Mar
Bien
Decem
T. IV

ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA
COSI' PIANA, COME SOLIDA
COLL' AGGIUNTA
DI UN BREVE TRATTATO
DELLE SEZIONI CONICHE
COMPOSTI
PER USO DELLA REGALE ACCADEMIA MILITARE
DA
NICCOLO' DI MARTINO
PRIMARIO PROFESSORE DELLA MEDESIMA.
TOMO II.

IN NAPOLI
NELLA STAMPERIA SIMONIANA
MDCCLXVIII.

LIBRO II.

Della Geometria ſolida.

TErminata la prima parte della Geometria, che diceſi piana, paſſeremo ora all'altra parte, che chiamaſi ſolida per ragion delle figure, intorno a cui ella ſi aggira, che ſono corpi, ovvero ſolidi, terminati per ogni lato da ſuperficie. Queſte figure, a ſimiglianza delle piane, poſſono ridurſi a tre claſſi; poichè di eſſe alcune ſono racchiuſe da ſole ſuperficie piane, altre da ſole ſuperficie curve, ed altre in fine da piane e curve miſchiate inſieme; ma per eſſere quelle della prima claſſe d'indole meno complicata dell'altre, di eſſe tratteremo in primo luogo, per l'intelligenza delle quali giova ſchiarire maggiormente l'indole delle ſuperficie piane, che ſono li loro termini.

2. Ed in vero, ſecondo è ſtato detto altrove, s'intende per ſuperficie piana, o ſia piano quella tale ſuperficie, su di cui può adattarſi da per tutto la

linea retta. Ma da ciò ne ſegue, che ſe ſopra un piano ſia ſituata una retta, e prolunghiſi così il piano, come la retta, non mai il piano poſſa diſgiungerſi dalla retta; poichè, ſe mai da quella ſi ſeparaſſe, non ſarebbe vero, che su di eſſo poſſa da per tutto adattarſi la linea retta; e per la ſteſſa ragione ancora una retta non potrà giacere per una porzione ſopra un piano, e per un' altra porzione fuori di eſſo.

3. Quantunque, poi per determinare la poſizione di una linea retta, baſtino due ſoli punti; nientedimeno ſe ne ha biſogno di tre, che non ſiano ſituati ſopra una ſteſſa retta, per avere quella di un piano; ſiccome in fatti per due punti, o pure, che è lo ſteſſo, per una medeſima retta poſſono condurſi infiniti piani diverſi. E poichè tre punti determinano ancora, così l' angolo contenuto da due rette, come il triangolo racchiuſo da tre; quindi ſi è, che tanto con un' angolo, quanto con un triangolo reſti determinata parimente la poſizione del piano.

4. Or conforme, eſſendo dati tre punti di un piano, che non ſiano in una medeſima retta, dee eſſer dato di poſizione lo ſteſſo piano; così l' unica dimanda, o ſia poſtulato della Geometria ſolida ſi è, di poterſi condurre un pia-

piano, almeno mentalmente, per tre dati punti, che non ſiano a dirittura. E poichè in una medeſima figura ſolida ſi ha biſogno tal volta, di aver preſenti varj piani; quindi ſi è, che per diſtinguergli, e rilevarli ſenza confuſione, deeſi avere buona immaginativa, donde appunto deriva la difficoltà, che taluni incontrano nello ſtudio della Geometria ſolida.

5. Nelle figure ſolide, terminate da ſuperficie piane, incontranſi così rette con piani, come piani con altri piani; onde prima di entrare nella conſiderazione di quelle figure, fa duopo vedere, come poſſa farſi l' incontro, così di una retta con un piano, come di un piano con un' altro piano. E poichè gl' angoli, che ſi ravviſano nelle punte delle ſteſſe figure, ſono differenti dagl' angoli piani, onde ſi è, che chiamanſi angoli ſolidi; ragion vuole, che preventivamente ſi tratti ancora dell' indole, e delle proprietà dell' angolo ſolido.

§. I.

Dell' incontro di una retta con un piano.

6. ATtenta l'indole, così della retta, come del piano, chiaro ſi è, che incontrandoſi una retta con un piano, l'incontro debba farſi in un ſol punto. Lo ſteſſo incontro intanto può avvenire in due maniere; poichè o la retta inſiſte egualmente ſopra tutte le rette, tirate nel piano dal punto dell' incontro, e forma con eſſe angoli retti, e la retta ſi dirà eſſere perpendicolare al piano; o non ritrovaſi queſta uguaglianza nella ſua poſizione per rapporto alle riferite rette, ed al contrario ſi dirà ella eſſere obbliqua relativamente al piano.

Fig. 1. 7. Adunque la retta AB, per ragion di eſempio, ſi dirà eſſere perpendicolare al piano C D E, con cui s' incontra, quante volte ella forma angoli retti con tutte le rette B C, B D, B E, che dal punto dell' incontro B poſſono tirarſi nel medeſimo piano. Dal che ricavanſi due conſeguenze; di cui la prima ſi è, che la ſteſſa A B ſia la più corta di tutte le rette, che dal punto A cadono ſul piano C D E; e l'al-

l'altra, che deſcrivendoſi col punto B come centro, un cerchio qualſivoglia C D E nello ſteſſo piano, ſiano eguali le rette, che tiranſi dal punto A alla circonferenza di queſto cerchio.

8. Per conoſcere intanto, ſe una retta ſia perpendicolare al piano, con cui s' incontra, baſta vedere, ſe ella inſiſta perpendicolarmente ſopra due rette, che tirate nel piano dal punto dell' incontro, formano inſieme un qualche angolo. Potrebbe ciò dedurſi dal rimanere determinata la poſizione del piano per mezzo dell' angolo, che contengono le due rette (3); ma, perchè di una tal verità dovrà ſpeſſo farſi uſo, giova dimoſtrarla con maggior rigore, affinchè non vi reſti dubbio veruno.

9. Cada perciò ſul piano C D E F *Fig.* la retta A B, ed inſiſta perpendicolar- 2. mente ſulle due B C, B D, che tirate nel piano dal punto B, formano inſieme l' angolo CBD. Io dico, che la AB ſia perpendicolare al piano C D E F. Diſtendanſi le due rette B C, B D verſo E, ed F, e faccianſi eguali le quattro B C, B D, B E, B F, coſicchè non ſolo ſiano eguali le altre quattro A C, A D, A E, A F (7), ma ſiano eguali ancora, e parallele le due C D, F E.

10. Quindi, ſe per lo punto B ti-

riſi la GH, che s'incontri colle due CD, FE ne' punti G, ed H; ſaranno perfettamente eguali li due triangoli BGC, BHE; e pertanto ſaranno eguali altresì, così le due BG, BH, come le due CG, EH. Ma, per l'uguaglianza delle quattro AC, AD, AE, AF, ſono perfettamente eguali ancora li due triangoli iſoſceli CAD, EAF. Dunque, facendoſi eguali li due angoli ACD, AEF, ſaranno le due AG, AH parimente eguali.

11. E poichè coll'uguaglianza delle due AG, AH ſi fanno eguali altresì li due angoli ABG, ABH; chiaro ſi è, che la AB inſiſta perpendicolarmente ſulla GH. Onde, potendoſi in una maniera conſimile dimoſtrare, che la ſteſſa AB inſiſta perpendicolarmente ſopra ogn'altra retta, che tiriſi per lo punto B nel piano CDEF, dovrà conchiuderſi, che la AB ſia perpendicolare allo ſteſſo piano (6).

12. Or da ciò poſſono dedurſi varie conſeguenze. La prima ſi è, che ſe una retta inſiſta perpendicolarmente ſopra tre altre rette, queſt'altre tre debbano eſſere in un medeſimo piano. Inſiſta perciò la retta AB perpendicolarmente ſull'altre tre BC, BD, BE. Io dico, che il piano, che paſſa per le due

Fig. 3.

due prime BC, BD, debba paſſare ancora per la rimanente BE.

13. Se ſia poſſibile, il piano delle due BC, BD ſia diverſo dal piano delle due BD, BE; e pongaſi, che BF ſia la retta, che ſegna nel primo piano il terzo, che paſſa per le due AB, BE. Dovendo adunque eſſere la AB perpendicolare tanto al piano delle due BC, BD, come al piano delle due BD, BE (8), ſarà retto così l'angolo ABF, come l'angolo ABE; onde ſarebbe l'angolo maggiore eguale all'angolo minore, il che non può eſſere.

14. La ſeconda conſeguenza ſi è, che ſe ad un piano ſiano perpendicolari due rette, queſte debbono eſſere in un medeſimo piano, e farſi in conſeguenza parallele. Siano perciò le due rette AB, CD perpendicolari al piano BDE. Io dico, che le medeſime debbano eſſere in un' iſteſſo piano, e come tali farſi ancora parallele. *Fig.* 4.

15. Per dimoſtrarlo, congiungaſi la BD, su di cui alziſi nel piano BDE la perpendicolare DE; e tagliata dalla AB la porzione BF eguale alla DE, congiunganſi ancora le tre BE, EF, DF. Eſſendo adunque la AB perpendicolare al piano BDE, ſarà retto così l'angolo ABE, come l'angolo ABD.

Onde, per eſſere li due triangoli BDE, DBF perfettamente eguali, ſaranno eguali le due BE, DF; e pertanto l' angolo EDF, come eguale all' angolo FBE, ſarà retto.

16. Sono retti adunque li due angoli EDB, EDF. Ma, per eſſere la CD perpendicolare al piano BDE, è retto ancora il terzo angolo EDC. Dunque, inſiſtendo la DE perpendicolarmente ſulle tre DB, DF, DC, dovrà eſſere la DC nel piano delle due DB, DF (12). Onde, perchè in queſto ſteſſo piano giace ancora la AB, dovrà conchiuderſi, che le due AB, CD ſiano in un medeſimo piano; le quali dovranno eſſere ancora parallele per la ragione, che li due angoli ABD, CDB inſieme ſono eguali a due retti.

17. La terza conſeguenza ſi è, che ſe due rette ſiano parallele, ed una di eſſe ſia perpendicolare ad un piano, ancora l' altra debba eſſere perpendicolare allo ſteſſo piano. *Fig.* 4. Siano perciò AB, CD due rette parallele, e la prima di eſſe AB ſia perpendicolare al piano BDE. Io dico, che ancora l' altra CD debba eſſere perpendicolare allo ſteſſo piano. Per dimoſtrarlo, facciaſi la ſteſſa conſtruzione della precedente.

18. Eſſendo adunque la AB perpendicolare al piano BDE, ſarà retto

così

così l' angolo A B D , come l' angolo A B E . Onde , conforme per gli due triangoli B D E, D B F, ſi fanno eguali le due B E , D F ; così per gl' altri due triangoli D E F , B E F, ſarà l'angolo E D F eguale all' angolo E B F . Quindi , eſſendo retto , tanto l' angolo E D B , quanto l' angolo E D F , ſarà la D E perpendicolare al piano B D F, in cui giace la C D (8) ; e per tanto , dovendo eſſere retto ancora l' angolo E D C, ſarà la C D perpendicolare ſulle due D E , DB , ed in conſeguenza perpendicolare al piano B D E.

19. La quarta conſeguenza ſi è , che ſe due rette , ſituate in un piano, ſiano parallele ad una terza retta , che giace in un' altro piano , le medeſime debbano eſſere parallele ancora tra di loro. Siano ſituate perciò in un piano *Fig.* le due rette A B , C D , e ciaſcuna di 5. eſſe ſia parallela alla terza retta E F , che ritrovaſi in un' altro piano. Io dico, che le due A B , C D ſiano parallele ancora tra di loro.

20. Prendaſi nella E F un punto G ad arbitrio , da cui alziſi su di eſſa così la perpendicolare G H nel piano delle due A B , E F , come l' altra perpendicolare G I nel piano dell'altre due C D, E F. Sarà dunque la E F perpendicolare al piano del triangolo G H I .

Onde, per eſſere così la AB, come la CD parallela alla EF, ancora le due AB, EF ſaranno perpendicolari al piano dello ſteſſo triangolo (17), e pertanto dovrà eſſere la AB parallela alla CD (14).

21. La quinta, ed ultima conſeguenza ſi è, che ſe in piani diverſi ſiano ſituati due angoli, e li lati di uno di eſſi ſiano paralleli ai lati dell' altro, ciaſcuno a ciaſcuno, li due angoli debbano eſſere tra di loro eguali. Siano perciò li due angoli BAC, EDF, li quali ſituati in piani diverſi abbiano paralleli, così li due lati AB, DE, come gl' altri due AC, DF. Io dico, che ſiano eguali tra di loro li due angoli BAC, EDF.

Fig. 6.

22. Per dimoſtrarlo, faccianſi eguali tutti quattro li lati AB, AC, DE, DF; e congiunganſi le tre rette AD, BE, CF. Eſſendo adunque eguali, e parallele, così le due AB, DE, come le due AC, DF; ſarà alla ſteſſa AD eguale, e parallela parimente, tanto la BE, quanto la CF. Quindi, facendoſi eguali, e parallele le due BE, CF (19), ſaranno eguali ancora le due BC, EF; e per tanto, eſſendo perfettamente eguali li due triangoli ABC, DEF, ſarà l' angolo BAC eguale all' angolo EDF.

23. Poſte tali conſeguenze, potremo ora facilmente tirare la perpendicolare ad un dato piano, così da un punto dato fuori di eſſo, come da un punto dato nello ſteſſo piano. Sia perciò il piano A C B, e debbaſi primieramente dal punto D, dato fuori di eſſo, abbaſſare una perpendicolare al dato piano. Tiriſi nel piano dato la retta A B ad arbitrio, su di cui dal punto D ſi abbaſſi nel piano A B D la perpendicolare D E; indi nel piano dato alziſi ſulla ſteſſa A B la perpendicolare E F; ed io dico, che la perpendicolare D C, abbaſſata nel piano dell' angolo D E F dal punto D ſulla E F, ſia la perpendicolare ricercata. *Fig.* 7.

24. Per dimoſtrarlo, tiriſi per lo punto C nel piano A C B la retta G H parallela alla A B. Eſſendo adunque per conſtruzione retto, così l' angolo A E D, come l' angolo A E C; ſarà la A B perpendicolare al piano del triangolo C D E; e per tanto la G H, come parallela alla A B, ſarà ancora perpendicolare allo ſteſſo piano (17). Onde, eſſendo retto, non ſolo l' angolo D C E, ma eziandio l' angolo D C G, inſiſterà la D C perpendicolarmente ſulle due C E, C G; ed in conſeguenza ſarà perpendicolare al piano ACB (7).

25. Debbaſi in ſecondo luogo dal punto

Fig. 7. punto F dato nel piano A C B innalzare la perpendicolare allo ſteſſo piano. Prendaſi fuori del piano il punto D ad arbitrio, da cui ſi abbaſſi la D C perpendicolare al piano A C B (23). Congiungaſi di poi la C F, e nel piano dell' angolo D C F tiriſi per lo punto F la retta F K parallela alla C D; ed egli è chiaro, che la F K, come parallela alla C D, ſia ſimilmente perpendicolare al piano A C B (17).

26. Notiſi quì intanto, che conforme nella pratica ſi fa uſo della ſquadra per alzare, o abbaſſare da un dato punto la perpendicolare ſopra una retta data; così, ſe due ſquadre uniſcanſi talmente inſieme, che abbiano un lato comune, e gl' altri due diſpoſti in modo, che formino un'angolo qualſivoglia, ſi avrà un' inſtromento proprio per alzare, o abbaſſare da un dato punto la perpendicolare ad un piano dato.

Fig. 8. 27. Inſiſta ora la A B obbliquamente ſul piano C D E; e ſe col punto B, come centro deſcrivaſi nel piano il cerchio D E F, per ragion della ſua obbliquità, chiaro ſi è, che non poſſano eſſere eguali le rette, che tiranſi alla ſua circonferenza dal punto A. Intanto, ſe da queſto punto ſi abbaſſi ſul piano la perpendicolare AC (23), e diſtendaſi la

B C

BC per ſino a che s' incontri colla circonferenza ne' punti D, e G, s' intenderà facilmente, qual' ordine ſerbino tra di loro le riferite rette.

28. In fatti comunque dal punto A tiriſi alla circonferenza del cerchio la retta AE, ſe congiungaſi la CE, il quadrato della AE dovrà eſſere eguale ai quadrati delle due AC, CE. Onde le rette, tirate alla circonferenza del cerchio dal punto A, ſerberanno lo ſteſſo ordine delle rette, che dal punto C cadono ſulla ſteſſa circonferenza; e per tanto AD ſarà la minima di tutte, AG la maſſima, e dell' altre non ſolo la più vicina alla minima ſarà minore della più lontana, ma ciaſcuna di eſſe dovrà averne un' altra eguale dall' altra parte.

29. Da ciò intanto egli è facile il ricavarne, che ſiccome ſono diſuguali gl' angoli, che l' obbliqua AB forma colle rette, tirate nel piano dal punto B; così di eſſi il minimo ſia l' angolo ABD, il maſſimo l' angolo ABG, e degl' altri non ſolo il più vicino al minimo ſia minore del più lontano, ma ciaſcuno di eſſi debba averne un' altro eguale dall'altra parte. Anzi vedeſi altresì, che ſiccome, eſſendo la FK perpendicolare ſulla DG, ſi fanno eguali ed in conſeguenza retti li due angoli ABF,

ABF, ABK; così la AB, non oſtante di eſſere obbliqua al piano, inſiſterà ſulla FK ad angoli retti.

30. Del rimanente l' obbliquità della AB per rapporto al piano CDE miſuraſi per mezzo dell' angolo minimo ABC, che ſi ha con abbaſſare ſul piano la perpendicolare AC: dimodochè di quanti gradi, e minuti è l' angolo ABC, di altrettanti gradi, e minuti diceſi eſſere l' obbliquità della AB relativamente al piano CDE. Onde ſaranno due rette egualmente inclinate ſopra un piano, quante volte ſono eguali gl' angoli minimi, che le due rette formano con quel piano.

§. II.

Dell' incontro di un piano con un' altro piano.

31. ATtenta l' indole delle ſuperficie piane, egli è fuor di ogni dubbio, che l' incontro di un piano con un' altro piano debba farſi in una retta, che chiamaſi perciò comune loro ſezione. Ma, ſiccome può egli farſi in due maniere, cioè, o perpendicolarmente, o obbliquamente; così potrà giudicarſi della ſua indole, per mezzo della perpendicolare, che da un punto preſo

preſo in uno delli due piani ſi abbaſſa ſull'altro piano.

32. In fatti, ſe queſta perpendicolare cada ſulla comune loro ſezione, li due piani ſi diranno incontrarſi tra di loro perpendicolarmente; ma ſe al contrario ella cada fuori della ſezione loro comune, l' incontro delli due piani ſi dirà farſi obbliquamente; e ſi miſurerà la loro obbliquità per mezzo dell' angolo acuto, che contengono le perpendicolari, alzate nelli due piani ſulla comune loro ſezione da uno de' ſuoi punti.

33. Così l' incontro delli due piani ABCD, EBCF ſi dirà farſi perpendicolarmente, ſe la perpendicolare, che da un punto del primo piano ſi abbaſſa ſul ſecondo, cada ſulla retta BC, che è la comune loro ſezione; ma ſe per lo contrario ella cada fuori, l' incontro ſi dirà farſi obbliquamente. E prendendoſi nella BC un punto G ad arbitrio, ſe alzinſi da queſto punto ſulla ſteſſa BC le due perpendicolari GH, GI, cioè la prima GH nel piano ABCD, e la ſeconda GI nell' altro piano EBCF; ſarà l' angolo acuto HGI, contenuto da queſte due perpendicolari, la miſura della loro obbliquità. *Fig.* 9.

34. La ragione poi, perchè miſuraſi col

col riferito angolo l'obbliquità delli due piani ABCD, EBCF dee ripeterſi da ciò, che egli è ſempre lo ſteſſo in tutta l'eſtenſione della retta BC. Ed in fatti, ſe prendaſi in eſſa un' altro punto K, da cui alziſi ſulla medeſima, così la perpendicolare KM nel piano ABCD, come la perpendicolare KN nell' altro piano EBCF; ſaranno parallele, tanto le due KM, GH, quanto le due KN, GI; e per tanto l'angolo MKN ſarà eguale all' angolo HGI (31).

35. Aggiungaſi, che conforme la perpendicolare, alzata ſulla BC in uno dei due piani, inſiſte obbliquamente ſull' altro piano; così la ſua obbliquità miſuraſi ancora per mezzo dello ſteſſo angolo: il che può dedurſi da ciò, che eſſendo retti li due angoli, che forma ciaſcuna delle due GH, GI colla comune ſezione BC; la perpendicolare, che da un punto di una delle due ſi abbaſſa su 'l piano, in cui l' altra ſi ritrova, neceſſariamente dee cadere ſu di queſt' altra (29).

36. Notiſi quì intanto, che ſe formaſi un' angolo conſimile nelli due piani, che incontranſi perpendicolarmente, egli dovrà eſſere retto per la ragione, che la perpendicolare alzata in uno delli due piani ſulla comune loro ſezione, viene

viene ad inſiſtere perpendicolarmente ſull' altro piano ; e quindi ſi è , che l' incontro delli due piani diceſi fatto perpendicolarmente , ovvero ad angoli retti, in quanto che la miſura della ſcambievole loro inclinazione è l' angolo retto.

37. Or attenta la nozione dell' incontro perpendicolare di due piani , chiaro ſi è , che ſe una retta ſia perpendicolare ad un piano , ogn'altro piano , che paſſa per quella retta , debba incontrarſi perpendicolarmente collo ſteſſo piano . Ma ſe al contrario una retta ſia obbliqua ad un piano , non ogni piano , che paſſa per queſt' altra retta , s' incontrerà obbliquamente col medeſimo piano ; dovendogli eſſere perpendicolare il piano dell' angolo minimo , per mezzo di cui miſuraſi l' obbliquità della retta .

38. E da ciò poſſono dedurſi due conſeguenze . La prima ſi è , che ſe ſopra un piano s' incontrino due altri piani , che inſiſtano perpendicolarmente ſul primo piano , la comune ſezione debba eſſere ancora perpendicolare allo ſteſſo piano . L' altra ſi è , che ſe delli due piani , che s'incontrano , uno inſiſta obbliquamente su 'l primo piano , la comune ſezione debba eſſere eziandio obbliqua al medeſimo piano .

39. Del rimanente due piani, che prolungati all' infinito per ogni lato, non mai tra eſſo loro s' incontrano, chiamanſi piani paralleli, ovvero equidiſtanti; e di queſta indole ſono li due piani, su di cui inſiſte perpendicolarmente una ſteſſa retta, per la ragione, che ſe mai queſti due piani s' incontraſſero, ſiccome le due rette, tirate da un punto della comune loro ſezione ai termini della comune loro perpendicolare, debbono giacere su gli ſteſſi piani, così ſi formerebbe con eſſe un triangolo con due angoli retti, il che non può aver luogo.

40. Intorno a i piani paralleli può dimoſtrarſi primieramente, che le rette ſegnate in eſſi da un terzo piano debbano eſſere ancora parallele. La ragione è chiara; poichè giacendo le due rette in piani paralleli, non poſſono mai incontrarſi. Ma, per eſſere le ſteſſe rette comuni ſezioni delli due piani paralleli col terzo piano, ritrovanſi ancora in un medeſimo piano. Dunque, avendo le due condizioni, che richiedonſi per lo paralleliſmo di due rette, dovranno quelle due rette eſſere parallele.

41. Il converſo intanto di queſto teorema non ſempre ha luogo: cioè, che ſegnando un piano in due altri piani

ni due rette parallele, debbano eſſere paralleli ancora queſt' altri due piani; poichè ſe mai due piani s' incontrino, e ſeghinſi ambidue per un terzo piano parallelo alla comune loro ſezione, le rette ſegnate in eſſi da queſto terzo piano, come parallele a quella comune loro ſezione, ſono parallele ancora tra di loro (19); e nientedimeno li due piani, su cui ſono ſegnate, tra eſſo loro s' incontrano.

42. Può dimoſtrarſi in ſecondo luogo, che la retta perpendicolare ad uno delli due piani paralleli, debba eſſere perpendicolare altresì all' altro piano. In fatti, ſe per queſta retta tirinſi piani, che s' incontrino colli due piani paralleli, ciaſcuno di eſſi ſegnerà negli ſteſſi piani rette ancora parallele (40). Ma la retta, che è perpendicolare ad uno dei due piani, forma con quelle ſegnate nel medeſimo piano angoli retti. Dunque ſaranno retti altresì gl' angoli, che forma la ſteſſa retta coll' altre ſegnate nell' altro piano; e per tanto la medeſima retta ſarà perpendicolare ancora a queſt' altro piano.

43. Può dimoſtrarſi in terzo luogo, che due rette parallele, ſituate tra due piani paralleli, debbano eſſere ancora eguali. In fatti, eſſendo parallele le due rette, potrà farſi paſſare per eſſe un terzo

terzo piano. Ma le comuni ſezioni delli due piani paralleli con queſto terzo piano, ſono due altre rette ſimilmente parallele (40). Dunque, eſſendo parallelogrammo il quadrilatero, che formano le quattro rette, ſaranno eguali così le due, ſituate tra li due piani paralleli, come l'altre due, che le congiungono alle ſteſſe parti; ed attenta queſta proprietà, chiaro ſi è, che li piani paralleli ſerbino tra di eſſi da per tutto la ſteſſa diſtanza.

44. Può dimoſtrarſi finalmente, che li piani paralleli ad un terzo piano, ſiano paralleli ancora tra di loro. Prendaſi perciò nel terzo piano un punto, da cui elevaſi su di eſſo una retta perpendicolare, la quale diſtendaſi per ſino a che s'incontri cogl' altri due piani. Volendoſi adunque, che al terzo piano ſia parallelo ciaſcuno delli due, quella ſteſſa retta inſiſterà perpendicolarmente ancora ſopra queſt' altri due piani (42); e per tanto li due piani, come perpendicolari ad una ſteſſa retta, dovranno eſſere paralleli (39).

§. III.

Dell' angolo ſolido, e delle ſue affezioni.

45. GL'angoli, che ritrovanſi nelle punte delle figure ſolide, terminate da ſuperficie piane, a differenza degl'angoli piani, ſi appellano angoli ſolidi. Se adunque da un punto partano più rette, che preſe con ordine a due a due ritrovinſi in piani diverſi; la ſcambievole inclinazione degl' angoli piani, contenuti da queſte rette, ſi dirà eſſere angolo ſolido. Così, ſe dal punto A partano le tre rette AB, AC, AD in modo, che ſiano in un piano le due AB, AC, in un' altro piano le due AC, AD, ed in un terzo piano le due AD, AB; colla ſcambievole inclinazione delli tre angoli piani BAC, CAD, DAB ſi avrà l'angolo ſolido. *Fig.* 10.

46. Quindi l'angolo ſolido, come chiuſo lateralmente da per tutto, dee eſſer contenuto per lo meno da tre angoli piani; ma niente vieta di aumentarne ad arbitrio il numero. Se poi facciaſi in modo, che le baſi degl' angoli piani, che contengono l'angolo ſolido, ſiano in un medeſimo piano; la figura retti-

rettilinea, formata con dette baſi, potrà averſi come baſe dell' angolo ſolido. Onde, ſiccome queſta baſe ſarà un triangolo, eſſendo l' angolo ſolido contenuto da tre angoli piani; così ſarà un quadrilatero, eſſendo contenuto da quattro; un pentagono, eſſendo contenuto da cinque; e così all' infinito.

47. Se ſiano eguali, così gl' angoli piani, che formano l' angolo ſolido, come li lati, che contengono gl' angoli piani; chiaro ſi è, che la baſe dell'angolo ſolido ſia una figura piana regolare. Onde, ſiccome queſta figura dee avere il ſuo centro, che rende eguali tutte le rette tirate da eſſo agl' angoli della figura; così la perpendicolare, abbaſſata dal vertice ſulla baſe regolare dell' angolo ſolido, non ſolo caderà ſul di lei centro, ma formerà ancora angoli eguali colli lati degl' angoli piani, che contengono l' angolo ſolido.

48. Dell' angolo ſolido due ſono le proprietà principali. La prima ſi è, che eſſendo egli contenuto da tre ſoli angoli piani, due di eſſi, uniti inſieme, ſiano maggiori del rimanente, comunque ſi prendano. Potrebbe queſta proprietà dedurſi da ciò, che per eſſere inclinati tra di loro li piani dei due angoli, che prendonſi; queſti diſteſi a dirittura su 'l piano del rimanente angolo

golo, debbano occupare ſpazio, maggiore di quello racchiuſo nel rimanente angolo; ma per dimoſtrarla con rigore geometrico, ſiano B A C, C A D, D A B li tre angoli piani, che contengono l' angolo ſolido, e ſia l' angolo B A C maggiore di ciaſcuno degl' altri due. *Fig.* 11.

49. Eſſendo adunque l'angolo BAC maggiore di ciaſcuno delli due C A D, B A D, facciaſi nel ſuo piano l' angolo B A E eguale ad uno di eſſi, come all' angolo B A D; e tirata nello ſteſſo piano una retta, come B E C, che s' incontri colle tre A B, A E, A C ne' punti B, E, C, facciaſi la A D eguale alla A E, e congiunganſi l'altre due B D, C D. Poichè dunque ſono eguali così li due angoli B A D, B A E, come li loro lati; ſaranno le baſi di eſſi B D, B E parimente eguali. Ma le due B D, C D inſieme ſono maggiori della B C. Dunque, dovendo eſſere la C D maggiore della C E, ſarà l' angolo C A D maggiore ancora dell' angolo CAE; e pertanto li due angoli BAD, C A D inſieme eziandio ſaranno maggiori del rimanente angolo B A C.

50. L' altra proprietà ſi è, che qualunque ſia il numero degl' angoli piani, che contengono l' angolo ſolido, la ſomma di eſſi ſia ſempre minore di quat-

tro retti, ed in conſeguenza di 360 gradi. Potrebbe dedurſi eziandio queſt' altra proprietà da ciò, che volendoſi appianare l' angolo ſolido, e diſtendere ſopra un medeſimo piano tutti gl' angoli piani, che lo contengono; queſti non poſſono riempire l' intero ſpazio, che ritrovaſi in un piano intorno ad un punto, e che viene occupato da angoli piani, la di cui ſomma è eguale a quattro retti; ma ſarà ben fatto, di dimoſtrarla parimente con rigore geometrico, ed ecco come.

Fig. 10. 51. Sia primieramente l' angolo ſolido contenuto dalli tre angoli piani BAC, CAD, DAB, e baſe di eſſo ne ſia il triangolo BCD. Conforme adunqae li tre angoli di queſto triangolo ſono inſieme eguali a due retti, così li nove degl' altri tre triangoli ABC, ACD, ADB ſaranno inſieme eguali a ſei retti. Ma di queſti nove li ſei, che ſono ſulla baſe inſieme colli tre della ſteſſa baſe, formano tre angoli ſolidi. Dunque, attenta la prima proprietà (48), quelli ſei inſieme ſaranno maggiori delli tre della baſe, cioè di due retti; e per tanto li tre rimanenti, che formano l' angolo ſolido, di cui ſi tratta, ſaranno minori di quattro retti.

52. Sia di poi l' angolo ſolido contenuto

tenuto dalli quattro angoli piani BAC, CAD, DAE, EAB, e baſe di eſſo ne ſia il quadrilatero BCDE. Siccome adunque gl' angoli di queſto quadrilatero ſono eguali a quattro retti, così li dodici delli quattro triangoli ABC, ACD, ADE, AEB ſaranno inſieme eguali a otto retti. Ma di queſti dodici gli otto, che ſono ſulla baſe, inſieme colli quattro della ſteſſa baſe, formano quattro angoli ſolidi. Dunque, attenta la prima proprietà (48), quegli otto inſieme ſaranno maggiori delli quattro della baſe, cioè di quattro retti; e per tanto li quattro rimanenti, che formano il propoſto angolo ſolido, ſaranno minori di quattro retti. *Fig.* 16.

53. Or queſta ſeconda proprietà dell' angolo ſolido ci apprende, che volendoſi formare l' angolo ſolido con angoli piani di figure regolari della ſteſſa ſpecie, potrà farſi uſo ſoltanto di quelli del triangolo equilatero, del quadrato, e del pentagono regolare. In fatti nell' eſagono regolare ogn' angolo è di 120 gradi; onde tre angoli di tre eſagoni regolari, per eſſere inſieme di 360 gradi, non potranno formare l' angolo ſolido; e per la ſteſſa ragione molto meno potrà egli formarſi con tre angoli di altre figure regolari, ſuperiori all'eſagono.

54. Vedesi intanto, che l' angolo solido in una sola maniera può esser formato, così con angoli de' quadrati, come con angoli de' pentagoni regolari, cioè con impiegare nella formazione di esso tre soli delli riferiti angoli. In fatti, essendo l' angolo del quadrato di gradi 90, tre di essi non giungono, se non che a 270 gradi, ma quattro uniti insieme ascendono a 360 gradi. E così ancora, essendo l' angolo del pentagono regolare di gradi 108, tre di essi danno la somma di 324 gradi, ma quattro uniti insieme giungono a 432 gradi.

55. Con angoli tutta volta de' triangoli equilateri può formarsi l' angolo solido in tre maniere, cioè con tre, con quattro, e con cinque di essi. In fatti, essendo l' angolo del triangolo equilatero di gradi 60, sarà la somma di tre di gradi 180, la somma di quattro di gradi 240, e la somma di cinque di gradi 300. Con sei poi, già si giunge alla somma di 360 gradi: onde con essi non potrà formarsi l' angolo solido; e secondo si vedrà a suo luogo, appunto da ciò deriva, che siano cinque, e non più le figure solide regolari.

§. IV.

§. IV.

Della nozione del parallelepipedo, e delle ſue varie ſpecie.

56. PRemeſſo tutto ciò, che ſi richiede per l'intelligenza delle figure ſolide, terminate da ſuperficie piane, paſſeremo ora a trattare di eſſe, tra le quali la prima ſi è il parallelepidedo. Chiamaſi con queſto nome la figura ſolida, racchiuſa da ſei piani, li di cui oppoſti ſono paralleli. Onde, eſſendoſi dimoſtrato, che le comuni ſezioni di due piani paralleli con un terzo piano ſiano rette parallele (40); chiaro ſi è, che non ſolo ſia parallelogrammo ciaſcuna delle facce del parallelepipedo, ma le facce oppoſte ſiano altresì due parallelogrammi perfettamente eguali.

57. Eſſendo eguali nel parallelepipedo li parallelogrammi oppoſti, baſta conſiderarne tre, contigui tra eſſo loro, che colli loro angoli, ſimilmente contigui, formano uno degl'angoli ſolidi del parallelepipedo. E poichè, per la ſituazione di queſti tre parallelogrammi, l'uno coll'altro ritrovaſi avere un lato comune; perciò incontranſi ne' medeſimi tre ſoli lati differenti, che corri-

ſpondono alle tre dimenſioni del parallelepido.

58. Intanto la forma, o ſia figura del parallelepipedo dipende, non ſolo dalli tre riferiti lati, ma ancora dagl'angoli, contenuti dagli ſteſſi lati; e perciò, conforme rimane determinato il parallelepipedo, quante volte ſono dati, tanto li lati, quanto gl' angoli; così due parallelepipedi ſaranno perfettamente eguali, ſempre quando li lati, e gl' angoli di uno di eſſi ſono eguali ai lati, e agl' angoli dell' altro, ciaſcuno a ciaſcuno.

59. Conforme poi due parallelepipedi diconſi eſſere equiangoli, qualora gl'angoli, contenuti dalli tre lati di uno di eſſi, ſono eguali agl'angoli, contenuti dalli tre lati dell' altro, ciaſcuno a ciaſcuno; così ſi diranno eſſere ſimili, quante volte li lati intorno agl' angoli eguali ſono ancora proporzionali. Dal che ne ſegue, che ſiccome li parallelepipedi equiangoli ſono terminati da parallelogrammi eziandio equiangoli, così li parallelepipedi ſimili ſiano terminati da parallelogrammi parimente ſimili.

60. Il parallelepipedo può eſſere, o rettangolo, o obbliquangolo. Chiamaſi rettangolo, quando tutti tre li parallelogrammi, tra eſſo loro contigui, ſono rettangoli. Chiamaſi all' incontro ob-

obbliquangolo, quando o tutti tre li parallelogrammi, o pure uno o due di eſſi ſono obbliquangoli; onde il parallelepipedo obbliquangolo, per ragion de' ſuoi parallelogrammi, può eſſere di tre ſpecie; ſiccome in effetto, lo diremo della prima ſpecie, ſe ſoltanto uno de' ſuoi parallelogrammi ſia obbliquangolo; lo diremo della ſeconda, ſe ſiano due; e lo diremo finalmente della terza, ſe tutti tre ſiano parallelogrammi obbliquangoli.

61. Al parallelepipedo rettangolo può darſi con iſpecialità il nome di ſolido; e per eſſere in eſſo retti tutti tre gl' angoli, chiaro ſi è, che rimane egli determinato, con eſſer dati tutti tre li lati, da cui ſi dirà eſſer fatto, ovvero contenuto. Ma, ſe due delli lati ſiano eguali, lo diremo fatto dal quadrato di uno di eſſi nel lato rimanente. Ed in fine, ſe ſiano eguali tutti tre li lati, egli chiamaſi ſpecialmente cubo, e diceſi fatto da uno delli tre lati eguali.

62. Qualunque ſia la forma del parallelepipedo, diſtingueſi in eſſo così la baſe, come l'altezza, con queſto divario bensì, che ſebbene poſſa prenderſi per baſe qualſiſia de' ſuoi parallelogrammi, nientedimeno l'altezza dee eſſere la perpendicolare, che ſi abbaſſa ſulla baſe da uno de' punti del parallelogrammo

opposto. Onde, se mai siano rettangoli li due parallelogrammi, contigui alla base, il lato loro comune, come perpendicolare al piano della base, sarà l'altezza del parallelepipedo.

63. Se un parallelepipedo seghisi per un piano parallelo alla sua base, non v'ha dubbio, che le sezioni fatte nelli quattro parallelogrammi, che lateralmente lo cingono, siano rette eguali, e parallele ai corrispondenti lati della base (40). Onde, siccome la sezione fatta nel parallelepipedo dee essere un parallelogrammo simile, ed eguale alla stessa base; così le due porzioni, in cui rimane diviso il parallelepipedo, saranno due altri parallelepipedi, equiangoli tanto tra di loro, come coll'intero parallelepido.

64. Se poi, tirata nella base del parallelepipedo una diagonale, se ne tiri un'altra colla stessa direzione nel parallelogrammo opposto; chiaro si è, che queste due diagonali siano tra di loro eguali, e parallele. Onde, se per esse facciasi passare un piano, la sezione fatta nel parallelepipedo sarà similmente parallelogrammo, ma differente da quello della base; e potrà darsi ad esso il nome di parallelogrammo diagonale, in quantochè diagonalmente divide il parallelepipedo.

65.

65. Intanto, ſe vogliaſi attentamente riflettere, ſi vedrà, che le due porzioni, in cui rimane diviſo il parallelepipedo dal ſuo parallelogrammo diagonale, ſiano terminate da figure piane perfettamente eguali, e diſpoſte in amendue col medeſimo ordine; onde non è da porſi in dubbio, che le ſteſſe due porzioni ſiano eziandio perfettamente eguali: dimodochè il parallelogrammo diagonale fa nel parallelepipedo quello ſteſſo, che fa nel parallelogrammo la ſua diagonale.

66. Le due porzioni, in cui rimane diviſo il parallelepipedo dal ſuo parallelogrammo diagonale, ſecondo ſi dirà in appreſſo, chiamanſi priſmi triangolari; e per mezzo di eſſi qualſiſia parallelepipedo obbliquangolo potrà ridurſi ad un' altro rettangolo, ſenza aumentare, o diminuire la ſua baſe, e la ſua altezza. Sia perciò D B G un parallelepipedo obbliquangolo della prima ſpecie, di cui baſe ne ſia il parallelogrammo obbliquangolo A C. Si abbaſſino ſulli lati B C, A D le perpendicolari A E, C F, da cui alzinſi due piani perpendicolari alla ſteſſa baſe. *Fig.* 13.

67. Or egli è chiaro, che le due porzioni riſecate dal parallelepipedo per queſti piani, e corriſpondenti ai due triangoli C D F, A B E, ſiano due priſ-

priſmi triangolari perfettamente eguali. Onde, ſe il primo di eſſi tolgaſi mentalmente dal ſuo luogo, e colla ſteſſa ſituazione pongaſi a lato del ſecondo, ſi avrà un parallelepipedo rettangolo di egual baſe, e di eguale altezza coll' obbliquangolo propoſto.

68. Se poi il parallelepipedo obbliquangolo ſia della ſeconda ſpecie, in una maniera conſimile primieramente ſi ridurrà ad un' altro della prima, ed indi a parallelepipedo rettangolo. E così parimente, ſe egli ſia della terza ſpecie, primieramente ſi ridurrà ad uno della ſeconda, indi ad un'altro della prima, e finalmente a parallelepipedo rettangolo; colle quali riduzioni nè la baſe, nè l' altezza riceveranno aumento, o diminuzione alcuna.

§. V.

Della miſura di qualſiſia parallelepipedo.

69. COnforme miſuranſi le rette per mezzo di una data retta, e le figure piane per mezzo del quadrato, deſcritto ſopra quella retta; così miſuraſi la ſolidità di qualſiſia figura ſolida per mezzo del cubo, fatto dalla ſteſſa retta. Onde, volendoci avvalere del noſtro

noſtro palmo per la miſura delle rette, biſognerà, che ſi miſurino le figure ſolide col cubo, fatto dallo ſteſſo palmo, a cui perciò potrà darſi il nome di palmo cubico.

70. Quindi, a ſimiglianza del palmo quadrato, dovrà dividerſi il palmo cubico in once cubiche, minuti cubici, e linee cubiche; ma, per intendere quale ne debba eſſere il numero, giova riflettere, che qualunque ſia il numero delle parti eguali, in cui divideſi una data retta, il cubo fatto da eſſa dovrà contenere tanti piccioli cubi, fatti da quelle ſteſſe parti, quanti ne addita il prodotto, che ſi ha, con moltiplicare quel numero due volte per se ſteſſo.

71. In fatti, ſe la retta A B ſia diviſa in quattro parti eguali, e gl'altri due lati B C, B G del cubo, fatto da eſſa, dividanſi ſimilmente nello ſteſſo numero di parti eguali; vedeſi chiaramente, che tirati per gli punti di tutte tre le diviſioni piani paralleli alle facce oppoſte, reſti diviſo il cubo per mezzo di queſti piani in 64 piccioli cubi, fatti da quelle parti, che ſono in conſeguenza tanti di numero, quanti ne addita il prodotto, che ſi ha, con moltiplicare due volte per se ſteſſo il numero 4. *Fig.* 14.

72. Dividendoſi adunque il noſtro pal-

palmo in 12 once, dovranno contenerſi nel palmo cubico 1728 once cubiche. Similmente, dividendoſi ciaſcun' oncia in 12 minuti, dovranno contenerſi nell' oncia cubica 1728 minuti cubici. E così ancora, dividendoſi ciaſcun minuto in 10 linee, dovranno contenerſi nel minuto cubico 1000 linee cubiche.

73. Quindi, per avere li palmi cubici, che contengonſi in un dato numero di once cubiche, dovrà dividerſi queſto dato numero per 1728; e la ſteſſa diviſione dovrà farſi, ſe da un dato numero di minuti cubici debbonſi dedurre l'once cubiche, che in eſſo contengonſi; ma ſe da un dato numero di linee cubiche debbonſi ritrarre li minuti cubici, contenuti in quel dato numero, dovrà egli dividerſi per 1000.

74. Or per venire alla miſura de' parallelepipedi, ſi vuol fare quì lo ſteſſo avvertimento, che fu fatto nella miſura delle figure piane, cioè, che moltiplicare una retta una, o due volte per se ſteſſa, altro non vuol dire, ſe non che moltiplicare una, o due volte per se ſteſſo il numero de' palmi, once, minuti, e linee, che contengonſi in quella retta; e lo ſteſſo dee intenderſi, qualora preſcriveſi, di moltiplicare una retta per una, o due altre rette.

75. Adunque, per incominciare dalli paral-

parallelepipedi rettangoli, ſia D B G il parallelepipedo rettangolo, che deeſi miſurare; e ſe egli ſia cubo, coſicchè tutti tre li lati A B, B C, B G ſiano eguali, per quel tanto è ſtato detto poc'anzi (70), ſi avrà la ſua ſolidità, con moltiplicare uno delli tre lati, come A B, due volte per se ſteſſo. Onde, ſe il lato A B ſia di 4 palmi, la ſolidità del cubo ſarà di 64 palmi cubici. *Fig.* 14.

76. Se poi nel propoſto parallelepipedo ſiano eguali li ſoli due lati A B, B C, ſi avrà la ſua ſolidità, primieramente con moltiplicare uno delli due, come A B, una ſua volta per se ſteſſo, ed indi con moltiplicare il prodotto di nuovo per lo terzo lato diſuguale B G. Onde, ſe il lato A B ſia di 4 palmi, e l'altro B G di 3, la ſolidità del parallelepipedo ſarà di 48 palmi cubici; e per intenderne la ragione, baſta fare quello ſteſſo, che ſi è fatto nel cubo. *Fig.* 15.

77. Finalmente, ſe nel propoſto parallelepipedo ſiano diſuguali tutti tre li lati A B, B C, B G, ſi avrà la ſua ſolidità, con moltiplicarli tutti tre inſieme. Onde, ſe il lato A B ſia di 4 palmi, il lato B C di 3, ed il lato B G di 2, la ſolidità del parallelepipedo ſarà di 24 palmi cubici; il che potrà dimoſtrarſi parimente nello ſteſſo *Fig.* 16.

modo,

modo, che si è fatto nel cubo.

Fig. 16. 78. Si vuol però quì notare, che la terza regola data per lo parallelepipedo rettangolo, in cui sono disuguali tutti tre li lati AB, BC, BG, racchiude sotto di se l'altre due; ed in in fatti nel primo parallelepipedo rettangolo moltiplicasi uno delli lati due volte per se stesso, per essere eguali tutti tre li lati; come ancora nel secondo parallelepipedo rettangolo moltiplicasi uno delli due lati eguali una sola volta per se stesso, per l' uguaglianza degli stessi lati.

79. Quindi la regola generale, per avere la solidita di qualsisia parallelepipedo rettangolo, si è, di moltiplicare insieme tutti tre li lati AB, BC, BG. E poichè colla moltiplicazione delli due AB, BC si ha la base AC del parallelepido, per rapporto a cui l' altezza è il lato rimanente BG; chiaro si è, che la stessa regola possa enunciarsi ancora in quest' altro modo, cioè, che si abbia la solidità di qualsisia parallelepipedo rettangolo, con moltiplicare la sua base per la sua altezza.

80. Ed essendo così, dovrà aver luogo la stessa regola, eziandio nella misura delli parallelepipedi obbliquangoli, per essersi dimostrato, che qualsisia parallelepipedo obbliquangolo possa ridursi

ad

ad un' altro rettangolo, ſenza aumentare, o diminuire la ſua baſe, e la ſua altezza (67, 68); ma ſe mai nel parallelepipedo obbliquangolo, uno delli tre parallelogrammi ſia rettangolo, tornerà conto, di prendere queſto parallelogrammo per baſe del parallelepipedo.

81. Del rimanente non ſarà inutile, di fare quì due avvertimenti. Il primo ſi è, che ſe nelle rette, che debbonſi moltiplicare tra di loro, contenganſi palmi inſieme con once, ſi agevolerà la moltiplicazione, con ridurre ad once eziandio li palmi; e lo ſteſſo potrà farſi, ſe nelle rette, da moltiplicarſi inſieme, contenganſi palmi, once, e minuti; o pure palmi, once, minuti, e linee.

82. L'altro avvertimento ſi è, che ſe il calcolo facciaſi con rotti decimali, ſi ridurrà il rotto a linee cubiche, con moltiplicare il ſuo numeratore per lo cubo di 1440, e con dividere il prodotto per lo ſuo denominatore; ma ſe in appreſſo dal numero delle linee cubiche debbanſi dedurre li minuti cubici, baſterà dividere il loro numero per lo cubo di 144; ed una conſimile diviſione dovrà farſi, ſe dal numero delli minuti cubici debbanſi ricavare l' once cubiche.

§. VI.

§. VI.

Delle conſeguenze, che ricavanſi dalla miſura de' parallelepipedi.

83. DAlla miſura ſteſſa de' parallelepipedi ricaveremo ora li teoremi, che ſogliono dimoſtrarſi intorno ad eſſi; e queſto ſteſſo metodo, come più facile, ſarà oſſervato ancora da noi nell' altre figure ſolide. Poichè dunque la ſolidità di qualſiſia parallelepipedo ſi ha, con moltiplicare la ſua baſe per la ſua altezza; chiaro ſi è, che due parallelepipedi debbano eſſere in ragion compoſta delle baſi, e dell' altezze. Onde, ſiccome ſono nella ſemplice ragione delle baſi, eſſendo eguali l' altezze; così al contrario ſaranno nella ſemplice ragione dell' altezze, eſſendo eguali le baſi.

84. Se poi ſiano eguali, così le baſi, come l' altezze, ancora li due parallelepipedi dovranno eſſere eguali; onde ſi è, che li parallelepipedi ſituati ſopra una medeſima, o eguali baſi, e tra gli ſteſſi piani paralleli, ſiano tra di loro eguali. Ma poſſono due parallelepipedi eſſere eguali, ancorchè le loro baſi, e le loro altezze ſiano diſuguali; il che avviene, quante volte le baſi ſono nella

la reciproca ragione dell' altezze.

85. Dallo ſteſſo teorema generale, che due parallelepipedi ſiano in ragion compoſta delle baſi, e dell' altezze, poſſono dedurſi altresì li converſi delli tre teoremi ſpeciali, e ſono I, che eſſendo due parallelepipedi nella ſola ragione delle baſi, l' altezze ſiano eguali; II, che eſſendo al contrario nella ſola ragione dell' altezze, le baſi ſiano eguali; e III finalmente, che eſſendo eguali due parallelepipedi, le baſi ſiano nella reciproca ragione dell' altezze.

86. Ma da ciò, che li parallelepipedi ſono in ragion compoſta delle baſi, e dell' altezze, ne ſegue inoltre, che li parallelepipedi equiangoli ſiano altresì in ragion compoſta delli lati, che ſono intorno agl' angoli eguali; poichè, ſiccome prendendoſi per baſi di eſſi due parallelogrammi equiangoli, ſono queſte baſi in ragion compoſta delli lati, che le contengono; così, per eſſere li rimanenti lati egualmente inclinati ſulle ſteſſe baſi, li medeſimi ſaranno coll' altezze nella ſteſſa ragione.

87. E da ciò può dedurſi finalmente, che li parallelepipedi ſimili ſiano nella triplicata ragione delli loro lati omologi; poichè, conſiderati ſoltanto come parallelepipedi equiangoli, debbo-

no

no eſſere in ragion compoſta delli lati, che ſono intorno agl' angoli eguali (86). Ma, attenta la loro ſimiglianza, ſono eguali le ragioni di queſti lati. Dunque, per eſſere la loro ragione compoſta da tre ragioni eguali, ſaranno li medeſimi nella triplicata ragione di ciaſcuna delle tre ragioni componenti.

88. Da quel tanto poi ſi richiede, per l' uguaglianza di due parallelepipedi, poſſono ritrarſi due conſeguenze. La prima ſi è, che ſe tre rette, come A, B, C, ſiano continuamente proporzionali, il ſolido o ſia parallelepipedo rettangolo fatto da eſſe ſia eguale al cubo di quella di mezzo. Prendaſi perciò, come baſe del ſolido, il rettangolo delle due A, e C: e per la proprietà delle tre rette continuamente proporzionali, la baſe del ſolido, e la baſe del cubo ſaranno eguali. Ma ſono eguali ancora le loro altezze, per eſſere ciaſcuna di eſſe eguale a B. Dunque il ſolido, ed il cubo ſaranno parimente eguali (84).

89. L' altra conſeguenza ſi è, che ſe quattro rette, come A, B, C, D, ſiano continuamente proporzionali, il ſolido fatto dal quadrato della prima A nella quarta D ſia eguale al cubo della ſeconda B. Prendaſi perciò, come baſe del ſolido, il quadrato della prima A; e la baſe del ſolido ſarà alla baſe

ſe del cubo nella duplicata ragione di A a B. Ma in queſta ſteſſa duplicata ragione ſono ancora le due A, e C, o pure le due B, e D, che ſono l'altezze del cubo, e del ſolido. Dunque, eſſendo le baſi nella reciproca ragione dell' altezze, il ſolido ed il cubo ſaranno tra di loro eguali (84).

90. Da queſta ſeconda conſeguenza ricavaſi, come poſſa ridurſi a cubo qualſiſia dato parallelepipedo, cioè primieramente con formare un quadrato, che ſia eguale alla baſe del parallelepipedo dato, ed indi con ritrovare due mezze proporzionali tra il lato di queſto quadrato, e l'altezza dello ſteſſo parallelepipedo; poichè il cubo della prima delle due mezze ſarà il cubo ricercato. Ma il problema di ritrovare due mezze proporzionali tra due rette date, è del numero di coloro, che gl' antichi Geometri chiamavano problemi ſolidi; onde non può egli riſolverſi, con far uſo della linea retta, e della linea circolare.

91. Con conſtruzione intanto meccanica poſſono ritrovarſi due mezze proporzionali tra due rette date nel ſeguente modo. Siano A B, A C le due rette date, le quali diſpongaſi talmente, che l'angolo BAC, da eſſe contenuto, ſia retto. Prendanſi di poi due *Fig.* 17.

ſqua-

ſquadre, come DEF, GHI, a cui diaſi poſizione tale, che paſſando li due lati di eſſe DE, GH per gli punti B, e C, e combaciandoſi inſieme gl' altri due lati EF, HI, vadano prolungate la AB al vertice H, e la AC al vertice E. Io dico, che l' altre due AE, AH ſiano le due mezze proporzionali ricercate.

92. La ragione è chiara. Imperocchè, eſſendo il triangolo BEH rettangolo in E, ed eſſendo la AE perpendicolare ſull' ipotenuſa BH, ſarà AB ad AE, come AE ad AH. Ma, per eſſere l' altro triangolo CHE ſimilmente rettangolo in H, e per eſſere la AH eziandio perpendicolare ſulla ſua ipotenuſa CE, AE ſta ad AH, come AH ad AC. Dunque, eſſendo le quattro rette AB, AE, AH, AC continuamente proporzionali, ſaranno le due AE, AH mezze proporzionali tra le due rette date AB, AC.

Fig. 18. 93. In un' altra maniera molto più facile poſſono ritrovarſi, ancora meccanicamente, due mezze proporzionali tra le due rette date AB, AC, ed ecco come. Compiſcaſi il rettangolo BACD, in cui tirinſi le due diagonali AD, BC, che s'interſeghino nel punto E. Aggiriſi di poi intorno al punto D la riga FG, e ritroviſi per eſſa poſizione tale,

tale, che incontrandoſi colle due AB, AC prolungate ne' punti F, e G, ſiano eguali le due EF, EG. E per quanto è ſtato altrove dimoſtrato, facendoſi le quattro AB, CG, BF, AC continuamente proporzionali, ſaranno CG, BF le due mezze proporzionali ricercate.

94. Del rimanente la ſteſſa ſeconda conſeguenza ci apprende, come debbanſi ritrovare due numeri, che ſiano mezzi proporzionali tra due altri numeri dati, cioè, con moltiplicare il quadrato del primo delli due dati numeri per l'altro, e con eſtrarre dal prodotto la radice cubica. In fatti, ſe li due numeri dati ſiano 2, e 16, ſarà 4 il quadrato del primo 2, che moltiplicato per l' altro 16 darà 64 per prodotto. Onde, eſſendo 4 la radice cubica di 64, ſarà 4 il primo delli due, che ſi cercano; e facendo colla regola aurea in appreſſo come 2 a 4, così 4 ad un' altro, ſarà 8 l' altro numero ricercato; ed egli è chiaro, che 2 ſia a 4, come 4 a 8, e 4 ſia a 8, come 8 a 16.

§. VII.

Continuazione dello ſteſſo argomento.

95. COl problema delle due mezze proporzionali ſi può riſolvere l' altro della duplicazione del cubo, così celebre preſſo gl' Antichi, cioè di ritrovare un cubo, che ſia doppio di un'altro cubo dato; ma per renderlo più generale, debbaſi ritrovare un cubo, a cui un' altro cubo dato ſia in data ragione. Sia perciò A il lato del dato cubo, e la data ragione ſia di E ad F. Facciaſi primieramente, che A ſia a D, come E ad F; indi tra le due A, e D ritrovinſi due mezze proporzionali, che ſiano B, e C; ed io dico, che il cubo della prima di eſſe B ſia il cubo ricercato.

96. La ragione è chiara. Imperocchè, eſſendo li cubi parallelepipedi ſimili, ſarà il cubo di A al cubo di B nella triplicata ragione di A a B (87). Ma per eſſere le quattro rette A, B, C, D continuamente proporzionali, la primo A alla quarta D ſta ancora in quella ſteſſa triplicata ragione. Dunque il cubo di A ſarà al cubo di B, come A a D; e per tanto, eſſendo per conſtruzione A a D nella ragione di E ad F, an-

ancora quelli due cubi ſaranno nella ſteſſa ragione.

97. Colle due mezze proporzionali ſi può riſolvere altresì il problema, di ritrovare un cubo, che ſia eguale alla ſomma di due altri cubi dati. Siano perciò A, e B li lati delli due dati cubi. Facciaſi primieramente, che A ſia a B, come B a C, e che B ſia a C, come C a D; indi tra A, e la ſomma delle due A, e D ritrovinſi due mezze proporzionali, che ſiano E, ed F; ed io dico, che il cubo della prima di eſſe E ſia eguale alla ſomma delli due cubi dati.

98. La ragione ſimilmente è chiara. Imperocchè, eſſendo le due E, ed F mezze proporzionali tra A, e la ſomma delle due A, e D, ſarà il cubo di E eguale al ſolido del quadrato di A nella ſomma delle due A, e D (89), o pure al cubo di A, ed al ſolido del quadrato di A in D. Ma, per eſſere le quattro rette A, B, C, D continuamente proporzionali, il ſolido del quadrato di A in D è eguale al cubo di B. Dunque il cubo di E ſarà eguale alla ſomma delli due cubi dati, uno di A, e l'altro di B.

99. In una maniera conſimile ſi potrà riſolvere ancora il problema di ritrovare un cubo, che ſia eguale alla diffe-

differenza di due altri cubi dati. Siano perciò A, e B li lati delli due dati cubi, e sia A il lato del maggiore, e B il lato del minore. Facciasi primieramente, che A sia a B, come B a C, e che B sia a C, come C a D. Ritrovinsi di poi due mezze proporzionali tra A, e la differenza delle due A, e D, le quali siano E, ed F; e con dimostrazione non diversa dalla precedente si farà vedere, che il cubo della prima di esse E sia eguale alla differenza delli due cubi dati.

100. Intorno ai parallelepipedi rettangoli possono formarsi teoremi consimili a quelli, dimostrati intorno ai rettangoli, e li quadrati, di cui basterà farne vedere la verità con numeri. Ed in primo luogo, se si abbiano tre rette, di cui due siano indivise, e la terza divisa in parti; sarà il solido di quelle tre rette eguale ai solidi delle due indivise nelle parti della divisa. Così, se le tre rette siano 4, 6, 10, e la terza di esse 10 sia divisa nelle parti 3, e 7, il loro solido sarà 240. Onde, essendo 72, e 168 gli altri due, fatti dalle due indivise nelle parti della divisa, chiaro si è, che 240 sia eguale a 72, e 168 uniti insieme.

101. In secondo luogo, se si abbiano due rette, una indivisa, e l' altra divi-

diviſa in parti; ſarà il ſolido del quadrato dell' indiviſa nell' altra diviſa eguale ai ſolidi, fatti dallo ſteſſo quadrato dell' indiviſa nelle parti della diviſa. Così, ſe le due rette ſiano 6, e 10, e la ſeconda 10 ſia diviſa nelle parti 3, e 7; ſarà 360 il ſolido, fatto dal quadrato dell' indiviſa 6 nell' altra diviſa 10. Onde, eſſendo 108, e 252 gl' altri due, fatti dal quadrato della ſteſſa indiviſa 6 nelle parti 3, e 7 della diviſa 10; chiaro ſi è, che 360 ſia eguale a 108, e 252 uniti inſieme.

102. In terzo luogo, ſe una retta ſia diviſa in due parti, il ſolido della tutta nelle ſue parti ſarà eguale a due altri ſolidi, uno fatto dal quadrato della prima parte nella ſeconda, e l'altro fatto al contrario dal quadrato della ſeconda parte nella prima. Così, ſe la retta ſia 10, e le ſue parti ſiano 4, e 6, il ſolido della tutta 10 nelle ſue parti 4, e 6 ſarà 240. Onde, degl' altri due ſolidi eſſendo 96 quello fatto dal quadrato della prima parte 4 nella ſeconda 6, e 144 l'altro fatto dal quadrato della ſeconda parte 6 nella prima 4; chiaro ſi è, che 240 ſia eguale a 96, e 144 uniti inſieme.

103. In quarto luogo, ſe una retta ſia diviſa in due parti, il cubo della tutta ſarà eguale a due ſolidi, uno fat-

to dal quadrato della tutta nella prima parte, e l' altro fatto dallo ſteſſo quadrato della tutta nella ſeconda parte. Così, ſe la retta ſia 10, e le ſue parti ſiano 4, e 6, il cubo della tutta 10 ſarà 1000. Onde, delli due ſolidi eſſendo 400 quello fatto dal quadrato della tutta 10 nella prima parte 4, e 600 l' altro fatto dallo ſteſſo quadrato della tutta 10 nella ſeconda parte 6; chiaro ſi è, che 1000 ſia eguale a 400, e 600 uniti inſieme.

104. In quinto luogo, ſe una retta ſia diviſa in due parti, il cubo della tutta ſarà eguale ai cubi delle parti, ed al triplo del ſolido, fatto dalla ſteſſa tutta nelle ſteſſe parti. Così, ſe la retta ſia 10, e le ſue parti ſiano 4, e 6, ſarà 1000 il cubo della tutta 10. Onde, eſſendo 64 il cubo della prima parte 4, 216 il cubo della ſeconda 6, e 720 il triplo del ſolido, fatto della ſteſſa tutta 10 nelle ſteſſe parti 4, e 6; chiaro ſi è, che 1000 ſia eguale a 64, 216, e 720 uniti inſieme.

105. Finalmente, ſe una retta ſia diviſa in due parti, il cubo della tutta ſarà eguale ai cubi delle parti, ed al triplo di due ſolidi, uno fatto dal quadrato della prima parte nella ſeconda, e l' altro fatto al contrario dal quadrato della ſeconda parte nella prima. Così,

Così, ſe la retta ſia 10, e le ſue parti ſiano 4, e 6, conforme il cubo della tutta 10 è 1000, così li cubi delle ſue parti 4, e 6 ſaranno 64, e 216. Onde, eſſendo 288 il triplo del ſolido, fatto dal quadrato della prima parte 4 nella ſeconda 6, e 432 il triplo dell' altro ſolido fatto al contrario dal quadrato della ſeconda parte 6 nella prima 4; chiaro ſi è, che 1000 ſia eguale a 64, 216, 288, e 432 uniti inſieme.

§. VIII.

Della nozione del priſma, e delle ſue proprietà, così aſſolute, come relative.

106. DOpo il parallelepipedo ſegue il priſma, per cui s' intende una figura ſolida, talmente terminata da figure piane rettilinee, che due di eſſe, tra di loro oppoſte, ſono ſimili, eguali, e parallele, e tutte l' altre ſono altrettanti parallelogrammi, che congiungono inſieme li lati omologi, ed eguali delle prime due figure. Onde potrà egli eſſere d'infinite ſpecie, per l'infinite variazioni, che poſſono ricevere le due facce oppoſte: ſiccome in effetto chiamaſi priſma triangolare, ſe le due facce oppoſte ſiano triangoli; priſma quadrangolare, ſe ſiano quadrangoli;

prisma pentagonale, se siano pentagoni; e così all' infinito.

107. Quindi il parallelepipedo può riguardarsi ancora come prisma, e riporsi nella classe de' prismi quadrangolari: in cui però s' incontra ciò di speciale, che essendo egli terminato da sei parallelogrammi, li di cui opposti sono simili, eguali, e paralleli, possono distinguersi in esso le facce opposte, comunque si voglia. E poichè fu avvertito di sopra (65), che il parallelogrammo diagonale lo divide in due prismi triangolari perfettamente eguali; perciò potrà riguardarsi ancora il parallelepipedo, come un raddoppiato prisma triangolare.

108. Per quanto ai parallelogrammi, che insieme colle due facce opposte terminano il prisma, chiaro si è, che essi sono tanti di numero, quanti sono li lati di ciascuna di quelle due facce. E se degli stessi parallelogrammi si considerino quelli lati, per mezzo di cui l' uno si congiunge coll' altro; chiaro ancora si è, che siano tutti eguali, e paralleli tra di loro. Onde, siccome li medesimi debbono inclinarsi egualmente sulle facce opposte; così, per la loro inclinazione a riguardo di dette facce, suol dividersi il prisma in rettangolo, ed obbliquangolo.

109.

109. Poichè nel priſma rettangolo li parallelogrammi, che lateralmente lo cingono, ſono tutti rettangoli; potrà averſi la loro ſomma, con moltiplicare uno delli loro lati comuni per lo perimetro di una delle due facce oppoſte. Nel priſma poi obbliquangolo ciò non può aver luogo, ma potrà determinarſi la ſomma de' ſuoi parallelogrammi, con moltiplicare uno delli loro lati comuni per lo perimetro di quell' altra figura rettilinea, che ſi ha nel priſma, con ſegarlo per un piano perpendicolare al ſuddetto lato; e ciò per la ragione, che li lati di queſt' altra figura inſiſtono ad angoli retti ſulli lati comuni delli parallelogrammi.

110. Meritano ſpecial conſiderazione, per quel tanto dovrà dirſi in appreſſo, quelli priſmi, in cui le facce oppoſte ſono figure regolari, ed a cui perciò può darſi il nome de' priſmi regolari. E poichè le figure regolari hanno li loro centri, potrà riguardarſi la retta, che gl'uniſce inſieme, come aſſe del priſma. A queſt' aſſe intanto ſono eguali, e paralleli li communi lati di tutti li parallelogrammi, che lateralmente cingono il priſma. Onde, ſecondochè l' aſſe inſiſte perpendicolarmente, o obbliquamente ſopra una delle due facce regolari, ſarà il priſma ſteſſo ret-

tangolo, o obbliquangolo.

111. Qualunque ſia la forma del priſma, ſe egli ſeghiſi per un piano parallelo ad una delle due facce oppoſte, chiaro ſi è, che la ſezione fatta nel priſma ſia una figura rettilinea ſimile, ed eguale alla ſteſſa faccia; onde le porzioni, in cui il piano divide il priſma, tuttavia ſaranno priſmi. E poichè li comuni lati delli parallelogrammi, che lo cingono lateralmente, ſono tutti paralleli; potrà ſegarſi ancora il priſma per un piano, che paſſi per due di detti lati; e dovendo eſſere parallelogrammo la ſezione fatta nel priſma, ancora in queſto caſo ſaranno priſmi le due porzioni del priſma intero.

112. Si vuol però notare, che laddove le due porzioni del priſma, tagliate col primo piano, conſervano la ſteſſa forma del priſma intero, queſt'altre due, tagliate col ſecondo piano, ſono priſmi di forma diverſa, ſiccome in effetto le loro facce oppoſte ſono porzioni di quelle, che rapportanſi al priſma intero. Però, con ſegare il priſma per piani, che paſſino per due lati paralleli delli riferiti parallelogrammi, ſi ha il vantaggio di dividere il priſma in altri priſmi triangolari: di modochè col ſolo priſma triangolare potrà porſi a calcolo ogn' altro priſma.

113.

113. Nel priſma ancora diſtingueſi, così la baſe, come l' altezza; ma ſiccome per baſe dee prenderſi ſempre una delle due facce oppoſte, così dovrà averſi per ſua altezza la perpendicolare, che da un punto dell' altra faccia oppoſta ſi abbaſſa ſulla prima; la quale perpendicolare nel priſma rettangolo è eguale a ciaſcuno delli comuni lati de' parallelogrammi, che cingono lateralmente il priſma.

114. Or a ſimiglianza de' parallelepipedi, ſi avrà la ſolidità di qualſiſia priſma, con moltiplicare la ſua baſe per la ſua altezza. E ſiccome, eſſendo il priſma triangolare, ciò è fuor di dubbio, per averſi il priſma triangolare, con ſegare il parallelepipedo per mezzo del ſuo parallelogrammo diagonale; così lo ſteſſo dee aver luogo eziandio negl' altri priſmi, per l' avvertimento fatto (112), che qualſiſia priſma poſſa dividerſi in altri priſmi triangolari.

115. Eſſendo così, ancora due priſmi ſaranno tra di loro in ragion compoſta delle baſi, e dell' altezze. Onde, conforme eſſendo eguali l' altezze, debbono li due priſmi eſſere nella ſemplice ragione delle baſi; così al contrario eſſendo eguali le baſi, ſaranno nella ſemplice ragione dell' altezze. Se poi ſiano eguali, così le baſi, come l'altez-

ze, o pure la ragione delle baſi ſia reciproca di quella dell' altezze, li due priſmi dovranno eſſere eguali.

116. Dallo ſteſſo teorema generale, che due priſmi ſiano in ragion compoſta delle baſi, e dell' altezze, poſſono dedurſi li converſi degl' altri tre ſpeciali, cioè I, che eſſendo due priſmi nella ſemplice ragione delle baſi, l' altezze ſiano eguali; II, che eſſendo al contrario nella ſemplice ragione dell' altezze, le baſi ſiano eguali; e III finalmente, che eſſendo eguali li due priſmi, le baſi ſiano nella reciproca ragione dell' altezze.

117. Del rimanente, a ſimiglianza ſempre del parallelepipedo, ſi ridurrà a cubo qualſiſia dato priſma, primieramente con formare un quadrato, che ſia eguale alla baſe del priſma dato, ed indi con ritrovare due mezze proporzionali tra il lato di queſto quadrato, e l' altezza dello ſteſſo priſma; poichè il cubo, fatto dalla prima delle due mezze, ſarà il cubo ricercato.

§. IX.

Della nozione della piramide, e delle ſue proprietà, così aſſolute, come relative.

118. DAl priſma faremo paſſaggio alla piramide, per cui s' intende una figura ſolida, che avendo per baſe una figura piana rettilinea qualſivoglia, è cinta lateralmente da più triangoli, che congiungono li lati della baſe con un punto preſo al di ſopra di eſſa. E ſiccome queſto punto riguardaſi, come la cima, o ſia il vertice della piramide; così da queſto punto dee abbaſſarſi la perpendicolare ſulla baſe, per avere l'altezza della ſteſſa piramide.

119. Per ragion della baſe, chiaro ſi è, che la piramide, a ſimiglianza del priſma, poſſa eſſere d' infinite ſpecie: ſiccome in effetto chiamaſi piramide triangolare, ſe la ſua baſe ſia un triangolo; quadrangolare, ſe ſia un quadrilatero; pentagonale, ſe ſia un pentagono, e così dell' altre. E poichè la piramide triangolare è terminata in tutto da quattro triangoli, ciaſcuno di eſſi potrà fare le veci di baſe: col di cui cambiamento però cambiaſi, così il verti-

ce, come l'altezza della piramide.

120. Con aumentarſi il numero de' lati della baſe, aumentaſi altresì il numero de' triangoli, che lateralmente cingono la piramide. E ſebene queſti triangoli congiunganſi inſieme per lati comuni, nientedimeno conforme queſti lati incontranſi nel vertice della piramide, così uno ſolo di eſſi potrà eſſere perpendicolare ſulla baſe. Onde nella piramide non ha luogo il divario notato, così nel priſma, come nel parallelepipedo, cioè di poter eſſere o rettangola, o obbliquangola.

121. Se la baſe della piramide ſia una figura piana regolare, e la perpendicolare, abbaſſata su di eſſa dal vertice, cada ſul ſuo centro; li triangoli, che cingono lateralmente la piramide, non ſolo s' inclineranno egualmente ſulla baſe, ma ſaranno altresì tutti iſoſceli, ed eguali tra di loro; onde potrà averſi la loro ſomma, con moltiplicare il perimetro della baſe per la metà dell' altezza di uno di eſſi.

122. Qualunque ſia la forma della piramide, chiaro ſi è, che la ſezione, fatta in eſſa per un piano parallelo alla ſua baſe, ſia un' altra figura rettilinea, non già eguale come nel priſma, ma ſimile, e parallela alla ſteſſa baſe. Onde la porzione della piramide, che ri-

rimane verſo il vertice, ſarà un' altra piramide della ſteſſa indole colla piramide intera; e l' altra, che rimane ſopra la baſe, chiamaſi comunemente piramide troncata.

123. Da ciò, che la ſezione, fatta nella piramide per un piano parallelo alla baſe, ſia una figura rettilinea ſimile, e parallela alla ſteſſa baſe, ne ſegue, che ſe la baſe della piramide ſia un parallelogrammo, il piano, che paſſa per una delle ſue diagonali, e per lo vertice della ſteſſa piramide, conforme divide egualmente tutti gl' altri parallelogrammi, fatti nella piramide con piani paralleli alla ſua baſe, così debba dividere altresì la ſteſſa piramide in due piramidi triangolari, tra eſſo loro eguali.

124. Quantunque poi le due piramidi triangolari non ſiano porzioni di un' altra piramide, che abbia per ſua baſe un parallelogrammo; pure però debbono eſſere eguali, quantevolte ſono eguali, così le loro baſi, come le loro altezze, per la ragione, che ſituandole colle loro baſi ſopra un'iſteſſo piano, e ſecandole per piani paralleli alle ſteſſe baſi, le ſezioni fatte in una di eſſe, ſono eguali alle corriſpondenti ſezioni fatte nell' altra; e con queſti due principj potrà facilmente dimoſtrarſi

il teorema, da cui dovrà dedurſi la miſura di ogni piramide, cioè, che il priſma triangolare poſſa dividerſi in tre piramidi, ſimilmente triangolari, che ſiano tra di loro eguali.

Fig. 19. 125. Sia perciò il priſma triangolare A B C F, e nelli due parallelogrammi A F, B F tirinſi le diagonali C D, C E. Se adunque per queſte diagonali facciaſi paſſare un piano, ſegherà egli il priſma in due piramidi; di cui una ſarà triangolare, che inſiſte ſul triangolo D E F, ed è cinta lateralmente dagli altri tre D C E, E C F, F C D; e l' altra ſarà quadrangolare, che inſiſte ſul terzo parallelogrammo A E, ed è cinta lateralmente dalli quattro triangoli A C B, B C E, E C D, D C A.

126. Se poi nel terzo parallelogrammo A E tiriſi parimente la diagonale B D, e così per eſſa, come per lo punto C facciaſi paſſare un' altro piano; la ſeconda di quelle due piramidi, cioè la quadrangolare, ſarà diviſa da queſt' altro piano in due piramidi triangolari; di cui una inſiſte ſul triangolo A B D, ed è terminata lateralmente dagl' altri tre A C B, B C D, D C A; e l' altra inſiſte ſull' altro triangolo E B D, ed è terminata lateralmente dagl' altri tre B C E, E C D, D C B.

127. Or queſte due piramidi triango-

golari, ricavate dal priſma col ſecondo piano, attento il primo principio, non v'ha dubbio, che ſiano eguali. Ma, paragonando la prima di queſte due con quella, dedotta dal priſma col primo piano, e dando ad eſſe per baſi li due triangoli ABC, DEF, ſono eguali così le loro baſi, come le loro altezze. Dunque, attento l'altro principio, ancora queſte due debbono eſſere eguali; e per tanto tutte tre le piramidi triangolari, in cui reſta diviſo il priſma per gli due piani, ſaranno tra di loro eguali.

128. Eſſendo così, conforme la piramide triangolare è la terza parte del priſma, con cui ha la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza; così ſi avrà la ſua ſolidità con moltiplicare la ſua baſe per la terza parte della ſua altezza. E poichè ogn'altra piramide più compoſta può dividerſi in piramidi triangolari per mezzo de' piani, che paſſino per lo ſuo vertice, e per le diagonali tirate nella ſua baſe; quindi ſi è, che ſi avrà la ſolidità di qualſivoglia piramide, ſimilmente con moltiplicare la ſua baſe per la terza parte della ſua altezza.

129. Eſſendo così, le piramidi, a ſimiglianza de' priſmi, eziandio debbono eſſere in ragion compoſta delle baſi, e dell'altezze. Onde, ſiccome ſaranno nella

nella ſemplice ragione delle baſi eſſendo eguali l'altezze, ed al contrario nella ſemplice ragione dell'altezze eſſendo eguali le baſi; così, ſe mai ſiano eguali tanto le baſi, quanto l'altezze, o pure la ragione delle baſi ſia reciproca di quella dell'altezze, le piramidi dovranno eſſere eguali.

130. Ma dal teorema generale, che le piramidi ſiano in ragion compoſta delle baſi, e dell'altezze, poſſono dedurſi li converſi degl'altri tre teoremi ſpeciali, cioè I, che eſſendo due piramidi nella ſemplice ragione delle baſi, debbano eſſere eguali l'altezze; II, che eſſendo al contrario due piramidi nella ſemplice ragione dell'altezze, debbano eſſere eguali le baſi; e III finalmente, che ſe due piramidi ſiano eguali, la ragione delle baſi debba eſſere reciproca di quella dell'altezze.

131. Conforme poi la ſolidità della piramide ſi ha, con moltiplicare la ſua baſe per la terza parte della ſua altezza; così per formare un cubo eguale ad una data piramide, pure, come nel priſma, dovrà formarſi primieramente un quadrato, che ſia eguale alla baſe della piramide; ma le due mezze proporzionali dovranno ritrovarſi tra il lato di queſto quadrato, e la terza parte dell'altezza della piramide; ed il cubo della

della prima di eſſe ſarà il cubo ricercato.

132. Del rimanente, per quanto alla piramide troncata, potrà averſi la ſua ſolidità, primieramente con determinare, così la ſua altezza, come la differenza di due lati omologj delle due figure ſimili, che la terminano; ed indi con ritrovare due rette, che ſiano agli ſteſſi lati, come la riferita altezza alla riferita differenza; poichè avendoſi con queſte rette l'altezze della piramide intera, e dell'altra riſecata, chiaro ſi è, che ſe moltplichinſi le medeſime per le figure, a cui ſi rapportano, e prendaſi la differenza delli due prodotti, ſi avrà colla terza parte di queſta differenza la ſolidità ricercata.

133. Per dimoſtrare intanto, che con quelle due rette ſi abbiano l'altezze della piramide intera, e dell'altra riſecata, ſiano AB, CD li lati omologi delle due figure ſimili, che terminano la piramide troncata, e ſia ACDB il trapezio, che li congiunge inſieme. Se adunque tiriſi la CE parallela alla DB, ſarà AE la differenza degli ſteſſi lati, e ſe prolunghinſi le due AC, BD per ſino a che s' incontrino nel punto F, ſarà queſto punto il vertice dell' intera piramide; onde, ſe FGH ſia la perpendicolare, abbaſſata dallo ſteſſo punto *Fig.* 20.

to ſulle due figure, ſarà FH l' altezza della piramide intera, FG l' altezza dell' altra riſecata, e GH l' altezza della piramide, che rimane troncata.

134. Eſſendo poi alle ſteſſe FA, FC, CA proporzionali, così le tre FH, FG, GH, come le altre tre AB, CD, AE; ſaranno queſte con quelle ancora proporzionali. Onde, con farſi primieramente, che la differenza delli due lati AE ſia all' altezza della piramide troncata GH, come il lato maggiore AB ad una quarta proporzionale, ſi avrà l' altezza della piramide intera FG; e con farſi in appreſſo, che la ſteſſa differenza de' lati AE ſia alla ſteſſa altezza della piramide troncata GH, come il lato minore CD ad un' altra quarta proporzionale, ſi avrà l'altezza della piramide riſecata FG.

§. X.

Delle piramidi paragonate colli priſmi, e della ſimiglianza dell' une, e l' altre figure.

135. COnforme ſi ſono paragonati tra di loro tanto li priſmi, quanto le piramidi; così poſſono paragonarſi parimente le piramidi cogli ſteſſi priſmi. E poichè la ſolidità del priſma ſi ha, con moltiplicare la ſua baſe per l'intera ſua altezza; ed all'incontro, per avere la ſolidità della piramide, deeſi moltiplicare la ſua baſe per la terza parte della ſua altezza; chiaro ſi è, che la piramide debba eſſere la terza parte del priſma, con cui ha la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza: dimodochè, volendoſi ſulla baſe del priſma elevare una piramide, che ſia eguale allo ſteſſo priſma, biſognerà, che la ſua altezza ſia tripla dell' altezza del priſma.

136. Ma, attenta la miſura, così del priſma, come della piramide, può ſtabilirſi il ſeguente teorema generale, cioè, che un priſma, ed una piramide ſiano tra di loro in ragion compoſta della baſe del priſma alla baſe della piramide, e dell' altezza del priſma alla terza parte dell' altezza della piramide; o pure,

o pure, che è lo ſteſſo, in ragion compoſta della baſe del priſma alla terza parte della baſe della piramide, e dell' altezza del priſma all' altezza intera della piramide; dal qual teorema generale ne derivano tre altri ſpeciali.

137. Primieramente, che il priſma, e la piramide debbano eſſere nella ſemplice ragione della baſe del priſma alla terza parte della baſe della piramide, quante volte ſono eguali le loro altezze. In ſecondo luogo, che eſſendo al contrario eguali le loro baſi, il priſma, e la piramide debbano eſſere nella ſemplice ragione dell' altezza del priſma alla terza parte dell'altezza della piramide. E finalmente, che il priſma, e la piramide debbano eſſere eguali, ſempre quando le loro baſi ſono nella reciproca ragione dell' altezza del priſma alla terza parte dell' altezza della piramide.

138. Dallo ſteſſo teorema generale poſſono dedurſi altresì li converſi degli altri tre ſpeciali, e ſono I, che eſſendo il priſma, e la piramide nella ſemplice ragione della baſe del priſma alla terza parte della baſe della piramide, debbano eſſere eguali le loro altezze; II, che eſſendo il priſma, e la piramide nella ſemplice ragione dell' altezza del priſma alla terza parte dell'altezza della

della piramide, debbano al contrario eſſere eguali le loro baſi; e III finalmente, che eſſendo il priſma eguale alla piramide, debbano eſſere le baſi nella reciproca ragione dell'altezza del priſma alla terza parte dell'altezza della piramide.

139. Tanto due priſmi, quanto due piramidi poſſono eſſere ſimili tra eſſo loro. Ed in primo luogo ſaranno ſimili due priſmi, quantevolte ſono ſimili non ſolo le loro baſi, e le facce oppoſte, ma eziandio li parallelogrammi, che inſiſtono ſulli lati omologi delle ſteſſe baſi. Quindi ne' priſmi ſimili li lati comuni delli loro parallelogrammi s' inclineranno egualmente ſulle loro baſi, e ſaranno nella ſteſſa ragione colli loro lati omologi; onde ſi è, che così le ſuperficie laterali delli due priſmi, come le ſuperficie loro totali debbano eſſere nella duplicata ragione degli ſteſſi lati.

140. Ma da ciò, che ne' priſmi ſimili li lati comuni delli loro parallelogrammi ſono egualmente inclinati ſulle loro baſi, ne ſegue, che le perpendicolari, abbaſſate dall' eſtremità di due lati comuni ſulle ſteſſe baſi, debbano formare triangoli equiangoli colli medeſimi lati. Onde, dovendo eſſere queſte perpendicolari, che ſono l' altezze delli

delli due priſmi, eziandio nella ſteſſa ragione colli lati omologi delle loro baſi, ſaranno li due priſmi ſimili nella triplicata ragione degli ſteſſi lati.

141. In fatti due priſmi debbono eſſere generalmente in ragion compoſta delle loro baſi, e delle loro altezze. Ma, eſſendo ſimili li due priſmi, le baſi ſono nella duplicata ragione delli loro lati omologi, e l' altezze nella ſemplice ragione degli ſteſſi lati. Dunque, perchè la ragion ſemplice, e la ſua duplicata compongono inſieme la ſua ragion triplicata, dovrà conchiuderſi, che due priſmi ſimili ſiano nella triplicata ragione delli loro lati omologi.

142. Per quanto poi alle piramidi, eſſe ancora ſaranno ſimili, quantevolte ſono ſimili, non ſolo le loro baſi, ma altresì li triangoli, che inſiſtono ſulli lati omologi delle ſteſſe baſi. Quindi nelle piramidi ſimili li lati comuni delli loro triangoli, che tra eſſo loro ſi corriſpondono, eziandio s' inclineranno egualmente ſulle loro baſi, e ſaranno nella ſteſſa ragione colli loro lati omologi; e perciò, così le ſuperficie laterali delle due piramidi, come le ſuperficie loro totali dovranno eſſere nella duplicata ragione degli ſteſſi lati.

143. Da ciò intanto, che nelle piramidi ſimili li comuni lati delli loro tri-

triangoli, che tra di eſſi ſi corriſpondono, ſono egualmente inclinati ſulle loro baſi, ne ſegue, che l'altezze delle ſteſſe piramidi, cioè le perpendicolari abbaſſate ſulle baſi dalli loro vertici, debbano formare triangoli equiangoli colli medeſimi lati, ed eſſere in conſeguenza nella ſteſſa ragione colli lati omologi delle baſi; onde due piramidi ſimili, non altrimente che due priſmi ſimili, eziandio ſaranno nella triplicata ragione degli ſteſſi lati.

144. Adunque, ſe vogliaſi un priſma, o una piramide, che ſia ſimile ad un' altro dato priſma, o ad un' altra data piramide; ſi dovrà primieramente deſcrivere una figura rettilinea, che ſia ſimile alla baſe del dato priſma, o della data piramide; ed indi elevare su di eſſa il priſma, o la piramide in modo, che li parallelogrammi, o li triangoli, che inſiſtono ſulli lati omologi delle due figure, ſiano ſimili ancora tra di loro. Ma ſe il priſma, o la piramide, che ſi dimanda, debba eſſere non ſolo ſimile, ma eziandio in data ragione col dato priſma, o colla data piramide; ſi dovrà ricorrere al problema delle due mezze proporzionali, ed ecco come.

145. Pongaſi, che li due priſmi, o le due piramidi ſimili debbano eſſere nella

nella ragione di A a D. Ritrovinſi tra lì due termini di queſta ragione due mezze proporzionali, che ſiano B, e C; indi facciaſi, che B ſia ad A, come un lato della baſe del dato priſma, o della data piramide ad una quarta proporzionale. Deſcrivaſi in appreſſo su di queſta quarta proporzionale una figura ſimile a quella baſe, in modo però, che la medeſima corriſponda nella ſimiglianza al lato preſo; ed il priſma, o la piramide, che ſi eleverà su di queſta figura ſimile al priſma dato, o alla piramide data, ſarà il priſma, o la piramide, che ſi dimanda.

146. La ragione è chiara; poichè li due priſmi, o le due piramidi, come ſimili tra di loro, debbono eſſere nella triplicata ragione delli loro lati omologi, ed in conſeguenza nella triplicata ragione di A a B. Ma, per eſſere A, B, C, D continuamente proporzionali, ancora A ſta a D nella triplicata ragione di A a B. Dunque li due priſmi, o le due piramidi ſaranno tra di loro nella data ragione di A a D. E dalla dimoſtrazione ſteſſa potrà dedurſi, come una ragione triplicata, per ragion di eſempio di A a B, poſſa ridurſi a ragion ſemplice, cioè con fare, che A ſia a B, non ſolo come B a C, ma altresì come C a D;

poi-

poichè la ragion ſemplice di A a D ſarà eguale alla ragion triplicata di A a B.

147. Se poi vogliaſi un priſma, o una piramide, che ſia non ſolo ſimile col dato priſma, o colla data piramide C, ma eguale altresì all'altro priſma dato, o all'altra piramide data D; pure ſi ha biſogno di due mezze proporzionali, per la ragione, che debbonſi ridurre a cubi li due priſmi, o le due piramidi C, e D. In fatti, poſto, che A ſia il lato del primo cubo, e B il lato del ſecondo, ſe facciaſi, che A ſia a B, come un lato della baſe del priſma, o della piramide C ad una quarta proporzionale; e deſcrivaſi su di eſſa una figura rettilinea ſimile a quella baſe, in modo però, che la medeſima corriſponda nella ſimiglianza al lato preſo; il priſma, o la piramide E, che elevaſi su di queſta figura ſimile al priſma o alla piramide C, ſarà eguale altresì all'altro priſma, o all'altra piramide D.

148. La ragione ſimilmente è chiara; poichè li due priſmi, o le due piramidi C, ed E, come ſimili tra di loro, debbono eſſere nella triplicata ragione di due lati omologi delle loro baſi; onde ſaranno nella triplicata ragione di A a B. Ma in queſta ſteſſa tri-

triplicata ragione, ſono parimente li cubi di A, e B, per eſſere queſti cubi eziandio ſimili tra eſſo loro. Dunque li due priſmi, o le due piramidi C, ed E ſaranno, come li cubi di A, e B; e per tanto, eſſendo il priſma, o la piramide C eguale al cubo di A, ſarà l'altro priſma, o l'altra piramide E eguale al cubo di B, ed in conſeguenza eguale al dato priſma, o alla data piramide D.

§. XI.

Dell'altre figure ſolide, terminate da ſuperficie piane.

149. OLtre ai priſmi, e alle piramidi, non v'ha dubbio, che poſſono darſi infinite altre figure ſolide, eziandio terminate da ſuperficie piane; ma, ſiccome ciaſcheduna di eſſe può ſempre dividerſi in priſmi, ed in piramidi; così con una tal diviſione ſi potrà facilmente porre a calcolo, e determinare la ſua ſolidità. Avviene intanto ben ſpeſſo, che la ſua diviſione poſſa farſi in varie guiſe; onde, per agevolare il calcolo, giova appigliarſi alla diviſione più ſemplice, per cui rimane diviſa la figura in parti, che ſi poſ-

poſſano determinare col più picciolo numero de' dati.

150. Quindi, ſiccome il priſma triangolare incontraſi ben ſpeſſo nella diviſione dell' altre figure ſolide; così non ſarà inutile quì l' avvertire, che ſe bene la ſolidità di eſſo ſi abbia, con moltiplicare la ſua baſe triangolare per l' intera altezza, corriſpondente a detta baſe; nientedimeno la medeſima poſſa averſi ancora in un' altro modo, cioè con riguardare il priſma, come elevato ſopra uno delli tre parallelogrammi, che lo terminano, e con moltiplicare queſta nuova ſua baſe per la metà dell' altezza, che ad eſſa corriſponde.

151. In fatti, ſe colla nuova baſe del priſma triangolare, e coll' altezza ad eſſa corriſpondente formiſi un parallelepipedo; ſarà il priſma triangolare la metà di queſto parallelepipedo. Onde, ſiccome la ſolidità del parallelepipedo ſi ha, con moltiplicare la baſe per l' intera altezza; così, moltiplicandoſi la ſteſſa baſe per la metà della ſteſſa altezza, ſi avrà la ſolidità del priſma triangolare. Dal che può dedurſi, che li tre parallelogrammi del priſma triangolare ſiano tra di loro nella reciproca ragione dell' altezze, che ad eſſi corriſpondono, quante volte conſideranſi come baſi del priſma.

152. Ciò avvertito, debbaſi ora per ragion di eſempio miſurare una figura ſolida, terminata da due parallelogrammi diſuguali, e paralleli, ma non già ſimili, e da quattro trapezj, che congiungono inſieme li corriſpondenti lati delli due parallelogrammi. Siano perciò A B C D il parallelogrammo maggiore, che ſerve di baſe alla figura, ed E F G H l' altro minore parallelo al primo, con cui la figura terminaſi al di ſopra. Siano inoltre A E F B, B F G C, C G H D, D H E A li quattro trapezj, che congiungendo inſieme li lati corriſpondenti delli due parallelogrammi, terminano lateralmente la ſteſſa figura.

Fig. 21.

153. Per gli lati E F, F G, G H, H E del parallelogrammo ſuperiore intendanſi paſſare altrettanti piani in modo, che ſiano paralleli ai lati A B, B C, C D, D A dell' altro parallelogrammo inferiore; e ſiano K L, M N, O P, Q R le quattro rette, in cui lo incontrano, che ſaranno parallele agli ſteſſi lati A B, B C, C D, D A. Siccome adunque con queſte rette rimane diviſo il parallelogrammo inferiore in nove altri parallelogrammi; così la figura ſolida per mezzo delli quattro piani reſterà diviſa in quattro piramidi quadrangolari, in quattro priſmi triango-

golari, ed in un parallelepipedo; onde, con determinare la ſolidità di queſte nove figure, e con unirle inſieme, ſi avrà la ſolidità della figura propoſta.

154. Or delle nove riferite figure, chiaro ſi è, che le quattro piramidi quadrangolari ſiano elevate ſugli quattro parallelogrammi LM, KR, ON, PQ; li quattro priſmi triangolari su gl' altri quattro parallelogrammi, che ſi frammezzano tra li quattro primi; e finalmente il parallelepipedo ſul rimanente parallelogrammo, che giace in mezzo degl' otto precedenti. Onde, perchè le ſteſſe nove figure ritrovanſi avere la medeſima altezza della figura propoſta; quindi ſi è, che per determinare le loro ſolidità, non ſi abbia biſogno di altri dati, ſe non che di queſta comune loro altezza, e delli nove riferiti parallelogrammi, che ſono le loro baſi.

155. Determiniſi adunque, così la comune altezza delle nove figure, come ciaſcuno delli nove parallelogrammi, che ſervono ad eſſe di baſi; e ſiccome, con moltiplicare le baſi delle quattro piramidi quadrangolari per la terza parte della comune altezza, ſi hanno le loro ſolidità; così, con moltiplicare le baſi delli quattro priſmi triangolari per la metà della ſteſſa altez-

za, ſi avranno le ſolidità di eſſi; e finalmente, con moltiplicare la baſe del parallelepipedo per l'intera altezza, ſi avrà la ſolidità dello ſteſſo parallelepipedo; e per tanto colla ſomma di tutti queſti prodotti ſi avrà parimente la ſolidità della figura propoſta.

156. Si dà intanto qualche figura ſolida, terminata da ſuperficie piane, che ſe bene non ſia priſma, o piramide, tutta volta può miſurarſi, ſenza eſſervi biſogno di diviſione alcuna. Di queſta indole ſono le due porzioni, in cui divideſi un parallelepipedo da un piano, ſituato obbliquamente per rapporto ad una delle ſue facce laterali; poichè, ſe bene la ſezione fatta nel parallelepipedo per mezzo di queſto piano ſia ſimilmente parallelogrammo; nientedimeno, per non eſſere egli eguale, e parallelo alla ſuddetta faccia, non ſaranno parallelepipedi le porzioni, in cui rimane diviſo l'intero parallelepipedo; ma ciò non oſtante, poſſono averſi le loro ſolidità, ſenza ſuddividerle, ed ecco come.

157. Già il piano ſecante divide, così la baſe del parallelepipedo, come la ſua faccia oppoſta in due porzioni, che per la diverſa obbliquità dello ſteſſo piano ſecante, poſſono eſſere non ſolo parallelogrammi, ma eziandio trapezj,

pezj. Congiunganſi adunque le porzioni della baſe colle corriſpondenti porzioni della ſua faccia oppoſta; e ſe moltiplichinſi le loro ſomme per la metà dell'altezza del parallelepipedo, ſi avranno colli prodotti le ſolidità delle due ſue porzioni. Il che ſi renderà chiaro, ſe ſeghiſi il parallelepipedo con due altri piani, paralleli alla ſteſſa faccia laterale, tra li quali reſti racchiuſo il primo piano ſecante.

158. Non avviene però lo ſteſſo, ſe un priſma ſia ſecato per un piano, obbliquamente ſituato per rapporto alla ſua baſe; poichè, per avere la ſolidità della porzione riſecata, fa duopo primieramente dividerla in due altre porzioni per un'altro piano, che paſſando per lo punto più baſſo del primo, ſia parallelo alla baſe del priſma, ed indi ſuddividere in piramidi quella porzione di eſſa, che rimane racchiuſa tra li due piani. E lo ſteſſo dovrà farſi, ſe ſegandoſi una piramide per un piano, obbliquamente ſituato per rapporto alla ſua baſe, debbaſi determinare la ſolidità della porzione riſecata, che non è vera piramide troncata.

159. Del rimanente ancora tra l'altre figure ſolide, terminate da ſuperficie piane, può eſſervi ſimiglianza; e ſaranno due di eſſe ſimili tra di loro,

quante volte le figure piane, che terminano una delle due, ſono ſimili colle figure piane, preſe collo ſteſſo ordine, che terminano l'altra. Onde, ſecondo queſta loro nozione, gl' angoli ſolidi, che corriſpondonſi tra eſſo loro nelle due figure, come formati da angoli piani, non ſolo eguali, ma diſpoſti ancora col medeſimo ordine, dovranno eſſere eguali; il che dee intenderſi parimente degli angoli ſolidi, così di due priſmi, come di due piramidi ſimili.

160. Egli è facile intanto ad intenderſi, che ancora l'altre figure ſolide, che terminate da ſuperficie piane ſono ſimili tra di loro, debbano eſſere nella triplicata ragione de' loro lati omologi. In fatti, ciaſcuna delle due figure può dividerſi talmente in priſmi, e piramidi, che le parti di una di eſſe ſiano ſimili colle corriſpondenti parti dell'altra. Onde dalla ragione di queſte parti raccogliendo la ragione de' loro tutti, ſi ritroverà, che eziandio le due figure totali ſiano nella triplicata ragione delli loro lati omologi; e per la ſteſſa ragione le loro ſuperficie dovranno eſſere nella duplicata ragione degli ſteſſi lati.

§. XII.

§. XII.

Dell' indole delle cinque figure ſolide regolari.

161. UNa figura ſolida, terminata da ſuperficie piane, chiamaſi regolare, quante volte eſſendo racchiuſa da figure piane regolari della ſteſſa ſpecie, ſono eguali, così le ſue facce, come li ſuoi angoli ſolidi. Onde, eſſendoſi dimoſtrato di ſopra (53), che l'angolo ſolido può eſſer formato ſoltanto con angoli di triangoli equilateri, di quadrati, e di pentagoni regolari; quindi ſi è, che con queſte ſole figure poſſa formarſi parimente la figura ſolida regolare.

162. Ed in primo luogo, di già fu dimoſtrato (55), che poſſa averſi l'angolo ſolido, non ſolo con tre angoli di triangoli equilateri, ma eziandio così con quattro, come con cinque. Onde, attenta l'uguaglianza, in cui debbono eſſe ancora gl'angoli ſolidi, chiaro ſi è, che con triangoli equilateri poſſano formarſi tre figure ſolide regolari; di cui la prima, terminata da quattro triangoli equilateri, diceſi tetraedro; la ſeconda, contenuta da otto, chiamaſi ottoaedro; e la terza, racchiuſa da

venti, appellaſi icoſaedro.

163. Per quanto al tetraedro, egli ſi avrà con formare un' angolo ſolido, colle punte di tre triangoli equilateri, e con adattare ſulle baſi di eſſi il triangolo rimanente; onde tutti quattro gl' angoli ſolidi della figura ſaranno eguali. Similmente ſi avrà l' ottoaedro, con formare due angoli ſolidi, ciaſcuno colle punte di quattro triangoli equilateri, ed indi con unirgli inſieme in modo, che ſi combacino le baſi delli loro triangoli; e perciò, formandoſi ciaſcuno degl' altri quattro angoli ſolidi eziandio colle punte di quattro triangoli equilateri, ſaranno tutti ſei eguali tra di loro.

164. Per quanto poi all' icoſaedro, eziandio debbonſi formare due angoli ſolidi colle punte di cinque triangoli equilateri, ma di più fa duopo formare una ſpecie di corona con cinque altri triangoli equilateri, che avrà per baſe un pentagono regolare; poichè, ſiccome, con riempire li vuoti di queſta corona colli rimanenti cinque triangoli equilateri, viene ella ad avere una ſuperficie continuata; così, con ſituarla in mezzo ai due angoli ſolidi in modo, che ſi combacino le baſi delli loro triangoli, ſi avrà l' icoſaedro, in cui tutti gl' angoli ſolidi ſaranno formati colle

punte

punte di cinque triangoli equilateri.

165. Fu dimoſtrato ancora, che poſſa formarſi l' angolo ſolido con tre ſoli angoli di quadrati, e con tre ſoli angoli di pentagoni regolari (54); onde, tanto con quadrati, quanto con pentagoni regolari non potrà averſi, ſe non che una ſola figura ſolida regolare. Ma, ſiccome formata con quadrati, ella dee eſſere di ſei facce, e perciò chiamaſi eſaedro; così formata con pentagoni regolari, dovrà ella avere dodici facce, onde ſi è, che appellaſi dodecaedro.

166. Per quanto all' eſaedro, egli come racchiuſo da ſei quadrati eguali, li di cui oppoſti ſono ancora paralleli, non è diverſo da quel parallelepipedo rettangolo, che ſpecialmente chiamaſi cubo; onde la diſpoſizione delli ſei quadrati eguali, che debbono contenerlo, non ammette difficoltà alcuna. E poichè nel cubo ciaſcuno degl' angoli ſolidi è formato colle punte di tre quadrati, chiaro ſi è, che in eſſo ſiano eguali, non ſolo le facce, ma eziandio gl' angoli ſolidi.

167. Per quanto poi al dodecaedro, racchiuſo da dodici pentagoni regolari, potrà egli formarſi, primieramente con fare due angoli ſolidi, ciaſcuno colle punte di tre pentagoni; indi con adattare nelli loro vuoti tre altri pentago-

ni, che ſporgeranno in fuori colle loro punte; e finalmente con unire inſieme le due ſuperficie, che ne riſultano, in modo, che le parti eccedenti di una di eſſe riempiano le parti vuote dell'altra; ed in queſta guiſa ancora ciaſcuno degl' altri angoli ſolidi ſarà formato colle punte di tre pentagoni regolari.

168. In ciaſcuna delle riferite cinque figure ſolide regolari ritrovaſi un punto, da cui diſcoſtanſi egualmente, così le ſue facce, come li vertici delli ſuoi angoli ſolidi. Onde, conforme queſto punto riguardaſi come centro della figura ſolida regolare, così la ſua proprietà ſi è, di eſſere eguali, tanto le rette, che tiranſi da eſſo ai vertici degl' angoli ſolidi, quanto le perpendicolari, che cadono dal medeſimo punto ſulle facce della figura. E poichè queſte facce, come figure piane regolari, hanno ſimilmente li loro centri; caderanno quelle perpendicolari propriamente su gli centri delle ſteſſe facce.

169. La poſizione poi delle rette, che dal centro della figura ſolida regolare tiranſi ai vertici degl' angoli ſolidi, è tale, che ciaſcuna di eſſe forma angoli eguali colli lati degl' angoli piani, che contengono l'angolo ſolido. Onde, conforme l' angolo ſolido dee avere per baſe un' altra figura piana regolare, così

sì la retta, tirata al ſuo vertice dal centro della figura ſolida, paſſerà per lo centro della ſua baſe, e ſarà in conſeguenza perpendicolare alla ſteſſa baſe.

170. Quindi potrà determinarſi il centro di una figura ſolida regolare in tre maniere, cioè primieramente con alzare ſopra due delle ſue facce le perpendicolari dalli loro centri; indi con tirare due rette dalli vertici di due angoli ſolidi alli centri delle loro baſi; e finalmente con alzare ſopra una ſola faccia la perpendicolare dal ſuo centro, e con tirare dal vertice di un ſolo angolo ſolido la retta al centro della ſua baſe; poichè in tutte tre le maniere coll' incontro delle perpendicolari alzate, o delle rette tirate ſi avrà il centro della figura ſolida regolare.

171. Nelle figure ſolide regolari incontraſi ciò di ſpeciale, che ciaſcheduna di eſſe può dividerſi in piramidi perfettamente eguali tra di loro. In fatti, ſe dal centro della figura ai lati delle ſue facce intendanſi tirati altrettanti piani, ſi avranno con eſſi tante piramidi, quante ſono di numero le ſteſſe facce. E conforme viene ad eſſere vertice loro comune il centro ſteſſo della figura ſolida, così non ſolo ſaranno eguali le loro baſi, e le loro altezze, ma ſaranno iſoſceli, ed eguali altresì

li rriangoli, che lateralmente le racchiudono.

172. Or le altezze di queſte piramidi ſono li perpendicoli, che dal centro della figura ſolida cadono ſulle facce, li quali perpendicoli, ſecondo è ſtato avvertito (168), ſono tutti eguali tra di loro. Onde, conforme ſi ha la ſolidità di ciaſcuna piramide, con moltiplicare la ſua baſe, cioè la faccia, a cui ella corriſponde, per la terza parte del ſuo perpendicolo; così ſi avrà la loro ſomma, ed in conſeguenza la ſolidità della figura totale, con moltiplicare l' eſterna ſuperficie della ſteſſa figura per la terza parte di uno delli riferiti perpendicoli.

173. Quindi intorno alle figure ſolide regolari può ſtabilirſi il ſeguente teorema generale, cioè che due di eſſe ſiano tra di loro in ragion compoſta delle loro ſuperficie, e delli loro perpendicoli: dal quale teorema generale ne derivano tre altri ſpeciali; I, che eſſendo eguali li perpendicoli, le due figure ſiano nella ſemplice ragione delle loro ſuperficie; II, che eſſendo al contrario eguali le ſuperficie, le due figure ſiano nella ſemplice ragione delli loro perpendicoli; e III finalmente, che eſſendo le ſuperficie nella reciproca ragione delli perpendicoli, le due figure

re ſiano tra di loro eguali.

174. Dallo ſteſſo teorema generale poſſono dedurſi altresì li converſi di queſt' altri tre ſpeciali; e ſono I, che eſſendo due figure ſolide regolari nella ſemplice ragione delle loro ſuperficie, li loro perpendicoli debbano eſſere eguali; II, che eſſendo al contrario le due figure nella ſemplice ragione delli loro perpendicoli, debbano eſſere eguali le loro ſuperficie; e III finalmente, che eſſendo eguali le due figure, le loro ſuperficie debbano eſſere nella reciproca ragione delli loro perpendicoli.

175. Del rimanente, non è da porſi in dubbio, che eſſendo della ſteſſa ſpecie due figure ſolide regolari, ſiano ſimili tra di eſſe, così le loro ſuperficie, come le ſteſſe figure; onde conforme le facce di tali figure, ed in conſeguenza l' intere ſuperficie ſono nella duplicata ragione delli loro lati, così le figure medeſime ſaranno nella triplicata ragione degli ſteſſi lati. E poichè la loro ſimiglianza fa, che li lati delle facce, e li perpendicoli abbaſſati su di eſſe dalli centri delle figure, ſiano proporzionali; quindi ſi è, che le ſuperficie ſiano altresì nella duplicata ragione delli perpendicoli, e le figure nella ragione loro triplicata.

§. XIII.

Della nozione del metodo, che chiamaſi degl' indiviſibili.

176. PEr ſtabilire li due principj, con cui fu dimoſtrato il teorema, che qualſiſia priſma triangolare poſſa dividerſi in tre piramidi ſimilmente triangolari, che ſiano tra di loro eguali, tacitamente ſi fece ricorſo al metodo degl' indiviſibili, da cui è derivato l'altro degl'infinitamente piccioli. E poichè di queſti due metodi ſpeſſo ſi dovrà far uſo in appreſſo, perciò prima di paſſare più oltre, non ſarà fuor di propoſito, di dare quì brevemente una chiara, e diſtinta nozione, così dell'uno, come dell'altro.

177. Ed in vero nel metodo degl' indiviſibili, ſembra a prima faccia, che aſſumaſi un principio lontano dal vero, cioè, che li componenti delle ſuperficie ſiano le linee, e li componenti de' corpi, ovvero de' ſolidi, ſiano le ſuperficie: come in fatti, non per altra ragione fu egli chiamato metodo degl' indiviſibili, ſe non perchè le linee, come prive di larghezza, ſono indiviſibili per rapporto alle ſuperficie; e le ſuperficie, come prive di profondità, ſono

ſono indiviſibili a riguardo de' corpi.

178. Riflettendoſi tuttavolta al modo, come nell' eſame delle figure, così piane, come ſolide, pongonſi a calcolo li loro indiviſibili, ſi conobbe chiaramente, che corrigeſi nel metodo il principio falſo, da eſſo aſſunto. In fatti, ſe A B C ſia una figura piana qualſivoglia, ed alla ſua baſe B C intendanſi tirate infinite rette parallele; egli è vero, che riguardanſi queſte rette, come componenti della figura piana; ma nel porle a calcolo ſi tiene conto altresì delle diſtanze, che ſerbano tra eſſo loro le ſteſſe rette; onde li veri componenti della figura ſono li piccioli trapezj, o ſiano parallelogrammi, che ſi frappongono tra quelle rette parallele. *Fig.* 22.

179. Similmente, ſe A B C D ſia una figura ſolida, ed alla ſua baſe B C D intendanſi tirati infiniti piani paralleli; egli è vero, che le ſezioni fatte da queſti piani riguardanſi, come componenti della figura ſolida; ma qualora pongonſi a calcolo, ſi tiene conto eziandio delle diſtanze, che ſerbano tra eſſo loro le ſteſſe ſezioni; e perciò li veri componenti della figura ſolida ſono le picciole piramidi troncate, o ſiano priſmi, che ſi frammezzano tra le medeſime ſezioni. *Fig.* 23.

180. Ma, perchè con maggior chiarezza

rezza poſſa comprenderſi il retto uſo, che ſi fa degl' indiviſibili nell' eſame delle figure, così piane, come ſolide, pongaſi, che nella figura piana A B C le infinite rette parallele alla ſua baſe B C ſianſi tirate in egual diſtanza l'una dall'altra. Li piccioli parallelogrammi adunque, frappoſti tra quelle parallele, avranno eguali altezze; onde, ſiccome debbono eſſere nella ſemplice ragione delle loro baſi, così potrà giudicarſi della ſomma di eſſi, ed in conſeguenza della figura, per mezzo della ſomma delle ſteſſe parallele, che ſono le loro baſi.

Fig. 22.

Fig. 23.

181. E così ancora, ſe nella figura ſolida A B C D pongaſi, che gl' infiniti piani paralleli alla ſua baſe B C D ſianſi tirati in egual diſtanza l'uno dall'altro; li piccioli priſmi, che ſi frammezzano tra le ſezioni, fatte da quelli piani, avranno eguali altezze; onde, conforme debbono eſſere nella ſemplice ragione delle loro baſi, così potrà giudicarſi della loro ſomma, ed in conſeguenza della figura, per mezzo della ſomma delle ſteſſe ſezioni, che ſono le loro baſi.

182. Riuſcì più agevole l'applicazione di queſto metodo, dacchè ſi venne in cognizione dell' Aritmetica degl' infiniti, come quella, che è molto con-

fa-

facente alla ſua indole. Già era noto, che la ſomma degl' infiniti numeri naturali, incluſovi il zero, ſia all' ultimo preſo altrettante volte, come 1 a 2; ma ſi conobbe in appreſſo, che la ſomma dell' infinite loro potenze ſia all'ultima preſa altrettante volte, come 1 a 3 ſe ſiano quadrati, come 1 a 4 ſe ſiano cubi, e così gradatamente all'infinito.

183. Con queſti teoremi adunque, può farſi più facilmente uſo del metodo degl' indiviſibili nelle ricerche geometriche. Per illuſtrarlo con qualche eſempio, debbaſi per mezzo di eſſo dimoſtrare, che il triangolo ſia la metà del parallelogrammo, con cui ha la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza. Concepiſcanſi tirate, così nel triangolo, come nel parallelogrammo infinite rette parallele alla baſe loro comune, che ſiano egualmente diſtanti l' una dall'altra; e ſiccome quelle del parallelogrammo ſono tutte eguali alla ſteſſa baſe, così l' altre del triangolo, numerate dal ſuo vertice, ſaranno come gl' infiniti numeri naturali.

184. Quindi, attento il primo teorema, che la ſomma degl' infiniti numeri naturali ſia all' ultimo preſo altrettante volte, come 1 a 2; ſarà la ſomma delle rette tirate nel triangolo all'

all' ultima preſa altrettante volte, ſimilmente come 1 a 2. Ma colla ſomma di quelle rette ſi ha il triangolo; e coll' ultima, che è la ſteſſa baſe, preſa altrettante volte, ſi ha il parallelogrammo. Dunque ancora il triangolo al parallelogrammo ſarà, come 1 a 2; e per tanto il triangolo ſarà la metà del parallelogrammo.

185. Debbaſi collo ſteſſo metodo dimoſtrare altresì, che la piramide ſia la terza parte del priſma, con cui ha la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza. Intendanſi, così nella piramide, come nel priſma tirati infiniti piani paralleli alla baſe loro comune, che ſiano egualmente diſtanti l' uno dall' altro; e ſiccome le ſezioni, fatte nel priſma, ſono tutte eguali alla ſteſſa baſe, così l' altre diſuguali, fatte nella piramide, per eſſere ſimili tanto tra di loro, quanto colla medeſima baſe, ſaranno come li quadrati delli loro lati omologi.

186. Or ritrovandoſi queſti lati ſituati in eguali diſtanze l' uno dall' altro in uno de' triangoli, che lateralmente cingono la piramide; chiaro ſi è, che li medeſimi, numerati dal vertice, ſiano come gl' infiniti numeri naturali; onde, attento il ſecondo teorema delli quadrati degli ſteſſi numeri, ſarà la ſomma delle ſezioni, fatte nella pira-

piramide, all' ultima preſa altrettante volte, come 1 a 3. Ma colla ſomma di quelle ſezioni ſi ha la piramide; e coll' ultima, che è la ſteſſa baſe, preſa altrettante volte, ſi ha il priſma. Dunque ancora la piramide ſarà al priſma, come 1 a 3; e per tanto la piramide ſarà la terza parte del priſma.

187. Per quanto poi ai teoremi dell' Aritmetica degl' infiniti, il primo di eſſi, cioè che la ſomma degl'infiniti numeri naturali, incluſovi il zero, ſia all'ultimo preſo altrettante volte, come 1 a 2, dipende egli dall' eſſere li numeri naturali in progreſſione aritmetica; onde ſi è, che il medeſimo ſia vero, ancorchè prendanſi ſoltanto alcuni di eſſi. Per lo ſecondo poi, che la ſomma de' loro quadrati ſia all' ultimo preſo altrettante volte, come 1 a 3, ricavaſi da ciò, che prendendone alcuni di eſſi, la ragione tanto più approſſimaſi a quella di 1 a 3, quanto maggiore è il numero de' quadrati, che ſi prendono.

188. In fatti, ſe prendanſi li primi tre quadrati 0, 1, 4, la ragione è di 5 a 12, che differiſce da quella di 1 a 3, o ſia di 4 a 12 per la ragione di 1 a 12; ſe poi prendanſi li primi quattro 0, 1, 4, 9, la ragione è di 7 a 18, che differiſce da quella

di

di 1 a 3, o ſia di 6 a 18 per la ragione di 1 a 18. E poichè, andando più innanzi, ritrovaſi, che la differenza delle due ragioni ſia di 1 a 24 ne' primi cinque quadrati, di 1 a 30 ne' primi ſei, di 1 a 36 ne' primi ſette, e così conſecutivamente all' infinito; chiaro ſi è, che la riferita differenza facciaſi ſempre più minore, con aumentarſi il numero de' quadrati, che ſi prendono; onde ſvanirà ella interamente, quante volte prendonſi tutti li quadrati degl' infiniti numeri naturali.

189. In una maniera conſimile potrà dimoſtrarſi il terzo teorema, cioè, che la ſomma de' cubi degl' infiniti numeri naturali ſia all' ultimo preſo altrettante volte, come 1 a 4. Imperocchè, ſiccome prendendoſi li primi tre cubi 0, 1, 8 la ragione è di 3 a 8, che differiſce da quella di 1 a 4, o ſia di 2 a 8 per la ragione di 1 a 8; così ſi ritroverà, che la differenza ſia di 1 a 12 ne' primi quattro cubi, di 1 a 16 ne' primi cinque, di 1 a 20 ne' primi ſei, e così all' infinito. Onde, facendoſi la riferita differenza ſempre più minore, con aumentarſi il numero de' cubi, che ſi prendono; dovrà ella ſvanire interamente, qualora prendonſi tutti li cubi degl' infiniti numeri naturali.

190. Nè altrimente potranno dimoſtrarſi gl' altri teoremi, che ſeguono intorno alle potenze ſuperiori degl' infiniti numeri naturali; ma ſe chiameremo in ajuto la Geometria, ſi vedrà, che ſimili teoremi hanno luogo ancora, ſe in vece delle potenze prendanſi le radici degli ſteſſi numeri: ſiccome in effetto la ſomma delle loro radici dee eſſere all' ultima preſa altrettante volte, come 2 a 3 ſe ſiano quadrate, come 3 a 4 ſe ſiano cube, e così gradatamente all' infinito; ed ecco come geometricamente poſſono dimoſtrarſi queſt' altri teoremi.

191. Pongaſi, che la figura A B C *Fig.* ſia d' indole tale, che le rette M N 24. parallele alla ſua baſe B C ſiano, come li quadrati delle corriſpondenti porzioni A N del lato A B. Se adunque compiſcaſi il parallelogrammo B D, e facciaſi, che l' altre M O ſiano parallele alla C D, ſaranno al contrario li quadrati delle M O, come le corriſpondenti porzioni A O del lato A D. Onde, conforme prendendoſi le prime porzioni A N in modo, che ſiano come li numeri naturali, le M N debbono eſſere come li quadrati degli ſteſſi numeri; così, ſe prendanſi l' altre porzioni A O, come li numeri naturali, ſaranno al contrario le M O, come le ra-

radici quadrate delli medeſimi numeri.

192. Or, attento il teorema, che la ſomma de' quadrati degl' infiniti numeri naturali ſia all' ultimo preſo altrettante volte, come 1 a 3, la figura A B C dee eſſere la terza parte del parallelogrammo B D; onde l' altra figura A D C, contenendone gli rimanenti due terzi, ſarà al parallelogrammo B D, come 2 a 3; e per tanto, riguardando le M O, come li componenti della figura A D C, ſarà la ſomma delle radici quadrate degl'infiniti numeri naturali all' ultima preſa altrettante volte, ſimilmente come 2 a 3.

Fig. 24. 193. Pongaſi in appreſſo, che la figura A B C ſia d' indole tale, che le rette M N parallele alla ſua baſe B C ſiano, come li cubi delle corriſpondenti porzioni A N del lato A B. Saranno dunque al contrario li cubi dell' altre M O, che tiranſi nell' altra figura A D C parallele alla C D, come le corriſpondenti porzioni A O del lato A D. Onde, ſiccome prendendoſi le prime porzioni A N in modo, che ſiano come li numeri naturali, debbono eſſere le M N, come li cubi degli ſteſſi numeri; così, ſe prendanſi l' altre porzioni A O, come li numeri naturali, ſaranno al contrario le M O, come le radici cube delli medeſimi numeri.

194.

194. Attento poi il teorema, che la ſomma de' cubi degl' infiniti numeri naturali ſia all' ultimo preſo altrettante volte, come 1 a 4, la figura A B C dee eſſere la quarta parte del parallelogrammo B D; onde l' altra figura A D C, contenendone li rimanenti tre quarti, ſarà allo ſteſſo parallelogrammo B D, come 3 a 4; e per tanto, riguardando le M O, come li componenti della figura A D C, ſarà la ſomma delle radici cube degl' infiniti numeri naturali all' ultima preſa altrettante volte, ſimilmente come 3 a 4.

§. XIV.

Della nozione del metodo, che chiamaſi degl' infinitamente piccioli.

195. DAl metodo degl' indiviſibili è derivato l' altro degl'infinitamente piccioli, in cui ſi ricorre altresì ai minimi componenti, o ſiano elementi delle linee, delle ſuperficie, e delli corpi, per inveſtigarne le proprietà; ma ſenza alterare la loro indole, cioè, di eſſere elementi della linea altre lineette, elementi della ſuperficie altre ſuperficie più picciole, ed elementi finalmente del corpo altri corpicciuoli; e la ragione, per cui chiamaſi metodo degl'

degl' infinitamente piccioli, ſi è, perchè riguardanſi in eſſo li riferiti elementi di picciolezza tale, che ſiano minori di ogn' altra quantità dello ſteſſo genere, che poſſa aſſegnarſi.

196. Li riferiti elementi intanto, non oſtante la ſomma loro picciolezza, ritengono l' indole di eſſere quantità; e perciò non ſolo potranno paragonarſi tra eſſo loro, ma ſaranno altresì diviſibili all' infinito; e quindi ſi è, che poſſano conſiderarſi altri elementi, che ſiano infinitamente piccioli per rapporto ad eſſi: ſiccome in fatti nel mezzo cerchio BCD, ſe la MN, perpendicolare ſul diametro BO, ſia infinitamente picciola per rapporto alla porzione finita B N dello ſteſſo diametro, ſarà l'altra porzione D N di una picciolezza eziandio infinita per rapporto alla MN, eſſendo D N ad M N, come M N a B N.

Fig. 25.

197. Ed in vero diſtinguonſi in queſto metodo varj ordini di quantità infinitamente picciole, chiamandoſi del primo ordine quelle, che ſono di una picciolezza infinita per rapporto alle quantità finite; del ſecondo ordine l'altre, che ſono di una picciolezza eziandio infinita per rapporto a quelle del primo; e così gradatamente all'infinito. Ma, conforme la quantità finita dee eſſerci di nor-

norma, per giudicare dell'ordine, a cui rapportaſi una quantità infinitamente picciola; così, attente le proporzioni, che hanno luogo nella moltiplicazione, e diviſione, potranno ſtabilirſi le due ſeguenti regole, per conoſcere di qual' ordine ſiano il prodotto, ed il quoziente, che ſi hanno colla moltiplicazione, e diviſione di due quantità infinitamente picciole.

198. La prima ſi è, che il prodotto debba eſſere di quell' ordine, che ci additano gl' eſponenti uniti inſieme degli ſteſſi ordini, di cui ſono le quantità, che moltiplicanſi tra di loro; dimodochè, ſe una di eſſe ſia del ſecondo, e l' altra del primo, il prodotto dovrà eſſere una quantità infinitamente picciola del terzo ordine. L' altra regola ſi è, che il quoziente debba eſſere di quell' ordine, che ci addita l' eſponente dell' ordine della quantità, che ſi divide, minorato dell' eſponente dell' ordine dell' altra quantità, per cui ſi divide: dimodochè, dividendoſi una quantità infinitamente picciola del terzo ordine per un' altra del primo, il quoziente dovrà eſſere una quantità infinitamente picciola del ſecondo ordine.

199. Se le due quantità infinitamente picciole, tra le quali dee farſi la di-

viſione, ſiano di un medeſimo ordine; chiaro ſi è, che ſecondo la regola data non ritrovaſi per lo quoziente ordine alcuno; onde queſto ſteſſo dee eſſerci di argomento, che il quoziente ſia quantità finita, ſiccome in effetto dee egli eſſere, attenta la proporzione, che ha luogo nella diviſione. Se poi la quantità, che ſi divide, ſia di un' ordine inferiore a quello dell' altra, per cui ſi divide; chiaro ancora ſi è, che ſecondo la ſteſſa regola ritrovaſi per lo quoziente un' ordine negativo; onde da ciò ne ſegue, che colle quantità infinitamente picciole accoppianſi altre infinitamente grandi, che ſimilmente debbonſi diſtinguere in varj ordini.

200. Ed in fatti, dovendo eſſere il dividendo al diviſore, come l' unità al quoziente, vedeſi chiaramente, che una quantità infinitamente picciola del primo ordine diviſa per un' altra del ſecondo, debba dare per quoziente una quantità infinitamente grande del primo ordine. E per la ſteſſa ragione, ſe una quantità infinitamente picciola del primo ordine dividaſi per un' altra del terzo, il quoziente dovrà eſſere una quantità infinitamente grande del ſecondo ordine. Onde gl' ordini delle quantità infinitamente picciole, li di cui eſponenti ritrovanſi eſſere negativi,

tivi, altro non ſono, ſe non che li corriſpondenti ordini delle quantità infinitamente grandi.

201. Quindi le due regole, date di ſopra, debbono aver luogo nella moltiplicazione, e diviſione così delle quantità infinitamente picciole, come dell' altre infinitamente grandi; anzi le ſteſſe regole dovranno eziandio oſſervarſi, ſe la moltiplicazione, e diviſione debbanſi fare tra una quantità infinitamente picciola, ed un' altra infinitamente grande; onde ſi è, che eſſendo queſte due quantità di ordini eguali, le medeſime moltiplicate tra di loro debbano dare per prodotto una quantità finita, per cui gl' ordini delle quantità infinitamente grandi ſeparanſi da quelli, a cui rapportanſi le quantità infinitamente picciole.

202. Or, attenta la nozione delle quantità infinitamente picciole, e delli varj loro ordini, non è da porſi in dubbio, che ſenza nota di errore, debbanſi avere come eguali due quantità, che differiſcono tra di loro per un' altra infinitamente picciola per rapporto a ciaſcuna di eſſe. Onde, ſe A B C ſia una figura piana, e le due M N, *m n*, parallele alla ſua baſe B C, ſiano infinitamente vicine, non ſolo potrà prenderſi una di eſſe in luogo dell' *Fig.* 22.

altra ; ma potrà conſiderarſi altresì, come parallelogrammo, il picciolo trapezio, che inſieme racchiudono ; e per la ſteſſa ragione, ſe nella figura ſolida
Fig. A B C D con piani paralleli alla ſua
23. baſe B C D intendanſi fatte due ſezioni infinitamente vicine, potrà prenderſi una di eſſe per l'altra, e riguardarſi ancora, come priſma, la picciola piramide troncata, compreſa tra le due ſezioni.

203. Ma il gran vantaggio di queſto metodo ſi è, che potendoſi riguardare le porzioni infinitamente picciole di una curva, come tante picciole rette, adattanſi alle curve gli ſteſſi teore-
Fig. mi delle linee rette. Per ſchiarirlo con
26. qualche eſempio, ſia il cerchio B C D, di cui A ſia il centro, e B D il diametro. Erigganſi ſulli punti della ſua circonferenza perpendicolarmente al di lui piano le corriſpondenti perpendicolari M N, abbaſſate su'l diametro B D dagli ſteſſi punti. Si formerà adunque con eſſe una ſuperficie curva, che io dico eſſere d'indole tale, che ciaſcuna delle ſue porzioni, corriſpondenti ai quadranti B C, D C, B E, D E, ſia eguale al quadrato del raggio A B, ed in conſeguenza che l'intera ſuperficie ſia eguale al quadrato del diametro B D.

204. Per dimoſtrarlo, ſiano nel quadrante BC infinitamente vicine le due perpendicolari MN, *mn* abbaſſate su 'l diametro BD, le di cui eguali nella ſuperficie curva ſiano MO, *mo*; e poichè il picciolo archetto M*m* può riguardarſi come una picciola retta, col medeſimo prolungato ſi avrà la tangente MT. Quindi, congiunta la AM, e rirata la *mr* parallela al diametro BD, il picciolo triangolo M*mr*, come equiangolo col triangolo MTN, ſarà equiangolo altresì coll'altro AMN; e per tanto, eſſendo AM ad MN, o ſia MO, come M*m* ad M*r*, o ſia N*n*, ſarà il picciolo trapezio OM*mo* eguale al picciolo rettangolo del raggio AB nella N*n*.

205. E poichè queſta ſteſſa dimoſtrazione ha luogo, ovunque nel quadrante BC ſi abbaſſino ſul diametro BD le due perpendicolari infinitamente vicine MN, *mn*; ſarà la porzione della ſuperficie curva, corriſpondente allo ſteſſo quadrante BC, eguale al quadrato del raggio AB. Onde, dimoſtrandoſi in una maniera conſimile, che ciaſcuna dell' altre tre porzioni della ſteſſa ſuperficie, corriſpondenti agl' altri tre quadranti DC, BE, DE, ſia parimente eguale al quadrato del raggio; ſarà l' intera ſuperficie eguale

al quadrato del diametro BD.

Fig. 27. 206. Per addurre un' altro eſempio, ſia di nuovo il cerchio BCD, che abbia per ſuo centro il punto A, e per ſuo diametro la BD. Erigganſi ſulli punti della ſua circonferenza perpendicolarmente al di lui piano le corde BM, tirate dal punto B a quegli ſteſſi punti. Si formerà adunque con eſſe un' altra ſuperficie curva di diverſa configurazione dalla precedente, che io dico eſſere d' indole tale, che ciaſcheduna delle due ſue porzioni, corriſpondenti alle mezze circonferenze BCD, BED, ſia eguale al quadrato del diametro BD, ed in conſeguenza che la ſuperficie intera ſia eguale al doppio dello ſteſſo quadrato.

207. Per dimoſtrarlo, ſiano nella mezza circonferenza BCD le due corde BM, B*m* infinitamente vicine, le di cui eguali nella ſuperficie curva ſiano MO, *mo*, e deſcrivanſi col centro B, e cogl' intervalli delle due BM, B*m* gl' archi circolari MN, *mn*, che s' incontrino col diametro BD ne' punti N, ed *n*. Potendoſi adunque riguardare il picciolo archetto *mr*, compreſo tra le due BM, B*m* come una picciola retta perpendicolare ſulla BM; ſarà il picciolo triangolo M*r m* equiangolo coll' altro BMD; e per tanto, eſſen-

eſſendo B D a B M, o ſia M O, come M *m* ad M *r*, o ſia N *n*, ſarà il picciolo trapezio O M *m o* eguale al picciolo rettangolo del diametro B D nella N *n*.

208. E poichè queſta ſteſſa dimoſtrazione ha luogo, ovunque nella mezza circonferenza B C D tirinſi le due corde infinitamente vicine B M, B *m*; ſarà la porzione della ſuperficie curva, corriſpondente alla ſteſſa mezza circonferenza B C D, eguale al quadrato del diametro B D. Onde, dimoſtrandoſi in una maniera conſimile, che l' altra porzione della ſteſſa ſuperficie, corriſpondente all' altra mezza circonferenza B E D, ſia parimente eguale al quadrato del diametro B D; ſarà l' intera ſuperficie eguale al doppio dello ſteſſo quadrato.

§. XV.

Della nozione del cilindro, e delle ſue proprietà, così aſſolute, come relative.

209. PAſſeremo ora a trattare delle figure ſolide, che ſono terminate, o interamente da ſuperficie curve, o pure da curve, e piane miſchiate inſieme; e di queſte figure dovranno porſi a calcolo, non ſolo le ſolidità, ma eziandio le ſuperficie curve, che le terminano. Quantunque poi le ſuperficie curve poſſano eſſere d' infinite ſpecie, nientedimeno nella Geometria elementare conſideranſi ſoltanto quelle, che tirano la loro origine dalla linea circolare, o ſia circonferenza del cerchio; onde ſi è, che di quelle ſole figure ſolide in eſſa ſi tratti, che ſono terminate da tali ſuperficie, ſiccome ſono il cilindro, il cono, e la ſfera.

210. Per incominciare dal cilindro, ſi faceva egli primieramente naſcere dalla rivoluzione di un parallelogrammo rettangolo intorno ad uno de' ſuoi lati fiſſo, ed immobile per ſino a che ritorni nella prima ſua ſituazione; poichè con queſta rivoluzione, ſiccome gl' altri due lati, ad eſſo contigui, de-

ſcri-

ſcrivono due cerchi eguali, e paralleli, così dal lato rimanente deſcriveſi intorno a queſti due cerchi una ſuperficie curva; onde al ſolido, racchiuſo da queſta ſuperficie curva, e dagli ſteſſi cerchi, fu dato il nome di cilindro.

211. Si conobbe intanto in appreſſo, poterſi rendere più generale la nozione del cilindro, con derivarlo da una retta moſſa talmente ſopra la circonferenza di un cerchio, che reſti ſempre parallela a se medeſima; poichè, portandoſi l' altro termine della retta per la circonferenza di un' altro cerchio eguale, e parallelo al primo, e deſcrivendoſi dalla ſteſſa retta una ſuperficie curva intorno ai due cerchi; pure ſi viene ad avere un ſolido, racchiuſo da due cerchi, e da una ſuperficie curva, deſcritta intorno agli ſteſſi cerchi.

212. Ma, facendoſi naſcere il cilindro in queſto modo, ſiccome la retta, che ſi muove, può eſſere non ſolo perpendicolare, ma obbliqua altresì al piano del cerchio, ſulla di cui circonferenza ella ſi muove; così col ſuo moto ſi viene ad avere, tanto il cilindro degl' antichi Geometri, che innalzandoſi a perpendicolo su 'l piano del cerchio, può chiamarſi cilindro retto; come un' altro cilindro, che elevaſi obbliquamente ſullo ſteſſo piano, ed a cui

perciò può darsi il nome di cilindro obbliquo, ovvero scaleno.

Fig. 28. 213. Adunque se da un punto B della circonferenza del cerchio BCD elevisi la BE inclinata, come si voglia, al piano del cerchio, e conducasi questa retta per tutta la circonferenza con legge tale, che resti sempre parallela a se medesima; chiaro si è, che debba condursi l' altro termine E per la circonferenza dell' altro cerchio EFG eguale, e parallelo al primo BCD. Onde, descrivendosi dalla stessa retta intorno a questi due cerchi una superficie curva, siccome chiamasi cilindro il solido, che ella racchiude insieme colli due cerchi, così ella stessa si chiamerà superficie cilindrica.

214. Chiamasi poi asse del cilindro la retta AH, che congiunge insieme li centri A, ad H delli due cerchi BCD, EFG, che terminano il cilindro. E poichè, per essere eguali, e parallele le due AB, HE, debbono essere eguali, e parallele ancora l' altre due AH, BE; quindi si è, che l' asse AH abbia per rapporto al piano del cerchio BCD la stessa inclinazione con quella della BE; onde il cilindro dovrà dirsi retto, o scaleno, secondochè il suo asse AH è perpendicolare, o obbliquo al piano del cerchio BCD.

215.

215. Riguardaſi in oltre, come baſe del cilindro, il cerchio ſteſſo B C D, da cui egli prende la ſua origine; onde l' altezza del cilindro ſarà la perpendicolare, che da un punto del cerchio oppoſto ſi abbaſſa su 'l primo, la quale perpendicolare nel cilindro retto ſarà lo ſteſſo aſſe A H. Quindi due cilindri, ſituati colle loro baſi tra due piani paralleli, dovranno eſſere della ſteſſa altezza; e ſecondo ſi vedrà da quì a poco, la ſolidità di qualſiſia cilindro, a ſimiglianza di quella del priſma, dovrà ripeterſi dalla baſe, e dall' altezza moltiplicate inſieme.

216. Qualunque ſia la forma del cilindro, non è da porſi in dubbio, che ſe bene la ſuperficie cilindrica ſia curva, nientedimeno le rette, tirate dal perimetro della baſe parallele all' aſſe del cilindro, debbano combaciarſi colla ſteſſa ſuperficie; onde ſi è, che la ſezione fatta nel cilindro per un piano, che o paſſi per l' aſſe, o ſia ad eſſo parallelo, debba eſſere parallelogrammo. Ma ſe poi ſeghiſi il cilindro per un piano parallelo alla ſua baſe, la ſezione ſarà un cerchio eguale, e parallelo a quello della baſe, tantochè le due porzioni, in cui rimane diviſo il cilindro, ſaranno tuttavia cilindri della ſteſſa indole col cilindro totale.

217. Or ſe conſiderinſi li due cerchi, che terminano il cilindro, come due poligoni regolari, in cui il numero de' lati ſia maggiore di ogni numero, che poſſa aſſegnarſi; non ſi durerà fatica ad intendere, che il cilindro debba averſi, come un priſma regolare, che avendo per baſe uno delli due poligoni, ſia cinto lateralmente da infiniti piccioli parallelogrammi, che congiungano li piccioli lati di un poligono colli piccioli lati dell' altro; onde gli ſteſſi teoremi, che competono ai priſmi, debbono aver luogo eziandio ne' cilindri.

218. A ſimiglianza adunque del priſma, ſi avrà la ſolidità di qualſiſia cilindro, con moltiplicare la ſua baſe per la ſua altezza; onde, conforme due cilindri debbono eſſere generalmente in ragion compoſta delle baſi, e dell' altezze; così eſſendo eguali le baſi ſaranno nella ſemplice ragione dell' altezze, ed al contrario eſſendo eguali l' altezze ſaranno nella ſemplice ragione delle baſi. Ma, ſe poi ſiano eguali così le baſi, come l' altezze, o pure le baſi ſiano nella reciproca ragione dell' altezze, li due cilindri dovranno eſſere eguali.

219. Dal teorema generale intanto, che due cilindri ſiano in ragion compoſta

poſta delle baſi, e dell' altezze, poſſono dedurſi li converſi degl'altri tre teoremi ſpeciali, cioè I, che eſſendo due cilindri nella ſemplice ragione dell' altezze, debbano eſſere eguali le baſi; II, che eſſendo al contrario due cilindri nella ſemplice ragione delle baſi, debbano eſſere eguali l' altezze; e III finalmente, che ſe due cilindri ſiano eguali, la ragione dell' altezze debba eſſere reciproca di quella delle baſi.

220. Non eſſendo il cilindro altra coſa, ſe non che un priſma circolare, vedeſi inoltre, che ſi formerà un cubo eguale ad un dato cilindro, primieramente con formare un quadrato, che ſia eguale al cerchio, che ſerve di baſe al cilindro dato; ed indi con ritrovare due mezze proporzionali tra il lato di queſto quadrato, e l' altezza dello ſteſſo cilindro; poichè il cubo fatto dalla prima delle due mezze, ſarà il cubo ricercato. Onde non è da porſi in dubbio, che quanto compete al priſma, debba competere ancora al cilindro.

221. Eſſendo parallelogrammo la ſezione, fatta nel cilindro per un piano, che o paſſi per l' aſſe, o ſia ad eſſo parallelo; dovranno riguardarſi, come priſmi, eziandio le due porzioni, in cui rimane diviſo il cilindro. Onde, ſiccome la ſolidità di ciaſcuna di eſſe

ſi avrà, con moltiplicare la porzione della baſe, a cui ella corriſponde, per l'altezza; così ſaranno le due porzioni tra di loro nella ſteſſa ragione, in cui ſono le due corriſpondenti porzioni della baſe: dimodochè il piano in quella ragione, in cui divide la baſe, dividerà parimente il cilindro.

322. Per quanto alla ſuperficie cilindrica, li di cui elementi ſono li piccioli parallelogrammi, che congiungono inſieme li piccioli lati delli due poligoni regolari, che terminano il cilindro; dee farſi diſtinzione tra la ſuperficie cilindrica del cilindro retto, e la ſuperficie cilindrica del cilindro ſcaleno. In fatti, per quanto alla prima, li piccioli parallelogrammi, che la compongono, ſono tutti rettangoli; onde ſi avrà la loro ſomma, o ſia la ſuperficie cilindrica, con moltiplicare il perimetro della baſe del cilindro per l'aſſe, ovvero per la retta, da cui la ſuperficie ſi deſcrive.

223. Ed eſſendo così, ſaranno le ſuperficie cilindriche di due cilindri retti in ragion compoſta delli perimetri delle loro baſi, e delli loro aſſi: dimodochè, conſorme debbono eſſere nella ſemplice ragione degl'aſſi eſſendo eguali li perimetri, e nella ſemplice ragione delli perimetri eſſendo al contrario eguali gl'

aſſi;

aſſi ; così , ſe gl' aſſi ſiano nella reciproca ragione delli perimetri, le ſuperficie cilindriche dovranno eſſere eguali. E per poco, che vogliaſi riflettere , s' intenderà ancora , che la ſuperficie cilindrica del cilindro retto ſia al cerchio, che li ſerve di baſe , come l' aſſe del cilindro alla metà del raggio della baſe.

224. Per la ſteſſa ragione ſe ſeghiſi un cilindro retto per un piano , che o paſſi per l' aſſe, o ſia ad eſſo parallelo; ſi avranno le due porzioni della ſuperficie cilindrica, con moltiplicare le corriſpondenti porzioni del perimetro della baſe per l' aſſe del cilindro. Onde, ſiccome le ſteſſe porzioni ſono tra di loro, come le porzioni del perimetro della baſe, a cui corriſpondono; così ciaſcuna di eſſe ſarà al corriſpondente ſettore della baſe, come l' aſſe del cilindro alla metà del raggio della ſteſſa baſe.

225. Per quanto poi alla ſuperficie cilindrica del cilindro ſcaleno , li piccioli parallelogrammi, che la compongono, non ſolo non ſono rettangoli, ma nè pure tra eſſo loro ſono equiangoli ; onde non potrà ella averſi in altra guiſa, ſe non ſe con ſegare il cilindro ſcaleno per un piano , che ſia perpendicolare all' aſſe del cilindro, o pure alla retta, che la deſcrive, e con moltiplicare

care il perimetro di queſta ſezione per l' aſſe. Onde, ſe ſeghiſi il cilindro ſcaleno per un piano, che o paſſi per l' aſſe, o ſia ad eſſo parallelo, ſi avranno le due porzioni della ſuperficie cilindrica, con moltiplicare per l' aſſe le corriſpondenti porzioni di quella ſteſſa ſezione.

226. Si vuol però quì notare, che così il perimetro intero di quella ſezione, come qualſiſia ſua porzione, non poſſa determinarſi in altra guiſa, ſe non ſe meccanicamente per mezzo di un filo. Imperocchè, ſe bene la ſezione ſiaſi fatta nel cilindro, nientedimeno, per non eſſere il piano ſecante parallelo alla ſua baſe, il ſuo perimetro non è già circonferenza di cerchio, ma bensì una curva chiamata elliſſe, che non così facilmente può determinarſi per approſſimazione, ſiccome è rieſcito di fare colla circonferenza del cerchio.

§. XVI.

§. XVI.

Della nozione del cono, e delle ſue proprietà, così aſſolute, come relative.

227. DOpo il cilindro ſegue il cono, che facevaſi primieramente naſcere dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno ad uno de' lati, che contengono l' angolo retto, fiſſo ed immobile per ſino a che ritorni nella prima ſua ſituazione; poichè con queſta rivoluzione ſiccome l'altro lato deſcrive un cerchio, così dall' ipotenuſa deſcrivesi una ſuperficie curva, che andandoſi ſempre più reſtringendo, terminaſi finalmente in punta; onde al ſolido, racchiuſo da quel cerchio, e da queſta ſuperficie curva, fu dato il nome di cono.

228. Si conobbe intanto in appreſſo, poterſi rendere più generale la nozione del cono, con derivarlo da una retta, moſſa talmente ſopra la circonferenza di un cerchio, che paſſi ſempre per un punto, preſo al di ſopra dello ſteſſo cerchio; poichè, deſcrivendoſi da queſta retta una ſuperficie curva, che ſimilmente ſi va ſempre più reſtringendo verſo il punto preſo, e terminaſi finalmente in

in quel medeſimo punto, pure ſi viene ad avere un ſolido, racchiuſo da un cerchio, e da una ſuperficie curva angolare.

229. Ma facendoſi naſcere il cono in queſta guiſa, ſiccome la retta, che congiunge il centro del cerchio col punto, preſo al di ſopra del ſuo piano, e che chiamaſi aſſe del cono, può eſſere non ſolo perpendicolare, ma obbliqua altresì allo ſteſſo piano; così ſi viene ad avere tanto il cono degl' antichi Geometri, in cui l' aſſe elevaſi a perpendicolo su 'l piano del cerchio, e che può chiamarſi cono retto; come un' altro cono, in cui l' aſſe inſiſte obbliquamente ſullo ſteſſo piano, ed a cui in conſeguenza può darſi il nome di cono obbliquo, ovvero ſcaleno.

Fig. 29. 230. Adunque, ſe da un punto B della circonferenza del cerchio B C D eleviſi la B E inclinata, come ſi voglia, al piano dello ſteſſo cerchio, e conducaſi queſta retta per tutta la circonferenza con legge tale, che paſſi ſempre per lo punto E, preſo al di ſopra di quel piano; chiaro ſi è, che ſi deſcriverà dalla ſteſſa retta una ſuperficie curva, che ſi anderà ſempre più reſtringendo verſo il punto E, e ſi terminerà finalmente in quello ſteſſo punto; onde, conforme il ſolido, racchiuſo da quel cerchio,

chio, e da queſta ſuperficie curva, chiamaſi cono, così la ſuperficie ſteſſa ſi chiamerà ſuperficie conica.

231. Se congiungaſi il centro del cerchio A col punto E per la retta AE, ſi chiamerà queſta retta aſſe del cono; e ſecondochè egli è perpendicolare, o obbliquo al piano del cerchio, ſi dirà eſſere il cono retto, o pure ſcaleno. Siccome poi il punto E chiamaſi vertice del cono, così il cerchio BCD riguardaſi, come ſua baſe; onde l' altezza del cono ſarà la perpendicolare, abbaſſata dal vertice su 'l piano dello ſteſſo cerchio, da quale perpendicolare nel cono retto ſarà il ſuo medeſimo aſſe AE.

232. Qualunque ſia la forma del cono, chiaro ſi è, che ſe bene la ſuperficie conica ſia curva, nientedimeno le rette, tirate al vertice dal perimetro della baſe, debbano combaciarſi colla ſteſſa ſuperficie; onde ſi è, che la ſezione fatta nel cono per un piano, che paſſi per lo vertice, debba eſſere un triangolo. Ma ſe poi ſeghiſi il cono per un piano parallelo alla ſua baſe, la ſezione ſarà un cerchio parallelo sì, ma non già eguale a quello della baſe. E conforme la porzione di eſſo, che rimane verſo il vertice, è un'altro cono della ſteſſa indole col cono intero;

ro; così l'altra porzione, che rimane ſopra la baſe, chiamaſi cono troncato.

233. Or ſe conſiderifi il cerchio, che ſerve di baſe al cono, come un poligono regolare, in cui il numero de' lati ſia maggiore di ogni numero, che poſſa aſſegnarſi; s'intenderà facilmente, che il cono debbaſi riguardare, come una piramide regolare, che avendo per baſe quel poligono, ſia cinta lateralmente da infiniti piccioli triangoli, che congiungano col vertice li piccioli lati dello ſteſſo poligono; onde li medeſimi teoremi, che competono alle piramidi, debbono aver luogo ancora ne' coni.

234. A ſimiglianza adunque della piramide, ſi avrà la ſolidità di qualſiſia cono, con moltiplicare la ſua baſe per la terza parte della ſua altezza. Onde, conforme due coni debbono eſſere generalmente in ragion compoſta delle baſi, e dell'altezze; così, eſſendo eguali le baſi, ſaranno nella ſemplice ragione dell'altezze; ed al contrario, eſſendo eguali l'altezze, ſaranno nella ſemplice ragione delle baſi. Ma ſe poi ſiano eguali, così le baſi, come l'altezze, o pure le baſi ſiano nella reciproca ragione dell'altezze, li due coni dovranno eſſere eguali.

235. Dal teorema generale intanto, che

che due coni ſiano in ragion compoſta delle baſi, e dell' altezze, poſſono dedurſi li converſi degl' altri tre teoremi ſpeciali, cioè I, che eſſendo due coni nella ſemplice ragione dell' altezze, debbano eſſere eguali le baſi; II, che eſſendo al contrario due coni nella ſemplice ragione delle baſi, debbano eſſere eguali l'altezze; e III finalmente, che ſe due coni ſiano eguali, la ragione dell' altezze debba eſſere reciproca di quella delle baſi.

236. Non eſſendo il cono altra coſa, ſe non che una piramide circolare, vedeſi inoltre, che ſi formerà un cubo eguale ad un dato cono, primieramente con formare un quadrato, che ſia eguale al cerchio, che ſerve di baſe al cono dato; ed indi con ritrovare due mezze proporzionali tra il lato di queſto quadrato, e la terza parte dell' altezza dello ſteſſo cono; poichè il cubo, fatto dalla prima delle due mezze, ſarà il cubo ricercato. Onde non è da porſi in dubbio, che quanto compete alla piramide, debba competere ancora al cono.

237. Eſſendo triangolo la ſezione, fatta nel cono per un piano, che paſſi per lo vertice, dovranno riguardarſi come piramidi eziandio le due porzioni, in cui rimane diviſo il cono. Onde, ſicco-

ſiccome la ſolidità di ciaſcuna di eſſe ſi avrà, con moltiplicare la porzione della baſe, a cui ella corriſponde, per la terza parte dell' altezza; così ſaranno le due porzioni tra di loro nella ſteſſa ragione, in cui ſono le due corriſpondenti porzioni della baſe: dimodochè il piano in quella ragione, in cui divide la baſe, dividerà parimente il cono.

238. Per quanto alla ſuperficie conica, li di cui elementi ſono li piccioli triangoli, che congiungono col vertice del cono li piccioli lati del poligono regolare, che ſerve al cono di baſe; dee farſi diſtinzione tra la ſuperficie conica del cono retto, e la ſuperficie conica del cono ſcaleno. In fatti, per quanto alla prima, li piccioli triangoli, che la compongono, ſono tutti iſoſceli, ed hanno per comune altezza la ſteſſa retta, che deſcrive la ſuperficie conica; onde ſi avrà la loro ſomma, o ſia la ſuperficie conica, con moltiplicare il perimetro della baſe del cono per la metà di quella retta, che può riguardarſi come lato della ſteſſa ſuperficie.

239. Ed eſſendo così, ſaramo le ſuperficie coniche di due coni retti in ragion compoſta delli loro lati, e delli perimetri delle loro baſi: dimodochè, conforme debbono eſſere nella ſemplice ra-

ragione de' lati eſſendo eguali li perimetri, e nella ſemplice ragione de' perimetri eſſendo eguali li lati ; così, ſe li lati ſiano nella reciproca ragione delli perimetri, le ſuperficie coniche dovranno eſſere eguali. Ed egli facile ancora ad intenderſi, che la ſuperficie conica del cono retto ſia al cerchio, che ſerve di baſe al cono, come il lato della ſuperficie al raggio del cerchio.

240. Per la ſteſſa ragione, ſe ſeghiſi un cono retto per un piano, che paſſi per lo vertice; ſi avranno le due porzioni, in cui rimane diviſa la ſuperficie conica, con moltiplicare le corriſpondenti porzioni del perimetro della baſe per la metà del lato della ſuperficie. Onde, ſiccome le ſteſſe porzioni ſono tra di loro, come le porzioni del perimetro della baſe; così ciaſcheduna di eſſe ſarà al corriſpondente ſettore della baſe, come il lato della ſuperficie al raggio della ſteſſa baſe.

241. Per quanto poi alla ſuperficie conica del cono ſcaleno, li piccioli triangoli, che la compongono, non ſolo non ſono iſoſceli, ma nè pure hanno una comune altezza; onde non può determinarſi la ſomma di eſſi nella maniera, tenuta per la ſuperficie conica del cono retto. Aggiungaſi, che nè pure giova prendere per baſi di quelli piccioli

cioli triangoli le rette, che ſi terminano al vertice del cono, sì perchè ſono eziandio diſuguali queſt' altre loro baſi, come ancora perchè le picciole altezze ad eſſe corriſpondenti non formano inſieme il perimetro di qualche ſezione, che poſſa farſi nel cono.

242. Ed in vero la ricerca della ſuperficie conica di un cono ſcaleno è un problema, di cui tuttavia ſi deſidera una ſoluzione, che renda inſenſibile l'errore, che con eſſa ſi commette. E per quanto al modo, di cui credono li noſtri Pratici poterſi avvalere, cioè di unire inſieme la maſſima, e la minima di quelle rette, che dal vertice del cono tiranſi al perimetro della ſua baſe, e di riguardare la metà della loro ſomma, come altezza compenſatrice delli piccioli triangoli ſcaleni, che formano la ſuperficie conica, uſurpaſi da eſſi ſenza veruna dimoſtrazione.

243. Del rimanente, per quanto al cono troncato, potrà averſi la ſua ſolidità, come quella della piramide troncata, cioè primieramente con determinare, così la ſua altezza, come la differenza de' raggi delli due cerchi, che lo terminano; ed indi con ritrovare due rette, che ſiano agli ſteſſi raggi, come la riferita altezza alla riferita differenza; poichè, avendoſi con queſte rette l' altezza

tezza del cono intero, e l' altezza dell' altro, che n'è ſtato riſecato, chiaro ſi è, che ſe le medeſime rette moltiplichinſi per gli cerchi, a cui ſi rapportano, e prendaſi la differenza delli due prodotti, ſi avrà colla terza parte di queſta differenza la ſolidità ricercata.

244. Per quanto poi alla ſuperficie conica del cono troncato, dovrà farſi ſimilmente diſtinzione tra quella del cono troncato retto, e l' altra del cono troncato ſcaleno. In fatti la prima ſi avrà, con unire inſieme le circonferenze delli due cerchi, che terminano il cono troncato, e con moltiplicare la metà della loro ſomma per la retta, che deſcrive la ſteſſa ſuperficie; ma per l' altra del cono troncato ſcaleno, incontraſi la ſteſſa difficoltà dell' intera ſuperficie conica del cono ſcaleno.

§. XVII.

Delli coni paragonati colli cilindri, e della ſimiglianza, così degl' uni, come degl' altri.

245. COnforme le piramidi ſi ſono paragonate colli priſmi, così poſſono paragonarſi parimente li coni colli cilindri. Poichè dunque la ſolidità

del cilindro ſi ha, con moltiplicare la ſua baſe per l' intera ſua altezza; ed all' incontro, per avere la ſolidità del cono, deeſi moltiplicare la ſua baſe per la terza parte della ſua altezza; quindi ſi è, che il cono ſia la terza parte del cilindro, con cui ha la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza. Onde, volendoſi ſulla baſe del cilindro elevare un cono, che ſia ad eſſo eguale, biſognerà, che la ſua altezza ſia tripla dell'altezza del cilindro.

246. Attenta intanto la miſura, così del cilindro, come del cono, può ſtabilirſi il ſeguente teorema generale, cioè, che un cilindro, ed un cono ſiano tra di loro in ragion compoſta della baſe del cilindro alla baſe del cono, e dell' altezza del cilindro alla terza parte dell' altezza del cono; o pure, che è lo ſteſſo, in ragion compoſta della baſe del cilindro alla terza parte della baſe del cono, e dell' altezza del cilindro all' altezza intera del cono; dal quale teorema generale ne derivano tre altri ſpeciali.

247. Primieramente, che il cilindro, ed il cono ſiano nella ſemplice ragione della baſe del cilindro alla terza parte della baſe del cono, quante volte ſono eguali le loro altezze. In ſecondo luogo, che eſſendo al contrario eguali le loro baſi, il

il cilindro, ed il cono debbano eſſere nella ſemplice ragione dell' altezza del cilindro alla terza parte dell'altezza del cono. E finalmente, che il cilindro, ed il cono debbano eſſere eguali tra di eſſi, ſempre quando le loro baſi ſono nella reciproca ragione dell' altezza del cilindro alla terza parte dell' altezza del cono.

248. Dallo ſteſſo teorema generale poſſono dedurſi altresì li converſi degl' altri tre ſpeciali, e ſono I, che eſſendo il cilindro, ed il cono nella ſemplice ragione della baſe del cilindro alla terza parte della baſe del cono, debbano eſſere eguali le loro altezze; II, che eſſendo il cilindro, ed il cono nella ſemplice ragione dell' altezza del cilindro alla terza parte dell' altezza del cono, debbano al contrario eſſere eguali le loro baſi; e III finalmente, che eſſendo il cilindro eguale al cono, debbano eſſere le loro baſi nella reciproca ragione dell' altezza del cilindro alla terza parte dell' altezza del cono.

249. Giova intanto far vedere, come col metodo degl' indiviſibili poſſa dimoſtrarſi, che il cono ſia la terza parte del cilindro, con cui ha la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza; tanto maggiormente, che nella dimoſtrazione, fatta di ſopra per lo conſimile teorema della piramide ri-

guardo al prisma, deesi fare qualche cambiamento. Concepiscasi adunque diviso, tanto il cono, quanto il cilindro per infiniti piani paralleli alla loro base comune, che siano egualmente distanti l'uno dall'altro; e li loro indivisibili saranno gl'infiniti cerchi, fatti in essi per mezzo di questi piani.

250. Or, siccome gl' infiniti cerchi del cilindro sono tutti eguali alla base, così gl' infiniti cerchi del cono, per essere disuguali, sono come li quadrati de' loro diametri. Ma questi diametri ritrovansi situati in eguali distanze in uno de' triangoli, tagliati dal cono per piani, che passano per lo suo asse; ed in conseguenza sono, come gl' infiniti numeri naturali. Dunque gl' infiniti cerchi del cono saranno altresì, come li quadrati degl' infiniti numeri naturali.

251. Quindi, attento il teorema dimostrato di sopra (187) intorno ai quadrati degl' infiniti numeri naturali, sarà la somma degl' infiniti cerchi del cono all'ultimo preso altrettante volte, come 1 a 3. Ma colla somma di quegl' infiniti cerchi si ha lo stesso cono, e coll'ultimo preso altrettante volte si ha il cilindro. Dunque, dovendo essere il cono al cilindro similmente, come 1

a 3, ſarà il cono la terza parte del cilindro.

252. Tanto due cilindri, quanto due coni poſſono eſſere ſimili tra eſſo loro; e debbono averſi come tali, ſempre quando incontranſi in eſſi due condizioni; di cui la prima ſi è, di eſſere li loro aſſi egualmente inclinati ſulle loro baſi; e l'altra, di eſſere gli ſteſſi aſſi proporzionali ai diametri delle ſteſſe baſi. Ed in fatti, con avere li due cilindri, o li due coni le riferite condizioni, chiaro ſi è, che li piccioli parallelogrammi, o triangoli di uno di eſſi ſiano ſimili colli corriſpondenti piccioli parallelogrammi, o triangoli dell' altro.

253. Quindi, tanto due cilindri ſimili, quanto due coni ſimili, ſaranno nella triplicata ragione, così delli loro aſſi, come delli diametri delle loro baſi. In fatti la loro ragione ſi compone da quella delle baſi, e da quella dell' altezze. Ma le baſi, come cerchi, ſono nella duplicata ragione de' loro diametri; e per eſſere gl' aſſi egualmente inclinati ſulle ſteſſe baſi, le altezze ſono nella ſemplice ragione degli ſteſſi aſſi. Dunque, eſſendo gl' aſſi, e li diametri proporzionali tra di loro, ſaranno così li due cilindri ſimili, come li due coni ſimili, nella triplicata ragione, tanto

delli loro aſſi, quanto delli diametri delle loro baſi.

254. Per quanto alle ſuperficie curve delli due cilindri ſimili, e delli due coni ſimili, queſte ſono tra di loro nella duplicata ragione, così degl' aſſi, come delli diametri. In effetto, compongonſi le due ſuperficie di piccioli parallelogrammi, o di piccioli ttiangoli, che paragonati inſieme con ordine ſono ſimili tra di loro. Dunque, conforme queſti loro elementi ſono nella duplicata ragione delli loro lati omologi, così eziandio le ſuperficie ſaranno nella duplicata ragione degli ſteſſi lati. Ma queſti lati, come egualmente inclinati ſulle baſi, ſono proporzionali all' altezze, ed in conſeguenza così agl'aſſi, come ai diametri. Dunque la ragione delle due ſuperficie ſarà duplicata tanto degl' aſſi, quanto delli diametri.

255. In queſta ſteſſa duplicata ragione ſono altresì le ſuperficie totali delli due cilindri ſimili, o delli due coni ſimili. Imperocchè, per avere le loro ſuperficie totali, non deeſi fare altra coſa, ſe non ſe aggiungere alle ſuperficie curve le ſemplici baſi nelli due coni, e li loro doppj nelli due cilindri. Ma queſte baſi, come cerchi, ſono nella ſteſſa duplicata ragione, in cui ſono le ſuperficie curve. Dunque nelli cilindri

ſimili,

ſimili, e nelli coni ſimili, eziandio le ſuperficie totali ſaranno nella duplicata ragione, così degl' aſſi, come delli diametri.

256. Adunque, ſe ſopra un dato cerchio, come baſe, debbaſi eriggere un cilindro, o un cono, che ſia ſimile ad un' altro dato cilindro, o ad un' altro dato cono; primieramente dovrà darſi al ſuo aſſe lunghezza tale, che ſia all' aſſe del dato cilindro, o del dato cono, come ſono li diametri delle loro baſi; ed indi lo ſteſſo aſſe dovrà inclinarſi ſul dato cerchio, come nel cilindro dato, o nel cono dato ſta inclinato l'aſſe ſulla baſe. Ma, ſe il cilindro, o il cono, che ſi dimanda, debba eſſere non ſolo ſimile, ma eziandio in data ragione col dato cilindro, o col dato cono; in tal caſo ſi dovrà ricorrere al problema delle due mezze proporzionali, ed ecco come.

257. Pongaſi, che li due cilindri, o li due coni ſimili debbano eſſere nella ragione di A a D. Ritrovinſi tra li termini di queſta ragione due mezze proporzionali, che ſiano B, e C; indi facciaſi, che B ſia ad A, come il diametro della baſe del dato cilindro, o del dato cono ad una quarta proporzionale. Deſcrivaſi in appreſſo un cerchio, che abbia queſta quarta proporzionale

per ſuo diametro; ed il cilindro, o il cono, che ſi eleverà su di queſto cerchio ſimile al cilindro dato, o al cono dato, ſarà il cilindro, o il cono, che ſi dimanda.

258. La ragione è chiara; poichè li due cilindri, o li due coni, come ſimili tra di loro, debbono eſſere nella triplicata ragione delli diametri delle loro baſi; ed in conſeguenza nella triplicata ragione di A a B. Ma, per eſſere A, B, C, D continuamente proporzionali, ancora A a D ſta nella triplicata ragione di A a B. Dunque li due cilindri, o li due coni, non ſolo ſaranno ſimili tra di loro, ma la loro ragione ſarà altresì eguale alla ragion data di A a D.

259. Se poi vogliaſi un cilindro, o un cono, che ſia non ſolo ſimile col dato cilindro, o col dato cono C, ma eguale altresì all' altro cilindro dato, o all' altra piramide data D; pure ſi ha biſogno di due mezze proporzionali, per doverſi ridurre a cubi li due cilindri, o li due coni C, e D. Sia perciò A il lato del primo cubo, e B il lato del ſecondo. Facciaſi, che A ſia a B, come il diametro della baſe del cilindro, o del cono C ad una quarta proporzionale; e deſcrivaſi un cerchio, che abbia queſta quarta proporzionale per

ſuo

ſuo diametro. Io dico, che il cilindro, o il cono E, che elevaſi su di queſto cerchio ſimile al cilindro, o al cono C, ſia eguale altresì all' altro cilindro, o all' altro cono D.

260. La ragione ſimilmente è chiara; poichè li due cilindri, o li due coni C, ed E, come ſimili tra di loro, debbono eſſere nella triplicata ragione delli diametri delle loro baſi; onde ſaranno nella triplicata ragione di A a B. Ma in queſta ſteſſa triplicata ragione ſono parimente li cubi di A, e B, per eſſere queſti due cubi eziandio ſimili tra eſſo loro. Dunque li due cilindri, o li due coni C, ed E ſaranno, come li cubi di A, e B; e per tanto, eſſendo il cilindro, o il cono C eguale al cubo di A, ſarà l' altro cilindro, o l' altro cono E eguale al cubo di B; ed in conſeguenza eguale al dato cilindro, o al dato cono D.

§. XVIII.

Della nozione, così della sfera, come delli cerchi sferici.

261. RImane finalmente la sfera, la di cui ſuperficie non ſolo è curva da per tutto, ma ſi diſcoſta altresì egualmente da un punto interno, che riguardaſi come centro, tanto della sfera, quanto della ſua ſuperficie sferica. Onde, conforme la principale proprietà della sfera ſi è, di eſſer eguali tra di loro tutte le rette, tirate dal centro per ſino alla ſuperficie sferica; così generaſi la ſteſſa sfera, con aggirarſi un mezzo cerchio intorno al ſuo diametro fiſſo, ed immobile per ſino a che ritorni nella prima ſua ſituazione.

262. Da ciò, che la ſuperficie sferica diſcoſtaſi egualmente dal ſuo centro, ne ſegue, che ella ſia di egual curvatura da per tutto. E ſiccome le rette eguali, tirate dal centro per ſino alla ſuperficie sferica, chiamanſi raggi della sfera; così l'altre, che paſſano per lo ſteſſo centro, e terminanſi alla ſuperficie sferica da ambedue le parti, diconſi eſſere ſuoi diametri: li quali ſimilmente ſono eguali, per eſſere ciaſcuno di eſſi

eſſi doppio del raggio .

263. Or ciò , che s' incontra di ſpeciale nella ſfera , per cui ſi diſtingue da ogn' altra figura ſolida , terminata da ſuperficie curva , ſi è , che comunque ella ſeghiſi per un piano , la ſezione ſia ſempre cerchio . Per dimoſtrarlo, pongaſi primieramente , che il piano ſecante paſſi per lo centro della ſfera ; ed attenta la ſua indole , ſaranno eguali le rette , tirate dallo ſteſſo centro al perimetro della ſezione . Onde la ſezione , non ſolamente ſarà cerchio , ma avrà altresì per ſuo centro il centro ſteſſo della ſfera .

264. Pongaſi in appreſſo , che il piano ſecante non paſſi per lo centro della ſfera ; e ſiccome le rette , tirate da queſto centro al perimetro della ſezione, tutta vía debbono eſſere eguali; così queſta ſteſſa loro uguaglianza fa , che abbaſſandoſi dal centro della ſfera una perpendicolare al piano ſecante , ſiano eguali parimente le rette , tirate allo ſteſſo perimetro dal punto , su di cui cade la perpendicolare abbaſſata . Onde la ſezione ſarà ſimilmente cerchio , che avrà per ſuo centro quello ſteſſo punto.

265. Queſti cerchi , formati nella ſfera per mezzo de' piani , che la ſegano , chiamanſi cerchi ſferici , non perchè ſiano di diverſa indole dagl' altri

cerchi, ma perchè conſideranſi nella ſfera, e non già nel piano. E poichè quelli, fatti da piani, che paſſano per lo centro della ſfera, ſono non ſolo eguali tra di loro, ma maggiori ancora degl' altri; quindi ſi è, che ſiaſi dato ad eſſi il nome di cerchi maſſimi; di cui due ſono le proprietà, cioè d' interſegarſi tra eſſo loro, e di farſi il loro interſegamento in modo, che ciaſcuno di eſſi reſti diviſo per metà.

266. Ed in vero, che li cerchi maſſimi debbano neceſſariamente interſegarſi, deduceſi da ciò, che gli ſteſſi piani, da cui ſi formano, paſſando tutti per lo centro della ſfera, interſeganſi tra di loro. E poichè la comune ſezione di due di eſſi paſſa eziandio per lo centro della ſfera, ed in conſeguenza è uno de' ſuoi diametri; da ciò ancora deriva, che l' interſegamento di due cerchi maſſimi debba farſi in modo, che ciaſcuno di eſſi reſti diviſo in due mezzi cerchi.

267. Gl' altri cerchi poi, formati da piani, che non paſſano per lo centro della ſfera, chiamanſi cerchi minori; e di eſſi, conforme ſono eguali coloro, che diſtano egualmente dal centro della ſfera, così li più vicini allo ſteſſo centro debbono eſſere ſempre maggiori delli più lontani. Il che può dimoſtrarſi nel-

lo

lo ſteſſo modo, con cui fu dimoſtrato nella Geometria piana, che nel cerchio le rette egualmente diſtanti dal centro ſiano eguali, e che le più vicine al centro ſiano maggiori delle più lontane.

268. Due cerchi minori poſſono non interſegarſi tra eſſo loro; ma qual' ora avviene, che s' interſeghino, non mai il loro interſegamento potrà farſi in modo, che ciaſcuno di eſſi reſti diviſo per metà; il che corriſponde a quella proprietà del cerchio, che interſegandoſi in eſſo due rette in un punto diverſo dal ſuo centro, non poſſono ambedue rimaner diviſe in parti eguali; ed ecco in che conſiſte il divario tra li cerchi maſſimi, e gl' altri, che appellanſi cerchi minori.

269. Ma intorno ai cerchi minori non ſarà inutile l'avvertire, che ſiccome la perpendicolare, abbaſſata ſul piano di uno di eſſi dal centro della sfera, cade ſul di lui centro; così ſono vere altresì le converſe di queſta proprietà; cioè primieramente, che la retta, alzata perpendicolarmente dal centro di un cerchio minore ſul di lui piano, debba paſſare per lo centro della sfera; ed in ſecondo luogo, che la retta, la quale congiunge inſieme il centro della sfera, ed il centro di un cerchio mi-

minore, debba eſſere perpendicolare al piano di queſto cerchio.

270. Corriſpondono queſte proprietà alle tre dimoſtrate nella Geometria piana intorno al cerchio, cioè I, che paſſando una retta per lo centro del cerchio, e dividendo un' altra retta, che non paſſa per lo centro ad angoli retti, debba dividerla altresì in parti eguali; II, che dividendola al contrario in parti eguali, debba dividerla ancora ad angoli retti; e III finalmente, che una retta, dividendo un' altra retta per metà, e ad angoli retti, debba paſſare per lo centro del cerchio. Onde ſi vede, che quanto compete al cerchio per rapporto alle rette tirate dentro di eſſo, ha luogo parimente nella ſfera relativamente ai ſuoi cerchi ſferici.

271. Qualunque ſia il cerchio ſferico, aſcrivonſi ad eſſo due poli, che ſono due punti della ſuperficie ſferica talmente ſituati, che ſi fanno eguali le rette, tirate da ciaſcuno di eſſi alla circonferenza del cerchio ſferico. E ſiccome, attenta queſta loro indole, chiaro ſi è, che li medeſimi debbano eſſere li termini di quel diametro della ſfera, che paſſando per lo centro del cerchio ſferico, inſiſte perpendicolarmente ſul di lui piano; così queſto diametro

metro della sfera riguardasi, come asse del cerchio sferico.

272. Da ciò, che li poli di un cerchio sferico siano li termini del suo asse, che è diametro della sfera, ne segue, che la sezione fatta per un piano, che passa per gli poli di un cerchio sferico, debba essere cerchio massimo. Ma conforme questo cerchio massimo dee dividere il cerchio sferico per metà, e ad angoli retti; così al contrario, se un cerchio sferico sia diviso per metà, e ad angoli retti da un cerchio massimo, questo dovrà passare per gli suoi poli. Onde, se due cerchi massimi intersegansi ad angoli retti, ciascuno di essi dovrà passare per gli poli dell' altro.

273. Se due, o più cerchi sferici abbiano gli stessi poli, ed in conseguenza un' istesso asse, non v' ha dubbio, che li medesimi, come perpendicolari all' asse loro comune, debbano essere paralleli tra di loro. Ma di questa proprietà è vera altresì la conversa, cioè, che essendo paralleli due cerchi sferici, li poli di uno di essi debbano essere poli ancora dell' altro; e ciò per la ragione, che l' asse del primo cerchio, insistendo perpendicolarmente sul piano dell' altro, dee essere asse loro comune.

274. Or siccome non è da porsi in dub-

dubbio, che qualſiſia cerchio maſſimo divida la sfera in due parti eguali, le quali perciò chiamanſi emisferi; così al contrario ogni cerchio minore dovrà dividerla in due parti diſuguali, che appellanſi propriamente porzioni della sfera. Quel cerchio poi, che riſeca dalla sfera, così l' emisfero, come una qualche ſua porzione, potrà riguardarſi come baſe della parte riſecata; onde la ſua altezza ſarà la perpendicolare elevata ſulla baſe dal ſuo centro per ſino alla ſuperficie sferica; la quale perpendicolare in conſeguenza ſegnerà in queſta ſuperficie uno de' poli della ſteſſa baſe.

275. Del rimanente, attenta la proprietà della sfera, di eſſere eguali le rette tirate dal centro per ſino alla ſuperficie sferica, chiaro ſi è, che incontrandoſi un piano talmente colla ſuperficie di una sfera, che la retta, tirata dal centro al punto dell' incontro, ſia perpendicolare allo ſteſſo piano, debba egli radere la ſuperficie sferica, e toccarla in quel ſolo punto. Al contrario poi, ſe il piano ſia tangente della ſuperficie sferica, conforme la retta, che congiunge il centro della sfera col punto del contatto, dee inſiſtere su di eſſo ad angoli retti; così la perpendicolare, elevata su 'l piano dal punto del con-

contatto, dovrà paſſare per lo centro della sfera, ed eſſere in conſeguenza ſuo diametro.

§. XIX.

Della miſura, così della ſuperficie sferica, come delle ſue porzioni.

276. LA miſura della ſuperficie sferica dipende da queſto teorema, cioè, che ella ſia eguale al quadruplo del cerchio maſſimo. Sia perciò il mezzo cerchio **BDC**, che abbia per ſuo centro il punto **A**, e per diametro la retta **BC**. Se adunque dalli punti della ſua circonferenza intendanſi abbaſſate perpendicolari ſul diametro **BC**, infinitamente vicine tra di loro, ed aggiriſi il mezzo cerchio intorno al ſuo diametro fiſſo ed immobile per ſino a che ritorni nel primo ſuo ſito; colla ſua rivoluzione, conforme generaſi la sfera, così le perpendicolari abbaſſate deſcriveranno tanti cerchi paralleli, che avranno per loro aſſe il diametro **BC**, e per loro poli li punti **B**, e **C**. *Fig.* 30.

277. Or le circonferenze di queſti cerchi dividono la ſuperficie della sfera in tante picciole corone, che poſſono riguardarſi, come ſuoi elementi. Per in-

inveſtigare intanto l' indole di ciaſcuna di eſſe, ſiano M N , *m n* due perpendicolari infinitamente vicine tra di loro; e ſiccome l' archetto infinitamente picciolo M*m* può averſi, come una picciola retta, così col medeſimo prolungato ſi avrà la retta M T , che tocca il mezzo cerchio nel punto M ; onde la picciola corona sferica, corriſpondente allo ſteſſo archetto, ſarà altresì picciola corona della ſuperficie conica, che deſcriveſi colla rivoluzione della M T intorno al diametro B C.

278. Quindi, ſi avrà il valore della riferita picciola corona , con moltiplicare l' archetto M*m* per la ſomma dimezzata delle due circonferenze parallele, che la terminano (244). Ma, per eſſere queſte due circonferenze infinitamente vicine tra di loro, la ſomma dimezzata di eſſe non è differente da una delle due. Dunque ſi avrà il valore della ſteſſa picciola corona, con moltiplicare l' archetto M*m* per la circonferenza, deſcritta col raggio M N. Onde, perchè lo ſteſſo avviene a tutte l' altre picciole corone, che compongono la ſuperficie sferica; perciò, con determinare la ſomma di tutti quelli prodotti, reſterà determinata parimente , così la ſomma di tutte le picciole co-

ro-

rone, come la ſteſſa ſuperficie sferica.

279. Congiungaſi perciò la AM; ed eſſendo equiangoli li due triangoli ANM, MNT, ſarà AM, o ſia AB ad MN, come MT ad NT. Ma AB ſta ad MN, come la circonferenza deſcritta col raggio AB alla circonferenza deſcritta col raggio MN; e per eſſere parallele le due MN, *m n*, MT ſta ad NT, come M*m* ad N*n*. Dunque ſarà altresì, come la circonferenza deſcritta col raggio AB alla circonferenza deſcritta col raggio MN, così M*m* ad N*n*; e per tanto, così il prodotto dell'archetto M*m* per la circonferenza deſcritta col raggio MN, come la picciola corona sferica corriſpondente a quell'archetto, ſarà eguale al prodotto della picciola porzione N*n* del diametro BC per la circonferenza deſcritta col raggio AB.

280. Or avendo luogo queſta dimoſtrazione da per tutto, ſarà così la ſomma delle picciole corone, che compongono la ſuperficie sferica, come la ſteſſa ſuperficie eguale al prodotto dell'intero diametro BC per la circonferenza deſcritta col raggio AB. Ma, per eſſere la AB raggio della sfera, queſta circonferenza rapportaſi ad un cerchio maſſimo; onde il diametro BC moltiplicato per la medeſima dee darci il qua-

quadruplo dello ſteſſo cerchio. Dunque ancora la ſuperficie della sfera ſarà eguale al quadruplo del ſuo cerchio maſſimo; e per tanto, con determinare la capacità di queſto cerchio, e con prenderne il quadruplo, ſi avrà la ſuperficie della sfera, che ſi dimanda.

281. Da ciò intanto, che la ſuperficie della sfera ſia eguale al quadruplo del ſuo cerchio maſſimo, poſſono dedurſi due conſeguenze. La prima ſi è, che il cerchio deſcritto col diametro della sfera, come raggio, facendoſi ancora quadruplo del cerchio maſſimo, ſia eguale alla ſuperficie della sfera. E l' altra ſi è, che le ſuperficie di due sfere, come proporzionali ai loro cerchi maſſimi, ſiano nella duplicata ragione delli loro raggi, ovvero diametri. Onde per mezzo di queſta ſeconda conſeguenza, vedeſi chiaramente, come debba determinarſi il raggio di una sfera, la di cui ſuperficie, o ſia in data ragione colla ſuperficie di un' altra data sfera, o pure ſia eguale alla ſomma, o differenza delle ſuperficie di due altre sfere date.

282. In una maniera conſimile potrà determinarſi la ſuperficie sferica di qualſiſia porzione della sfera. Infatti, ſe per mezzo del cerchio, che ha per raggio la perpendicolare M N, dividaſi

Fig. 30.

la

la sfera in due porzioni; considerando le loro superficie sferiche, eziandio come composte da tante picciole corone sferiche, similmente si dimostrerà, che le medesime siano eguali ai prodotti delle due porzioni B N, C N del diametro B C per la circonferenza del cerchio massimo. Dal che ne segue, che le superficie sferiche delle due porzioni siano tra di loro, come le corrispondenti porzioni del diametro B N, C N, che sono le loro altezze.

283. Ma da ciò, può dedursi altresì, che le superficie sferiche delle due porzioni siano nella duplicata ragione delle corde B M, C M, che rapportansi agli archi, per mezzo di cui descrivonsi le due superficie. Imperocchè, essendo il triangolo BMC rettangolo in M, sarà così il quadrato della B M eguale al rettangolo delle due B C, B N, come il quadrato della C M eguale al rettangolo delle due B C, C N. Ma questi due rettangoli sono, come le due B N, C N, ed in conseguenza come le superficie sferiche delle due porzioni. Dunque ancora li quadrati delle due corde B M, C M saranno con queste superficie nella stessa ragione.

284. E da ciò può dedursi inoltre, che siccome l'intera superficie della sfera è eguale al cerchio, che ha per raggio,

gio il diametro BC ; così le ſuperficie ſferiche delle due porzioni ſiano eguali ai cerchi, che hanno per raggi le corde BM, CM. In fatti la ſuperficie della ſfera ſta alla porzione di eſſa corriſpondente all' arco BM, come BC a BN. Ma BC ſta a BN, come il quadrato della BC al quadrato della BM, o pure come il cerchio deſcritto col raggio BC al cerchio deſcritto col raggio BM. Dunque, eſſendo l' intera ſuperficie della ſfera eguale al primo cerchio, ſarà la porzione di eſſa, corriſpondente all' arco BM, ſimilmente eguale al ſecondo cerchio.

285. Eſſendo poi il cerchio deſcritto col raggio BM eguale ai due cerchi deſcritti colli raggi MN, BN; chiaro ſi è, che la porzione della ſuperficie ſferica, corriſpondente all' arco BM, ſia eguale altresì al cerchio, che ſerve ad eſſa di baſe, inſieme col cerchio, che ha per raggio la ſua altezza. Dal che ne ſegue, che la ſteſſa porzione di ſuperficie ſferica ſia maggiore del cerchio, che ſerve ad eſſa di baſe, nell' altro cerchio, di cui è raggio la ſua altezza.

286. Del rimanente, ſe intorno alla ſfera circonſcrivaſi il cilindro, dovrà eſſere la ſua ſuperficie curva eguale alla ſuperficie della ſfera, per la ragio-

gione, che così l' una, come l' altra ſuperficie ſi ha, con moltiplicare la circonferenza del cerchio maſſimo per lo ſuo diametro. E ſe per mezzo di un piano parallelo alla baſe del cilindro ſeghiſi, tanto la sfera, quanto il cilindro; le porzioni delle due ſuperficie, che tra eſſo loro ſi corriſpondono, ſaranno eziandio eguali, per la ragione ſimilmente, che ſi hanno queſte loro porzioni, con moltiplicare la circonferenza del cerchio maſſimo per l' altezza loro comune.

§. XX.

Della miſura de' triangoli sferici.

287. NElla ſuperficie della sfera poſſono formarſi con archi di cerchi sferici tutte quelle figure, che formanſi nella ſuperficie piana con linee rette; onde non ſarà inutile di far vedere, come poſſa determinarſi la porzione della ſuperficie sferica, che rimane racchiuſa in ciaſcuna di queſte figure. Baſterà intanto reſtringerci ai ſoli triangoli, ne' quali con archi ſimilmente di cerchi sferici può dividerſi ogn' altra figura; e per andare con ordine incominceremo da quelli, che ſono formati con archi di cerchi maſſimi.

288. Perciò intendaſi formato un'emis-

Fig. 31. misfero colla rivoluzione del quadrante BD intorno al raggio AB fiſſo, ed immobile; e ſe BE ſia un' altra poſizione dello ſteſſo quadrante, ſi avrà il triangolo ſferico BDE, in cui tutti tre li lati BD, BE, DE ſono archi di cerchi maſſimi, per eſſere centro loro comune lo ſteſſo centro A dell' emisfero. Or quantunque ſia limitata l' indole di queſto triangolo ſferico, sì per eſſere quadrante ciaſcuno delli due lati BD, BE, come ancora per eſſere il punto B polo del lato rimanente DE; nientedimeno giova far vedere in primo luogo, come poſſa determinarſi la ſua ſuperficie.

289. Seghiſi per tal'effetto l'emisfero per un piano, perpendicolare al raggio AB, e ſia MO l'arco del cerchio ſferico, che ſi ha con queſta ſezione. Se adunque il punto N ſia il centro del medeſimo cerchio, per eſſere parallele così le due DA, MN, come le due EA, ON, ſaranno eguali li due angoli DAE, MNO; e per tanto gl' archi DE, MO, per mezzo di cui miſuranſi gli ſteſſi angoli, ſaranno proporzionali alle loro circonferenze. Quindi la ſomma delle picciole corone ſferiche, che compongono la ſuperficie dell' emisfero, ſarà alla ſomma delle porzioni di eſſe, racchiuſe nel triangolo

lo sferico B D E, come l'intera circonferenza della baſe dell' emisfero all' arco D E, o pure come la baſe ſteſſa dell' emisfero al ſettore D A E. Onde, ſiccome la ſuperficie dell' emisfero è dupla della ſua baſe, così ancora il triangolo sferico B D E ſarà duplo del ſettore D A E.

290. Si termini ora la sfera, e su di eſſa diſtendanſi li due quadranti per ſino a che s' incontrino di nuovo nel punto C, che ſarà l' altro polo dell'arco D E. E poichè li cerchi maſſimi coll' incontro loro ſcambievole ſeganſi per metà (266), ſaranno gl' archi CD, C E ſimilmente quadranti; e perciò li due triangoli sferici B D E, C D E ſaranno eguali tra di loro. Quindi la porzione della ſuperficie sferica, racchiuſa tra li due mezzi cerchi maſſimi BDC, B E C, come dupla di ciaſcuno di eſſi, ſarà quadrupla del ſettore D A E; e per tanto, conforme con moltiplicare il raggio A B per l' arco D E ſi ha ciaſcuno delli due triangoli sferici B D E, C D E; così, ſe moltiplichiſi l' intero diametro B C per lo ſteſſo arco D E, ſi avrà la riferita porzione della ſupercie sferica.

291. Or con eſſerci noto, come debbaſi determinare quella fetta di ſuperficie sferica, che rimane racchiuſa tra

due mezzi cerchi maſſimi, non ſarà difficile di definire la ſuperficie di qualſiſia triangolo sferico, formato con archi di cerchi maſſimi. Sia perciò BDE queſto tale triangolo, li di cui lati BD, BE, DE diſtendanſi ſulla ſuperficie della sfera per ſino a che s' incontrino a due a due ne' punti C, F, G; e compiſcaſi ancora il cerchio BDCF, che ſarà baſe di un emisfero, la di cui ſuperficie ſi ritroverà diſtribuita nelli quattro triangoli sferici BDE, CDE, BEF, CEF.

Fig. 32.

292. Poichè dunque li cerchi maſſimi dividonſi per metà coll' incontro loro ſcambievole (266), ſaranno li due archi CEB, EBG eguali tra di loro; onde, tolto da eſſi il comune BE, ſarà il rimanente CE eguale al rimanente BG. E così ancora, dovendo eſſere eguali tra di loro, tanto li due archi FED, EDG, quanto gl'altri due CFB, FBD, ſarà così l'arco EF eguale all'arco DG, come l' arco CF eguale all'arco BD. Quindi li tre lati del triangolo sferico CEF ſaranno eguali ai tre lati dell' altro BDG, ciaſcuno a ciaſcuno; e per tanto, conforme li due triangoli debbono combaciarſi, con porre l' uno ſull' altro, così li medeſimi dovranno eſſere eguali.

293. Eſſendo così, la ſuperficie dell' emis-

emisfero, che ha per baſe il cerchio maſſimo BDCF, ſarà eguale alli quattro triangoli sferici BDE, CDE, BEF, BDG. Quindi la ſteſſa ſuperficie, unitamente col doppio del triangolo sferico BDE, ſarà eguale alle tre fette sferiche BDCE, DBFE, EBGD, di cui ciaſcuna ritrovaſi racchiuſa da due mezzi cerchi maſſimi. Onde conforme, con determinare ciaſcuna di eſſe, e con togliere dalla loro ſomma la ſuperficie dell' emisfero, cioè il doppio del cerchio maſſimo, ſi ha col reſiduo il doppio del triangolo sferico BDE; così colla metà dello ſteſſo reſiduo ſi avrà la ſuperficie dello ſteſſo triangolo.

294. Per paſſare ora ai triangoli sferici, in cui o neſſuno, o non tutti tre li lati ſono archi di cerchi maſſimi, riprendaſi l' emisfero, formato colla rivoluzione del quadrante BD, o BE intorno al raggio AB fiſſo, ed immobile; il quale ſeghiſi di nuovo per un piano perpendicolare al medeſimo raggio, e ſia MO l' arco del cerchio sferico, che ſi ha con queſta ſezione. Eſſendo adunque gl' archi DE, MO proporzionali alle loro circonferenze intere; ancora la ſuperficie sferica della porzione, tagliata dall' emisfero per mezzo di quel cerchio, ſarà alla ſuperficie del triangolo sferico BMO, come l'intera circonferenza del- *Fig.* 31.

la baſe dell' emisfero all' arco D E.

295. Quindi, ſiccome la ſuperficie sferica della riferita porzione ſi ha, con moltiplicare la porzione del raggio B N per l' intera circonferenza della baſe dell' emisfero; così ſi avrà la ſuperficie del triangolo sferico B M O, con moltiplicare la ſteſſa B N per l'arco D E. Onde, ſe ſi termini la sfera, e su di eſſa diſtendanſi li due quadranti B D, B E per fino a che s' incontrino di nuovo nel punto C; ſi avrà la ſuperficie dell' altro triangolo sferico CMO, con moltiplicare la rimanente porzione del diametro C N per lo ſteſſo arco D E: dimodochè li due triangoli sferici B M O, C M O ſaranno tra di loro, come le porzioni B N, C N, in cui rimane diviſo il diametro B C dal piano del cerchio, a cui appartiene l'arco M O.

296. Or ſe bene nelli due triangoli sferici B M O, C M O due ſoli lati ſiano archi di cerchi maſſimi; nientedimeno ciaſcuno di eſſi ha ciò di ſpeciale, che il lato rimanente MO ritrovaſi avere per polo il punto, in cui li primi due s' incontrano, donde avviene, che queſti due ſiano eguali ancora tra di loro. Giova intanto, che ſia nota la maniera di determinare la ſuperficie di queſti tali triangoli sferici; poichè

per

per mezzo di eſſi potrà determinarſi altresì, così la fetta di ſuperficie sferica, racchiuſa tra due qualſiſiano archi sferici, come la ſuperficie di ogn' altro triangolo sferico.

297. Siano perciò li due archi sferici DFE, DGE, che s' incontrino tra di loro ne' punti D, ed E; e pongaſi primieramente, che il ſolo DFE ſia arco di cerchio maſſimo. Ritroviſi il polo B dell' altro arco DGE; e così per gli punti B, e D, come per gli punti B, ed E faccianſi paſſare due cerchi maſſimi, li di cui archi ſiano BD, BE. Eſſendo adunque il punto B polo dell' arco DGE, potrà determinarſi la ſuperficie del triangolo sferico, che egli forma cogl' altri due BD, BE. Ma, eſſendo DFE arco di cerchio maſſimo, può determinarſi altresì la ſuperficie dell' altro triangolo sferico, che egli racchiude cogli ſteſſi due BD, BE. Dunque, determinando le ſuperficie di queſti due triangoli sferici, reſterà determinata parimente quella, che ſi frammezza tra li due archi DFE, DGE. *Fig.* 33.

298. Pongaſi in appreſſo, che neſſuno delli due DFE, DGE ſia arco di cerchio maſſimo; ed io dico, che ancora in queſt' altro caſo poſſa determinarſi la porzione di ſuperficie sferica, che tra di eſſi ſi racchiude. Facciaſi perciò paſ- *Fig.* 33.

ſare un cerchio maſſimo per gli due punti D, ed E, e ſia DHE l' arco di queſto cerchio. Adunque, per lo caſo di già eſaminato, potrà determinarſi, tanto la porzione di ſuperficie sferica, che racchiudono li due archi DHE, DFE, quanto l'altra, compreſa tra li due DHE, DGE. Onde, determinandoſi effettivamente queſte due porzioni di ſuperficie sferica, ſi avrà colla loro differenza quella, che contengono li due archi DFE, DGE.

299. Colla determinazione di queſt' altre fette di ſuperficie sferica, ecco ora, come potrà determinarſi la ſuperficie di ogn' altro triangolo sferico. Sia *Fig.* 34. DEF il triangolo sferico, di cui deeſi determinare la ſuperficie, ed in eſſo neſſuno de' lati ſia arco di cerchio maſſimo. Faccianſi paſſare tre archi di queſta indole, uno per gli punti D ed E, un' altro per gli punti D ed F, ed il terzo per gli punti E ed F. E conforme può determinarſi la ſuperficie del triangolo sferico, contenuto da queſti tre archi; così potranno determinarſi altresì le fette di ſuperficie sferica, che li medeſimi archi racchiudono cogl'altri tre DE, DF, EF, colli quali s' incontrano; onde colla loro determinazione reſterà determinata parimente la ſu-

ſuperficie del propoſto triangolo sferico DEF.

§. XXI.

Della miſura della ſolidità, così della sfera, come delle ſue porzioni.

300. PEr intendere, come debba miſurarſi la ſolidità della sfera, concepiſcaſi di nuovo diviſa la ſua ſuperficie in infinite picciole corone, di cui ciaſcuna ſia terminata da due circonferenze parallele, ed infinitamente vicine tra di loro. Poichè dunque queſte due circonferenze ſono perimetri di due poligoni regolari, in cui il numero de' lati è maggiore di ogni numero, che poſſa aſſegnarſi; chiaro ſi è, che la picciola corona sferica, terminata dalle due circonferenze, poſſa concepirſi ſuddiviſa in infiniti piccioli quadrilateri, che congiungano inſieme li piccioli lati di una di eſſe colli piccioli lati dell' altra.

301. Quindi, ſe tutte le picciole corone, che compongono la ſuperficie sferica, intendanſi diviſe ne' ſuoi piccioli quadrilateri; potrà conſiderarſi la sfera, come compoſta da tante picciole piramidi, che abbiano per baſi li riferiti piccioli quadrilateri, per vertice comune il centro della sfera, e per altezze

li raggi della medeſima. Onde, ſiccome ciaſcuna di queſte picciole piramidi ſi ha, con moltiplicare la ſua picciola baſe per la terza parte della ſua altezza; così ſi avrà la ſolidità della sfera, che è la loro ſomma totale, con moltiplicare la ſua ſuperficie, o ſia il quadruplo del cerchio maſſimo, per la terza parte del ſuo raggio: dimodochè la sfera ſarà eguale ad un cono, che ha per baſe un cerchio, eguale alla ſua ſuperficie, e per altezza il ſuo raggio.

302. Da ciò intanto poſſono dedurſi molte conſeguenze. La prima ſi è, che due sfere ſiano tra di loro nella triplicata ragione delli loro raggi, ovvero diametri. In fatti, attenta la maniera di determinare la ſolidità della sfera, debbono eſſere le due sfere in ragion compoſta delle loro ſuperficie, e delli loro raggi. Ma le ſuperficie delle due sfere, ſecondo è ſtato dimoſtrato di ſopra (281), ſono nella duplicata ragione degli ſteſſi raggi; e con comporre una ragion ſemplice colla ſua duplicata, ſi ha la triplicata della ſteſſa ragione. Dunque le due sfere ſaranno tra di loro nella triplicata ragione delli loro raggi, ovvero diametri.

303. La ſeconda conſeguenza ſi è, che ſe ſi abbia un cilindro, la di cui baſe ſia il cerchio maſſimo della sfera,

e l'

e l' altezza il ſuo diametro ; la sfera ſia a queſto cilindro nella ragione di 2 a 3. Imperocchè, attenta la maniera di determinare la ſolidità, così della sfera, come del cilindro, la sfera dee eſſere al cilindro in ragion compoſta della ſuperficie sferica al cerchio maſſimo, e della terza parte del raggio all' intero diametro. Ma di queſte due ragioni la prima è di 4 ad 1, e la ſeconda è di 1 a 6 ; le quali due ragioni compongono inſieme la ragione di 4 a 6, o pure di 2 a 3. Dunque la sfera ſarà al cilindro, come 2 a 3.

304. La terza conſeguenza ſi è, che ſe ſi abbia un cono, la di cui baſe ſia il cerchio maſſimo della sfera, e l' altezza il ſuo diametro ; la sfera ſia a queſto cono nella ragione di 2 ad 1. Imperocchè, attenta la maniera di determinare la ſolidità, così della sfera, come del cono, la sfera dee eſſere al cono in ragion compoſta della ſuperficie sferica al cerchio maſſimo, e della terza parte del raggio alla terza parte del diametro. Ma di queſte due ragioni la prima è di 4 a 1, e la ſeconda è di 1 a 2; le quali due ragioni compongono inſieme la ragione di 4 a 2, o pure di 2 ad 1. Dunque la sfera ſarà al cono, come 2 ad 1.

305. La quarta, ed ultima conſe-

guenza ſi è, che ſe intorno alla sfera circonſcrivaſi una figura ſolida, terminata da ſuperficie piane ; la sfera , e la figura ſiano tra di loro nella ſteſſa ragione , in cui ſono le loro ſuperficie . In fatti , ſe dividaſi la figura in piramidi , che abbiano per baſi le ſue facce , e per vertice comune il centro della sfera ; l' altezza di ciaſcuna di eſſe ſarà il raggio della ſteſſa sfera (275) . Onde la ſolidità così della sfera , come della figura ſi avrà , con moltiplicare la ſua ſuperficie per la terza parte del raggio ; e per tanto , ſiccome queſti prodotti ſono nella ragione delle ſole ſuperficie , così in queſta ſteſſa ragione ſaranno altresì la sfera , e la figura .

306. Specialmente poi , ſe la figura ſolida , circonſcritta intorno alla sfera , ſia il cubo del ſuo diametro ; la sfera dovrà eſſere a queſto cubo , come il quadruplo del cerchio maſſimo al ſeſtuplo del quadrato , fatto dal ſuo diametro , ed in conſeguenza come la ſeſta parte della circonferenza al diametro . Onde eſſendo , ſecondo Archimede , la circonferenza al diametro , come 22 a 7 , o pure come 66 a 21 ; ſarà la sfera al cubo , circonſcritto intorno ad eſſa , come 11 a 21 ; dal che ſi vede , che la ragione della sfera al cubo del

ſuo

ſuo diametro ſia minore di quella, che ha il cerchio al quadrato dello ſteſſo diametro.

307. Eſſendo le sfere nella triplicata ragione delli loro raggi, chiaro ſi è, che per deſcrivere una sfera, che ſia eguale alla ſomma, o differenza di due altre sfere date, non debba farſi altra coſa, ſe non che ritrovare un cubo, che ſia eguale alla ſomma, o differenza de' cubi, fatti dalli raggi delle due sfere date; poichè il lato di queſto cubo ſarà il raggio della sfera, che ſi dimanda. Ma, ſe vogliaſi una sfera, che ſia in data ragione con un' altra sfera data, primieramente dovrà ritrovarſi una retta, che ſia al raggio della sfera data in quella data ragione, ed indi tra lo ſteſſo raggio, e queſta retta ſi dovranno ritrovare due mezze proporzionali; poichè la prima di eſſe ſarà il raggio della sfera ricercata.

308. Per eſſere poi la sfera dupla del cono, che ha per baſe il ſuo cerchio maſſimo, e per altezza il ſuo diametro (304); ſi formerà un cubo eguale ad una data sfera, primieramente con formare un quadrato, che ſia eguale al ſuo cerchio maſſimo; ed indi con ritrovare due mezze proporzionali tra il lato di queſto quadrato, e li due terzi del ſuo diametro; poichè il cubo della

prima di queſte due mezze ſarà il cubo ricercato ; il quale potrà averſi ancora , con ritrovare un cubo , a cui il cubo del diametro della ſfera data ſia, come lo ſteſſo diametro alla ſeſta parte della ſua circonferenza .

309. Del rimanente la conſiderazione del ſettore ha luogo ancora nella ſfera , che formaſi propriamente còlle rette , tirate dal centro della ſfera alla circonferenza di un cerchio ſferico ; ma potendoſi egli ancora riſolvere in piccole piramidi della ſteſſa indole con quelle , in cui ſi è diviſa l' intera ſfera , la ſua ſolidità parimente ſi avrà , con moltiplicare la ſua baſe , cioè la porzione della ſuperficie ſferica , su di cui egli ſi appoggia , per la terza parte del raggio : dimodochè , ſiccome due ſettori di una ſteſſa ſfera debbono eſſere nella ſemplice ragione delle loro baſi ; così due ſettori di due ſfere diverſe ſaranno in ragion compoſta delle loro baſi , e delli raggi delle ſteſſe ſfere .

310. Colla determinazione del ſettore ſferico potrà determinarſi altresì la porzione della ſfera , racchiuſa in detto ſettore ; non dovendoſi fare altra coſa , ſe non che dal ſettore togliere il cono , che ſimilmente in eſſo ſta racchiuſo ; ma per maggior compendio potrà farſi uſo della regola ſeguente . Sia

M N il raggio del cerchio sferico, che *Fig.* ſerve di baſe alla porzione; e ſia BN l' 31. altezza della ſteſſa porzione. Tagliſi dalla BN la terza parte, che ſia BO; indi ſuppoſto, che A ſia il centro della sfera, ritroviſi la circonferenza del cerchio, che ha per diametro la A O; moltiplichiſi finalmente queſta circonferenza per lo quadrato dell' altezza B N; e col prodotto ſi avrà la ſolidità della porzione, che ſi dimanda.

311. Quantunque poi la porzione della sfera, racchiuſa nel ſettore sferico, ſia minore dell' emisfero; nientedimeno la regola data potrà adattarſi, non ſolo alla porzione maggiore dell' emisfero, ma eziandio all' emisfero medeſimo; anzi, ſe vogliaſi riguardare la sfera, come porzione di se ſteſſa, pure colla medeſima regola potrà determinarſi la ſua ſolidità. Onde, conforme ſi avrà la ſolidità dell' emisfero, con moltiplicare la circonferenza del cerchio, che ha per diametro li due terzi del raggio della sfera, per lo quadrato dello ſteſſo raggio; così ſi avrà la ſolidità della sfera, con moltiplicare la circonferenza del cerchio, che ha per diametro la ſeſta parte del diametro della sfera, per lo quadrato dello ſteſſo diametro.

312. Per quanto alle lunette sferiche, che formanſi con porzioni di due sfere,

sfere, le di cui baſi ſiano eguali; ſi avrà così la ſuperficie, come la ſolidità di ciaſcuna di eſſe, con determinare le ſuperficie, e le ſolidità delle due porzioni, che la formano. Ma egli è da notarſi, che ſe bene la ſua ſuperficie ſia ſempre eguale alle ſuperficie unite inſieme delle due porzioni; nientedimeno la ſua ſolidità all' ora ſolamente ſi fa eguale alla ſomma delle ſolidità delle ſteſſe porzioni, quantevolte ella è conveſſa da amendue le parti; poichè, ſe la lunetta da un lato ſia conveſſa, e dall' altro concava, la ſua ſolidità farà eguale alla differenza dell' altre due.

313. Finalmente, per determinare lo ſpazio, che rimane racchiuſo tra le ſuperficie di due sfere concentriche, altro non dee farſi, ſe non che determinare le ſolidità delle due sfere, e ſottrarre la minore dalla maggiore. Ma, ſiccome quello ſpazio dee eſſere eguale ad un cono troncato, che avendo per altezza la differenza de' raggi delle due sfere, è terminato da due cerchi, eguali alle ſuperficie delle ſteſſe sfere (301); così, con determinare la ſolidità di queſto cono troncato, ſi avrà altresì lo ſpazio, che rimane racchiuſo tra le ſuperficie delle due sfere concentriche.

§. XXII.

§. XXII.

Delle figure ſolide, che ſi generano con ogn' altra rivoluzione d' archi circolari.

314. UN' arco circolare può aggirarſi ancora intorno ad una retta, che non ſia ſuo diametro; ma con queſt' altra ſua rivoluzione nè la ſuperficie, che egli deſcrive, ſarà porzione di ſuperficie sferica, nè la figura ſolida, terminata da quella ſuperficie, ſarà porzione di sfera; onde, per non tralaſciare coſa veruna, di cui ſia utile la conoſcenza, faremo ora vedere, come poſſa determinarſi, così la ſuperficie, che deſcrive un' arco circolare, con aggirarſi intorno ad una retta, che non ſia ſuo diametro, come la figura ſolida, terminata da queſta ſuperficie.

315. Sia perciò l' arco circolare EMF, che abbia per ſuo centro il punto A; e ſi aggiri il medeſimo arco intorno alla retta GH, che non paſſi per quel centro. Dal punto M, preſo ad arbitrio nell' arco EMF, ſi abbaſſi ſulla GH la perpendicolare MO, a cui ſia infinitamente vicina l'altra *mo*. E ſe bene la ſuperficie, deſcritta colla rivo- *Fig.* 35.

rivoluzione dell' arco EMF intorno alla retta GH, non ſia sferica; pure però li ſuoi elementi ſaranno tante picciole corone coniche; onde la picciola corona, corriſpondente all'archetto M*m*, pure ſarà eguale al prodotto, che ſi ha, con moltiplicare lo ſteſſo archetto per la circonferenza del cerchio, di cui la MO è raggio.

316. Tiriſi ora per lo centro A la retta BC parallela alla GH, con cui s' incontrino le due MO, *m o* ne' punti N, ed *n*; e dallo ſteſſo centro ſi abbaſſi ſulla GH la perpendicolare AD. Eſſendo adunque la circonferenza del cerchio, deſcritto col raggio MO, eguale alle circonferenze delli due cerchi, che deſcrivonſi colli raggi MN, AD; la ſteſſa picciola corona ſarà eguale ai due prodotti, che ſi hanno, con moltiplicare l' archetto M*m* per queſt' altre due circonferenze; e per tanto, avendoſi col primo di queſti due prodotti la picciola corona, che deſcriverebbe lo ſteſſo archetto M*m*, ſe ſi aggiraſſe intorno alla BC; la medeſima picciola corona, di cui ſi tratta, ſarà eguale a queſt' altra picciola corona inſieme col prodotto dell' archetto M*m* per la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la AD.

317. Per avere queſta dimoſtrazione luo-

luogo da per tutto, chiaro ſi è, che la ſuperficie, deſcritta colla rivoluzione dell' arco EMF intorno alla GH, ſia eguale all' altra, che deſcriverebbe lo ſteſſo arco, ſe ſi aggiraſſe intorno alla BC, ed al prodotto del medeſimo arco per la circonferenza del cerchio, di cui è raggio la AD. Ma queſt' altra ſuperficie è sferica di ſua natura, per eſſere la BC diametro del cerchio, a cui appartiene l' arco EMF. Dunque colla determinazione tanto di eſſa, quanto del riferito prodotto, reſterà determinata la ſuperficie, che deſcrivesi dall' arco EMF colla ſua rivoluzione intorno alla GH, che non è ſuo diametro.

318. Si vuol però quì notare, che ſe bene la GH ſiaſi ſituata in modo, che la MO ritroviſi eguale alle due MN, AD unite inſieme; nientedimeno ſi può dare alla GH poſizione tale, che la ſteſſa MO facciaſi eguale alla differenza delle due MN, AD. Onde in queſto caſo la ſuperficie, di cui ſi tratta, ſarà eguale eziandio alla differenza tra la ſuperficie sferica, che deſcriverebbe l' arco EMF, ſe ſi aggiraſſe intorno al ſuo diametro BC, ed il prodotto, che ſi ha, con moltiplicare l' arco EMF per la circonferenza del cerchio, di cui è raggio la AD.

319.

319. Per quanto poi alla figura ſolida, racchiuſa dalla ſteſſa ſuperficie, e dalli due cerchi paralleli, che deſcrivono le perpendicolari EG, FH abbaſſate ſulla GH; io dico, che ſi avrà la ſua ſolidità, primieramente con unire inſieme la porzione di sfera, ed il cilindro, che ſi generano, con aggirarſi l' arco EMF, e la retta GH intorno al diametro BC; ed indi con aggiungere alla loro ſomma il prodotto dello ſpazio circolare IEFL per la circonferenza del cerchio, deſcritto col raggio AD. Per dimoſtrarlo, prendaſi per elemento della figura, di cui ſi tratta, il picciolo cilindro, che ha per baſe il cerchio deſcritto col raggio MO, e per altezza la picciola retta O*o*, ovvero N*n*.

320. Eſſendo adunque il quadrato della MO eguale ai quadrati delle due MN, AD, ed al doppio loro rettangolo; ſarà il cerchio deſcritto col raggio MO eguale ai cerchi, che deſcrivonſi colli raggi MN, AD, ed al prodotto del raggio del primo per la circonferenza del ſecondo. Onde il riferito picciolo cilindro ſarà eguale primieramente al picciolo cilindro, che ha per baſe il primo di queſti due cerchi, e per altezza la N*n*: indi all' altro picciolo cilindro, che ha per baſe il ſecondo cerchio, e per altezza la

ſteſſa

ſteſſa N*n*; e finalmente al prodotto del picciolo quadrilatero M N *n m* per la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la A D.

321. Or egli è chiaro, che queſt'altri due piccioli cilindri ſiano gli elementi corriſpondenti della porzione di ſfera, e del cilindro, che ſi generano, con aggirarſi l' arco E M F, e la retta G H intorno al diametro B C. Onde, avendo luogo da per tutto la ſteſſa dimoſtrazione, ſarà la figura ſolida, di cui ſi tratta, eziandio eguale alla riferita porzione di ſfera, al riferito cilindro, ed al prodotto dell' intero ſpazio circolare I E F L per la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la AD; eſſendo elemento di queſto prodotto l' altro del picciolo quadrilatero MN*nm* per la ſteſſa circonferenza.

322. Quì ancora ſi vuol notare, che quantunque la G H ſiaſi ſituata in modo, che la M O ſi ritrovi eguale alla ſomma delle due M N, A D; nientedimeno la poſizione di eſſa può eſſere tal volta tale, che la M O facciaſi eguale alla differenza delle due M N, A D. Onde in queſto caſo, conforme il quadrato della M O è eguale ai quadrati delle due MN, AD, minorati del doppio loro rettangolo; così, per avere la ſolidità della figura, di

di cui ſi tratta, tuttavia la porzione di sfera, ed il cilindro dovranno unirſi inſieme, ma dalla loro ſomma dovrà toglierſi il prodotto dello ſpazio circolare IEFL per la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la AD.

323. Or la noſtra botte, che alcuni riguardano, come formata con due coni troncati uniti inſieme, dee averſi preſſo a poco, come una figura ſolida, generata colla rivoluzione di un'arco circolare intorno ad una retta fiſſa, ed immobile, che non ſia ſuo diametro. Onde, riguardandola ſotto queſta forma, e determinando così il raggio dell' arco, che la deſcrive, come la diſtanza del ſuo centro dall' aſſe, intorno a cui ſi aggira lo ſteſſo arco; potrà porſi a calcolo non meno l' intera ſua ſuperficie, che la ſolidità, o ſia capacità della medeſima botte.

324. Per la determinazione intanto, così del riferito raggio, come della riferita diſtanza, ſi ha biſogno di tre rette, che poſſono averſi colla miſura loro effettiva, cioè dell' altezza della botte, della maſſima ſua larghezza, che ritrovaſi nel mezzo di eſſa, e della larghezza minima, che ritrovaſi in ciaſcuno de' ſuoi eſtremi. In fatti, ſe facciaſi, come la differenza dimezzata di queſte due larghezze alla metà dell' altezza,

tezza, così queſta ſteſſa metà ad una terza proporzionale, e ad eſſa aggiungaſi la riferita differenza; colla metà della ſomma ſi avrà il raggio dell' arco, che deſcrive la botte. E ſe in appreſſo da queſto raggio tolgaſi la metà della maſſima larghezza, ſi avrà col reſiduo la diſtanza del centro dello ſteſſo arco dall' aſſe, intorno a cui ſi aggira.

325. Per dimoſtrarlo, ſia E M F l' arco, per mezzo di cui ſi deſcrive la botte; e ſia G H così l' altezza della ſteſſa botte, come l' aſſe, intorno a cui ſi aggira l' arco, che la deſcrive. Se adunque congiunganſi le due EG, FH, ſaranno queſte due perpendicolari ſulla G H, e ciaſcuna di eſſe ſarà la metà della minima larghezza della botte. E ſe dividaſi la G H per metà nel punto D, da cui alziſi ſulla ſteſſa G H l' altra perpendicolare D K per ſino all'arco; ſarà queſta D K la metà della maſſima larghezza della botte. Onde, ſe congiungaſi finalmente la EF, che s'incontri colla D K nel punto R, ſarà RK la differenza dimezzata tra la maſſima, e la minima larghezza, ed ER o FR la metà dell' altezza della botte. *Fig.* 36.

326. Congiungaſi ora la K E; e ſe su di eſſa alziſi la perpendicolare E S, che s' incontri colla K D, prolungata nel

nel punto S; ſarà KS il diametro del cerchio, a cui appartiene l'arco EMF. Onde, ſe dividaſi inoltre la KS per metà nel punto A; ſarà queſto punto il centro dell'arco, AK il ſuo raggio, e AD la diſtanza dello ſteſſo centro dall'aſſe GH. Quindi, eſſendo retto l'angolo KES, ſaranno le tre rette KR, ER, RS continuamente proporzionali; e per tanto, ſiccome con ritrovare la terza proporzionale dopo le due KR, ER, ſi ha la RS; così, con unire inſieme le due KR, RS, e con prendere la metà della loro ſomma, ſi avrà il raggio dell'arco AK; il quale raggio, minorato della DK, ci darà la AD, che è la diſtanza del centro dall'aſſe GH.

327. Conforme poi, con eſſere nota la lunghezza del raggio AK, può determinarſi l'intera circonferenza del ſuo cerchio; così, colla miſura dell'angolo EAF, ſi determinerà altresì la lunghezza dell'arco EMF. Onde, eſſendo la MO eguale alla differenza delle due MN, AD, ſe prendaſi la differenza tra la ſuperficie sferica, che deſcrive l'arco EMF colla ſua rivoluzione intorno al diametro BC, ed il prodotto del medeſimo arco per la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la AD; ſi avrà con queſta diffe-

ferenza l' interna ſuperficie curva della botte, che unita ai due cerchi eguali, e paralleli, che la racchiudono nelle ſue eſtremità, ci darà la totale ſua ſuperficie interna.

328. Finalmente, con eſſer noto l' arco EMF, può determinarſi altresì lo ſpazio circolare IEFL, che è eguale al ſettore EAF, e ai due triangoli rettangoli AIE, ALF. Onde, ſe congiunganſi inſieme la porzione di ſfera, ed il cilindro, che generanſi colla rivoluzione dell' arco EMF, e della retta GH intorno al diametro AB, e dalla loro ſomma tolgaſi il prodotto dello ſpazio circolare IEFL per la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la AD; ſi avrà con queſto reſiduo la capacità della ſteſſa botte.

329. Del rimanente non ſarà inutile quì l'avvertire, che ſiccome la botte rimane determinata, con eſſer date le tre rette, che ci additano la ſua altezza, la maſſima ſua larghezza, e la larghezza minima; così due botti ſiano ſimili tra di loro, ſempre quando le riferite tre rette di una di eſſe ſono proporzionali alle corriſpondenti tre rette dell' altra; onde ſaranno le interne loro ſuperficie nella duplicata, e le loro capacità nella triplicata ragione di due delle ſteſſe rette. Ed eſſendo così, egli

egli è facile ad intenderſi, come debba farſi una botte, che non ſolo ſia ſimile ad un'altra data, ma che le loro ſuperficie, o le loro capacità ſiano ancora in data ragione.

§. XXIII.

Della miſura degli ſferoidi, che ſi generano colla riferita rivoluzione.

330. SE un' arco circolare, minore o maggiore della mezza circonferenza, aggiriſi intorno alla ſua propria corda, ſi genererà un ſolido, di cui tutta la ſuperficie ſarà curva; e per avere egli una tale quale ſimiglianza colla ſfera, ſi è dato ad eſſo il nome di ſferoide. S'incontra intanto qualche divario tra lo ſferoide, che ſi ha colla rivoluzione di un' arco, minore della mezza circonferenza, e l'altro, che ſi genera colla rivoluzione di un' arco maggiore; onde, gli eſamineremo ſeparatamente, con incominiare da quello, di cui l'arco genitore è minore della mezza circonferenza.

Fig. 37. 331. Sia perciò E M F un' arco circolare, minore della mezza circonferenza, il quale aggiriſi intorno alla ſua medeſima corda E F. Colla ſua rivoluzione adunque ſi avrà un ſferoide, la

di

di cui maggiore eſtenſione ſarà quella del ſuo proprio aſſe E F. Ma lo ſteſſo sferoide ſarà acuminato ancora ne' ſuoi poli E, ed F; poichè, riguardando l' arco E M F come compoſto di picciole rette, le due ſituate ne' ſuoi eſtremi formeranno angoli acuti colla corda EF; onde le medeſime colla loro rivoluzione deſcriveranno due piccioli coni, che ſaranno le punte del riferito sferoide.

332. Per eſſere poi l' arco E M F minore della mezza circonferenza, ſarà la M O eguale alla differenza delle due M N, A D. Onde, per quanto alla ſuperficie dello sferoide, ella ſi avrà, con prendere la differenza tra la ſuperficie sferica, deſcritta dall' arco E M F colla ſua rivoluzione intorno al diametro B C, ed il prodotto del medeſimo arco per la circonferenza del cerchio, di cui è raggio la A D. Per quanto poi alla ſua ſolidità, rimanerà ella determinata, con unire inſieme la porzione di sfera, ed il cilindro, che ſi generano colla rivoluzione dell' arco, e della corda intorno al diametro B C, e con togliere dalla loro ſomma il prodotto dello ſpazio circolare I E F L per quella ſteſſa circonferenza.

333. Pongaſi in appreſſo, che l' arco circolare E M F ſia maggiore della mezza circonferenza; e quantunque e- *Fig.* 38.

gli, con aggirarſi intorno alla ſua corda EF, eziandio deſcriva un ſferoide; nientedimeno l'aſſe EF ſarà la minore eſtenſione di queſt'altro ſferoide, il quale ſarà incavato intorno a'ſuoi poli, e le ſue cavità termineranno interiormente eziandio in punte; poichè, ſiccome le due porzioni dell'arco BE, CF piegano verſo il diametro BC, così le picciole rette, ſituate nelle loro eſtremità, formano eſteriormente angoli acuti colla corda EF; onde con quelle porzioni ſi avranno le cavità dello ſferoide, e con queſte picciole rette le punte interne delle ſteſſe cavità.

334. Or per tutta l'eſtenſione della mezza circonferenza BMC, con cui deſcriveſi la ſuperficie eſteriore dello ſferoide, la MO è eguale alla ſomma delle due MN, AD; onde la riferita ſuperficie ſarà eguale alla ſuperficie ſferica, deſcritta dalla mezza circonferenza BMC colla ſua rivoluzione intorno al diametro BC, ed al prodotto della ſteſſa mezza circonferenza per l'altra intera del cerchio, che ha per raggio la AD. All' incontro poi nelli due archi BE, CF, che deſcrivono le ſuperficie interne delle due cavità, la MO ſi fa eguale alla differenza delle due MN, AD; e perciò ciaſcuna di quelle due ſuperficie ſarà eguale alla diffe-

differenza tra la ſuperficie sferica, deſcritta colla rivoluzione dell' arco BE, o CF intorno al diametro BC, ed il prodotto dello ſteſſo arco per la circonferenza del cerchio, di cui è raggio la AD.

335. Per quanto alla ſolidità di queſt' altro sferoide, ſi abbaſſino ſulla corda EF le perpendicolari BG, CH; e ſe la ſola mezza circonferenza ſi aggiraſſe intorno alla GH, ſi avrebbe lo ſpazio racchiuſo dalla ſuperficie, che ella deſcrive, con unire inſieme la sfera, ed il cilindro, che ſi generano colla rivoluzione della ſteſſa mezza circonferenza, e della retta GH intorno al diametro BC, e con aggiungere alla loro ſomma il prodotto del mezzo cerchio BMC per la circonferenza dell'altro cerchio, che ha per raggio la AD. Ma, ſiccome in queſto ſpazio ſta compreſo, tanto quello dello sferoide, quanto l' altro delle due cavità; così dovrà toglierſi da eſſo queſto ſecondo ſpazio, per avere la ſolidità dello sferoide.

336. Or nelli due archi BE, CF la MO ſi fa eguale alla differenza delle due MN, AD; onde, ſe ſi abbaſſino ſul diametro BC le perpendicolari EI, FL, ſi avrà lo ſpazio delle due cavità, primieramente con unire inſieme le porzioni di sfera, e li cilindri,

che ſi generano, con aggirarſi li due archi BE, CF, e le due rette GE, HF intorno al diametro BC, ed indi con togliere dalla loro ſomma il prodotto degli ſpazj circolari BEI, CFL per la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la AD. Onde, ſe gl' archi BK, CS faccianſi eguali ai due BE, CF, ſi avrà la ſolidità dello ſferoide, con unire inſieme la porzione di ſfera, ed il cilindro, che generanſi colla rivoluzione dell' arco KMS, e della corda EF intorno al diametro BC, e con aggiungere alla loro ſomma il prodotto del mezzo cerchio BMC, e delli due ſpazj circolari BEI, CFL per la circonferenza del riferito cerchio.

337. Del rimanente, ſe colla rivoluzione d'archi circolari vogliaſi un ſferoide, che ne ſia acuminato ne' ſuoi poli, nè incavato intorno ad eſſi; potrà egli averſi per mezzo dell' ovale, che ſogliono deſcrivere gl' Artefici con archi circolari. Per dimoſtrarlo, e per dare altresì alla ſteſſa ovale tutta l' eſtenſione, di cui è ella capace, prendaſi un rombo, come ABCD, il quale ſiccome per gli ſuoi angoli può eſſere d' infinite ſpecie, così niente vieta, che ſia ancora quadrato, ed abbia in conſeguenza gl' angoli retti. Da queſto

Fig. 38.

ſto rombo adunque potranno dedurſi con archi circolari infinite ovali, ed ecco come.

338. Tiriſi nel rombo la diagonale AC, e colli termini di eſſa A, e C, come centri, deſcrivanſi eſteriormente con un medeſimo intervallo due archi circolari EF, GH, li quali vadanſi ad incontrare colli lati del rombo prolungati ne' punti E, F, G, H. E poichè le quattro BE, BH, DF, DG ſi fanno eguali tra di loro; perciò, ſe colli punti B, e D come centri, e coll' intervallo di una di eſſe deſcrivanſi gl' altri due archi circolari EH, FG, queſti ſi frammezzeranno tra li due primi, ed inſieme con eſſi formeranno l' ovale, di cui ſi tratta.

339. Or egli è chiaro, che le ſpecie di queſta ovale poſſono eſſere infinite, le quali dipendono, non ſolamente dalla varia forma, che può darſi al rombo, ma ancora dalla diverſità dell' intervallo, con cui deſcrivonſi li primi due archi circolari EF, GH. Ma di qualunque ſpecie ella ſia, chiaro ancora ſi è, che conforme le due diagonali del rombo AC, BD interſeganſi per metà, e ad angoli retti nel punto I; così, ſe le medeſime ſi prolunghino per ſino a che s' incontrino coll' ovale ne' punti M, N, O, P, ancora le due

MN, OP, che poſſono riguardarſi, come aſſi dell' ovale, reſteranno diviſe egualmente nello ſteſſo punto.

340. Quantunque queſt' ovale non ſia circonferenza di cerchio, nientedimeno per farſi l' incontro degl' archi circolari, da cui è formata, per via di contatto, la ſua curvatura è così continuata, come quella di qualſiſia circonferenza di cerchio. Se poi voglia tenerſi conto del numero de' gradi, contenuti negli ſteſſi archi, ſi ritroverà, che la loro ſomma aſcende a 360, come in una circonferenza intera. Ed in fine, ſiccome gli due aſſi MN, OP la dividono in quattro parti eguali, così ciaſcuna di eſſe è formata con due archi, che contengono inſieme 90 gradi.

341. Li due aſſi poi MN, OP non mai poſſono eſſere eguali, ma ſempre il primo di eſſi MN ſarà maggiore dell'altro OP. In fatti, eſſendo le due BI, AI inſieme maggiori della AB, coll' aggiunta dell' eguali AM, AE, ſaranno le due BI, MI maggiori ancora della BE, o ſia BO. Onde, ſiccome, tolta la comune BI, rimane la MI maggiore parimente della OI; così, per eſſere li due aſſi MN, OP dupli delle due MI, OI, ſarà l' aſſe MN eziandio maggiore dell'altro OP.

342. Se vogliaſi un' ovale, di cui

ſia

ſia dato, così l' aſſe maggiore M N, come l' altro minore O P, potrà ella deſcriverſi in queſto modo. Prendaſi nella M I la porzione M A minore della O I, e facciaſi la O K eguale M A. Congiungaſi di poi la A K, su di cui al punto A formiſi l' angolo K A B eguale all' angolo A K B. Tagliſi finalmente, così la C I eguale alla A I, come la D I eguale alla B I. E conforme A B C D è il rombo, per mezzo di cui dee deſcriverſi l' ovale; così ſaranno A M, C N gl' intervalli delli primi due archi, e B O, D P gl' intervalli degl' altri due.

343. Per dimoſtrarlo, deſcrivaſi col punto A come centro, e coll' intervallo della A M l' arco M E, che s' incontri colla B A prolungata nel punto E; ed eſſendo eguali li due angoli A K B, K A B, ſaranno eguali ancora le due B A, B K; onde, conforme coll' aggiunta dell' altre eguali A E, K O ſi fanno eguali ancora le due B E, B O, così l' altro arco, che deſcriveſi col punto B, come centro, e coll' intervallo della B D, s' incontrerà colla B A prolungata nel medeſimo punto E. Vedeſi intanto, che intorno ai due aſſi dati M N, O P poſſono deſcriverſi infinite ovali; poichè, ſe bene la M A debba prenderſi minore della O I, nien-

tedimeno può ella variare all' infinito.

344. Eſſendo adunque continuata la curvatura di queſt' ovale, chiaro ſi è, che ſe ella ſi aggiri intorno ad uno de' ſuoi aſſi, ſarà continuata altresì la ſuperficie dello sferoide, che generaſi colla ſua rivoluzione; onde nè quello, che ſi ha con aggirarſi intorno all' aſſe maggiore M N, ſarà acuminato ne' ſuoi poli; nè l' altro, che ſi genera con aggirarſi intorno all' aſſe minore O P, ſarà incavato negli ſteſſi poli. E poichè in ambidue queſti sferoidi ſono porzioni di sfera le due ſituate verſo li loro poli, per eſſer deſcritte da archi, li di cui centri ritrovanſi negl' aſſi della rivoluzione; perciò ſoltanto la porzione di mezzo dovrà porſi a calcolo nel modo, che è ſtato inſegnato; la quale ſarà altresì porzione dello sferoido circolare acuminato, o incavato, ſecondochè aggiraſi l' ovale intorno al ſuo aſſe maggiore, o minore.

§. XXIV.

§. XXIV.

Della misura, così della superficie, come della solidità dell' anello sferico.

345. ALle figure, che generansi colla rivoluzione d' archi circolari intorno a rette, che non siano loro diametri, può ridursi altresì l' anello sferico, che descrivesi propriamente, con aggirarsi un cerchio intero intorno ad una retta fissa, ed immobile, che sia nel suo piano, ma fuori di esso. Di questo anello, conforme chiamasi cerchio genitore quello, per mezzo di cui egli si genera; così dicesi asse la retta fissa, ed immobile, intorno a cui si aggira il cerchio genitore. Ma del medesimo anello può riguardarsi, come raggio, la perpendicolare abbassata sull' asse dal centro del cerchio genitore; e poichè questo centro portasi per la circonferenza di un' altro cerchio, descritto dallo stesso raggio, perciò questa tale circonferenza potrà aversi, come la linea centrale dello stesso anello.

346. Sia perciò B E C F un cerchio qualsivoglia, e sia G H una retta situata nel suo piano, ma fuori di esso. Aggirisi quel cerchio intorno a questa retta fissa, ed immobile in modo, che *Fig.* 39.

reſtino ſempre, non ſolo in un medeſimo piano, ma eziandio nella ſteſſa diſtanza. Colla ſua rivoluzione adunque ſi genererà l'anello sferico, di cui GH ne ſarà l'aſſe, e BECF il cerchio genitore. Conforme poi raggio dell'anello ſarà la perpendicolare AD, abbaſſata ſull'aſſe GH dal centro A del cerchio genitore; così la circonferenza dell'altro cerchio, che nella rivoluzione del cerchio genitore deſcriveſi dal raggio AD, ſarà la linea centrale dello ſteſſo anello.

347. Tiriſi ora nel cerchio genitore BECF il diametro BC parallelo all'aſſe GH; e per determinare, così la ſuperficie, come la ſolidità dell'anello sferico, giova dividerlo in due parti, una deſcritta colla rivoluzione della mezza circonferenza BEC, e l'altra deſcritta colla rivoluzione dell'altra mezza circonferenza BFC. E poichè la MO nella prima è eguale alla ſomma delle due MN, AD, e nella ſeconda ſi fa eguale alla loro differenza in modo, che la AD è maggiore della MN; ſi ritroverà perciò colla dottrina precedente, che la ſuperficie dell'anello sferico, ſi abbia con moltiplicare la circonferenza del cerchio sferico per la linea centrale; e la ſolidità dello ſteſſo anello, con moltiplicare il cerchio genitore

tore per la ſteſſa linea centrale.

348. Ed in vero, per quanto alla ſuperficie dell' anello sferico, conforme la porzione di eſſa, deſcritta dalla mezza circonferenza B E C, è eguale alla ſuperficie sferica, che deſcrive la ſteſſa mezza circonferenza, con aggirarſi intorno al diametro BC, ed al prodotto, che ſi ha colla moltiplicazione di eſſa per la circonferenza del cerchio, di cui è raggio la A D; così l'altra ſua porzione, deſcritta dall' altra mezza circonferenza BFC, è eguale al contrario allo ſteſſo prodotto, minorato della ſteſſa ſuperficie sferica. Onde, congiungendo inſieme le due porzioni della ſuperficie dell'anello sferico, ſarà l'intera ſua ſuperficie eguale al ſolo prodotto dell' intera circonferenza del cerchio genitore per la circonferenza dell' altro, deſcritto col raggio AD, o ſia per la linea centrale dello ſteſſo anello.

349. Per quanto poi alla ſolidità dell' anello sferico, abbaſſinſi ſull' aſſe GH le perpendicolari B G, C H; e conforme lo ſpazio racchiuſo dalla ſuperficie, deſcritta dalla mezza circonferenza BEC, ſi ha con unire inſieme la sfera, ed il cilindro, che generanſi con aggirarſi la mezza circonferenza BEC, e la retta GH intorno al diametro BC, e con aggiungere alla loro ſomma il

prodotto del mezzo cerchio B E C per la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la A D; così lo ſpazio terminato dall' altra ſuperficie, deſcritta dall' altra mezza circonferenza B F C, ſi avrà con unire tuttavia inſieme la ſteſſa sfera, e lo ſteſſo cilindro, ma con togliere dalla loro ſomma lo ſteſſo prodotto. Onde, per eſſere la ſolidità dell' anello eguale alla differenza di queſti due ſpazj, ſarà ella eguale al ſolo prodotto dell' intero cerchio genitore per la circonferenza del cerchio, che ha per raggio la A D, o ſia per la linea centrale dello ſteſſo anello.

350. Notiſi quì intanto, che conforme, ſegandoſi l'anello sferico per un piano, che paſſi per lo ſuo aſſe, la ſezione fatta nella ſua ſuperficie è la circonferenza del ſuo ſteſſo cerchio genitore; così le ſezioni, che ſi fanno nella ſteſſa ſua ſuperficie per un piano perpendicolare al ſuo aſſe, ſiano circonferenze di due cerchi concentrici, che unite inſieme ſono eguali al doppio della linea centrale. Onde, ſe intendanſi fatte nella ſuperficie dell'anello infinite di queſte circonferenze, e riguardanſi come elementi della ſteſſa ſuperficie le picciole corone, compreſe tra di eſſe; potrà dimoſtrarſi in altra guiſa, che ſi abbia la ſuperficie dell'anello, con molti-

tiplicare la circonferenza del cerchio genitore per la linea centrale.

351. In fatti ciaſcuna di quelle picciole corone ſi ha, con moltiplicare una delle due circonferenze, che la terminano, per l'archetto della circonferenza del cerchio genitore, racchiuſo nella ſteſſa picciola corona. Onde, ſe prendanſi le due picciole corone, che dà ambedue le parti dell' anello tra eſſo loro ſi corriſpondono, le medeſime unite inſieme ſaranno eguali al prodotto, che ſi ha, con moltiplicare la linea centrale per ambidue gli archetti, racchiuſi nelle due picciole corone; e per tanto, avendo queſta dimoſtrazione luogo da per tutto, ſarà la ſomma delle picciole corone, o ſia la ſuperficie dell'anello, eguale al prodotto della ſteſſa linea centrale per l' intera circonferenza del cerchio genitore.

352. In una maniera conſimile può dimoſtrarſi ancora, che la ſolidità dell' anello ſi abbia, con moltiplicare il cerchio genitore per la linea centrale. Seghiſi perciò l' anello per un piano perpendicolare al ſuo aſſe; e la ſezione, fatta dentro di eſſo, ſarà una corona circolare, racchiuſa dalle due circonferenze concentriche, che ſegna nella ſua ſuperficie lo ſteſſo piano. Onde, ſe concepiſcaſi diviſo l' anello in un' infi-

nità di queſte corone, egualmente diſtanti l'una dall'altra, conforme ciaſcuna di eſſe ſi ha, con moltiplicare la linea centrale per la ſua larghezza; così ſi avrà la loro ſomma, o ſia la ſolidità dell'anello, con moltiplicare la ſteſſa linea centrale per lo cerchio genitore, li di cui elementi, ſecondo il metodo degl' indiviſibili, ſono le larghezze di quelle corone.

353. Da ciò intanto, che è ſtato dimoſtrato, ricavaſi in primo luogo, che le ſuperficie di due diverſi anelli ſiano in ragion compoſta delli raggi delli cerchi genitori, e delli raggi degli ſteſſi anelli. Onde, conforme ſaranno nella ſemplice ragione delli primi raggi eſſendo eguali li ſecondi, e nella ſemplice ragione delli ſecondi eſſendo eguali li primi; così ſe mai ſiano eguali tanto li raggi delli cerchi genitori, quanto li raggi degl' anelli, o pure gl' uni ſiano nella reciproca ragione degl' altri, le ſuperficie delli due anelli dovranno eſſere eguali.

354. Ricavaſi in ſecondo luogo, che le ſolidità di due diverſi anelli ſiano in ragion compoſta della duplicata de' raggi delli cerchi genitori, e della ſemplice delli proprj loro raggi. Onde, conforme ſaranno nella ſola ragion duplicata delli primi raggi eſſendo eguali

li

li ſecondi, e nella ſola ragion ſemplice delli ſecondi eſſendo eguali li primi; così ſe mai ſiano eguali tanto li raggi delli cerchi genitori, quanto li raggi degl' anelli, o pure la ragion duplicata delli primi ſia reciproca della ragion ſemplice delli ſecondi, le ſolidità delli due anelli dovranno eſſere eguali.

355. Riceve adunque la ſua determinazione l'anello ſferico, non meno dal raggio del cerchio genitore, che dal raggio ſuo proprio; onde ſaranno due anelli ſimili tra eſſo loro, quantevolte li proprj loro raggi ſono nella ſteſſa ragione colli raggi delli loro cerchi genitori; e per tanto, conforme le ſuperficie di due anelli ſimili debbono eſſere nella duplicata ragione, tanto degl' uni, quanto degl' altri raggi, così le ſolidità degli ſteſſi anelli ſaranno nella ragione loro triplicata. Ed eſſendo così, egli è facile ad intenderſi, come debba farſi un' anello, che non ſolo ſia ſimile ad un' altro anello dato, ma abbia altresì ſuperficie, o ſolidità tale, che ſia in data ragione colla ſuperficie, o ſolidità dell' altro.

356. Niente vieta, che l' aſſe, intorno a cui aggiraſi il cerchio genitore, ſia così proſſimo al cerchio, che tocchi la ſua circonferenza; ma in queſto caſo, non avendo l' anello nel mezzo vuo-

vuoto alcuno, ſarà il ſuo raggio eguale al raggio del cerchio genitore: dal che ne ſegue, che ſiccome, per avere la ſuperficie di queſto anello, deeſi moltiplicare la circonferenza del cerchio genitore per se ſteſſa; così, per avere la ſua ſolidità, debbaſi moltiplicare il cerchio genitore per la ſua propria circonferenza; onde ſi è, che le ſuperficie di due di queſti anelli ſenza vuoto ſiano nella duplicata, e le ſolidità nella triplicata ragione de' raggi delli loro cerchi genitori.

357. Del rimanente merita quì di eſſere avvertito, che l' anello ſferico, li due ſferoidi, e la ſfera ſiano figure ſolide d' indole tale, che da ciaſcuna di eſſe ſi fa paſſaggio all' altra, che ſegue. In fatti, con aggirarſi il cerchio intorno ad un' aſſe, ſituato fuori di eſſo, generaſi l' anello ſferico, che ha un vuoto nel ſuo mezzo. Queſto vuoto poi ſi va tanto più minorando, quanto maggiormente l' aſſe ſi accoſta al cerchio, tanto che ſvaniſce interamente, quando l' aſſe diventa tangente del cerchio. Con farſi in appreſſo ſua ſecante, generanſi li due ſferoidi, che ricevono infinite variazioni, ſecondochè il centro del cerchio più, o meno diſta dall' aſſe. Ed in fine generaſi la ſfera,

quan-

quantevolte l' asse si fa diametro dello stesso cerchio.

358. Un' altra riflessione merita di esser fatta intorno all' anello sferico, e si è, che egli debbasi riguardare, come un cilindro retto, che abbia per base il cerchio genitore, e per asse una retta eguale alla linea centrale; siccome in fatti, se facciasi in esso una sezione per un piano, che passi per lo suo asse, e su di questa sezione egli si raddirizzi, prenderà la forma del riferito cilindro. Onde di nuovo si vede, che sia eguale la sua superficie al prodotto della circonferenza del cerchio genitore per la linea centrale, e la sua solidità al prodotto del cerchio genitore per la stessa linea centrale.

§. XXV.

Delle cinque figure solide regolari, considerate per rapporto alla sfera.

359. PEr lo centro, che ritrovasi in ciascuna delle cinque figure solide regolari, di cui si è trattato di sopra, può situarsi in essa la sfera, così per via di circonscrizione, come per via d' iscrizione. In fatti, essendo eguali le rette, tirate dal centro della figura solida regolare ai vertici delli suoi angoli;

li; la sfera, descritta con una di queste rette, come raggio, dovrà passare per gli stessi vertici, ed essere in conseguenza circonscritta intorno alla figura. E così ancora, essendo eguali le perpendicolari, abbassate dallo stesso centro sulle facce della figura; la sfera, descritta con una di queste perpendicolari, come raggio, toccherà le stesse facce, ed in conseguenza sarà inscritta dentro della figura.

360. Al contrario poi, data la sfera, potranno situarsi le cinque figure solide regolari, così dentro di essa per via d' iscrizione, come intorno ad essa per via di circonscrizione; ma in questo caso debbono formarsi le figure con lati tali, che possa la sfera dare ad esse la situazione ricercata. Onde faremo ora vedere, come per la loro formazione possano determinarsi li loro lati per rapporto al raggio della sfera, in cui debbonsi iscrivere, o circonscrivere. Ed in primo luogo, se in una data sfera debbansi iscrivere le prime tre figure solide regolari, cioè il tetraedro, l' esaedro, e l' ottaedro; egli è facile, di determinare li loro lati relativamente al raggio della stessa sfera.

Fig. 40. 361. Sia perciò B D C il mezzo cerchio, che colla sua rivoluzione intorno al diametro B C fisso, ed immobile

bile deſcrive la sfera data; e ſia ancora B D il lato della figura ſolida regolare, iſcritta dentro della ſteſſa sfera. Si abbaſſi ſul diametro B C la perpendicolare D E; e per poco, che vogliaſi riflettere, s' intenderà facilmente, che il punto E ſia il centro della figura piana regolare, che ſerve di baſe all' angolo ſolido, di cui il punto B è il vertice; e la perpendicolare abbaſſata D E ſia il raggio del cerchio, circonſcritto intorno alla ſteſſa baſe.

362. Or nel tetraedro ciaſcuno degl' angoli ſolidi ha per ſua baſe uno degli ſteſſi triangoli equilateri, che terminano il tetraedro. Dunque, per eſſere la B D eguale al lato della baſe dell' angolo ſolido, che ha per vertice il punto B, ſarà il ſuo quadrato triplo del quadrato della D E. Onde, dovendo eſſere il rettangolo delle due B C, B E ancora triplo del rettangolo delle due C E, B E, ſarà il diametro B C triplo parimente della ſua porzione C E; e per tanto ſi determinerà il lato B D del tetraedro, con fare, che la C E ſia la terza parte del diametro B C.

363. Quindi il quadrato del lato B D del tetraedro ſarà al quadrato del raggio A B della sfera data, come 8 a 3. Imperocchè, conforme quel quadrato ſta al quadrato dell' intero diametro

metro BC, come BE a BC, cioè come 2 a 3, o pure come 8 a 12; così il quadrato dell' intero diametro BC ſta al quadrato del raggio AB, come 4 ad 1, o pure come 12 a 3. Onde, quanteſiſiano le parti, in cui ſi ſuppone diviſo il raggio della data sfera, ſe il quadrato del loro numero moltiplichiſi per 8, e dalla terza parte del prodotto caviſi la radice quadrata, ſi avrà con queſta radice il numero delle parti del lato del tetraedro.

364. Nell' eſaedro poi ciaſcuno degl' angoli ſolidi ha per ſua baſe un triangolo equilatero, deſcritto ſulla diagonale di uno de' ſuoi quadrati. Quindi, ſiccome il quadrato del lato BD ſta al quadrato fatto dal lato della baſe, che ſoſtiene l' angolo ſolido, ſituato col ſuo vertice nel punto B, come 1 a 2, ovvero come 3 a 6; così il quadrato del lato della baſe ſarà al quadrato della DE, come 3 ad 1, o pure come 6 a 2. Onde, dovendo eſſere il quadrato del lato BD al quadrato del lato DE, come 3 a 2; ſarà il diametro BC alla ſua porzione CE, ſimilmente come 3 a 2; e per tanto ſi determinerà il lato BD dell' eſaedro, con fare al contrario, che la BE ſia eguale alla terza parte del diametro BC.

365.

365. Eſſendo così il quadrato del lato B D dell' eſaedro ſarà al quadrato del raggio A B della sfera data, come 4 a 3; poichè, ſiccome quel quadrato ſta al quadrato dell' intero diametro B C, come B E a B C, cioè come 1 3, ovvero come 4 a 12; così il quadrato dell' intero diametro B C ſta al quadrato del raggio A B, come 12 a 3. Onde, quanteſiſiano le parti, in cui ſi ſuppone diviſo il raggio A B, ſe il quadrato del loro numero moltiplichiſi per 4, e dalla terza parte del prodotto caviſi la radice quadrata, ſi avrà con queſta radice il numero delle parti del lato dell' eſaedro.

366. Finalmente nell' ottaedro ciaſcuno degl' angoli ſolidi ha per ſua baſe il quadrato, deſcritto dallo ſteſſo lato dell' ottaedro. Onde per eſſere la B D eguale al lato della baſe, che ſoſtiene l' angolo ſolido, ſituato col ſuo vertice nel punto B; ſarà il ſuo quadrato doppio del quadrato fatto dalla D E. Quindi, facendoſi ancora doppio, così il rettangolo delle due B C, C E per rapporto al rettangolo delle due C E, B E, come il diametro B C per rapporto alla ſua porzione C E; caderà la perpendicolare D E ſul centro del mezzo cerchio A; e per tanto il quadrato del lato dell' ottaedro ſarà doppio

del

del quadrato, fatto dal raggio AB della sfera data.

367. In ſecondo luogo, per quanto al dodecaedro, non è egli così facile di determinare il ſuo lato per rapporto al raggio della sfera, in cui biſogna iſcriverlo. Imperocchè, ſiccome ciaſcuno de' ſuoi angoli ſolidi ha per ſua baſe il triangolo equilatero, deſcritto ſulla diagonale di uno de' ſuoi pentagoni; così è neceſſario prima definire il rapporto, che ritrovaſi tra queſta diago-
Fig. nale, ed il lato ſteſſo del pentagono. Sia
41. perciò il pentagono regolare ABCDE, in cui tirinſi le due diagonali AC, AD; e ſecondo è ſtato dimoſtrato altrove, ſe dividaſi la AD in eſtrema, e media ragione nel punto F, ſarà la porzione ſua maggiore AF eguale al lato del pentagono CD.

Fig. 368. Ciò poſto, ſia ora BD il lato
42. del dodecaedro iſcritto dentro della sfera, il quale prolunghiſi talmente per ſino al punto F, che la BF ſia eguale al lato del triangolo equilatero, che ſerve di baſe all' angolo ſolido, ſituato col ſuo vertice nel punto B. Sarà dunque il quadrato della BF triplo del quadrato della DE. Ma, per eſſere la BF diviſa in eſtrema, e media ragione nel punto D, il quadrato della BD ſta al quadrato della BF, come

DF

DF a BF. Dunque il quadrato della BD ſarà al quadrato della DE, come la DF alla terza parte della BF; e per tanto in queſta ſteſſa ragione ſarà ancora, tanto il rettangolo delle due BC, BE al rettangolo delle due CE, BE, quanto il diametro BC alla ſua porzione CE.

369. Se poi congiungaſi la FA, a cui tiriſi la parallela DG, ſarà DF a BF, come AG ad AB. Onde ſi determinerà il lato BD del dodecaedro, con dividere il raggio AB in eſtrema, e media ragione nel punto G, e con tagliare dal diametro BC la porzione CE, che ſia allo ſteſſo diametro, come la terza parte del raggio AB alla ſua porzione minore AG. E poichè egli è facile il ſupputare, quante parti del raggio AB contengonſi così nella AG, come in ciaſcuna delle due CE, BE; perciò, ſe il duplicato numero delle parti del raggio moltiplichiſi per lo numero delle parti contenute nella BE, e dal prodotto caviſi la radice quadrata, ſi avrà con queſta radice il numero delle parti del lato BD del dodecaedro.

370. Rimane l' icoſaedro, in cui ciaſcuno degl' angoli ſolidi ha per ſua baſe un pentagono regolare, che ha per ſuo lato quello ſteſſo dell'icoſaedro;

onde

onde, per determinare il lato dell' icoſaedro relativamente al raggio della ſfera, in cui biſogna iſcriverlo, fa duopo rammentarſi di due teoremi, altrove dimoſtrati, cioè I, che iſcrivendoſi dentro di un medeſimo cerchio il pentagono, ed il decagono regolare, il quadrato del lato del primo ſia eguale al quadrato del raggio del cerchio inſieme col quadrato del lato del ſecondo; e II, che dividendoſi il raggio di un cerchio in eſtrema, e media ragione, la porzione ſua maggiore ſia eguale al lato del decagono regolare, iſcritto dentro dello ſteſſo cerchio.

Fig. 43. 371. Adunque, ſe B D ſia il lato dell' icoſaedro iſcritto dentro della data ſfera, per lo primo teorema, ſarà B E il lato del decagono regolare, iſcritto dentro del cerchio, che ha per raggio la D E. Ma, alzata ſul diametro B C la perpendicolare A F, e congiunta la la B F, che s' incontri colla D E nel punto G, ſi fanno eguali le due B E, E G. Dunque, per lo ſecondo teorema, la D E ſarà diviſa in eſtrema, e media ragione nel punto G, e ſarà E G la porzione ſua maggiore; e per tanto, eſſendo continuamente proporzionali le tre D E, E G, D G, ſarà il quadrato della D E al quadrato della E G ovvero B E, come D E a D G.

372.

372. Prolunghiſi ora la BD per ſino a che s'incontri colla AF nel punto H, e facciaſi la FI parallela alla HC. Eſſendo adunque DE a DG, come AH ad HF, o pure come AC a CI; ſarà il quadrato della DE al quadrato della BE ſimilmente come AC a CI. Ma il quadrato della DE, come eguale al rettangolo delle due CE, BE, ſta al quadrato della BE, come CE a BE. Dunque ſarà CE a BE, eziandio come AC a CI.

373. Eſſendo così, ſi determinerà il lato BD dell'icoſaedro, primieramente con dividere il raggio AC in eſtrema, e media ragione nel punto I; ed indi con dividere l'intero diametro BC talmente nel punto E, che CE ſia a BE, come il raggio AC alla porzione ſua minore CI. E poichè egli è facile il ſupputare, quante parti del raggio contenganſi, così nella CI, come in ciaſcuna delle due CE, BE; perciò, ſe il duplicato numero delle parti del raggio moltiplichiſi per lo numero delle parti contenute nella BE, e dal prodotto caviſi la radice quadrata, ſi avrà con queſta radice il numero delle parti, che contengonſi nel lato BD dell'icoſaedro.

374. Determinati li lati delle cinque figure ſolide regolari, da iſcriverſi

in una data sfera ; egli è facile di determinare in appresso li lati di quell'altre , che debbonsi circonscrivere intorno
Fig. alla medesima sfera . Perciò sia di nuo-
44. vo B D C il mezzo cerchio , che colla sua rivoluzione descrive la sfera ; e pongasi , che il punto D della sua circonferenza sia il vertice di un' angolo solido della figura iscritta , e l' altro E del suo piano il centro di una delle facce , che contengono quello stesso angolo solido .

375. Congiungasi il centro della sfera A coll' altro E per la retta A E , la quale distendasi per fino al punto B ; e per questo punto tirisi la B F parallela alla E D , che vadasi ad incontrare colla A D prolungata nel punto F . Se adunque l' altra figura della stessa specie , circonscritta intorno alla sfera, intendasi situata in modo , che le sue facce siano parallele alle facce dell' iscritta ; chiaro si è , che debba essere F il vertice di uno de' suoi angoli solidi , e B il centro di una delle facce , che lo contengono .

376. Or il lato della figura iscritta è lato parimente di ciascuna delle sue facce , ed in conseguenza di quella , che ha per centro il punto E . Onde , con essersi egli determinato , potrà determinarsi altresì la ED , che è il raggio

gio del cerchio, circonſcritto intorno alla ſteſſa faccia; e per tanto ſe dal quadrato del raggio della sfera AD tolgaſi il quadrato della ED, e dal reſiduo caviſi la radice quadrata, reſterà determinata con queſta radice la AE, che è la diſtanza della faccia dal centro della sfera.

377. Eſſendo poi B il centro della faccia eſteriore, che forma l'angolo ſolido, ſituato col ſuo vertice nel punto F; ſarà la BF il raggio del cerchio, circonſcritto intorno a queſt' altra faccia. Ma, per eſſere le due facce figure piane regolari della ſteſſa ſpecie, il lato della faccia interna dee eſſere al lato della faccia eſterna, come ED a BF, ovvero come AE ad AB. Dunque, ſe il lato della faccia interna, o ſia della figura iſcritta, moltiplichiſi per lo raggio della sfera, ed il prodotto dividaſi per la AE, di già determinata; ſi avrà col quoziente di queſta diviſione il lato della faccia eſterna, ed in conſeguenza della figura circonſcritta.

§. XXVI.

Del modo di formare poliedri cilindrici, che abbiano le ſteſſe proprietà della ſfera.

378. IL corto numero delle figure ſolide regolari, conſiderate fin' ora da Geometri, può eſſerci di argomento, che le medeſime non corriſpondono alle figure piane regolari, le quali non ſolo eſtendonſi all' infinito, ma altresì terminanſi finalmente al cerchio. Intanto colle ſteſſe figure piane regolari, di cui l' ultima è il cerchio, poſſono formarſi figure ſolide tali, che non ſolo ſi terminino alla ſfera, ma abbiano ancora le medeſime proprietà, che alla ſfera ſteſſa competono. E poichè le facce di eſſe ſono tanti triangoli, formati ſopra ſuperficie cilindriche; perciò potranno diſtinguerſi queſte tali figure col nome di poliedri cilindrici.

379. Senza darci la pena di tener preſente l' intero poliedro cilindrico, baſterà conſiderarne la ſola ſua metà, con cui in conſeguenza dovrà porſi in confronto l' emiſfero, per vedere la corriſpondenza, che ritrovaſi tra l' una, e l' altra figura. Sia adunque H I K L una figura piana regolare qualſivoglia, *Fig.* 45.

che

che abbia per ſuo centro il punto A ; e da queſto centro ſi abbaſſino ſulli lati della figura HI , IK , KL , LH le perpendicolari AD, AE, AF, AG, che ſaranno tra di loro eguali. Ciò poſto, ecco ora, come dee formarſi il mezzo poliedro cilindrico ſulla figura piana regolare HIKL.

380. Eleviſi dal centro A ſul piano della figura la perpendicolare AB di lunghezza tale, che ſia eguale a ciaſcuna di quelle, abbaſſate ſulli lati dallo ſteſſo centro ; indi congiungaſi il punto B colli termini D., E, F, G di quelle ſteſſe perpendicolari per altrettanti quadranti circolari, che abbiano per centro loro comune il punto A ; finalmente su di queſti quadranti faccianſi muovere li lati della figura HI, IK, KL, LH in modo , che reſtino ſempre paralleli a loro ſteſſi. E conforme le ſuperficie cilindriche, che deſcrivonſi, con interſegarſi tra di loro, prendono forma de' triangoli ; così la figura ſolida, contenuta dall' altra piana, e da queſti triangoli , ſarà la metà del poliedro cilindrico.

381. Or non v' ha dubbio , che il mezzo poliedro cilindrico diventi emisfero, ſempre quando il numero de'lati, che terminano la ſua baſe, facciaſi maggiore di ogni numero , che poſſa aſſe-

gnarſi. Ma io dico di più, che qualunque forma egli abbia, le ſue proprietà ſiano le ſteſſe con quelle dell' emisfero. Ed in fatti, per incominciare dalla ſua ſuperficie, conforme quella dell' emisfero è doppia del cerchio maſſimo, che ſerve ad eſſo di baſe; così egli è facile il dimoſtrare, che ancora la ſuperficie del mezzo poliedro cilindrico ſia doppia della figura piana regolare, su di cui è ſtato egli formato.

382. Prendaſi perciò nel quadrante BD un punto M ad arbitrio, e per la perpendicolare MN, abbaſſata ſull'aſſe AB, conducaſi un piano parallelo alla baſe del mezzo poliedro. Si farà dunque con queſto piano una ſezione ſimile alla ſteſſa baſe; ed in conſeguenza AD ovvero AM ſarà ad MN, come il perimetro della baſe al perimetro della ſezione. Quindi ſe *m n* ſia un'altra perpendicolare, infinitamente vicina alla prima, ſarà AM ad MN, come M*m* ad N*n*. Onde il perimetro della baſe al perimetro della ſezione ſimilmente ſarà, come M*m* ad N*n*; e per tanto il perimetro della baſe moltiplicato per la picciola porzione dell' aſſe N*n* ſarà eguale al perimetro della ſezione moltiplicato per l'archetto M*m*.

383. Intendanſi adunque nel mezzo poliedro tirati infiniti piani paral-

leli

leli alla ſua baſe; e ſe prendanſi, come elementi della ſua ſuperficie, le infinite picciole corone, in cui ella rimane diviſa da detti piani; ſarà la ſuperficie del mezzo poliedro eguale al prodotto del perimetro della baſe per l'intero aſſe A B. Ma l'aſſe A B è eguale alla A D, e con moltiplicare il perimetro della baſe per la A D ſi ha il doppio della ſteſſa baſe. Dunque la ſuperficie del mezzo poliedro ſarà eziandio doppia della ſua baſe.

384. Colla medeſima dimoſtrazione intanto vedeſi chiaramente, che ſiccome la ſuperficie del mezzo poliedro ſi ha, con moltiplicare il perimetro della ſua baſe per l'intero aſſe A B; così le porzioni della ſteſſa ſuperficie, corriſpondenti alle porzioni dell' aſſe AN, BN, ſi abbiano, con moltiplicare lo ſteſſo perimetro per queſte ſteſſe porzioni. Onde, ſe intorno al mezzo poliedro circonſcrivaſi un priſma, non ſolo ſaranno eguali tra di loro la ſuperficie del mezzo poliedro, e la ſuperficie laterale del priſma; ma, ſe dividanſi le due figure per un piano parallelo alla baſe loro comune, le corriſpondenti porzioni delle due ſuperficie ſaranno eziandio eguali tra di loro.

385. Dall' eſſere poi la ſuperficie del mezzo poliedro doppia della ſua baſe

ne ſegue, che la ſteſſa ſuperficie ſia eguale alla figura piana regolare ſimile alla ſteſſa baſe, e circonſcritta intorno al cerchio, che ha per raggio la corda del quadrante BD. Anzi per poco, che voglia rifletterſi, s' intenderà facilmente, che la porzione della medeſima ſuperficie, corriſpondente alla porzione dell' aſſe BN, ſia ſimilmente eguale alla figura piana regolare, ſimile alla baſe del mezzo poliedro, e circonſcritta intorno al cerchio, che ha per raggio la corda dell' arco BM.

386. Adunque, per rapporto alla ſuperficie, egli è fuor di ogni dubbio, che il mezzo poliedro cilindrico abbia le ſteſſe proprietà dell' emisfero. Ma le due figure ſi corriſpondono ancora tra eſſo loro, per rapporto alla ſolidità; poichè, ſiccome quella dell' emisfero ſi ha, con moltiplicare la ſua ſuperficie, ovvero il doppio del cerchio maſſimo, per la terza parte del raggio; così ancora la ſolidità del mezzo poliedro cilindrico ſi avrà, con moltiplicare la ſua ſuperficie, o ſia il doppio della ſua baſe, per la terza parte dell' aſſe AB.

387. In fatti, ſe la ſuperficie del mezzo poliedro intendaſi diviſa nelle picciole corone, riferite di ſopra; lo ſteſſo mezzo poliedro potrà concepirſi eziandio diviſo in picciole piramidi, che ab-

abbiano le faccette di quelle picciole corone per loro baſi, ed il punto A per vertice loro comune. Ma, per eſſere l'altezze di queſte picciole piramidi eguali all' aſſe A B, ciaſcuna di eſſe ſi ha, con moltiplicare la ſua picciola baſe per la terza parte dello ſteſſo aſſe. Dunque la ſolidità del mezzo poliedro, come eguale alla loro ſomma totale, ſi avrà con moltiplicare la ſua ſuperficie, ovvero il doppio della ſua baſe, per la terza parte del ſuo aſſe A B.

388. Quindi, ſiccome l'emiſfero ſta al cilindro, che ha con eſſo la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza, come 2 a 3; così ancora il mezzo poliedro cilindrico ſarà al priſma, che ha con eſſo la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza, ſimilmente come 2 a 3. Ed in oltre, conforme l' emiſfero ſta al cono, che ha con eſſo la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza, come 2 ad 1; così ancora il mezzo poliedro cilindrico ſarà alla piramide, che ha con eſſo la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza, ſimilmente come 2 ad 1. Onde eziandio per rapporto alla ſolidità l'emiſfero, ed il mezzo poliedro cilindrico hanno le ſteſſe proprietà.

389. Se vogliaſi la ſolidità della porzione, tagliata dal mezzo poliedro verſo il vertice A per lo piano, che con-

duceſi per la MN parallelo alla ſua ſua baſe ; baſterà determinare , così la ſuperficie di quella porzione, come la ſezione fatta nel mezzo poliedro ; poichè, moltiplicandoſi quella ſuperficie per la terza parte dell' aſſe AB, e queſta ſezione per la terza parte della porzione AN dello ſteſſo aſſe ; ſi avrà colla differenza di queſti due prodotti la ſolidità della porzione , che ſi dimanda .

390. La ſteſſa ſolidità tuttavolta potrà averſi con maggior compendio in un'altra guiſa , ed ecco come. Tagliſi dalla BN , che è l' altezza della porzione , la terza parte, che ſia BO ; indi intorno al cerchio , che ha per diametro la AO, circonſcrivaſi una figura piana regolare , che ſia della ſteſſa ſpecie colla baſe del mezzo poliedro ; moltiplichiſi finalmente il perimetro di queſta figura per lo quadrato della BN, e col prodotto ſi avrà la ſolidità ricercata : della qual regola può farſi uſo altresì , per determinare la ſolidità dello ſteſſo mezzo poliedro , la di cui altezza è il ſuo medeſimo aſſe AB.

391. Qualunque ſia la ſpecie di due mezzi poliedri cilindrici , chiaro ſi è , che conforme le loro ſuperficie ſono nella ſemplice ragione delle loro baſi ;

così

così le loro ſolidità debbano eſſere in ragion compoſta delle loro baſi, e delle loro altezze. Eſſendo poi li due mezzi poliedri cilindrici della ſteſſa ſpecie, non è da porſi in dubbio, che li medeſimi ſiano ſimili tra eſſo loro. Onde, ſiccome le loro ſuperficie debbono eſſere nella duplicata ragione di due lati delle loro baſi, così le loro ſolidità ſaranno nella triplicata ragione degli ſteſſi lati.

392. Del rimanente ſi vuol notare, che qualora ſulli quadranti circolari, che congiungono il punto B cogl' altri D, E, F, G, portanſi li lati della figura H I, I K, K L, L H in modo, che reſtino ſempre paralleli a loro ſteſſi, deſcrivonſi dagli ſteſſi lati altrettanti quadranti cilindrici tra di loro eguali. Onde, conforme il mezzo poliedro formaſi colle porzioni di eſſi, che coll'incontro loro ſcambievole rimangono ſulla figura H I K L; così coll' altre porzioni, che reſtano al di fuori, potrà formarſi ſulla ſteſſa figura un'altro mezzo poliedro di diverſa indole, che potrà riguardarſi, come reſiduo, o ſia ſupplimento del primo.

393. In fatti, ſe queſte rimanenti porzioni eſteriori delli quadranti cilindrici congiunganſi a due a due in modo, che li quadranti circolari, da cui ſono terminate, formino inſieme un mez-

zo cerchio; ſaranno li diametri di queſti mezzi cerchi eguali ai lati H I, I K, K L, L H della figura. Onde, ſe li diametri, e li lati adattinſi talmente inſieme, che ſi combacino; ſi formerà ſulla figura H I K L il nuovo mezzo poliedro, la di cui ſuperficie ſarà ſoſtenuta dagli ſteſſi mezzi cerchi; ed attenta queſta ſua formazione, egli è facile ad intenderſi, come poſſa averſi, così la ſua ſuperficie, come la ſua ſolidità.

394. Per mezzo della figura regolare, che è baſe del nuovo mezzo poliedro, di già poſſono determinarſi la ſuperficie, e la ſolidità non meno del mezzo poliedro principale, che di ciaſcuno delli quadranti cilindrici, colle di cui porzioni formanſi ambidue li mezzi poliedri. Onde, ſe dalle ſuperficie unite inſieme delli quadranti cilindrici tolgaſi quella del mezzo poliedro principale, ſi avrà col reſiduo la ſuperficie del nuovo mezzo poliedro. E così ancora, ſe dalle ſolidità unite inſieme delli quadranti cilindrici tolgaſi quella del mezzo poliedro principale, col reſiduo ſi avrà la ſolidità dello ſteſſo nuovo mezzo poliedro.

§. XXVII.

§. XXVII.

Dell' unghiette cilindriche, e del modo di misurarle.

395. LI poliedri cilindrici ci conducono all' esame dell' unghiette cilindriche, le quali altro non sono, se non se porzioni, tagliate da un cilindro retto per piani, che incontransi colla sua base. Tra di esse le più semplici sono quelle, risecate per piani, che s' incontrano colla base del cilindro in uno de' suoi diametri; onde, per distinguerle dall' altre, le chiameremo unghiette cilindriche centrali. E poichè delle loro metà sono composti li poliedri cilindrici; quindi si è, che a similianza degli stessi poliedri, possano determinarsi con esattezza, così le loro superficie curve, come le loro solidità.

396. Sia perciò BCD un cerchio qualsivoglia, che abbia per suo centro il punto A, e dal cilindro retto elevato su di esso tagliasi per mezzo del piano BEC l' unghietta centrale BCDE. Dividasi la mezza circonferenza BDC per metà nel punto D, e sul raggio AD alzisi il piano ADE in modo, che sia perpendicolare alla base del cilindro. La sezione adunque, fatta nell' un-

Fig. 46.

unghietta da queſto piano, ſarà un triangolo; e le due porzioni BADE, CADE, in cui rimane diviſa l' unghietta per mezzo di queſto piano, ſaranno tra di loro eguali.

397. Or di queſte metà ſono compoſti propriamente li poliedri cilindrici, ed attenta la ſituazione, che ritrovanſi avere negli ſteſſi poliedri, dovrà riguardarſi il triangolo ADE come loro baſe, e li raggi AB, AC come loro altezze. Onde, ſe di eſſe vogliaſi giudicare per quel tanto è ſtato dimoſtrato de' poliedri, dovranno ſtabilirſi due teoremi; cioè I, che la ſuperficie curva della mezza unghietta ſia doppia del triangolo, che ſerve ad eſſa di baſe; e II, che la ſua ſolidità ſia eguale al prodotto della ſua ſuperficie curva per la terza parte della ſua altezza.

Fig. 47. 398. Ma, per dimoſtrare l' uno, e l' altro teorema indipendentemente dalli poliedri cilindrici, ſia la mezza unghietta centrale BADE, elevata ſulla ſua baſe ADE. Prendaſi nel quadrante circolare BD un punto M ad arbitrio, per cui tiriſi, così la MN parallela alla DA, come la MO parallela alla DE; e ſiano ancora *m n*, *m o* due altre rette conſimili, infinitamente vicine alle prime MN, MO.

Eſſen-

Eſſendo adunque equiangoli li due triangoli A D E, M N O, ſarà D A, o ſia A M ad M N, come D E ad M O. Ma A M ſta ad M N, come M *m* ad N *n*. Dunque ancora D E ad M O ſarà, come M *m* ad N *n*; e per tanto il prodotto della M O per l' archetto M *m* ſarà eguale al prodotto della DE per la picciola porzione dell' altezza N *n*.

399. Or col primo di queſti due prodotti ſi ha il picciolo trapezio, o ſia parallelogrammo O M *m o*. Onde, ſe il medeſimo riguardaſi, come uno degl' elementi, che compongono la ſuperficie curva della mezza unghietta; ſarà queſta ſuperficie eguale al prodotto della D E per l' intera altezza A B. Ma, per eſſere la A B eguale alla A D, con queſto ſteſſo prodotto ſi ha ancora il doppio del triangolo A D E. Dunque eziandio la ſuperficie curva della mezza unghietta ſarà eguale al doppio deſſo ſteſſo triangolo. E volendoſi le porzioni D M O, E D M O della ſteſſa ſuperficie, corriſpondenti alle porzioni dell' altezza B N, A N; dalla ſteſſa dimoſtrazione ricavaſi, che quelle ſiano eguali ai prodotti della DE per le due B N, A N.

400. Per quanto poi alla ſolidità dell' unghietta centrale, potrà ella deter-

terminarſi, con riguardare, come uno de' ſuoi elementi, la picciola piramide, che ha per baſe il picciolo parallelogrammo OM*mo*, e per vertice il punto A; poichè, ſiccome queſta picciola piramide è eguale al prodotto di quel picciolo parallelogrammo per la terza parte dell'altezza AB, così ſarà la ſolidità della mezza unghietta eguale al prodotto della ſua ſuperficie curva per la terza parte della ſteſſa altezza; anzi ſe per mezzo del piano A M O dividaſi la mezza unghietta nelle due porzioni A B M O, A E D M O, ancora queſte ſaranno eguali ai prodotti delle riſpettive porzioni della ſua ſuperficie curva per la terza parte dell'altezza A B.

401. Non eſſendo centrale la mezza unghietta cilindrica, nè la ſua ſuperficie curva, nè la ſua ſolidità potrà determinarſi con eſattezza per la ragione, che l' una, e l' altra dee ripeterſi dall' arco circolare, che ritrovaſi nella ſteſſa mezza unghietta. Sia perciò B E F G queſt' altra mezza unghietta, tagliata per lo piano E F G, che incontraſi con quello del quadrante ABD nella retta EF parallela al raggio DA; e pongaſi primieramente, che la B G ſia eguale alla B F. Prendaſi nell' arco circolare B E un punto M ad arbitrio, per cui tirinſi le rette M N, M O paral-

Fig. 48.

rallele alle due BF, BG; e ſiano ancora *mn*, *mo* due altre rette conſimili, infinitamente vicine alle prime MN, MO.

402. Eſſendo adunque BF eguale a BG, ſarà MN eziandio eguale ad MO; e per tanto il picciolo quadrilatero OM*mo*, che è uno degl'elementi, che compongono la ſuperficie curva della mezza unghietta, ſarà eguale al prodotto della MN per l'archetto M*m*. Ma, prolungata la MN per ſino a che s'incontri col raggio AD nel punto R, la ſteſſa MN ſi fa eguale alla differenza delle due MR, NR. Dunque lo ſteſſo picciolo parallelogrammo ſarà eguale altresì alla differenza di due prodotti, uno della MR per l'archetto M*m*, e l'altro della HR, o ſia AF per lo ſteſſo archetto.

403. Per eſſere poi AM ovvero AB ad MR, come M*m* ad N*n*, il primo di queſti due prodotti è eguale al prodotto del raggio AB per la picciola retta N*n*. Onde il medeſimo picciolo parallelogrammo ſarà eguale ancora alla differenza di due prodotti, uno del raggio AB per la picciola retta N*n*, e l'altro della AF per l'archetto M*m*. Ma queſta ſteſſa dimoſtrazione ha luogo, ovunque conſideriſi il picciolo parallelogrammo OM*mo*. Dunque la ſuper-

perficie curva della mezza unghietta ſarà eguale alla differenza di due prodotti, uno del raggio AB per la FE, e l'altro della AF per l'arco circolare BMO.

404. Dalla ſteſſa dimoſtrazione intanto ricavaſi, che ſe per mezzo della MO parallela alla BG dividaſi la ſuperficie curva della mezza unghietta nelle due porzioni EMO, GBMO; conforme la prima di eſſe ſi fa eguale alla differenza di due prodotti, uno del raggio AB per la EN, e l'altro della AF per l'arco EM; così l'altra porzione ſarà eguale alla differenza di due altri prodotti, uno dello ſteſſo raggio AB per la FN e l'altro della ſteſſa AF nell'arco BM: dimodochè, colla determinazione di tutti li riferiti prodotti, rimanerà determinata, così l'intera ſuperficie curva della mezza unghietta, come ciaſcuna delle ſue riferite porzioni.

405. Si vuol però quì notare, che ſe mai la EF ritroviſi dall'altra parte del raggio AD, in tal caſo, conforme la MN ſi fa eguale alla ſomma delle due MR, NR; così la ſuperficie curva della mezza unghietta ſarà eguale, non già alla differenza, ma alla ſomma di due prodotti, uno del raggio AB per la FE, e l'altro della AF

per

per l' arco circolare BME. Onde delle due porzioni della ſteſſa ſuperficie EMO, GBMO, ſiccome la prima dee eſſere eguale alla ſomma di due prodotti, uno del raggio AB nella EN, e l' altro della AF nell' arco EM; così la ſeconda ſarà eguale alla ſomma di due altri prodotti, uno dello ſteſſo raggio AB per la FN, e l'altro della ſteſſa AF per l' arco BM.

406. Per quanto alla ſolidità della ſieſſa mezza unghietta, potrà ella determinarſi, con riguardare, come uno de' ſuoi elementi, il picciolo priſma, compreſo tra li due triangoli, infinitamente vicini NMO, *nmo*. Imperocchè queſto picciolo priſma, come eguale alla metà del prodotto del quadrato della MN per la picciola retta N*n*, ſta al picciolo cilindro, che deſcriveſi colla rivoluzione del picciolo rettangolo MN*nm* intorno alla FE, in quella ſteſſa ragione, che ha il raggio di un cerchio alla ſua circonferenza. Onde, perchè ciò ha luogo, ovunque conſideriſi quel picciolo priſma, ſarà la ſolidità della mezza unghietta alla porzione dello ſferoide, deſcritta colla rivoluzione dello ſpazio circolare BEF intorno alla FE ſimilmente, come il raggio di un cerchio alla ſua circonferenza.

407.

407. Quantunque poi per determinare la riferita porzione di sferoide si abbia bisogno, per quel tanto è stato di sopra dimostrato, di una data porzione di sfera, di un dato cilindro, e di un prodotto di un dato spazio circolare per la circonferenza di un dato cerchio; nientedimeno, conforme per avere la solidità della mezza unghietta, ciascuna di quelle tre parti deesi prima moltiplicare per lo raggio di un cerchio, ed indi dividere per la sua circonferenza; così la porzione di sfera, ed il cilindro si cambieranno in quantità, che potranno determinarsi con esattezza, e solamente per la determinazione del prodotto si avrà bisogno dell' arco circolare, che ritrovasi nella mezza unghietta.

Fig. 47. 408. In fatti, conforme la stessa dimostrazione ha luogo eziandio nella mezza unghietta centrale B A D E; così ancora la sua solidità sarà all' emisfero, che descrivesi colla rivoluzione del quadrante circolare A B D, come il raggio di qualsisia cerchio alla sua circonferenza; ma essendo l'emisfero eguale al prodotto della sua superficie per la terza parte del raggio A B, o pure al prodotto della circonferenza del cerchio massimo per la terza parte del quadrato del raggio A B; chiaro si è, che

è, che ancora ſecondo queſt' altra determinazione la ſolidità della mezza unghietta centrale debba eſſere eguale al prodotto della ſua ſuperficie curva per la terza parte della ſua altezza AB.

409. Dalla ſteſſa dimoſtrazione intanto ricavaſi, che ſe l'una, e l'altra mezza unghietta, per mezzo del triangolo M N O, dividaſi in due porzioni; ancora le ſolidità di queſte due porzioni debbano eſſere alle corriſpondenti porzioni dell'emisfero, e dello sferoide, come il raggio di qualſiſia cerchio alla ſua circonferenza. Onde colla determinazione di queſt' altre due porzioni potranno facilmente determinarſi le ſolidità delle due prime. *Fig.* 47. 48.

410. Or con eſſerſi determinata la ſuperficie curva, e la ſolidità della mezza unghietta, in cui ſono eguali le due BG, BF; niente ſarà più facile, quanto di determinare la ſuperficie curva, e la ſolidità di qualſiſia altra mezza unghietta. In fatti, ſe B E F H ſia un' altra mezza unghietta, tagliata per l' altro piano E F H, che s' incontri con quello del quadrante circolare nella ſteſſa retta F E; ſaranno così le ſuperficie curve, come le ſolidità delle due mezze unghiette nella ragione di B G a B H. Onde, ſe facciaſi, come B G a B H, così la ſuperficie, o ſolidità della *Fig.* 48.

della prima mezza unghietta ad una quarta proporzionale; ſi avrà con queſta quarta proporzionale la ſuperficie, o la ſolidità dell' altra mezza unghietta.

§. XXVIII.

Della miſura delle volte, così di ſeſto eguale, come di ſeſto diſuguale.

411. NElla miſura delle volte, con cui copronſi gl' edificj, ſogliono taluni non poco diſcoſtarſi dal vero, maſſimamente ſe le volte ſiano d' indole alquanto compoſta; onde non ſarà fuor di propoſito, di terminare queſti elementi della Geometria ſolida, con additare brevemente, come debba farſi la loro miſura. E poichè il fine, per cui debbonſi miſurare le volte, ſi è di venire in cognizione colla loro miſura, non meno della fabbrica impiegata nella ſtruttura di eſſe, che della loro intonicatura; chiaro ſi è, che per poterſi l' uno, e l' altro conſeguire, ſia neceſſario miſurare, così la concava loro ſuperficie, come il vuoto, che rimane ſotto di eſſa.

412. Ed in primo luogo gl' edificj ignobili, ſiccome ſono li magazzini, ed altri ſotterranei, ſogliono coprirſi con volte,

volte, li di cui vuoti ſono metà di cilindri retti, e che perciò chiamanſi volte a botte. Onde, conforme per avere la concava loro ſuperficie, biſogna moltiplicare il perimetro di uno delli due mezzi cerchi, su di cui la volta ſi appoggia, per la lunghezza della ſteſſa volta; così ſi avrà il vuoto di eſſa, con moltiplicare il mezzo cerchio per la ſteſſa lunghezza.

413. Queſta ſpecie di volta ſuol praticarſi ancora nelle ſcale degl'edificj, ma per la loro pendenza il mezzo cilindro, che ci preſenta il ſuo vuoto, è obbliquo, o ſia ſcaleno di ſua natura. Onde, conforme per avere il vuoto della volta, deeſi moltiplicare uno delli due mezzi cerchi, che la ſoſtengono, per la loro diſtanza, che viene ad eſſere la vera altezza del mezzo cilindro ſcaleno; così volendoſi la ſuperficie concava della volta, biſogna prima determinare il perimetro della ſezione, fatta nel mezzo cilindro per un piano perpendicolare alla ſua lunghezza, ed indi moltiplicarlo per la ſteſſa lunghezza.

414. Per le volte poi delle ſtanze nobili ſi fa uſo delli mezzi poliedri cilindrici, la di cui indole è ſtata a baſtanza da noi dilucidata. Ed in vero, ſe il piano della ſtanza ſia una figura piana regolare, come un quadrato, o

pure

pure un pentagono, o eſagono regolare, ſuol' ella coprirſi in modo, che il vuoto della volta ſia il mezzo poliedro cilindrico, corriſpondente a quella tale figura. Onde, conforme la concava ſuperficie della ſteſſa volta ſi ha col doppio della ſua baſe; così, con moltiplicare la ſteſſa ſuperficie per la terza parte dell' altezza della volta, ſi avrà il ſuo vuoto.

415. Se la ſtanza nobile ſia rettangola, e la ſua lunghezza ecceda di molto la ſua larghezza; la volta di eſſa ſuol farſi in modo, che nelli due eſtremi della ſua lunghezza veggan ſi ſituate le metà di un mezzo poliedro cilindrico, che ha per baſe il quadrato della ſua larghezza, e tra di eſſe un mezzo cilindro retto, che le congiunge inſieme. Onde, ſiccome la ſuperficie concava della volta, ſi ha con quella del mezzo poliedro, e coll' altra del mezzo cilindro; così parimente ſi avrà il vuoto della ſteſſa volta colla ſolidità del mezzo poliedro, e coll' altra del mezzo cilindro.

416. Ma la volta più elegante, di cui ſuol farſi uſo, per coprire le ſtanze nobili di figura rettangola, formaſi in modo, che in ciaſcuno delli quattro angoli vedeſi ſituata la quarta parte di un mezzo poliedro cilindrico, che ha per

baſe

baſe un quadrato, e tra di eſſe altrettanti quadranti di cilindri retti, che le uniſcono inſieme, con laſciare nel mezzo una figura piana ſimilmente rettangola. Onde, conforme la ſuperficie concava della volta ſi ha con quella del mezzo poliedro, e coll'altre delli quattro quadranti cilindrici; così il vuoto, corriſpondente alla ſteſſa ſuperficie, ſi avrà ſimilmente colla ſolidità del mezzo poliedro, e coll'altre delli quattro quadranti cilindrici.

417. Se poi di queſta volta vogliaſi l'intera ſuperficie, ſi dovrà aggiungere alla parte concava di eſſa l'altra piana, che vedeſi nel mezzo della volta; e così ancora, ſe della ſteſſa volta vogliaſi tutto il vuoto, biſognerà a quello, corriſpondente alla ſuperficie concava, aggiungere l'altro, che corriſponde alla ſuperficie piana. Ma, conforme queſta ſuperficie piana è un parallelogrammo rettangolo, che ſi ha, con moltiplicare inſieme li due lati, che lo contengono; così il vuoto, ad eſſa corriſpondente è un parallelepipedo rettangolo, che ſi avrà, con moltiplicare la ſteſſa ſuperficie piana per l'altezza della volta.

418. Per le volte di quelle ſtanze nobili, che eſſendo di figura regolare, non ſono di molta ampiezza, ſi fa uſo

ancora di quel mezzo poliedro cilindrico, che dicemmo eſſere reſiduo, o ſia ſupplimento dell' altro principale, che ci conduce alla sfera. Ma, per quanto tocca a queſta ſpecie di volta, deeſi prima determinare nella maniera inſegnata di ſopra, così il mezzo poliedro principale, come li quadranti cilindrici, da cui ambidue ſi ſono riſecati; poichè, ſiccome la ſuperficie concava della volta ſi ha, con togliere dalle ſuperficie unite inſieme delli quadranti cilindrici l' altra del mezzo poliedro principale; così ſi avrà il vuoto della ſteſſa volta, con togliere ſimilmente dalle ſolidità unite inſieme degli ſteſſi quadranti cilindrici l' altra dello ſteſſo mezzo poliedro principale.

419. Le riferite ſpecie di volte diconſi eſſere di tutto ſeſto, o pure di ſeſto eguale, in quantochè impieganſi in eſſe quadranti circolari, li quali fanno, che l' altezza della volta ſia uno de' loro raggi; ma, conforme per la maggiore, o minore altezza delle ſtanze conviene tal volta aumentarne, o minorarne il ſeſto; così, qualora il biſogno lo richiede, ſi fa uſo nella ſtruttura di eſſe de' quadranti di quell' ovale, che formano gl' Artefici con archi circolari; onde ſoggiungeremo ora brevemente, come debba farſi la miſura,

così

così delle volte, che ſono di ſeſto maggiore, come dell' altre, che ſono di ſeſto minore.

420. Perciò noteremo primieramente, che ancora ſulla riferita ovale poſſa elevarſi un cilindro, così retto, come ſcaleno. E conforme la ſolidità di ambidue ſi ha parimente, con moltiplicare la baſe per l' altezza; così per quanto alla ſuperficie cilindrica, ella ſi avrà nel cilindro retto, con moltiplicare l' aſſe, o ſia la retta, che la deſcrive per lo perimetro della baſe; e nel cilindro ſcaleno, con moltiplicare la ſteſſa retta per lo perimetro della ſezione, fatta nel cilindro per un piano perpendicolare alla medeſima retta. Onde, ſe il vuoto della volta ſia la metà di uno di queſti due cilindri, corriſpondente ad uno delli due aſſi dell' ovale, che ſerve ad eſſo di baſe, potrà farſi facilmente la miſura, così della ſua ſuperficie concava, come dello ſteſſo vuoto.

421. Noteremo in oltre, che il mezzo poliedro cilindrico poſſa formarſi altresì con quadranti della ſteſſa ovale. In fatti, ſe nella figura piana regolare HIKL; dopo eſſerſi abbaſſate dal centro A ſulli lati HI, IK, KL, LH le perpendicolari AC, AD, AE, AF, elevisi su 'l piano di eſſa l' altra per- *Fig.* 45.

pendicolare AB maggiore, o minore di una di quelle AC; niente vieta, di deſcrivere un' ovale, li di cui aſſi ſiano dupli delle due AB, AC. Onde, ſe congiungaſi il punto B cogl' altri C, D, E, F, con quadranti di queſta ovale, e su di eſſi conducanſi li lati HI, IK, KL, LH in modo, che reſtino ſempre paralleli a loro ſteſſi; coll' incontro ſcambievole delle ſuperficie cilindriche, deſcritte dagli ſteſſi lati, ſi avrà il diviſato mezzo poliedro.

422. Quantunque poi ciaſcuna delle mezze unghiette, che compongono queſt' altro mezzo poliedro, non ſia interamente centrale; nientedimeno, ſecondo è ſtato di ſopra dimoſtrato, può determinarſi, così la ſuperficie, come la ſolidità, tanto della porzione ſua centrale, quanto della porzione rimanente. Onde, conforme colla loro determinazione rimane determinata parimente la ſuperficie, e la ſolidità dello ſteſſo mezzo poliedro; così ſe nelle volte delle ſtanze nobili vegganſi, o il mezzo poliedro intero, o le ſue metà, o le ſue quarte parti; ſempre potrà farſi la miſura, non meno delle loro ſuperficie concave, che delli loro vuoti.

423. Se tengaſi conto delle rimanenti porzioni delli quadranti cilindrici, deſcritti dalli lati HI, IK, KL, LH,

LH, qualora portanſi con moto parallelo ſulli quadranti dell' ovale, che congiungono il punto B cogl' altri C, D, E, F; eziandio con eſſe potrà formarſi un mezzo poliedro, che ſarà reſiduo, o ſupplimento del primo. E poichè, per mezzo degli ſteſſi quadranti cilindrici, e del mezzo poliedro principale, può determinarſi così la ſua ſuperficie, come la ſua ſolidità; perciò, ſe la volta di una ſtanza nobile ſiaſi formata con queſt' altro mezzo poliedro, pure potrà farſi la miſura, non meno della ſua ſuperficie concava, che del ſuo vuoto.

424. Le volte di ſeſto diſuguale formanſi tal volta colla vera ovale geometrica, che propriamente chiamaſi ellifſe; ma ſiccome dell' indole, e proprietà di queſta ovale dovremo ragionare nel breve trattato delle ſezioni coniche, che faremo per ſoggiungere a queſti elementi; così nel medeſimo trattato faremo vedere, come debbanſi miſurare le mezze unghiette, tagliate da un cilindro retto, che elevaſi ſulla ſteſſa ovale; e come in conſeguenza debba farſi la miſura delle volte, in cui impieganſi queſt'altre mezze unghiette.

425. Del rimanente li magazzini, ed altri ſotterranei ſogliono coprirſi ancora con una ſpecie di volta, che chia-

maſi a vela ; onde , per non tralaſciare coſa veruna , faremo ora vedere , come poſſa farſi la ſua miſura . Ed in vero , eſſendo ella di ſeſto eguale , il ſuo vuoto dimoſtra eſſere un emisfero , dalli di cui eſtremi ſianſi riſecate quattro porzioni per altrettanti mezzi cerchi sferici , che colli loro perimetri toccanſi tra eſſo loro , e li di cui oppoſti ſono eguali , e paralleli ; onde ſi è , che la volta , a guiſa di vela tirata da corde , piegaſi negl' angoli , che laſciano tra di eſſi li perimetri delli quattro mezzi cerchi .

426. Poichè dunque diametro dell' emisfero è una delle diagonali tirate nella baſe della volta , potrà determinarſi facilmente , tanto la ſuperficie , quanto la ſolidità , così dell' intero emisfero , come di ciaſcuna delle quattro porzioni da eſſo riſecate . Onde , conforme ſi ha la concava ſuperficie della volta , con togliere da quella dell'emisferio l' altre delle quattro porzioni riſecate ; così , ſe dalla ſolidità dell'emisfero tolgaſi parimente la ſolidità delle quattro porzioni , ſi avrà il vuoto della ſteſſa volta .

427. Se poi la volta ſia di ſeſto diſuguale , ed il ſuo vuoto dimoſtri eſſere la metà di un ſferoide , formato colla rivoluzione di un' ovale comune intorno ad

uno

uno de' ſuoi aſſi, dalli di cui eſtremi ſianſi ſimilmente riſecate quattro porzioni per altrettanti piani, che toccanſi tra eſſo loro, e di cui gl' oppoſti ſono eguali, e paralleli, non è così facile farne la miſura; poichè, ſe bene ſiaſi dato il modo di determinare la ſuperficie, e la ſolidità, così del mezzo sferoide, come delle due porzioni riſecate da eſſo verſo gl' eſtremi dell' aſſe della rivoluzione; nientedimeno, per l' altre due porzioni riſecate verſo gl' eſtremi dell' altro aſſe, tutta via deſideraſi la maniera di determinare le loro ſuperficie, e le loro ſolidità.

428. Intanto, ſe ſulla baſe della volta, di cui ſi tratta, intendanſi formate tre altre volte, una a botte col vero mezzo cilindro circolare, un'altra a vela coll' emisfero, e la terza ſimilmente a botte colla metà del cilindro retto, deſcritto ſulla ſteſſa ovale comune; tutte quattro ſaranno preſſo a poco proporzionali, tanto per le loro ſuperficie, quanto per le loro ſolidità. Onde, con determinare le ſuperficie, e li vuoti delle tre prime; per mezzo della regola aurea, potrà al di preſſo determinarſi, così la ſuperficie, come il vuoto di quella, di cui ſi tratta.

Fine del ſecondo libro.

IN-

INDICE

DELLI PARAGRAFI

CONTENUTI NEL SECONDO LIBRO DELLA GEOMETRIA SOLIDA.

§. I. *Dell' incontro di una retta con un piano.* pag. 6.
§. II. *Dell' incontro di un piano con un' altro piano.* 16.
§. III. *Dell' angolo ſolido, e delle ſue affezioni.* 23.
§. IV. *Della nozione del parallelepipedo, e delle ſue varie ſpecie.* 29.
§. V. *Della miſura di qualſiſia parallelepipedo.* 34.
§. VI. *Delle conſeguenze, che ricavanſi dalla miſura de' parallelepipedi.* 40.
§. VII. *Continuazione dello ſteſſo argomento.* 46.
§. VIII. *Della nozione del priſma, e delle ſue proprietà, così aſſolute, come relative.* 51.
§. IX. *Della nozione della piramide, e delle ſue proprietà, così aſſolute, come relative.* 57.
§. X. *Delle piramidi paragonate colli priſmi, e della ſimiglianza dell' une, e l' altre figure.* 65.

§. XI.

§. XI. *Dell' altre figure ſolide, terminate da ſuperficie piane.* 72.
§. XII. *Della nozione delle cinque figure ſolide regolari.* 79.
§. XIII. *Della nozione del metodo, che chiamaſi degl' indiviſibili.* 86.
§. XIV. *Della nozione del metodo, che chiamaſi degl' infinitamente piccioli.* 95.
§. XV. *Della nozione del cilindro, e delle ſue proprietà, così aſſolute, come relative.* 104.
§. XVI. *Della nozione del cono, e delle ſue proprietà, così aſſolute, come relative.* 113.
§. XVII. *Delli coni paragonati colli cilindri, e della ſimiglianza, così degl' uni, come degl' altri.* 121.
§. XVIII. *Della nozione, così della ſfera, come delli cerchi ſferici.* 130.
§. XIX. *Della miſura, così della ſuperficie ſferica, come delle ſue porzioni.* 137.
§. XX. *Della miſura de' triangoli ſferici.* 143.
§. XXI. *Della miſura della ſolidità, così della ſfera, come delle ſue porzioni.* 151.
§. XXII. *Delle figure, che ſi generano con ogn' altra rivoluzione d' archi circolari.* 159.
§. XXIII. *Della miſura degli ſferoi-*

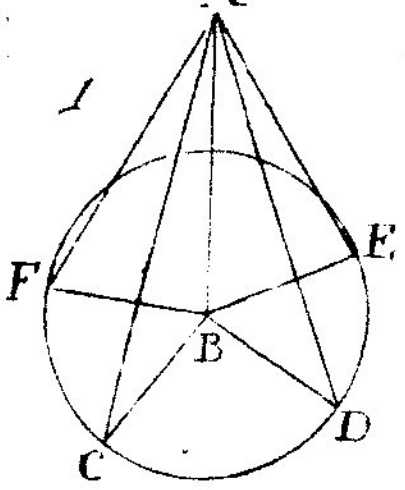
226
roidi, che ſi generano colla riferita rivoluzione. 168.
§. XXIV. *Della miſura, così della ſuperficie, come della ſolidità dell' anello ſferico.* 177.
§. XXV. *Delle cinque figure ſolide regolari, conſiderate per rapporto alla ſfera.* 185.
§. XXVI. *Del modo di formare poliedri cilindrici, che abbiano le ſteſſe proprietà della ſfera.* 196.
§. XXVII. *Dell' unghiette cilindriche, e del modo di miſurarle.* 205.
§. XXVIII. *Della miſura delle volte, così di ſeſto eguale, come di ſeſto diſuguale.* 214.

ERRORI DA CORREGGERSI.

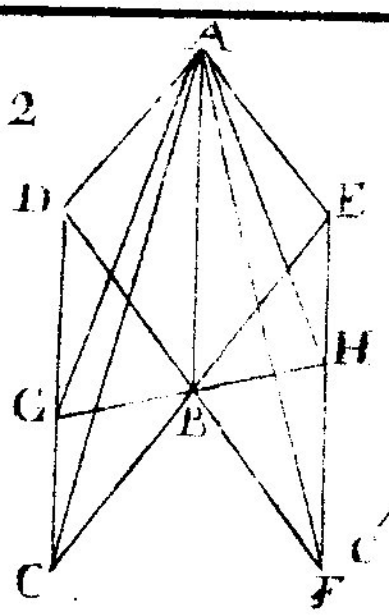
Pag. 27.	marg.	*Fig.*16.	*Fig.*11.
Pag. 37.	v. 15.	ſua	ſola
Pag. 96.	v. 16.	BO	BD
Pag. 157.	marg.	*Fig.*31.	*Fig.*30.

Tav. I.

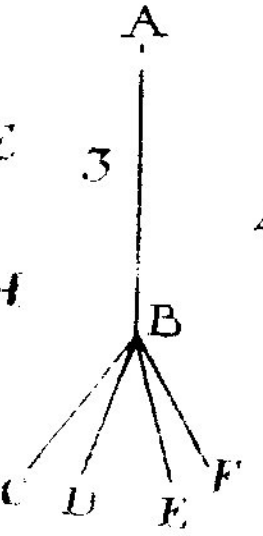
1



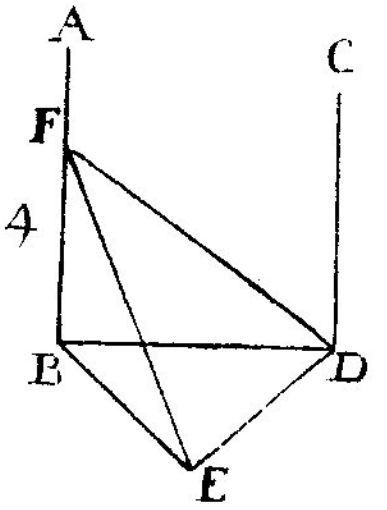
2



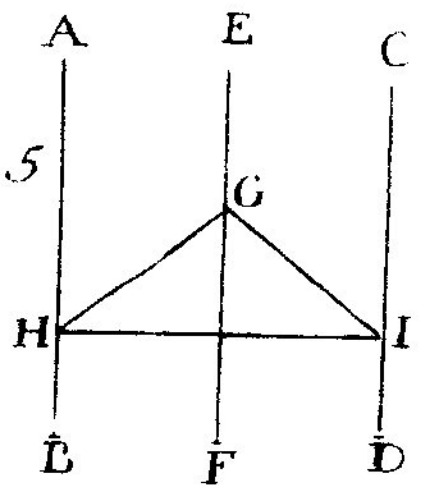
3



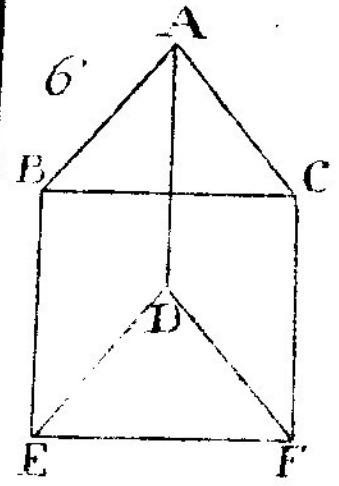
4



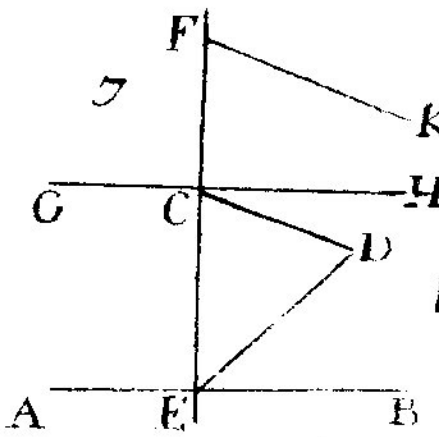
5



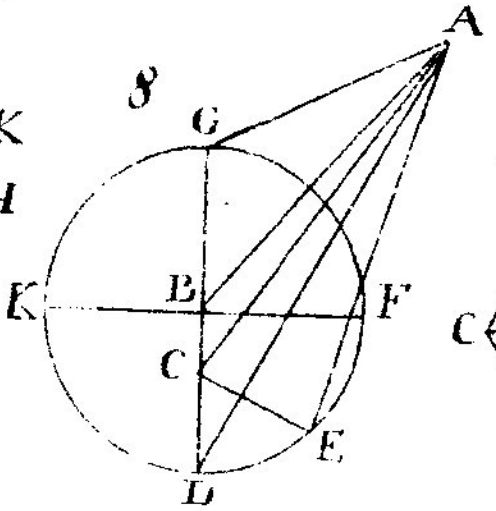
6



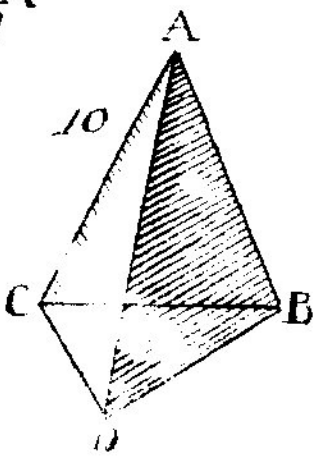
7



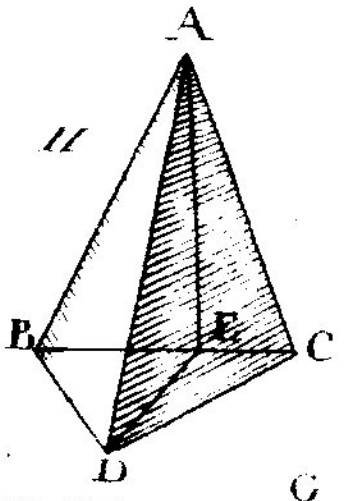
8



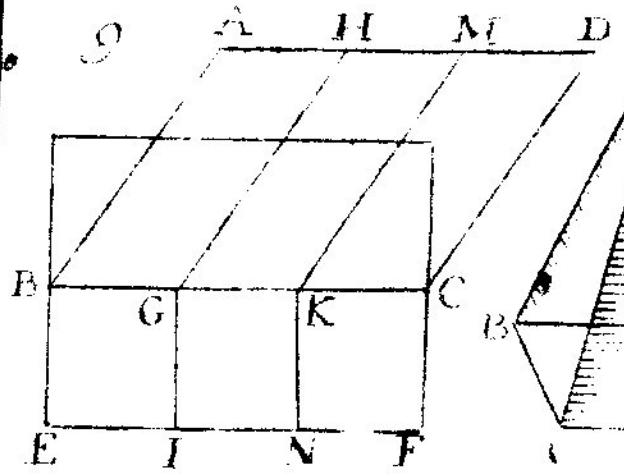
10



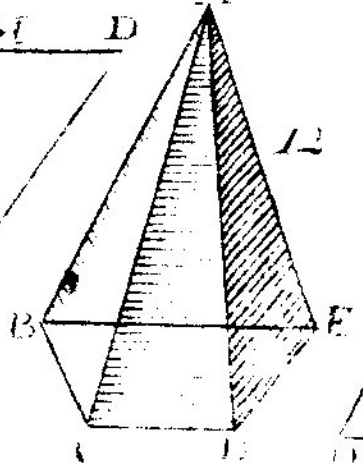
11



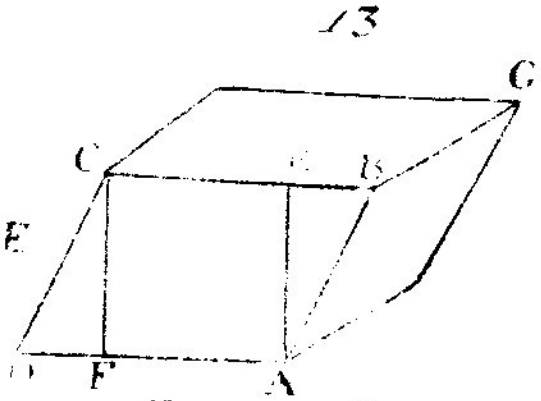
9



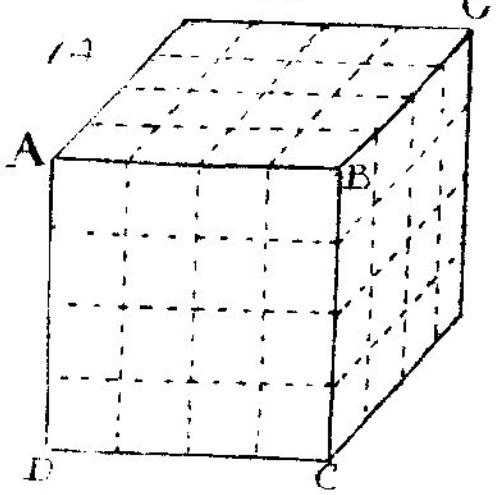
12



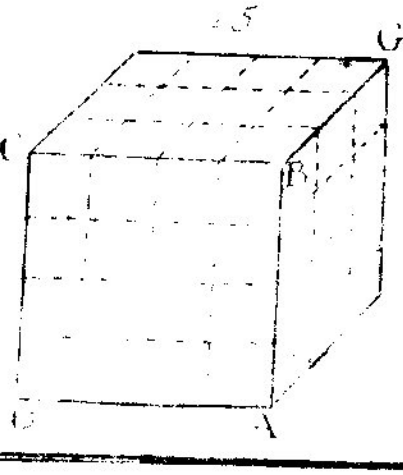
13



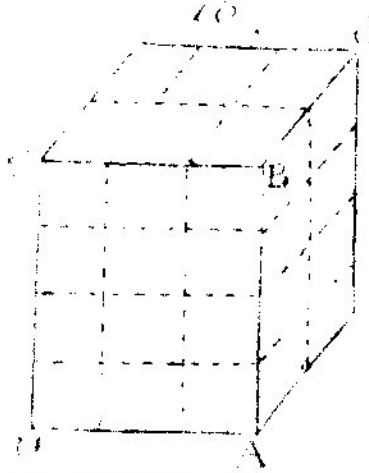
14

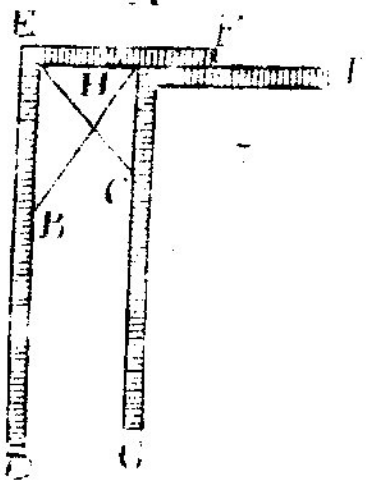


15

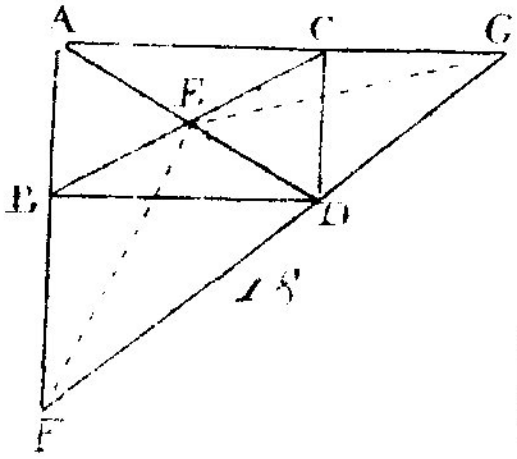


16

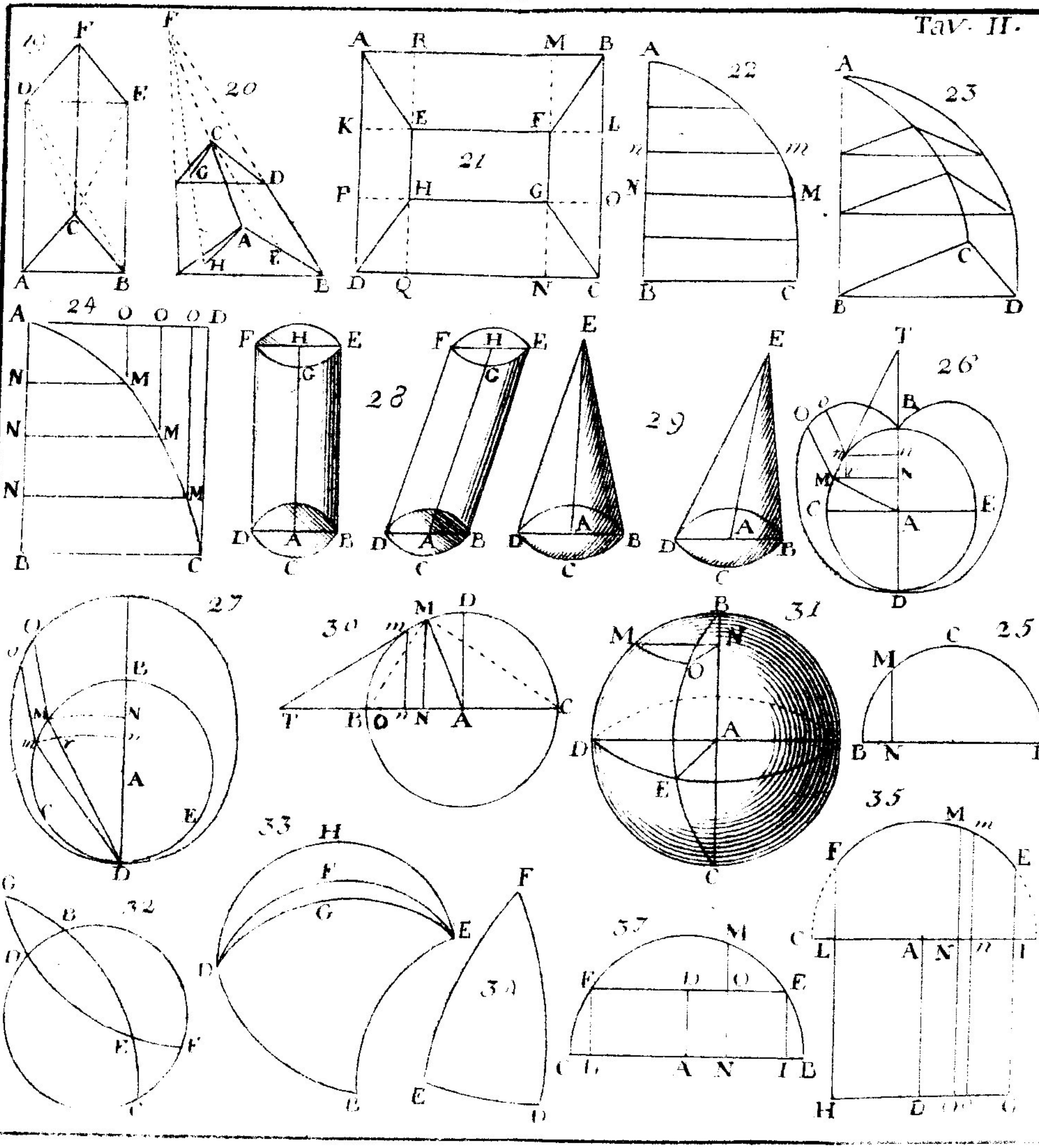




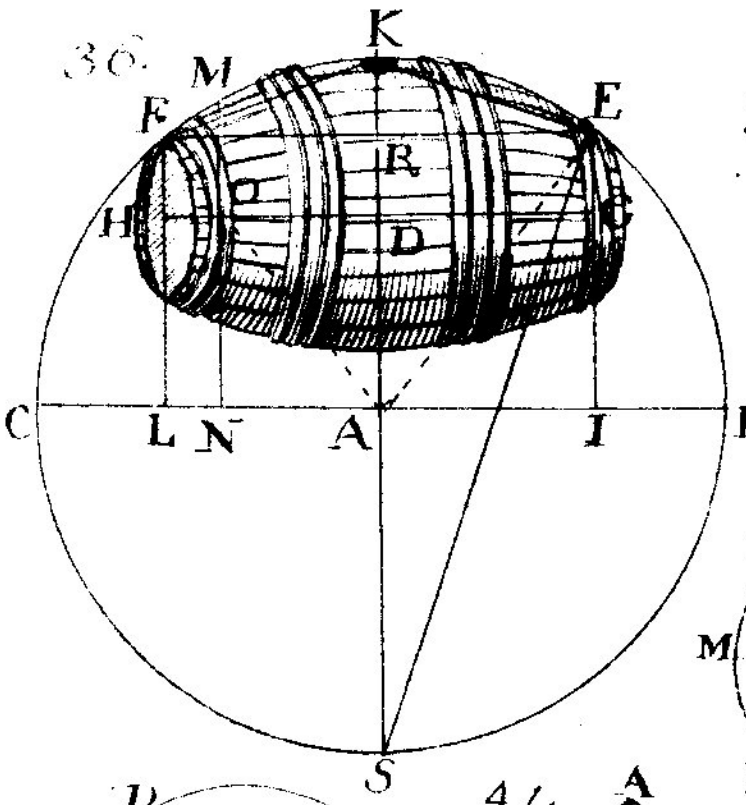
18



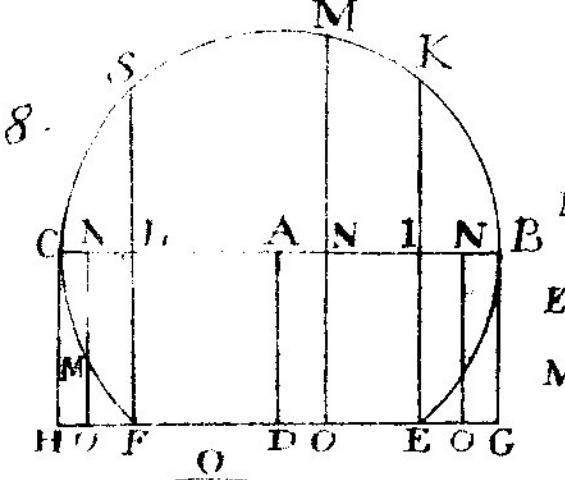
Tav. II.


19
F
D
E
C
A
B
20
F
C
G
D
A
H
E
B
21
A
R
M
B
K
E
F
L
H
G
P
O
D
Q
N
C
22
A
n
m
N
M
B
C
23
A
C
B
D
24
A
O O O D
N
M
N
M
N
M
B
C
F
H
E
G
D
A
B
C
28
F
H
E
C
D
A
B
C
E
A
D
B
C
29
E
A
D
B
C
T
26
O O
B
m
M
N
C
E
A
D
27
O
B
M
N
m
r
A
C
E
D
30
M
D
m
T
B
O
n
N
A
C
31
B
M
N
O
A
D
E
C
25
C
M
B
N
D
32
G
B
D
E
F
C
33
H
F
G
E
D
B
F
E
34
D
37
M
E
D
O
E
C
L
A
N
I
B
35
M
m
F
E
C
L
A
N
n
I
B
H
D
O
G

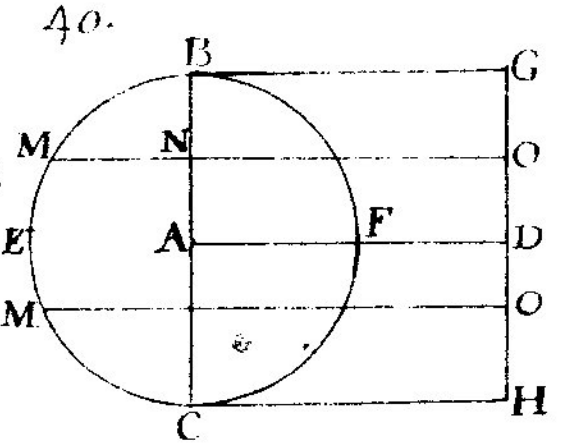
36.



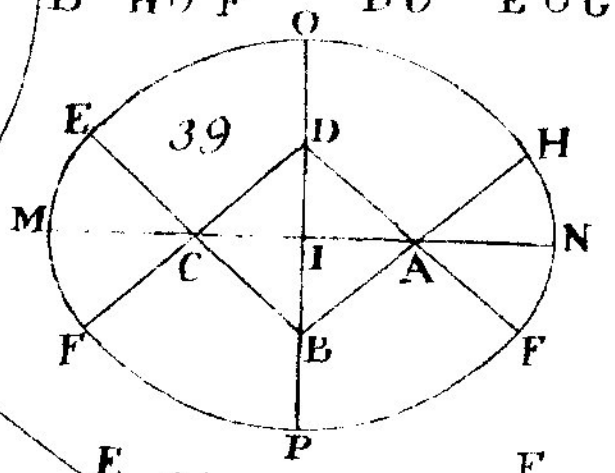
38.



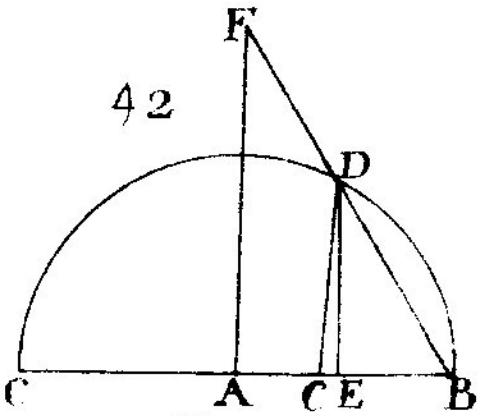
40.



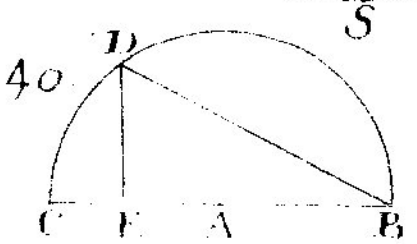
39.



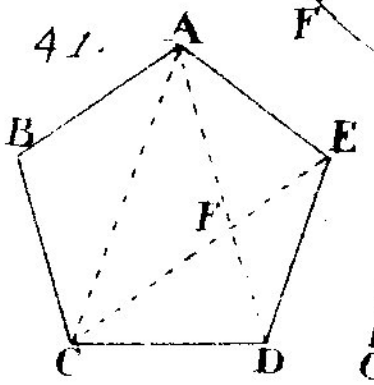
42.



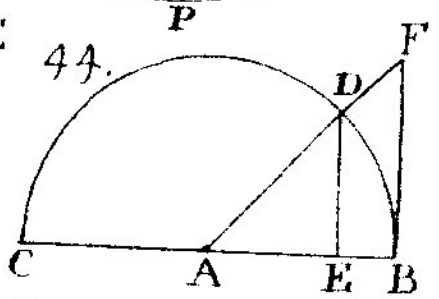
40.



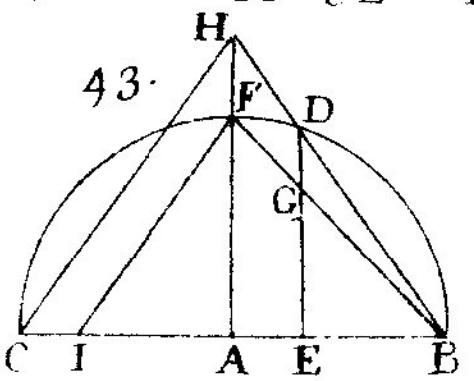
41.



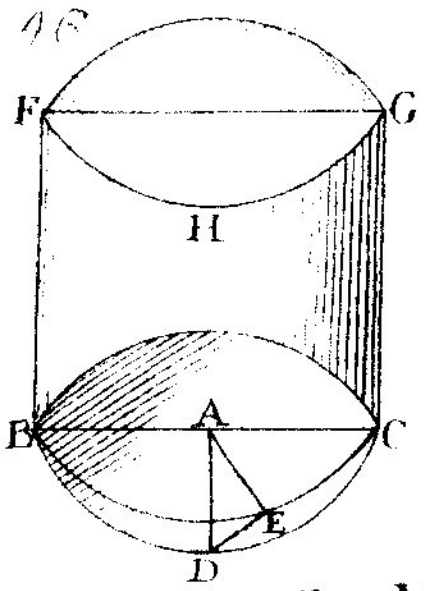
44.



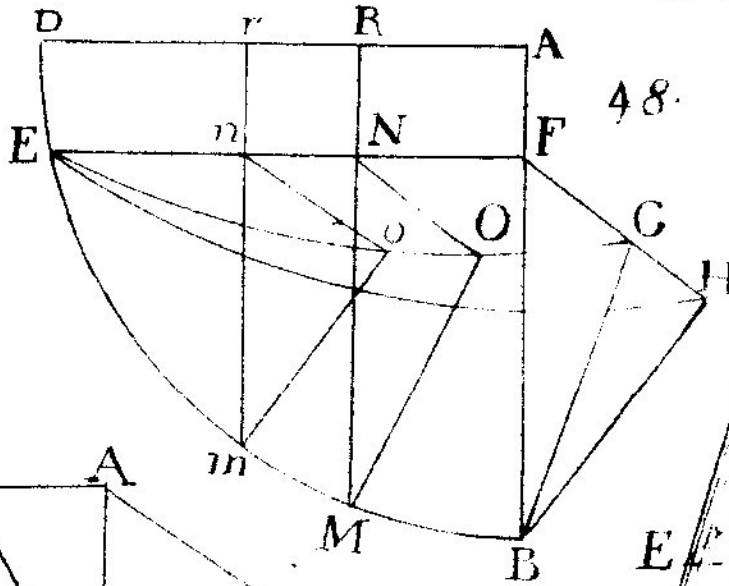
43.



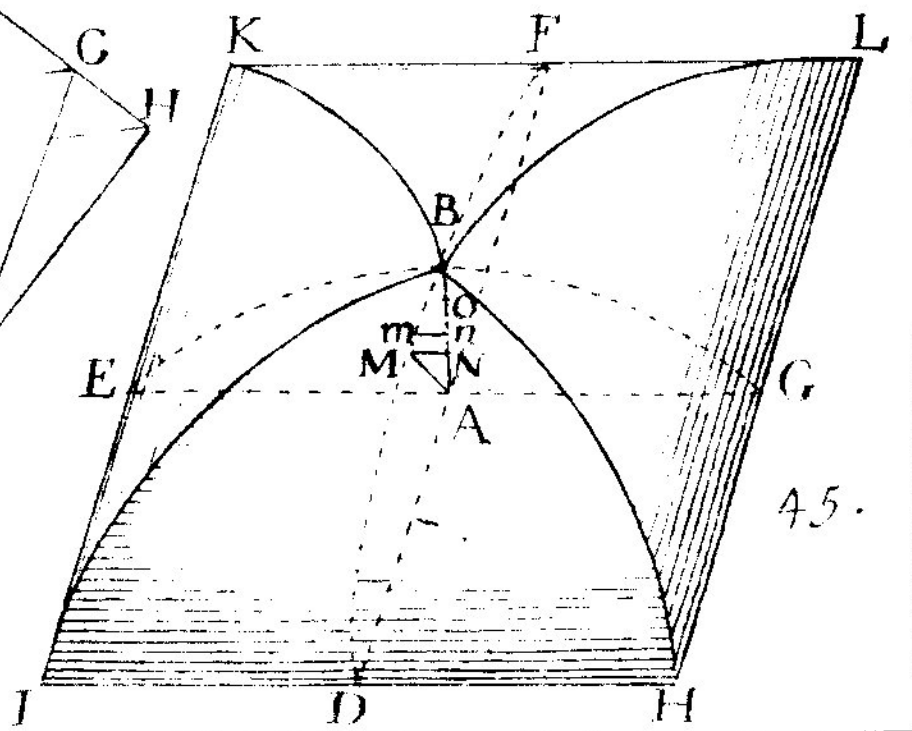
46.



48.



45.



47.