k'' = 0$; e che in-

$$\beta = \mp \frac{A(1 - N^{p'-1})\ (1 - N^{p'-1}) \ldots\ldots}{M}$$

$$\alpha = \frac{A - A(1 - N^{p'-1})(1 - N^{p''-1}) \ldots}{N}$$

(132) *Poichè le soluzioni della*

$$Nx + My - A = 0$$

sono

$$y = \beta - Nk, \quad x = \alpha + Mk,$$

si vede chiaro che dovendo x, y *essere ciascuna* > 0, *il numero delle soluzioni della proposta non potrà superare quel valore di* k, *che renderà* $Nk > \beta$; *perciò questo numero sarà finito, o nullo. Inoltre le soluzioni della*

$$Nx - My - A = 0$$

sono

$$y = \beta + Nk, \quad x = \alpha + Mk,$$

perciò k *potrà ricevere un infinità di valori positivi, lo che somministrerà infinite soluzioni alla proposta.*

finite ne ammettono l'equazioni

$$3x-7y-5=0\ ,\ 33x-59y-1=0\ ,$$

$$17x-21y+500=0\ ,\ 5x-9y-34=0.$$

167

Esprimendo con P, Q, . . . nuovi interi positivi o negativi, se debba 2.° risolversi l'equazione

$$Nx \mp My + Pz + Qu + \ldots - A = 0 \ (i^{\text{VII}}),$$

a condizione che le incognite x, y, z, u, . . . sieno intere, invece di z, u, . . . sostituiscansi degl'interi qualunque, e la (i^{VII}) si convertirà nelle

$$Nx \mp My - A_1 = 0\ ,\ Nx \mp My - A_2 = 0\ ,\ Nx \mp My - A_3 = 0\ ,\ \text{ecc. ...}$$

che si tratteranno col metodo esposto (§. 165).

168

Se insieme si dessero 3.° più equazioni, v. gr. le due seguenti

$$\left.\begin{aligned} Nx \mp My + Pz - A &= 0 \\ N_1x \mp M_1y + P_1z - A_1 &= 0\ ; \end{aligned}\right\} (i^{\text{VIII}})$$

eliminata la z, nascerebbe

$$N_2x \mp M_2y - A_2 = 0\ ,$$

onde (§. 165 i^{VI})

$$y = \beta_1 \pm N_2k\ ,\ x = \alpha_1 + M_2k\ (i^{\text{IX}})\ ;$$

i quali valori sostituiti nell'una o nell'altra delle (i^{VIII}), per es. nella prima, si otterrà

$$Pz \mp M_3k - A_3 = 0.$$

Di qui (§. 165 i^{vi})

$$z = \alpha_2 + M_3 k_1 \ , \ k = \beta_2 \doteq P k_1 \ ,$$

il qual valore di k dovrà sostituirsi nelle (i^{ix}) (133)

160

Abbiasi ora 4.° l'equazione

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots}{A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + D_1 x^3 + \ldots\ldots}$$

da doversi soddisfare per numeri x , y interi ; esprimono A , B , C . . . A_1 , B_1 , C_1 . . . dei numeri parimente interi. Pongansi

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots = P$$

$$A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \ldots = P_1 \ ,$$

dalle quali si elimini la x (§. 127 : 162) ; nascerà un'equazione di questa forma

$$A_2 = B_2 P + C_2 P_1 + D_2 P^2 + E_2 P P_1 + F_2 P_1^{\,2} + \ldots$$

tra P e P_1 ; in cui A_2 , B_2 , . . . denotano numeri interi (134).

---

(133) *A questo modo i valori delle* x , y , z *saranno tutti espressi mediante la stessa arbitraria* k_1 , *e perfettamente soddisferanno alle* (i^{viii}).

(134) *Poichè la risultante dalla eliminazione è una formula* (§. 162) *intera rispetto ai coefficienti di una delle due componenti , e nel tempo stesso è una formula intera e simmetrica rispetto alle radici dell' altra , dovrà* (§. 158) *essere anche una formula intera rispetto ai coefficienti di ambedue le componenti stesse. Dunque se questi saranno interi , co-*

E giacchè $P = P_1 y$; perciò

$$\frac{A_2}{P_1} = B_2 y + C_2 + D_2 P_1 y^2 + E_2 P_1 y + F_2 P_1 + \ldots$$

Poichè dunque, a cagione di x, y per ipotesi interi, esser debbe il secondo membro di questa equazione intero, lo stesso dovrà dirsi del primo: nella ipotesi adunque in cui siamo dovrà esattamente dividersi A_2 per P_1. Trovati pertanto (§. 52) i divisori δ, δ', δ'', ... del numero A_2, ed i medesimi presi per P_1 onde abbiasi

$$A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \ldots = \delta$$

$$A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \ldots = \delta'$$

ecc. . . . ,

si determinino (§. 147) le radici intere di queste equazioni. Di siffatte radici quelle risolveranno l'equazione data sotto l'apposta condizione, le quali renderanno $\frac{P}{P_1}$ numero intero. Sia per es.

$$y = \frac{79 - x}{x + 1} ;$$

saranno $79 - x = P$, $x + 1 = P_1$; ed eliminata la x, $80 = P + P_1$: onde $A_2 = 80$; i cui divisori

$$1 , 2 , 4 , 5 , 8 , 10 , 16 , 20 , 40 , 80$$

somministrano

$1 = x + 1$, $2 = x + 1$, $4 = x + 1 \ldots$, $40 = x + 1$, $80 = x + 1$.

Di qui le seguenti soluzioni in interi

---

me appunto si verifica nel caso attuale, dovranno esserlo ancora quelli della risultante; e perciò A_2, B_2, C_2 . . . . . saranno di lor natura numeri interi.

$$x = 0, 1, 3, 4, 7, 9, 15, 19, 39, 79,$$

$$y = 79, 39, 19, 15, 9, 7, 4, 3, 1, 0.$$

170

Se $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, ecc. . . . cosicchè l'equazione data si riduca nella

$$(f) \ldots y = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^{n-1} + Kx^n}{A_1},$$

non si potrà usare il metodo esposto; però si noti che se la quantità

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^{n-1} + Kx^n$$

suppongasi esattamente divisibile per A_1 quando prendasi per x un intero h, alcerto sarà esattamente divisibile per A_1 anche quando prendasi per x il numero $h \pm kA_1$; poichè

$$A + B(h \pm kA_1) + C(h \pm kA_1)^2 + D(h \pm kA_1)^3 + \ldots$$

si riduce a questa forma

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots + QkA_1 + R(kA_1)^2 + S(kA_1)^3 + \ldots$$

Di qui si ricava che se l'equazione

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^{n-1} + Kx^n}{A_1}$$

può risolversi in interi, una o più soluzioni proverranno dai valori della x compresi fra i limiti $-\frac{A_1}{2}$, e $+\frac{A_1}{2}$; imperciocchè ove h non sia fra questi limiti, potrà talmente prendersi il numero k, che $h \pm kA_1$ si trovi fra i limiti stessi (135).

---

(135) *Se h sia compreso fra i limiti $-\frac{A_1}{2}$ e $+\frac{A_1}{2}$, si*

Data p. e.

$$y = \frac{3 + 4x + 5x^2}{7},$$

poichè niuno dei numeri -1, -2, -3, 1, 2, 3, compresi

---

scorge facilmente che il numero $h = kA_1$ *ammetterà un valore compreso fra i medesimi, e corrispondente a* $k = 0$. *Se h oltrepassi quei limiti si verificherà altrettanto; poichè supponga si h positivo e* $> \frac{A_1}{2}$, *sarà in generale*

$$h = mA_1 + \frac{p}{q} A_1,$$

essendo m, p, q numeri interi, e $p < q$; *quindi si avrà*

$$h - kA_1 = mA_1 + \frac{p}{q} A_1 - kA_1.$$

Ora se $\frac{p}{q} = 0$, *ovvero* $< \frac{1}{2}$, $o = \frac{1}{2}$, *prendasi* $k = m$; *se* $\frac{p}{q} > \frac{1}{2}$, *prendasi* $k = m + 1$; *ed in ogni caso il numero* $h - kA_1$ *sarà evidentemente compreso fra quei limiti. Se fosse h negativo e numericamente maggiore di* $\frac{A_1}{2}$, *ragionando in simil guisa sul numero* $h + kA_1$ *si giungerebbe alla stessa conseguenza. Dunque se la* (f) *ammette una soluzione in interi, dovrà ammetterne una o più altre nelle quali sia il valore della x compreso fra i limiti* $-\frac{A_1}{2}$, $+\frac{A_1}{2}$. *Sostituiscansi pertanto nella* (f) *invece d' x tutti i numeri interi, positivi e negativi, compresi fra que' limiti, non esclusi questi medesimi se avvenga che sieno interi, e chiamando* h', h'', h''', . . .

fra i limiti $-\frac{7}{2}$ e $+\frac{7}{2}$, somministra delle soluzioni in interi, perciò niun altro numero darà soluzioni di tal sorta: ma data la

$$y = \frac{-1 + 2x + x^2}{7},$$

poichè i valori 2, 3 della x somministrano delle soluzioni in interi, si avranno perciò siffatte soluzioni anche dalle

$$x = 2 \pm 7k \ , \ 3 \pm 7k \ ,$$

comunque prendasi l'intero k

171

Se A_1 è un numero primo in se, nè divide esattamente K, e l'equazione (f) si risolve in interi per dei valori $x < A_1$, il numero di questi non sarà $> n$. Imperciocchè sieno x_1, x_2, x_3, ... x_n siffatti valori, e si rappresentino con m, m', ... m_1, m_2, ... m_1', m_1'', ... M, M', ... M_1, ... dei numeri interi: sarà

$$Kx_1^n + Hx_1^{n-1} + Ix_1^{n-2} + \ldots + Cx_1^2 + Bx_1 + A = mA_1.$$

Ma (§. 145)

---

quei che rendono il numeratore del secondo membro della (f) divisibile per A_1; tutte le soluzioni della (f) medesima saranno rappresentate dalle formule

$$h' \pm kA_1 \ , \ h'' \pm kA_1 \ , \ h''' \pm kA_1 \ , \ \ldots$$

Se niuno degli h', h'', h''' ... soddisfarà alla condizione suddetta, chiaro apparisce dall'esposto ragionamento, che la proposta niuna soluzione ammetterà in interi.

$$Kx_1^n + Hx_1^{n-1} + \ldots + Cx_1^2 + Bx_1 + A = Kx^n + Hx^{n-1} + \ldots$$

$$+ Cx^2 + Bx + A - K(x^n - x_1^n) - H(x^{n-1} - x_1^{n-1}) - \ldots .$$

$$- C(x^2 - x_1^2) - B(x - x_1) = Kx^n + Hx^{n-1} + \ldots + Cx^2 + Bx$$

$$+ A - (Kx^{n-1} + H_1 x^{n-2} + \ldots)(x - x_1) \quad (136);$$

fatto adunque per compendio

$$Kx^n + \ldots + Bx + A = P \;,\; Kx^{n-1} + H_1 x^{n-2} + \ldots = P_1 \;,$$

sarà

$$P - P_1(x - x_1) = mA_1 \;,$$

comunque prendasi la x. Facciasi $x = x_2, x_3, \ldots, x_n$ in P, ed in $x - x_1$; la prima conterrà esattamente A_1, non così la seconda (137); perciò

$$Kx_2^{n-1} + H_1 x_2^{n-2} + \ldots = m' A_1 \;,$$

$$Kx_3^{n-1} + H_1 x_3^{n-2} + \ldots = m'' A_1 \;,$$

ecc. . . . .

Ma (§. 145)

---

(136) *Osservando che i binomi* $x^n - x_1^n$, $x^{n-1} - x_1^{n-1}$, ... *sono tutti esattamente divisibili per* $x - x_1$ (§. 145), *si vedrà tosto come nasca il prodotto*

$$(Kx^{n-1} + H_1 x^{n-2} + I_3 x^{n-3} + \ldots)(x - x_1) \;,$$

nel quale si conserva il coefficiente K, *perchè una sol volta nei quoti, nati dalle successive divisioni di quei binomi per* $x - x_1$, *s'incontra la potenza* x^{n-1}, *alla quale unicamente quel coefficiente appartiene.*

(137) *Infatti essendo* $x_1, x_2 \ldots$ *numeri ciascuno* $< A_1$, *anche le differenze loro saranno ciascuna* $< A_1$, *e perciò non divisibili per* A_1. *Quindi attesa l'equazione* $P - P_1(x - x_1) = mA_1$, *dovrà essere* P_1 *esattamente divisibile per* A_1, *laonde avranno luogo le superiori equazioni.*

$$Kx_2^{n-1} + H_1x_2^{n-2} + \ldots\ldots = Kx^{n-1} + H_1x^{n-2} + \ldots\ldots$$

$$- K(x^{n-1} - x_2^{n-1}) - H_1(x^{n-2} - x_2^{n-2}) - \ldots\ldots = Kx^{n-1} + H_1x^{n-2}$$

$$+ \ldots - (Kx^{n-2} + H_2x^{n-3} + \ldots)(x - x_2) ;$$

posto adunque

$$Kx^{n-2} + H_2x^{n-3} + \ldots = P_2 ,$$

sarà

$$P_1 - P_2(x - x_2) = m_1A_1 ,$$

comunque similmente prendasi la x. Facciasi $x = x_3 , \ldots x_n$ in P_1, ed in $x - x_2$; la prima conterrà esattamente A_1, la seconda non lo conterrà (138) : dunque

$$Kx_3^{n-2} + H_2x_3^{n-3} + \ldots = m_1'A_1 ,$$

$$Kx_4^{n-2} + H_2x_4^{n-3} + \ldots = m_1''A_1 ,$$

$$\text{ecc.} \ldots ;$$

e poichè

$$Kx_3^{n-2} + H_2x_3^{n-3} + \ldots\ldots = Kx^{n-2} + H_2x^{n-3} + \ldots\ldots$$

$$- (Kx^{n-3} + H_3x^{n-4} + \ldots)(x - x_3) ,$$

perciò fatto

$$Kx^{n-3} + H_3x^{n-4} + \ldots = P_3 ,$$

---

(138) *Sostituendo x_1 ad x non potrebbe, pel ragionamento antecedente, concludersi P_1 esattamente divisibile per A_1 : sostituendovi poi x_2 si annullerebbe il fattore $x - x_2$; adunque tanto per x_1 quanto per x_2 non possiamo concludere l'esatta divisibilità di P_2 per A_1, perciò questi valori debbono escludersi da quelli dati nell' attual caso alla x. Similmente nel caso seguente debbono escludersi per x i valori x_1, x_2, x_3 ; e così appresso.*

otterremo

$$P_2 - P_3(x - x_3) = m_2 A_1$$

per qualunque valore della x. Similmente posto

$$Kx^{n-4} + H_4 x^{n-5} + \ldots = P_4,$$

ecc. . . . ,

avremo

$$P_3 - P_4(x - x_4) = m_3 A_1 , \ldots P_{n-1} - K(x - x_n) = m_{n-1} A_1 ,$$

qualunque valore abbia la x. Quindi

$$P - K(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) = MA_1 \quad (139),$$

ovvero

$$Kx^n + Hx^{n-1} + \ldots + Bx + A - K(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

$$= MA_1 \ldots . (f'),$$

indipendentemente dal valore della x.

Pertanto se qualunque valore $x_{n+1} < A_1$, diverso da $x_1 , x_2 , \ldots x_n$, risolvesse in interi l'equazione (f), il numero

$$\frac{K(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \ldots (x_{n+1} - x_n)}{A_1}$$

sarebbe intero: ciò non potendo essere (§. 50), apparisce che ec.

---

(139) *In questa equazione che si ottiene eliminando* $P_1 , P_2 , \ldots P_{n-1}$ *dalle* $P - P_1(x - x_1) = mA_1$, $P_1 - P_2(x - x_2) = m_1 A_1$, *ecc. . . . , il fattore M rappresenta la somma de' coefficienti di* A_1 *prodotti dalla eliminazione stessa.*

Pongansi le

$$(f'')\quad \left\{\begin{array}{l} H + K(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = R_1\ ,\ I - K(x_1x_2 + \\ x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) = \\ R_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ ,\ A \mp Kx_1x_2 \ldots x_n = R_n\ , \end{array}\right.$$

preso il segno superiore se n sarà impari, l'inferiore se pari (140). L'equazione (f') potrà scriversi così (§. 146)

$$R_1x^{n-1} + R_2x^{n-2} + \ldots + R_{n-2}x^2 + R_{n-1}x + R_n = MA_1\ ,$$

e poichè questa sussiste comunque prendasi la x; perciò fatto $x = 0$, sarà

$$R_n = M_nA_1\ ;$$

di poi

$$R_1x^{n-2} + R_2x^{n-3} + \ldots + R_{n-2}x + R_{n-1} = M'A_1\ ;$$

e preso nuovamente $x = 0$, sarà

$$R_{n-1} = M_{n-1}A_1\ ;$$

e così appresso. Pertanto

$$\left.\begin{array}{l} H + K(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = M_1A_1\ , \\ I - K(x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) = M_2A_1\ , \\ \text{ecc. } \ldots\ , \\ A \mp Kx_1x_2 \ldots x_n = M_nA_1 \text{ (141).} \end{array}\right\} (f'')$$

(140) *Ciò s'intenderà facilmente riflettendo essere K preceduto nella (f') dal segno $-$, ed essere* (§. 146) *l'ultimo termine d'ogni equazione il prodotto delle sue radici, ognuna col proprio segno, o col segno contrario, secondo che sia pari od impari il numero di esse.*

(141) *Si avverta che i numeri M_n, M_{n-1}, . . . M_1 sono*

Sieno $A = -1$, $B = 0$, $C = 0$, . . . , $H = 0$, $K = 1$, $n = A_1 - 1$; si ridurrà la (f) alla

$$y = \frac{x^{A_1-1} - 1}{A_1};$$

e saranno (§. 111 : II.°)

$$x_1 = 1 , \; x_2 = 2 , \; x_3 = 3 , \; . \; . \; . \; x_n = A_1 - 1 ;$$

quindi le (f'') diverranno

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (A_1 - 1) = M_1 A_1 ,$$

$$1.2 + 1.3 + \ldots + 1.(A_1 - 1) + 2.3 + \ldots + (A_1 - 2)(A_1 - 1) = M_2 A_1 ,$$

ecc. . . . . ,

$$1 + 1.2.3 \ldots (A_1 - 1) = M_n A_1 . \quad (142)$$

Prendasi $n = 2$, $K = 1$, $H = 0$, . . . $C = 0$, $B = 0$, onde la (f) riducasi alla

$$y = \frac{x^2 + A}{A_1} \quad . \; . \; . \; (f'''),$$

e si ponga il numero primo in se $A_1 > 2$. Poichè

$$x^2 = yA_1 - A, \; x^{A_1-1} = (yA_1 - A)^{\frac{A_1-1}{2}} , \; x^{A_1-1} - 1 = (yA_1 - A)^{\frac{A_1-1}{2}} - 1,$$

i valori che ricevono le quantità M , M' , M'' . . . per l'annullamento della x contenuta in esse.

(142) *Queste relazioni meritano di essere avvertite , perché ci mostrano vari casi della esatta divisibilità de' numeri.*

perciò (§. 111 : II.°) se la (f''') si risolve in interi , sarà

$$(-A)^{\frac{A_1-1}{2}} - 1 = mA_1 \ldots (f^{IV}) \quad (143).$$

Viceversa soddisfatta la (f^{IV}), si risolverà in interi la (f''') ; poichè la (f^{IV}) somministra

$$x^{A_1-1} - 1 - mA_1 = x^{A_1-1} - (-A)^{\frac{A_1-1}{2}},$$

o , fatto per compendio $A_1 - 1 = 2m'$, $-A = a$, sarà

$$x^{A_1-1} - 1 - mA_1 = x^{2m'} - a^{m'}.$$

Ma (§. 102)

$$\frac{x^{2m'}}{a^{m'}} - 1 = \left(\frac{x^2}{a} - 1\right)\left(1 + \frac{x^2}{a} + \frac{x^4}{a^2} + \ldots + \frac{x^{2m'-2}}{a^{m'-1}}\right),$$

ovvero

$$x^{2m'} - a^{m'} = (x^2 - a)\,(a^{m'-1} + a^{m'-2}x^2 + a^{m'-3}x^4 + \ldots + x^{2m'-2})\,(f^{V}) \ldots ;$$

perciò fatto

$$(-A)^{\frac{A_1-3}{2}} + (-A)^{\frac{A_1-5}{2}} x^2 + \ldots + x^{A_1-3} = Q,$$

sarà

$$x^{A_1-1} - 1 - mA_1 = Q(x^2 + A).$$

(143) *Se la* (f''') *si potrà risolvere in interi , i valori delle* x , y *che daranno queste soluzioni , renderanno interi ambedue i membri della*

Ma il numero $\frac{x^{A_1-1}-1-mA_1}{A_1}$ è intero (§. 111 : II.°) quante volte prendasi

$$x = 1, 2, 3, \ldots, A_1-1;$$

lo stesso dovrà dunque dirsi del numero $\frac{Q(x^2+A)}{A_1}$. Ora (§. 171) due di questi valori della x eccettuati, il numero $\frac{Q}{A_1}$ diviene intero per gli altri soltanto; dunque per quei due valori della x il numero $\frac{x^2+A}{A_1}$ diverrà intero (144); perciò ecc. . . . .

Poichè

$$x^{A_1-1}-1 = \left(x^{\frac{A_1-1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{A_1-1}{2}}-1\right);$$

al certo se x non contiene A_1 tra suoi fattori, l' uno o l' altro

---

$$x^{A_1-1}-1 = (yA_1-A)^{\frac{A_1-1}{2}}-1.$$

Ma il primo di questi, almeno per quei valori della x che non eccedono A_1, deve potersi esattamente dividere per A_1 (§. 111 : II.°), dunque anche il secondo potrà così dividersi. E poichè questo, dato luogo al suo sviluppo, risulta di una parte manifestamente divisibile per A_1 con esattezza, e di un altra $= (-A)^{\frac{A_1-1}{2}}-1$, perciò questa dovrà essere anch' essa esattamente divisibile per A_1; e conseguentemente avrà luogo la (f^{IV}) : dalla quale poi si deduce il criterio per giudicare, se la (f''') possa o no risolversi in interi.

(144) *Dovendo il numero* $\frac{Q(x^2+A)}{A_1}$ *essere intero per cia-*

dei numeri

$$x^{\frac{A_1-1}{2}}+1\ ,\quad x^{\frac{A_1-1}{2}}-1$$

sarà esattamente divisibile per A_1, e conseguentemente sarà

$$x^{\frac{A_1-1}{2}}=m''A_1\mp 1.$$

175

La formula (f^{IV}) necessariamente si verifica se $A=-1$; dunque l'equazione

$$y=\frac{x^2+z^2-1}{A_1}$$

potrà risolversi in interi; poichè determinato (§. 170) quel valore della x, pel quale si risolve in interi l'equazione

$$y=\frac{x^2-1}{A_1},$$

basterà prendere $z=mA_1$. Anche la

---

scuno dei suddetti valori dati alla x, i fattori Q ed x^2+A si troveranno evidentemente nelle condizioni apposte alla (f) (§. 171), perciò il numero $\frac{Q}{A_1}$ diverrà intero per A_1-3 dei citati valori, ed il numero $\frac{x^2+A}{A_1}$ pei due residui; onde ecc. Quante volte pertanto si verifichi la (f^{IV}), ed abbiasi $A_1>3$, il numero $\frac{Q}{A_1}$ si potrà sempre rendere intero per A_1-3 valori dati alla x, ciascuno intero e non maggiore di A_1, lo che merita di essere avvertito.

$$y = \frac{x^2 + z^2 + 1}{A_1}$$

potrà risolversi in interi. E' manifesto se $\frac{A_1 - 1}{2}$ $(= m')$ è pari ; poichè allora la (f^{IV}) si verifica necessariamente rispetto alla

$$y = \frac{x^2 + 1}{A_1},$$

e però ecc. . . . . ; resta dunque a considerare il caso di m' impari , quando cioè non verificata la (f^{IV}) il numero $\frac{x^2 + 1}{A_1}$ non può essere intero.

Nella (f^V) pongasi z in vece d' x , e $-(x^2 + 1)$ in vece di a : si avrà

$$z^{2m'} + (x^2 + 1)^{m'} = (z^2 + x^2 + 1)[(x^2 + 1)^{m'-1} - (x^2 + 1)^{m'-2} z^2 + (x^2 + 1)^{m'-3} z^4 - \ldots + z^{2m'-2}] ;$$

la quale , fatto

$$1 - (x^2 + 1)^{m'} = P , (x^2 + 1)^{m'-1} - (x^2 + 1)^{m'-2} z^2 + \ldots + z^{2m'-2} = P',$$

somministra

$$P[z^{2m'} - 1 + 1 + (x^2 + 1)^{m'}] = (z^2 + x^2 + 1)PP' ,$$

ovvero

$$P(z^{2m'} - 1) - [(x^2 + 1)^{2m'} - 1] = (z^2 + x^2 + 1)PP'.$$

Ora delle due formule

$$z^{2m'} - 1 \quad \text{ed} \quad (x^2 + 1)^{2m'} - 1 ,$$

la prima rendesi esattamente divisibile per A_1 , prendendo

$$z = 1 , 2 , 3 , \ldots , A_1 - 1 ;$$

la seconda poi comunque prendasi la x (145) : dunque se in vece d' x e z sostituiscansi due qualunque fra i valori 1 , 2 , 3,.. $A_1 - 1$, diverrà $(z^2 + x^2 + 1)PP'$ esattamente divisibile per A_1. Ora

$$P = -x^2(x^{2m'-2} + m'x^{2m'-4} + \ldots + m') ,$$

e però (§. 171) fra quei valori della x non più di $2m' - 2$ $(= A_1 - 3)$ rendono intero il numero $\frac{P}{A_1}$. Dunque fra essi ve ne sono che non rendono P esattamente divisibile per A_1 : s'intendano sostituiti in P' ; non sarà $\frac{P'}{A_1}$ un numero intero fuorchè (§. 171) per $2m' - 2$ $(= A_1 - 3)$ fra i detti valori di z (146).

(145) *Qualunque sia il valore intero della* x, *il numero* $x^2 + 1$ *non potrà mai contenere come fattore* A_1, *altramente dovrebbe* (§. 174) *la* (f^{IV}) *verificarsi rapporto alla*

$$y = \frac{x^2 + 1}{A_1} ,$$

lo che non può aver luogo, per essere $\frac{A_1 - 1}{2}$ *numero impari; dunque* (§. 111 : II.°) *la seconda formula* $(x^2 + 1)^{2m'} - 1$, *per qualunque valore intero della* x *sarà esattamente divisibile per* A_1.

(146) *Sostituendo ad* x *in* P *uno qualunque dei citati valori, se* $\frac{P}{A_1}$ *sarà intero, non potrà esserlo pel suo primo fattore* $-x^2$, *dunque* (§. 50) *lo sarà pel secondo. Ma in questo come in* P' *si verificano le condizioni apposte alla* (f) (§. 171) , *dunque se* $\frac{P}{A_1}$ *e* $\frac{P'}{A_1}$ *diverranno interi per le sostituzioni dei valori suddetti, il numero di questi, tanto in un caso quanto nell' altro, non potrà superare* $A_1 - 3$, *perciò almeno due fra que' valori non renderanno nè* P *nè* P' *esattamente divisibili per* A_1.

Vi saranno adunque nella serie 1 , 2 , 3 , . . . $A_1 - 1$ dei termini che, sostituiti in x e z, non rendendo nè P nè P′ esattamente divisibile per A_1, renderanno $z^2 + x^2 + 1$ esattamente divisibile per lo stesso A_1; perciò ecc. . . .

176

Non altro fa d'uopo per intendere che l'equazione

$$y = \frac{x^2 + z^2 + 1 + u^2 + v^2 - 1}{A_1}, \text{ ovvero } y = \frac{x^2 + z^2 + u^2 + v^2}{A_1}$$

si può risolvere in interi; e poichè $\frac{A_1}{2}$ non è intero, perciò (§. 170) essa verrà soddisfatta per mezzo d'interi

$$x < \frac{A_1}{2}, \; z < \frac{A_1}{2}, \; u < \frac{A_1}{2}, \; v < \frac{A_1}{2} \; (147).$$

Sieno x_1, z_1, u_1, v_1 siffatti valori, ed y_1 il corrispondente valore d' y; sarà

$$y_1 = \frac{x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2}{A_1} < A_1.$$

Il numero $\frac{x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2}{y_1}$ persiste intero, se (§. 170) in-

---

(147) *Poichè la proposta equazione si può risolvere in interi* (§. 175), *facilmente si dimostrerà con un ragionamento simile a quello istituito al* §. 170, *che fra i valori d'* x, z, u, v, *atti a rendere intera la* y *dell'equazione suddetta, uno almeno dovrà esservene per ogni variabile, che non possa eccedere i limiti* $-\frac{A_1}{2}, +\frac{A_1}{2}$; *ed essendo* A_1 *impari, dovranno quei valori esser tutti* $< \frac{A_1}{2}$.

vece di x_1 , z_1 , u_1 , v_1 , pongansi le $x_1 - m_1 \gamma_1$, $z_1 - m_2 \gamma_1$, $u_1 - m_3 \gamma_1$, $v_1 - m_4 \gamma_1$ (148). Ma non possono insieme aver luogo le

$$x_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 \ , \ z_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 \ , \ u_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 \ , \ v_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 \ ,$$

poichè

$$x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2 = A_1 \gamma_1 > \gamma_1^2 \ (149) \ ;$$

dunque (§. 170) i numeri

$$x_1 - m_1 \gamma_1 \ , \ z_1 - m_2 \gamma_1 \ , \ u_1 - m_3 \gamma_1 \ , \ v_1 - m_4 \gamma_1 \ ,$$

o tutti diverranno $< \frac{1}{2}\gamma_1$, ovvero parte $= \frac{1}{2}\gamma_1$, e parte $< \frac{1}{2}\gamma_1$ (150) : perciò

$$\gamma_2 = \frac{(x_1 - m_1\gamma_1)^2 + (z_1 - m_2\gamma_1)^2 + (u_1 - m_3\gamma_1)^2 + (v_1 - m_4\gamma_1)^2}{\gamma_1} < \gamma_1$$

---

(148) *Eseguita in fatti la sostituzione di questi binomi, e fatto lo sviluppo delle seconde potenze, nascerà il numero* $x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2 + M\gamma_1$ *esattamente divisibile per* γ_1.

(149) *Abbiamo in fatti* $A_1 > \gamma_1$, *donde* $A_1\gamma_1 > \gamma_1^2$; *ed essendo ancora* $x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2 = A_1\gamma_1$, *sarà* $x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2 > \gamma_1^2$; *ma se potessero esistere insieme le*

$$x_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 \ , \ z_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 \ , \ u_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 \ , \ v_1 = \frac{1}{2}\gamma_1$$

avremmo invece $x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2 = \gamma_1^2$, *dunque tale coesistenza non può aver luogo.*

(150) *A dichiarare tal conseguenza riflettasi che potendosi rendere intero il numero* $\frac{x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2}{\gamma_1}$ *mediante*

e così appresso. Ma la serie dei numeri positivi e decrescenti A_1, γ_1, γ_2, . . . non può progredire all'infinito; dunque dovrà terminare nell'unità.

177

Si osservi ora, che se la somma di quattro quadrati $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ si moltiplichi per la somma di altri quattro $a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$, il prodotto loro consisterà parimente nella somma di quattro quadrati. Poichè (§. 103 : g)

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$$

$$+ (c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2) + (a^2 + b^2)(c'^2 + d'^2) + (c^2 + d^2)(c'^2 + d'^2)$$

$$= (aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2 + (ca' + db')^2 + (cb' - da')^2$$

$$+ (ac' + bd')^2 + (ad' - bc')^2 + (cc' + dd')^2 + (cd' - dc')^2$$

$$= (aa' + bb')^2 + (cc' + dd')^2 + 2(aa' + bb')(cc' + dd')$$

$$+ (ab' - ba')^2 + (cd' - dc')^2 - 2(ab' - ba')(cd' - dc') + (ac' + bd')^2$$

$$+ (ca' + db')^2 - 2(ac' + bd')(ca' + db') + (ad' - bc')^2 + (cb' - da')^2$$

$$+ 2(ad' - bc')(cb' - da') = (aa' + bb' + cc' + dd')^2$$

$$+ (ab' - ba' - cd' + dc')^2 + (ac' + bd' - ca' - db')^2 + (ad' - bc'$$

$$+ cb' - da')^2.$$

---

i valori $x_1 - m_1\gamma_1$, $z_1 - m_2\gamma_1$, *ecc. . . . , si potrà rendere intero anche* (§. 170) *per dei valori, che non eccedano i limiti* $-\frac{1}{2}\gamma_1$, $+\frac{1}{2}\gamma_1$. *Ma si è dimostrato non poter essere contemporaneamente* $x_1 = \frac{1}{2}\gamma_1$, $z_1 = \frac{1}{2}\gamma_1$, *ecc. . . . ; dunque lo stesso numero si potrà rendere intero, o per valori tutti* $< \frac{1}{2}\gamma_1$, *o per valori parte* $<$, *e parte* $= \frac{1}{2}\gamma_1$. *In ambedue i casi avremo* $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 <$ *ecc. . . .*

Ciò avvertito ciascun vede essere

$$A_1 \gamma_1 \gamma_1 \gamma_2 = (x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2)[(x_1 - m_1\gamma_1)^2 + (z_1 - m_2\gamma_1)^2$$

$$+ (u_1 - m_3\gamma_1)^2 + (v_1 - m_4\gamma_1)^2] = [x_1(x_1 - m_1\gamma_1) + z_1(z_1 - m_2\gamma_1)$$

$$+ u_1(u_1 - m_3\gamma_1) + v_1(v_1 - m_4\gamma_1)]^2 + [x_1(z_1 - m_2\gamma_1) - z_1(x_1 - m_1\gamma_1)$$

$$- u_1(v_1 - m_4\gamma_1) + v_1(u_1 - m_3\gamma_1)]^2 + [x_1(u_1 - m_3\gamma_1) + z_1(v_1 - m_4\gamma_1)$$

$$- u_1(x_1 - m_1\gamma_1) - v_1(z_1 - m_2\gamma_1)]^2 + [x_1(v_1 - m_4\gamma_1) - z_1(u_1 - m_3\gamma_1)$$

$$+ u_1(z_1 - m_2\gamma_1) - v_1(x_1 - m_1\gamma_1)]^2 ;$$

onde (151)

$$A_1\gamma_2 = (A_1 - m_1x_1 - m_2z_1 - m_3u_1 - m_4v_1)^2 + (m_1z_1 - m_2x_1 - m_3v_1$$

$$+ m_4u_1)^2 + (m_1u_1 + m_2v_1 - m_3x_1 - m_4z_1)^2 + (m_1v_1 - m_2u_1 + m_3z_1 - m_4x_1)^2.$$

Similmente si troverebbe $A_1\gamma_3$ espresso per la somma di quattro quadrati, e così appresso, finchè si otterrebbe un numero in se primo A_1, parimente rappresentato per la somma di quattro quadrati

$$(f^{VI}) \ldots A_1 = X^2 + Z^2 + U^2 + V^2 :$$

del resto nulla impedisce che uno o più dei termini X^2, Z^2, ... sia $= 0$. E poichè quei numeri che non sono in se primi possono (§. 52) in questi risolversi ; perciò (§. 177) valerà la (f^{VI}) anche non essendo A_1 in se primo.

---

(151) *Si giunge a questo risultamento effettuando le moltiplicazioni accennate nell' ultimo membro dell' equazione precedente, sopprimendo i termini eguali e di segno contrario, ponendo* $A_1\gamma_1$ *invece di* $x_1^2 + z_1^2 + u_1^2 + v_1^2$ (§. 176), *e dividendo poscia tutta l'equazione, così ridotta, per* γ_1^2.

179

Sia data 5.°

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

da doversi soddisfare per x e y razionali. Fatto

$$B^2 - 4AC = a\ ,\ 2BD - 4AE = b\ ,\ D^2 - 4AF = c\ ,$$

essa riducesi (§. 135) alla

$$2Ay + Bx + D = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}\ .$$

Laonde x deve esser tale, che il trinomio $ax^2 + bx + c$ divenga un quadrato esatto, cioè

$$ax^2 + bx + c = z^2.$$

Ma questa, posto

$$b^2 - 4ac = g\ ,\ 4a = i\ ,$$

somministra (§. 135)

$$2ax + b = \pm\sqrt{g + iz^2}\ ;$$

dunque se z può talmente determinarsi, che il binomio $g + iz^2$ divenga un quadrato esatto, cioè

$$g + iz^2 = u^2\ \ldots\ (0),$$

le formule

$$2Ay + Bx + D = \pm z\ ,\ 2ax + b = \pm u$$

somministreranno i valori d'x e y razionali, dai quali sarà soddisfatta la data equazione.

180

Si otterrà facilmente la z quante volte o la g, o la i sia un quadrato esatto m^2. Imperciocchè preso qualsivoglia numero razionale v, si faccia nel 1.° caso

$$u = \nu z + m ,$$

sarà $m^2 + iz^2 = (\nu z + m)^2$: e perciò $iz = \nu^2 z + 2m\nu$; onde

$$z = \frac{2m\nu}{i - \nu^2} .$$

Si faccia nel 2° caso

$$u = mz + \nu ;$$

sarà $g + m^2 z^2 = (mz + \nu)^2$; perciò $g = 2m\nu z + \nu^2$; e conseguentemente

$$z = \frac{g - \nu^2}{2m\nu} .$$

Facilmente ancora si otterrà la z, se indicati con d, r, d', r' dei numeri razionali , sarà

$$g + iz^2 = (d + rz)(d' + r'z) ;$$

poichè preso $u = \nu (d + rz)$, sarà $(d+rz)(d'+r'z) = \nu^2 (d+rz)^2$, laonde $d' + r'z = \nu^2 (d + rz)$; e perciò

$$z = \frac{d' - d\nu^2}{r\nu^2 - r'} .$$

181.

Si noti quanto siegue : 1° divisa la (o) per z^2 , e fatto $\frac{1}{z} = \gamma$, $\frac{u}{z} = \omega$, sarà

$$i + g\gamma^2 = \omega^2 ;$$

adunque determinata la γ per modo che il binomio $i + g\gamma^2$ divenga un quadrato esatto , sarà soddisfatta la (o) dal prendere $z = \frac{1}{\gamma}$. 2° se $g = nm^2$, onde abbiasi $nm^2 + iz^2 = u^2$, posto $\frac{z}{m} = \gamma$, $\frac{u}{m} = \omega$, sarà

$$n + iy^2 = \omega^2 ;$$

perciò trovata la y in modo, che $n + iy^2$ risulti un quadrato esatto, sarà soddisfatta la (o) prendendo $z = my$. 3° se $i = n'm'^2$, cosicchè abbiasi

$$g + n'm'^2z^2 = u^2 ,$$

determinata la y in guisa che il binomio $g + n'y^2$ riesca un quadrato esatto, sarà soddisfatta la (o) dal prendere (1°. 2°) $z = \frac{y}{m'}$ (152). 4° se $g = nm^2$, ed insieme $i = n'm'^2$ per cui si abbia

$$nm^2 + n'm'^2z^2 = u^2 ,$$

trovata la y tale che il binomio $n + n'y^2$ sia un quadrato esatto, sarà soddisfatta la (o) prendendo (2°.3°.) $z = \frac{m}{m'}y$ (153).

---

(152) *Posto* $z = \frac{y}{m'}$, *ed* $u = \frac{\omega}{m'}$, *si trasformerà la* $g + n'm'^2z^2 = u^2$ *nella*

$$g + n'y^2 = \frac{\omega^2}{m'^2} ,$$

perciò determinato y *in modo che* $g + n'y^2$ *sia un quadrato esatto, sarà* $\frac{y}{m'}$ *il valore razionale di* z *che soddisfa alla* (o).

(153) *Posto* $z = \frac{m}{m'}y$, $u = \frac{m}{m'}\omega$, *si ridurrà la* $nm^2 + n'm'^2z^2 = u^2$ *alla*

$$n + n'y^2 = \frac{\omega^2}{m'^2} ,$$

perciò ecc. . . . Si è veduto pertanto quali sono le condizioni per soddisfare alla (o), *e quindi alla proposta* (§. 179. 5°) *nel caso che una delle* g, i, *od ambedue contengano per fattore un quadrato.*

182.

Pertanto pongasi che g ed i non contenga verun fattore quadrato, inoltre che sieno ambedue $>o$, e $g>i$. Fatto $z=\frac{\alpha}{\mu}$, $u=\frac{\beta}{\mu}$ (denotano α, β, μ numeri interi) affinchè la (o) si riduca alla

$$g\mu^2 + i\alpha^2 = \beta^2 \ldots (o'),$$

la risoluzione della stessa (o) manifestamente si riduce a trovare α, β, μ soddisfacenti all' equazione (o'). Prendasi

$$\beta = \theta\alpha - g\alpha' \ldots (o''),$$

e sostituiscasi in (o'); si avrà

$$\mu^2 = \frac{\theta^2 - i}{g}\alpha^2 - 2\theta\alpha\alpha' + g\alpha'^2 \ldots (o''').$$

Ora non contenendo g per ipotesi verun fattore quadrato, α e g saranno primi fra loro (164); vedasi dunque se (§. 170)

$$\frac{\theta^2 - i}{g} = g_1 \ldots (o^{IV}),$$

possa soddisfarsi in interi mediante θ^2 non $> \frac{1}{4} g^2$; imper-

---

(154) *Infatti suppongasi che* α, g *ammettano in comune un fattore* γ. *Ridotta* (o''') *alla*

$$g^2\alpha'^2 = \mu^2 g + 2g\theta\alpha\alpha' - (\theta^2 - i)\alpha^2,$$

si vede che per la nostra supposizione, mentre i termini $2g\theta\alpha\alpha'$, *e* $-(\theta^2-i)\alpha^2$, *contengono il fattore* γ^2, *il termine* $\mu^2 g$ *contiene solo* γ, *perchè* g *non ha fattori quadrati, e perchè* μ *è primo con* α, *perciò il secondo membro di questa equazione sarebbe divisibile una sol volta* γ, *e non potrebb' essere un quadrato, contro l'ipotesi.*

ciocchè se ciò non avvenga, non potrà soddisfarsi alla (o') (155). Soddisfatta la (o^{IV}), e rappresentato con k^2 il massimo fattor quadrato, che può esser contenuto in g_1, la stessa g_1 si esprimerà con $g'k^2$, e la (o''') si cangerà nella

$$\mu^2 = g'k^2\alpha^2 - 2\theta\alpha\alpha' + g\alpha'^2 ;$$

la quale moltiplicata per $g'k^2$ somministra

$$g'k^2\mu^2 = (g'k^2\alpha - \theta\alpha')^2 - (\theta^2\alpha'^2 - gg'k^2\alpha'^2) .$$

Pongasi

$$k\mu = \mu' , \quad g'k^2\alpha - \theta\alpha' = \beta' \ldots (o^V) ,$$

ed avvertasi che la (o^{IV}) somministra $\theta^2 - gg'k^2 = i$; si avrà

$$g'\mu'^2 + i\alpha'^2 = \beta'^2 \ldots (o^{VI}) :$$

ma poichè nel risolvere la (o^{IV}) il numero θ^2 nè si prende $< i$, nè $> \frac{1}{4}g^2$, perciò g' sarà $> o$, e $< \frac{1}{4}g$.

Come mediante le formule (o''), (o^{IV}), (o^V) si converte la (o') nella (o^{VI}), così mediante le

$$\left.\begin{array}{l} \beta' = \theta'\alpha' - g'\alpha'' , \ \dfrac{\theta'^2 - i}{g'} = g_2 = g''k'^2 \\ k'\mu' = \mu'' \quad , \quad g''k'^2\alpha' - \theta'\alpha'' = \beta'' \end{array}\right\} (o^{VII})$$

---

(155) *Se non potrà il numero* $\frac{\theta^2 - i}{g}$ *rendersi intero per valori di* θ^2, *il secondo membro della* (o'''), *per essere* g *primo con* α, *non sarà intero; perciò neanche lo sarà* μ : *laonde non potrà in tal caso la* (o') *essere soddisfatta. Se poi* $\frac{\theta^2 - i}{g}$ *si potrà rendere intero, uno almeno fra i valori di* θ^2, *che ciò producono, dovrà non eccedere* $\frac{1}{4}g^2$ (§. 170).

si ridurrà la (o^{VI}) alla

$$g''\mu''^2 + i\alpha''^2 = \beta''^2 \ldots (o^{VIII}), \quad (156)$$

nella quale $g'' > o$, e $< \frac{1}{4} g'$; e così appresso, finchè giungasi a qualcuno dei numeri g', g'' ... che sia $< i$ (157). Abbiasi p. e. $g'' < i$; si convertirà la (o^{VIII}) mediante le formule

(156) *Ecco in qual modo per mezzo delle* (o^{VII}) *si traduce la* (o^{VI}) *alla* (o^{VIII}). *Sostituito nella* (o^{VI}) *il valore di* β' *avremo*

$$\mu'^2 = \frac{(\theta'^2 - i)}{g'}\alpha'^2 - 2\theta'\alpha'\alpha'' + g'\alpha''^2 \ldots (1).$$

Risoluta ora la $\frac{\theta'^2 - i}{g'} = g_2$, (*e ciò potrà sempre farsi quante volte la* (o^{IV}) *risolver si possa in interi*) *esprima* k'^2 *il massimo quadrato contenuto in* g_2, *sarà*

$$\frac{\theta'^2 - i}{g'} = g_2 = g''k'^2 \ldots (2).$$

Sostituito ciò nella (1) *avremo* $\mu'^2 = g''k'^2\alpha'^2 - 2\theta'\alpha'\alpha'' + g'\alpha''^2$, *che moltiplicata per* $g''k'^2$ *darà*

$$g''k'^2\mu'^2 = (g''k'^2\alpha' - \theta'\alpha'')^2 - (\theta'^2\alpha''^2 - g'g''\alpha''^2k'^2).$$

Pongasi ora $k'\mu' = \mu''$, $g''k'^2\alpha' - \theta'\alpha'' = \beta''$, *e riflettasi che dalla* (2) *si ha* $\theta'^2 - g'g''k'^2 = i$; *avremo*

$$g''\mu''^2 + i\alpha''^2 = \beta''^2 \ldots (o^{VIII}).$$

Con un simile calcolo, mediante le (o^{IX}), *si otterrà la* (o^{X}), *e così appresso.*

(157) *Essendo per fatto di calcolo*

$$g' < \frac{1}{4} g \;,\quad g'' < \frac{1}{4} g' \;,\quad g''' < \frac{1}{4} g'' \;, \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta'' = \theta''\mu'' - i\mu''' \;,\; \dfrac{\theta''^2 - g''}{i} = i'k''^2 \\ k''\alpha'' = \alpha''' \;,\; i'k''^2\mu'' - \theta''\mu''' = \beta''' \end{array}\right\} (o^{\text{IX}})$$

nella

$$g''\mu'''^2 + i'\alpha'''^2 = \beta'''^2 \;\ldots\; (o^{\text{X}}) \;;$$

questa mediante le

$$\left.\begin{array}{l} \beta''' = \theta'''\mu''' - i'\mu^{\text{IV}} \;,\; \dfrac{\theta'''^2 - g''}{i'} = i''k'''^2 \\ k'''\alpha''' = \alpha^{\text{IV}} \;,\; i''k'''^2\mu''' - \theta'''\mu^{\text{IV}} = \beta^{\text{IV}} \end{array}\right\} (o^{\text{XI}})$$

nella

$$g''\mu^{\text{IV}\,2} + i''\alpha^{\text{IV}\,2} = \beta^{\text{IV}\,2} \;\ldots\; (o^{\text{XII}}) \;;$$

ecc. . . , finchè alcuno dei numeri i' , i'' , . . . per es. i'' sia $< g''$; e così appresso (158). Ma la serie de' numeri positivi

sarà

$$g' < \frac{1}{4}g \;,\; g'' < \frac{1}{4^2}g \;,\; g''' < \frac{1}{4^3}g \;\ldots\;,$$

perciò seguendo il processo indicato, ed essendo $g > i$, *dovrà uno dei numeri* g' , g'' , g''' . . . *finalmente riescire* $< i$.

(158) *Siccome a risolvere in interi la* $\dfrac{\theta''^2 - g''}{i} = i'k''^2$ *delle* (o^{IX}), *si prende* θ''^2 *nè* $< g''$, *nè* $> \dfrac{1}{4}i^2$; *perciò* i' *sarà* $> o$, *e* $< \dfrac{1}{4}i$. *Similmente a risolvere in interi la* $\dfrac{\theta'''^2 - g''}{i'} = i''k'''^2$ *delle* (o^{XI}) *si prende* θ'''^2 *nè* $< g''$, *nè* $> \dfrac{1}{4}i'^2$, *perciò* i'' *sarà* $> o$, *e* $< \dfrac{1}{4}i'$; *e così appresso. Dunque*

e decrescenti g, i, g'', i'', . . . non può progredire in infinito; terminerà dunque nella unità.

Sia per es. $i'' = 1$; fatto

$$\frac{\alpha^{IV}}{\mu^{IV}} = \varepsilon \quad , \quad \frac{\beta^{IV}}{\mu^{IV}} = \nu \, ,$$

l'equazione (o^{XII}) potrà scriversi a questo modo

$$g'' + \varepsilon^2 = \nu^2 \quad . \quad . \quad . \quad (o^{XIII}) \, ,$$

la quale si risolverà per le cose dette (§. 180) (159). Nascano pertanto le

$$\varepsilon = \frac{m}{n} \quad , \quad \nu = \frac{m'}{n} \, ;$$

saranno $\alpha^{IV} = m$, $\beta^{IV} = m'$, $\mu^{IV} = n$: queste ottenute, si dedurranno le α''', β''', μ''' dalle (o^{XI}); le α'', β'', μ''' dalle (o^{IX}); le α', β', μ' dalle (o^{VII}); le α, β, μ dalle (o^{V}) ed (o'').

Si noti che soddisfatta la (o^{IV}) avremo

$$\frac{\theta^2 - i}{g'} = gk^2 \, ;$$

$$i' < \frac{1}{4} i \quad , \quad i'' < \frac{1}{4} i' \quad , \quad i''' < \frac{1}{4} i'' \, , \, . \, . \, .$$

quindi

$$i' < \frac{1}{4} i \quad , \quad i'' < \frac{1}{4^2} i \quad , \quad i''' < \frac{1}{4^3} i \, , \, . \, . \, ;$$

e poichè $g'' < i$, *dovrà uno dei numeri* i', i'', i''' . . . *finalmente riescire* $< g''$.

(159) *Potrà risolversi la* (o^{XIII}) *per valori razionali di* ε, ν, *perchè* (§. 180) *il coefficiente di* ε^2 *può riguardarsi come il quadrato di* 1.

perciò (§. 170) nella ipotesi in cui siamo vi sarà sempre un certo valore θ non $> \frac{1}{2} g'$, pel quale diverrà intero il numero $\frac{\theta^2 - i}{g'}$: cioè la risoluzione in interi della

$$\frac{\theta'^2 - i}{g'} = g_2$$

certamente succederà, quante volte la (o^{IV}) si sciolga in interi. Per la medesima ragione risoluta in interi la seconda delle (o^{IX}), sarà soddisfatta senza dubbio in interi la seconda delle (o^{XI}), ecc...

Per dare qualche esempio, sieno $g = 101$, $i = 13$: preso nella (o^{IV}) $\theta = 35$, sarà

$$\frac{35^2 - 13}{101} = 12 = 3.2^2,$$

onde $k = 2$, $g' = 3$; e le (o''), (o^{V}) diverranno

$$\beta = 35\alpha - 101\alpha', \quad 2\mu = \mu', \quad 12\alpha - 35\alpha' = \beta', \quad \ldots \quad (o_1).$$

Ma poichè $g' < i$, perciò omesse le (o^{VII}) dovrà passarsi alle (o^{IX}), le quali si scriveranno in questo modo:

$$\beta' = \theta'\mu' - i\mu'', \quad \frac{\theta'^2 - g'}{i} = i'k'^2, \quad k'\alpha' = \alpha'', \quad i'k'^2\mu' - \theta'\mu'' = \beta''.$$

Nella seconda di queste fatto $\theta' = 4$, sarà $\frac{4^2 - 3}{13} = 1$, e conseguentemente $i' = 1$, $k' = 1$: le altre diverranno

$$\beta' = 4\mu' - 13\mu'', \quad \alpha' = \alpha'', \quad \mu' = 4\mu'' = \beta'' \quad \ldots \quad (o_2);$$

e la (o^{XIII}) darà

$$3 + \varepsilon^2 = \nu^2.$$

A risolver questa pongasi (§. 180) $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ nasceranno i corrispondenti valori

$$\varepsilon = 1, -\frac{1}{4}, -1 \ldots, \nu = 2, \frac{7}{4}, 2 \ldots;$$

laonde

$$\alpha'' = 1, -1, -1, \ldots$$

$$\beta'' = 2, \quad 7, \quad 2, \ldots$$

$$\mu'' = 1, \quad 4, \quad 1, \ldots$$

Dalle (o_2) derivano

$$\alpha' = 1, -1, -1, \ldots$$

$$\beta' = 11, \quad 40, \quad 11, \ldots$$

$$\mu' = 6, \quad 23, \quad 6, \ldots$$

Dalle (o_1) provengono, è vero,

$$\alpha = \frac{23}{6}, \quad \frac{5}{12}, \quad -2, \ldots$$

$$\beta = \frac{199}{6}, \quad \frac{1387}{12}, \quad 31, \ldots$$

$$\mu = 3 \quad , \quad \frac{23}{2} \quad , \quad 3, \ldots ;$$

ma praticate, ove faccia d'uopo, le riduzioni al medesimo denominatore, nasceranno i valori interi

$$\alpha = 23 \; , \; 5 \; , \; -2 \; , \ldots$$

$$\beta = 199, \; 1387 \; , \; 31 \; , \ldots$$

$$\mu = 18 \; , \; 138 \; , \; 3 \; , \ldots$$

che daranno

$$z = \frac{23}{18}, \quad \frac{5}{138}, \quad -\frac{2}{3}, \ldots$$

$$u = \frac{199}{18}, \quad \frac{1387}{138}, \quad \frac{31}{3}, \ldots$$

dai quali sarà soddisfatta l'equazione $101 + 13z^2 = u^2$.

183.

Ponemmo g ed i ineguali; che se fosse $g=i$, si risolverebbe (o^{IV}) prendendo $\theta = g$; quindi $g - 1 = g'k^2$; e perciò $g' > o$, e $< i$ nella (o^{VI}) (160), cui perciò si applicherà l'esposto metodo.

Ponemmo eziandio g ed i positive; ora denotino H e K i numerici valori di esse: poichè g ed i non possono essere ambedue $< o$, se debba veramente $g\mu^2 + ia^2$ divenire un quadrato esatto; perciò dovranno considerarsi soltanto le due

$$H\mu^2 - K\alpha^2 = \beta^2 \ , \ -H\mu^2 + K\alpha^2 = \beta^2.$$

La prima di queste si moltiplichi per H, e facciasi $H\mu = \varphi$; la seconda si moltiplichi qer K, e facciasi $K\alpha = \omega$: si convertiranno esse nelle

$$HK\alpha^2 + H\beta^2 = \varphi^2 \ , \ HK\mu^2 + K\beta^2 = \omega^2 \ ,$$

che potranno esser trattate col metodo di sopra (161)

184.

Sieno proposte 6ª le

$$y^3 = A^3 + Bx + Cx^2 + Dx^3, \ y^3 = A + Bx + Cx^2 + D^3x^3, \ y^3 = Cx^2 + Dx^3$$

(160) *Essendo* $g'k^2 = g - 1$, *sarà* $g'k^2 < g$, *ed a più forte ragione* $g' < g$, *ovvero* $< i$.

(161) *Se fosse* $g < i$, *allora tralasciati gli altri calcoli, si tradurrà immediatamente la* (o') *alla forma* (o^x), *per mezzo di equazioni del tutto simili alle* (o^{IX}), *ed il calcolo per soddisfare alla* (o) *riescirà più spedito. Si è veduto adunque come si deve procedere in qualunque caso perchè* $g + iz^2$ *divenga un quadrato perfetto, e quindi la proposta indeterminata di secondo grado rimanga soddisfatta, per valori commensurabili delle incognite in essa contenute.*

da doversi verificare per x ed y razionali.

Per quello riguarda la prima, può essa scriversi così

$$y^3 = \left(A + \frac{Bx}{3A^2}\right)^3 + Cx^2 + Dx^3 - \frac{B^2x^2}{3A^3} - \frac{B^3x^3}{27A^6} ;$$

e fatto $y = A + \frac{Bx}{3A^2}$ nascerà

$$\left(\frac{B^3}{27A^6} - D\right) x^3 + \left(\frac{B^2}{3A^3} - C\right) x^2 = o ,$$

onde

$$x = \frac{9A^3 (3A^3C - B^2)}{B^3 - 27A^6D} .$$

In quanto alla seconda, potrà essa disporsi a questo modo

$$y^3 = \left(Dx + \frac{C}{3D^2}\right)^3 + A + Bx - \frac{C^2x}{3D^3} - \frac{C^3}{27D^6} ;$$

e fatto $y = Dx + \frac{C}{3D^2}$, sarà

$$\left(B - \frac{C^2}{3D^3}\right) x + A - \frac{C^3}{27D^6} = o ,$$

onde

$$x = \frac{C^3 - 27AD^6}{9D^3(3BD^3 - C^2)} .$$

Vengo alla terza; la quale fatto $y = vx$ somministra

$$v^3 = \frac{C}{x} + D , \quad \text{e perciò} \quad x = \frac{C}{v^3 - D} .$$

Delle quantità medie.

185.

Diciamo esser media fra date grandezze quella, che è minore della massima, e maggiore della minima di esse. Di quì siegue che se una delle due g, k rappresenta la massima, l'altra la minima di più quantità, sarà h la media fra queste, se (§. 83) le differenze $g-h$, $h-k$ risulteranno ambedue, o positive, o negative (162).

186.

Se h è media fra le quantità a, a', a'', . . . preso un fattore qualunque r, sarà eziandio il prodotto rh medio fra ra, ra', ra'' . . . Imperciocchè denotando g la massima, e k la minima di tutte le a, a', a'', . . . sarà

$$g - h > 0 \quad , \quad h - k > 0 \; ;$$

dunque $r(g-h)$, $r(h-k)$, ovvero le differenze $rg-rh$, $rh-rk$, o saranno ambedue positive, o ambedue negative; perciò (§. 185), ecc. . . . (163).

187.

Con b, $b' : b''$, . . . denotando n quantità dello stesso

---

(162) *In questa condizione riposa il carattere delle grandezze medie, dal quale deriva che, date più grandezze, si avranno rispetto queste un indefinito numero di medie; cioè tante quante le grandezze possibili fra la minima e la massima delle date. Se* g *fosse la minima,* k *la massima di più quantità, le differenze* $g-h$, $h-k$ *sarebbero negative, rimanendo* h (§. 83) *media fra* g, k.

(163) *Dunque moltiplicando per qualunque fattore la media fra quantità date, il prodotto sarà medio fra le medesime moltiplicate per lo stesso fattore.*

segno, e con a, a', a'', ... altrettante o dello stesso segno, o di segno diverso, sarà

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$$

media tra le $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ...

Imperciocchè espressa la massima di queste con g, e la minima con k, le differenze

$$g - \frac{a}{b}, \quad g - \frac{a'}{b'}, \quad g - \frac{a''}{b''}, \ldots$$

$$\frac{a}{b} - k, \quad \frac{a'}{b'} - k, \quad \frac{a''}{b''} - k, \ldots$$

saranno tutte positive; per la qual cosa moltiplicati i primi termini dell' una e dell' altra serie per b, i secondi per b', i terzi per b'', ecc. ..., i prodotti

$$gb - a, \quad gb' - a', \quad gb'' - a'', \ldots$$

$$a - kb, \quad a' - kb', \quad a'' - kb'', \ldots$$

e conseguentemente i due polinomi

$$(gb - a) + (gb' - a') + (gb'' - a'') + \ldots$$

$$(a - kb) + (a' - kb') + (a'' - kb'') + \ldots,$$

ovvero

$$g(b + b' + \ldots) - (a + a' + \ldots),$$

$$a + a' + \ldots - k(b + b' + \ldots)$$

avranno lo stesso segno. Ora se questi si dividano per $b+b'+\ldots$ nasceranno le

$$g - \frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}, \quad \frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} - k$$

parimente dello stesso segno. Sarà dunque (§. 185)

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$$

media fra le $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ . . .

S'inferisce di quì che fatto $b = b' = b'' = \ldots = 1$, sarà

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{n}$$

media fra le grandezze a , a' , a'' . . . (164).

188.

Oltre b , b' , b'' , ... abbiansi altre n quantità c , c' , c'', ... parimente dello stesso segno. Poichè (§. 187)

$$\frac{ac + a'c' + a''c'' + \ldots}{bc + b'c' + b''c'' + \ldots}$$

è media fra le

$$\frac{ac}{bc} , \frac{a'c'}{b'c'} , \frac{a''c''}{b''c''} \ldots ,$$ ovvero le $$\frac{a}{b} , \frac{a'}{b'} , \frac{a''}{b''} , \ldots$$

(164) *Supponendo anche* $b = b' = b'' = \ldots = b^{(n)}$, *avremo* $\frac{a + a' + a'' \ldots}{nb}$ *media fra le* $\frac{a}{b} , \frac{a'}{b} , \frac{a''}{b} , \ldots$ *Questi due medii sono da rimarcarsi, perchè ognuno ripetuto tante volte quante sono le grandezze fra le quali è medio, produce la somma di esse. Sono perciò i medesimi di un uso esteso nelle applicazioni delle matematiche, e si distinguono col nome* di medii aritmetici. *Si ottiene adunque il medio aritmetico fra più grandezze, dividendo la lor somma pel numero di esse.*

perciò, preso di nuovo $b = b' = b'' = \ldots = 1$, la quantità $ac + a'c' + a''c'' + \ldots$ eguaglierà il prodotto di $c + c' + c'' + \ldots$ in una certa media fra le a, a', a'' ... (165).

189.

Se la quantità h pongasi media tra le a, a', a'' ... (delle quali la massima $= g$, la minima $= k$), e sia B un qualunque valor numerico, sarà B^h media fra le B^a, $B^{a'}$, $B^{a''}$, ...

Quando infatti abbiamo

$$g - h > 0 \quad , \quad h - k > 0 \, ,$$

saranno

$$B^{g-h} > 1 \quad , \quad B^{h-k} > 1 \quad , \text{ se } B > 1 \, , \text{ e}$$

$$B^{g-h} < 1 \quad , \quad B^{h-k} < 1 \quad , \text{ se } B < 1 \, .$$

Ma

$$B^{g-h} = \frac{B^g}{B^h} \quad , \quad B^{h-k} = \frac{B^h}{B^k} \quad ;$$

dunque le differenze $B^g - B^h$, $B^h - B^k$ saranno affette dal medesimo segno, e perciò (§. 185) ecc. (166).

---

(165) *Rappresentando con M una media fra le grandezze a, a', a'' ..., sarà per quanto si è detto*

$$M = \frac{ac + a'c' + a''c'' + \ldots}{c + c' + c'' + \ldots} \, ,$$

donde

$$M(c + c' + c'' + \ldots) = ac + a'c' + a''c'' + \ldots \, ,$$

dal che apparisce la conseguenza enunciata.

(166) *Deve quì riflettersi che B^g, B^k sono nel primo caso rispettivamente la massima e la minima, e viceversa nel*

190.

Rappresentati con $B, B', B'', \ldots, C, C', C'', \ldots$ dei valori numerici qualunque, sarà

$$\sqrt[C+C'+C''+\ldots]{B\,B'\,B''\ldots}$$

media fra le $\sqrt[C]{B}, \sqrt[C']{B'}, \sqrt[C'']{B''}\ldots$

Possono infatti le $B, B', B'', \ldots$ esprimersi con $\beta^{\alpha}, \beta^{\alpha'}, \beta^{\alpha''}, \ldots$; perciò

$$\sqrt[C]{B} = \beta^{\frac{\alpha}{C}}, \quad \sqrt[C']{B'} = \beta^{\frac{\alpha'}{C'}}, \quad \sqrt[C'']{B''} = \beta^{\frac{\alpha''}{C''}}, \ldots$$

$$\sqrt[C+C'+C''+\ldots]{B\,B'\,B''\ldots} = \beta^{\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots}{C+C'+C''+\ldots}}.$$

Ma (§. 187)

$$\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots}{C+C'+C''+\ldots}$$

è media fra le $\frac{\alpha}{C}, \frac{\alpha'}{C'}, \frac{\alpha''}{C''}\ldots$ Dunque (§. 189) anche

secondo, fra le date $B^{a}, B^{a'}, B^{a''}\ldots$ *Dunque una media fra diverse potenziali di egual base sarà quella, che avendo la stessa base, avrà per esponente una media fra gli esponenti delle date.*

$\frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots}{C + C' + C'' + \ldots}$ media fra le $\beta^{\frac{\alpha}{C}}$, $\beta^{\frac{\alpha'}{C'}}$, $\beta^{\frac{\alpha''}{C''}}$, ... ovvero

$$\sqrt[C+C'+C''+\ldots]{B\,B'\,B''\ldots}$$

media fra le $\sqrt[C]{B}$, $\sqrt[C']{B'}$, $\sqrt[C'']{B''}$, ...

Preso $C = C' = C'' \ldots = 1$, sarà $\sqrt{B\,B'\,B''\ldots}$ media fra le B, B', B'', ... (167).

191.

Se il valore numerico H è medio tra B, B′, B″, ..., (il massimo de' quali = G, il minimo = K) sarà ancora la potenza H^a media fra le B^a, B'^a, B''^a, ...

Poichè $\left(\frac{G}{H}\right)^a > 1$, $\left(\frac{H}{K}\right)^a > 1$ se $a > 0$, e $\left(\frac{G}{H}\right)^a < 1$, $\left(\frac{H}{K}\right)^a < 1$ se $a < 0$.

Laonde le differenze $G^a - H^a$, $H^a - K^a$ avranno lo stesso segno; e perciò (§. 185) ecc. . . . (168).

(167) *Questo medio elevato al numero delle grandezze alle quali appartiene uguaglia il prodotto delle medesime. Siffatti medii si distinguono col nome di* medii geometrici, *ed è frequente nelle matematiche l'uso di essi. Si ottiene adunque il medio geometrico fra diversi valori numerici, estraendo dal prodotto di questi la radice del grado eguale al numero dei medesimi.*

(168) *Dobbiamo riflettere che* G^a, K^a *nel caso di* $a > 0$ *sono rispettivamente il massimo, e il minimo, e viceversa nel caso di* $a < 0$, *fra le* B^a, B'^a, B''^a, ... *Perciò una*

Fatto $a = \frac{1}{2}$, sarà $\sqrt{H}$ media tra le $\sqrt{B}$, $\sqrt{B'}$, $\sqrt{B''}$,... Quindi siegue che essendo

$$\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{n}$$

media (§. 187) tra le a^2, a'^2, a''^2, . . . , sarà

$$\sqrt{\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{n}}$$

media fra i valori numerici delle quantità a, a', a'', ... (169)

Delle ragioni, proporzioni, e progressioni.

192.

Sieno a, b due quantità; il quoto $a : b$, ovvero $\frac{a}{b}$, talora dicesi ragione geometrica di quelle, la differenza poi $a - b$ ragione aritmetica: a si chiama l'antecedente della ragione, b il conseguente; del resto col nome di ragione senza più, sempre intendesi la geometrica.

La ragione geometrica certo non si cangia, se l'antecedente e il conseguente si moltiplichino o dividano per la stessa quantità (§. 88); nè varia la ragione aritmatica, se l'antecedente e il conseguente si aumentino o si diminuiscano egualmente.

media fra diverse potenze di eguali esponenti è quella, che avendo per base una media fra le basi delle date, ha lo stesso esponente di queste.

(169) *Dunque la radice seconda del medio aritmetico fra grandezze date, è media fra le radici seconde dei valori numerici delle medesime.*

193.

L'eguaglianza di due ragioni

$$a : b = a' : b' \quad , \quad a - b = a' - b'$$

dicesi proporzione geometrica o aritmetica, secondo la qualità delle ragioni stesse; e dicesi il primo termine a, stare al secondo b geometricamente od aritmeticamente, come il terzo a' al quarto b'; ed a, b' si nomano termini estremi; b, a' medii.

Inoltre se due quantità x, y talmente si corrispondano, che sebbene crescano o decrescano insieme, tuttavia il quoto $\frac{x}{y}$ rimanga costantemente lo stesso, dicesi una essere direttamente come l'altra. Che se il prodotto xy fosse costante, si direbbe una essere inversamente o reciprocamente come l'altra (170).

194.

Dalla eguaglianza $a : b = a' : b'$ ovvero $\frac{a}{b} = \frac{a}{b'}$ abbiamo (§. 88. 86) $\frac{ab'}{bb'} = \frac{a'b}{bb'}$, $ab' = a'b$; la eguaglianza poi $a - b = a' - b'$ fornisce (§. 123) $a + b' = a' + b$; cioè in ogni proporzione, se geometrica, il prodotto degli estremi eguaglia quello de' medii; se aritmetica, la somma degli estremi eguaglia quella de' medii. Viceversa poichè le due $ab' = ba'$,

---

(170) *In somma* x *ed* y *nel primo caso costituiscono una ragione che dicesi* diretta, *nel secondo un' altra che dicesi* inversa *o* reciproca. *Coloro che sanno di fisica potranno agevolmente concretare questa idea riflettendo, che l'attrazione e la massa attraente sono in ragione diretta, perché il quoto, e non il prodotto loro, serba costantemente lo stesso valore : mentre l'attrazione e il quadrato della distanza fra l'attratto e l'attraente sono in ragione inversa, perchè il prodotto, e non il quoto di queste due grandezze, rimane sempre costante.*

$a + b' = a' + b$ forniscono l'una $\frac{ab'}{bb'} = \frac{ba'}{bb'}$, $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, l'altra $a - b = a' - b'$, perciò se i quattro termini a, b, a', b' sono tali , che il prodotto degli estremi eguagli quello de' medi , o la somma degli uni sia eguale a quella degli altri , saranno essi proporzionali , nel primo caso geometricamente , nel secondo aritmeticamente.

Fatto $a' = b$, affinchè il conseguente della prima ragione sia lo stesso che l'antecedente della seconda, la proporzione si chiama continua, e sarà $b^2 = ab'$, ovvero $2b = a + b'$. La quantità $\frac{a + b'}{2}$ dicesi media (§. 187) proporzionale aritmetica fra a , b' ; la radice poi numerica $\sqrt{ab'}$ si chiama (§. 190) media proporzionale geometrica tra i valori a , b'.

195.

Si osservi che se nella proporzione $a : b = a' : b'$ sono a , b , a' , b' numeri interi , ed a , b primi fra loro , sarà certamente $b' = nb$, $a' = na$; n significa un qualunque numero intero. Imperciocchè si ha $\frac{b'a}{b} = a'$, e siccome a, b non hanno fattor comune , perciò (§. 49) b dividerà esattamente b' ; dunque $b' = nb$, e perciò $a' = \frac{a.nb}{b} = na$.

196.

Essendo $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ avranno luogo le seguenti

$$\frac{a}{b} \pm h = \frac{a'}{b'} \pm h \quad , \quad \frac{a \pm hb}{b} = \frac{a' \pm hb'}{b'} \ ,$$

$$\frac{b}{b'} \left(= \frac{a}{a'}\right) = \frac{a \pm hb}{a' \pm hb'} \quad , \quad \frac{a \pm hb}{a} = \frac{a' \pm hb'}{a'} \ ,$$

$$\frac{a + hb}{a' + hb'} = \frac{a - hb}{a' - hb'} \quad , \quad \frac{a + hb}{a - hb} = \frac{a' + hb'}{a' - hb'} \ ,$$

o, ciò che torna lo stesso, dalla $a : b = a' : b'$ deduconsi

$$a \pm hb : b = a' \pm hb' : b' \quad , \quad a \pm hb : a = a' \pm hb' : a'$$

$$a + hb : a - hb = a' + hb' : a' - hb' \text{ (171) ;}$$

e fatto $h = 1$ sarà

$$a \pm b : b = a' \pm b' : b' \quad , \quad a \pm b : a = a' \pm b' : a' \quad ,$$

$$a + b : a - b = a' + b' : a' - b' \text{ ;}$$

Cioè in ogni proporzione geometrica la somma o differenza de' termini della prima ragione sta al secondo, o al primo, come la somma, o la differenza de' termini della seconda ragione sta al secondo, o al primo: di nuovo la somma de' termini della prima ragione sta alla differenza loro, come la somma de' termini della seconda ragione sta alla differenza de' medesimi.

Supposto

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = k \ldots (r) \text{ ,}$$

(171) *Della equazione* $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ *sono derivate le altre*

$$\frac{a \pm bh}{b} = \frac{a' \pm b'h}{b'} \quad , \quad \frac{a \pm bh}{a} = \frac{a' \pm b'h}{a'} \quad , \quad \frac{a \pm bh}{a - bh} = \frac{a' \pm b'h}{a' - b'h} \text{ ;}$$

ma ogni equazione (§. 194) *si trasforma in proporzione: dunque operando questa trasformazione, sarà facile concludere che dalla* $a : b = a' : b'$ *derivano le tre sopra esposte dall' autore.*

avremo

$$a = bk \quad , \quad a' = b'k \quad , \quad a'' = b''k \ , \ \ldots \ ,$$

$$a + a' + a'' + \ldots = k(b + b' + b'' + \ldots) \ ,$$

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} = k = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \ldots \ ;$$

donde conchiudesi che, posta l' eguaglianza di più ragioni geometriche, la somma degli antecedenti sta a quella de' conseguenti, come qualunque antecedente sta al suo conseguente.

198.

Siccome dalle

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad , \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \quad , \quad \frac{e}{f} = \frac{e'}{f'} \ , \ \ldots$$

abbiamo

$$\frac{ace \ldots}{bdf \ldots} = \frac{a'c'e' \ldots}{b'd'f' \ldots} \ ,$$

perciò se i primi termini di più geometriche proporzioni si moltiplichino fra loro, e così i secondi, i terzi, i quarti, saranno i prodotti proporzionali (172). Lo stesso avviene nelle proporzioni aritmetiche, se alla moltiplicazione de' termini si sostituisca la loro somma ; poichè dalle

$$a - b = a' - b' \quad , \quad c - d = c' - d' \ , \ \ldots \ ,$$

(172) *Ciò equivale a dire che, date più geometriche proporzioni, il prodotto degli antecedenti delle prime ragioni, sta a quello de' loro conseguenti, come il prodotto degli antecedenti delle seconde ragioni, sta a quello de' loro conseguenti.*

discende

$$(a + c + \ldots) - (b + d + \ldots) = (a' + c' + \ldots) - (b' + d' + \ldots).$$

Le ragioni

$$ace \ldots : bdf \ldots , \quad (a + c + \ldots) - (b + d + \ldots)$$

si dicono composte, la prima dalle geometriche $a : b$, $c : d$, $e : f$, . . . , la seconda dalle aritmetiche $a - b$, $c - d$, . . .

199.

Per poco che pongasi mente , tosto apparirà essere in generale

$$\left.\begin{aligned} &(ab + a'b' + a''b'' + \ldots)^2 + (ab' - a'b)^2 + (ab'' - a''b)^2 + \ldots \\ &+ (a'b'' - a''b')^2 + \ldots = (a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)(b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots). \end{aligned}\right\} (r')$$

Ma poste le condizioni (r) avranno luogo le

$$ab' - a'b = 0 \quad , \quad ab'' - a''b = 0 , \ \ldots \ a'b'' - a''b' = 0, \ \ldots ;$$

perciò sotto queste condizioni sussisterà

$$(ab + a'b' + a''b'' + \ldots)^2 = (a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)(b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots) ;$$

donde

$$\frac{a^2 + a'^2 + \ldots}{ab + a'b' + \ldots} = \frac{ab + a'b' + \ldots}{b^2 + b'^2 + \ldots} . \quad (173)$$

(173) *Sviluppando il primo membro della* (r') *facilmente si avrà il secondo ; giacchè la somma dei doppi prodotti sarà manifestamente nulla , e non rimarrà di quello sviluppo fuorchè la somma dei quadrati , a cui facilmente potrà darsi la forma del secondo membro. Inoltre le condizioni* (r) *essendo* $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$, ...

Fatto nella (r) $a' = b$, $a'' = b'$, $a''' = b''$, . . . sarà

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} = \frac{b'}{b''} = \frac{b''}{b'''} = \ldots = k \ ,$$

dove i termini a , b , b' , b'', . . . si dicono costituire una progressione geometrica. Ma

$$a = bk \ , \ b = b'k \ , \ b' = b''k \ , \ b'' = b'''k \ , \ \ldots \ ,$$

e perciò

$$b = \frac{a}{k} \ , \ b' = \frac{b}{k} = \frac{a}{k^2} \ , \ b'' = \frac{a}{k^3} \ , \ \ldots$$

Dunque i termini sino all' $n.^{mo}$, dei quali è formata qualunque progressione geometrica, potranno indicarsi così

$$a \ , \ \frac{a}{k} \ , \ \frac{a}{k^2} \ , \ \ldots \frac{a}{k^{n-1}} \ ;$$

ed anche, fatto $\frac{1}{k}\left(=\frac{b}{a}\right) = z$, nel modo seguente $\Big\}$ (r'')

$$a \ , \ az \ , \ az^2 \ , \ \ldots \ az^{n-1} \ .$$

facilmente da queste discenderanno le $ab' - a'b = 0$, $ab'' - a''b = 0$, $a'b'' - a''b' = 0$, ... ; *perciò la* (r') *che è vera generalmente , lo sarà eziandio se in essa si annullino questi binomi. Quindi si conclude che date più ragioni geometriche uguali , la somma de' prodotti dell' antecedente e conseguente di ciascuna , è media geometrica proporzionale fra la somma dei quadrati di ogni antecedente , e quella dei quadrati di ogni conseguente.*

Abbiamo poi (§. 102)

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z};$$

perlochè sommando n termini della (r''), e simboleggiando la somma per s_n, nascerà

$$s_n = \frac{a}{1-z} - \frac{az^n}{1-z} \ldots (r''') \quad (174).$$

201.

Crescendo n oltre qualunque dato numero quanto si voglia grande, e posto il valore $z < 1$, decrescerà $\frac{az^n}{1-z}$ per modo, che sempre più si accosterà allo zero; ma ciò importa il continuo avvicinamento del polinomio $a + az + az^2 + \ldots az^{n-1}$, alla quantità fissa $\frac{a}{1-z}$. Dunque in questa ipotesi la somma della progressione (r'') indefinitamente protratta sarà (§. 106)

---

(174) *Infatti moltiplicando per a i due membri della penultima equazione avremo*

$$a + az + az^2 + \ldots az^{n-1} = \frac{a - az^n}{1-z} = \frac{a}{1-z} - \frac{az^n}{1-z} = s_n.$$

Dunque la somma di n termini di qualunque progressione geometrica sarà compendiosamente espressa per

$$s_n = a\,\frac{1 - z^n}{1 - z};$$

in cui si avverta che a è il primo termine, z il rapporto costante, ed n il numero de' termini della progressione medesima.

$$s = \frac{a}{1-z} \ldots (r^{IV}) .$$

Fatto per esempio $a = 1$, $z = \frac{1}{2}$, sarà

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 .$$

202.

Supposto

$$a-b = b-b' = b'-b'' = b''-b''' = \ldots ,$$

i termini a , b , b', ... si dicono essere in progressione aritmetica ; e fatto $b-a = \delta$ (175) si avranno le

$$b = a + \delta \ , \ b' = b + \delta = a + 2\delta \ , \ b'' = a + 3\delta \ , \ldots$$

dunque i termini sino all' $n.^{mo}$ dai quali ogni progressione aritmetica è costituita, si potranno così esprimere

$$a \ , \ a+\delta \ , \ a+2\delta \ , \ a+3\delta \ , \ \ldots \ a+(n-2)\delta, \ a+(n-1)\delta \ , \ \ldots (r^{V}).$$

E siccome si ottiene sempre la stessa somma $2a + (n-1)\delta$, tanto addizionando il primo coll' ultimo dei termini della (r^{V}), quanto il secondo col penultimo, quanto il terzo coll' antipenultimo, eccetera ; perciò la somma di tutta la progressione (r^{V}) sarà

$$s_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)\delta] \ldots (r^{VI}) \quad (176).$$

(175) *L'equazione* $b-a=\delta$ *esprime la differenza costante, che deve per ipotesi regnare fra due qualunque consecutivi termini della progressione aritmetica* a , b , b' , b'' , ...

(176) *Nel caso di n pari siccome i termini tutti della* (r^{V}) *si riducono a* $\frac{n}{2}$ *coppie , e ciascuna di queste sommata produce costantemente* $2a+(n-1)\delta$, *così la formula* (r^{VI})

Fatto per esempio $a=1$, $\delta=1$, $n=100$, avremo

$$1+2+3\ldots+100=\frac{100}{2}(2+99)=5050.$$

203.

Dato il primo termine a, l'ultimo u, e il numero n de' termini di una progressione geometrica, o aritmetica, avendosi (§. 200, 202)

$$u=az^{n-1}\ ,\quad \text{ed}\quad u=a+(n-1)\delta\ ,$$

dalla prima di queste si dedurrà z, e dalla seconda δ; quindi si otterranno eziandio i termini di mezzo. Sieno per esempio $a=2$. $u=54$, $n=4$, sarà $z=\sqrt[3]{27}=3$, onde $az=6$, $az^2=18$; similmente $\delta=\frac{54-2}{3}=17\frac{1}{3}$, e conseguentemente $a+\delta=19\frac{1}{3}$, $a+2\delta=36\frac{2}{3}$ (177).

---

in questo caso è della massima evidenza; ma perchè lo sia anche quando n è impari, basta riflettere che allora vi sarà un termine medio della forma $a+\frac{n-1}{2}\delta$; *perciò la somma degli altri termini sarà*

$$s_n=\frac{n-1}{2}[2a+(n-1)\delta]\ ,$$

e conseguentemente quella dei termini tutti della (r^v) *sarà in questo caso anche rappresentata da*

$$s_n=\frac{n-1}{2}[2a+(n-1)\delta]+a+\frac{n-1}{2}\delta=\frac{n}{2}[2a+(n-1)\delta].$$

(177) *Osservando* (§. 200), *che qualunque termine della* (r'') *risulta del primo, moltiplicato pel quoto costante elevato*

Dei logaritmi.

204.

Quelle grandezze, sieno costanti o variabili, che hanno l'esponente variabile, diconsi *esponenziali*. Ora se nell' esponenziale a^x pongasi a costante, ed a ciascun particolar valore dell' esponente x corrisponda l'equazione $a^x = z$, siffatto valor d'x suole chiamarsi logaritmo del numero z, nel sistema di *base* a. Indicheremo i logaritmi dei numeri prefiggendo a questi la lettera l, o L; cioè $l(z)$, L (z). Ma poichè non si conosce in questa notazione la base alla quale debbonsi riferire i logaritmi, perciò il suo valore dovrà particolarmente indicarsi. Pertanto adoperando la lettera l a significare i logaritmi nel sistema di base $= a$, ciascun vede all' equazione $a^x = z$ andar congiunta quest' altra $x = l(z)$.

205.

Si scorge (§. 90, 92) che, se $a > 1$, il logaritmo x del numero z sarà positivo o negativo, secondo che lo stesso z sarà $>$, o < 1. Accade il contrario se $a < 1$ (178). Co-

---

al numero de' termini precedenti, chiaro discenderà $u = az^{n-1}$. *Similmente osservando* (§. 202) *che qualunque termine della* (r^v) *risulta dal primo, più la differenza moltiplicata pel numero de' termini precedenti, sarà facile stabilire* $u = a + (n-1)\delta$. *Dalla prima si cava* $z = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$, *dalla seconda* $\delta = \frac{u-a}{n-1}$. *Sostituendo in queste formule i valori numerici proposti, avremo primieramente* $z = 3$, *e la progressione geometrica sarà* 2, 6, 18, 51; *secondariamente* $\delta = 17\frac{1}{3}$, *e la progressione aritmetica sarà* $2, 19\frac{1}{3}, 36\frac{2}{3}, 54$.

(178) *Se* $a < 1$ *e* $z > 1$, *sarà necessariamente* x *negati-*

munque poi stabiliscasi a, fatto $x = 0$, sarà $z = 1$; e fatto $x = 1$, sarà $z = a$; dunque

$$0 = l(1) \quad , \quad 1 = l(a).$$

Cioè il logaritmo dell'unità sempre $= 0$, il logaritmo poi delle basi sempre $= 1$. (179).

206.

Se i valori dell'esponente x nell'equazione $a^x = z$ crescano o decrescano in progressione aritmetica (§. 202); i corrispondenti valori di z cresceranno o decresceranno in progressione geometrica (§. 94: 200) (180). Dunque se più logaritmi nel medesimo sistema costituiscono una progressione aritmetica, i numeri corrispondenti ne costituiranno una geometrica.

207.

Ritenuta la stessa base a, sieno x, y i logaritmi dei numeri z, v. Sarà (§. 204)

$a^x = z$, $a^y = v$; e perciò $a^{x+y} = zv$, $a^{x-y} = \frac{z}{v}$.

Quindi

---

vo, e se $z < 1$, sarà x positivo; altrimenti la supposta equazione fra x e z, cioè $a^x = z$, non potrebbe sussistere (§. 92).

(179) *Deve anche notarsi che sempre a^x sarà un numero positivo, se prendasi la base positiva; onde siegue che in questa ipotesi saranno del tutto impossibili i logaritmi de' numeri negativi, e da considerarsi quali espressioni immaginarie.*

(180) *Infatti gli esponenti de' termini di una qualunque progressione geometrica sempre costituiscono una progressione aritmetica.*

$$x + y = l(zv) \quad , \quad x - y = l\left(\frac{z}{v}\right) .$$

Ma

$$x + y = l(z) + l(v) \quad , \quad x - y = l(z) - l(v) ;$$

dunque

$$l(zv) = l(z) + l(v) \quad , \quad l\left(\frac{z}{v}\right) = l(z) - l(v) .$$

Il logaritmo cioè del prodotto zv eguaglia la somma dei logaritmi de' suoi fattori z , v : il logaritmo poi del quoto $\frac{z}{v}$ eguaglia il logaritmo del dividendo z, diminuito del logaritmo del divisore v. Non altro fa d'uopo affinchè ognuno intenda essere ancora (181)

$$l(zz'z'' \ldots) = l(z) + l(z') + l(z'') + \ldots ,$$

$$l\left(\frac{zz'z'' \ldots}{vv'v'' \ldots}\right) = l(z) + l(z') + l(z'') + \ldots - l(v) - l(v') - l(v'') - \ldots$$

208.

Elevato l'uno e l'altro membro dell' equazione $a^x = z$, alla potenza μ, ovvero estratta da amendue la radice μ, nascerà

(181) *Questi generali rapporti si otterranno stabilendo le seguenti equazioni*

$$a^x = z \quad , \quad a^{x'} = z' \quad , \quad a^{x''} = z'' \quad , \ldots ,$$

$$a^y = v \quad , \quad a^{y'} = v' \quad , \quad a^{y''} = v'' \quad , \ldots ,$$

ed operando sulle medesime come si è fatto sulle due $a^x = z$, $a^y = v$.

$$a^{\mu x} = z^{\mu} \quad , \quad a^{\frac{x}{\mu}} = z^{\frac{1}{\mu}} .$$

Poichè dunque (§. 204)

$$\mu x = l\,(z^{\mu}) \quad , \quad \frac{x}{\mu} = l\,(z^{\frac{1}{\mu}}),\ x = l\,(z),$$

sarà ancora

$$l\,(z^{\mu}) = \mu l\,(z) \quad , \quad l\,(z^{\frac{1}{\mu}}) = \frac{1}{\mu} l\,(z) .$$

Il logaritmo cioè della potenza di qualunque dato numero si ottiene moltiplicando il logaritmo del numero stesso per l'esponente della potenza. Il logaritmo poi di una radice si ha dividendo il logaritmo del numero per l'indice della radice.

209.

Determinati pertanto i logaritmi dei numeri in qualche sistema, diverrà molto comodo il calcolare; poichè la moltiplicazione potrà eseguirsi con la somma; la divisione con la sottrazione: e qualunque potenza di un dato numero potrà ottenersi mediante la moltiplicazione del suo logaritmo per l'esponente della potenza stessa; qualunque radice poi mediante la divisione per l'indice della radice medesima.

Il più comodo sistema di logaritmi, che si preferisce a tutti gli altri, e che perciò si appella *volgare*, è quello in cui la base $a = 10$. Per siffatto sistema di logaritmi abbiamo $10^x = z$, onde i numeri crescenti in ragione decupla

$$1\ ,\ 10\ ,\ 100\ ,\ 1000\ ,\ \ldots$$

hanno i logaritmi

$$0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots$$

I logaritmi dei numeri che stanno fra 1 e 10, 10 e 100, 100 e 1000, ... sono stati prossimamente determinati mediante la successiva investigazione dei medii proporzionali (§. 206, 194), e così sono state calcolate le tavole dei logaritmi volgari; sebbene poi sieusi trovati altri metodi, pei quali ciò più

facilmente si eseguisce. Così a determinare $l\,(5)$ si cerca un medio geometrico fra i limiti 1 e 10, più prossimi ad esso 5, e sarà $\sqrt{10} = 3{,}162277$, il cui logaritmo è medio aritmetico fra $l\,(1)$ e $l\,(10)$, cioè

$$\frac{l\,(1) + l\,(10)}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5000000.$$

Ma il numero 3,162 ... non poco dista da 5; dunque da capo fra esso e 10 si cerchi un medio geometrico: si ottiene $\sqrt{10.\,3{,}162\ldots} = 5{,}623413$, il cui logaritmo è

$$\frac{l\,(3{,}162\ldots) + l\,(10)}{2} = 0{,}7500000.$$

Fatta la stessa operazione sui numeri 3,162 ..., e 5,623 ..., e suoi logaritmi, si otterrà il medio geometrico 4,216964, ed il suo logaritmo 0,6250000.

A questo modo ristretti sempre più i limiti fra i quali si contiene 5, si giungerà finalmente ad un numero che non differisca neppure di una millionesima dallo stesso 5, ed il suo logaritmo 0,6989700 si attribuirà al numero 5; e si avrà molto prossimamente $10^{0{,}6989700} = 5$. (182).

(182) *Infatti posto* $A = 1{,}000000$, $B = 10{,}000000$ *sarà* $l\,(A) = 0{,}000000$, *e* $l\,(B) = 1{,}000000$. *Cerchiamo il medio geometrico* C *fra* A *e* B, *che sarà perciò un numero compreso fra* 1 *e* 10, *ed avremo*

$$C = \sqrt{AB} = \sqrt{10} = 3{,}162277.$$

Il logaritmo di questo numero sarà il medio aritmetico fra i logaritmi di A *e* B, *ovvero fra quelli di* 1 *e* 10, *onde avremo*

$$l\,(C) = \frac{l\,(1) + l\,(10)}{2} = 0 + 0{,}5 = 0{,}500000.$$

Cerchiamo adesso il medio geometrico D *fra* B *e* C, *ed avremo*

$$D = \sqrt{BC} = \sqrt{10 \times 3{,}163\ldots} = 5{,}623413$$

Ecco tutta la serie delle operazioni tratta da Eulero (*Introductio in analysin infinitorum: Tom. I. Cap.* 6.)

Il logaritmo di questo numero sarà medio aritmetico fra $l\,(B)$ *e* $l\,(C)$, *ovvero fra* 1 *e* 0,5, *onde sarà*

$$l\,(D) = \frac{l\,(3,162\ldots) + l\,(10)}{2} = \frac{1+0,5}{2} = 0,7500000.$$

Cerchiamo inoltre il medio geometrico E *fra* C *e* D, *sarà*

$$E = \sqrt{CD} = \sqrt{3,16\ldots \times 5,623\ldots} = 4,216964.$$

Il logaritmo di questo numero sarà medio aritmetico fra $l\,(C)$ *e* $l\,(D)$, *onde avremo*

$$l\,(E) = \frac{l\,(3,16\ldots) + l\,(5,62\ldots)}{2} = \frac{0,5+0,75}{2} = 0,6250000.$$

Così continuando si giungerà a trovare il medio geometrico Z *fra* X *ed* Y, *e si avrà*

$$Z = \sqrt{XY} = \sqrt{4,99\ldots \times 5,00\ldots} = 5,000000.$$

Il logaritmo di questo numero sarà medio aritmetico fra $l\,(X)$ *e* $l\,(Y)$, *onde avremo*

$$l\,(Z) = \frac{l\,(X)+l\,(Y)}{2} = \frac{0,6989697+0,6989702}{2} = 0,6989700,$$

che differisce meno di una milionesima dal vero. Così potranno calcolarsi i logaritmi di tutti gli altri numeri, che non sono potenze intere di 10. *Con questo metodo da Brigge da Ulacq sono state formate le tavole dei logaritmi per la base* 10.

$A = 1{,}000000$; $l(A) = 0{,}0000000$. *Sia*

$B = 10{,}000000$; $l(B) = 1{,}0000000$; $C = \sqrt{AB}$

$C = 3{,}162277$; $l(C) = 0{,}5000000$; $D = \sqrt{BC}$

$D = 5{,}623413$; $l(D) = 0{,}7500000$; $E = \sqrt{CD}$

$E = 4{,}216964$; $l(E) = 0{,}6250000$; $F = \sqrt{DE}$

$F = 4{,}869674$; $l(F) = 0{,}6875000$; $G = \sqrt{DF}$

$G = 5{,}232991$; $l(G) = 0{,}7187500$; $H = \sqrt{FG}$

$H = 5{,}048065$; $l(H) = 0{,}7031250$; $I = \sqrt{FH}$

$I = 4{,}958069$; $l(I) = 0{,}6953125$; $K = \sqrt{HI}$

$K = 5{,}002865$; $l(K) = 0{,}6992187$; $L = \sqrt{IK}$

$L = 4{,}980416$; $l(L) = 0{,}6972656$; $M = \sqrt{KL}$

$M = 4{,}991627$; $l(M) = 0{,}6982421$; $N = \sqrt{KM}$

$N = 4{,}997242$; $l(N) = 0{,}6987304$; $O = \sqrt{KN}$

$O = 5{,}000052$; $l(O) = 0{,}6989745$; $P = \sqrt{NO}$

$P = 4{,}998647$; $l(P) = 0{,}6988525$; $Q = \sqrt{OP}$

$Q = 4{,}999350$; $l(Q) = 0{,}6989135$; $R = \sqrt{OQ}$

$R = 4{,}999701$; $l(R) = 0{,}6989440$; $S = \sqrt{OR}$

$S = 4{,}999876$; $l(S) = 0{,}6989592$; $T = \sqrt{OS}$

$T = 4{,}999963$; $l(T) = 0{,}6989668$; $V = \sqrt{OT}$

$V = 5{,}000008$; $l(V) = 0{,}6989707$; $W = \sqrt{TV}$

$W = 4{,}999984$; $l(W) = 0{,}6989687$; $X = \sqrt{WV}$

$X = 4{,}999997$; $l(X) = 0{,}6989697$; $Y = \sqrt{VX}$

$Y = 5{,}000003$; $l(Y) = 0{,}6989702$; $Z = \sqrt{XY}$

$Z = 5{,}000000$; $l(Z) = 0{,}6989700$;

Del resto si adopera l'esposto metodo solamente pei numeri primi; poichè i logaritmi dei numeri che nascono dalla moltiplicazione di altri fra loro, si ottengono sommando i logaritmi dei fattori. Così ottenuti i logaritmi dei numeri 3 e 5, sarà (§. 207:208)

$$l(15)=l(3)+l(5)\ ,\ l(45)=l(9)+l(5)=l(3^2)+l(5)=2l(3)+l(5).$$

Determinati i logaritmi degl' interi, facilmente si ottengono quei delle frazioni; sottraendo cioè il logaritmo del denominatore da quello del numeratore (§. 207), per esempio

$l\left(\frac{2}{5}\right)=l(2)-l(5)$; e poichè $l(2)=l\left(\frac{10}{5}\right)$, sarà

$$l(2)=l(10)-l(5)=1-0{,}6989700=0{,}3010300 \quad (183)$$

210.

Esprimano l, l', l'', ... , dei logaritmi appartenenti a sistemi le cui basi sieno a, a', a'', ... Presi i logaritmi rapporto ai sistemi a, a'', ... nell' equazione $a'^x=v$, si ha

$$xl(a')=l(v)\ ,\ xl''(a')=l''(v)\ ,\ \ldots\ ,$$

ma con quella equazione va congiunta quest'altra $x=l'(v)$, dunque

$$\frac{l(v)}{l(a')}=\frac{l''(v)}{l''(a')}=\ldots=l'(v).$$

I logaritmi cioè di due numeri conservano in qualunque sistema il medesimo rapporto. Inoltre se per un sistema saranno state calcolate le tavole dei logaritmi; facilmente po-

(183) *Si verifica perciò che tutti i numeri possibili positivi, potranno riguardarsi come generati da un qualunque numero positivo costante, e diverso dalla unità, inalzato a potenze idonee.*

tranno calcolarsi le tavole per qualunque altro sistema (184). Così essendo dato $l(v)$ per la base $a = 10$, per trovare $l'(v)$ in qualunque altra base, per es. $a'=2$, preso nelle tavole volgari il logaritmo di 2, cioè $l(2) = 0{,}3010300$, basterà per questo logaritmo dividere $l(v)$; cosicchè avremo

$$l'(v) = \frac{l(v)}{0{,}3010300} = 3{,}3219277.l(v) \quad (185).$$

211.

Dalle cose dette (§. 209) chiaro apparisce che i logaritmi dei numeri tra 1 e 10 nel sistema volgare sono > 0 e < 1, e che perciò hanno lo zero con alqnante decimali aggiunte: inoltre che i logaritmi dei numeri fra 10 e 100 sono > 1 e < 2, e che perciò hanno l'unità seguita da più decimali, e così appresso. Per tal modo

$$l(3)=0{,}4771213\ ,\ l(17)=1{,}2304489\ ,\ l(123)=2{,}0899051\ .$$

Quel numero intero che precede i decimali si chiama la *caratteristica* del logaritmo, la quale sarà di tante unità quante sono le note, meno una, del numero al quale appartiene il logaritmo.

(184) *Infatti dall' equazione*

$$\frac{l(v)}{l(a')} = l'(v)$$

si deduce che il logaritmo cognito di qualunque numero v, spettante ad un primo sistema di base a, diviso pel logaritmo di una nuova base a', preso anch' esso in quel sistema, dà per quoto il logaritmo del medesimo numero, preso però nel sistema della nuova base.

(185) *Se dunque i logaritmi volgari si moltiplicano per* 3,3219277 *ne verranno i logaritmi per la base* 2.

Quindi dato il logaritmo di qualsiasi numero, si potrà conoscer tosto di quante note sia composto il numero medesimo. Così continuata la progressione geometrica 1, 2, 4, 8, ... sino al termine sessagesimo quarto, esprimendosi questo con 2^{63}, sarà

$$l\,(2^{63}) = 63\,l\,(2) = 18{,}9648900\,,$$

e perciò quel termine si comporrà di diecinove note.

212.

La caratteristica per es. 2 appartiene tanto al logaritmo del numero 100, quanto ai logaritmi degli altri tutti che sono fra 100 e 1000. Pertanto la sola decimale aggiunta alla caratteristica indica di quali note il numero sia formato. Così trovato il logaritmo 4, il corrispondente numero sarebbe 10000; ma se trovato si fosse il logaritmo 4,9741016 il numero sarebbe stato 94211. Restando poi le decimali, sarà lo stesso aumentare o diminuire la caratteristica di una, due, tre, ... unità, che rendere il corrispondente numero dieci, cento, mille, ... volte maggiore o minore (186). Quindi

---

(186) *In quanto all' aumento della caratteristica abbiamo* (§. 207: 205)

$$l\,(h\times 10^n) = l\,(h) + l\,(10^n) = l\,(h) + n\,;$$

in quanto poi alla sua diminuzione abbiamo

$$l\left(\frac{h}{10^n}\right) = l\,(h) - l\,(10^n) = l\,(h) - n\,:$$

onde chiaro apparisce che aumentando di n unità la caratteristica di $l\,(h)$, *il numero corrispondente si renderà* 10^n *volte maggiore, cioé sarà* $h.10^n$. *Per lo contrario diminuendo* $l\,(h)$ *di altrettanto, lo stesso numero si renderà* 10^n *volte minore, cioè sarà* $\frac{h}{10^n}$, *come fu asserito.*

$l(942110)=5,9741016$, $l(9421,1)=3,9741016$, $l(9,4211)=0,9741016$,

$l(0,94211)=-1+0,9741016$, $l(0,094211)=-2+0,9741016$:

invece poi delle caratteristiche negative -1, -2, ... suol porsi 9, 8, ..., cosicchè si scrive per es.

$$l(0,94211)=9,9741016,\quad l(0,094211)=8,9741016\ ;$$

ritenendo che siffatti logaritmi debbano essere diminuiti di 10. Ma tali cose sono da vedere più diffusamente esposte nelle spiegazioni annesse alle tavole de' logaritmi.

213.

Frattanto è da notare che per mezzo dei logaritmi si può determinare il valore della incognita da certe equazioni, che la contengono nell' esponente (187): così essendo giunti alla

$$\frac{c}{h}=\frac{1}{q^{x-1}},$$

da cui ricavar si debba il valore della incognita x, presi i logaritmi si avrà

$$l(c)-l(h)=l(1)-l(q^{x-1})=-(x-1)\,l(q)\quad (\S.\ 207:\ 205:\ 208),$$

onde

$$x=1+\frac{l(h)-l(c)}{l(q)}.$$

Abbiasi ancora da risolvere l'equazione

$$\left(\frac{101}{100}\right)^{x}=10.$$

---

(187) *Tali equazioni comunemente diconsi* esponenziali, *per distinguerle da quelle in cui l'incognita è innalzata a un esponente dato.*

Presi i logaritmi si avrà

$$x\, l\left(\frac{101}{100}\right) - l(10) = 1 \ ,$$

onde (§. 207)

$$x = \frac{1}{l(101) - l(100)} = \frac{1}{l(101) - 2} \ .$$

E poichè dalle tavole si ha $l(101) = 2{,}0043214$; perciò

$$x = \frac{1}{0{,}0043214} = 231 \text{ circa. } (188).$$

(188) *Se fosse data l'equazione* $a^{mx}b = b^{nx}c$, *per mezzo dei logaritmi si avrebbe*

$$x = \frac{l\left(\frac{c}{b}\right)}{l\left(\frac{a^m}{b^n}\right)} \ .$$

Similmente dalla $a^x c^{qx} = b^{mx-n}$ *si avrà*

$$x = \frac{l(b^n)}{l\left(\frac{b^m}{ac^q}\right)} \ .$$

Per ultimo data l'equazione

$$Aa^x + Ba^{x+m} + Ca^{x+n} + \ldots = b \ ;$$

e questa trasformata nella

$$a^x(A + Ba^m + Ca^n + \ldots) = b \ ,$$

tosto si otterrà

Della soluzione de' problemi.

214.

Le equazioni alle quali si giunge nella soluzione de' problemi, alcune volte si presentano quasi spontaneamente. Se p. e. si chieggano due numeri x, y de' quali il prodotto, la somma, e la differenza de' quadrati sieno eguali, si presenteranno tosto le seguenti equazioni

$$xy = x + y \quad , \quad xy = x^2 - y^2 \; ;$$

e divisa la seconda per la prima si avrà $1 = x - y$, perciò $x = 1 + y$; questo valore d'x sostituito, sia nella prima, sia nella seconda, produrrà $y^2 - y - 1 = 0$, onde $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, e conseguentemente $x = 1 + y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$x = \frac{l(b) - l(A + Ba^m + Ca^n + \ldots)}{l(a)} \; .$$

Servano questi esempi a maggior esercizio degli studiosi. Anche per calcolare più speditamente il valore numerico delle formule si adoperano con vantaggio i logaritmi. Se p. e. fosse data la quantità

$$\frac{a^3 b \sqrt{c}}{e \sqrt[3]{a \sqrt[4]{c^3 d^2}}} ,$$

se ne troverà comodamente il valore, cercando nelle tavole il numero corrispondente a

$$3\,l(a) + l(b) + \frac{1}{2} l(e) - l(e) - \frac{1}{3} l(a) - \frac{3}{4} l(c) - \frac{1}{2} l(d)$$

Lo stesso manifestamente avviene nei problemi già proposti (§. 130), al primo de' quali appartengono le

$$x=\frac{a+b}{2} \quad , \quad y=\frac{a-b}{2} \; .$$

Siegue poi di quì essere il terzo di essi impossibile, salvo che sia

$$c=\frac{a^2-b^2}{4} \; .$$

Così ancora ove si cerchino due numeri quadrati, la differenza de' quali $=1$, spontaneamente si presenterà l'equazione $x^2-y^2=1$, e saranno (§. 180. 2°)

$$x=\frac{1+v^2}{2v} \quad , \quad y=\frac{1-v^2}{2v} \quad (189).$$

215.

Ma spesso fa di mestieri qualche artificio per giungere all' equazioni, e secondo la varietà di essi problemi varie sono le

---

(189) *L'equazione* $x^2-y^2=1$ *riducendosi alla* $x=\pm\sqrt{1+y^2}$, *dovrà per essere soddisfatta in numeri razionali paragonarsi con la* $2ax+b=\pm\sqrt{g+iz^2}$ *del* §. 179; *la quale potrà* (§. 180) *risolversi razionalmente, quante volte la* g, *o la* i, *sia un quadrato esatto* m^2. *Nel caso in proposito abbiamo* $g=i=1$, *dunque sarà* $m=1$, *laonde* (§. 180 1°: 2°) *le soluzioni richieste saranno due ; cioè una come appartenente al* 1° *sarà*

$$y=\frac{2v}{1-v^2} \quad , \quad x=\frac{1+v^2}{1-v^2} \quad ,$$

l'altra come appartenente al 2° *sarà*

$$y=\frac{1-v^2}{2v} \quad , \quad x=\frac{1+v^2}{2v} \; .$$

industrie da praticare; nè possono darsi regole generali per dedurre dalle condizioni date le equazioni: ne daremo quì quattro esempi.

I° Abbiansi due masse talmente composte di oro e di argento, che ciascuna libbra della prima massa contenga m' parti di oro, ed n' di argento; ciascuna libbra poi della seconda massa contenga m'' parti d'oro, ed n'' di argento; quante parti per ciascuna libbra di ogni massa dovranno prendersi, per avere una nuova massa contenente per ciascuna libbra m''' parti d'oro, ed n''' di argento?

Esprima x il numero delle parti che debbono prendersi della prima massa, ed y quelle della seconda; in x si conterranno $m'x$ parti di oro, ed $n'x$ di argento; in y' poi $m''y$ di oro ed $n''y$ di argento; poichè

$$1 : m' = x : m'x \quad , \quad \text{ed} \quad 1 : n' = x : n'x \; ;$$

$$1 : m'' = y : m''y \quad , \quad \text{ed} \quad 1 : n'' = y : n''y \; .$$

Perciò

$$m'x + m''y = m''' \quad , \quad n'x + n''y = n''' \; ,$$

onde (§. 127 : 132)

$$x = \frac{m''n''' - m'''n''}{m''n' - m'n''} \quad , \quad y = \frac{m'''n' - m'n'''}{m''n' - m'n''} \; .$$

Fatto p. e. $m' = 10$, $n' = 2$, $m'' = 4$, $n'' = 8$, $m''' = 9$, $n''' = 3$, si avranno (§. 64)

$$x = \frac{5}{6} = 10^{onc.} \quad , \quad y = \frac{1}{6} = 2^{onc.}$$

II° Si debbono n scudi a condizione di dover pagare per ogni anno il 5 per cento di usura, s'intende peraltro pagare in ciascun anno una tal somma x di scudi, che si possa dopo m anni estinguere il debito. Si cerca x.

Passato il primo anno si dovrebbe $\frac{105}{100}n$, poichè $100 : 105 = n : \frac{105}{100}n$; pagasi x, dunque, fatto per compendio $\frac{105}{100} = k$,

si dovrà $kn-x$; così dopo due anni si dovrà $k^2n-kx-x$; dopo tre, $k^3n-k^2x-kx-x$; . . . ; e dopo m anni

$$k^mn-k^{m-1}x-k^{m-2}x-\ldots-k^2x-kx-x \quad (190).$$

Adunque, poichè al finir dell' anno $m.^{mo}$ deve il debito essere estinto, sarà

$$k^mn-x(k^{m-1}+k^{m-2}+\ldots+k^2+k+1)=0,$$

ovvero (§. 102)

$$k^mn-x\frac{1-k^m}{1-k}=0 \quad , \quad \text{onde} \quad x=k^mn\frac{k-1}{k^m-1}.$$

Se date x, k, n si richiedesse m, sarebbe (§. 213)

$$m=\frac{l\,(x)-l\,[x-n(k-1)]}{l\,(k)}.$$

III° Da una botte, che contiene $2n$ misure di vino, si estrae replicatamente con un certo vaso un numero x delle stesse misure ; ma dopo ciascuna estrazione s'infondono m misure di vino, ed il resto si riempie d'acqua alla medesima altezza. Trovare x, ovvero la capacità di quel vaso per modo che dopo un dato numero di estrazioni e riempimenti, abbiasi nella botte tanto vino quant' acqua.

Dopo la prima estrazione vi saranno nella botte $2n-x$ misure di vino, e dopo il primo riempimento $2n-x+m$; e di nuovo estratte x misure, poichè il rapporto del vino all' acqua è lo stesso come nel vaso così nella botte, perciò in

---

(190) *Essendo k il rapporto costante fra il debito in qualunque anno, e questo medesimo debito aumentato della usura corrispondente del 5 per cento ; passato il secondo anno, essendo* $1 : k = kn - x : k^2n - kx$, *si dovrebbe* k^2n-kx, *ma si paga x, dunque si dovrà* $k^2n-kx-x$. *Dopo il terzo, essendo* $1 : k=k^2n-kx-x : k^3n-k^2x-kx$, *e pagandosi x, si dovrà* $k^3n-k^2x-kx-x$; *e similmente sino all' m.^{mo} anno, in cui l'espressione del debito deve annullarsi.*

queste x misure si conterrà una quantità di vino espressa da $\frac{(2n-x+m)x}{2n}$, mercè che

$$2n : 2n-x+m = x : \frac{(2n-x+m)x}{2n};$$

quindi è che il vino restato nella botte sarà

$$2n-x+m-\frac{2n-x+m}{2n}x = \frac{(2n-x+m)(2n-x)}{2n};$$

e dopo il secondo riempimento,

$$\frac{(2n-x+m)(2n-x)}{2n}+m \ldots (p).$$

In simil guisa il vino tolto nella terza estrazione si esprimerà con

$$\frac{(2n-x+m)(2n-x)x}{4n^2}+\frac{mx}{2n} \ldots (q),$$

e il vino restato sarà $(p)-(q)$, ed aggiunte le m misure, si troverà nella botte, dopo il terzo riempimento, una quantità di vino espressa da

$$(p)-(q)+m = \frac{(2n-x+m)(2n-x)^2}{4n^2}+m\,\frac{4n-x}{2n} \quad (191).$$

---

(191) *Essendo come si è detto il rapporto del vino all' acqua lo stesso, tanto nel vaso quanto nella botte; per determinare il vino tolto nella terza estrazione avremo*

$$2n : (p) = x : \frac{(p)\,x}{2n} = \frac{(2n-x+m)\,(2n-x)x}{4n^2}+\frac{mx}{2n} = (q);$$

e per determinare quello tolto nella quarta avremo

$$2n : (p)-(q)+m = x : \frac{[(p)-(q)+m]x}{2n} = ecc. \ldots.$$

e così appresso. Ma tanto di vino rimaner deve nella botte quanto avvi di acqua, onde siegue che la quantità del vino dovrà essere di n misure; eguagliate dunque le due espressioni del residual vino, si avrà un equazione di quel grado che indica il numero dell' estrazioni.

Pongasi per es. questo numero $=2$; sarà

$$\frac{(2n-x+m)(2n-x)}{2n}+m=n,$$

ovvero

$$x^2-(4n+m)x+4mn+2n^2=0;$$

quindi

$$x=2n+\frac{m}{2}\pm\sqrt{2n^2-2mn+\frac{m^2}{4}}.$$

IV.° Due gravi, de' quali uno è più alto dell' altro di n piedi, debbono cadere per modo nel medesimo piano orizontale, che il primo v'impieghi l'$m.^{plo}$ del tempo impiegatovi dal secondo, e di più k minuti secondi: cercasi il tempo e l'altezza. Si denoti per x l'altezza dalla quale il secondo grave discende, e per y il tempo corrispondente; sarà $x+n$ l'altezza del primo grave, ed $my+k$ il tempo impiegato a percorrerla. Si sà poi dalla meccanica essere gli spazi totali che percorrono i gravi liberamente cadenti come i quadrati dei tempi nei quali si percorrono; e lo spazio percorso nel primo minuto secondo, lasciati liberi a se stessi, essere $=15^{pie.}$ circa. Dunque indicato questo spazio con c avremo

$$1:y^2=c:x \quad , \quad \text{ed} \quad 1:(my+k)^2=c:x+n,$$

ed eliminata la x,

$$c(m^2-1)y^2+2cmky+ck^2-n=0$$

$$y=\frac{1}{m^2-1}\left(-mk\pm\sqrt{\frac{n(m^2-1)+ck^2}{c}}\right),$$

laonde $x=cy^2=$ ecc. . . . Fatto p. e. $n=360$, $m=2$, $k=3$, si avranno $y=1$, $y=-5$, $x=15$, $x=375$.

216.

I valori della y ora trovati soddisfano entrambi all'equazione da cui derivano, ma quello ch'è negativo non serve affatto alla questione come fu proposta, poichè non apparisce come nella discesa impiegar si possa un tempo negativo; soddisfarà peraltro, preso positivamente, alla questione medesima di poco variata; somministrerà cioè la soluzione del problema nel quale si richiegga, che il tempo della discesa del primo grave sia minore dell'$m.^{plo}$ del tempo impiegato dal secondo con la differenza di k secondi; poichè si avrà

$$1 : y^2 = c : x \quad , \quad 1 : (my-k)^2 = c : x+n \ ,$$

$$c(m^2-1)y^2 - 2cmky + ck^2 - n = 0 \ ,$$

$$y = \frac{1}{m^2-1}\left[mk \pm \sqrt{\frac{n(m^2-1)+ck^2}{c}}\right] .$$

Sarà lecito negli altri casi interpetrare similmente l'algebrico linguaggio, e determinare a qual problema possano i valori negativi applicarsi.

217.

Dalle condizioni del problema (§. 215) in terzo luogo proposto, avemmo due espressioni diverse della stessa quantità, che eguagliate somministrarono una equazione. Ciò spesso si fa con successo nella soluzione dei problemi: però è da badare che le espressioni derivino da condizioni diverse; poichè se dalla medesima condizione, sebbene per diversa via si deducano, in apparenza potranno al certo esser diverse, in realtà poi saranno algebricamente le stesse; perciò somministreranno una equazione identica; la quale cioè in ambedue i membri avrà gli stessi termini, e che si ridurrà a $0=0$, e non servirà per niente alla soluzione.

Nel problema riportato se domandisi quant'acqua sia nella botte dopo i ripetuti riempimenti, si otterrà $x-m$ dopo il pri-

mo, $2x-2m-\frac{x^2-mx}{2n}$ dopo il secondo, ecc. . . (192), i quali valori sottratti da $2n$, si avranno le corrispondenti residuali quantità di vino a questo modo espresse

$$2n-(x-m) \quad , \quad 2n-\left(2x-2m-\frac{x^2-mx}{2n}\right), \quad \text{ecc. . . .}$$

Paragonate queste espressioni con quelle (§. 215) determinate prima si otterranno le identiche equazioni

$$2n-(x-m) = 2n-x+m \ ,$$

$$2n-\left(2x-2m-\frac{x^2-mx}{2n}\right) = \frac{(2n-x+m)(2n-x)}{2n}+m, \quad \text{ecc....}$$

218.

La cosa procederebbe altrimenti se le quantità di acqua si eguagliassero alle corrispondenti quantità residuali di vino; imperciocchè sarebbe p. e. dopo il secondo riempimento

(192) *Per trovare l'espressione della quantità di acqua esistente nella botte dopo il secondo riempimento riflettasi, che dopo il primo l'acqua in essa contenuta trovasi* $=x-m$, *che l'acqua contenuta nel vaso* x *per la seconda estrazione si esprime per*

$$x-\left(\frac{2n-x+m}{2n}\right)x = \left(\frac{x-m}{2n}\right)x \ ,$$

e che perciò l'acqua restata nella botte dopo questa seconda estrazione sarà $x-m-\left(\frac{x-m}{2n}\right)x$, *che sommata con quella aggiuntavi nel secondo riempimento, cioè con* $x-m$, *darà* $2x-2m-\left(\frac{x-m}{2n}\right)x$, *come fu asserito.*

$$2x - 2m - \frac{x^2 - mx}{2n} = \frac{(2n - x + m)(2n - x)}{2n} + m \ ,$$

ovvero

$$x^2 - (4n + m)x + 4mn + 2n^2 = 0 \ ,$$

cioè la stessa equazione trovata (§. 215) di sopra, la quale può essere anche ottenuta paragonando con le n misure la quantità d'acqua determinata dopo il secondo riempimento. Di qui poi conosciamo che con le medesime condizioni si può giungere per diverse vie alla stessa equazione. Del resto quel valore d'x ch'è maggiore di $2n$, non potrà adoperarsi nella questione proposta.

219.

Nella soluzione dei problemi deve farsi attenzione alla maniera di denominare, poichè la bene istituita denominazione spesso libera dalla moltiplicità dell' equazioni, ed alle volte diminuisce il grado dell' equazione stessa, come si vede negli esempi seguenti.

I° Trovare tre numeri in proporzione continua, cosicchè la somma del primo e del secondo sia h, la somma poi degli estremi con l'$n.^{plo}$ del secondo sia k.

Indicati questi numeri con x, y, z nasceranno (§. 194) le tre equazioni

$$y^2 = xz \quad , \quad x + y = h \quad , \quad x + ny + z = h.$$

Ma considerate più attentamente le condizioni del problema si eviterà la moltiplicità delle equazioni; poichè se il primo numero si dica x, essendo h la somma del primo col secondo, sarà il secondo $= h - x$, e per la supposta proporzionalità sarà $\frac{(h-x)^2}{x}$ il terzo numero; ma la somma degli estremi coll'$n.^{plo}$ del secondo eguaglia k; quindi avremo l'unica equazione

$$x + \frac{(h-x)^2}{x} + n(h - x) = k \ .$$

II° Trovare due numeri la somma dei quali tolta dai loro quadrati lasci a, aggiunta poi al prodotto de' medesimi dia b. Questi numeri si dicano x, y, saranno

$$x^2 + y^2 - x - y = a,$$

$$xy + x + y = b,$$

dalle quali eliminata una delle due incognite, nascerà una equazione di quarto grado. Ma se la somma dei numeri si dica $2x$, e la differenza $2y$, cosicchè il maggiore di essi venga rappresentato (§. 214) per $x+y$, il minore per $x-y$, avremo

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 - 2x = a,$$

$$(x+y)(x-y) + 2x = b,$$

onde

$$x^2 + y^2 - x = \frac{a}{2}, \quad x^2 - y^2 + 2x = b;$$

le quali sommate, daranno l'equazione di secondo grado

$$2x^2 + x = \frac{a}{2} + b.$$

220.

Aggiungo due problemi relativi all' arte di congetturare. I.° Di due giuocatori che giuocano a dado, il primo ha un determinato numero n di tiri: si cerca quanti potranno accordarsene al secondo avanti del giuoco, affinchè le sorti di ambedue sieno eguali (193).

Prima di venire alla soluzione del problema, deve notarsi 1.° se l'evento ε, dipende da p casi egualmente facili ad ac-

(193) *Qui é da osservare che le sorti dei giuocatori sarebbero diverse, se ciascuno dovesse tirare il dado un egual numero di volte; nel qual caso il primo a tirare avrebbe maggior probabilità per vincere del secondo.*

cadere, de' quali f favoriscono l'evento, cosicchè ciascuno di essi onninamente lo produca, gli altri poi $p-f$ gli si oppongano, cosicchè ognuno certamente lo escluda, tanto più probabile si stimerà ε_1 quanto più il numero f sarà maggiore, ed il numero p sarà minore: e la *probabilità*, o la sorte Σ_1 dell' evento atteso sarà espressa con

$$\Sigma_1 = \frac{f}{p} \quad (194) ;$$

la probabilità contraria poi con

$$\Sigma' = \frac{p-f}{p} :$$

siffatte probabilità si dicono *semplici*. 2.° avvicinandosi f a p, si accosta Σ_1 alla *certezza*; ed $\frac{f}{p}$ ad 1; Σ' alla *impossibilità*, e $\frac{p-f}{p}$ a o; dunque nell'arte di congetturare la certezza si esprime per 1, l'impossibilità per o; fra l'una e l'altra poi sta posto il *dubbio*, che importa l'eguaglianza delle sorti Σ_1 e Σ'; e conseguentemente

$$f = \tfrac{1}{2} p \quad , \quad \Sigma_1 = \tfrac{1}{2} \quad , \quad \Sigma' = \tfrac{1}{2} . \quad (195)$$

(194) *La misura pertanto della probabilità di un evento o di una sorte, sia questa desiderata o temuta, sempre si esprimerà mediante il rapporto fra il numero dei casi concorrenti a produrla, e quello sì dei favorevoli come degli avversi alla medesima. Che poi questo rapporto sia la vera misura della sorte, facilmente s'intenderà considerando come questa dipenda dai sudetti casi. Discende da ciò essere le sorti proporzionali al numero dei casi rispettivamente ad esse favorevoli, cioè*

$$\Sigma_1 : \Sigma' = f : p-f$$

(195) *Dunque nel calcolo delle probabilità si prende per*

3° Spesso l'espettazione dell' evento ε_2 dipende da un precedente evento ε_1, talmente che se prima non avvenga ε_1 sia inutile aspettare ε_2: allora la probabilità dell' evento ε_2 dicesi *composta*; e suole indicarsi col prodotto delle semplici probabilità degli stessi ε_1 e ε_2; così per es. se cerchisi la probabilità di estrarre la prima e la seconda volta un globo bianco da un urna, in cui si contengono p globi, de' quali f solamente sono bianchi, questa seconda estrazione dipenderà dalla prima, e saranno le semplici probabilità loro

$$\Sigma_1 = \frac{f}{p} \quad , \quad \Sigma_2 = \frac{f}{p} \, ,$$

purchè però il globo estratto pel primo si riponga nell' urna innanzi di fare la seconda estrazione; che se non vi si riponesse sarebbero

$$\Sigma_1 = \frac{f}{p} \quad , \quad \Sigma_2 = \frac{f-1}{p-1} \, .$$

Quindi nel primo caso la cercata probabilità sarà $\left(\frac{f}{p}\right)^2$, nel secondo $\frac{f(f-1)}{p(p-1)}$ (196).

---

unità di misura la certezza; e qualunque probabilità sarà espressa mai sempre per una frazione. Quindi essendo

$$\Sigma_1 = \frac{f}{p} \, , \quad e \quad \Sigma' = \frac{p-f}{p} = 1 - \frac{f}{p} \quad ;$$

si vede che delle probabilità opposte una é complemento dell' altra alla certezza.

(196) *Esprimano* p, q; *e* p', q' *i casi favorevoli e contrari di* ε_1 *e* ε_2, *saranno le probabilità semplici di questi eventi espresse rispettivamente con* $\frac{p}{p+q}$, $\frac{p'}{p'+q'}$; *ma quei casi possono fra loro combinarsi due a due in* $(p+q)(p'+q')$

Generalmente se degli eventi ε_1, ε_2, ε_3, . . . , ε_n (le semplici probabilità de' quali sono Σ_1, Σ_2, Σ_3, . . . Σ_n) il secondo dipenda dal primo, il terzo dal secondo, e così appresso, la probabilità dell' ultimo ε_n si rappresenterà col prodotto $\Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_3 \ldots \Sigma_n$; p. e. la probabilità di estrarre n volte senza interrompimento un globo bianco dall' urna sudetta, riposti dentro i globi estratti, sarà $\left(\frac{f}{p}\right)^n$; non riposti, sarà

$$\frac{f(f-1)(f-2)\ldots(f-n+1)}{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}\,.$$

4.° Se di più eventi basti a noi che se ne ottenga uno qualunque, la probabilità del bramato successo sarà espressa per la somma delle probabilità relative a ciascuno degli eventi stessi.

Queste cose notate, veniamo alla soluzione del problema: si esprima con x il richiesto numero dei tiri, con p quello delle faccie del dado, con f il numero di quelle per le quali vincono i giuocatori; sarà $p-f(=c)$ il numero delle faccie per le quali essi perdono. Poichè in un tiro, f dei casi p sono atti al vincere, perciò la sorte di ogni tiro si esprimerà (1.°) per $\frac{f}{p}$.

Nel primo di due tiri, f dei p casi sono atti al vincere, e c al produrre la sorte f; dunque (3°: 4.°) la sorte di due tiri sarà

---

modi diversi, come per se chiaro apparisce; dunque sarà questo prodotto il numero totale dei casi favorevoli e contrari all' evento ε_2. *I casi* p *e* p' *favorevoli rispettivamente agli eventi* ε_1 *e* ε_2, *possono combinarsi fra loro due a due in* pp' *modi diversi; perciò similmente sarà questo prodotto il numero dei casi favorevoli all' evento* ε_2; *e la sua probabilità, detta composta, sarà espressa dal prodotto* $\frac{pp'}{(p+q)(p'+q')}$, *come fu asserito. A questo modo si deve ragionare se gli eventi fossero in maggior numero.*

$$\frac{f}{p}+\frac{cf}{p^2}=\frac{f(p+c)}{p^2}=\frac{(p-c)(p+c)}{p^2}\text{, cioè }\frac{p^2-c^2}{p^2}\text{.}\quad(197)$$

Nel primo di tre tiri, f dei p casi sono pel vincere e c pel dare la sorte $\frac{p^2-c^2}{p^2}$; dunque la sorte di tre tiri (3.°: 4.°) sarà

$$\frac{f}{p}+\frac{c(p^2-c^2)}{p^3}=\frac{p^2(p-c)+c(p^2-c^2)}{p^3}\text{, cioè }\frac{p^3-c^3}{p^3}\text{, ecc....}$$

Generalmente la sorte di n tiri si avrà espressa con

$$\frac{p^n-c^n}{p^n};$$

e la sorte di $n+x$ tiri con

---

(197) *Nel caso di due tiri la sorte o probabilità pel secondo è composta, e dipende dalle semplici probabilità* $\frac{c}{p}$ *ed* $\frac{f}{p}$, *onde sarà espressa* (3°) *con* $\frac{cf}{p^2}$; *quindi per la sorte o probabilità di due tiri* (4.°) *si avrà*

$$\frac{f}{p}+\frac{cf}{p^2}=\frac{p^2-c^2}{p^2}\text{.}$$

Nel caso di tre tiri, la sorte o probabilità pel terzo, anch'essa composta, dipende dalle probabilità semplici $\frac{c}{p}$, $\frac{c}{p}$, $\frac{f}{p}$, *onde* (3.°) *sarà espressa da* $\frac{c^2f}{p^3}$; *e per la probabilità di tre tiri* (4.°) *si avrà*

$$\frac{f}{p}+\frac{cf}{p^2}+\frac{c^2f}{p^3}=\frac{p^3-c^3}{p^3}\text{.}$$

$$\frac{p^{n+x}-c^{n+x}}{p^{n+x}} .$$

Ma le sorti de' giuocatori si pongono eguali ; dunque

$$\frac{p^{n+x}-c^{n+x}}{p^{n+x}} = \frac{2p^n-2c^n}{p^n} \quad (198),$$

onde

$$x = \frac{nl(c)-l(2c^n-p^n)}{l(p)-l(c)} .$$

II° Se il dado risulta di a faccie bianche, e b nere, quanti dadi potrà prendere A con egual sorte contro B a fare in una sol volta il gitto di r delle a faccie?

Sia x il numero dei dadi; sarà (§. 111: I°) $(a+b)^x$ il numero dei casi ne' quali possono variarsi le faccie dei dadi ; b^x il numero dei casi ne' quali non viene alcuna delle a faccie ; $\frac{x}{1} b^{x-1}a$ nei quali una ; $\frac{x(x-1)}{1.2} b^{x-2}a^2$ nei quali due ; $\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2,3} b^{x-3}a^3$ nei quali tre ; e così appresso (199).

(198) *Due volte, e sempre con egual probabilità, negli* $n+x$ *tiri si aspetta l'evento ; dunque la probabilità di questo ad essi relativa, dovrà essere doppia di quella che alla prima volta si riferisce, cioè doppia di* $\frac{p^n-c^n}{p^n}$ *; dal che nasce l'equazione superiore.*

(199) *Il numero finalmente dei casi nei quali si presentano* $r-1$ *delle a faccie, sarà espresso con*

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+2)}{1.2.3\ldots(r-1)} b^{x-r+1}a^{r-1} .$$

Per bene intendere come questa formula esattamente rap-

Pertanto se *A* prendesse a gittare una delle faccie a, il numero dei casi ne' quali guadagnerebbe saria $(a+b)^x - b^x$; se due, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1}a$; se tre, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1}a - \frac{x(x-1)}{1.2} b^{x-2}a^2$; generalmente se r,

$$(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1}a - \frac{x(x-1)}{1.2} b^{x-2}a^2 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+2)}{1.2.3\ldots(r-1)} b^{x-r+1}a^{r-1}.$$

La sorte adunque di *A* sarà espressa (I.°) con

$$1 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^x - \frac{x}{1}\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a+b}\right)^x - \frac{x(x-1)}{1.2}\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b}{a+b}\right)^x - \ldots$$

$$\ldots - \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+2)}{1.2.3\ldots(r-1)}\frac{a^{r-1}}{b^{r-1}}\left(\frac{b}{a+b}\right)^x.$$

Ma questa sorte per ipotesi eguaglia quella contraria di B, e perciò (2.°) ciascuna $= \frac{1}{2}$; dunque

---

presenti il numero dei casi sudetti, riflettasi 1.° *che* a^{r-1} *esprime* (§. 111. 1°) *il numero delle combinazioni* $r-1$ *ad* $r-1$ *delle* a *faccie, con replica:* 2.° *che queste debbono combinarsi con quelle delle* b *faccie* $x-r+1$ *ad* $x-r+1$, *similmente con replica, e che perciò il numero* a^{r-1} *dovrà moltiplicarsi per l'altro* b^{x-r+1}: 3.° *finalmente che i casi di questa moltiplica riferendosi ad una qualunque delle combinazioni* $r-1$ *ad* $r-1$ *degl'* x *dadi, dovrà il numero* $b^{x-r+1}a^{r-1}$ *di quelli moltiplicarsi pel numero* $\frac{x(x-1)\ldots(x-r+2)}{1.2.3\ldots(r-1)}$ *di queste, per avere il totale dei sudetti casi; e così giungeremo alla formula sopra espressa.*

$$2\left(\frac{b}{a+b}\right)^x \left[1 + \frac{x}{1}\,\frac{a}{b} + \frac{x(x-1)}{1.\,2}\,\frac{a^2}{b^2} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+2)}{1.\,2.\,3\ldots(r-1)}\,\frac{a^{r-1}}{b^{r-1}}\right] = 1 \quad (200).$$

Determinazione della somma generale di alcune serie.

221.

Sieno t_n, s_n tali espressioni, che sostituendo in luogo di n nella prima successivamente i numeri naturali 1, 2, 3, ... se ne ottenga ciascun termine della serie

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots;$$

ponendo poi qualunque numero intero in luogo di n nella seconda, se ne abbia la somma di tanti termini quante unità si contengono in quel numero: saranno

---

(200) *La principale avvertenza per applicare giustamente il calcolo delle probabilità, consiste nell' enumerare con precisione i possibili avvenimenti relativi al quesito, e nel separare i propizi dai contrari. Del resto la più parte dei problemi di questo calcolo, possono tradursi in altri dipendenti da dadi, o da palle chiuse in un' urna, e segnate o con numeri, o con lettere, o con colori; e perciò mediante siffatti stromenti si presentano quasi sempre le ordinarie applicazioni del calcolo medesimo, il quale anche più apprezzabile si rende, impiegato alla determinazione degli errori che incontrar si possono nelle fisiche operazioni.*

$$s_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n ,$$

$$s_{n-1} = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-1} ;$$

e perciò

$$t_n = s_n - s_{n-1} .$$

L'espressione t_n è (§. 110) il termine generale della serie; s_n dicesi *somma generale.*

Inoltre: stabilite le

$$t_n - t_{n-1} = \theta'_n \ , \ \theta'_n - \theta'_{n-1} = \theta''_n \ , \ \theta''_n - \theta''_{n-1} = \theta'''_n , \text{ ecc.} \ldots ,$$

dicesi θ'_n differenza prima, θ''_n seconda, θ'''_n terza, ecc. . . , e si avrà

$$\theta''_n = t_n - 2t_{n-1} + t_{n-2} \ , \ \theta'''_n = t_n - 3t_{n-1} + 3t_{n-2} - t_{n-3} , \ldots \ (201),$$

e generalmente (§. 110)

(201) *Prendendo le differenze fra i successivi termini due a due della serie*

$$t_n \ , \ t_{n-1} \ , \ t_{n-2} \ , \ldots ,$$

si avrà la serie delle differenze prime così espressa ,

$$\theta'_n \ , \ \theta'_{n-1} \ , \ \theta'_{n-2} \ , \ldots$$

Operando similmente sopra questa, si avrà la serie delle differenze seconde , cioè

$$\theta''_n \ , \ \theta''_{n-1} \ , \ \theta''_{n-2} \ldots$$

Nello stesso modo si avrà quella delle differenze terze, rappresentata da

$$\theta'''_n \ , \ \theta'''_{n-1} \ , \ \theta'''_{n-2} \ldots ,$$

eccetera ; ed è chiaro che i termini di queste serie sono tutti espressi per quelli della proposta , donde si deduce il valore di $\theta^{(r)}_n$.

$$\theta_n^{(r)} = t_n - rt_{n-1} + \frac{r(r-1)}{2} t_{n-2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} t_{n-3} + \ldots \mp t_{n-r} ;$$

in cui vale il segno superiore se r è pari, l'inferiore se r è impari (202).

222.

Le quali cose premesse facciasi

$$\left.\begin{aligned} s_n &= a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \ldots + a_{m+1} n^{m+1} ; \\ \text{sarà} \\ t_n &= a_1 + a_2[n^2 - (n-1)^2] + a_3[n^3 - (n-1)^3] + \ldots \\ &\quad \ldots . + a_{m+1}[n^{m+1} - (n-1)^{m+1}] \quad (203). \end{aligned}\right\} (o)$$

Quindi le θ'_n, θ''_n, . . . , $\theta^{(m)}_n$ verranno espresse a questo modo

$$\theta'_n = B + B_1 n + B_2 n^2 + \ldots + B_{m-1} n^{m-1} ,$$

$$\theta''_n = C + C_1 n + C_2 n^2 + \ldots + C_{m-2} n^{m-2} ,$$

$$\theta'''_n = D + D_1 n + D_2 n^2 + \ldots + D_{m-3} n^{m-3} ,$$

ecc. . . . ,

$$\theta^{(m-1)}_n = P + P_1 n \ , \ \theta^{(m)}_n = P_1$$

Quelle serie che derivano dalla seconda delle (*o*) diconsi *algebriche*: di *prim'ordine* se $m = 1$, di *second'ordine* se $m = 2$, ecc. Frattanto da $\theta^{(m)} = P_1$ si deduce che le serie algebriche di ordine $m.^{mo}$ hanno la differenza $m.^{ma}$ costante, e perciò la differenza $\overline{m+1}^{ma} = 0$, $\overline{m+2}^{ma} = 0$, ecc. . . .

---

(202) *Il numero dei termini di* $\theta^{(r)}_n$ *essendo* $r+1$, *e trovandosi in sede puri i negativi, ed in sede impari i positivi, è chiaro che valerà il segno superiore o l'inferiore, secondo che sarà r pari od impari.*

(203) *Poichè* $t_n = s_n - s_{n-1}$, *si otterrà il valore di* t_n *sottraendo da quello di* s_n *l'altro di* s_{n-1} *dedotto dal primo.*

Nel resto per poco che riflettasi, apparirà essere (§. 110)

$$B_{m-1} = a_{m+1}(m+1)m$$

$$C_{m-2} = a_{m+1}(m+1)\,m\,(m-1)$$

$$D_{m-3} = a_{m+1}(m+1)\,m\,(m-1)\,(m-2)\,,$$

. . . . . .

$$P_1 = a_{m+1}(m+1)m(m-1)(m-2)\ldots 3.\,2.\,1. \quad (204)$$

223.

Data una serie algebrica, si determinerà come segue la corrispondente s_n. Nella seconda delle (o) si faccia succes-

---

(204) *Si rifletta che* $\theta^{(r)}{}_n$ *essendo come il termine generale della serie dell' ordine* $r.^{mo}$, *si otterranno i successivi termini di questa serie ponendo* $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . . *in luogo di* n *nel valore di* $\theta^{(r)}{}_n$. *E poichè abbiamo*

$$\theta^{(r)}{}_n = \theta^{(r-1)}{}_n - \theta^{(r-1)}{}_{n-1} = A + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_{m-r} n^{m-r}\,,$$

si vede primieramente che crescendo r, *dovrà decrescere di altrettanto il massimo esponente della* n *nel valore di* $\theta^{(r)}{}_n$: *secondariamente che fatto* $r = m-1$, *sarà*

$$\theta^{(m-1)}{}_n = \theta^{(m-2)}{}_n - \theta^{(m-2)}{}_{n-1} = P + P_1 n\,,$$

onde

$$\theta^{(m-1)}{}_{n-1} = P + P_1(n-1)\,;$$

e perciò

$$\theta^{(m)}{}_n = \theta^{(m-1)}{}_n - \theta^{(m-1)}{}_{n-1} = P_1\,.$$

I coefficienti poi

$$B_{m-1}\,,\quad C_{m-2}\,,\quad D_{m-3}\,,\ldots,P_1\,,$$

si determinano il primo mediante l'ultimo termine della seconda (o), *il secondo mediante l'ultimo di* θ'_n, *il terzo mediante l'ultimo di* θ''_n, *ecc., ripetendo sempre la stessa operazione.*

sivamente $n = 1, 2, 3, \ldots, m+1$, per avere $m+1$ termini. Ognuno di questi si paragoni con ognuno dei primi $m+1$ della serie data, il primo col primo, il secondo col secondo, ecc. . . . .; così nasceranno $m+1$ equazioni, dalle quali si dedurranno i valori di $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m+1}$, da sostituirsi nella prima delle formule (*o*).

Esempi.

I° Abbiasi la serie

$$3, 6, 10, 15, 21, \ldots$$

in cui le differenze seconde sono

$$1, 1, 1, 1, \ldots$$

Presi nella seconda delle (*o*) $m = 2$, $n = 1, 2, 3$, saranno

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \;,\quad a_1 + 3a_2 + 7a_3 = 6 \;,\quad a_1 + 5a_2 + 19a_3 = 10 \;;$$

dalle quali abbiamo

$$a_3 = \frac{1}{6} \;,\quad a_2 = 1 \;,\quad a_1 = \frac{11}{6} \cdot$$

Perciò

$$s_n = \frac{11}{6}n + n^2 + \frac{1}{6}n^3 \;,\quad t_n = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

II° Sia

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots$$

nella quale le differenze terze sono

$$2, 2, 2, \ldots$$

Nella seconda (*o*) fatto $m = 3$, $n = 1, 2, 3, 4$, saranno

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \;,\quad a_1 + 3a_2 + 7a_3 + 15a_4 = 5,$$

$$a_1 + 5a_2 + 19a_3 + 65a_4 = 14 \;,\quad a_1 + 7a_2 + 37a_3 + 175a_4 = 30 \;;$$

dalle quali si deduce

$$a_4 = \frac{1}{12}\,,\quad a_3 = \frac{1}{3}\,,\quad a_2 = \frac{5}{12}\,,\quad a_1 = \frac{1}{6}\,,$$

e perciò

$$s_n = \frac{1}{6}n + \frac{5}{12}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{12}n^4\,,\quad t_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

224.

Essendo dato il termine generale della serie algebrica, per trovare la somma generale basterà paragonare i singoli termini della formula data, coi corrispondenti della seconda (o); si formeranno così $m+1$ equazioni, dalle quali si otterranno i valori di $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$.

Esempi.

I° Sia $t_n = n^3$; sarà $m = 3$; ed

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = o\,,\quad 2a_2 - 3a_3 + 4a_4 = o\,,\quad 3a_3 - 6a_4 = o\,,\quad 4a_4 = 1\,;$$

onde

$$a_4 = \frac{1}{4}\,,\quad a_3 = \frac{1}{2}\,,\quad a_2 = \frac{1}{4}\,,\quad a_1 = o\,;$$

e perciò

$$s_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4$$

II° Abbiasi ancora $t_n = n^2$; sarà $m = 2$, ed

$$a_1 - a_2 + a_3 = o\,,\quad 2a_2 - 3a_3 = o\,,\quad 3a_3 = 1\,;$$

onde

$$a_3 = \frac{1}{3}\,,\quad a_2 = \frac{1}{2}\,,\quad a_1 = \frac{1}{6}\,;$$

perciò

$$s_n = \frac{1}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 .$$

225.

Nella ($\theta^{(r)}{}_n$: §. 221) facciasi $t_n = n^m$; sarà

$$\theta_n^{(r)} = n^m - r(n-1)^m + \frac{r(r-1)}{2}(n-2)^m - \ldots \mp (n-r)^m .$$

Ma posto $r > m$ si ha (§. 222) $\theta^{(r)}{}_n = o$; dunque nella ipotesi in cui siamo avremo (§. 131: 8°)

$$r.1^m - \frac{r(r-1)}{2} 2^m + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} 3^m - \ldots \mp 1.r^m = o \ \ldots \ (g) \quad (205).$$

226.

Notiamo di passaggio, che supponendo corrispondere agli $m+1$ valori particolari

$$z_0 , z_1 , z_2 , \ldots z_m$$

della variabile z altrettanti particolari valori

$$p_0 , p_1 , p_2 , \ldots p_m$$

del polinomio

$$p = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots b_m z^m ,$$

---

(205) *Sviluppando il valore di* $\theta^{(r)}{}_n$ *secondo le potenze di* n, *la somma de' termini affetti dalla potenza* n^o *è quanto costituisce il primo membro della* (g), *che nella ipotesi di* $r > m$ *deve* (§. 222: 131. 8°) *esser nullo.*

potrà esprimersi p nel seguente modo,

$$p = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)\dots(z_0-z_m)}p_0 + \frac{(z-z_0)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)\dots(z_1-z_m)}p_1 + \dots$$

$$\dots + \frac{(z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_{m-1})}{(z_m-z_0)(z_m-z_1)\dots(z_m-z_{m-1})}p_m .$$

Imperciocchè il secondo membro di questa equazione manifestamente si riduce a p_0 se $z=z_0$; a p_1 se $z=z_1$; a p_2 se $z=z_2$; ecc . . .; perciò (§. 131. 7°) eccetera (206). In una tal espressione di p consiste la formula *Lagrangiana d'interpolazione*, per la quale cioè cogniti $m+1$ valori del polinomio p, si determina lo stesso p.

227.

Ciò delle serie algebriche; facciasi ora

$$\left.\begin{aligned} s_n &= (a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_m n^m)k^n - a_0 , \\ \text{e conseguentemente } (\S.\ 221)& \\ t_n &= \frac{1}{k}[a_0(k-1) + a_1(kn-(n-1)) + a_2(kn^2-(n-1)^2) + \dots \\ &\quad \dots + a_m(kn^m-(n-1)^m)]k^n \quad (207) . \end{aligned}\right\} (o')$$

Dalla seconda delle (o') deriva una serie composta di due, una

---

(206) *Siccome i due polinomi che rappresentano p divengono identici, sostituendo in essi gli m+1 valori particolari di z, perciò dovranno* (§. 131. 7°) *riguardarsi fra loro eguali, e quindi potrà rappresentarsi p nel modo espresso.*

(207) *La seconda delle* (o') *si ottiene sostituendo nella prima* $n-1$ *in luogo di* n, *e sottraendo dal valore di* s_{n-1} *quello di* s_n. *Dovendo poi* t_n *coincidere con* s_n *quando* $n=1$, *si riconoscerà indispensabile il termine* $-a_0$ *che trovasi nella prima* (o').

algebraica dell'ordine $m.^{mo}$ (§. 222), l'altra geometrica (§. 200) k, k^2, k^3, . . . , i termini delle quali si moltiplicano l'uno per l'altro. Quindi facilmente si determinano le somme generali delle serie a questo modo formate, le quali si appellano serie *algebrico-geometriche*. Ciò sarà dichiarato dai seguenti

Esempi.

I° La serie 6 , 20 , 56 , 144, . . . deriva dall' algebrica di prim' ordine 3, 5, 7, 9, ... e dalla geometrica 2, 4, 8, 16, ... , moltiplicati i termini l'uno per l'altro. La prima ha per termine generale $1 + 2n$, la seconda 2^n. Dunque

$$t_n = (1+2n)2^n ;$$

che paragonato con la seconda delle (o') nella ipotesi di $m=1$, darà

$$k^n=2^n \quad , \quad \frac{a_0(k-1)+a_1}{k} = 1 \quad , \quad \frac{a_1(k-1)}{k} = 2.$$

Quindi

$$k = 2 \quad , \quad a_1 = 4 \quad , \quad a_0 = -2 ;$$

quali valori sostituiti nella prima delle (o') nascerà

$$s_n = (-2+4n)2^n + 2 .$$

II° La serie

$$\frac{1}{3} , \frac{4}{9} , \frac{9}{27} , \frac{16}{81} , \ldots$$

si forma moltiplicando fra loro i termini della serie algebraica di second' ordine

$$1 , 4 , 9 , 16 , \ldots ,$$

la quale ha n^2 per termine generale , per li rispondenti termini della geometrica

$$\frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \frac{1}{27} , \frac{1}{81} , \ldots ,$$

che ha per termine generale $\frac{1}{3^n}$. Dunque

$$t_n = n^2 \frac{1}{3^n} ;$$

e fatto il confronto con la seconda (o'), nella ipotesi di $m=2$, sarà

$$k^n = \frac{1}{3^n} , \frac{a_0(k-1)+a_1-a_2}{k}=0, \frac{a_1(k-1)+2a_2}{k}=0, \frac{a_2(k-1)}{k}=1 ;$$

onde

$$k=\frac{1}{3} , a_2=-\frac{1}{2} , a_1=-\frac{3}{2} , a_0=-\frac{3}{2} :$$

sostituiti questi valori nella prima (o'), sarà

$$s_n=\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}n^2\right)\frac{1}{3^n} .$$

Facciasi ancora

$$s_n=\frac{a_1n+a_2n^2+\ldots+a_mn^m}{[b+c(n-m+1)][b+c(n-m+2)]\ldots(b+cn)} ,$$

e conseguentemente (§. 221)

$$t_n=$$

$$\frac{(b+cn)\left(a_1+a_2[n^2-(n-1)^2]+\ldots+a_m[n^m-(n-1)^m]\right)-cm(a_1n+\ldots+a_mn^m)}{[b+c(n-m)][b+c(n-m+1)]\ldots(b+cn)}$$

(208). Il massimo esponente che ritiene la n nel numeratore

---

(208) *Si ottiene questa espressione di* t_n *dopo sostituito*

del termine generale, non può essere $> m-1$; perciò lo stesso numeratore somministrerà (§. 222) una serie algebraica di ordine non maggiore dell' $\overline{m-1}^{mo}$. In quanto al denominatore, i suoi fattori sono di numero $m+1$; ciascuno di essi poi fornisce una serie algebraica di prim' ordine, anzi la stessa, ma in guisa, che la seconda principia dal secondo termine della prima, la terza dal terzo, ecc. . . . . Perciò sono manifeste le condizioni affinchè una data serie abbia la somma della presente forma.

Esempi.

I.° La serie

$$\frac{6}{2.7}, \frac{6}{7.12}, \frac{6}{12.17}, \frac{6}{17.22}, \frac{6}{22.27}, \ldots$$

ha per termine generale

$$\frac{6}{[2+5(n-1)](2+5n)} .$$

Quindi preso $m=1$, e fatto il paragone con t_n , si avrà

$$b=2 \quad , \quad c=5 \quad , \quad a_1 b=6 \quad , \quad a_1=\frac{6}{2}=3 ;$$

i quali valori sostituiti in s_n , sarà

$$s_n=\frac{3n}{2+5n} .$$

II.° La serie

$$\frac{4}{2.3.4}, \frac{7}{3.4.5}, \frac{10}{4.5.6}, \frac{13}{5.6.7}, \ldots$$

---

al solito $n-1$ *in luogo di* n , *dopo avere convenientemente ridotti al comun denominatore i valori di* s_n , s_{n-1} , *e dopo sottratto il secondo dal primo.*

ha per termine generale

$$\frac{1+3n}{(1+n)(2+n)(3+n)}.$$

Perciò preso $m=2$, e fatto il confronto con t_n, si otterrà

$$b=3,\ c=1,\ ba_1-ba_2=1,\ 2a_2b-a_2c-a_1c=3,\ a_2=\frac{5}{6},\ a_1=\frac{7}{6};$$

ed eseguite le debite sostituzioni nella s_n, sarà

$$s_n=\frac{7n+5n^2}{2.3(2+n)(3+n)}.$$

III.° La serie

$$\frac{1}{1.5},\ \frac{1}{2.6},\ \frac{1}{3.7},\ \frac{1}{4.8},\ \ldots$$

ha per termine generale

$$\frac{1}{n(4+n)}$$

il denominatore della quale manca dei fattori intermedi $1+n$, $2+n$, $3+n$: ma

$$\frac{1}{n(4+n)}=\frac{(1+n)(2+n)(3+n)}{n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)},$$

perciò preso

$$t_n=\frac{(1+n)(2+n)(3+n)}{n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)},$$

la data serie vestirà la seguente forma

$$\frac{24}{1.2.3.4.5},\ \frac{60}{2.3.4.5.6},\ \frac{120}{3.4.5.6.7},\ \ldots;$$

e posto $m=4$, e fatto il paragone, si otterranno le

$$b=4\ ,\ c=1\ ,\ a_4=\frac{25}{2.\,24}\ ,\ a_3=\frac{101}{24}\ ,\ a_2=\frac{515}{2.\,24}\ ,\ a_1=\frac{205}{24}\ ;$$

i quali valori sostituiti nella s_n , sarà

$$s_n=\frac{\frac{205}{24}n+\frac{515}{2.\,24}n^2+\frac{101}{24}n^3+\frac{25}{2.\,24}n^4}{(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)}\ .$$

229.

Aggiungiamo poche cose intorno alle *serie ricorrenti* ; nelle quali cioè qualsivoglia termine si forma di alcuni degli antecedenti, moltiplicati per delle costanti date A_1 , A_2 , . . . A_m , cosicchè abbiasi

$$t_n = A_1 t_{n-1} + A_2 t_{n-2} + \ldots + A_m t_{n-m}\ .$$

La serie ricorrente dicesi di prim' ordine se $m=1$, di secondo se $m=2$, ecc. . . .

230.

Dalla formula (§. 110)

$$m-\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\,3}-\ldots\mp 1=1-(1-1)^m=1\ ,$$

ed insieme dalla (g: §. 225) si deduce l'eguaglianza

$$(a_0+a_1n+a_2n^2+\ldots+a_{m-1}n^{m-1})z^n =$$

$$mz[a_0+a_1(n-1)+a_2(n-1)^2+\ldots+a_{m-1}(n-1)^{m-1}]z^{n-1}$$

$$-\frac{m(m-1)}{2}z^2[a_0+a_1(n-2)+a_2(n-2)^2+\ldots+a_{m-1}(n-2)^{m-1}]z^{n-2}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\,3}z^3[a_0+a_1(n-3)+a_2(n-3)^2+\ldots\ldots$$

$$+a_{m-1}(n-3)^{m-1}]z^{n-3}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm z^m[a_0+a_1(n-m)+a_2(n-m)^2+\ldots+a_{m-1}(n-m)^{m-1}]z^{n-m}\ ;$$

vale il segno superiore per m impari, l'inferiore per m pari (209).

Inoltre per poco che riflettasi apparirà essere

$$u_1z_1^n + u_2z_2^n + \ldots + u_mz_m^n =$$

$$(z_1 + z_2 + \ldots + z_m)(u_1z_1^{n-1} + u_2z_2^{n-1} + \ldots + u_mz_m^{n-1})$$

$$-(z_1z_2+\ldots+z_1z_m+z_2z_3+\ldots+z_2z_m+\ldots)(u_1z_1^{n-2}+u_2z_2^{n-2}+\ldots+u_mz_m^{n-2})$$

$$+(z_1z_2z_3+\ldots+z_1z_2z_m+\ldots)(u_1z_1^{n-3}+u_2z_2^{n-3}+\ldots+u_mz_m^{n-3})$$

$$-\ldots \mp z_1z_2\ldots z_m(u_1z_1^{n-m}+u_2z_2^{n-m}+\ldots \pm u_mz_m^{n-m});$$

i segni presi come sopra. La serie adunqne, il cui termine generale viene rappresentato da

$$\left.\begin{array}{l} t_n = (a_0 + a_1n + a_2n^2 + \ldots a_{m-1}n^{m-1})z^n, \\ \text{o da} \\ t_n = u_1z_1^n + u_2z_2^n + u_3z_3^n + \ldots + u_mz_m^n, \end{array}\right\} (p)$$

sarà ricorrente dell' ordine m.^{mo}

231.

Quindi riguardo ad una data serie ricorrente

(209) *Osservando che il secondo membro di questa eguaglianza riducesi alla somma di*

$$[m - \frac{m'm-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \ldots = 1](a_0+a_1n + a_2n^2+ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + a_{m-1}n^{m-1})z^n,$$

con un polinomio affetto in ogni termine da un coefficiente di forma eguale alla (g: §. 225), *si riconoscerà tosto la verità dell' equazione medesima.*

$$t_1 \ , \ t_2 \ , \ t_3 \ , \ \ldots \ ,$$

nella quale

$$t_n = A_1 t_{n-1} + A_2 t_{n-2} + \ldots + A_n t_{n-m} \ ,$$

si deduce quanto siegue.

1.° Se l'equazione

$$x^m - A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - \ldots - A_m = 0 \ \ldots \ (q) \ ,$$

ha tutte le radici x_1 , x_2 , x_3 , $\ldots$ x_m eguali, l'espressione del termine generale coinciderà con la prima (p), e sarà (§. 146: III. I.°)

$$z = x_1 = x_2 = \ldots ;$$

i valori poi a_0 , a_1 , $\ldots$ a_{m-1} si dedurranno dalle m equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1})z = t_1 \ , \\
&(a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots + a_{m-1} 2^{m-1})z^2 = t_2 \ , \\
&(a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + \ldots + a_{m-1} 3^{m-1})z^{m-1} t_3 \ , \\
&\text{ecc.} \ldots \ , \\
&(a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots + a_{m-1} m^{m-1})z^m = t_m .
\end{aligned}\right\} (q')$$

2.° Se la equazione (q) ha le radici tutte ineguali, l'espressione del termine generale coinciderà con la seconda (p); e saranno (§. 146)

$$z_1 = x_1 \ , \ z_2 = x_2 \ , \ \ldots \ z_m = x_m \ ;$$

i valori poi u_1 , u_2 , $\ldots$ u_m si dedurranno dalle m seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&u_1 z_1 + u_2 z_2 + \ldots + u_m z_m = t_1 \ , \\
&u_1 z_1^2 + u_2 z_2^2 + \ldots + u_m z^2{}_m = t_2 \ , \\
&\text{ecc.} \ldots \ , \\
&u_1 z_1^m + u_2 z_2^m + \ldots + u_m z_m^m = t_m .
\end{aligned}\right\} (q'')$$

3.° Che se fra le radici m della (q) ve ne sieno delle eguali

$$x_1 , x_2 , x_3 \ldots x_{m_1} ,$$

e delle ineguali

$$x_{m_1+1} , x_{m_1+2} \ldots x_m ,$$

si riguarderà il termine generale come formato di due parti, una delle quali abbia la forma di (p), l'altra quella di (p'), cosicchè sia

$$t_n =$$

$$(a_0+a_1n+\ldots+a_{m_1-1}n^{m_1-1})z^n+u_1z_1^n+u_2z_2^n+\ldots+u_{m-m_1}z^n{}_{m-m_1} \quad (p');$$

e saranno

$$z=x_1=x_2=\ldots , \; z_1=x_{m_1+1} , \; z_2=x_{m_1+2} , \ldots , \; z_{m-m_1}=x_m :$$

le altre quantità poi $a_0 , a_1 \ldots a_{m_1-1} , u_1 , u_2 \ldots u_{m-m_1}$ si dedurranno dalle seguenti m equazioni (210)

---

(210) *Nel primo caso essendo le radici della* (g) *tutte fra loro eguali, sarà* (§. 146:111.I°) $A_1=mz$, $A_2=-\frac{m(m-1)z^2}{2}$, ... $A_m=\doteq z^m$; *perciò* (§. 230) *la forma del termine generale sarà la stessa della prima* (p). *Nel secondo caso essendo le radici della* (g) *tutte fra loro diseguali, sarà* (§. 146) $A_1=z_1+z_2+\ldots+z_m$, $A_2=-(z_1z_2+\ldots+z_1z_m+\ldots)$, $A_m=\doteq z_1z_2\ldots z_m$; *perciò* (§. 230) *il termine generale riceverà la forma della seconda* (p). *Nel terzo caso in cui m' radici della* (g) *sono fra loro eguali, ed m—m' diseguali, sieno le prime rappresentate dalla equazione* $x^{m'}-B_1x^{m'-1}-B_2x^{m'-2}-\ldots-B_{m_1}=0$, *e le seconde dalla* $x^{m-m'}-C_1x^{m-m'-1}C_2x^{m-m'-2}-\ldots-C_{m-m_1}=0$; *potrà stabilirsi* $t_n=B_1t'_{n-1}+B_2t'_{n-2}+\ldots+B_{m_1}t'_{n-m_1}+C_1t''_{n-1}+C_2t''_{n-2}+\ldots+C_{m-m_1}t''_{n-(m-m_1)}$, *onde il termine generale prenderà* (1.° 2.°) *la forma dalla* (p') *assegnatagli.*

$$\left.\begin{array}{l}(a_0 + a_1 + \ldots + a_{m'-1})z + u_1 z_1 + u_2 z_2 + \ldots + u_{m-m'} z_{m-m'} = t_1 \,, \\ (a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots + a_{m'-1} 2^{m'-1})z^2 + u_1 z_1^{\,2} + u_2 z_2^{\,2} + \\ \ldots\ldots\ldots + u_{m-m'} z^2_{m-m'} = t_2 \,, \\ (a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + \ldots + a_{m-1} 3^{m'-1})z^3 + u_1 z_1^{\,3} + u_2 z_2^{\,3} + \\ \ldots + u_{m-m'} z^3_{m-m'} = t_3 \,, \end{array}\right\} (q'')$$

ecc. . . . . .

Esempi.

I.° Abbiasi la serie

$$0 \,,\ 1 \,,\ 4 \,,\ 12 \,,\ 32 \,,\ 80 \,,\ \ldots$$

in cui $A_1 = 4$, $A_2 = -4$. Sarà $m = 2$; e per la (q)

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \,.$$

Questa risoluta somministra

$$x_1 = x_2 = 2 \,:$$

perciò (1.°) $z = 2$; inoltre per la (q') saranno le

$$2(a_0 + a_1) = 0 \quad , \quad 2^2(a_0 + a_1 . 2) = 1 \,,$$

dalle quali si ha

$$a_0 = -\frac{1}{4} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{4} \,.$$

Dunque

$$t_n = (-1 + n)2^{n-2} \,.$$

II.° Sia data la

$$0 \,,\ 0 \,,\ 1 \,,\ 1 \,,\ \frac{5}{4} \,,\ \frac{5}{4} \,,\ \frac{21}{16} \,,\ \frac{21}{16} \,,\ \ldots$$

nella quale

$$A_1 = 1 \quad , \quad A_2 = \frac{1}{4} \quad , \quad A_3 = -\frac{1}{4} .$$

Sarà $m = 3$, e per la (q)

$$x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0 ,$$

quindi (§. 146. 4° : 147)

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad x_3 = -\frac{1}{2} ;$$

e per conseguente (2.°)

$$z_1 = 1 \quad , \quad z_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad z_3 = -\frac{1}{2} .$$

Laonde per la (q'')

$$u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 = 0 \quad , \quad u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_3 = 0 \quad , \quad u_1 + \frac{1}{8}u_2 - \frac{1}{8}u_3 = 1 ;$$

perciò

$$u_1 = \frac{4}{3} \quad , \quad u_2 = -4 \quad , \quad u_3 = -\frac{4}{3} .$$

Dunque

$$t_n = \frac{4}{3} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n .$$

III.° Propongasi ancora la serie

$$0 , 3 , -2 , 23 , -14 , 87 , -90 , \ldots$$

nella quale

$$A_1 = 0 , A_2 = 4 , A_3 = -2 , A_4 = -3 , A_5 = 2 .$$

Sarà $m = 5$; e per la (q)

$$x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0 ,$$

le radici della quale sono (§. 145: 147)

$$x_1 = 1 , x_2 = 1 , x_3 = 1 , x_4 = -1 , x_5 = -2 ;$$

e perciò (3.°)

$$m' = 3 , z = 1 , z_1 = -1 , z_2 = -2 .$$

Inoltre per la (q''')

$$a_0 + a_1 + a_2 - u_1 - 2u_2 = 0 , a_0 + 2a_1 + 4a_2 + u_1 + 4u_2 = 3 ,$$

$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 - u_1 - 8u_2 = -2 , a_0 + 4a_1 + 16a_2 + u_1 + 16u_2 = 23 ,$$

$$a_0 + 5a_1 + 25a_2 - u_1 - 32u_2 = -14 ;$$

onde

$$a_0 = 1 , a_1 = -2 , a_2 = 1 , u_1 = -2 , u_2 = 1 .$$

Dunque

$$t_n = 1 - 2n + n^2 - 2(-1)^n + (-2)^n .$$

232.

Le forme sotto cui si manifesta (§. 231) il termine generale delle serie ricorrenti, dimostrano abbastanza, che la somma generale di esse può sempre determinarsi da quanto si è detto (§. 227.)

Convergenza delle serie.

233.

Riassumendo l'equazione (§. 221)

$$s_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$

supponiamo che la n cresca indefinitamente. In questa ipotesi, o evvi un valor fisso s, al quale si accosti sempre più s_n, cosicchè la differenza $s - s_n$ divenga minore di qualunque data grandezza, quanto si voglia piccola; o non evvi. Nel primo caso la serie

$$t_1 \ , \ t_2 \ , \ t_3 \ , \ \ldots \quad (b)$$

dicesi *convergente*, e sarà s il limite della quantità variabile s_n, o la somma (§. 106) della serie indefinitamente protratta, cosicchè possa scriversi

$$lim.\ s_n = s = t_1 + t_2 + \ldots + t_n + \ldots (b').$$

Nel secondo caso la serie indefinitamente protratta è priva di somma, e dicesi *divergente*. Ciascuno potrà procurarsi degli esempi riandando sulle serie già trattate (§. 106 : 227. 228, ecc. . .). Così p. e. la serie

$$\frac{6}{2.7} \ , \ \frac{6}{7.12} \ , \ \frac{6}{12.17} \ , \ \ldots$$

si trova essere convergente; poichè (§. 228: I°)

$$s_n = \frac{3n}{2 + 5n} = \frac{3}{\frac{2}{n} + 5} \ ;$$

e perciò

$$lim.\ \ s_n = s = \frac{3}{5} \ .$$

234.

Abbiamo (§. 221)

$$s_n - s_{n-1} = t_n \ , \ s_{n+1} - s_{n-1} = t_n + t_{n+1} \ , \ s_{n+2} - s_{n-1} = t_n + t_{n+1} + t_{n+2} \ ,$$

ecc. . . . .

Ma la serie (b) non può essere convergente senza che sia

$$lim.\ s_{n-1} = lim.\ s_n = lim.\ s_{n+1} = lim.\ s_{n+2} = \ldots = s \ ;$$

e perciò

$$lim.\ (s_n - s_{n-1}) = lim.\ (s_{n+1} - s_{n-1}) = lim.\ (s_{n+2} - s_{n-1}) = \ldots = 0.$$

Adunque se (b) è convergente, sarà

$$lim.\, t_n = lim.(t_n + t_{n+1}) = lim.(t_n + t_{n+1} + t_{n+2}) = \ldots = 0 \ldots (b'') ;$$

cioè o uno, o due, o più, o quanti saranno dei termini

$$t_n\ ,\ t_{n+1}\ ,\ t_{n+2}\ ,\ \ldots\ ,$$

principiando sempre dal primo t_n, insieme presi, convergeranno verso il limite $= 0$. Viceversa soddisfatta la (b'') ne discenderà

$$lim.\ s_{n-1} = lim.\ s_n = lim.\ s_{n+1} = \ldots ;$$

vi sarà cioè in questa ipotesi un certo valor fisso, che, crescendo n indefinitamente, non potrà oltrepassare la general somma s_n, e perciò la (b) sarà convergente.

Esempi.

I.° Nella serie

$$\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \frac{1}{7}\ ,\ \frac{1}{9}\ ,\ \ldots$$

al certo è

$$lim.\ t_n = lim.\ \frac{1}{2n+1} = 0 ;$$

ma poichè abbiamo

$$t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{2n-1} > n.\ \frac{1}{4n-1} = \frac{1}{4 - \frac{1}{n}} \quad (211) ,$$

---

(211) *Essendo*

$$t_n = \frac{1}{2n+1} ,$$

se nel secondo membro di questa equazione pongasi n, $n+1$,

e conseguentemente

$$lim.\,(t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{2n-1}) > \frac{1}{4}\ ;$$

perciò la serie proposta non sarà convergente. Lo stesso appare nella

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \frac{1}{10}\ ,\ \ldots$$

ove

$$t_n = \frac{1}{2n}\ ,\ lim.\ t_n = 0\ ,\ t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{2n-1} > \frac{1}{4n-2}\ .\ n =$$

$$= \frac{1}{4 - \frac{2}{n}}\ ,\quad lim.\,(t_n + t_{n+2} + \ldots + t_{2n-1}) > \frac{1}{4}\ .$$

II.° Comecchè le due serie ora considerate sieno divergenti, tuttavia quella che nasce sottraendo l'una dall' altra,

$$-\frac{1}{2}\ ,\ +\frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ +\frac{1}{5}\ ,\ -\ \ldots\ ,$$

è convergente: lo che facilmente si dimostra così. Abbiamo

$$t_n = \mp\frac{1}{n+1}\ ;$$

onde

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots = \mp\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \ldots\right).$$

$n+2, \ldots 2n-1$ in luogo di n, si otterranno n termini, ciascuno de' quali sarà maggiore dell' ultimo $\frac{1}{4n-1}$, onde avrà luogo la stabilita ineguaglianza.

Ma è

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - \cdots =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right) + \cdots ;$$

quindi apparisce che il valore assoluto di

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \cdots$$

è compreso fra $\frac{1}{n+1}$, ed $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

Poichè dunque

$$lim. \frac{1}{n+1} = 0 \quad , \quad lim. \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 0 ,$$

già è manifesta la convergenza della serie proposta.

Nel modo stesso può dimostrarsi la convergenza della serie

$$-\frac{1}{2^c} , +\frac{1}{3^c} , -\frac{1}{4^c} , +\frac{1}{5^c} , - \cdots$$

e delle altre di questo genere, nelle quali cioè, crescendo n all' indefinito, e decresce costantemente z_n, ed i termini contigui sono affetti da segni contrari.

235.

Esprimano

$$u_n , u_{n+1} , u_{n+2} , u_{n+3} , \cdots \quad (b''')$$

i valori numerici dei termini

$$t_n , t_{n+1} , t_{n+2} , t_{n+3} , \cdots \quad (b^{IV})$$

cosicchè sia

$$t_n = \doteq u_n \ , \ t_{n+1} = \doteq u_{n+1} \ , \ t_{n+2} = \doteq u_{n+2} \ , \ \ldots$$

Poichè

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + t_{n+3} + \ldots$$

non può superare

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots ,$$

al certo la convergenza di (b''') importerà quella di (b^{IV}), e perciò (§. 234) anche la convergenza di (b). Inoltre la serie (b^{IV}) divergerà quante volte i termini della (b''') in fine sieno tali da sorpassare qualunque dato limite (212).

236.

Queste cose osservate, pongasi che

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

converga, crescendo n indefinitamente, in un certo limite costante k. Le serie (b'''), (b^{IV}), (b) saranno convergenti se $k<1$, saranno poi divergenti, se $k>1$. Si rappresenti con h un numero non solo $<k$, ma eziandio minore della differenza fra 1 e k. Poichè

$$lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = k \ ,$$

potrà certamente immaginarsi la n tanto aumentata, che per ultimo si abbia costantemente

---

(212) *Ma non possiamo concludere che la divergenza della* (b''') *importerà la divergenza della* (b^{IV}), *poichè* (§. 214) *può essere divergente la prima, e convergente la seconda.*

$$k - h < \frac{u_{n+1}}{u_n} < k + h,$$

e perciò

$$(k-h)u_n < u_{n+1} < (k+h)u_n ,$$

$$(k-h)u_{n+1} < u_{n+2} < (k+h)u_{n+1} ,$$

$$(k-h)u_{n+2} < u_{n+3} < (k+h)u_{n+2} ,$$

ecc. . . . . .

Manifestamente valeranno eziandio le seguenti ineguaglianze (213)

$$(k-h)u_n < u_{n+1} < (k+h)u_n ,$$

$$(k-h)^2u_n < u_{n+2} < (k+h)^2u_n ,$$

$$(k-h)^3u_n < u_{n+3} < (k+h)^3u_n ,$$

ecc. . . . . .

Per la qual cosa i termini della serie (b''') saranno compresi fra i corrispondenti termini delle due progressioni geometriche

$$u_n , (k-h)u_n , (k-h)^2u_n , (k-h)^3u_n , \ldots$$

$$u_n , (k+h)u_n , (k+h)^2u_n , (k+h)^3u_n , \ldots$$

Ma queste progressioni sono ambedue convergenti se $k < 1$; sono poi divergenti se $k > 1$, ed in guisa che i termini delle medesime crescono oltre qualunque dato limite. Dunque lo stesso dovrà dirsi della serie (b'''), e conseguentemente delle (b^{IV}), (b); le quali perciò saranno convergenti o divergenti, secondo che sarà $k <$, ovvero > 1.

(213) *Queste ineguaglianze si ottengono dalle precedenti, sostituendo nei primi membri di esse* $(k-h)u_n$, $(k-h)^2u_n$, ... *in luogo di* u_{n+1}, u_{n+2}, ..., *e negli ultimi* $(k+h)u_n$, $(k+h)^2u_n$, ... *in luogo di* u_{n+1} , u_{n+2}, ... ; *lo che non altera punto le disuguaglianze stesse.*

Esempi.

I.° u , $\frac{u^2}{2}$, $\frac{u^3}{2.3}$, $\frac{u^4}{2.3.4}$, ... $\frac{u^n}{2.3...n}$, $\frac{u^{n+1}}{2.3...(n+1)}$, ...

Comunque si prenda il valore finito u , avremo

$$lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = lim. \frac{u}{n+1} = 0 ;$$

quindi la serie proposta sarà sempre convergente.

II.° 1 , $2u$, $3u^2$, $4u^3$, ... $(n+1)u^n$, $(n+2)u^{n+1}$, ... ;

$$lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = lim. \frac{n+2}{n+1} u = lim. \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} u = u .$$

Dunque la data serie sarà convergente se $u<1$, divergente se $u>1$.

237.

Se fosse

$$lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 ,$$

non se ne potrebbe concludere la convergenza della serie , potendo questa equazione ugualmente sussistere con la divergenza della medesima , come scorgesi dalla

$$\frac{1}{2^c} , \frac{1}{3^c} , \frac{1}{4^c} , \ldots \frac{1}{(n+1)^c} , \frac{1}{(n+2)^c} , \ldots$$

la quale sebbene dia

$$lim.\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^c = lim.\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^c = 1\ ,$$

nondimeno sarà convergente se $c > 1$; divergente se $c = 1$, ovvero < 1 : lo che facilmente apparirà pel teorema seguente.

238.

Supposto $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots$ le due serie

$$u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ ,\ u_4\ ,\ \ldots\ (b^{\text{v}})$$

$$2u_1\ ,\ 4u_3\ ,\ 8u_7\ ,\ 16u_5\ ,\ \ldots\ (b^{\text{vi}})$$

saranno insieme o convergenti, o divergenti. Poichè

$$4u_3 < 2u_2 + 2u_3\ ,$$

$$8u_7 < 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7\ ,$$

ecc. . . . . ;

similmente

$$2u_1 > u_1 + u_2\ ,$$

$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6\ ,$$

$$8u_7 > u_7 + u_8 + u_9 + \ldots + u_{14}\ ,$$

ecc. . . . ;

perciò

$$(b^{VI}) < 2(b^{V}) \quad , \quad (b^{VI}) > (b^{V}) \; ; \quad (214) \; ;$$

dalle quali manifestamente apparisce la verità del teorema.

239.

Quindi

$$\frac{1}{2^c} \; , \; \frac{1}{3^c} \; , \; \frac{1}{4^c} \; , \; \ldots$$

$$\frac{2}{2^c} \; , \; \frac{4}{4^c} \; , \; \frac{8}{8^c} \; , \; \ldots$$

saranno insieme o convergenti, o divergenti. La seconda però di queste non è altro fuorchè la progressione geometrica

$$2^{1-c} \; , \; 2^{2(1-c)} \; , \; 2^{3(1-c)} \; , \; \ldots$$

convergente se $c > 1$, divergente se $c = 1$, ovvero < 1. Dunque, come dicemmo (§. 237), anche

$$\frac{1}{2^c} \; , \; \frac{1}{3^c} \; , \; \frac{1}{4^c} \; , \; \ldots$$

(214) *Essendo per ipotesi*

$$2u_3 < u_2 + u_3 \; ,$$

$$4u_7 < u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \; ,$$

$$ecc. \; . \; . \; . \; . \; . \; ;$$

moltiplicando per 2, *si avranno le prime diseguaglianze; le quali sommate produrranno* $(b^{VI}) < 2\,(b^{V})$, *aggiungendo* $2u_1$ *alla somma dei primi e dei secondi membri delle medesime. La somma poi delle seconde diseguaglianze produrrà senz' altro* $(b^{VI}) > (b^{V})$; *perciò essendo* (b^{VI}) *compreso fra* (b^{V}) *e* $2(b^{V})$, *le serie proposte saranno insieme o convergenti, o divergenti.*

sarà convergente, quante volte sia $c > 1$, e divergente se abbiasi $c = 1$, ovvero < 1.

Vedemmo inoltre (§. 234 II.°) che la serie

$$-\frac{1}{2^c}, \quad +\frac{1}{3^c}, \quad -\frac{1}{4^c}, \ldots$$

è sempre convergente. Dunque dalla sola divergenza della serie

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

non discende necessariamente (§. 235: 236) la divergenza della

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$$

Dello sviluppo in serie di alcune formule.

240.

Facciamo alcune premesse. 1.° supponiamo che nelle due (§. 110 : 112)

$$\left.\begin{aligned}(1+\beta)^n &= 1+n\beta+\frac{n^2\beta^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{n^3\beta^3}{2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots,\\ (1-\beta)^{-n} &= 1+n\beta+\frac{n^2\beta^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{n^3\beta^3}{2.3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots.\end{aligned}\right\}(i_1)$$

il numero intero n converga nell' ∞, ed insieme β nello o; cosicchè il prodotto $n\beta$ converga in un limite finito $= z$. I termini dei secondi membri delle due (i_1) coutinuamente si accosteranno ai termini della serie

$$1, \quad z, \quad \frac{z^2}{2}, \quad \frac{z^3}{2.3}, \ldots$$

Questa è poi convergente (§. 236. I.°) per qualunque valore finito di z; dunque valendo l'equazione

$$lim.\,(n\beta) = z \ldots \quad (i_2),$$

valerà eziandio

$$lim.\ (1+\beta)^n = lim.\ (1-\beta)^{-n} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \ldots \quad (i_3).$$

2.° il numero μ suppongasi compreso fra n ed $n+1$; sarà

$$1 < \frac{\mu}{n} < 1 + \frac{1}{n} \quad (215):$$

perciò convergendo n , μ nell' ∞ , sarà

$$lim.\ \frac{\mu}{n} = 1.$$

Da ciò siegue che, mentre μ converge nell' ∞, ed insieme β nello o, se il prodotto $\mu\beta$ converga in un limite finito $= z$, cosicchè abbiasi

$$lim.(\mu\beta) = z \ldots (i_4),$$

valeranno senza dubbio anche le (i_2), (i_3) (216). Ora poi (§. 91: 93)

$$(1+\beta)^{\mu} = [(1+\beta)^n]^{\frac{\mu}{n}}, \quad (1-\beta)^{-\mu} = [(1-\beta)^{-n}]^{\frac{\mu}{n}};$$

e conseguentemente

$$lim.\ (1+\beta)^{\mu} = lim.\ (1+\beta)^n, \quad lim.\ (1-\beta)^{-\mu} = lim.\ (1-\beta)^{-n}.$$

(215) *Essendo per ipotesi* $n<\mu$, *ed* $n+1>\mu$; *sarà* $1<\frac{\mu}{n}$, *ed* $1+\frac{1}{n}>\frac{\mu}{n}$.

(216) *Poichè lim.* $\mu = \infty$, *e lim.* $\beta = 0$ *danno per ipotesi lim.* $(\mu\beta) = z$, *avremo ancora lim.* $(n\beta) = z$, *per essere lim.* $n = \infty$; *e conseguentemente valeranno insieme le* (i_2), (i_3).

Dunque nella ipotesi attuale sarà eziandio

$$lim.(1+\beta)^{\mu} = lim.(1-\beta)^{-\mu} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \ldots \ (i_5) \quad (217).$$

3.° si adempie alla (i_4) ponendo

$$\mu = \frac{z}{\beta};$$

poichè allora sarà costantemente $\mu\beta = z$; perciò

$$lim.\ (1+\beta)^{\frac{z}{\beta}} = lim.\ (1-\beta)^{-\frac{z}{\beta}} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \ldots \ (i_6);$$

e fatto $z = 1$, sarà

$$lim.(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = lim.(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \ldots = 2,7182818284 \ldots$$

4.° il numero 2,718 . . . suole rappresentarsi con e , cosicchè scrivasi

$$\left.\begin{array}{l} lim.\ (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e = lim.\ (1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}; \\ \text{onde (§. 91 : 93)} \\ lim.\ (1+\beta)^{\frac{z}{\beta}} = e^z = lim.\ (1-\beta)^{-\frac{z}{\beta}}; \\ \text{e similmente , adempiuta la condizione } (i_4), \\ lim.\ (1+\beta)^{\mu} = e^z = lim.\ (1-\beta)^{-\mu}. \end{array}\right\} (i_7)$$

(217) *Dunque razionale o irrazionale che sia l'esponente di* $(1 \pm \beta)$, *sempre avrà luogo la* (i_5).

Questo medesimo numero e non può ascriversi fra i numeri razionali. Poichè se fosse razionale certo niente osterebbe che potesse rappresentarsi per $\frac{a}{k}$, esprimendo a e k numeri interi, primi fra loro. Ma

$$\frac{a}{k} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{2.3 \ldots k} + \frac{1}{2.3 \ldots (k+1)} + \ldots ,$$

ovvero, fatta la moltiplicazione per $2.3 \ldots k$,

$$2.3 \ldots (k-1)a = 2.2.3.4 \ldots k + 3.4 \ldots k + \ldots$$

$$+ 1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots ;$$

dal che apparisce non potere essere la e rappresentata in quel modo, se non quando la somma della serie

$$\frac{1}{k+1} , \frac{1}{(k+1)(k+2)} , \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} , \ldots$$

sia un numero intero. Ma questa somma perchè > 0, e minore di tutta la progressione geometrica (§. 201)

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^3} + \ldots = \frac{1}{k} ,$$

non può al certo rappresentarsi per un numero intero: dunque neppure la e si potrà esprimere in quel modo; e perciò non deve ascriversi fra i numeri razionali.

5.° presi n e β in modo che sia costantemente

$$n\beta = z \ldots (i_5) ,$$

le formule (i_1) daranno

$$(1+\beta)^{\frac{z}{\beta}} = 1+z+\frac{z^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{z^3}{2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots,$$

$$(1-\beta)^{-\frac{z}{\beta}} = 1+z+\frac{z^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{z^3}{2.3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)+\dots. \qquad (i_9)$$

Quindi sotto la condizione (i_8)

$$(1+\beta)^{\frac{z}{\beta}} < e^z < (1-\beta)^{-\frac{z}{\beta}},$$

$$(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} < e < (1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}. \qquad (i_{10}) \qquad (218)$$

6.° esprimendo L i logaritmi relativi alla base e (sono chiamati *neperiani* da Nepero che pel primo ad essi pose mente), la seconda delle (i_{10}) somministrerà

$$\frac{L(1+\beta)}{\beta} < 1 < -\frac{L(1-\beta)}{\beta};$$

e per conseguente

$$L(1+\beta) < \beta < L\left(\frac{1}{1-\beta}\right). \qquad (i_{11})$$

---

(218) *Paragonando la seconda delle* (i_7) *con la* (i_6) *abbiamo*

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2.3}+\dots.$$

Ora il secondo membro di questa equazione paragonato coi secondi membri delle (i_9), *ne porgerà la prima delle* (i_{10}).

241.

Ciò premesso abbiansi a svolgere in serie le quantità esponenziali

$$e^z \quad , \quad a^z \, .$$

In ordine alla prima si ha manifestamente (§. 240: 3.° 4.°)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \ldots \; (i_{12})$$

per qualunque valore finito di z; e poichè (§. 204) il numero a può esprimersi per $e^{L(a)}$, e conseguentemente a^z per $e^{zL(a)}$, perciò

$$a^z = 1 + zL(a) + \frac{z^2L^2(a)}{2} + \frac{z^3L^3(a)}{2.3} + \ldots \; (i_{13}) \, .$$

Quindi 1° esprimendo c un qualunque numero costante, sarà

$$e^{cz} = 1 + cz + \frac{c^2z^2}{2} + \frac{c^3z^3}{2.3} + \ldots ;$$

e convergendo z all' infinito, sarà

$$lim. \frac{e^{cz}}{z} = \infty \, .$$

2.° fatto $z = L(v)$, e perciò (§. 205 : 208) $czL(e) = cL(v)$, $L(e^{cz}) = L(v^c)e^{cz} = v^c$, sarà

$$lim. \frac{L(v)}{v^c} = lim. \frac{z}{e^{cz}} = 0 \, .$$

3.° poichè convergendo v verso il limite $= o$, può v esprimersi per $\frac{1}{v}$, perciò $\frac{L(v)}{v^c} = - v^cL(v)$, e conseguentemente $lim. \, v^cL(v) = o$.

242.

Debbasi eziandio svolgere in serie $L(1+z)$. Fatto $z = n\omega$ (converge ω nello o, mentre n converge nell' ∞) onde sia $1 + z = 1 + n\omega$, sarà (§. 207)

$$L(1+z) = L(1+\omega) + L\left(\frac{1+2\omega}{1+\omega}\right) + L\left(\frac{1+3\omega}{1+2\omega}\right) + \ldots + L\left(\frac{1+n\omega}{1+(n-1)\omega}\right).$$

Sono poi

$$\frac{1+2\omega}{1+\omega} = 1 + \frac{\omega}{1+\omega}\ ,\quad \frac{1+3\omega}{1+2\omega} = 1 + \frac{\omega}{1+2\omega}\ ,\ \ldots$$

$$\frac{1+n\omega}{1+(n-1)\omega} = 1 + \frac{\omega}{1+(n-1)\omega}\ ,\quad \frac{1+\omega}{1+2\omega} = 1 - \frac{\omega}{1+2\omega}\ ,$$

$$\frac{1+2\omega}{1+3\omega} = 1 - \frac{\omega}{1+3\omega}, \ldots,\quad \frac{1+(n-1)\omega}{1+n\omega} = 1 - \frac{\omega}{1+n\omega}\ ;$$

e perciò (§. 240: 6.°)

$$L\left(\frac{1+2\omega}{1+\omega}\right) = L\left(1 + \frac{\omega}{1+\omega}\right) < \frac{\omega}{1+\omega}\ ,\quad L\left(\frac{1+3\omega}{1+2\omega}\right) < \frac{\omega}{1+2\omega}, \ldots$$

$$L\left(\frac{1+n\omega}{1+(n-1)\omega}\right) < \frac{\omega}{1+(n-1)\omega},\quad L\left(\frac{1+2\omega}{1+\omega}\right) = L\left(\frac{1}{1-\frac{\omega}{1+2\omega}}\right) > \frac{\omega}{1+2\omega},$$

$$L\left(\frac{1+3\omega}{1+2\omega}\right) > \frac{\omega}{1+3\omega}\ ,\ \ldots\ ,\ L\left(\frac{1+n\omega}{1+(n-1)\omega}\right) > \frac{\omega}{1+n\omega}\ ;$$

Inoltre (§. 240: 6°), $L(1+\omega) < \omega$, ed insieme

$$L(1+\omega) = L\left(\frac{1}{1-\frac{\omega}{1+\omega}}\right) > \frac{\omega}{1+\omega}\ .$$

Dunque $L(1+z)$ sarà compreso fra le due serie

$$\omega+\frac{\omega}{1+\omega}+\frac{\omega}{1+2\omega}+\ldots+\frac{\omega}{1+(n-1)\omega}\ ,\quad \frac{\omega}{1+\omega}+\frac{\omega}{1+2\omega}+\ldots+\frac{\omega}{1+n\omega}\ ,$$

delle quali sarà la differenza $=\omega-\frac{\omega}{1+n\omega}$: e poichè

$$lim.\left(\omega-\frac{\omega}{1+n\omega}\right)=lim.\frac{z^2}{n(1+z)}=0\ ;$$

perciò

$$L(1+z)=lim.\left(\omega+\frac{\omega}{1+\omega}+\frac{\omega}{1+2\omega}+\ldots+\frac{\omega}{1+(n-1)\omega}\right)\ .$$

Ora poi

$$\frac{\omega}{1+\omega}=\omega(1-\omega+\omega^2-\omega^3+\ldots)\ ,\quad \frac{\omega}{1+2\omega}=\omega(1-2\omega+2^2\omega^2-2^3\omega^3+\ldots)\ ,$$

$$\frac{\omega}{1+3\omega}=\omega(1-3\omega+3^2\omega^2-3^3\omega^3+\ldots)\ ,\ \text{ecc.}\ldots\ldots$$

$$\frac{\omega}{1+(n-1)\omega}=\omega[1-(n-1)\omega+(n-1)^2\omega^2-(n-1)^3\omega^3+\ldots]\ .$$

Laonde

$$L(1+z)=lim.[n\omega-\left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right)\omega^2+\left(1+2^2+3^2+\ldots\right.$$

$$\left.+(n-1)^2\right)\omega^3-\left(1+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\right)\omega^4+\ldots]=lim.[z-\frac{1}{n^2}\left(1+2\right.$$

$$\left.+3+\ldots+(n-1)\right)z^2+\frac{1}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)z^3-\frac{1}{n^4}\left(1+2^3+3^3\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+(n-1)^3\right)z^4+\ldots\ldots]\ .$$

$$lim.\frac{1}{n^2}\left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right)=\frac{1}{2}\ ,$$

$$lim.\frac{1}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)=\frac{1}{3}\ ,$$

$$lim.\frac{1}{n^4}\left(1+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\right)=\frac{1}{4}\ ,$$

e generalmente

$$lim.\frac{1}{n^{m+1}}\left(1+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m\right)=\frac{1}{m+1}\ .$$

Dunque

$$L(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots\ (i_{14})\ ;$$

che vale necessariamente da $z>-1$ a $z=1$: poichè da $z>-1$ a $z=1$ la serie

$$z\ ,\ -\frac{z^2}{2}\ ,\ \frac{z^3}{3}\ ,\ -\frac{z^4}{4}\ ,\ \ldots$$

al certo è convergente (§. 236: 234. II°). Fatto $z=1$, sarà

$$L(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ .$$

243.

Abbiamo (§. 210)

$$\frac{l(1+z)}{l(e)}=L(1+z)\ :$$

perciò

$$l(1+z) = (z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots)l(e) \ldots (i_{15}) ;$$

e preso $\frac{z}{k}$ per z, si avranno le (§. 207)

$$\left.\begin{aligned} l(k+z) &= l(k) + \left(\frac{z}{k} - \frac{z^2}{2k^2} + \frac{z^3}{3k^3} - \ldots\right) l(e) , \\ L(k+z) &= L(k) + \frac{z}{k} - \frac{z^2}{2k^2} + \frac{z^3}{3k^3} - \ldots , \end{aligned}\right\} (i_{16})$$

che necessariamente valgono da $\frac{z}{k} > -1$ a $\frac{z}{k} = 1$.

244.

Lo sviluppo della formula $(1+z)^n$, in cui denota n un numero intero, sia positivo sia negativo, già fu da noi contemplato (§. 110: 112): ora μ esprima un' altro qualunque numero, cosicchè sostituito μ in vece di n, abbiasi da svolgere in serie la formula $(1+z)^{\mu}$. Abbiamo (§. 204)

$$1 + z = e^{L(1+z)} ;$$

perciò (§. 242)

$$(1+z)^{\mu} = e^{\mu L(1+z)} = e^{\mu(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots)} ;$$

e conseguentemente (§. 241)

$$(1+z)^{\mu} = 1 + \mu(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots) + \frac{1}{2}\mu^2(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots)^2$$

$$+ \frac{1}{2.3}\mu^3(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots)^3 + \ldots .$$

Ma la somma

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots .$$

conserva un valore finito (§. 242) da $z > -1$ a $z = 1$; dunque la serie

$$\mu\left(z - \frac{z^2}{2} + \ldots\right), \ \frac{1}{2}\mu^2\left(z - \frac{z^2}{2} + \ldots\right)^2, \ \frac{1}{2.3}\mu^3\left(z - \frac{z^2}{2} + \ldots\right)^3, \ \ldots$$

sarà (§. 236: I°) convergente da $z > -1$ a $z = 1$; e perciò riguardo a questi valori di z sarà

$$(1+z)^{\mu} = 1 + \mu\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\right) + \frac{\mu^2}{2}\left(z^2 - z^3 + \frac{11z^4}{12} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{\mu^3}{2.3}\left(z^3 - \frac{3z^4}{2} + \ldots\right) + \frac{\mu^4}{2.3.4}\left(z^4 - \ldots\right) + \ldots = 1 + \mu z + \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu}{2}\right) z^2$$
$$+ \left(\frac{\mu^3}{6} - \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu}{3}\right) z^3 + \left(\frac{\mu^4}{24} - \frac{\mu^3}{4} + \frac{11\mu^2}{24} - \frac{\mu}{4}\right) z^4 + \ldots ,$$

ovvero

$$(1+z)^{\mu} = 1 + \mu z + \frac{\mu(\mu-1)}{2} z^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3} z^3 + \ldots \ (i_{17}) ;$$

del tutto secondo la nota legge (§. 110)

Alcune osservazioni sopra le serie immaginarie

245.

Se le due serie reali

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \ , \ a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ \ldots \\ b_0 \ , \ b_1 \ , \ b_2 \ , \ b_3 \ , \ \ldots \end{array}\right\} (g')$$

pongansi convergenti , e con A , B si esprima la somma delle medesime (§. 233) ; sarà $A + B\sqrt{-1}$ la somma della serie immaginaria

$$a_0 + b_0\sqrt{-1} \ , \ a_1 + b_1\sqrt{-1} \ , \ a_2 + b_2\sqrt{-1} \ , \ (g'')$$

che si esprime con la equazione seguente

$$A + B\sqrt{-1} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots)\sqrt{-1} .$$

Nella ipotesi in cui siamo, la serie (g'') si dice convergente : che se ambedue le (g') , ovvero l'una o l'altra di esse sarà divergente , lo sarà eziandio la (g''), nè avrà somma veruna.

246.

Stabilite le

$$\sqrt{a_0^2+b_0^2} = \mu_0 \ , \ \sqrt{a_1^2+b_1^2} = \mu_1 \ , \ \sqrt{a_2^2+b_2^2} = \mu_2 \ , \ \ldots \ ,$$

e similmente le

$$\frac{a_0}{\mu_0} = h_0 \ , \ \frac{a_1}{\mu_1} = h_1 \ , \ \frac{a_2}{\mu_2} = h_2 \ , \ \ldots \ ,$$

$$\frac{b_0}{\mu_0} = k_0 \ , \ \frac{b_1}{\mu_1} = k_1 \ , \ \frac{b_2}{\mu_2} = k_2 \ , \ \ldots \ ,$$

la serie (g'') potrà esprimersi a questo modo

$$\mu_0(h_0 + k_0\sqrt{-1}) \ , \ \mu_1(h_1 + k_1\sqrt{-1}) \ , \ \mu_2(h_2 + k_2\sqrt{-1}) \ , \ \ldots \ (g''').$$

Se poi la serie

$$\mu_0 \ , \ \mu_1 \ , \ \mu_2 \ , \ \ldots$$

sarà convergente, apparisce che lo saranno ancora le

$$\mu_0 h_0 \ , \ \mu_1 h_1 \ , \ \mu_2 h_2 \ , \ \ldots \ ,$$

$$\mu_0 k_0 \ , \ \mu_1 k_1 \ , \ \mu_2 k_2 \ , \ \ldots \quad (219) \ ,$$

e perciò anche le (g'''), (g''). Dunque (§. 236) se

$$lim. \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} < 1 \ ,$$

al certo le (g'''), (g'') saranno convergenti. Che se

$$lim. \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} > 1 \ ,$$

al certo crescendo n indefinitamente, μ_n sorpasserà qualunque dato limite: essendo dunqne $\mu_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, crescerà eziandio indefinitamente l'una o l'altra per lo meno delle due a_n, b_n; e saranno perciò divergenti le (g'), (g'''). Le quantità positive μ_0, μ_1, μ_2, ... diconsi *moduli* delle corrispondenti espressioni immaginarie.

---

(219) *Poichè ciascuno dei numeri*

$$h_0 \ , \ h_1 \ , \ h_2 \ , \ \ldots \ , \ k_0 \ , \ k_1 \ , \ k_2 \ , \ \ldots$$

è minore della unità, così quante volte la serie

$$\mu_0 \ , \ \mu_1 \ , \ \mu_2 \ , \ \ldots$$

sia convergente, dovranno esserlo ancora le

$$\mu_0 h_0 \ , \ \mu_1 h_1 \ , \ \mu_2 h_2 \ \ldots \ , \ \mu_0 k_0 \ , \ \mu_1 k_1 \ , \ \mu_2 k_2 \ \ldots$$

che dalla prima non differiscono per altro fuorchè per una diminuzione in ogni loro termine.

247.

Se la serie

$$a_0 \ , \ a_1 x_1 \ , \ a_2 x_2 \ , \ a_3 x_3 \ , \ \cdots$$

è convergente per un certo valore reale da darsi alla variabile x, apparisce dalle cose ora dette, che rimarrà convergente anche per quei valori immaginari della x, il modulo de' quali, prescindendo dal segno, eguaglia quel real valore. Dunque se la predetta serie è convergente per qualunque real valore della variabile x, lo sarà eziandio per qualunque immaginario della variabile stessa.

248.

Le serie (i_{12}) e (i_{13}), già dedotte (§. 241), rimangono convergenti comunque prendasi z, reale, o immaginaria: perciò ritengonsi per determinare il significato dell' espressioni e^z, a^z quando z si pone immaginaria: lo stesso dicasi delle (i_{14}) e (i_{17}) fra i debiti limiti. Inoltre sustituito $zL(a)$ invece di z nella (i_{13}), il secondo membro della stessa (i_{12}) ricade nel secondo della (i_{13}); laonde

$$e^{zL(a)} = a^z \ \ldots \ (g^{IV})$$

anche per z immaginaria.

249.

Per la stessa cagione (§. 241 : 240: 1°)

$$e^x = lim. \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ , \quad e^y = lim. \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \ , \qquad \left\} \ (g^V)\right.$$

e perciò

$$e^x \cdot e^y = lim. \left[1 + \frac{1}{n}\left(x + y + \frac{xy}{n}\right)\right]^n$$

anche quando x, y divengono immaginarie. Ma

$$lim.[1+\frac{1}{n}(x+y+\frac{xy}{n})]^n = lim.[1+x+y+\frac{xy}{n}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})(x+y+\frac{xy}{n})^2$$

$$+\frac{1}{2.3}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(x+y+\frac{xy}{n})^3+\dots] = 1+x+y+\frac{(x+y)^2}{2}$$

$$+\frac{(x+y)^3}{2.3}+\dots\dots = e^{x+y} \quad (220).$$

Dunque

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \dots (g^{VI}) ;$$

e sostituiti $xL(a)$, $yL(a)$ in luogo di x, y, sarà (§. 248: g^{IV})

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \dots (g^{VII}) ;$$

del tutto come per gli esponenti reali. Quindi manifestamente derivano le

$$\left.\begin{aligned} e^x e^y e^{y'} e^{y''} \dots &= e^{x+y+y'+y''+\dots} \dots , \\ a^x a^y a^{y'} a^{y''} \dots &= a^{x+y+y'+y''+\dots} \dots , \end{aligned}\right\} (g^{VIII})$$

qualanque sia il numero n delle variabili immaginarie x, y, y', y'', ...

E fatto $x = y = y' = y'' = \dots$, sarà

$$(e^x)^m = e^{mx} \quad , \quad (a^x)^m = a^{mx} \dots (g^{IX}) ;$$

poi nelle (g^{VI}), (g^{VII}) sostituito $x-y$ ad x, avremo

$$\left.\begin{aligned} e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \quad , \\ a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y} \end{aligned}\right\} (g^X) .$$

(220) *Ciò si ottiene riflettendo che*

$$lim.\frac{xy}{n} = lim.\frac{1}{n} = lim.\frac{2}{n} = \dots = 0 .$$

Alcune proprietà delle grandezze infinitesime.

250.

Non di rado c'incontrammo a considerare delle quantità variabili, aventi lo zero per limite; le quali accostandovisi, divengono perciò minori di qualunque data grandezza, comunque piccola; siffatte quantità si dicono *infinitesime*: per lo contrario le quantità indefinitamente crescenti, le quali perciò divengono maggiori di qualunque altra data, quanto si voglia grande, si dicono *infinite*.

Converga β insieme a μ nel *lim.* $= 0$; β dicesi base rispetto a μ, e si reputa di *prim' ordine* (221): per quello poi riguardi μ, esprima c un numero fisso, e z uno variabile; se $\frac{\mu}{\beta^z}$ converge nel *lim.* $= 0$, essendo $z < c$, e nel *lim.* $= \infty$, essendo $z > c$, si reputerà μ essere dell' ordine c.

Il limite poi della ragione $\frac{\mu}{\beta^c}$ potrà ricevere un valore fisso, sia $>$, sia $<$ o, potrà essere $= 0$, ovvero $= \infty$ (222), come rilevasi dalle

---

(221) *La quantità infinitesima* β *serve, come vedesi appresso, a determinare l'ordine dell' altra* μ, *la quale è sempre una funzione di* β.

(222) *Questi sono i valori che possono competere alla espressione* $\frac{0}{0}$, *alla quale si riduce sempre lim.* $\frac{\mu}{\beta^c}$.

$$\mu_\beta = \beta^c e^\beta \quad , \quad \mu_\beta = \frac{\beta^c e^\beta}{L(\beta)} \quad , \quad \mu_\beta = \beta^c e^\beta L(\beta) :$$

poichè si ha

$$lim. \frac{\beta^c e^\beta}{\beta^c} = lim.\ e^\beta = 1 \quad , \quad lim. \frac{\beta^c e^\beta}{\beta^c L(\beta)} = lim. \frac{e^\beta}{L(\beta)} = 0 \ ,$$

$$lim. \frac{\beta^c e^\beta L(\beta)}{\beta^c} = lim.\ e^\beta L(\beta) = -\infty . \quad (223)$$

251.

Abbiansi due quantità infinitesime μ_β , φ_β , una dell' ordine a , l'altra dell' ordine b ; e pongasi $a < b$: preso il numero z per modo, che sia $b > z > a$, avremo (§. 250)

$$lim. \frac{\varphi_\beta}{\beta^z} = 0 \quad , \quad lim. \frac{\mu_\beta}{\beta^z} = \infty \ ; \quad (224)$$

(223) *Osservando che dalla* $a^x = z$ *si deduce* (§. 204)

$$a^0 = 1 \quad , \quad 0 = l(1) \quad , \quad 1 = l(a) \quad , \quad -\infty = l(0) \ ,$$

facilmente s'intenderanno le superiori equazioni. Ovvero supponendo nella (i. §. 242) *lim.* $z = -1$, *ed osservando che perciò il secondo suo membro diviene* $= -\infty$, *avremo lim.* $L(\beta) = -\infty$, *lo che basta per intendere l'equazioni sudette.*

(224) *Ciò discende chiaramente dalla definizione generale che al* (§. 250) *si è data dell' ordine delle quantità infinitesi-*

e quindi

$$lim. \frac{\Phi_\beta}{\mu_\beta} = 0 .$$

Ma ciò non può essere, salvo che finalmente non divenga il valor numerico di Φ_β, e non continui ad essere, minore del valor numerico di μ_β; dunque di due quantità infinitesime quella di ordine più elevato, finalmente diverrà in quanto al valor numerico, e poi costantemente si conserverà, minore dell' altra di ordine inferiore.

252.

Se a, b, c, ... denotano gli ordini delle quantità infinitesime μ_β, Φ_β, χ_β, ..., e pongasi $a < b < c < \ldots$, sarà

$$\mu_\beta + \Phi_\beta + \chi_\beta + \ldots .$$

una grandezza infinitesima dell' ordine a. Poichè (§. 251)

me: infatti essendo per ipotesi Φ_β *un infinitesimo di ordine* b, *e* $z < b$; *dovrà essere* (§. 250)

$$lim. \frac{\Phi_\beta}{\beta^z} = 0.$$

Similmente μ_β *essendo un infinitesimo di ordine* a, *e* $z > a$, *dovrà essere* (§. 250)

$$lim. \frac{\mu_\beta}{\beta^z} = \infty .$$

$$lim.\frac{\mu_\beta+\Phi_\beta+\chi_\beta+\ldots}{\beta^z}=lim.\left(1+\frac{\Phi_\beta}{\mu_\beta}+\frac{\chi_\beta}{\mu_\beta}+\ldots\right)\frac{\mu_\beta}{\beta^z}=lim.\frac{\mu_\beta}{\beta^z}$$

(225); perciò (§. 250) ecc. . . .

253.

Poste le medesime cose di sopra (§. 252), sarà

$$\mu_\beta\cdot\Phi_\beta\cdot\chi_\beta\cdots$$

un infinitesimo dell' ordine $a+b+c+\ldots$ Poichè

$$lim.\frac{\mu_\beta\cdot\Phi_\beta\cdot\chi_\beta\cdots}{\beta^{z+z'+z''+\ldots}}=lim.\frac{\mu_\beta}{\beta^z}\cdot\frac{\Phi_\beta}{\beta^{z'}}\cdot\frac{\chi_\beta}{\beta^{z''}}\cdots;$$

ma (§. 250) abbiamo

$$lim.\frac{\mu_\beta}{\beta^z}\cdot\frac{\Phi_\beta}{\beta^{z'}}\cdot\frac{\chi_\beta}{\beta^{z''}}\cdots=0$$

---

(225) *Poichè* (§. 251) *abbiamo*

$$lim.\frac{\Phi_\beta}{\mu_\beta}=lim.\frac{\chi_\beta}{\mu_\beta}=\ldots=0\ ,$$

così avremo

$$lim.\left(1+\frac{\Phi_\beta}{\mu_\beta}+\frac{\chi_\beta}{\mu_\beta}+\ldots\right)\frac{\mu_\beta}{\beta^z}=lim.\frac{\mu_\beta}{\beta^z};$$

perciò ecc. . . .

se $z<a$, $z'<b$, $z''<c$, . . . , e perciò

$$z + z' + z'' + \ldots < a + b + c + \ldots ;$$

ma

$$lim. \frac{\mu_\beta}{\beta^z} \cdot \frac{\varphi_\beta}{\beta^{z'}} \cdot \frac{\chi_\beta}{\beta^{z''}} \ldots = \infty$$

se $z>a$, $z'>b$, $z''>c$, . . . , e però

$$z + z' + z'' + \ldots > a + b + c + \ldots :$$

dunque lo stesso deve dirsi di

$$\frac{\mu_\beta \cdot \Phi_\beta \cdot \chi_\beta \ldots}{\beta^{z+z'+z''+\ldots}} ;$$

e per conseguenza (§. 250) ecc. . . . (226)

254.

Riguardata la μ_β come base, suppongasi Φ_β appartenere all' ordine b ; denoti poi a l'ordine della infinitesima μ_β ri-

---

(226) *Riepilogando vediamo che*

$$lim. \frac{\mu_\beta \cdot \Phi_\beta \cdot \chi_\beta \ldots}{\beta^{z+z'+z''+\ldots}}$$

sarà $= 0$, *ovvero* $= \infty$, *secondo che sarà*

$$z + z' + z'' + \ldots < \quad , \quad \textit{ovvero} \quad > a + b + c + \ldots ;$$

dunque (§. 250) *l'infinitesimo* $\mu_\beta \cdot \Phi_\beta \cdot \chi_\beta \ldots$ *sarà di ordine* $= a + b + c + \ldots$

spetto alla base χ_β. Rappresenterà ab l'ordine dell' infinitesima φ_β relativamente alla base χ_β: ciò si dimostra così facilmente. Abbiamo

$$lim. \frac{\varphi_\beta}{(\chi_\beta)^{zz'}} = lim. \left(\frac{\mu_\beta}{(\chi_\beta)^{z}}\right)^{z'} \cdot \frac{\varphi_\beta}{(\mu_\beta)^{z'}} ;$$

ma (§. 250) presi $z<a$, $z'<b$, e perciò $zz'<ab$, abbiamo

$$lim. \left(\frac{\mu_\beta}{(\chi_\beta)^{z}}\right)^{z'} \cdot \frac{\varphi_\beta}{(\mu_\beta)^{z'}} = 0 ;$$

e presi $z>a$, $z'>b$, e perciò $zz'>ab$, abbiamo

$$lim. \left(\frac{\mu_\beta}{(\chi_\beta)^{z}}\right)^{z'} \cdot \frac{\varphi_\beta}{(\mu_\beta)^{z'}} = \infty \quad (227) :$$

dunque lo stesso dovrà dirsi di

---

(227) *Riguardando le* χ_β *e* μ_β *ambedue come basi, è chiaro* (§. 250) *che lim.* $\left(\frac{\mu_\beta}{(\chi_\beta)^{z}}\right)^{z'}$, *e lim.* $\frac{\varphi_\beta}{(\mu_\beta)^{z'}}$ *eguaglieranno ambedue lo zero, ovvero l'* ∞ , *secondo che prendesi* $z<a$, *e* $z'<b$; *ovvero* $z>a$, *e* $z'>b$; *perchè* a , b *sono rispettivamente i gradi delle infinitesime* μ_β , $\varphi\beta$. *Il resto della dimostrazione siegue da ciò evidentemente.*

$$lim. \frac{\Phi_\beta}{(\chi_\beta)^{zz'}} \; ;$$

e conseguentemente (§. 250), ecc. . . .

Da ciò siegue che i numeri dai quali sono rappresentati gli ordini della infinitesima Φ_β rapporto alle basi μ_β, χ_β, stanno fra loro come $b : ab$, ovvero come $1 : a$; per lo che se $a = 1$, cioè se μ_β è di prim' ordine relativamente alla base χ_β, rimarrà Φ_β nel medesim' ordine b, tanto se Φ_β riferiscasi alla base μ_β, quanto se alla χ_β.

Delle frazioni continue

255.

Quando una formula riducasi alla espressione

$$\frac{a'}{q'} + \frac{a''}{q''} + \frac{a'''}{q'''} + \frac{a^{IV}}{q^{IV}} + \ldots .$$

dicesi trasformata in una *frazione continua* (228). Sia data p. e. la formula $\frac{z_{x+1}}{z_x}$ nella quale z_x è tale, che abbiasi

(228) *Da ciò apparisce che si chiama continua quella frazione, il cui denominatore si forma di un intero congiunto ad una frazione, avente anch' essa il dominatore formato a questo modo, e così appresso.*

$$z_x - z_{x+1} = \frac{c}{x(x+1)} z_{x+2} \ldots (o) ;$$

sarà

$$\frac{xz_x}{cz_{x+1}} - \frac{x}{c} = \frac{z_{x+2}}{(x+1)z_{x+1}} \ldots (o'). \quad (229)$$

Pongasi

$$\frac{cz_{x+1}}{xz_x} = \mu_x \text{ , e perciò } \frac{cz_{x+2}}{(x+1)z_{x+1}} = \mu_{x+1} :$$

si ridurrà la (o') alla

$$\frac{1}{\mu_x} = \frac{x+\mu_{x+1}}{c} \text{ , onde } \mu_x = \frac{c}{x+\mu_{x+1}} \text{ , e conseguentemente}$$

$$\mu_{x+1} = \frac{c}{x+1+\mu_{x+2}} , \quad \mu_{x+2} = \frac{c}{x+2+\mu_{x+3}} ,$$

$$\mu_{x+3} = \frac{c}{x+3+\mu_{x+4}} , \quad \mu_{x+4} = \frac{c}{x+4+\mu_{x+5}} , \text{ ecc. . . .}$$

Quindi

$$\mu_x = \frac{cz_{x+1}}{xz_x} = \cfrac{c}{x+\cfrac{c}{x+1+\cfrac{c}{x+2+\cfrac{c}{x+3+\cfrac{c}{x+4+\ldots}}}}} ;$$

(229) *Si ottiene la* (o') *dalla* (o) *moltiplicando i due membri di questa per* $\frac{x}{cz_{x+1}}$.

e perciò

$$\frac{z_{x+1}}{z_x} = \frac{x}{x+\dfrac{c}{x+1+\dfrac{c}{x+2+\dfrac{c}{x+3+\ldots}}}} \quad (230)$$

Presa per z_x la serie convergente (§. 236)

$$1 + \frac{c}{x} + \frac{c^2}{2x(x+1)} + \frac{c^3}{2.3\,x(x+1)(x+2)} + \ldots,$$

e perciò la

$$1 + \frac{c}{x+1} + \frac{c^2}{2(x+1)(x+2)} + \frac{c^3}{2.3(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots$$

per z_{x+1}, si adempirà alla (o) (231); dunque

---

(230) *A questo modo la formula* $\frac{z_{x+1}}{z_x}$ *si è svolta in frazione continua, mediante però la sua proprietà rappresentata dalla* (o).

(231) *Per vedere come rimane soddisfatta la* (o) *riflettasi che abbiamo*

$$z_x - z_{x+1} = \frac{c}{x(x+1)} + \frac{c^2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{c^3}{2x(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots =$$

$$= \frac{c}{x(x+1)}\left[1 + \frac{c}{x+2} + \frac{c^2}{2(x+2)(x+3)} + \ldots\right];$$

ma siccome abbiamo ancora

$$z_{x+2} = 1 + \frac{c}{x+2} + \frac{c^2}{2(x+2)(x+3)} + \frac{c^3}{2.3(x+2)(x+3)(x+4)} + \ldots,$$

così avremo evidentemente

$$\frac{1+\frac{c}{x+1}+\frac{c^2}{2(x+1)(x+2)}+\frac{c^3}{2.3(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots}{1+\frac{c}{x}+\frac{c^2}{2x(x+1)}+\frac{c^3}{2.3x(x+1)(x+2)}+\cdots}=$$

$$=\frac{x}{x+}\frac{c}{x+1+}\frac{c}{x+2+}\frac{c}{x+3+\cdots}$$

Facciasi $x=\frac{1}{2}$; avremo

$$\frac{1+\frac{4c}{2.3}+\frac{4^2c^2}{2.3.4.5}+\frac{4^3c^3}{2.3.4.5.6.7}+\cdots}{1+\frac{4c}{2}+\frac{4^2c^2}{2.3.4}+\frac{4^3c^3}{2.3.4.5.6}+\cdots}=$$

$$=\frac{1}{1+}\frac{4c}{3+}\frac{4c}{5+}\frac{4c}{7+\cdots}$$

Che se facciasi $4c=\frac{v^2}{u^2}$, e l'equazione che ne deriva si moltiplichi per $\frac{v}{u}$, nascerà

$$z_x-z_{x+1}=\frac{c}{x(x+1)}z_{x+2}\ ;$$

cioè rimarrà soddisfatta la (o).

$$\frac{\frac{v}{u} - \frac{v^3}{2.3u^3} + \frac{v^5}{2.3.4.5u^5} - \frac{v^7}{2.3.4.5.6.7u^7} + \cdots}{1 - \frac{v^2}{2u^2} + \frac{v^4}{2.3.4u^4} - \frac{v^6}{2.3.4.5.6u^6} + \cdots} =$$

$$= \cfrac{v}{u - \cfrac{v^2}{3u - \cfrac{v^2}{5u - \cfrac{v^2}{7u - \cdots}}}}$$

256.

In quanto al secondo membro di questa equazione osserviamo, nell' ipotesi di v ed u interi, quanto siegue.
1.° poichè nella serie

$$\frac{v^2}{3u}, \frac{v^2}{5u}, \frac{v^2}{7u}, \ldots.$$

il numeratore per tutto è lo stesso, i denominatori poi crescono all' infinito, si perverrà dunque ad un termine

$$\frac{v^2}{(2k+1)u} < 1 ;$$

e la frazione continua

$$\cfrac{v^2}{(2k+1)u - \cfrac{v^2}{(2k+3)u - \cfrac{v^2}{(2k+5)u - \cdots}}}$$

comunque protratta, sarà sempre < 1 : lo che, per poco che si rifletta, chiaro apparisce (232). 2.° questa medesima frazione

(232) *Infatti essendo per ipotesi* v, u, k *numeri interi, e* $v^2 < (2k+1)u$, *sarà necessariamente* $v^2 >$ *di qualunque suo denominatore, e perciò la frazione continua* < 1.

indefinitamente protratta, converge verso il limite α irrazionale: poichè se α fosse razionale certo niente osterebbe che si potesse rappresentare con $\frac{p}{q}$, denotando p, q due numeri interi; e prese delle quantità indeterminate r; r', r'', ... per modo, che abbiasi

$$\frac{r}{p} = \frac{v^2}{(2k+3)u - \dfrac{v^2}{(2k+5)u - \dfrac{v^2}{(2k+7)u - \ldots}}},$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{v^2}{(2k+5)u - \dfrac{v^2}{(2k+7)u - \ldots}},$$

$$\frac{r''}{r'} = \frac{v^2}{(2k+7)u - \dfrac{v^2}{(2k+9)u - \ldots}},$$

ecc. . . . ,

si avrebbero le

$$\frac{p}{q} = \frac{v^2}{(2k+1)u - \dfrac{r}{p}}, \quad \frac{r}{p} = \frac{c^2}{(2k+3)u - \dfrac{r'}{r}},$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{v^2}{(2k+5)u - \dfrac{r''}{r'}}, \qquad \text{ecc. . . . ;}$$

onde

$$r = (2k+1)up - v^2 q \ , \ r' = (2k+3)ur - v^2 p \ ,$$

$$r'' = (2k+5)ur' - rv^2 \ , \ \text{ecc. . . . ;}$$

i numeri cioè r, r', r'', ... emergerebbero interi; e perciò (1.°) se fosse α razionale si avrebbe la serie

$$q \ , \ p \ , \ r \ , \ r' \ , \ r'' \ , \ \ldots$$

che mai non sarebbe interrotta, e che risulterebbe di termini interi, il valor numerico dei quali continuamente decrescerebbe (233): ma ciò non può ammettersi; dunque ecc....
3.° siegue che la frazione continua

$$\cfrac{v}{u-\cfrac{v^2}{3u-\cfrac{v^2}{5u-\cfrac{v^2}{7u-\cfrac{v^2}{9u-}}}}}\ \ldots$$

indefinitivamente protratta, deve annoverarsi fra i numeri irrazionali. Poichè sia p. e. $2k+1=7$; fatte le

$$\frac{v^2}{5u-\alpha}=\alpha' \ , \ \frac{v^2}{3u-\alpha'}=\alpha'' \ , \ \frac{v}{u-\alpha''}=\alpha''' \ ,$$

sarà

$$\alpha'''=\cfrac{v}{u-\cfrac{v^2}{3u-\cfrac{v^2}{5u-\cfrac{v^2}{7u-\cfrac{v^2}{9u-}}}}}\ \ldots \ ;$$

ed essendo evidentemente α''' irrazionale, perciò ecc.... (234)

---

(233) *Decrescerebbe continuamente il valor numerico dei termini*

$$q \ , \ p \ , \ r \ , \ r' \ , \ r'' \ \ldots$$

perchè ognuna delle $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{p}$, $\frac{r'}{r}$, $\frac{r''}{r'}$ ... *per ipotesi rappresenta una frazione continua del valore numerico* <1 (1°).

(234) *Essendo* $2k+1=7$, *sarà* (2.°)

$$\alpha=\cfrac{v^2}{7u-\cfrac{v^2}{9u-\cfrac{v^2}{11u-}}}\ \ldots \ ;$$

257.

Riassumendo la frazione continua

$$\frac{a'}{q'+\dfrac{a''}{q''+\dfrac{a'''}{q'''+\dfrac{a^{IV}}{q^{IV}+\ldots}}}}$$

poniamo

$$A' = a' \qquad B' = q'$$

$$A'' = q''A' \qquad B'' = q''B' + a''$$

$$A''' = q'''A'' + a'''A' \qquad B''' = q'''B'' + a'''B'$$

$$A^{IV} = q^{IV}A''' + a^{IV}A'' \qquad B^{IV} = q^{IV}B''' + a^{IV}B''$$

$$A^{V} = q^{V}A^{IV} + a^{V}A''' \qquad B^{V} = q^{V}B^{IV} + a^{V}B'''$$

ecc. . . . ecc. . . .

avremo 1.°

$$\frac{a'}{q'} = \frac{A'}{B'} \;,\; \frac{a'}{q'+\dfrac{a''}{q''}} = \frac{A''}{B''} \;,\; \frac{a'}{q'+\dfrac{a''}{q''+\dfrac{a'''}{q'''}}} = \frac{A'''}{B'''} \;,\; \text{ecc. . . .}$$

---

e quindi fatte le

$$\frac{v^2}{5u-\alpha} = \alpha' \;,\; \frac{v^2}{3u-\alpha'} = \alpha'' \;,\; \frac{v}{u-\alpha''} = \alpha''' \;,$$

sarà α''' *irrazionale, perchè dipendente da* α *; onde ecc. . . .*

2.°
$$A^{(n-1)}B^{(n)} - A^{(n)}B^{(n-1)} = A^{(n-1)}\,[q^{(n)}B^{(n-1)} + a^{(n)}B^{(n-2)}]$$
$$- [q^{(n)}A^{(n-1)} + a^{(n)}A^{(n-2)}]\,B^{(n-1)}$$
$$= - a^{(n)}\,[A^{(n-2)}B^{(n-1)} - A^{(n-1)}B^{(n-2)}]\,; \quad (235)$$

e poichè
$$A'B'' - A''B' = a'a'' , \quad (236)$$
perciò
$$A''B''' - A'''B'' = - a'''(A'B'' - A''B') = - a'a''a''' ;$$

(235) *Generalizzando le precedenti equazioni abbiamo*
$$A^{(n)} = q^{(n)}A^{(n-1)} + a^{(n)}A^{(n-2)} \quad , \quad B^{(n)} = q^{(n)}B^{(n-1)} + a^{(n)}B^{(n-2)} ;$$
eliminando dalla prima di queste il $q^{(n)}$ *, avremo*
$$A^{(n)}B^{(n-1)} = A^{(n-1)}B^{(n)} - a^{(n)}A^{(n-1)}B^{(n-2)} + a^{(n)}A^{(n-2)}B^{(n-1)} ,$$
e quindi
$$A^{(n)}B^{(n-1)} - A^{(n-1)}B^{(n)} = - a^{(n)}(A^{(n-1)}B^{(n-2)} - A^{(n-2)}B^{(n-1)}) ,$$
ovvero , che è quanto volevamo trovare ,
$$A^{(n-1)}B^{(n)} - A^{(n)}B^{(n-1)} = - a^{(n)}(A^{(n-2)}B^{(n-1)} - A^{(n-1)}B^{(n-2)}).$$

(236) *In fatti abbiamo*
$$A'' = q''A' \text{ , ovvero } q'' = \frac{A''}{A'} \quad ,$$
perciò
$$B'' = q''B' + a'' = \frac{A''B'}{A'} + a'' ,$$
e quindi
$$A'B'' = A''B' + a''A' \quad , \quad \text{cioè } A'B'' - A''B' = a'a'' ;$$
similmente si troveranno le altre equazioni da questa dipendenti.

similmente

$$A'''B^{IV} - A^{IV}B''' = -a^{IV}(A''B''' - A'''B'') = a'a''a'''a^{IV} ;$$

e generalmente

$$A^{(n)}B^{(n+1)} - A^{(n+1)}B^{(n)} = \mp a'a''a''' \ldots a^{(n+1)} \ldots (o'') ,$$

preso il segno superiore se n sarà impari, e l'inferiore se pari.

258.

Quindi

$$\frac{A^{(n+1)}}{B^{(n+1)}} = \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} \mp \frac{a'a''a''' \ldots a^{(n+1)}}{B^{(n)}B^{(n+1)}} ;$$

e conseguentemente

$$\frac{A''}{B''} = \frac{A'}{B'} - \frac{a'a''}{B'B''} = \frac{a'}{B'} - \frac{a'a''}{B'B''} , \quad \frac{A'''}{B'''} = \frac{A''}{B''} + \frac{a'a''a'''}{B''B'''} ,$$

$$\frac{A^{IV}}{B^{IV}} = \frac{A'''}{B'''} - \frac{a'a''a'''a^{IV}}{B'''B^{IV}} , \quad \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots$$

dalle quali, sommando, si ottiene

$$\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} = \frac{a'}{B'} - \frac{a'a''}{B'B''} + \frac{a'a''a'''}{B''B'''} - \ldots \mp \frac{a'a''a''' \ldots a^{(n)}}{B^{(n-1)}B^{(n)}} .$$

Ora se, aumentato indefinitamente n, la frazione continua ha un limite fisso s, avremo

$$s = lim. \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} ;$$

e potrà scriversi

$$s = \frac{a'}{B'} - \frac{a'a''}{B'B''} + \frac{a'a''a'''}{B''B'''} - \ldots (o''') ,$$

mediante la quale, una data frazione continua si trasforma in serie. Viceversa la data serie

$$z_1 \ , \ -z_2 \ , \ z_3 \ , \ -z_4 \ , \ \text{ecc.} \ldots \ (\text{o}^{\text{IV}})$$

può ridursi a frazione continua: imperciocchè paragonando la (o''') con la (o$^{\text{IV}}$) avremo

$$\frac{a'}{B'} = z_1 \ , \ \frac{a'a''}{B'B''} = z_2 \ , \ \frac{a'a''a'''}{B''B'''} = z_3 \ , \ \text{ecc.} \ldots \ ;$$

dalle quali dedotte le $a' , a'' , a''' , \ldots$, le altre $q' , q'' , q''' , \ldots$ rimarranno arbitrarie.

259.

Se i termini

$$\frac{a'}{q'} \ , \frac{a''}{q''} \ , \frac{a'''}{q'''} \ , \ldots \ \frac{a^{(k)}}{q^{(k)}}$$

perpetuamente ritornano con lo stess' ordine nella frazione continua, questa dicesi *periodica*. Sia

$$s = \frac{a'}{q' + \dfrac{a''}{q'' + \ldots \\ \ldots \\ \ldots + \dfrac{a^{(k)}}{q^{(k)} + \dfrac{a'}{q' + \dfrac{a''}{q'' + \ldots}}}}},$$

sarà

$$s = \frac{a'}{q' + \dfrac{a''}{q'' + \ldots \\ \ldots \\ \ldots + \dfrac{a^{(k)}}{q^{(k)} + \dfrac{s}{1}}}} \ ;$$

e fatto (§. 257: 1.°)

$$a^{(k+1)} = s \ , \ q^{(k+1)} = 1 \ ,$$

si avrà

$$s = \frac{A^{(k+1)}}{B^{(k+1)}} = \frac{A^{(k)} + sA^{(k-1)}}{B^{(k)} + sB^{(k-1)}} \quad ; \quad (237)$$

perciò

$$B^{(k-1)}s^2 + [B^{(k)} - A^{(k-1)}]s - A^{(k)} = 0 :$$

equazione di secondo grado, che risoluta farà conoscere la s.

260.

Facciasi ora

$$a' = a'' = a''' = \ldots = 1 ,$$

cosicchè nasca la frazione continua

$$q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{q''' + \cfrac{1}{q^{IV} + \ldots}}}$$

---

(237) *Abbiamo* (§. 257: 1°)

$$s = \frac{A^{(k+1)}}{B^{(k+1)}} ,$$

ma (§. 257)

$$A^{(k+1)} = q^{(k+1)}A^{(k)} + a^{(k+1)}A^{(k-1)} = A^{(k)} + sA^{(k-1)} ,$$

$$B^{(k+1)} = q^{(k+1)}B^{(k)} + a^{(k+1)}B^{(k-1)} = B^{(k)} + sB^{(k-1)} ;$$

dunque

$$s = \frac{A^{(k+1)}}{B^{(k+1)}} = \frac{A^{(k)} + sA^{(k-1)}}{B^{(k)} + sB^{(k-1)}} ,$$

ecc. . . .

Cioè si conoscerà il valore di una frazione continua dal suo periodo, risolvendo una equazione di secondo grado.

Saranno (§. 257) le

$$A' = 1 , \qquad B' = q' ,$$

$$A'' = q''A' , \qquad B'' = q''B' + 1 ,$$

$$A''' = q'''A'' + A' , \qquad B''' = q'''B'' + B' ,$$

$$A^{IV} = q^{IV}A''' + A'' , \qquad B^{IV} = q^{IV}B''' + B'' ,$$

ecc. . . . ecc. . . .

$$\frac{1}{q'} = \frac{A'}{B'} , \quad \frac{1}{q' + \frac{1}{q''}} = \frac{A''}{B''} , \quad \frac{1}{q' + \frac{1}{q'' + \frac{1}{q'''}}} = \frac{A'''}{B'''} , \text{ ecc. . . ;}$$

ed ancora

$$A^{(n)}B^{(n+1)} - A^{(n+1)}B^{(n)} = \mp 1 \ldots (o_2) .$$

Quindi 1.° i numeri $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ sono primi fra loro ; poichè se avessero un fattor comune f, potrebbero esprimersi a questo modo

$$A^{(n)} = mf \quad , \quad B^{(n)} = m'f ,$$

e perciò

$$mB^{(n+1)} - m'A^{(n+1)} = \mp \frac{1}{f} ;$$

che non può stare.

2.° Abbiamo

$$\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} - \frac{A^{(n+1)}}{B^{(n+1)}} = \mp \frac{1}{B^{(n)}B^{(n+1)}} ;$$

e conseguentemente

$$\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} > \text{ , ovvero } < \frac{A^{(n+1)}}{B^{(n+1)}} ,$$

secondo che sarà n impari o pari. E poichè crescendo n decresce

$$\frac{1}{B^{(n)}B^{(n+1)}} ,$$

facilmente s'intende che delle serie

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A'}{B'} , \dfrac{A'''}{B'''} , \dfrac{A^{v}}{B^{v}} , \ldots \\ \dfrac{A''}{B''} , \dfrac{A^{iv}}{B^{iv}} , \dfrac{A^{vi}}{B^{vi}} , \ldots \end{array}\right\} \quad (o^{v})$$

la prima risulta di termini decrescenti, la seconda di termini crescenti.

3.° Se la frazione $\frac{i}{h}$ sia compresa fra le due

$$\frac{A^{(2m)}}{B^{(2m)}} \quad e \quad \frac{A^{(2m-1)}}{B^{(2m-1)}} ,$$

sarà $h > B^{(2m)}$, e perciò anche $> B^{(2m-1)}$: poichè la (o_2) somministra

$$\frac{A^{(2m-1)}}{B^{(2m-1)}} - \frac{A^{(2m)}}{B^{(2m)}} = \frac{1}{B^{(2m)}B^{(2m-1)}} ; \quad (238)$$

onde

$$\frac{A^{(2m-1)}}{B^{(2m-1)}} - \frac{i}{h} < \frac{1}{B^{(2m)}B^{(2m-1)}} ;$$

e conseguentemente

$$h > B^{(2m)} [hA^{(2m-1)} - iB^{(2m-1)}] :$$

perciò ecc.... Non può dunque fra le

$$\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} , \frac{A^{(n+1)}}{B^{(n+1)}}$$

(238) *Per ottenere questa equazione sostituiscasi nella* (o_2) $2m-1$ *in luogo di* n, *e* $2m$ *in luogo di* $n+1$, *dividasi poscia per* $B^{(2m)}B^{(2m-1)}$, *e si ritenga il segno* + *a motivo di* $2m-1$ *impari* (§. 257).

trovarsi compresa un' altra frazione, salvo che non abbia il denominatore maggiore dei denominatori di quelle.

4.° Nella

$$\frac{A^{(n)} + mA^{(n+1)}}{B^{(n)} + mB^{(n+1)}}$$

facciasi $m = 0$; si avrà $\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$: pongasi $m = q^{(n+2)}$, si otterrà $\frac{A^{(n+2)}}{B^{(n+2)}}$ (239). Che se facciasi

$$m = 1 \ , \ 2 \ , 3 \ , \ \ldots \ q^{(n+2)} - 1 \ ,$$

nasceranno le $q^{(n+2)} - 1$ frazioni

$$\frac{A^{(n)} + A^{(n+1)}}{B^{(n)} + B^{(n+1)}} \ , \ \frac{A^{(n)} + 2A^{(n+1)}}{B^{(n)} + 2B^{(n+1)}} \ , \ \frac{A^{(n)} + 3A^{(n+1)}}{B^{(n)} + 3B^{(n+1)}} \ , \ \ldots$$

$$\ldots \ \frac{A^{(n)} + [q^{(n+2)} - 1]A^{(n+1)}}{B^{(n)} + [q^{(n+2)} - 1]B^{(n+1)}} \ \ldots \ (\text{o}^{\text{VI}}) \ ,$$

delle quali, due contigue, possono rappresentarsi a questo modo

$$\frac{A^{(n)} + (m'-1)A^{(n+1)}}{B^{(n)} + (m'-1)B^{(n+1)}} \ , \ \frac{A^{(n)} + m'A^{(n+1)}}{B^{(n)} + m'B^{(n+1)}} \ .$$

(239) *Infatti dall' equazioni poste in principio di questo paragrafo abbiamo* (§. 260)

$$A^{(n+2)} = q^{(n+2)}A^{(n+1)} + A^{(n)}$$

$$B^{(n+2)} = q^{(n+2)}B^{(n+1)} + B^{(n)} \ ,$$

e quindi

$$\frac{A^{(n+2)}}{B^{(n+2)}} = \frac{q^{(n+2)}A^{(n+1)} + A^{(n)}}{q^{(n+2)}B^{(n+1)} + B^{(n)}} \ ,$$

onde ecc. . . .

Ora poi dalla (o_2) deduciamo

$$\frac{A^{(n)} + (m'-1)A^{(n+1)}}{B^{(n)} + (m'-1)B^{(n+1)}} - \frac{A^{(n)} + m'A^{(n+1)}}{B^{(n)} + m'B^{(n+1)}} =$$

$$= \frac{A^{(n)}B^{(n+1)} - A^{(n+1)}B^{(n)}}{[B^{(n)} + (m'-1)B^{(n+1)}][B^{(n)} + m'B^{(n+1)}]} =$$

$$= \pm \frac{1}{[B^{(n)} + (m'-1)B^{(n+1)}][B^{(n)} + m'B^{(n+1)}]} ;$$

dunque nel caso di n impari, le frazioni (o^{VI}) decresceranno (2.°) da $\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$ ad $\frac{A^{(n+2)}}{B^{(n+2)}}$; nel caso poi di n pari cresceranno da $\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$ ad $\frac{A^{(n+2)}}{B^{(n+2)}}$.

Abbiamo (§. 46)

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{M.\frac{1}{N}} = \frac{1}{q' + \frac{R'}{N}} = \frac{1}{q' + \frac{1}{N.\frac{1}{R'}}}$$

$$= \frac{1}{q' + \frac{1}{q'' + \frac{R''}{R'}}} = q' + \frac{1}{q'' + \frac{1}{R'.\frac{1}{R''}}}$$

$$= \frac{1}{q' + \frac{1}{q'' + \frac{1}{q''' + \frac{R'''}{R''}}}} = \text{ecc. .....}$$

Inoltre (§. 46: 260)

$$R' = M - Nq' = A'M - B'N ,$$

$$R'' = N - R'q'' = N - (A'M - B'N)q'' = -q''A'M + (q''B' + 1)N$$

$$= -A''M + B''N ,$$

$$R''' = R' - R''q''' = A'M - B'N - (-A''M + B''N)q'''$$

$$= (q'''A'' + A')M - (q'''B'' + B')N = A'''M - B'''N ,$$

$$R^{IV} = R'' - R'''q^{IV} = -A''M + B''N - (A'''M - B'''N)q^{IV}$$

$$= -(q^{IV}A''' + A'')M + (q^{IV}B''' + B'')N = -A^{IV}M + B^{IV}N , \text{ ecc.;}$$

generalmente

$$\left.\begin{array}{l} A^{(n)}M - B^{(n)}N = \mp R^{(n)} , \\ \\ \dfrac{A^{(n)}}{B^{(n)}} - \dfrac{N}{M} = \mp \dfrac{R^{(n)}}{B^{(n)}M} ; \end{array}\right\} \text{(o VII)}$$

e perciò

vale il segno superiore se n è impari, l'inferiore se è pari. Quindi

$$\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} > \text{, ovvero } < \frac{N}{M}$$

secondochè sarà n impari o pari: comunque pertanto sia n, la frazione $\frac{N}{M}$ sarà compresa fra le due

$$\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} , \quad \frac{A^{(n+1)}}{R^{(n+1)}} . \quad (240)$$

---

(240) *Infatti se n è impari sarà* $\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} - \frac{N}{M}$ *positivo, e*

E poichè crescendo n si aumenta $B^{(n)}$, e si diminuisce $R^{(n)}$, appare che quanto maggiore si fa n, tanto minore diviene l'intervallo fra

$$\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} \quad \text{ed} \quad \frac{N}{M} :$$

perciò (§. 260 : 2.°) nella prima delle (o^{v}) i termini decrescono verso $\frac{N}{M}$, nella seconda crescono verso la stessa $\frac{N}{M}$.

Esempi.

I.° Sia

$$\frac{N}{M} = \frac{2684}{20929} ;$$

avranno luogo le

$q' = 7$, $R' = 2141$, $q'' = 1$, $R'' = 543$, $q''' = 3$, $R''' = 512$,

$q^{IV} = 1$, $R^{IV} = 31$, $q^{V} = 16$, $R^{V} = 16$, $q^{VI} = 1$, $R^{VI} = 15$,

$q^{VII} = 1$, $R^{VII} = 1$, $q^{VIII} = 15$, $R^{VIII} = 0$;

$\frac{A^{(n+1)}}{B^{(n+1)}} - \frac{N}{M}$ *negativo: accadrà l'inverso ponendo n pari;* *laonde sempre starà* $\frac{N}{M}$ *fra* $\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$ *e* $\frac{A^{(n+1)}}{B^{(n+1)}}$. *Cioè il valore della quantità svolta in frazione continua, sarà compreso fra due frazioni continue consecutive* $\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$ *ed* $\frac{A^{(n+1)}}{B^{(n+1)}}$; *e siccome fra queste* (§. 260 : 3°) *non può esservene un' altra col denominatore minore di quello appartenente ad esse, ne segue che ciascuna delle* $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$, $\frac{A'''}{B'''}$, ... *esprimerà il valore della proposta più accuratamente, di qualunque frazione con un denominatore minore.*

e perciò

$A' = 1$, $B' = 7$, $A'' = 1$, $B'' = 8$, $A''' = 4$, $B''' = 31$,

$A^{IV} = 5$, $B^{IV} = 39$, $A^{V} = 84$, $B^{V} = 655$, $A^{VI} = 89$, $B^{VI} = 694$,

$A^{VII} = 173$, $B^{VII} = 1349$, $A^{VIII} = 2684$, $B^{VIII} = 20929$.

Quindi

$$\frac{2684}{20929} = \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}}}}} ;$$

le due poi (o^{v}) diverranno

$$\frac{1}{7} , \frac{4}{31} , \frac{84}{655} , \frac{173}{1349} ,$$

$$\frac{1}{8} , \frac{5}{39} , \frac{89}{694} , \frac{2684}{20929} .$$

Inoltre; poichè q''', per es., si è trovato $= 3$, perciò (§. 260: 4.°) fra i due termini $\frac{1}{7}$ e $\frac{4}{31}$ della prima serie, si possono introdurre le due frazioni $\frac{2}{15}$ e $\frac{3}{23}$, i denominatori delle quali sono compresi fra i denominatori 7 e 31 ; ma poichè $q^{VI} = 1$, e per conseguenza $q^{VI} - 1 = 0$, perciò fra $\frac{5}{39}$ e $\frac{89}{694}$ niuna frazione potrà introdursi, che abbia il denominatore compreso fra fra i denominatori 39 e 694.

II.° Abbiamo

$$\sqrt{7} = 2 + \theta ;$$

denota θ un numero irrazionale < 1 . Ora se debbasi risolvere θ in frazione continua , si farà

$$\theta = \frac{N}{M} = \frac{\sqrt{7}-2}{1} = \frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2} = \frac{3}{\sqrt{7}+2} .$$

Laonde

$$\frac{M}{N} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} , \quad q' = 1 ;$$

$$\frac{N}{R'} = \frac{3}{\sqrt{7}+2-3} = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{3\sqrt{(7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{7}+1}{2} , \quad q'' = 1 ;$$

$$\frac{R'}{R''} = \frac{2}{\sqrt{7}+1-2} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} , \quad q''' = 1 ;$$

$$\frac{R''}{R'''} = \frac{3}{\sqrt{7}+1-3} = \frac{\sqrt{7}+2}{1} , \quad q^{IV} = 1 ;$$

$$\frac{R'''}{R^{IV}} = \frac{1}{\sqrt{7}+2-4} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} ;$$

il qual rapporto essendo quello stesso di $\frac{M}{N}$, torneranno perciò i quoti già ottenuti 1 , 1 , 1 , 4 , senza che cessi mai tale ritorno. Sarà pertanto

$$\theta = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}}}} ,$$

e le due (ov) daranno

$$1 \;,\; \frac{2}{3} \;,\; \frac{11}{17} \;,\; \ldots$$

$$\frac{1}{2} \;,\; \frac{9}{14} \;,\; \frac{20}{31} \;,\; \ldots$$

262.

L'equazione (§. 261: o^{VII})

$$A^{(n)}M - B^{(n)}N = \mp R^{(n)}$$

manifestamente somministra la seguente

$$A^{(n+1)}M - B^{(n+1)}N = \mp R^{(n+1)} ;$$

dalle quali eliminata prima M, poi N, nasceranno le

$$[A^{(n)}B^{(n+1)} - A^{(n+1)}B^{(n)}]N = \mp A^{(n)}R^{(n+1)} \mp A^{(n+1)}R^{(n)} ,$$

$$[A^{(n)}B^{(n+1)} - A^{(n+1)}B^{(n)}]M = \mp B^{(n)}R^{(n+1)} \mp B^{(n+1)}R^{(n)} ,$$

ovvero (§. 260: o_2) le

$$N = A^{(n)}R^{(n+1)} + A^{(n+1)}R^{(n)} \;,\; M = B^{(n)}R^{(n+1)} + B^{(n+1)}R^{(n)} .$$

Ma basti quanto si è detto fin qui.

FINE DELLA PRIMA PARTE.

ERRATA.

PAG.	LINEE	ERRORI	CORREZIONI
5	4	12.^{ma}	13.^{ma}
6	27	27,700002001	27,700,002,001
30	32	6_{27}	26_{7}
38	13	$PR^{(n-1)}$	$PR^{(n-1)}q^{n}$
43	21	$\frac{1}{171}$	$\frac{2}{171}$
48	1	$\frac{3}{88}$	$\frac{5}{88}$
55	1	$\sqrt{A.B...}$	$\sqrt[n]{A.B...}$
ivi	3	$\sqrt{16} =$	$\sqrt{16} = 4$
56	9	al	il
ivi	15	esprimasi	esprimesi
74	15	$a + h\sqrt{-1}$	$a + b\sqrt{-1}$
96	ultima	ultimo periodo	ultima classe
101	5	$10a$	$10^{3}a$
109	18	$- r^{2}$	$- c^{2}$
175	30	$p_{o}i$	$p_{o}i^{2}$
210	19	$I_{3}x^{n-3}$	$I_{1}x^{n-3}$
236	19	$b' : b''$	b' , b''
241	4	$\sqrt{BB'B''...}$	$\sqrt[n]{BB'B''...}$
263	2	$- l(10)$	$= l(10)$
281	4	$s_{n} =$	$s_{n} -$
294	3	A_{n}	A_{m}
303	2	$\mp u_{n+2}$	$\doteq u_{n+2}$
306	8	$16u_{5}$	$16u_{15}$

IMPRIMATUR

Fr. Dom. Buttaoni Ord. Praed. S. P. A. Magister.

IMPRIMATUR

A. Piatti Archiep. Treb. Vicesgerens.