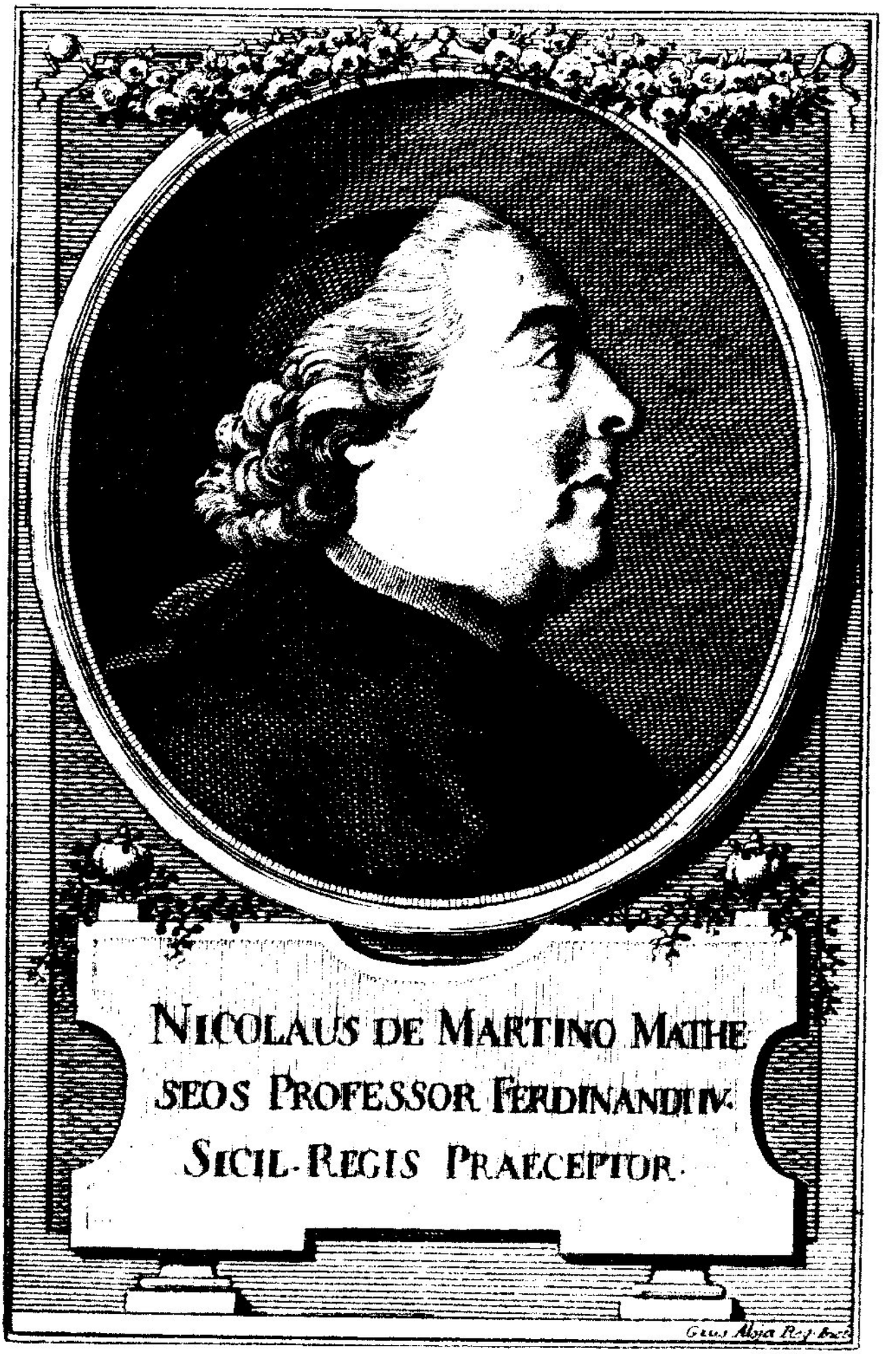
Marii
Elem
Geon
T. I



NICOLAUS DE MARTINO MATHE
SEOS PROFESSOR FERDINANDI IV.
SICIL. REGIS PRAECEPTOR.

ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA
COSI' PIANA, COME SOLIDA
COLL' AGGIUNTA
DI UN BREVE TRATTATO
DELLE SEZIONI CONICHE
COMPOSTI
PER USO DELLA REGALE ACCADEMIA MILITARE
DI
NICCOLO' DI MARTINO
PRIMARIO PROFESSORE DELLA MEDESIMA.
TOMO I.

IN NAPOLI
NELLA STAMPERIA SIMONIANA
MDCCLXVIII.

PREFAZIONE.

AL DISCRETO LETTORE.

PEr uſo della Reale Accademia Militare, di cui ho l'onore di eſſerne Primario Profeſſore, fin dal primo ſuo ſtabilimento ſi ſono dati da me alla luce varj Trattati diſgiunti l' uno dall' altro. Doveaſi al preſente fare una nuova edizione degli Elementi della Geometria Piana, per non eſſervi più eſemplari della prima; ma avanti d' intraprenderla, mi ſuggerì il Comandante D. Giuſeppe Pietra della ſteſſa Reale Accademia, che invigila ſu di eſſa con zelo ed amore di formare un Corſo continuato, così degli Trattati dati alla luce, come degli altri non ancora impreſſi. Non mi diſpiacque il ſuo conſiglio non oſtante che nell' età in cui mi ritrovo, dovrei

piuttosto cercar riposo, che impegnarmi in nuove fatiche; ma per lo preciso bisogno che si ha degli riferiti Elementi si danno per ora alla luce tre tometti, di cui il primo racchiude gli Elementi della Geometria Piana il secondo gli Elementi della Geometria Solida ed il terzo un breve trattato delle Sezioni Coniche. Conforme poi a questi debbonsi premettere gli Elementi dell' Aritmetica da cui dee darsi principio allo studio delle Scienze Matematiche, così dopo di essi si daranno altresì alla luce, primieramente gli Elementi della Trigonometria Piana coll' uso di essa nelle operazioni da farsi sul terreno, indi gli Elementi dell' Algebra, e dell' Analisi Geometrica, e finalmente un breve Trattato del Calcolo così differenziale come integrale. Con questi trattati si avrà quanto basta per le Scienze Matematiche che chiamansi pure; ma per le altre che appellansi Fisico-Matematiche ci restringe-

geremo alle più neceſſarie come ſono la Dinamica, la Statica, la Meccanica, l' Idroſtatica e l'Idraulica, racchiudendole in due trattati, di cui uno ſarà dell' Equilibrio e del moto de' corpi Solidi, e l' altro dell' Equilibrio e del moto de' Corpi fluidi. Terminaremo finalmente il corſo deſtinato per uſo della riferita Reale Accademia con due altri trattati, a cui ſpecialmente debbono eſſere dirette le mire di un Giovane Militare, cioè col trattato della Fortificazione così regolare come irregolare, e con un altro di ciò, che riguarda l' Artiglieria. Egli è vero che un giovane Militare dee eſſere iſtruito ancora nella Geografia per poter leggere con profitto la Storia così Antica, come Moderna, di cui non li farebbe onore l' eſſerne ignudo. Ma per quanto tocca ad una tal Scienza può egli apprenderla da se ſteſſa; poichè ſebbene la ſua parte teorica richieda qualche cognizione Aſtronomica niente-

tedimeno dopo lo ſtudio dell' Arimmetica, e della Geometria non incontrerà in eſſa difficoltà veruna.

IN-

INDICE

DELLI PARAGRAFI

CONTENUTI NEL PRIMO LIBRO DELLA GEOMETRIA PIANA.

§.I. *Dell' indole della linea retta.* pag. 6.
§. II. *Dell' indole della linea circolare.* 9.
§. III. *Dell' affezioni più ſemplici dell' angolo.* 13.
§. IV. *Delle varie ſpecie dell' angolo.* 20.
§. V. *Della vera miſura dell' angolo.* 25.
§. VI. *Delle proprietà delle rette parallele.* 31.
§. VII. *Delle proprietà più ſemplici del triangolo.* 39.
§. VIII. *Delle varie ſpecie del triangolo.* 45.
§. IX. *Della perfetta uguaglianza de' triangoli.* 51.
§. X. *Delle proprietà più ſemplici del parallelogrammo.* 59.
§. XI. *Dell' uguaglianza così de' parallelogrammi, come de' triangoli.* 67.
§. XII. *Dell' uguaglianza de' rettangoli, e de' quadrati.* 73.

§. XIII. *Continuazione dello ſteſſo argomento.* 81.
§. XIV. *Delle proprietà de' triangoli relative ai quadrati de' loro lati.* 88.
§. XV. *Della riſoluzione di alcuni problemi intorno ai rettangoli, e li quadrati.* 96.
§. XVI. *Dell' indole dell' altre figure rettilinee.* 103.
§. XVII. *Dell' indole delle figure rettilinee regolari.* 110.
§. XVIII. *Della miſura delle figure rettilinee.* 116.
§. XIX. *Continuazione dello ſteſſo argomento.* 122.
§. XX. *Del modo di dedurre l' altezza del triangolo dai ſuoi lati.* 129.
§. XXI. *Delle proprietà del cerchio, relative al ſuo centro, e alla ſua tangente.* 137.
§. XXII. *Delle proprietà del cerchio relative alle rette tirate alla ſua circonferenza da qualſiſia punto.* 146.
§. XXIII. *Delle proprietà del cerchio relative agl' angoli, che in eſſo s' incontrano.* 154.
§. XXIV. *Della proprietà più rilevante del cerchio.* 162.
§. XXV. *Delle figure regolari, conſiderate per rapporto al cerchio.* 171.
§. XXVI. *Continuazione dello ſteſſo argomento.* 183.

§. XXVII. *Della nozione della ragione, così ſemplice, come compoſta.* 191.

§. XXVIII. *Della natura, e proprietà della proporzione.* 202.

§. XXIX. *Delle proporzioni, che poſſono averſi colli lati, così degl' angoli, come de' triangoli.* 214.

§. XXX. *Della riſoluzione di alcuni problemi intorno alle rette proporzionali.* 229.

§. XXXI. *Della ragione, in cui ſono, così li triangoli, come li parallelogrammi, e di nuovo della loro eguaglianza.* 245.

§. XXXII. *Di una proprietà molto rilevante delle rette proporzionali.* 257.

§. XXXIII. *Della ſimiglianza delle figure rettilinee.* 269.

§. XXXIV. *Del cerchio conſiderato come poligono regolare, e delle conſeguenze, che ſe ne ritraggono.* 280.

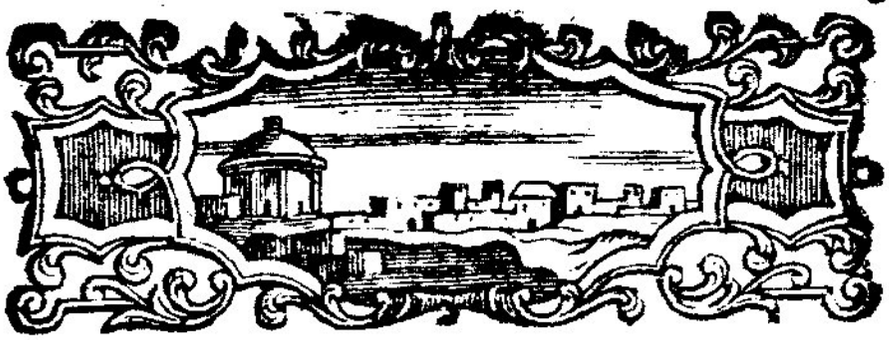
§. XXXV. *Dei ſettori, e porzioni del cerchio, come ancora delle lunette, e corone circolari.* 291.

§. XXXVI. *Dell' indole de' problemi geometrici, e del modo di riſolverli.* 302.

§. XXXVII. *Della riſoluzione de' problemi, che ſono piani di lor natura.* 315.

§. XXXVIII.

xii
§. XXXVIII. *Della ſteſſa riſoluzione de' problemi piani illuſtrata con eſempj.* 324.



ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
COSÌ PIANA, COME SOLIDA.

INTRODUZIONE.

1. LA Geometria è una Scienza, che aggiraſi intorno alla quantità eſteſa in lunghezza, larghezza, e profondità. Si ravviſa una tal quantità, così ne' corpi, come nello ſpazio; e con conſiderarſi ſeparatamente le tre ſue dimenſioni, diſtinguonſi di eſſa tre ſpecie, che chiamanſi linea, ſuperficie, e corpo ovvero ſolido.

2. S' intende per linea la quantità eſteſa, conſiderata con una ſola dimenſione, che appellaſi ſempre lunghezza. S'intende per ſuperficie la quantità eſteſa, con-

conſiderata con due dimenſioni, di cui una diceſi lunghezza, e l'altra larghezza. S' intende finalmente per corpo, ovvero ſolido la quantità eſteſa, conſiderata con tutte tre le ſue dimenſioni.

3. Se di una linea conſiderinſi li ſoli termini, ſi avranno li punti, di cui trattaſi ancora in queſta Scienza; e perciò la vera loro nozione ſi è, di eſſer privi di ogni dimenſione, e capaci ſoltanto di ſito, ovvero poſizione. Ma, ſiccome li termini delle linee ſono li punti, così quelli delle ſuperficie ſono le linee, e quelli del corpo ſono le ſuperficie.

4. Or chiaro ſi è, che debba generarſi la linea col moto di un punto, la ſuperficie col moto laterale di una linea, ed il corpo col moto traſverſale di una ſuperficie. Ma non perciò dee crederſi, che le parti della linea ſiano li punti, le parti della ſuperficie ſiano le linee, e le parti del corpo ſiano le ſuperficie.

5. In fatti la parte dee eſſere della ſteſſa indole col ſuo tutto; onde, conforme dee comporſi la linea di altre lineette, la ſuperficie di altre ſuperficie più picciole, ed il corpo di altri corpicciuoli; così la diviſione di tutte tre le quantità nei riferiti loro componenti, almeno col penſiero, può condurſi all'infinito.

6. La linea intanto può eſſere di due ſpecie, cioè retta, e curva. Chiamaſi linea retta quella, che ſi diſtende egualmente tra li ſuoi termini. Chiamaſi all'incontro linea curva quella, che piegando verſo un qualche lato, non ſerba egual poſizione tra li punti, che la terminano.

7. Eziandio la ſuperficie divideſi in piana, e curva. Si appella ſuperficie piana quella, su di cui può adattarſi da per tutto la linea retta. Si appella al contrario ſuperficie curva quella, che non permette di poterſi su di eſſa adattare la linea retta per ogni verſo.

8. Or, ſiccome le ſuperficie piane, terminate da per tutto da linee, chiamanſi figure piane; così li corpi o ſiano ſolidi, terminati per ogni lato da ſuperficie, appellanſi figure ſolide. E poichè la Geometria aggiraſi propriamente intorno a queſte figure; perciò ella ſuol dividerſi in piana, e ſolida.

9. Nè poi è da porſi in dubbio, che competa alla Geometria il carattere di vera ſcienza; sì perchè ella ſtudiaſi di definire con eſattezza tutto ciò, di cui ſi tratta; come ancora, perchè deduce le ſue propoſizioni, o dalle ſteſſe definizioni, o da principj chiari, ed evidenti, o da altre propoſizioni antecedentemente dimoſtrate.

10. Ma, conforme le ſue propoſizioni ſono, o teoremi, che dimoſtrano qualche verità, o problemi, che inſegnano a fare qualche coſa; così eziandio li ſuoi principj ſono, o teoremi facili, che chiamanſi aſſiomi, o problemi facili, che appellanſi poſtulati, ovvero dimande.

11. Fra gl' aſſiomi intanto ve ne ſono alcuni così generali, che poſſono adattarſi a qualſiſia ſpecie della quantità eſteſa. Onde, dovendo la conoſcenza di eſſi precedere ogn' altra ricerca, li ſoggiungeremo quì brevemente, con reſtringerne il numero al più che ſia poſſibile.

12. Il primo adunque ſi è, che le quantità eguali ad una terza, ſiano eguali ancora tra di loro. Dal che ne ſegue, che debbano eſſere eguali parimente, così le quantità, che ſono duple, triple, o quadruple di una terza; come le quantità, che ſono la metà, la terza parte, o la quarta parte di un' altra.

13. Il ſecondo ſi è, che ſe di due quantità eguali una ſia maggiore o minore di una terza, l'altra debba eſſerne ancora maggiore o minore. Onde, ſe mai le due quantità ſiano diſuguali, conforme eſſendo la minore maggiore di una terza, l'altra dee eſſerne molto mag-

maggiore; così al contrario essendo la maggiore minore di una terza, l' altra dee esserne molto minore.

14. Il terzo si è, che le quantità eguali coll' aggiunta, o detrazione di altre eguali conservano tuttavia la loro uguaglianza; e perciò, se una consimile aggiunta, o detrazione facciasi a quantità, che siano disuguali, queste rimaneranno nella stessa disuguaglianza, in cui erano prima.

15. Il quarto si è, che il tutto, conforme è eguale alle parti, che lo compongono, unite insieme, così sia maggiore di ciascheduna di esse: cioè a dire, che una quantità composta di due o più altre quantità, conforme le uguaglia unite insieme, così sia maggiore di ognuna di esse.

16. Il quinto, ed ultimo si è, che le quantità, che adattate insieme si combaciano, siano eguali tra di loro. Ed egli è da notarsi, che siccome quest'assioma compete alle sole quantità estese, che sono capaci di sito, ovvero posizione; così il suo converso non sempre è vero, cioè che le quantità eguali debbano combaciarsi adattate insieme.

LIBRO I.

Della Geometria Piana.

17. SEcondo è ſtato avvertito (8) l' objetto della Geometria piana ſono le figure, che chiamanſi piane. Per l' intelligenza intanto di tali figure dee eſſerci nota l' indole, così delle linee, che le terminano, come degl'angoli, formati coll' incontro delle ſteſſe linee. Onde daremo principio alla Geometria piana coll' eſame primieramente delle linee, ed indi degl' angoli.

§. I.

Dell' indole della linea retta.

18. LInea retta ſi è chiamata (6) quella, che giace egualmente tra li ſuoi termini. Dal che ne ſegue I, che ella ſia la più corta di tutte le linee, che hanno gli ſteſſi termini. II, che da un punto ad un' altro punto non poſſa tirarſi, ſe non ſe una ſola linea retta. III, che la poſizione della linea retta dipenda da due ſoli punti. IV, che l' interſegamento di due linee rette debba farſi in un ſol punto. E V final-

nalmente, che due linee rette non poſſano formare figura.

19. Le riferite conſeguenze debbono averſi, come aſſiomi ſpeciali, che riguardano la linea retta. Ma intorno ad eſſa ſi dimandano due coſe, che come facili ad eſeguirſi, di leggieri debbono eſſere concedute. La prima ſi è, di poterſi tirare una retta da un punto ad un altro punto. L'altra ſi è, di poterſi prolungare a dirittura qualſiſia retta data.

20. Queſte ſono le prime due dimande, o ſiano poſtulati della Geometria elementare, le quali ſi eſeguono nella pratica, con far uſo di una riga di ottone, o pure di legno. Per conoſcere intanto, ſe una riga ſia eſatta, baſterà tirare per mezzo di eſſa una retta su di un piano, ed indi oſſervare, ſe la medeſima rivoltata ſi combaci eſattamente colla retta tirata.

21. Additandoci la retta il più corto cammino, che poſſa tenerſi da un punto ad un'altro punto; chiaro ſi è, che debba miſurarſi la diſtanza, che ſi frappone tra due punti dati, per la retta, che li congiunge inſieme: dimodochè, con miſurare la lunghezza di queſta retta, ſi renderà a noi nota la diſtanza, che ſi dimanda.

22. La miſura intanto di qualſiſia

retta dee farſi per mezzo di un' altra retta, che ſia di data lunghezza; come ſarebbe preſſo noi il noſtro palmo, il quale ſiccome divideſi in dodici parti eguali, che chiamanſi once, così ciaſcheduna di queſte parti ſi ſuddivide in altre dodici ſimilmente eguali, che appellanſi minuti.

23. Potrebbe farſi uſo ancora del piede parigino, le di cui diviſioni ſono ſimili a quelle del noſtro palmo, ſe non che chiamanſi digiti, ovvero pollici le prime dodici parti eguali, in cui egli ſi divide, ed appellanſi linee l' altre dodici, in cui ſi ſuddivide ciaſcheduno pollice; ma il piede parigino è di maggior lunghezza del noſtro palmo, poichè delle 144 parti, in cui egli reſta diviſo, ne contiene preſſo a poco il noſtro palmo 117.

24. La retta poi, di cui ſi fa uſo per miſurare la lunghezza dell' altre rette, dee additarci con eſattezza ogni minima loro porzione; e quindi ſi è, che ella ſi divide, e ſuddivide in un numero così grande di parti eguali, che ogn' altra particella più picciola poſſa traſcurarſi ſenza nota di errore ſenſibile.

25. Ed in fatti, ſiccome per poterſi fare il calcolo delle rette, che ſi miſurano, con rotti decimali, ſogliono farſi

le

le diviſioni, e ſuddiviſioni della riferita retta da 10 in 10; così nella ſcala, che formaſi su di eſſa, notanſi non ſolo così le ſue decime parti, come le centeſime, ma eziandio le parti milleſime. Spiegheremo intanto altrove, come tutte le riferite parti poſſono notarſi ſulla ſcala ſenza confuſione.

§. II.

Dell' indole della linea circolare.

26. PEr quanto alla linea curva, la prima coſa da notarſi ſi è, che ella per ragion della ſua curvatura ritrovaſi eſſere concava da un lato, e conveſſa dall' altro. Ma, ſiccome prendendo in una curva due punti, e congiungendogli inſieme per una retta, dee diſcoſtarſi queſta retta dalla curva; così la medeſima dovrà ſempre cadere verſo quel lato, ove ritrovaſi la ſua concavità.

27. L' altra coſa da notarſi ſi è, che ſe bene le linee rette ſiano tutte della ſteſſa indole, nientedimeno la linea curva può eſſere capace d' infinite variazioni. Intanto nella Geometria elementare conſideraſi la ſola linea circolare, per cui s' intende una curva, che rientrando in se ſteſſa, diſcoſtaſi egualmen-

te da un punto, che riguardaſi come ſuo centro; onde ſi è, che le rette tirate dal centro per ſino alla linea circolare ſono tutte eguali tra di loro.

Fig. 1. 28. Quindi, ſiccome aggirandoſi una retta, come AB, intorno al ſuo termine A fiſſo, ed immobile, deſcriveſi dall'altro termine B la linea circolare BCD, che ha per centro il primo termine A; così la poſizione di queſta linea dipende, così dal ſuo centro, come dall'intervallo, o ſia diſtanza di uno de' ſuoi punti dallo ſteſſo centro; e perciò dato il centro, e dato l'intervallo, ſarà data di poſizione la linea circolare.

29. La lunghezza intanto della linea circolare dipende da quella dell'intervallo. Onde, conforme ſono eguali le linee circolari deſcritte con eguali intervalli; così, ſe mai deſcrivanſi con intervalli diſuguali, quella ſarà più lunga, a cui corriſponde intervallo maggiore; anzi dimoſtreremo a ſuo luogo, che aumentaſi la ſua lunghezza a miſura del ſuo intervallo.

30. Or, ſiccome per eſſere la linea circolare concava verſo il centro, la retta, che uniſce inſieme due de' ſuoi punti, dee cadere dentro di eſſa; così, eſſendo ella da per tutto di egual curvatura, due archi eguali della medeſima

ma dovranno combaciarſi adattati inſieme; e farſi eguali in conſeguenza le loro corde, o ſiano le rette, che li ſoſtengono.

31. Il converſo intanto di ciò richiede qualche reſtrizione; poichè ſiccome una ſteſſa corda ſoſtiene ſempre due archi, che all' ora ſolamente ſono eguali, quando ella paſſa per lo centro; così adattandoſi in una linea circolare due corde eguali, che non paſſino per lo centro, ſarà l' arco maggiore eguale al maggiore, e l'arco minore eguale al minore.

32. Le riferite due proprietà hanno luogo altresì per rapporto a due linee circolari diverſe, che ſiano eguali tra di loro: dimodochè, ſiccome prendendoſi in eſſe due archi eguali, debbono eſſere eguali ancora le loro corde; così, adattandoſi nelle medeſime due corde eguali, che non paſſino per gli loro centri, ſi farà l' arco maggiore eguale al maggiore, e l' arco minore eguale al minore.

33. Or la terza dimanda, o ſia poſtulato della Geometria elementare ſi è, di poterſi deſcrivere la linea circolare con qualſiſia centro, e qualſiſia intervallo. E ſiccome la deſcrizione di eſſa ſi eſegue nella pratica per mezzo del compaſſo, così l'eſattezza di queſto

dipende dal rimanere egli fermo ad ogni apertura delle ſue gambe, e dall' eſſere ſottili le ſue punte, le quali perciò ſogliono farſi di acciajo, e non già di ottone.

34. Col compaſſo poi potrà prenderſi altresì la lunghezza di qualſiſia retta ſegnata ſul piano. Onde, ſe mai l' intervallo, con cui dee deſcriverſi la linea circolare, non ſia contiguo al ſuo centro, primieramente ſi prenderà col compaſſo la lunghezza di quell' intervallo, ed indi tenendoſi ferma l' apertura delle ſue gambe, ſi deſcriverà la linea circolare, di cui ſi ha biſogno.

35. Quindi, date due rette diſuguali, niente ſarà più facile, quanto di tagliare dalla maggiore di eſſa una porzione eguale all' altra minore. Sia perciò AB la retta maggiore, e CD l' altra minore. Prendaſi col compaſſo la lunghezza della minore CD; indi col punto A come centro, e con quell' apertura deſcrivaſi l' arco circolare EF, che ſeghi la maggiore AB nel punto F; ed egli è chiaro, che la porzione AF, come eguale all' intervallo di queſt' arco, ſia eguale ancora alla CD (12).

Fig. 2.

36. In una maniera conſimile, ſe ſi abbiano due archi diſuguali, o di un' iſteſſa, o di due linee circolari eguali, ſi potrà dall' arco maggiore tagliare una

na porzione eguale all' altro minore. Sia perciò AB l' arco maggiore, e CD l' altro minore. Prendasi col compasso la lunghezza della corda dell' arco minore CD; indi col punto A come centro, e con quell'apertura descrivasi l'arco circolare EF, che seghi l'arco maggiore AB nel punto F; e li due archi AF, CD, come sostenuti da corde eguali, saranno eguali ancora tra di loro (32). *Fig.* 3.

§. III.

Dell' affezioni più semplici dell' angolo.

37. S'Intende per angolo la scambievole inclinazione di due linee, che su di un piano incontransi tra di loro, senza essere a dirittura; onde dee ripetersi la sua quantità, non già dalla lunghezza delle linee, che lo contengono, ma bensì dalla loro apertura. Quantunque poi per ragion delle linee, da cui è contenuto, possa egli essere di tre specie, cioè rettilineo, curvilineo, e mistilineo; nientedimeno limiteremo per ora la voce di angolo al solo rettilineo, che è contenuto da due linee rette.

38. In quest' angolo debbonsi distinguere tre cose, cioè li lati, il vertice, e la base. Chiamansi lati di un angolo

lo le due rette, che lo contengono, ed a cui può darſi qualunque lunghezza ſi voglia. Chiamaſi vertice il punto, in cui s' incontrano li due lati. Ed in fine chiamaſi baſe la retta, che uniſce inſieme gli altri due termini degli ſteſſi lati.

Fig. 4. 39. Così nell' angolo BAC li lati ſono le due rette AB, AC, che lo contengono; il vertice è il punto A, in cui incontranſi li due lati; e finalmente la baſe è la retta BC, che congiunge inſieme gl' altri due termini B, e C degli ſteſſi lati. Onde ſi vede, che la lunghezza della baſe di un' angolo dipende da quella de' lati, che poſſono farſi più lunghi, o più corti, ſecondochè il biſogno richiede.

40. Rimanendo intanto li lati di un' angolo ſempre della ſteſſa lunghezza, chiaro ſi è, non poterſi aumentare, o diminuire l' angolo, ſe non ſi aumenti, o ſi diminuiſca ancora la baſe. Onde, ſe due angoli abbiano li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno, ſiccome eſſendo eguali gl'angoli debbono eſſere eguali ancora le baſi, così eſſendo uno di eſſi maggiore dell' altro, eziandio la baſe del primo dovrà eſſere maggiore della baſe del ſecondo.

41. Ma egli è chiaro parimente, che ritenendo li lati di un' angolo ſempre

pre la ſteſſa lunghezza, non poſſa aumentarſi, o diminuirſi la ſua baſe, ſe non ſi aumenti, o ſi diminuiſca eziandio lo ſteſſo angolo. E perciò, ſe due angoli abbiano li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno, conforme eſſendo eguali le baſi, debbono eſſere eguali ancora gl' angoli; così eſſendo la baſe di uno di eſſi maggiore della baſe dell' altro, dovrà eſſere il primo angolo ſimilmente maggiore del ſecondo.

42. Quindi nella pratica niente ſarà più facile, quanto di giudicare dell' uguaglianza, o diſuguaglianza di due angoli. Facciaſi perciò, che li lati di uno di eſſi ſiano eguali ai lati dell' altro, ciaſcuno a ciaſcuno. E ſiccome, ritrovandoſi eguali le loro baſi, dovrà conchiuderſi, che ancora li due angoli ſiano eguali; così la diſuguaglianza delle baſi farà, che eziandio gl' angoli ſiano diſuguali, e che quell' angolo ſia maggiore, a cui rapportaſi baſe maggiore.

43. Per mezzo di queſte verità poſſono ora riſolverſi varj problemi. Il primo ſi è, di formare ſopra una retta data, e propriamente ad un dato punto un' angolo, che ſia eguale ad un' altro angolo dato. Sia perciò AB la retta data, A il punto dato nella medeſima retta, e DCE l' angolo dato. *Fig.* 5.

Deeſi

Deesi adunque sulla AB, e propriamente al punto A formare un' angolo, che sia eguale all' altro dato DCE.

44. Tirisi nell' angolo dato DCE la base DE, e tagliſi dalla AB la porzione AF eguale al lato CD (35). Descrivansi di poi colli punti A, ed F come centri, e cogl' intervalli delle due CE, DE due archi circolari, che s'intersèghino nel punto G; ed io dico, che congiungendosi la AG, sarà FAG l' angolo ricercato. Per dimostrarlo, tirisi eziandio in quest' altro angolo la base FG.

45. Conforme adunque per costruzione sono eguali le due AF, CD; così, per essersi descritti li due archi circolari, che s' intersegano nel punto G, cogl' intervalli delle due CE, DE, saranno eguali altresì, tanto le due AG, CE, quanto le due FG, DE. Onde, avendo li due angoli FAG, DCE non solamente li lati AF, AG eguali ai lati CD, CE, ciascuno a ciascuno, ma eziandio la base FG eguale alla base DE, sarà (41) l' angolo formato FAG eguale all' angolo dato DCE.

46. Il secondo problema si è, di dividere un dato angolo in altri due, che siano tra di loro eguali. Sia per-
Fig. 6. ciò BAC l' angolo dato. Prendasi nel lato AB un punto D ad arbitrio. Indi,

ta-

tagliata dall' altro lato AC la porzione AE eguale alla AD (35), deſcrivanſi colli punti D, ed E come centri, e con un medeſimo intervallo due archi circolari che s' interſeghino nel punto F. Congiungaſi finalmente la AF; ed io dico, che ſiano eguali li due angoli DAF, EAF, in cui è diviſo l' angolo dato BAC.

47. Per dimoſtrarlo, tirinſi nelli due angoli le baſi DF, EF. Ed eſſendo per coſtruzione eguali le due AD, AE, ſaranno li lati AD, AF dell' angolo DAF eguali ai lati AE, AF dell' altro angolo EAF, ciaſcuno a ciaſcuno. Ma ſono eguali ancora le loro baſi DF, EF, per eſſerſi deſcritti con un medeſimo intervallo li due archi circolari, che interſeganſi nel punto F. Dunque li due angoli DAF, EAF, in cui è diviſo l' angolo dato BAC, ſaranno parimente eguali (41).

48. Il terzo problema ſi è, di dividere una data retta in due parti eguali. Sia perciò AB la retta data. De- *Fig.* ſcrivanſi primieramente colli punti A, e 7. B come centri, e con un medeſimo intervallo due archi circolari, che s' interſeghino da un lato della AB nel punto C. Indi eziandio cogli ſteſſi centri, e con un medeſimo intervallo deſcrivanſi due altri archi circolari, che s'inter-

terſeghino dall' altro lato nel punto D. Congiungaſi finalmente la CD, che s' incontri colla AB nel punto E; ed io dico, che le due porzioni AE, BE, in cui rimane diviſa la AB, ſiano eguali tra di loro.

49. Per dimoſtrarlo, congiunganſi così le due AC, BC, come le due AD, BD. Ed eſſendoſi deſcritti con un medeſimo intervallo, tanto li due archi circolari, che interſeganſi nel punto C, come gl' altri due, che interſeganſi nel punto D; ſaranno eguali così le due AC, BC, come le due AD, BD. Onde, ſiccome debbono eſſere eguali li due angoli ACD, BCD (41); così facendoſi terminare al punto E il comune loro lato, ſaranno eguali altresì le loro baſi AE, BE (40).

50. Il quarto, ed ultimo problema ſi è, di dividere in due parti eguali un dato arco circolare, la di cui riſoluzione è ſimile a quella del precedente. Sia perciò AB l' arco dato. Deſcrivanſi primieramente colli punti A, e B come centri, e con un medeſimo intervallo due archi circolari, che s' interſeghino da un lato nel punto C. Indi eziandio cogli ſteſſi centri, e con un medeſimo intervallo deſcrivanſi due altri circolari, che s' interſeghino dall' altro lato nel punto D. Congiungaſi finalmente la CD,

Fig. 8.

CD, che s' incontri coll'arco dato AB nel punto E ; ed io dico , che le due porzioni AE, BE, in cui egli reſta diviſo, ſiano tra di loro eguali.

51. Per dimoſtrarlo , congiunganſi così le due AC , BC , come le due AD, BD. Ed eſſendoſi deſcritti con un medeſimo intervallo, così li primi, come gl' altri due archi circolari ; ſaranno eguali, tanto le due AC, BC, quanto le due AD , BD . Onde , ſiccome debbono eſſere eguali li due angoli ACD, BCD (41); così facendoſi terminare al punto E il comune loro lato, ſaranno eguali altresì le corde dei due archi AE, BE (40); e pertanto gli ſteſſi archi ſaranno eziandio eguali (31).

52. Così nell' uno, come nell'altro problema niente vieta, di deſcrivere da un medeſimo lato tanto li primi due archi circolari, quanto gl' altri due. Specialmente poi nel ſecondo , ſe ſi abbia il centro dell' arco dato, baſterà deſcrivere colli punti A, e B come centri , e con un medeſimo intervallo due ſoli archi circolari, che s' interſeghino in un punto diverſo dal centro dell' arco dato. Ma comunque riſolvaſi il problema , chiaro ſi è, che colla ſteſſa retta CD divideſi per metà così il dato arco, come la ſua corda.

§. IV.

§. IV.

Delle varie ſpecie dell' angolo .

53. L'Angolo per ragion dell' inclinazione delle rette , che lo contengono , può eſſere di tre ſpecie , cioè retto , ottuſo , ed acuto ; ma per intendere l' indole di ciaſcheduno di eſſi, ſi vuol prima notare , che una retta può incontrarſi con un' altra retta in due maniere ; cioè o perpendicolarmente , facendo con quella da ambedue le parti angoli eguali ; o obbliquamente, facendo al contrario colla medeſima angoli diſuguali .

54. Or ſiccome ciaſcuno dei due angoli eguali formati dalla perpendicolare chiamaſi retto , così dei due diſuguali formati dall' obbliqua il minore diceſi acuto , ed il maggiore ottuſo. Onde ſi vede , che un' angolo debba giudicarſi retto , acuto , o ottuſo , ſecondochè prolungato uno de' ſuoi lati verſo il vertice formaſi dall' altra parte un' altro angolo , che per rapporto ad eſſo ſia eguale , maggiore , o minore .

55. Eſſendo la poſizione della perpendicolare ſempre la ſteſſa , chiaro ſi è , che gl' angoli retti ſiano tutti eguali tra di loro . Ma non dee dirſi lo ſteſſo,

così

così degl' acuti, come degl'ottuſi; poichè, potendo variare all'infinito la poſizione dell'obbliqua, poſſono, e gl'uni, e gl'altri ricevere altresì infinite variazioni. Intanto per rapporto al retto, conforme ogn' acuto è ſempre minore; così al contrario ogn' ottuſo è ſempre maggiore.

56. Nè poi è egli difficile di dare ad una retta poſizione tale, che ſia perpendicolare ſopra un' altra retta data. Sia perciò data la retta AB, e debbaſi primieramente innalzare su di eſſa una perpendicolare dal punto C dato nella ſteſſa retta. Prendaſi nella CA un punto D ad arbitrio; indi, fatta la CE eguale alla CD (35), deſcrivanſi colli punti D, ed E come centri, e con un medeſimo intervallo due archi circolari, che s' interſeghino nel punto F; congiungaſi finalmente la CF, ed io dico, che queſta retta ſia la perpendicolare ricercata. *Fig.* 9.

57. Per dimoſtrarlo, congiunganſi l' altre due DF, EF. Eſſendo adunque per coſtruzione eguali le due CD, CE, ſaranno li lati CD, CF dell' angolo DCF eguali ai lati CE, CF dell' altro angolo ECF, ciaſcuno a ciaſcuno. Ma ſono eguali ancora le loro baſi DF, EF, per eſſerſi deſcritti con un medeſimo intervallo li due archi circolari,

che

che interſeganſi nel punto F. Dunque ſaranno eguali eziandio li due angoli DCF, ECF (41); e pertanto la CF ſarà perpendicolare ſulla retta data AB (53).

Fig. 10. 58. Debbaſi in ſecondo luogo ſulla ſteſſa AB abbaſſare una perpendicolare dal punto C dato fuori di eſſa. Prendaſi dall' altra parte della AB un punto D ad arbitrio. Indi col centro C, e coll' intervallo della CD deſcrivaſi l' arco circolare EDF, che ſeghi la AB prolungata, ſe biſogna, ne' punti E, ed F. Deſcrivanſi poſcia con queſti punti come centri, e con un medeſimo intervallo due altri archi circolari, che s' interſeghino nel punto G. Congiungaſi finalmente la CG, che s' incontri colla AB nel punto H; ed io dico, che la CH ſia la perpendicolare ricercata.

59. Per dimoſtrarlo, congiunganſi così le due CE, CF, come le due GE, GF. Eſſendo adunque per coſtruzione eguali tra di loro tanto l' une, quanto l' altre; chiaro ſi è, che la EF ſia diviſa dalla CH per metà nel punto H (48). Quindi, eſſendo li lati EH, CH dell' angolo CHE eguali ai lati FH, CH dell' altro angolo CHF, ciaſcuno a ciaſcuno, ed eſſendo eguali parimente le loro baſi CE, CF; saranno

no eguali eziandio li due angoli CHE, CHF (41), ed in conſeguenza la CH ſarà perpendicolare ſulla retta data AB (53).

60. Or ſe bene una retta, incontrandoſi obbliquamente con un'altra retta, formi con quella un'angolo acuto da una parte, ed un'angolo ottuſo dall'altra; nientedimeno queſti due angoli inſieme ſono ſempre eguali a due retti. In fatti, ſe CD ſia la retta, che incontraſi obbliquamente coll' altra AB, e dal punto dell' incontro C s' alzi ſulla ſteſſa AB la perpendicolare CE (56); chiaro ſi è, che ſiccome l'acuto ACD manca dal retto ACE per l' angolo DCE, così l'ottuſo BCD ſuperi l'altro retto BCE per lo ſteſſo angolo DCE. Onde l' acuto ACD, e l' ottuſo BCD inſieme ſaranno eguali ai due retti ACE, BCE. *Fig.* 11.

61. Al contrario poi, ſe dal termine C della retta CD tirinſi a parti contrarie l' altre due CA, CB con legge tale, che li due angoli ACD, BCD inſieme ſiano eguali a due retti, formeranno queſt' altre due una retta continuata; e ciò per la ragione, che ſe la CA ſtaſſe a dirittura, non già colla CB, ma con un altra CF, ſarebbero li due angoli ACD, FCD inſieme eguali a due retti (60): dal che ne ſeguirebbe, *Fig.* 11.

be, che l'angolo minore BCD ſarebbe eguale all'altro maggiore FCD, il che non può eſſere.

62. Con interſegarſi poſcia due rette tra di loro, egli è facile il dimoſtrare, che gl' angoli verticali debbano eſſere
Fig. eguali. Interſeghinſi perciò le due AB,
12. CD nel punto E. Io dico, che ſiano eguali, così li due angoli verticali AEC, BED, come gl' altri due AED, BEC. In fatti, eſſendo eguali a due retti tanto li due AEC, AED, quanto li due BED, AED (60), ſaranno li primi due eguali a queſt' altri due; onde, toltone il comune AED, rimaneranno eguali ancora li due AEC, BED (14); ed in una maniera conſimile ſi dimoſtrerà, che ſiano eguali parimente gl'altri due AED, BEC.

Fig. 63. Al contrario poi, ſe da un pun-
12. to E della retta AC tirinſi a parti contrarie l' altre due EC, ED con legge tale, che ſiano eguali tra di loro li due angoli verticali AEC, BED, formeranno queſt' altre due una retta continuata. In fatti, eſſendo l'angolo AEC, eguale all' angolo BED, coll' aggiunta del comune AED, ſaranno li due AEC, AED eguali agl' altri due BED, AED (14). Quindi ſiccome queſti due ſono eguali a due retti (60), così ſaranno eguali a due retti ancora quegl' altri

altri due; e pertanto le due rette EC, ED formeranno insieme una retta continuata (61).

64. Del rimanente, conforme nella pratica niente più spesso avviene, quanto di doversi sopra una retta data innalzare, o abbassare la perpendicolare da un dato punto; così per agevolarne l'operazione, si suol far uso della squadra, che è un'angolo retto formato con due laminette di ottone. In fatti, adattandosi un lato della squadra sulla retta data, e facendosi passare l'altro lato per lo punto dato, si avrà la perpendicolare ricercata. Per investigare intanto, se la squadra sia giusta, basterà trasportarla dall' altra parte della perpendicolare tirata, ed osservare, se li suoi lati si combacino colle stesse rette.

§. V.

Della vera misura dell' angolo.

65. LA vera misura dell' angolo non è già la sua base, ma bensì l' arco circolare, che col suo vertice come centro, e con un dato intervallo descrivesi tra li suoi lati. Così, se si abbia l' angolo BAC, e tra li suoi lati AB, AC descrivasi col vertice A, come centro, e con un dato intervallo *Fig.* 13.

l'arco circolare BC ; potrà giudicarsi della sua quantità per mezzo della lunghezza di quest' arco ; e ciò per la ragione, che aggirandosi il lato AC intorno al vertice A, l'arco, e l'angolo ricevono aumenti eguali.

66. Per dimostrarlo, fingiamo, che con essersi il lato AC aggirato persino alla AD, siasi fatto l' arco BD duplo dell' arco BC. Io dico, che ancora l'angolo BAD facciasi duplo dell'angolo BAC. In fatti, essendo eguali li due archi BC, CD, saranno eguali altresì le loro corde (30). Quindi, avendo li due angoli BAC, CAD non solo li lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno, ma eziandio la base eguale alla base, saranno li medesimi tra esso loro eguali (41); e pertanto sarà l' angolo BAD duplo dell' angolo BAC.

Fig. 1. *67.* Or se per lo centro A della linea circolare BCDE tirinsi le due rette BD, CE in modo, che l' una sia perpendicolare sull' altra, conforme sono retti li quattro angoli BAC, CAD, DAE, EAB, così la linea circolare resterà divisa in quattro parti eguali, che perciò chiamansi quadranti. Onde, siccome il quadrante viene ad essere la misura dell' angolo retto, così dovrà misurarsi ogn' angolo acuto per un arco minore del quadrante, ed al contrario

rio ogn' angolo ottuſo per un arco, che ne ſia maggiore.

68. Per agevolare intanto la miſura di qualſiſia angolo per mezzo del riferito arco circolare, dividono li Geometri primieramente l' intera linea circolare in 360 parti eguali, che chiamano gradi; indi ciaſcheduno grado in altre 60 parti eguali, che chiamano minuti primi; e finalmente ciaſcheduno minuto primo in 60 altre parti eguali, che appellano minuti ſecondi, o ſemplicemente ſeconde. Onde ogn' angolo diceſi eſſere di tanti gradi, e minuti, quanti ne contiene l' arco, che lo miſura.

69. Con tenerſi conto nella miſura di un' angolo, non già della lunghezza dell' arco circolare, ma de' ſuoi gradi, e minuti, ottengonſi due vantaggi. Il primo ſi è, di poterſi egli deſcrivere con qualſiſia intervallo; e ciò per la ragione, che qualunque ſia il ſuo intervallo, contenerà egli ſempre lo ſteſſo numero de' gradi, e minuti. In fatti, ſe tra li lati dell' angolo BAC deſcrivanſi col centro A due archi circolari BC, EF; egli è facile il dimoſtrare, che quanti gradi, e minuti contengonſi nel primo di eſſi BC, altrettanti debba contenerne ancora l' altro EF. *Fig.* 13.

70. Siano perciò BCD, EFG le linee circolari, a cui rapportanſi li due archi BC, EF; ed intendaſi diviſa la prima di eſſe BCD in tante parti eguali, quanti ſono i ſuoi gradi, e minuti. Se adunque dal centro A tirinſi rette ai punti della diviſione, ſaranno eguali altresì gl' angoli contenuti da queſte rette (65). Onde, ſiccome per la loro uguaglianza, ancora l'altra linea circolare EFG ſarà diviſa dalle ſteſſe rette in altrettante parti eguali; così quanti gradi, e minuti contengonſi nell' arco BC, altrettanti dovrà contenerne eziandio l' altro arco EF.

71. L' altro vantaggio ſi è, che con diſegnarſi un' angolo per mezzo de' ſuoi gradi, e minuti, può ſubito conoſcerſi, come egli ſia per rapporto all' angolo retto, che per eſſere coſtante, cioè ſempre di 90 gradi, dee ſervirci di norma per giudicare della quantità degl' angoli, così acuti, come ottuſi. In fatti, ſe un' angolo acuto ſia di 30 gradi, vedeſi chiaramente, che egli ſia eguale alla terza parte di un' angolo retto. E così ancora, ſe un' angolo ottuſo ſia di 135 gradi, non ſi dura fatica ad intendere, che egli ſia eguale all' angolo retto inſieme colla ſua metà.

72. Or nella diviſione in parti eguali dell' intera linea circolare ſi ſono

arre-

arreſtati li Geometri ai minuti ſecondi per la ragione, che un' angolo talmente picciolo, che debba eſſere miſurato per un' arco minore di un minuto ſecondo, può traſcurarſi nella pratica, ſenza nota di errore ſenſibile. Anzi impieganſi li minuti ſecondi ſoltanto per miſurare gl' angoli, di cui ſi ha biſogno per porre a calcolo li moti celeſti, che richiedono eſattezza maggiore; poichè, per quanto agl' angoli attinenti a coſe terreſtri, baſterà tener conto de' ſoli minuti primi.

73. Per la miſura intanto degl' angoli, baſta dividere ne' ſuoi gradi, e minuti la ſola metà della linea circolare; e ciò per la ragione, che un'angolo per quanto ottuſo, che egli ſia, dee eſſere ſempre minore di due retti, cioè di 180 gradi. Anzi il ſolo quadrante è ancora ſufficiente per la miſura di qualſiſia angolo; poichè, ſiccome con prolungarſi verſo il vertice un lato dell' angolo ottuſo, formaſi dall' altra parte un' angolo acuto, che inſieme con quell' ottuſo ci dà la ſomma di due retti (60), così colla miſura dell' angolo acuto ſi conoſcerà altresì di quanti gradi, e minuti ſia l' altro angolo ottuſo.

74. E pure per la miſura degl' angoli acuti potrebbe baſtare il ſolo ottante, cioè l' ottava parte della linea

circolare, o ſia la metà del quadrante, che è di gradi 45. In fatti, ſe l'angolo BAC ſia maggiore di 45 gradi, con alzarſi su 'l lato AB la perpendicolare AD, ſarà l'altro angolo CAD il ſuo reſiduo al retto, ed in conſeguenza minore di gradi 45. Onde, ſiccome potrà miſurarſi queſt' altro angolo per mezzo dell' ottante, così colla miſura di eſſo ſi verrà in cognizione di quanti gradi, e minuti ſia l'angolo propoſto.

Fig. 14.

75. Comunemente però per la miſura effettiva degl' angoli ſi fa uſo del quadrante, il quale formaſi dagl' Artefici di ottone, affinchè non ſoffra alterazione alcuna; ma per quanto grande che ſia la ſua eſtenſione, appena poſſono notarſi nel ſuo giro li gradi, e minuti primi; anzi in quelli, che adopranſi per le coſe terreſtri, e che per eſſere più maneggiabili formanſi di minor eſtenſione, veggonſi notati nel ſuo giro li ſoli gradi. Spiegheremo intanto altrove l'artificio, che ſi pratica, per avere preſſo a poco con queſti li minuti primi; e con quegl'altri li minuti ſecondi.

§. VI.

§. VI.

Delle proprietà delle rette parallele.

76. LE rette parallele ſono d'indole oppoſta a quelle, che incontranſi, e formano angoli, per la ragione, che ſe bene ſiano ſituate ſopra un medeſimo piano, nientedimeno la loro poſizione è tale, che prolungate all' infinito da ambedue le parti, non mai tra eſſo loro s' incontrano; e le medeſime chiamanſi ancora rette equidiſtanti, poichè ſerbano tra di eſſe ſempre la ſteſſa diſtanza.

77. Per intendere le proprietà di queſte tali rette, biſogna prima dimoſtrare il ſeguente teorema, cioè, che ogn' angolo ſia minore di quello, che formaſi eſteriormente col prolungamento della ſua baſe. Sia perciò l' angolo BAC, la di cui baſe BC prolunghiſi a dirittura verſo D. Io dico, che l'angolo propoſto BAC ſia minore dell' altro eſteriore ACD, formato col prolungamento della baſe BC. *Fig.* 15.

78. Per dimoſtrarlo, dividaſi il lato AC per metà nel punto E (48), per cui tirata la BF, facciaſi la EF eguale alla BE (35), e congiungaſi la CF. Eſſendo adunque eguali gl' angoli ver-

ticali AEB, CEF (62), ed essendo li lati del primo AE, BE eguali ai lati del secondo CE, EF, ciascuno a ciascuno; saranno eguali ancora le loro basi AB, CF (40). Quindi, avendo gl' altri due angoli BAE, ECF non solo li lati eguali ai lati, ma eziandio la base eguale alla base, sarà l' angolo BAE eguale all' angolo ECF (41), ed in conseguenza minore dell'altro ECD.

79. Or da questo teorema possiamo dedurne tre altri, che ci somministrano altrettante regole per conoscere le rette parallele. Il primo si è, che cadendo sopra due rette una terza retta, e facendo gl' angoli alterni eguali, le due rette debbano essere parallele. Siano *Fig.* 16. perciò le due rette AB, CD, sulle quali cada la terza EFG, e faccia gl' angoli alterni eguali, cioè l' angolo AFG eguale all' angolo FGD. Io dico, che le due rette AB, CD siano parallele.

80. Se ciò si niega, incontrinsi le due rette AB, CD prolungate nel punto H. Facendosi adunque la FH base dell' angolo FGH, sarà quest' angolo minore dell'angolo AFG, formato col prolungamento di detta base (78). Ma si vuole, che li due angoli AFG, FGD siano tra di loro eguali. Dunque non è egli vero, che le due rette AB, CD

CD prolungate s'incontrano; e pertanto le medeſime rette ſaranno parallele tra di loro.

81. Il ſecondo teorema ſi è, che cadendo ſopra due rette una terza retta, e facendo l'angolo eſteriore eguale all' interiore, ed oppoſto alla ſteſſa parte, le due rette debbano eſſere ancora parallele. Siano perciò di nuovo le due rette AB, CD, ſulle quali cada la terza EFG, e faccia l'angolo eſteriore EFB eguale all'angolo FGD, che è l'interiore, ed oppoſto alla ſteſſa parte. Io dico, che con queſt' altra uguaglianza le due rette debbano eſſere eziandio parallele. *Fig.* 16.

82. In fatti, interſegandoſi le due AB, EG nel punto F, debbono eſſere eguali tra di loro li due angoli verticali EFB, AFG (62); onde, conforme ſi vuole, che il primo di eſſi EFB ſia eguale all'angolo FGD, così eziandio l'altro AFG ſarà eguale allo ſteſſo angolo FGD. Ma queſti due angoli ſono alterni, ed è ſtato di già dimoſtrato (79), che eſſendo eguali gl'angoli alterni, le due rette debbano eſſere parallele. Dunque ancora con eſſere l'angolo eſteriore EFB eguale all'interiore, ed oppoſto alla ſteſſa parte FGD, la AB ſarà parallela alla CD.

83. Il terzo, ed ultimo teorema ſi è, che

è, che cadendo ſopra due rette una terza retta, e facendo eguali a due retti li due angoli interiori ſituati alla ſteſſa parte, le due rette debbano eſſere e-
Fig. ziandio parallele. Cada perciò di nuo-
16. vo ſulle due AB, CD la terza retta EFG, e faccia eguali a due retti li due angoli interiori BFG, FGD, che ritrovanſi ſituati alla ſteſſa parte. Io dico, che con queſta terza uguaglianza le due rette AB, CD debbano eſſere parimente parallele.

84. La ragione è chiara. Imperocchè, ſiccome per la ſuppoſizione ſono eguali a due retti li due angoli BFG, FGD, così ſono eguali a due retti eziandio gl' altri due BFG, AFG (60). Dunque, facendoſi queſti due BFG, AFG eguali a quegl' altri due BFG, FGD, ſe tolgaſi da eſſi il comune angolo BFG, ſaranno li due rimanenti AFG, FGD ſimilmente eguali (14), li quali per eſſere alterni faranno, che le due AB, CD ancora con quella terza uguaglianza ſiano parallele.

85. Or non è da porſi in dubbio, che ſia una la poſizione della retta, che paſſando per un dato punto, è parallela ad un' altra retta data; onde ſe minoriſi uno dei due angoli BFG, FGD, coſicchè gli ſteſſi inſieme ſiano minori di due retti, le due rette AB,

CD

CD non ſaranno più parallele, ma dovranno incontrarſi verſo quella parte, ove eſſi ſono ſituati. Ed eſſendo coſì, egli è facile il dimoſtrare, che eſſendo due rette parallele, debbano aver luogo tutte tre le riferite uguaglianze.

86. Siano perciò AB, CD due rette parallele, ſulle quali cada la terza EFG. Io dico primieramente, che debbano eſſere eguali tra di loro li due angoli alterni AFG, FGD. Imperocchè, ſe uno di eſſi AFG foſſe maggiore dell' altro FGD, coll' aggiunta del comune BFG, ſarebbero li due AFG, BFG maggiori ancora degl' altri due BFG, FGD (14). Ma li due AFG, BFG ſono eguali a due retti (60). Dunque gl' altri due BFG, FGD ſarebbero minori di due retti; e pertanto le due rette AB, CD non ſarebbero parallele, come è ſtato ſuppoſto, ma s' incontrarebbero prolungate verſo li punti B, e D (85). *Fig.* 16.

87. Io dico in ſecondo luogo, che l' angolo eſteriore EFB debba eſſere eguale all' angolo FGD, che è l' interiore, ed oppoſto alla ſteſſa parte. In fatti di già è ſtato dimoſtrato (86), che ſiano eguali tra di loro li due angoli alterni AFG, FGD. Ma ſono eguali ancora li due AFG, EFB, per eſſere

angoli verticali (62). Dunque, eſſendo allo ſteſſo angolo AFG eguale, così l'angolo EFB, come l' angolo FGD, ſaranno queſti due eziandio eguali tra di loro (12).

88. Io dico finalmente, che li due angoli interiori BFG, FGD ſituati alla ſteſſa parte ſiano inſieme eguali a due retti. Imperocchè, eſſendo eguali tra di loro li due angoli alterni AFG, FGD (86), coll' aggiunta del comune BFG, ſaranno li due AFG, BFG eguali ancora agl' altri due BFG, FGD (13). Ma li primi due AFG, BFG ſono eguali a due retti (60). Dunque eziandio gl' altri due BFG, FGD ſaranno eguali a due retti.

89. E quindi intorno alle rette parallele poſſono dimoſtrarſi due altri teoremi. Il primo ſi è, che le rette parallele ad una terza debbano eſſere pa-
Fig. rallele ancora tra di loro. Siano perciò
17. le due rette AB, CD, e ciaſcheduna di eſſe ſia parallela alla terza EF. Io dico, che le due AB, CD ſiano tra eſſo loro eziandio parallele. Per dimoſtrarlo, tiriſi la GHI, che ſeghi tutte tre le rette ne' punti G, H, ed I.

90. Eſſendo adunque parallele le due AB, EF, ſarà l' angolo AGH eguale al ſuo alterno HIF (86). E ſimilmente, eſſendo parallele l' altre due CD, EF,

ſarà

ſarà l'angolo eſteriore GHD eguale allo ſteſſo angolo HIF (87), che è il ſuo interiore, ed oppoſto alla ſteſſa parte. Onde, facendoſi eguali tra di loro li due angoli alterni AGH, GHD (12), ancora le due rette AB, CD ſaranno parallele (79).

91. L'altro teorema ſi è, che ſe due rette ſiano eguali, e parallele, ancora l'altre due, che le congiungono alle ſteſſe parti, debbano eſſere eguali, e parallele. Siano perciò eguali, e parallele le due rette AB, CD, le quali congiunganſi alle ſteſſe parti per l'altre due AC, BD. Io dico, che ancora queſt'altre due AC, BD debbano eſſere eguali, e parallele. Per dimoſtrarlo, tiriſi dal punto A al punto D la retta AD. *Fig.* 18.

92. Eſſendo adunque parallele le due AB, CD, ſaranno gl'angoli alterni BAD, ADC eguali tra di loro (86); e pertanto, avendo queſt'angoli li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno, ſaranno le loro baſi BD, AC eziandio eguali (40). Ma con queſta uguaglianza gl'altri angoli alterni BDA, DAC vengono ad avere eguali, così li lati, come le baſi. Dunque, dovendo eſſi ancora eſſere eguali (41), ſaranno le due BD, AC non ſolo eguali, ma eziandio parallele (79).

Del

93. Del rimanente, per quanto al problema di tirare per un dato punto una retta parallela ad un' altra retta data, potrà egli risolversi nel seguente modo. Sia A il dato punto, e BC la retta data. Prendasi in questa retta un punto ad arbitrio, e sia D; indi, congiunta la AD, facciasi su di essa, e propriamente al punto A l'angolo DAE eguale all'angolo ADC (43); prolunghisi finalmente la EA verso F, e per l'uguaglianza dei due angoli DAE, ADC sarà EF la parallela ricercata (79).

Fig. 19.

94. Per fare intanto l'angolo DAE eguale all'angolo ADC, può farsi uso di quest'altra pratica. Col centro D, e con qualsisia intervallo descrivasi primieramente tra li lati dell'angolo ADC l'arco circolare GH; indi col centro A, e col medesimo intervallo descrivasi l'altro arco IK, che s' incontri colla AD nel punto K; tagliſi di poi da quest' altro arco la porzione KL eguale al primo GH (36); e colla retta AE tirata per lo punto L si avrà l' angolo ricercato (65).

§. VII.

§. VII.

Delle proprietà più ſemplici del triangolo.

95. SEguono ora le figure piane, che per ragion delle linee, che le terminano, poſſono eſſere di tre ſpecie, cioè rettilinee, curvilinee, e miſtilinee. Ma, per incominciare dalle rettilinee, che ſono d' indole più ſemplice, conforme riguardanſi come lati di eſſe le rette, che le racchiudono; così, attento il numero de' loro lati, ſogliono dividerſi tali figure in trilatere, quadrilatere, e moltilatere; anzi, perchè in eſſe incontranſi tanti angoli, quanti ſono li lati, perciò le trilatere chiamanſi ancora triangoli, le quadrilatere quadrangoli, e le moltilatere moltangoli, ovvero poligoni.

96. Or per quanto ai triangoli, la prima loro proprietà ſi è, che due lati uniti inſieme ſiano ſempre maggiori del terzo, comunque ſi prendano. In fatti, ſe ABC ſia un triangolo, conforme il ſolo lato BC è una retta, che ha per ſuoi termini li punti B, e C; così gl' altri due lati AB, AC formano inſieme un' altra linea racchiuſa tra gli ſteſſi termini. Onde, attenta l' indole *Fig.* 20.

dole della linea retta, di eſſere la più corta di tutte le linee, che hanno li medeſimi termini (18), per neceſſità li due lati AB, AC uniti inſieme debbono eſſere maggiori del rimanente lato BC.

97. Può darſi intanto a queſta proprietà maggior eſtenſione, e ſi è, che gli ſteſſi due lati AB, AC ſiano maggiori ancora delle due rette BD, CD, che tirate dai punti B, e C incontranſi tra di loro dentro del triangolo nel punto D. In fatti, prolungata la BD per ſino a che s' incontri col lato AC nel punto E; per ragion del triangolo ABE, ſaranno le due AB, AE inſieme maggiori della ſola BE; e pertanto coll' aggiunta della comune CE, ancora le due AB, AC ſaranno maggiori delle due BE, CE (14). Ma per la ſteſſa ragione queſte due BE, CE debbono eſſere eziandio maggiori delle due BD, CD. Dunque le prime due AB, AC ſaranno molto maggiori di queſt'altre due BD, CD.

98. La ſeconda proprietà del triangolo ſi è, che prolungato uno de' ſuoi lati, l' angolo eſteriore ſia eguale ai due interiori, ed oppoſti uniti inſieme. Sia perciò il triangolo ABC, e prolunghiſi uno de' ſuoi lati, come BC, a dirittura verſo D. Io dico, che l' angolo eſteriore ACD, formato col prolun-

Fig. 21.

lungamento di quel lato, ſia eguale ai due inſieme CBA, BAC, che ſono gl' interiori, ed oppoſti. Per dimoſtrarlo, tiriſi la CE parallela alla BA (93).

99. Eſſendo adunque parallele le due CE, BA, e cadendo su di eſſe la terza AC; ſaranno eguali li due angoli ACE, BAC (86). Ma per la BD, che cade eziandio ſulle ſteſſe parallele CE, BA, ſono eguali ancora gl' altri due angoli DCE, CBA (87). Dunque tutto l'angolo eſteriore ACD, come eguale ai due ACE, DCE, ſarà eguale altresì ai due interiori, ed oppoſti CBA, BAC.

100. Conforme poi da ciò ne ſegue, che lo ſteſſo angolo eſteriore ſia maggiore di ciaſcheduno dei due interiori, ed oppoſti; così egli è facile il dimoſtrare, che ſe bene nel triangolo ABC li due lati AB, AC ſiano maggiori delle due rette BD, CD, che tirate dai punti B, e C incontranſi tra di loro dentro del triangolo; nientedimeno l'angolo BDC, contenuto da queſte rette, debba eſſere maggiore dell' angolo BAC contenuto dalli due lati. *Fig.* 20.

101. Prolunghiſi perciò la BD per ſino a che s' incontri col lato AC nel punto E; e per ragion del triangolo ABE, il di cui lato AE ſta prolungato

to verſo C, ſarà l'angolo CED maggiore dell'angolo BAC. Ma per l'altro triangolo CDE, in cui il lato ED ſta prolungato verſo B, l'angolo BDC è maggiore dell'angolo CED. Dunque lo ſteſſo angolo BDC, contenuto dalle due rette BD, CD, ſarà molto maggiore dell'angolo BAC, contenuto dai due lati AB, AC.

102. La terza proprietà del triangolo ſi è, che tutti tre li ſuoi angoli uniti inſieme ſiano eguali a due retti. *Fig.* 21. In fatti, ſe nel triangolo ABC prolunghiſi il lato BC verſo D, conforme l'angolo ACD ſi fa eguale ai due CBA, BAC (98); così coll'aggiunta del comune ACB, ſaranno li due ACD, ACB eguali a tutti tre gl'angoli del triangolo; e per tanto, eſſendo li due ACD, ACB inſieme eguali a due retti (60), ſaranno tutti tre gl'angoli del triangolo eziandio eguali a due retti.

103. Eſſendo adunque eguali a due retti tutti tre gl'angoli del triangolo, chiaro ſi è, che due di eſſi inſieme debbano eſſere minori di due retti. Ma attenta la ſteſſa proprietà, conforme eſſendo noti due angoli di un triangolo, dee eſſere noto altresì l'angolo rimanente; così, ſe mai in un triangolo ſia noto uno de' ſuoi angoli, dovrà eſſere nota parimente la ſomma degl'altri due.

due. Ed in fine, ſe due triangoli abbiano due angoli eguali a due angoli, ciaſcuno a ciaſcuno, ancora li rimanenti angoli dovranno eſſere eguali.

104. La quarta proprietà del triangolo ſi è, che a lati eguali debbano eſſere oppoſti angoli ſimilmente eguali. Siano perciò eguali li due lati AB, AC del triangolo ABC. Io dico, che gl' angoli ad eſſi oppoſti ACB, ABC ſiano eziandio eguali. In fatti, diviſo il rimanente lato BC per metà nel punto D (48), e congiunta la AD, avranno li due angoli ACD, ABD non ſolo li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno, ma eziandio la baſe comune; onde per neceſſità li medeſimi dovranno eſſere tra di loro eguali (41). *Fig.* 22.

105. La quinta proprietà del triangolo ſi è, che a lato maggiore debba eſſere oppoſto angolo ancora maggiore. Fingiamo perciò, che nel triangolo ABC il lato AB ſia maggiore del lato AC. Io dico, che l'angolo ACB oppoſto al primo lato ſia maggiore altresì dell' angolo ABC oppoſto al ſecondo. Per dimoſtrarlo, tagliſi dal lato maggiore AB la porzione AD eguale all' altro minore AC, e congiungaſi la CD. *Fig.* 23.

106. Eſſendo adunque nel triangolo ADC eguali li due lati AD, AC, ſaranno eguali ancora li loro angoli oppoſti

posti ACD, ADC (104); e per tanto l'angolo ACB, come maggiore del primo di essi ACD, sarà maggiore eziandio dell' altro ADC. Ma, per ragion del triangolo BCD, il di cui lato BD sta prolungato verso A, l'angolo ADC è maggiore dell' angolo ABC (100). Dunque sarà l'angolo ACB molto maggiore dell' angolo ABC.

107. La sesta proprietà del triangolo si è, che ad angoli eguali debbano essere opposti lati similmente eguali.

Fig. 22. Siano perciò nel triangolo ABC eguali li due angoli ACB, ABC. Io dico, che li lati ad essi opposti AB, AC siano parimente eguali. La ragione è chiara; poichè, se mai uno di essi, come AB, fosse maggiore dell' altro AC, sarebbe l'angolo ACB, opposto a quel lato, maggiore ancora dell'angolo ABC, opposto a quest' altro (106), il che è contrario a quel tanto si suppone.

108. L' ultima proprietà del triangolo si è, che ad angolo maggiore debba essere opposto lato eziandio maggiore.

Fig. 23. Fingiamo perciò, che nel triangolo ABC l'angolo ACB sia maggiore dell' angolo ABC. Io dico, che il lato AB, opposto al primo angolo, sia maggiore del lato AC, opposto al secondo. La ragione similmente è chiara. Imperocchè,

chè, conforme non può eſſergli eguale, perchè ſarebbero eguali li due angoli ACB, ABC (104); così nè pure può eſſerne minore, perchè ſarebbe l'angolo ACB minore dell' angolo ABC (108).

§. VIII.

Delle varie ſpecie del triangolo.

109. DEl triangolo varie ſono le ſpecie. Ed in primo luogo per ragion de' lati, che lo racchiudono, egli divideſi in equilatero, iſoſcele, e ſcaleno. Chiamaſi triangolo equilatero quello, che ha tutti tre li lati eguali. Chiamaſi triangolo iſoſcele quello, che ne ha due ſolamente eguali. Chiamaſi finalmente triangolo ſcaleno quello, in cui tutti tre li lati ſono diſuguali.

110. Attente le due proprietà del triangolo, che a lati eguali ſono oppoſti angoli ancora eguali (104), e che a lato maggiore ſi oppone eziandio angolo maggiore (105); chiaro ſi è, che ſiccome debbono eſſere eguali tutti tre gl' angoli nel triangolo equilatero, e due ſolamente nel triangolo iſoſcele; così ſaranno tutti tre diſuguali nel triangolo ſcaleno, talmente, che al lato maſſimo ſarà oppoſto l' angolo maſſimo, al lato

mez-

mezzano l' angolo mezzano, ed al lato minimo l' angolo minimo.

111. Attente poi l' altre due proprietà del triangolo, converſe delle precedenti, cioè, che ad angoli eguali ſono oppoſti lati ancora eguali (107), e che ad angolo maggiore ſi oppone lato eziandio maggiore (108); chiara coſa ancora ſi è, che ſiccome dee eſſere equilatero quel triangolo, che ha tutti tre gl' angoli eguali, ed iſoſcele quell' altro, che ne ha due ſolamente eguali; così, ſe mai il triangolo abbia tutti tre gl' angoli diſuguali, dovrà egli eſſere ſcaleno, talmente, che all' angolo maſſimo ſarà oppoſto il lato maſſimo, all' angolo mezzano il lato mezzano, ed all' angolo minimo il lato minimo.

112. Nel triangolo iſoſcele il terzo lato diſuguale riguardaſi come ſua baſe; e potendo egli eſſere maggiore, e minore di ciaſcheduno dei due lati eguali, farà, che lo ſteſſo triangolo ſia capace di due forme diverſe. Conforme poi l' angolo oppoſto alla baſe ſuol chiamarſi angolo verticale, così ſarà egli maggiore, o minore di ciaſcheduno dei due angoli eguali, ſecondochè la baſe ſteſſa è maggiore, o minore di ciaſcheduno dei due lati eguali.

113. Di qualunque forma ſia il triangolo iſoſcele, egli è facile il dimoſtrare,

ſtrare, che la perpendicolare, abbaſſata ſulla baſe dall'angolo verticale, debba dividere per metà, così l'angolo, come la baſe. Sia perciò ABC un triangolo iſoſcele, e dall' angolo verticale A ſi abbaſſi ſulla baſe BC la perpendicolare AD. Io dico, che ſiano eguali così li due angoli B A D, C A D, ne' quali è diviſo l' angolo verticale BAC, come le due porzioni BD, CD della baſe BC. *Fig.* 22.

114. In fatti, eſſendo la AD perpendicolare ſulla BC, ſaranno eguali tra di loro li due angoli ADB, ADC (55). Ma, per ragion del triangolo iſoſcele, ſono eguali ancora li due ABD, ACD. Dunque li rimanenti due BAD, CAD ſimilmente dovranno eſſere eguali (103). E poichè queſti due angoli hanno il lato AB eguale al lato AC, ed il lato AD comune; eziandio le loro baſi BD, CD dovranno eſſere eguali (40).

115. Per poco poi, che ſi voglia riflettere, s' intenderà facilmente, che di queſta proprietà del triangolo iſoſcele debbono eſſere vere ancora le converſe. Se adunque la AD divida l' angolo verticale BAC in due parti eguali, ella dividerà la baſe BC non ſolo per metà, ma eziandio ad angoli retti. E ſe la ſteſſa AD divida la baſe BC

in

in due parti eguali, ella dividerà altresì così la medeſima baſe ad angoli retti, come l'angolo verticale BAC per metà.

116. Le ſteſſe proprietà hanno luogo parimente nel triangolo equilatero; come quello, che può riguardarſi come iſoſcele. Conſiderandolo intanto ſotto queſto aſpetto, potrà prenderſi per baſe ciaſcheduno de' ſuoi lati; onde competeranno le riferite proprietà a ciaſcheduno de' ſuoi angoli. Ma nel triangolo equilatero incontraſi altresì ciò di ſpeciale, che ſono eguali tra di loro le perpendicolari, abbaſſate dagl'angoli ſulli lati oppoſti.

Fig. 24. 117. Per dimoſtrarlo, ſia il triangolo equilatero ABC, e ſulli lati BC, AC ſi abbaſſino dagl' angoli oppoſti le perpendicolari AD, BE. Eſſendo adunque eguali li due lati BC, AC, ſaranno eguali ancora le loro metà BD, CE. Onde, eſſendo eguali li due angoli ABD, BCE, ed avendo li medeſimi li lati AB, BD eguali ai lati BC, CE, ciaſcuno a ciaſcuno; eziandio le loro baſi, che ſono le perpendicolari abbaſſate AD, BE, dovranno eſſere eguali (40).

118. Or tanto egli è vero, che il triangolo equilatero poſſa riguardarſi come iſoſcele, che da ſe ſteſſo egli ſi frappone tra gl'infiniti triangoli iſoſceli, che poſſo-

poſſono ſituarſi ſopra una data baſe. In *Fig.* fatti, ſe la AB debba eſſere la loro ba- 25. ſe comune, e dal punto C, che la divide per metà, alziſi su di eſſa la perpendicolare CD ; colli punti di queſta perpendicolare ſi avranno li vertici degl' infiniti triangoli iſoſceli, che poſſono ſituarſi ſulla data baſe AB.

119. Ma, ſiccome in queſta perpendicolare CD dee eſſervi un punto, come E, tanto diſtante da ciaſcheduno dei due A, e B, per quanto queſti diſtano tra di loro ; così il triangolo AEB, che ſi avrà con queſto punto, ſarà non ſolo iſoſcele, ma eziandio equilatero. Ed egli è chiaro, eſſer tale la ſituazione di queſto triangolo, che per mezzo di eſſo li triangoli iſoſceli, che hanno baſe maggiore, reſtano diſgiunti dagl'altri, che al contrario hanno baſe minore.

120. Conforme poi, per deſcrivere *Fig.* ſulla data retta AB il triangolo equila- 25. tero AEB, non dee farſi altra coſa, ſe non che colli punti A, e B come centri, e coll' intervallo della ſteſſa AB deſcrivere due archi circolari, che s'interſeghino nel punto E ; così volendo su di quella medeſima retta come baſe deſcrivere un triangolo iſoſcele, di cui ſia dato ancora ciaſcuno dei due lati eguali, li due archi circolari dovranno

deſcriverſi cogli ſteſſi centri A, e B, ma con intervallo, che ſia eguale al lato dato.

121. Nè altrimente dovrà riſolverſi il problema, di deſcrivere un triangolo ſcaleno, di cui ſiano dati tutti li lati. *Fig.* 26. Imperocchè, ſe la AB ſia il ſuo lato maſſimo, da cui tagliſi, così la porzione AC eguale al lato mezzano, come la porzione BD eguale al lato minimo; queſte due porzioni inſieme dovranno eſſere maggiori della AB (*96*). Onde, ſe colli punti A, e B come centri, e cogl' intervalli delle due AC, BD deſcrivanſi due archi circolari; queſti dovranno interſegarſi in un qualche punto, come E; e pertanto, congiunte le due AE, BE, ſarà ABE il triangolo ricercato.

122. In ſecondo luogo il triangolo per ragion degl' angoli, che contengono li ſuoi lati, divideſi in rettangolo, ottuſangolo, ed acutangolo. Chiamaſi triangolo rettangolo quello, in cui ritrovaſi l' angolo retto. Chiamaſi triangolo ottuſangolo quello, in cui incontraſi l' angolo ottuſo. Chiamaſi finalmente triangolo acutangolo quello, che privo così del retto, come dell' ottuſo, ritrovaſi avere tutti tre gl' angoli acuti.

123. Ed in vero, eſſendoſi dimoſtrato (102), che tutti tre gl' angoli di qual-

qualſiſia triangolo ſiano inſieme eguali a due retti ; chiaro ſi è, non poterſi incontrare in un triangolo, ſe non ſe un ſolo angolo retto , ed un ſolo ottuſo . Quindi, tanto nel triangolo rettangolo, quanto nell' ottuſangolo gl' altri due angoli debbono eſſere acuti . Onde , per poterſi un triangolo chiamare acutangolo, ciaſcheduno de' ſuoi angoli dee eſſere acuto.

124. Ma da ciò , che tutti tre gl' angoli di qualſiſia triangolo formino inſieme la ſomma di due retti, può dedurſi ancora, che ſiccome li due angoli acuti, che ritrovanſi nel triangolo rettangolo, debbono eſſere inſieme eguali ad un'altro retto ; così li due, che ſono nel triangolo ottuſangolo, non ſolo dovranno eſſere inſieme minori del retto, ma di quanto l'ottuſo ſupera il retto , di altrettanto la loro ſomma dovrà eſſerne minore.

§. IX.

Della perfetta uguaglianza de' triangoli .

125. NEl triangolo debbono conſiderarſi ſette coſe , cioè li tre lati, li tre angoli , e lo ſpazio racchiuſo , o ſia l' ampiezza. Or, ſiccome

per la ſemplice uguaglianza di due triangoli baſta, che ſiano eguali le loro ampiezze; così per la perfetta loro uguaglianza debbono eſſere eguali, non ſolo l' ampiezze, ma eziandio così li lati, come gl' angoli oppoſti a detti lati; e potranno conoſcerſi li triangoli perfettamente eguali per mezzo dei quattro teoremi, che ſeguono.

126. Il primo teorema ſi è, che eſſendo li lati di un triangolo eguali ai lati di un' altro triangolo, ciaſcuno a ciaſcuno, debbano eſſere li due trian-
Fig. goli perfettamente eguali. Siano perciò
27. li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno, cioè il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, ed il lato BC eguale al lato EF. Io dico, che queſti due triangoli debbano eſſere perfettamente eguali.

127. Per dimoſtrarlo, concepiſcaſi il triangolo ABC poſto ſull' altro DEF con legge tale, che il punto B cada su 'l punto E, ed il lato BC su 'l lato EF. Siccome adunque, per l' uguaglianza di queſti lati, dee cadere il punto C su 'l punto F; così, per l' uguaglianza degli altri lati, caderà altresì il punto A su 'l punto D. Onde, combaciandoſi li due triangoli ABC, DEF, ſaranno eguali non ſolo le loro ampiez-

ze, ma eziandio gl'angoli oppoſti ai lati eguali; e pertanto li due triangoli ſaranno perfettamente eguali tra di loro.

128. Che poi, per l'uguaglianza degl'altri lati dei due triangoli, debba cadere altresì il punto A ſul punto D, potrà dimoſtrarſi negativamente in queſto modo. Se ſia poſſibile, cada egli su di un'altro punto, come G, di modo che il triangolo ABC poſto ſull'altro DEF ſia GEF. Interſegandoſi adunque la GE colla DF nel punto H, ſaranno le due DH, EH maggiori della DE, ovvero dalla ſua eguale GE (96). Onde, ſiccome toltane la comune EH rimane la DH eziandio maggiore della GH (14); così coll'aggiunta dell'altra comune FH, ſarà la DF, o pure la ſua eguale GF maggiore ſimilmente delle due GH, FH, il che non può aver luogo.

129. Il ſecondo teorema ſi è, che ſe due triangoli abbiano due lati eguali a due lati, ciaſcuno a ciaſcuno, ed eguali altresì gl'angoli contenuti da detti lati, li medeſimi debbano eſſere perfettamente eguali. Siano perciò di nuovo li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, e l'angolo BAC eguale all'angolo EDF. Io dico, che queſti due triangoli debbano *Fig.* 27.

eſſere perfettamente eguali.

130. Per dimoſtrarlo, concepiſcaſi il triangolo ABC poſto ſull' altro DEF con legge tale, che il punto A cada su 'l punto D, ed il lato AB su 'l lato DE. Siccome adunque, per l' uguaglianza degl' angoli BAC, EDF, dee cadere altresì l'altro lato AC ſull'altro lato DF; così, per eſſere eguali tanto li due lati AB, DE, come gl' altri due AC, DF, caderà ſimilmente il punto B su 'l punto E, ed il punto C su 'l punto F. Onde, combaciandoſi li due triangoli, dovranno eſſere li medeſimi perfettamente eguali.

131. Il terzo teorema ſi è, che ſe due triangoli abbiano due lati eguali a due lati, ciaſcuno a ciaſcuno, e degl' angoli oppoſti a queſti lati due ſiano eguali, e due della ſteſſa ſpecie, cioè o ambidue acuti, o ambidue ottuſi, li medeſimi debbano eſſere perfettamente eguali. Siano perciò di nuovo li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, l'angolo ABC eguale all' angolo DEF, e l'angolo ACB della ſteſſa ſpecie coll' angolo DFE. Io dico, che queſti due triangoli debbano eſſere perfettamente eguali.

Fig. 28.

132. In fatti ſarebbero tali, ſe poteſſe dimoſtrarſi, che ſiano eguali ancora

li

li rimanenti lati BC, EF (126). Adunque, ſe vogliaſi, che queſt'altri due lati non ſiano eguali, ma che il lato BC ſia maggiore del lato EF, tagliſi dal lato maggiore BC la porzione BG, che ſia eguale al lato minore EF (35), e congiungaſi la AG. Or eſſendo li due lati AB, BG del triangolo ABG eguali ai due lati DE, EF dell' altro triangolo DEF, ed eſſendo altresì eguali gl' angoli contenuti da detti lati; per lo teorema precedente (129), queſti due triangoli ſaranno perfettamente eguali; onde ſarà il terzo lato AG eguale al terzo lato DF, e l' angolo AGB eguale all' angolo DFE.

133. Eſſendo adunque alla ſteſſa DF eguale, così la AG, come la AC, ſaranno queſte due eguali tra di loro (12). Onde, facendoſi iſoſcele il triangolo CAG, ſaranno eguali altresì li due angoli AGC, ACG (110). Ma ſi ſono dimoſtrati parimente eguali gl' altri due AGB, DFE. Dunque, ſiccome ſono della ſteſſa ſpecie li due ACG, DFE, così ſaranno eziandio della ſteſſa ſpecie gl' altri due AGC, AGB, il che non può aver luogo; poichè dovendo eſſere inſieme eguali a due retti (60), ſe uno di eſſi è acuto, l' altro dovrà eſſere ottuſo. Non è egli dunque vero, che il lato BC ſia maggiore del lato EF; e

pertanto, dovendo eſſere eguali queſt' altri due lati, ſaranno li due triangoli perfettamente eguali (126).

134. Il quarto, ed ultimo teorema ſi è, che ſe due triangoli abbiano gl' angoli eguali agl' angoli, ciaſcuno a ciaſcuno, ed un lato eguale ad un lato, che ſiano oppoſti ad angoli eguali, li due triangoli debbano eſſere perfetta-
Fig. mente eguali. Siano perciò di nuovo
27. li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano gl' angoli eguali agl' angoli, ciaſcuno a ciaſcuno, cioè l'angolo ABC eguale all' angolo DEF, l' angolo ACB eguale all' angolo DFE, ed in conſeguenza il rimanente BAC eguale al rimanente EDF, e di vantaggio abbiano ancora il lato BC eguale al lato EF, che ſono oppoſti ad angoli eguali. Io dico, che queſti due triangoli debbano eſſere perfettamente eguali.

135. Per dimoſtrarlo, concepiſcaſi il triangolo ABC ſituato ſull'altro DEF con legge tale, che il punto B cada su 'l punto E, ed il lato BC su 'l lato EF. Eſſendo adunque eguali queſti due lati, caderà ancora il punto C su 'l punto F. Ma, per eſſere eguali non meno li due angoli ABC, DEF, che gl' altri due ACB, DFE, dee cadere parimente il lato BA su 'l lato ED, il lato CA su 'l lato FD, ed il punto

to A su 'l punto D. Dunque combaciandoſi tra di loro li due triangoli, ſaranno li medeſimi perfettamente eguali.

136. Or, ſiccome la perfetta uguaglianza di due triangoli fa, che ſituandoſi con ordine uno di eſſi ſull' altro, li medeſimi ſi combacino; così queſti tali triangoli debbono averſi, come un' iſteſſo triangolo replicato. E da ciò ricavaſi, che riceve il triangolo la ſua determinazione, primieramente con darſi tutti tre li lati; indi con darſi due lati inſieme coll' angolo contenuto da queſti lati; in oltre con darſi due lati, l' angolo oppoſto ad uno di eſſi, e la ſpecie dell' angolo oppoſto all' altro lato; ed in fine con darſi tutti tre gl' angoli inſieme con un lato oppoſto ad uno di eſſi.

137. Colli riferiti dati non per altra ragione rimane determinato il triangolo, ſe non perchè per mezzo di eſſi, non può variare la di lui forma; e quindi ſi è, che qualora ſono dati due lati del triangolo inſieme coll' angolo oppoſto ad uno di eſſi, dee eſſere data altresì la ſpecie dell' angolo oppoſto all' altro lato. Imperocchè, ſiccome con quei ſoli dati ſi hanno due triangoli, differenti tra di loro per l' altro angolo, che in uno di eſſi ſi fa acuto,

e nell' altro ottuſo ; così con darſi altresì la ſpecie di queſt' altro angolo , riceve il triangolo l' intera ſua determinazione.

Fig. 29. 138. Per dimoſtrarlo, fingiamo, che li due lati del triangolo debbano eſſere eguali alle due rette A , e B, e che DCE ſia l' angolo oppoſto al ſecondo lato. Facciaſi la CD eguale alla retta A ; indi col centro D , e coll' intervallo dell' altra retta B deſcrivaſi l' arco circolare FG , che ſeghi la CE ne' punti F, e G. Se adunque congiunganſi le due DF , DG , ſarà ciaſcuna di eſſe eguale alla retta B; e pertanto così DCF, come DCG ſarà il triangolo ricercato: li quali due triangoli ſono differenti tra eſſo loro per l' altro angolo oppoſto al primo lato , che è ottuſo nel triangolo DCF, ed acuto nell' altro DCG.

139. Per la perfetta intelligenza di queſto problema , ſi abbaſſi dal punto D la perpendicolare DE ſulla CE. E ſiccome vedeſi chiaramente, che l' arco circolare, deſcritto coll' intervallo della retta B, ſega la CE in due punti diverſi, ſempre quando la ſteſſa B è maggiore della DE ; così chiara coſa ancora ſi è , che ſe mai queſte due rette foſſero eguali, in tal caſo il riferito arco ſegnarebbe ſulla DE il ſolo punto E,

E, onde il ſolo triangolo DCE adempirebbe le condizioni del problema, in cui tuttavolta l'angolo oppoſto al primo lato ſarebbe retto, e non già ottuſo, o acuto.

140. Che ſe poi la retta B ſia minore della perpendicolare abbaſſata DE, all'ora dall'arco circolare non ſegnaſi ſulla CE punto veruno; e pertanto, non potendo aver luogo il triangolo, che ſi dimanda, il problema dee dirſi impoſſibile. Ed eſſendo così, dovrà conchiuderſi, che ſe bene regolarmente due ſiano li triangoli, che adempiono le condizioni del problema; nientedimeno, ſiccome queſti tal volta ſi riuniſcono inſieme, e riduconſi ad un ſolo, così poſſono ancora affatto non ſuſſiſtere.

§. X.

Delle proprietà più ſemplici del parallelogrammo.

141. ESaminati li triangoli, paſſeremo ora a conſiderare li quadrilateri, che per gli quattro angoli, che contengono, appellanſi ancora quadrangoli. Di eſſi due ſono le ſpecie principali, cioè il parallelogrammo, ed il trapezio. Chiamaſi parallelogrammo

quel quadrilatero, che ha li lati oppoſti paralleli. Chiamaſi all' incontro trapezio quell' altro quadrilatero, che ha o un ſolo lato parallelo al ſuo oppoſto, o pure neſſuno.

142. Di qualſifia ſpecie ſia il quadrilatero, ſi appella ſua diagonale quella retta, che tiraſi da uno de' ſuoi angoli all' altro oppoſto. E poichè ella divide il quadrilatero in due triangoli, in ciaſcheduno de' quali li tre angoli inſieme ſono eguali a due retti (102); chiaro ſi è, che li quattro angoli di qualſifia quadrilatero debbano eſſere inſieme eguali a quattro retti; e perciò, ſe tre di eſſi ſiano noti, dovrà eſſere noto ancora l' angolo rimanente.

143. Nel parallelogrammo intanto ſono eguali, così li lati, come gl' angoli oppoſti; e ſe in eſſo tiriſi la diagonale, queſta lo dividerà in due tri-
Fig. angoli perfettamente eguali. Sia perciò
30. il parallelogrammo ABCD, in cui tiriſi la diagonale AC. Eſſendo adunque parallele, tanto le due AB, DC, quanto le due AD, BC; ſaranno eguali tra di loro così li due angoli BAC, DCA, come gl' altri due DAC, BCA (86); e pertanto, con unire gl' uni cogl' altri, ſarà tutto l' angolo BAD eguale al ſuo oppoſto BCD.

144. Or avendo li due triangoli ABC,

ABC, CDA due angoli eguali a due angoli ciaſcuno a ciaſcuno; ſaranno eguali altresì li rimanenti loro angoli (103), che ſono gl' altri due oppoſti. Onde, perchè gli ſteſſi triangoli hanno altresì il lato AC comune, che è oppoſto ad angoli eguali; ſaranno li medeſimi perfettamente eguali (134); e pertanto ſaranno eguali tra di loro, così li due lati oppoſti AB, DC, come gl' altri due AD, BC.

145. Al contrario poi, ſe in un quadrilatero ſiano eguali, o li lati oppoſti, o gl' angoli oppoſti, il medeſimo dovrà eſſere parallelogrammo. Sia perciò il quadrilatero A B C D, in cui ſiano eguali primieramente li lati oppoſti. Se adunque tiriſi in eſſo la diagonale AC, ſaranno li lati del triangolo A B C eguali ai lati dell' altro ADC, ciaſcuno a ciaſcuno. Quindi, dovendo eſſere li due triangoli perfettamente eguali (126), ſaranno eguali altresì, così li due angoli alterni BAC, DCA, come gl' altri due CAD, ACB; e per tanto, facendoſi parallele non meno le due AB, DC, che l' altre due AD, BC (79), il quadrilatero ABCD dovrà eſſere parallelogrammo. *Fig.* 30.

146. Nello ſteſſo quadrilatero ABCD ſiano eguali in ſecondo luogo gl' angoli oppoſti. Io dico, che egli debba eſſere *Fig.* 30.

ezian-

eziandio parallelogrammo. In fatti per l' uguaglianza degl' angoli opposti, saranno li due BAD, ABC eguali agl' altri due BCD, ADC. Onde, dovendo essere tutti quattro insieme eguali a quattro retti (142), saranno eguali a due retti così li primi due, come gl' altri due; e per tanto le due AD, BC saranno parallele (83). Della stessa maniera si dimostrerà, che siano parallele ancora le due AB, DC. Dunque il quadrilatero ABCD sarà parallelogrammo.

147. Al parallelogrammo compete ancora un' altra proprietà, e si è, che li supplimenti degl' altri due parallelogrammi, che sono intorno alla sua dia-
Fig. gonale, siano tra di loro eguali. Sia
31. perciò il parallelogrammo ABCD, e nella sua diagonale AC prendasi un punto E ad arbitrio, per cui tirinsi le rette FG, HI parallele ai lati AB, BC. E siccome queste due rette dividono il parallelogrammo in altri quattro parallelogrammi, che disegnati per brevità colle sole lettere opposte, sono FH, GI, BE, DE; così questi due BE, DE diconsi essere supplimenti degl' altri due FH, GI, che sono intorno alla diagonale AC.

148. Or comunque prendasi nella diagonale AC il punto E, li due supplimenti BE, DE debbono essere sempre

pre eguali tra di loro. In fatti per ciò, che è ſtato dimoſtrato (143), debbono eſſere eguali, non ſolo li due triangoli ABC, ADC; ma eziandio, così li due AHE, AFE, come gl' altri due CGE, CIE. Onde, ſe dal triangolo ABC tolganſi li due AHE, CGE, e dall'altro triangolo ADC tolganſi gl' altri due AFE, CIE, rimaneranno li due ſupplimenti BE, DE eziandio eguali (14).

149. Eſſendo nel parallelogrammo paralleli tra di loro li lati oppoſti, chiaro ſi è, che li due angoli eſiſtenti ſopra un'iſteſſo lato ſiano inſieme eguali a due retti (85). Onde conforme, eſſendo retto uno di eſſi, dee eſſere retto ancora l' altro; così al contrario, ſe uno ſia acuto, l' altro dovrà eſſere ottuſo; e perciò il parallelogrammo per ragion degl' angoli può eſſere o rettangolo, in cui tutti gl' angoli ſono retti, o obbliquangolo, in cui due angoli ſono acuti, e due altri ottuſi.

150. Conforme poi nel parallelogrammo li lati oppoſti debbono eſſere neceſſariamente eguali (88); così niente vieta, che il parallelogrammo abbia tal volta forma tale, che tutti quattro li lati ſiano eguali; e quindi ſi è, che tanto per ragion degl' angoli, quanto per ragion de' lati diſtinguonſi del parallelogrammo quattro ſpecie, che chiamanſi

manſi quadrato, rettangolo, rombo, e romboide.

151. Se adunque il parallelogrammo abbia gl' angoli retti, e tutti quattro li lati eguali, ſi chiamerà egli quadrato; ma ſe inſieme cogl' angoli retti abbia ſoltanto li lati oppoſti eguali, ſi diſegnerà col ſemplice nome di rettangolo. E così ancora ſi darà ad eſſo il nome di rombo, ſe eſſendo obbliquangolo, abbia tutti quattro li lati eguali; ma ſe ſia obbliquangolo, ed abbia ſoltanto li lati oppoſti eguali, ſe gli darà quello di romboide.

Fig. 32. 152. Del rimanente li parallelogrammi, che meritano ſpecial conſiderazione, ſono li quadrati, e li rettangoli, in cui tutti gl' angoli ſono retti. Onde primieramente intorno al quadrato ſi vuol notare, che eſſendo eguali tutti quattro li ſuoi lati, riceve egli la ſua determinazione dalla lunghezza di uno di eſſi; e perciò, ſiccome ſono eguali li quadrati deſcritti ſopra rette eguali, così al contrario eſſendo eguali tra di loro due quadrati, ſaranno eguali parimente le rette, su di cui ſono deſcritti.

153. Si deſcriverà intanto il quadrato su di una retta data AB, ſe alzata su di eſſa dal punto A la perpendicolare AC (56), tagliſi da queſta perpendicolare la porzione AD eguale

alla

alla ſteſſa A B (35); poichè, deſcrivendoſi in appreſſo colli punti B, e D come centri, e coll' intervallo della medeſima AB due archi circolari, che s' interſeghino nel punto E, e congiungendoſi le due B E, D E, ſi avrà il quadrato ricercato.

154. Noteremo in ſecondo luogo intorno al rettangolo, che eſſendo eguali in eſſo ſoltanto li lati oppoſti, non può ricevere egli la ſua determinazione, ſe non ſiano dati ambidue li lati, che ſono intorno ad uno degl' angoli retti. E ſiccome di queſti due lati uno ci addita la ſua lunghezza, e l' altro la ſua larghezza; così diremo, che il rettangolo ſia fatto, ovvero contenuto dagli ſteſſi lati.

155. Or ſe le due rette A B, C D ſieno li due lati, che debbono contenere il rettangolo; egli ſi formerà, primieramente con alzare ſulla prima AB dal ſuo termine A la perpendicolare AE (56); indi con tagliare da queſta perpendicolare la porzione AF, che ſia eguale all' altra CD (35); e finalmente con deſcrivere colli punti B, ed F come centri, e cogl' intervalli delle due AF, AB due archi circolari, che s'interſeghino nel punto G; poichè, congiunte le rette BG, FG, ſarà ABGF il rettangolo ricercato. *Fig.* 33.

156.

156. Intorno al quadrato ſi vuol ancora notare, che li parallelogrammi rettangoli, ſituati intorno alla ſua diagonale, debbano eſſere ancora quadrati. *Fig.* 31. Sia perciò il quadrato ABCD, ed intorno alla ſua diagonale AC faccianſi come ſopra (147) li due parallelogrammi rettangoli FH, GI. Conforme adunque per l' uguaglianza delle due AB BC ſono eguali li due angoli ACB, CAB (104); così per le parallele HI, BC ſarà l' angolo AEH eguale all' angolo ACB (87). Onde, facendoſi eguali li due angoli AEH, EAH, ſaranno eguali ancora le due AH, EH (107); e pertanto il parallelogrammo rettangolo FH ſarà quadrato. Ed in una maniera conſimile ſi dimoſtrerà, che ſia eziandio quadrato l'altro parallelogrammo rettangolo GI.

157. Che ſe poi il punto E prendaſi talmente nella diagonale AC, che reſti ella diviſa per metà; in tal caſo non ſolo ſaranno quadrati li due FH, GI, ma ancora li due ſupplimenti BE, DE, tantochè tutti quattro li parallelogrammi rettangoli, in cui ritrovaſi diviſo il quadrato ABCD, ſaranno eguali tra di loro. Dal che ne ſegue, che il quadrato deſcritto ſopra una retta ſia quadruplo del quadrato, che deſcriveſi ſulla ſua metà.

§. XI.

§. XI.

Dell' uguaglianza così de' parallelogrammi, come de' triangoli.

158. PEr mezzo delle proprietà del parallelogrammo poſſono ora dimoſtrarſi varj teoremi intorno all' uguaglianza, così degli ſteſſi parallelogrammi, come de' triangoli. Ed in primo luogo, ſe due parallelogrammi ſiano ſituati ſopra una ſteſſa baſe, e tra le ſteſſe parallele, li medeſimi dovranno eſſere eguali. Siano perciò li due parallelogrammi AC, BF, li quali ſiano ſituati ſulla ſteſſa baſe BC, e tra le ſteſſe parallele BC, AE. Io dico, che queſti due parallelogrammi ſiano tra di loro eguali. *Fig.* 34.

159. La ragione è chiara; poichè eſſendo eguale alla BC, così la AD, come la EF (143), ſaranno queſte due tra di loro eguali; ed in conſeguenza, coll' aggiunta della comune DE, ſaranno eguali ancora le due AE, DF (14). Quindi, per eſſere eziandio eguali tanto le due AB, DC, quanto le due BE, CF, ſaranno li due triangoli ABE, DCF perfettamente eguali (126). Onde, ſiccome con togliere da eſſi il comune triangolo DGE, rimane

il

il trapezio ABGD eguale al trapezio EGCF; così coll' aggiunta dell' altro comune triangolo BCG, sarà il parallelogrammo AC eguale al parallelogrammo BF.

160. In secondo luogo, se due parallelogrammi siano situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele, questi ancora dovranno essere tra di loro eguali. Siano perciò li due parallelogrammi BD, FH, li quali siano situati sopra eguali basi BC, FG, e tra le stesse parallele BG, AH. Io dico, che quest' altri due parallelogrammi siano parimente eguali tra di loro. Per dimostrarlo, congiunganſi le due AF, DG. *Fig.* 35.

161. Essendo adunque eguali le due AD, BC (143), e volendosi, che la BC sia eguale alla FG, saranno eguali ancora le due AD, FG (12), le quali per essere parallele saranno, che eziandio l' altre due AF, DG siano eguali, e parallele (91). Quindi, essendo il quadrilatero AFGD similmente parallelogrammo, sarà egli eguale così al parallelogrammo BD, come all' altro FH (158); e pertanto questi due parallelogrammi saranno tra di loro eguali.

162. In terzo luogo, se due triangoli siano situati sopra una stessa base, e tra le stesse parallele, essi ancora dovran-

vranno eſſere eguali. Siano perciò li due triangoli ABC, DBC, li quali ſiano ſituati ſulla ſteſſa baſe BC, e tra le ſteſſe parallele BC, AD. Io dico, che eziandio queſti due triangoli debbano eſſere tra di loro eguali. Per dimoſtrarlo, tirinſi per gli punti B, e C le rette BE, CF parallele alle due CA, BD (93), che vadanſi ad incontrare colla AD prolungata ne' punti E, ed F. *Fig.* 36.

163. Con queſte parallele adunque ſi avranno li due parallelogrammi CE, BF, li quali, come ſituati ſulla ſteſſa baſe BC, e tra le ſteſſe parallele BC, EF, dovranno eſſere tra di loro eguali (158). Ma li due triangoli ABC, DBC ſono le metà dei due parallelogrammi CE, BF, per eſſere queſti diviſi dalle loro diagonali in due triangoli perfettamente eguali (143). Dunque ancora li due triangoli ABC, DBC dovranno eſſere eguali.

164. Finalmente, ſe due triangoli ſiano ſituati ſopra baſi eguali, e tra le ſteſſe parallele, eziandio queſt' altri triangoli dovranno eſſere eguali. Siano perciò li due triangoli ABC, DEF, li quali ſiano ſituati ſopra baſi eguali BC, EF, e tra le ſteſſe parallele BF, AD. Io dico, che queſt' altri due triangoli debbano eſſere parimente eguali; e la *Fig.* 37.

di-

dimoſtrazione è ſimile a quella del teorema precedente.

165. In fatti, ſe per gli punti C, ed F tirinſi le rette CG, FH parallele alle due BA, ED (93), che vadanſi ad incontrare colla AD ne' punti G, ed H; con eſſe ſi formeranno quì ancora li due parallelogrammi BG, EH, che ſaranno tra di loro eguali (160). Ma li due triangoli ABC, DEF ſono le metà di queſti due parallelogrammi (143). Dunque ancora li due triangoli ABC, DEF dovranno eſſere eguali.

166. Queſti quattro teoremi poſſono riunirſi inſieme, ed enunciarſi nella maniera, che ſegue: cioè, che tanto due triangoli, quanto due parallelogrammi debbano eſſere eguali tra di loro, ſe ſituati tra le ſteſſe parallele abbiano, o una medeſima baſe, o baſi eguali; ma con dimoſtrazione negativa può comprovarſi ancora il ſuo converſo: cioè, che ſe due triangoli, o due parallelogrammi ſiano eguali, e ſituati ſopra una retta verſo la ſteſſa parte abbiano o una medeſima baſe, o baſi eguali, debbano così gl' uni, come gli altri eſſere ancora tra le ſteſſe parallele.

Fig. 38. 167. Per dare un lume, come debba farſene la dimoſtrazione, fingiamo, che li due triangoli ABC, DBC ſituati ſulla ſteſſa baſe BC verſo la medeſima parte

parte ſiano eguali. Io dico, che le due AD, BC, tra le quali ſono ſituati, debbano eſſere parallele. Se ciò ſi niega, ſia la AE parallela alla BC, che s'incontri colla BD nel punto E, e congiungaſi la CE. Li due triangoli adunque ABC, EBC, come ſituati ſulla ſteſſa baſe BC, e tra le ſteſſe parallele BC, AE, debbono eſſere eguali (162). Onde, volendoſi che il triangolo ABC ſia eguale al triangolo DBC, ſaranno eguali ancora li due DBC, EBC, il che non può eſſere.

168. Niente vieta, che un triangolo, ed un parallelogrammo ſiano ſituati ſopra una ſteſſa baſe, e tra le ſteſſe parallele; ma in queſto caſo ſarà il triangolo eguale alla metà del parallelogrammo. Per dimoſtrarlo, ſiano ſituati *Fig.* ſulla ſteſſa baſe BC, e tra le ſteſſe pa- 39. rallele BC, AE il triangolo ABC, ed il parallelogrammo BE. Congiunta adunque la DC, ſaranno li due triangoli ABC, DBC eguali tra di loro (162). Onde, ſiccome il ſecondo DBC è eguale alla metà del parallelogrammo BE (143), così ancora il primo ABC ſarà eguale alla metà dello ſteſſo parallelogrammo.

169. Saranno intanto eguali tra di loro il triangolo, ed il parallelogrammo, quantevolte la baſe del triangolo è du-

è dupla della baſe del parallelogrammo.

Fig. 39. In fatti, ſe prolungata la BC verſo F, facciaſi la CF eguale alla BC, e congiungaſi la A F, ſaranno eguali li due triangoli ABC, ACF (164). Onde, eſſendo il primo di eſſi ABC eguale alla metà, così dell'intero triangolo ABF, come del parallelogrammo BC, ſarà il triangolo ABF eguale al parallelogrammo BC.

170. Quindi niente ſarà più facile, quanto di formare un parallelogrammo, che ſia eguale ad un dato triangolo, ed abbia un' angolo eguale ad un' an-

Fig. 39. golo dato. Sia perciò ABF il dato triangolo. Dividaſi la ſua baſe BF in due parti eguali nel punto C (48); indi ſulla BC, e propriamente al punto C facciaſi l' angolo BCE eguale all' angolo dato (43); tirinſi di poi per gli punti A, e B le rette AE, BD parallele alle due BC, CE (93); ed egli è chiaro, che BE ſia il parallelogrammo ricercato.

171. Del rimanente ſi vuol quì notare, che così nel triangolo, come nel parallelogrammo, oltre alla baſe, che può eſſere qualſiſia de' loro lati, conſideraſi ancora l' altezza, per cui s' intende la perpendicolare abbaſſata ſulla baſe dell' angolo oppoſto. E poichè li triangoli, e li parallelogrammi dotati

di

di eguali altezze poſſono ſituarſi tra le ſteſſe parallele ; ne ſegue da ciò , che conforme due triangoli, e due parallelogrammi , in cui ſono eguali tanto le baſi, quanto l' altezze , debbono eſſere eguali ; così avendo un triangolo , ed un parallelogrammo eguali baſi , ed eguali altezze , dovrà il triangolo eſſere eguale alla metà del parallelogrammo .

§. XII.

Dell' uguaglianza de' rettangoli, e de' quadrati .

172. OLtre ai riferiti teoremi intorno all' uguaglianza de' parallelogrammi in generale, ſe ne dimoſtrano altri, che riguardano l'uguaglianza de' rettangoli , e de' quadrati . Il primo ſi è, che avendoſi due rette, una diviſa in parti, l' altra indiviſa , il rettangolo fatto da queſte due rette ſia eguale ai rettangoli , che ſi fanno dall' indiviſa nelle parti della diviſa. Siano perciò le due rette AB , BC , di cui la prima AB ſia diviſa nelle parti AE, BE, e l' altra BC ſia indiviſa. Io dico, che il rettangolo AC, contenuto da queſte due rette, ſia eguale ai rettangoli *Fig.* 40.

fatti dall' indiviſa BC nelle parti della diviſa AE, BE.

173. Per dimoſtrarlo, tiriſi per lo punto E la retta EF parallela alla BC, che s' incontri colla CD nel punto F. E ſiccome il rettangolo AC rimane diviſo da queſta parallela negl' altri due AF, BF; così, per eſſere la EF eguale alla BC, il primo di eſſi AF ſarà fatto dalla BC nella parte AE, ed il ſecondo BF dalla ſteſſa BC nell'altra parte BE. Ma l' intero rettangolo AC è eguale ai due inſieme AF, BF. Dunque il rettangolo contenuto dalle due AB, BC ſarà eguale ai due rettangoli fatti dall' indiviſa BC nelle parti della diviſa AE, BE.

174. Il ſecondo ſi è, che eſſendo una retta diviſa in due parti, il rettangolo fatto dalla tutta in una di eſſe ſia eguale al quadrato di queſta parte, ed al rettangolo fatto da ambedue le parti. Sia perciò la retta AB diviſa nelle due parti AE, BE. Io dico, che il rettangolo fatto dalla tutta AB nella parte AE ſia eguale al quadrato di queſta parte, ed al rettangolo fatto dalle due parti AE, BE. Per dimoſtrarlo, baſta ſupporre nel teorema antecedente, che l' indiviſa BC ſia eguale alla parte AE dell' altra diviſa AB.

Fig. 40.

154. In fatti, con eſſere la BC eguale

guale alla parte AE, chiaro ſi è, che ſiccome l' intero rettangolo AC viene ad eſſere contenuto dalla tutta AB, e dalla parte AE; così degl' altri due AF, BF, in cui egli è diviſo, il primo AF ſarà il quadrato della ſteſſa parte AE, ed il ſecondo BF ſarà il rettangolo fatto dalle due parti AE, BE. Onde, eſſendo l' intero rettangolo AC eguale ai due AF, BF, ſarà il rettangolo della tutta AB nella parte AE eguale al quadrato di queſta parte, ed al rettangolo delle due parti AE, BE.

176. Il terzo ſi è, che eſſendo una retta diviſa in due parti, il quadrato della tutta ſia eguale ai rettangoli fatti dalla ſteſſa tutta nelle ſue parti. Sia perciò la retta AB diviſa nelle parti AE, BE. Io dico, che il quadrato della tutta AB ſia eguale a due rettangoli, uno fatto dalla tutta AB nella parte AE, e l' altro fatto dalla ſteſſa tutta AB nell' altra parte AE. Per dimoſtrarlo, baſta ſupporre nel primo teorema, che l' indiviſa BC ſia eguale all' altra diviſa AB. *Fig.* 41.

177. In fatti, con eſſere eguali le due AB, BC, chiaro ſi è, che ſiccome l' intero rettangolo AC viene ad eſſere il quadrato deſcritto ſulla AB; così degl' altri due AF, BF, in cui egli è diviſo, il primo AF ſarà il ret-

tangolo fatto dalla tutta AB nella parte AE, ed il ſecondo BE ſarà il rettangolo fatto dalla ſteſſa tutta AB nell' altra parte BE. Onde, eſſendo l'intero rettangolo AC eguale ai due AF, BF, ſarà il quadrato della tutta AB eguale ai due rettangoli fatti dalla ſteſſa tutta AB nelle ſue parti AE, BE.

178. Il quarto ſi è, che eſſendo una retta diviſa in due parti, il quadrato della tutta ſia eguale ai quadrati delle ſue parti, ed al doppio del rettangolo fatto dalle ſteſſe parti. Sia perciò la retta AB diviſa nelle parti AE, BE. *Fig.* 42. Io dico, che il quadrato della tutta AB ſia eguale ai quadrati delle ſue parti AE, BE, ed al doppio del rettangolo fatto dalle ſteſſe parti: il che può dimoſtrarſi facilmente per mezzo del ſecondo, e terzo teorema.

179. In fatti per lo terzo teorema, il quadrato della tutta AB dee eſſere eguale a due rettangoli, uno fatto dalla tutta AB nella parte AE, e l'altro fatto dalla ſteſſa tutta AB nell' altra parte BE. Ma per lo ſecondo teorema il primo di eſſi è eguale al quadrato della parte AE, ed al rettangolo delle due parti AE, BE; ed il ſecondo è eguale al quadrato della parte BE, ed al rettangolo delle ſteſſe parti AE, BE. Dunque ſarà il quadrato della tutta

ta AB eguale ai quadrati delle due parti AE, BE, ed al doppio del rettangolo fatto dalle medeſime parti.

180. Il quinto ſi è, che ſe una retta ſia diviſa in due parti, li quadrati della tutta, e di una delle ſue parti ſiano eguali al doppio del rettangolo fatto dalla ſteſſa tutta nella ſteſſa parte inſieme col quadrato dell' altra parte. Sia perciò la retta AB diviſa nelle due parti AE, BE. Io dico, che li quadrati della tutta AB, e della parte BE ſiano eguali al doppio del rettangolo fatto dalla ſteſſa tutta AB nella ſteſſa parte BE inſieme col quadrato dell' altra parte AE: il che può dimoſtrarſi facilmente per mezzo del ſecondo, e quarto teorema. *Fig.* 42.

181. In fatti, dovendo eſſere per lo quarto teorema il quadrato della tutta AB eguale ai quadrati delle parti AE, BE, ed al doppio del loro rettangolo; coll' aggiunta del comune quadrato della BE, ſaranno li quadrati della tutta AB, e della parte BE eguali al quadrato della parte AE, al doppio del quadrato dell'altra parte BE, ed al doppio del rettangolo delle parti AE, BE. Ma per lo ſecondo teorema il doppio del quadrato della parte BE, ed il doppio del rettangolo delle due parti AE, BE debbono eſſere inſieme eguali

al doppio del rettangolo della tutta AB nella parte BE. Dunque li quadrati della tutta AB, e della parte BE saranno eguali al doppio del rettangolo fatto dalla ſteſſa tutta nella ſteſſa parte, ed al quadrato dell'altra parte AE.

182. Il ſeſto ſi è, che eſſendo una retta diviſa in due parti, il quadrato della tutta, e di una parte unite inſieme ſia eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalla ſteſſa tutta nella ſteſſa parte inſieme col quadrato dell' altra parte. Sia perciò la retta AB diviſa nelle due parti AE, BE. Io dico, che il quadrato della tutta AB, e della parte BE unite inſieme ſia eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalla ſteſſa tutta AB nella ſteſſa parte BE inſieme col quadrato dell' altra parte AE; il che può dimoſtrarſi facilmente per mezzo del quarto, e quinto teorema.

Fig. 42.

183. In fatti, dovendo eſſere per lo quinto teorema li quadrati della tutta AB, e della parte BE eguali al doppio del rettangolo fatto dalla ſteſſa tutta nella ſteſſa parte inſieme col quadrato dell' altra parte AE; ſaranno li quadrati della tutta AB, e della parte BE inſieme col doppio di queſto rettangolo eguali al quadruplo dello ſteſſo rettangolo, ed al quadrato dell' altra parte AE. Ma per lo quarto teorema

li

li quadrati della tutta AB, e della parte BD insieme col doppio del rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte debbono essere eguali al quadrato, che si fa dalla tutta AB, e dalla parte BE unite insieme. Dunque questo stesso quadrato sarà eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalla tutta AB nella parte BE insieme col quadrato dell' altra parte AE.

184. Da questi tre ultimi teoremi possono dedursi altrettante conseguenze, che pongono in chiaro il loro scambievole rapporto. La prima si è, che il quadrato della somma di due rette sia maggiore delli quadrati delle stesse rette nel doppio del loro rettangolo. In fatti, se AE, BE siano le due rette, sarà AB la loro somma. Onde, essendosi dimostrato nel quarto teorema, che il quadrato della AB sia eguale ai quadrati delle due AE, BE insieme col doppio del rettangolo fatto dalle stesse AE, BE; chiaro si è, che il quadrato della somma delle due rette AE, BE sia maggiore delli quadrati delle stesse rette nel doppio del loro rettangolo. *Fig.* 42.

185. La seconda conseguenza si è, che il quadrato della differenza di due rette disuguali sia minore delli quadrati delle stesse rette nel doppio del loro

Fig. 42. rettangolo. In fatti, ſe AB, BE ſiano le due rette diſuguali, ſarà AE la loro differenza. Onde, eſſendoſi dimoſtrato nel quinto teorema, che li quadrati delle due AB, BE ſiano eguali al doppio del rettangolo fatto dalle ſteſſe AB, BE, inſieme col quadrato della AE; chiaro ſi è, che il quadrato della differenza delle due rette diſuguali AB, BE ſia minore delli quadrati delle ſteſſe rette nel doppio del loro rettangolo.

186. La terza, ed ultima conſeguenza ſi è, che il quadrato della ſomma di due rette diſuguali ſia maggiore del quadrato della loro differenza nel quadruplo del loro rettangolo. In fatti, ſe AB, BE ſiano le due rette diſuguali, conforme colle medeſime unite inſieme ſi avrà la loro ſomma, così ſarà AE la loro differenza. Onde, eſſendoſi dimoſtrato nel ſeſto teorema, che il quadrato delle due AB, BE unite inſieme ſia eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalle ſteſſe due AB, BE inſieme col quadrato della AE; chiaro ſi è, che il quadrato della ſomma delle due rette diſuguali AB, BE ſia maggiore del quadrato della loro differenza AE nel quadruplo del loro rettangolo.

Fig. 42.

§. XIII.

§. XIII.

Continuazione dello ſteſſo argomento.

187. INtorno all' uguaglianza de' rettangoli, e de' quadrati rimangono a dimoſtrarſi quattro altri teoremi, che ſono d' indole più compoſta dei precedenti. Il primo ſi è, che eſſendo una retta diviſa in parti eguali, ed in parti diſuguali, il rettangolo delle due diſuguali inſieme col quadrato della porzione, frappoſta tra l'una e l' altra diviſione, ſia eguale al quadrato della metà. Dividaſi perciò la retta AB in due parti eguali nel punto C, ed in altre due diſuguali nel punto D. Io dico, che il rettangolo delle due diſuguali AD, DB inſieme col quadrato della porzione di mezzo CD ſia eguale al quadrato della metà CB. *Fig.* 43.

188. Poichè la AD ritrovaſi diviſa nelle parti AC, CD, e la DB è indiviſa; ſarà il rettangolo delle due AD, DB eguale a due rettangoli, uno della AC ovvero CB nella DB, e l'altro della CD nella ſteſſa DB (172). Ma il primo di queſti due rettangoli è eguale al ſecondo inſieme col quadrato della DB (174). Dunque il rettangolo delle due AD, DB ſarà eguale altresì

al doppio del rettangolo della CD nella DB, ed al quadrato della DB ; e per tanto, coll' aggiunta del quadrato della CD, ſarà lo ſteſſo rettangolo inſieme con queſto quadrato eguale ancora ai quadrati delle due CD, DB, ed al doppio del loro rettangolo.

189. Eſſendo poi la CB diviſa nelle parti CD, DB, eziandio il quadrato della CB dee eſſere eguale ai quadrati delle due CD, DB, ed al doppio del loro rettangolo (178). Onde, facendoſi il rettangolo delle due AD, DB inſieme col quadrato della CD eguale finalmente al quadrato della CB, dovrà conchiuderſi, che eſſendo una retta diviſa in parti eguali, ed in parti diſuguali, il rettangolo delle due diſuguali inſieme col quadrato della porzione di mezzo debba eſſere eguale al quadrato della metà.

190. E quindi ricavaſi, che la differenza di due quadrati diſuguali, ſia eguale al rettangolo, che ſi fa dalla ſomma de' loro lati nella differenza degli ſteſſi lati. In fatti eſſendoſi dimoſtrato, che il rettangolo delle due AD, DB inſieme col quadrato della CD ſia eguale al quadrato della CB ; ſarà la differenza tra il quadrato maggiore della CB, ed il quadrato minore della CD eguale al rettangolo delle due AD,

AD, DB; ma, per eſſere eguali le due AC, CB, chiaro ſi è, che conforme la AD è la ſomma de' lati di quelli due quadrati diſuguali, così la DB ſia la differenza degli ſteſſi lati.

191. Il ſecondo teorema ſi è, che ſe una retta dividaſi in due parti eguali, ed alla medeſima aggiungaſi un' altra retta a dirittura; il rettangolo fatto dalla tutta, e dall' aggiunta, come una ſola retta, nella ſteſſa aggiunta inſieme col quadrato della metà debba eſſere eguale al quadrato della metà, e dell' aggiunta unite inſieme. Dividaſi perciò *Fig.* la retta AB in due parti eguali nel 44. punto C, a cui aggiungaſi a dirittura l' altra BD. Io dico, che il rettangolo delle due AD, DB inſieme col quadrato della metà CB debba eſſere eguale al quadrato della CD.

192. Poichè la AD ritrovaſi diviſa nelle parti AC, CD, e la DB è indiviſa; ſarà il rettangolo delle due AD, DB eguale a due rettangoli, uno della AC ovvero CB nella DB, e l' altro della CD nella ſteſſa DB (172). Ma queſto ſecondo rettangolo è eguale al primo inſieme col quadrato della DB (174). Dunque il rettangolo delle due AD, DB ſarà eguale altresì al doppio del rettangolo della CB nella DB, ed al quadrato della DB; e pertanto coll'ag-

giunta del quadrato della CB, ſarà lo ſteſſo rettangolo inſieme con queſto quadrato eguale ancora ai quadrati delle due CB, DB, ed al doppio del loro rettangolo.

193. Eſſendo poi la CD diviſa nelle parti CB, DB, eziandio il quadrato della CD dee eſſere eguale ai quadrati delle due CB, DB, ed al doppio del loro rettangolo (178). Onde facendoſi il rettangolo delle due AD, DB inſieme col quadrato della CB eguale finalmente al quadrato della CD, dovrà conchiuderſi, che ſe una retta dividaſi in due parti eguali, ed alla medeſima aggiungaſi un'altra retta a dirittura, il rettangolo fatto dalla tutta, e dall'aggiunta, come una ſola retta, nella ſteſſa aggiunta inſieme col quadrato della metà debba eſſere eguale al quadrato della metà, e dell' aggiunta unite inſieme.

194. Eziandio da queſto teorema può dedurſi, che la differenza di due quadrati diſuguali ſia eguale al rettangolo, che ſi fa dalla ſomma de' loro lati nella differenza degli ſteſſi lati. In fatti, eſſendoſi dimoſtrato, che il rettangolo delle due AD, DB inſieme col quadrato della CB ſia eguale al quadrato della CD; ſarà la differenza tra il quadrato maggiore della CD, ed il qua-

quadrato minore della CB eguale al rettangolo delle due AD, DB; ma egli è chiaro, che conforme, per eſſere eguali le due AC, CB, la AD è la ſomma de' lati di quelli due quadrati diſuguali, così la BD ſia la differenza degli ſteſſi lati.

195. Il terzo teorema ſi è, che eſſendo una retta diviſa in parti eguali, ed in parti diſuguali, li quadrati delle due diſuguali debbano eſſere eguali al doppio di due altri quadrati, uno fatto dalla metà, e l'altro fatto dalla porzione, che ſi frappone tra l'una, e l'altra diviſione. Dividaſi perciò la retta AB in due parti eguali nel punto C., ed in altre due diſuguali nel punto D. Io dico, che li quadrati delle due diſuguali AD, DB debbano eſſere eguali al doppio di due altri quadrati, uno fatto dalla metà CB, e l'altro fatto dalla porzione di mezzo CD. *Fig.* 43.

196. La ragione è chiara; poichè eſſendo la AD eguale alla ſomma delle due CB, CD, ſarà il ſuo quadrato maggiore dei quadrati di queſt' altre due nel doppio del loro rettangolo (185). Ma, per eſſere la DB eguale alla differenza delle ſteſſe due CB, CD, il ſuo quadrato dee eſſere al contrario minore dei loro quadrati nel doppio dello ſteſſo rettangolo (186). Dunque, congiun-

giungendoſi inſieme li quadrati delle due AD, DB, la loro ſomma dovrà eſſere eguale al doppio delli quadrati fatti dall' altre due CB, CD.

197. E quindi ricavaſi, che la ſomma di due quadrati diſuguali ſia eguale alla metà di due altri quadrati, uno fatto dalla ſomma de' loro lati, e l' altro fatto dalla differenza degli ſteſſi lati. In fatti, eſſendoſi dimoſtrato, che li quadrati delle due AD, DB ſiano eguali al doppio delli quadrati dell' altre due CB, CD; ſaranno al contrario li quadrati di queſte due CB, CD eguali alla metà delli quadrati fatti da quelle due AD, DB; ma egli è chiaro, che ſiccome la AD è eguale alla ſomma delle due CB, CD, così la DB ſia eguale alla loro differenza.

198. Il quarto, ed ultimo teorema ſi è, che ſe una retta dividaſi in due parti eguali, ed alla medeſima aggiungaſi un' altra retta a dirittura; due quadrati, uno della tutta, e dell'aggiunta, come una ſola retta, e l' altro della ſola aggiunta, debbano eſſere eguali al doppio di due altri quadrati, uno fatto dalla metà, e l' altro fatto dalla metà, e dall' aggiunta unite inſieme. Dividaſi perciò la retta AB in due parti eguali nel punto C, a cui aggiungaſi a dirittura l' altra BD. Io dico, che li quadrati

Fig. 44.

drati delle due AD, DB debbano eſſere eguali al doppio di due altri quadrati, uno fatto dalla CB, e l' altro fatto dalla CD.

199. La ragione ſimilmente è chiara; poichè, eſſendo la AD eguale alla ſomma delle due CB, CD, ſarà il ſuo quadrato maggiore dei quadrati di queſt'altre due nel doppio del loro rettangolo (185). Ma, per eſſere la DB eguale alla differenza delle ſteſſe due CB, CD, il ſuo quadrato dee eſſere al contrario minore dei loro quadrati eziandio nel doppio dello ſteſſo rettangolo (186). Dunque, congiungendoſi inſieme li quadrati delle due AD, DB, la loro ſomma dovrà eſſere eguale al doppio dei quadrati fatti dall' altre due CB, CD.

200. Eziandio da queſto teorema può dedurſi, che la ſomma di due quadrati diſuguali ſia eguale alla metà di due altri quadrati, uno fatto dalla ſomma de' loro lati, e l' altro fatto dalla differenza degli ſteſſi lati. In fatti, eſſendoſi dimoſtrato, che li quadrati delle due AD, DB ſiano eguali al doppio dei quadrati dell' altre due CB, CD; ſaranno al contrario li quadrati di queſte due CB, CD eguali alla metà delli quadrati di quell' altre due AD, BD; ma egli è chiaro, che ſiccome la AD è eguale alla ſomma delle due CB, CD,

CD, così la BD ſia eguale alla loro differenza.

§. XIV.

Delle proprietà de' triangoli relative ai quadrati de' loro lati.

201. DImoſtreremo ora le proprietà de' triangoli, che rapportanſi ai quadrati de' loro lati. Ed in primo luogo, ſe il triangolo ſia rettangolo, conforme il lato oppoſto all' angolo retto chiamaſi ipotenuſa, così il ſuo quadrato ſarà eguale ai quadrati degl' altri due lati, che contengono l'angolo retto. Sia perciò il triangolo ABC rettangolo in A. Io dico, che il quadrato dell' ipotenuſa BC ſia eguale ai quadrati degl' altri due lati AB, AC.

Fig. 45.

202. Per dimoſtrarlo, deſcrivanſi queſti tre quadrati, e ſiano BE, AG, AI (153); indi tirata la AMN parallela alla BD (93), congiunganſi le due AD, CG. Eſſendo adunque retto, così l' angolo BAC, come l' angolo BAF, ſaranno li due inſieme eguali a due retti; e pertanto le due AC, AF formeranno una retta continuata (61). Onde eſſendo parallele, tanto le due BG, CF, quanto le due BD, AN; ſarà così il triangolo BCG eguale alla metà

metà del parallelogrammo AG, come il triangolo BDA eguale alla metà del parallelogrammo BN (168).

203. Eſſendo poi retti, ed in conſeguenza eguali li due angoli ABG, CBD, coll' aggiunta del comune ABC, ſaranno eguali ancora li due GBC, ABD. Onde, eſſendo li due lati GB, BC eguali ai due lati AB, BD, ciaſcuno a ciaſcuno; ſaranno eguali altresì così li due triangoli BCG, BDA (129), come li due parallelogrammi AG, BN; e pertanto dovendo eſſere per la ſteſſa ragione eguali ancora gl' altri due parallelogrammi AI, CN, ſarà il quadrato BE deſcritto ſull' ipotenuſa BC eguale ai quadrati AG, AI deſcritti ſugl' altri due lati AB, AC.

204. Or, ſiccome la AM è perpendicolare ſull' ipotenuſa BC, e la divide nelle due porzioni BM, CM; così dalla dimoſtrazione ſteſſa può dedurſi, che li quadrati dei lati AB, AC ſiano eguali ai rettangoli fatti dall' ipotenuſa nelle porzioni contigue a detti lati. In fatti ſi è dimoſtrato, che il quadrato AG deſcritto su 'l lato AB ſia eguale al parallelogrammo rettangolo BN; ma, per eſſere eguali le due BD, BC, queſto parallelogrammo rettangolo è contenuto dalle due BC, BM.

205. E da ciò può dedurſi ancora, che

che il quadrato della perpendicolare AM ſia eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni dell' ipotenuſa BM, CM. Imperocchè, ſiccome per lo triangolo AMB rettangolo in M, il quadrato del lato AB è eguale altresì ai quadrati delle due AM, BM; così, per eſſere il rettangolo dell' ipotenuſa BC, e della porzione BM eguale al quadrato di queſta porzione, ed al rettangolo delle due BM, CM (174), ſarà il ſolo quadrato della AM eguale al ſolo rettangolo delle due BM, CM.

206. Alle riferite uguaglianze intanto può aggiungerſene un' altra, e ſi è, che il rettangolo dell' ipotenuſa BC nella perpendicolare AM ſia eguale al rettangolo dei due lati AB, AC. In fatti, ſe BE ſia il primo rettangolo, per l' uguaglianza delle due AM, CE dovrà paſſare la EF per lo punto A; e per tanto il triangolo ABC ſarà eguale alla metà di quel rettangolo (168). Ma poſto, che AD ſia il rettangolo dei due lati AB, AC, lo ſteſſo triangolo dee eſſere eziandio eguale alla metà di queſt' altro rettangolo. Dunque li due rettangoli BE, AD ſaranno tra di loro eguali.

Fig. 46.

207. In ſecondo luogo, ſe il triangolo ſia ottuſangolo, ſarà il quadrato del lato oppoſto all' angolo ottuſo maggiore

giore dei quadrati degl' altri due lati, che lo contengono, nel doppio del rettangolo fatto da uno di queſti lati nella porzione aggiuntagli dalla perpendicolare, abbaſſata su di eſſo dall' angolo oppoſto. Sia perciò il triangolo A B C ottuſangolo in A, e ſi abbaſſi su 'l lato BA prolungato la perpendicolare CD dall' angolo oppoſto C. Io dico, che il quadrato del lato BC ſia maggiore dei quadrati degl' altri due B A, A C nel doppio rettangolo fatto dal lato B A nella porzione aggiunta AD. *Fig.* 47.

208. In fatti, eſſendo la BD diviſa nelle parti BA, AD, ſarà il ſuo quadrato eguale ai quadrati delle parti BA, AD, ed al doppio del loro rettangolo (178); onde, coll'aggiunta del comune quadrato della CD, ſaranno li quadrati delle due BD, CD eguale ai quadrati delle tre B A, A D, C D, ed al doppio dello ſteſſo rettangolo. Ma, per gli due triangoli B D C, A D C rettangoli in D, li quadrati delle due BD, CD ſono eguali al ſolo quadrato della BC; e li quadrati dell' altre due A D, C D ſono eguali al ſolo quadrato della AC (201). Dunque, dovendo eſſere il quadrato del lato B C eguale ai quadrati degl' altri due lati B A, A C, ed al doppio del rettangolo fatto dal lato BA nella porzione aggiunta A D, ſarà egli mag-

maggiore degl' altri due quadrati nel doppio del riferito rettangolo.

209. Finalmente, ſe il triangolo ſia acutangolo, ſarà il quadrato del lato oppoſto ad uno degl'angoli acuti minore dei quadrati degl' altri due lati, che lo contengono, nel doppio del rettangolo fatto da uno di queſti lati nella porzione, che ne taglia preſſo l'angolo acuto la perpendicolare, abbaſſata su di eſſo dall' angolo oppoſto. Sia perciò il triangolo acutangolo ABC, e ſi abbaſſi su 'l lato AB dall'angolo oppoſto C la perpendicolare CD. Io dico, che il quadrato del lato BC, oppoſto all'angolo acuto A, ſia minore dei quadrati degl' altri due lati AB, AC nel doppio rettangolo fatto dal lato AB nella porzione riſecata AD.

Fig. 48.

210. In fatti eſſendo la AB diviſa nelle due parti AD, BD; ſarà il quadrato della BD inſieme col doppio del rettangolo delle due AB, AD eguale ai quadrati di queſte ſteſſe due (180); onde coll'aggiunta del comune quadrato della CD, ſaranno li quadrati delle due BD, CD inſieme col doppio dello ſteſſo rettangolo eguali ai quadrati delle tre AB, AD, CD. Ma, per gli triangoli BDC, ADC rettangoli in D, li quadrati delle due BD, CD ſono eguali al ſolo quadrato della BC; e li quadrati dell'altre due

due AD, CD ſono eguali al ſolo quadrato della AC (201). Dunque, dovendo eſſere il quadrato del lato BC inſieme col doppio del riferito rettangolo eguale ai quadrati degl' altri due lati AB, AC, ſarà egli ſolo minore di queſt'altri due quadrati nel doppio dello ſteſſo rettangolo.

211. Si vuol però quì notare, che queſt' ultima proprietà non per altra ragione aſcrivesi al triangolo acutangolo, ſe non perchè eſſendo in eſſo acuti tutti tre gl' angoli, può ella adattarſi a ciaſcuno de' ſuoi lati; ma, poichè ritrovanſi così nel triangolo rettangolo, come nell'ottuſangolo due angoli acuti, chiaro ſi è, che la ſteſſa proprietà debba aver luogo ancora in queſt'altri triangoli per rapporto ai ſoli lati, che oppongonſi agl' angoli acuti: come in fatti di eſſa dee farſi uſo, ſe nel triangolo ottuſangolo vogliaſi per mezzo de' ſuoi lati determinare la perpendicolare, che dall' angolo ottuſo cade su 'l lato oppoſto.

212. Or delle tre riferite proprietà hanno luogo ancora le converſe, che poſſono comprovarſi facilmente con dimoſtrazioni negative; e ſono, che un lato del triangolo debba eſſere oppoſto ad angolo retto, ottuſo, o acuto, ſecondochè il di lui quadrato ritrovaſi

egua-

eguale, maggiore, o minore dei quadrati degl' altri due lati. Ma, che l'angolo debba eſſere retto nel caſo dell'uguaglianza, può dimoſtrarſi poſitivamente in queſto modo. Sia il triangolo ABC, in cui il quadrato del lato BC ſia eguale ai quadrati degl'altri due lati AB, AC. Io dico, che l'angolo BAC, a cui ſi oppone il lato BC, debba eſſere retto.

Fig. 49.

213. Alziſi perciò su 'l lato AB la perpendicolare AD (56), la quale facciaſi eguale all' altro lato AC (35), e congiungaſi la CD. Eſſendo adunque eguali le due AC, AD, ſaranno eguali ancora li loro quadrati (152); e pertanto, coll' aggiunta del comune quadrato della AB, ſaranno li quadrati delle due AB, AC eguali ai quadrati dell' altre due AB, AD. Ma ſi vuole, che li primi due ſiano eguali al quadrato della BC; e per eſſere il triangolo ABD rettangolo in A, gl' altri due ſono eguali al quadrato della BD (201). Dunque, facendoſi eguali li quadrati delle due BC, BD, ſaranno eguali così queſte due rette, come gl' angoli ad eſſe oppoſti BAC, BAD; ed in conſeguenza, conforme l' angolo BAD è retto, così ſarà retto ancora l' altro BAC.

214. Del rimanente, ſiccome il paral-

rallelogrammo rettangolo vien diviſo dalle due ſue diagonali in triangoli eziandio rettangoli; così, attenta la proprietà di queſti triangoli, chiaro ſi è, che li quadrati delle ſteſſe diagonali ſiano eguali ai quadrati di tutti quattro li lati. Ma queſto ſteſſo dee aver luogo eziandio nel parallelogrammo obbliquangolo; e ciò per la ragione, che delle due diagonali una lo divide in due triangoli ottuſangoli, e l'altra in due triangoli acutangoli. Sia perciò il parallelogrammo obbliquangolo ABCD, in cui tirinſi le due diagonali AC, BD, e ſulli lati BC, AD ſi abbaſſino le perpendicolari AE, BF. *Fig.* 50.

215. Con queſte perpendicolari adunque ſi avrà l'altro parallelogrammo AFBE, onde facendoſi la BE eguale alla AF, ſarà il rettangolo delle due BC, BE eguale al rettangolo dell' altre due AD, AF. Ma il quadrato della diagonale AC è maggiore dei quadrati fatti dalli due dati AB, BC nel doppio del primo rettangolo (207); ed all' incontro il quadrato dell' altra diagonale BD è minore dei quadrati fatti dalli due lati AB, AD, o pure dalli due CD, AD nel doppio del ſecondo rettangolo (209). Dunque li quadrati delle due diagonali congiunti inſieme ſaranno

ranno eguali ai quadrati di tutti quattro li lati.

§. XV.

Della risoluzione di alcuni problemi intorno ai rettangoli, e li quadrati.

216. INtorno ai rettangoli, e li quadrati possono ora risolversi varj problemi, di cui il primo si è, di ritrovare un quadrato, che sia eguale alla somma di due, o più altri quadrati dati. Perciò siano dati primieramente li quadrati delle due AB, EF. Alzisi sulla prima di esse AB la perpendicolare AC (56), la quale facciasi eguale all' altra EF; e congiunta la BC, sarà il suo quadrato eguale ai due quadrati dati. In fatti, per lo triangolo BAC rettangolo in A, il quadrato della BC è eguale ai quadrati delle due AB, AC (201); onde, essendosi fatta la AC eguale alla EF, sarà lo stesso quadrato eguale altresì ai quadrati delle due AB, EF.

Fig. 51.

217. Se poi, oltre ai quadrati delle due AB, EF sia dato ancora il quadrato della terza GH; chiaro si è, che con alzare sulla BC l'altra perpendicolare CD, e con farla eguale alla GH, si farà il quadrato della BD eguale alla somma di tutti tre li quadrati dati. E con

con queſto ſteſſo artificio potrà rinvenirſi un quadrato, che ſia duplo, triplo, quadruplo di un' altro quadrato dato; poichè, ſiccome con fare la AC eguale alla AB, il quadrato della BC ſi fa duplo del quadrato della AB; così con fare in appreſſo la CD eguale alla ſteſſa AB, ſi farà il quadrato della BD triplo dello ſteſſo quadrato.

218. Il ſecondo problema ſi è, di ritrovare un quadrato, che ſia eguale alla differenza di due altri quadrati diſuguali dati. Siano perciò le due AB, EF li lati dei due quadrati, e ſia la AB il lato del quadrato minore, e la EF il lato dell' altro maggiore. Alziſi ſulla AB la perpendicolare AD (56), indi col punto B come centro, e coll' intervallo dell'altra EF deſcrivaſi un'arco circolare, che ſeghi la AD nel punto C. Io dico, che il quadrato della AC ſia eguale alla differenza dei due quadrati dati. *Fig.* 52.

219. Per dimoſtrarlo, congiungaſi la BC. Eſſendoſi adunque deſcritto l'arco circolare coll'intervallo della EF, ſaranno eguali le due BC, EF, ed in conſeguenza eguali ancora li loro quadrati. Ma, per lo triangolo ABC rettangolo in A, il quadrato della BC è eguale ai quadrati delle due AC, AB (201). Dunque a queſti ſteſſi quadrati

ſarà eguale ancora il quadrato della EF; e per tanto, ſiccome togliendoſi dal quadrato della EF quello della AB, rimane il quadrato della AC, così queſto ſteſſo quadrato ſarà eguale alla differenza di quegl' altri due.

220. Il terzo problema ſi è, di ritrovare un quadrato, che ſia eguale ad un dato rettangolo. Siano perciò *Fig.* AE, AF le due rette, che contengono 53. il rettangolo dato. Ponganſi queſte due rette a dirittura, coſicchè la EF ſia una retta continuata; e dal comune loro termine A alziſi ſulla EF la perpendicolare AD (56). Dividaſi di poi la ſteſſa EF in due parti eguali nel punto B (48); e deſcrivaſi con queſto punto come centro, e coll' intervallo della BE un' arco circolare, che ſeghi la AD nel punto C. Io dico, che il quadrato della porzione AC ſia eguale al rettangolo delle due AE, AF.

221. Per dimoſtrarlo, congiungaſi la BC; ed eſſendo eguali le due BC, BE, ſaranno eguali ancora li loro quadrati. Ma, per lo triangolo ABC rettangolo in A, il quadrato della BC, è eguale ai quadrati delle due AC, AB (201), e per eſſere la EF diviſa in parti eguali nel punto B, ed in parti diſuguali nel punto A, l' altro quadrato della BE è eguale al rettan-

go-

golo delle due AE, AF, ed al quadrato della AB (187). Dunque li quadrati delle due AC, AB ſaranno ancora eguali a queſto rettangolo, ed a queſto quadrato; e pertanto, togliendone il comune quadrato della AB, rimanerà il quadrato della AC eguale al rettangolo delle due AE, AF.

222. Notiſi quì intanto, che per mezzo di queſto problema può deſcriverſi ancora un quadrato, che ſia eguale ad un dato triangolo. In fatti di già ſi è fatto vedere altrove (170), poterſi formare con qualſivoglia angolo un parallelogrammo, che ſia eguale ad un triangolo dato. Onde, ſe il parallelogrammo eguale al triangolo formiſi coll' angolo retto, e ritroviſi un quadrato, che ſia eguale a queſto parallelogrammo rettangolo; chiaro ſi è, che il medeſimo quadrato ſarà eguale parimente al dato triangolo.

223. Il quarto problema ſi è, di prolungare talmente una retta data, che il rettangolo fatto dalla retta così prolungata nella porzione aggiunta ſia eguale al quadrato di un' altra data retta. Sia perciò DA la retta, che dee prolungarſi, e ſia ancora FG l' altra retta data. Dividaſi la DA per metà nel punto B, ed alzata su di eſſa la perpendicolare AC eguale alla FG, *Fig.* 54.

prolunghiſi la BA talmente per ſino al punto E, che ſiano eguali le due BC, BE. Io dico, che il rettangolo della DE nella AE ſia eguale al quadrato della FG, ovvero AC.

224. Poichè ſono eguali le due BC, BE, ſaranno eguali ancora li loro quadrati. Ma, per eſſere la DA diviſa egualmente nel punto B, a cui ritrovaſi aggiunta l'altra AE, il rettangolo delle due DE, AE inſieme col quadrato della AB è eguale al quadrato della BE (191); e per eſſere il triangolo ABC rettangolo in A, li quadrati delle due AC, AB ſono eguali al quadrato della BC (201). Dunque ancora il rettangolo delle due DE, AE inſieme col quadrato della AB ſarà eguale ai quadrati delle due AC, AB; e per tanto, togliendone il comune quadrato della AB, rimanerà il rettangolo delle due DE, AE eguale al quadrato della AC.

225. Il quinto problema ſi è, di dividere talmente una data retta, che il rettangolo delle ſue parti ſia eguale al quadrato di un'altra retta data. Sia perciò AB la retta da dividerſi, e ſia ancora HI l'altra retta data. Dividaſi la AB per metà nel punto C, da cui alzata ſulla ſteſſa AB la perpendicolare CD, tagliſi da queſta perpendicolare la porzione CE eguale alla HI. Tiriſi di

Fig. 55.

poi

poi per lo punto E la retta EF paralela alla AB; e col punto C come centro, e coll' intervallo della CA, ovvero CB deſcrivaſi un' arco circolare, che ſeghi la EF nel punto F. Si abbaſſi finalmente da queſto punto ſulla AB l' altra perpendicolare FG; ed io dico, che il rettangolo delle due AG, BG ſia eguale al quadrato della HI.

226. Per dimoſtrarlo, congiungaſi la CF. Eſſendo adunque eguali le due CF, CB, ſaranno eguali ancora li loro quadrati. Ma, per lo triangolo CGF rettangolo in G, il quadrato della CF è eguale a i quadrati delle due CG, FG, ovvero delle due CG, CE, o finalmente delle due CG, HI; e per eſſere la AB diviſa in parti eguali nel punto C, ed in parti diſuguali nel punto G, il quadrato della CB è eguale al rettangolo delle due AG, BG inſieme col quadrato della CG. Dunque, toltone il comune quadrato della CG, ſarà il quadrato della HI eguale al rettangolo delle due AG, BG. Si vede intanto, che per eſſere queſto problema capace di ſoluzione, la HI non dee eſſere maggiore della metà della AB.

227. Il ſeſto, ed ultimo problema ſi è, di dividere talmente una data retta, che il rettangolo della tutta,

e di una delle ſue parti ſia eguale al
Fig. quadrato dell' altra parte . Sia perciò
56. AB la retta data, la quale prolunghiſi talmente per ſino al punto C , che il rettangolo delle due AC , BC ſia eguale al quadrato della ſteſſa AB (223). Tagliſi di poi dalla AB la porzione BD eguale alla BC ; ed io dico , che il quadrato di queſta porzione BD ſia eguale al rettangolo della tutta AB nell' altra porzione AD .

228. In fatti il rettangolo delle due AC , BC , come eguale al quadrato della AB , è eguale a due rettangoli , uno della AB nella BD , e l'altro della AB nella AD (176). Ma , per eſſere la BD eguale alla BC , quello ſteſſo rettangolo è eguale ancora al rettangolo della AB nella BD , ed al quadrato della BD (174). Dunque , togliendone il comune rettangolo della AB nella BD , ſarà il ſolo rettangolo della AB nella AD eguale al ſolo quadrato della BD .

229. Dall' eſſerſi intanto diviſa la AB nel punto D colla diviſata legge ne ſeguono due altre uguaglianze . La prima ſi è , che li quadrati della tutta AB , e della porzione minore AD ſiano eguali al triplo del quadrato fatto dalla porzione maggiore BD . In fatti quelli due quadrati ſono eguali al duplo

plo del rettangolo fatto dalle due AB, AD, ed al quadrato della BD (180). Ma il duplo di queſto rettangolo è eguale al duplo del quadrato della BD. Dunque li quadrati delle due AB, AD ſaranno eguali al triplo del quadrato della BD.

230. L'altra uguaglianza ſi è, che il quadrato della tutta AB, e della porzione minore AD unite inſieme ſia eguale al quintuplo del quadrato fatto dalla porzione maggiore BD. In fatti quel quadrato è eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalle due AB, AD, ed al quadrato della BD (182). Ma il quadruplo di queſto rettangolo è eguale al quadruplo del quadrato della BD. Dunque il quadrato delle due AB, AD unite inſieme ſarà eguale al quintuplo del quadrato della BD.

§. XVI.

Dell' indole dell' altre figure rettilinee.

231. PEr quanto all'altre figure rettilinee, che ſono racchiuſe da un maggior numero de' lati, ſe bene diſtinguanſi dalle precedenti col comune nome di figure moltilatere, ovvero di poligoni; nientedimeno eſſe ancora hanno li nomi loro ſpeciali, chia-

mandoſi pentagoni, ſe li lati, che le racchiudono, ſono cinque, eſagoni ſe ſono ſei, ſettagoni ſe ſono ſette, ottogoni ſe ſono otto, e così dell' altre. E poichè, con tirare rette da uno de' loro angoli agl' altri oppoſti, dividonſi in triangoli; perciò per mezzo di queſti triangoli pongonſi a calcolo tali figure.

232. Conforme poi quelle rette, che da uno degl' angoli del poligono tiranſi agl' angoli oppoſti, poſſono riguardarſi come ſue diagonali; così reſterà diviſo il poligono in tanti triangoli, quanti ne addita il numero de' ſuoi lati minorato di due, cioè in tre eſſendo pentagono, in quattro eſſendo eſagono, e così dell' altre. Ed attenta queſta diviſione egli è facile ad intenderſi, che gl' angoli di qualſiſia poligono uniti inſieme ſiano eguali a tanti retti, quanti ne diſegna il duplicato numero de' lati minorato di quattro.

233. In fatti ſi hanno gl' angoli del poligono, con unire inſieme gl' angoli dei triangoli, in cui lo dividono le ſue diagonali. Ma queſti triangoli ſono tanti di numero, quanti ne addita il numero de' lati minorato di due; e gl'angoli di ciaſcheduno di eſſi ſono inſieme eguali a due retti (102). Dunque gl' angoli del poligono uniti inſieme ſaranno

no eguali a tanti retti, quanti ne di-
ſegna il duplicato numero degli ſteſſi
lati minorato di quattro.

234. Queſto ſteſſo può dimoſtrarſi ancora in un' altro modo, ed ecco come. Prendaſi dentro del poligono un punto ad arbitrio, da cui tirinſi rette ai ſuoi angoli. E ſiccome con queſte rette rimane diviſo il poligono in tanti triangoli, quanti ſono li lati; così gl' angoli di tutti queſti triangoli inſieme ſaranno eguali a tanti retti, quanti ne addita il duplicato numero degli ſteſſi lati. Onde, non appartenendo al poligono gl' angoli, che ritrovanſi intorno al punto preſo, ed eſſendo queſt'angoli inſieme eguali a quattro retti (67); ſaranno gl' angoli del poligono eguali a tanti retti, quanti ne addita il duplicato numero de' lati minorato di quattro.

235. Da ciò intanto ne ſegue, che prolungandoſi li lati di un poligono verſo la ſteſſa parte, gl' angoli, che formanſi al di fuori, ſiano inſieme eguali a quattro retti. In fatti, conforme ciaſcuno di eſſi col ſuo interiore contiguo ci da la ſomma di due retti (60); così gl' eſteriori, ed interiori inſieme ſaranno eguali a tanti retti, quanti ne diſegna il duplicato numero de' lati. Ma ſi è dimoſtrato, che la

ſomma dei ſoli interiori ſia eguale a tanti retti, quanti ne addita lo ſteſſo duplicato numero de' lati minorato di quattro. Dunque la ſomma degl' altri eſteriori dovrà eſſere eguale a quattro retti.

236. Per quanto alla determinazione di un poligono, egli la riceve con darſi un lato meno di quelli, che debbono contenerlo, e con darſi altresì gl' angoli contenuti dai lati dati. Sia perciò il poligono ABCDE, di cui ſiano dati li ſoli lati AB, BC, CD, DE, e li ſoli angoli ABC, BCD, CDE. Diaſi poſizione al primo lato AB; ed eſſendo egli dato, ſaranno dati ancora di poſizione li due punti A, e B. Ma con eſſer dati gl' angoli ABC, BCD, CDE inſieme colli lati BC, CD, DE, ſono dati di poſizione eziandio li punti C, D, E. Dunque ſarà dato altresì, tanto il rimanente lato EA, quanto ciaſcuno dei rimanenti angoli DEA, EAB; e pertanto il poligono ſteſſo reſterà determinato.

Fig. 57.

237. Ma io dico di più, che ſe tirinſi nel poligono le diagonali AC, AD, rimangono determinati parimente li tre triangoli ABC, ACD, ADE, in cui egli reſta diviſo. In fatti, con eſſere dati li lati AB, BC inſieme coll' angolo da eſſi contenuto ABC, già il pri-

primo triangolo ABC riceve la ſua determinazione (136). Dunque, rimanendo determinato non ſolo il ſuo terzo lato AC, ma eziandio l'angolo ACB, ancora nel ſecondo triangolo ACD ſaranno dati li due lati AC, CD inſieme coll'angolo da eſſi contenuto A C D. Onde, conforme queſt' altro triangolo riceve parimente la ſua determinazione, così per la ſteſſa ragione dovrà eziandio riceverla il triangolo rimanente ADE.

238. Finalmente, ſiccome poneſi a calcolo qualſiſia poligono per mezzo dei triangoli, in cui lo dividono le ſue diagonali; così con rette parallele niente è egli più facile, quanto di ridurre ad un ſol triangolo qualſiſia poligono dato; ma per poterſi meglio intendere la maniera di eſeguire una tal riduzione, giova incominciare dal quadrilatero, che per reſtar diviſo dalla ſua diagonale in due triangoli, riduceſi ad un ſol triangolo per mezzo di una ſola parallela.

239. Debbaſi adunque in primo luogo ridurre a triangolo il quadrilatero ABCD. Tiriſi per lo punto D la retta DE parallela alla diagonale AC (93), che s' incontri col lato B C nel punto E. E poichè, congiunta la AE, li due triangoli ACE, ACD ritrovanſi ſituati *Fig.* 58.

ſulla ſteſſa baſe AC, e tra le ſteſſe parallele AC, DE; ſaranno li medeſimi tra di loro eguali (162). Onde, coll'aggiunta del comune triangolo ABC, ſarà il triangolo ABE eguale al quadrilatero dato ABCD.

Fig. 59. 240. Debbaſi in ſecondo luogo ridurre a triangolo il pentagono ABCDE. Tirifi ſimilmente per lo punto E la retta EF parallela alla diagonale AD, che s'incontri col lato CD nel punto F. Se adunque congiungaſi la AF, li due triangoli ADF, ADE, come ſituati ſulla ſteſſa baſe AD, e tra le ſteſſe parallele AD, EF, ſaranno tra di loro eguali. Onde, ſiccome coll'aggiunta del comune quadrilatero ABCD, l'altro quadrilatero ABCF ſi fa eguale al pentagono ABCDE; così, con ridurre a triangolo queſt' altro quadrilatero ABCF, ſi avrà la riduzione ricercata del dato pentagono.

Fig. 60. 241. Debbaſi in terzo luogo ridurre a triangolo l'eſagono ABCDEF. Tirifi parimente per lo punto F la retta FG parallela alla diagonale AE, che s'incontri col lato DE nel punto G; e ſe congiungaſi la AG, li due triangoli AEG, AEF, come ſituati ſulla ſteſſa baſe AE, e tra le ſteſſe parallele AE, FG, ſaranno tra di loro eguali. Onde, conforme coll'aggiunta del comune pen-

tagono ABCDE, ſarà l'altro pentagono ABCDG eguale all'eſagono ABCDEF; così, con ridurre queſt' altro pentagono primieramente a quadrilatero, ed indi a triangolo, ſi avrà la riduzione, che ſi dimanda del dato eſagono.

242. Or in una maniera conſimile ſi ridurrà a triangolo qualſiſia altro poligono, ſe non che a miſura, che aumentaſi il numero de' ſuoi lati, ſi aumenteranno altresì le riduzioni, di cui ſi ha biſogno per giugnere alla riduzione ricercata: come in fatti il ſettagono primieramente dovrà ridurſi ad eſagono, indi a pentagono, di poi a quadrilatero, e finalmente a triangolo; e quindi ſi è, che ſe bene per lo quadrilatero baſti una ſola parallela, nientedimeno biſognerà tirarne due per lo pentagono, tre per l' eſagono, quattro per lo ſettagono, e così per gl' altri poligoni.

243. La riduzione intanto, che ſpecialmente deſideraſi da Geometri, ſi è quella, per mezzo di cui un dato poligono riduceſi a quadrato; e ciò per la ragione, che tra tutte le figure rettilinee la più facile a miſurarſi ſi è il quadrato; ma con ridurre a triangolo un dato poligono, egli è facile di ridurlo in appreſſo a quadrato. Imperocchè, dovendo eſſere quel triangolo eguale

guale al rettangolo, che ſi fa dalla metà della ſua baſe nella ſua altezza (172); chiaro ſi è, che con deſcrivere un quadrato, che ſia eguale a queſto rettangolo, ſi avrà il quadrato ricercato.

§. XVII.

Dell' indole delle figure rettilinee regolari.

244. CHiamanſi figure rettilinee regolari quelle, in cui così li lati, come gl' angoli ſono eguali, ſiccome è il triangolo equilatero tra le figure trilatere, ed il quadrato tra le figure quadrilatere. In queſte tali figure, per la loro regolarità, ritrovaſi un punto, che riguardaſi, come loro centro; e la ſua proprietà ſi è, che le rette, tirate da queſto punto agl' angoli della figura, ſiano eguali tra di loro, e dividano gli ſteſſi angoli in due parti eguali.

Fig. 61. 245. Sia perciò ABCDE una figura rettilinea regolare, e dividaſi per metà così l' angolo ABC per la retta BF, come l' angolo BCD per l' altra CF (46), le quali due rette s' incontrino tra di loro nel punto F. Eſſendo adunque eguali li due angoli ABC, BCD, ſaranno eguali ancora, così le loro metà

tà FBC, FCB, come le due BF, CF. Ma, congiunta la DF, ritrovanſi eſſere perfettamente eguali li due triangoli BCF, DCF (129). Dunque dovranno eſſere eguali parimente, tanto le due BF, DF, quanto li due angoli FBC, FDC; e pertanto, ſiccome il primo di eſſi FBC è la metà dell' angolo ABC, così ancora l' altro FDC ſarà la metà del ſuo eguale CDE.

246. Or conforme ſi è dimoſtrato, che la DF non ſolo ſia eguale a ciaſcheduna delle due BF, CF, ma divida ancora per metà l' angolo CDE; così, congiunte l'altre due EF, AF, ſi dimoſtrerà parimente, che ciaſcuna di eſſe ſia eguale a ciaſcuna delle tre BF, CF, DF, e che li due angoli DEA, EAB ſiano diviſi per metà dalle ſteſſe due EF, AF. Onde, attenta l' uguaglianza delle rette BF, CF, DF, EF, AF tirate dal punto F agl' angoli della figura, e la diviſione per metà di queſt' angoli fatta dalle ſteſſe rette, ſarà F il centro della figura regolare propoſta.

247. Ma allo ſteſſo centro compete ancora un'altra proprietà, e ſi è, che le perpendicolari da eſſo abbaſſate ſulli lati della figura ſiano eguali tra di loro, e dividano per metà gli ſteſſi lati. Si abbaſſino perciò ſulli lati AB, BC *Fig.* 61.

le

le perpendicolari FG, FH; e facendoſi perfettamente eguali li due triangoli BFG, BFH (134), ſaranno eguali tra di loro queſte due perpendicolari. Ma, per farſi ancora perfettamente eguali, così li due triangoli AFG, BFG, come gl' altri due BFH, CFH, ſono eguali tanto le due AG, BG, quanto le due BH, CH. Dunque li due lati AB, BC ſaranno diviſi per metà da quelle ſteſſe perpendicolari.

248. Quindi il centro della figura regolare ABCDE potrà ritrovarſi, non ſolo con dividere li due angoli ABC, BCD egualmente per le rette BF, CF; ma eziandio con dividere li due lati AB, BC per metà ne' punti G, ed H, e con alzare su di eſſi da queſti punti le perpendicolari GF, HF; poichè coll' incontro, così di quelle due rette, come di queſte due perpendicolari, ſi avrà il centro ricercato. Anzi potrà averſi altresì lo ſteſſo centro, ſe diviſo l'angolo ABC egualmente per la retta BF, dividaſi il lato AB per metà nel punto G; poichè alzata su di eſſo da queſto punto la perpendicolare GF, che s' incontri colla BF nel punto F, ſi avrà con queſto punto il centro, che ſi dimanda.

249. Conforme poi ſono eguali le rette, che tiranſi agl' angoli di una figura

gura regolare dal ſuo centro, così ſono eguali altresì gl' angoli contenuti dalle ſteſſe rette. E poichè queſt' angoli ſono tanti di numero, quanti ſono li lati della figura, e li medeſimi uniti inſieme ſono eguali a quattro retti, cioè a 360 gradi; perciò potrà determinarſi ciaſcheduno di eſſi, con dividere li 360 gradi in tante parti eguali, quanti ſono li lati della figura; onde farà egli di 120 gradi nel triangolo equilatero, di gradi 90 nel quadrato, di gradi 72 nel pentagono regolare, e di gradi 60 nell' eſagono regolare.

250. Queſt' angolo intanto, come ſituato nel centro della figura regolare, chiamaſi angolo al centro; e con eſſere egli noto, può determinarſi ancora ciaſcuno degl' angoli della ſteſſa figura, per dover egli eſſere il ſupplimento a due retti dell' angolo al centro. In fatti, eſſendo li due angoli ABC, BCD diviſi per metà dalle rette BF, CF; farà l' angolo ABC eguale ai due CBF, BCF. Onde, coll' aggiunta del comune BFC, ſaranno li due angoli inſieme ABC, BFC eguali ai tre angoli del triangolo BCF, la di cui ſomma è eguale a due retti (102). *Fig.* 61.

251. Ma ſenza far uſo dell' angolo al centro, può determinarſi ciaſcuno degl' angoli della figura per mezzo della

la loro proprietà, che tutti insieme siano eguali a tanti retti, quanti ne addita il duplicato numero de'lati minorato di quattro (234), cioè con dividere la somma di questi retti per lo numero degl' angoli, o pure dei lati della figura. Così nel pentagono regolare, essendo la somma degl' angoli eguale a sei retti, cioè a 540 gradi, si ritroverà, che ciascuno di essi debba essere di gradi 108; e per la stessa ragione sarà di gradi 120 ciascuno degl' angoli dell'esagono regolare.

252. Del rimanente, conforme il triangolo equilatero, ed il quadrato rimangono determinati, con esser dato uno de' loro lati; così lo stesso avviene ad ogn' altra figura regolare. E poichè le rette tirate dal centro ai suoi angoli dividono la figura in triangoli isosceli, che hanno per loro basi li lati della stessa figura, ed in cui sono noti tutti tre gl' angoli; chiaro si è, che con esser dato un lato della figura, non solo la figura intiera, ma tutti questi triangoli, che sono tra di loro eguali, ricevono la loro determinazione.

253. Con essere intanto eguali tra di loro li riferiti triangoli isosceli, potrà facilmente ridursi a triangolo, ed in conseguenza a quadrato qualsisia figura regolare. Sia perciò la figura regolare ABCDE,

ABCDE, che abbia per ſuo centro il punto F. Prolunghiſi il lato AB a dirittura verſo M, da cui taglinſi ſucceſſivamente le porzioni BI, IK, KL, LM eguali agl' altri lati BC, CD, DE, EA. E poichè, congiunte le rette FI, FK, FL, FM, ſi fanno eguali ancora li triangoli AFB, BFI, IFK, KFL, LFM; ſarà l' intero triangolo AFM eguale alla figura propoſta. *Fig.* 61.

254. Ed eſſendo così, potrà ſtabilirſi intorno alle figure regolari il ſeguente teorema, cioè, che ciaſcuna di eſſe ſia eguale ad un triangolo, che ha per baſe una retta eguale al ſuo perimetro, e per altezza la perpendicolare abbaſſata dal ſuo centro ſopra uno de' ſuoi lati. Dal che ne ſegue, che la ſteſſa figura debba eſſere altresì eguale ad un rettangolo fatto da una retta eguale alla metà del ſuo perimetro nella ſteſſa perpendicolare; onde ſi è, che il quadrato eguale a queſto rettangolo ſarà eguale altresì alla ſteſſa figura.

§. XVIII.

Della misura delle figure rettilinee.

255. Dimostrata l'indole delle figure rettilinee, passeremo ora alla loro misura, ove per altro dirigesi lo scopo principale di questa scienza. Ed in vero, conforme misurasi la lunghezza delle rette per mezzo di una retta data (22); così dovrà misurarsi l'ampiezza di qualsisia figura rettilinea per mezzo del quadrato descritto sulla stessa retta. Onde, volendoci avvalere del nostro palmo per la misura delle rette, bisognerà, che si misurino le figure rettilinee col quadrato descritto sullo stesso palmo, che perciò potrà chiamarsi palmo quadrato.

256. Ma conforme il nostro palmo dividesi in once, e minuti (22), così ancora il palmo quadrato dovrà dividersi in once quadrate, e minuti quadrati. Per intendere però, quale ne debba essere il numero, giova riflettere, che qualunque sia il numero delle parti eguali, in cui dividesi una data retta, il quadrato descritto su di essa debba contenere tanti piccoli quadrati fatti da quelle stesse parti, quanti ne addita il prodotto, che si ha, con moltiplicare quel

quel numero per se ſteſſo.

257. In fatti, ſe la retta AB ſia diviſa per ragion di eſempio in quattro parti eguali, e su di eſſa deſcrivaſi il quadrato ABCD, vedeſi chiaramente, che diviſo l'altro lato BC ſimilmente in quattro parti eguali, e tirate per gli punti di ambedue le diviſioni rette parallele alle due CD, AD, reſti diviſo il quadrato ABCD per mezzo di queſte parallele in 16 piccioli quadrati fatti da quelle parti, che ſono in conſeguenza tanti di numero, quanti ne addita il prodotto, che ſi ha, con moltiplicare per se ſteſſo il numero 4. *Fig.* 62.

258. Dividendoſi adunque il noſtro palmo in 12 once, dovranno contenerſi nel palmo quadrato 144 once quadrate; e così ancora, dividendoſi ciaſcuna oncia in 12 minuti, dovranno contenerſi nell'oncia quadrata 144 minuti quadrati. Onde, per avere li palmi quadrati, che contengonſi in un dato numero di once quadrate, dovrà dividerſi queſto dato numero di once quadrate per 144; e lo ſteſſo dovrà farſi, ſe da un dato numero di minuti quadrati debbanſi dedurre l'once quadrate, che in eſſo contengonſi.

259. Da quel tanto ſi è detto, già vedeſi, come debba miſurarſi qualſiſia quadrato, cioè con moltiplicare per se

ſteſſo il numero di palmi, once, o minuti, che contengonſi in uno de' ſuoi lati: dimodochè, conforme eſſendo il lato AB di quattro palmi, dee eſſere il ſuo quadrato ABCD di 16 palmi quadrati; così lo ſteſſo quadrato ſarà di 16 once quadrate, ſe il lato AB ſia di 4 once; e di 16 minuti quadrati, ſe il lato AB ſia di 4 minuti.

Fig. 62.

260. Soltanto deeſi avvertire, che ſe nel lato AB contenganſi palmi inſieme con once, ſi agevolerà la moltiplicazione, con ridurre ad once eziandio li palmi. Così, ſe il lato AB ſia di 3 palmi, e 4 once, colla riferita riduzione ſara egli di 40 once. Onde, contenendoſi nel quadrato ABCD 1600 once quadrate, ſarà egli di 11 palmi quadrati, e 16 once quadrate. E lo ſteſſo dovrà praticarſi, ſe nel lato AB contenganſi palmi, once, e minuti.

261. In una maniera conſimile potrà dimoſtrarſi, che per miſurare ogn' altro parallelogrammo rettangolo, altro non debba farſi, ſe non ſe moltiplicare tra di loro li numeri dei palmi, once, e minuti contenuti nei due lati AB, BC, che ſono intorno all' angolo retto ABC. Anzi nel quadrato non per altra ragione moltiplicaſi per ſe ſteſſo il numero dei palmi, once, e minuti contenuti nel ſolo lato AB, ſe non

Fig. 63.

non perchè ſono eguali tra di loro li due lati AB, BC.

262. Notiſi quì intanto, che ſe per baſe del parallelogrammo rettangolo ABCD prendaſi il lato AB, la ſua altezza ſarà l'altro lato BC, che inſiſte su 'l primo ad angoli retti. Onde la regola per miſurare qualſiſia parallelogrammo rettangolo ſi è, di moltiplicare tra di loro li numeri dei palmi, once, e minuti, che contengonſi nella ſua baſe, e nella ſua altezza, o pure per ſpiegarci più brevemente da quì innanzi, di moltiplicare la ſua baſe per la ſua altezza.

263. Queſta ſteſſa regola ha luogo ancora nel parallelogrammo obbliquangolo. Sia perciò ABCD queſto tale parallelogrammo, in cui prendaſi per baſe il lato AB. Se adunque su di queſto lato ſi abbaſſi dall'angolo oppoſto C la perpendicolare CE, ſarà queſta perpendicolare la ſua altezza. Onde deeſi dimoſtrare, che ſi abbia la ſuperficie, o ſia ampiezza, del propoſto parallelogrammo obbliquangolo ABCD, con moltiplicare la ſua baſe AB per la ſua altezza CE. *Fig.* 64.

264. Si abbaſſi perciò ſullo ſteſſo lato AB dall'altro angolo oppoſto D l'altra perpendicolare DF; ed eſſendo parallele le due CE, DF, ſarà FECD

un

un altro parallelogrammo eguale al primo ABCD (158). Ma, per eſſere rettangolo queſt' altro parallelogrammo FECD, ſi ha la ſua ſuperficie colla moltiplicazione delle due DC, CE, o pure colla moltiplicazione delle due AB, CE (261). Dunque colla moltiplicazione delle ſteſſe due AB, CE ſi avrà altresì la ſuperficie del parallelogrammo obbliquangolo ABCD.

265. Miſuraſi adunque qualſiſia parallelogrammo con moltiplicare la ſua baſe per la ſua altezza. E poichè il triangolo è la metà del parallelogrammo, con cui ha la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza (171); perciò nella miſura del triangolo ſimilmente la baſe, e l'altezza debbono moltiplicarſi tra di loro, ma del prodotto dee prenderſi la metà: dimodochè, eſſendo la baſe di 10 palmi, e l'altezza di 8, ſarà il triangolo di 40 palmi quadrati.

Fig. 65. 266. Quindi, ſe il triangolo ABC ſia rettangolo in A, e ſi abbaſſi ſull'ipotenuſa BC la perpendicolare AD, ſi avrà la ſua ſuperficie colla metà del prodotto, che ſi ha, o con moltiplicare l'ipotenuſa BC per la perpendicolare AD, o pure con moltiplicare tra di loro li due lati AB, AC, che ſono intorno all' angolo retto; poichè, ſiccome prendendoſi per baſe del triangolo

lo

lo l' ipotenuſa BC, la ſua altezza è la perpendicolare AD; così, ſe prendaſi per baſe uno dei due lati AB, AC, la ſua altezza dovrà eſſere l' altro lato. Onde di nuovo ſi vede, che il rettangolo delle due BC, AD ſia eguale al rettangolo dell' altre due AB, AC.

267. Or colla miſura del triangolo potrà averſi la miſura d' ogn' altra figura rettilinea; poichè, ſiccome può ella dividerſi in triangoli per mezzo delle diagonali tirate da uno de' ſuoi angoli agl' altri oppoſti, così con miſurare ad uno ad uno queſti triangoli, e con unirgli inſieme, ſi avrà la ſuperficie dell' intera figura. Onde, ſe ABCD *Fig.* ſia un trapezio, e ſulla diagonale BD ſi *66.* abbaſſino dagl' angoli oppoſti le perpendicolari AE, CF, ſi avrà la ſua ſuperficie, con moltiplicare la diagonale BD per la ſomma delle due perpendicolari AE, CF, e con prendere la metà del prodotto.

268. Ma per quanto al trapezio ſi *Fig.* vuol notare, che eſſendo in eſſo paral- *67.* leli due lati oppoſti, come AB, DC può averſi più facilmente la ſua ſuperficie, con dividere il terzo lato AD per metà nel punto E, con abbaſſare da queſto punto ſul lato rimanente BC la perpendicolare EF, e con moltiplicare tra di loro le due BC, EF; e ciò

per la ragione, che tirata per lo ſteſſo punto E la retta GH parallela al lato BC, ſi fanno eguali li due triangoli AEG, DEH; onde coll' aggiunta del comune pentagono EABCH ſarà il trapezio ABCD eguale al parallelogrammo GBCH.

269. Se la figura rettilinea ſia regolare, qualunque ſia il numero de' lati, che la contengono, potrà ella miſurarſi, ſenza eſſervi biſogno di dividerla in triangoli per mezzo delle ſue diagonali. In fatti ſi è dimoſtrato di ſopra (254), che una tal figura ſia eguale ad un triangolo, che ha per baſe il ſuo perimetro, e per altezza la perpendicolare abbaſſata dal ſuo centro ſopra uno de' ſuoi lati. Onde ſi avrà la ſua ſuperficie colla metà del prodotto, che ſi ha, con moltiplicare il ſuo perimetro per la riferita perpendicolare.

§. XIX.

Continuazione dello ſteſſo argomento.

270. COn dividerſi il palmo in once, e minuti, ritrovaſi egli diviſo in 144 parti eguali; onde, attenta la ſua lunghezza, ſarà così picciola ciaſcheduna di queſte parti, che ſe mai nella miſura di qualche retta ſo-

ſopravanzi porzione di eſſa, potrà ella almeno nella pratica traſcurarſi ſenza nota di errore ſenſibile. Ma, ſe vogliaſi tener conto eziandio di queſta porzione, potrà ſuddividerſi il minuto in altre 10 parti eguali, che potranno chiamarſi linee, ed inveſtigare preſſo a poco, quante di queſte linee contengonſi in quella porzione di retta, che ſopravanza.

271. Con queſt' altra diviſione del minuto in linee, conforme ritrovaſi diviſo il palmo in 1440 parti eguali; così nel palmo quadrato ſi conteneranno tanti piccioli quadrati fatti da queſte parti, quanti ne addita il prodotto, che ſi ha, con moltiplicare per se ſteſſo il numero 1440. E facendoſi uſo della diviſione del minuto in linee, eziandio deeſi avvertire, che ſe mai le rette ſiano eſpreſſe con palmi, once, minuti, e linee, ſi agevolerà il calcolo nella miſura delle figure, con ridurre a linee, così li palmi, come l'once, e li minuti.

272. Tornando conto di far uſo de' rotti decimali ne' calcoli, che poſſono occorrere, giova far vedere almeno per coloro, che non ſono molto verſati nel calcolo de' rotti, come l'once, li minuti, e le linee, che ritrovanſi inſieme colli palmi, poſſano ridurſi a rotti decimali;

e come al contrario da quell' avanzo di palmo, che ritrovaſi eſpreſſo con rotti decimali, poſſano dedurſi le linee, li minuti, e l' once.

273. Ed in primo luogo, ſe inſieme colli palmi ritrovinſi ſolamente once, ſi ridurranno queſt' once a rotto decimale, con aggiungere al loro numero più zeri, e con dividerlo in appreſſo per 12. Così, ſe una retta ſia di 3 palmi, e 7 once, e vogliaſi condurre il rotto decimale, a cui riduconſi le 7 once, per ſino alle milleſime, ſi aggiungeranno tre zeri al numero 7; ed indi ſi dividerà 7000 per 12. E poichè il quoziente di queſta diviſione preſſo a poco è 583, ſi ridurranno le 7 once a 583 milleſime parti del palmo; onde la retta di 3 palmi, e 7 once dovrà eſprimerſi in queſto modo $3'583$.

274. Ma ſe inſieme colli palmi ritrovinſi once, e minuti; primieramente dovranno ridurſi a minuti eziandio l' once, ed indi dopo eſſerſi aggiunti più zeri all' intero loro numero, dovrà egli dividerſi per 144. Così, ſe una retta ſia di 3 palmi, 7 once, e 5 minuti, colla riduzione dell' once a minuti, ſarà ella di 3 palmi, e 89 minuti; onde aumentando di tre zeri il numero 89, dovrà dividerſi 89000 per 144;

144 ; ed eſſendo il quoziente di queſta diviſione preſſo a poco 618 , le 7 once , e 5 minuti ſi ridurranno a 618 milleſime parti del palmo ; e pertanto il valore della retta ſarà 3'618.

275. Finalmente , ſe inſieme colli palmi ritrovinſi once , minuti , e linee ; primieramente dovranno ridurſi a linee, così l' once , come li minuti ; ed indi, dopo eſſerſi aggiunti più zeri all' intero loro numero , dovrà egli dividerſi per 1440 . Così , ſe una retta ſia di 3 palmi , 7 once , 5 minuti , e 4 linee , colla riferita riduzione ſarà ella di 3 palmi , e 894 linee ; onde, aumentando di tre zeri il numero 894 , dovrà dividerſi 894000 per 1440 ; ed eſſendo al di preſſo il quoziente di queſta diviſione 621 , ſi ridurranno le 7 once , 5 minuti , e 4 linee a 621 milleſime parti del palmo ; e per tanto il valore della retta ſarà 3'621.

276. La ragione poi , perchè debba dividerſi per 12 il numero dell' once , per 144 il numero dei minuti , e per 1440 il numero delle linee ; dee ripeterſi da ciò , che ſiccome l' once contenute nel palmo ſono 12 , così ſono 144 li minuti , e 1440 le linee , che formano lo ſteſſo palmo . Ed in fatti per rapporto al palmo dee riguardarſi il numero dell' once come un rotto , di

cui il denominatore è 12 ; il numero dei minuti come un' altro rotto, che ha per denominatore 144 ; ed in fine il numero delle linee come un terzo rotto, il di cui denominatore è 1440.

277. Ed eſſendo così, egli è chiaro, che per mezzo delle riferite regole riduconſi a rotti decimali l' once, li minuti, e le linee, che ritrovanſi inſieme colli palmi, con quello ſteſſo artificio, che praticaſi per ridurre a rotto decimale qualſiſia frazione ordinaria. Nella diviſione intanto da farſi accade il più delle volte, che vi reſti qualche avanzo ; onde, ſiccome queſto avanzo può traſcurarſi impunemente, eſſendo minore della metà del diviſore ; così ſe mai le ſia eguale, o pure maggiore, potrà egli aggiungerſi al quoziente come un' altra unità, ſiccome vedeſi fatto negl' eſempj addotti.

278. Quello però, che ſpecialmente deeſi avvertire, ſi è, che dovendoſi il quoziente aggiungere al numero dei palmi, come rotto decimale, ſe mai la diviſione non poſſa farſi col primo dei zeri appoſti, ſi paſſerà al ſecondo, ma con porre un zero nel quoziente ; e per la ſteſſa ragione, ſe nè pure col ſecondo poſſa ella eſeguirſi, ſi paſſerà al terzo, ma con porre nel quoziente un' altro zero. Onde di una retta di 3 palmi,

palmi, 7 minuti, e 5 llnee ſarà 3'052 il ſuo valore; e ſimilmente di una retta di 3 palmi, e 5 linee il ſuo valore ſarà 3'003.

279. Or al contrario, eſſendo eſpreſſo con rotto decimale quell' avanzo di palmo, che ritrovaſi in una retta, ſi dedurranno da eſſo le linee, primieramente con moltiplicare il numeratore del rotto decimale per 1440, che è il numero delle linee contenute nel palmo, ed indi con dividere il prodotto per lo denominatore dello ſteſſo rotto. Onde, ſe il valore della retta ſia 3'621, moltiplicandoſi 621 per 1440, e dividendoſi il prodotto per 1000, ſarà ella preſſo a poco di 3 palmi, e 894 linee.

280. In queſto numero intanto di linee, contengonſi once, e minuti. Onde, conforme per ricavarne li minuti, ciaſcuno de' quali componeſi di dieci linee, dee egli dividerſi per 10; così, ſe il quoziente nato da queſta diviſione dividaſi di nuovo per 12, che è il numero de' minuti contenuti nell' oncia, ſi avranno eziandio l' once. Ed in fatti, eſſendo 89 il quoziente della prima diviſione, e 4 il reſiduo, ſi ridurranno le 894 linee a 89 minuti, e 4 linee; eſſendo poi 7 il quoziente dell' altra diviſione, e 5 il reſiduo, ſi ridurranno

li 89 minuti a 7 once, e 5 minuti; onde la retta ſarà di 3 palmi, 7 once, 5 minuti, e 4 linee.

281. Or ponendoſi a calcolo li rotti decimali a guiſa de' numeri intieri, non è da porſi in dubbio, che con eſprimerſi per mezzo di tali rotti gl'avanzi di palmo, che incontranſi nelle rette, rendaſi più facile il calcolo nella miſura delle figure. Così, ſe la baſe di un parallelogrammo ſia di palmi 4'53, e l' altezza di palmi 3'25, ſarà la ſua ſuperficie di 14'7225 palmi quadrati. E così ancora, ſe la baſe di un triangolo ſia di palmi 6'254, e l'altezza di palmi 5'23, la ſua ſuperficie ſarà di 16'29421 palmi quadrati.

282. Se poi voglianſi ridurre a linee quadrate li rotti decimali, che ritrovanſi uniti ai palmi, non dovrà farſi altra coſa, ſe non che moltiplicare li loro numeratori per lo quadrato di 1440, e dividere li prodotti nati da queſta moltiplicazione per gli loro denominatori. Onde la ſuperficie del parallelogrammo ſi ritroverà eſſere di 14 palmi, e 1498176 linee quadrate, e quella del triangolo di 16 palmi, e 6099739 linee quadrate.

283. Anzi, conforme, con dividere per 144 li riferiti numeri di linee quadrate, ſi vengono ad avere li minuti qua-

quadrati, che in esse contengonsi; così, se li quozienti nati da queste divisioni dividansi di nuovo per 144, si avranno l'once quadrate contenute ne' numeri dei minuti quadrati. Onde la superficie del parallelogrammo si ritroverà essere di 14 palmi, 72 once, e 36 minuti quadrati, e quella del triangolo di 16 palmi, 2 once, 23 minuti, e 43 linee quadrate.

§. XX.

Del modo di dedurre l'altezza del triangolo dai suoi lati.

284. L'Altezza del triangolo, di cui si ha bisogno per la sua misura, può dedursi dai suoi medesimi lati, qualora questi sono noti. Sia perciò il triangolo ABC primieramente rettangolo in A, ed essendosi dimostrato (201), che il quadrato dell' ipotenusa BC sia eguale ai quadrati degl'altri due lati AB, AC; potrà determinarsi facilmente, non meno l'ipotenusa BC, essendo noti li due lati AB, AC, che uno di questi lati, essendo nota l' ipotenusa coll' altro lato. *Fig.* 65.

285. In fatti, se sono noti li due lati AB, AC, che contengono l' angolo retto, si determinerà l' ipotenusa

BC, primieramente con fare li quadrati di detti lati, ed indi con eſtrarre la radice quadrata dalla loro ſomma. Così, ſe il lato AB ſia di 6 palmi, e l'altro AC di 8, ſaranno 36, e 64 li loro quadrati, ed in conſeguenza la ſomma di queſti quadrati ſarà 100; onde, eſſendo 10 la radice quadrata di 100, ſarà l'ipotenuſa BC di 10 palmi. E così ancora, ſe il lato AB ſia di 10 palmi, ed il lato AC di 12, ſarà l'ipotenuſa BC di palmi 15'626.

286. Se poi ſia nota l'ipotenuſa BC inſieme col lato AB, ſi determinerà l'altro lato AC, primieramente con fare il quadrato tanto dell'ipotenuſa, come del lato noto, ed indi con eſtrarre la radice quadrata dalla differenza di queſti due quadrati. Così, ſe l'ipotenuſa BC ſia di 10 palmi, ed il lato AB di 6, ſaranno 100, e 36 li loro quadrati; onde, eſſendo 64 la differenza di queſti due quadrati, la di cui radice quadrata è 8, ſarà l'altro lato AC di 8 palmi. E così ancora, ſe l'ipotenuſa BC ſia di 10 palmi, ed il lato AB di 5, ſarà l'altro lato di palmi 8'66.

187. Si abbaſſi ora dall'angolo retto A ſull'ipotenuſa BC la perpendicolare AD; e per quel tanto è ſtato dimoſtrato (204) ſarà, così il quadrato del lato

lato AB eguale al rettangolo delle due BC, BD, come il quadrato dell' altro lato AC eguale al rettangolo delle due BC, CD. Onde, con eſſer nota l' ipotenuſa BC inſieme colli due lati AB, AC, ſi determineranno le due porzioni BD, CD dell' ipotenuſa, primieramente con fare li quadrati dei due lati AB, AC, ed indi con dividere ciaſcheduno di eſſi per l' ipotenuſa BC; poichè li quozienti nati da queſta diviſioni ſaranno li valori delle due porzioni BD, CD.

288. Per ſchiarire ciò con qualche eſempio, ſia il lato AB di 15 palmi, ed il lato AC di 20. Eſſendo dunque 225 il quadrato del primo, e 400 il quadrato del ſecondo, ſarà 625 la loro ſomma; e per tanto, eſſendo 25 la radice quadrata di queſta ſomma, dovrà eſſere l' ipotenuſa BC di 25 palmi. Or ſe dividaſi per 25 così il quadrato 225 del lato AB, come il quadrato 400 dell' altro lato AC; ſarà 9 il quoziente della prima diviſione, e 16 il quoziente della ſeconda. Onde delle due porzioni dell' ipotenuſa la prima BD dovrà eſſere di 9 palmi, e la ſeconda CD di 16.

289. Eſſendoſi in oltre dimoſtrato (205), che il rettangolo delle due porzioni BD, CD ſia eguale al quadrato

della perpendicolare AD, chiaro ſi è, che ſe moltiplichinſi tra di loro li valori di quelle due porzioni, e dal prodotto caviſi la radice quadrata, ſi avrà con queſta radice il valore della perpendicolare AD, la quale perciò nell' eſempio rapportato ſi ritroverà eſſere di 12 palmi. Ma eſſendoſi altresì dimoſtrato (206), che il rettangolo dei due lati AB, AC ſia eguale al rettangolo dell' ipotenuſa BC nella perpendicolare AD, potrà averſi ancora il valore di queſta perpendicolare, con moltiplicare tra di loro li due lati AB, AC, e con dividere il prodotto per l' ipotenuſa BC.

Fig. 47. 290. Sia in ſecondo luogo il triangolo ABC ottuſangolo in A, e ſul lato AB prolungato verſo A ſi abbaſſi dall' angolo oppoſto C la perpendicolare CD. Per quel tanto dunque è ſtato dimoſtrato (207) il quadrato del lato BC oppoſto all'angolo ottuſo è maggiore dei quadrati degl' altri due lati AB, AC nel doppio del rettangolo fatto dal lato AB nella porzione aggiunta AD. Onde, ſe mai ſiano noti li valori di tutti tre li lati di queſto triangolo, potrà determinarſi il valore della porzione AD nel ſeguente modo.

291. Faccianſi li quadrati dei due lati AB, AC, e la loro ſomma tolgaſi

gasi dal quadrato del terzo lato BC; dividasi di poi il residuo per lo doppio del lato AB, ed il quoziente nato da questa divisione sarà il valore della porzione AD. Così, se il lato AB sia di 7 palmi, il lato AC di 15, ed il lato BC di 20; saranno 49, 225, e 400 li loro quadrati. Onde, conforme togliendosi dal terzo la somma dei due primi, si ha 126 per residuo; così, dividendosi questo residuo per 14, cioè per lo doppio del lato AB, sarà 9 il quoziente di questa divisione; e per tanto la porzione AD dovrà essere di 9 palmi.

392. Con essersi determinata la porzione AD, potrà determinarsi in appresso la perpendicolare CD per mezzo del triangolo rettangolo CAD, di cui la AC è l'ipotenusa, e le due AD, CD sono li lati intorno all'angolo retto. In fatti, essendo 225 il quadrato dell' ipotenusa AC, e 81 il quadrato del lato AD, sarà 144 la loro differenza; e pertanto, essendo 12 la radice quadrata di questa differenza, sarà l' altro lato, o sia la perpendicolare CD di 12 palmi. Anzi col valore della AD facendosi nota la tutta BD, potrebbe determinarsi ancora la perpendicolare CD per mezzo dell' altro triangolo rettangolo BDC.

253. Sia finalmente il triangolo ABC acutangolo in A, e sul lato AB si abbassi *Fig.* 48.

baſſi dall' angolo oppoſto C la perpendicolare CD. Per quel tanto dunque è ſtato dimoſtrato (209) il quadrato del lato BC oppoſto all' angolo acuto è minore dei quadrati degl' altri due lati AB, AC nel doppio del rettangolo fatto dal lato AB nella porzione AD. Onde, ſe ſiano noti tutti tre li lati del triangolo, potrà determinarſi in una maniera non molto diverſa dalla precedente, primieramente la porzione AD, ed indi la perpendicolare CD.

294. In fatti, ſe dalla ſomma de' quadrati fatti dai due lati AB, AC tolgaſi il quadrato del terzo lato BC, e dividaſi il reſiduo per lo doppio del lato AB; ſi avrà col quoziente di queſta diviſione il valore della porzione AD. E ſe in appreſſo il quadrato di queſta porzione tolgaſi dal quadrato del lato AC, e dal reſiduo caviſi la radice quadrata; ſi avrà con queſta radice il valore della perpendicolare CD. Onde, ſe il lato AC ſia di 25 palmi, il lato AC di 15, ed il lato BC di 20; ſi ritroverà eſſere la porzione AD di palmi 9, e la perpendicolare CD di palmi 12.

Fig. 47. 48. 295. Notiſi quì intanto, che così nel triangolo ottuſangolo, come nell' acutangolo, determinata la perpendicolare CD abbaſſata ſul lato AB dal ſuo an-

angolo oppoſto, ſi determineranno l'altre due, che cadono su gl' altri due dalli loro angoli oppoſti, primieramente con moltiplicare il lato AB per la ſua perpendicolare CD, ed indi con dividere il prodotto per quell' altro lato, di cui ſi cerca la perpendicolare; e ciò per la ragione, che attenta la miſura del triangolo li rettangoli, fatti dalli tre lati nelle loro riſpettive perpendicolari, debbono eſſere tra eſſo loro eguali.

296. Del rimanente può averſi la ſuperficie del triangolo colli ſoli lati, ſenza eſſervi biſogno di perpendicolare alcuna. Prendaſi perciò la ſomma di tutti tre li lati, e ritrovinſi le differenze tra ciaſcuno di eſſi, e la ſomma degl' altri due. Moltiplichinſi di poi tra di loro quella ſomma, e queſte tre differenze, dal di cui prodotto caviſi la radice quadrata. Prendaſi finalmente la quarta parte di queſta radice, e con eſſa ſi avrà la ſuperficie del triangolo ricercata.

297. Così, ſe dei tre lati del triangolo uno ſia di 7 palmi, l' altro di 15, ed il terzo di 20, ſarà 42 la loro ſomma; e ſe ciaſcheduno di eſſi tolgaſi dalla ſomma degl' altri due, ſaranno 28, 12, e 2 le tre differenze. Onde, ſiccome con moltiplicare inſieme quella ſomma, e queſte tre differenze, ſi ha per pro-

prodotto 28224, la di cui radice quadrata è 168; così, essendo 42 la quarta parte di questa radice, sarà la superficie del triangolo di 42 palmi quadrati: come in fatti, essendosi ritrovata la perpendicolare abbassata sul primo lato dall' angolo opposto di palmi 12, la metà del prodotto di 7 per 12 è 42.

298. Similmente se dei tre lati del triangolo, uno sia di 25 palmi, l'altro di 15, ed il terzo di 20, sarà 60 la loro somma; e se ciascheduno di essi tolgasi dalla somma degl' altri due, saranno 10, 30, e 20 le tre differenze. Onde, siccome con moltiplicare insieme quella somma, e queste tre differenze, si ha per prodotto 360000, la di cui radice quadrata è 600; così, essendo 150 la quarta parte di questa radice, sarà la superficie del triangolo di 150 palmi quadrati: ed in fatti essendosi ritrovata di palmi 12 la perpendicolare abbassata sul primo lato dall' angolo opposto, la metà del prodotto di 25 per 12 è 150.

§. XXI.

Delle proprietà del cerchio, relative al ſuo centro, e alla ſua tangente.

299. QUantunque per l' infinite variazioni della linea curva ſiano d' infinite ſpecie altresì, tanto le figure piane curvilinee, quanto le miſtilinee; nientedimeno nella Geometria elementare trattaſi ſoltanto del cerchio, e delle ſue varie porzioni. S' intende adunque per cerchio la figura piana terminata dalla linea circolare, che riguardata come ſuo termine appellaſi ſua circonferenza. E poichè il centro della linea circolare diceſi eſſere centro ancora del cerchio, perciò la ſua indole ſi è, che le rette tirate dal centro per ſino alla circonferenza ſiano tutte eguali tra di loro.

300. Conforme poi queſte rette chiamanſi raggi del cerchio, così prolungate verſo il centro per ſino a che s' incontrino di nuovo colla circonferenza, ſi diranno eſſere ſuoi diametri, li quali perciò debbono eſſere ancora eguali tra di loro. E poichè li medeſimi paſſono per lo centro, chiaro ſi è, che ciaſcheduno di eſſi debba dividere il cerchio in due parti eguali, che per tal'effetto chia-

chiamanſi mezzi cerchi. Ma, ſe dentro del cerchio adattiſi una retta, che non paſſi per lo centro, reſterà diviſo il cerchio in due parti diſuguali, di cui ciaſcuna ſi dirà eſſere porzione del cerchio.

301. Or la prima proprietà del cerchio ſi è, che ſe dentro di eſſo tiriſi una retta, la quale ſeghi un'altra retta per metà, e ad angoli retti, dovrà ella paſſare per lo centro, ed eſſere in conſeguenza diametro dello ſteſſo cerchio. Sia perciò il cerchio A B C D, dentro di cui tiriſi la retta A C, che ſeghi l'altra B D per metà, e ad angoli retti nel punto E; e ſe ſia poſſibile, abbia il cerchio per ſuo centro il punto F ſituato fuori della AC. Congiunte adunque le due B F, D F, per la loro uguaglianza ſaranno eguali li due angoli BEF, DEF (104). Onde, dovendo eſſere retto ciaſcuno di eſſi (54), ſarà l'angolo minore B E F eguale all'altro maggiore B E A, che ſimilmente è retto, il che non può eſſere.

Fig. 68.

302. Eſſendo così, ſi ritroverà il centro del cerchio A B C D, ſe tirata dentro di eſſo una retta, come BD, e diviſa la medeſima per metà nel punto E, alziſi ſulla ſteſſa da queſto punto la perpendicolare EA, che s'incontri colla cir-

circonferenza ne' punti A, e C; poichè il punto G, che divide per metà la AC, ſarà il centro ricercato. Intanto può egli ritrovarſi ancora in un' altro modo, di cui può farſi uſo per qualſiſia porzione di cerchio: cioè, con tirare dentro del cerchio due rette, e con alzare su di eſſe dai punti, che le dividono per metà, due perpendicolari; poichè queſte col loro incontro ti daranno il centro, che ſi dimanda.

303. Della riferita proprietà ha luogo ancora la converſa, cioè che la retta tirata per lo centro di un cerchio, ſegando un' altra retta, che non paſſa per lo centro, ad angoli retti, debba ſegarla ancora per metà; ed al contrario, ſegandola per metà debba ſegarla ancora ad angoli retti. In fatti, ſe dal centro A del cerchio BCD tirinſi li due raggi AB, AC, che formino un' angolo qualſivoglia BAC, e congiungaſi la BC, il triangolo ABC ſarà iſoſcele. Onde, attenta la proprietà di queſto triangolo altrove dimoſtrata (113), conforme la retta AE tirata dall'angolo verticale, ſegando la baſe BC ad angoli retti, dee ſegarla ancora per metà; così al contrario, ſegandola per metà, dee ſegarla altresì ad angoli retti. *Fig.* 69.

304. Dal che ne ſegue, che inter-

ſe-

ſegandoſi due rette dentro di un cerchio in un punto diverſo dal ſuo centro, ambedue non poſſano eſſer diviſe per metà in quello ſteſſo punto. Sia perciò il cerchio BCD, dentro di cui s' interſeghino le due rette BC, DF nel punto E diverſo dal centro A, e congiungaſi la AE. Adunque, ſe tanto la AC, quanto la DF foſſe diviſa per metà nel punto E, dovrebbe la AE ſegare così l' una, come l' altra retta ancora ad angoli retti (303). Onde, facendoſi retti li due angoli AED, AEB, ſarebbe l' angolo minore AED eguale all' angolo maggiore AEB, il che non può eſſere.

Fig. 70.

305. Intorno al centro ha luogo altresì un' altra proprietà, e ſi è, che ſe da un punto preſo dentro di un cerchio cadano ſulla circonferenza tre rette eguali, quel punto debba eſſerne il centro. Sia perciò il cerchio BCD, e dal punto A preſo dentro di eſſo cadano ſulla ſua circonferenza le tre rette eguali AB, AC, AD. Congiunte adunque le due BC, CD, ſaranno iſoſceli li due triangoli ABC, ACD; e pertanto, ſe le medeſime dividanſi per metà ne' punti E, ed F, ſaranno diviſe ad angoli retti dall' altre due AE, AF (113). Onde, dovendo paſſare per lo centro del cerchio ciaſcheduna di queſte due

Fig. 69.

due (301), dovrà egli eſſere il punto A, che è comune ad ambedue.

306. Quindi, ſiccome vedeſi con ogni chiarezza, che li cerchi deſcritti collo ſteſſo centro, non poſſano incontrarſi; così egli è facile ancora ad intenderſi, che interſegandoſi due cerchi, debba farſi il loro interſegamento in due ſoli punti. Imperocchè, ſe mai egli ſi faceſſe in tre punti, le rette tirate a queſti punti dal centro di uno dei due cerchi, come eguali tra di loro, farebbero, che l' altro cerchio aveſſe col primo lo ſteſſo centro. Onde li due cerchi, come deſcritti con un medeſimo centro, non dovrebbero interſegarſi tra di loro, come ſi ſuppone.

307. L' interſegamento adunque di due cerchi, dee farſi in due ſoli punti; ma la retta, che li congiunge inſieme, dee eſſer diviſa per metà, e ad angoli retti dall' altra, che uniſce inſieme li centri dei due cerchi. In fatti, ſe B, e C ſiano li punti d' interſegamento dei due cerchi, che hanno per loro centri li punti A, e D; per l' uguaglianza così delle due AB, AC, come delle due DB, DC, la retta AD dividerà egualmente, tanto l'angolo BAC, quanto l' angolo BDC (48). Onde, eſſendo iſoſceli li due triangoli ABC, DBC, la comune loro baſe BC dovrà eſſere *Fig.* 71.

eſſere diviſa dalla ſteſſa A D non ſolo per metà, ma eziandio ad angoli retti (115).

308. Poſſono intanto due cerchi incontrarſi tra di loro, ſenza eſſervi interſegamento alcuno; e ciò avviene, qualora unendoſi inſieme li due punti d' interſegamento, uno dei due cerchi cade, o tutto dentro, o tutto fuori dell' altro. In queſto caſo diconſi li due cerchi toccarſi tra di loro; ed o che ſi tocchino al di dentro, o al di fuori, chiaro ſi è, che non poſſono toccarſi, ſe non in un ſol punto. E poichè il punto del contatto ſi ha coll' unione dei due punti d' interſegamento, egli è facile ancora ad intenderſi, che debba paſſare per lo punto del contatto la retta, che uniſce inſieme li centri dei due cerchi.

309. Ancora una retta può eſſere tangente di un cerchio, cioè incontrarlo in modo, che cada tutta fuori di eſſo; e ſarà ella tale, qualora alziſi ſul diametro perpendicolarmente da uno dei ſuoi termini. Per dimoſtrarlo, ſia il cerchio BCD, di cui il punto A ſia centro, e la B D diametro. Se adunque su di queſto diametro alziſi dal ſuo termine B la perpendicolare B E, e ad uno de' ſuoi punti come E tiriſi dal centro A la retta A E; l' angolo ABE

Fig. 72.

ABE come retto ſarà maggiore dell'altro acuto AEB. Onde, facendoſi la AE maggiore ancora dell' altra AB (108), ſi ritroverà il punto E fuori del cerchio, e lo ſteſſo dovrà avvenire ad ogn' altro punto della BE, la quale perciò ſarà tangente del cerchio.

310. Al contrario poi, ſe una retta ſia tangente di un cerchio, il diametro, che ſi termina al punto del contatto, dovrà inſiſtere su di eſſa ad angoli retti. Sia perciò la BE tangente del cerchio BCD; e ſe il diametro DB non inſiſta su di eſſa ad angoli retti, ſi abbaſſi dal centro A ſulla BE la perpendicolare AE, che s' incontri colla circonferenza del cerchio nel punto C. Poichè dunque l' angolo AEB come retto è maggiore dell' altro acuto ABE, ſarà la AB maggiore della AE (108); ed in conſeguenza, per eſſere eguali le due AB, AC, eziandio la AC ſarà maggiore della AE, il che non può eſſere. *Fig.* 72.

311. Eſſendo così, può dimoſtrarſi ancora, che ſe una retta ſia tangente di un cerchio, la perpendicolare alzata su di eſſa dal punto del contatto, debba paſſare per lo centro, ed eſſere in conſeguenza diametro del cerchio. Sia perciò la BE tangente del cerchio BCD, e ſe la BD alzata su di eſſa perpendi- *Fig.* 72. *Fig.* 72.

co-

colarmente dal punto del contatto non paſſi per lo centro del cerchio, pongaſi, che centro ne ſia il punto F. Congiunta adunque la FB, dovrà queſta eſſere perpendicolare ſulla tangente BE. Onde, eſſendo retto così l'angolo DBE, come l'angolo FBE, dovranno eſſere eguali tra di loro queſti due angoli, il che non può ſuſſiſtere.

312. Notiſi quì intanto, che eſſendo una retta tangente di un cerchio, ogn' altra retta tirata dal punto del contatto dovrà cadere dentro del cerchio, e farſi in conſeguenza ſua ſecante. Per dimoſtrarlo, ſia BE tangente del cerchio BCD, e dal punto del contatto B tiriſi ad arbitrio un' altra retta, che ſia BG. Eſſendo dunque retto l'angolo ABE, l'altro ABG dovrà eſſere acuto; e per tanto, ſe dal centro A ſi abbaſſi ſulla BG la perpendicolare AG, ſarà l'angolo AGB maggiore dell' angolo ABG. Onde, dovendo eſſere la AB, che è raggio del cerchio, ſimilmente maggiore della AG, ſi ritroverà il punto G dentro del cerchio.

Fig. 72.

313. Ma ſiccome da ciò ne ſegue, che nello ſpazio compreſo tra la tangente BE, e la circonferenza del cerchio non poſſa tirarſi altra retta dal punto del contatto; così da queſto ſteſſo deduconſi due altre conſeguenze. La pri-

prima ſi è, che l'angolo miſtilineo, contenuto dalla tangente, e dalla circonferenza del cerchio, il quale chiamaſi angolo del contatto, ſia minore di ogn'angolo acuto rettilineo. E la ſeconda ſi è, che l'altro angolo miſtilineo, contenuto dal diametro, e dalla ſteſſa circonferenza, il quale appellaſi angolo del mezzo cerchio, ſia al contrario maggiore di ogn'angolo acuto rettilineo.

314. Del rimanente, per tirare la tangente al cerchio da un punto dato nella ſua circonferenza, altro non dee farſi, ſe non che alzare da quel punto una perpendicolare ſul diametro, che ſi termina allo ſteſſo punto (309). Ma, per tirarla da un punto dato fuori del cerchio, potrà farſi in queſto modo. Sia il cerchio BCD, che abbia per ſuo centro il punto A, e ſia E il punto dato fuori di eſſo, da cui deeſi tirare la tangente. *Fig.* 73.

315. Congiungaſi primieramente la AE, che ſeghi la circonferenza del cerchio dato nel punto B; indi collo ſteſſo centro A, e coll'intervallo della AE deſcrivaſi l'altro cerchio EFG; alziſi di poi ſulla ſteſſa AE la perpendicolare BF, che s'incontri colla circonferenza di queſt'altro cerchio nel punto F; congiungaſi finalmente la AF, che ſeghi la circonferenza del primo nel

punto C; ed io dico, che la retta EC, tirata dal punto E al punto C, ſia la tangente ricercata.

316. La ragione è chiara; poichè eſſendo eguali così le due AE, AF, come le due AC, AB, ſaranno li due triangoli CAE, BAF perfettamente eguali (129); e per tanto ſarà l'angolo ACE eguale all'angolo ABF. Quindi, eſſendo queſto ſecondo angolo ABF retto per conſtruzione, ſarà retto altresì il primo ACE; ed in conſeguenza la CE, come perpendicolare ſul raggio AC, ſarà tangente del cerchio BCD (309).

§. XXII.

Delle proprietà del cerchio relative alle rette tirate alla ſua circonferenza da qualſiſia punto.

317. POſſono tirarſi rette alla circonferenza del cerchio, non ſolo dal ſuo centro, ma da qualſiſia altro punto, che ſi voglia prendere, o dentro, o fuori di eſſo. Quantunque poi queſt' altre rette non ſiano eguali, nientedimeno ſerbano tra di eſſe un certo ordine, di cui giova averne la conoſcenza. Adunque, ſe le rette ſiano tirate da un punto preſo dentro del cerchio, la maſſima ſarà quella, che paſſa

paſſa per lo centro ; la minima quell' altra, che giace a dirittura colla maſſima ; e delle rimanenti non ſolo la più vicina alla maſſima ſarà maggiore della più lontana, ma ciaſcuna di eſſe dovrà averne un' altra eguale dall'altra parte.

318. Per dimoſtrarlo, ſia il cerchio BCDE, che abbia per ſuo centro il punto A, e dal punto F preſo dentro di eſſo tirinſi alla ſua circonferenza le rette FB, FC, FD, FE, di cui la FB paſſi per lo centro A, e la FE formi con eſſa una retta continuata. Io dico primieramente, che di queſte rette la FB ſia la maſſima, e la FE la minima. In fatti, ſe congiungaſi la AC, ſarà la FB eguale alle due FA, AC unite inſieme, ed in conſeguenza maggiore della FC ; onde, dovendo ella eſſere per la ſteſſa ragione maggiore d' ogn' altra retta, ſarà ſenza dubbio la maſſima. Se poi congiungaſi la AD, ſarà la AE eguale alla AD, ed in conſeguenza minore delle due AF, FD unite inſieme ; onde, ſiccome toltane la comune AF rimane la FE minore della FD, così dovendo ella eſſere per la ſteſſa ragione minore d' ogn' altra, ſarà ſenza dubbio la minima. *Fig.* 43.

319. Io dico in ſecondo luogo, che la FC più vicina alla maſſima ſia maggiore

giore della più lontana FD, e che ciaſcuna di eſſe debba averne un' altra eguale dall' altra parte. In fatti, eſſendo l' angolo FAC maggiore dell' angolo FAD, ed avendo queſti due angoli li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno; ſarà la baſe del primo FC maggiore della baſe del ſecondo FD. Se poi facciaſi ſulla FA, e propriamente al punto A, così l' angolo FAG eguale all' angolo FAC, come l' angolo FAH eguale all' angolo FAD, e congiunganſi le due FG, FH, ſaranno eguali le baſi, tanto dei due angoli FAG, FAC, quanto degl' altri due FAH, FAD; e per tanto ſarà la FG eguale alla FC, e la FH eguale alla FD.

320. Prendaſi in appreſſo il punto fuori del cerchio, e ſe le rette ſiano tirate ſulla parte concava della ſua circonferenza, la maſſima ſarà quella, che paſſa per lo centro, e dell' altre non ſolo la più vicina alla maſſima ſarà maggiore della più lontana, ma ciaſcuna di eſſe ne avrà un' altra eguale dall' altra parte. Per dimoſtrarlo, ſia il cerchio BCDE, che abbia per ſuo centro il punto A. Prendaſi fuori di eſſo il punto F, da cui tirinſi, ſulla parte concava della ſua circonferenza le rette FB, FC, FD; e di queſte rette la prima

Fig. 75.

ma FB paſſi per lo centro A.

321. Se adunque congiungaſi la AC, ſarà la FB eguale alle due F A , A C unite inſieme, ed in conſeguenza maggiore della F C ; onde , dovendo ella eſſere per la ſteſſa ragione maggiore d' ogn' altra retta , ſarà certamente la maſſima. Se poi congiungaſi la A D , ſarà l' angolo FAC maggiore dell' angolo F A D ; onde, avendo queſti due angoli li lati eguali ai lati , ciaſcuno a ciaſcuno, ſarà la baſe del primo FC maggiore ancora della baſe dell' altro FD. Ed in fine , ſe ſulla F A, e propriamente al punto A facciaſi, così l'angolo FAG eguale all' angolo FAC, come l' angolo F A H eguale all' angolo FAD, e congiunganſi le due FG, FH; chiaro ſi è , che ſarà la F G eguale alla FC, e la FH eguale alla FD.

322. Se poi le rette , che tiranſi dal punto preſo fuori del cerchio, cadono ſulla parte conveſſa della ſua circonferenza ; la minima ſarà quella , che prolungata paſſa per lo centro, e dell' altre non ſolo la più vicina alla minima ſarà minore della più lontana, ma ciaſcuna di eſſe ne avrà un'altra eguale dall' altra parte. Per dimoſtrarlo , *Fig.* ſia di nuovo il cerchio BCDE, che ab- *76.* bia per ſuo centro il punto A ; e dal punto F preſo fuori di eſſo cadano ſul-

la parte conveſſa della ſua circonferenza le rette FE, FD, FC, di cui la prima FE prolungata paſſi per lo centro A.

323. Se adunque congiungaſi la AD, ſarà la FA minore delle due FD, AD unite inſieme; ed in conſeguenza, toltene le due eguali AE, AD, ſarà la FE minore ancora della FD; onde, dovendo ella eſſere per la ſteſſa ragione minore d' ogn' altra retta, ſarà ſenza meno la minima. Se poi congiungaſi la AC, ſarà l' angolo FAD minore dell' angolo FAC; onde avendo queſti due angoli li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno, ſarà la baſe del primo FD minore ancora della baſe dell' altro FC. Ed in fine, ſe ſulla FA, e propriamente al punto A facciaſi, così l' angolo FAG eguale all'angolo FAC, come l' angolo FAH eguale all' angolo FAD, e congiunganſi le due FG, FH; chiaro ſi è, che ſarà la FG eguale alla FC, e la FH eguale alla FD.

324. Poſſono intanto tirarſi le rette da un punto preſo nella ſteſſa ſua circonferenza; ma ſiccome queſte rette cadono tutte ſulla parte concava, così con dimoſtrazioni conſimili ſi farà vedere, che la maſſima ſia quella, che paſſa per lo centro, e che dell' altre non ſolo la più vicina alla maſſima ſia

mag-

maggiore della più lontana, ma ciaſcuna di eſſe debba averne un'altra eguale dall'altra parte. Più toſto giova inveſtigare l'ordine, che ſerbano le rette, che adattate dentro del cerchio non partono da punto veruno; e per queſta ricerca ſi vuol prima notare, che due rette ſituate dentro del cerchio diconſi eſſere egualmente diſtanti dal centro, qualora ſono eguali le perpendicolari abbaſſate su di eſſe dallo ſteſſo centro.

325. Or il primo teorema intorno a queſt' altre rette ſi è, che le rette egualmente diſtanti dal centro ſiano eguali ancora tra di loro. Sia perciò il cerchio BCDE, che abbia per ſuo centro il punto A; e dentro di eſſo adattinſi le due rette CB, DE, che ſiano egualmente diſtanti dal centro A, dimodochè ſiano eguali le perpendicolari AF, AG abbaſſate su di eſſe dallo ſteſſo centro. Io dico, che le due rette CB, DE ſiano eguali ancora tra di loro. In fatti, eſſendo diviſa per metà, così la CB nel punto F, come la DE nel punto G (303), ſaranno eguali le due CB, DE, ſe poſſa dimoſtrarſi, che ſiano eguali le loro metà CF, DG. *Fig.* 77.

326. Congiunganſi perciò le due AC, AD; e per gli due triangoli rettangoli AFC, AGD ſarà, così il quadrato

della AC eguale ai quadrati delle due AF, CF, come il quadrato della AD eguale ai quadrati dell'altre due AG, DG (201); e pertanto, eſſendo il quadrato della AC eguale al quadrato della AD, ſaranno li quadrati delle due AF, CF eguali ancora ai quadrati dell'altre due AG, DG. Ma, per eſſere la AF eguale alla AG, ſono eguali altresì li loro quadrati. Dunque colla detrazione di eſſi ſarà il quadrato della CF parimente eguale al quadrato della DG; ed in conſeguenza le due CF, DG ſaranno eziandio tra di loro eguali.

327. Il ſecondo teorema ſi è, che le rette eguali debbano eſſere ancora egualmente diſtanti dal centro. Poſte adunque le ſteſſe coſe, dee dimoſtrarſi, che eſſendo eguali le due rette CB, DE, ſiano eguali parimente le due perpendicolari AF, AG, che ſono le loro diſtanze dal centro: il che è chiaro, poichè, con eſſere eguali le due CB, DE, ſono eguali ancora, così le loro metà CF, DG, come li quadrati di queſte metà. Onde, eſſendo li quadrati delle due AF, CF eguali ai quadrati dell'altre due AG, DG, ſe tolganſi da eſſi quelli due quadrati eguali, ſarà il quadrato della AF eguale al quadrato della AG; e pertanto ancora le due

Fig. 77.

due AF, AG ſaranno tra di loro eguali.

328. Il terzo, ed ultimo teorema ſi è, che delle rette adattate dentro del cerchio la maſſima ſia quella, che paſſa per lo centro, e dell' altre la più vicina al centro ſia maggiore della più lontana. Adattinſi perciò dentro del cerchio BCD le rette BC, DE, FG, delle quali la prima BC paſſi per lo centro A. Adunque, ſe congiunganſi le due AD, AE, per eſſere la AB eguale alla AD, e la AC eguale alla AE, ſarà la BC eguale alle due AD, AE, ed in conſeguenza maggiore della DE; onde dovendo ella eſſere per la ſteſſa ragione maggiore di ogn' altra retta, che non paſſa per lo centro, ſarà la BD ſenza meno la maſſima. *Fig.* 78.

329. Si abbaſſino di poi ſull' altre due DE, FG dal centro A le perpendicolari AH, AI; e ſe pongaſi, che la DE ſia più vicina al centro dell' altra FG, ſarà la AI maggiore della AH; onde, tagliata dalla AI la porzione AK eguale alla AH, e tirata per lo punto K la retta MN parallela alla FG, le due DE, MN come egualmente diſtanti dal centro ſaranno eguali. Ma congiunte, così le due AF, AG, come le due AM, AN, per farſi l' angolo MAN maggiore dell' angolo

FAG, dee eſſere la baſe del primo MN maggiore ancora della baſe dell'altro FG. Dunque la DE più vicina al centro ſarà eziandio maggiore della più lontana FG.

§. XXIII.

Delle proprietà del cerchio relative agl' angoli, che in eſſo s'incontrano.

330. PEr venire ora alle proprietà del cerchio, che riguardano gl' angoli, che in eſſo s' incontrano, ſi vuol prima notare, che ſiccome chiamaſi angolo al centro quello, che ha il centro ſteſſo per ſuo vertice; così appellaſi angolo alla circonferenza quello, che ha per vertice un punto della ſteſſa circonferenza. Or appoggiandoſi queſti due angoli ſopra un medeſimo arco, ſarà l' angolo al centro doppio dell' angolo alla circonferenza. Sia perciò il cerchio BCDE, che abbia per centro il punto A, e ſul medeſimo arco BD appoggiſi, così l' angolo al centro BAD, come l' angolo alla circonferenza BED. Io dico, che il primo BAD ſia doppio del ſecondo BED.

Fig. 79.

331. Per dimoſtrarlo, congiungaſi la EA, che diſtendaſi verſo C. Eſſendo adunque eguali le due AE, AB, ſa-

ſaranno eguali ancora li due angoli ABE, AEB (104); e pertanto l'angolo eſteriore BAC, come eguale ai due interiori, ed oppoſti ABE, AEB (98), ſarà doppio del ſolo AEB. Ma per la ſteſſa ragione ancora l'angolo DAC dee eſſere doppio dell'angolo AED. Dunque, congiungendo inſieme, così li due angoli BAC, DAC, come gl'altri due AEB, AED, ſarà l'intero angolo al centro BAD ſimilmente doppio dell'intero angolo alla circonferenza BED.

332. Egli è vero, che li due angoli poſſono eſſere ſituati in modo, che la EA prolungata cada fuori di eſſi; ma in queſto caſo, con prendere non già le ſomme, ma le differenze dei riferiti angoli, pure avrà luogo la ſteſſa dimoſtrazione. Più toſto dee avvertirſi, che ſe mai l'angolo BED ſia di ampiezza tale, che le due AB, AD, o ſiano a dirittura, o pure s'inclinino verſo il vertice E di quell'angolo; in tal caſo dovranno farſi al centro due angoli, come BAC, DAC, e congiungerſi la EC; poichè, facendoſi il primo BAC doppio dell'angolo BEC, ed il ſecondo DAC doppio dell'altro angolo DEC, ſarà la loro ſomma doppia dell'angolo BED. *Fig.* 80. *Fig.* 81.

333. Da ciò intanto, che l'angolo

al centro ſia doppio dell' angolo alla circonferenza, quantevolte ſi appoggiano ambidue ſopra un medeſimo arco, poſſono dedurſi tre conſeguenze. La prima ſi è, che gl' angoli ſituati in una ſteſſa porzione di cerchio ſiano tutti eguali tra di loro. La ſeconda ſi è, che ciaſcuno di eſſi abbia per miſura la metà dell' arco, su di cui ſi appoggia. E la terza ſi è, che l' angolo ſituato in una porzione di cerchio inſieme coll' altro ſituato nella rimanente porzione debba darci la ſomma di due retti.

334. Ma comunque nel cerchio ritroviſi ſituato un' angolo, ſempre potrà egli miſurarſi con archi dello ſteſſo cerchio. In fatti, ſe dentro del cerchio BCDE ſia ſituato l' angolo BAC in modo, che il ſuo vertice ſia diverſo dal centro, e diſtendanſi li ſuoi lati verſo il vertice per ſino a che s'incontrino di nuovo colla circonferenza del cerchio nei punti D, ed E; ſi avrà la ſua miſura colla ſomma dimezzata dei due archi BC, DE; e ciò per la ragione, che congiunta la CD, l' angolo BAC ſi fa eguale ai due BDC, DCE, di cui il primo miſuraſi colla metà dell' arco BC, ed il ſecondo colla metà dell' altro arco DE.

Fig. 82.

335. Se poi nel cerchio BCDE l'angolo

golo BAC ſia talmente ſituato, che il *Fig.*
ſuo vertice A cada fuori del cerchio; 83.
in tal caſo ſi avrà la ſua miſura, non
già colla ſomma, ma colla differenza
dimezzata dei due archi BC, DE,
che rimangono racchiuſi tra li ſuoi
lati. Congiungaſi perciò la BD, e
ſiccome l'angolo BDC ſi fa eguale al-
la ſomma dei due BAC, ABD, così
al contrario l'angolo BAC ſarà eguale
alla differenza dei due BDC, ABD.
Onde, miſurandoſi il primo di queſti
due angoli BDC colla metà dell'arco
BC, ed il ſecondo colla metà dell'ar-
co DE; chiaro ſi è, doverſi miſurare
l'angolo BAC colla differenza dimez-
zata dei due archi BC, DE.

336. Per quanto all'angolo ſituato
in una qualche porzione di cerchio,
può facilmente dimoſtrarſi, che egli ſia
retto, acuto, o ottuſo, ſecondochè la
porzione è eguale, maggiore, o mino-
re del mezzo cerchio. Sia perciò il cer- *Fig.*
chio BCDE, che abbia per centro il 84.
punto A, e per diametro la BD. Situiſi
primieramente nel mezzo cerchio BCD
l'angolo BCD. Io dico, che queſt'an-
golo ſia retto. In fatti, ſe congiungaſi
la AC, ſaranno eguali, così li due an-
goli ACB, ABC, come gl'altri due
ACD, ADC. Onde, facendoſi tutto
l'angolo BCD eguale ai due ABC,
ADC,

ADC, e dovendo eſſere tutti tre inſieme eguali a due retti; chiaro ſi è, che l'angolo BCD debba eſſere retto.

337. Situiſi di poi nella porzione CBD maggiore del mezzo cerchio l'angolo CED; ed io dico, che queſt' altro angolo ſia acuto. La ragione è chiara; poichè, eſſendoſi dimoſtrato retto l'angolo BCD, ſarà l'altro CBD acuto; e pertanto, eſſendo eguali li due angoli CBD, CED (333), ancora l'angolo CED dovrà eſſere acuto. Situiſi finalmente nella porzione CFD minore del mezzo cerchio l'angolo CFD; ed io dico, che queſto terzo angolo ſia ottuſo. La ragione ſimilmente è chiara; poichè l'angolo CFD inſieme coll'altro CED ſituato nella rimanente porzione del cerchio, dee darci la ſomma di due retti (333); onde eſſendo acuto l'angolo CED, l'altro CFD dovrà eſſere ottuſo.

338. Eſſendo così può dimoſtrarſi finalmente, che ſe una retta ſia tangente di un cerchio, e dal punto del contatto tiriſi un'altra retta, che ſeghi il cerchio in due porzioni; gl'angoli fatti dalla tangente, e dalla ſecante ſiano eguali a quelli, che ſono ſituati nelle contrarie porzioni del cerchio.

Fig. 85. Sia perciò il cerchio ABCD, di cui tangente ne ſia la retta FG, e dal punto

punto del contatto A tirisi l' altra retta A C, che seghi il cerchio nelle due porzioni A B C, A D C. Io dico, che dei due angoli CAF, CAG fatti dalla tangente, e dalla secante il primo CAF sia eguale all' angolo situato nella porzione A E C, ed il secondo eguale all' angolo situato nella porzione ABC.

339. Per dimostrarlo, siano AEC, A B C gl' angoli situati in queste due porzioni, ed alzata sulla tangente F G la perpendicolare A D, congiungasi la CD. Essendo dunque la AD diametro del cerchio (311), ella lo dividerà in due parti eguali; e pertanto l' angolo ACD, come situato nel mezzo cerchio, sarà retto. Quindi, dovendo gl' altri due angoli C A D, C D A formare insieme un' altro retto, ed essendo retto l' angolo DAF; sarà quest'angolo DAF eguale ai due C A D, C D A; ed in conseguenza, toltone il comune CAD, sarà l' angolo C A F eguale all' angolo C D A, ovvero al suo eguale A E C.

340. Essendo poi eguali a due retti, tanto li due angoli C A F, C A G, quanto li due A E C, A B C; saranno li primi due C A F, C A G eguali a quest' altri due A E C, A B C; onde, essendosi dimostrato l' angolo C A F eguale all' angolo A E C, con toglierne questi due, rimanerà l'altro angolo CAG

simil-

ſimilmente eguale all'altro angolo ABC; e pertanto dovrà conchiuderſi, che gl' angoli fatti dalla tangente, e dalla ſecante ſiano eguali a quelli, che ſono ſituati nelle contrarie porzioni del cerchio.

341. Per mezzo di queſto teorema poſſono ora riſolverſi due problemi. Il primo ſi è, di adattare in un dato cerchio talmente una retta, che tagli dallo ſteſſo cerchio una porzione capace di un' angolo eguale ad un' angolo dato. Sia perciò A B D il dato cerchio, nella di cui circonferenza prendaſi ad arbitrio il punto A; indi tirata a queſto punto la tangente A F, facciaſi su di eſſa l'angolo FAC eguale all'angolo dato; ed io dico, che la A C ſia la retta ricercata. In fatti, ſiccome ella taglia dal cerchio la porzione A E C; così l' angolo A E C ſituato in queſta porzione, come eguale all'angolo FAC (338), ſarà eguale altresì all' angolo dato.

Fig. 85.

342. L' altro problema ſi è, di deſcrivere ſopra una data retta una porzione di cerchio, che ſia capace di un' angolo eguale ad un' angolo dato. Sia perciò A B la retta data, la quale dividaſi per metà nel punto C, e facciaſi su di eſſa l' angolo B A D eguale all' angolo dato. Si alzino di poi ſulle due

Fig. 86.

due AB, AD le perpendicolari CE, AE, che s' incontrino insieme nel punto E, e congiungasi la BE. Facendosi adunque eguali le due AE, BE, il cerchio descritto col punto E come centro, e coll' intervallo della EA dovrà passare per lo punto B. Descrivasi adunque questo cerchio; ed io dico, che la porzione di esso AFB, che rimane sulla retta data AB, sia quella, che si dimanda.

343. Per dimostrarlo, situisi in questa porzione l' angolo AFB. E poichè la EA è raggio del cerchio, su di cui per costruzione è perpendicolare l' altra AD; sarà quest' altra AD tangente dello stesso cerchio (309); ed in conseguenza l' angolo BAD sarà eguale all' angolo AFB (338). Ma l' angolo BAD si è fatto eguale all'angolo dato. Dunque allo stesso angolo dato sarà eguale ancora l' angolo AFB; e pertanto sulla retta data AB si è descritta la porzione di cerchio AFB capace di un'angolo eguale all' angolo dato.

§. XXIV.

Della proprietà più rilevante del cerchio.

344. RImane a dimoſtrarſi la proprietà la più rilevante del cerchio, la quale ſe bene nella ſua origine ſia ſempliciſſima, nientedimeno per gli varj cambiamenti, che poſſono farſi nelle rette, colle quali ſi eſprime, riceve eſtenſione non picciola, per cui prende ancora forme diverſe. Ed in vero nella forma ſua più ſemplice, la proprietà ſi è, che il quadrato della perpendicolare, abbaſſata ſul diametro di un cerchio da un punto, preſo nella ſua circonferenza, ſia eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni del diametro. Potrebbe ciò dedurſi dall' eſſer retto l' angolo ſituato nel mezzo cerchio, e da quel tanto è ſtato dimoſtrato (205) intorno al triangolo rettangolo; ma giova dimoſtrarlo nel ſeguente modo.

Fig. 27. 345. Sia il cerchio BCD, che abbia per ſuo centro il punto A, e la B D per ſuo diametro. Prendaſi nella ſua circonferenza il punto C ad arbitrio, da cui ſi abbaſſi ſul diametro BD la perpendicolare CE, e congiungaſi la AC.

AC. Siccome adunque, per lo triangolo CEA rettangolo in E, il quadrato della AC, ovvero AB è eguale ai quadrati delle due CE, AE (201); così, per eſſere la BD diviſa in parti eguali nel punto A, ed in parti diſuguali nel punto E, ſarà il rettangolo delle due BE, DE inſieme col quadrato della AE eguale al quadrato della AB (187). Onde, dovendo eſſere li quadrati delle due CE, AE eguali a queſto rettangolo, ed a queſto quadrato, ſe tolgaſi da eſſi il comune quadrato della AE, ſarà il quadrato della perpendicolare CE eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni del diametro BE, DE.

346. Or ſe prolunghiſi la CE per ſino a che s' incontri di nuovo colla circonferenza del cerchio nel punto F, conforme la tutta CF rimane diviſa per metà nel punto E, così il rettangolo delle due ſue porzioni CE, EF non ſarà diverſo dal quadrato della CE. Onde la ſteſſa proprietà potrà eſprimerſi ancora in queſt' altro modo, cioè, che ſe una retta tirata dentro del cerchio ſia diviſa perpendicolarmente dal diametro, il rettangolo fatto dalle due porzioni della retta ſarà eguale all' altro fatto dalle due porzioni del diametro. Ma una tal uguaglianza dee aver luo-

luogo, ancorchè la retta CF tirata dentro del cerchio ſia diviſa dal diametro BD obbliquamente nel punto E.

Fig. 88.

347. Per dimoſtrarlo, ſi abbaſſi dal centro A ſulla CF la perpendicolare AG, coſicchè ſia ella diviſa per metà nel punto G. E ſiccome il rettangolo delle due CE, EF inſieme col quadrato della GE ſi fa eguale al quadrato della CG; così coll' aggiunta dell' altro quadrato della AG, ſarà lo ſteſſo rettangolo inſieme col quadrato della AE eguale al quadrato della AC, ovvero AB. Ma a queſto medeſimo quadrato della AB è eguale ancora il rettangolo delle due BE, DE inſieme col quadrato della ſteſſa AE. Dunque, togliendone il comune quadrato della AE, ſarà il rettangolo delle due porzioni della retta CE, EF eguale al rettangolo delle due porzioni del diametro BE, DE.

Fig. 89.

348. Ma io dico di più, che la medeſima uguaglianza debba aver luogo, ancorchè la BD, da cui è diviſa la retta CF, non ſia diametro del cerchio. Congiungaſi perciò la AE, la quale diſtendaſi per ſino a che s'incontri colla circonferenza del cerchio ne' punti G, ed H. Eſſendo adunque la GH diametro del cerchio, dovrà eſſere il rettangolo delle due CE, EF eguale

le al rettangolo delle due porzioni GE, HE di queſto diametro. Ma per la ſteſſa ragione ancora il rettangolo delle due BE, DE dee eſſere eguale al rettangolo delle ſteſſe due porzioni del diametro GE, HE. Dunque li due rettangoli, uno fatto dalle due porzioni della CF, e l'altro fatto dalle due porzioni della BD, ſaranno eguali tra di loro.

349. Eſſendo così, la proprietà di cui ſi tratta, dovrà eſprimerſi generalmente nel ſeguente modo, cioè, che ſe due qualſiſiano rette ſi ſeghino ſcambievolmente dentro del cerchio, il rettangolo fatto dalle porzioni di una di eſſe ſia eguale al rettangolo fatto dalle porzioni dell'altra. Ma eſprimendoſi la proprietà in queſto modo, ella dovrà aver luogo, ancorchè le due rette ſi ſeghino ſcambievolmente fuori del cerchio. Perciò le due rette CF, BD tirinſi nel cerchio in modo, che prolungate vadanſi ad incontrare fuori del cerchio nel punto E. Io dico, che il rettangolo delle due CE, FE ſia tuttavia eguale al rettangolo dell'altre due BE, DE. *Fig.* 90.

350. Per dimoſtrarlo, pongaſi primieramente, che una delle due rette, come la BD, ſia diametro del cerchio, e paſſi in conſeguenza per lo centro A.

Si

Si abbaſſi da queſto centro ſull' altra CF la perpendicolare AG, e congiungaſi la AF. Rimanendo adunque diviſa la CF per metà nel punto G, e ritrovandoſi aggiunta ad eſſa l' altra FE, ſarà il rettangolo delle due CE, FE inſieme col quadrato della FG eguale al quadrato della EG (191); e pertanto coll'aggiunta dell'altro quadrato della AG, ſarà lo ſteſſo rettangolo delle due CE, FE inſieme col quadrato dalla AF, ovvero AD, eguale al quadrato della AE. Ma, per eſſere la BD diviſa per metà nel punto A, e per ritrovarſi ad eſſa aggiunta l' altra DF, ancora il rettangolo delle due BE, DE inſieme col quadrato della ſteſſa AD dee eſſere eguale al quadrato della AE. Dunque, togliendone il comune quadrato della AD, ſarà il rettangolo delle due BE, DE eguale al rettangolo dell' altre due CE, FE.

Fig. 91. 351. Che ſe poi neſſuna delle due rette CF, BD ſia diametro del cerchio, ſi dimoſtreranno eguali gli ſteſſi due rettangoli, con tirare dal centro A al punto E la retta AE, che s' incontri colla circonferenza del cerchio ne' punti G, ed H. Imperocchè, eſſendo la GH diametro del cerchio, dovrà eſſere il rettangolo delle due CE, FE eguale al rettangolo dell' altre due GE, HE.

HE. Ma per la ſteſſa ragione a queſto ſecondo rettangolo dee eſſere eguale ancora il rettangolo delle due BE, DE. Dunque li due rettangoli, uno fatto dalle due CE, FE, e l'altro fatto dall' altre due BE, DE, ſaranno eziandio eguali tra di loro.

352. Notiſi quì intanto, che affinchè la proprietà, di cui ſi tratta, poſſa eſtenderſi alle rette, che ſcambievolmente ſi ſegano fuori del cerchio, dee ella eſprimerſi in queſto modo, che ſe due rette adattate dentro del cerchio tra eſſo loro s' incontrino, li rettangoli fatti dalle parti di eſſe, preſe dai loro termini per ſino al punto dell'incontro, debbano eſſere eguali tra di loro. Ma qualora le due rette incontranſi fuori del cerchio, niente vieta, che una di eſſe facciaſi tangente del cerchio: il che avviene, quante volte li due termini della retta, avvicinandoſi ſempre più tra di loro, ſi riuniſcono in un ſol punto.

353. Quindi la proprietà, di cui ſi tratta, prendendo in queſto caſo nuova forma, dovrà eſprimerſi nel ſeguente modo, cioè, che ſe da un punto preſo fuori del cerchio tirinſi due rette, di cui una ſia tangente del cerchio, e l'altra ſecante, il quadrato della tangente ſia eguale al rettangolo fatto dall' intera

tera ſecante nella porzione di eſſa, che rimane fuori del cerchio. Sia perciò il cerchio BCD, che abbia per ſuo cen-
Fig. tro il punto A. Prendaſi fuori di eſſo
92. un punto E ad arbitrio, da cui tirinſi le due rette EB, EC in modo, che la prima EB ſeghi il cerchio ne' punti B, e D, e l' altra EC lo tocchi nel punto C. Io dico, che il quadrato di queſta EC ſia eguale al rettangolo delle due BE, DE.

354. Pongaſi primieramente, che la BD paſſi per lo centro A, e ſia in conſeguenza diametro. Eſſendo adunque la EC tangente, ſe congiungaſi la AE, ſarà retto l' angolo ACE (310); e per tanto il quadrato della AE ſarà eguale ai quadrati delle due EC, AC (201). Ma, per eſſere la BD diviſa per metà nel punto A, e per ritrovarſi ad eſſa aggiunta l' altra DE, il quadrato della ſteſſa AE è eguale ancora al rettangolo delle due BE, DE inſieme col quadrato della AD (191). Dunque li quadrati delle due EC, AC ſaranno eguali al rettangolo delle dne BE, DE, ed al quadrato della AD; ed in conſeguenza, ſe tolganſi da eſſi li due quadrati eguali della AC, e della AD, ſarà il quadrato della EC eguale al rettangolo delle due BE, DE.

355. Non eſſendo poi la BD diametro

metro del cerchio, congiungaſi la AE, che s' incontri colla circonferenza del cerchio ne' punti G, ed H. Eſſendo adunque la GH diametro del cerchio, ſarà il quadrato della EC eguale al rettangolo delle due GE, HE. Ma a queſto rettangolo è eguale ancora l' altro delle due BE, DE, per la ragione, che le due rette BD, GH, tirate dentro del cerchio, incontranſi prolungate nel punto E fuori dello ſteſſo cerchio. Dunque il quadrato della tangente EC ſarà eguale al rettangolo fatto dall' intera ſecante BE nella porzione DE, che rimane fuori del cerchio. *Fig.* 93.

356. Il converſo intanto di ciò, dee ſimilmente aver luogo, cioè, che eſſendo il quadrato della EC eguale al rettangolo delle due BE, DE, la EC debba eſſere tangente del cerchio. Tiriſi dal punto E la tangente al cerchio, che ſia la EF (314), e congiunganſi le due AC, AF. Eſſendo adunque la EF tangente del cerchio, ſarà il ſuo quadrato eguale al rettangolo delle due BE, DE; e pertanto, volendoſi che a queſto rettangolo ſia eguale il quadrato della EC, ſaranno eguali tra di loro li quadrati delle due EC, EF. Quindi, facendoſi la EC eguale alla EF, li due triangoli ACE, AFE ſaranno perfettamente eguali (126); ed in con- *Fig.* 92.

seguenza l'angolo ACE, come eguale all'altro AFE, dovendo essere retto, farà, che la EC sia tangente del cerchio (309).

Fig. 92. 357. Del rimanente dall'essersi dimostrato, che le due EC, EF siano eguali, possiamo dedurne, che le due tangenti, che possono tirarsi al cerchio da un medesimo punto, debbano essere eguali tra di loro: il che ricavasi ancora da ciò, che essendo le due EC, EF tangenti del cerchio, dee essere retto, così l'angolo ACE, come l'angolo AFE. Onde, facendosi il quadrato della AE eguale, così ai quadrati delle due AC, CE, come ai quadrati dell'altre due AF, FE, conforme il quadrato della AC è eguale al quadrato della AF, così sarà il quadrato della EC eziandio eguale al quadrato della EF; e pertanto le stesse due EC, EF saranno tra di loro eguali.

§. XXV.

Delle figure regolari, considerate per rapporto al cerchio.

358. PEr rapporto al cerchio compete alle figure regolari un' altra proprietà, cioè, di poterſi iſcrivere, e circonſcrivere, così il cerchio in ciaſcuna di eſſe, come al contrario ognuna di loro nel cerchio. Ed in vero, qualunque ſia la figura rettilinea, ſe un cerchio ſia ſituato in modo, che paſſi per gli vertici di tutti gl' angoli, conforme il cerchio dicesi circonſcritto intorno alla figura, così al contrario la figura ſi dirà eſſere iſcritta dentro del cerchio; ma ſe la ſituazione del cerchio ſia tale, che tocchi tutti li lati, conforme il cerchio diceſi iſcritto dentro della figura, così al contrario la figura ſi dirà eſſere circonſcritta intorno al cerchio.

359. Trattandoſi del triangolo, li quattro problemi, che diſtinguonſi su di queſto aſſunto, poſſono ſempre riſolverſi, qualunque ſia la ſua forma. Per dimoſtrarlo, debbaſi in primo luogo intorno al dato triangolo A B C circonſcrivere il cerchio. Dividanſi li due lati AB, BC per metà ne' punti D, ed E, *Fig.* 94.

dai quali alzinſi ſugli ſteſſi lati le perpendicolari DF, EF, che s'incontrino nel punto F. Se adunque congiunganſi le rette AF, BF, CF, ſaranno perfettamente eguali, così li due triangoli ADF, BDF, come gl'altri due BEF, CEF (129). Onde, eſſendo eguali tra di loro quelle tre rette, il cerchio, che deſcriveſi col centro F, e col raggio FA, paſſerà per gl'altri due punti B, e C; ed in conſeguenza ſarà circonſcritto intorno al dato triangolo.

Fig. 95. 360. Debbaſi in ſecondo luogo dentro del dato triangolo ABC iſcrivere il cerchio. Dividaſi per metà, così l'angolo ABC per la retta BD, come l'angolo BCA per la retta CD; e dal punto D, in cui incontranſi le due rette BD, CD, ſi abbaſſino ſulli lati del triangolo AB, BC, CA le perpendicolari DE, DF, DG. Eſſendo adunque perfettamente eguali, non meno li due triangoli BDE, BDF, che gl'altri due CDF, CDG, ſaranno quelle tre perpendicolari eguali tra di loro. Onde, ſiccome il cerchio, che deſcriveſi col centro D, e col raggio DE, dee paſſare per gl'altri due punti F, e G; così, facendoſi ſue tangenti tutti tre li lati AB, BC, CA, ſarà egli iſcritto dentro del dato triangolo.

361. Debbaſi in terzo luogo dentro del

del dato cerchio ABC iſcrivere un triangolo, che ſia equiangolo col triangolo dato DEF. Prendaſi nella circonferenza del cerchio un punto A ad arbitrio, a cui tiriſi la tangente GH. Indi ſulla ſteſſa tangente, e propriamente al punto del contatto A facciaſi, così l'angolo GAB eguale all'angolo DFE, come l'angolo HAC eguale all'angolo DEF, e congiungaſi la BC. Poichè dunque per la tangente GH li due angoli GAB, HAC debbono eſſere eguali ai due ACB, ABC (138), ſaranno queſti due eziandio eguali agl'altri due DFE, DEF; e pertanto il triangolo ABC, iſcritto dentro del dato cerchio, ſarà equiangolo col dato triangolo DEF. *Fig.* 96.

362. Debbaſi finalmente intorno al dato cerchio ABC circonſcrivere un triangolo, che ſia equiangolo col triangolo dato DEF. Diſtendaſi primieramente uno de' lati del triangolo, come EF, verſo G, ed H; indi al centro I del cerchio facciaſi, così l'angolo AIB eguale all'angolo DEG, come l'angolo AIC eguale all'angolo DFH; tirinſi finalmente ai punti A, B, C le tangenti KL, LM, MK, ed il triangolo MKL, che formaſi con queſte tangenti, ſiccome è circonſcritto intorno al cerchio ABC, così ſarà equiangolo ancora col triangolo dato DEF. *Fig.* 97.

363. In fatti, per le tangenti KL, LM, li due angoli IAL, IBL del quadrilatero AIBL ſono retti. Dunque gl' altri due AIB, ALB uniti inſieme debbono eſſere eguali a due retti (142). Ma ancora li due DEG, DEF ſono eguali a due retti uniti inſieme (60). Dunque, ſe tolganſi da eſſi gl' angoli AIB, DEG, che per conſtruzione ſono eguali, li rimanenti due ALB, DEF ſaranno parimente eguali. Onde, dovendo eſſere per la ſteſſa ragione eguali ancora li due angoli AKC, DFE; chiaro ſi è, che il triangolo MKL, circonſcritto intorno al cerchio ABC, ſia equiangolo col triangolo dato DEF.

364. Or non eſſendo regolari l' altre figure rettilinee ſuperiori al triangolo, non ſempre per rapporto ad eſſe potranno riſolverſi gli ſteſſi quattro problemi. In fatti, ſe intorno al quadrilatero ABCD debbaſi circonſcrivere il cerchio, chiaro ſi è, che coll' incontro delle perpendicolari alzate ſulli lati AB, BC dai punti, che li dividono per metà, rimane determinato il cerchio, che paſſa per gli tre punti A, B, C. Onde lo ſteſſo cerchio non potrà paſſare per lo rimanente punto D, ſe non ſi apponga al quadrilatero qualche condizione, la quale ſi è, che le ſomme degl' angoli oppoſti ſiano eguali.

Fig. 98.

365.

365. E così ancora, se dentro del quadrilatero ABCD debbasi iscrivere il cerchio, chiara cosa si è, che coll' incontro delle rette, che dividono per metà li due angoli ABC, BCD, rimane determinato il cerchio, che tocca li tre lati AB, BC, CD. Onde lo stesso cerchio non potrà toccare il lato rimanente DA, se il quadrilatero non abbia qualche condizione, la quale si è, che le somme de' lati opposti siano eguali. *Fig.* 99.

366. Ed in vero, che nel quadrilatero iscritto dentro del cerchio siano eguali le somme degl' angoli opposti, ricavasi da ciò, che gl' angoli opposti, come situati in due porzioni, che formano il cerchio intero, debbano darci insieme la somma di due retti (333). Se poi si rifletta al teorema di sopra dimostrato (357), che le due tangenti tirate al cerchio da un' istesso punto debbano essere eguali tra di loro; egli è facile ancora ad intendersi, che nel quadrilatero circonscritto intorno al cerchio siano eguali le somme de' lati opposti.

367. Or nelle figure regolari li due primi problemi non per altra ragione possono sempre risolversi, se non perchè in ciascuna di esse ritrovasi il centro, che rende eguali, così le rette da

eſſo tirate agl' angoli della figura, come le perpendicolari abbaſſate ſulli ſuoi lati da quel centro. Se adunque intorno ad una figura regolare debbaſi circonſcrivere il cerchio, baſterà deſcriverlo collo ſteſſo centro della figura, e che abbia per raggio una delle rette tirate agl' angoli; ma ſe debbaſi iſcrivere il cerchio dentro della figura, pure dovrà egli deſcriverſi collo ſteſſo centro della figura, ma per raggio dovrà avere una delle perpendicolari abbaſſate ſulli lati.

368. Per quanto poi al problema d' iſcrivere dentro di un dato cerchio una figura regolare, di cui ſia dato il numero de' lati; chiaro ſi è, che ella ſi avrà, con dividere la circonferenza del cerchio in tante parti eguali, quanti ſono li lati, e con unire li punti della diviſione gradatamente per rette; poichè, ſiccome queſte rette, come corde di archi eguali, ſono eziandio eguali tra di loro; così gl' angoli contenuti dalle ſteſſe rette, ritrovandoſi appoggiati ſopra archi eguali, avranno la ſteſſa miſura (333), ed in conſeguenza ſaranno parimente eguali.

369. Finalmente per quanto al problema di circonſcrivere intorno ad un dato cerchio una figura regolare, di cui ſia dato il numero de' lati; queſta an-

ancora ſi avrà, con dividere la circonferenza del cerchio in tante parti eguali, quanti ſono li lati, e con tirare tangenti ai punti della diviſione. Ma, potendoſi porre in dubbio, che la figura racchiuſa da queſte tangenti, e circonſcritta intorno al cerchio, ſia regolare; perciò per dimoſtrarlo, dividaſi la circonferenza del cerchio B C D E, che ha per centro il punto A, nelle parti eguali BC, CD, DE, EB, ed ai punti B, C, D, E tirinſi le tangenti FG, GH, HI, IF, che s'incontrino inſieme ne' punti G, H, I, F. *Fig.* 100.

370. Se adunque congiungaſi la AF, ſarà queſta ipotenuſa comune dei due triangoli rettangoli ABF, AEF; e per tanto, facendoſi eguali le due BF, EF, la ſteſſa AF dividerà per metà così l' angolo B A E, come l' angolo B F E. Per la ſteſſa ragione ancora la AG dividerà per metà non meno l' angolo BAC, che l'altro BGC. Onde, ſiccome per l' uguaglianza degl' archi BE, BC ſono eguali gl' angoli BAE, BAC, così ſaranno eguali ancora le loro metà B A F, B A G; ed in conſeguenza, per farſi li due triangoli ABF, ABG perfettamente eguali (134), ſaranno eguali parimente le due BF, BG.

371. Della ſteſſa maniera ſi dimoſtrerà, che ſiano eguali tanto le due

EF, EI, quanto le due CG, CH. Onde, essendo la BF eguale alla EF, e la BG eguale alla CG, sarà la FG eguale così alla FI, come alla GH. E poichè si è dimostrato, che le due rette AF, AG, dividono per metà li due angoli BFE, BGC, e le metà di essi AFB, AGB sono eguali tra di loro; saranno eguali parimente gl'angoli BFE, BGC contenuti dai tre lati della figura IF, FG, GH; e per tanto, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, non dovrà porsi in dubbio, che la figura FGHI, circonscritta intorno al cerchio, sia regolare.

372. Quantunque poi il problema, di dividere una data circonferenza di cerchio in un dato numero di parti eguali, non possa sempre risolversi per mezzo della linea retta, e della linea circolare, che sono le sole linee, di cui si avvale la Geometria elementare nella risoluzione de' suoi problemi; nientedimeno non dee egli riputarsi impossibile nei casi, ove non giungono le due riferite linee, per la ragione, che può aversi la sua risoluzione per mezzo di altre linee più composte, delle quali trattasi nella Geometria sublime. E quindi si è, che il terzo, e quarto problema sono solubili nella Geometria elementare a riguardo

di

di quelle ſole figure regolari, per cui la diviſione in parti eguali della circonferenza del dato cerchio può averſi colla linea retta, e colla linea circolare.

373. Ed in primo luogo, potendoſi dividere colle riferite linee la circonferenza del dato cerchio in ſei parti eguali, quindi ſi è, che potrà iſcriverſi, e circonſcriverſi nello ſteſſo cerchio l'eſagono regolare. In fatti la ſeſta parte della circonferenza dee eſſere di 60 gradi; onde ſe BCDE ſia il dato cerchio, *Fig.* e preſo nella ſua circonferenza il punto B ad arbitrio, deſcrivaſi con queſto punto, come centro, e coll' intervallo del raggio AB un' arco circolare, che ſeghi la ſteſſa circonferenza nel punto C, il triangolo ABC, che ſi ha colle tre rette AB, AC, BC, ſarà equilatero; e pertanto, attenta l' uguaglianza de' ſuoi angoli, ſarà l' arco BC di gradi 60. 101.

374. In ſecondo luogo colle ſteſſe linee può dividerſi la circonferenza del dato cerchio in tre parti eguali; e perciò potrà iſcriverſi, e circonſcriverſi nello ſteſſo cerchio il triangolo equilatero, che è il triangolo regolare. In fatti la terza parte della circonferenza dee eſſere di 120 gradi; onde ſe BCDE ſia *Fig.* il cerchio, ſiccome può prenderſi nella 101.

ſua circonferenza l' arco BC di gradi 60, così ſe dalla medeſima tagliſi in appreſſo l' altro arco CD eguale al primo BC, ſarà l' intero arco BCD di 120 gradi.

375. In terzo luogo con far uſo delle ſteſſe linee può dividerſi la circonferenza del dato cerchio in quattro parti eguali; onde ſi è, che potrà iſcriverſi, e circonſcriverſi nello ſteſſo cerchio il quadrato, che è il quadrilatero regolare. In fatti il quadrante, o ſia la quarta parte della circonferenza, che è la miſura dell' angolo retto, dee eſſere di 90 gradi. Onde, ſe per lo centro del cerchio dato tirinſi due diametri, di cui uno ſia perpendicolare ſull' altro, chiaro ſi è, che queſti diametri divideranno la circonferenza in quattro parti eguali, delle quali perciò ciaſcheduna ſarà di gradi 90.

376. In quarto luogo per mezzo delle ſteſſe linee può dividerſi la circonferenza del dato cerchio in dieci parti eguali, colla quale diviſione in conſeguenza potrà iſcriverſi, e circonſcriverſi nello ſteſſo cerchio il decagono regolare. Sia perciò BCDE il cerchio dato, che abbia per ſuo centro il punto A. Dividaſi il raggio di eſſo AB talmente nel punto F, che il rettangelo fatto dallo ſteſſo raggio nella porzione

Fig. 102.

zione BF ſia eguale al quadrato dell' altra porzione AF (227). Deſcrivaſi di poi col punto B come centro, e coll'intervallo della AF un' arco circolare, che ſeghi la circonferenza del cerchio nel punto C; ed io dico, che l' arco BC ſia la decima parte della ſteſſa circonferenza, ed in conſeguenza di 36 gradi.

277. Per dimoſtrarlo, congiunganſi le rette AC, BC, CF, ed intorno al triangolo ACF circonſcrivaſi il cerchio AFG (359). Eſſendo adunque il rettangolo delle due AB, BF eguale al quadrato della AF, ovvero BC, ſarà queſta BC tangente del cerchio AFG (356). Onde, dovendo eſſere l' angolo BCF eguale all' angolo CAF (338), coll' aggiunta del comune ACF, ſarà tutto l' angolo ACB, o ſia ABC eguale ai due angoli inſieme CAF, ACF, ed in conſeguenza al ſolo BFC. Quindi, facendoſi eguali le due BC, CF, ſaranno eguali parimente così le due CF, AF, come gl' angoli ad eſſe oppoſti CAF, ACF; e pertanto l' angolo ACB, o ſia ABC, che ſi è dimoſtrato eguale a queſti due uniti inſieme, ſarà doppio del ſolo angolo CAF.

378. Or da ciò, che nel triangolo iſoſcele ABC ciaſcuno degl' angoli eſiſtenti ſopra la ſua baſe BC ſia doppio,

dell

dell' angolo verticale BAC, egli è facile ad intenderſi, che l' arco BC, per mezzo di cui ſi miſura queſt' angolo verticale, ſia di 36 gradi, ed in conſeguenza la decima parte dell' intera circonferenza. Imperocchè, dovendo eſſere l' angolo verticale BAC la quinta parte di tutti tre gl' angoli del triangolo iſoſcele uniti inſieme, ſarà egli di tanti gradi, quanti ne contiene la quinta parte di 180. Onde, ſecondo queſto computo, tanto l' angolo verticale BAC, quanto l' arco BC, che lo miſura, dovrà eſſere di gradi 36.

379. In quinto luogo, con far uſo delle medeſime linee, può dividerſi la circonferenza del dato cerchio in cinque parti eguali, colla quale diviſione potrà iſcriverſi, e circonſcriverſi nello ſteſſo cerchio il pentagono regolare. In fatti la quinta parte della circonferenza intera dee eſſere di 72 gradi; onde, ſe BCDE ſia il cerchio dato, ſiccome può prenderſi nella ſua circonferenza l' arco BC di gradi 36, così ſe in appreſſo tagliſi dalla medeſima l' altro arco CD eguale al primo BC, ſarà l' intero arco BCD di 72 gradi.

Fig. 102.

380. Finalmente, eſſendoſi dimoſtrato, che poſſa dividerſi la circonferenza del dato cerchio, così in tre, come in cinque parti eguali, potrà ella dividerſi an-

ancora in quindici, ed in conſeguenza iſcriverſi, e circonſcriverſi nello ſteſſo cerchio il quindecagono regolare. Sia perciò BCDE il dato cerchio, nella di cui circonferenza prendaſi, così l' arco BC, che ſia la ſua quinta parte (379), come l' arco BE, che ſia la ſua terza parte (374). Eſſendo adunque il primo BC di 72 gradi, e l' altro BE di 120; ſarà l' arco CE, che è la loro differenza, di gradi 48. Onde, ſe queſt' arco CE dividaſi per metà nel punto D, ciaſcheduno dei due CD, DE ſarà di 24 gradi, quanti appunto ne contiene la quindiceſima parte dell' intera circonferenza. *Fig.* 103.

§. XXVI.

Continuazione dello ſteſſo argomento.

381. IL numero delle figure regolari, che poſſono iſcriverſi, e circonſcriverſi in un dato cerchio per mezzo delle linee, di cui fa uſo la Geometria elementare, può ricevere maggior aumento, ed ecco come. Di già ſi è veduto di ſopra (50), poterſi dividere per metà qualſiſia dato arco circolare. Onde, ſe faccianſi le riferite diviſioni della circonferenza in parti eguali, ed indi ſuddividaſi ciaſcuna di que-

queſte parti in altre due, chiaro ſi è, che ſi raddoppierà il numero di eſſe. E poichè lo ſteſſo può praticarſi, così in queſt' altre parti, come nell' altre, che ſeguono; chiaro ancora ſi è, che ſi anderà gradatamente ſempre più aumentando il loro numero.

382. Colla diviſione adunque della circonferenza in quattro parti eguali, di cui ſi ha biſogno per l' iſcrizione, e circonſcrizione del quadrato, poſſono averſi gradatamente l' altre di 8, di 16, di 32, &c. Similmente colla diviſione della ſteſſa circonferenza in ſei parti eguali, che ſi richiede per l' iſcrizione, e circonſcrizione dell' eſagono regolare, ſi avranno ſucceſſivamente l' altre di 12, di 24, di 48, &c. E così finalmente ſi avranno nuove diviſioni, così con quella, che dee farſi per lo decagono, come coll' altra, che biſogna per lo quindecagono regolare.

383. Delle diviſioni intanto, che richiedono il triangolo equilatero, ed il pentagono regolare, non occorre tenerne conto, per la ragione, che le prime, che da eſſe ricavanſi, ſono le due, di cui ſi ha biſogno per l' eſagono, ed il decagono regolare, quandochè da queſte due ſi ſono ricavate quell' altre. Ma, ſe bene col diviſato artificio aumentiſi diſmiſuratamente il numero

mero delle figure regolari, che poſſono iſcriverſi, e circonſcriverſi in un dato cerchio; niente di meno pure ne reſtano altre moltiſſime, di cui nella Geometria elementare non può averſene l' iſcrizione, e circonſcrizione.

384. Si aumentarebbe tutta volta maggiormente il loro numero, ſe conforme qualſiſia dato arco circolare può dividerſi per metà, così poteſſe egli dividerſi altresì in tre parti eguali. Ma una tal diviſione oltrepaſſa li limiti della Geometria elementare, la quale, ſecondo è ſtato avvertito, nella riſoluzione de' ſuoi problemi fa uſo ſoltanto della linea retta, e della linea circolare. Intanto con conſtruzione meccanica, che facilmente può porſi in pratica, qualſia dato arco circolare può dividerſi ancora in tre parti eguali, ed ecco come.

385. Sia BC l'arco circolare, che dee dividerſi in tre parti eguali, e ſia A il centro del cerchio, a cui appartiene lo ſteſſo arco. Aggiriſi intorno al punto C la riga CE, e ritroviſi per eſſa poſizione tale, che incontrandoſi la medeſima col diametro BD prolungato nel punto E, ſia la porzione EF, compreſa tra queſto diametro, e la circonferenza del cerchio, eguale al raggio AF. Arreſtiſi la riga in queſta poſizione, e ſe per lo centro A tiriſi la AG pa- *Fig.* 104.

parallela alla ſteſſa riga, che s' incontri coll' arco BC nel punto G, ſarà l'arco BG la terza parte dell' arco propoſto BC.

386. La ragione è chiara. Imperocchè, eſſendo eguali le tre EF, AF, AC, ſaranno eguali ancora tra di loro, così li due angoli EAF, AEF, come gl' altri due ACF, AFC (104). Quindi l' angolo AFC, o pure il ſuo eguale ACF, per eſſere eguale ai due inſieme EAF, AEF (98), ſarà doppio del ſolo angolo AEF; e l' angolo BAC, come eguale ai due inſieme ACF, AEF, ſarà triplo del medeſimo angolo AEF. Ma, per le parallele EC, AG, l' angolo AEF è eguale all' angolo BAG (87). Dunque lo ſteſſo angolo BAC ſarà triplo ancora dell' angolo BAG; e pertanto, eſſendo gli archi BC, BG le miſure di queſti due angoli, ſarà il primo di eſſi BC ſimilmente triplo dell' altro BG.

Fig. 105. 387. In un' altro modo ancora, non molto diverſo dal precedente, può dividerſi l' arco BC in tre parti eguali, ed ecco come. Alziſi ſul raggio AB la perpendicolare AG, ed intorno al punto C aggiriſi la riga CF per fino a che abbia poſizione tale, che la porzione di eſſa HF, compreſa tra la circonferenza del cerchio, e la perpendi-

co-

colare alzata, facciaſi eguale allo ſteſſo raggio. Arreſtiſi la riga in queſta poſizione; e ſe alla medeſima per lo centro A tiriſi la parallela AG, che s'incontri coll' arco BC nel punto G, ſarà di nuovo l' arco BG la terza parte dell' arco dato BC.

388. Per dimoſtrarlo, prolunghiſi la riga CF verſo F per ſino a che s' incontri col diametro BD nel punto E. Eſſendo adunque retto l' angolo DAG, ed eſſendo tutti tre gl' angoli di ogni triangolo uniti inſieme eguali a due retti (102); ſaranno gl'altri due angoli AHE, AEH inſieme eguali all' angolo DAG. Ma, per l' uguaglianza delle due AF, HF, l' angolo AHE è eguale all' angolo HAF (104). Dunque, togliendone queſti due, ſaranno eguali ancora li rimanenti due angoli AEH, FAE; e per tanto, facendoſi ancora la EF eguale al raggio AF, queſta nuova conſtruzione meccanica ricaderà nell'altra precedente.

389. Del rimanente intorno ai lati delle principali figure regolari, che poſſono iſcriverſi dentro del cerchio, ſono d' avvertirſi più coſe. La prima ſi è, che ſiccome vedeſi chiaramente, che il lato dell' eſagono regolare ſia eguale al raggio ſteſſo del cerchio; così il lato del triangolo equilatero, o ſia regolare

ſarà di lunghezza tale, che il ſuo quadrato ſarà triplo del quadrato del raggio. In fatti, ſe BCD ſia un mezzo cerchio, in cui l' arco BC ſia di 60 gradi, ſarà il rimanente arco CD di gradi 120; e pertanto delle loro corde la prima BC ſarà il lato dell' eſagono regolare, e la ſeconda CD il lato del triangolo equilatero.

Fig. 106.

390. Or, eſſendo retto l' angolo ſituato nel mezzo cerchio (336), ſarà il triangolo BCD rettangolo in C; ed in conſeguenza il quadrato della ſua ipotenuſa BD ſarà eguale ai quadrati delli due lati BC, CD. Ma, per eſſere la BD diviſa per metà nel punto A, centro del mezzo cerchio, il ſuo quadrato è quadruplo del quadrato della AB (157); e per eſſere BC il lato dell' eſagono regolare, il ſuo quadrato è eguale al ſemplice quadrato della ſteſſa AB. Dunque, dovendo eſſere li quadrati delle due BC, CD eguali al quadruplo del quadrato della AB, ſarà il ſolo quadrato della CD eguale al triplo del quadrato della AB.

391. La ſeconda coſa ſi è, che del quadrato iſcritto dentro del cerchio ſia tale la lunghezza del lato, che il quadrato iſteſſo ſarà eguale al duplo del quadrato del raggio. In fatti, ſe l'arco BCD ſia di 90 gradi, ſarà la corda

Fig. 107.

ſua

ſua BD il lato del quadrato iſcritto dentro del cerchio. Ma, ſe A ſia il centro dell'arco BCD, e congiunganſi li due raggi AB, AD, dee eſſere retto l'angolo BAD contenuto da queſti raggi, per eſſere miſurato dallo ſteſſo arco BCD. Dunque, eſſendo il triangolo BAD rettangolo in A, ſarà il quadrato della ſua ipotenuſa BD eguale ai quadrati delli due raggi AB, AD, ed in conſeguenza eguale al doppio del quadrato d'uno di eſſi.

392. La terza, ed ultima coſa d'avvertirſi ſi è, che ſiccome dividendoſi il raggio del cerchio talmente, che il rettangolo fatto dal raggio in una delle ſue porzioni ſia eguale al quadrato dell'altra porzione, ſi ha con queſt'altra porzione il lato del decagono regolare iſcritto dentro del cerchio (376); così il lato del pentagono regolare ſia di lunghezza tale, che il ſuo quadrato dovrà eſſere eguale al quadrato del raggio inſieme col quadrato fatto dal lato del decagono regolare. Sia perciò il cerchio BCDE, *Fig.* che abbia per ſuo centro il punto A; 108. e dividaſi il raggio AB talmente nel punto F, che il rettangolo fatto dallo ſteſſo raggio nella porzione BF ſia eguale al quadrato dell'altra porzione AF.

393. Se adunque col centro B, e coll'

coll' intervallo della A F deſcrivaſi un' arco circolare, che ſeghi la circonferenza del cerchio nel punto C, ſarà l' arco B C di 36 gradi, e la ſua corda BC eguale alla AF il lato del decagono regolare iſcritto dentro del cerchio (376), e ſe in oltre dalla ſteſſa circonferenza tagliſi l' altro arco C D eguale al primo BC, ſarà l' intero arco BCD di gradi 72, e la ſua corda BD il lato del pentagono regolare iſcritto dentro del medeſimo cerchio (379). Onde dovrà dimoſtrarſi, che il quadrato della BD ſia eguale al quadrato del raggio inſieme col quadrato della B C, ovvero A F.

394. Ed in vero, eſſendo l' angolo BAC di 36 gradi, ſarà così l' angolo A B C, come l' angolo A C B di gradi 72; e pertanto, facendoſi eguali tra di loro li due angoli ABC, DAF, ed avendo queſti angoli li lati A B, B C eguali ai lati A D, A F, ciaſcuno a ciaſcuno, ſaranno le loro baſi A C, DF ſimilmente eguali. Quindi, eſſendo la DF eguale al raggio AD, il triangolo ADF ſarà iſoſcele; ed in conſeguenza la ſua baſe A F ſarà diviſa per metà nel punto G dalla perpendicolare D G, abbaſſata su di eſſa dall' angolo verticale; con che il rettangolo delle due BF, AF ſarà eguale al doppio

pio del rettangolo fatto dalla BF nella FG.

395. Or, essendo il triangolo BFD ottusangolo in F, il quadrato del lato BD opposto all' angolo ottuso dee essere eguale ai quadrati delli due lati BF, DF insieme col doppio del rettangolo del lato BF nella FG. Onde il quadrato della BD sarà eguale ai quadrati delle due BF, DF insieme col rettangolo della BF nella AF. Ma il quadrato della BF insieme con questo rettangolo è eguale al rettangolo delle due AB, BF (174), o pure al quadrato della AF, ovvero BC. Dunque il quadrato della BD, che è il lato del pentagono regolare, sarà eguale al quadrato della DF, o sia del raggio AB insieme col quadrato della BC, che è il lato del decagono regolare.

§. XXVII.

Della nozione della ragione, così semplice, come composta.

396. SEgue ora la dottrina delle ragioni, e delle proporzioni, di cui si ha bisogno per quel tanto rimane a dirsi intorno alle figure piane; e per incominciare dalla spiega di alcuni termini, di cui si fa uso, noteremo

mo primieramente, che eſſendovi due quantità omogenee, ovvero della ſteſſa indole, come due linee, due ſuperficie, o due corpi, conforme la minore dee riguardarſi come parte della maggiore, così diceſi ella eſſere ſua parte aliquota, qualora replicata più volte eſattamente la miſura, ſiccome ſarebbe una retta di due palmi per rapporto ad un' altra di otto.

397. Ma ſe poi una quantità minore miſuri eſattamente due, o più altre maggiori, allora ella ſi dirà eſſere parte aliquota loro comune, ſiccome ſarebbe una retta di due palmi per rapporto all' altre due di otto, e di dieci. Ed in fine due quantità minori, che miſurano con eſattezza un' iſteſſo numero di volte due altre maggiori, ſi diranno eſſere parti aliquote ſimili di queſt' altre due, ſiccome ſarebbero le rette di due, e di tre palmi per rapporto all' altre due di otto, e di dodici.

398. Al contrario poi, conforme la quantità maggiore chiamaſi moltiplice della minore, che eſattamente la miſura; così ſi dirà ella eſſere moltiplice comune di due, o più minori, che la miſurano con eſattezza: ſiccome altresì due quantità maggiori, che ſono miſurate eſattamente un' iſteſſo numero di

volte

volte da due altre minori, ſi diranno eſſere moltiplici ſimili, ovvero egualmente moltiplici di queſt' altre due.

399. Conforme niente vieta, che due quantità omogenee abbiano due, o più aliquote comuni; così poſſono darſi quantità, che ne ſiano affatto prive, le quali perciò chiamanſi quantità incommenſurabili. Ma ciò dee intenderſi di un' aliquota comune, che ſia finita; poichè, ſiccome la diviſione di ogni quantità non ha mai termine, ed almeno col penſiero eſtendeſi all' infinito; così due quantità omogenee ſaranno ſempre capaci di un' aliquota comune infinitamente picciola, cioè minore di ogni quantità aſſignabile.

400. Avendoſi due quantità omogenee, non è da porſi in dubbio, che una di eſſe contenga ſempre un che dell' altra; anzi il quanto di queſta continenza potrà ſempre eſprimerſi con un qualche numero, quantevolte le due quantità omogenee hanno un' aliquota comune finita. Così, ſe vi ſiano due rette, una di otto palmi, e l' altra di due, la prima contenerà il quadruplo della ſeconda, ed al contrario la ſeconda la quarta parte della prima. E così ancora, eſſendovi due rette, una di cinque palmi, e l' altra di tre, la prima contenerà il quintuplo della ter-

za parte della ſeconda, ed al contrario la ſeconda il triplo della quinta parte della prima.

401. Or intendeſi preſſo li Geometri per nome di ragione la comparazione, che ſi fa di due quantità omogenee, per quel quanto la prima di eſſe contiene della ſeconda. E ſiccome le due quantità omogenee, che ſi comparano, chiamanſi termini della ragione; così la prima di eſſe diceſi eſſere ſuo antecedente, e la ſeconda ſuo conſeguente. Ma alla ragione aſcriveſi ancora la ſua quantità, per cui s' intende quel quanto ſteſſo, che l'antecedente contiene del conſeguente; onde ſarà 4 la quantità della ragione di una retta di otto palmi ad un' altra di due, ed al contrario $\frac{1}{4}$ la quantità di quella, che ha una retta di due palmi ad un' altra di otto.

402. Se l'antecedente, ed il conſeguente della ragione intendanſi diviſi in parti, che ſiano eguali ad un' aliquota loro comune; ègli è fuor di ogni dubbio, che la quantità della ragione ſia il quoziente, che ſi ha con dividere il numero delle parti dell' antecedente per lo numero delle parti del conſeguente. Ed in fatti, perchè il numero 8 diviſo per l' altro 2 dà 4 per quoziente; quindi ſi è, che ſia 4 la quan-

quantità della ragione di una retta di otto palmi ad un' altra di due. E così ancora, perchè il numero 2 diviso per l' altro 8 dà $\frac{1}{4}$ per quoziente; da ciò deriva, che sia $\frac{1}{4}$ la quantità della ragione di una retta di due palmi ad un' altra di otto.

403. Egli è vero, che essendo li termini della ragione quantità incommensurabili, la comune loro aliquota, come infinitamente picciola, non permette di potersi esprimere con numeri le moltitudini delle parti eguali, che in essi si contengono; ma sempre sarà vero, che la quantità della ragione sia il quoziente, che si avrebbe, se l'infinita moltitudine delle parti dell' antecedente potesse dividersi per la moltitudine similmente infinita delle parti del conseguente; ed appunto, per non potersi esprimere con numero alcuno il quoziente di questa divisione, è inesprimibile altresì la quantità stessa della ragione.

404. Niente vieta, che li termini della ragione siano tal volta eguali; e quando ciò avviene, siccome la ragione dicesi essere di uguaglianza, così chiaro si è, che la sua quantità debba essere l' unità. Essendo poi disuguali li termini della ragione, si dirà ella essere di disuguaglianza; anzi secondochè

l' antecedente è maggiore, o minore del conſeguente, la ragione ſteſſa dovrà dirſi di maggiore, o minore diſuguaglianza. Onde ſi vede, che la quantità della ragione debba eſſere maggiore dell' unità in quella di maggior diſuguaglianza, ed al contrario minore dell' unità nell' altra di minor diſuguaglianza.

405. Come ſia una ragione per rapporto ad un' altra ragione, potrà dedurſi dalle ſteſſe loro quantità. Onde, conforme una ragione è eguale ad un' altra ragione, quante volte le loro quantità ſono eguali; così una ragione ſarà maggiore, o minore di un' altra ragione, ſecondochè la quantità della prima è maggiore, o minore della quantità della ſeconda. Specialmente poi ſarà una ragione dupla, tripla, o quadrupla di un' altra ragione, ſempre quando la quantità della prima è dupla, tripla, o quadrupla della quantità della ſeconda: ſiccome al contrario ſarà una ragione la metà, la terza parte, o la quarta parte di un' altra ragione, qualora la quantità della prima è la metà, la terza parte, o la quarta parte della metà della ſeconda.

406. Quindi intorno alle ragioni poſſono averſi come aſſiomi li ſeguenti teoremi. I, che le ragioni eguali ad una

una terza ſiano eguali ancora tra di loro. II, che ſiano eguali parimente, così le ragioni, che ſono duple, triple, o quadruple di una terza, come le ragioni, che ſono la metà, la terza parte, o la quarta parte di una ſteſſa ragione. III, che ſe di due ragioni eguali una ſia maggiore, o minore di una terza ragione, l'altra debba eſſerne ancora maggiore, o minore. IV, che ſe di due ragioni diſuguali la minore ſia maggiore di una terza ragione, l'altra debba eſſerne molto maggiore. E V finalmente, che ſe di due ragioni diſuguali la maggiore ſia minore di una terza ragione, l'altra debba eſſerne molto minore.

407. Per poco poi, che ſi voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che ſiano aſſiomi altresì queſt'altri teoremi. I, che quantità eguali, paragonate con una terza, abbiano a quella la ſteſſa ragione. II, che una medeſima quantità, paragonata con due altre eguali, abbia a quelle la ſteſſa ragione. III, che, eſſendo due quantità diſuguali, la maggiore ad una terza abbia maggior ragione, che la minore. E IV finalmente, che una medeſima quantità, paragonata con due altre diſuguali, abbia maggior ragione alla minore, che alla maggiore.

408. Di queſti quattro teoremi hanno luogo ancora li converſi, che ſimilmente poſſono averſi, come tanti aſſiomi, e ſono. I, che le quantità, le quali hanno ad una terza la ſteſſa ragione, ſiano tra di loro eguali. II, che ſiano eguali parimente le quantità, a cui una terza ha la ſteſſa ragione. III, che di due quantità quella ſia maggiore, che ritrovaſi avere ad una terza maggior ragione. E IV finalmente, che di due quantità quella ſia minore, a cui una terza ritrovaſi avere maggior ragione.

409. Prima di andare innanzi, notiſi in queſto luogo, che una ragione diceſi eſſere reciproca, ovvero inverſa di un' altra ragione, quantevolte ſono oppoſte tra di eſſe le loro quantità. Così, eſſendo 4, e $\frac{1}{4}$ numeri oppoſti, la ragione, che ha per quantità $\frac{1}{4}$, ſi dirà eſſere reciproca di quella, di cui la quantità è 4. E così ancora, eſſendo $\frac{5}{3}$, e $\frac{3}{5}$ numeri oppoſti, la ragione, che ha per quantità $\frac{3}{5}$ dovrà dirſi reciproca di quella, di cui la quantità è $\frac{5}{3}$. Onde ſi vede, che ſe due ragioni ſiano eguali, le loro reciproche debbano eſſere ancora eguali.

410. Una ragione poi diceſi compoſta da due, o più altre ragioni, ſempre quando la ſua quantità ſi ha, con mol-

moltiplicare insieme le quantità di quell' altre ragioni. Così, essendo 6 il prodotto di 2 per 3, la ragione, che ha 6 per sua quantità, si dirà composta dalle due, le di cui quantità sono 2, e 3. E similmente, essendo 24 il prodotto di 2, 3, e 4, la ragione, che ha per quantità 24, dovrà dirsi composta dalle tre, di cui le quantità sono 2, 3, e 4. Onde si vede, che essendo le componenti di una ragione eguali alle componenti di un' altra ragione, ciascuna a ciascuna, le composte debbano essere ancora eguali.

411. Or siccome le quantità omogenee, qualora dividonsi in parti, che siano eguali ad un' aliquota loro comune, possono esprimersi con numeri; così, essendo espresse in questa guisa, potranno comporsi le loro ragioni, con moltiplicare insieme, tanto gl' antecedenti, quanto li conseguenti. In fatti, avendosi due ragioni, una di 4 a 2, e l'altra di 9 a 3, la loro composta sarà di 36 a 6. E così parimente, avendosi tre ragioni, una di 4 a 2, l' altra di 6 a 2, e la terza di 8 a 2, la composta sarà di 192 a 8.

412. Per mezzo dell' espressioni numeriche delle quantità omogenee vedesi ancora, che avendosi una serie di più quantità omogenee, la ragione del-

la prima all' ultima ſia compoſta dalle ragioni della prima alla ſeconda, della ſeconda alla terza, e così conſecutivamente per ſino a che di nuovo giungaſi all' ultima. Così, ſe li numeri, per mezzo di cui eſprimonſi quattro quantità omogenee, ſiano 48, 24, 8, e 2; chiaro ſi è, che ſarà 48 a 2 in ragion compoſta di 48 a 24, di 24 a 8, e di 8 a 2.

413. Il teorema intanto, che merita ſpecial conſiderazione intorno alla ragion compoſta, ſi è, che ſe una ragione ſia compoſta da due altre ragioni, di cui una ſia reciproca dell' altra, la compoſta debba eſſere ragione di uguaglianza. Ed in fatti, eſſendo reciproche le due componenti, le loro quantità ſaranno oppoſte tra eſſo loro (409); e pertanto moltiplicate inſieme daranno per prodotto l' unità, che è la quantità della ragione di uguaglianza. Al contrario poi, ſe una ragione, compoſta da due altre ragioni, ſia di uguaglianza, le due componenti dovranno eſſere tra di loro reciproche.

414. Del rimanente, ſe una ragione ſia compoſta da due, o tre ragioni eguali, ſi dirà ella eſſere duplicata, o triplicata di ciaſcuna delle ſue componenti; onde ſarà una ragione duplicata, o triplicata di un' altra ragione, ſem-

ſempre quando la quantità della prima è il quadrato, o il cubo della quantità della ſeconda. Ed eſſendo così egli è facile ad intenderſi, che ſiccome eſſendo eguali le ragioni ſemplici, debbano eſſere eguali altresì le ragioni loro duplicate, o triplicate; così al contrario eſſendo eguali le duplicate, o triplicate, ancora le ſemplici debbano eſſere eguali.

415. Or ſe ſi abbiano tre quantità omogenee, e la ragione dalla prima alla ſeconda ſia eguale alla ragione della ſeconda alla terza; chiaro ſi è, che la ragione della prima alla terza, come compoſta da quelle due ragioni eguali (412), debba eſſere duplicata di ciaſcuna di eſſe. Ma ſe poi le quantità omogenee ſiano quattro, e la ragione della prima alla ſeconda ſia eguale, così alla ragione della ſeconda alla terza, come alla ragione della terza alla quarta; in tal caſo la ragione della prima alla quarta, per eſſere compoſta da queſte tre ragioni eguali, ſarà triplicata di ciaſcuna di eſſe.

§. XXVIII.

Della natura, e proprietà della proporzione.

416. PEr proporzione intendono li Geometri l' uguaglianza di due ragioni; onde ſi è, che ella richiede quattro termini, di cui due ſono gl' antecedenti delle due ragioni eguali, e gl' altri due li loro conſeguenti. Può intanto ſuſſiſtere la proporzione ancora in tre termini; e ciò avviene, quando quello di mezzo fa le veci di conſeguente nella prima ragione, e di antecedente nell' altra. Una tal proporzione chiamaſi continua, a differenza dell' altra, che ritrovaſi tra quattro termini diſtinti, la quale appellaſi diſcreta. Ma ſe bene in queſta li primi due poſſano eſſere di una ſpecie, e gl' altri due di un' altra; niente di meno nella continua tutti tre li termini debbono eſſere della ſteſſa ſpecie.

417. Or nelli termini di una proporzione poſſono farſi varj cambiamenti ſenza, che ella ſi alteri. Ed in primo luogo ſuſſiſterà la proporzione, ſe invertanſi li ſuoi termini in modo, che gl' antecedenti facciansi conſeguenti, ed al contrario li conſeguenti antecedenti.

denti. Onde, ſe le quattro quantità A, B, C, D ſiano proporzionali, dimodochè A ſia a B, come C a D; invertendo dovrà eſſere ancora, come B ad A, così D a C.

418. Per intenderne la ragione, baſta riflettere, che ſiccome tra due quantità omogenee poſſono conſiderarſi due ragioni, una della prima alla ſeconda, e l'altra della ſeconda alla prima; così, per eſſere oppoſte tra di loro le quantità di queſte due ragioni, una di eſſe ſarà reciproca dell'altra (409). Volendoſi adunque, che la ragione di A a B ſia eguale alla ragione di C a D, ſaranno eguali ancora l'altre due di B ad A, e di D a C, che ſono le loro reciproche; e pertanto, eſſendo A a B, come C a D, invertendo dovrà eſſere ancora, come B ad A, così D a C.

419. In ſecondo luogo, ſe li termini di una proporzione ſiano tutti omogenei, ella ſuſſiſterà ancora, ſe permutandoſi li ſuoi termini, paragoniſi l'antecedente coll'antecedente, ed il conſeguente col conſeguente. Siano perciò A, B, C, D quattro quantità omogenee, e pongaſi, che le medeſime ſiano ancora proporzionali, dimodochè ſia A a B, come C a D. Io dico, che permutando debba eſſere parimente, come l'antecedente A all'an-

tecedente C, così il conſeguente B al conſeguente D.

420. In fatti, ſiccome, per le tre quantità conſecutive A, B, C, la ragione di A a C ſi compone dalle due di A a B, e di B a C; così (412), per l'altre tre B, C, D ſimilmente conſecutive, la ragione di B a D ſarà compoſta dalla due di B a C, e di C a D. Ma le componenti della prima ſono eguali alle componenti della ſeconda, ciaſcuna a ciaſcuna. Dunque ancora le due compoſte di A a C, e di B a D ſaranno eguali (410); e pertanto, eſſendo A a B, come C a D, permutando dovrà eſſere ancora, come A a C, così B a D.

421. In terzo luogo ſuſſiſterà tutta via la proporzione, ſe congiungendoſi gl' antecedenti colli loro riſpettivi conſeguenti, paragoninſi le loro ſomme cogli ſteſſi conſeguenti. Siano perciò proporzionali le quattro quantità A, B, C, D, dimodochè A ſia a B, come C a D. Io dico, che componendo debba eſſere ancora, come A inſieme con B a B, così C inſieme con D a D.

422. Per intenderne la ragione baſta riflettere, che ſiccome la ragione di due quantità eguali è ragione di uguaglianza, così con aggiungere all'ante-

tecedente di una ragione il ſuo conſeguente, la quantità di eſſa aumentaſi dell' unità. Eſſendo adunque eguali le quantità delle due ragioni di A a B, e di C a D, con aggiungere ad eſſe l' unità, ſaranno tutta via eguali; e pertanto, ſe A ſia a B, come C a D, componendo dovrà eſſere ancora, come A inſieme con B a B, così C inſieme con D a D.

423. Ma nè pure alteraſi la proporzione, ſe colle riferite ſomme ſi paragonino gli ſteſſi antecedenti. Imperocchè, eſſendo A a B, come C a D; ſarà invertendo come B ad A, così D a C (417). Onde, conforme componendo dee eſſere, come B inſieme con A ad A, così D inſieme con C a C; così invertendo di nuovo ſarà A ad A inſieme con B, come C a C inſieme con D; ed una tal conſeguenza, qualora ſe ne ha biſogno, potrà ricavarſi con far uſo della ſteſſa voce componendo.

424. Finalmente non ſoffrirà alterazione veruna la proporzione, ſe eſſendo gl' antecedenti maggiori dei loro conſeguenti, tolganſi queſti da quelli, e paragoninſi li reſidui colli ſteſſi conſeguenti. Siano perciò proporzionali le quattro quantità A, B, C, D, dimodochè A ſia a B, come C a D, e

ſiano

ſiano ancora li due antecedenti A, e C maggiori dei loro conſeguenti B, e D. Io dico, che dividendo debba eſſere parimente, come A minorato di B a B, così C minorato di D a D.

425. Per intenderne la ragione, quì ancora deeſi riflettere, che per eſſere di uguaglianza la ragione di due quantità eguali, qualora l' antecedente di una ragione minoraſi del ſuo conſeguente, la quantità di eſſa ſi viene a minorare dell' unità. Onde, eſſendo eguali le quantità delle due ragioni di A a B, e di C a D, con togliere da eſſe l' unità, reſteranno tutta via eguali; e pertanto, ſe A ſia a B, come C a D, dovrà eſſere ancora, come A minorato di B a B, così C minorato di D a D.

426. Ma nè tampoco alteraſi la proporzione, ſe colli riferiti reſidui ſi paragonino gli ſteſſi antecedenti; poichè ſecondo ſi dimoſtrerà da quì a poco, ſe A ſia a B, come C a D, e gl' antecedenti A, e C ſiano maggiori dei loro riſpettivi conſeguenti B, e D; dovrà eſſere ancora, come A ad A minorato di B, così C a C minorato di D; ed una tal conſeguenza, qualora ſe ne ha biſogno, potrà dedurſi con far uſo della ſteſſa voce dividendo, quantun-

tunque per eſſa ſi avvalga Euclide di quella di convertendo.

427. Per dimoſtrare altre proprietà delle proporzioni, ſi vuol prima notare, che ſe vi ſiano più quantità tra di loro omogenee da un lato, ed altrettante ſimilmente tra di eſſe omogenee dall' altro lato; ſi diranno le prime eſſere in ordinata ragione colle ſeconde, quante volte le conſecutive ragioni di quelle ſono eguali con ordine diretto alle conſecutive ragioni di queſt' altre; ma ſe poi le riferite ragioni ſiano eguali tra di loro con ordine contrario, in tal caſo le prime colle ſeconde ſi diranno eſſere in ragion perturbata.

428. Per ſchiarire queſte due definizioni con qualche eſempio, ſiano A, B, C, D le quantità omogenee, che ſono da un lato, ed E, F, G, H le quantità ſimilmente omogenee, che ſono dall' altro. Se adunque ſia, come A a B così E ad F, come B a C così F a G, e come C a D così G ad H, le prime quantità A, B, C, D ſono in ordinata ragione coll' altre E, F, G, H; ma ſe poi ſia, come A a B così G ad H, come B a C così F a G, e come C a D così E ad F, in tal caſo le ſteſſe quantità ſaranno tra di loro in perturbata ragione.

429. Or tanto ſe le riferite quantità ſiano tra di eſſe in ordinata ragione, quanto ſe ſiano in perturbata ragione, egli è facile il dimoſtrare, che le prime coll' ultime debbano eſſere nella ſteſſa ragione. In fatti, ſiccome la ragione di A a D è compoſta dalle tre di A a B, di B a C, e di C a D (412); così la ragione di E ad H ſi compone dalle tre altre di E ad F, di F a G, e di G ad H. Ma le componenti della prima ſono eguali alle componenti della ſeconda, ciaſcuna a ciaſcuna. Dunque ſaranno eguali parimente le due ragioni compoſte; e pertanto A ſarà a D, come E ad H.

430. Da ciò intanto può dedurſi la verità di quel tanto è ſtato poc' anzi avvertito (426): cioè, che ſe A ſia a B, come C a D, e gl' antecedenti A, e C ſiano maggiori dei loro conſeguenti B, e D; debba eſſere ancora, come A ad A minorato di B, così C a C minorato di D. Imperocchè, eſſendo A a B, come C a D, ſarà invertendo (417) B ad A, come D a C. Ma ſi è dimoſtrato, che A minorato di B ſia a B, come C minorato di D a D (424). Dunque ordinando ſarà, come A minorato di B ad A, così C minorato di D a C (129); ed in conſeguenza invertendo di nuovo ſarà, come A ad A mi-

minorato di B, così C a C minorato di D.

431. Può dedurſi altresì, che li due modi di argomentare componendo di ſopra dimoſtrati (421, 423) debbano aver luogo, qualunque ſia il numero delle quantità proporzionali. Siano perciò le tre quantità A, B, C proporzionali coll'altre tre D, E, F, dimodochè ſia, come A a B, così D ad E, e come B a C, così E ad F. Io dico primieramente, che la ſomma delle tre A, B, C ſia a C, come la ſomma dell'altre tre D, E, F ad F.

432. In fatti, eſſendo A a B, come D ad E, ſarà componendo (401), come A inſieme con B a B, così D inſieme con E ad E. Ma ſi vuole ancora, che B ſia a C, come E ad F. Dunque ordinando ſarà come A inſieme con B a C, così D inſieme con E ad F (429); e per tanto componendo di nuovo la ſomma delle tre A, B, C ſarà a C, come la ſomma dell'altre tre D, E, F ad F.

433. Io dico in ſecondo luogo, che A ſia alla ſomma delle tre A, B, C, come D alla ſomma dell'altre tre D, E, F. In fatti, eſſendo le tre A, B, C in ordinata ragione coll'altre tre D, E, F, ſarà ordinando come A a C, così D ad F; ed in conſeguenza invertendo, come

come C ad A, così F a D. Ma ſi è dimoſtrato, che la ſomma delle tre A, B, C ſia a C, come la ſomma dell'altre tre D, E, F ad F. Dunque ordinando di nuovo ſarà, come la ſomma delle tre A, B, C ad A, così la ſomma dell'altre tre D, E, F a D; e pertanto di nuovo invertendo ſarà, come A alla ſomma delle tre A, B, C, così D alla ſomma dell'altre tre D, E, F.

434. Intorno alle proporzioni, di cui tutti i termini ſono omogenei, meritano di eſſer dimoſtrate tre altre proprietà. La prima ſi è, che ſe ſi abbiano quattro quantità omogenee, e due di eſſe ſiano in data ragione coll'altre due; ancora la ſomma delle due prime alla ſomma dell'altre due debba eſſere nella ſteſſa ragione. Siano perciò le quattro quantità omogenee A, B, C, D, e nella ragione di E ad F ſia così A a C, come B a D. Io dico, che la ſomma delle due A, e B ſia alla ſomma dell'altre due C, e D nella ſteſſa ragione di E ad F.

435. Poichè tanto A a C, quanto B a D ſta nella ragione di E ad F; ſarà come A a C, così B a D; e permutando ſarà ancora, come A a B, così C a D (419). Quindi, dovendo eſſere componendo, come la ſomma delle due

A, e

A, e B a B, così la ſomma dell'altre due C, e D a D (421); ſarà di nuovo permutando, come la ſomma delle due A, e B alla ſomma dell' altre due C e D, così B a D; e per tanto, eſſendo B a D nella ragion di E ad F, ancora quelle due ſomme ſaranno nella ſteſſa ragione.

436. Per poco intanto, che ſi voglia riflettere, s' intenderà facilmente, che una tal proprietà debba aver luogo, qualunque ſia il numero delle quantità omogenee; e perciò ella potrà proporſi più generalmente nel ſeguente modo, cioè, che ſe più quantità omogenee ſiano in data ragione con altrettante quantità eziandio omogenee, la ſomma delle prime alla ſomma dell'altre ſia ancora nella ſteſſa ragione, la qual proprietà così generalmente eſpreſſa è di grandiſſimo uſo nelle ricerche geometriche.

437. La ſeconda proprietà ſi è, che ſe ſi abbiano quattro quantità omogenee, e due di eſſe ſiano in data ragione coll' altre due; ancora la differenza delle due prime debba eſſere alla differenza dell' altre due nella ſteſſa ragione. Siano perciò di nuovo le quattro quantità omogenee A, B, C, D, e nella ragione di E ad F ſia, così A a C, come B a D. Io dico, che la differen-

ferenza delle due A, e C debba eſſere alla differenza dell' altre due B, e D nella ſteſſa ragione di E ad F. Per dimoſtrarlo, pongaſi, che le due A, e C ſiano maggiori dell' altre due B, e D.

438. Poichè dunque, tanto A a C, quanto B a D ſta nella ragione di E ad F; ſarà, come A a C, così B a D; e permutando ſarà ancora, come A a B, così C a D (419). Quindi, dovendo eſſere dividendo, come la differenza delle due A, e B a B, così la differenza dell' altre due C, e D a D (424); ſarà di nuovo permutando, come la differenza delle due A, e B alla differenza dell' altre due C, e D, così B a D; e per tanto, eſſendo B a D nella ragione di E ad F, ancora quelle due differenze ſaranno nella ſteſſa ragione.

439. La terza proprietà ſi è, che due quantità omogenee ſiano nella ſteſſa ragione, così colle loro aliquote ſimili, come colli loro moltiplici ſimili. Siano perciò A, e B le due quantità omogenee, di cui ſiano l'altre due C, e D, o aliquote ſimili, o moltiplici ſimili. Io dico, che A ſia a B, come C a D. In fatti, per la nozione ſteſſa così dell' aliquote ſimili, come dei moltiplici ſimili, quanto A contiene di C,

al-

altrettanto B contenerà di D. Onde, dovendo eſſere A a C, come B a D; ſarà permutando (419) come A a B, così C a D.

440. La quarta, ed ultima proprietà ſi è, che eſſendo proporzionali quattro quantità omogenee, la maſſima, e la minima inſieme ſiano maggiori dell' altre due. Intanto per dimoſtrarla, ſi vuol prima avvertire, che ſiccome per la natura ſteſſa della proporzione non può la prima eſſere eguale, maggiore, o minore della ſeconda, ſe ancora la terza non ſia eguale, maggiore, o minore della quarta; così, attenta la conſeguenza del modo di argomentare permutando, nè pure la prima potrà eſſere eguale, maggiore, o minore della terza, ſe ancora la ſeconda non ſia eguale, maggiore, o minore della quarta.

441. Ciò avvertito, ſiano ora proporzionali le quattro quantità omogenee A, B, C, D; e ſuppoſto, che A ſia la maſſima, per l' avvertimento fatto, dovrà eſſere D la minima. Poichè dunque A ſta a B, come C a D, ſarà dividendo, come la differenza delle due A, e B a B, così la differenza dell' altre due C, e D a D (424); e pertanto, eſſendo B maggiore di D, ſarà la differenza delle due A, e B maggiore ancora della differenza dell' altre

altre due C, e D. Ma, con aggiungere a queſte differenze tanto B, quanto D, la prima diventa ſomma delle due A, e D, e la ſeconda ſomma delle due B, e C. Dunque ancora la ſomma delle due A, e D, cioè della maſſima, e della minima ſarà maggiore della ſomma dell' altre due B, e C.

§. XXIX.

Delle proporzioni, che poſſono averſi colli lati, così degl' angoli, come de' triangoli.

442. COlli lati, così degl' angoli, come de' triangoli poſſono averſi varie proporzioni, che ſono di grandiſſimo uſo nelle ricerche geometriche. Il teorema fondamentale, da cui eſſe derivano, ſi è il ſeguente: cioè, che ſe un lato di un' angolo ſia diviſo in quante ſi vogliano parti eguali, e per gli punti della diviſione tirinſi rette parallele alla baſe dell' angolo, che s' incontrino coll' altro lato; ancora queſt' altro lato ſarà diviſo in altrettante parti eguali. Sia perciò l' angolo *Fig.* 109. BAC, il di cui lato AB ſia diviſo nelle parti eguali AD, DE, EB. Tirinſi per gli punti della diviſione D, ed

ed E le rette DF, EG parallele alla baſe dell' angolo BC, che s' incontrino coll' altro lato AC ne' punti F, e G. Io dico, che le parti AF, FG, GC di queſt' altro lato, ſiano parimente eguali.

443. Per dimoſtrarlo, tirinſi per gl' altri punti F, e G le rette FH, GI parallele al lato AB. Eſſendo adunque DH, EI parallelogrammi, ſaranno eguali, così le due DE, FH, come le due EB, GI (143); ed in conſeguenza, per la ſuppoſta uguaglianza delle parti AD, DE, EB, ſaranno eguali ancora li lati AD, FH, GI dei triangoli ADF, FHG, GIC. Ma, per le parallele tirate, queſti triangoli hanno gl' angoli eguali agl' angoli, ciaſcuno a ciaſcuno, ed i lati loro eguali AD, FH, GI ſono oppoſti ad angoli eguali. Dunque, dovendo li medeſimi eſſere perfettamente eguali (134), ſaranno gli altri loro lati AF, FG, GC parimente eguali.

444. Or per mezzo di queſto teorema egli è facile ora il dimoſtrare, che ſe in un' angolo tirifi una retta parallela alla ſua baſe, queſta retta debba dividere proporzionalmente li due lati dell' angolo. Sia perciò l' angolo BAC, in cui tirifi la retta DE parallela alla ſua baſe BC, che s' incontri *Fig.* 110.

colli

colli due lati AB, AC ne' punti D, ed E. Io dico, che gli ſteſſi lati ſiano diviſi proporzionalmente in queſti punti, dimodochè ſarà AD a DB, come AE ad EC. Per dimoſtrarlo, concepiſcanſi diviſe le due AD, DB in parti eguali all' aliquota loro comune, qualunque ella ſia; e per gli punti della diviſione intendanſi ancora tirate rette parallele alla BC ovvero DE.

445. Dovendo adunque per mezzo di queſte parallele rimaner diviſe l' altre due AE, EC eziandio in parti eguali, ſarà ciaſcuna di queſt' altre parti aliquota comune ancora delle due AE, EC. Ma in quante parti ſono diviſe le prime due AD, DB, in altrettante reſtano diviſe altresì l' altre due AE, EC. Dunque, ſe le moltitudini delle parti, contenute nelle due AD, AE, dividanſi per le moltitudini delle parti, contenute nell' altre due DB, EC; ſaranno eguali li quozienti di queſte due diviſioni; e per tanto, eſſendo queſti quozienti le quantità delle due ragioni di AD a DB, e di AE ad EC (402), ſaranno eguali ancora tra di loro queſte due ragioni; con che AD ſarà a DB, come AE ad EC.

446. Negativamente intanto può dimoſtrarſi ancora il converſo di queſto teorema, cioè, che ſe li lati di un'angolo

golo ſiano diviſi proporzionalmente da una retta, debba eſſere queſta retta parallela alla baſe dell' angolo. Pongaſi perciò, che li lati AB, AC dell'angolo BAC ſiano diviſi dalla retta DE proporzionalmente ne' punti D, ed E, dimodochè ſia AD a DB, come AE ad EC; e ſe ſi niega, che la DE ſia parallela alla baſe BC, tiriſi per lo punto D la DF parallela alla BC. Dovendo adunque eſſere AD a DB, come AF ad FC (444), ed eſſendoſi ſuppoſto, che AD ſia a DB, come AE ad EC; ſarà AE ad EC, come AF ad FC (406); e pertanto componendo ſarà ancora AC ad EC, come AC ad FC (421). Onde, avendo la AC la ſteſſa ragione alla EC, che alla FC, dovrebbero eſſere eguali le due EC, FC (408), il che non può aver luogo. *Fig.* 110.

447. Ma qualunque ſia il numero delle rette, che tiranſi in un angolo parallele alla ſua baſe, ſempre li lati dell' angolo dovranno eſſere diviſi proporzionalmente da queſte rette. Tirinſi perciò nell' angolo BAC due rette parallele alla ſua baſe BC, e ſiano DE, FG, le quali incontrinſi col lato AB ne' punti D ed F, e col lato AC ne' punti E, e G. Io dico, che le parti del primo lato AD, DF, FB ſiano in ordinata ragione colle parti dell' altro *Fig.* 111.

lato AE, EG, GC, dimodochè ſarà, come AD a DF, così AE ad EG, e come DF ad FB, così EG a GC.

448. Per dimoſtrarlo, tiriſi per lo punto E la retta EHI parallela al lato AB, che s' incontri colla FG nel punto H, e colla BC nel punto I. Poichè dunque nell' angolo CEI ſta tirata la GH parallela alla ſua baſe CI, ſarà EH ad HI, come EG a GC (444). Ma, per gli parallelogrammi DH, FI, ſono eguali così le due EH, DF, come le due HI, FB (143). Dunque ſarà ancora, come DF ad FB, così EG a GC; e per tanto, conforme per l' altro angolo FAG, alla di cui baſe FG ſta tirata la parallela DE, dee eſſere altresì AD a DF, come AE ad EG, così le tre AD, DF, FB ſaranno in ordinata ragione coll'altre tre AE, EG, GC.

449. Ancora di ciò può dimoſtrarſi il converſo, anzi con dimoſtrazione poſitiva, e non già negativa, cioè, che ſe due, o più rette dividano proporzionalmente li lati di un' angolo, ciaſcuna di eſſe debba eſſere parallela al-
Fig. la baſe. Li lati perciò AB, AC
111. dell' angolo BAC ſiano diviſi proporzionalmente dalle due rette DE, FG. Io dico, che tanto l' una, quanto l' altra ſia parallela alla baſe BC. Poi-
chè

chè si vuole, che AD sia a DF, come AE ad EG; sarà componendo, come AF a DF, così AG ad EG (421). Ma si vuole ancora, che DF sia ad FB, come EG a GC. Dunque ordinando sarà, come AF ad FB, così AG a GC (429).

450. Quindi, per essere li lati AB, AC dell'angolo BAC divisi dalla retta FG proporzionalmente ne' punti F, e G, dovrà essere la GF parallela alla sua base BC (446). Ma, essendo AD a DF, come AE ad EG, ancora nell'angolo FAG l'altra retta DE divide proporzionalmente li lati AF, AG ne' punti D, ed E. Dunque, dovendo essere la DE parallela alla FG, saranno parallele ancora le due DE, BC (89).

451. Intorno all'angolo può dimostrarsi un'altro teorema, con cui similmente si hanno rette proporzionali; e si è, che se un'angolo qualsivoglia dividasi in due parti eguali per una retta, questa incontrandosi colla base la dividerà nella stessa ragione, in cui sono li lati. Sia perciò l'angolo BAC, *Fig.* il quale dividasi in due parti eguali per 112.
la AD, che s'incontri colla base BC nel punto D. Io dico, che la porzione BD sia all'altra DC, come il lato AB al lato AC. Per dimostrarlo, tirisi per lo punto C la retta CE parallela alla

DA, che s' incontri col lato BA prolungato nel punto E.

452. Eſſendo adunque parallele le due DA, CE, ſarà così l'angolo BAD eguale all'angolo AEC (87), come l'angolo CAD eguale all'angolo ACE (86). Onde, conforme ſono eguali li due angoli BAD, CAD, così ſaranno eguali ancora gl' altri due AEC, ACE. Quindi, facendoſi eguali le due AC, AE (107), ſarà BA ad AC, come la ſteſſa BA ad AE (407). Ma, per eſſere la DA parallela alla CE, BA ſta ad AE, come BD a DC. Dunque ſarà ancora, come BD a DC, così BA ad AC; e pertanto la baſe dell' angolo BC ſarà diviſa dalla AD nella ragione de' lati AB, AC.

453. Il converſo di queſto teorema ſimilmente ha luogo, cioè, che ſe dal vertice di un' angolo tiriſi una retta in modo, che divida la baſe nella ragion de' lati, la ſteſſa retta dividerà l'angolo in parti eguali. Perciò dal vertice A dell' angolo BAC tiriſi la AD in modo, che incontrandoſi colla baſe BC nel punto D faccia, che la porzione BD ſia all' altra DC, come il lato AB al lato AC. Io dico, che la ſteſſa AD dividerà l'angolo BAC per metà, dimodochè ſaranno eguali tra di loro li due angoli BAD, CAD.

Fig. 112.

454.

454. Per dimoſtrarlo, tiriſi quì ancora la CE parallela alla DA, che incontriſi col lato BA prolungato nel punto E. Eſſendo adunque la DA parallela alla CE, ſarà BA ad AE, come BD a DC (444). Ma ſi vuole, che BD ſia a DC, come BA ad AC. Dunque BA ſarà ad AE, come la ſteſſa BA ad AC (406); e per tanto, facendoſi eguali le due AE, AC (408), ſaranno eguali parimente li due angoli ACE, AEC (104). Or, per le ſteſſe parallele DA, CE, dee eſſere così l'angolo ACE eguale all'angolo CAD (86), come l'angolo AEC eguale all'angolo BAD (87). Dunque ſaranno eguali ancora li due angoli CAD, BAD; ed in conſeguenza tutto l'angolo BAC ſarà diviſo per metà dalla AD.

455. Per venire ora alle proporzioni, che poſſono averſi colli lati de' triangoli, debbonſi dimoſtrare quattro teoremi. Il primo ſi è, che ſe due triangoli ſiano equiangoli, debbano eſſere proporzionali li lati, che ſono intorno agl'angoli eguali, e quelli lati eſſere omologi, cioè corriſponderſi nella proporzione come antecedenti, e come conſeguenti, che ſono oppoſti ad angoli eguali. Siano perciò equiangoli li due triangoli ABC, DCE, dimodochè ſia l'angolo BAC eguale all'angolo CDE, *Fig.* 113.

l'angolo ABC eguale all'angolo DCE, ed il rimanente BCA eguale al rimanente CED.

456. Dee dimoſtrarſi adunque, che colli lati di queſti due triangoli ſi abbiano tre proporzioni, di cui la prima ſi è, che AB ſia a BC, come DC a CE; la ſeconda, che BC ſia a CA, come CE ad ED; e la terza, che CA ſia ad AB, come ED a DC, colle quali proporzioni non ſolo ſaranno proporzionali li lati, che ſono intorno agl'angoli eguali, ma quelli lati ſaranno altresì omologi, che ſono oppoſti ad angoli eguali.

457. Per dimoſtrarlo, ſituinſi li due triangoli in modo, che li due lati BC, CE formino una retta continuata; indi diſtendanſi gl'altri due BA, ED per ſino a che s'incontrino tra di loro nel punto F. Siccome adunque, per l'uguaglianza delli due angoli ABC, DCE, debbono eſſere parallele le due FB, DC (81); così per l'uguaglianza degl'altri due ACB, CED, ſaranno parallele l'altre due FE, AC; e per tanto, eſſendo CF parallelogrammo, ſaranno eguali, così le due AF, DC, come l'altre due DF, AC.

458. Or, poichè nell'angolo BFE ſta tirata la AC parallela alla ſua baſe FE, ſarà AB ad AF, ovvero DC, come

BC

BC a CE (444) ; e pertanto permutando ſarà AB a BC, come DC a CE (419), che è la prima proporzione. Per la ſteſſa ragione, ritrovandoſi nell' altro angolo BEF tirata la DC parallela alla ſua baſe FB, dovrà eſſere BC a CE, come FD ovvero AC a DE; ed in conſeguenza permutando BC ſarà a CA, come CE ad ED, che è la ſeconda proporzione. Finalmente, eſſendo le tre AB, BC, CA in ordinata ragione coll' altre tre DC, CE, ED, dovrà eſſere ordinando AB a CA, come DC ad ED (429); e per tanto invertendo CA ſarà ad AB, come ED a DC (417), che è la terza proporzione.

459. Il ſecondo teorema è il converſo del precedente, cioè, che ſe due triangoli abbiano li lati proporzionali, li medeſimi debbano eſſere equiangoli, e quegl' angoli farſi eguali, che ſono oppoſti a lati omologi. Siano perciò li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano li lati proporzionali, dimodochè ſia, come AB a BC, così DE ad EF, e come BC a CA, così EF ad FD. Io dico, che queſti due triangoli ſiano equiangoli, e che quegl' angoli faccianſi eguali, che ſono oppoſti a lati omologi. *Fig.* 114.

460. Per dimoſtrarlo, su 'l lato EF

del ſecondo triangolo, facciaſi così l'angolo FEG eguale all' angolo ABC, come l' angolo EFG eguale all' angolo BCA; ed incontrandoſi le due EG, FG nel punto G, ſaranno eguali ancora li due angoli BAC, EGF. Eſſendo adunque equiangoli li due triangoli ABC, GEF, ſarà primieramente AB a BC, come GE ad EF (455). Ma ſi vuole, che AB ſia a BC, come DE ad EF. Dunque ſarà ancora, come GE ad EF, così DE alla ſteſſa EF (406); e per tanto le due GE, DE ſaranno tra di loro eguali (408).

461. Per gli ſteſſi triangoli equiangoli ABC, GEF ſarà in oltre BC a CA, come EF ad FG. Onde, volendoſi, che BC ſia a CA, come EF ad FD; ſarà ancora, come EF ad FG, così la ſteſſa EF ad FD; e per tanto ſaranno eguali parimente le due FG, FD. Quindi, avendo li due triangoli GEF, DEF li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno, ſaranno eguali eziandio li loro angoli, oppoſti a' lati eguali (126); ed in conſeguenza il triangolo ABC, come equiangolo col triangolo GEF, ſarà equiangolo ancora coll' altro DEF, e quegl' angoli ſaranno eguali, che ſono oppoſti a' lati omologi.

462. Il terzo teorema ſi è, che ſe due

due triangoli abbiano due lati proporzionali a due lati, ed eguali altresì gl' angoli contenuti da queſti lati; li medeſimi debbano eſſere equiangoli, e farſi eguali quegl' angoli, che ſono oppoſti a' lati omologi. Siano perciò li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano li lati AB, AC proporzionali ai lati DE, DF, ed abbiano ancora l'angolo BAC eguale all' angolo EDF, che ſono contenuti da detti lati. Io dico, che debbano eſſere eguali parimente, tanto gl' angoli ACB, DFE oppoſti ai lati omologi AB, DE, quanto gl' angoli ABC, DEF oppoſti agl' altri lati omologi AC, DF. *Fig.* 115.

463. Per dimoſtrarlo, facciaſi su 'l lato DF, così l' angolo FDG eguale all' angolo EDF, ovvero BAC, come l' angolo DFG eguale all' angolo ACB (43). Incontrandoſi adunque le due DG, FG nel punto G, ſarà l' angolo DGF eziandio eguale all' angolo ABC; e pertanto, eſſendo equiangoli li due triangoli DGF, ABC, ſarà DG. a DF, come AB ad AC (455). Ma ſi vuole, che AB ſia ad AC, come DE a DF. Dunque ſarà ancora DG a DF, così DE alla ſteſſa DF (406). Quindi, facendoſi eguali le due DG, DE (408), ſaranno perfettamente eguali li due triangoli DGF, DEF; ed in conſeguenza

il triangolo ABC, come equiangolo col primo di essi DGF, sarà equiangolo ancora coll' altro DEF.

464. Il quarto, ed ultimo teorema si è, che se due triangoli abbiano due lati proporzionali a due lati, e degl'angoli opposti ai lati omologi due siano eguali, e due altri della stessa specie, cioè o ambidue acuti, o ambidue ottusi; li medesimi debbano essere equiangoli, e farsi eguali così li due angoli della stessa specie, come gl' altri due rimanenti. Siano perciò li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano li lati AB, AC proporzionali ai lati DE, DF, e degl' angoli opposti a questi lati li due ABC, DEF siano eguali, e gl' altri due ACB, DFE siano della stessa specie. Io dico, che debbano essere eguali ancora, tanto questi due angoli, quanto gl' altri due rimanenti BAC, EDF.

Fig. 116.

465. Se non vogliasi concedere, che li due angoli BAC, EDF siano eguali, sia il primo di essi BAC maggiore dell' altro EDF. Facendosi adunque l'angolo BAG eguale all' angolo EDF, saranno equiangoli li due triangoli ABG, DEF; e pertanto AB sarà ad AG, come DE a DF (455). Quindi, essendosi supposto, che AB sia ad AC, come DE a DF; sarà altresì AB ad AC,

AC, come la ſteſſa AB ad AG (406); ed in conſeguenza, facendoſi eguali le due AC, AG (408), ſaranno eguali ancora li due angoli AGC, ACG (104); con che eziandio l'angolo AGC ſarà della ſteſſa ſpecie coll'angolo DFE, ovvero col ſuo eguale AGB. Ma ciò non può aver luogo, per eſſere li due angoli AGC, AGB inſieme eguali a due retti (60). Dunque non è egli vero, che l'angolo BAC ſia maggiore dell'angolo EDF; e per tanto così eſſi, come gl'altri due ACB, DFE ſaranno tra di loro eguali.

466. Del rimanente, ſe un triangolo ſia rettangolo, e dall'angolo retto ſi abbaſſi ſull'ipotenuſa la perpendicolare, s'incontreranno in eſſo ſei proporzioni, di cui tre ſono diſcrete, e tre altre continue; e ciò per la ragione, che la perpendicolare abbaſſata divide il triangolo in due altri triangoli rettangoli, equiangoli così tra di loro, come coll'intero triangolo. In fatti, *Fig.* ſe ABC ſia un triangolo rettangolo in 117. A, e da queſt'angolo ſi abbaſſi ſull'ipotenuſa BC la perpendicolare AD; chiaro ſi è, che così li due triangoli rettangoli ABC, ABD, come li due ABC, ACD abbiano un'angolo acuto comune. Onde, dovendo tanto queſti, quanto quelli eſſere equiangoli, ſaran-

no equiangoli ancora li due ABD, ACD.

467. Dall' eſſere dunque equiangoli li due triangoli ABD, ACD ricavanſi tre proporzioni, e ſono I, che AB ſia ad AD, come AC a CD; II, che AC ſia ad AD, come AB a BD; e III, che BD ſia ad AD, come AD a CD. Onde, ſiccome colle prime due può ſtabilirſi il ſeguente teorema, cioè, che ciaſcuno dei due lati ſia alla perpendicolare abbaſſata, come l' altro lato alla porzione dell' ipotenuſa contigua a queſt' altro lato; così colla terza ſi avrà queſt' altro teorema, che la perpendicolare abbaſſata ſia mezza proporzionale tra le due porzioni dell' ipotenuſa.

468. Dall'eſſer poi l'intero triangolo ABC equiangolo con ciaſcuno dei due ABD, ACD deduconſi tre altre proporzioni, e ſono I, che BC ſia ad AB, come AB a BD; II, che BC ſia ad AC, come AC a CD; e III, che BC ſia ad AB, come AC ad AD. Onde, ſiccome le prime due riduconſi al ſeguente teorema, cioè, che ciaſcuno dei due lati ſia mezzo proporzionale tra l' ipotenuſa, e la porzione di eſſa contigua allo ſteſſo lato; così colla terza ſi avrà queſt' altro teorema, che l' ipotenuſa ſia ad uno dei due lati, come

come l' altro lato alla perpendicolare abbaſſata ſulla ſteſſa ipotenuſa.

§. XXX.

Della riſoluzione di alcuni problemi intorno alle rette proporzionali.

469. RIſolveremo ora alcuni problemi intorno alle rette proporzionali, di cui ſpeſſo in appreſſo dovrà farſi uſo. Ed in primo luogo faremo vedere, come date tre rette poſſa ritrovarſi la quarta proporzionale, cioè una retta, che formi con quelle tre proporzione diſcreta. Siano dunque AB, BC, AD le tre rette date. Situinſi le prime due AB, BC in modo, che formino una retta continuata; indi al punto A adattiſi la terza AD, che faccia colla AC un' angolo qualſivoglia; congiungaſi di poi la BD, a cui tiriſi per lo punto C la parallela CE (93), che s' incontri colla AD prolungata nel punto E; ed io dico, che la DE ſia la quarta proporzionale ricercata: il che è chiaro; poichè eſſendo la BD parallela alla CE, che è baſe dell' angolo CAE, dovrà eſſere AB a BC, come AD a DE (444). *Fig.* 118.

470. Faremo vedere in ſecondo luogo, come date due rette poſſa ritrovarſi

varſi la terza proporzionale, cioè una terza retta, che faccia con quelle due proporzione continua. Siano perciò AB, BC le due rette date, le quali congiunganſi in modo, che formino inſieme una retta continuata. Tiriſi dal
Fig. punto A un' altra retta, come AE,
118. che faccia colla AB un' angolo qualſivoglia; indi tagliſi da quell' altra retta la porzione AD eguale alla ſeconda retta data BC; congiungaſi in appreſſo la BD, a cui tiriſi per lo punto C la parallela CE, che s' inconrri colla AE nel punto E; ed io dico, che la DE ſia la terza proporzionale ricercata: il che ſimilmente è chiaro; poichè, dovendo eſſere AB a BC, come AD a DE, ed eſſendo eguali le due AD, BC, ſarà ancora AB a BC, come la ſteſſa BC a DE.

471. Faremo vedere in terzo luogo, come date due rette poſſa ritrovarſi la mezza proporzionale, cioè un' altra retta, che poſta in mezzo alle due date faccia con quelle proporzione
Fig. continua. Siano perciò AB, BC le due
119. rette date, le quali ſituinſi in modo, che formino inſieme una retta continuata. Dividaſi la AC in due parti eguali nel punto D; indi col centro D, e coll' intervallo della DA, ovvero DC deſcrivaſi ſulla ſteſſa AC il mezzo cer-

cerchio AEC ; alzisi di poi dal punto B sulla medesima AC la perpendicolare BE, che s' incontri colla circonferenza del mezzo cerchio nel punto E; ed io dico, che la BE sia la mezza proporzionale ricercata.

472. Per dimostrarlo, congiunganſi le due AE, CE. E poichè l'angolo AEC, come situato nel mezzo cerchio, è retto (336), sarà il triangolo ACE rettangolo in E. Ma la BE è una perpendicolare abbassata sull' ipotenusa AC dall' angolo retto. Dunque, dovendo ella essere mezza proporzionale tra le due porzioni dell' ipotenusa AB, BC (467), si avrà con essa la mezza proporzionale ricercata, la quale potrebbe ritrovarsi ancora in un' altro modo, cioè con far uso dell' altra proprietà del triangolo rettangolo, di essere ciascuno de' suoi lati mezzo proporzionale tra l' ipotenusa, e la porzione contigua allo stesso lato.

473. Notisi quì intanto, che se bene sia determinato il problema, di ritrovare una retta, che posta in mezzo a due altre rette date formi con esse una proporzione continua ; nientedimeno, se si dovessero ritrovare due rette, che situate in mezzo a due altre rette date formino con queste una proporzione discreta, il problema sarebbe indeter-

mi-

minato, per eſſere infinite le rette, che ſoddisfar poſſono alla ſua dimanda: come in fatti, ſe A, e B ſiano le due rette date, e prendaſi ad arbitrio la retta C per la prima delle due, che ſi cercano, ſi avrà l'altra retta, con ritrovare la quarta proporzionale dopo le tre C, A, B (469); poichè ſuppoſto, che queſta ſia D, ſarà C ad A, come B a D; e pertanto invertendo A ſarà a C, come D a B (417).

474. Ed in vero, con ritrovare tra due rette date la mezza proporzionale, non ſi fa altra coſa, ſe non che tra l' infinite rette, che ſituate in mezzo alle due date formano con eſſe proporzione diſcreta, ſcegliere quelle due, che ſono eguali tra di loro, dimodochè la ſteſſa uguaglianza rende determinato il problema della mezza proporzionale. Onde, ſe le due rette, che ſi dimandano, doveſſero adempiere qualche altra condizione appoſta nel problema, come per ragion di eſempio di eſſere la loro differenza, o la loro ſomma eguale ad un' altra retta data, riceverebbe ſenza dubbio il problema la ſua determinazione.

475. Faremo vedere perciò in quarto luogo, come poſſano ritrovarſi due rette, di cui ſia data la differenza, e che ſituate in mezzo a due altre rette

te date formino con eſſe proporzione diſcreta. Siano adunque A, e B le due rette date, e ſia DE la differenza delle due, che ſi dimandano. Ritroviſi la mezza proporzionale tra le due rette date A, e B, che ſia C (471); indi diſtendaſi la DE talmente per ſino al punto F, che il rettangolo delle due DF, EF ſia eguale al quadrato della mezza proporzionale ritrovata C (223); ed io dico, che le ſteſſe due DF, EF, differenti tra di loro per la DE, ſiano le due rette ricercate. *Fig.* 120.

476. Per dimoſtrarlo, deſcrivaſi ſulla DE il mezzo cerchio DGE, a cui tiriſi dal punto F la tangente FG, e congiunganſi le due DG, EG. Dovendo adunque eſſere il rettangolo delle due DF, EF eguale al quadrato della tangente FG (353), ſaranno eguali tra di loro la retta C, e la tangente FG; e per tanto la retta A ſarà alla FG, come la ſteſſa FG alla retta B. Ma per eſſere l' angolo FGE eguale all' angolo GDE (338), ſono equiangoli li due triangoli FGD, FEG, ed in conſeguenza la FG ſta alla DF, come la EF alla ſteſſa FG (455). Dunque, eſſendo le tre rette A, FG, DF in perturbata ragione coll' altre tre EF, FG, B, ſarà perturbando A a DF, come EF a B (429).

477. Faremo vedere in quinto luogo, come poſſano ritrovarſi due rette, di cui ſia data la ſomma, e che ſituate in mezzo a due altre rette date formino con eſſe proporzione diſcreta. *Fig.* 121. Siano perciò A, e B le due rette date, e ſia DE la ſomma delle due, che ſi dimandano. Ritroviſi tra le due rette date A, e B la mezza proporzionale, che ſia C (471); indi dividaſi la DE talmente nel punto F, che il rettangolo delle due DF, EF ſia eguale al quadrato della mezza proporzionale ritrovata C (225); ed io dico, che le ſteſſe due DF, EF, la di cui ſomma è la DE, ſiano le due rette ricercate.

478. Per dimoſtrarlo, deſcrivaſi ſulla DE il mezzo cerchio DGE, ed alzata su di eſſa la perpendicolare FG, che s'incontri colla circonferenza del mezzo cerchio nel punto G, congiunganſi le due DG, EG. Dovendo adunque eſſere per lo triangolo DEG rettangolo in E, il rettangolo delle due DF, EF eguale al quadrato della FG, ſaranno le due C, ed FG eguali tra di loro; e per tanto la retta A ſarà alla FG, come la ſteſſa FG alla retta B. Ma per lo ſteſſo triangolo rettangolo la FG ſta alla DF, come la EF alla medeſima FG. Dunque eſſendo le tre rette A, FG, DF in perturbata ragione

ne coll' altre tre EF, FG, B; ſarà perturbando A a DF, come EF a B (429).

479. Or ſi è avvertito altrove (226), non poterſi una data retta dividere talmente, che il rettangolo delle due ſue porzioni ſia eguale al quadrato di un'altra retta data, ſe queſt'altra retta data, non ſia o minore, o pure eguale alla metà della prima. Onde ancora il propoſto problema non potrà riſolverſi, ſe la mezza proporzionale C, che cade tra le due rette date A, e B, non ſia minore, o pure eguale alla metà della DE, cioè della ſomma delle due, che ſi dimandano. E poichè nel caſo di eſſerle eguale, ſi fanno eguali tra di loro le due rette ricercate; perciò ricaderà il problema in quello della mezza proporzionale.

480. Del rimanente ſi è ſtimato di riſolvere li due riferiti problemi per la ragione, che così ad eſſi, come a quello della mezza proporzionale riduconſi tutti gl' altri problemi geometrici, che dagl' antichi Geometri chiamavanſi problemi piani. Ed egli è da notarſi, che eſſendo proporzionali quattro rette, come A, B, D, E le due eſtreme A, ed E diconſi eſſere reciproche colle due di mezzo B, e D, in quanto che, paragonandoſi quelle con queſte, formanſi due

due ragioni, di cui una è reciproca dell' altra; e la proprietà delle rette reciproche ſi, è di avere una ſteſſa mezza proporzionale.

481. In fatti, ſe C ſia la mezza proporzionale, che cade tra le due B, e D, queſta ſteſſa ſarà mezza proporzionale eziandio tra le due A ed E. Imperocchè, eſſendo B a C, come C a D, ed eſſendo altresì A a B, come D ad E; ſaranno le tre A, B, C in perturbata ragione coll' altre tre C, D, E; ed in conſeguenza perturbando ſarà B a C, come C a D (429). Al contrario poi, ſe la ſteſſa C ſia mezza proporzionale, tanto tra le due A, e D, quanto tra le due B, e D; potrà dimoſtrarſi in una maniera conſimile, che le prime due A, ed E ſiano reciproche coll' altre due B, e D.

482. Ma per venire ad altri problemi utili in queſta ſcienza, faremo vedere in ſeſto luogo, come poſſa dividerſi talmente una retta data, che la medeſima colle due ſue porzioni formi proporzione continua. Sia perciò A B la retta data, la quale dividaſi nel punto C in modo, che il rettangolo della tutta A B nella porzione minore B C ſia eguale al quadrato della porzione maggiore AC (227). Io dico, che con una tal diviſione debba eſſere, come la

Fig. 122.

tutta

tutta AB alla porzione maggiore AC, così queſta ſteſſa AC all' altra minore BC.

483. Per dimoſtrarlo, deſcrivaſi ſulla porzione maggiore AC il mezzo cerchio ADC, a cui tirisi dal punto B la tangente BD, e congiunganſi le due AD, CD. Eſſendo adunque per ragion della tangente BD l' angolo BDC eguale all' angolo CAD (338), ſaranno equiangoli li due triangoli ABD, DBC; e pertanto AB ſarà a BD, come BD a BC (455). Ma, per eſſere il rettangolo delle due AB, BC eguale al quadrato della tangente BD (353), queſta tangente ſi fa eguale alla porzione maggiore AC, il di cui quadrato ſimilmente è eguale a quel rettangolo. Dunque la tutta AB ſarà alla porzione maggiore AC, come queſta ſteſſa AC all' altra minore BC.

484. Qualora divideſi una retta talmente, che la tutta ſia alla porzione maggiore, come queſta ſteſſa porzione all' altra minore; la retta diceſi diviſa in eſtrema, e media ragione. Ma, conforme ſi ha una tal diviſione, con dividere la retta in modo, che il rettangolo della tutta nella porzione minore ſia eguale al quadrato dell' altra maggiore; così egli è facile il dimoſtrare, che al contrario, eſſendo diviſa

la retta in eſtrema, e media ragione, queſto rettangolo, e queſto quadrato debbano eſſere eguali.

Fig. 122. 485. Sia perciò la AB diviſa in eſtrema e media ragione nel punto C, e ſulla porzione maggiore AC deſcrivaſi il mezzo cerchio ADC, a cui tiriſi dal punto B la tangente BD, e congiunganſi le due AD, CD. Facendoſi adunque equiangoli li due triangoli ABD, DBC, ſarà AB a BD, come BD a BC (455); e pertanto, eſſendo mezza proporzionale tra le due AB, BC non meno la BD, che la AC, ſaranno eguali le due AC, BD. Ma, per eſſere la BD tangente, il rettangolo delle due AB, BC è eguale al quadrato della BD (353). Dunque lo ſteſſo rettangolo ſarà eguale parimente al quadrato della AC.

486. Se una retta, come AB, ſia diviſa in eſtrema, e media ragione nel punto C, potrà dividerſi colla ſteſſa legge qualſiſia altra retta DE, con fare, che la DF ſia quarta proporzionale dopo le

Fig. 123. tre AB, AC, DE. In fatti, eſſendo DE a DF, come AB ad AC, ſarà dividendo (424) EF a DF, come BC ad AC, o pure come AC ad AB. Ma, con invertere li termini della prima proporzione, AC ſta ad AB, come DF a DE (417). Dunque ſarà EF a DF,

a DF, come DF a DE (406); e per tanto la DE ſarà diviſa in eſtrema, e media ragione nel punto F.

487. Quindi, ſe due rette, come AB, DE ſiano diviſe in eſtrema, e media ragione ne' punti C, ed F, le medeſime ſaranno diviſe ancora proporzionalmente negli ſteſſi punti. In fatti, ſe AB non ſia ad AC, come DE a DF, facciaſi, che AC ſia ad AB, come DE a DG (469), la quale DG ſia maggiore della DF. Dovendo adunque la DE eſſer diviſa in eſtrema, e media ragione ancora nel punto G (486), ſarà non ſolo DE a DF, come DF ad EF, ma eziandio DE a DG, come DG ad EG. Onde, conforme DE a DF ha maggior ragione, che DE a DG (407); così ancora DF ad EF avrà maggior ragione, che DG ad EG (406), il che non può eſſere; poichè la ragione di DF ad EF, come minore della ragione di DF ad EG, dee eſſere molto minore della ragione di DG ad EG. *Fig.* 123.

488. Faremo vedere finalmente, come poſſa dividerſi una data retta in modo, che le parti di eſſa ſiano proporzionali alle parti di un' altra retta diviſa. Sia perciò AB la retta diviſa nelle parti AC, CD, DB, e ſia AE l'altra retta data, che deeſi dividere. *Fig.* 124.

Si-

Situinſi le due rette AB, AE talmente, che contengano un' angolo qualſivoglia BAE. Indi, congiunta la BE, tirinſi per gli punti C, e D le rette CF, DG parallele alla BE, che s' incontrino colla AE ne' punti F, e G; e per quel tanto è ſtato di ſopra (447) dimoſtrato, le parti AF, FG, GB della AE ſaranno proporzionali alle parti AC, CD, DB dell' altra AB.

489. Or ſe le parti AC, CD, DB della AB ſiano eguali, dovranno eſſere eguali ancora le parti AF, FG, GE dell' altra AE; onde niente ſarà più facile, quanto di dividere una data retta in un dato numero di parti eguali. Sia perciò AE la data retta, la quale debbaſi dividere a cagion di eſempio in tre parti eguali. Tirinſi dal punto A un' altra retta AB, che contenga colla AE un' angolo qualſivoglia BAE. Indi, preſa su di eſſa ad arbitrio la porzione AC, facciaſi eguale a queſta porzione, così l'altra CD, come la terza DB. Congiungaſi di poi la BE, a cui per gli punti C, e D tirinſi le parallele CF, DG; e le tre parti AF, FG, GE, in cui rimane diviſa la AE da queſte parallele, ſaranno eguali tra di loro.

Fig. 124.

490. Se poi la AE ſia di picciola lunghezza, ed all' incontro il numero delle

delle parti eguali, in cui ella dee dividerſi, ſia così grande, che non poſſano ſegnarſi in eſſa con diſtinzione; ſi potranno avere le ſue parti eguali in queſt' altro modo. Tiriſi ſimilmente la *Fig.* AB, che faccia colla AE un' angolo 125. qualſivoglia; indi diaſi alla AB lunghezza tale, che poſſa prenderſi su di eſſa ſenza confuſione il ricercato numero di parti eguali; tirinſi di poi per gli termini delle parti preſe altrettante rette parallele alla AE, che ſi terminino alla BE; e per gli triangoli equiangoli, che formano queſte parallele colle due AB, BE, chiaro ſi è, che delle parti eguali, in cui dee dividerſi la AE, ne contenga una la prima parallela proſſima al punto B, due la ſeconda, tre la terza, e così dell' altre.

491. Or con queſte due conſtruzioni potrà formarſi la ſcala, di cui ſi ha biſogno per la miſura delle rette. Debbaſi perciò dividere, primieramente la lunghezza del noſtro palmo in 10 parti eguali, che ſaranno le ſue decime parti; indi ciaſcuna decima in altre 10 parti eguali, che ſaranno le ſue centeſime; e finalmente ciaſcuna centeſima in 10 altre parti eguali, che ſaranno le ſue milleſime. Colla prima conſtruzione adunque ſulla retta, corriſpondente alla

lunghezza del palmo, potranno ſegnarſi ſenza confuſione, così le decime parti dello ſteſſo palmo, come le ſue centeſime; ma per includervi ancora le milleſime con egual diſtinzione, potrà farſi uſo della ſeconda conſtruzione, ed ecco come.

Fig. 126. 492. Sia la A B una delle decime parti del palmo, ſuddiviſa in 10 parti eguali, che ſono le ſue centeſime. Deſcrivaſi ſulla AB il quadrato ABCD, e traſportaſi la diviſione della A B in ciaſcuna delle due AD, DC; congiunganſi di poi con rette obblique li punti della diviſione fatta nella A B cogl' altri della diviſione fatta nella D C; e le parallele tirate alla A B per gli punti della diviſione della A D, con terminarſi a quelle rette obblique, ci daranno con ordine le centeſime, inſieme colle milleſime: dimodochè la terza parallela per ragion di eſempio numerata dalla DC, terminandoſi alla quinta obbliqua numerata dalla A D, ſarà una retta di quattro centeſime, e tre milleſime.

493. Un conſimile artificio impiegaſi per avere preſſo a poco, così li minuti primi nelli quadranti terreſtri, come li minuti ſecondi negl' altri celeſti. Per dimoſtrarlo, ſuppongaſi, che

Fig. 127. li due archi concentrici B C, D E, rac-

racchiuſi tra li due raggi AB, AC, ſiano così piccioli, che poſſano riguardarſi come rette parallele; ed in eguali diſtanze deſcrivanſi per ragion di eſempio tra di eſſi altri cinque archi eziandio concentrici. Se adunque conſiderinſi le porzioni di queſt'altri archi compreſe tra la BD, e l'obbliqua BE, chiaro ſi è, che delle 6 parti dell'arco BC, ne contenga una la porzione del primo, 2 la porzione del ſecondo, 3 la porzione del terzo, 4 la porzione del quarto, e 5 la porzione del quinto.

494. Eſſendo così, ſe in un quadrante terreſtre l'arco BC ſia di un grado, colle riferite porzioni degl'altri cinque archi frappoſti tra li due BC, DE ſi avranno le parti dello ſteſſo arco di 10, 20, 30, 40, 50 minuti. E così ancora, ſe in un quadrante celeſte l'arco BC ſia di un minuto, colle ſteſſe porzioni ſi avranno le parti dello ſteſſo arco di 10, 20, 30, 40, 50 minuti ſecondi: dimodochè, ſe nella lamina di ottone, con cui formaſi il quadrante tanto terreſtre, quanto celeſte ſi poteſſero ſegnare in eguali diſtanze altri 60 quadranti concentrici col principale, ſi avrebbero col riferito artificio nel quadrante terreſtre tutti li 60 minuti di ciaſcuno grado, e nel

quadrante celeſte tutti li 60 minuti ſecondi di ciaſcuno minuto primo.

495. Intanto nè la larghezza della lamina permette di poterſi ſegnare in eſſa con diſtanze eguali altri 60 quadranti concentrici col quadrante principale, nè potendoſi fare, tornerebbe conto il farlo; perchè lo ſteſſo loro eccеſſivo numero farebbe perdere molto tempo in diſtinguere tra di eſſi, quale luogo occupa quel quadrante, a cui rapportaſi la porzione, della quale ſi ha biſogno. Onde baſta ſegnarne un numero ragionevole, come di 6, o al più di 10; poichè ſe bene con eſſi non ſi abbiano tutte le 60 parti eguali, in cui ſuddivideſi, così il grado, come il minuto, nientedimeno coll'occhio ſteſſo potranno averſi preſſo a poco le parti mancanti.

§. XXXI.

Della ragione, in cui ſono, così li triangoli, come li parallelogrammi, e di nuovo della loro uguaglianza.

494. LA ragione, in cui ſono così due triangoli, come due parallelogrammi, deeſi ripetere dalle loro baſi, e dalle loro altezze; ed il teorema generale ſi è, che tanto due triangoli, quanto due parallelogrammi ſiano in ragion compoſta di quella delle loro baſi, e dell' altra delle loro altezze. La verità di queſto teorema generale può dedurſi dalla miſura ſteſſa di tali figure. Imperocchè, ſiccome per avere le loro ampiezze debbonſi moltiplicare le baſi per l' altezze (265); così è ſtato avvertito altrove (411), che eſſendo eſpreſſi con numeri li termini di due ragioni, queſte compongonſi inſieme colla moltiplicazione dei loro antecedenti, e dei loro conſeguenti.

497. Da quel teorema generale poi ne diſcendono due altri ſpeciali, cioè, che tanto due triangoli, quanto due parallelogrammi debbano eſſere nella ſemplice ragione delle baſi, eſſendo eguali l' altezze; ed al contrario nella

ſemplice ragione dell' altezze , eſſendo eguali le baſi . E la verità di queſt'altri due teoremi ſpeciali può dedurſi da ciò, che ſiccome con moltiplicare un numero per l' unità non alteraſi il ſuo valore , così nè pure riceve cambiamento alcuno la quantità di una ragione , quante volte queſta ſi compone con un' altra ragione di uguaglianza , la di cui quantità è l' unità (404) .

498. Giova intanto dimoſtrare la verità di tutti tre li riferiti teoremi nel modo, che comunemente ſi pratica . Onde , per incominciare dalli triangoli , dimoſtreremo in primo luogo , che eſſendo eguali l' altezze di due triangoli , la loro ragione ſia eguale a
Fig. quella delle loro baſi . Siano perciò li
128. due triangoli A B C , A B D , li quali per eſſere ſituati colle loro baſi B C , BD ſulla ſteſſa retta CD, e per avere lo ſteſſo vertice A , debbono avere altresì la ſteſſa altezza . Io dico , che queſti due triangoli ſiano nella ſemplice ragione delle loro baſi, dimodochè il triangolo ABC ſarà al triangolo A B D , come la baſe del primo B C alla baſe del ſecondo B D .

499. Per dimoſtrarlo , concepiſcanſi diviſe le due baſi B C , B D in parti eguali ad un'aliquota loro comune, qualunque ella ſia ; e ſe dalli punti della di-

diviſione intendanſi altresì tirate rette al punto A, comune vertice dei due triangoli, chiaro ſi è, che queſti ancora rimaneranno diviſi per mezzo di quelle rette in piccioli triangoli tra di loro eguali. Onde, non ſolo ciaſcuno di queſti piccioli triangoli ſarà parte aliquota ancora dei due A B C, A B D; ma in quante parti ſono diviſe le due B C, BD, in altrettanti piccioli triangoli ſaranno diviſi altresì li due ABC, ABD.

400. Quindi, ſe le moltitudini delle parti eguali contenute nel triangolo A B C, e nella ſua baſe B C dividanſi almeno col penſiero per le moltitudini dell' altre parti eguali, che contengonſi nell' altro triangolo ABD, e nell' altra baſe BD; ſaranno eguali li quozienti di queſte due diviſioni. Ma queſti tali quozienti ſono le quantità delle due ragioni, di cui ſi tratta, cioè del triangolo ABC al triangolo ABD, e della baſe BC alla baſe BD (402). Dunque, dovendo eſſere eguali parimente queſte due ragioni, il triangolo ABC ſarà al triangolo ABD, come la baſe BC alla baſe B D.

501. Dimoſtreremo in ſecondo luogo, che al contrario eſſendo eguali le baſi di due triangoli, la loro ragione ſia eguale a quella delle loro altezze. *Fig.* Siano perciò li due triangoli A B C, 129.

DEF, ſulle di cui baſi BC, EF ſi abbaſſino dagl' angoli verticali le perpendicolari AG, DH, che ſaranno le loro altezze. Pongaſi, che le baſi BC, EF ſiano eguali; ed io dico, che li due triangoli ABC, DEF ſiano nella ſemplice ragione dell' altezze, dimodochè il triangolo ABC ſarà al triangolo DEF, come l' altezza del primo AG all' altezza del ſecondo DH.

502. Per dimoſtrarlo, taglinſi dalle baſi prolungate le porzioni GM, HN eguali alle ſteſſe baſi BC, EF, e congiunganſi le due AM, DN. Adunque, ſe negl' altri due triangoli AGM, DHN prendanſi per baſi le due AG, DH, ſaranno eguali le loro altezze GM, HN; e per tanto il triangolo AGM ſarà al triangolo DHN, come AG a DH (498). Ma ſono eguali tra di loro, tanto li due triangoli ABC, AGM, quanto gl' altri due DEF, DHN, per eſſere eguali, così le loro baſi, come le loro altezze. Dunque ancora il triangolo ABC ſarà al triangolo DEF, come AG a DH.

503. Dimoſtreremo finalmente, che ſe ſiano diſuguali tanto le baſi, quanto l' altezze di due triangoli, la loro ragione ſia compoſta da quella delle baſi, e da quella dell' altezze. Siano perciò li due triangoli ABC, DEF, ſulle di

Fig. 130.

cui

cui baſi BC, EF ſi abbaſſino dagl' angoli verticali le perpendicolari AG, DH, che ſaranno le loro altezze. Pongaſi, che ſiano diſuguali, tanto le baſi BC, EF, quanto l' altezze AG, DH; ed io dico, che il triangolo ABC ſia al triangolo DEF in ragion compoſta della baſe BC alla baſe EF, e dell' altezza AG all' altezza DH.

504. Per dimoſtrarlo, tagliſi dall' altezza maggiore DH la porzione HI eguale all' altra minore AG, e congiunganſi le due EI, FI. Poichè dunque ſono eguali l' altezze AG, IH dei due triangoli ABC, IEF, ſarà il triangolo ABC al triangolo IEF, come la baſe BC alla baſe EF (498). Al contrario poi, avendo gl' altri due triangoli IEF, DEF la ſteſſa baſe EF, ſarà il triangolo IEF al triangolo DEF, come l' altezza IH, ovvero AG all' altezza DH (501).

515. Quindi la ragione, che ſi compone da quella del triangolo ABC al triangolo IEF, e da quella del triangolo IEF al triangolo DEF, ſarà eguale all' altra compoſta da quella della baſe BC alla baſe EF, e da quella dell' altezza AG all' altezza DH. Ma il triangolo ABC ſta al triangolo DEF in ragion compoſta del triangolo ABC al triangolo IEF, e del triangolo IEF

al triangolo DEF (412). Dunque gli ſteſſi due triangoli ABC, DEF ſaranno ancora in ragion compoſta della baſe BC alla baſe EF, e dell' altezza AG all' altezza DH.

506. A queſti tre teoremi può aggiungerſene un quarto, il quale però rapportaſi ai ſoli triangoli, che ritrovanſi avere un' angolo eguale ad un' angolo; e ſi è, che queſti tali triangoli ſiano, non ſolo in ragion compoſta delle loro baſi, e delle loro altezze, ma eziandio in ragion compoſta dei lati, che ſono intorno agl' angoli eguali. Siano perciò li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano l' angolo ABC eguale all' angolo DEF. Io dico, che queſti due triangoli ſiano ancora in ragion compoſta del lato AB al lato DE, e del lato BC al lato EF.

Fig. 130.

507. Prendanſi per baſi dei due triangoli li lati BC, EF; e l' altezze di eſſi ſaranno le perpendicolari AG, DH, abbaſſate ſugli ſteſſi lati dagl' angoli verticali; onde il triangolo ABC ſarà al triangolo DEF in ragion compoſta del lato BC al lato EF, e della perpendicolare AG alla perpendicolare DH (503). Ma, per eſſere equiangoli li due triangoli ABG, DEH, la AG ſta alla DH, come l' altro lato AB

all'altro lato DE (455). Dunque gli ſteſſi due triangoli ſaranno ancora in ragion compoſta del lato BC al lato EF, e del lato AB al lato DE.

508. Or in una maniera conſimile poſſono dimoſtrarſi tutti quattro li riferiti teoremi eziandio per rapporto ai parallelogrammi; ma per eſſere il triangolo la metà del parallelogrammo, con cui ha la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza (171), potranno dimoſtrarſi più facilmente per mezzo di due triangoli, che abbiano con li due parallelogrammi eguali baſi, ed eguali altezze; poichè, dovendo eſſere li due parallelogrammi nella ſteſſa ragione, in cui ſono li due triangoli (439), chiaro ſi è, che quanto ſi è dimoſtrato dei due triangoli, debba aver luogo altresì nelli due parallelogrammi.

509. Due parallelogrammi adunque a ſimiglianza di due triangoli ſaranno nella ſemplice ragione delle baſi, eſſendo eguali l'altezze; ed al contrario nella ſemplice ragione dell'altezze, eſſendo eguali le baſi. Se poi ſiano diſuguali, tanto le baſi, quanto l'altezze, ſaranno li due parallelogrammi in ragion compoſta delle loro baſi, e delle loro altezze. Ed in fine, ſe li due parallelogrammi abbiano un' angolo eguale ad un' angolo, li medeſimi ſaranno

altresì in ragion compoſta dei lati, che ſono intorno agl' angoli eguali.

510. Da ciò intanto, che così due triangoli, come due parallelogrammi generalmente debbano eſſere in ragion compoſta delle baſi, e dell' altezze, può dedurſi, che li medeſimi non poſſano eſſere nella ſemplice ragione delle baſi, ſe non ſiano eguali l'altezze; ſiccome al contrario, che non poſſano eſſere nella ſemplice ragione dell'altezze, ſe non ſiano eguali le baſi. Ed in fatti ſe una ragione ſia compoſta da due altre ragioni, non può ella eſſere eguale ad una delle ſue componenti, ſe l'altra componente non ſia ragion di uguaglianza.

511. Se poi riflettaſi a quel tanto fu avvertito di ſopra (413), cioè, che una ragione compoſta da due altre ragioni debba eſſere di uguaglianza, ſempre quando una delle due componenti è reciproca dell' altra, potrà dedurſi ancora dallo ſteſſo teorema generale, che tanto due triangoli, quanto due parallelogrammi debbano eſſere eguali, quantevolte le loro baſi ſono nella reciproca ragione delle loro altezze.

512. Anzi, conforme è ſtato dimoſtrato (506), che li triangoli, e li parallelogrammi, che hanno un' angolo eguale ad un' angolo, ſiano ancora in

ragion

ragion compoſta de' lati, che ſono intorno agl' angoli eguali; così da queſto teorema potrà dedurſi parimente, che due triangoli, o due parallelogrammi, li quali hanno un' angolo eguale ad un' angolo, debbano eſſere eguali, ſempre quando li lati intorno agl' angoli eguali ſono reciprocamente proporzionali.

513. Ma per dimoſtrare in altra guiſa queſti due teoremi dell'uguaglianza, ſiano li due triangoli ABC, DEF, in cui le baſi BC, EF ſiano nella reciproca ragione dell' altezze AG, DH, coſicchè ſia BC ad EF, come DH ad AG. Io dico, che queſti due triangoli debbano eſſere eguali. Per dimoſtrarlo, formiſi il terzo triangolo IKL, la di cui baſe KL ſia eguale alla EF, e l'altezza IM eguale alla AG. *Fig.* 131.

514. Conforme adunque il triangolo ABC dee eſſere al triangolo IKL, come BC a KL ovvero EF (498); così il triangolo DEF ſarà al triangolo IKL, come DH ad IM ovvero AG (501). Onde, volendoſi che BC ſia ad EF, come DH ad AG, ſarà ancora il triangolo ABC al triangolo IKL, come il triangolo DEF allo ſteſſo triangolo IKL (406); e per tanto li due triangoli ABC, DEF, ſerbando col terzo IKL,

IKL la ſteſſa ragione, ſaranno tra di loro eguali (408).

Fig. 132. 515. Abbiano di poi li due triangoli ABC, DCE l'angolo ACB eguale all'angolo DCE, e li lati intorno a queſt' angoli reciprocamente proporzionali, coſicchè ſia BC a CE, come DC ad AC. Io dico, che ancora queſti due triangoli debbano eſſere eguali. Per dimoſtrarlo, ſituinſi li due triangoli in modo, che li due lati BC, CE formino una retta continuata; e per eſſere eguali li due angoli verticali ACB, DCE, ancora gli altri due lati AC, CD ſtaranno a dirittura (63).

516. Se adunque congiungaſi la AE, coſicchè ſi abbia il terzo triangolo ACE, conforme il triangolo ABC dee eſſere al triangolo ACE, come BC a CE (498), così ancora il triangolo DCE ſarà al triangolo ACE, come DC ad AC. Onde, volendoſi, che BC ſia a CE, come DC ad AC, ſarà ancora il triangolo ABC al triangolo ACE, come il triangolo DCE allo ſteſſo triangolo ACE (406); e per tanto li due triangoli ABC, DEC, ſerbando col terzo ACE la ſteſſa ragione, ſaranno tra di loro eguali (408).

517. Di queſti due teoremi hanno luogo ancora li converſi, cioè I, che eſſendo eguali due triangoli, le baſi deb-

debbano eſſere nella reciproca ragione dell'altezze; e II, che eſſendo due triangoli eguali, ed avendo un'angolo eguale ad un' angolo, li lati intorno a queſt' angoli debbano eſſere reciprocamente proporzionali: come in fatti una ragione compoſta da due altre ragioni non può eſſere di uguaglianza, ſe una delle componenti non ſia reciproca dell' altra; ma con dimoſtrazioni contrarie alle precedenti poſſono comprovarſi nel ſeguente modo.

518. Siano primieramente eguali li due triangoli ABC, DEF. Io dico, che le loro baſi BC, EF ſiano nella reciproca ragione dell'altezze AG, DH. Imperocchè, formato di nuovo il terzo triangolo IKL, la di cui baſe KL ſia eguale alla EF, e l' altezza IM eguale alla AG; ſarà il triangolo ABC al triangolo IKL, come BC a KL ovvero EF; ed il triangolo DEF al triangolo IKL, come DH ad IM, ovvero AG. Ma, volendoſi eguali li due triangoli ABC, DEF, il primo di eſſi ABC dee eſſere al terzo triangolo IKL come l' altro DEF allo ſteſſo IKL (407). Dunque ancora BC ſarà ad EF, come DH ad AG. *Fig.* 131.

519. Pongaſi di poi, che li due triangoli ABC, DEC non ſolo ſiano eguali, ma abbiano altresì l' angolo ACB *Fig.* 132.

Fig. 132. ACB eguale all'angolo DCE. Io dico, che li lati intorno a queſt' angoli eguali debbano eſſere reciprocamente proporzionali. Imperocchè, ſituati di nuovo queſti due triangoli in modo, che formino una retta continuata, così li due lati BC, CE, come gl' altri due AC, CD, e congiunta la AE; per la loro uguaglianza ſarà il triangolo ABC al triangolo ACE, come il triangolo DEC allo ſteſſo triangolo ACE (407). Ma li primi due ſono nella ragione di BC a CE, e gl' altri due nella ragione di DC ad AC (498). Dunque ſarà ancora, BC a CE, come DC ad AC.

520. In una maniera conſimile poſſono dimoſtrarſi li quattro riferiti teoremi eziandio ne' parallelogrammi; ma baſterà dedurli da ciò, che li parallelogrammi ſono nella ſteſſa ragione, in cui ſono li triangoli, che hanno con eſſi le ſteſſe baſi, e le ſteſſe altezze. E per avvertirlo una volta per ſempre, conforme dee averſi il parallelogrammo, come un raddoppiato triangolo; così tutto ciò, che compete ai triangoli per rapporto alle loro ampiezze, o ſiano ſuperficie, dovrà aver luogo ancora ne' parallelogrammi.

521. Del rimanente per quanto alla ragione, in cui ſono l' altre figure ret-

rettilinee, potrà di essa giudicarsi per mezzo de' triangoli, a cui riduconsi le stesse figure. Ma se le figure siano regolari, conforme ciascuna di esse è eguale ad un triangolo, che ha per base una retta eguale al suo perimetro, e per altezza la perpendicolare abbassata dal centro della figura sopra uno de' suoi lati (254), così dovranno quelle essere in ragion composta dei loro perimetri, e delle riferite loro perpendicolari. Onde saranno nella semplice ragione de' perimetri, essendo eguali le perpendicolari; nella semplice ragione delle perpendicolari, essendo eguali li perimetri; ed in ragion di uguaglianza, se li perimetri siano nella reciproca ragione delle perpendicolari.

§. XXXII.

Di una proprietà molto rilevante delle rette proporzionali.

522. NElle rette proporzionali incontrasi una proprietà molto rilevante, la quale ricavasi da quel tanto è stato poc' anzi dimostrato intorno all' uguaglianza de' parallelogrammi. Ella adunque si è, che essendo quattro rette proporzionali, il rettangolo delle due estreme sia eguale al rettan-

Fig. 133. rettangolo delle due di mezzo. Ed in fatti, se AB, CD, DE, BF siano le quattro rette proporzionali, e formisi così il rettangolo AF colle due estreme AB, BF, come il rettangolo CE colle due di mezzo CD, DE, si avranno con essi due parallelogrammi, in cui non solo sono eguali li due angoli ABF, CDE, ma li lati intorno a quest' angoli sono ancora reciprocamente proporzionali. Onde perciò, che è stato dimostrato, li due rettangoli AF, CE dovranno essere eguali.

523. Ma la conversa di questa proprietà similmente ha luogo, cioè, che se si abbiano quattro rette, ed il rettangolo delle due estreme sia eguale al rettangolo delle due di mezzo, le quattro rette debbano essere proporzionali.

Fig. 133. Siano perciò le quattro rette AB, CD, DE, BF, ed il rettangolo AF delle due estreme AB, BF sia eguale al rettangolo CE delle due di mezzo. Io dico, che queste quattro rette debbano essere proporzionali. In fatti colli due rettangoli AF, CE si hanno due parallelogrammi, che non solo sono eguali, ma hanno ancora l'angolo ABF eguale all'angolo CDE. Dunque, dovendo essere li lati intorno a quest'angoli reciprocamente proporzionali, sarà AB a CD, come DE a BF.

524.

524. Quantunque poi nella proporzione continua vegganſi tre ſole rette, nientedimeno, ſecondo è ſtato avvertito (416), quella di mezzo dee ripeterſi, e fare le veci di conſeguente nella prima ragione, e di antecedente nell' altra. Onde, perchè il rettangolo di due rette eguali è lo ſteſſo, che il quadrato di una di eſſe; chiaro ſi è, che eſſendo tre rette continuamente proporzionali, il rettangolo delle due eſtreme debba eſſere eguale al quadrato di quella di mezzo: come al contrario, ſe ſi abbiano tre rette, ed il rettangolo delle due eſtreme ſia eguale al quadrato di quella di mezzo, le tre rette dovranno eſſere continuamente proporzionali.

525. Attenta queſta proprietà delle rette proporzionali, vedeſi chiaramente come debba ritrovarſi un numero, che ſia mezzo proporzionale tra due altri numeri dati, cioè con moltiplicare inſieme li due dati numeri, e con eſtrarre dal prodotto la radice quadrata. Così, ſe 2, e 8 ſiano li due numeri dati, ſarà 16 il loro prodotto; ed eſſendo 4 la radice quadrata di 16, ſarà 4 il mezzo proporzionale, che cade tra li due 2, e 8. E così ancora, ſe li due dati numeri ſiano 3, e 12, per eſſere 6 la radice quadrata del loro prodotto 36, ſarà 6 il mezzo proporzionale, che cade

de tra li due 3, e 12.

526. Colla ſteſſa proprietà delle rette proporzionali può evitarſi la difficoltà, che s'incontra in diſporre le rette, che ritrovanſi eſſere tra di loro in perturbata ragione, per dedurne la conſeguenza, che le prime paragonate coll' ultime ſiano nella ſteſſa ragione. Così, ſe A ſia a B, come E ad F, e B ſia a C, come D ad E; primieramente debbonſi diſporre almeno mentalmente queſte ſei rette in modo, che le tre A, B, C ſiano da un lato, e le tre altre D, E, F dall' altro lato; ed indi dedurne la conſeguenza, che A ſia a C, come D ad F.

527. Ma con formare gl'eguali rettangoli delle rette proporzionali, ſi giunge con ſicurezza alla ſteſſa conſeguenza, ſenza eſſervi biſogno di diſpoſizione alcuna. In fatti, eſſendo A a B, come E ad F, ſarà il rettangolo delle due A, ed F eguale al rettangolo dell' altre due B, ed E; e così ancora, eſſendo B a C, come D ad E, ſarà il rettangolo delle due B, ed E eguale al rettangolo dell' altre due C, e D. Onde, dovendo eſſere eguali tra di loro il rettangolo delle due A, ed F, ed il rettangolo dell' altre due C, e D, ſarà A a C, come D ad F.

528. Ed in queſto modo, ſenza ricor-

correre al modo di argomentare perturbando, può dimoſtrarſi facilmente quel tanto fu avvertito di ſopra (482), cioè, che eſſendo due rette reciproche con due altre rette, debba cadere la ſteſſa mezza proporzionale, così tra le prime, come tra le ſeconde. In fatti, ſe le due A ed E ſiano reciproche colle due B e D; ſarà A a B, come D ad E (480), e per tanto il rettangolo delle due A, ed E ſarà eguale al rettangolo dell'altre due B, e D. Ma poſto, che C ſia mezza proporzionale tra le due B, e D, dee eſſere il ſuo quadrato eguale al rettangolo delle due B, e D. Dunque, dovendo eſſere lo ſteſſo quadrato eguale ancora al rettangolo delle due A, ed E, la ſteſſa C ſarà mezza proporzionale parimente tra queſt'altre due A, ed E.

529. Intanto, ſe vogliaſi attentamente riflettere, ſi vedrà, che ancora alle rette, che ſono in perturbata ragione con altrettante rette, può darſi la ſteſſa diſpoſizione di quelle, che ſono tra di loro in ragione ordinata, e ricavarſi da eſſe la ſteſſa conſeguenza. In fatti, ſe A ſia a B, come E ad F, ſarà A a B nella reciproca ragione di F ad E (418); e così ancora, ſe B ſia a C, come D ad E, ſarà B a C nella reciproca ragione di E a D. Onde le

tre

tre rette A, B, C ſaranno in ordinata ragione reciproca coll' altre tre F, E, D; e pertanto, dovendo eſſere ordinando A a C ſimilmente nella reciproca ragione di F a D, ſarà A a C, come D ad F.

530. Ma per ritornare alla proprietà delle rette proporzionali, per mezzo di eſſa, niente ora ſarà più facile, quanto di dimoſtrare, che interſegandoſi due rette dentro di un cerchio, ſiano eguali li rettangoli fatti dalle loro porzioni. Siano petciò AC, BD le
Fig. due rette, che dentro del cerchio ABC
134. interſeganſi nel punto E. Se adunque congiunganſi l'altre due AD, BC, ſaranno eguali tra di loro, così li due angoli ADB, ACB, come gl'altri due DAC, DBC (333). Quindi, facendoſi equiangoli li due triangoli AED, DEC, ſarà AE a DE, come BE a CE (498); e pertanto, eſſendo proporzionali le quattro rette AE, DE, BE, CE, ſarà il rettangolo delle due eſtreme AE, CE eguale al rettangolo delle due di mezzo BE, DE.

531. In una maniera conſimile può dimoſtrarſi ancora, che incontrandoſi due rette fuori del cerchio, ſiano eguali li rettangoli fatti dalle ſteſſe rette nelle loro porzioni, che rimangono fuori del cerchio. Siano perciò AE, BE le due

due rette, che fuori del cerchio ABC incontranſi nel punto E. Se adunque congiunganſi l'altre due AD, BC, ſaranno eguali li due angoli CAD, CBD (333). Onde, facendoſi equiangoli li due triangoli ADE, BCE, ſarà AE a DE, come BE a CE (498); e per tanto il rettangolo delle due eſtreme AE, CE ſarà eguale al rettangolo delle due di mezzo BE, DE. *Fig.* 135.

532. In queſta guiſa può dimoſtrarſi finalmente, che incontrandoſi fuori del cerchio una ſecante, ed una tangente, il rettangolo fatto da tutta la ſecante nella porzione, che di eſſa rimane fuori del cerchio ſia eguale al quadrato della tangente. Imperocchè, ſe AE ſia la ſecante, e BE la tangente, che incontranſi fuori del cerchio ABC nel punto E; congiunte le due AB, CB, ſarà l'angolo CBE eguale all'angolo CAB (338). Onde, facendoſi equiangoli li due triangoli ABE, BCE, ſarà AE a BE, come BE a CE (498); e per tanto, eſſendo le tre rette AE, BE, CE continuamente proporzionali, ſarà il rettangolo delle due eſtreme AE, CE eguale al quadrato di quella di mezzo BE. *Fig.* 136.

533. Dalla proprietà delle rette proporzionali poſſono dedurſi parimente tutte l'uguaglianze, che hanno luogo nel trian-

Fig. 137. triangolo rettangolo . Sia perciò il triangolo A B C rettangolo in A , e dall' angolo retto si abbassi sull' ipotenusa BC la perpendicolare AD . Siccome adunque , per essere li due triangoli A B C, D B A equiangoli , B C sta ad AB , come AB a BD ; così per gl' altri due triangoli A B C , D A C similmente equiangoli , B C starà ad A C , come AC a CD . Onde dovrà essere il quadrato del lato AB eguale al rettangolo dell' ipotenusa B C nella porzione BD , ed il quadrato dell' altro lato AC eguale al rettangolo della stessa ipotenusa B C nell' altra porzione C D ; dal che ne segue , che il quadrato dell'ipotenusa BC sia eguale ai quadrati delli due lati AB , AC (176) .

534. Essendo poi equiangoli li due triangoli B D A , A D C , dovrà essere BD ad AD , come la stessa AD a CD ; onde il quadrato della perpendicolare abbassata A D si farà eguale al rettangolo delle due porzioni dell' ipotenusa B D , C D . E finalmente , conforme dall' essere equiangoli li due triangoli BAD , ADC ne segue , che BC sia ad AB , come AC ad AD ; così da questo stesso potrà dedursi , che il rettangolo fatto dall' ipotenusa BC nella perpendicolare AD sia eguale al rettangolo dei due lati AB , AC .

535.

535. Ma perchè veggaſi con nuovi teoremi il vantaggio, che ricavaſi dalla proprietà delle rette proporzionali, dimoſtreremo in primo luogo, che ſe due tangenti, tirate all'eſtremità di un diametro del cerchio, s' incontrino con una terza tangente, il loro rettangolo ſia eguale al quadrato del raggio. Sia perciò il cerchio BFC, che abbia il punto A per centro, e la BC per diametro. Tirinſi all' eſtremità di queſto diametro le due tangenti BD, CE, che s' incontrino colla terza tangente DE ne' punti D, ed E. Io dico, che il rettangolo delle due tangenti BD, CE ſia eguale al quadrato del raggio AC. *Fig.* 138.

536. Per dimoſtrarlo, congiungaſi così la AD, come la AE. Se adunque F ſia il punto del contatto della terza tangente DE, ſaranno eguali tanto le due BD, DF quanto le due CE, EF (357); onde li due angoli BDF, CEF ſaranno diviſi per metà dalle due rette AD, AE. Quindi, eſſendo gli ſteſſi angoli inſieme eguali a due retti (142), ſaranno le loro metà BDA, CEA eguali ad un retto. Ma li due BDA, BAD ſimilmente ſono eguali ad un retto (102). Dunque, facendoſi l'angolo BAD eguale all'angolo CEA, ſaranno equiangoli li due triangoli ABD, ECA;

ECA ; e per tanto , dovendo eſſere BD a BA, ovvero AG, come AC a CE (455), ſarà il rettangolo delle due tangenti BD, CE eguale al quadrato del raggio AC.

537. Notiſi quì intanto, che eſſendo eguali, così le due BD, DF, come le due CE, EF, ancora il rettangolo fatto dalle due porzioni DF, EF della terza tangente DE dovrà eſſere eguale al quadrato del raggio . Ma ciò ſimilmente può dimoſtrarſi colla proprietà delle rette proporzionali. Imperocchè , ſe congiungaſi la AF, queſta come tirata dal centro al punto del contatto, ſarà perpendicolare ſulla tangente DE. Onde , eſſendo eguali li due angoli DAF, AEF, ſaranno equiangoli li due triangoli DFA, AFE ; e pertanto, dovendo eſſere DF ad AF, come la ſteſſa AF ad EF (455) , ſarà il rettangolo delle due porzioni DF, EF della tangente DE eguale al quadrato del raggio AF.

538. Dimoſtreremo in ſecondo luogo , che ſe dentro di un cerchio iſcrivaſi un quadrilatero, il rettangolo delle due ſue diagonali ſia eguale ai due rettangoli fatti dalli ſuoi lati oppoſti .
Fig. 139. Sia perciò il cerchio ABC , dentro di cui iſcrivaſi il quadrilatero ABCD. Io dico, che ſe tirinſi in queſto quadrilatero

tero le due diagonali AC, BD, il loro rettangolo ſarà eguale a due rettangoli, uno fatto dalli due lati oppoſti AB, CD, e l'altro dagl' altri due BC, AD. Per dimoſtrarlo, facciaſi l' angolo ADE eguale all' angolo CDB.

539. Eſſendo adunque equiangoli li due triangoli DAE, DBC, ſarà AD ad AE, come BD a BC (455); ed in conſeguenza il rettangolo delle due BD, AE ſarà eguale al rettangolo dell'altre due BC, AD. E così ancora, eſſendo equiangoli gl' altri due triangoli DBA, DCE, ſarà BD ad AB, come CD a CE; e pertanto il rettangolo delle due BD, CE ſarà eguale al rettangolo dell' altre due AB, CD. Quindi li due rettangoli, uno della BD nella AE, e l' altro della ſteſſa BD nella CE, ſaranno inſieme eguali a due altri rettangoli, uno della BC nella AD, e l' altro della AB nella CD. Onde, per eſſere li primi due eguali al ſolo rettangolo della BD nella AC (172), dovrà conchiuderſi, che il rettangolo delle due diagonali ſia eguale ai due rettangoli fatti dalli lati oppoſti.

540. Dimoſtreremo finalmente, che ſe per uno degl' angoli di un parallelogrammo rettangolo tirifi una retta in modo, che s' incontri colli due lati oppoſti in due punti, egualmente diſtanti

da quello, in cui interſeganſi le due diagonali, ſi abbiano cogli ſteſſi lati, e colle porzioni ad eſſi aggiunte quattro rette continuamente proporzionali.

Fig. 140. Sia perciò il parallelogrammo rettangolo A B C D, e per l'angolo C tiriſi la retta E F in modo, che incontrandoſi colli due lati oppoſti A B, A D ne' punti E, ed F, ſiano queſti punti egualmente diſtanti dal punto G, in cui interſeganſi le due diagonali A C, B D. Io dico, che le quattro rette AB, D F, B E, A D ſiano continuamente proporzionali.

541. Per dimoſtrarlo, ſi abbaſſino dal punto G ſulli lati AB, AD le perpendicolari GH, GI, che divideranno per metà gli ſteſſi lati. E poichè il rettangolo delle due AE, BE inſieme col quadrato della BH è eguale al quadrato della H E (191); coll' aggiunta del comune quadrato della G H, ſarà il rettangolo delle due AE, BE inſieme col quadrato della B G eguale al quadrato della G E. Ma, per la ſteſſa ragione, il rettangolo delle due A F, D F inſieme col quadrato della D G è eguale al quadrato della GF. Dunque, per eſſere eguali, così li quadrati delle due BG, DG, come li quadrati dell'altre due G E, G F, ſarà il rettangolo delle due A E, B E eguale parimente al

al rettangolo dell'altre due A F, D F.

542. Quindi, attenta l'uguaglianza di queſti due rettangoli, ſarà A E ad AF, come DF a BE. Ma, per eſſere li due triangoli D C F, B E C equiangoli col triangolo AEF, dee eſſere nella ragione di A E ad A F, tanto D C o ſia AB a DF, come BE a BC ovvero AD (455). Dunque, facendoſi eguali tra di loro le tre ragioni di AB a D F, di B E ad A D, e di D F a BE, ſarà AB a DF, come DF a BE, e DF a BE, come BE ad AD; e per tanto le quattro rette AB, DF, BE, AD ſaranno continuamente proporzionali.

§. XXXIII.

Della ſimiglianza delle figure rettilinee.

543. DUe figure rettiline della ſteſſa ſpecie diconſi eſſere ſimili tra di loro, qualora ritrovanſi avere gl'angoli eguali agl'angoli, ciaſcuno a ciaſcuno, e proporzionali li lati, che ſono intorno agl'angoli eguali. Ma, ſe bene per la ſimiglianza delle figure richiedanſi due condizioni, cioè l'uguaglianza degl'angoli, e la proporzionalità de' lati intorno agl'angoli eguali;

nientedimeno, trattandoſi de' triangoli, baſta, che in eſſi s' incontri una delle due condizioni, per eſſerſi dimoſtrato, che due triangoli, eſſendo equiangoli, debbano avere li lati intorno agli angoli eguali ancora proporzionali (455), ed al contrario, che avendo li lati proporzionali debbano eſſere parimente equiangoli (459).

544. La ſimiglianza intanto de' triangoli può conoſcerſi altresì in due altre maniere, primieramente con vedere, ſe abbiano due lati proporzionali a due lati, ed eguali gl'angoli contenuti da queſti lati; ed in ſecondo luogo, con oſſervare, ſe abbiano due lati proporzionali a due lati, e degl' angoli oppoſti a queſti lati due ſiano eguali, e due della ſteſſa ſpecie: per eſſerſi dimoſtrato, che così nel primo (462), come nel ſecondo caſo (464) li triangoli debbano eſſere equiangoli, e farſi in conſeguenza proporzionali tutti tre li loro lati.

545. Se due parallelogrammi abbiano un' angolo comune, e ſiano ſituati intorno alla ſteſſa diagonale, non v'ha dubbio, che debbano eſſere ſimili; poichè, ſiccome l'angolo comune fa, che gl' altri angoli ſiano ancora eguali; così la diagonale comune farà, che li due triangoli, in cui rimane diviſo uno di eſſi,

ſiano

ſiano equiangoli colli due dell' altro, ed in conſeguenza, che li due parallelogrammi abbiano ancora li lati intorno agl' angoli eguali proporzionali. Ma al contrario, ſe li due parallelogrammi ſiano ſimili, ed abbiano un' angolo comune, dovranno eſſere ancora intorno alla ſteſſa diagonale.

546. Per dimoſtrarlo, ſiano BD, EG due parallelogrammi ſimili, che abbiano l' angolo A comune; e ſe ſia poſſibile, la diagonale del primo AC paſſi non già per F, ma per qualſiſia altro punto H del lato EF. Tirata adunque per queſto punto H la HI parallela alla EA, li due parallelogrammi BD, EI, come ſituati intorno alla ſteſſa diagonale AHC, ſaranno ſimili; e per tanto AB ſarà a BC, come AE ad EH. Ma, per la ſimiglianza dei due BD, EG, dee eſſere AB a BC, come AE ad EF. Dunque AE ſarà ad EH, come la ſteſſa AE ad EF (406), il che non può ſuſſiſtere (408). *Fig.* 141.

547. Eſſendo eguali in qualſiſia figura regolare, così li lati, come gl' angoli; chiaro ſi è, che le figure regolari della ſteſſa ſpecie ſiano tutte ſimili. Ma, ſe vogliaſi attentamente riflettere, ſi vedrà, che li triangoli iſoſceli, in cui divideſi una di eſſe per le rette tirate agl' angoli dal ſuo centro, ſiano

ſimili ancora colli triangoli iſoſceli dell' altre. Dal che ne ſegue, che li loro perimetri ſiano nella ragione, non ſolo di due dei loro lati, ma eziandio delle perpendicolari abbaſſate dalli loro centri ſugli ſteſſi lati.

548. Notiſi quì intanto, che ancora l'altre figure rettilinee ſimili poſſono dividerſi talmente in triangoli, che quelli di una di eſſe ſiano ſimili con quelli dell' altre. Siano perciò li due pentagoni ſimili ABCDE, FGHIL, in cui gl' angoli eguali, e li lati proporzionali ſerbino l'ordine delle lettere, con cui ſi ſono diſegnati. Prendanſi in eſſi due angoli eguali, come ABC, FGH, da cui tirinſi agl' angoli oppoſti le rette BD, BE, GI, GL. Io dico, che li tre triangoli BCD, BDE, BEA del primo poligono ſiano eziandio ſimili colli tre triangoli GHI, GIL, GLF dell' altro poligono.

Fig. 142.

549. In fatti, eſſendo eguali li due angoli BCD, GHI, ed eſſendo BC a CD, come GH a GI, faranno ſimili li primi due triangoli BCD, GHI (544). Ma colla loro ſimiglianza, non ſolo ſi fanno eguali, così li due angoli BDC, GIH, come gl' altri due BDE, GIL, ma dee eſſere altresì BD a CD, come GI ad HI. Dunque, eſſendo CD a DE, come HI ad IL, ſarà ordinando

do BD a DE, come GI ad IL (429), e per tanto ancora gl'altri due triangoli BDE, GIL ſaranno ſimili. Ed in una maniera conſimile ſi dimoſtrerà, che li rimanenti triangoli BEA, GLF ſiano parimente ſimili.

550. Or è proprietà di tutte le figure ſimili, di eſſere tra di eſſe nella duplicata ragione de' loro lati omologi. Per dimoſtrarla, ſiano primieramente ſimili li due triangoli ABC, DEF, dimodochè gl'angoli in B, ed E ſiano eguali, ed AB ſia a BC, come DE ad EF. Per l'uguaglianza adunque di quelli due angoli, il triangolo ABC ſarà al triangolo DEF in ragion compoſta di AB a DE, e di BC ad EF (506). Ma, eſſendo AB a BC, come DE ad EF, permutando dee eſſere ancora AB a DE, come BC ad EF (419). Dunque, eſſendo eguali le due ragioni componenti di AB a DE, e di BC ad EF, la ragion compoſta ſarà duplicata di ciaſcuna di eſſe (414); e per tanto li due triangoli ſimili ſaranno nella duplicata ragione così dei lati omologi AB, DE, come degl'altri due BC, EF. *Fig.* 143.

551. Può dimoſtrarſi queſto ſteſſo in un'altro modo, ed ecco come. Ritroviſi la terza proporzionale dopo le due BC, EF, che ſia BG (470), e con-

congiungaſi la AG. Eſſendo adunque AB a BC, come DE ad EF, ſarà permutando AB a DE, come BC ad EF (419). Ma BC ſta ad EF, come EF a BG. Dunque ancora AB ſarà a DE, come EF a BG (406). Quindi, facendoſi eguali li due triangoli DEF, ABG (515), ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF, come lo ſteſſo triangolo ABC al triangolo ABG (407). Ma queſti due triangoli ſono nella ragione di BC a BG, la quale ragione, per eſſere le tre BC, EF, BG continuamente proporzionali, è duplicata della ragione di BC ad EF (415). Dunque ancora li due triangoli ABC, DEF ſaranno tra di loro in queſta ſteſſa duplicata ragione.

Fig. 142. 552. Siano in appreſſo li due poligoni ſimili ABCDE, FGHIL. Prendanſi in eſſi due angoli eguali, come ABC, FGH, da cui tirinſi agl' angoli oppoſti le rette BD, BE, GI, GL; e ſecondo è ſtato dimoſtrato (545), li triangoli del primo BCD, BDE, BEA ſono ſimili colli triangoli dell' altro GHI, GIL, GLF. Onde, eſſendo nella duplicata ragione di BD a GI tanto li due BCD, GHI, quanto li due BDE, GIL (550); ſarà il triangolo BCD al triangolo GHI, come il triangolo BDE al triangolo GIL. E così an-

ancora, essendo nella duplicata ragione di BE a GL, non meno li due BDE, GIL, che gl' altri due BEA, GLF; sarà il triangolo BDE al triangolo GIL, come il triangolo BEA al triangolo GLF.

553. Li triangoli adunque BCD, BDE, BEA del primo poligono sono nella stessa ragione colli triangoli GHI, GIL, GLF del secondo poligono. Dunque la somma dei primi, o sia il poligono ABCDE, sarà alla somma degl' altri, ovvero al poligono FGHIL, in quella medesima ragione (436); e per tanto il poligono ABCDE sarà al poligono FGHIL, come il primo triangolo BCD al primo triangolo GHI. Ma questi due triangoli, per essere simili, sono nella duplicata ragione dei loro lati omologi BC, GH. Dunque nella duplicata ragione di questi stessi lati saranno eziandio li due poligoni.

554. Da ciò intanto possono dedursi molte conseguenze, di cui la prima si è, che siccome li quadrati, per essere figure simili, sono eziandio nella duplicata ragione delle rette, sulle quali sono descritti; così potrà dirsi altresì, che due figure simili siano, come li quadrati dei loro lati omologi. Ma se vogliasi esprimere con semplici rette, così la ragione duplicata di detti lati, co-

me la ragione dei loro quadrati, non dovrà farſi altra coſa, ſe non che ritrovare la terza proporzionale dopo gli ſteſſi lati; perchè in queſto modo le due figure ſimili ſaranno tra di loro, come il primo lato alla terza proporzionale ritrovata (415).

555. La ſeconda conſeguenza ſi è, che ſe ſopra li lati di un triangolo rettangolo deſcrivanſi figure ſimili, quella deſcritta ſull' ipotenuſa ſia eguale alle due deſcritte ſopra gl' altri due lati. In fatti queſte tali figure ſono nella ſteſſa ragione, che ſerbano tra di eſſi li quadrati dei lati, su di cui ſono deſcritte (554). Onde, conforme il quadrato dell' ipotenuſa è eguale ai quadrati degl' altri due lati; così la figura deſcritta ſull' ipotenuſa ſimilmente ſarà eguale alle figure deſcritte ſopra gl' altri due lati.

556. La terza conſeguenza ſi è, che ſe ſi abbiano quattro rette proproporzionali, e deſcrivanſi figure ſimili, tanto ſulle due prime, quanto ſull' altre due; ancora queſte figure ſiano proporzionali. Imperocchè, ſiccome le prime due figure ſóno nella duplicata ragione della prima retta alla ſeconda, così l' altre due ſaranno nella duplicata ragione della terza retta alla quarta. Ma, per eſſere le quattro rette

te proporzionali, ſono eguali le ragioni della prima alla ſeconda, e della terza alla quarta. Dunque, dovendo eſſere parimente eguali le loro ragioni duplicate (414), le quattro figure ſaranno eziandio proporzionali.

557. La quarta, ed ultima conſeguenza ſi è, che ſe ſi abbiano quattro rette, e ſiano proporzionali le figure ſimili deſcritte, tanto ſulle prime due, quanto ſull' altre due, ancora le quattro rette debbano eſſere proporzionali. Imperocchè, attenta la proporzionalità delle quattro figure, la ragion duplicata della prima retta alla ſeconda ſarà eguale alla ragion duplicata della terza retta alla quarta. Onde, dovendo eſſere parimente eguali le loro ragioni ſemplici (414), le quattro rette ſaranno proporzionali.

558. Niente poi è egli più facile, quanto di deſcrivere ſopra una data retta, come AB, una figura, che ſia ſimile ad un' altra figura data FGHIL. Dividaſi perciò la figura data in triangoli per mezzo delle diagonali FH, FI; indi, ſuppoſto, che la AB debba eſſere omologa col lato FG, facciaſi su di eſſa, così l' angolo ABC eguale all'angolo FGH, come l'angolo BAC eguale all'angolo GFH; ed incontrandoſi le due AC, BC nel punto C, ſaran- *Fig.* 144.

no

no già ſimili li due triangoli ABC, FGH.

559. Facciaſi in appreſſo ſulla AC, così l'angolo CAD eguale all'angolo HFI, come l'angolo ACD eguale all'angolo FHI; e con incontrarſi le due AD, CD nel punto D, ſaranno ſimili ancora li due triangoli ACD, FHI. Facciaſi finalmente ſulla AD, così l'angolo DAE eguale all'angolo IFL, come l'angolo ADE eguale all'angolo FIL; e con incontrarſi le due AE, DE nel punto E, ſaranno ſimili parimente li due triangoli ADE, FIL. Onde le due figure ABCDE, FGHIL, come compoſte con ordine da triangoli ſimili, ſaranno eziandio ſimili tra di loro.

Fig. 144. 560. Se poi vogliaſi, che la nuova figura non ſolo ſia ſimile alla figura data FGHIL, ma abbia ancora colla medeſima data ragione; in tal caſo biſognerà, che la AB, su di cui ella dee deſcriverſi, abbia una determinata lunghezza. Onde, ſe la data ragione ſia quella della retta M alla retta N, primieramente dovrà ritrovarſi tra queſte due rette la mezza proporzionale, che ſia O (416), ed indi dare alla AB lunghezza tale, che ſia quarta proporzionale dopo le tre O, M, ed FG; poichè, dovendo eſſere le due figure nella

la duplicata ragione di AB ad FG, o pure di M ad O, ſaranno nella ſemplice ragione di M ad N (415).

561. Finalmente, ſe vogliaſi, che la nuova figura (415) non ſolo ſia ſimile alla data FGHIL, ma eguale altresì ad un' altra figura data, come K; tutta via dovrà darſi alla AB una determinata lunghezza, ma per definirla, fa duopo primieramente ridurre a quadrati le due figure date: come in fatti, ſe M ſia il lato del quadrato eguale alla figura K, ed O il lato del quadrato eguale all' altra figura FGHIL, dovrà darſi alla AB lunghezza tale, che ſia quarta proporzionale dopo le tre O, M, ed FG; e ciò per la ragione, che dovendo eſſere le due figure, come li quadrati delle due AB, FG, o pure delle due M, ed O, conforme la figura FGHIL è eguale al quadrato della O, così ancora l' altra ABCDE ſarà eguale al quadrato della M, ed in conſeguenza alla figura K. *Fig.* 144.

562. Del rimanente egli è facile ad intenderſi, che le figure ſimili ad una terza ſiano ſimili ancora tra di loro. Imperocchè, ſiccome per eſſere ciaſcuna delle due equiangola con quella terza, debbono eſſere equiangole eziandio tra eſſo loro; così, eſſendo proporzionali colli lati di quella terza,

tanto

tanto li lati della prima, quanto li lati della ſeconda, dovranno eſſere proporzionali tra di loro ancora li lati delle due figure. Onde li due parallelogrammi, che formanſi intorno alla diagonale di un terzo parallelogrammo nella maniera altrove ſpiegata (147), per eſſere ciaſcuno di eſſi ſimile al terzo parallelogrammo, ſaranno tra di eſſi parimente ſimili.

§. XXXIV.

Del cerchio conſiderato come poligono regolare, e delle conſeguenze, che ſe ne ritraggono.

563. PEr dimoſtrare altre proprietà del cerchio di maggior conſeguenza delle precedenti, lo conſidereremo ora ſotto altra forma, cioè come poligono regolare, in cui il numero de' lati ſia maggiore di ogni numero, che poſſa aſſegnarſi. Ed in vero, potendoſi ſituare nel cerchio poligoni regolari, così per via d'iſcrizione, come per via di circonſcrizione; chiaro ſi è, che quanto più aumentaſi il numero dei loro lati, tanto maggiormente ſi accoſtano al cerchio, e meno da eſſo differiſcono. Onde, ſe intendaſi, così nel poligono iſcritto, come nell' altro circon-

conſcritto aumentato a tal ſegno il numero de' lati, che facciaſi maggiore di ogni numero, che poſſa aſſegnarſi; non v'ha dubbio, che ambidue li poligoni ſi confonderanno, tanto tra di loro, quanto collo ſteſſo cerchio.

564. Conſiderandoſi il cerchio ſotto tal forma, ne ſegue, che ſe bene la ſua circonferenza ſia linea curva, nientedimeno potrà ella riguardarſi come compoſta da rette infinitamente picciole, che contengano angoli talmente ottuſi, che li loro ſupplimenti a due retti ſiano di una picciolezza ancora infinita. Onde, non eſſendo altro la ſua tangente, ſe non che una di quelle picciole rette prolungata, non ſolo l'angolo del contatto dovrà eſſere minore di ogn'angolo acuto rettilineo, ma la retta, che tiraſi dal centro al luogo del contatto, dovrà eſſere altresì perpendicolare ſulla tangente.

565. Nè poi è da temerſi, che con riguardarſi la circonferenza del cerchio in queſta guiſa, riceva alterazione la proprietà ſua eſſenziale, di eſſere eguali le rette, che su di eſſa tiranſi dal centro; poichè eſſendo di una picciolezza infinita le rette, che la compongono, l'altre rette, che tiranſi dal centro ſopra ciaſcuna di eſſe, ſaranno così poco diſtanti dalla perpendicolare abbaſſata ſulla

ſulla medeſima dallo ſteſſo centro, che ſenza nota di errore potranno averſi come eguali, così tra di loro, come colla ſteſſa perpendicolare.

566. Potendoſi adunque riguardare il cerchio, come un poligono regolare, in cui il numero de' lati ſia maggiore di ogni numero, che poſſa aſſegnarſi; chiaro ſi è, che a guiſa di ogn' altro poligono regolare debba egli eſſere eguale ad un triangolo, che ha per baſe una retta eguale alla ſua circonferenza, e per altezza il raggio. Dal che ne ſegue, che per avere la capacità di un cerchio non debba farſi altra coſa, ſe non che moltiplicare la metà della circonferenza per lo raggio, o pure, che è lo ſteſſo, moltiplicare l' intera circonferenza per la metà del raggio.

567. Per poco intanto, che vogliaſi riflettere, s' intenderà facilmente, che non ſolo la figura regolare, ma ogn'altra figura rettilinea circonſcritta intorno al cerchio, ſia ſimilmente eguale ad un triangolo, che ha per baſe una retta eguale al ſuo perimetro, e per altezza il raggio del cerchio. Onde, attenta la ragione, in cui ſono li triangoli, che hanno la ſteſſa altezza, potrà ſtabilirſi il ſeguente teorema, cioè, che il cerchio ſia a qualſivoglia figura rettilinea circonſcritta intorno ad eſſo, come

come la circonferenza del cerchio al perimetro della figura ; dal che ne ſegue, che il cerchio ſia al quadrato del ſuo diametro , come la quarta parte della circonferenza allo ſteſſo diametro.

568. Non potendoſi poi porre in dubbio, che li poligoni regolari , colli quali confondonſi cerchi diverſi , ſiano della ſteſſa ſpecie , ed in conſeguenza ſimili ; potranno da ciò dedurſi due teoremi intorno alla ragione, in cui ſono, così le circonferenze di due cerchi, come gli ſteſſi cerchi. Il primo ſi è , che le circonferenze di due cerchi, ſiano come li loro raggi, o pure come li loro diametri. L' altro ſi è, che gli cerchi ſteſſi ſiano nella duplicata ragione , ed in conſeguenza come li quadrati delli loro raggi, ovvero diametri.

569. Quindi, ſe vogliaſi un cerchio, la di cui circonferenza ſia eguale , o alla ſomma delle circonferenze di due altri cerchi dati , o pure alla loro differenza ; ſi dovrà egli deſcrivere con un raggio, che uguagli, o la ſomma , o la differenza de' raggi degl' altri due dati. Ma ſe il cerchio ſteſſo debba eſſere eguale, o alla ſomma di due altri cerchi dati, o pure alla loro differenza; in tal caſo il ſuo raggio dovrà eſſere di lunghezza tale, che il ſuo quadrato ſia eguale, o alla ſomma, o alla diffe-

ren-

renza de' quadrati fatti dalli raggi dei due cerchi dati.

570. Volendoſi intanto un cerchio, la di cui circonferenza ſia in data ragione colla circonferenza di un' altro cerchio dato, biſognerà deſcriverlo con un raggio, che ſia al raggio del dato cerchio in quella ragione; onde per mezzo di una quarta proporzionale ſi determinerà la lunghezza del ſuo raggio. Ma ſe poi il cerchio ſteſſo debba eſſere in data ragione con un'altro dato cerchio; in tal caſo il quadrato del ſuo raggio dovrà eſſere al quadrato fatto dal raggio del cerchio dato in quella ragione; e perciò ſi avrà biſogno di una mezza proporzionale per la determinazione del ſuo raggio.

571. Qual ragione abbia il diametro del cerchio alla ſua circonferenza, tutta via è ignoto a' Geometri, e forſe non potrà mai ſaperſi; ma niente vieta di definire li limiti, tra li quali ella ſi ritrova. In fatti, ſe ſituinſi nel cerchio due figure regolari della ſteſſa ſpecie, di cui una ſia iſcritta, e l'altra circonſcritta; non v'ha dubbio, che la circonferenza ſia maggiore del perimetro della prima, e minore del perimetro della ſeconda. Onde, ſiccome con queſti due perimetri ſi hanno li limiti ricercati, così con aumentarſi il nu-

numero de' lati delle due figure, potrà farsi in modo, che gli stessi limiti sempre più si avvicinino tra di loro.

572. Per dimostrarlo per mezzo del calcolo, debbonsi prima risolvere due problemi, di cui il primo dee apprenderci, come essendo noto il lato di una figura regolare iscritta dentro del cerchio, possa determinarsi il lato dell' altra similmente iscritta, in cui il numero de' lati ritrovasi raddoppiato; ed il secondo, come essendo noto il lato di una figura regolare iscritta dentro del cerchio, possa determinarsi il lato della circonscritta, che sia della stessa specie coll' iscritta. Sia perciò BC il lato della figura regolare iscritta dentro del cerchio BCD, e se su di esso si abbassi dal centro A la perpendicolare AE, che s' incontri coll' arco sostenuto da quel lato nel punto F, e congiungansi le due BF, CF; chiaro si è, che ciascuna di queste due sia il lato dell' altra figura similmente iscritta, in cui il numero de' lati ritrovasi raddoppiato. *Fig.* 145.

573. Or essendo noto il lato BC, sarà nota ancora la sua metà BE; e pertanto, se dal quadrato del raggio AB tolgasi il quadrato della BE, colla radice quadrata del residuo si avrà la AE, la quale tolta dal raggio AF, ren-

renderà nota l'altra ſua porzione EF; e ſe in appreſſo il quadrato di queſt'altra porzione EF aggiungaſi al quadrato della BE, colla radice quadrata della ſomma ſi avrà l'altro lato BF, che ſi dimanda. Onde con queſt'artificio, ſe il diametro del cerchio eſprimaſi coll'unità, e ſia BC il lato dell'eſagono regolare, conforme è '5 il valore tanto del raggio, quanto del lato BC, così ſi ritroverà eſſere '25881 il valore dell'altro lato BF, che rapportaſi al dodecagono, o ſia alla figura regolare di 12 lati.

574. Se poi vogliaſi gradatamente continuare lo ſteſſo artificio, ſi ritroverà eſſere '13053 il valore del lato, che rapportaſi alla figura regolare di 24 lati, '06541 il valore del lato, che appartiene alla figura regolare di 48, e '03277 il valore del lato ſpettante alla figura regolare di 96. Onde, ſe li riferiti lati prendanſi tante volte, quanti ſono li lati delle figure, a cui rapportanſi, conforme è 3 il valore del perimetro dell'eſagono regolare iſcritto, così ſaranno 3'1072, 3'1326, 3'1394, 3'1411 li valori degl'interi perimetri dell'altre quattro figure regolari iſcritte.

Fig. 145. 575. Per paſſare ora all'altro problema, poſto di nuovo, che BC ſia il lato della figura regolare iſcritta dentro del

del cerchio, ſe al punto F tirisi la tangente GH, che s' incontri colli due raggi AB, AC prolungati ne' punti G, ed H; ſarà queſta GH il lato della figura regolare circonſcritta, che ſia della ſteſſa ſpecie coll' iſcritta; onde, ſe ritrovisi il valore della AE, e per mezzo della regola aurea facciasi, come il valore della AE al valore del lato BC, così il valore del raggio AF ad un quarto proporzionale; chiaro si è, che con eſſo si avrà il valore del lato GH, che si dimanda: dimodochè, ſe il diametro eſprimasi di nuovo per l' unità, e la BC ſia il lato dell' eſagono regolare iſcritto, si ritroverà eſſere '57735 il valore del lato, che rapportasi all'eſagono regolare circonſcritto.

576. Quindi, con andare innanzi gradatamente. si ritroverà eſſere '2679 il valore del lato, che rapportasi al dodecagono regolare circonſcritto, '13165 il valore del lato, che appartiene alla figura regolare circonſcritta di 24 lati, '06555 il valore del lato ſpettante alla figura regolare circonſcritta di 48, e '03274 il valore del lato, che compete alla figura regolare circonſcritta di 96. Onde, ſe li riferiti lati prendansi tante volte, quanti ſono li lati delle figure, a cui rapportansi, ſaranno 3'4641, 3'2153, 3'1551, 3'1467, 3'1425

3'1425 li valori degl' interi perimetri, delle ſteſſe cinque figure regolari circonſcritte.

577. Premeſſe tali coſe, egli è facile ora il dimoſtrare per mezzo del calcolo, che con figure regolari della ſteſſa ſpecie iſcritte, e circonſcritte nel cerchio, non ſolo poſſano averſi li limiti, tra li quali ſi racchiude la ragione del diametro alla circonferenza, ma che quelli limiti, con aumentarſi il numero de' lati di quelle figure, ſempre più tra di loro ſi avvicinino. In fatti, ſe le due figure regolari ſiano eſagoni, ed eſprimaſi il diametro del cerchio coll'unità, ſaranno 3, e 3'4641 li loro perimetri; onde il diametro alla circonferenza ſarà in minor ragione di 1 a 3, ed in maggior ragione di 1 a 3'4641.

578. Ma ſe poi le due figure regolari ſiano dodecagoni, eſſendo 3'1072, e 3'2153 li valori dei loro perimetri, ſarà il diametro alla circonferenza in minor ragione di 1 a 3'1072, ed in maggiore di 1 a 3'2153. E così andando più innanzi ſi ritroverà, che la ſteſſa ragione del diametro alla circonferenza, eſſendo le due figure regolari di 24 lati, ſia minore di 1 a 3'1326, e maggiore di 1 a 3'1551; che eſſendo di 48, ſia minore di 1 a 3'1394, e maggiore di 1 a 3'1467; e finalmente che eſſen-

essendo di 96 sia minore di 1 a 3'1411, e maggiore di 1 a 3'1435.

579. Per essere li due ultimi limiti molto vicini, non occorre andare più avanti; onde, tenendosi conto di ambidue, potrà dirsi, che il diametro sia alla circonferenza presso a poco, come 1 a 3'143, ovvero come 1000 a 3143. Di questo stesso artificio si avvalse ancora Archimede, ed avendo fatto il calcolo con numeri più piccioli, ritrovò per mezzo delle stesse figure, che il diametro alla circonferenza sia in minor ragione di 71 a 223, ed in maggior ragione di 7 a 22. E poichè ella si avvicina più a questa seconda, che alla prima, perciò comunemente nella pratica si fa uso della ragione di 7 a 22, maggiormente, che ritrovasi espressa con numeri molto piccioli.

580. Avvalendoci adunque ancora noi di una tal ragione, non sarà ora difficile di ritrovare, così la circonferenza del cerchio, essendo dato il suo diametro, come al contrario il diametro, essendo data la sua circonferenza. In fatti, se il diametro del cerchio sia di 4 palmi, e facciasi come 7 a 22, così 4 ad un quarto proporzionale, sarà la sua circonferenza presso a poco di palmi 12'5714. Al contrario poi, se la circonferenza del cerchio sia di

15 palmi, e facciaſi come 22 a 7, così 15 ad un quarto proporzionale, ſarà al di preſſo il ſuo diametro di palmi 4'773.

581. Secondo poi è ſtato avvertito (566), la capacità del cerchio ſi ha con moltiplicare, o la metà della circonferenza per lo raggio, o pure la circonferenza intera per la metà del raggio. Ma potrà ella averſi ancora col ſolo diametro; poichè, eſſendo il cerchio al quadrato circonſcritto intorno ad eſſo, che è il quadrato del ſuo diametro, come la quarta parte della circonferenza allo ſteſſo diametro (567), cioè come 11 a 14: ſe facciaſi, come 14 ed 11, così il quadrato del diametro ad un quarto proporzionale, con queſto ſi avrà la capacità del cerchio: dimodochè, eſſendo il diametro del cerchio di 4 palmi, ſarà la ſua capacità di 12'5714 palmi quadrati.

582. Intanto, ſe dopo eſſerſi determinata la capacità del cerchio, caviſi la radice quadrata dal numero dei palmi quadrati, che in eſſa ſi contengono, ſi avrà con queſta radice il lato del quadrato eguale al cerchio, che è il celebre problema della ſua quadratura, il quale lato ſarà in conſeguenza mezzo proporzionale, così tra la metà della circonferenza, e l' intero raggio, come

tra

tra l'intera circonferenza, e la metà del raggio. Eſſendo adunque di 12'5714 palmi quadrati la capacità del cerchio, il di cui diametro è di 4 palmi, ed eſſendo 3'545 la radice quadrata di 12'5714, ſarà il lato del quadrato eguale al cerchio di 3'545 palmi.

§. XXXV.

Dei ſettori, e porzioni del cerchio, come ancora delle lunette, e corone circolari.

583. Rimangono a determinarſi le varie porzioni del cerchio, che ſono le ſole figure miſtilinee, di cui trattaſi nella Geometria elementare; ma per la loro determinazione deeſi prima far vedere, come debba determinarſi quello ſpazio circolare, che racchiuſo tra due raggi chiamaſi ſettore. Ed in vero, conſiderandolo come porzione di quel poligono regolare, con cui il cerchio ſi confonde; chiaro ſi è, che per eſſere riſecato con rette tirate dal centro, egli ancora ſia eguale ad un triangolo, che ha per baſe una retta eguale all'arco, che lo termina, e per altezza il raggio; onde ſi avrà la ſua miſura ſimilmente, con moltiplicare, o la metà dell'arco per

lo raggio, o pure l'arco intero per la metà del raggio.

584. Per quanto poi all' arco del ſettore, ſapendoſi il numero de' ſuoi gtadi, e minuti, può determinarſi la ſua lunghezza, primieramente con definire l'intera circonferenza del cerchio, ed indi col dire, ſe 360 gradi danno l'intera circonferenza, che darà il numero de' gradi, e minuti contenuti nell' arco, che ſi dimanda? poichè col quarto proporzionale, che ſi ritroverà per mezzo della regola aurea, ſi avrà la lunghezza, dell' arcola quale lunghezza moltiplicata per la metà del raggio ci darà il ſettore ſoſtenuto dall'arco.

585. Così, ſe il diametro del cerchio ſia di 4 palmi, ſarà la ſua circonferenza di palmi 12'5714; onde, ſe l' arco ſia di 30 gradi, e 15 minuti, e per agevolare il calcolo riducanſi a minuti, così li 30 gradi dell' arco, come li 360 dell' intera circonferenza, dovrà dirſi, ſe 21600 minuti danno 12'5714, che daranno 1815 minuti? E poichè il quarto proporzionale, che ritrovaſi colla regola aurea, è 1'0563, ſarà per tanto la lunghezza dell' arco di 1'0563 palmi, la quale lunghezza moltiplicata per la metà del raggio, che è di un ſolo palmo, farà, che il ſettore ſoſte-

nuto

nuto da quell'arco ſia di 1'0563 palmi quadrati.

586. Colla miſura del ſettore potrà ora miſurarſi qualſiſia porzione di cerchio. Sia perciò il cerchio BCDE, che abbia per ſuo centro il punto A; e per mezzo della retta BD, che non paſſa per lo centro, dividaſi nelle due porzioni BCD, BED, di cui la prima è minore del mezzo cerchio, e la ſeconda al contrario maggiore. Se adunque ai due punti B, e D tirinſi li raggi AB, AD, chiaro ſi è, che la porzione minore BCD ſia la differenza tra il ſettore ABCD, ed il triangolo ABD. Onde, ſe miſuriſi così il ſettore, come il triangolo, colla loro differenza ſi avrà la ſuperficie della porzione minore BCD. *Fig.* 146.

587. Per quanto poi alla porzione maggiore BED, la ſua ſuperficie potrà averſi, con togliere dal cerchio la porzione minore BCD; ma ſe ſi miſuri l'altro ſettore ABED, e ad eſſo aggiungaſi lo ſteſſo triangolo ABD, colla loro ſomma ſi avrà eziandio la ſua ſuperficie. E poichè, abbaſſandoſi ſul raggio AD la perpendicolare BF, ſi ha il triangolo ABD, con moltiplicare la BF per la metà del raggio AB; vedeſi chiaramente, che conforme la differenza tra l'arco BCD, e la BF

moltiplicata per la metà del raggio dee darci la ſuperficie della porzione minore, così la ſomma dello ſteſſo arco BCD, e della ſteſſa BF moltiplicata per la metà del raggio dovrà darci la ſuperficie della porzione maggiore.

588. Colle porzioni di cerchio ſogliono conſtruirſi alcune figure curvilinee, che chiamanſi lunette circolari; e formanſi propriamente con due porzioni, riſecate per mezzo di rette eguali da due diverſi cerchi, ſiccome ſono le due ABCD, EFGH. Vedeſi intanto, che conforme la prima ABCD, conveſſa da ambedue le parti, è eguale alla ſomma delle due porzioni ABC, ADC; così al contrario l'altra EFGH, che da un lato è conveſſa, dall' altro concava, ſia eguale alla differenza delle due porzioni EFG, EHG. Onde, con miſurare le due porzioni di cerchio, che formano la lunetta, e con prenderne, o la ſomma, o pure la differenza, ſi avrà la ſuperficie della ſteſſa lunetta.

Fig. 147.

589. Tra le lunette della ſeconda ſpecie ſe ne incontrano alcune, che indipendentemente dal cerchio poſſono miſurarſi con eſattezza. In fatti, ſe ABC ſia un triangolo rettangolo in A, e ſull' ipotenuſa BC deſcrivaſi il mezzo cerchio BDEC, per eſſere retto l' angolo

Fig. 148.

golo ſituato nel mezzo cerchio, la ſua circonferenza dovrà paſſare per lo punto A. Onde, ſe ſulli lati AB, AC deſcrivanſi due altri mezzi cerchi AFB, AGC, ſi avranno con tutti tre le due lunette ADBF, AECG. Or io dico, che queſte due lunette inſieme ſiano eguali al triangolo rettangolo ABC.

590. Per intenderne la ragione, giova riflettere, che li tre mezzi cerchi, non altrimente che li cerchi interi, ſono come li quadrati dei loro diametri. Quindi, ſiccome il quadrato dell' ipotenuſa BC è eguale ai quadrati dei due lati AB, AC; così il mezzo cerchio BDEC deſcritto ſull' ipotenuſa ſarà eziandio eguale ai due AFB, AGC deſcritti ſulli due lati. Onde, toltone quel tanto hanno di comune, ſaranno le due lunette ADBF, AECG inſieme ſimilmente eguali al triangolo rettangolo ABC.

591. Se li due lati AB, AC del triangolo rettangolo ABC ſiano eguali, chiaro ſi è, che ſaranno eguali ancora le due lunette ADBF, AECG. Onde, perchè, abbaſſata dall' angolo retto A ſull' ipotenuſa BC la perpendicolare AH, ſono eziandio eguali li due triangoli rettangoli AHB, AHC, in cui quel primo ABC rimane diviſo; ne ſegue da ciò, che ciaſcuna delle due lunette

ſia eguale ad uno dei due triangoli: il che può dimoſtrarſi ancora in altra guiſa, ed ecco come.

592. Poichè voglionſi eguali li due lati AB, AC del triangolo rettangolo ABC, ſarà il quadrato dell' ipotenuſa BC doppio del quadrato fatto dal lato AB. Ma il mezzo cerchio BDEC ſta al mezzo cerchio AFB, come il quadrato dell' ipotenuſa BC al quadrato del lato AB. Dunque ancora il mezzo cerchio BDEC ſarà doppio del mezzo cerchio AFB; e per tanto, facendoſi il quadrante HADB eguale a queſto ſecondo mezzo cerchio, ſe tolgaſi da eſſi quel tanto hanno di comune, rimanerà la lunetta ADBE eguale al triangolo AHB; e della ſteſſa maniera potrà dimoſtrarſi, che l' altra lunetta AECG ſia eguale all' altro triangolo AHC.

593. Alle lunette poſſono aggiungerſi le corone circolari, che formanſi colle circonferenze di due cerchi concentrici; e quantunque poſſa averſi ciaſcuna di eſſe, con determinare le capacità dei due cerchi, e con ſottrarre la minore dalla maggiore; nientedimeno ſi avrà più facilmente, con moltiplicare la differenza dei due raggi per la ſomma dimezzata delle due circonferenze, che la contengono; il che potrà dimoſtrarſi facilmente, con formare su gli

ſteſſi

ſteſſi raggi li due triangoli, a cui ſono eguali li due cerchi; poichè ſi vedrà con ogni chiarezza, che la differenza di queſti due triangoli ſia un trapezio, che miſuraſi, con moltiplicare la differenza dei due raggi per la differenza dimezzata delle due rette, che per la formazione dei due triangoli debbonſi fare eguali alle due circonferenze.

594. Per ritornare ai ſettori, che più importano, conforme ciaſcuno di eſſi è eguale ad un triangolo, che ha per baſe una retta eguale all'arco, che lo ſoſtiene, e per altezza il raggio del cerchio, a cui appartiene il ſettore; così per mezzo di queſti triangoli potrà giudicarſi, come ſono due ſettori tra di loro. Giova intanto per maggior chiarezza diſtinguere due caſi, di cui il primo ſi è, quando li due ſettori prendonſi, o in un' iſteſſo cerchio, o pure in cerchi eguali; ed il ſecondo, quando ſi prendono in cerchi diſuguali.

595. Adunque, prendendoſi li due ſettori, o in un medeſimo cerchio, o in cerchi eguali, chiaro ſi è, che la loro ragione ſia la ſteſſa con quella degl'archi, che li ſoſtengono, dimodochè dovranno eſſere eguali, quando ſono ſoſtenuti da archi eguali. Ma ſe poi ſi prendano in cerchi diſuguali, li due ſettori ſaranno in ragion compoſta de-

gl' archi, e delli raggi. Onde, conforme eſſendo eguali gl' archi ſono nella ſemplice ragione de' raggi; così ſe mai gl' archi ſiano nella reciproca ragione de' raggi, li due ſettori dovranno eſſere eguali.

596. Poſſono due ſettori paragonarſi ancora cogl' angoli, che eſſi ſteſſi contengono, tanto ſe ſiano eguali li cerchi, in cui ſi prendono, quanto ſe ſiano diſuguali; ma per intendere, quale ſia la loro ragione, biſogna prima inveſtigare, come ſiano due archi per rapporto agl' angoli, che ſituati ne' loro centri inſiſtono ſopra di eſſi. Ed in vero già fu avvertito (65), che in una ſteſſa linea circolare l' arco, e l'angolo ricevono eguali aumenti; ed in conſeguenza, che gl' archi ſiano nella ſemplice ragione degl' angoli; ma, ſe gl' archi prendanſi in circonferenze diverſe, che ſiano diſuguali, in tal caſo la ragione degl' archi ſarà compoſta dalle due degl' angoli, e dei raggi.

Fig. 149. 597. Siano perciò li due cerchi diſuguali BCD, FGH, ai di cui centri A, ed E ſituinſi due angoli, come BAC, FEG, che inſiſtano su gl' archi BC, FG. Io dico, che l' arco BC ſia all' arco FG in ragion compoſta dell'angolo BAC all'angolo FEG, e del raggio AB al raggio EF. In fatti, ſe col cen-

centro E, e col raggio AB deſcrivaſi il terzo cerchio KIL, la di cui circonferenza ſeghi li lati dell' angolo FEG ne' punti K, ed I; l' arco BC ſarà all' arco FG in ragion compoſta dell'arco BC all' arco KI e dell' arco KI all' arco FG. Ma li primi due archi BC, KI ſono, come gl' angoli BAC, FEG (65); e gl' altri due KI, FG ſono, come l' intere loro circonferenze (69), o pure come li raggi EK, EF. Dunque, eſſendo il raggio EK eguale al raggio AB, ſarà l' arco BC all' arco FG in ragion compoſta dell' angolo BAC all'angolo EFG, e del raggio AB al raggio EF.

598. Da ciò ora ne ſegue, che ſe bene due ſettori preſi in un medeſimo cerchio, o in cerchi eguali, come proporzionali agl'archi, su di cui ſi appoggiano (595), ſiano nella ſemplice ragione degl' angoli, che in eſſi ſi contengono; nientedimeno due ſettori preſi in cerchi diſuguali debbano eſſere in ragion compoſta della ſemplice degl' angoli, e della duplicata de' raggi. Prendanſi perciò nelli due cerchi diſuguali BCD, FGH li due ſettori ABC, EFG. Io dico, che il ſettore ABC ſia al ſettore EFG in ragion compoſta dell' angolo BAC all' angolo FEG, e del quadrato *Fig.* 149.

del raggio AB al quadrato del raggio EF.

599. In fatti li due ſettori ABC, EFG, a ſimiglianza dei loro triangoli eguali, ſono in ragion compoſta dell'arco BC all'arco FG, e del raggio AB al raggio EF. Ma ſi è dimoſtrato (596), che l'arco BC ſia all'arco FG in ragion compoſta dell'angolo BAC all'angolo FEG, e del raggio AB al raggio EF. Dunque gli ſteſſi due ſettori ABC, EFG dovranno eſſere ancora in ragion compoſta dell'angolo BAC all'angolo FEG, e del quadrato del raggio AB al quadrato del raggio EF; dimodochè ſaranno nella ſemplice ragione degl'angoli BAC, FEG, quante volte ſono eguali li due raggi AB, EF, ed eguali in conſeguenza li cerchi, in cui ſi ſono preſi li due ſettori.

600. Niente vieta, che due ſettori preſi in cerchi diſuguali ſiano ſimili; e ciò avviene, quante volte ſono eguali gl'angoli, che in eſſi ſi contengono; poichè colla loro uguaglianza li due ſettori vengono ad eſſere nella ſteſſa ragione colli due cerchi. In fatti il ſettore ABC ſta al cerchio BCD, come l'angolo BAC alla ſomma di quattro retti; e ſimilmente il ſettore EFG ſta al cerchio FGH, come l'angolo FEG alla ſomma di quattro retti. Onde,

Fig. 149.

qua-

qualora ſono eguali li due angoli BAC, FEG, ſarà il ſettore ABC al cerchio BCD, come il ſettore EFG al cerchio FGH. Ed eſſendo così, chiaro ſi è, che li ſettori ſimili, attenta l'uguaglianza dei loro angoli, ſiano nella ſola duplicata ragione dei loro raggi.

601. Queſto ſteſſo intanto può dedurſi ancora dall'altro teorema generale (595), che li due ſettori ABC, EFG, preſi in cerchi diſuguali, ſiano in ragion compoſta dell'arco BC all'arco FG, e del raggio AB al raggio EF. Imperocchè, facendoſi eguali li due angoli BAC, FEG, li due archi BC, FG, che li miſurano, conteneranno un'iſteſſo numero di gradi, e minuti; ed in conſeguenza ſaranno nella ſteſſa ragione, tanto colle loro intere circonferenze BCD, FGH, quanto colli loro raggi AB, EF. Onde, eſſendo la ragione dei due archi BC, FG eguale alla ragione dei due raggi AB, EF; la ragione, che da eſſe ſi compone, ſarà duplicata così dell'una come dell'altra.

602. Del rimanente, ſe congiungansi le rette BC, FG, chiaro ſi è, che facendoſi ſimili li due ſettori ABC EFG, debbano eſſere ſimili altresì, così li due triangoli BAC, FEG, che in eſſi ſi racchiudono, come le rimanenti porzioni, che tagliano dai due cer-

cerchi le rette BC, FG. Dal che ne ſegue, che ſiccome all'ora ſono ſimili due porzioni, tagliate da due diverſi cerchi, quantevolte li loro archi contengono un' iſteſſo numero di gradi, e minuti; così le ſteſſe porzioni ſiano nella duplicata ragione, non ſolo dei raggi, ma ancora delle rette, che le ſoſtengono.

§. XXXVI.

Dell' indole de' problemi geometrici, e del modo di riſolverli.

603. COnchiuderemo queſti Elementi della Geometria piana con alcune rifleſſioni, tanto ſull' indole de' problemi geometrici, come ſul metodo da tenerſi nella loro riſoluzione. Ed in primo luogo, qualora vien propoſto un qualche problema geometrico, giova ſervirſi del metodo analitico, cioè di ſupporre già fatto quel tanto ſi dimanda, e percorrere le conſeguenze, che ſe ne ritraggono; poichè ſe mai ſe ne incontri alcuna, che poſſa eſeguirſi, da eſſa dovrà ripeterſi la riſoluzione del problema, e ſe ne formerà la dimoſtrazione, con invertere il raziocinio tenuto nell' analiſi.

604. Per illuſtrarlo con qualche eſem-

ſempio facile, debbaſi ſulla data retta AB deſcrivere un triangolo, che ſia equilatero. Suppoſto, che ABC ſia il triangolo ricercato, per la ſua indole ſaranno eguali, così le due AB, AC, come le due AB, BC; e per tanto il punto C ſarà ſituato nell' interſegamento di due archi circolari deſcritti colli punti A, e B come centri, e coll' intervallo della retta data AB. Onde, potendoſi deſcrivere queſti due archi circolari, ſe eſſi deſcrivanſi effettivamente, col loro interſegamento ſi avrà il punto C; ed in conſeguenza, congiunte le due AC, BC per mezzo dell'indole degli ſteſſi archi ſi dimoſtrerà, che il triangolo ABC ſia equilatero. *Fig.* 150.

605. Or nell' eſame delle conſeguenze, che ritrar ſi poſſono dal ſupporre già fatto, quel tanto nel problema ſi dimanda, ſiccome debbonſi avere preſenti le proprietà delle figure, che riſultano dallo ſteſſo problema; così il più delle volte ſi avrà biſogno delle conſtruzioni già note, come di dividere per metà una qualche retta, o un qualche angolo; di alzare, o abbaſſare una perpendicolare ſopra una qualche retta da un qualche punto; e di altre conſimili. Ed appunto in queſto dee riluccere l' induſtria del Geometra, cioè nel vedere con un colpo d' occhio, di quali pro-

proprietà, e di quali conſtruzioni debba far uſo, per giungere alla conſeguenza, che ſi deſidera.

Fig. 151. 606. Così, ſe col lato dato AB debbaſi deſcrivere un triangolo iſoſcele, in cui ciaſcuno degl' angoli ſopra la baſe ſia doppio dell'angolo verticale; ſuppoſto, che BAC ſia un tal triangolo, potrà dividerſi l'angolo ACB in due parti eguali per la retta CD; poichè, incontrandoſi queſta retta col lato AB nel punto D, ſi vedrà ſubito, che non ſolo ſiano eguali le due AD, CD per la condizione appoſta nel problema; ma altresì, che l'angolo CDB, come eguale ai due inſieme DAC, ACD, ſia eguale all'angolo DBC; ed in conſeguenza, che ſiano eguali ancora le due BC, CD. E poichè vedeſi in oltre, che li due triangoli ABC, CBD ſiano equiangoli, e per tanto che AB ſia a BC, come BC a BD (455), o pure che AB ſia ad AD, come AD a BD; ſi ricaverà da ciò, che il lato AC ſia diviſo in eſtrema, e media ragione nel punto D (484), la qual diviſione ſi ſa, come debba eſeguirſi (482).

607. Quindi ſi riſolverà il propoſto problema, primieramente con dividere il lato AB in eſtrema, e media ragione nel punto D talmente, che AD ſia la porzione maggiore, e BD la minore;

re ; ed indi con descrivere colli punti A, e B come centri, e cogl' intervalli delle due AB, AD due archi circolari, che s'intersèghino nel punto C; poichè, congiunte le due AC, BC, sarà ABC il triangolo ricercato : come in fatti, essendo eguali le due AD, BC, sarà AB a BC, come BC a BD ; e per tanto, facendosi equiangoli li due triangoli ABC, CDB (462), saranno eguali non solo li due angoli CBD, CDB, ma ancora le due CD, BC ; onde, facendosi eguali altresì, così le due CD, AD, come li due angoli DAC, DCA, sarà tanto l'angolo CDB, come il suo eguale CBD doppio del solo angolo DAC.

608. Notisi quì di passaggio, che dello stesso metodo può farsi uso ancora, per dimostrare li nuovi teoremi, che possono proporsi, cioè con supporli veri, e con vedere, se ricavasi da essi qualche verità conosciuta. Così, se sia proposto il seguente teorema, cioè che il raggio AB del cerchio BCD iscritto dentro del triangolo EFG sia eguale alla metà della differenza tra uno de'suoi lati, come FG, e la somma degl' altri due EF, EG; potrà supporsi, che egli sia vero. E poichè, per essere eguali così le due BF, CF, come le due DG, BG (357), la riferita differenza è egua- *Fig.* 152.

le

le all'altre due CE, DE, che ſimilmente ſono eguali; dovranno eſſere eguali tanto le due AC, CE, quanto le due AD, DE; ed in conſeguenza la AE dovrà dividere per metà l'angolo BED. Onde, perchè con queſta legge dee egli eſſere diviſo, per iſcriverſi il cerchio dentro del triangolo (360), dovrà conchiuderſi, che il propoſto teorema ſia effettivamente vero.

609. Ma per ritornare ai problemi, noteremo in ſecondo luogo, che queſti poſſono eſſere di tre ſpecie, cioè determinati, indeterminati, e più che determinati. Diceſi un problema eſſere determinato, quando ſi ſono appoſte in eſſo tutte le condizioni per la determinazione di quel tanto ſi dimanda, onde ſi è, che ſia definito il numero delle diverſe ſoluzioni, di cui è egli capace. Diceſi al contrario eſſere indeterminato, quando manca nel problema qualche condizione, per la di cui mancanza rendeſi egli capace d'infinite ſoluzioni diverſe. E finalmente diceſi eſſere più che determinato, quando ſi appone in eſſo qualche condizione di più, a cui ſe vogliaſi attendere, il più delle volte ſarebbe il problema impoſſibile.

610. Per ſchiarire maggiormente l'in-

indole di tutte tre queſte ſpecie di problemi, già ſi sa, che rimane determinato il triangolo rettangolo, con eſſer data l'ipotenuſa inſieme con uno de'ſuoi lati; onde, ſe nel problema della ſua formazione ſi apponeſſe un'altra condizione, come per ragion di eſempio, che il lato dato ſia in data ragione coll'altro lato, il problema ſarebbe più che determinato; poichè la nuova condizione appoſta niente conferirebbe alla ſua ſoluzione, e volendoſi tener conto di eſſa, potrebbe il problema eſſere impoſſibile, ſiccome in effetto lo dee eſſere, quante volte l'altro lato colle prime due condizioni facciaſi di tal lunghezza, che il lato dato non poſſa ſerbare con eſſo la data ragione.

611. Al contrario poi, ſe per la formazione del triangolo rettangolo ſi daſſe la ſola ipotenuſa, e ſi toglieſſe l'altra condizione di eſſer dato ancora uno de' ſuoi lati; il problema ſarebbe indeterminato, e capace in conſeguenza d'infinite ſoluzioni diverſe: ſiccome in effetto, ſe ſull'ipotenuſa data come diametro ſi deſcriveſſe un mezzo cerchio, e ſi tiraſſero rette agl'eſtremi della ſteſſa ipotenuſa da qualſiſia punto della circonferenza di quel mezzo cerchio, ſi formerebbero ſulla data ipotenuſa infiniti triangoli rettangoli, e ciaſcu-

ſcuno di eſſi adempirebbe l' unica condizione appoſta nel problema.

612. Eſſendo così, ſarà ſenza dubbio determinato un problema, quante volte le condizioni in eſſo appoſte ſono ſufficienti per la determinazione di quel tanto ſi dimanda, ſenza eſſervene alcuna ſuperflua; ma può avvenire tal volta, che le condizioni appoſte, tuttochè neceſſarie per la ſoluzione del problema, non poſſano combinarſi inſieme; onde ſi è, che nè pure il problema poſſa riſolverſi, ſe non ſi modifichi una di eſſe. Così, per poterſi con tre rette date formare un triangolo, biſogna, che due di eſſe unite inſieme ſiano maggiori della rimanente, comunque ſi prendano (96). E così ancora per poterſi dividere una data retta in modo, che il rettangolo delle ſue parti ſia eguale al quadrato di un'altra retta data, fa duopo, che queſt' altra retta non ſia maggiore della metà della prima (226).

613. Ma ciò, che nel problema determinato deeſi ſpecialmente avvertire, ſi è, che quantunque le condizioni in eſſo appoſte ſiano baſtanti per la determinazione di quel tanto ſi cerca, pure però il problema può eſſere capace non già di infinite, ma di due, o più ſoluzioni diverſe, ſiccome ſi è veduto nel pro-

problema di formare un triangolo, di cui ſiano dati due lati inſieme coll' angolo oppoſto ad uno di eſſi; poichè colle ſteſſe condizioni, e colla medeſima conſtruzione ſi formarono due triangoli, differenti tra di loro per l' angolo oppoſto all' altro lato, che era ottuſo in uno di eſſi, ed acuto nell' altro (137).

614. Le diverſe ſoluzioni intanto, di cui è capace tal volta un qualche problema determinato, derivano ſpeſſe fiate, non già dalla varia forma, che poſſa avere quel tanto in eſſo ſi dimanda, ma dalla varia ſua poſizione. Così il problema di tirare la tangente ad un dato cerchio da un punto dato fuori di eſſo, può ricevere due ſoluzioni diverſe, non perchè la tangente poſſa avere due diverſe lunghezze, ma perchè a riguardo della retta, che congiunge il centro del cerchio col punto dato, può ella tirarſi così da un lato, come dall' altro. E così ancora il problema di deſcrivere il triangolo equilatero ſopra una retta data, rendeſi capace di due diverſe ſoluzioni per la doppia poſizione, che può ricevere il triangolo per rapporto alla retta data.

615. Or ſe bene il fine principale de' Geometri ſia la riſoluzione de' problemi determinati, nientedimeno li mezzi

zi, per conſeguire la loro conſtruzione, vengono ad eſſi ſomminiſtrati dagl'altri indeterminati. Perciò noteremo in terzo luogo, che ſiccome un problema indeterminato può ricevere infinite ſoluzioni diverſe; così egli ci ſomminiſtra infiniti punti, valevoli ad adempire le ſue condizioni; e alla ſede di eſſi, che chiamaſi luogo geometrico, ſi dee ricorrere, qualora coll' aggiunta di un' altra condizione il problema rendeſi determinato; onde ſi è, che la conſtruzione de' problemi determinati non poſſa conſeguirſi, ſenza la preventiva conoſcenza de' luoghi geometrici.

Fig. 153. 616. Per dare un ſaggio dei luoghi geometrici, ſia data di poſizione la retta AB terminata al punto A, e debbaſi fuori di eſſa ritrovare il punto M, da cui abbaſſata ſulla AB la perpendicolare MN, ſia AN ad MN in data ragione. Tagliſi dalla AB una porzione ad arbitrio, che ſia AC; indi alzata su di eſſa la perpendicolare CD di lunghezza tale, che AC ſia a CD in quella data ragione (469), congiungaſi la AD. Or ovunque prendaſi in queſta retta AD il punto M, chiaro ſi è, che per gli triangoli equiangoli ANM, ACD, ſempre ſarà AN ad MN, come AC a CD (455). Onde, eſſendo la AD ſede degl' infiniti punti, con cui può

può risolversi il problema proposto, sarà ella un luogo geometrico.

617. Sia data in oltre, così di posizione, come di lunghezza la retta AB; ed alzata su di essa dal punto A la perpendicolare AC, debbasi ritrovare fuori della medesima il punto M in modo, che congiunte le rette AM, BM, sia l'angolo CAM eguale all'angolo ABM. Poichè, per la condizione apposta nel problema, li due angoli ABM, BAM debbono essere insieme eguali all'angolo retto BAC; sarà retto l'angolo AMB contenuto dalle due AM, BM. Onde, se sulla retta AB come diametro descrivasi un cerchio, ovunque prendasi nella sua circonferenza il punto M, sempre sarà l'angolo ABM eguale all'angolo CAM; e per tanto, essendo la riferita circonferenza sede degl' infiniti punti, con cui può risolversi il proposto problema indeterminato, essa ancora sarà un luogo geometrico. *Fig.* 154.

618. Niente vieta, che sia superficie il luogo geometrico, a cui ci conduce un qualche problema indeterminato, anzi può essere talvolta ancora un solido. Così, se nel triangolo equilatero ABC sia abbassata sul lato BC la perpendicolare AD dall'angolo opposto, e debbasi dentro di esso ritrovare il punto *Fig.* 155.

to M in modo, che le tre perpendicolari MN, MO, MR abbaſſate da eſſo ſulli tre lati AB, AC, BC ſiano inſieme eguali alla AD; chiaro ſi è, che ogni punto del triangolo ſia baſtante a riſolvere un tal problema indeterminato; onde il luogo geometrico, ove egli ci conduce, ſarà la ſuperficie dello ſteſſo triangolo.

619. Li luoghi geometrici intanto, a cui dobbiamo ricorrere nella conſtruzione de' problemi determinati, ſono quelli, che ci conducono ad una qualche linea, retta o curva che ella ſia, di cui perciò biſogna ſaperne le proprietà almeno principali; ma per intendere, come con queſti luoghi ottengaſi la conſtruzione di qualſiſia problema determinato, noteremo finalmente, che tutto lo ſtudio del Geometra riduceſi alla ſcelta di due luoghi, che contengano ſeparatamente le condizioni del problema, di cui ſi tratta; poichè, deſcrivendoſi le linee, a cui ci conducono li due luoghi, col loro interſegamento ſi avrà il punto, che nel problema ſi dimanda; ſiccome in effetto, eſſendo egli comune ad ambidue li luoghi, in eſſo debbono riunirſi le condizioni, così dell' uno, come dell' altro.

620. Così, ſe fuori della retta AB terminata al punto A debbaſi ritrovare il

il punto M, da cui abbaſſata ſulla AB la perpendicolare MN, ſiano le due AN, MN, non ſolo in data ragione, ma eguali ancora inſieme ad un' altra retta data EF; dei due luoghi da ſceglierſi uno ſi avrà colla prima condizione, di dover eſſere le due AN, MN in data ragione; e l' altro coll' altra condizione, di dover eſſere le medeſime inſieme eguali alla EF. Quindi, ſiccome facendoſi, che una porzione qualſiſia AC della AB ſia alla perpendicolare CD in quella data ragione, ci conduce il primo luogo alla retta AD (*616*); così, ſe prendaſi ſulla ſteſſa AB la porzione AG eguale alla EF, e ſulla CD la porzione CH eguale alla CG, ci condurrà il ſecondo luogo all' altra retta GH; onde coll' interſegamento delle due AD, GH ſi avrà il punto ricercato. *Fig.* 153.

621. Similmente, ſe fuori della retta AB, data così di lunghezza, come di poſizione, debbaſi ritrovare il punto M in modo, che ſia retto l' angolo contenuto dalle due AM, BM, e che la perpendicolare MN, abbaſſata da eſſo ſulla AB, ſia eguale ad un' altra data retta EF; dei due luoghi da ſceglierſi uno ſi avrà colla prima condizione, di dover eſſere retto l' angolo AMB; e l' altro coll' altra condizione, di do- *Fig.* 154.

ver eſſere la perpendicolare MN eguale alla EF. Onde, ſiccome il primo luogo ci conduce alla circonferenza del cerchio deſcritto ſulla AB, come diametro; così, ſe alziſi ſulla ſteſſa AB la perpendicolare AC, da cui tagliſi la porzione AD eguale alla EF, ci condurrà il ſecondo alla retta DG parallela alla AB; e per tanto coll'interſegamento di queſta retta con quella circonferenza di cerchio ſi avrà il punto ricercato.

622. Queſto ſecondo eſempio ci fa intendere, donde derivi, che un problema determinato poſſa eſſere capace talvolta di due, o più ſoluzioni diverſe, cioè dal poterſi le due linee, di cui ſi fa uſo nella ſua conſtruzione, interſegare in due, o più punti: come in fatti, per interſegarſi la DG colla circonferenza del cerchio in due punti, il problema rendeſi capace di due diverſe ſoluzioni. Ma lo ſteſſo eſempio pone ancora in chiaro, che un problema determinato non poſſa tal volta riſolverſi, ſe non ſi accordino inſieme le condizioni in eſſo appoſte: ſiccome in effetto, per poterſi la DG incontrare colla riferita circonferenza, fa duopo, che la EF, ovvero AD non ſia maggiore della metà dell'altra AB.

§. XXXVII.

§. XXXVII.

Della risoluzione de' problemi, che sono piani di lor natura.

623. GL' antichi Geometri distinguevano li problemi determinati in tre classi, cioè in piani, solidi, e lineari. Chiamavano problemi piani quelli, che possono construirsi colla linea retta, e colla linea circolare. Chiamavano all' incontro problemi solidi quegl' altri, che per la loro construzione richiedono almeno una di quelle curve, che tirando la loro origine dal solido, chiamato cono, appellansi sezioni coniche. Ed in fine chiamavano problemi lineari tutti gl' altri, che per potersi construire, hanno bisogno di linee curve d' indole più composta, non solo della linea circolare, ma delle stesse sezioni coniche.

624. Poichè dunque nella Geometria piana trattasi soltanto della linea retta, e della linea circolare; quindi si è, che appartiene ad essa la sola risoluzione de' problemi, che sono piani di lor natura; e la prima riflessione da farsi intorno a questi problemi si è, che alcuni di essi possono construirsi coll' intersegamento di due linee rette, li

quali, come più ſemplici, chiameremo problemi del primo genere; ed altri coll' interſegamento, o di una linea retta, e di una linea circolare, o pure di due linee circolari, li quali, per eſſere d'indole più compoſta, chiameremo problemi del ſecondo genere.

625. Li problemi del primo genere non ſono capaci, ſe non che di una ſola ſoluzione, nè mai può avvenire, che ſiano impoſſibili; e ciò per la ragione, che due rette debbono ſempre interſegarſi tra di loro, ed il loro interſegamento non può farſi, ſe non che in un ſol punto. E quantunque le due rette, che impieganſi nella conſtruzione del problema, ſiano tal volta parallele; pure però poſſono conſiderarſi come rette, che incontranſi in un punto, infinitamente diſtante dalla loro origine, e che contengono un' angolo minore di ogn' angolo, che poſſa aſſegnarſi; donde avviene, che li due interiori alla ſteſſa parte, che forma con eſſe una terza retta, ſiano inſieme eguali a due retti.

626. Al contrario poi li problemi del ſecondo genere ſono ſempre capaci di due ſoluzioni diverſe, le quali ſiccome poſſono talvolta riunirſi inſieme, così poſſono ancora non ſuſſiſtere, e fare in conſeguenza, che il problema ſia impoſſibile. Dipende ciò dall' indole della

della linea circolare, che interſegaſi in due punti, così colla linea retta, come con un'altra linea circolare; li quali punti d' interſegamento, conforme riuniſconſi inſieme, qualora le riferite linee incontranſi per via di contatto, così poſſono altresì interamente ſvanire. Ed ecco per qual ragione dee farſi diſtinzione tra li problemi piani del primo genere, e gl' altri del ſecondo.

627. Affinchè abbiaſi un criterio indubitato, per diſcernere, ſe un problema piano ſia del primo, o del ſecondo genere, giova riflettere, che ſiccome ogni problema riduceſi alla ricerca di un punto, che ſoddisfi a tutte le ſue condizioni; così dee eſſervi una retta, che ci conduca a quel punto, e di cui s'ignori la lunghezza; onde potrà dedurſi il criterio, che ſi deſidera, da quel tanto deeſi fare per la determinazione di queſta retta. Adunque, ſe per determinarla, debbaſi ritrovare una terza, o quarta proporzionale dopo due, o tre rette date, il problema ſarà del primo genere. Ma, ſe per la ſua determinazione ſi abbia biſogno di ritrovare, o una mezza proporzionale tra due rette date, o due rette, che ſiano reciproche con due altre date rette, e di cui ne ſia data, o la ſomma, o la differenza; in tal caſo il problema ſarà del ſecondo genere.

628. Per dimoſtrare intanto, che ne' problemi piani nelle ſolo quattro riferite maniere debba determinarſi la retta, di cui ſi tratta, ſi vuol riflettere, che ſiccome la Geometria piana, nel paragonare le rette tra eſſo loro, non paſſa più oltre delli loro rettangoli, e delli loro quadrati; così nella ricerca della lunghezza di quella retta quattro ſoli caſi poſſono aver luogo; e ſono, o che ſia dato il rettangolo della ſteſſa retta in un' altra data, o che ſia dato il ſuo quadrato, o che ſia data la ſomma di quel rettangolo e di queſto quadrato, o finalmente che ſia data la loro differenza. Onde baſterà dimoſtrare, che a queſti quattro caſi rapportanſi le quattro riferite maniere di determinare la lunghezza della diviſata retta.

Fig. 156. 629. Sia perciò AB la retta, di cui deeſi definire la lunghezza, e pongaſi primieramente, che il rettangolo della AB nell' altra data CD ſia eguale al rettangolo delle due ſimilmente date EF, GH. Poichè dunque ſono eguali queſti due rettangoli, ſarà CD ad EF, come GH ad AB (523); onde, con ritrovare la quarta proporzionale dopo le tre rette date CD, EF, GH, ſi avrà la lunghezza della AB. E ſiccome può avvenire, che le due EF, GH ſiano eguali, ed in conſeguenza, che il rettangolo della

della AB nella CD ſia eguale al quadrato della EF; così, dovendo eſſere CD ad EF, come EF ad AB (524), ſi avrà la AB, con ritrovare la terza proporzionale dopo le due date CD, EF.

630. Egli è vero, che il rettangolo della AB nell' altra data CD può eſſere tal volta eguale alla ſomma, o differenza di due altri rettangoli dati. Ma, quando ciò avviene, primieramente ſi ridurranno ad un ſolo rettangolo li due dati, ed indi colla quarta proporzionale dopo la CD, e li due lati di queſto ſolo rettangolo, ſi determinerà la AB. E per quanto alla riduzione, di cui ſi ha biſogno, baſterà fare in modo, che li due dati rettangoli abbiano un lato comune; il che potrà farſi, con ritrovare una quarta proporzionale dopo un lato di uno di eſſi, e li due lati dell' altro. Nè altrimente dovrà farſi, ſe il rettangolo della AB nella AC ſia eguale alla ſomma, o differenza, ſia di due quadrati dati, ſia di un dato rettangolo e di un dato quadrato.

631. Pongaſi in ſecondo luogo, che il quadrato della AB ſia eguale al rettangolo delle due rette date EF, GH; e poichè per queſta loro uguaglianza dee eſſere EF ad AB, come AB a GH (524), chiaro ſi è, che ſi avrà la AB, *Fig.* 156.

con ritrovare la mezza proporzionale tra le due rette date EF, GH. E quantunque poſſa avvenire, che il quadrato della AB facciaſi talvolta eguale alla ſomma o differenza, ſia di due dati quadrati, ſia di un dato rettangolo e di un dato quadrato; nientedimeno colla riduzione poc'anzi accennata ſempre dovrà determinarſi la AB, con ritrovare la mezza proporzionale tra due rette date; il che dee intenderſi ancora per gli due caſi, che ſeguono, per non replicare ſempre lo ſteſſo.

Fig. 156. 632. Pongaſi in terzo luogo, che la ſomma del quadrato della AB, e del rettangolo della ſteſſa AB nell'altra data CD ſia eguale al rettangolo delle due ſimilmente date EF, GH. Poichè dunque quel quadrato, e quel rettangolo inſieme ſono eguali al ſolo rettangolo della AB nella ſomma delle due AB, CD (174); ancora queſto rettangolo ſarà eguale al rettangolo delle due EF, GH. Onde, dovendo eſſere AB ad EF, come GH alla ſomma delle due AB, CD (523); chiaro ſi è, che ſi determinerà la AB, con ritrovare due rette, che ſiano reciproche colle due date EF, GH, e che differiſcano tra di loro per l'altra retta ſimilmente data CD.

633. Pongaſi finalmente, che la differenza tra il quadrato della AB, ed il ret-

rettangolo della ſteſſa AB nell'altra data CD ſia eguale al rettangolo delle due ſimilmente date EF, GH. Poichè dunque la differenza tra quel quadrato, e quel rettangolo è eguale al ſolo rettangolo della AB nella differenza delle due AB, CD (174); ancora queſto rettangolo ſarà eguale al rettangolo delle due EF, GH. Onde; dovendo eſſere AB ad EF, come GH alla differenza delle due AB, CD (523); chiaro ſi è, che ſi determinerà la AB, con ritrovare due rette, che ſiano reciproche colle due date EF, GH, e di cui o la differenza, o la ſomma ſia eguale all' altra retta ſimilmente data CD. *Fig.* 156.

634. In queſt' ultimo caſo intanto deeſi avvertire, che la differenza tra le due AB, CD può derivare, o dall' eſſere la AB maggiore della CD, o al contrario dall' eſſere la CD maggiore della AB; e quindi ſi è, che la CD poſſa eſſere, così la differenza, come la ſomma delle due rette reciproche, che debbonſi ritrovare. Ed è da notarſi altresì, che ſiccome, eſſendo la CD ſomma delle due rette reciproche, biſogna, che la mezza proporzionale tra le due EF, GH non ſia maggiore della metà della CD (479); così la ſteſſa condizione dovrà ritrovarſi nel problema, che

riduceſi alla ricerca di quelle due rette reciproche, affinchè egli poſſa riſolverſi.

635. Eſſendo così, rimane ora dimoſtrato, che li problemi piani del primo genere riducanſi ai due, di ritrovare una terza, o quarta proporzionale dopo due, o tre rette date; e che gl' altri del ſecondo genere debbanſi ripetere dagl' altri due, di ritrovare, o una mezza proporzionale tra due rette date, o pure due rette, che ſiano reciproche con due altre date, e di cui ne ſia data, o la differenza, ovvero la ſomma. E quantunque molti problemi piani, così del primo, come del ſecondo genere, riſolvanſi talvolta, con ridurgli ad altri problemi, differenti dalli quattro riferiti; nientedimeno, ſe vogliaſi attentamente riflettere, ſi vedrà, che quegl'altri problemi riduconſi ad uno dei quattro diviſati.

636. Così può averſi tal volta la ſoluzione di un problema del primo genere, con dividere una data retta in data ragione; ma queſta ſteſſa diviſione riduceſi alla ricerca di una retta, che ſia quarta proporzionale dopo tre altre rette date. Ed in fatti, ſe AB ſia la retta da dividerſi, e la data ragione ſia quella di DE ad EF; tagliandoſi dalla AB la porzione BC, che ſia quarta proporzionale dopo le tre DF, EF, AB,

Fig. 157.

AB, ſi avrà col punto C la diviſione ricercata; e la ragione è chiara, poichè eſſendo AB a BC, come DF ad EF, ſarà dividendo (424) AC a BC, come DE ad EF.

637. Similmente può averſi talvolta la ſoluzione di un problema piano del ſecondo genere, con dividere una data retta in eſtrema, e media ragione; ma queſta ſteſſa diviſione riduceſi alla ricerca di due rette, che ſiano reciproche con due altre eguali, e di cui ne ſia data la differenza. Ed in fatti, ſe AB ſia la retta da dividerſi in eſtrema, e media ragione; e ritrovate le due AD, BD, che differenti tra di loro per la AB, ſiano reciproche con due altre eguali alla ſteſſa AB, tagliſi dalla AB la porzione BC eguale alla BD, ſi avrà col punto C la diviſione ricercata; poichè eſſendo AD ad AB, come AB a BD, ſarà convertendo (426) come BD ovvero BC ad AB, così AC a BC. *Fig.* 158.

638. Del rimanente li problemi piani del ſecondo genere poſſono con maggior compendio ridurſi alla ſola ricerca di una mezza proporzionale tra due rette date. In fatti, ſe rifletta ſi al modo, con cui ritrovanſi due rette, che ſiano reciproche con due altre rette date, e di cui ne ſia data, o la differenza, o pure la ſomma; ſi vedrà, che

non ſi fa altra coſa, ſe non che ritrovare un quadrato, che ſia eguale alla ſomma, o differenza di due altri quadrati dati. Onde, ſecondo l' avvertimento poc' anzi fatto (630), ſe per mezzo di una terza proporzionale uno dei due quadrati dati riducaſi ad un rettangolo, di cui un lato ſia quello dell' altro quadrato, ſi avrà il terzo quadrato, con ritrovare una mezza proporzionale tra due rette date; anzi, ſe egli debba eſſere eguale alla differenza delli due dati, baſterà ritrovare la mezza proporzionale tra la ſomma delli loro lati, e la differenza degli ſteſſi lati.

§. XXXVIII.

Della ſteſſa riſoluzione de' problemi piani illuſtrata con eſempj.

639. PEr illuſtrare con varj eſempj ciò, che è ſtato detto generalmente intorno alla riſoluzione de' problemi piani, debbaſi in primo luogo ſulla retta data AB formare un triangolo iſoſcele, che ſia eguale all'altro triangolo dato EFG. Pongaſi, che *Fig.* 159. ABC ſia il triangolo iſoſcele, che ſi dimanda; e ſulla baſe di eſſo AB ſi abbaſſi dall'angolo verticale C la perpendicolare CD, che la dividerà per metà nel

nel punto D. Volendoſi adunque, che li due triangoli ABC, EFG ſiano eguali, le loro baſi AB, EF ſaranno nella reciproca ragione delle loro altezze (517); onde, ſe GH ſia perpendicolare ſull' altra EF, ſi ritroverà il vertice C del triangolo ritercato, con dividere la data AB per metà nel punto D, e con alzare su di eſſa la perpendicolare DC di lunghezza tale, che ſia quarta proporzionale dopo le tre rette date AB, EF, GH.

640. Debbaſi in ſecondo luogo dentro del triangolo ABC inſcrivere un quadrato, che con uno de' ſuoi lati ſi appoggi ſulla baſe di quello BC. Pongaſi, che DEFG ſia il quadrato, che ſi dimanda, e ſi abbaſſi ſulla baſe BC la perpendicolare AH, che s' incontri colla DE nel punto I. Eſſendo adunque equiangoli li due triangoli ADE, ABC, ſarà AD ad AB, come DE a BC (455). Ma, per gl'altri due triangoli ADI, ABH ſimilmente equiangoli, AI ſta ad AH, come AD ad AB. Dunque ſarà AI ad AH, come DE ovvero IH a BC; e per tanto conforme permutando (419) AI ſta ad IH, come AH a BC, così componendo (423) ſarà AI ad AH, così AH alla ſomma delle due AH, BC. Onde ſi riſolverà il problema propoſto, con abbaſſa- *Fig.* 160.

baſſare ſulla baſe del triangolo BC la perpendicolare AH, e con tagliare da eſſa la porzione AI, che ſia terza proporzionale dopo la ſomma delle due AH, BC, e la ſola AH.

641. Debbaſi in terzo luogo deſcrivere un cerchio, che avendo per ſue tangenti li lati del dato angolo BAC, paſſi ancora per un dato punto D. Pongaſi che BCD ſia il cerchio, che ſi dimanda; e dividaſi l'angolo BAC in due parti eguali per la retta AE. Le due adunque AB, AC, come tangenti del cerchio, debbono eſſere eguali (357); onde, dovendo la AE paſſare per lo centro del cerchio, ſe su di eſſa ſi abbaſſi la perpendicolare DE, e faccianſi eguali le due DE, EF, ſarà F un'altro punto del cerchio (303). Ma, prolungata la ſteſſa DF per ſino a che s'incontri colla AB nel punto G, dee eſſere il rettangolo delle due DG, FG eguale al quadrato della GB (353), dalla quale uguaglianza ricavaſi, che DG ſia a GB, come GB ad FG (524). Dunque ſi avrà il terzo punto B, che determina il cerchio, con tagliare dalla AG la porzione GB, che ſia mezza proporzionale tra le due date DG, FG.

Fig. 161.

Fig. 162. 642. Debbaſi in quarto luogo nella circonferenza del dato cerchio ABC ritrovare il punto A, da cui tirate agli altri

altri due D, ed E dati di posizione le rette AD, AE, che s' incontrino colla stessa circonferenza ne' punti B, e C, siano parallele le due BC, DE. Tirisi al punto B la tangente B F; e per gli triangoli equiangoli ADE, FDB, sarà AD a DE, come DF a BD; e pertanto sarà il rettangolo delle due AD, BD eguale al rettangolo dell'altre due DE, DF. Ma, tirata al cerchio dal punto dato D la tangente DG, il primo di questi due rettangoli si fa eguale al quadrato della DG. Dunque, dovendo essere eguale a questo quadrato ancora l'altro rettangolo, sarà D E a D G, come D G a D F; onde si risolverà il problema, con tagliare dalla D E la porzione D F, che sia terza proporzionale dopo le due date DE, DG, e con fare, che la FB sia tangente del cerchio.

643. Notisi quì intanto, che se bene per la risoluzione del proposto problema debbasi tagliare dalla DE la porzione D F, che sia terza proporzionale dopo le due date DE, DG; nientedimeno, siccome in appresso per la determinazione del punto B deesi tirare la F B in modo, che sia tangente del cerchio; così con questa tangente si viene a ritrovare una mezza proporzionale tra due rette date; onde si è, che il problema debba riputarsi del secondo,

e non

e non già del primo genere : come in fatti , ſe per lo centro del cerchio H tiriſi la FI , che s' incontri colla ſua circonferenza ne' punti I , e K , ſaranno date le due FI , FK ; e dovendo eſſere il quadrato della FB eguale al loro rettangolo, ſarà la FB mezza proporzionale tra le ſteſſe due FI , FK ; al che dee aggiungerſi , che potendoſi tirare la tangente FB, così dall' una , come dall' altra parte della FH, il problema ſarà capace di due ſoluzioni diverſe.

Fig. 163. 164. 644. Debbaſi in quinto luogo dal punto D dato fuori, o dentro del triangolo ABC tirare la DF in modo , che incontrandoſi colli due lati AB , AC ne' punti E , ed F , faccia , che li due triangoli ABC, AEF ſiano in data ragione. Pongaſi , che la data ragione ſia di AC ad AG ; e poichè , congiunta la AG , debbono eſſere in queſta ſteſſa ragione , così li due triangoli ABC , AEF, come li due ABC, ABG , ſarà il triangolo AEF eguale al triangolo ABG ; onde , dovendo eſſere AB ad AE, come AF ad AG , ſarà il rertangolo delle due AB, AG eguale al rettangolo dell' altre due AE, AF. Ma , tirata la DH parallela alla BA , e fatta la AI quarta proporzionale dopo le tre DH, AB, AG, il rettangolo delle

le due AB, AG ſi fa eguale al rettangolo delle due AI, DH. Dunque ancora il rettangolo di queſte due AI, DH ſarà eguale al rettangolo dell' altre due AE, AF.

645. Per l' uguaglianza intanto di queſti due rettangoli dee eſſere A I ad AF, come AE a DH. Onde, eſſendo A E a D H, come A F ad H F; ſarà AI ad AF, come AF ad HF; ed in conſeguenza dividendo ſarà altresì A I ad FI, come AF ad AH. Riduceſi adunque il problema alla ricerca delle due AF, FI, che ſiano reciproche colle due date AI, AH, e di cui la differenza, o la ſomma ſia eguale alla ſteſſa A I. Ed eſſendo così, il problema potrà ſempre riſolverſi, quante volte la differenza di quelle due AF, FI dee eſſere eguale alla AI; ma non già, quando la AI dee eſſere eguale alla loro ſomma, poichè in queſto caſo fa duopo, che la metà della A I non ſia minore della mezza proporzionale, che cade tra le due A I, A H.

646. Debbaſi in ſeſto luogo ſulla data retta B C deſcrivere il triangolo ABC, in cui inſieme coll' angolo acuto B A C ſia data la ſomma de' quadrati delli due lati AB, AC, che lo contengono. Suppongaſi, che il triangolo ricercato ſiaſi già deſcritto. Eſſendo adun- *Fig.* 165.

dunque data la BC, ſarà dato ancora il ſuo quadrato; e per tanto ſarà data parimente la differenza tra queſto quadrato, e la ſomma delli due fatti dalli lati AB, AC. Ma, abbaſſata su 'l lato AC dall' angolo oppoſto B la perpendicolare BD, queſta differenza è eguale al doppio del rettangolo fatto dalle due AC, AD (209). Dunque eziandio queſto rettangolo ſarà dato; ed in conſeguenza, ſe ad eſſo pongaſi eguale il quadrato della BH, ſarà data altresì la retta BH.

647. Or, ſe dividaſi la BC per metà nel punto E, e da queſto punto ſi abbaſſi ſul lato AC l' altra perpendicolare EF; chiaro ſi è, che ancora la CD ſarà diviſa per metà nel punto F. Onde, ſiccome il rettangolo delle due AC, AD, o pure il quadrato della BH inſieme col quadrato della DF dee eſſere eguale al quadrato della AF (191); così, coll' aggiunta del comune quadrato della EF, ſaranno li quadrati delle due BH, DE, o pure delle due BH, BE eguali al quadrato della EA; e per tanto la determinazione della EA ſi ridurrà alla ricerca di un quadrato, che ſia eguale alla ſomma di due altri quadrati dati.

648. Ma egli è da notarſi, che ſe bene la EA poſſa ſempre determinarſi, pure

pure attento l'uſo, che dee farſi di eſſa, il problema potrà eſſere tal volta impoſſibile. In fatti il vertice A del triangolo, che ſi dimanda, dee ritrovarſi nella porzione di cerchio deſcritta ſulla BC in modo, che ſia capace dell' angolo acuto dato. Onde, ſiccome egli dovrà averſi coll' incontro con queſta porzione di un' arco circolare, deſcritto col punto E come centro, e coll' intervallo della EA; così, ſe la EA ritroviſi maggiore della perpendicolare elevata dal punto E ſulla BC per ſino alla ſteſſa porzione, l' arco circolare non potrà con quella incontrarſi, ed in conſeguenza il problema ſarà impoſſibile.

649. Se poi il dato angolo BAC, che debbono contenere li due lati AB, AC, in vece di eſſere acuto, ſia ottuſo; in tal caſo, facendoſi uſo della ſteſſa analiſi, ſi ritroverà, che il quadrato della EA ſia eguale, non già alla ſomma, ma alla differenza delli quadrati fatti dalle due BH, BE. Onde in queſto caſo potrà eſſere il problema impoſſibile per due capi, sì perchè può avvenire, che la EA affatto non poſſa determinarſi; come ancora perchè, potendoſi determinare, può ella ritrovarſi talvolta minore della perpendicolare alzata dal punto E ſulla BC per ſino alla por- *Fig.* 166.

porzione di cerchio, che deesi descrivere sulla stessa BC.

650. Debbasi finalmente dall'angolo D del dato quadrato, o pure rombo ABCD tirare la DE in modo, che incontrandosi colli due lati opposti AB, BC ne' punti E, ed F, sia la porzione EF compresa tra di essi eguale ad una data retta. Suppongasi il problema già risoluto; e congiunta la diagonale BD, prendasi su di essa la BG eguale alla retta data, ed in conseguenza eguale alla EF. Adunque, se tirisi la GH parallela alla DA, sarà BD a BA, come BG, ovvero EF a BH; e per tanto il rettangolo delle due BA, EF sarà eguale al rettangolo dell'altre due BD, BH. Ma, per essere EB a BA, come EF ad FD, il rettangolo delle due BA, EF è eguale ancora al rettangolo delle due EB, FD. Dunque, facendosi il rettangolo delle due BD, BH eguale al rettangolo delle due EB, FD, sarà BD ad EB, come FD a BH.

Fig. 167. 651. Or, se facciasi l'angolo DFI eguale all'angolo DBE, sarà BD ad EB, come FD ad FI; e pertanto, essendo FD a BH, come la stessa FD ad FI, le due BH, FI saranno eguali tra di loro. Onde, se mai potesse aversi il punto I, si risolverebbe il proble-

blema propoſto per mezzo di un cerchio deſcritto con quel punto come centro, e coll' intervallo della retta data BH; poichè, con interſegarſi la circonferenza di queſto cerchio col lato BC, ſi avrebbe il punto F, per cui dee condurſi la retta DE, che ſi dimanda; anzi, perchè la ſteſſa circonferenza interſegaſi col lato BC eziandio dall' altra parte del punto B, ſi avrebbero del propoſto problema due ſoluzioni diverſe.

652. Per la determinazione intanto di quel punto I, giova riflettere, che eſſendo l'angolo ABC diviſo per metà dalla diagonale BD, l'angolo EBI, come eguale all'angolo ABD, dee eſſere eguale altresì all'angolo DBF; onde, coll'aggiunta del comune EBF, facendoſi eguali ancora li due IBF, DBE, ed eſſendo per conſtruzione l'angolo DFI eguale all'angolo DBE, ſaranno eguali parimente li due DFI, IBF. Quindi li due triangoli FDI, BFI ſaranno equiangoli; e per tanto DI ſarà ad FI, come FI a BI. Ma ſi è dimoſtrata la FI eguale alla BH. Dunque ſarà ancora DI a BH, come BH a BI; e perciò il punto I dovrà determinarſi colla ricerca delle due DI, BI, che avendo per loro differenza la data BD, ſiano reciproche con altre due, di cui ciaſcuna ſia eguale all'altra data BH.

653.

Fig. 168. 653. Per quanto a queſt'ultimo problema, merita di eſſere avvertito, che ſe A B C D ſia quadrato, e ſulla D E alziſi la perpendicolare E G, che s' incontri col lato DC prolungato nel punto G, poſſa egli riſolverſi ancora con determinare la D G; poichè deſcrivendoſi su di eſſa come diametro il mezzo cerchio, e prolungandoſi il lato AB per ſino a che s' incontri colla ſua circonferenza, ſi avrà con queſto incontro il punto E, a cui dee tirarſi la retta, che ſi dimanda; anzi, perchè il lato AB dee incontrarſi colla circonferenza di quel mezzo cerchio in due punti diverſi, ſituati da ambedue le parti del punto B; eziandio con riſolvere il problema in queſta guiſa, ſi vedrà, che egli ſia capace di due ſoluzioni diverſe.

654. Prendaſi perciò ſul lato D A la retta, a cui dee eſſere eguale la E F, e ſia D H; indi, abbaſſata ſulla DG la perpendicolare EI, congiunganſi le due CH, FG. Poichè dunque ſono equiangoli li due triangoli DFC, EGI, e li lati di eſſi DC, EI ſono eguali, ſaranno eguali ancora gl' altri due DF, EG; e pertanto eſſendo la DH eguale altresì alla E F, ſaranno li quadrati delle due D H, DF eguali ai quadrati dell' altre due EF, EG. Ma li primi due quadrati ſono eguali ai quadrati delle

delle tre DH, DC, CF, o pure ai quadrati delle due CH, CF; e gli altri due quadrati ſono eguali al quadrato della FG, o pure ai quadrati delle due CG, CF. Dunque li quadrati delle due CH, CF ſaranno eguali ai quadrati delle due CG, CF; e pertanto, ſiccome tolto da eſſi il comune quadrato della CF, rimane il quadrato della CH eguale al quadrato della CG, così ſaranno eguali parimente le due CH, CG.

655. Determinaſi adunque la DG, con fare, che la porzione di eſſa CG ſia eguale alla CH, dimodochè con queſt' altra ſoluzione riduceſi il problema alla ricerca di un quadrato, che ſia eguale alla ſomma di due altri quadrati dati; a cui per altro, ſecondo l'avvertimento fatto (636), potrebbe ridurſi eziandio colla prima ſoluzione; poichè, ſiccome diviſa la DB in due parti eguali nel punto K, ſi fa il quadrato della KI eguale al rettangolo delle due DI, BI inſieme col quadrato della BK; così, per eſſere il rettangolo delle due DI, BI eguale al quadrato della FI, o ſia BH, ſarà il quadrato della KI eguale ai quadrati delle due rette date BH, BK. *Fig.* 167.

656. Del rimanente gli ſteſſi eſempj addotti poſſono eſſerci di avvertimento,

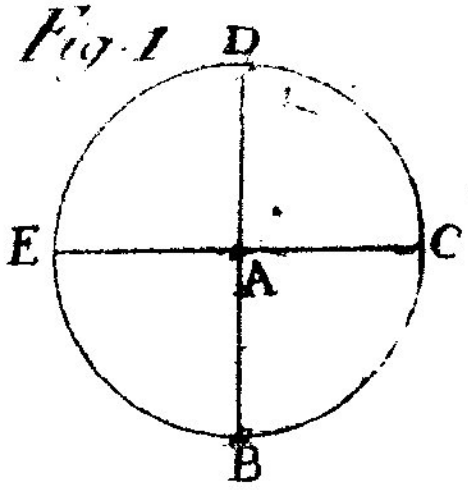
to, che per venire a capo della ſoluzione di un qualche problema, debbaſi tener conto, non ſolo delli dati eſpreſſi nello ſteſſo problema, ma eziandio degl' altri, che da quelli derivar ſi poſſono; onde ſi è, che ſi debbano tener preſenti li varj teoremi dimoſtrati in queſti Elementi per la ragione, che per mezzo di eſſi debbono dedurſi li nuovi dati. E da ciò ancora avviene, che un problema, il quale a prima faccia ſembra difficile, ſi poſſa tal volta riſolvere, con dividere per metà una data retta, o un dato angolo; con tirare per un dato punto una retta parallela, o perpendicolare ad un' altra retta data; e con altre conſtruzioni conſimili; per cui la ſoluzione del problema rendeſi nello ſteſſo tempo ſemplice, ed elegante.

Fine del primo libro.

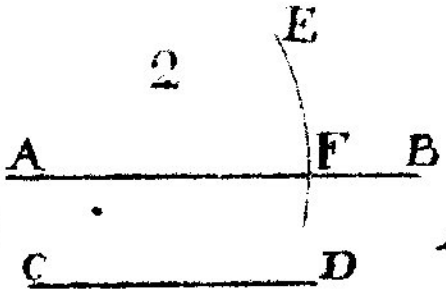
IN-

Tav. I.

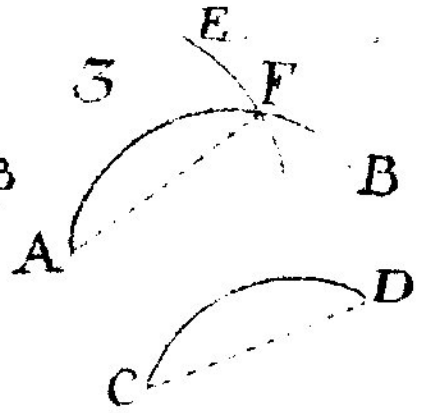
Fig. 1



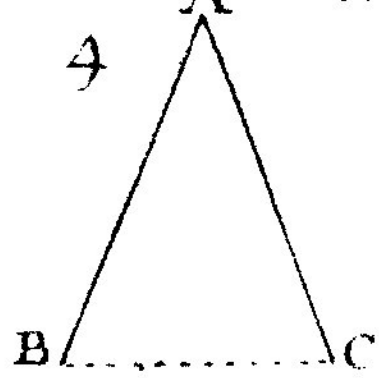
2



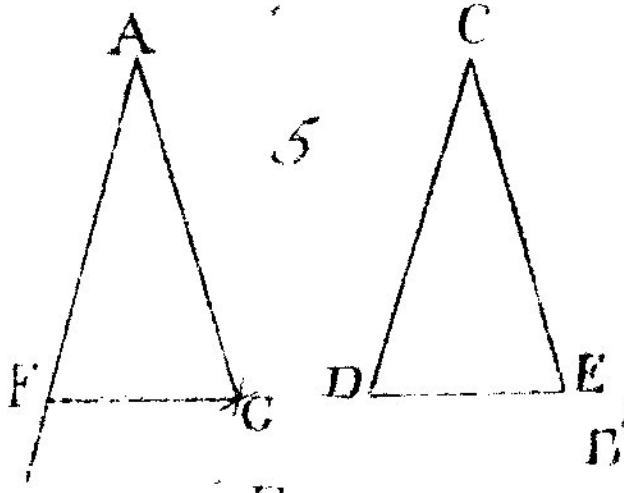
3



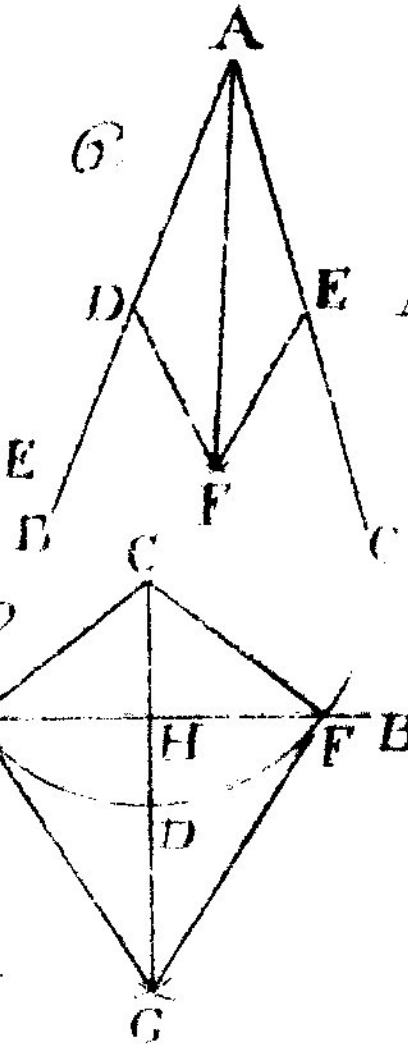
4



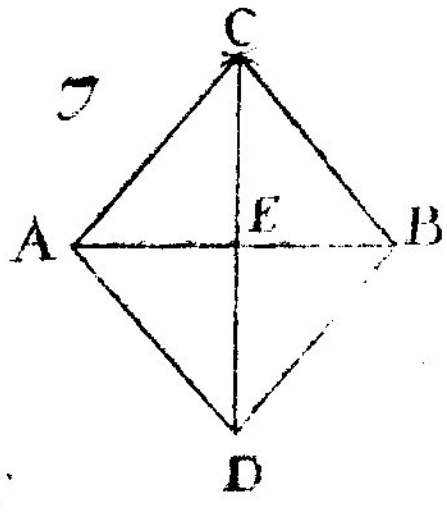
5



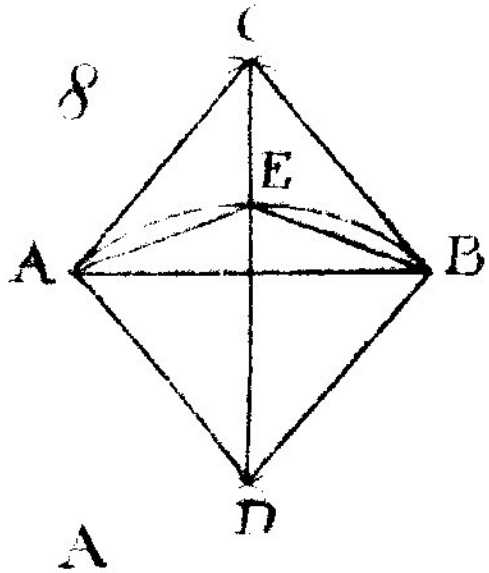
6



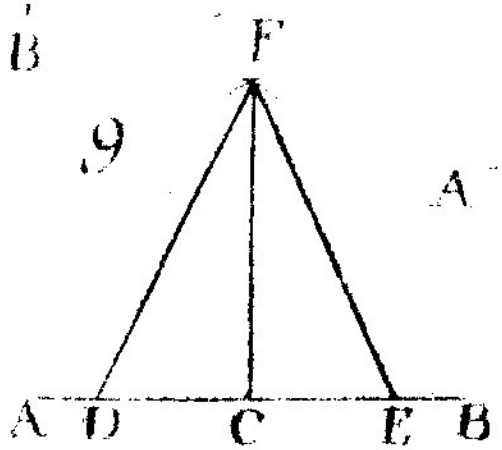
7



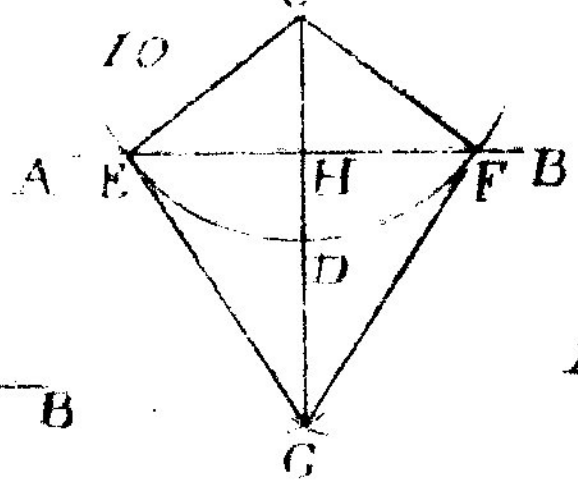
8



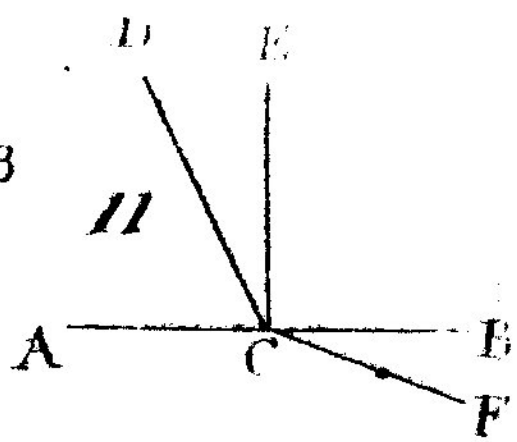
9



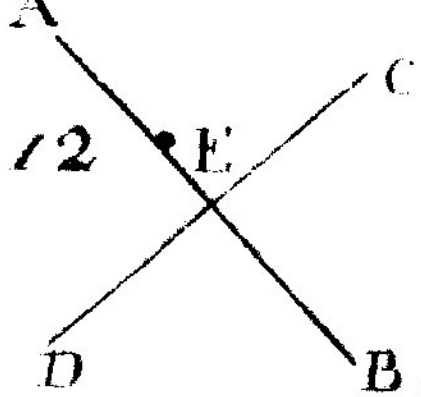
10



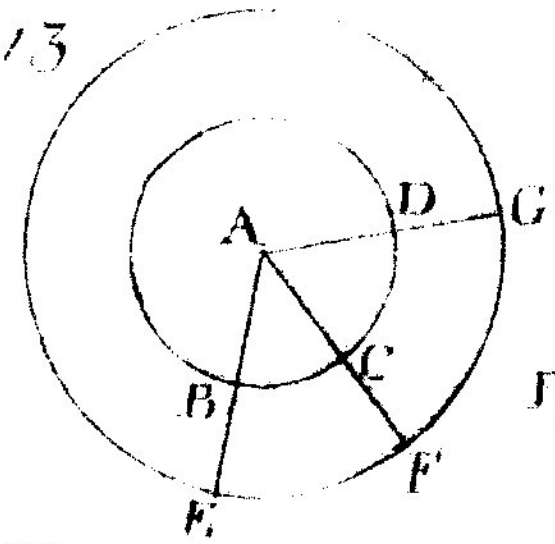
11



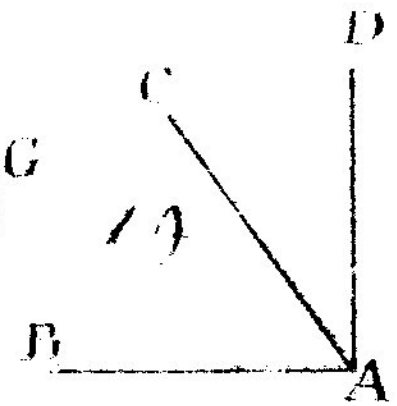
12



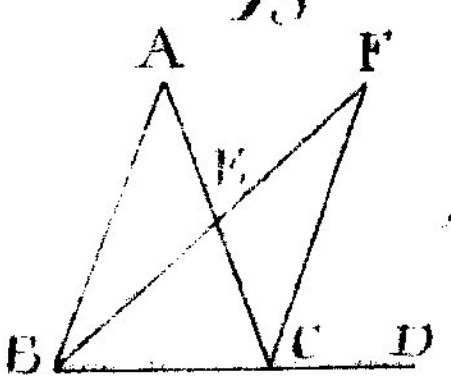
13



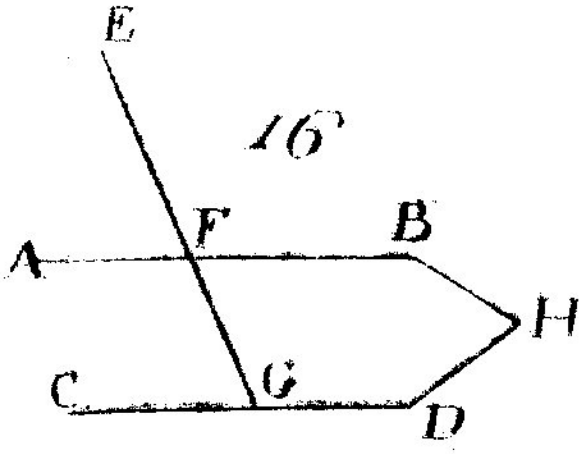
14



15

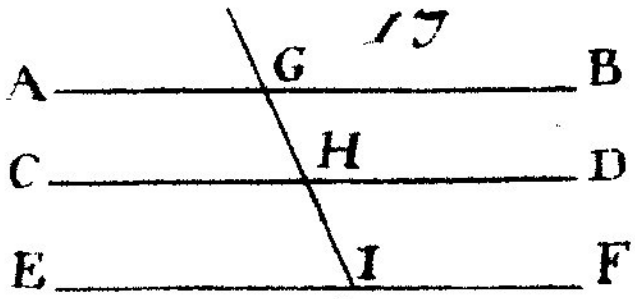


16

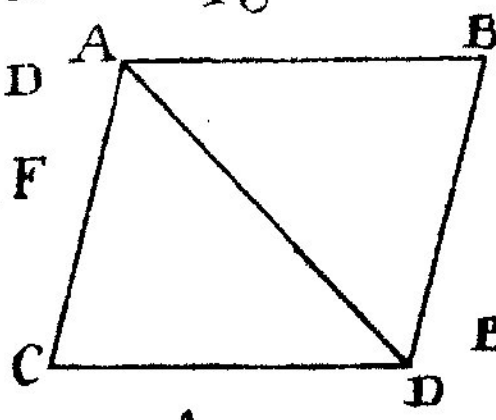


Tav. II.

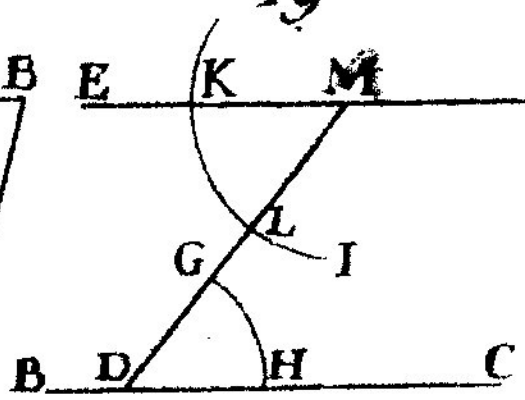
17



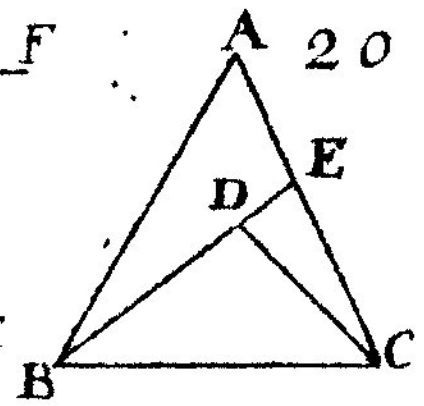
18



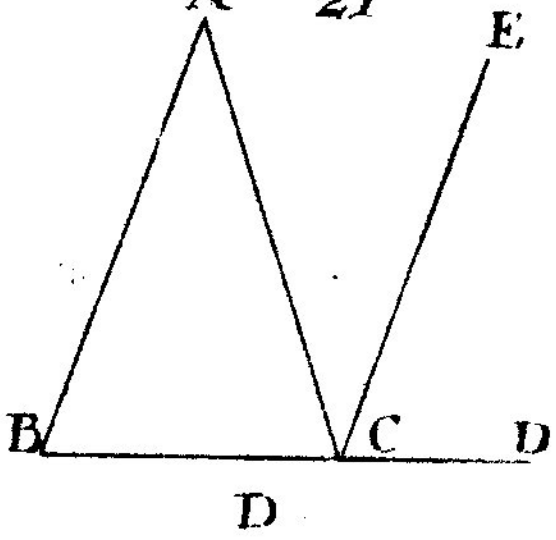
19



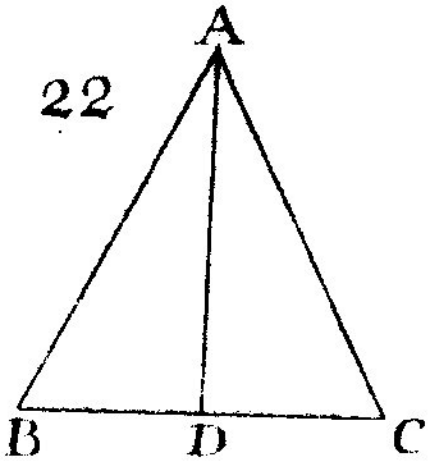
20



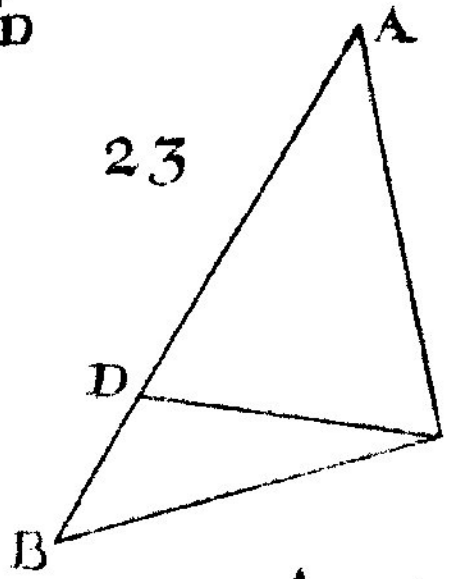
21



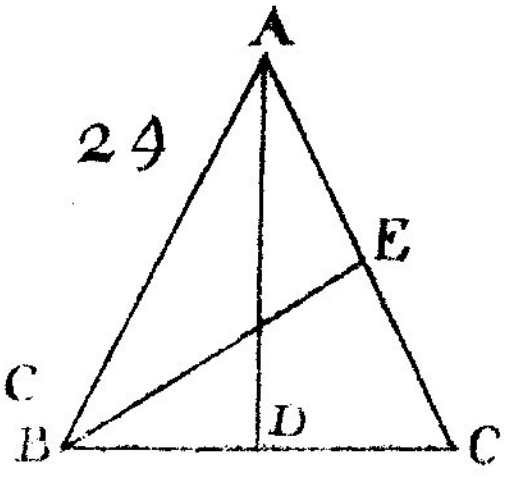
22



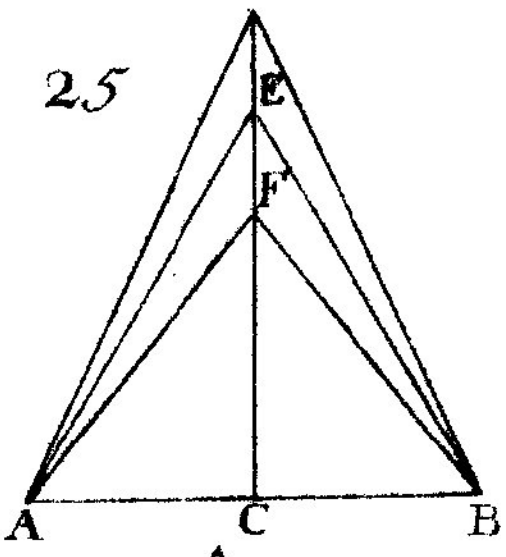
23



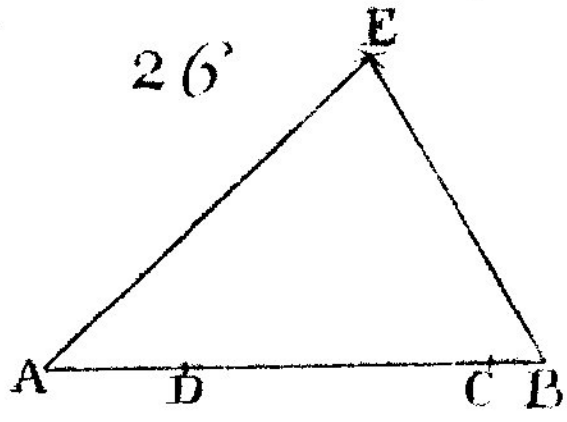
24



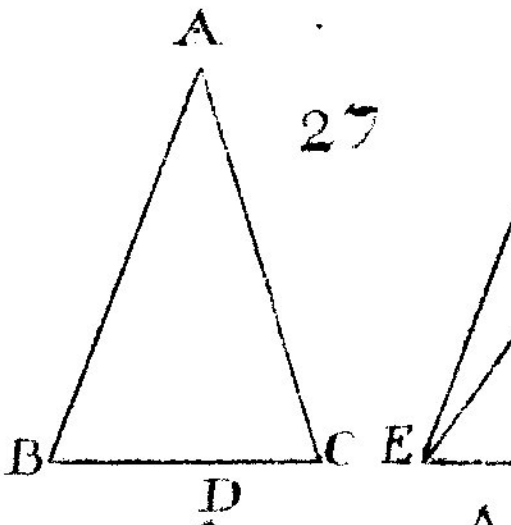
25

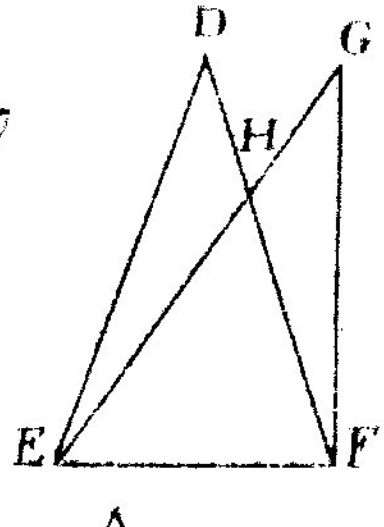


26

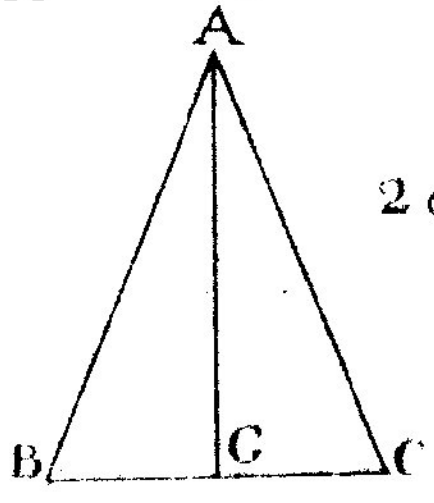


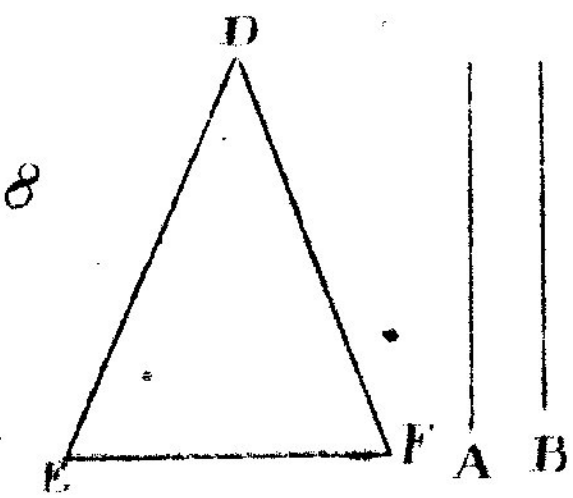
27



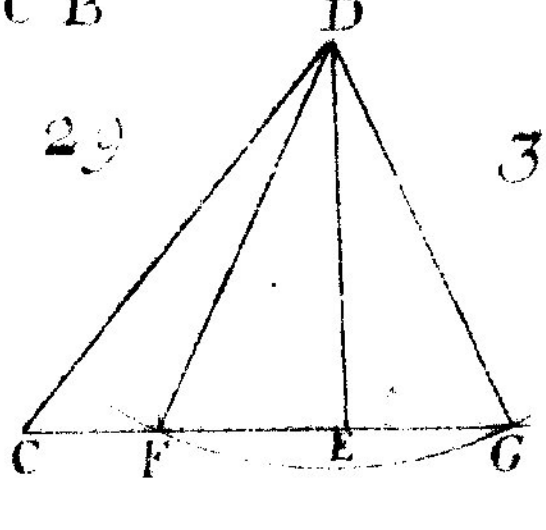


28

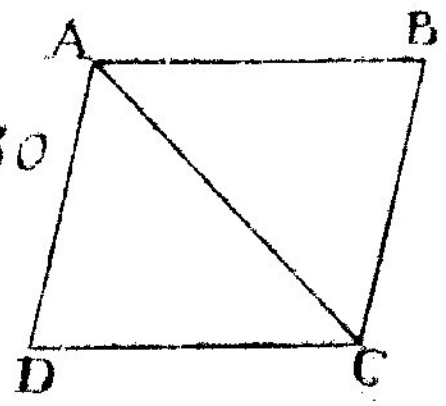




29

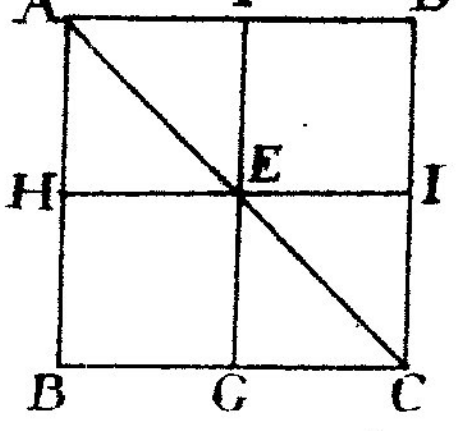


30

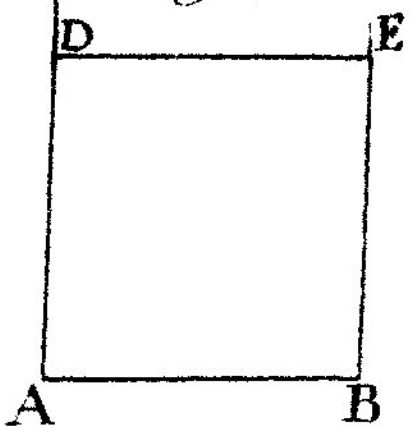


Tav. III.

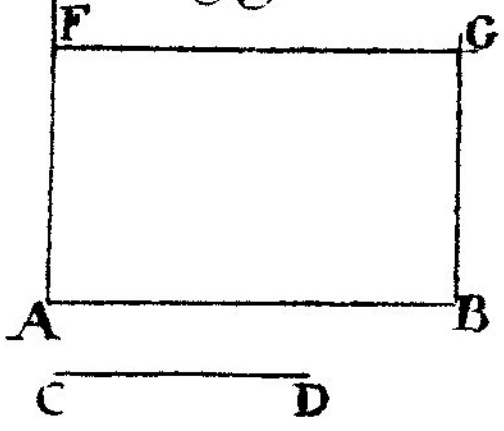
31



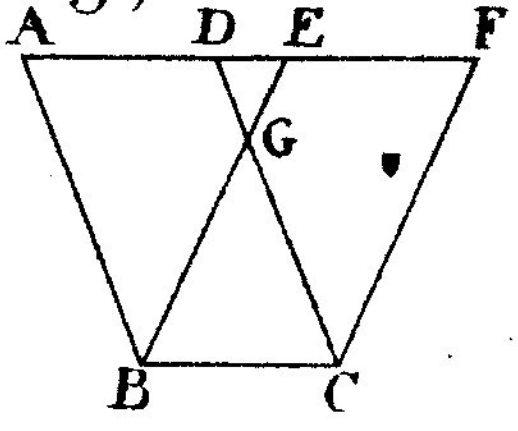
32



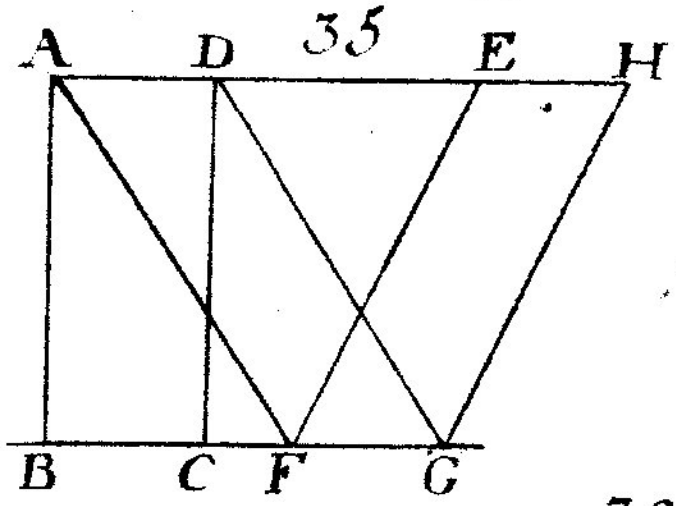
33



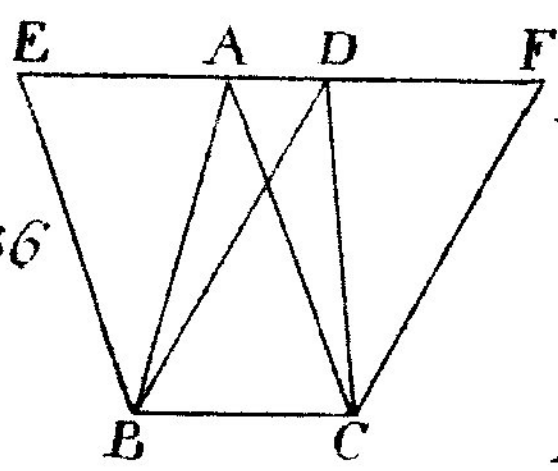
34



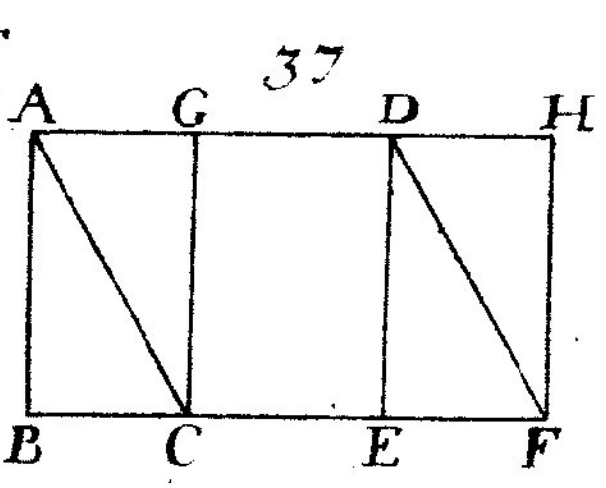
35



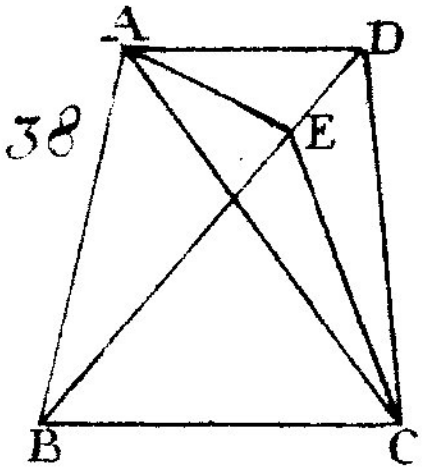
36



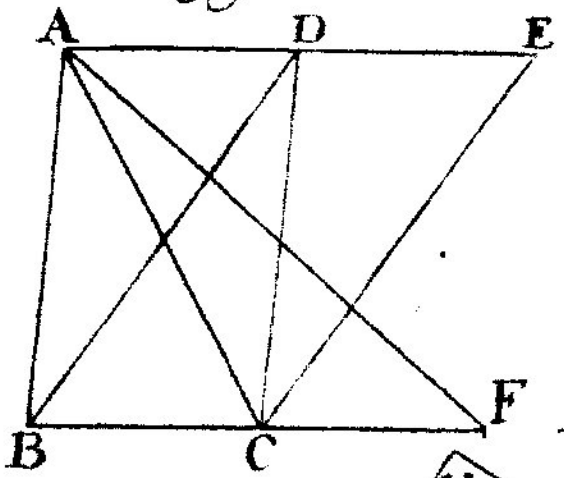
37



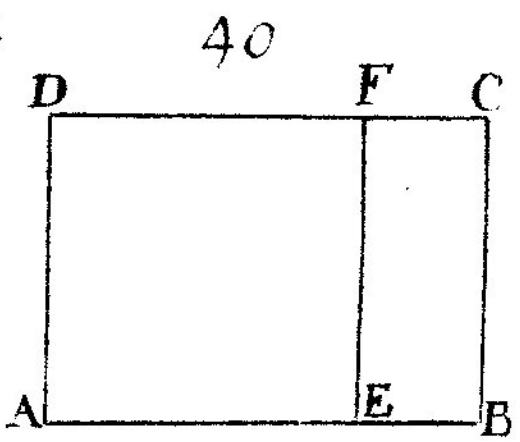
38



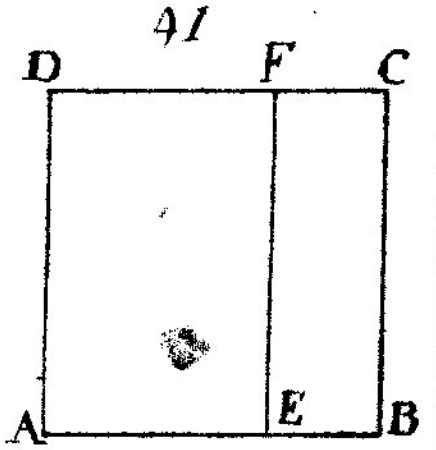
39



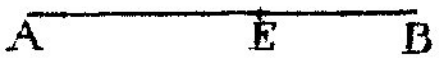
40



41



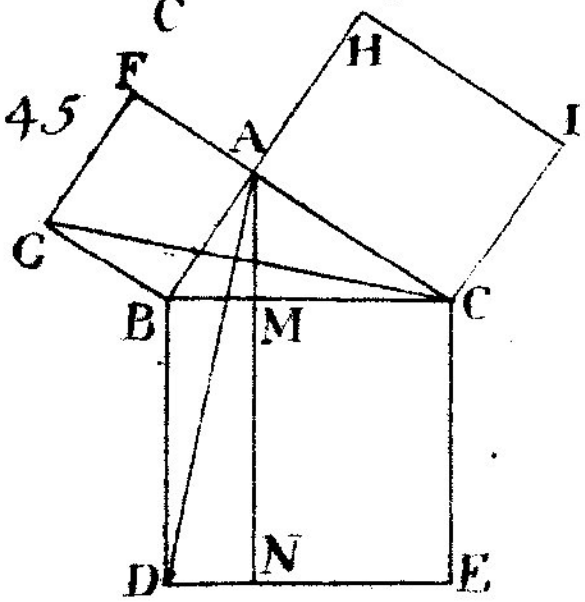
42



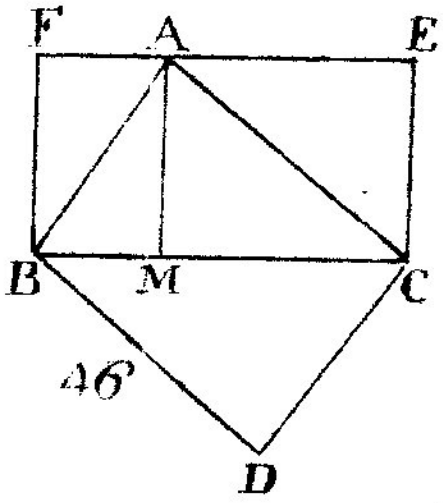
43

44

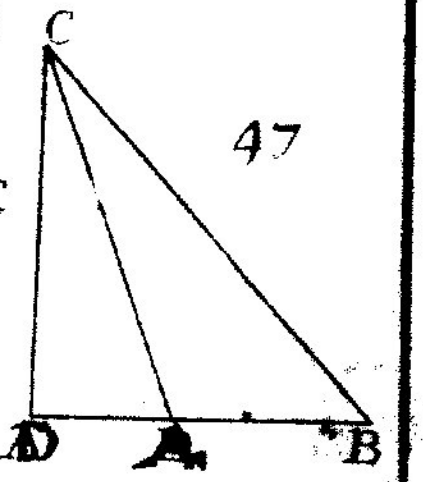
45



46

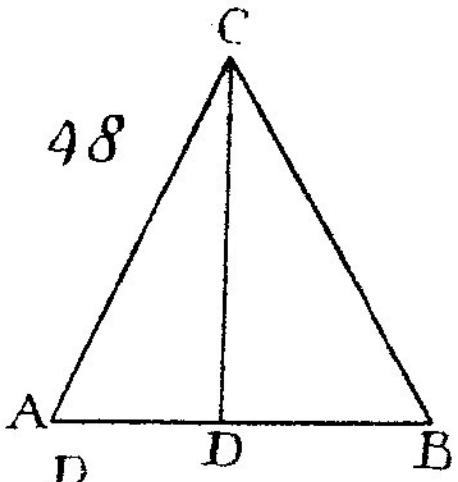


47

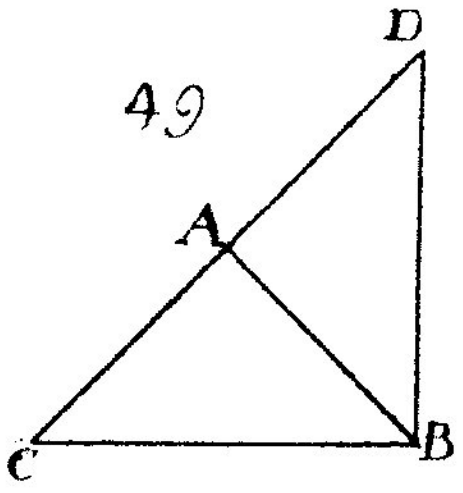


Tav. IV.

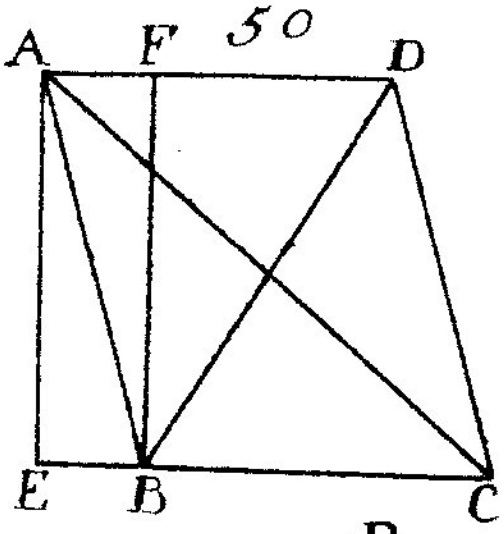
48



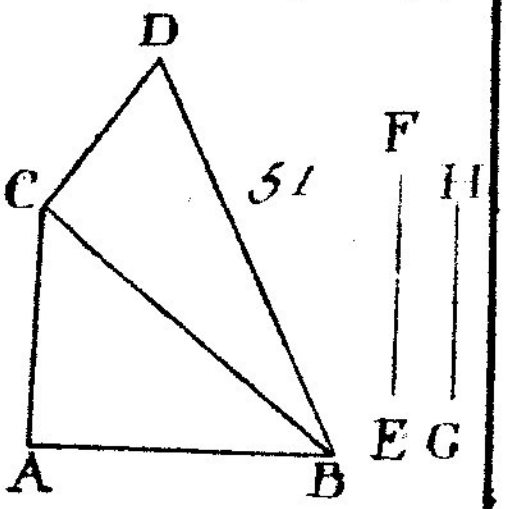
49



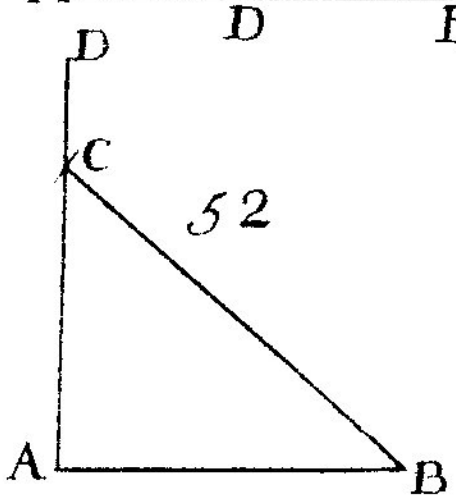
50



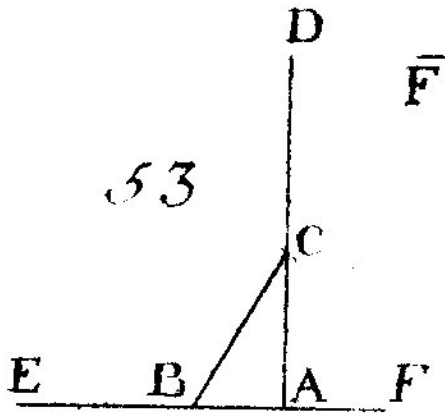
51



52

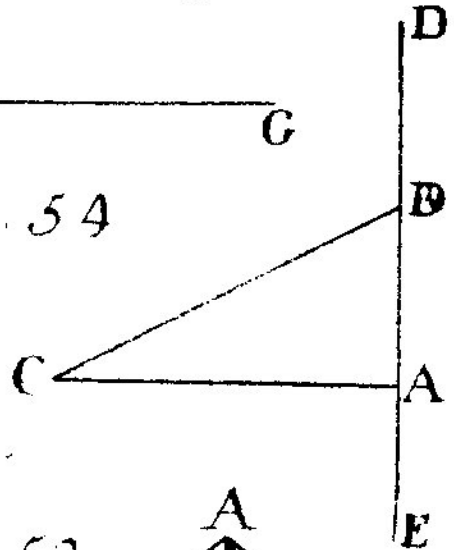


53

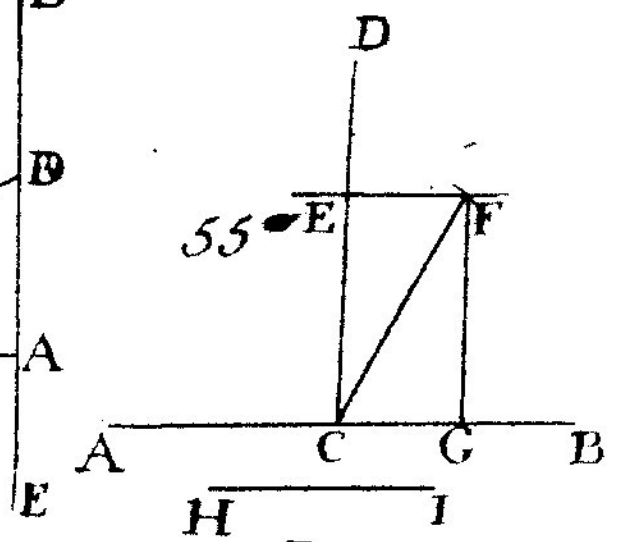


F G

54

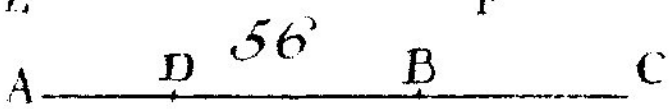


55

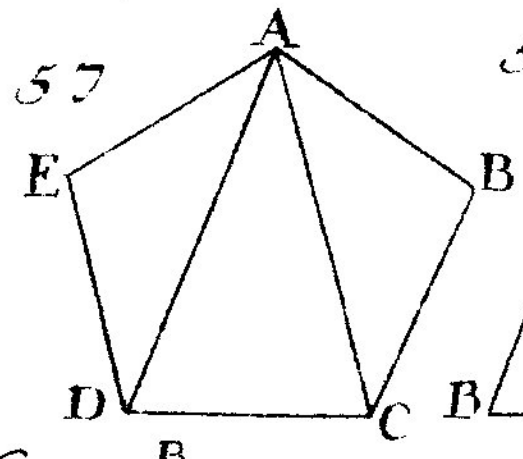


E F

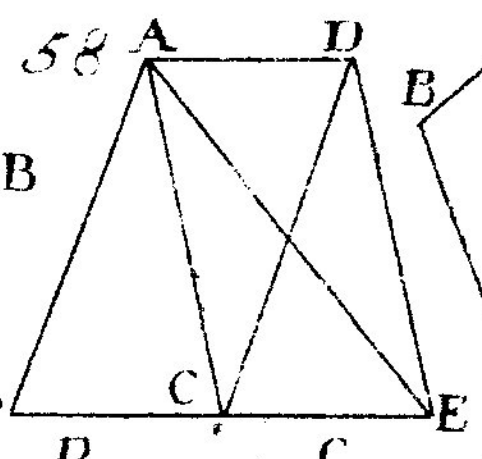
56



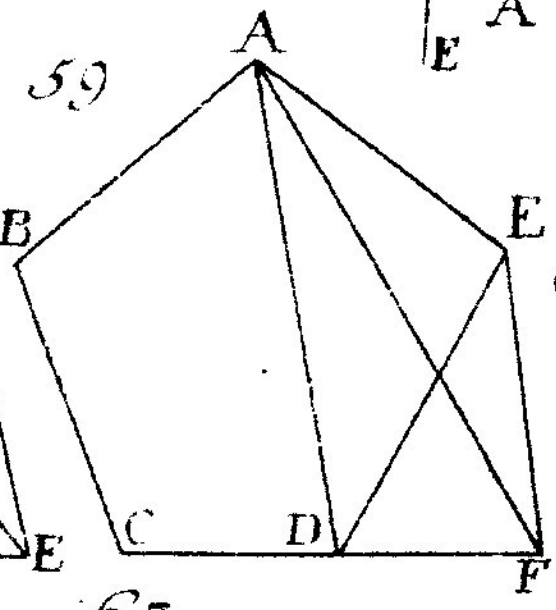
57



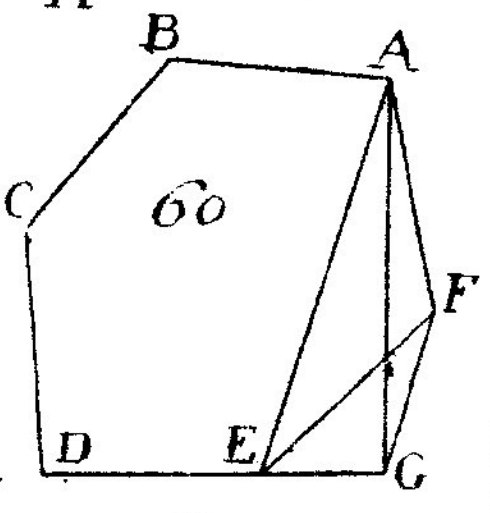
58



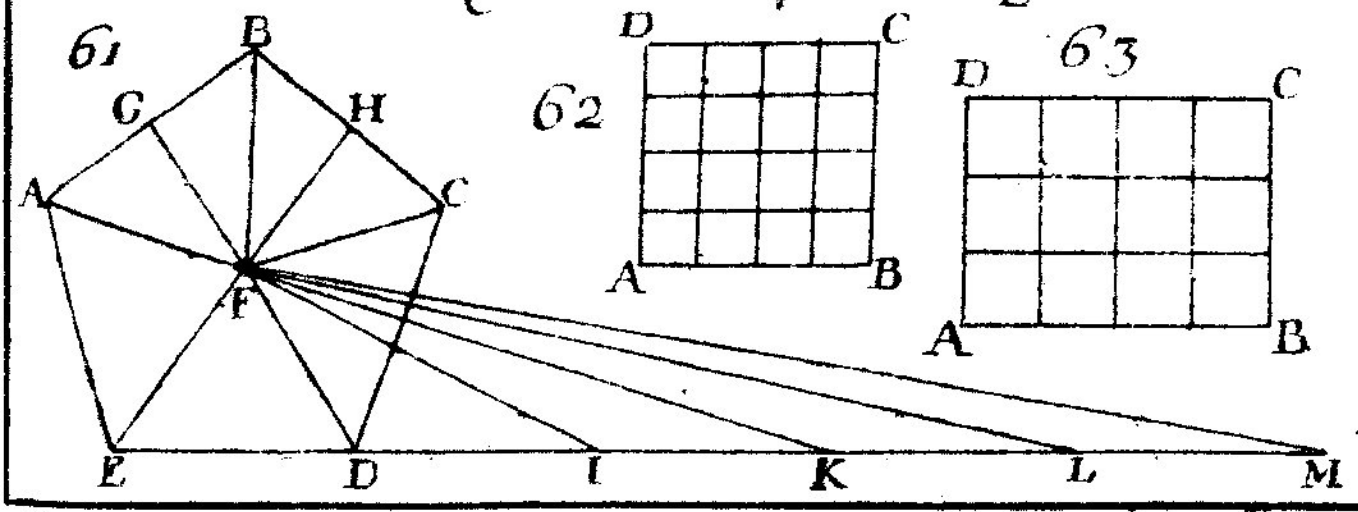
59



60



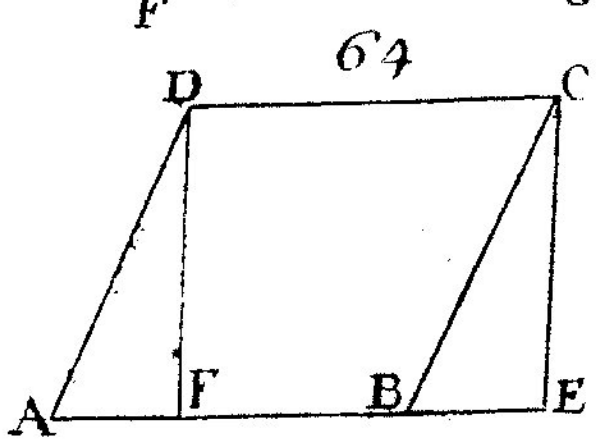
61



62

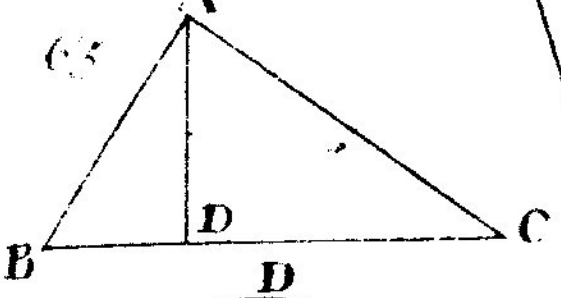
63

64

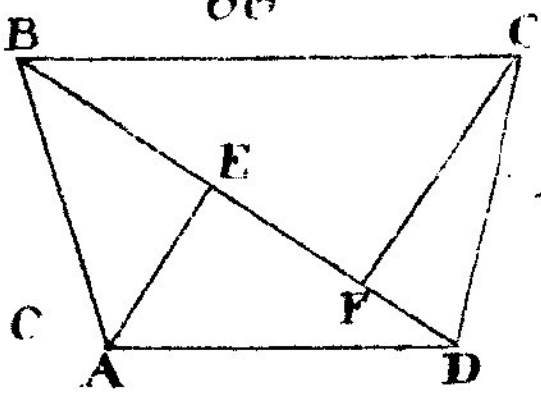


Tav. V.

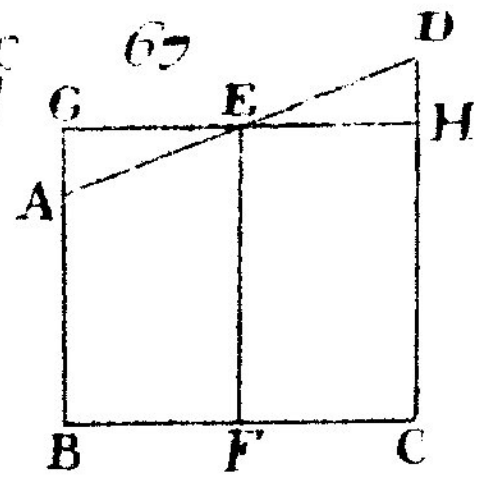
65



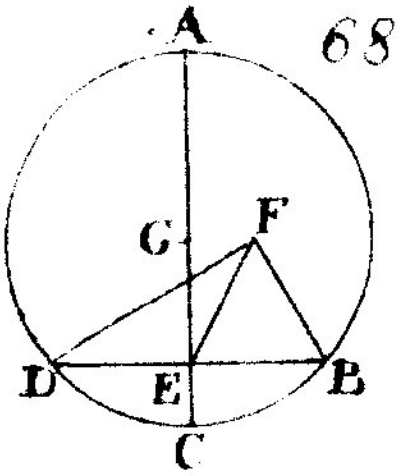
66



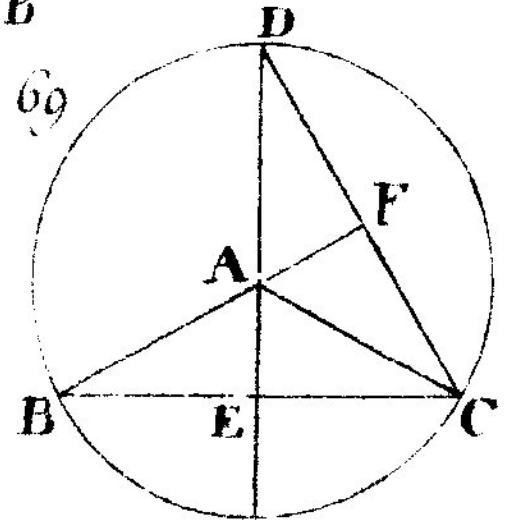
67



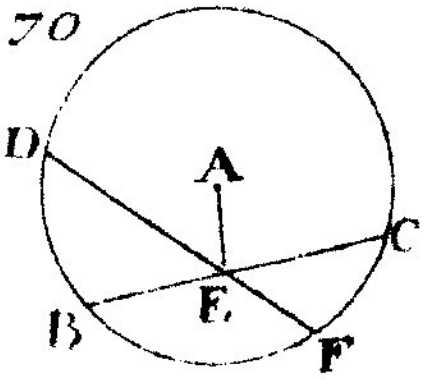
68



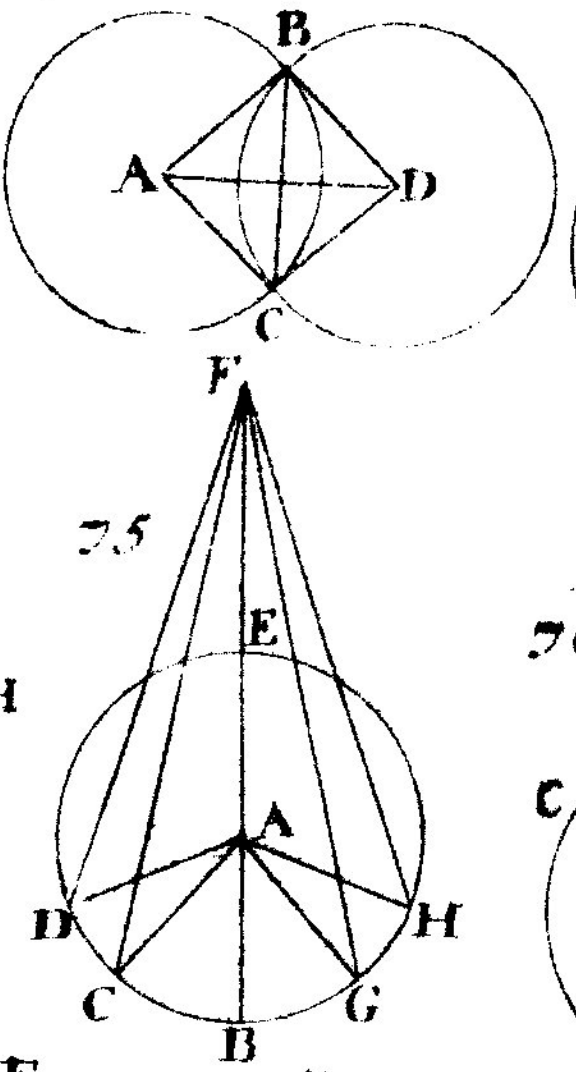
69



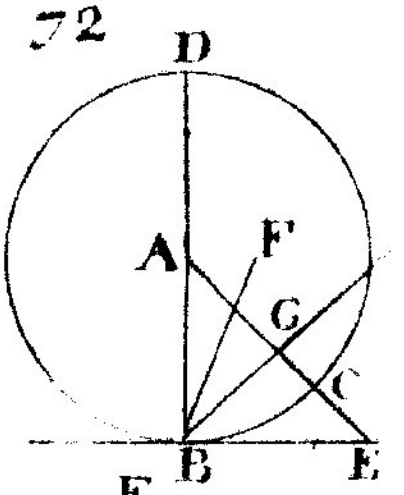
70



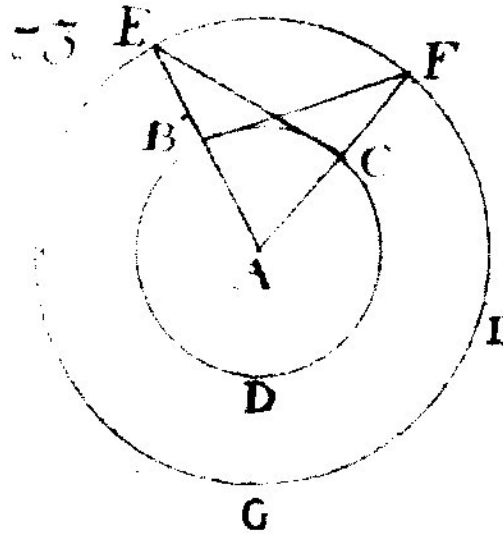
71



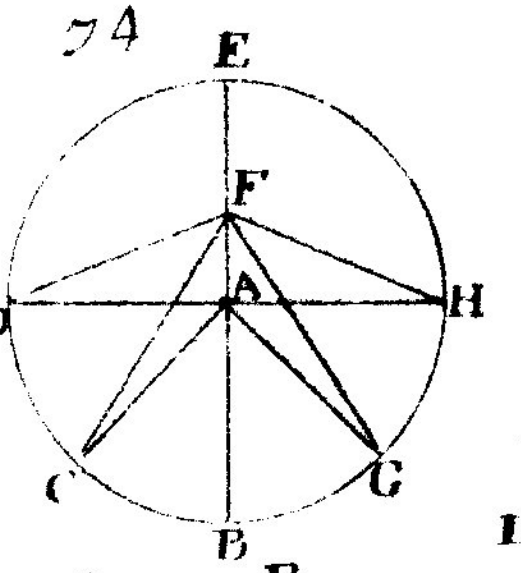
72



73

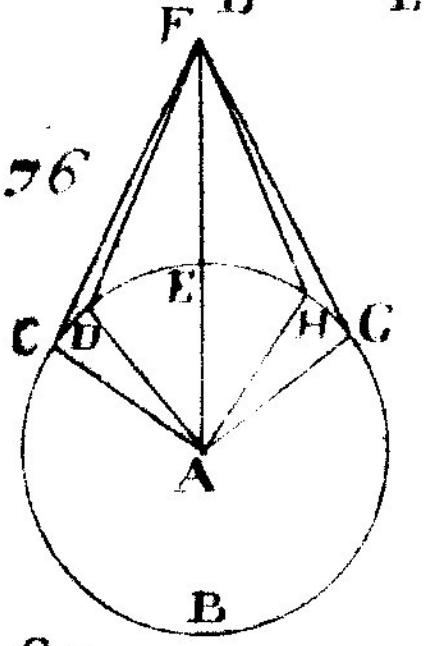


74

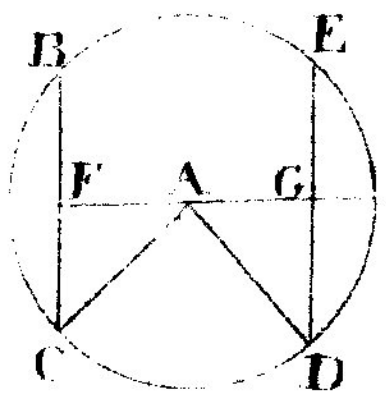


75

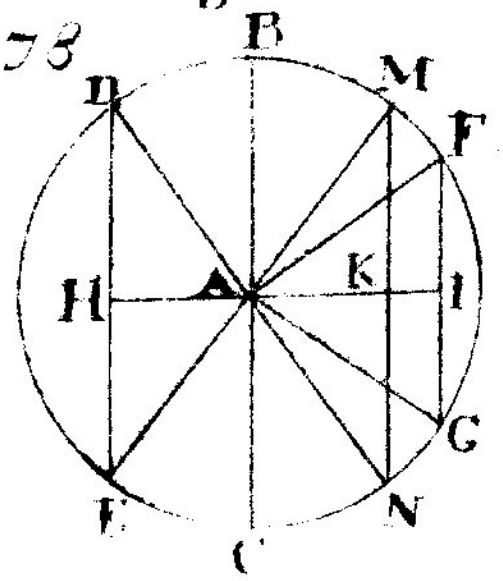
76



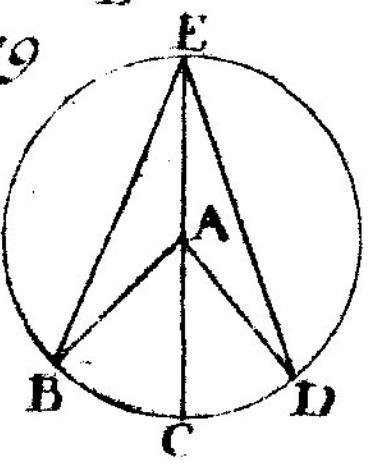
77



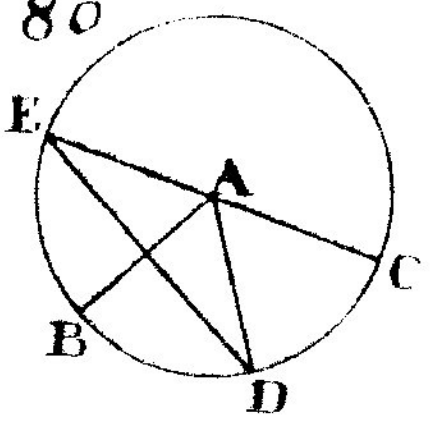
78



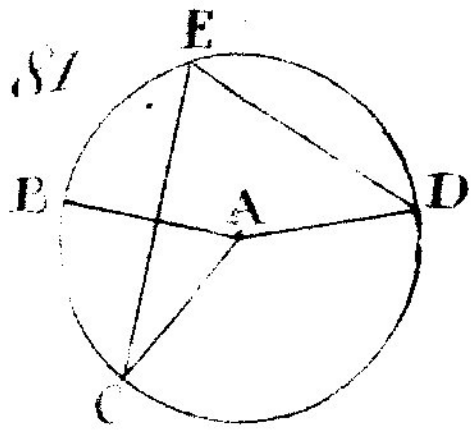
79

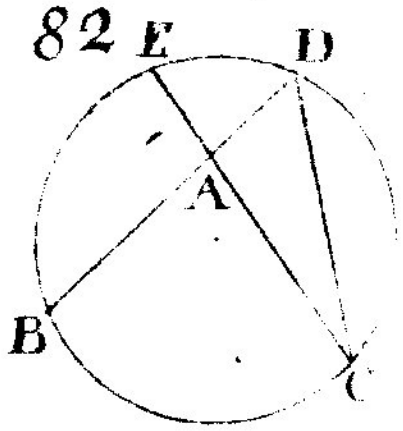


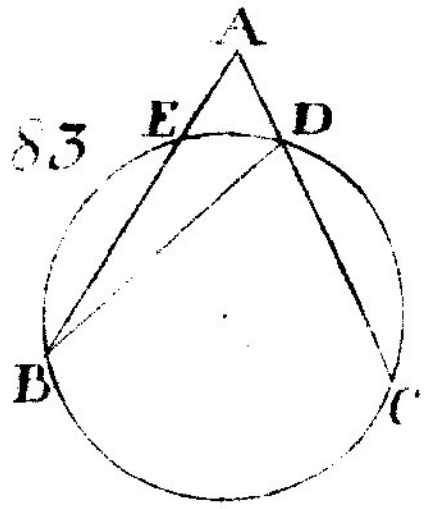
80

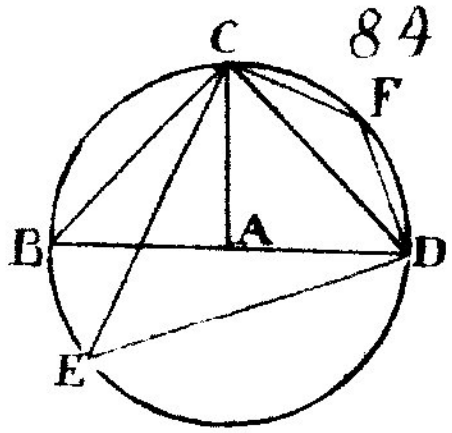


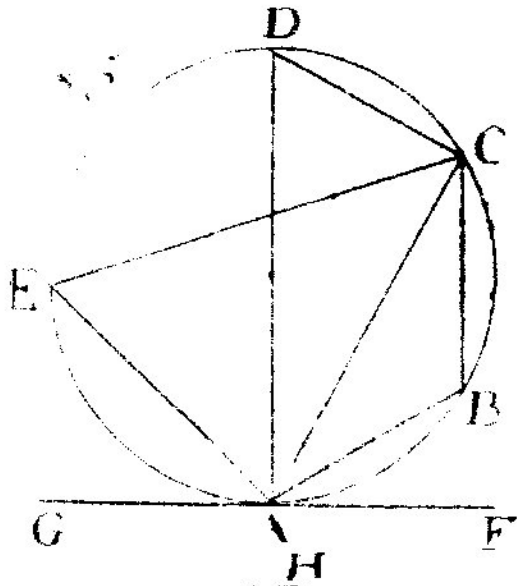
Tav. VI.

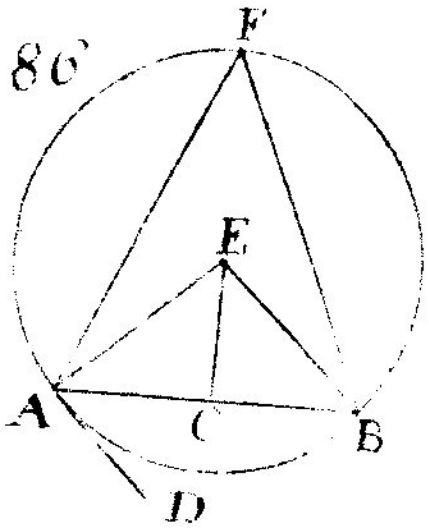

81
E
B
A
D
C

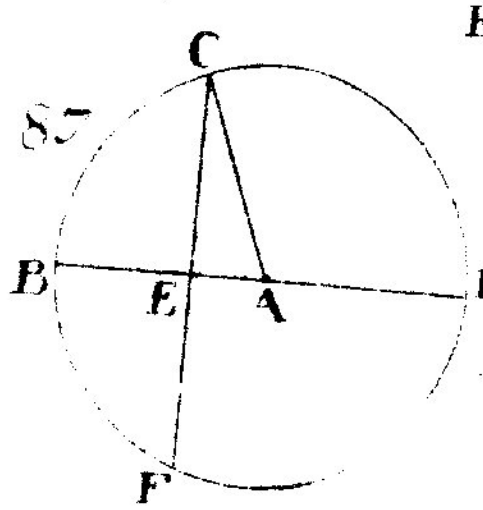

82
E
D
A
B
C

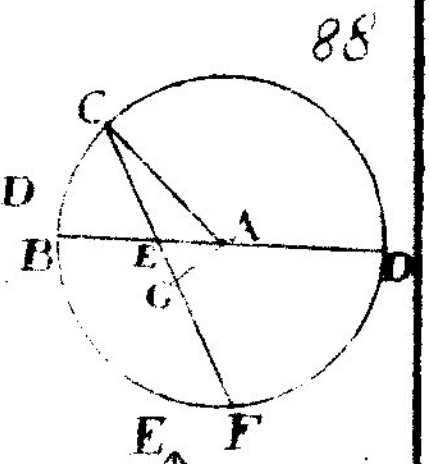

83
A
E
D
B
C

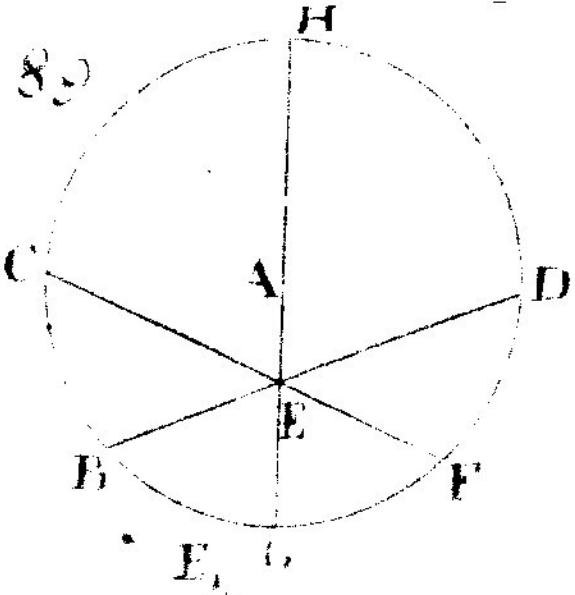

84
C
F
B
A
D
E

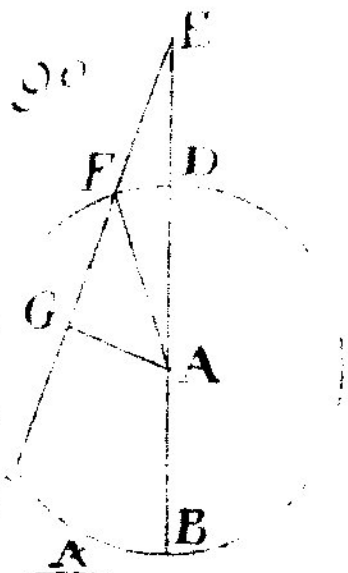

85
D
C
E
B
G
H
F

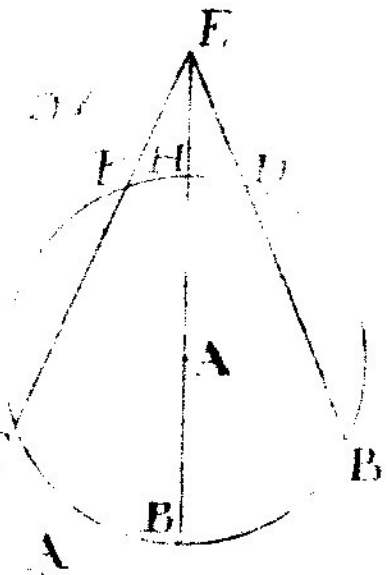

86
F
E
A
C
B
D

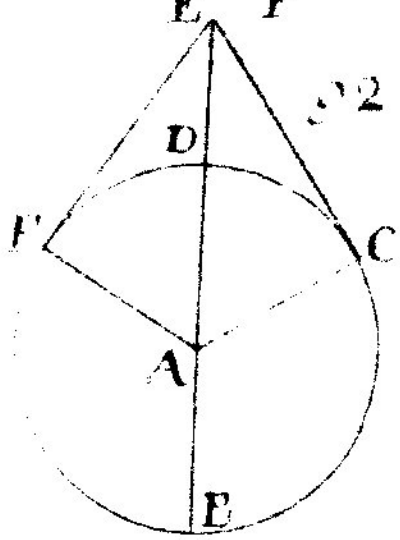

87
C
B
E
A
D
F


88
C
A
B
E
D
G
F

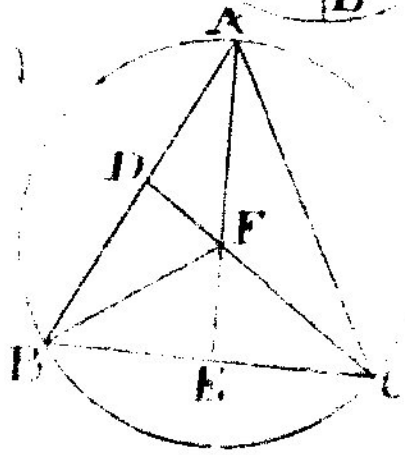

89
A
C
D
E
B
F

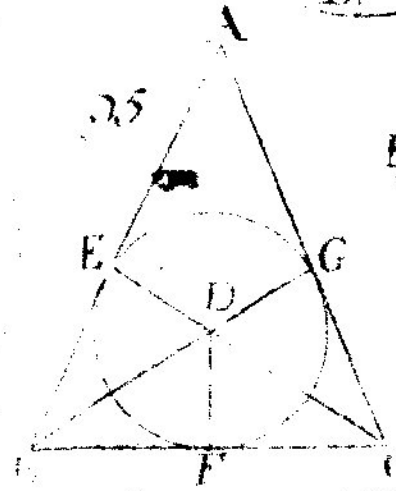

90
E
F
D
G
A
B

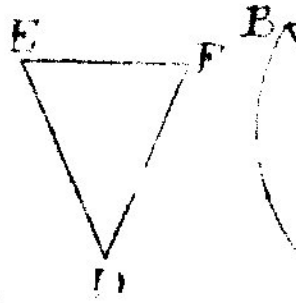

91
F
E
H
D
A
C
B

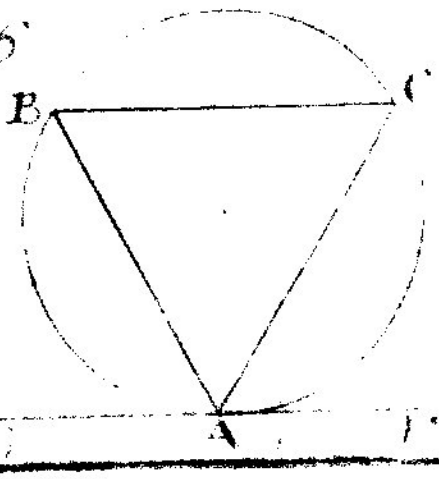

92
D
F
C
A
E

93
B


94
A
D
F
B
E
C

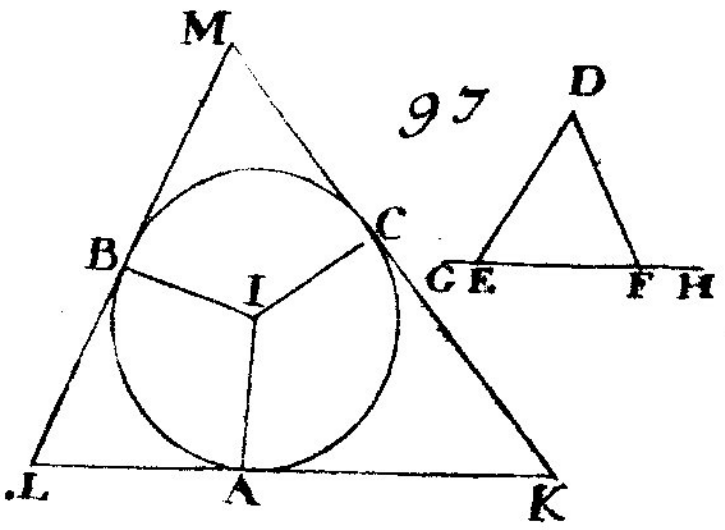

95
A
E
G
D
F
C


E
F
D

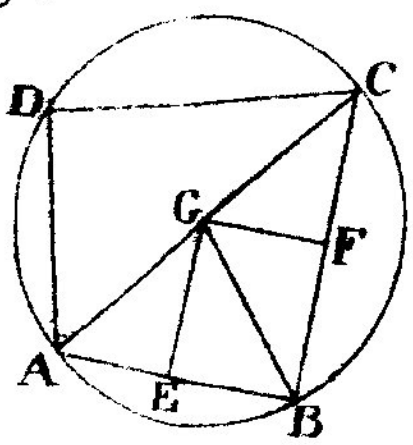

96
B
C
A
G
F

Tav. VII.

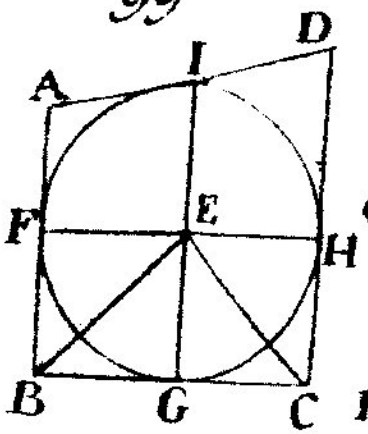
97



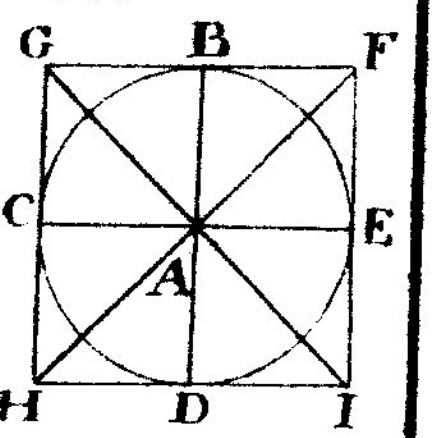
98



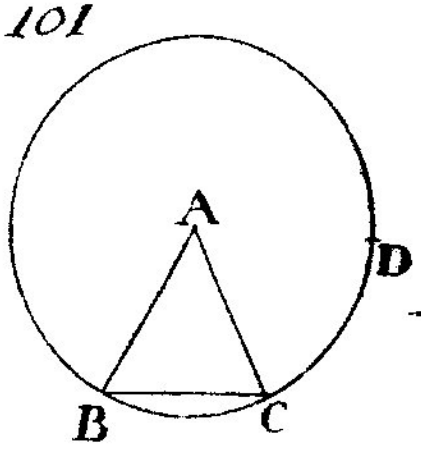
99



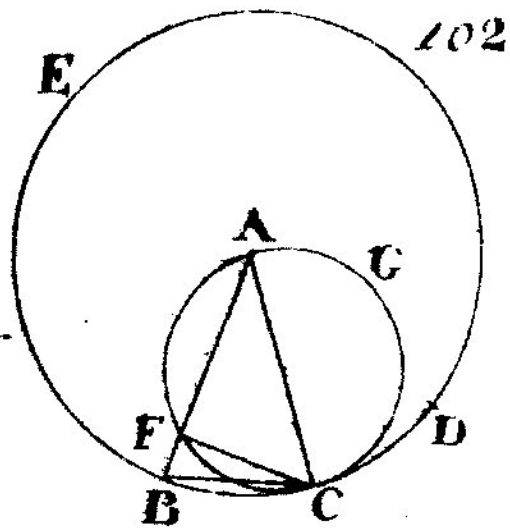
100



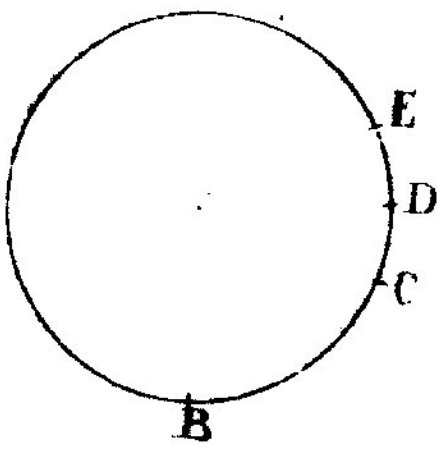
101



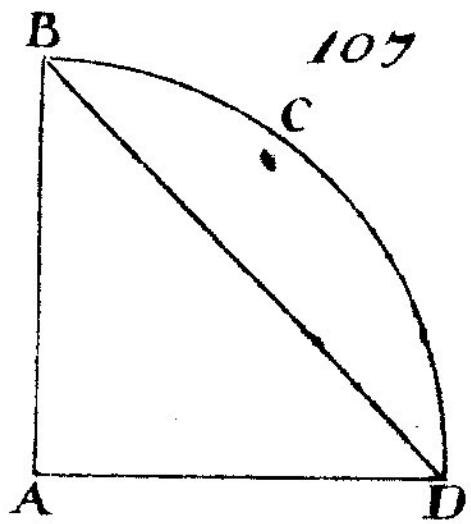
102



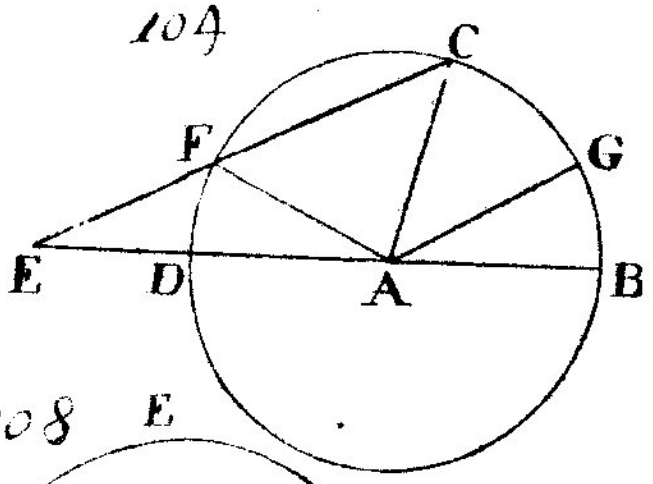
103



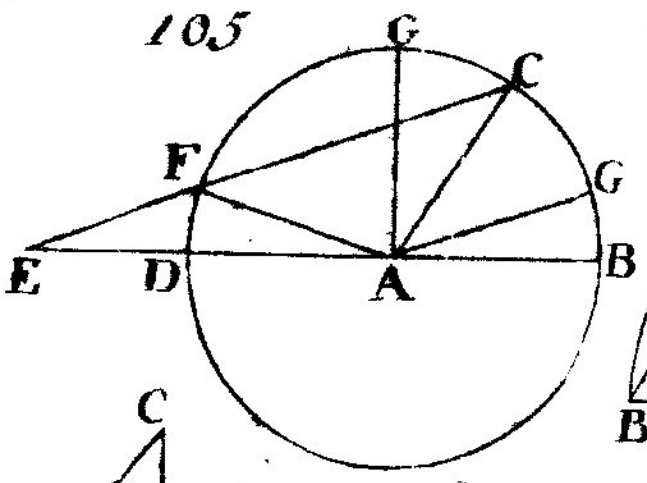
107



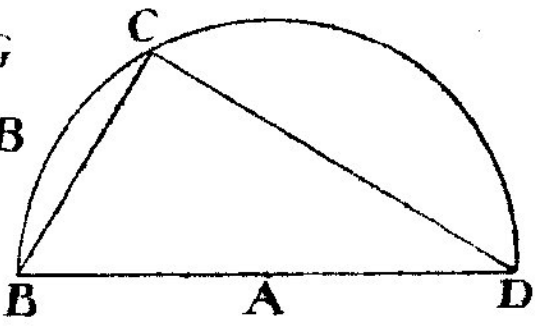
104



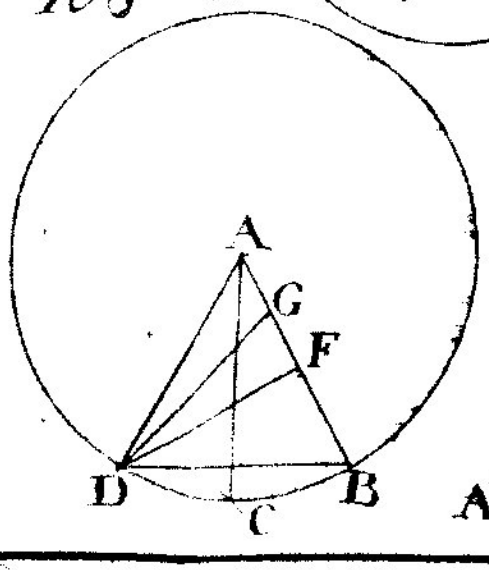
105



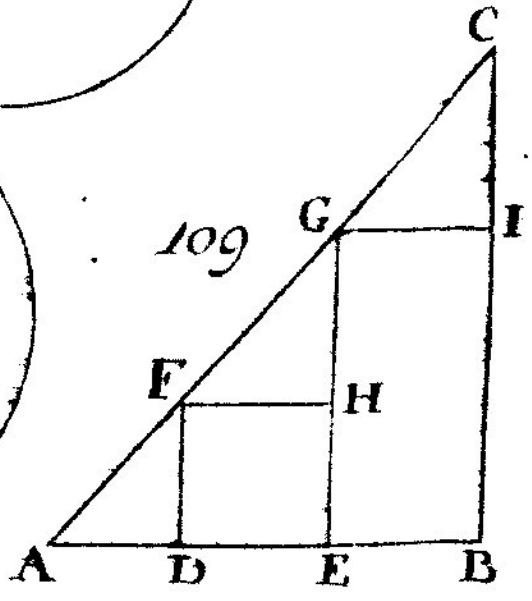
106



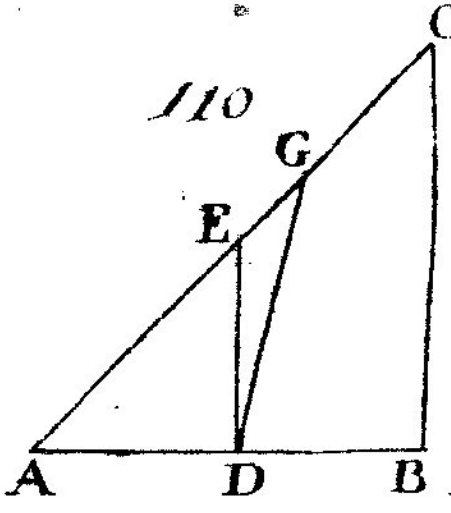
108



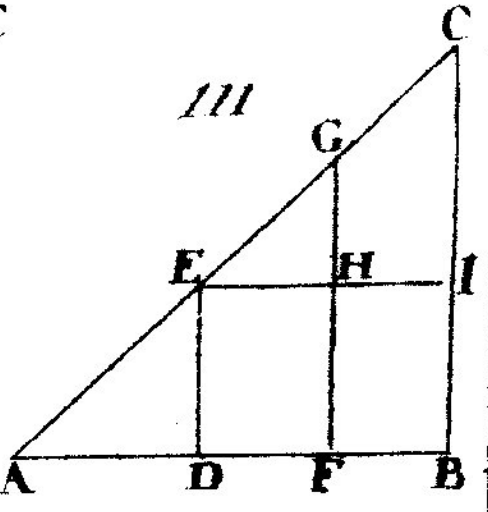
109



110

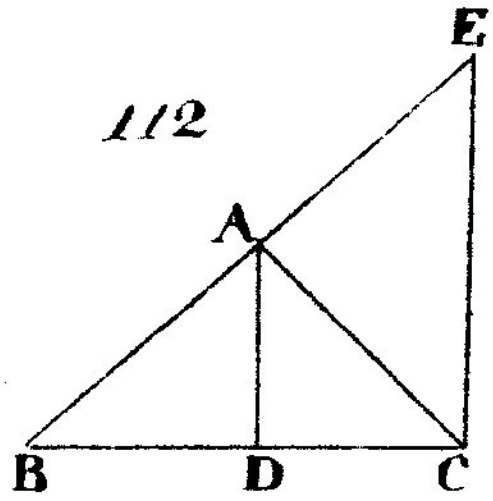


111

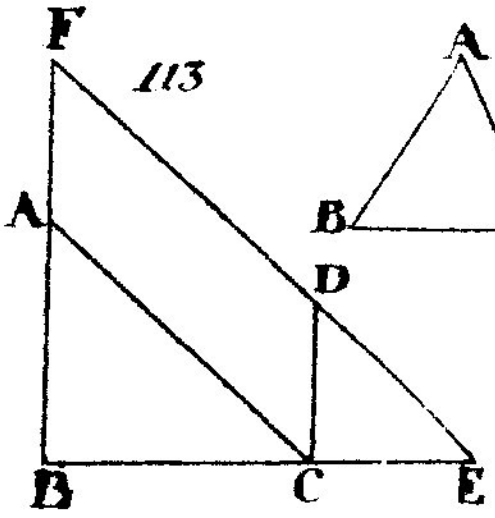


Tav. VIII.

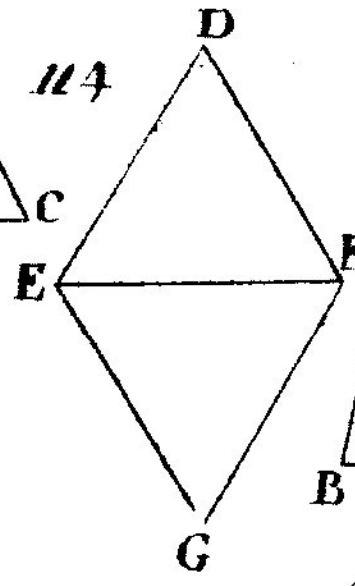
112



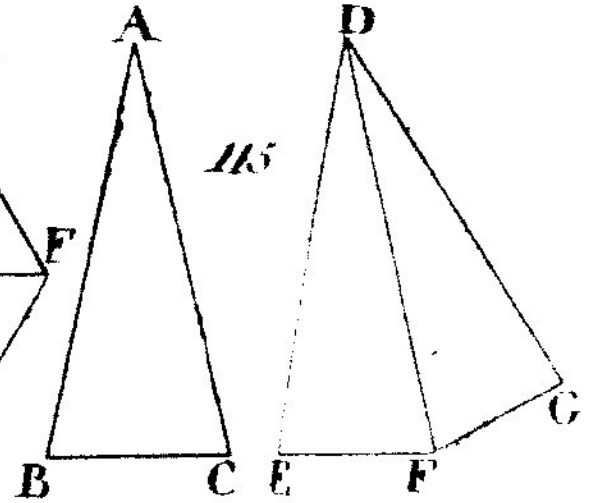
113



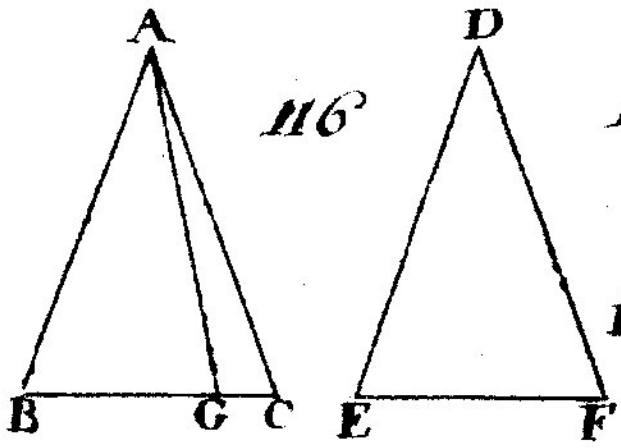
114



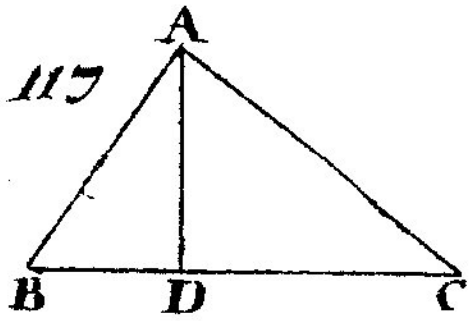
115



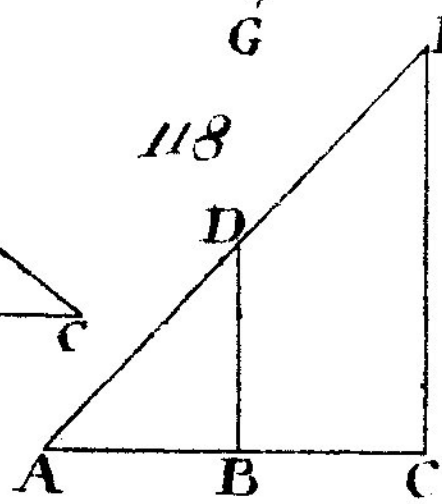
116



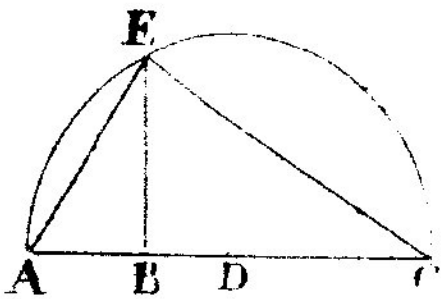
117



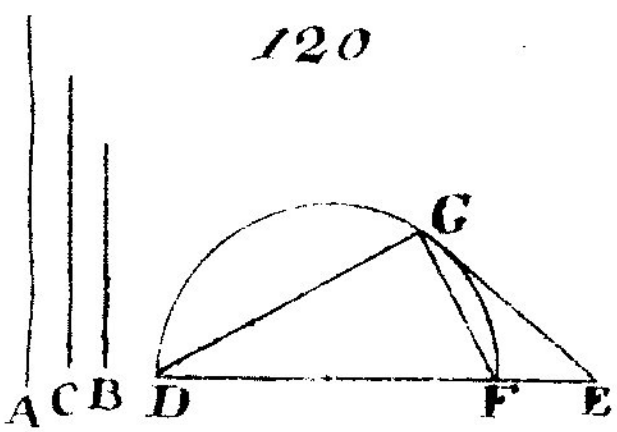
118



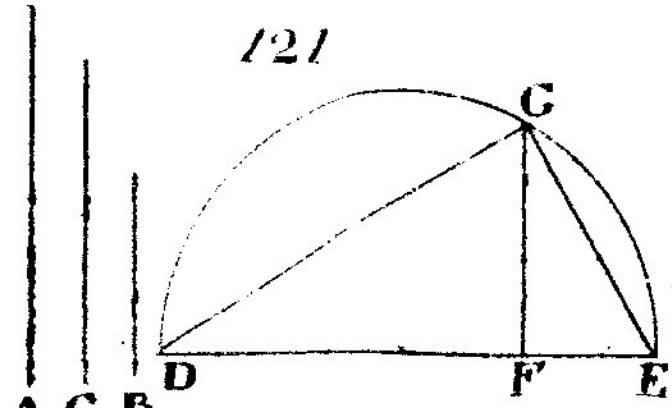
119



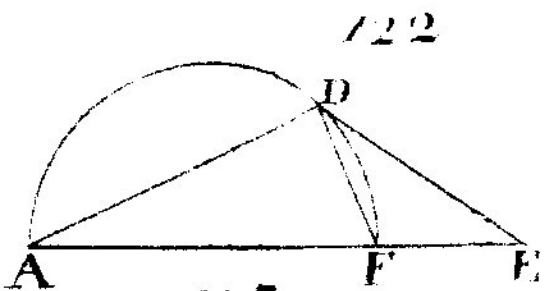
120



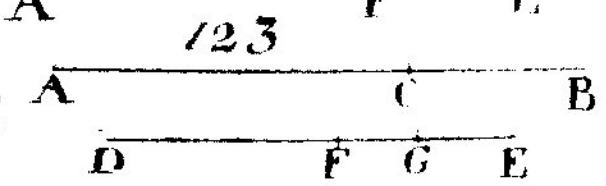
121



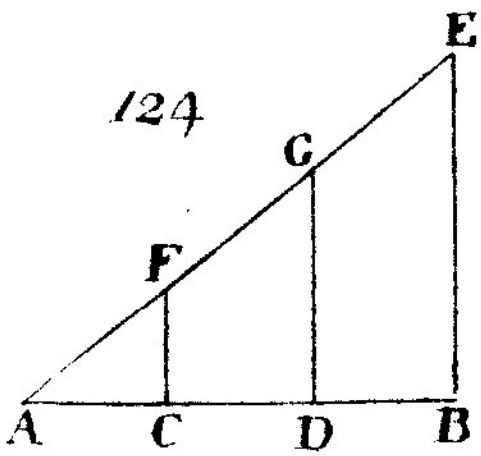
122



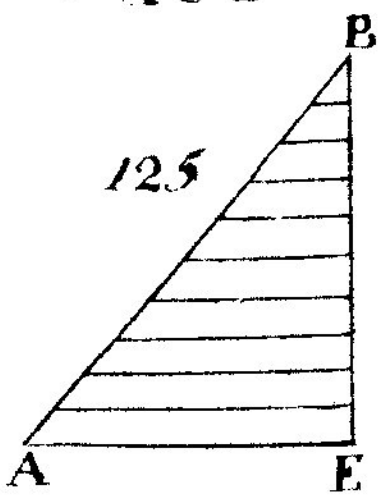
123



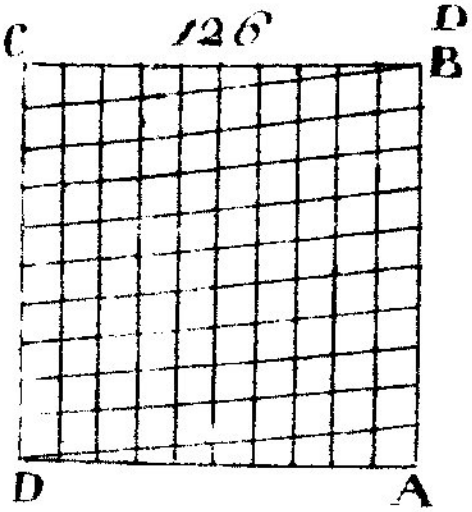
124



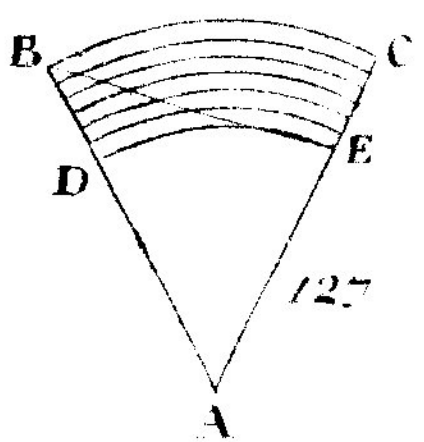
125



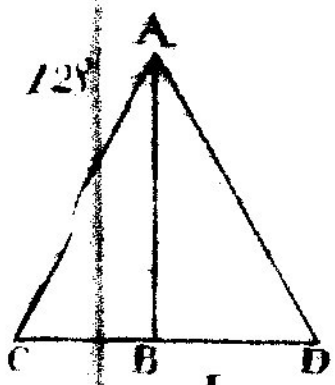
126



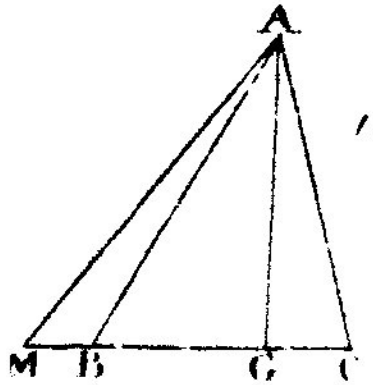
127

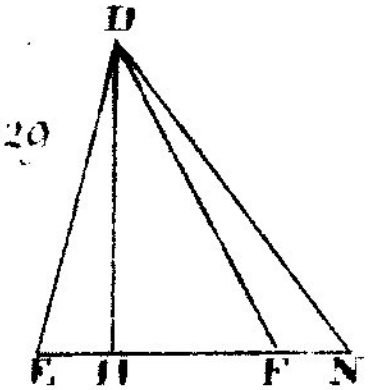


Tav. IX

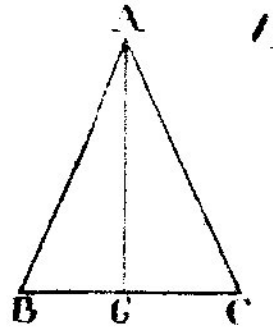


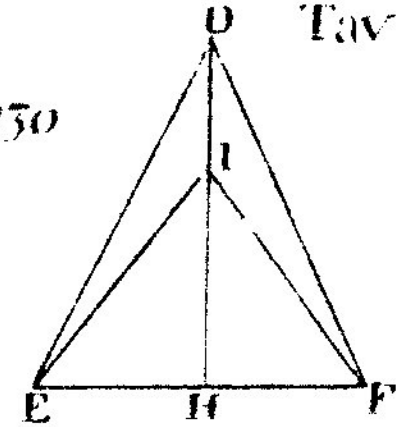
129



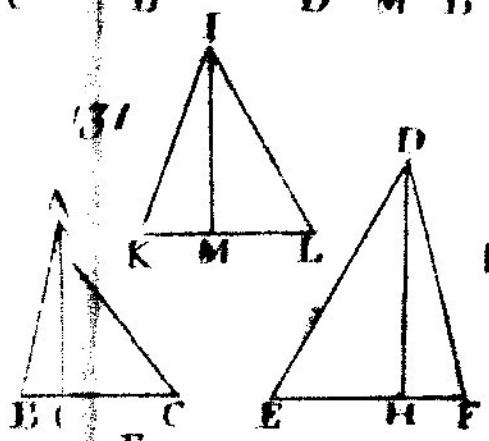


130

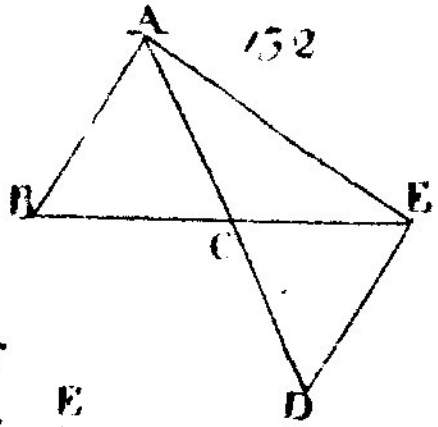




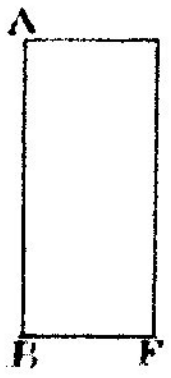
131

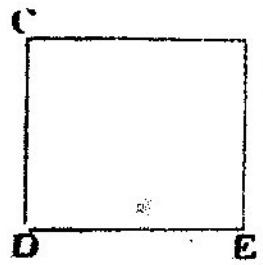


132

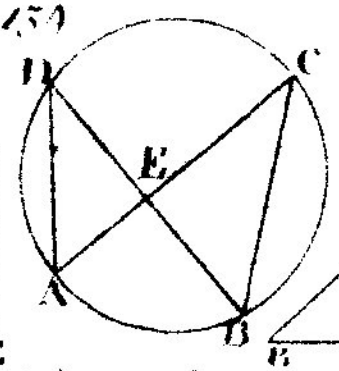


133

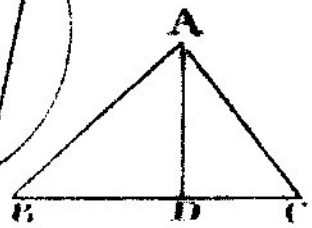


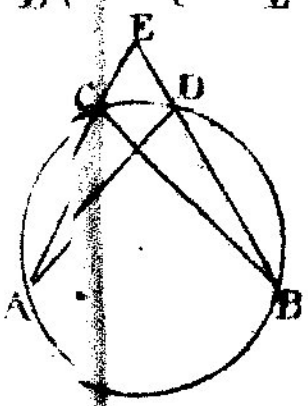


134

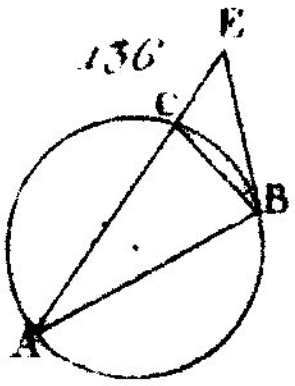


137

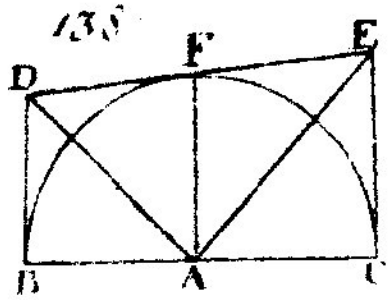




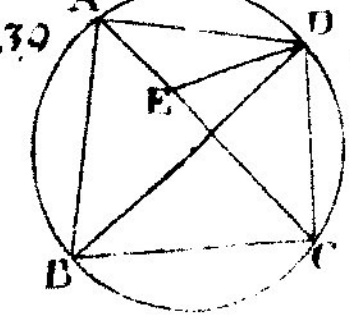
136



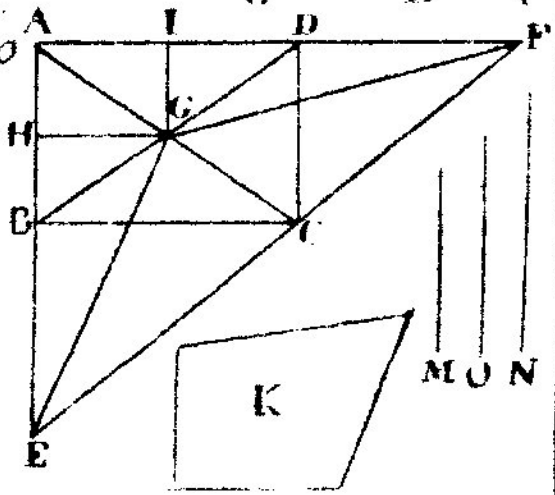
138



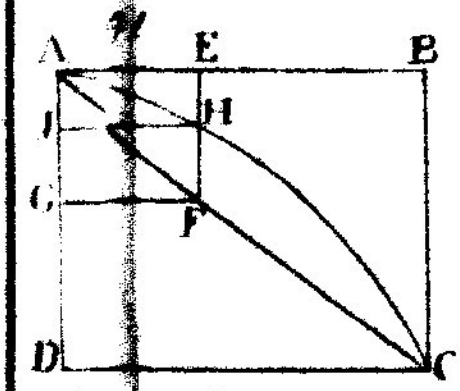
139



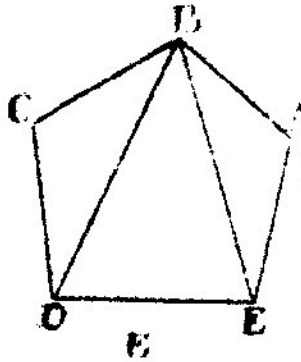
140

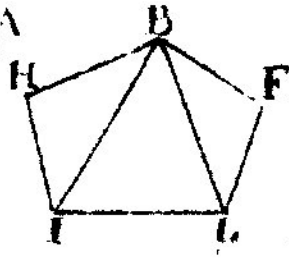


141

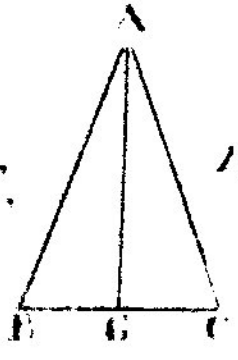


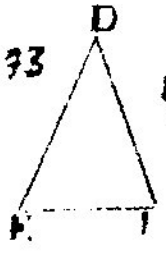
142



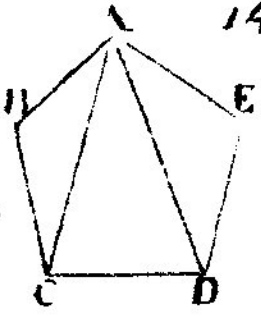


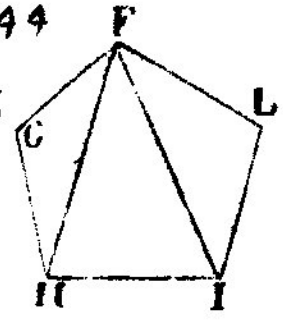
143



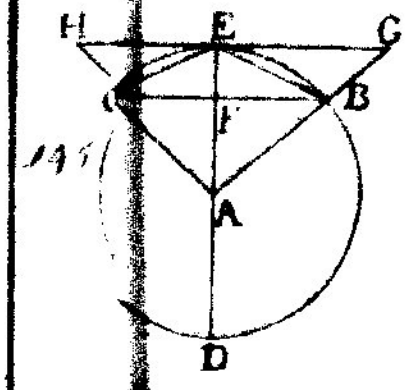


144

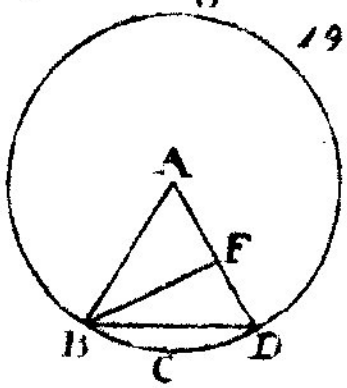




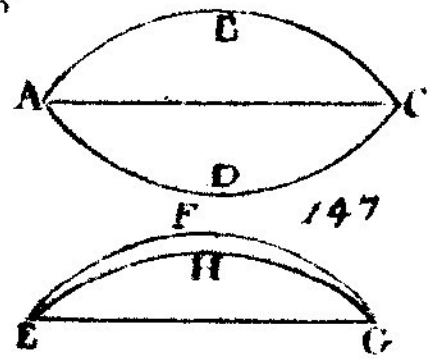
145



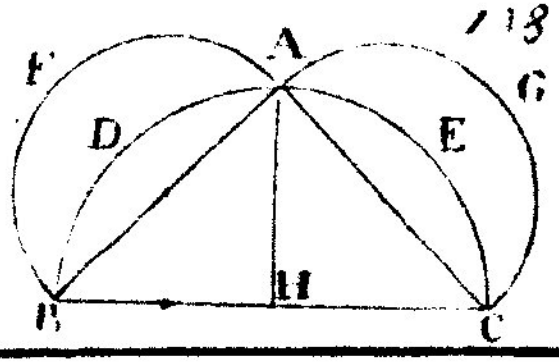
146



147

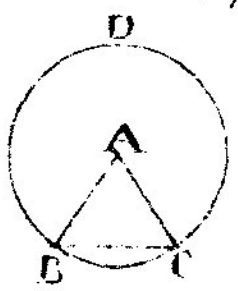


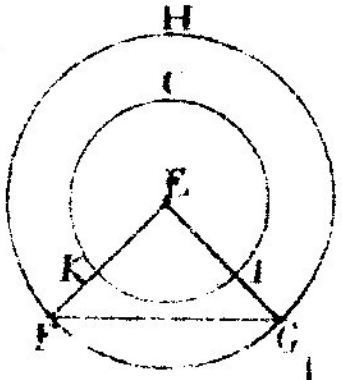
148



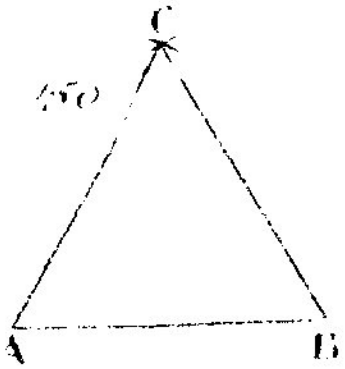
Tav. X

149

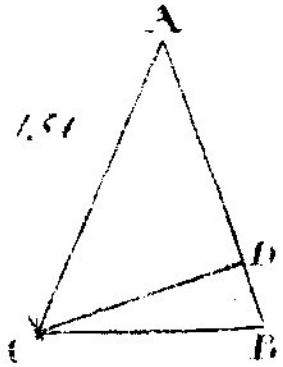




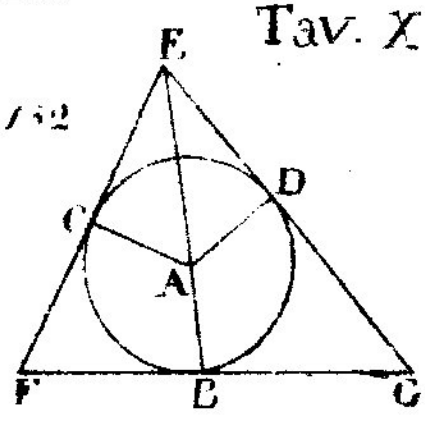
150



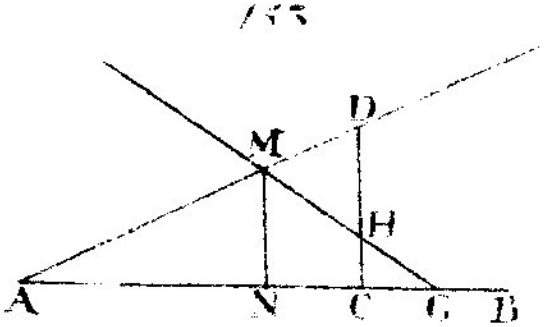
151



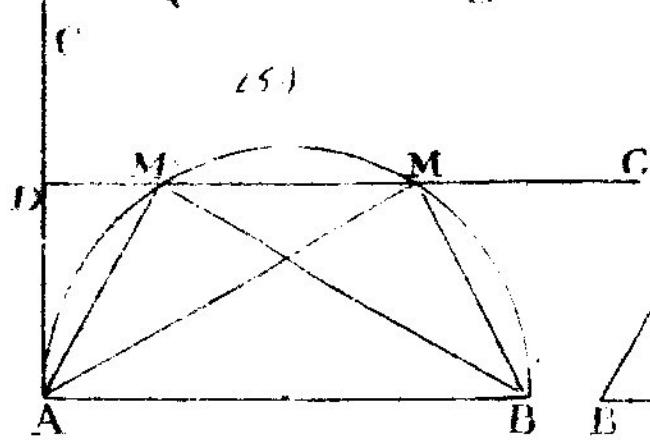
152



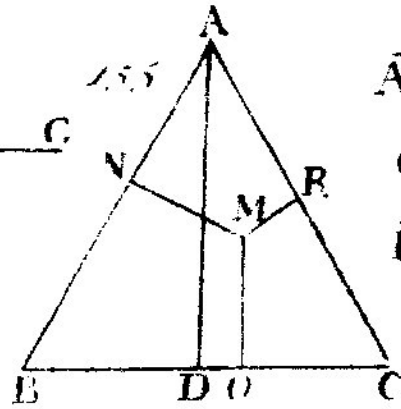
153



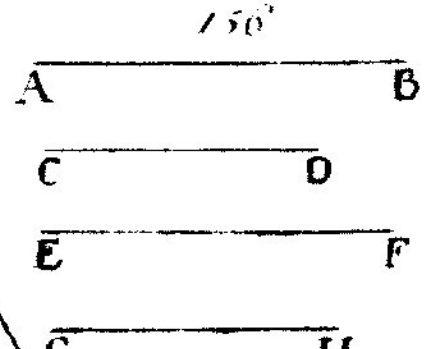
154



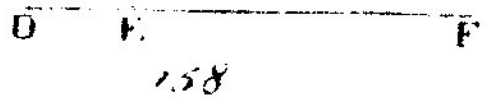
155



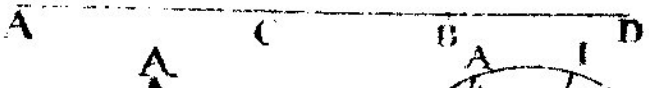
156



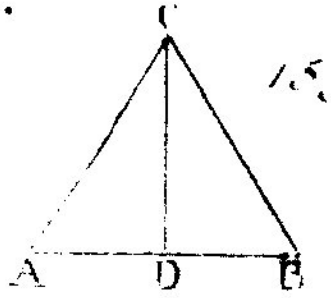
157



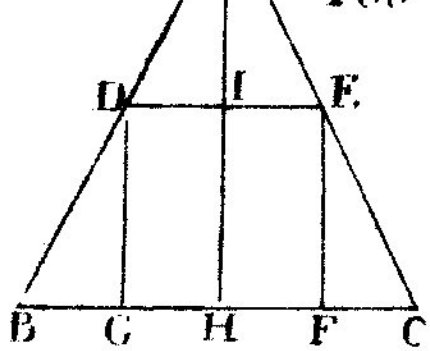
158



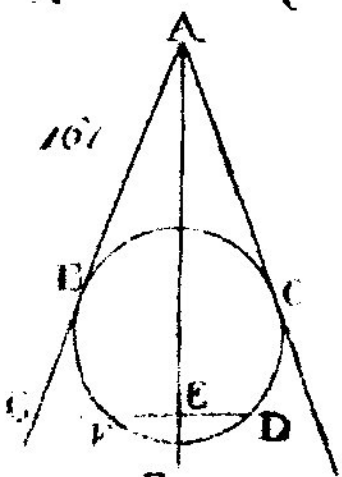
159



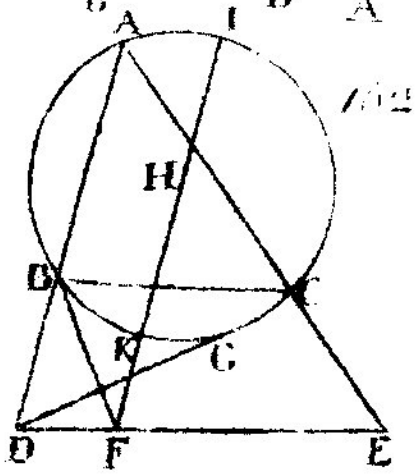
160



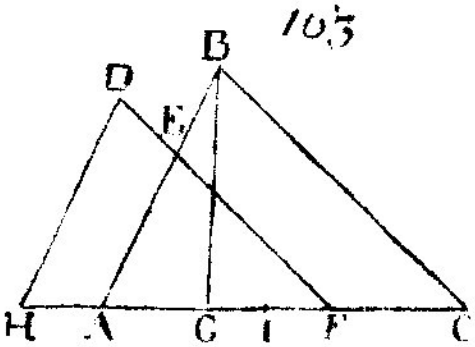
161



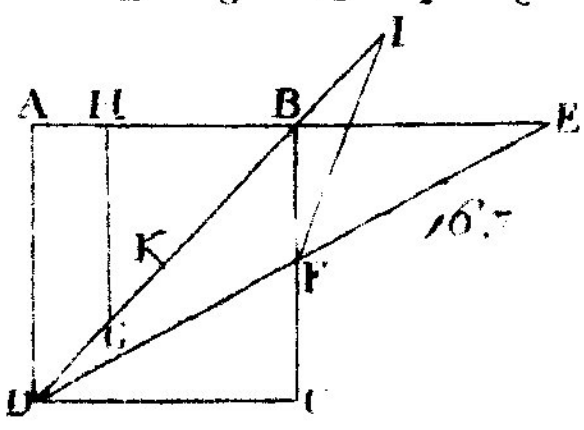
162



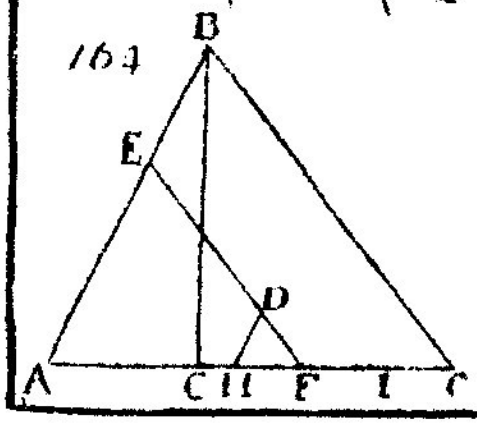
163



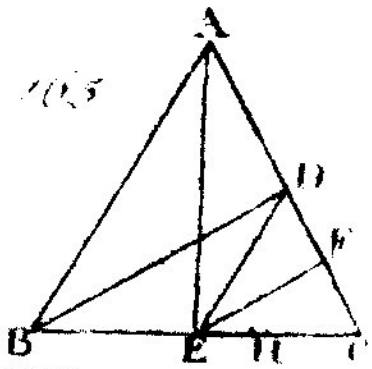
167



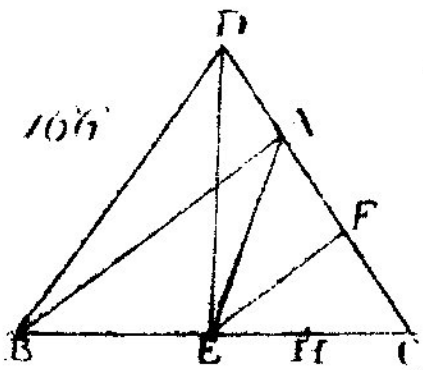
164



165



166



168