

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA
AD USO
DEGL'ISTITUTI TECNICI (I° BIENNIO) E DEI LICEI
PER
AURELIANO FAIFOFER

Professore nel Liceo Marco Foscari

UNDECIMA EDIZIONE

VENEZIA
TIPOGRAFIA EMILIANA
1898

PREFAZIONE

Accompagno questo libro con un breve estratto di una lunga recensione fatta sulla *terza edizione* dal professore P. MANSION dell'Università di Gand, ed inserita nella *Revue de l'Instruction publique en Belgique*; recensione, che contiene un giudizio dato sul libro stesso dal professore E. BELTRAMI dell'Università di Roma. Tra i brani soppressi ci sono i consigli di miglioramenti, che, insieme con altri, ho potuto introdurre, avendo avuto la fortuna di ristampare più volte l'operetta (*). Già per la *decima edizione* ho rifatto i due capitoli relativi alla simiglianza, perchè ho mutato la definizione di figure simili, adottandone una che credo nuova ed anche definitiva. Nella presente edizione si trova resa indipendente dalla teoria dell'equivalenza la divisione del cerchio in cinque parti eguali.

L' AUTORE.

Les modestes *Eléments de Géométrie* de M. A. Faifofer dont nous venons de transcrire le titre sont, sans contredit, avec l'ouvrage immortel d'Euclide, le meilleur manuel de Géométrie élémentaire que nous connaissons, tant au point de vue scientifique qu'au point de vue didactique. Un illustre géomètre italien, M. BELTRAMI, a porté sur ce livre un jugement que nous ne pouvons mieux faire que de traduire ici pour nos lecteurs afin de leur donner une idée générale des *Eléments* de M. Faifofer.

« Au point de vue purement didactique, dit-il, je crois que l'on ne peut faire aucune critique sérieuse de cet ouvrage. Il est rédigé avec soin jusque dans les moindres détails; les propositions sont arrangées dans l'ordre le meilleur, les démonstrations sont rigoureuses et l'auteur a partout gardé une juste mesure

(*) Il professore W. W. BEMAN dell'Università di Ann Arbor, Michigan, ha scritto in una *Bibliography-Mathematics*, inserita nella *Academy* dell'Aprile 1888, che questo libro è *easily the best and most rigorous work in any language*. (Veramente è un po' troppo, anche se fosse mitigato con l'aggiunta « *for use in schools* »).

Il professore F. GOMES TEIXEIRA dell'Accademia politecnica di Oporto nel *Jornal de Ciencias mathematicas e astronomicas*, Coimbra, 1893, ha scritto: « . . . Dos capitulos que pelo modo original como estão escriptos, merecem mais attenção, mencionarei en primeiro lugar o capítulo primeiro, onde o auctor tracta de enumerar e fixar com o maior cuidado quaes os principios que a sciencia geometrica vae buscar à observação exterior.

Merece tambem attenção o modo simples como é tractada a theoria da equivalencia

. . . Terminaremos pois esta noticia dizendo que as modificações introduzidas pelo auctor na exposição da Geometria elementar têm sido adoptadas na maior parte dos livros italianos posteriormente publicados. . . . »

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA

AD USO DEGL'ISTITUTI TECNICI (1° BIENNIO) E DEI LICEI

PER

AURELIANO FAIFOFER

PROFESSORE NEL LICEO MARCO FOSCARINI

UNDECIMA EDIZIONE

VENEZIA
TIPOGRAFIA EMILIANA
1898

PROPRIETÀ LETTERARIA

ELEMENTI DI GEOMETRIA

CAPITOLO I NOZIONI FONDAMENTALI

Enti geometrici.

1. La scienza, che stiamo per trattare, si chiama *Geometria*.

Nelle relazioni, in cui per mezzo dei sensi noi entriamo col mondo materiale, abbiamo occasione continua di tener conto delle proprietà geometriche delle cose; sulle quali proprietà poi inconsciamente esercitiamo la nostra intelligenza. (¹). Quindi segue che ognuno, indipendentemente da qualsiasi insegnamento, si trova in possesso, senza averne chiara coscienza, d'un insieme notevole di cognizioni geometriche, delle quali sa profittare al bisogno; e si deve appunto a questo la facilità d'intendersi allorchè si comincia a discorrere di Geometria.

2. La *Geometria* è una scienza di ragionamento; *empirica* ne'suoi fondamenti, *induttiva* e principalmente *deduttiva* nel seguito; il che viene a dire che noi andiamo debitori delle nozioni fondamentali (²) di essa

(¹) Sentendo delle grida, per es., arguiamo la *direzione* onde vengono e da quale *distanza*; ecc.

(²) Particolarmente alla vista e al tatto, congiunti con la facoltà che abbiamo di muoverci.

Notiamo però che i sensi non danno altro che esempi (LEIBNIZ), e questi, possiamo aggiungere, molto imperfetti ed incompleti. Dai sensi attingiamo l'occasione, l'incentivo al lavoro intellettuale.

all'uso dei sensi; e che poi, ragionando, ne traiamo conseguenze senza fine; tutte interessanti nell'aspetto speculativo; molte anche per le applicazioni che se ne possono fare alle necessità della vita.

3. L'ente principale della Geometria è lo *spazio*. ⁽¹⁾.

Non sapendo concepire interruzione, nè limiti dello spazio, diciamo che lo spazio è *continuo* ed *illimitato*.

Possiamo concepire parti dello spazio, e suddividerle idealmente senza fine. Perciò diciamo che lo spazio è *divisibile indefinitamente*.

Non sapendo concepire diversità intrinseche tra parti dello spazio, diciamo che lo spazio è *omogeneo*.

Pensando ad una parte dello spazio, siamo in grado poi di pensarne un'altra distinta e indipendente dalla precedente, e poi in simil modo una terza, una quarta, e avanti senza fine. Perciò diciamo che lo spazio è *infinito*.

Non possiamo concepire che lo spazio od una sua parte si muova; perciò diciamo che lo spazio è *immobile*.

4. Un filo, pensato senza grossezza, fa nascere il concetto di *linea*.

Una linea ha *forma* ed *estensione*; l'estensione d'una linea si dice *lunghezza* della linea.

5. Un foglio, una lamina sottile, concepiti senza grossezza, fanno nascere il concetto di *superficie*.

Una superficie ha *forma* ed *estensione*; l'estensione d'una superficie si dice *area* della superficie.

⁽¹⁾ Non possiamo definire lo *spazio*. Definire una cosa vuol dire indicarla a parole, il che non si può fare se non per mezzo delle relazioni che la cosa da definire ha con altre note; condizione che nel caso nostro ci manca.

È manifesta l'impossibilità di spiegare il significato di *tutte* le parole, senza cadere in un circolo vizioso. Le parole, il cui significato è inesPLICABILE, esprimono concetti *primitivi*. Per questo parliamo ora di *spazio*, senza averlo definito.

6. Pensando ad un corpo, e facendo astrazione da ogni sua proprietà, che non sia la *forma* e l'*estensione* del corpo, otteniamo il concetto di *solido* o *corpo geometrico*.

L'estensione di un solido si dice *volume* del solido.

7. Un solido può essere o parzialmente o totalmente limitato. Il *limite* di un corpo è una superficie (la superficie del solido).

8. Una superficie può essere o parzialmente o totalmente limitata. Il *limite* (il contorno, l'orlo) d'una superficie è una linea.

Pensando una superficie come composta di due parti, nel limite comune a queste parti abbiamo una linea *segnata* sulla superficie. Si dice anche che cotal linea *giace* sulla superficie, che *appartiene* alla superficie, ed anche che questa *passa* per quella linea ; ecc.

9. Se una linea ha *limiti* (estremità), codesti limiti si dicono *punti*.

Pensando una linea come composta di parti, nel limite comune a due parti abbiamo un punto. Si dice che codesto punto *giace*, che *cade* su quella linea, che *appartiene* alla linea ; od anche che questa *passa* per quel punto ; ecc.

10. In una linea esistono innumerevoli punti; in una superficie esistono innumerevoli linee e quindi anche innumerevoli punti; e in un solido esistono innumerevoli superficie e quindi anche innumerevoli linee ed innumerevoli punti.

11. Al concetto di punto si perviene anche pensando un corpo piccolissimo, negando anzi a questo ogni *grandezza*.

12. I solidi, le superficie, le linee, i punti si dicono *enti geometrici*.

Un sistema di enti geometrici si dice *figura*.

Ora possiamo dire che la Geometria è la scienza che tratta delle figure, studiandone le proprietà e le mutue relazioni. (¹).

Che cosa sia un trattato di Geometria.

13. Abbiamo già avvertito che nelle relazioni col mondo fisico, ognuno impara a conoscere *molte* proprietà delle figure. (²).

Tra le proprietà delle figure ci sono dei rapporti per modo che si può provare che qualche proprietà è necessaria conseguenza di qualche altra.

Quando due proprietà di una figura non hanno lo stesso grado d'evidenza, ma si possa provare che la meno evidente deriva necessariamente dall'altra, quella finisce col godere lo stesso grado di certezza di questa.

14. Le proprietà delle figure, che si assumono come fondamentali, intendendo che siano accettate senza discussione, si dicono *postulati*. (³).

15. Una conseguenza logica de' postulati si dice

(¹) Si agevola lo studio delle figure, rappresentandone alla meglio le linee e i punti, mediante linee e punti materiali, costituenti disegni delle figure.

Un punto si accenna con una lettera, che si adopera qual nome del punto, e che si scrive (quando si fa uso di un disegno) a canto dell'immagine del punto.

(²) Leggi geometriche si scorgono nell'universo, e tanto che PLATONE, richiesto di che si occupasse IDIO, rispose: *geometrizza*.

(³) Da *postulo*, domando. Chi espone la Geometria viene a dire: accettate, senza discutere, queste proprietà delle figure; state poi a sentire quali conseguenze se ne possono ricavare.

teorema. Il ragionamento che prova codesta dipendenza si dice *dimostrazione* del teorema.

16. Un Trattato di Geometria è un *elenco* ragionato delle principali proprietà delle figure, tale, cioè che ciascuna proprietà, purchè non sia un *postulato*, è seguita dalla sua dimostrazione.

17. Nella scelta de' postulati vi è dell' arbitrario. Ma poichè [13] il grado di certezza d'un teorema è quello stesso del postulato o dell' insieme dei postulati dai quali è dedotto, i postulati devono soddisfare alla condizione di godere della massima evidenza. (¹).

18. Quindi lo sforzo di ridurre i postulati al minor numero possibile; e il tentativo ripetuto di ricavare dagli altri ciascuno dei postulati ammessi, finchè non sia provato che esso è da quelli indipendente. (²).

19. Una conseguenza del principio pur ora accennato [17] è anche questa che nella dimostrazione di un teorema si procura di fondarsi sul minor numero possibile di postulati. (³).

(¹) Noi assumiamo a postulati le stesse proprietà delle figure che sono state scelte da EUCLIDE. Il numero de' nostri è maggiore, ma solo apparentemente, dacchè di quelli, che non si trovano negli *Elementi d'Euclide*, il geometra greco ha fatto uso ammettendoli tacitamente.

(²) I geometri hanno cominciato a dimostrare le proprietà meno evidenti, a fine di accertarne l'esattezza. Ma perchè può esser questione della maggiore o minore evidenza d'una proposizione, han poi dedotto dai postulati anche delle proposizioni per le quali non si può dire che la dimostrazione valesse ad aumentarne la certezza.

(³) Questo canone, che pur costituisce uno dei maggiori titoli d'onore del vecchio EUCLIDE, non è generalmente apprezzato, nè seguito.

Del movimento.

20. Nello studio della Geometria è necessario, e, se no, certamente opportuno ⁽¹⁾ imaginare che una data figura si muova, in modo più o meno determinato.

Quando si imagina che una figura si muova, si sottintende che nella figura non avvenga per questo nessun mutamento di *forma* e di *estensione*; dimodochè due figure, che siano dedotte da una stessa col muoverla (che siano due posizioni diverse di una stessa figura), sono eguali tra loro. ⁽²⁾. Possiamo esprimere lo stesso concetto dicendo che le figure della Geometria si pensano dotate di assoluta *rigidità*. ⁽³⁾.

Determiniamo l'uso che intendiamo di fare del movimento mediante il seguente:

21. Postulato del movimento.

1°. *Qualunque figura si può muovere nello spazio e in modo che un suo punto assegnato qualunque vada a coincidere con un altro punto assegnato qualunque dello spazio.* ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ In una prima esposizione della Geometria l'esperienza suggerisce di tirar via, senza eccessivi scrupoli sui principî. Le sottigliezze su questi son difficilmente capite dal principiante; aggiungasi che per la forma sono poco attraenti.

⁽²⁾ Il concetto di egualanza è irreducibile, primitivo. In altre parole è impossibile definire l'egualanza di due cose. Se si tenta di farlo, si cade inevitabilmente in un circolo vizioso.

⁽³⁾ Attribuiamo codesta invariabilità di forma ed estensione non soltanto ai solidi; ma anche alle superficie, alle linee, alle figure composte unicamente di punti ed a quelle risultanti da una combinazione qualunque dei predetti enti geometrici.

⁽⁴⁾ La possibilità del movimento, senza uno scopo o senza limitazione, non serve a nulla, epperò non se ne fa un postulato.

2º. *Una figura può muoversi pur rimanendo fermo uno de' suoi punti.*

3º. *Una figura può muoversi pur rimanendo fermi due de' suoi punti.*

22. Quando una figura si muove restando fermo uno de' suoi punti (od un punto con essa collegato invariabilmente), si dice che essa *ruota* intorno a quel punto come *centro*.

23. Cor. (¹). *Un punto si può muovere in modo da percorrere una linea.* [21, 1º].

24. Per esprimere che un punto si muove sopra una linea senza mai ritornare in posizioni già prese (almeno prima che non abbia percorsa tutta la linea), si dice che il punto percorre quella linea in una data *direzione o verso*.

Un punto può percorrere una linea in una direzione oppure in un'altra *opposta, contraria* alla prima.

Un punto, che percorra tutta intera una linea, *describe, genera* quella linea.

Se, percorrendo una linea in direzione costante, un punto torna nella posizione primitiva, la linea si dice *chiusa*.

25. La conoscenza di relazioni particolari tra enti geometrici costituenti due figure può bastare per poter asserire che le due figure sono eguali tra loro. La dimostrazione di codesta egualianza si ottiene provando che, col trasportare e disporre convenientemente una delle figure [20; 21, 1º, 2º, 3º], si può ottenere che ogni

(¹) Si dice *corollario* una conseguenza di un postulato, d'un teorema, d'una definizione, ed in generale di proposizioni precedenti, quando la correlazione sia così immediata ed evidente da poter, se si vuole, omettere la dimostrazione.

punto di ciascuna di esse coincida con un punto dell'altra. ⁽¹⁾).

Indicheremo, per iscritto, l'egualanza di due figure, frammettendo il segno \equiv ai due simboli che siano stati adottati per indicare le due figure.

26. Se due figure sono eguali, ciascun ente dell'una si dice *corrispondente* (*omologo*) a quell'ente dell'altra, col quale viene a coincidere, quando le due figure sian fatte coincidere.

Se due figure uguali si possono far coincidere in più modi, si può stabilire in più modi la corrispondenza tra i loro elementi.

La retta.

27. Tra le linee considereremo in primo luogo le *rette*. Le proprietà d'ogni retta, dalle quali si possono ricavare le altre mediante ragionamento, sono espresse dal seguente postulato (il quale adunque, in certo modo, tien luogo di definizione della retta). ⁽²⁾.

28. Postulato della retta.

Tra le linee ve ne ha di quelle che si dicono rette, e desse possiedono tutte le seguenti proprietà:

(¹) Quando si possa, dimostreremo l'egualanza di due figure provando, in base a ciò che si sa delle stesse, che esse sono eguali ad una terza. E così faremo (imitando il procedere d'EUCLIDE) anche quando riuscirebbe più spedita la dimostrazione usando del metodo della sovrapposizione.

(²) Il postulato differisce dalla definizione in questo che la definizione presuppone l'esistenza di ciò che si definisce, o che sia stata accertata la possibilità che un ente possegga la proprietà che si assume per definirlo.

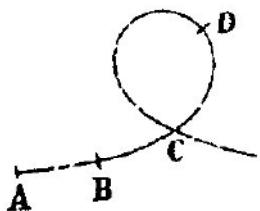
1°. Qualunque punto di una retta divide ⁽¹⁾ la retta in due parti. ⁽²⁾.

2°. Ciascuna delle parti, in cui una retta è divisa da un suo punto qualunque, rotando intorno a questo punto [21, 2°] può venire a passare per un punto qualunque assegnato nello spazio. ⁽³⁾.

3°. Una retta è individuata da due suoi punti qualunque. ⁽⁴⁾.

4°. Una retta può muoversi in due direzioni opposte, passando sempre per due dati punti dello spazio.

(1) Un punto d'una linea *divide* la linea, se si possono segnare sulla linea due punti in modo che, volendo andare dall'uno all'altro percorrendo la linea [23], è necessario passare per il punto di divisione.



Ad es., il punto *A*, della linea qui a canto, non divide la linea. Neanche il punto *D* non la divide. Il punto *B* la divide in due parti, e il punto *C* in tre.

Se un punto divide una linea, due altri punti della linea stessa si dicono cadere *da bande opposte* del punto di divisione nel caso che non si possa andare dall'uno all'altro, percorrendo la linea, senza passare per il primo punto; altrimenti si dirà che i due punti cadono *da una stessa banda* del punto di divisione.

(2) Con queste parole si esprime che la retta è una linea *infinita, ininterrotta, aperta*. Se avesse punti estremi, o d'arresto, questi non avrebbero la proprietà di dividerla. Se la retta (od anche soltanto una parte di essa) fosse *chiusa*, ci sarebbero punti che non la dividerebbero.

(3) Con queste parole si esprime (in maniera da poterlo sfruttare) il modo di estendersi della retta da ambedue le bande d'un suo punto qualunque. (Una linea può essere indefinita, e ciò non pertanto esser tutta compresa in uno spazio limitato).

(4) S'intende dire che, conoscendo due punti di una retta, essa non si può confondere con nessun'altra. Od anche

29. Poichè una retta è individuata da due suoi punti qualunque [28, 3°], per indicare una retta basta indicare due suoi punti. Così la retta, che passa per due punti A, B , si accenna scrivendo *la retta AB* e leggendo: *la retta A, B* .

Le due parti, nelle quali una retta è divisa da un suo punto, si dicono *raggi* (uscenti da quel punto). Un raggio si accenna nominando il punto ond' esce (l'*origine* del raggio) e un altro punto qualunque del raggio stesso.

30. Teor. *Per due punti qualunque dello spazio si può far passare una retta.*

Dim. Infatti, condotta una retta a passare per uno dei punti dati [21, 1°], (¹), facendola poi rotare intorno a codesto punto, si può [28, 2°] ottenere che essa vada a passare anche per l'altro punto dato.

31. Quando si fa passare una retta per due dati punti A, B , si dice che si *tira*, che si *conduce* la retta AB .

L'istromento ideale, con cui si tira la retta che passa per due punti, si dice *riga*.

32. Teor. *Tutte le rette sono eguali.*

Dim. Infatti, conducendo una retta a passare per due punti d'un'altra [30], si ottiene che le rette coincidano. [28, 3°].

33. Teor. *Per uno stesso punto passano innumerevoli rette distinte.*

Dim. Sia A il punto dato, e si faccia passare

che *per due punti non passa che una retta sola*. Ossia che: *se due rette hanno due punti in comune, esse coincidono compiutamente*.

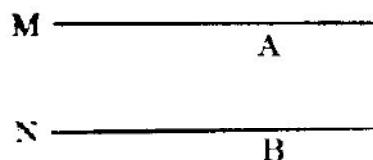
(¹) Qualunque linea data può [21, 1°] esser condotta a passare per un punto dato. Per la prima parte della dimostrazione non si deve adunque tirar in campo il postulato della retta.

per questo punto una retta qualunque. [30]. Poi, preso nello spazio un punto B ad arbitrio, che non sia però sulla retta, si faccia passare una retta per i due punti A e B . Le due rette oltre del punto A non hanno nessun altro punto in comune, giacchè, se un altro ne avessero, coinciderebbero compiutamente [28, 3°]; ma allora avrebbero in comune anche il punto B .

Ed ora, scelto nello spazio un punto C , che non appartenga a nessuna delle rette considerate, e fatta passare una retta per A e per C , si ha una terza retta, che passa per A ed è distinta dalle precedenti. E così via.

34. Teor. *Due rette si possono rendere coincidenti in modo che un raggio assegnato dell'una coincida con un raggio assegnato dell'altra.*

Dim. Infatti, considerando i raggi MA , NB , si può [21, 1°] cominciare a trasportare il raggio MA così che il punto M cada in N ; poi, facendolo rotare intorno ad N , finchè riesca a passare per un punto del raggio NB [28, 2°], si ottiene [28, 3°] che esso divenga coincidente col raggio NB .



35. Cor. *Tutti i raggi sono eguali.*

36. Teor. *Una retta può muoversi pur coincidendo sempre con una retta fissa.*

Dim. Basta infatti, perchè ciò abbia luogo, che la retta mobile passi costantemente per due punti qualunque [28, 4°] della retta fissa [28, 3°].

(*) Si può dunque dire che qualsivoglia punto d'una retta divide la retta in parti eguali. Ma questa proprietà, per quanto speciosa, non basta a caratterizzare la retta. (Infatti anche un'elica, ad es., è divisa in parti eguali da qualsivoglia suo punto).

37. Quando una retta si muove nel modo indicato nel precedente teorema, si dice che la retta *scorre su se stessa*. Lo scorrimento può aver luogo in una direzione o nella direzione opposta.

38. Quando una figura ruota intorno a due punti fissi A, B [21, 3°], rimangono fermi tutti i punti della figura che sono sulla retta AB , perchè questa retta non si muove [28, 3°]. Perciò così fatto movimento si dice *rotazione* intorno a quella retta, e questa si chiama l'*asse della rotazione*.

Il piano.

39. Tra le superficie consideriamo in primo luogo i *piani*. Le proprietà d'ogni piano, dalle quali si possono logicamente dedurre le altre, sono espresse dal seguente postulato (che tien quindi luogo, in certo modo, anche di definizione di codesta superficie).

40. Postulato del piano.

Tra le superficie ve ne sono di quelle chiamate piani, le quali possiedono tutte le seguenti proprietà:

1°. *Una retta, se passa per due punti di un piano, giace tutta nel piano.*

2°. *Ogni retta di un piano divide (¹) il piano in due parti. (²).*

(¹) Si dice che una linea d'una superficie *divide* la superficie, quando si possono segnare su questa due punti in modo che qualunque linea, che unisce i due punti e giace sulla superficie, deve incontrare necessariamente la linea di divisione. Due punti così posti si dicono *giacere sulla superficie da bande opposte rispetto alla linea*. Similmente due figure situate in una superficie si dicono *da bande opposte* d'una linea di divisione, se tali sono rispetto a questa linea un punto qualunque d'una figura e un punto qualunque dell'altra.

(²) Le parti, in cui un piano è diviso da una sua retta qua-

3°. *Facendo rotare un piano intorno ad una sua retta qualunque [21, 3°; 38], qualsivoglia delle parti, in cui il piano è diviso dalla retta, può esser condotta a passare per un punto assegnato arbitrariamente nello spazio.*

4°. *Se due rette di un piano hanno un punto in comune, i raggi, in cui una delle rette è divisa dal punto comune, sono da bande opposte rispetto all'altra retta.* (¹).

5°. *Un piano può muoversi in modo che una sua retta scorra su se stessa in quale si voglia delle due direzioni [37], e in modo poi che esso passi costantemente per un punto dello spazio esterno alla retta.*

6°. *Un piano può rotare in due sensi opposti intorno ad un suo punto qualunque e in modo da passar costantemente per due punti dello spazio che non sono allineati* (²) *col centro di rotazione.*

7°. *Un piano divide lo spazio in due parti.* (³).

lunque, sono *due*, perchè, presi nel piano due punti, che siano da bande opposte della retta, e poi preso un terzo punto qualunque del piano, da questo punto si può andare, restando sul piano, ad uno dei due primi, senza incontrare la retta.

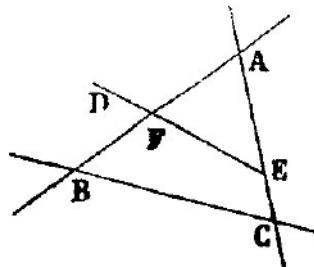
(¹) Quando due rette hanno un punto in comune, si dice che si *tagliano*, che si *segano*, che s'*incontrano* in quel punto, il quale si dice punto d'*intersezione* o d'*incontro* delle due rette; ecc.

(²) Per esprimere che dei punti possono appartenere ad una stessa retta, si dice che quei punti sono *allineati*.

(³) Si dice che una superficie *divide* lo spazio (od un solido) quando si possono prendere due punti dello spazio (o del solido) in modo che qualunque linea, che li unisce (senza uscire dal solido) deve incontrare necessariamente la superficie. Due punti così posti si dicono *essere da bande opposte rispetto alla superficie*. Similmente si dice che due figure sono situate da bande opposte d'una superficie, se tali sono, rispetto alla superficie, un punto qualunque d'una figura e un punto qualunque dell'altra.

41. Teor. *Per tre punti qualunque, che non siano allineati, si può far passare un piano, ed uno soltanto.* (¹).

Dim. Siano A, B, C tre punti qualunque; però la retta, che passa per due [30], non contenga anche il terzo. Si vuol dimostrare che un piano si può condurre a passare per i tre punti; e che due piani, se passano entrambi per i tre punti, coincidono per intero.



Preso un piano qualunque, e tirata in esso una retta ad arbitrio, si muova poi tutta la figura, così da ottenere [30] che la retta, e con essa il piano, passino per due dei punti dati, sia ad es. per i punti A, B . Indi si faccia rotare il piano intorno alla retta $A B$, finchè esso passi per il punto C [40, 3°]. Così resta provato che per i tre punti A, B, C passa un piano.

Imaginiamo ora che un secondo piano sia condotto anch'esso a passare per gli stessi tre punti A, B, C . Proveremo che i due piani, che chiameremo α e β , coincidono compiutamente.

Intanto i due piani contengono entrambi [40, 1°] ciascuna delle rette $A B, A C, B C$, perchè ciascuna ha con l'uno e con l'altro dei piani due punti in comune. Si prenda ora sopra uno dei piani, ad es. sul piano α , un punto D qualunque, che sia fuori delle tre rette; e poi si prenda su una di queste, ad es. sulla retta $A C$, un punto qualunque E , in modo però [40, 4°] che i punti D ed E siano da bande opposte rispetto ad un'altra retta, ad es. rispetto alla retta $A B$. La retta

(¹) Ossia: *un piano è individuato da tre punti, purchè non siano in una stessa retta.*

$D E$ [30], poichè passa per due punti D, E del piano α , giace in esso [40, 1°]; e poichè i punti D, E sono da bande opposte della $A B$, essa incontra necessariamente [40, 1°] questa retta; sia F il punto d'incontro. Ora, poichè i punti E ed F appartengono rispettivamente alle rette $A C, A B$, essi appartengono anche al piano β ; su questo piano giace per conseguenza [40, 1°] tutta intera la retta $E F$, e quindi anche il punto D .

Nello stesso modo si proverebbe che ogni punto del piano β appartiene anche al piano α . Dunque i piani coincidono.

42. Cor. 1°. *Per una retta e un punto fuori di essa passa un piano, ed uno solo.*

Infatti un piano α , che passi [41] per due punti A, B della retta e per un punto C esterno alla retta, passa [40, 1°] per la retta e per questo punto. Ed ogni altro piano, che passi per la retta e per il punto C , poichè passa per i punti A, B, C , coincide [41] col piano α .

43. Cor. 2°. *Per due rette aventi un punto in comune passa un piano, ed uno solo.*

Infatti, se C è il punto comune, A un altro punto d'una delle rette e B un altro punto dell'altra, un piano α , che passi per i tre punti A, B, C , passa [40, 1°] per ambedue le rette. Ed ogni altro piano, che passi per le due rette, poichè passa per i punti A, B, C , coincide [41] col piano α .

44. Cor. 3°. *Tutti i piani sono eguali tra loro.*

Basta infatti condurre un piano a passare per tre punti d'un altro, che non siano allineati, perchè i due piani coincidano. [41].

45. Per indicare un piano, si indicano tre suoi punti qualunque che non siano allineati [41]; oppure

una sua retta ed un suo punto esterno alla retta [42]; oppure due sue rette. [43].

46. Teor. *Per una retta passano innumerevoli piani.*

Dim. Sappiamo [42] che per una retta e un punto esterno ad essa passa un piano. La retta e un punto, che non appartenga al detto piano, determinano [42] un nuovo piano, distinto dal precedente. E così via.

47. Le parti in cui un piano è diviso da una sua retta si dicono *falde*. La retta si dice *origine* di ciascuna delle due falde.

48. Teor. *Due falde date si possono far coincidere in modo che un raggio assegnato dell'origine di una di esse coincida con un raggio assegnato dell'origine dell'altra.*

Dim. Invero, fatti diventare coincidenti i due raggi [34], poi, facendo rotare una delle falde intorno all'origine comune finchè passi per un punto dell'altra falda [40, 3°], si ottiene la coincidenza [42] accennata nel teorema.

49. Cor. *Tutte le falde sono eguali.*

50. Teor. *Un piano può muoversi restando sempre coincidente con un piano fisso e in modo che una sua retta scorra su se stessa, in una direzione o nell'opposta.*

Dim. Siano due piani α e β coincidenti; sia AB una data retta del piano α ; chiamiamo CD la retta che coincide con AB ed appartiene al piano β ; infine sia E un punto di questo piano.

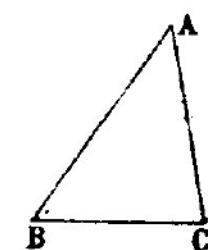


Imaginiamo di muovere il piano α in modo che la retta AB scorra sulla CD , in una o nell'altra direzione [37], e che esso passi costantemente per il punto E [40, 5°]. Il piano α in qualunque delle nuove posi-

zioni, avendo in comune col piano β una retta ed un punto esterno alla retta, coincide [42] con questo piano.

51. Quando un piano si muove nel modo indicato nel teorema precedente, si dice che il piano *scorre sullo stesso in quella data direzione*.

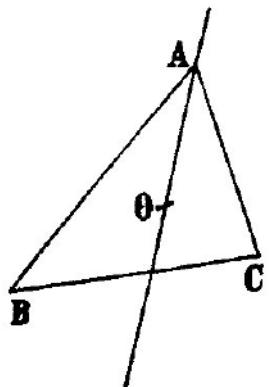
52. Def. Presi tre punti qualunque A, B, C , che non siano allineati, uniamoli a due a due coi tre segmenti ⁽¹⁾ AB, BC, CA . La figura che ne risulta si chiama *triangolo*, e si indica dicendo: il *triangolo A, B, C* (enunciando le tre lettere in un ordine qualunque). I tre punti A, B, C si dicono i *vertici* del triangolo; i tre segmenti si dicono i *lati* del triangolo.



Un vertice e il lato che non termina in esso si dicono *opposti*. Il piano determinato [41] dai vertici del triangolo, e nel quale stanno [40, 1°] i lati, si dice *il piano del triangolo*.

I lati di un triangolo dividono il piano del triangolo in due parti, una limitata e l'altra illimitata. Ogni punto della parte limitata si dice *interno* al tri-

angolo, ed ogni punto dell'altra parte si dice *esterno*. La linea composta dei tre lati si dice il *contorno* del triangolo.



53. Teor. *La retta, che passa per un vertice di un triangolo e per un punto interno al triangolo, incontra il lato opposto.*

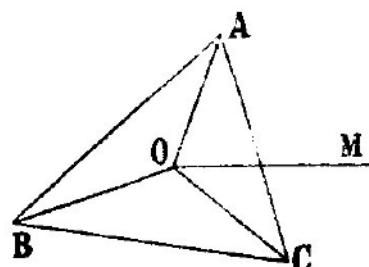
Dim. Sia un triangolo ABC , e preso un punto O interno, si tiri la retta AO . I lati

⁽¹⁾ La parte d'una retta compresa tra due punti della stessa si dice *segmento* (di retta). Il segmento, terminato a due punti A, B , si accenna dicendolo *il segmento A, B*.

$A B$, $A C$ cadono da bande opposte della retta $A O$, e così per conseguenza anche i punti B , C . Pertanto il lato $B C$ incontra necessariamente [40, 2°] la retta $A O$, cioè questa incontra il lato.

54. Teor. *Un raggio, che giaccia nel piano d'un triangolo ed abbia l'origine in un punto interno al triangolo, incontra il contorno del triangolo.*

Dim. Sia un triangolo $A B C$ e nel suo piano un raggio $O M$, uscente da un punto O interno al triangolo. Uniamo questo punto con i tre vertici. Se il raggio $O M$ è sovrapposto ad uno dei raggi $O A$, $O B$, $O C$, esso incontra il contorno del triangolo $A B C$ in un vertice. Altrimenti esso passa per il vertice O e per un punto interno di uno dei triangoli $O A B$, $O B C$, $O C A$; e per conseguenza esso [53] incontra il lato opposto a questo vertice, incontra dunque uno dei lati del triangolo dato.

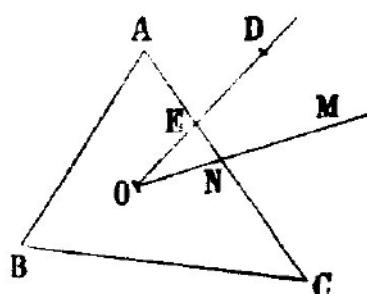


55. Teor. *Un raggio d'un piano si può far rotare intorno alla sua origine, in due sensi opposti, in modo che venga a passare per ogni punto del piano una volta ed una sola, e che non passi mai per punti che non appartengano al piano.*

Dim. Sia un piano α ed in esso un raggio $O M$. Costruito in un piano β un triangolo $A B C$, e preso nell'interno un punto O' ad arbitrio, si sovrapponga poi il piano β al piano α , in modo che il punto O' cada in O . Così si ottiene che nel piano α sia segnato un triangolo $A B C$, in tal guisa che il punto O sia nell'interno del triangolo.

E poichè il raggio $O M$ ha l'origine nell'interno,

esso incontra il contorno del triangolo in un punto N . Imaginiamo ora che un punto mobile, partendo da N , percorra tutto il contorno in un senso o nell'altro. Per qualunque delle posizioni assunte dal punto mobile possiamo condurre [30] un raggio che, uscendo da O , passi per quel punto; e possiamo anche imaginare che



tutti questi raggi non siano altro che successive posizioni assunte dal raggio OM , che, rotando intorno ad O , accompagni il punto mobile nel suo movimento. Il raggio mobile, come quello che ha costantemente in comune col piano

due punti, si mantiene nel suo movimento [40, 1°] tutto nel piano, e per conseguenza non vien mai a passare per nessun punto che non appartenga al piano.

Prendiamo ora nel piano del triangolo un punto qualunque D e tiriamo il raggio OD . Codesto raggio, perchè ha l'origine in un punto interno al triangolo, ne incontra necessariamente [53] il contorno, e sia nel punto E . Quando il punto mobile si trova in E , il raggio OD coincide col raggio OM , il quale per conseguenza passa per D .

E perchè il punto mobile nel suo movimento passa una volta sola per il punto E , il raggio mobile viene a passare una volta sola per il punto D .

56. Quando un raggio si muove nel modo considerato nel teorema precedente, si dice che esso *descriue (che genera) il piano*.

57. Teor. *Un piano può rotare intorno ad un suo punto e coincidere costantemente con un piano fisso.*

Dim. Siano due piani coincidenti α e β , e in essi un

punto O qualunque. Siano poi A e B due altri punti del piano β , i quali non siano allineati col punto O .

Supponendo che il piano α ruoti intorno ad O , in un senso o nell'altro, e in modo da passar sempre per i punti A e B [40, 6°], esso coincide costantemente col piano β . [41].

58. Un piano, che si muova nel modo indicato dal teorema precedente, si dice che *scorre su se stesso, rotando intorno a quel punto*.

59. Cor. *Qualunque figura d'un piano può muoversi nel piano, o scorrendo lungo una retta del piano [51], oppure rotando intorno ad un punto del piano. [58].*

60. Teor. *Un piano è invertibile.* (¹).

Dim. Si inverte un piano facendolo rotare intorno ad una sua retta qualunque [38] finchè una delle falde in cui il piano è diviso dalla retta passi per un punto dello spazio [40, 3°] per il quale passava l'altra falda. [42].

Il segmento.

61. Due punti d'una retta dividono la retta in tre parti; quella limitata dai due punti si dice *segmento* (segmento di retta, *tratto*); le altre due parti sono due *raggi*, e si dicono i *prolungamenti* del segmento, dall'una e dall'altra *banda* di esso. I due punti si dicono i *termini*, le *estremità* del segmento. Si dice anche che il segmento *unisce* i suoi estremi, che è *compreso* tra questi; ecc.

Il segmento, che termina nei punti A , B , si indica dicendo il *segmento A , B* (oppure il segmento B , A).

(¹) Un piano ha due *pagine*. Invertire un piano vuol dire muoverlo per modo che le due pagine si scambino di posto l'una con l'altra.

62. Postulato della lunghezza. Una linea finita ed una sua parte qualunque hanno lunghezze differenti.

63. Teor. Qualunque segmento è invertibile.

Dim. Sia un segmento AB qualunque; immaginiamo che sia posto sopra una retta MN . Dico che si può rimettere il segmento sopra la stessa retta, in modo che il punto B cada dove si trovava il punto A , e che questo punto vada a cadere dove si trovava il punto B .

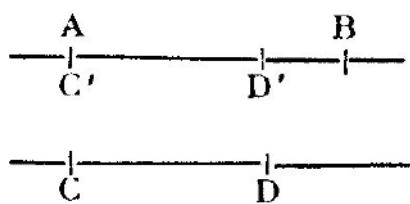
Infatti, posto il punto B in A e fatto [34] che



il segmento si disponga sul raggio AN , il punto A deve cadere in B ; dacchè, se cadesse invece in A' , allora

i due segmenti AB , AA' , perchè posizioni distinte d'un medesimo segmento, avrebbero la stessa lunghezza, e ciò non può essere. [62].

64. Dati due segmenti AB , CD , immaginiamo di voler riconoscere se sono eguali. Se mai ha luogo que-



sto caso, ad una estremità d'un segmento deve corrispondere una estremità dell'altro. [26]. La prova della sovrapposizione può dun-

que cominciare in quattro modi, dacchè si può mettere C in A od in B , oppure si può cominciare ponendo D in A od in B .

Trasportiamo intanto [34] il raggio CD sul raggio AB .

Se il punto D cade in B , si conchiude [28, 3°] che i segmenti sono uguali.

Se il punto D non cade in B , ma ad es. in D' , allora senza bisogno di fare gli altri tre saggi, possiamo

conchiudere che i due segmenti non possono diventare coincidenti. [63].

Se due segmenti AB, CD non sono eguali, perché, ad es., sovrapponendoli in modo che C cada in A , il termine D non cade in B (ma in D'), allora uno dei segmenti è uguale ad una parte dell'altro. Ciò si esprime dicendo che il primo è *minore* del secondo, od anche che questo è *maggiore* del primo.

Per indicare che un segmento CD è uguale ad una parte di AB (che è minore di AB), si scrive :

$$CD < AB \quad \text{oppure} \quad AB > CD.$$

65. Il segmento, che unisce due punti A, B , o qualunque altro che sia eguale al segmento AB , si dice anche *distanza* (reciproca) di quei due punti (tra loro).

Così, dati i punti A, B, C , se il segmento AB è uguale al segmento AC , i punti B e C si possono dire *equidistanti* da A , e questo punto si può dire *equidistante* dagli altri due.

66. Due segmenti, che abbiano una estremità in comune e nessun altro punto in comune, si dicono *consecutivi*.

Se due segmenti consecutivi giacciono sopra una stessa retta, i due segmenti si dicono *per diritto* (l'uno all'altro).

67. Ponendo due segmenti per diritto [34], si ottiene un segmento del quale i dati sono *parti*, e che si dice *somma* di questi due segmenti.

Ciascuno dei due segmenti si dice *differenza* tra la somma ed una delle parti.

Aggiungendo alla somma di due segmenti un terzo, si ottiene la somma dei tre segmenti ; ecc.

68. Teor. *La somma di più segmenti non viene alterata, se si muta l'ordine in cui si succedono gli addendi.*

Dim. Infatti, invertendo [63] il segmento composto di due addendi consecutivi, si muta l'ordine di due addendi consecutivi, senza alterare la somma. E mediante lo scambio replicato di due addendi consecutivi si può ottenere che gli addendi, che si succedevano in un certo ordine, vengano a succedersi in un altro ordine voluto qualunque.

69. Cor. *Dovendo far la somma di più segmenti, si può dividerli comunque in parti, e sommar poi queste parti in un ordine qualunque.*

70. Per significare l'*addizione* ed anche la somma di quanti si vogliano segmenti AB , CD , $EF\dots$, si scrive:

$$AB + CD + EF + \dots$$

Per significare la *sottrazione* e quindi anche la differenza tra due segmenti AB , CD , posto che AB sia il maggiore (o almeno non sia minore dell'altro), si scrive:

$$AB - CD.$$

Se il resto della sottrazione, sia eguale, ad es., al segmento EF , si significherà ciò scrivendo:

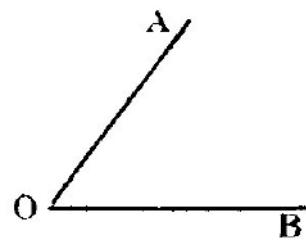
$$AB - CD \equiv EF.$$

L'angolo.

71. Due raggi OA , OB , uscenti da uno stesso punto O , dividono il loro piano [43] in due parti che si dicono *angoli*. Adunque:

72. Def. *Si dice angolo la parte d'un piano che è limitata parzialmente da due suoi raggi uscenti da uno stesso punto.*

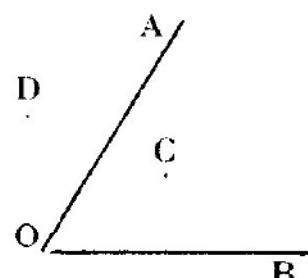
I raggi, che limitano un angolo, si dicono i *lati* dell'angolo; il loro punto comune si dice il *vertice* dell'angolo. Il piano, di cui è parte un angolo, si dice il *piano dell'angolo*. Qualunque punto d'un angolo, che non sia sopra un lato, si dice che è *interno* all'angolo; e l'angolo stesso si dice che è *compreso* da' suoi lati; ecc.



73. Un lato d'un angolo, rotando nel piano dell'angolo [59], in un senso conveniente, e fino a che si sia sovrapposto all'altro lato, genera l'angolo.

74. Dato il vertice d'un angolo, un punto qualunque d'un lato e un punto qualunque dell'altro lato, sono determinati il piano [41] e i lati [28, 3°] dell'angolo; ma l'angolo stesso non si può dire compiutamente determinato, dacchè i lati tagliano il loro piano in due parti, che sono entrambi due angoli aventi lo stesso vertice e i medesimi lati.

Per evitare ogni indeterminatezza, imagineremo che ogni angolo sia stato generato da un raggio [73]; chiameremo *primo* lato, od origine dell'angolo, la posizione iniziale; *secondo* lato, o termine dell'angolo, la posizione finale del raggio generatore; e indicheremo il verso in cui è avvenuta la rotazione. ⁽¹⁾. E si indicherà un angolo, nominando per primo un punto del primo lato, quindi il vertice, e in fine un punto del secondo lato.



(¹) In questo libro si suppone che la rotazione avvenga sempre, rispetto a chi guarda un angolo, nel senso in cui girano le lancette degli orologi.

Così nella figura di questo §, ammesso che le rotazioni avvengano nel senso delle lancette degli orologi, quello dei due angoli, a cui appartiene il punto C , si indica dicendo : *angolo A, O, B*. L'angolo, a cui appartiene il punto D , si indica dicendo : *angolo B, O, A*.

Dovendo indicare questi angoli per iscritto, scriveremo : *angolo AOB*, ed *angolo BOA*, oppure più semplicemente *A(O)B* e *B(O)A*, dove si vede chiusa tra parentesi la lettera che indica il vertice.

75. La definizione e meglio il modo di generazione d'un angolo s'adattano al caso che i lati siano per diritto (*opposti*), e al caso che siano sovrapposti.

L'angolo di due raggi opposti si dice *piatto*.

Nel secondo caso l'angolo od è *nullo*, oppure è un intero piano (è un *perigono*).

76. Qualunque raggio del piano d'un angolo, che abbia l'origine sopra un lato od esternamente, e che passi per un punto interno, divide l'angolo in due parti. Ma fra i modi di divisione d'un angolo noi considereremo soltanto quelli dovuti a raggi passanti per il vertice dell'angolo. (Soltanto in questo caso le parti sono angoli tutte e due. Fa eccezione, per questo riguardo, l'angolo piatto).

77. Postulato dell'angolo. *Una parte [76] d'un angolo non può essere uguale all'intero.*

78. Cor. *Ogni angolo è invertibile.* [48, 77].

79. Dati due angoli ABC, DEF , imaginiamo di voler riconoscere se sono eguali. Supposto che abbia luogo questo caso, manifestamente a ciascun lato dell'uno deve corrispondere [26] un lato dell'altro, e quindi il vertice al vertice. Così, per ottenere la sovrapposizione, si comincerà a far coincidere un lato d'un angolo con un lato dell'altro [34], e poi il piano

dell'uno col piano dell' altro [48], in modo che gli angoli cadano da una stessa banda del lato comune. (¹).

Posti così gli angoli, se anche gli altri due lati coincidono, si conchiude che essi sono eguali. [43].

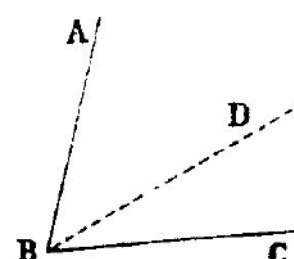
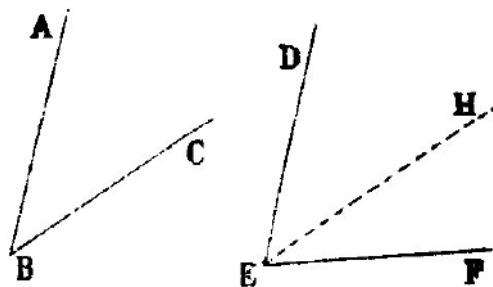
Nel caso contrario, senza altre prove [78], si può conchiudere che i due angoli non sono eguali.

80. Quando due angoli non sono eguali, uno di essi è uguale ad una parte dell'altro. Si accenna codesta relazione dicendo che il primo angolo è *minore* del secondo, oppure che questo è *maggiore* del primo. Ad es., relativamente alla figura precedente, si dirà che $A(B)C$ è minore di $D(E)F$, oppure che $D(E)F$ è maggiore di $A(B)C$. Si indica ciò scrivendo :

$$A(B)C < D(E)F \text{ oppure } D(E)F > A(B)C.$$

81. Una posizione qualunque del raggio che ha generato un angolo (che non sia però né la prima né l'ultima) divide l'angolo in due angoli che si dicono *parti* dell'angolo dato; e questo si dice loro *somma*. Così si è determinato il concetto di *addizione* di due angoli, e in generale di quanti angoli si vogliano.

Nella nostra figura il raggio BD taglia l'angolo ABC nei due $A(B)D$,



(¹) Cioè, per dir meglio, in modo che, quando si volesse che il lato comune generasse poi i due angoli, si dovesse farlo rotare in uno stesso verso.

$D(B)C$; ed esso è la somma di codesti due angoli.
Si indica questa relazione scrivendo:

$$A(B)D + D(B)C \equiv A(B)C.$$

Ciascuna delle parti è la *differenza* tra la somma e l'altra parte. Ad es., è:

$$A(B)D \equiv A(B)C - D(B)C.$$

82. Teor. *La somma di più angoli è indipendente dall'ordine in cui si susseguono gli addendi.*

Dim. Infatti, invertendo [78] l'angolo composto di due addendi consecutivi, si muta l'ordine di due addendi consecutivi, senza che venga alterata la somma. E ripetendo abbastanza lo scambio di due addendi consecutivi, si finisce ad ottenere che gli addendi si succedano in un ordine prestabilito qualsiasi.

83. Un angolo si dice *convesso* quando i prolungamenti dei lati cadono fuori dell'angolo; altrimenti l'angolo si dice *concavo*.

Perciò, ad es., si può dire che due raggi uscenti da uno stesso punto, e che non siano per diritto, dividono il loro piano in due angoli, che sono uno convesso e l'altro concavo.

Ogni angolo convesso è minore d'un angolo piatto; ed ogni angolo concavo è maggiore d'un angolo piatto. [80] (¹).

Due angoli, i quali abbiano un lato in comune, si dicono *consecutivi*. (Per il caso che due angoli consecutivi siano in uno stesso piano, si deve aggiungere questa condizione che il raggio, che li ha generati, ab-

(¹) Nel seguito soltanto in rarissimi casi ci accadrà di dover considerare angoli concavi. Pertanto nell'indicare un angolo possiamo dispensarci dal distinguere un lato dall'altro, e basterà pronunciare per seconda la lettera del vertice. Si farà avvertenza, quando si intenda parlare d'un angolo concavo.

bia girato intorno alla sua origine nello stesso senso per tutti e due gli angoli).

Due angoli col vertice in comune e nei quali i lati di ciascuno siano i prolungamenti dei lati dell' altro si dicono *opposti al vertice*.

Quando due rette si segano, nel loro piano ci sono due coppie di angoli opposti al vertice.

Gli angoli, in cui una falda è divisa da un raggio uscente da un punto qualunque dell' origine, si dicono *adiacenti*.

84. Teor. *Tutti gli angoli piatti sono eguali tra loro.* [48].

85. Def. Due angoli, la cui somma sia un angolo piatto, si dicono *supplementari*.

86. Cor. 1°. *I lati della somma di due angoli supplementari sono per diritto.*

87. Cor. 2°. *I supplementi di angoli eguali sono eguali.* [84].

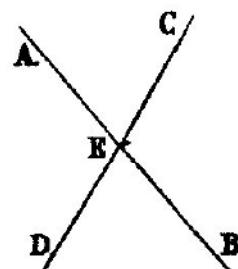
88. Cor. 3°. *Gli angoli opposti al vertice sono eguali tra loro.*

Infatti due angoli opposti al vertice hanno un angolo adiacente in comune, del quale ambidue sono supplementari. [87].

89. Teor. *Se due raggi uscenti da uno stesso punto di una retta, cadono da bande opposte di questa e fanno con essa due angoli eguali che non siano consecutivi, essi sono per diritto.*

Dim. Da un punto E , d'una retta AB , escano due raggi EC, ED . E sia $A(E)C \equiv B(E)D$. Dico che i raggi EC, ED giacciono sopra una stessa retta.

Infatti, poichè l'angolo AEC è supplementare di

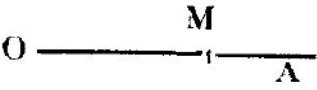


$C E B$ [85], anche i due angoli $C E B$, $B E D$ sono supplementari, epperò [86] i raggi $E C$, $E D$ sono per diritto.

Il cerchio.

90. Preso in un piano un raggio $O A$ e segnato su questo un punto M , imaginiamo che il raggio ruoti intorno al punto O , mantenendosi nel piano [56] in un senso o nell'opposto, e fino a che abbia ripresa la posizione primitiva. In questo movimento il punto M descrive una linea che si chiama *cerchio* (o *circolo*) ; il punto O si chiama *centro* del cerchio, ed ogni segmento, che unisce il centro con un punto del cerchio, si chiama *raggio* del cerchio.

Spesso si chiama *il raggio* di un cerchio (non *un raggio*) un segmento che sia eguale ai raggi, indipendentemente dalla sua posizione.



Il piano, in cui giacciono tutti i punti d'un cerchio ed il centro, si dice piano del *cerchio*.

91. Tutti i raggi d'un cerchio sono eguali tra loro, perchè non sono altro che posizioni distinte di un medesimo segmento.

92. Se tutti i punti d'una figura giacciono in un piano, la figura si dice *piana*. Altrimenti si dice *storta, gobba*.

Un cerchio è una linea piana.

93. Un cerchio divide il suo piano in due parti, una limitata e l'altra illimitata. La parte limitata si chiama la *superficie del cerchio*.

Il segmento, che rotando intorno al centro descrive con l'estremità mobile un cerchio, descrive nella rotazione la superficie del cerchio.

Il centro d'un cerchio appartiene alla superficie del cerchio.

94. Un punto del piano d'un cerchio si dice *interno* od *esterno* al cerchio, secondo che giace nella parte limitata o nella illimitata di quelle due in cui il cerchio divide il suo piano.

Altrettanto si dice di una figura i cui punti siano tutti interni ad un cerchio o tutti esterni.

95. *Ogni punto interno ad un cerchio ha dal centro distanza minore del raggio.* Infatti il segmento che lo unisce col centro è parte d'un raggio.

96. *Ogni punto esterno ad un cerchio ha dal centro distanza maggiore del raggio.* Infatti, unendo quel punto col centro, si ottiene un segmento di cui una parte è un raggio del cerchio. [93].

97. *Se la distanza d'un punto del piano d'un cerchio dal centro è minore del raggio, il punto è interno; e se è maggiore del raggio, il punto è esterno.*

Infatti, nel primo caso il punto non può cadere sul cerchio, nè fuori, perchè la sua distanza dal centro sarebbe uguale o maggiore [96] del raggio ; e ciò contro l'ipotesi. Ecc.

98. Def. *Se tutti i punti d'una figura hanno una proprietà comune, e soltanto i punti di quella figura hanno quella proprietà, quella figura si dice il luogo⁽¹⁾ dei punti che godono quella proprietà.⁽²⁾*

⁽¹⁾ S'intende dire che la figura è il *luogo dove sono posti* tutti i punti che godono quella proprietà. Ma bisogna poi intendere aggiunto questo che ogni punto della figura gode di quella proprietà.

⁽²⁾ Così, per conchiudere che una certa figura è il luogo dei punti che godono una certa proprietà, bisogna aver dimostrato: 1°. che tutti i punti della figura hanno quella proprie-

99. Teor. *In un piano, il luogo dei punti, che hanno da un punto del piano distanze uguali ad un segmento dato, è il cerchio che ha il centro in quel punto e raggi eguali a quel segmento.*

Dim. Sia O il centro del cerchio ed AB il segmento dato.

1°. Per la definizione del cerchio [90] (cioè per il modo in cui si deve intenderlo descritto) ogni punto del cerchio ha dal punto O distanza eguale ad AB .

— A ————— B
 |
 O
 |
 B
2°. Se un punto del piano del cerchio non appartiene al cerchio, esso ha dal centro distanza minore [95] oppure [96] maggiore del raggio.

In conclusione *tutti e soltanto i punti che hanno... appartengono ecc.*

100. Teor. *Una retta, se passa per il centro d'un cerchio ed appartiene al piano del cerchio, ha in comune col cerchio due soli punti, e questi sono situati da bande opposte del centro.*

Dim. Infatti il segmento, che con una estremità genera il cerchio, viene nel suo movimento a cadere su ciascuno dei raggi in cui una retta, che appartiene al piano del cerchio e che passa per il centro, è divisa dal centro; eppero questa retta ha in comune col cerchio le due estremità di quelle due posizioni del segmento mobile. Non ha poi col cerchio altri punti comuni, perchè ogni altro punto della retta ha dal centro distanza maggiore o minore del raggio, e quindi [97] non appartiene al cerchio.

tà; 2°. che i punti, che non appartengono alla figura, non godono quella proprietà (oppure che ogni punto, il quale ha quella proprietà, appartiene a quella figura).

101. Ogni segmento, che passa per il centro d'un cerchio ed ha le estremità sul cerchio [100], si dice *diametro* di quel cerchio.

102. Tutti i diametri d'un cerchio sono eguali, perchè ogni diametro è composto di due raggi.

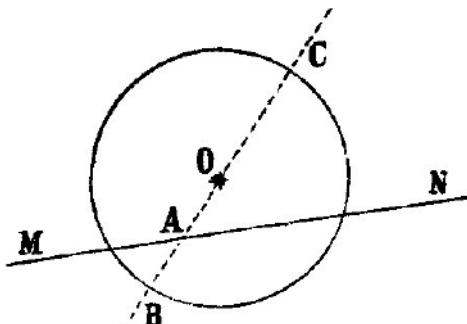
103. Teor. Una retta, che passa per un punto interno ad un cerchio ed appartiene al piano del cerchio, ha in comune col cerchio due punti almeno, e questi situati da bande opposte del punto dato.

Dim. Sia un cerchio di centro O e un punto interno A ; e sia MN una retta che appartiene al piano del cerchio e che passa per A . Si tiri la retta AO , e siano B, C i punti in cui essa incontra il cerchio. [100]. Poichè i punti B, C cadono da bande opposte del punto A , e quindi da bande opposte della retta MN [40, 4°], qualunque linea, che giaccia nel piano del cerchio ed unisca B con C , incontra necessariamente [40, 2°] la retta MN . Tanto vale per ciascuna delle parti in cui il cerchio è tagliato dai punti B, C .

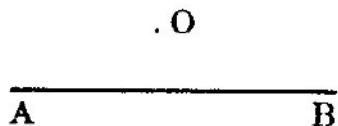
Infine, perchè codesti due punti, che la retta MN ha necessariamente in comune col cerchio, cadono da bande opposte della retta BC , essi sono situati da bande opposte del punto A .

104. Teor. Si può sempre descrivere un cerchio, che giaccia in un piano dato, abbia il centro in un punto qualunque del piano, e raggio eguale ad un segmento dato.

Dim. Infatti, posto che sia O il punto dato ed AB il dato segmento, si può [21, 1°; 28, 2°; 40, 1°] intanto porre il raggio AB nel piano dato in modo che A



cada in O . Poi, facendo che il segmento AB compia una rotazione intorno ad O , il punto B descrive il cerchio domandato.



L'strumento ideale, con cui si può descrivere qualunque cerchio domandato, si chiama *compasso*.

105. Cor. *Dato un segmento, una retta e su questa retta un punto, si possono segnare sulla retta due segmenti, che abbiano una estremità nel punto dato e che siano eguali al segmento dato.* [42, 104, 100].

Divisione della Geometria.

106. La Geometria si suole dividere in due parti; la *Geometria piana* o *Planimetria*, che studia le figure piane e le relazioni tra figure piane indipendentemente dalla posizione dei loro piani; e la *Geometria solida* o *Stereometria*, che studia le figure senza la restrizione che i loro punti siano tutti in un piano. ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Questa divisione non è necessaria; ma presenta vantaggi incontestabili nell'insegnamento elementare.

BRETSCHNEIDER (Jena, 1844) ha pubblicato un trattato di Geometria elementare, destinato all'insegnamento, nel quale, rompendola con le tradizioni classiche, ha soppresso la divisione sopracennata; ma non tutti sono rimasti convinti della opportunità dell'innovazione. In una prima esposizione sono piuttosto da cercare i pretesti per separare le proposizioni, che non le ragioni di presentarle unitamente.



PLANIMETRIA

CAPITOLO II COSTRUZIONI FONDAMENTALI

107. Lemma 1º. (¹). *Se un segmento è minore della somma ed è maggiore della differenza di altri due, anche ciascuno di questi è minore della somma degli altri due.*

Dim. Un segmento α sia minore della somma di due altri β , γ , e sia maggiore della loro differenza. Per il caso che i segmenti β e γ siano disuguali, supponiamo d'aver chiamato β il maggiore. Così l'ipotesi è rappresentata dalla diseguaglianza $\beta \geqslant \gamma$ e dalla *limitazione*:

$$\beta + \gamma > \alpha > \beta - \gamma.$$

Si vuol provare che anche ciascuno dei segmenti β , γ è minore della somma degli altri due.

Per il segmento γ la cosa è chiara. Infatti, dapprima esso è uguale o minore di β , esso è in ogni caso minore della somma $\beta + \alpha$.

Per il segmento β prendiamo la diseguaglianza:

$$\beta - \gamma < \alpha,$$

ed aggiungiamo γ ai due membri. Poichè il primo membro rappresenta ciò che è rimasto del segmento β

(¹) Si chiama *lemma* una proposizione, che farebbe parte di una susseguente, ma che si stacca e si premette, perchè è utile poterla citare nel seguito. (Talvolta codesta separazione si fa per ragioni didattiche; per non avere cioè una dimostrazione troppo lunga).

Spesso il titolo particolare serve anche a giustificare il posto occupato dalla proposizione, perchè, confrontata con le prossime, sembrerebbe non far gruppo con esse.

quando se ne è tolta una parte uguale al segmento γ , aggiungendo questo segmento al residuo torna necessariamente il segmento β . Così dall'ultima eguaglianza si conchiude l'altra :

$$\beta < \alpha + \gamma.$$

Epperò resta provato che, *se ecc.*

108. Lemma 2°. *Se ciascuno di tre segmenti è minore della somma degli altri due, ciascuno è maggiore della differenza degli altri due.*

Dim. Ciascuno dei segmenti α , β , γ sia minore della somma degli altri due. Dico essere ciascuno maggiore della differenza degli altri due. Proviamo, ad es., che α è minore della differenza tra β e γ .

Per il caso che i segmenti β e γ fossero eguali, la cosa è manifesta.

Quando sia $\beta > \gamma$, ricorrendo alla disuguaglianza:

$$\alpha + \gamma > \beta,$$

e sottraendo γ dai due membri, si ottiene:

$$\alpha > \beta - \gamma.$$

Per il caso che sia $\gamma > \beta$, dalla disuguaglianza:

$$\alpha + \beta > \gamma,$$

sottraendo β dai due membri, si ottiene:

$$\alpha > \gamma - \beta.$$

Nello stesso modo si proverebbe che ciascuno dei segmenti β e γ è maggiore della differenza degli altri due; epperò resta provato che, *se ecc.*

109. Lemma 3°. *Se la distanza dei centri di due cerchi è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza, i cerchi hanno in comune due punti che sono da bande opposte della retta dei centri.*

Dim. Siano due cerchi di centri A e B ; indichiamo con α e β i raggi rispettivi e con γ il segmento AB . Supponiamo che questo segmento sia minore della

somma e maggiore della differenza degli altri due. Sappiamo intanto di poter dire [107] che ciascuno dei tre segmenti in discorso è minore della somma degli altri due. Ora dobbiamo provare che i due cerchi hanno necessariamente in comune due punti situati da bande opposte della retta $A B$.

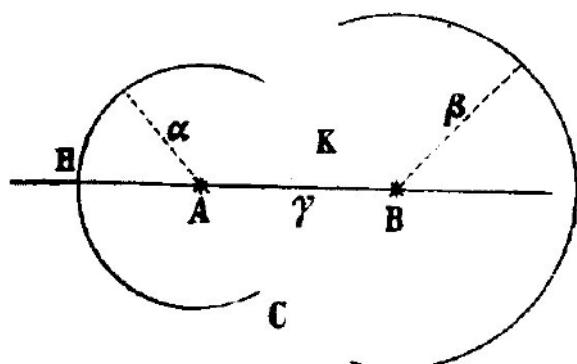
Ed ora, scelto uno dei cerchi, ad es. il cerchio (A) ⁽¹⁾, cominceremo ad osservare che esso ha in comune con la retta $A B$ due punti H, K , perchè codesta retta passa per il centro. [100].

Poi noteremo che il segmento BH , perchè uguale ad $(\alpha + \gamma)$, è per l'ipotesi maggiore di β . Per conseguenza [97] il punto H è fuori del cerchio (B).

Invece il segmento BK è minore di β . Ed invero, poichè codesto segmento è la differenza tra i segmenti α e γ , esso è [108] in ogni caso minore di β ; eppero [97] il punto K cade nell'interno del cerchio (B).

Il cerchio (A) ha dunque un punto esterno ed uno interno al cerchio (B); per conseguenza i due cerchi hanno due punti almeno in comune. Codesti punti comuni ai cerchi non possono appartenere alla retta $A B$, perchè il cerchio (A) su questa retta ha solo i punti H e K [100], e questi sono uno esterno e l'altro interno al cerchio (B). I due punti comuni sono poi da bande opposte della retta

(*) Per brevità, quando non sia possibile equivoco, si indica un cerchio nominandone solo il centro. Scrivendo, si chiude tra parentesi la lettera che indica il centro.



A B, perchè sono da bande opposte di questa retta le parti in cui ciascuno dei cerchi è diviso dalla retta stessa.

Così si è dimostrato che, se ecc.

110. Cor. 1°. *Se ciascuno di tre segmenti dati è minore della somma degli altri due, sopra uno indicato dei tre segmenti e da una sua banda assegnata si può sempre costruire un triangolo i cui altri due lati siano eguali ai due altri segmenti dati e in modo che quello dei due lati, che deve essere uguale ad uno indicato dei due segmenti, abbia una estremità in una assegnata del primo segmento.*

Infatti se, facendo centro nelle estremità del segmento indicato, con raggi rispettivamente uguali agli altri due segmenti, si descrivono due cerchi, questi cerchi hanno necessariamente in comune due punti situati da bande opposte della retta dei centri, perchè la distanza dei centri dei cerchi, che è minore della somma dei raggi, è poi [108] maggiore della loro differenza. Unendo uno dei punti comuni ai due cerchi coi centri, si ottiene il triangolo accennato nel corollario.

111. Cor. 2°. *Sopra una base data e da una banda assegnata si può sempre costruire un triangolo isoscele, nel quale i lati eguali siano eguali ad un dato segmento, il cui doppio superi la base. [110].*

(Si dice *isoscele* ogni triangolo che ha due lati eguali; il terzo lato si dice la *base* del triangolo isoscele).

112. Cor. 3°. *Sopra un dato segmento e da una banda assegnata si può costruire un triangolo equilatero. [110].*

(Si chiama *equilatero* ogni triangolo che ha i lati eguali).

113. Oss. Dalla dimostrazione del teorema del § 109 risulta il modo di risolvere il problema della costruzione dei triangoli accennati nei paragrafi 110, 111, 112. Analoga osservazione si intenderà fatta in

fine della dimostrazione di ogni teorema che affermi la possibilità di costruire una figura che soddisfaccia a date condizioni.

114. Lemma. *Due triangoli, se hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali, hanno eguali rispettivamente anche gli altri elementi, e sono eguali.*

Dim. Nei triangoli ABC , DEF sia $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ e $\angle C(A)B \equiv \angle F(D)E$.

Si deve provare che è $BC \equiv EF$; che sono eguali gli angoli in B ed E , ed eguali gli angoli in C ed F , e che anche i triangoli sono eguali.

A tale intento sovrapponiamo [78] l'angolo CAB all'angolo FDE , in modo che il lato AB cada sul raggio DE . Allora, perchè l'angolo CAB è uguale all'angolo FDE , il lato AC cade sul raggio DF .

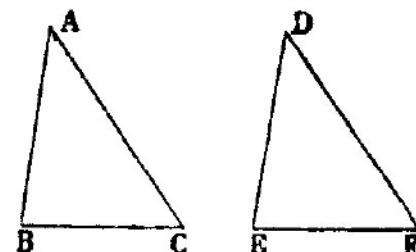
E perchè è $AB \equiv DE$, il vertice B cade in E ; e perchè è $AC \equiv DF$, il vertice C cade in F .

Così, essendo B in E e C in F , anche il segmento BC coincide [28, 3"] col segmento EF , l'angolo B con l'angolo E , l'angolo C con l'angolo F , ed il triangolo col triangolo.

115. Oss. Quando due triangoli sono eguali, due lati corrispondenti sono opposti ad angoli eguali, e due angoli corrispondenti sono opposti a lati eguali.

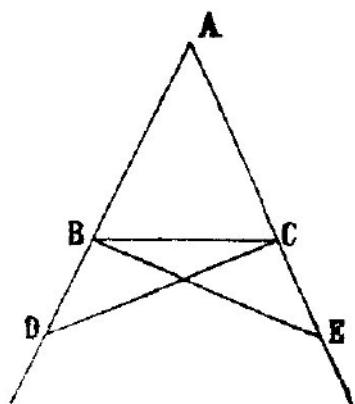
116. Lemma. *Se due lati di un triangolo sono eguali, gli angoli opposti ad essi sono eguali.* (¹).

(¹) Questo teorema si suol anche enunciare: *In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono eguali.* E lo si cita anche dicendo: *In un triangolo a lati eguali* (sottinteso, se di eguali si sono) *sono opposti angoli eguali.*



Dim. Nel triangolo ABC sia $AB \equiv AC$. Dico essere $A(B)C \equiv B(C)A$.

A tal fine sui prolungamenti dei lati AB , AC si prendano due segmenti eguali tra loro BD , CE , e poi si tirino BE e CD .

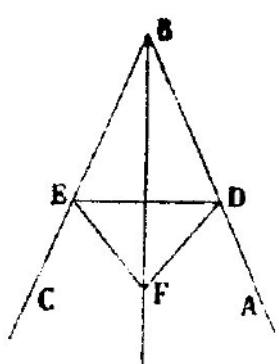


Se ora confrontiamo i triangoli ABE , ACD , troviamo che hanno $AB \equiv AC$, $AE \equiv AD$, e l'angolo in A in comune. Per conseguenza [114] è $BE \equiv CD$ e $B(E)C \equiv B(D)C$.

Così, se si confrontano i triangoli BCD , BCE , poichè è in essi :

$DB \equiv EC$, $DC \equiv EB$ e $B(D)C \equiv B(E)C$, si conchiude [114] essere: $C(B)D \equiv E(C)B$; eppero [87] sono eguali anche i loro supplementari $A(B)C$, $B(C)A$, come d. d. (¹).

117. Teor. *Qualunque angolo può esser diviso in due parti eguali, e in un modo soltanto.*



Dim. Sia l'angolo ABC .

Sui lati, partendo dal vertice, si prendano due segmenti eguali BD , BE , e tirato il segmento DE , su questo segmento, preso come base, e dalla banda opposta a quella in cui si trova il punto B , si costruisca [111] ad arbitrio un triangolo isoscele EDF . Tirando il raggio BF , l'angolo ABC resta diviso in due parti eguali.

(¹) Più semplicemente si può dimostrare la proposizione, invertendo l'angolo CAB [78]; oppure considerando come distinti i triangoli ABC , ACB , e confrontandoli [114] tra loro.

Infatti, nel triangolo BED , essendo $BE \equiv BD$, è [116]: $E(D)B \equiv B(E)D$.

Così nel triangolo EDF , essendo $EF \equiv FD$, è [116]: $F(D)E \equiv D(E)F$.

Per conseguenza tutto l'angolo FDB è uguale all'angolo $B EF$. Se ora confrontiamo i triangoli BEF , BDF , troviamo che hanno $BE \equiv BD$, $EF \equiv DF$ e $B(E)F \equiv F(D)B$; per conseguenza [114] è:

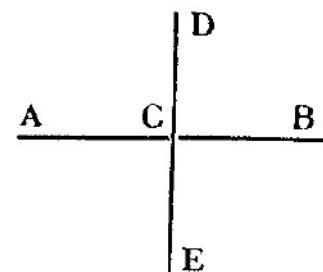
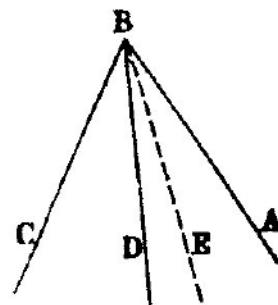
$$F(B)E \equiv D(B)F.$$

Questo poi che un angolo si possa dimezzare in un modo soltanto è conseguenza del concetto che abbiamo di angolo, per cui le metà di angoli eguali o d'uno stesso angolo sono eguali tra loro. (¹).

Così non potrebbero $A(B)D$ ed $A(B)E$ essere ambidue metà dello stesso angolo ABC .

118. Dividendo per metà un angolo piatto ACB , si ottiene un raggio CD , che parte da un punto di una retta (quella composta dei lati dell'angolo piatto), e che forma con questa retta angoli eguali.

Il prolungamento CE del raggio CD forma anch'esso con la retta AB angoli eguali. Infatti codesti angoli sono opposti al vertice di angoli eguali, epperò [88] anch'essi sono eguali. In conclusione i quattro angoli, che le due rette AB , DE formano intorno al punto d'intersezione, sono tutti e quattro eguali tra loro.



(¹) Il raggio che dimezza un angolo se ne dice la *bisettrice*.

119. Def. Due rette, che si incontrano e formano quattro angoli eguali, si dicono perpendicolari l'una all'altra, nel punto comune.

(Basta che, dei quattro angoli, due consecutivi siano eguali, perchè siano eguali tutti e quattro. [118]).

120. Due rette, che abbiano un punto comune e non siano perpendicolari tra loro si dicono *oblique*.

121. Poichè si è provato che ogni angolo può esser dimezzato, e che può esser dimezzato in un modo soltanto, si può dire [118] che :

Ad una retta, in un suo punto qualunque, si può inalzare una perpendicolare, ed una soltanto.

122. Un angolo, che sia metà di un angolo piatto, si dice *retto*.

Poichè tutti gli angoli piatti sono eguali tra loro [84], e le metà di angoli eguali sono eguali [117], possiamo dire che *tutti gli angoli retti sono eguali*.

123. Qualsiasi angolo, che sia minore di un retto, si dice *acuto*. Ed ogni angolo maggiore di un retto si dice *ottuso*. (¹).

124. Due angoli, la cui somma sia eguale ad un retto, si dicono *complementari*.

Angoli acuti eguali hanno complementi eguali. [122].

125. Oss. Poichè la somma di due angoli adiacenti è un angolo piatto, si può dire [122] che :

La somma di due angoli adiacenti è uguale alla somma di due angoli retti, e che :

126. *La somma di tutti gli angoli, in cui un piano è*

(¹) Si può anche dire che un angolo è acuto, retto, od ottuso, secondo che è minore, uguale, o maggiore del nuovo angolo, che si ottiene prolungando uno dei lati dell'angolo dato (di là dal vertice).

diviso da quanti si vogliano raggi uscenti da uno stesso punto, è uguale alla somma di quattro retti.

127. Probl. Inalzare la perpendicolare a una retta data in un suo punto dato. ⁽¹⁾.

Risol. Sia data la retta AB , e su questa un punto C . Si tratta di tirare la retta che è perpendicolare ad AB in C .

Partendo da C , si prendano sulla retta due segmenti eguali CD, CE . Poi sulla base DE si costruisca [111] un triangolo isoscele qualsivoglia DEF . La retta CF è la perpendicolare domandata.

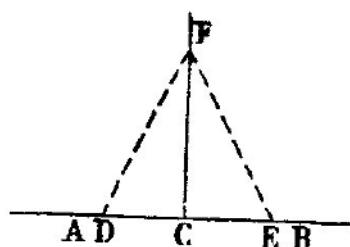
Dim. Infatti, poichè in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono [116] eguali, è $F(D)C \equiv C(E)F$. Essendo inoltre per costruzione $FD \equiv FE$ e $CD \equiv CE$, i triangoli FDC, FEC hanno anche gli altri elementi [114] rispettivamente uguali; ed in particolare è $D(C)F \equiv F(C)E$.

128. Teor. Da un punto, dato fuori di una retta, si può sempre calare su questa una perpendicolare, ed una soltanto.

Dim. Siano dati un punto A e una retta BC che non passi per A . Dico che si può tirare una retta ed una soltanto che passi per A e sia perpendicolare alla BC .

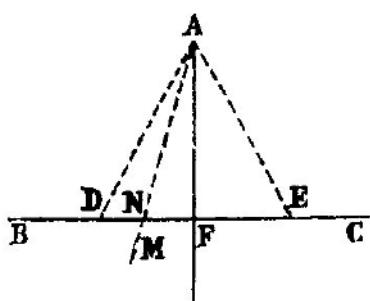
Preso, fuori della retta data, un punto M in guisa che A ed M giacciono da bande opposte della retta, si tiri il segmento AM . Questo segmento taglia necessariamente [40, 2°] la retta BC ; sia N il punto d'incontro. Ed ora, con centro A e raggio AM , si descriva

⁽¹⁾ Come si è osservato, questo problema non è che un caso particolare del problema relativo al § 117.



un cerchio. Poichè la retta BC passa per un punto N , che è interno al cerchio, essa ha in comune col cerchio, due punti almeno situati da bande opposte di N . Siano D ed E questi punti. Condotti AD , AE , si divida

per metà [117] l'angolo EAD . La bisettrice incontra necessariamente il segmento DE ; sia F il punto d'intersezione. Dico essere AF perpendicolare a BC .



Infatti i triangoli ADF , AEF , avendo AF in comune, $AD \equiv AE$ perchè raggi di uno

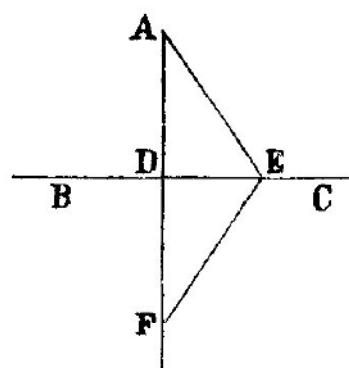
stesso cerchio, ed $F(A)D \equiv E(A)F$ per costruzione, hanno [114] anche gli altri elementi rispettivamente uguali; e in particolare è $D(F)A \equiv A(F)E$.

Ci rimane da dimostrare che da un punto, che sia fuori d'una retta, non si può tirare alla retta che una perpendicolare soltanto.

Sia un punto A , ed una retta BC che non passa per A ; e sia AD perpendicolare a BC . Tiro per A

un'altra retta qualunque che incontri la BC in E . Proveremo che la retta AE non è perpendicolare alla BC .

A tal fine si prenda un segmento DF che sia eguale ad AD e si unisca F con E .



Se si confrontano i triangoli ADE , FDE , si trova che

hanno DE in comune, $AD \equiv DF$ ed eguali gli angoli ADE , EDF , perchè le rette AF e BC sono perpendicolari tra loro. Per conseguenza [114] gli angoli DEA ed FED sono eguali.

Ora, se la retta $A E$ fosse perpendicolare a BC , l'angolo DEA sarebbe retto, e quindi retto anche FED ; per conseguenza l'angolo FEA sarebbe piatto, cioè la linea $A EF$ sarebbe un segmento. Ma allora avremmo due rette con due punti A ed F in comune e non coincidenti; e ciò non può essere [28, 3°]. La retta $A E$ non è dunque perpendicolare alla BC .

Così resta dimostrato che *ecc.*

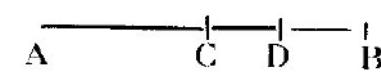
129. Teor. *Qualunque segmento può esser diviso e in un modo soltanto in due parti eguali.*

Dim. Sia il segmento AB .

Costruito [111] ad arbitrio su AB , preso come base, un triangolo isoscele ABC , si dimezzi [117] l'angolo BCA . La bisettrice taglia il segmento AB , e il punto E d'intersezione divide il segmento dato in parti eguali.

Infatti, confrontando i triangoli CAE , CBE , si trova che hanno CE in comune, $CA \equiv CB$, e per costruzione $E(C)A \equiv B(C)E$. Per conseguenza [114] è $AE \equiv EB$.

Questo poi che un segmento si possa dimezzare in un modo soltanto è conseguenza del concetto che abbiamo di linea, per cui metà di segmenti eguali, o d'uno stesso segmento sono eguali tra loro. [62]. Così non potrebbero AC ed AD essere ambidue metà dello stesso segmento AB .



130. Teor. *Si può sempre costruire un angolo che sia eguale a un angolo dato, che abbia per lato un raggio dato, e che cada da una banda assegnata di codesto raggio.*

Dim. Sia ABC l'angolo dato, ed FE il raggio dato.

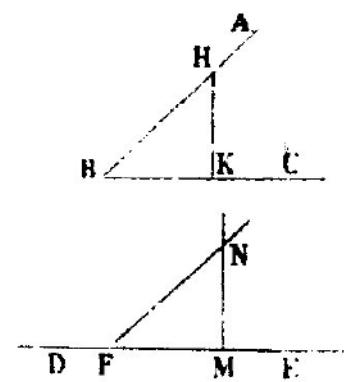
Preso sul lato BA un punto H ad arbitrio, da H si cali [128] la perpendicolare HK sull'altro lato dell'angolo. Quindi, preso su FE un segmento $FM \equiv BK$, si tiri [121] per M la MN perpendicolare ad FE . Infine, fatto $MN \equiv HK$, si tiri il raggio FN . L'angolo NFM è uguale all'angolo dato ABC .

Infatti, poichè nei triangoli HBK , NFM è $BK \equiv FM$, $HK \equiv NM$ e $B(K)H \equiv F(M)N$, egli è [114] $A(B)C \equiv N(F)E$.

Il problema ammette una sola soluzione. [77].

131. Probl. Costruire un triangolo che sia eguale ad un triangolo dato.

Risol. Si costruisce [130], dove la questione richiede, un angolo eguale ad uno di quelli del triangolo dato, e sui lati dell'angolo costruito si prendono, partendo dal vertice, due segmenti rispettivamente uguali a quei due lati del triangolo, che contengono l'angolo prescelto. Unendo le estremità dei due segmenti, si ottiene un triangolo eguale [114] al dato.



CAPITOLO III

IL TRIANGOLO

Proprietà d'un triangolo.

132. Un angolo, compreso da un lato di un triangolo e da un prolungamento di un altro lato, si dice *angolo esterno* del triangolo. Un angolo esterno è adiacente ad uno degli angoli del triangolo, e si dice *opposto* di ciascuno degli altri due.

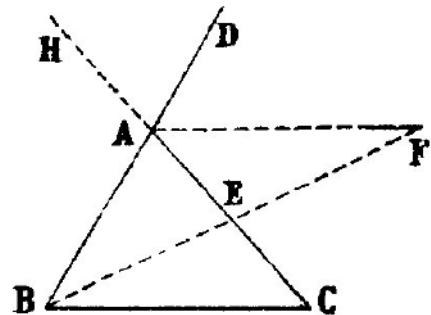
133. Teor. *In ogni triangolo un angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni opposti.*

Dim. Sia un triangolo qualunque ABC , e si prolunghi uno dei lati, ad es. il lato AB , in D . Dico che l'angolo esterno DAC è maggiore di ciascuno degli angoli interni opposti ABC , BCA .

Perciò divido AC per metà [129] in E , e condotto il segmento BE , lo prolungo, e faccio $EF \equiv BE$. Poi osservo che il punto F cade necessariamente dentro dell'angolo DAC ; ed invero, dappochè la retta BF incontra la retta BD in B e la retta AC in E , il raggio EF non può incontrare i lati dell'angolo DAC . [28, 3°].

Per conseguenza, se si tira il raggio AF , questo divide in due l'angolo DAC .

Ora, considerando i triangoli FEA , BEC , troviamo che i lati EF , EA sono per costruzione uguali rispettivamente ai lati EB , EC , e che sono eguali gli angoli AEF , CEB , perchè opposti al vertice. Per-



tanto [114] anche gli altri elementi sono rispettivamente uguali, e in particolare è:

$$F(A)E \equiv B(C)E.$$

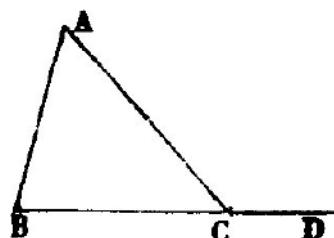
Ma $F(A)C$ è una parte di $D(A)C$; quindi è:

$$D(A)C > B(C)A.$$

Similmente, prolungato il lato CA in H , si potrebbe provare (dividendo cioè il lato AB per metà, ecc.) che l'angolo esterno BAH è maggiore dell'angolo ABC . Ma è $B(A)H \equiv D(A)C$ [88]; quindi infine $D(A)C$ è maggiore anche di $A(B)C$.

134. Cor. 1°. *La somma di due angoli d'un triangolo qualunque è minore di due retti.*

Dim. Sia il triangolo ABC . Dico che la somma di due angoli, ad es. la somma degli angoli ABC, BCA , è minore di due retti.



Infatti, prolungato il lato BC in D , si ha [133] che l'angolo interno ABC è minore dell'esterno opposto ACD . Aggiungendo a ciascuno dei due angoli l'angolo BCA , si ottiene:

$$A(B)C + B(C)A < A(C)D + B(C)A.$$

Ma la somma dei due angoli adiacenti ACD, BCA è [125] uguale a due retti; per conseguenza la somma dei due angoli ABC, BCA è minore di due retti.

135. Cor. 2°. *Se un triangolo ha un angolo retto, o un angolo ottuso, gli altri due angoli sono acuti.*

Infatti, se uno di questi fosse retto od ottuso, esisterebbe un triangolo, nel quale due angoli darebbero una somma uguale a due retti, o maggiore. E ciò non può [134] essere.

136. Se un angolo di un triangolo è retto, il tri-

angolo si dice *rettangolo*. Il lato opposto all'angolo retto si dice *ipotenusa*; gli altri due lati si chiamano *cateti*.

Se un angolo di un triangolo è ottuso, il triangolo si dice *ottusangolo*.

137. Cor. 3°. *Due rette, che siano perpendicolari ad una terza, non s'incontrano.*

Infatti, se s'incontrassero, ci sarebbe un triangolo con due angoli retti, e ciò non può darsi. [135].

138. Teor. *Se due lati di un triangolo sono eguali, gli angoli opposti ai due lati eguali sono eguali.*

Dim. Si trova nel § 116.

139. Oss. *Se un triangolo ha due angoli eguali, questi sono acuti*, giacchè non esiste nessun triangolo [135] nel quale due angoli siano retti, od ottusi. Possiamo dire pertanto [138]: *In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono acuti*.

140. Se sui lati di un angolo acuto, partendo dal vertice, si prendono due segmenti eguali, e se ne congiungono le estremità, si ottiene un triangolo isoscele, nel quale anche [139] l'angolo opposto alla base è acuto. Esistono dunque triangoli nei quali tutti e tre gli angoli sono acuti.

Quando tutti e tre gli angoli di un triangolo sono acuti, il triangolo si dice *acutangolo*.

141. Teor. *Se due lati di un triangolo sono disuguali, l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto al lato minore.* (¹).

Dim. Nel triangolo $A B C$ il lato $A B$ sia maggiore del lato $A C$. Dico che l'angolo $B C A$ opposto al lato maggiore $A B$, è maggiore dell'angolo $A B C$, che è opposto al lato minore $A C$.

(¹) Si cita questo teorema dicendo: *in un triangolo a lato maggiore è opposto angolo maggiore*.

Si tagli dal lato maggiore AB una parte AD eguale ad AC , e si tiri CD . Perchè il punto D cade tra A e B , il raggio CD cade nell'angolo BCA .

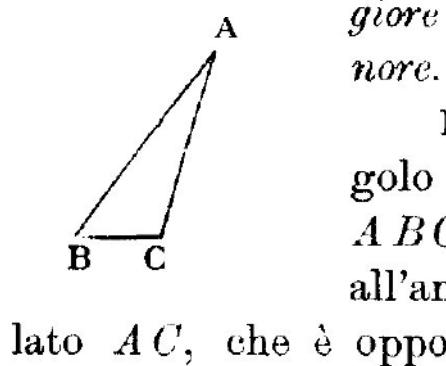
Si osservi ora il triangolo ADC . In questo, poichè è $AD \equiv AC$, gli angoli DCA , ADC sono [138] eguali tra loro. E dacchè l'angolo BCA è maggiore di $D(C)A$, esso è maggiore anche dell'angolo ADC . Ma questo, come esterno del triangolo BDC , alla sua volta è [133] maggiore dell'angolo DBC , interno opposto. Dunque, a maggior ragione, è $B(C)A > A(B)C$.

142. Teor. *Se due angoli di un triangolo sono eguali, i lati opposti ai due angoli eguali sono eguali tra loro.*

Dim. Nel triangolo ABC sia $A(B)C \equiv B(C)A$. Dico essere $AC \equiv AB$.

I lati AC , AB non possono infatti essere diseguali, perchè in tal caso anche gli angoli ABC , BCA sarebbero diseguali [141], e ciò contro l'ipotesi.

143. Teor. *Se due angoli di un triangolo sono diseguali, il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore.*



Dim. Nel triangolo ABC , l'angolo BCA sia maggiore dell'angolo ABC . Dico che il lato AB , opposto all'angolo maggiore, è maggiore del lato AC , che è opposto all'angolo minore.

E infatti, non può essere $AB \equiv AC$, perché allora [138] sarebbe $B(C)A \equiv A(B)C$, e ciò contro l'ipotesi. Né può essere $AB < AC$, perché [141] ne verrebbe la conseguenza che $B(C)A$ sarebbe minore di $A(B)C$, e ciò di nuovo contro l'ipotesi.

Ma poichè AB non può essere uguale ad AC , nè minore, esso è maggiore di questo lato.

144. Cor. *In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto. In un triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è maggiore di ciascuno degli altri lati.* [135, 143].

145. Teor. *Ciascun lato di un triangolo è minore della somma degli altri due.*

Dimm. Sia un triangolo qualunque ABC . Dico che ciascun lato è minore della somma degli altri due, ad es. che il lato BC è minore della somma $BA + AC$.

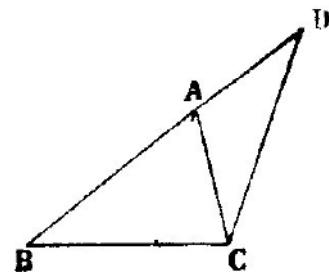
Prolungato BA ⁽¹⁾, si faccia $AD \equiv AC$, dimodochè è $BD \equiv BA + AC$; e si tiri DC .

Poichè nel triangolo ADC è $AD \equiv AC$, abbiamo [138] $A(C)D \equiv C(D)A$. Per conseguenza è $B(C)D > C(D)B$. Ma in un triangolo ad angolo maggiore è [143] opposto lato maggiore; quindi è $BD > BC$, ossia:

$$BA + AC > BC.$$

146. Cor. *Ciascun lato di un triangolo è maggiore della differenza degli altri due.* [108].

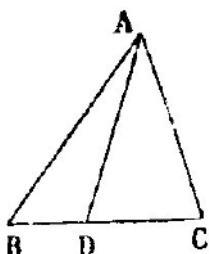
(1) Bisognerebbe aggiungere « dalla banda di A ». Ma qui e spesso in casi analoghi si taccciono per brevità circostanze pur necessarie, ammettendo che l'acume del lettore supplisca al silenzio.



147. Oss. Abbiamo veduto [110] che è sempre possibile costruire un triangolo, i cui lati siano rispettivamente uguali a tre dati segmenti, quando ciascuno di questi è minore della somma degli altri due. Ora possiamo aggiungere che queste condizioni, che allora si son trovate sufficienti, sono anche necessarie. Infatti, se una non fosse soddisfatta, e ciò non pertanto si potesse costruire un triangolo, in tal caso esisterebbe un triangolo nel quale un lato sarebbe uguale alla somma degli altri due, o maggiore. E ciò non può [145] darsi. (¹).

148. Teor. *Il segmento, che unisce un punto d' un lato di un triangolo col vertice opposto, è minore di uno almeno degli altri due lati.*

Dim. Nel triangolo ABC unisco un punto D qualunque del lato BC col vertice A . Dico che AD è minore di uno almeno dei lati AB, AC .



Infatti, gli angoli BDA, ADC sono retti ambidue, e allora AD è minore [144] di ambidue i lati AB, AC . Oppure i due angoli sono disuguali; ma in tal caso uno dei due è ottuso, e allora AD è necessariamente minore [144] di quello dei lati AB, AC che è opposto all'angolo ottuso.

149. Cor. 1º. *In un triangolo isoscele il segmento,*

(¹) Cogliamo l'occasione per far notare come la risoluzione d'un problema possa gettar luce sopra un teorema. Ad es., se non si fosse ancora risoluto il problema del § 110 (e fatte le osservazioni relative), si potrebbe dubitare esserci un teorema più perfetto di quello del § 145, per esempio questo che ciascun lato, anche se aumentato d'un suo quarto, è superato dalla somma degli altri due lati.

che unisce un punto della base col vertice opposto, è minore dei lati eguali; ed il segmento, che unisce un punto d'un prolungamento della base col vertice opposto, è maggiore dei lati eguali. [148].

150. Cor. 2°. *In un triangolo rettangolo od ottusangolo, il segmento che unisce il vertice di uno degli angoli acuti con un punto del lato opposto è minore del lato opposto all'angolo retto od ottuso.* [144, 148].

Relazioni tra elementi di due triangoli.

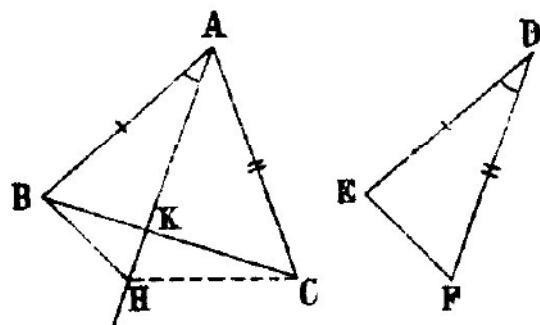
151. Teor. *In due triangoli, se due lati e l'angolo compreso sono rispettivamente uguali, anche gli altri elementi sono rispettivamente uguali, e anche i triangoli sono uguali.*

Dim. La stessa che nel § 114.

152. Teor. *Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali e l'angolo compreso diseguale, i terzi lati sono disuguali, e il maggiore è nel triangolo che ha l'angolo maggiore.*

Dim. Siano i due triangoli $A B C$, $D E F$, e sia in essi $A B \equiv D E$, $A C \equiv D F$ e $C(A)B > F(D)E$. Si tratta di provare che è $B C > E F$.

A tal fine dall'angolo maggiore $C A B$ e dalla parte di $A B$, supposto che sia $A B$ eguale o minore di $A C$, si tagli via [130] un angolo $H A B$ che sia eguale al minore $F(D)E$. Sia K il punto in cui il raggio $A H$ incontra il lato $B C$.



Quando sia $A B \equiv A C$, il segmento $A K$ è minore [149] di ambidue questi lati. Quando poi è $A B < A C$,

allora AK , perchè è minore [148] di uno almeno di questi due lati, esso è certamente minore di AC . Per conseguenza, se sul raggio AK si prende un segmento AH , che sia eguale ad AC , il punto H cade necessariamente fuori del triangolo ABC . Si tirino BH ed HC . (¹).

Intanto, confrontando i triangoli ABH, DEF , troviamo che hanno $AB \equiv DE$, $AH \equiv DF$ (perchè è $AC \equiv DF$), ed $H(A)B \equiv F(D)E$. Per conseguenza [151] è $BH \equiv EF$.

Ora si osservi il triangolo AHC . Essendo in esso $AC \equiv AH$, egli è [106] $A(H)C \equiv H(C)A$. Ma è $B(H)C > A(H)C$ ed $H(C)A > H(C)B$; quindi è $B(H)C > H(C)B$. Per conseguenza [143] nel triangolo BHC egli è $BC > BH$. Ma è $BH \equiv EF$, quindi infine è $BC > EF$.

Così resta dimostrato che, ecc.

153. Teor. *Se due triangoli hanno i lati rispettivamente uguali, anche gli angoli sono rispettivamente uguali, e anche i triangoli sono eguali.*

Dim. Nei triangoli ABC, DEF sia $AB \equiv DE$,

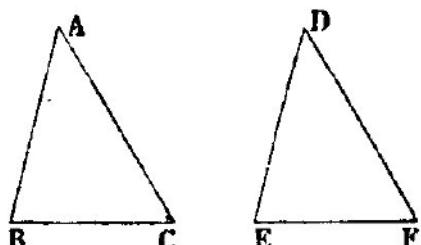
$AC \equiv DF$ e $BC \equiv EF$.

Si deve provare anzitutto che gli angoli sono rispettivamente uguali.

Consideriamo, ad es. [115], i due angoli CAB , FDE . Essi non possono

essere disuguali, perchè in tal caso, essendo $AB \equiv DE$

(¹) Se si volesse dimostrare codesto teorema indipendentemente dal teorema 148, si direbbe: Poichè il lato AC è uguale o maggiore di AB , l'angolo ABC è uguale o maggiore di $B(C)A$. Ma è $A(K)C > A(B)C$; quindi è $A(K)C > K(C)A$, e per conseguenza è $AC > AK$. Ecc.

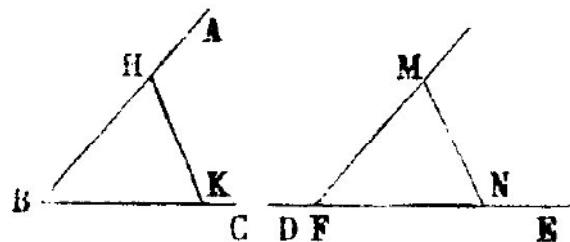


e $AC \equiv DF$, i due lati BC, EF sarebbero disuguali [152], e ciò contro l'ipotesi.

Ma ora i due triangoli, poichè hanno $AB \equiv DE$ $AC \equiv DF$ ed eguali gli angoli $C(A)B, F(D)E$, hanno rispettivamente uguali gli altri angoli [151], ed essi stessi sono eguali tra loro.

154. Oss. Ora possiamo indicare una costruzione, più comoda di quella insegnata nel § 130, per risolvere il problema ivi indicato.

Infatti, se sia ABC l'angolo dato, ed FE il raggio dato, basta prendere sui lati dell'angolo dato due punti H, K ad arbitrio, e poi, preso sulla DE un segmento $FN \equiv BK$, costruire un triangolo MFN , i cui altri lati FM, MN siano eguali rispettivamente ai segmenti BH, HK . E si noti che la costruzione di così fatto triangolo è sempre possibile [110], perchè i tre segmenti BK, BH, HK , ai quali devono essere uguali i lati del triangolo da costruire, sodisfanno [145] appunto alle condizioni che ciascuno sia minore della somma degli altri due.



L'angolo MFN , costruito in questo modo, e l'angolo dato ABC sono poi eguali, perchè [153] opposti a lati eguali in triangoli, che hanno per costruzione i lati rispettivamente uguali.

155. Teor. *Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali e il terzo lato diseguale, al lato maggiore è opposto angolo maggiore.*

Dim. Nei triangoli ABC, DEF sia $AB \equiv DE$,

$AC \equiv DF$ e $BC > EF$. Dico che l'angolo in A è maggiore dell'angolo in D .

Infatti, non si può ammettere che questi due angoli siano eguali, giacchè allora, essendo nei due triangoli due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali, sarebbe [151] $BC \equiv EF$, e ciò contro l'ipotesi.

Nè l'angolo in A può essere minore dell'angolo in D , perchè ne seguirebbe [152], pure contrariamente all'ipotesi, essere $BC < EF$. L'angolo in A è quindi maggiore dell'angolo in D , come d.d.

156. Teor. *Se due triangoli hanno un lato e due angoli ordinatamente⁽¹⁾ uguali, anche gli altri elementi sono ordinatamente uguali, e anche i triangoli sono uguali.*

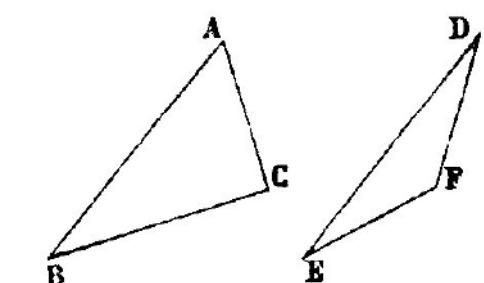
Dim. Nella dimostrazione bisogna distinguere due casi, perchè i due angoli, che si accennano nell'ipotesi, o sono entrambi adiacenti al lato dato, oppure uno è adiacente e l'altro è opposto.

Nei triangoli ABC , DEF sia $BC \equiv EF$,

$A(B)C \equiv D(E)F$, e poi sia o $B(C)A \equiv E(F)D$, oppure $C(A)B \equiv F(D)E$.

È chiaro che tutto sta a provare l'egualanza dei due lati AB , DE , poichè così ci si riduce al caso, in cui i due triangoli hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali.

(¹) Delle cose si dicono *ordinatamente* (invece di *rispettivamente*) uguali ad altrettante, quando l'egualanza rispettiva ha luogo anche tenendo conto dell'ordine in cui le cose sono disposte.



Supponiamo, se può essere, che AB e DE siano disuguali. Uno dei due sarà il maggiore, supponiamo sia $AB > DE$. Allora, fatto $BH \equiv DE$, si tiri CH , che cade necessariamente entro l'angolo BCA .

Intanto, poichè nei due triangoli HBC , DEF è $BC \equiv EF$, $HB \equiv DE$ ed $H(B)C \equiv D(E)F$, è [151] anche $B(C)H \equiv E(F)D$ e $C(H)B \equiv F(D)E$.

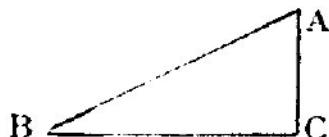
Ora, nel primo caso, essendo $E(F)D \equiv B(C)A$, si conchiude essere $B(C)H \equiv B(C)A$; il che è falso.

Nel secondo caso, essendo $C(A)B \equiv F(D)E$, si conchiude essere $C(H)B \equiv C(A)B$. Ma ciò è pur falso, perchè l'angolo esterno di un triangolo non è uguale, ma [133] maggiore di ciascuno dei due interni opposti. È dunque necessariamente $AB \equiv DE$; e così [151] anche rimane dimostrato per entrambi i casi che, *se ecc.*

157. Teor. *Se due triangoli rettangoli hanno l'ipotenusa e un cateto rispettivamente uguali, anche gli altri elementi sono rispettivamente uguali, e anche i triangoli sono eguali.*

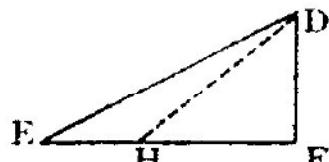
Dim. Nei triangoli ABC , DEF , rettangoli in C ed F , sia $AB \equiv DE$ ed $AC \equiv DF$.

Dico che anche gli altri elementi sono rispettivamente uguali e che anche i triangoli sono eguali.



Manifestamente basta [151] provare che sono uguali i lati BC , EF .

Ammettiamo che questi lati non siano uguali, e che sia, ad es., $BC \equiv HF$. Si tiri DH .



Se si confrontano i triangoli ABC , DHF , si trova che hanno $AC \equiv DF$, $BC \equiv HF$ ed eguali, perchè retti, gli angoli compresi. Per conseguenza [151] è $AB \equiv DH$. Ma per ipotesi è $AB \equiv DE$;

quindi è anche $DE \equiv DH$. Ma ciò non può essere. [150].

Conchiudiamo che è necessariamente $BC \equiv EF$; eppero resta provato [151] che, ecc.

158. Teor. *Se in due triangoli rettangoli le ipotenuse sono uguali, e un cateto dell'uno è maggiore di un cateto del secondo, l'altro cateto del primo triangolo è minore del rimanente cateto del secondo.*

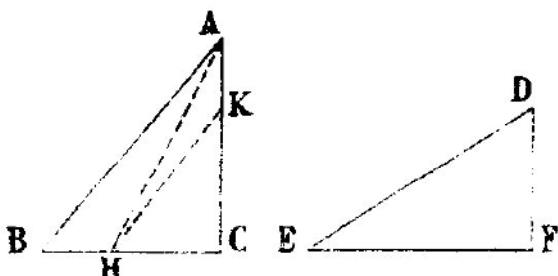
Dim. Nei triangoli ABC , DEF , rettangoli in C ed in F , sia $AB \equiv DE$ ed $AC > DF$. Dico essere $BC < EF$.

Non può intanto essere $BC \equiv EF$, perchè allora i due triangoli rettangoli, essendo l'ipotenusa ed un cateto rispettivamente uguali, avrebbero [157] $AC \equiv DF$, e ciò contro l'ipotesi.

Ma non può neanche essere $BC > EF$. Infatti ammesso che sia $BC > EF$, e che sia $HC \equiv EF$, si faccia $KC \equiv DF$, e si tirino AH e KH .

Intanto, poichè nei triangoli KHC , DEF è $KC \equiv DF$, $HC \equiv EF$ e sono uguali gli angoli in C ed in F , conchiudiamo [151] essere $KH \equiv DE$. Ma per ipotesi è $DE \equiv AB$, quindi è anche $AB \equiv KH$.

Ora noi sappiamo [150] che in un triangolo rettangolo il segmento, che unisce il vertice di un angolo acuto con un punto del lato opposto, è minore dell'ipotenusa. Perciò dal triangolo ABC abbiamo essere $AH < AB$; e dal triangolo AHC abbiamo $KH < AH$. Per conseguenza è $KH < AB$. Ma



avevamo trovato essere $KH \equiv AB$. Essendo caduti in contraddizione, conchiudiamo che non può neanche essere $BC > EF$. Così resta provato che è $BC < EF$, ed in generale che, *se ecc.*

Perpendicolari ed oblique.

159. Sappiamo [128] che per un punto dato fuori di una retta si può sempre condurre una retta, che sia perpendicolare alla retta data. Sappiamo di più che la perpendicolare è unica, che cioè ogni altra retta, che passi per il punto dato e incontri la retta data, è obliqua a questa retta, fa con questa angoli disuguali.

Il segmento della perpendicolare suaccennata, compreso tra il punto e la retta, si suol chiamare, senz'altro, *la perpendicolare tirata dal punto alla retta*; e l'estremità, che il segmento ha sulla retta, è detto il *piede* della perpendicolare.

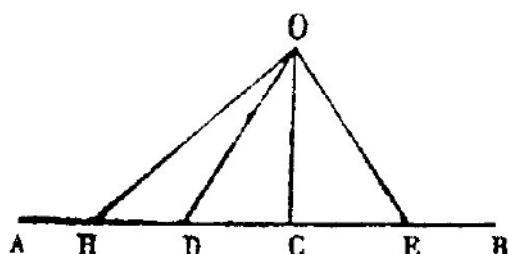
Così per *obliqua condotta da un punto a una retta* s'intende quel segmento di una obliqua, che è compreso tra il punto e la retta.

160. Il segmento, compreso tra il piede della perpendicolare e quello di una obliqua, condotte da uno stesso punto a una medesima retta, si dice *proiezione dell'obliqua sulla retta*.

161. E più generalmente s'intende per *proiezione di un segmento dato sopra una retta data* il segmento compreso tra i piedi delle perpendicolari calate sulla retta dalle estremità del segmento.

162. Teor. *La perpendicolare, tirata da un punto a una retta, è minore d'ogni obliqua; se due oblique hanno proiezioni eguali, esse sono eguali; se hanno proiezioni diseguali, quella che ha proiezione maggiore è maggiore.*

Dim. Da un punto O siano condotte a una retta AB la perpendicolare OC e un'obliqua qualsivoglia OD . Poi fatto $CE \equiv CD$, si tiri OE . Infine, preso un segmento $CH > CE$, si tiri OH . Si deve



provare che la perpendicolare OC è minore dell'obliqua OD ; che le due oblique OD , OE , che hanno proiezioni eguali CD, CE , sono eguali; e

che l'obliqua OH è maggiore dell'obliqua OE , perchè CH , proiezione della prima, è maggiore di CE , che è la proiezione della seconda.

Per la prima parte del teorema basta rammentare che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore dei cateti [144]; egli è perciò $OC < OD$.

Per la seconda parte, considero i triangoli OCD , OCE . Essendo OC comune, $CD \equiv CE$ e $D(C)O \equiv O(C)E$, è anche [151] $OD \equiv OE$.

Per provare infine che è $OH > OE$, dal maggior segmento CH si tagli la parte CD eguale al minore CE , e si tiri OD . Le due oblique OD , OE , come quelle che hanno proiezioni eguali, sono eguali. Ed ora, osservando il triangolo isoscele ODE , concludiamo [149] essere $OH > OE$, come d. d.

163. Un segmento, che sia eguale alla perpendicolare calata da un punto sopra una retta, si dice *distanza del punto della retta*. (In altre parole è soltanto la *lunghezza* [4] della perpendicolare che si vuol considerare, non la *posizione*, quando codesta perpendicolare si chiama *distanza del punto dalla retta*).

164. La retta perpendicolare ad un segmento nel punto di mezzo si dice *asse del segmento*.

I punti estremi di un segmento si dicono *simmetrici* rispetto all'asse del segmento.

165. Teor. *Il luogo dei punti equidistanti da due punti dati è l'asse del segmento che unisce i due punti.*

Dim. Siano A e B due punti dati, C il punto di mezzo del segmento AB , e DE la retta perpendicolare ad AB nel punto C . Si deve provare [98] che ogni punto della retta DE è equidistante da A e B ; e che qualunque punto, che non sia sulla DE , ha dai punti A e B distanze disuguali.

1°. Sulla DE si prenda ad arbitrio un punto F , e lo si unisca con A e con B . Le due oblique FA , FB , perché hanno proiezioni eguali AC , CB , sono eguali.

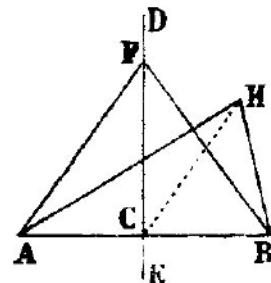
2°. Ora si prenda ad arbitrio un punto H fuori della retta DE , e lo si unisca coi punti A , B e C . Si osservi intanto che, essendo H fuori della DE , la retta CH non può coincidere con la perpendicolare DE , eppero essa fa con la AB angoli disuguali. Così i due triangoli HCA , HCB hanno CH in comune, $AC \equiv CB$, ma l'angolo compreso disuguale; quindi [152] i lati HA , HB sono disuguali.

In conclusione *tutti e unicamente* i punti, che giacciono sulla DE , hanno la proprietà di aver distanze uguali dai punti A e B .

166. Cor. 1°. *La perpendicolare, tirata ad un segmento da un punto che sia equidistante dalle estremità del segmento, dimezza il segmento.* (¹).

Infatti, se non lo dimezzasse, allora, dappoichè

(¹) In altre parole: *la perpendicolare, tirata alla base d'un triangolo isoscele dal vertice opposto, dimezza la base.*



l'asse d'un segmento passa per tutti i punti equidistanti dalle estremità del segmento [165], ci sarebbero due perpendicolari distinte condotte ad una stessa retta da uno stesso punto, e ciò non può essere. [128].

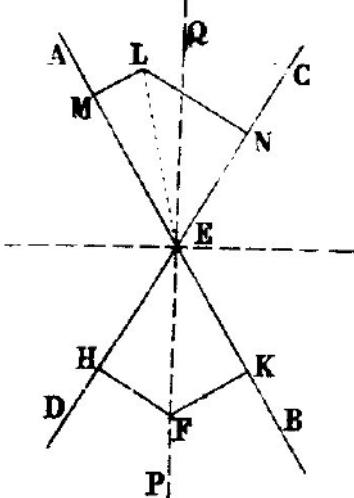
167. Cor. 2°. *La retta, che passa per due punti ciascuno dei quali è equidistante dalle estremità d'un segmento, è l'asse del segmento.*

Infatti l'asse d'un segmento passa per tutti i punti equidistanti dalle estremità del segmento [165], e due punti bastano [28, 3°] ad individuare una retta.

168. Teor. *Il luogo dei punti equidistanti da due rette che si tagliano è composto dalle bisettrici degli angoli compresi dalle rette stesse.*

Dim. Siano le rette AB, CD , che si tagliano nel punto E .

1°. Preso un punto sopra una delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette, ad es. il punto F , da questo punto si tirino le FH, FK perpendicolarmente alle rette stesse, e si considerino i triangoli EFH, EFK . Poichè in essi il lato EF è comune, gli angoli in H e K sono retti, e per ipotesi è $F(E)H \equiv K(E)F$, è anche [157] $FH \equiv FK$.



2°. Si prenda ora ad arbitrio, fuori delle bisettrici, un punto L ; si tirino le LM, LN perpendicolari alle rette date, e si unisca L con E . Osservando i due triangoli rettangoli LEM, LEN , si vede che, poichè hanno l'ipotenusa in comune, se avessero eguali i cateti LM, LN , sarebbero eguali [157] gli angoli MEL, LEN , e ciò contro l'ipotesi che L

non sia su alcuna delle bisettrici. Le distanze $L M$, $L N$ sono dunque disuguali; e così resta dimostrato che, ecc.

169. Oss. Due bisettrici consecutive qualunque sono perpendicolari fra loro; infatti l'angolo da esse compreso, perchè composto delle metà di due angoli adiacenti, è retto.

Per conseguenza [86] le bisettrici sono a due a due per diritto, e così in tutte e quattro formano due rette perpendicolari tra loro.

Poligoni.

170. Dati in un certo ordine n punti A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_{n-1} , A_n , talmente che tre consecutivi qualunque ⁽¹⁾ non siano allineati, si unisca mediante segmenti ciascun punto col seguente e l'ultimo punto col primo; così si forma una figura che si chiama *poligono*.

I punti dati si dicono i *vertici* del poligono; i segmenti sopra indicati si dicono i *lati*.

Un poligono si indica nominando successivamente i vertici nell'ordine in cui sono dati o nell'ordine inverso. Si può anche cominciare da un vertice qualunque; in tal caso l'ultimo ed il primo si considerano come due vertici consecutivi.

Se ci sono lati, i quali abbiano in comune un punto che non sia un vertice, il poligono si chiama *intrecciato*. Noi escludiamo poligoni così fatti dalle nostre considerazioni.

Se tutti i vertici e quindi anche tutti i lati di un poligono giacciono in uno stesso piano, il poligono si dice *piano*; altrimenti è *gocco*.

⁽¹⁾ Consideriamo come consecutivi anche i tre A_{n-1} , A_n , A_1 , ed i tre A_n , A_1 , A_2 .

Un poligono piano si dice *convesso* se, rispetto alla retta a cui appartiene un suo lato qualunque, tutti gli altri lati cadono da una stessa banda.

Rammentiamo che nella *Planimetria* non si considerano altro che poligoni piani; e quando diremo di qualche proprietà di un poligono in generale, intendremo sempre che il poligono sia convesso.

Un poligono piano convesso è una linea *chiusa*, dalla quale il piano resta diviso in due parti. La parte finita si dice *superficie del poligono*; ed ogni suo punto (che non sia però su nessun lato) si dice *interno* al poligono; qualunque punto dell'altra parte del piano si dice *esterno* al poligono.

Spesso la superficie di un poligono si accenna dicendola semplicemente *poligono*, senz' altro.

La linea composta dai lati di un poligono si dice *contorno* del poligono; ed il segmento, che si ottiene sommando i lati di un poligono, si dice *perimetro del poligono*.

In un poligono convesso, gli angoli convessi, compresi ciascuno da due lati consecutivi del poligono, si dicono, senz' altro, gli *angoli del poligono*. Gli adiacenti degli angoli di un poligono si dicono *angoli esterni* del poligono.

Ciascun angolo di un poligono si dice *compresso* dai lati che lo formano, e *adiacente* a ciascuno di questi lati.

Quanti sono i vertici di un poligono, tanti sono i lati, tanti gli angoli.

Secondo che il numero dei lati è 3, 4, 5, 6, ... 8, ... 10, ... 12, ... 15, ..., il poligono si dice *triangolo*, *quadrangolo*, *pentagono*, *esagono*, ... *ottagono*, ... *decagono*, ... *dodecagono*, ... *pentedecagono* ...

Un poligono, che abbia tutti i lati eguali tra loro, si dice *equilatero*; se ha tutti gli angoli eguali tra

loro, si dice *equiangolo*; infine, se ha ad un tempo tutti i lati eguali e tutti gli angoli eguali, il poligono si dice *regolare*.

171. Sopprimendo un lato di un poligono, resta una linea che si dice *spezzata*. Le estremità del lato soppresso si dicono *estremità della spezzata*; ma si possono dire anch'esse *vertici* della spezzata. Allora in una spezzata il numero dei vertici è di una unità maggiore del numero dei lati. Del resto una spezzata può essere *piana* o *gobba*, *intrecciata* o no, *convessa* o non convessa.

172. Qualunque segmento, che abbia le sue estremità sul contorno di una figura, e non giaccia interamente sul contorno di essa, si dice *corda* della figura.

In un poligono una corda, che abbia le sue estremità in due vertici non successivi, si dice *diagonale* del poligono.

173. Anticipiamo la spiegazione di alcune altre denominazioni, a fine di poterne far uso negli esercizi.

In un triangolo la corda, che unisce un vertice col punto di mezzo del lato opposto, si dice *mediana*, corrispondente a quel vertice o a quel lato. In ogni triangolo ci sono tre mediane.

In un triangolo la corda, che dimezza un angolo, si chiama *bisettrice*, corrispondente a quell'angolo, o al lato opposto, sul quale finisce. In ogni triangolo vi sono tre bisettrici.

In ogni triangolo la perpendicolare, tirata da un vertice sul lato opposto (distanza di quel vertice da quel lato) si dice *altezza* del triangolo, corrispondente a quel vertice, o a quel lato. In ogni triangolo vi sono tre altezze.

Per brevità, talvolta, si accenna un angolo di un

triangolo con la sola lettera maiuscola, che indica il vertice; e il lato opposto con la stessa lettera minuscola.

Dinoteremo, rispettivamente, la mediana, la bisettrice e l'altezza uscenti dal vertice A (corrispondenti al lato a) coi simboli m_a , b_a , h_a ; e con p il perimetro.

Talvolta in un triangolo isoscele si dice vertice, semplicemente, il vertice opposto alla base (b). E per lato (l), senz'altro, si deve intendere uno dei lati eguali.

174. Teor. *Una retta non può avere in comune col contorno di un poligono convesso più di due punti.*

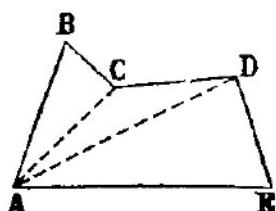
Dim. Infatti, se la retta avesse in comune col contorno un terzo punto, uno dei tre punti cadrebbe necessariamente tra gli altri due, e allora la retta a cui appartiene il lato che passa per quel punto lascerebbe gli altri due punti da bande opposte; e ciò contro l'ipotesi che il poligono sia convesso.

175. Teor. *Ciascun lato di un poligono qualunque è minore della somma di tutti gli altri.*

Dim. Sia un poligono qualunque $ACBDE$. Dico che uno qualunque dei lati, ad es. il lato AB , è minore della somma di tutti gli altri. Perciò unisco il vertice A con tutti gli altri vertici del poligono, ed osservo che, essendo [145] nel triangolo ABC , $AB < BC + AC$, e nel triangolo ACD , $AC < CD + AD$, egli è $AB < BC + CD + AD$. Infine, essendo nel triangolo ADE , $AD < DE + EA$, abbiamo:

$$AB < BC + CD + DE + EA.$$

176. Cor. *Il perimetro d'una spezzata è maggiore del segmento che ne unisce le estremità.*



177. Teor. *Un raggio, uscente da un punto interno di un poligono, incontra il contorno del poligono.*

Dim. Infatti, unendo quel punto con tutti i vertici del poligono, si trova che quel raggio in uno dei triangoli risultanti incontra [53] il lato opposto al vertice ond'esce, e quel lato è parte del contorno del poligono.

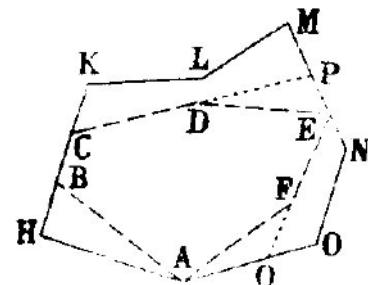
178. In un piano un poligono si dice *inviluppato* da un altro poligono, se esso è una parte di questo poligono (o, in altre parole, se nessun punto del contorno del primo poligono è esterno al secondo).

179. Teor. *Il perimetro di un poligono convesso è minore del perimetro di qualunque altro poligono che lo inviluppi.*

Dim. Sia il poligono convesso $A B C D E F$, e $A H K L M N O$ un altro poligono che lo inviluppa. Voglio provare che il perimetro del primo è minore del perimetro del secondo.

A tal fine, perchè i vertici D ed F del primo poligono cadono nell' interno del secondo, prolunga $C D$ ed $E F$ fino ad incontrare in P e Q il contorno dell' inviluppante. Ed ora, essendo [145] :

$D P + P E > D E$ ed $F Q + Q A > F A$,
il perimetro del poligono $A B C P E Q$ è maggiore del perimetro del poligono $A B C D E F$. E perchè la spezzata $C K L M P$ è maggiore del segmento $C P$ col quale ha in comune le estremità, e la spezzata $E N O Q$ è maggiore di $E Q$, ed è $A H + H B > A B$, il perimetro del poligono $A H K L M N O$ è maggiore del perimetro del poligono $A B C P E Q$. Per conseguenza il



perimetro del poligono $A H K L M N O$ è maggiore del perimetro del poligono $A B C D E F$.

180. Cor. 1°. *Se due poligoni, uno dei quali inviluppa l'altro, hanno parte del contorno in comune, il teorema precedente ha luogo anche prescindendo dalla parte del contorno che è comune.*

181. Cor. 2°. *La somma dei segmenti, che uniscono un punto preso nell'interno di un triangolo con le estremità d'un lato, è minore della somma degli altri due lati. [180].*

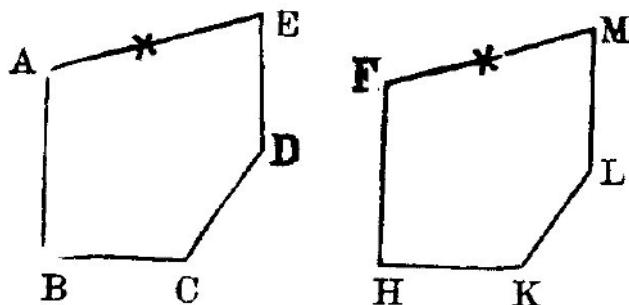
182. Teor. *Se in due poligoni d'egual numero di lati, prescindendo da un lato e dagli angoli ad esso adiacenti, sui quali non si fa nessuna ipotesi, tutti i lati e gli angoli sono ordinatamente uguali, anche quel lato e quegli angoli sono ordinatamente uguali, ed anche i poligoni sono eguali.*

Dim. Nei poligoni d'egual numero di lati $A B C D E$, $F H K L M$, prescindendo dai lati $A E$, $F M$ e dagli angoli ad essi adiacenti (sui quali non si fa nessuna ipotesi), i lati e gli angoli siano ordinatamente ⁽¹⁾ uguali.

(1) Dicendo che i lati e gli angoli di due poligoni d'egual numero di lati sono *ordinatamente* uguali, s'intende dire che l'egualanza rispettiva degli elementi dei poligoni ha luogo anche tenuto conto dell'ordine in cui gli elementi si succedono, dimodochè due lati consecutivi qualunque d'un poligono sono rispettivamente uguali a due consecutivi dell'altro, e sono eguali gli angoli compresi.

Due poligoni d'egual numero di lati potrebbero avere tutti gli elementi *rispettivamente* uguali e non essere uguali. Ad es., se nel poligono $A B C D E$, tirata la diagonale $A D$, sia $D(A)B \equiv C(D)A$, ribaltando il poligono $A B C D$ in modo che si scambino di posto i vertici A e D , si ottiene un poligono che ha tutti gli stessi lati ed angoli del primitivo e che non è uguale (in generale) al primitivo.

Sovrapponiamo l'angolo B all'angolo H in modo che il lato BA cada sul raggio HF . Essendo $BA \equiv HF$, il punto A cadrà in F . Essendo $A(B)C \equiv F(H)K$, il lato BC cadrà sul raggio HK . Essendo $BC \equiv HK$, il punto C cadrà in K . Così, continuando, si trova che i poligoni coincidono compiutamente; epperò resta provato che, ecc.



Esercizi.

(**Avv.** I numeri, che sono scritti in fine di taluni esercizi, accennano le proposizioni del testo sulle quali *principalmente* si fonda (od almeno si può fondare) la dimostrazione del teorema, o la risoluzione del problema. Ma quando i detti numeri sono in quel carattere stesso, che si è usato per numerare gli esercizi, in tal caso l'accenno si riferisce a precedente esercizio. Quando i numeri sono più d'uno, essi accennano le proposizioni ausiliarie in quell'ordine in cui esse occorrono).

1. Se due rette, che dividono due angoli adiacenti, sono perpendicolari tra loro, e una dimezza uno degli angoli, l'altra è anch'essa la bisettrice dell'altro angolo. — Se le bisettrici di due angoli consecutivi sono perpendicolari tra loro, i lati non comuni dei due angoli sono per diritto.
2. Se degli angoli, formati da quattro raggi uscenti da uno stesso punto, il primo è uguale al terzo e il secondo al quarto, i quattro raggi formano due rette. Se dei quattro angoli sopra accennati il primo è uguale al terzo, le bisettrici degli altri due sono per diritto. [86].
3. Se le diagonali di un quadrangolo si dimezzano scambievolmente, il quadrangolo ha i lati opposti eguali e gli angoli opposti eguali.
4. Se un quadrangolo ha i lati opposti eguali, anche gli an-

goli opposti sono eguali, e le diagonali si dimezzano scambievolmente.

5. Se le diagonali di un quadrangolo si dimezzano scambievolmente e sono eguali, il quadrangolo è equiangolo. — Se le diagonali si dimezzano scambievolmente e sono perpendicolari tra loro, il quadrangolo è equilatero.
6. Se le diagonali di un quadrangolo sono eguali e si dimezzano scambievolmente ad angoli retti, il quadrangolo è regolare.
7. In un triangolo il piede di una altezza si trova sul lato sul quale è calata, o sul prolungamento di questo lato, secondo che ambidue gli angoli adiacenti al lato sono acuti, oppure uno è acuto e l'altro ottuso. (Dal teor. 133, indirettamente).
8. L'angolo, compreso dai segmenti tirati alle estremità di un lato di un triangolo da un punto preso nell'interno del triangolo, è maggiore dell'angolo compreso dagli altri due lati del triangolo. (Si prolunghi ... [133]).
9. Se un poligono ha i vertici in un cerchio (cioè è *iscritto* in un cerchio) ed è equilatero, esso è anche equiangolo.
10. Iscrivere in un cerchio dato un poligono regolare di 8, o di 16, o di 32 lati
11. Se un quadrangolo è iscritto in un cerchio, la somma di due angoli opposti è uguale alla somma degli altri due. [116].
12. Secondo che una mediana è maggiore, uguale o minore della metà del lato a cui è condotta, l'angolo opposto a questo lato è minore, uguale, o maggiore della somma degli altri due. E reciprocamente. [141, 116].
13. Due punti A, B sono situati da una stessa banda di una retta CD ; e la retta AB incontra la CD in E . Si dimostri che la differenza delle distanze del punto E dai punti A, B è maggiore della differenza delle distanze di qualsivoglia altro punto della CD dai medesimi punti A e B . [146].
14. Dimostrare l'eguaglianza di due triangoli che hanno i lati rispettivamente uguali, e ciò fondandosi unicamente sui teoremi 114 e 116. (Si dispongano i due triangoli così che abbiano un lato in comune e cadano da bande opposte di questo lato. Bisogna poi unire i vertici opposti al lato comune, e distinguere tre casi).

15. Se due triangoli hanno un lato e le altezze corrispondenti agli altri due lati rispettivamente uguali, essi sono eguali.
16. Se due triangoli isosceli hanno gli angoli alla base rispettivamente uguali, ed eguali le altezze corrispondenti alle basi, o quelle corrispondenti ai lati eguali, essi sono eguali.
17. Se due triangoli isosceli hanno l'angolo al vertice e la mediana uscente dal vertice rispettivamente uguali, essi sono eguali.
18. Se due triangoli hanno due lati e l'angolo opposto a uno di questi rispettivamente uguali, gli angoli opposti all'altro lato o sono eguali, o sono supplementari. (Mediante sovrapposizione).
19. Dimostrare, indipendentemente dal teor. 145, che ciascun lato di un triangolo è maggiore della differenza tra gli altri due. (Dal maggiore dei due lati si taglia una parte uguale all'altro; ecc., [139, 125, 143]).
20. Se due triangoli $A B C, D E F$ hanno eguali i lati $B C, E F$ ed eguali gli angoli opposti, e l'angolo in B è maggiore dell'angolo in E , l'angolo in C è minore di quello in F . (Mediante sovrapposizione, e provando che il vertice A non può cadere dentro del triangolo $D E F$. [8, 133]).
21. Se in due poligoni d'egual numero di lati, prescindendo da un angolo e dai lati che lo comprendono, sui quali non si fa nessuna ipotesi, i lati e gli angoli sono ordinatamente uguali, anche quell'angolo e quei lati sono ordinatamente uguali. (Si uniscano tra loro, in ciascuno dei poligoni, i vertici attigui a quello dell'angolo di cui si vuol provare l'eguaglianza. Così si può trar profitto dal teorema 182).
22. Se in due poligoni d'egual numero di lati, prescindendo da tre angoli consecutivi, sui quali non si fa nessuna ipotesi, i lati e gli angoli sono ordinatamente uguali, anche quei tre angoli sono ordinatamente uguali. (Si uniscano tra loro, in ciascuno dei poligoni, i vertici del primo e del terzo dei tre angoli. [182, 156]).
23. Se si unisce un punto qualunque O con tutti i vertici di un poligono, e si prolunga ciascun segmento dalla parte del punto O di una parte uguale a se stesso, e si uniscono poi

ordinatamente le estremità dei prolungamenti, si ottiene un poligono eguale al primitivo.

24. Se da due punti partono dei segmenti eguali, ciascuno a ciascuno, e formanti, tra loro, angoli ordinatamente uguali, e si uniscono ordinatamente da una parte e dall'altra le estremità di quei segmenti, si ottengono due poligoni eguali.
25. Se in due poligoni eguali, divisi ad arbitrio i lati di un poligono, ciascuno in due parti, si taglano nello stesso modo i lati dell' altro poligono, e si unisce in ciascuno dei poligoni ciascuno dei punti di divisione con quello che divide il lato seguente, si ottengono due poligoni eguali. Il teorema vale anche se uno o più lati vengono divisi in tre parti; e se su qualche lato non si fa cadere nessun vertice del nuovo poligono; e anche se si fa cader qualche vertice del poligono iscritto in un vertice del poligono dato.
26. Se sui lati di un poligono regolare si prendono, partendo dai vertici, dei segmenti tutti eguali tra loro, e l'estremità di ciascun segmento si unisce con quella del segmento susseguente, si ottiene un poligono regolare.
27. Se un poligono regolare ha più di quattro lati, e si uniscono a due a due i vertici che sono separati da un solo vertice, si ottengono rette, che, intersecandosi, formano un nuovo poligono regolare.
28. Se una spezzata a zig-zag ha lati eguali ed angoli eguali, i punti di mezzo dei lati sono allineati. [89].
29. Due triangoli isosceli, se hanno la base e l'angolo al vertice rispettivamente uguali, sono eguali. Se le basi sono eguali e gli angoli disuguali, dove l'angolo è minore il lato è maggiore. [8].
30. Se due rette fanno con una terza angoli *alterni* (*) eguali, od angoli *corrispondenti* eguali, esse non hanno nessun punto in comune. (Dal punto medio di quel segmento della terza retta, che è compreso tra le due prime, si calino le perpendicolari su queste due rette. Si provi [89] che le due perpendicolari sono per diritto. [137]).

(*) Il significato delle parole *alterno* e *corrispondente* è dichiarato al § 241.

31. Se ciascuna di due rette taglia i lati di un angolo in punti equidistanti dal vertice, le due rette non possono incontrarsi. (Si dimezzi l'angolo. [137]).
32. Se si prolunga, di là dal vertice, uno dei lati eguali di un triangolo isoscele, e si dimezza l'angolo esterno risultante, la bisettrice non può incontrare la retta a cui appartiene la base del triangolo. (Si dimezzi anche l'angolo al vertice. [137]).
33. Qualunque retta perpendicolare alla bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele (in un punto preso nell'interno del triangolo) taglia i lati eguali in punti equidistanti dalla base del triangolo. [137, 54].
34. Ciascun lato di un triangolo è minore del semiperimetro del triangolo. [145].
35. La somma dei segmenti tirati ai vertici di un triangolo da un punto situato nell'interno del triangolo è minore del perimetro del triangolo, ed è maggiore del semiperimetro. [181, 145].
36. La somma delle diagonali di un quadrangolo è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro del quadrangolo.
37. La somma delle altezze di un triangolo è minore del perimetro del triangolo.
38. Se da un punto M di un lato di un angolo acuto si cala la perpendicolare MN sull'altro lato, poi da N la NP perpendicolare sul primo lato, e da P nuovamente la perpendicolare ecc. e così via indefinitamente, un punto, che percorra la spezzata $MNP\dots$, si avvicina sempre più al vertice, senza poter mai arrivarvi. [162].
39. Se due punti si muovono sui lati di un angolo retto od ottuso, allontanandosi dal vertice, la loro distanza diventa sempre più grande. Può accadere il contrario, se l'angolo è acuto.
40. Tirare tra i lati di un angolo dato un segmento in modo che sia dimezzato da una data corda dell'angolo. [117, 127].
41. Se in un triangolo isoscele per le estremità della base si tirano due rette che si seghino in un punto della mediana corrispondente alla base, queste due rette incontrano i lati eguali in due punti che sono equidistanti dalla base del triangolo.
42. Se più segmenti posti sopra una stessa retta ed aventi il

punto di mezzo in comune sono basi di triangoli isosceli, i vertici di codesti triangoli, che sono opposti alle basi, si trovano sopra una stessa retta.

43. Se sopra i lati di un angolo si prendono, partendo dal vertice, due segmenti eguali AB, AC , e consecutivamente altri due segmenti eguali BD, CE , e tirati i segmenti CD, BE , si unisce il loro punto d'intersezione col vertice dell'angolo dato, l'angolo viene così diviso per metà.
44. In un triangolo isoscele le mediane s'incontrano in uno stesso punto. [43].
45. Se, diviso in due ad arbitrio un lato di un triangolo equilatero, si taglano nello stesso modo gli altri lati, e ciascun punto di divisione si unisce col vertice opposto, si ottengono tre rette, che, intersecandosi, formano un triangolo equilatero.
46. Sia $ABCD$ un quadrangolo regolare [6]. Sul lati AB, BC, CD, DA si prendano quattro segmenti eguali AE, BF, CH, DK , e si tirino le rette AH, BK, CE, DF . Queste, incontrandosi, formano un quadrangolo regolare.
47. Se la bisettrice di un angolo di un triangolo dimezza il lato opposto, i lati dell'angolo dimezzato sono eguali. (Si prolunghi la bisettrice di là dal lato dimezzato di un segmento eguale alla bisettrice. [142]).
48. Le bisettrici degli angoli di un triangolo s'incontrano in uno stesso punto. (Tirate due bisettrici, si prova che il punto d'incontro è equidistante dai lati del triangolo. Si unisce questo punto col terzo vertice, e si prova che questa retta è la terza bisettrice).
49. Dimezzare un angolo dato senza adoperare il vertice dell'angolo. (Si tirino due secanti... È una applicazione del precedente esercizio).
50. Le bisettrici degli angoli di un triangolo equilatero formano nel punto d'incontro tre angoli eguali.
51. Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero, e un esagono regolare. (Preso un triangolo equilatero qualunque, se ne dimezzino gli angoli [48], poi si costruiscano nel centro del cerchio angoli eguali a quelli compresi dalle bisettrici).
52. Dividere un angolo retto in tre parti eguali. (Se da uno degli angoli compresi dalle bisettrici di un triangolo equi-

latero si toglie un retto, resta un angolo che è un terzo di retto).

53. Se per le estremità e per il punto di mezzo di un segmento si tirano tre perpendicolari al segmento, qualunque punto della perpendicolare intermedia è equidistante dalle altre due.
54. Se due punti A, B sono situati da una stessa banda di una retta data, ed A', B' sono i punti simmetrici di A, B rispetto alla retta stessa, unendo un punto O qualunque di codesta retta coi quattro punti, si ottengono due angoli $AOB, A'OB'$, che sono eguali.
55. Riferendosi al precedente esercizio, dimostrare che è $AB \equiv A'B', AB' \equiv A'B$, e che questi due ultimi segmenti si segano sulla retta data. (Si uniscano i punti A ed A' con quello in cui BB' sega la retta).
56. Dimostrare che, se si prendono sui due segmenti $AB, A'B'$ indicati nell'esercizio 54, due segmenti eguali $AM, A'M'$, i punti M ed M' sono simmetrici rispetto alla retta data.
57. Dimostrare che se la retta, che passa per i punti A e B , indicati nell'esercizio 54, incontra la retta ivi stesso accennata, anche la retta $A'B'$ passa per quel punto.
58. Se si trovano i punti, che sono simmetrici dei vertici di un poligono rispetto a una retta, e si uniscono quei punti ordinatamente tra loro, si ottiene un poligono eguale al dato.
59. Due punti simmetrici rispetto a una retta data AB sono equidistanti da una retta qualunque che sia perpendicolare ad AB ; e anche i piedi delle perpendicolari sono simmetrici rispetto a codesta retta.
60. Costruire col solo compasso il punto che è simmetrico di un'altro rispetto alla retta che passa per due altri punti dati.
61. Come si può riconoscere, col mezzo del solo compasso, se tre punti dati sono allineati? (Si costruiscano due punti simmetrici rispetto alla retta che passa per due dei dati. Ecc.).
62. Come si può riconoscere, per mezzo del solo compasso, se la retta che passa per due dati punti A e B è perpendicolare alla retta che passa per due punti dati C e D ? (Si trova il punto E simmetrico di A rispetto alla retta CD ; poi [61]).

63. Data una retta e due punti da una stessa banda di essa, trovare sulla retta un punto tale che i segmenti, che lo uniscono coi punti dati, formino con la retta angoli eguali. (Si costruisce il punto, che è simmetrico di uno dei dati rispetto alla retta data).
64. Dimostrare che la somma dei due segmenti, che risolvono il problema precedente, è minore della somma dei segmenti tirati dai due punti a qualsivoglia altro punto della retta. (Si unisce il nuovo punto con quello simmetrico di uno dei dati, che si è trovato per risolvere il problema. [145]).
65. Unire due punti, dati fra i lati di un angolo, con una spezzata trilatera, che abbia i vertici sui lati dell'angolo dato, e sia tale che ciascun lato di codesto angolo formi angoli eguali con quei lati della spezzata che lo incontrano.
66. Dato un angolo acuto e un punto A fra i lati dell'angolo, trovare su questi lati due punti B e C tali che il triangolo ABC abbia il minor perimetro possibile. (Si costruiscano e si uniscano tra loro i punti che sono simmetrici di A rispetto ai lati dell'angolo).
67. In un triangolo ciascuna mediana è minore della semisomma dei due lati che con essa concorrono nello stesso vertice. (Bisogna prolungare la mediana d'un segmento eguale alla mediana). La somma delle mediane è minore del perimetro del triangolo ed è maggiore del semiperimetro.
68. Se due lati di un triangolo sono disuguali, la mediana, che ha con essi in comune una estremità, fa col lato maggiore angolo minore. (Si prolunghi la mediana d'un segmento ad essa eguale). — L'altezza invece fa col lato maggiore angolo maggiore.
69. Se due lati di un triangolo sono disuguali, la bisettrice dell'angolo compreso da questi lati cade tra la mediana e l'altezza uscenti dallo stesso vertice. (È una conseguenza dell'esercizio precedente).
70. Se sopra una retta, e consecutivamente, si prendono dei segmenti uguali, in numero dispari, e sulla somma di questi segmenti si costruisce ad arbitrio un triangolo isoscele, e poi si unisce il vertice coi punti di divisione della base, l'angolo al vertice resta diviso in parti, l'intermedia

delle quali è maggiore delle rimanenti. Queste sono a due a due uguali, e tanto più piccole quanto più discoste dall'intermedia. [68].

71. La bisettrice di un angolo di un triangolo taglia il lato opposto in parti rispettivamente minori degli altri due lati. [133, 143].
72. In un triangolo la bisettrice di un angolo compreso da lati diseguali, taglia il terzo lato in parti diseguali; ed è maggiore la parte adiacente al lato maggiore.
73. Ciascuna delle bisettrici di un triangolo resta divisa dal punto d'incontro delle bisettrici per modo che la parte, che ha una estremità nel vertice dell'angolo dimezzato, è maggiore dell'altra. (Conseguenza dei due esercizi precedenti).
74. Ogni mediana è maggiore della bisettrice uscente dallo stesso vertice, purchè i lati che contengono l'angolo dimezzato non siano eguali. [69].
75. In un triangolo ogni bisettrice è minore della semisomma dei lati dell'angolo dimezzato. — La somma delle bisettrici è minore del perimetro del triangolo. [74, 67].
76. In un triangolo su lati eguali cadono altezze uguali; e su lato maggiore cade altezza minore. — E reciprocamente. (Bisogna distinguere più casi [141, 133]).
77. In un triangolo a lati eguali corrispondono mediane uguali; a lato maggiore corrisponde mediana minore. — E reciprocamente. (Se è $A B > A C$, e D ed E sono i punti di mezzo, si consideri dapprima il triangolo $A D E$ [141]. Poi, preso su $D B$ un segmento $D F \equiv E C$, si confrontino [152] i triangoli $E D C$, $E D F$. Resta poi a provare essere $E B > E F$).
78. In un triangolo a lati eguali corrispondono bisettrici uguali; a maggior lato corrisponde bisettrice minore. — E reciprocamente. (Caso 1°. Sia $B C$ il minore dei tre lati. Bisogna provare che $A D$ bisettrice corrispondente è maggiore di ciascuna delle altre due, ad es. di $B E$ bisettrice di $A(B)C$. Si faccia $D'(A)B \equiv A(B)D$, e $A D' \equiv B D$ e si tiri $B D'$. Il punto D' cade necessariamente [141] fuori del triangolo, e $B D'$ taglia $A C$, poniamo in F . Poichè la metà di angolo minore, è minore, il raggio $B D'$ cade nell'angolo $A B E$. Se poi si cala da B la $B P$ perpendicolare su $A C$, questa, essendo $A B > B C$, cade [69] fuori di $A(B)E$.

Quindi $AD \equiv BD' > BF > BE$. Caso 2°. Si considerino ora le bisettrici degli angoli opposti ai lati AC , AB maggiori di BC . Supposto $AC > AB$, dico che è $BE < CH$. Sia O il punto d'incontro delle due bisettrici. È intanto $BO < CO$. Ora, fatto, sul lato AB , $AC' \equiv AC$, tiro $C'O$. Questa retta entra per O nel triangolo ABE , e va ad incontrare il lato AE in H' . Facilmente si prova che $OH' \equiv OH$. Ma [69] $B(E)A$ è ottuso; quindi $OH' > OE$, e per conseguenza $BE < CH$, c. d. d.).

79. Costruire un triangolo, dati due lati e la mediana corrispondente al terzo lato. (Preso un triangolo qualunque, e tirata una mediana, si supponga che il triangolo sia quello che si vuol costruire. Si prolunghi la mediana di un segmento eguale ad essa.... Così, connesso col triangolo domandato, risulta un triangolo, che si può costruire. Ecc.).
80. Se per i punti di mezzo dei lati di un triangolo equilatero si tirano tre segmenti eguali e perpendicolari ai lati, tutti e tre rispettivamente dalla stessa banda del triangolo, o dalla banda opposta, e si uniscono le estremità di codesti segmenti, si ottiene un triangolo equilatero.
81. Se per i vertici di un triangolo equilatero si tirano tre segmenti eguali e perpendicolari ai lati, in modo che ciascun segmento, rispetto alla retta a cui è perpendicolare, cada dalla stessa banda che il triangolo o da bande opposte, e si uniscono le estremità di questi segmenti, si ottiene un triangolo equilatero.
82. Se due triangoli hanno due lati e una mediana rispettivamente uguali, essi sono uguali. (Si distingueranno due casi. Per quello in cui la mediana è la corrispondente al terzo lato, si prolungherà la mediana di un segmento ad essa eguale).
83. Se due triangoli hanno un lato, la somma degli altri due, e uno degli angoli adiacenti al primo lato, rispettivamente uguali, essi sono uguali. (Presi due triangoli, e supposto che essi siano i triangoli in questione, si prolunghino due lati, quelli adiacenti all'angolo eguale, di segmenti eguali rispettivamente agli altri due lati, così da formare le due somme che si sa essere uguali. Considerando i due triangoli, che ne risultano, si può poi provare l'eguaglianza dei due primi).

84. Se due triangoli isosceli hanno i perimetri e le altezze corrispondenti alle basi rispettivamente uguali, essi sono eguali.
85. Se due triangoli hanno perimetri eguali e due angoli rispettivamente uguali, essi sono eguali. (Siano $A B C$, $D E F$ i triangoli, i cui perimetri sono eguali, e sia $A (B) C \equiv D (E) F$ e $C (A) B \equiv F (D) E$. Manifestamente la difficoltà si riduce a provare che è $A B \equiv D E$. Non siano eguali; sia, ad es., $A B > D E$ e $B H \equiv D E$. Si costruisca in H l'angolo $K H B$ eguale a $C (A) B$. Il lato $H K$ non può incontrare [30] il lato $A C$; incontra [177] quindi $B C$ in K . Così si trova che i triangoli $A B C$, $H B K$ dovrebbero avere perimetri eguali. E ciò non può [175] essere).
86. Costruire un triangolo, dato un lato, un angolo adiacente ad esso, e la somma degli altri due lati.
87. Costruire un triangolo isoscele, dato il perimetro e l'altezza corrispondente alla base.
88. Se per due punti A, B d'una retta, e da una stessa banda di essa, si tirano due segmenti $A C, B D$ eguali e perpendicolari alla retta, codesta e la retta $C D$ non hanno nessun punto in comune. (Si proverà che le due rette sono perpendicolari a quella che passa per i punti di mezzo dei segmenti $A B, C D$).
89. Riferendosi alla figura dell'esercizio precedente, si mostri che $C D$ non può essere minore di $A B$. (Dimostrazione indiretta. Sul prolungamento di $A B$ si prendano dei segmenti eguali ad $A B$, e siano $B A', A'B', B'A''$ ecc.; si conducano per A', B', A'' ecc. le $A'C', B'D', A''C''$ ecc. perpendicolari ad $A B$ ed eguali ad $A C$. Supponendo sia $C D < A B$, si può pervenire alla conclusione che la spezzata $A C D C' D' C'' D'' B'' \dots$ è minore del segmento $A B'' \dots$).
90. Qualunque retta, che passi per il punto di mezzo di un segmento $A B$, o che sia perpendicolare all'asse del segmento $A B$, è equidistante dai punti A, B .
91. Se una retta è equidistante da due punti A, B , essa, o passa per il punto di mezzo del segmento $A B$, o non ha con la retta $A B$ nessun punto in comune.
92. Una retta, che incontri il prolungamento di un segmento

od il segmento stesso in un punto che non sia il punto di mezzo, ha dalle estremità del segmento distanze disuguali.

93. Se da due punti, presi sopra un lato di un angolo, si calano le perpendicolari sull'altro lato, le due perpendicolari sono disuguali, ed è maggiore quella che è più distante dal vertice. (Indirettamente, giovandosi dell'esercizio precedente).
94. Se due punti scorrono sopra i lati di un angolo, allontanandosi dal vertice, e in modo che le loro distanze dal vertice siano sempre uguali tra loro, la distanza tra i due punti va sempre crescendo. (Si dimezzi l'angolo).
95. Sia $A B C$ un triangolo isoscele, e $B C$ la base. Preso su $A C$ un punto D ad arbitrio, sul prolungamento di $A B$ si prenda $B E \equiv C D$. Poi si conduca $E D$. Dimostrare che $E D$ è dimezzata (in K) dalla base. E reciprocamente: se $E D$ è dimezzata dalla base, è $B E \equiv C D$. Si osservi poi che fra i triangoli, che hanno un angolo in comune e uguale la somma dei lati che contengono l'angolo comune l'isoscele ha maggior superficie. (Da D e da E si calino le perpendicolari $D F, E H$ sulla $B C$, e si considerino, prima i triangoli $D C F, E B H$, poi i due $D F K, E H K$).
96. Dedurre dall'esercizio precedente questa conseguenza che il poligono regolare, che ha i vertici nei punti di mezzo dei lati di un poligono regolare dato, è quello tra i poligoni, che si possono ottenere operando come indica l'esercizio 26, che ha la minima superficie.
97. Se per D , punto di mezzo della base $B C$ di un triangolo isoscele $A B C$, si tira una retta che tagli il prolungamento di $A B$ in E e il lato $A C$ in F , è $DE > DF$ e $BE > CF$. (Dall'angolo $C B E$ si tagli una parte uguale all'angolo $D C A$. Poi, preso su $B A$ un segmento $B H \equiv C F$, si tiri $D H$. [72]).
98. Se si prendono sopra una retta quanti si vogliano segmenti eguali consecutivi $A B, B C, C D \dots$, e, preso fuori della retta un punto O e tirati i segmenti $O A, O B, O C \dots$, si prolungano, ciascuno d'un segmento eguale a se stesso, si ottengono punti $A', B', C' \dots$ equidistanti dalla retta data. E i segmenti $A'B', B'C', C'D' \dots$ sono eguali tra loro.

99. Fra i triangoli isoperimetri, costruiti sulla medesima base l'isoscele ha la massima superficie. (Sia $A B C$ il triangolo isoscele, e $D B C$ l'altro triangolo. Bisogna provare dapprima [181] che i perimetri devono segarsi. Posto che $B D$ seghi $A C$ in E , si prende su $E B$ un segmento $E F$ uguale al minore [143] $E C$, e su $E A$ un segmento $E H \equiv E D$. Poi si osserva essere $B F + FA > AB$, donde si può dedurre la conseguenza che è $FA + AE > FH + HE$, la quale prova trovarsi il punto H tra A ed E ; ecc.).
100. Se un segmento si muove in modo che una estremità scorra sopra una retta data, e si mantiene perpendicolare a questa retta, l'altra estremità del segmento descrive una linea che è divisa in due parti eguali da qualsivoglia suo punto.



CAPITOLO IV DEL CERCHIO

Prime proprietà del cerchio.

183. Teor. *Una retta ed un cerchio non possono avere più di due punti in comune.*

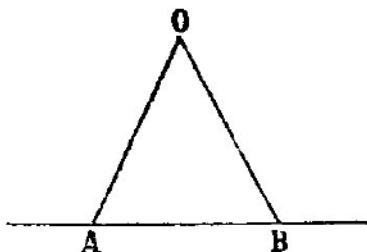
Dim. Presi sopra un cerchio qualsiasi due punti qualunque A, B , si tiri la retta AB . Se mai questa retta passa per il centro O , possiamo asserire senz'altro [100] che essa non ha altri punti in comune col cerchio. Supponiamo che non passi per il centro, e uniamo il centro con A e B ; così ci risulta un triangolo OAB , che è isoscele, perchè è $OA \equiv OB$. Ora perchè il segmento, che unisce un punto qualunque della base di un triangolo isoscele o dei prolungamenti della base col vertice opposto, non è uguale allato del triangolo [149], nessun punto della retta, che sia distinto dai due A e B , può appartenere al cerchio. [97].

184. Cor 1º. *Nessuna parte d'un cerchio è un segmento.*

Infatti sopra un segmento ci sono più di due punti allineati, ed un cerchio non può avere con una retta più di due punti in comune. In altre parole il cerchio è una linea totalmente diversa dalla retta.

185. Cor. 2º. *Non c'è che un solo piano che contenga tutti i punti d'un cerchio.*

Infatti tre punti qualunque d'un cerchio, non essendo allineati [183], determinano un piano [41],

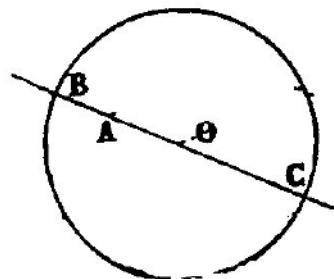


e questo coincide [41] col piano in cui fu descritto il cerchio.

186. Teor. *Un cerchio ha un centro solo.*

Dim. Sia un cerchio qualunque descritto con centro O . Dico che *nel piano del cerchio* non esiste nessun altro punto, dal quale, come dal centro O , tutti i punti del cerchio siano equidistanti.

Preso un punto A ad arbitrio, si tiri la retta $A O$. Questa retta, poichè passa per il centro, incontra il cerchio [100] in due punti B, C , ed è $OB \equiv OC$. Per conseguenza [129] i segmenti AB ed AC sono disuguali; e tanto basta per poter dire che il punto A non si potrebbe considerare come un altro centro del cerchio, giacchè *tutti* i punti del cerchio hanno egual distanza dal centro.



187. Teor. *Due cerchi, che abbiano raggi eguali, sono eguali.*

Dim. Due cerchi abbiano raggi eguali. Dico che essi sono eguali.

Si trasporti uno dei cerchi sull'altro, in modo che i centri e i piani dei cerchi coincidano. Ciò fatto, si può dire che ciascun punto di ciascuno dei due cerchi ha dal centro dell'altro distanza eguale al raggio di ciascuno dei due cerchi; epperò [99] ciascun punto di ciascuno dei due cerchi cade sull'altro cerchio. I cerchi sono dunque uguali, c. d. d.

188. Cor. *Un cerchio è individuato, quando ne sia dato il piano, il centro e il raggio; o, ciò che fa lo stesso, il piano, il centro e un punto qualsivoglia del cerchio.*

Chè infatti tutti i cerchi, descritti con quel centro e con quel raggio, coincidono. [187].

189. Teor. *La retta, che passa per il centro d'un cerchio e per il punto di mezzo d'una corda, è perpendicolare alla corda.*

Dim. Poichè il centro d'un cerchio è equidistante dalle estremità di qualunque corda, la retta che passa per il centro d'un cerchio e per il punto di mezzo d'una corda, che non sia un diametro, è l'asse della corda [167], epperò è perpendicolare alla corda. [164].

190. Teor. *La perpendicolare, calata dal centro d'un cerchio sopra una corda qualunque, divide la corda per metà.*

Dim. Poichè il centro d'un cerchio è equidistante dalle estremità di qualunque corda, la perpendicolare calata dal centro d'un cerchio sopra una corda, che non sia un diametro, è la perpendicolare calata sulla base di un triangolo isoscele dal vertice opposto, e si sa [166] che codesta perpendicolare dimezza la base.

191. Teor. *La perpendicolare condotta ad una corda nel punto di mezzo (l'asse della corda) passa per il centro del cerchio.*

Dim. Infatti l'asse d'una corda, poichè [165] passa per tutti i punti che sono equidistanti dalle estremità della corda, passa anche per il centro del cerchio.

192. Probl. *Trovare il centro d'un cerchio dato.*

Risol. Sul cerchio dato si prendano ad arbitrio tre punti A, B, C , e si tirino le corde AB, BC , e poi i loro assi DF, EH . Queste rette devono incontrarsi, e il punto d'intersezione è il centro ricercato.

Dim. Sappiamo [191] che l'asse di qualsivoglia corda passa per il centro del cerchio. Ambedue le rette DF, EH devono adunque passare per il centro, ep-

però esse hanno un punto almeno (il centro) in comune. Ma bisogna provare che non può darsi che le due perpendicolari coincidano, giacchè, se questo caso potesse avvenire, la costruzione indicata non varrebbe sempre a determinare il centro d'un cerchio dato. A tal fine si osservi che la retta DF , perchè perpendicolare alla AB , non può essere perpendolare anche alla CB , altrimenti da uno stesso punto B sarebbero condotte ad una stessa retta DF due perpendicolari distinte, e ciò non può essere [128]. Ma allora le rette DF ed EH , poichè una di esse è perpendicolare alla BC e l'altra no, sono distinte.

In conclusione, non può darsi che le due rette DF , EH non abbiano nessun punto in comune, nè che esse coincidano; esse adunque s'incontrano necessariamente, e il punto d'incontro è [191] il centro del cerchio.

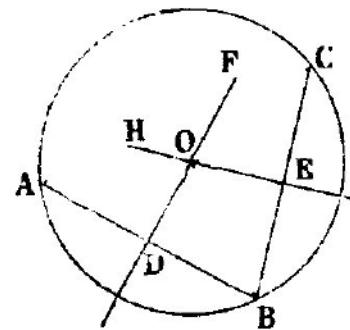
193. Cor. 1°. *Se due cerchi hanno tre punti in comune, essi coincidono.*

Infatti la costruzione, che si facesse per trovare il centro di uno dei cerchi (usando dei tre punti comuni ai cerchi), determinerebbe nel tempo stesso il centro dell'altro cerchio. Ma allora i due cerchi, giacendo in uno stesso piano [185], avendo il centro e un punto in comune, coincidono. [188].

194. Cor. 2°. *Un cerchio è individuato, quando sono dati tre suoi punti qualunque.*

195. Cor. 3°. *Due cerchi distinti non possono aver più di due punti in comune.*

196. Cor. 4°. *Se un punto è equidistante da tre punti d'un cerchio, esso è il centro.*



Dim. Siano A, B, C tre punti d'un cerchio, e i tre segmenti OA, OB, OC , condotti ad essi da uno stesso punto O , siano eguali tra loro. Dico che il punto O è il centro del cerchio.

Infatti, se con centro O e raggio OA si descrive un cerchio, questo cerchio ed il cerchio dato hanno in comune i tre punti A, B, C , epperò [193] hanno anche il centro comune.

197. Cor. 5°. *Due cerchi descritti con raggi diversi, non possono diventare coincidenti.* (Infatti non potrebbero aver più di due punti in comune. [193].

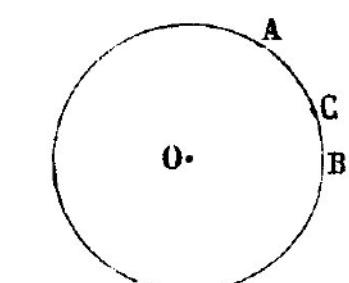
Di due cerchi, descritti con raggi diversi, quello che ha il raggio maggiore si dice il *maggiore*, e l'altro il *minore*.

Archi di cerchio.

198. Un punto d'un cerchio non lo divide in due parti (come avviene nella retta), ma due punti lo dividono in due parti; ciascuna di queste si dice *arco* (di cerchio). I due punti sono i *termini*, le *estremità* di ciascun arco.

Si può supporre che un arco (come il cerchio a cui appartiene) sia stato descritto dall'estremità d'un

raggio, che abbia rotato intorno al centro. Il punto di partenza si dice *origine* dell'arco.



Dovendo indicare archi posti in uno stesso piano, supponiamo che le rotazioni abbiano avuto luogo nello stesso verso

che per gli angoli, e nomineremo prima l'origine e poi l'altra estremità dell'arco. Così, nella nostra figu-

ra, l'arco AB è quello che passa per il punto C , e l'arco BA è il rimanente del cerchio.

Un arco si dice *compresso* da un angolo, se ha gli estremi sui lati dell'angolo ed ogni altro suo punto è interno all'angolo.

199. Un angolo, il cui vertice sia nel centro d'un cerchio, si dice *angolo al centro* rispetto a quel cerchio; e per arco corrispondente a quell'angolo s'intende l'arco compreso tra i lati di quell'angolo.

Si suol anche dire che un angolo al centro *insiste* sull'arco corrispondente.

200. Teor. *In cerchi eguali (o in uno stesso cerchio), se due angoli al centro sono eguali, gli archi corrispondenti sono eguali.*

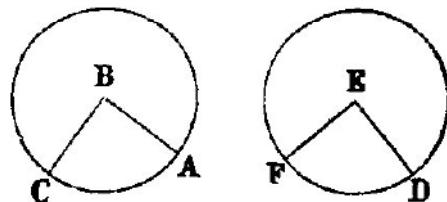
Dim. Siano due cerchi (B) ed (E) eguali, (cioè descritti con raggi eguali [197]); e i due angoli al centro ABC , DEF siano eguali. Dico che i due archi AC , DF sono eguali.

Infatti, se sovrapponiamo l'uno all'altro i due angoli, ad es. l'angolo B all'angolo E , in modo che il lato BA cada su ED , il lato BC cade su EF , il punto A in D , il punto C in F , e un cerchio sull'altro, e quindi anche l'arco AC sull'arco DF .

201. Cor. 1°. *Ogni diametro d'un cerchio divide il cerchio in due parti eguali.*

Infatti i due archi, ne' quali un cerchio è diviso dalle estremità d'un diametro, corrispondono a due angoli al centro che sono eguali, perchè piatti ambidue.

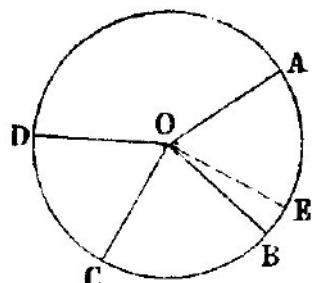
202. Cor. 2°. *Per dimezzare un arco dato, basta [200] dividere per metà il corrispondente angolo al centro.*



203. Teor. In un cerchio, angolo al centro maggiore comprende arco maggiore.

Dim. Nel cerchio (O) siano i due angoli al centro AOB , COD disuguali, e sia il primo il maggiore.

Dico che l'arco AB è maggiore dell'arco CD .



Si tagli [154] dall'angolo maggiore l'angolo AOE uguale al minore $C(O)D$. L'arco AE è uguale [200] all'arco CD ; epperò l'arco AB è maggiore dell'arco CD (una parte del primo è uguale al secondo).

204. Teor. In un cerchio, su archi eguali insistono angoli al centro eguali.

Dim. Infatti, se gli angoli fossero disuguali, tali sarebbero [203] anche i due archi; e ciò contro l'ipotesi.

205. Teor. In un cerchio su arco maggiore insiste angolo al centro maggiore.

Dim. L'angolo, che comprende l'arco maggiore, non può essere uguale all'altro angolo, nè minore, perchè l'arco compreso dal primo sarebbe allora uguale [200] all'altro arco, o minore [203]; e ciò contro l'ipotesi.

206. Un punto C , che appartenga ad un arco AB , divide l'arco in due parti, di cui l'arco AB si dice *somma*.

Si sommano archi di cerchi eguali (o d'uno stesso cerchio) costruendo nel centro d'uno dei cerchi un angolo che sia la somma di quelli al centro corrispondenti agli archi dati. [200].

E si trova la differenza di due archi di cerchi eguali (o d'uno stesso cerchio), costruendo nel centro d'uno dei cerchi un angolo eguale alla diffe-

renza dei due angoli al centro corrispondenti agli archi dati.

Poichè la somma di più angoli è indipendente dall'ordine in cui si succedono, tanto vale per la somma degli archi.

Corde nel cerchio.

207. Una corda d'un cerchio, quando non passa per il centro, divide il cerchio in due parti disuguali. [201].

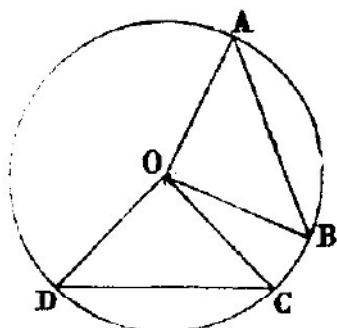
Per indicare la corda che unisce le estremità di un arco dato, si dice: la corda *sottesa* da quell' arco. Per converso, trattandosi d'un cerchio, e volendo indicare l'arco che ha le estremità in comune con una data corda, si dice: l'arco che *sottende* quella corda. Ma perchè in un cerchio sono due gli archi che sottendono una data corda, per togliere l'indeterminatezza stabiliamo che, quando si parla dell'arco che sottende una data corda, dei due archi si intenda il minore.

208. Teor. *In un cerchio, se due corde sono uguali, gli archi che le sottendono sono uguali; e se sono diseguali, la corda maggiore è sottesa da arco maggiore.*

Dim. Sia un cerchio con centro O , e in esso due corde uguali AB, CD . Dico che gli archi AB, CD , che le sottendono, sono uguali.

Infatti, poichè i triangoli OAB, OCD hanno i lati rispettivamente uguali, è [153] anche $A(O)B \equiv C(O)D$. Per conseguenza [200] l'arco AB è uguale all'arco CD .

Supponiamo, in secondo luogo, che la corda AB



sia maggiore della CD . Dico che l'arco AB è maggiore dell'arco CD .

Infatti, poichè nei triangoli OAB , OCD i lati concorrenti in O sono eguali, e il lato AB è maggiore del lato CD , è [152] $A(O)B > C(O)D$. Per conseguenza [203] anche l'arco AB è maggiore dell'arco CD .

209. Teor. *In un cerchio, se due archi sono eguali, essi sottendono corde uguali, e se sono disuguali, e minori di mezzo cerchio, l'arco maggiore sottende corda maggiore.*

Dim. Sia O il centro del cerchio, ed AB , CD due archi eguali. Dico che le corde AB , CD sono eguali.

Si considerino i due triangoli OAB , OCD . Poichè gli angoli in O sono eguali, come quelli che insistono su archi eguali [204], e i lati che concorrono in O sono eguali, è [151] anche $AB \equiv CD$.

Supponiamo, in secondo luogo, che l'arco AB (minore di mezzo cerchio) sia maggiore dell'arco CD .

In questo caso, poichè [205] su arco maggiore insiste angolo al centro maggiore, abbiamo intanto:

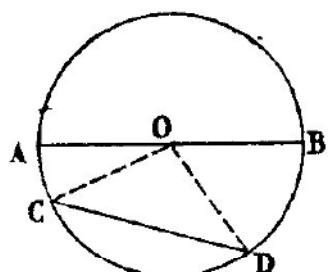
$A(O)B > C(O)D$. Ed ora, osservando i triangoli AOB , COD , si conchiude [152] essere $AB > CD$.

210. Teor. *In un cerchio un diametro è maggiore di qualunque corda che non passa per il centro.⁽¹⁾*

Dim. Sia O il centro del cerchio, e in questo un diametro AB e una corda CD qualunque, che non passa per il centro. Dico essere $AB > CD$.

Infatti, poichè la somma dei lati OC , OD del

⁽¹⁾ Questo teorema è un caso particolare del precedente, ma la dimostrazione di questo non si adatta al primo; eppero occorre una dimostrazione a posta.



triangolo COD è maggiore [145] del terzo CD , ed è $CO \equiv AO$ e $OD \equiv OB$, anche la somma dei segmenti AO , OB , cioè il diametro AB , è maggiore della corda CD .

211. Teor. *Se due corde d' un cerchio sono eguali, esse hanno dal centro distanze uguali.*

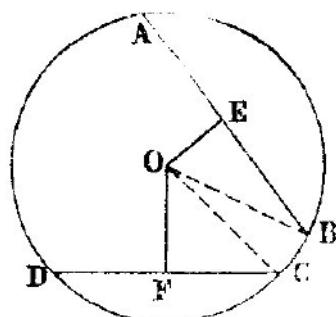
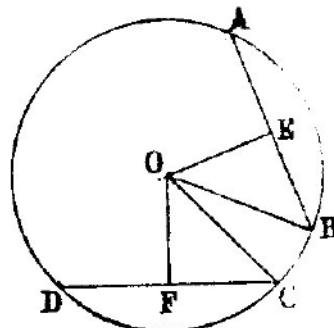
Dim. Siano due corde uguali AB , CD . Dico che esse sono equidistanti dal centro, che sono eguali, cioè, le perpendicolari OE , OF calate dal centro sulle due corde.

Intanto, perchè la perpendicolare, calata dal centro sopra una corda, divide [190] la corda per metà, e le corde AB , CD sono uguali, sono uguali anche le metà EB , CF . I triangoli rettangoli OBE , OCF hanno adunque l'ipotenusa e un cateto rispettivamente uguali; quindi è anche [157] $OE \equiv OF$, come d. d.

212. Teor. *Se due corde di un cerchio sono disuguali, la maggiore ha dal centro distanza minore.*

Dim. Siano due corde AB , CD disuguali, e sia $AB > CD$. Conduco le perpendicolari OE , OF . Dico essere $OE < OF$.

Infatti, poichè la perpendicolare, calata dal centro sopra una corda, dimezza [190] la corda, ed è $AB > CD$, anche BE , metà di AB , è maggiore di CF , che è una metà di CD . Se ora consideriamo i triangoli rettangoli OEB , OFC , troviamo che hanno le ipotenuse uguali, e che il cateto BE del primo è maggiore del cateto CF del-



l'altro. Ne segue [158] che il rimanente cateto OE del primo triangolo è minore di OF , come d. d.

213. Teor. *Se due corde d'un cerchio sono equidistanti dal centro, esse sono eguali.*

Dim. Le corde infatti non possono essere disuguali, perchè in tal caso anche le distanze dal centro sarebbero [212] disuguali, e ciò contro l'ipotesi.

214. Teor. *Se due corde d'un cerchio hanno dal centro distanze disuguali, la più vicina è maggiore della più lontana.*

Dim. Siano AB, CD due corde di uno stesso cerchio, e la AB sia più vicina al centro che non la CD . Dico che la AB è maggiore della CD .

Infatti, non può la AB essere uguale alla CD , perchè in tal caso essa avrebbe [211] dal centro la stessa distanza che la CD , e ciò contro l'ipotesi.

Nè potrebb'essere $AB < CD$, perchè in tal caso la AB avrebbe [212] dal centro distanza maggiore di quella della CD , e ciò pure contro l'ipotesi.

Così, poichè non può essere $AB \equiv CD$, nè $AB < CD$, è necessariamente $AB > CD$.

Posizione rispettiva d' una retta e d' un cerchio.

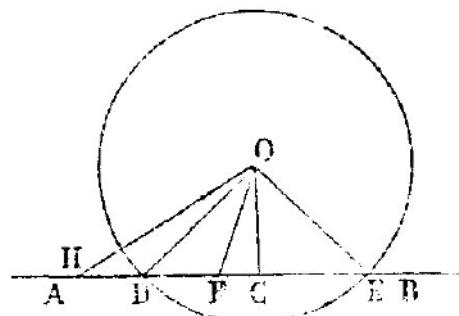
215. Teor. *Se la distanza di una retta dal centro di un cerchio è minore del raggio, la retta ha col cerchio due punti in comune; ogni altro punto della retta, se è compreso tra quei due, è interno al cerchio; altrimenti è esterno.*

Dim. Sia O il centro del cerchio, AB la retta, e la perpendicolare OC calata dal centro sulla retta [163] sia minore del raggio del cerchio.

Intanto, poichè OC è minore del raggio, il punto C è [97] interno al cerchio, e per conseguenza [103] la retta ha in comune col cerchio due [183] punti situati

da bande opposte di C . Chiamiamo D, E questi punti ed uniamoli col centro.

Ora, essendo $OD \equiv OE$, il triangolo ODE è isoscele; eppero, prendendo sulla base un punto qualunque F , e tirando OF , abbiamo [149] $OF < OD$; e prendendo su un prolungamento di DE un punto H , ed unendolo con O , abbiamo $OH > OD$. Per conseguenza [97] ogni punto della retta AB , che è compreso tra D ed E , è interno al cerchio, ed ogni punto dei prolungamenti di DE è fuori.

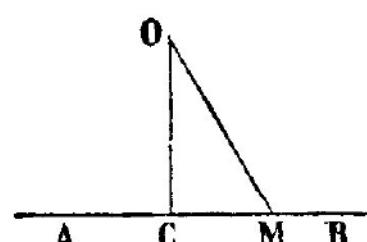


216. Poichè nei punti D ed E la retta dianzi considerata passa dall'interno all'esterno del cerchio, o viceversa, si dice che la retta *sega* il cerchio in quei punti, od anche che è una *secante* del cerchio in D ed E .

217. Teor. *Se la distanza di una retta dal centro d'un cerchio è uguale al raggio, la retta ha col cerchio in comune un punto solo, ed ogni altro punto della retta è fuori del cerchio.*

Dim. Sia O il centro del cerchio ed AB la retta. E la perpendicolare OC , calata dal centro sulla retta, sia eguale al raggio del cerchio.

Intanto, poichè OC è uguale al raggio del cerchio, il punto C appartiene al cerchio. Ma ogni altro segmento, tirato dal centro a qualsivoglia altro punto M della retta, è [162] maggiore della perpendicolare OC , quindi ogni punto della retta, diverso dal punto C , è fuori del cerchio. [97].



218. Una retta ed un cerchio, che giacciono in uno stesso piano ed abbiano un solo punto in comune, si dicono *tangenti* in quel punto; il punto comune si dice *punto di contatto*. (Ordinariamente si dice che è la retta *tangente* del cerchio; che lo *tocca* in quel punto).

219. L'ultimo teorema si può ora enunciare nel modo seguente:

La retta perpendicolare a un raggio di un cerchio, nell'estremità, è tangente al cerchio nell'estremità di quel raggio. Ogni altro punto della retta è fuori del cerchio.

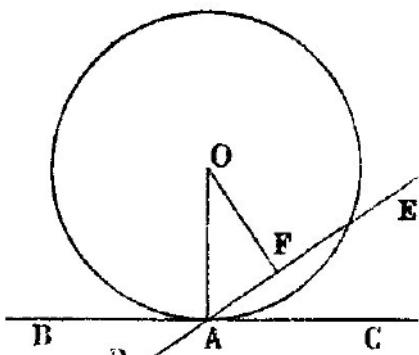
220. Teor. *Per qualunque punto d'un cerchio si può condurre una tangente al cerchio in quel punto, e una soltanto.*

Dim. Sia un cerchio di centro O , e su questo un punto A qualunque.

Intanto, se tiriamo il raggio OA , e poi la retta BC perpendicolare ad OA nel punto A , abbiamo [219] una

retta tangente al cerchio nel punto dato. Resta dunque a provare che per A non si può condurre nessun'altra retta, che sia tangente al cerchio in A . A tal fine si tiri per A una retta DE ad arbitrio, distinta dalla BC . Allora,

poichè l'angolo OAC è retto, tale non è l'angolo OAE ; eppero la OF , perpendicolare alla DE , calata dal centro O , è necessariamente distinta dalla OA . E perchè [162] la perpendicolare è minore d'ogni obliqua, la OF è minore del raggio OA ; quindi la retta DE è una secante del cerchio, ed A è uno dei punti d'intersezione. [215].



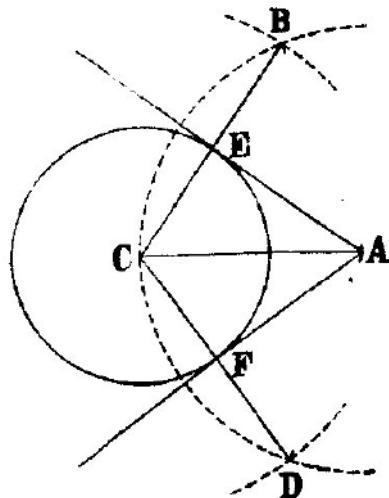
221. Cor. Il raggio, che va al punto di contatto di una tangente d'un cerchio, è perpendicolare alla tangente.

Infatti, se così non fosse, tirando la perpendicolare al raggio nella sua estremità, si otterrebbe una seconda tangente [219] al cerchio nello stesso punto, il che si è dimostrato [220] impossibile.

222. Teor. Per un punto, che sia fuori d'un cerchio, passano due tangenti del cerchio e due soltanto.

Dim. Sia un cerchio di centro C e un punto esterno A . Si vuol provare che fra le rette, che passano per A , due e due soltanto sono tangenti del cerchio.

Unito A con C , si descriva un cerchio con centro A e raggio AC , e poi si descriva un cerchio con centro C e raggio che sia eguale al diametro del cerchio dato. È facile riconoscere che AC , distanza dei centri dei due cerchi, è minore della somma dei due raggi, e maggiore della loro differenza. Infatti AC è minore della somma dei raggi, perchè è uguale ad uno di essi. Per provare che è maggiore della loro differenza (detto H il punto in cui AC incontra il cerchio dato) immaginiamo di portare sulla retta AC , da C verso A , il diametro del cerchio dato. Così si rende manifesto che la differenza tra i raggi dei due cerchi è la differenza tra i segmenti CH ed AH , e che perciò è minore di AC , che è la somma dei segmenti stessi. Possiamo quindi conchiudere [109, 195] che i due cerchi hanno due punti in comune, situati fuori della retta AC e da



bande opposte di codesta retta. Siano B e D codesti punti.

I segmenti CB , CD , poichè hanno una estremità nel centro del cerchio dato e sono maggiori del raggio, incontrano il cerchio; siano E ed F i punti d'incontro. Si tirino le rette AE ed AF . Dimostreremo che queste rette sono tangenti del cerchio; E ed F sono i punti di contatto.

Infatti, la retta AE , poichè passa per i punti A ed E che sono equidistanti dalle estremità del segmento BC , è perpendicolare a BC [167], cioè al raggio CE nell'estremità, eppero essa [219] è tangente al cerchio in E .

Nello stesso modo si proverebbe che la retta AF è tangente del cerchio in F .

Ci rimane da dimostrare che dal punto A non si possono condurre altre tangenti al cerchio.

Imaginiamo a tal fine che AE , AF siano due tangenti condotte al cerchio dal punto A , e che E ed F siano i punti di contatto. Sappiamo [221] che, se si tirano i raggi CE , CF , questi riescono perpendicolari alle tangenti.

Ed ora, confrontando i triangoli rettangoli ACE , ACF , troviamo che hanno l'ipotenusa AC in comune, ed eguali i cateti CE , CF . Per conseguenza [157] egli è $AE \equiv AF$. Possiamo dire pertanto che le parti delle tangenti condotte ad un cerchio da uno stesso punto esterno, comprese tra questo punto e i punti di contatto, sono tutte uguali fra loro. Da ciò vien la conseguenza che le tangenti non possono essere più di due; ed invero, se ce ne fossero tre, il punto A , avendo distanze uguali da tre punti del cerchio, sarebbe [196] il centro, il che non può essere, perchè esso è fuori del cerchio.

Così resta dimostrato che ecc.

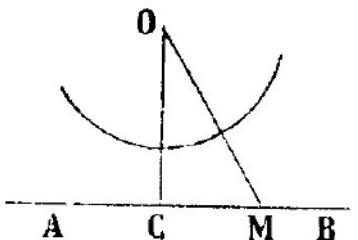
223. Il segmento di una tangente ad un cerchio, condotta da un punto esterno, compreso tra questo punto e il punto di contatto, suol dirsi, senz'altro, una tangente condotta al cerchio dal punto esterno. Così, riferendoci alla dimostrazione precedente, ed osservando essere $C(A)E \equiv F(A)C$, possiamo dire che:

224. *Le tangenti, condotte ad un cerchio da un punto esterno, sono eguali tra loro, e fanno angoli eguali col segmento che unisce il loro punto comune col centro.*

225. Teor. *Se la distanza di una retta dal centro di un cerchio è maggiore del raggio, ogni punto della retta è fuori del cerchio.*

Dim. Sia O il centro del cerchio, AB la retta, e la perpendicolare OC calata dal centro sulla retta sia maggiore del raggio. Si deve provare che ogni punto della retta è fuori del cerchio.

Intanto, perchè OC è maggiore del raggio, il punto C è fuori [97] del cerchio. È poi fuori del cerchio ogni altro punto M della retta AB , perchè ogni obliqua è [162] maggiore della perpendicolare.



226. Teor. *Secondo che una retta ha due punti, uno solo, o nessun punto in comune con un cerchio la distanza fra il centro e la retta è minore, uguale, o maggiore del raggio.*

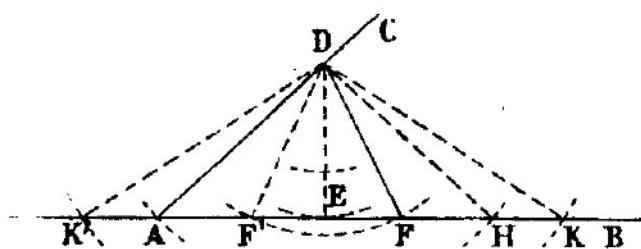
Dim. Infatti le ipotesi contrarie conducono a conseguenze che sono in contraddizione col dato. [215, 217, 225].

227. Probl. *Costruire un triangolo, che abbia due*

lati eguali a due segmenti dati, e l'angolo opposto a uno di essi eguale ad un angolo dato.

Risol. Sia $C(A)B$ l'angolo dato; chiamiamo α e β i due segmenti, e sia α il segmento a cui dev'essere uguale il lato opposto all'angolo dato.

Sopra un lato dell'angolo si prenda un segmento AD che sia eguale a β . A e D sono due vertici del



triangolo da costruire. Il terzo vertice deve trovarsi sul lato AB ; e perchè deve avere dal punto D

distanza eguale ad α , deve [99] trovarsi sul cerchio che ha centro in D e raggio α . Descritto questo cerchio, se esso incontra in F il lato AB , il triangolo DAF sodisfa le condizioni del problema.

Disc. L'angolo dato può essere acuto, retto od ottuso.

I. L'angolo dato sia acuto. Si cali da D la perpendicolare DE sul lato AB .

1°. Se è $\alpha < DE$, il cerchio con centro D e raggio α non ha [225] nessun punto in comune con la retta AB , e ciò prova che il problema in tal caso non ammette soluzione, che non esiste cioè triangolo con tre elementi eguali rispettivamente ai dati, e disposti come richiede il problema,

2°. Quando è $\alpha \equiv DE$, il cerchio e la retta hanno in comune [217] il solo punto E , e il triangolo domandato è il triangolo rettangolo ADE .

3°. Quando è $\alpha > DE$, ed $\alpha < AD$, il cerchio taglia [215, 162] il raggio AB in due punti F, F' , e i due triangoli ADF, ADF' sodisfanno ambidue al problema.

4°. Se è $\alpha \equiv AD$, il cerchio taglia [215, 162] il raggio AB nel punto A e in un altro punto H , epperoò il problema ammette per unica soluzione il triangolo isoscele ADH .

5°. Quando infine è $\alpha > AD$, il cerchio taglia [215, 162] il lato AB in un punto K e il prolungamento del lato in un altro punto K' . In questo caso il problema ha per unica soluzione il triangolo ADK ; perchè il triangolo ADK' ha bensi due lati eguali ai dati segmenti, ma l'angolo opposto al lato DK' , e che dovreb'essere uguale all'angolo acuto dato, è invece supplementare di questo angolo.

II. Quando l'angolo dato è retto, perchè il problema ammetta soluzione, è necessario e sufficiente che il lato opposto all'angolo dato sia maggiore dell'adiacente. Il cerchio, che bisogna descrivere, taglia il lato opposto in un punto e il prolungamento in un altro. Ambidue i triangoli risultanti sodisfanno alle condizioni volute; sono però [157] eguali, e così le due soluzioni si riducono infine ad una sola.

III. Quando l'angolo dato è ottuso, il piede della perpendicolare DE cade sul prolungamento del lato AB . In questo caso, perchè il cerchio tagli il lato AB , non basta che il raggio superi la perpendicolare, ma si richiede [162] che superi anche il lato DA adiacente all'angolo dato; allora il cerchio taglia una volta il lato AB e l'altra il prolungamento, epperciò il problema ammette una soluzione soltanto.

Posizione rispettiva di due cerchi.

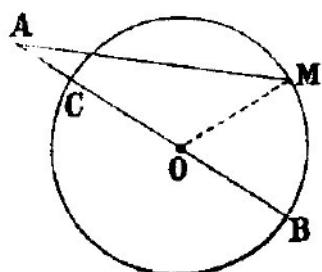
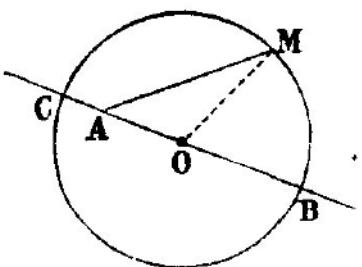
228. Lemma. *Tra i segmenti, che si possono tirare ad un cerchio da uno stesso punto che non sia il centro, quello che passa per il centro è maggiore d'ogni altro, e*

quello, un cui prolungamento passa per il centro, è minore d'ogni altro.

Dim. Per il caso che il punto appartenesse al cerchio la proposizione è manifesta, dacchè il segmento che passa per il centro è un diametro, e come tale è maggiore [210] di qualunque altro dei segmenti, che è una corda la quale non passa per il centro. L'altro segmento, quello un cui prolungamento passa per il centro, in tal caso non esiste; è nullo.

Gli altri due casi, quando cioè il punto è interno, senza essere il centro, od è esterno, si possono trattare unitamente.

Sia adunque un cerchio di centro O , ed un punto



A qualunque, che non sia il centro, nè cada sul cerchio. Tirando la retta $A O$, otteniamo [100] in $A B$ quel segmento, che va da A al cerchio passando per il centro; ed in $A C$ quel segmento, un cui prolungamento passa per il centro. Uniamo il punto A con un punto M qualsivoglia del cerchio. Proveremo essere $A B$ maggiore, ed $A C$ minore di $A M$. Si tiri il raggio $O M$.

Ed ora, essendo $A B \equiv AO + OB$, cioè $A B \equiv AO + OM$, ed [145] $AO + OM > AM$, egli è anche $AB > AM$.

Dallo stesso triangolo AOM , per questo che la differenza di due lati è minore del terzo [146], abbiamo, nel primo caso :

$$OM - AO < AM,$$

e nel secondo : $AO - OM < AM$,

epperò, essendo $OM \equiv OC$, in ambidue i casi è:
 $AC < AM$.

Così si è dimostrato che ecc.

229. Teor. *Se la distanza dei centri di due cerchi è maggiore della somma dei raggi, ciascun cerchio è tutto fuori dell'altro.*

Dim. Siano A e B i centri di due cerchi di raggi α e β , e sia: $AB > \alpha + \beta$.

Proviamo da prima che ogni punto del cerchio (A) è fuori del cerchio (B).

Intanto dall'ipotesi abbiamo:

$$AB - \alpha > \beta,$$

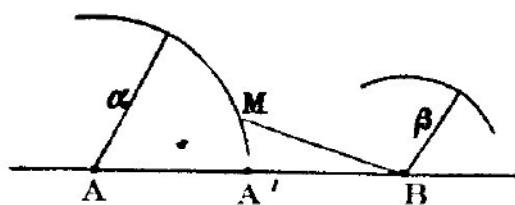
epperò, facendo $AA' \equiv \alpha$, si ha $A'B > \beta$. Per ciò [99, 97] il punto A' appartiene al cerchio (A) ed è fuori del cerchio (B).

Osserviamo poi che, se prendiamo sul

cerchio (A) un punto qualunque M e lo uniamo con B , ci risulta un segmento BM che è maggiore di BA' , perchè BA' è tra i segmenti, che si possono tirare da B ai punti del cerchio (A), quello un cui prolungamento passa per il centro di questo cerchio [228]. Così, essendo $BA' > \beta$, è anche $BM > \beta$, epperò [97] il punto M è fuori del cerchio (B).

Nelle stesso modo si prova che il cerchio (B) è tutto fuori del cerchio (A).

230. Teor. *Se la distanza dei centri di due cerchi è uguale alla somma dei raggi, i due cerchi hanno un solo punto in comune, situato sul segmento che unisce i centri. E ogni altro punto di ciascuno dei cerchi è fuori dell'altro cerchio.*



Dim. Siano A e B i centri di due cerchi di raggi α e β , e sia :

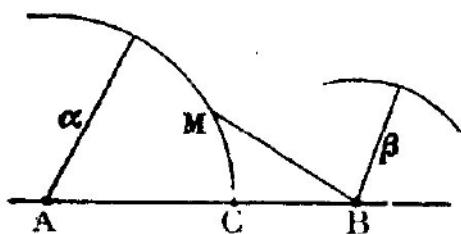
$$AB \equiv \alpha + \beta$$

e per conseguenza :

$$AB - \alpha \equiv \beta.$$

Così, facendo $AC \equiv \alpha$, si ha $CB \equiv \beta$. Pertanto il punto C appartiene ad ambidue i cerchi.

Osserviamo ora che, se prendiamo sul cerchio (A) un punto M qualunque e lo uniamo con B , ci risulta



un segmento BM che è maggiore di BC , perchè BC è tra i segmenti, che si possono tirare da B ai punti del cerchio (A), quello un cui prolunga-

mento passa per il centro di questo cerchio [228]. Così, essendo $BC \equiv \beta$, è $BM > \beta$, epperò [97] il punto M è fuori del cerchio (B).

Nello stesso modo si prova che, eccettuato il punto C , ogni punto del cerchio (B) è fuori del cerchio (A).

231. Teor. *Se la distanza dei centri di due cerchi è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza, i due cerchi hanno due punti comuni, i quali sono simmetrici rispetto alla retta dei centri. Dai due punti comuni ciascun cerchio è diviso in due archi, i quali sono, uno interno e l'altro esterno all'altro cerchio.*

Dim. La dimostrazione è stata data nel § 109; a compimento qui possiamo aggiungere che i punti comuni ai due cerchi sono due soli, perchè due cerchi distinti non possono averne di più. [195]. E che i punti comuni sono simmetrici rispetto alla retta dei centri, perchè, essendo ciascun centro equidistante dai due punti, la retta dei centri è l'asse del segmento dei due

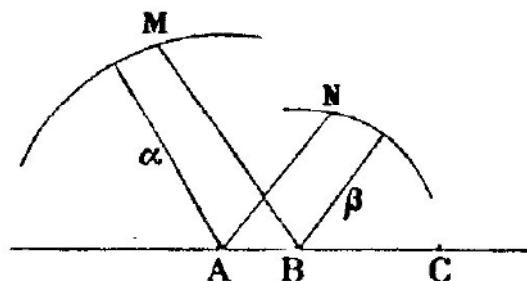
punti. [167]. Infine, poichè sappiamo [109] che ciascun centro ha un punto interno ed uno esterno all'altro cerchio; gli archi in cui ciascun cerchio è diviso dai due punti comuni sono: uno tutto interno e l'altro tutto fuori dell'altro cerchio.

232. Teor. *Se la distanza dei centri di due cerchi è uguale alla differenza dei raggi, i cerchi hanno un punto in comune il quale cade su quel prolungamento del segmento dei centri che è della banda del centro del cerchio minore; ogni altro punto del cerchio maggiore è fuori del cerchio minore; e ogni altro punto di questo cerchio è interno del primo.*

Dim. Cominciamo ad osservare che i raggi dei due cerchi non possono essere uguali, dacchè in tal caso la distanza dei centri sarebbe nulla, e quindi i due cerchi coinciderebbero. Chiamiamo A il centro del cerchio maggiore ed α il suo raggio; chiamiamo B il centro dell'altro cerchio e β il raggio. L'ipotesi è significata dall'eguaglianza $AB \equiv \alpha - \beta$, o in altro modo dalla seguente $AB + \beta \equiv \alpha$.

Sul prolungamento di AB , partendo da B , si prenda un segmento $BC \equiv \beta$. Così, essendo $AC \equiv AB + \beta$, è $AC \equiv \alpha$. Perciò il punto C appartiene ad entrambi i cerchi.

Osserviamo ora che, unendo un punto qualunque M del cerchio (A) col punto B , si ottiene un segmento BM che è maggiore [228] di BC , perchè BC è fra i segmenti, che si possono condurre dal punto B ai



punti del cerchio (A), quello un cui prolungamento passa per il centro di questo cerchio. Così, essendo $BC \equiv \beta$, è $BM > \beta$, epperò [97] il punto M è fuori del cerchio (B).

Resta a provare che ogni punto del cerchio minore, fatta eccezione per il punto B , cade nell' interno del cerchio maggiore. A tal fine osserveremo che, se sul cerchio (B) si prende un punto qualunque N e lo si unisce con A , si ottiene un segmento AN che è minore [228] di AC , perchè AC è fra i segmenti, che si possono condurre dal punto A ai punti del cerchio (B), quello che passa per il centro di questo cerchio. Così, essendo $AC \equiv \alpha$, è $AN < \alpha$, epperò [97] il punto N è nell'interno del cerchio (A). ⁽¹⁾.

233. Teor. *Se la distanza dei centri di due cerchi è minore della differenza dei raggi, il cerchio maggiore è tutto fuori del minore, e questo è tutto nell'interno del primo.*

Dim. Cominciamo ad osservare che i raggi dei due cerchi non possono essere uguali, dacchè in tal caso la distanza dei centri dei due cerchi (neanche se i centri coincidessero) non potrebb' essere minore della differenza dei raggi. Chiamiamo A il centro del cerchio maggiore ed α il suo raggio; chiamiamo B il centro dell' altro cerchio e β il raggio. L' ipotesi è significata dalla disuguaglianza $AB < \alpha - \beta$, o in altro modo dalla seguente $AB + \beta < \alpha$.

⁽¹⁾ Sembrerebbe che dovesse bastare provare che ogni punto del cerchio minore è interno al maggiore, per poter conchiudere l'altra parte del teorema. Ma non abbiamo la proposizione: se una figura è tutta interna ad un'altra, questa è tutta fuori della prima. Infatti, ad es., se dividiamo un angolo in tre parti, ogni punto dell' angolo intermedio è dentro dell' angolo dato, e questo non è tutto fuori dell' altro.

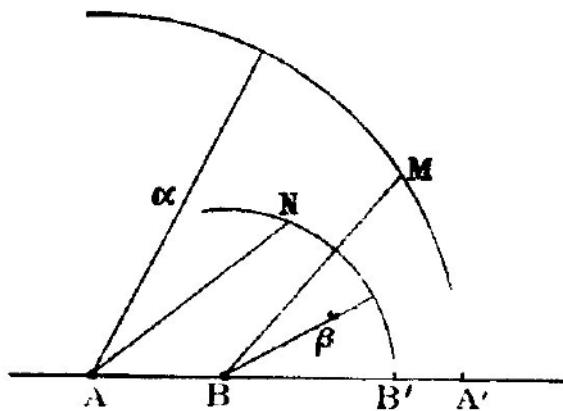
Sul prolungamento di $A B$ si prenda un segmento $B B' \equiv \beta$. Così, essendo $A B' \equiv A B + \beta$, ed $A B + \beta < \alpha$, è anche $A B' < \alpha$. Pertanto il punto B' appartiene al cerchio (B) e cade nell'interno del cerchio (A). Se poi si fa $A A' \equiv \alpha$, il punto A' viene a cadere sul prolungamento di $B B' \equiv \beta$, epperò fuori del cerchio (B).

Ora si osservi che, unendo un punto qualunque M del cerchio (A) col punto B , si ottiene un segmento $B M$, che è maggiore

[228] di $B A'$, perchè $B A'$ è fra i segmenti, che si possono condurre dal punto B ai punti del cerchio (A), quello un cui prolungamento passa per il centro di questo cerchio. Così, poichè è $B A' > \beta$, è anche $B M > \beta$, epperò [97] il punto M è fuori del cerchio (B).

Resta a provare che ogni punto del cerchio minore è interno al cerchio maggiore. Perciò osserveremo che, se uniamo un punto qualunque N del cerchio (B) col punto A , otteniamo un segmento $A N$, che è minore [228] di $A B'$, perchè $A B'$ è fra i segmenti, che si possono condurre dal punto A ai punti del cerchio (B), quello che passa per il centro di questo cerchio. Così, poichè è $A B' < \alpha$, è anche $A N < \alpha$, epperò [97] il punto N è nell'interno del cerchio (A).

234. Teor. *Se due cerchi hanno in comune un punto, che non sia sulla retta dei centri, allora la distanza*



dei centri è minore della somma ed è maggiore della differenza dei raggi.

Dim. Infatti, unendo il punto comune coi centri dei cerchi, si ottiene un triangolo, un cui lato è la distanza dei centri e gli altri due sono due raggi dei cerchi. [145, 146].

235. Cor. 1°. *Se due cerchi hanno un punto in comune che non sia sulla retta dei centri, essi hanno un altro punto in comune.* [234, 231].

236. Cor. 2°. *Se due cerchi hanno un solo punto in comune, questo appartiene alla retta dei centri.* [235].

237. Teor. *Se due cerchi hanno un solo punto in comune, la distanza dei centri è uguale alla somma o alla differenza dei raggi, secondo che ciascun cerchio è esterno all' altro, oppure uno è interno all' altro.* [236, 229, 233].

238. Teor. *Se due cerchi non hanno nessun punto in comune, la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi oppure minore della differenza dei raggi, secondo che ciascun cerchio è tutto fuori dell' altro, oppure uno dei cerchi è interno all' altro.* [229, 230, 231, 232].

239. Due cerchi, se hanno un solo punto in comune, si dicono *tangenti* in quel punto (si dice che si *toccano* in quel punto), il quale si chiama *punto di contatto*.

I due cerchi si dicono *tangenti esternamente*, se ciascuno è esterno all' altro ; e si dicono *tangenti internamente*, se uno dei due è interno all' altro.

Di due cerchi, che abbiano due punti comuni, si dice che si *segano* in quei due punti.

240. Teor. *Se due cerchi si toccano, essi hanno medesima tangente nel punto di contatto.*

Dimm. Infatti, poichè il punto di contatto si trova sulla retta dei centri [236], la perpendicolare a questa retta in quel punto è tangente [219] ad ambidue i cerchi. (¹).

Esercizi..

101. Due corde di uno stesso cerchio, se non sono ambedue due diametri, non possono dimezzarsi scambievolmente. (Indirettamente. [189, 121]).
102. Condurre per un punto, dato nell'interno di un cerchio, una corda in modo che essa sia dimezzata dal punto dato. [189].
103. Se una retta taglia due cerchi concentrici, i segmenti di essa, compresa tra i cerchi, sono eguali tra loro. [190].
104. Se due corde uguali si tagliano, le parti dell'una sono rispettivamente uguali alle parti dell'altra.
105. Se due cerchi eguali si tagliano, essi si tagliano in parti rispettivamente uguali. [200].
106. Due cerchi non possono tagliarsi scambievolmente per metà.
107. Due corde, condotte per le estremità di un diametro e formanti con questo angoli alterni eguali, sono eguali. I loro punti di mezzo e il centro sono allineati.
108. Tirare per un punto, dato nell'interno di un cerchio, la più piccola corda possibile.
109. Costruire un triangolo, dati due lati e l'altezza relativa al terzo lato.
110. Costruire un triangolo dato un lato, un angolo adiacente e l'una o l'altra delle mediane uscenti dai vertici degli altri due angoli.
111. Condurre in un cerchio una corda, così che (prolungata se il punto è esterno) passi per un punto dato, ed abbia le estremità equidistanti da un altro punto dato.
112. Con centro dato descrivere un cerchio, che tocchi un cerchio dato.

(¹) A questo punto si potrebbe passare alla lettura dei tre primi capitoli della *Stereometria*.

- I13. Riconoscere, col solo compasso, se la distanza tra due punti dati è uguale alla somma di due dati segmenti. [230].
- I14. Con centri dati descrivere due cerchi che si tocchino esternamente, e i cui raggi abbiano data differenza.
- I15. Con centri dati descrivere due cerchi, che si tocchino internamente e i cui raggi formino una somma data.
- I16. Son dati un cerchio e una retta. Condurre una tangente al cerchio, la quale non abbia con la retta data nessun punto in comune. [137].
- I17. Dato un triangolo equilatero e un punto dove che sia, descrivere un cerchio, che disti egualmente dai vertici del triangolo e dal punto dato.
- I18. Se due cerchi eguali si tagliano, e si conduce una retta perpendicolare alla corda comune, i segmenti della retta compresi tra i cerchi sono eguali tra loro.
- I19. Se un cerchio è tutto interno ad un altro, e una retta li taglia tutti e due in modo che le parti di essa, comprese tra i cerchi, siano eguali, essa retta è perpendicolare alla retta dei centri.
- I20. Se un cerchio è iscritto in un angolo, tutti i triangoli tagliati via dall'angolo dato con tangentì al cerchio, condotte in modo che il cerchio rimanga fuori di ciascun triangolo, hanno perimetri eguali. [224]. — E, se si congiunge il centro con le estremità di una di queste tangentì, l'angolo che si ottiene è costante (uguale alla metà dell'angolo compreso dai raggi, che vanno ai punti di contatto dei lati dell'angolo dato).
- I21. Se un poligono, di numero pari di lati, è circoscritto (*) ad un cerchio, la somma dei lati di posto pari è uguale alla somma dei lati di posto dispari.
- I22. Se una spezzata circoscritta ad un cerchio ha i lati eguali, gli angoli di posto pari sono eguali tra loro; e così i rimanenti.
- I23. Descrivere un quadrangolo regolare, che abbia i vertici sui due archi interni di due cerchi eguali che si tagliano.
- I24. In cerchi disuguali, corde uguali hanno dei centri rispettivi distanze disuguali; e se due corde hanno dei centri distanze uguali, esse sono disuguali. [190].

(*) Un cerchio si dice *iscritto* in un poligono, se tocca tutti i lati del poligono. Per converso il poligono si dice *circoscritto* al cerchio.

125. Per segnare i punti di contatto delle tangenti ad un cerchio, passanti per un punto dato fuori del cerchio, basta: descrivere il cerchio concentrico col dato e che passa per il punto dato; quindi tirare la tangente al cerchio dato nel punto in cui esso è incontrato dal segmento che unisce il centro col punto esterno; e infine unire i punti, ne' quali codesta tangente incontra [103] il maggiore dei due cerchi, col loro centro.
126. Due corde, perpendicolari a uno stesso diametro, comprendono archi eguali; e, reciprocamente, se due corde, che non si tagliano, comprendono archi eguali, il diametro perpendicolare ad una è perpendicolare anche all'altra.
127. Due corde perpendicolari a una terza ed equidistanti dai termini di questa, sono eguali.
128. Circoscrivere a un cerchio una spezzata equilatera, i cui lati siano eguali a un segmento dato.
129. Ciascuno di due cerchi è esterno all'altro. Quale è la più grande, e quale la più piccola delle distanze tra un punto di uno dei cerchi e un punto dell'altro? [176].
130. Un cerchio è tutto nell'interno di un altro, senz'aver con questo il centro in comune. Quale è la più grande, e quale la più piccola delle distanze tra un punto di uno dei cerchi e un punto dell'altro?
131. Il minore di due cerchi è tutto nell'interno dell'altro, e i due cerchi non sono concentrici. Fra le corde del maggiore, tangenti al minore, quale è la più grande, e quale la minima? [228].
132. Tra i segmenti, che si possono condurre a un cerchio da un punto che non è il centro, due, che facciano angoli eguali col minimo, sono eguali tra loro; e se fanno angoli disuguali, quello, che fa angolo maggiore, è minore. [152].
133. Condurre la tangente a un cerchio in un suo punto dato, senza usare del centro. (Si prendono sul cerchio, partendo dal punto, due archi eguali...).
134. Tirare una retta, che tocchi due cerchi eguali ed esterni l'uno all'altro. [129, 222].
135. Costruire un triangolo, dati h_a , m_a e b .
136. Se due cerchi eguali hanno i centri sopra un terzo cerchio, e questo ne taglia uno, esso taglia anche l'altro. E i due primi cerchi sono divisi dal terzo in parti rispettivamente uguali.

137. Se due poligoni d'egual numero di lati sono circoscritti a due cerchi eguali, e sono rispettivamente uguali le distanze dei vertici dai centri, i poligoni sono eguali.
138. Se due cerchi eguali si taglano, ogni segmento terminato ai due archi interni, oppure ai due esterni, e condotto per il punto dove la corda comune è tagliata dalla retta dei centri, è diviso per metà da questo punto.
139. Trovare un punto, che sia equidistante da due punti dati A, B , e che abbia data distanza da un terzo punto C .

(Attesa l'infinita varietà di questioni geometriche, che possono essere proposte, è impossibile indicare un metodo generale per risolvere tutti i problemi di Geometria. Esistono però dei metodi, che si possono applicare a intere classi di questioni; il più generale è quello in cui si fa uso dei luoghi [98] geometrici. Di questo metodo daremo qui un breve cenno.

La risoluzione della maggior parte dei problemi geometrici si riduce infine alla determinazione di un punto. E la difficoltà dipende ordinariamente da ciò che tal punto deve soddisfare nel tempo stesso a più condizioni. In tal caso si considerano queste condizioni separatamente l'una dall'altra; ciascuna sarà soddisfatta da innumerevoli punti, da tutti i punti di una certa figura, insomma da un luogo geometrico. Se questi luoghi saranno rette o cerchi, e si saprà trovarli, nel punto comune si avrà il punto richiesto. Che se i luoghi descritti avessero più punti comuni, o nessuno, si conchiuderebbe rispettivamente che il problema ammette altrettante soluzioni, o che non ne ammette nessuna.

Ad es., nel problema precedente si vede chiaro che il punto domandato deve soddisfare a due condizioni distinte; a quella di essere equidistante dai due punti A e B , e a quella di avere dal punto C una distanza data. Alla prima soddisfanno tutti e unicamente [165] i punti dell'asse del segmento AB ; alla seconda condizione soddisfanno tutti e soltanto i punti del cerchio, che ha centro in C e raggio eguale alla distanza data. Pertanto il punto cercato deve trovarsi ad un tempo e sulla retta e sul cerchio accennato.

Se si tratta di un caso particolare, la retta e il cerchio

si descrivono, e, secondo che hanno nessuno, uno, o due punti in comune, nessun punto, uno, o due sono i punti domandati. Ma quando si tratta soltanto di accennare il come si risolva il problema, allora si può anche tralasciar di fare una figura; allora la considerazione delle particolarità, che possono presentarsi, costituisce un complemento necessario della trattazione del problema, complemento che si dice discussione del problema; laddove le considerazioni preliminari, dalle quali risulta il da farsi, costituiscono ciò che si dice l'analisi del problema.

Da quanto precede riesce manifesta l'importanza di conoscere molti luoghi geometrici, che siano però rette, o cerchi. Ora ne accenneremo parecchi, e poi ci proporremo problemi, nei quali si possa farne applicazione).

140. Quale figura è il luogo dei centri dei cerchi di dato raggio, che passano per un punto dato?
141. Luogo dei centri dei cerchi che passano per due punti dati.
142. Luogo dei centri dei cerchi che toccano una retta in un punto dato.
143. Luogo dei centri dei cerchi, i quali toccano due rette che si tagliano.
144. Luogo dei centri dei cerchi che toccano, esternamente o internamente, un cerchio dato in un punto dato.
145. Luogo dei centri dei cerchi di dato raggio che toccano, internamente od esternamente, un cerchio dato.
146. Luogo dei centri dei cerchi, che toccano due dati cerchi concentrici.
147. Luogo dei centri dei cerchi di dato raggio, che hanno con un dato cerchio in comune una corda eguale a un dato segmento.
148. Luogo dei centri dei cerchi di dato raggio, che dimezzano un cerchio dato.
149. Luogo dei punti di mezzo delle corde di un cerchio, che sono eguali a un dato segmento.
150. Luogo dei punti da cui si possono condurre a un cerchio dato tangenti eguali a un dato segmento.
151. Luogo dei centri dei cerchi di dato raggio, che tagliano un cerchio dato sotto angolo dato (tali, cioè, che le rispettive tangenti nel punto d'incontro comprendono un angolo dato).

152. Descrivere con raggio dato un cerchio, che passi per un punto dato, ed abbia il centro sopra una retta data, o sopra un cerchio dato. [140].
153. Descrivere con raggio dato un cerchio, che passi per due punti dati. [140].
154. Descrivere un cerchio, che passi per due punti dati, ed abbia il centro sopra un cerchio dato. [141].
155. Descrivere un cerchio di dato raggio, che tocchi una retta data in un punto dato. [142, 140].
156. Descrivere un cerchio, che tocchi due date rette le quali si tagliano, e che abbia il centro sopra un cerchio dato. [143].
157. Da un punto sono tirate le tangenti ad un cerchio. Si descriva un altro cerchio, che tocchi le due tangenti e il cerchio dato. [143].
158. Con raggio dato descrivere un cerchio, che tocchi un cerchio dato in un punto dato. [144, 140].
159. Descrivere un cerchio, che abbia raggio dato, passi per un punto dato, ed abbia data distanza da un punto dato. [228].
160. Descrivere un cerchio, che tocchi l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, e un cateto in un punto dato. [142, 143].
161. Con raggio dato descrivere un cerchio, che tocchi un cerchio dato, ed abbia il centro sopra una retta data. [145].
162. Descrivere con raggio dato un cerchio, che abbia il centro sopra un cerchio dato, e che tocchi un altro cerchio dato. [145].
163. Descrivere un cerchio, che tocchi due dati cerchi concentrici, e passi per un punto situato tra i due cerchi. [146].
164. Con raggio dato descrivere un cerchio che passi per un punto dato e tocchi un dato cerchio. [140, 145].
165. Con raggio dato descrivere un cerchio, che tocchi due cerchi dati. [145].
166. Descrivere con raggio dato un cerchio, che passi per un punto dato, e dimezzi un cerchio dato. [140, 148].
167. Iscrivere e circoscrivere un cerchio a un triangolo equilatero. [143].
168. Iscrivere un cerchio in un triangolo qualunque. [143].
169. Iscrivere un cerchio in un quadrangolo, nel quale sono eguali tra loro due lati consecutivi, ed eguali tra loro anche gli altri due lati. [143].

170. Tirare una corda, che sia perpendicolare a un diametro dato, ed eguale a un dato segmento. [149].
171. Trovare sopra un cerchio un punto, che abbia da un diametro dato data distanza. [170].
172. In un cerchio tirare una corda, che sia eguale a un segmento dato, e che sia dimezzata da un'altra corda segnata nel cerchio. [149].
173. Da un punto dato tirare a un cerchio dato una secante in modo che la parte di questa, che è compresa nel cerchio, sia eguale a un dato segmento. [149].
174. Da un punto dato condurre a un cerchio dato una secante in guisa che l'angolo al centro, che insiste sull'arco tagliato via dalla secante, sia eguale a un angolo dato. [149].
175. Descrivere mezzo cerchio, che abbia le estremità sopra un lato di un triangolo adiacente ad angoli acuti, e che tocchi gli altri due lati del triangolo. [143].
176. Tirare una retta, che abbia data distanza da un punto dato, e sia equidistante da due punti dati.
177. Con raggio dato descrivere un cerchio, che abbia il centro su cerchio dato (o su retta data), e che tagli un'altro cerchio dato in modo che la corda comune sia eguale a un dato segmento. [147].
178. Con raggio dato descrivere un cerchio, che tagli due dati cerchi in modo che le corde comuni siano eguali rispettivamente a due dati segmenti. [147].
179. Descrivere con raggio dato un cerchio, che passi per un dato punto, ed abbia con un dato cerchio in comune una corda eguale a un segmento dato. [140, 147].
180. Sopra un cerchio (od una retta) trovare un punto così, che le tangenti da esso condotte a un dato cerchio siano eguali a un dato segmento. [150].
181. Descrivere tre cerchi eguali in modo che ciascuno tocchi gli altri due e due lati di un triangolo equilatero dato. [143].
182. Dato un cerchio e una retta, tirare una secante in modo che le parti di questa comprese, una nel cerchio l'altra fra il cerchio e la retta, siano eguali a due dati segmenti. [149, 150].
183. Costruire un triangolo, date l'altezza e la mediana relative a un lato, e dato il raggio del cerchio circoscritto. (Si costruirà dapprima il triangolo di cui l'altezza e la

mediana sono due lati. Poi si determinerà il centro del cerchio circoscritto. [140, 165]).

184. Costruire un triangolo, dato un lato, la somma degli altri due, e l'altezza relativa a uno di questi lati.
185. Con raggio dato descrivere un cerchio così che le tangenti, condotte ad esso da due punti dati, siano eguali rispettivamente a due dati segmenti.
186. In un cerchio tirare una corda in modo che la differenza tra i due archi, in cui essa divide il cerchio, sia eguale a un dato arco dello stesso cerchio.
187. È dato un cerchio una tangente, e un punto su questa. Si descriva un cerchio, che tocchi esternamente il dato, abbia il centro sulla tangente, e passi per il punto dato. (Si porti sulla tangente, partendo dal punto, un segmento eguale al raggio del cerchio).
188. Per un punto dato fuori di un cerchio condurre a questo una secante in modo che il segmento compreso nel cerchio e quello compreso tra il cerchio e il punto dato siano eguali. (La questione si riduce a costruire un triangolo di cui sono noti due lati e la mediana relativa al terzo lato).
189. Costruire tre cerchi di dati centri, che si tocchino a due a due. [168].
190. Un cerchio e una retta non hanno nessun punto in comune. Quale è la più grande e quale la più piccola tra le distanze dei punti del cerchio dalla retta? [228, 162].
191. Sono dati due punti A e B sopra un cerchio, e un terzo punto C esternamente. Si vuol tirare per A e B due corde AA' e BB' in modo che gli archi da esse compresi siano eguali, e che la retta $A'B'$ passi per C . (Si tagli la retta $A'B'$ col cerchio concentrico col dato e che passa per C [126]).
192. Dato un punto A e due cerchi di centri B, C , tirare per A un segmento che abbia le estremità sui due cerchi, e che sia diviso per metà dal punto A . (I segmenti, che sono dimezzati dal punto A e che hanno una estremità sopra uno dei cerchi, su che linea hanno l'altra estremità?).
193. Per un punto dato tirare un segmento, che abbia una estremità sopra un cerchio dato e l'altra su retta data, in modo poi che sia dimezzato dal punto dato. (Si cali dal punto la perpendicolare sulla retta; la si dimezzi...).

194. Costruire un triangolo, dati a, h_b ed m_a .
195. Costruire un quadrangolo $ABCD$, dati AC, CD, DB , $A(C)D$ e $C(A)B$.
196. Dato un triangolo rettangolo, descrivere un cerchio che tocchi l'ipotenusa, che passi per il vertice dell'angolo retto, e che abbia il centro sopra un cateto. (Si dimezzi l'angolo opposto al cateto che si considera).
197. Iscrivere in un cerchio un quadrangolo, di cui si conoscono due lati opposti e la distanza dei punti di mezzo di codesti lati.
198. Due cerchi hanno per diametri due raggi formanti un diametro di un terzo cerchio. Si descriva un cerchio, che tocchi tutti e tre i cerchi dati.
199. Si determini, usando del solo compasso, i punti in cui la retta, determinata da due punti dati, taglia un dato cerchio. (Si costruisca il punto simmetrico al centro rispetto alla retta data. Poi, facendo centro nel nuovo punto e con raggio eguale a quello del cerchio dato, si descriva un cerchio... Si discuteranno i vari casi).
200. Le altezze di un triangolo acutangolo passano per uno stesso punto.

