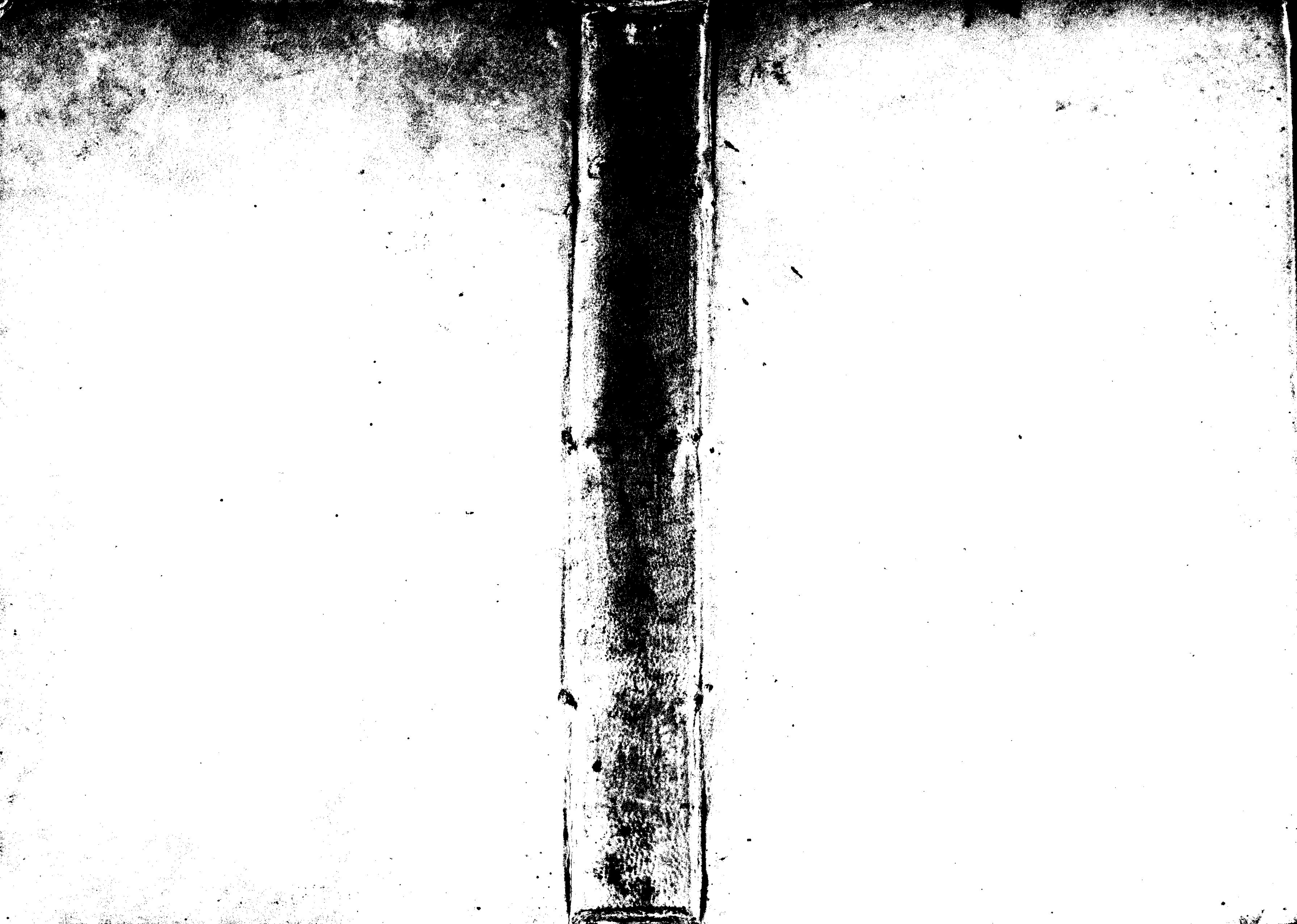






ELEMENTI GEOMETRICI  
PIANI, E SOLIDI  
DI EUCLIDE

POSTI BREVEMENTE IN VOLGARE

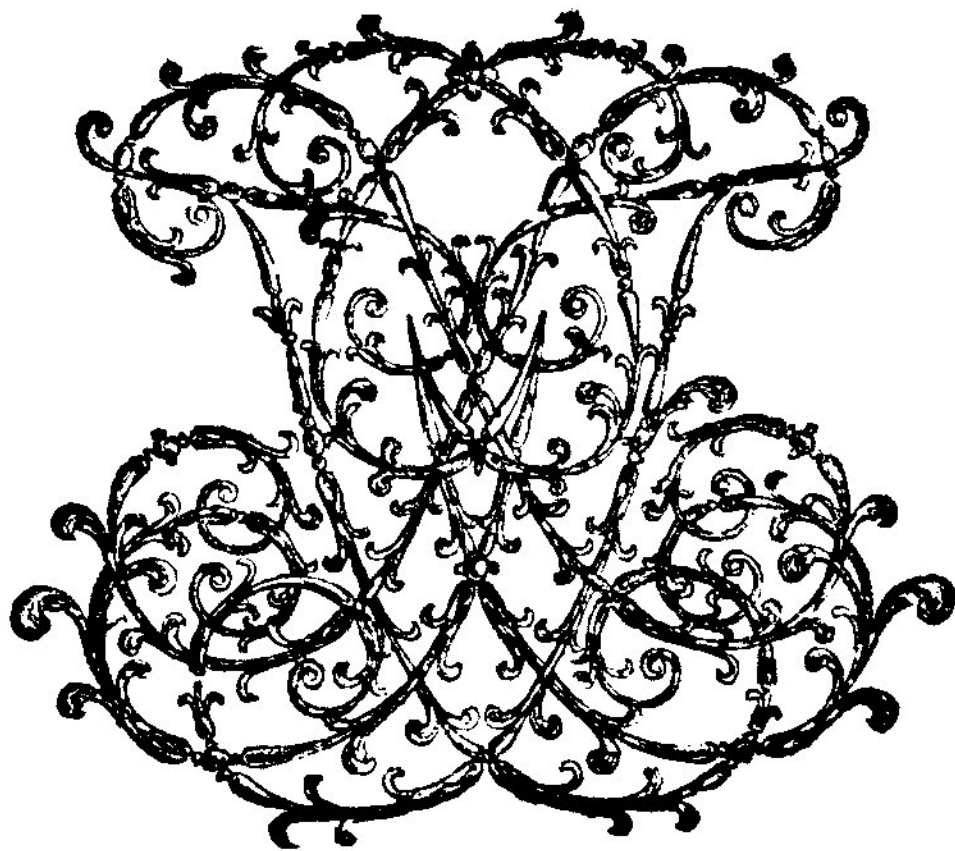
DAL REVERENDISS. PADRE ABATE

D. GUIDO GRANDI

CAMALDOLESE

AD USO DEI MONASTERI DELLA  
ORDINE DEI BENEDICTINI

*Ad uso dei Benedicini*



IN LIRELLA NELLA STAMPERIA DI S. A. S.

---

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi

CON IL DE SUE MODICITÀ.







# PREFAZIONE

A' BENEVOLI LETTORI.



Questi ELEMENTI GEOMETRICI , fatti da EUCLIDE , sono necessarj a chiunque brama erudirsi della Mattematica , la quale è necessaria non solo a' Filosofi , come ne discorrono molti , e nelle Opere Fisiche tante si trovano poste immagini Mattematiche ; ma ancora a' Teologi , ed a' Legali , come di quelli ne discorre il P. Carlo Rabby nel suo Libro a me dedicato , il di cui titolo è : *De Mathematicarum disciplinarum ad Theologiam utilitate , ipsarumque in ea usu* ; e di questi altri ne accenna il Delfinate Giovanni Butteoni nelle sue Opere Geometriche pag. 135. col titolo ivi posto :  
Geo-



*Geometriae cognitionem Jurisconsulto necessariam*. E che a tutti i Letterati appartenga la Geometria, dice l'Imperatore Diocleziano, con l'altro Massimiano, nel Codice *lib. 9. tit. 18. l. 2. Artem Geometriae discere, atque exercere publicè interest*; ove, benchè vi si aggiunga: *Ars autem Mathematica damna-bilis est*, si parla de' Malefici, di cui dicefi nel Lessico Giuridico *pag. 567. Mathematici dicuntur, non qui honestissima Mathematicum studia docent, sed qui divinationibus, & aruspici-nis homines ludificantur, ut Genethliaci, Astrologi, Chaldei, quorum ars jure nostro impro-bata &c*

Però chi non averà imparati questi Geometrici Elementi, non potrà in altre Dottrine riuscir bene informato, a proposito di tutte le Scienze, in cui si trovano alcune proposizioni, appartenenti ad essi Teoremi, o Problemi Geometrici di qualche pratica proposta da' Mattematici; onde la regola di qualsivoglia difesa non manca de' Geometri, come dicefi nella *legge 22. del tit. 1. lib. 27. digestorum*, cioè: *Geometrae a tutelis non vacant*; ed il Proclo Diadoco *lib. 2. cap. 5.* ne accenna: *Geometricarum re-rum*

v

*rum contemplationis institutio, invincibilem, perfectamque habet enarrationem*; e molto più altrove ne parla in quell' Opera, dove commenta questi Elementi d' Euclide.

Non fu però Euclide il primo, che parlasse di tali principj Mattematici, avendone prima parlato Talete, Milefio, Pittagora, Anaxagora, Clazomenio, Ippocrate Chio, Leonzio, Eudosso Gnidio, Theudio Magnete, Ermorimo Colofonio ec. Ma più prestantemente furono raccolti da Euclide, e rimessi gli anteriori, che non più si ritrovano; però solamente questi Elementi di Euclide, per venti secoli unicamente sono stati abbracciati da chiunque si volle informare delle Istituzioni Mattematiche; e solamente in quest' ultimo secolo, cioè dal 1650. in qua ne sono stati fatti altri Elementi di Geometria da varj Autori, dal Borelli, dal Lami, dal Pardies, dallo Sturmio, dal Rossetti, dal Sig. Angelo Marchetti ec. e da me ancora, come potrà vederfi nelle mie Istituzioni Geometriche.

Questo dottissimo Geometra Euclide fu da molti chiamato *Megarense*, cioè da Bartolommeo Zamberto, negli Elementi da esso  
stam-

stampati di Campano, e di Teone Greco; ed ancora da Giovanni Scheubeglio, da Oronzio Fineo, da Niccolò Tartalea, e da alcuni altri; il che però è falsissimo, benchè sia stato Euclide Megarense un Filosofo discepolo di Socrate, creduto da quelli Autori, essere l'istesso Mattematico, che fece questi Elementi; il che non è vero. Imperocchè Proclo Diadoco dice di questo Euclide Mattematico, che fiorisse al tempo di Tolomeo Lago Re di Egitto, di cui godeva la familiarità, e la grazia; ma dalla morte di Socrate, Maestro di quell'altro Euclide Megarense, ne corsero 95. anni al Regno del suddetto Tolomeo, come dice Stanleio; o almeno anni 80. come accenna il Petavio; dunque non potea questo Euclide Mattematico essere lo stesso con quell'altro Euclide Megarense discepolo di Socrate, e però vissuto più avanti del Mattematico.

Di più lo stesso Proclo afferma, che questo Euclide Geometrico fosse più giovane di Menechemo, discepolo di Eudolso Gnidio, il quale pure era stato discepolo di Platone; ma fu ancora di Platone Maestro il detto Socrate, dunque esso Mattematico Euclide

non



non può avere conosciuto Platone , se non molto vecchio, e molto meno potè essere egli discepolo di Socrate , come era quell' altro Euclide di Megara; ed ancora può osservarsi, che tra gli scritti d' Euclide Megarense, registrati da Diogene Laerzio, non vi è cosa alcuna mattematica , e però non può crederfi, essere il medesimo coll' Autore di questi Geometrici Elementi. Anzi l' istesso Diogene Laerzio rapporta, che quell' Euclide Megarense si era dato a contese litigiose , e dal Maestro Socrate fu biasimato , che gli disse, non poter esso abitare con uomini ragionevoli, ma con cavillosi sofisti. Il che non può attribuirsi ad Euclide Geometra, che fu mansuetissimo, e dottissimo, come ce lo descrive Pappo Alessandrino: *suavissimi Vir ingenii*. Che però non era di Megara, ma della Regia Alessandria, dove egli aprì la prima scuola di Mattematica, e ne fece molti buoni discepoli, da cui succedettero Eratostene, ed Archimede.

Questo è quanto può dirsi, intorno alla Patria di Euclide, Autore di questi Elementi Geometrici, de' quali però solamente i primi  
fei

fei libri de' Piani, e poscia l'undecimo, il duodecimo, e il terzodecimo de' Solidi ho quì addotti; avendo lasciati il settimo, l'ottavo, ed il nono, ove si parla della proporzione de' numeri, ed ancora il decimo, ove tratta delle grandezze commensurabili, ed incommensurabili; siccome pure questi libri furono omissi negli Elementi fatti stampare dal Sig. Viviani, e da altri Autori, ne' libri Geometrici da loro dati alle stampe. Voi però, Benevoli Lettori, leggendo queste Proposizioni, da me alquanto più brevemente raccolte, facilmente ne imparerete il maggior corso della Matematica. E nel riverirvi devotamente, vi prego vivere felici.

I

# E L E M E N T I

## DELLA GEOMETRIA

# D I E U C L I D E .

### L I B R O I .

---

### D E F I N I Z I O N I .

I.  L PUNTO è un segno nella quantità, senza veruna parte.

II La LINEA è una estensione in lungo, senza veruna larghezza.

III. E se la linea è terminata, i suoi TERMINI faranno i due punti, in cui finisce.

IV. Dicesi RETTA quella linea, che tra i suoi punti si distende egualmente.

*Così facendo colla penna un tratto AB, ovvero DE, il segno A, da cui principia, e l' altro B, in cui termina, è un PUNTO, di cui non può determinarsi parte veruna, perchè se fosse divisibile, non sarebbe tutto il principio, nè tutto il fine di questo semplice tratto, il quale è una LINEA AB distesa in lungo da un termine all' altro, ma senza larghezza, perchè quantunque la grossezza della punta della penna, da cui fu segnata, gli abbia data qualche piccola estensione in largo, questa non deve attendersi, ma solamente l' estensione in lungo da un termine all' altro: in quella maniera, che misurandosi l' altezza di varie torri, non si fa conto del-*

A

la

Tav. I.  
FIG. I.

la loro larghezza, ma solamente si considera l'estensione in lungo, dal piano sopra cui posano, alle loro sublimi punte. Dicesi poi *AB LINEA RETTA*, perchè ancora qualunque punto *C*, in cui può dividersi, è interposto direttamente fra i termini *A, B*, nè veruno di quei punti intermedj si diverte a destra, o a sinistra, e però si distende egualmente essa linea fra i punti estremi; a differenza dell'altra linea *DE* (che chiamerebbesi *LINEA CURVA*) la quale non è ben tesa al pari fra l'uno, e l'altro de i suoi termini *D, E*, ma dividendosi in qualunque punto *F*, si vede questo distratto a destra, o a sinistra, più di un altro punto *G*, in cui può altrove dividersi, e però si vede piegata questa linea in un seno, e non distesa direttamente, come l'altra *AB*, che è la minima si possa descrivere fra i medesimi termini *A, B*.

V. *SUPERFICIE* dicesi l'estensione in lunghezza, e in larghezza, senza veruna profondità.

VI. E se la superficie è terminata, gli suoi *ESTREMI* sono le linee, in cui finisce.

VII. Dicesi *PIANA* quella superficie, che giace distesa egualmente tra le sue linee.

FIG. 2. Così l'estensione *ABCD*, la cui lunghezza è *AB*, e la sua larghezza *BC*, è una *SUPERFICIE*, la quale, se non ritorna in se stessa, come è quella di una palla rotonda, ma è terminata, ha per suoi *TERMINI*, o *ESTREMI* quelle linee, da cui è circondata, o siano rette, come *AB, BC, CD, AD*, da cui è confinata la superficie *ABCD*, o siano parte rette. e parte curve, come la superficie *ADEF*, o vero l'altra *FBCE*, di cui la curva *FE* è uno degli estremi, o da più curve, o da una curva sola,



*la, da cui fosse circonscritta. E se detta superficie ABCD, tra le sue linee estreme è così egualmente distesa, come un velo per ogni verso ben tirato, che in veruna parte non si avvallì, dicesi PIANA: a differenza d' un'altra superficie GNLH, che è* FIG. 3. *come una vela gonfia dal vento, e da varie linee HI, HM, HK divisa, non si trovano queste egualmente giacenti, ma alcune più alte, ed altre più basse.*

VIII. L'ANGOLO PIANO è ciò, che risulta dall'inclinazione di due linee, le quali nella superficie piana s'incontrino in un punto, e non siano poste per diritto fra loro.

IX. Se le linee contenenti l'angolo faranno amendue rette, dirassi tale angolo RETTILINEO.

X. Stando una linea retta sopra di un'altra, in maniera, che non penda più da questa, che da quella parte, dirassi PERPENDICOLARE alla linea soggetta.

XI. E ciascheduno degli angoli uguali, che di quà, e di là ne risultano, chiamerassi ANGOLO RETTO.

XII. L'angolo poi maggiore del retto dirassi ANGOLO OTTUSO, ed il minore del retto, ANGOLO ACUTO.

*Le rette AC, BC, che s'incontrano per diritto nel punto C, non fanno un angolo, ma una medesima linea retta; le linee poi EC, BC, di cui l'una è inclinata all'altra, costituiscono l'ANGOLO PIANO ECB (nominando qualunque angolo, si porrà sempre nel mezzo il punto, in cui le linee s'incontrano, e negli estremi l'uno, e l'altro termine di esse linee, come quì si è detto ECB, di cui la let-* FIG. 4.

tera di mezzo  $C$  indica il punto, in cui si fa l'angolo, e le altre due  $E$ ,  $B$  indicano gli estremi delle linee, che lo comprendono) ed è ANGOLO RETTILINEO, essendo ambe le linee  $CE$ ,  $CB$  rette; che se fossero curve, si direbbe CURVILINEO, se una retta, l'altra curva, MISTILINEO. In quanto poi alla linea  $DC$ , che insiste nel punto  $C$  sopra la retta  $AB$ , non essendo più inclinata da una parte, che dall'altra, si chiama PERPENDICOLARE essa  $DC$  alla soggetta  $AB$ ; e ciascuno degli angoli, che risultano eguali dall'una, e dall'altra parte,  $DCA$ ,  $DCB$ , dicesi ANGOLO RETTO; ma l'angolo  $ECA$ , che comprende il retto  $DCA$ , e però è maggiore di esso, si dirà ANGOLO OTTUSO, e l'angolo  $, che è una parte dell'angolo  $DCB$ , e però è minore del retto, si chiamerà ANGOLO ACUTO.$

XIII. FIGURA dicesi quell'estensione, che da uno, o più termini è circonscritta, li quali TERMINI sono gli estremi, da cui è confinata.

XIV. Delle figure comprese da linee curve, che CURVILINEE si nominano, la più semplice è il CERCHIO, o CIRCOLO, che è una figura piana compresa da una sola linea curva, che ritorna in se stessa (e chiamasi CIRCONFERENZA, o PERIFERIA) a cui tirate quante si vogliano linee rette da un punto dentro il piano di essa figura, tutte fra di loro riescono uguali.

XV. Quel punto, da cui si spiccano le linee tutte uguali, dicesi CENTRO.

XVI. E qualunque retta linea, che passi per esso centro, e termini alla circonferenza da ambe le parti opposte, dicesi DIAMETRO.

XVII. La Figura compresa da esso diametro, e dal-

dalla parte di circonferenza segata da esso, chiamasi SEMICIRCOLO, o MEZZO CERCHIO.

*Si descrive questa figura con un compasso di due FIG. 5.  
gambe aperte a qualche intervallo, tenendo fissa nel punto C la punta di una gamba, e facendo girare l'altra nel piano, in cui si disegnerà la curva AD BF, che ritorna in se stessa; così questa figura sarà un CIRCOLO, o CERCHIO, la curva, da cui è terminata, dirassi CIRCONFERENZA, o PERIFERIA; il punto C sarà il CENTRO, e tutte le rette CE, CD, CF, &c. saranno eguali, e si diranno RAGGI, o SEMIDIAMETRI, e tutta l'intera retta AB tradotta pel centro, si dirà DIAMETRO, e la figura ADB SEMICIRCOLO, o MEZZO CERCHIO.*

XVIII. Le figure poi contenute da linee rette chiamansi RETTILINEE, delle quali la più semplice è quella, che da tre linee rette comprendesi, e si chiama TRILATERA FIGURA, ovvero TRIANGOLO; se poi si racchiude da quattro rette linee, si dirà FIGURA QUADRILATERA, e se da più di quattro, MOLTILATERA.

XIX. Di esse figure Trilatera quella, che ha tre lati uguali, chiamasi TRIANGOLO EQUILATERO.

XX. Quella poi, che ha due soli lati uguali, dicesi TRIANGOLO ISOSCELE, o EQUICRURE.

XXI. E quella, che sarà compresa da tre lati disuguali, si dirà TRIANGOLO SCALENO.

XXII. Si possono ancora denominare dagli angoli, de' quali se uno in essa figura Trilatera è retto, si dirà TRIANGOLO RETTANGOLO; se uno è ottuso, chiamerassi OTTUSIANGOLO; se tutti acuti, dirassi ACUZIANGOLO.

FIG. 6. Essendo le rette linee  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  eguali, il triangolo  $ABC$  dicefi EQUILATERO; e se i lati  $DE$ ,  $DF$  solamente siano uguali, dicefi il triangolo  $DEF$  ISOSCELE, o EQUICRURE; ed essendo tutti i lati  $GH$ ,  $HI$ ,  $IG$  disuguali sarà il triangolo  $HGI$  SCALENO. Se poi l'angolo  $KLM$  fosse retto, sarebbe  $KLM$  un triangolo RETTANGOLO; ed essendo l'angolo  $GHI$ , ottuso, il triangolo  $GHI$  si dirà OTTUSIANGOLO; ma essendo tutti gli angoli acuti, come in  $ABC$ , e in  $EDF$ , si dirà ciascuno di essi triangolo ACUZIANGOLO.

XXIII. Delle Figure poi Quadrilatero, quella, che ha tutti i lati uguali, e ciaschedun angolo retto, si chiama QUADRATO.

XXIV. Quella poi, che non ha ciascun lato eguale, e però è bislunga, ma ha tutti gli angoli retti, dicefi RETTANGOLO.

XXV. Quella che ha tutti i lati eguali, ma gli angoli non retti, chiamasi ROMBO.

XXVI. Quella poi che ha solamente i lati opposti, e gli angoli opposti eguali, ma non è equilatera, ne rettangola, si nomina ROMBOIDE.

XXVII. L'altre figure poi quadrilatero, che non hanno tali condizioni, si dicono TRAPEZII.

Si vede l'esempio del QUADRATO nella figura  
FIG. 7.  $ABCD$ , e del RETTANGOLO nell'altra  $FGHE$ ,  
FIG. 8. siccome del ROMBO nella  $IKLM$ , e della ROMBOIDE  
nella seguente  $NOPQ$ , siccome del TRAPEZIO nel  
FIG. 9. quadrilatero  $RSTV$ .

XXVIII. Si dicono tra di loro PARALLELE quelle linee rette, che giacendo nella stessa superficie piana, ancora che si prolungassero in infinito verso qualunque parte, mai converrebbero insieme.

*Ta-*



*Tali sono le rette AB, CD, che tanto a destra, FIG. 10. quanto a sinistra prolungate non concorrono in verun punto, anzi mantengono sempre la stessa distanza tra loro, e però diconsi PARALLELE: e così sono i lati opposti delle prime quattro specie di Quadrilateri, cioè del Quadrato, del Rettangolo, del Rombo, e della Romboide, li quali ancora generalmente diconsi PARALLELOGRAMMI, per avere qualunque paio di lati opposti, tra di loro paralleli.*

*D I M A N D E.*

I. Si ammetta, che da qualunque punto a qualsivoglia altro punto possa tirarsi una linea retta.

II. E qualsivoglia data linea possa prolungarsi in infinito, quanto farà di bisogno.

III. E da qualunque punto, come centro, con qualsivoglia intervallo, che determini il raggio, cioè la distanza della circonferenza dal centro, si possa descrivere un cerchio.

*A S S I O M I.*

I. Quelle cose, che sono uguali ad una terza, sono ancora eguali fra loro.

II Se alle cose uguali si aggiungono, o si levano altre uguali, o una medesima ad ambidue comune, ne risultano complessi, o residui uguali.

III. Se alle cose disuguali si aggiungono, o si detraggono cose uguali, o una stessa ad entrambi commune, rimangono gli aggregati, o i residui disuguali come prima.

IV. Le cose, che sono il duplo, o la metà di una medesima, o di eguali cose, sono pure tra di loro uguali,

## 8 ELEMENTI DI EUCLIDE

V. Le cose , che sovrapposte si combaciano esattamente , sono altresì uguali .

VI. Il tutto è maggiore di qualunque sua parte , ed è uguale alla somma di esse .

VII. Tutti gli angoli retti sono tra di loro uguali .

VIII. Se due linee rette siano segate da una terza , in maniera , che da una parte ne risultino due angoli interni minori di due retti , e dall' altra banda maggiori , prolungate in infinito quelle due rette dalla banda , ove sono gli angoli minori , dovranno insieme concorrere .

*La verità , ed evidenza di questo Assioma si mostrerà dopo la Proposizione 28. del lib. 1. e sarà allora più agevolmente intesa .*

IX. Due linee rette non comprendono interamente spazio veruno .

X. Incontrandosi due linee rette in un punto , si segano , e non vanno insieme per verun tratto di lunghezza , che possa essere un segmento commune ad ambidue , ma subito si separano l' una dall' altra .

### AVVERTIMENTO.

*Alcune proposizioni della Geometria si chiamano PROBLEMI, quando in esse si propone qualche cosa pratica da farsi . Altre si dicono TEOREMI, ne' quali solamente si espone qualche verità speculativa da dimostrarsi . In ciascuna di tali proposizioni conviene distinguere il DATO, e il QUESITO, perchè sempre , date alcune cose , si cerca , o di farne alcune altre ne' Problemi, o di mostrarne altre ne' Teoremi . In oltre occorre per lo più di fare qualche*  
ope-

*operazione sopra il Dato, per eseguire il proposto ne i Problemi, o per fare strada alla dimostrazione de i Teoremi; e questa dicesi COSTRUZIONE, a cui poscia segue la DETERMINAZIONE del quesito, e indi la DIMOSTRAZIONE, che è la parte principale di tutte le proposizioni; e finalmente la CONCLUSIONE di ciò, che si dovea fare, o dimostrare. Noi distingueremo ciascuna di queste parti nella Proposizione prima, che è il primo Problema, e nella quarta, che sarà il primo Teorema, per poterle distinguere, come potrà fare qualunque discreto, ed attento Lettore nell' altre proposizioni, in cui non accaderà darne veruno indizio, per essere più succinti.*

*Ne' titoli delle proposizioni problematiche si aggiungerà il vocabolo di PROBLEMA, e quello di TEOREMA si metterà solamente nel primo, e non nell' altre Proposizioni, che si supporranno tutte Teorematiche, quando non vi è apposta la parola di PROBLEMA.*

*COROLLARIO poi dicesi ciò, che si deduce dal già dimostrato nella precedente proposizione.*

# PROPOSIZIONE I. PROBLEMA. FIG. II.

*Sopra una data retta linea terminata AB costituire un Triangolo equilatero.*

Dato.

Quesito.

**D** Al centro *A*, coll' intervallo *AB*, descrivasi il cerchio *BCD*<sup>a</sup>, e similmente dal centro *B*, coll' intervallo *BA*, descrivasi un altro cerchio *ACE*<sup>a</sup>. E dal punto *C*, in cui s' incontreranno le loro circonferenze, a gli estremi punti *A*, *B* della data linea *AB*, si conducano le rette linee *CA*, *CB*<sup>b</sup>. Dico, che il triangolo *ABC* quindi

Costruzione.

<sup>a</sup> Dimanda 3.

<sup>b</sup> Dimanda 1.

re-

Determina- risultante, farà Equilatero. Essendo  $A$  il centro  
 zione. del cerchio  $BCD$ , farà  $AC$  uguale ad  $AB^a$ ;  
 Dimostrazione. ed essendo ancora  $B$  centro del cerchio  $ACE$ ,  
 a Definizio- farà pure  $CB$  uguale ad  $AB^a$ . Dunque le due  $AC$ ,  
 ne 14.  $CB$  sono altresì uguali tra di loro <sup>b</sup>; e però tut-  
 b Axiom. 1. ti tre i lati del triangolo  $ABC$  essendo uguali,  
 c Defin. 19. farà esso triangolo Equilatero <sup>c</sup>. Adunque sopra la  
 Costruzio- data retta linea  $AB$  si è formato il triangolo equi-  
 ne. latero; il che si era proposto di fare.

### PROPOSIZIONE II. PROBL.

FIG. 12. *Dal dato punto A tirare una linea retta AL uguale ad un'altra data BC.*

d Diman- Tirisi la retta  $AB^d$ , e sopra di essa formisi il  
 da 1. triangolo equilatero  $ABD^e$ , i di cui la-  
 e Proposiz. ti  $DB$ ,  $DA$  si prolunghino indefinitamente <sup>f</sup>, e  
 preced. col centro  $B$  all'intervallo  $BC$  descrivasi il cerchio  
 f Diman-  $CH^g$ , segante il lato prolungato  $DB$  in  $G$ . Po-  
 da 2. scia col centro  $D$  all'intervallo  $DG$  si descriva.  
 g Diman- l'altro cerchio  $GK^g$ , segante il lato prolungato  
 da 3.  $DA$  in  $L$ . Perchè dunque sono eguali le rette  
 h Defn 14.  $DG$ ,  $DL^h$ , come ancora le rette  $DB$ ,  $DA^i$   
 i Defn 19. levando queste da quelle, rimarranno eguali le  
 k Axiom. 2. residue  $BG$ ,  $AL^k$ ; ma ancora  $BC$  è uguale a  
 l Defn 14.  $BG^l$ ; dunque le rette  $AL$ ,  $BC$  sono eguali, <sup>m</sup> e  
 m Axiom. 1. però dal dato punto  $A$  si è condotta  $AL$  ugua-  
 le alla data retta linea  $BC$ . Il che erasi propo-  
 sto di fare.

### PROPOSIZIONE III. PROBL.

FIG. 13. *Date due linee rette disuguali, dalla maggiore AB tagliarne una parte AE, uguale alla C minore delle date.*

Ti-



**T**irisi dal punto  $A$  la retta  $AD$  uguale alla  $Ca$ ,  
 e col centro  $A$  descrivasi per il punto  $D$  il  
 cerchio  $DF$ <sup>b</sup>, che segnerà la  $AB$  in  $E$ . Sarà  
 dunque  $AE$  uguale ad  $AD$ <sup>c</sup>, e però ancora al-  
 la data  $C$ <sup>d</sup>. Il che si doveva fare.

<sup>a</sup> Proposiz.  
 preced.

<sup>b</sup> Diman-  
 da 3.

<sup>c</sup> Defin. 14.

<sup>d</sup> Assiom. 1.

#### PROPOSIZIONE IV. TEOREMA. FIG. 14.

*Se due triangoli  $ABC$ ,  $DEF$  averanno un an-  
 golo  $A$  eguale ad un angolo  $D$ , ed intorno ad essi siano  
 i lati dell' uno uguali a i lati dell' altro, cioè  $AB$   
 uguale a  $DE$ , ed  $AC$  uguale a  $DF$ , sarà anco-  
 ra la base  $BC$  dell' uno, uguale alla base  $EF$  del-  
 l' altro, e ciascuno degli altri angoli eguale al suo  
 corrispondente, cioè l' angolo  $B$  all' angolo  $E$ , e l' an-  
 golo  $C$  all' angolo  $F$ ; e tutto il triangolo  $ABC$  sa-  
 rà uguale a tutto il triangolo  $DEF$ .*

Dato.

Questito.

**S'**Intenda applicarsi un triangolo sopra l' altro,  
 di maniera che l' angolo  $A$  si sovrapponga al-  
 l' angolo  $D$ , e il lato  $AB$  si adatti sopra il lato  
 $DE$ . Quindi si vedrà essere le basi, e tutti gli al-  
 tri angoli eguali, e ciascheduno de' triangoli ugua-  
 gliare l' altro suo compagno. Imperocchè l' al-  
 tro lato  $AC$  caderà sopra il lato  $DF$ , altrimenti  
 gli angoli  $A$ , e  $D$  non farebbero uguali, contro  
 l' ipotesi; e il punto  $B$  caderà in  $E$ , e il  $C$  in  $F$ ,  
 essendosi supposti quei lati uguali; sicchè la base  
 $BC$  dovrà adattarsi sopra la base  $EF$ , ed esatta-  
 mente coprirla, altrimenti le due linee rette com-  
 prenderebbero spazio, il che è assurdo<sup>e</sup>; che  
 però combaciandosi amendue le basi, e ciasche-  
 diun' angolo al suo corrispondente, e tutto il trian-  
 golo a tutto il triangolo, saranno eguali le basi, ed  
 egua-

Costruzio-  
 ne.

Determina-  
 zione.

Dimostrazione.

<sup>e</sup> Assiom. 9.

eguali gli angoli opposti a i lati eguali, ed ambidue gli spazi de' triangoli parimente faranno eguali <sup>a</sup>. Se dunque due triangoli averanno le condizioni dette nella proposta, cioè un angolo eguale ad un angolo, ed i lati dell' uno eguali a quelli dell' altro intorno al medesimo angolo, faranno pure le loro basi uguali, e gli altri angoli eguali, e le superficie dell' uno, e dell' altro triangolo faranno eguali. Il che dovea dimostrarsi.

<sup>a</sup> *Affiom. 5.*  
Conclusione.

## P R O P O S I Z I O N E V.

*In ogni Triangolo equicrure  $ABC$ , gli angoli interni sopra la base sono tra di loro uguali; e prolungando sotto essa base ambi i lati, gli angoli, che ne risultano esteriormente, faranno pure tra di loro uguali.*

FIG. 15.

**P**igliasi qualunque punto  $F$  nel lato  $AB$  prolungato, e alla  $AF$ , si ponga nell' altro lato  $AC$  eguale la  $AG$  <sup>b</sup>, indi si tirino le rette  $CF$ ,  $BG$  <sup>c</sup>. Essendo che il triangolo  $AFG$  ha lo stesso angolo  $A$ , che l' altro triangolo  $AGB$ , e sono i lati  $AF$ ,  $AG$  eguali, come ancora i lati  $AC$ ,  $AB$ , faranno pure tra loro eguali le basi  $FC$ ,  $GB$ , e altresì l' angolo  $F$  uguagliera l' angolo  $G$ , e l' altro  $ACF$  farà uguale all' altro  $ABG$  <sup>d</sup>, e perchè dalle linee uguali  $AF$ ,  $AG$  detratte le uguali  $AB$ ,  $AC$ , rimane  $FB$  uguale a  $GC$  <sup>e</sup>, e si è provata ancora  $F$  uguale a  $G$ , e gli angoli  $F$ ,  $G$  pure uguali, dunque ne i triangoli  $FCB$ ,  $GCB$  l' angolo  $FCB$  uguagliera l' angolo  $GCB$ , e l' angolo  $CBF$  farà uguale all' angolo  $BCG$  <sup>f</sup>; onde dall' angolo  $ACF$ , e dall' angolo  $ABG$ , che si fo-

<sup>b</sup> *Propos. 3.*

<sup>c</sup> *Dimanda 1.*

<sup>d</sup> *Propos. 4.*

<sup>e</sup> *Affiom. 2.*

<sup>f</sup> *Propos. 4.*

sono provati uguali, sottraendo gli angoli eguali  $FCB$ ,  $GBC$ , rimarranno eguali gli angoli residui  $ACB$ ,  $ABC$ <sup>a</sup>; dunque nel triangolo equicrure <sup>a Assom. 2.</sup> sono eguali gli angoli interni sopra la base, e ancora prolunga i lati al di sotto di essa, gli angoli esteriori  $CBF$ ,  $BCG$  pure sono uguali, come si è provato. Il che è quanto doveva dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE VI.

*Viceversa, se in un triangolo  $ABC$  sono eguali* FIG. 16.  
*due angoli  $B$ , e  $C$ , ancora i lati opposti ad essi,  $AC$ ,  $AB$  saranno uguali.*

**A**ltrimanti, se uno de i lati  $AB$  fosse maggiore dell' altro  $AC$ , tagliata  $BD$  eguale ad  $AC$ <sup>b</sup>, <sup>b Propos. 3.</sup> indi congiunta  $CD$ <sup>c</sup> averanno li triangoli  $ACB$ , <sup>c Dimanda 1.</sup>  $DBC$ , intorno gli angoli  $C$ ,  $B$  eguali, ancora i lati eguali  $AC$ ,  $BD$ , e il lato  $BC$  comune, e però eguale in entrambi; dunque farebbero essi triangoli tra di loro uguali<sup>d</sup>; il che è assurdo, perchè farebbe il tutto eguale ad una sua parte<sup>e</sup>, <sup>d Propos. 4.</sup> <sup>e Assom. 6.</sup> Non è dunque possibile, che detti lati  $AB$ ,  $AC$  fossero disuguali, ma erano ambidue uguali; il che, ec.

## PROPOSIZIONE VII.

*Da i termini della medesima retta linea  $AB$  tirate due rette  $AD$ ,  $BD$  concorrenti nel punto  $D$ ,* FIG. 17.  
*non si potrà da i medesimi termini  $A$ , e  $B$  condurre altre linee  $AC$ ,  $BC$  eguali alle prime, come* <sup>e 18.</sup>  
 *$AC$  alla  $AD$ , e  $BC$  a  $BD$ , le quali dalla medesima banda concorrano in un punto  $C$  diverso dall' altro  $D$ .*

Se

SE ciò si supponesse possibile, o farebbe il loro concorso  $C$  fuori del triangolo  $ADB$ , e il punto  $D$  fuori dell'altro  $ACB$ , o pure uno di detti concorsi  $C$  farebbe dentro l'altro triangolo  $ADB$ . Nel primo caso, congiunta la  $CD$ , farebbe ciascuno de i triangoli  $ACD$ ,  $BCD$  equicrure, supponendosi  $AC$  eguale alla  $AD$ , e la  $BC$  eguale a  $BD$ ; dunque l'angolo  $ACD$  farà eguale all'angolo  $ADC$ <sup>a</sup> ma questo essendo parte dell'angolo  $BDC$ , farà di esso minore<sup>b</sup>, dunque ancora  $ACD$  farà minore di  $BDC$ , e l'altro  $BCD$  molto minore del medesimo  $BDC$ , a cui dovrebbe essere uguale<sup>a</sup>. Dunque non possono le rette uguali alle prime convenire in  $C$  fuori del triangolo  $ADB$ . Ne meno concorreranno nel secondo caso, dentro di esso, perchè prolungate le linee  $BD$ ,  $BC$  in  $F$ ,  $E$  faranno eguali<sup>a</sup> gli angoli esterni  $ECD$ ,  $CDF$ , per l'egualità de i lati  $BC$ ,  $BD$ , e nel triangolo  $ACD$ , per essere  $AC$  eguale ad  $AD$ , faranno pure eguali gli angoli interni  $ACD$ ,  $ADC$ <sup>a</sup>; dunque essendo  $ACD$  maggiore di  $ECD$ , farebbe ancora  $ADC$  maggiore di  $CDF$ , cioè la parte maggiore del tutto, il che è assurdo<sup>c</sup>. Dunque non possono le rette  $AC$ ,  $BC$  eguali alle due  $AD$ ,  $BD$  condotte dagli stessi termini, concorrere dalla medesima banda in un punto diverso dal medesimo  $D$ . Il che dovea dimostrarsi.

### PROPOSIZIONE VIII.

*Se due triangoli  $ABC$ ,  $EDF$  avessero i lati  $AB$ ,  $ED$  tra di loro uguali, ed ancora i lati  $AC$ ,  $DF$  uguali, ed in oltre le basi uguali  $BC$ ,  $EF$ ,  
sa-*



saranno altresì eguali tutti gli angoli corrispondenti a i lati opposti uguali nell' uno, e nell' altro triangolo.

**S**I soprapponga il triangolo  $ABC$  all' altro  $EDF$ ; adattate insieme le basi eguali  $BC, EF$ , gli altri lati uguali si adatteranno parimente insieme, concorrendo colla cima  $A$  nel punto  $D$ ; altrimenti due linee uguali alle prime, concorrerebbero in un punto diverso da quello, in cui concorrono le altre, condotte da i medesimi termini, il che è impossibile <sup>a</sup>. Dunque si adatteranno tutti gli angoli corrispondenti, combaciandosi insieme  $A$  con  $D$ ,  $B$  con  $E$ ,  $C$  con  $F$ , essendo soprapposti i lati, che gli comprendono; e però faranno i detti angoli uguali <sup>b</sup>. Il che doveasi dimostrare.

<sup>a</sup> Propos. 7.

<sup>b</sup> Assiom. 5.

### PROPOSIZIONE IX. PROBL.

*Dato l' angolo rettilineo  $BAC$ , dividerlo in due parti uguali.*

**P**reso nel lato  $AB$  qualunque punto  $D$ , si tagli dall' altro lato  $AC$  la parte  $AE$  uguale alla  $AD$  <sup>c</sup>, e congiunta  $DE$  <sup>d</sup>, sopra di questa, dalla banda opposta all' angolo dato, si descriva un triangolo equilatero  $DFE$  <sup>e</sup>, indi si congiunga  $AF$  <sup>d</sup>: questa dividerà l' angolo dato in due parti eguali, perchè ne' triangoli  $ADF, AEF$ , essendo eguali i lati  $AD, AE$ , il lato  $AF$  comune, e le basi  $FD, FE$  altresì uguali, farà pure l' angolo  $DAF$  uguale all' altro  $EAF$  <sup>f</sup>; dunque dalla retta  $AF$  è diviso per mezzo l' angolo dato  $BAC$ ; il che, ec.

FIG. 20.

<sup>c</sup> Prop. 3.

<sup>d</sup> Dimanda 1.

<sup>e</sup> Propos. 1.

<sup>f</sup> Prop. 8.

PRO-

## PROPOSIZIONE X. PROBL.

*Data una retta terminata  $AB$ , dividerla in due parti uguali.*

FIG. 21. **S**I faccia sopra di essa il triangolo equilatero  $ACB$ <sup>a</sup>, e dividasi per mezzo l'angolo  $C$  colla  
<sup>a Prop. 1.</sup> retta  $CE$ <sup>b</sup>: ne' due triangoli  $ACE$ ,  $BCE$  essen-  
<sup>b Propos. 9.</sup> do il lato  $CA$  uguale a  $CB$ , ed il lato  $CE$  comu-  
ne, e gli angoli, compresi da essi, uguali tra di loro,  
<sup>c Prop. 4.</sup> la base  $AE$  farà uguale alla  $BE$ <sup>c</sup>, e però tutta  
la  $AB$  è divisa egualmente per mezzo; il che, ec.

## PROPOSIZIONE XI. PROBL.

*Alla data retta linea  $AB$ , alzare da un punto  $C$  dato in essa, la perpendicolare  $CF$ .*

FIG. 22. **P**reso nella medesima qualunque altro punto  $D$ ,  
<sup>d Prop. 3.</sup> si ponga dall'altra parte la  $CE$  uguale a  $CD$ <sup>d</sup>,  
<sup>e Prop. 1.</sup> e sopra tutta la  $DE$  si formi il triangolo equila-  
<sup>f Diman-</sup>tero  $DCE$ , e congiunta la retta  $FC$ <sup>f</sup>, farà la  
<sup>da 1.</sup> perpendicolare ricercata, perchè ne i triangoli  
 $DCF$ ,  $ECF$ , essendo eguali i lati  $DC$ ,  $CE$ , il la-  
to  $CF$  comune, e le basi  $DF$ ,  $EF$  uguali, farà  
<sup>g Prop. 8.</sup> l'angolo  $DCF$  eguale al suo adiacente  $ECF$ <sup>g</sup>, e  
però amendue faranno retti, e la linea  $FC$  perpen-  
<sup>h Defin. 10.</sup> dicolare alla  $AB$ <sup>h</sup>,alzata sopra di essa dal dato  
<sup>11.</sup> punto  $C$ ; il che, ec.

## PROPOSIZIONE XII. PROBL.

Tav. II. *Da un punto  $C$  dato fuori della linea  $AB$  inde-*  
FIG. 23. *finitamente prolungata, tirarvi sopra una perpendi-*  
*colare  $CH$ .*

**S**I pigli dall'altra parte di essa linea qualunque punto  $D$ , e col centro  $C$ , all'intervallo  $CD$  descrivasi un arco di cerchio <sup>a</sup>, il quale segnerà la data retta in due punti  $G$ ,  $E$ ; indi legata per mezzo la  $GE$  in  $H$  <sup>b</sup>, e congiunta  $CH$  <sup>c</sup>, farà questa la perpendicolare ricercata; perchè essendo  $GH$  eguale ad  $HE$ ,  $CH$  comune a i triangoli  $GHC$ ,  $EH C$ , e le basi  $CG$ ,  $CE$  raggi del cerchio eguali <sup>d</sup>, farà l'angolo  $CHG$  eguale al conseguente  $CH E$  <sup>e</sup> onde l'uno, e l'altro è retto, e la  $CH$  è perpendicolare alla retta  $AB$  <sup>f</sup>, tiratavi dal punto  $C$  dato fuori di essa; il che, ec.

<sup>a</sup> Dimanda 3.

<sup>b</sup> Prop. 10.

<sup>c</sup> Dimanda 1.

<sup>d</sup> Defin. 14.

<sup>e</sup> Prop. 8.

<sup>f</sup> Defin. 10.

• 11.

### AVVERTIMENTO.

*Essendosi fin quì minutamente citate le precedenti proposizioni, le dimande, gli assiomi, e le definizioni, stimo superfluo il seguitare in avvenire a citarle così minutamente; però supponendole ormai notissime, lascerò, che i principianti le ritrovino da se stessi, e solo si citeranno per qualche volta le nuove proposizioni, acciò si rendano familiari, onde poi sarà superfluo il rinfrescarne la memoria, avendone già fatta pratica, e si stimerebbe troppa puerilità il continuare di rammentarle a i Geometri già provetti.*

### PROPOSIZIONE XIII.

*Quando una linea retta  $EC$  è applicata sopra di una altra  $AB$ , o farà con essa li due angoli di qua, e di là retti, o almeno la somma di essi sarà eguale a due retti.*

FIG. 4.

B

Per-

**P**Erchè se fosse  $EC$  perpendicolare ad  $AB$ , certo che ne risulterebbero di quà, e di là gli angoli retti, ma se è inclinata, si tiri dal medesimo punto  $C$  la perpendicolare  $CD$  alla data  $AB$ <sup>a</sup>; dunque gli angoli  $ACD$ ,  $BCD$  faranno due retti; ma si adattano a questi due retti gli altri due  $ACE$ ,  $BCE$ , dunque ancora questi due angoli uguagliano la somma di due retti<sup>b</sup>; il che dovea dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 24. *Se al medesimo punto  $B$  della retta  $AB$  congiunte da destra, e da sinistra due rette  $DB$ ,  $CB$ , comprenderanno con essa due angoli  $DBA$ ,  $CBA$  eguali a due retti, saranno esse linee  $DB$ ,  $CB$  per diritto fra loro, cioè faranno una sola retta linea  $CBD$ .*

**A**Ltrimenti prolungata la  $CB$ , se cadesse fuori della retta  $BD$ , come in  $BE$ , farebbero gli angoli pure  $EBA$ ,  $CBA$  uguali a due retti<sup>c</sup>, cioè alli due  $DBA$ ,  $CBA$ , dunque tolto di comune  $CBA$ , farebbero gli angoli  $EBA$ ,  $DBA$  eguali, cioè il tutto alla parte; il che è impossibile; dunque le rette  $CB$ ,  $BD$  sono per diritto fra loro, e fanno una retta continua; il che, ec.

## PROPOSIZIONE XV.

FIG. 25. *Segandosi fra di loro due rette  $AB$ ,  $CD$  nel punto  $E$ , gli angoli contrapposti alla cima,  $AEC$ ,  $BED$  saranno eguali.*

**P**Erchè sopra la  $AB$  stando la  $CE$ , farà gli angoli  $AEC$ ,  $CEB$  eguali a due retti<sup>c</sup>, e così



sì ancora la  $BE$  sopra la  $CD$  fa gli angoli  $BED$ ,  $CEB$  eguali a due retti, e però eguali alli due  $AEC$ ,  $CEB$ ; dunque tolto di comune  $CEB$ , resta l'angolo  $AEC$  eguale a  $BED$ . Similmente si proverà essere l'angolo  $CEB$  eguale al suo contrapposto  $DEA$ , facendo pure ciascheduno di questi coll'angolo  $BED$ , due angoli eguali a due retti; dunque le rette, che si segano, fanno gli angoli alla cima contrapposti eguali; il che, ec.

COROLLARIO. Da ciò può comprendersi, che tutti gli angoli fatti intorno al punto del segamento da due, o più linee rette, sono uguali a quattro retti.

### PROPOSIZIONE XVI.

*Di qualunque triangolo  $ABC$  prolungando un lato  $BC$  verso  $D$ , l'angolo esteriore  $ACD$ , che ne risulta, è maggiore di qualunque delli due interni opposti  $BAC$ ,  $ABC$ .* FIG. 26.

**D**iviso il lato  $AC$  per mezzo in  $E$ , congiunta  $BE$  si prolunghi in  $F$ , posta  $EF$  eguale a  $BE$ , indi si congiunga  $FC$ . Li triangoli  $AEB$ ,  $CEF$ , intorno alla cima  $E$  avendo gli angoli eguali <sup>a</sup>, e i lati  $BE$ ,  $EA$  dell'uno essendo eguali a i lati  $FE$ ,  $EC$  dell'altro, ancora gli altri angoli corrispondenti  $BAE$ ,  $FCE$  faranno eguali; ma l'angolo  $ACD$  è maggiore della sua parte  $FCE$ , dunque è maggiore dell'angolo opposto  $BAE$ . Similmente prolungando il lato  $AC$  in  $G$ , diviso  $BC$  per mezzo in  $H$ , e congiunta  $AH$ , se si prolunga in  $I$ , di maniera, che  $HI$  riesca eguale ad  $AH$ , congiunta  $IC$ , si proverà ne i triangoli  $ABH$ ,  $CIH$  essere l'angolo  $ABH$  eguale ad  $ICH$ , di cui es-

<sup>a</sup> Prop. 15.

sendo maggiore l'angolo  $BCG$ , il quale uguaglia  
 a Prop. 15.  $ACD^a$ , esso angolo  $ACD$  parimente sarà maggio-  
 re di  $ABH$ ; dunque l'angolo esterno  $ACD$  è mag-  
 giore di qualunque interno opposto  $BAC$ ,  $ABC$ ,  
 preso separatamente l'uno dall'altro. Il che, ec.

## PROPOSIZIONE XVII.

*Due angoli di qualsivoglia triangolo sono sempre minori di due retti.*

**D**El triangolo  $ABC$  prolungato il lato  $BC$  in  
 b Prop. 16.  $D$ , l'angolo interno  $BAC$  è minore dell'e-  
 sterno  $ACD^b$ , dunque di comune aggiungendo  
 l'angolo  $ACB$ , faranno li due  $BAC$ , e  $ACB$   
 presi insieme, minori delli due  $ACD$ , e  $ACB$ ,  
 c Prop. 13. la cui somma essendo uguale a due retti<sup>c</sup>, dun-  
 que la somma delli due interni  $BAC$ ,  $ACB$  è  
 minore di due retti. Similmente si proverà essere  
 $ABC$ , e  $ACB$  insieme presi minori di due retti;  
 dunque sono sempre due angoli d'un triangolo  
 minori di due retti; il che, ec.

## PROPOSIZIONE XVIII.

FIG. 27. *Se nel triangolo  $ABC$  il lato  $AB$  è maggiore del lato  $AC$ , l'angolo  $ACB$  opposto al primo, sarà maggiore dell'angolo  $ABC$  opposto al secondo lato.*

**S**I tagli da  $BA$  la parte  $AD$  eguale ad  $AC$ , e si  
 d Prop. 5. congiunga  $CD$ . Sarà l'angolo  $ACD$  eguale ad  
 $ADC^d$ , e questo è maggiore dell'interno  $ABC^b$ ,  
 dunque l'angolo  $ACD$ , e molto più il tutto  $ACB$ ,  
 è maggiore dell'angolo  $ABC$ ; il che, ec.

PRO-

## PROPOSIZIONE XIX.

*Viceversa qualunque volta sia l'angolo  $ACB$  maggiore dell'angolo  $ABC$  in un medesimo triangolo, sarà il lato opposto al primo  $AB$  maggiore del lato  $AC$  opposto al secondo.*

**P**erchè se i lati suddetti fossero uguali, ancora gli angoli  $ACB$ ,  $ABC$  farebbero uguali <sup>a Prop. 5.</sup>; se  $AC$  fosse maggiore di  $AB$ , farebbe l'angolo  $ABC$  maggiore di  $ACB$  <sup>b Prop. 18.</sup>; dunque essendo  $ACB$  maggiore di  $ABC$ , bisogna che sia il lato  $AB$  maggiore di  $AC$ : il che ec.

## PROPOSIZIONE XX.

*In ogni triangolo  $ADC$ , sono due lati qualunque  $AD$ , e  $DC$  presi insieme, maggiori del terzo  $AC$ .*

**S**i prolunghi  $AD$ , e pongasi in esso  $DB$  eguale a  $DC$ . Congiunta  $BC$ , farà l'angolo  $DCB$  eguale all'angolo  $B$  <sup>a</sup>, ma  $ACB$  è maggiore di  $DCB$ , dunque  $ACB$  è maggiore dell'angolo  $B$ ; e però nel triangolo  $ABC$  il lato  $AB$  farà maggiore di  $AC$  <sup>c Prop. 19.</sup>; ma  $AB$  è uguale alli due lati  $AD$ ,  $DC$ , dunque sono questi maggiori del terzo  $AC$ ; il che, ec.

## PROPOSIZIONE XXI.

*Se dagli estremi della base  $BC$  si conducano le rette  $BD$ ,  $CD$ , concorrenti nel punto  $D$  dentro il triangolo  $ABC$ , saranno le due rette  $BD$ ,  $CD$  minori delle due  $BA$ ,  $CA$ , ma quelle conterranno l'angolo  $BDC$  maggiore dell'angolo  $BAC$  contenuto da queste.*

FIG. 23.

B 3

Si

**S**I prolunghi  $BD$  fino che concorra col lato  $AC$  in  $E$ : faranno le due  $BA$ ,  $AE$  maggiori di  $BE$ <sup>a</sup>, dunque aggiunta di comune  $EC$ , sono  $BA$ , e  $AC$  maggiori di  $BE$ ,  $EC$ ; e perchè  $DE$ , con  $EC$  sono maggiori di  $CD$ <sup>a</sup>, e aggiunta  $DB$ , sono  $BE$ , ed  $EC$  maggiori di  $BD$ , e  $CD$ ; dunque le due  $BA$ ,  $AC$  maggiori sono delle due  $BD$ ,  $CD$ ; ma l'angolo  $BDC$  è maggiore di  $CED$ <sup>b</sup>, ed è  $CED$  maggiore di  $BAC$ <sup>b</sup>, dunque  $BDC$  è maggiore di  $BAC$ ; il che dovevasi dimostrare.

## PROPOSIZIONE XXII. PROBL.

FIG. 29. *Date tre linee rette  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , due delle quali siano maggiori della terza, formarne un triangolo  $FKG$ .*

**N**ella retta  $DH$  si distinguano le parti  $FG$ ,  $GH$ ,  $FD$  rispettivamente eguali alle date  $C$ ,  $B$ ,  $A$ , e fatto centro in  $F$ , coll'intervallo  $FD$  descrivasi il cerchio  $DK$ , e fatto centro in  $G$  coll'intervallo  $GH$  si descriva l'altro cerchio  $HK$ , e dove questi cerchi concorrono in  $K$ , si congiungano a i centri le rette  $KF$ ,  $KG$ ; farà nel triangolo  $FKG$  il lato  $FG$  eguale a  $C$ ; il lato  $GK$  eguale a  $GH$ , cioè a  $B$ , ed il lato  $FK$  eguale ad  $FD$ , cioè ad  $A$ ; dunque si è fatto il triangolo colle date tre linee; il che, ec.

## PROPOSIZIONE XXIII. PROBL.

FIG. 30. *Nella data retta linea  $AB$ , al punto  $A$  dato in essa, costituire un angolo eguale al dato  $FDE$ .*



**T**irata sotto l'angolo dato qualunque retta  $FE$ , si faccia un triangolo con tre linee uguali alle date  $FE$ ,  $FD$ ,  $DE$ <sup>a</sup>, in maniera che le due  $AB$ ,  $AC$  uguaglino le due  $ED$ ,  $DF$ , e la  $BC$  sia uguale alla  $FE$ ; è manifesto, che l'angolo  $BAC$  farà uguale all'angolo dato  $FDE$ <sup>b</sup>. Dunque sarà fatto ciò, che era proposto.

<sup>a</sup> Prop. 22.<sup>b</sup> Prop. 8.

## PROPOSIZIONE XXIV.

*Se due triangoli  $ABC$ ,  $DEF$  averanno due lati  $AB$ ,  $AC$  uguali alli due  $DE$ ,  $DF$ , l'uno all'altro rispettivamente, ma l'angolo  $BAC$  sia maggiore di  $EDF$ , la base  $BC$  sarà altresì maggiore della base  $EF$ .*

**N**ella linea  $AB$  costituiscafi al punto  $A$  l'angolo  $BAG$  eguale ad  $EDF$ <sup>c</sup>, e fatta la  $AG$ <sup>c</sup> eguale alla  $DF$ , si congiunga  $BG$ , la quale farà ad  $EF$  uguale<sup>d</sup>; e se il punto  $G$  cade sopra la retta  $BC$ , è chiaro, che farà  $BG$  minore di  $BC$ , essendo una sua parte; se cade sopra, essendo le due  $AG$ ,  $BG$  minori delle due  $AC$ ,  $BC$ <sup>e</sup>, ed essendo eguale  $AG$  ad  $AC$ , perchè ciascuna di esse uguaglia  $DF$ , dovrà essere  $BG$  minore di  $BC$ ; se poi il punto  $G$  riesce al di sotto, congiunta  $CG$  farà il triangolo  $ACG$  equicrure, onde l'angolo  $ACG$ , farà eguale ad  $AGC$ <sup>f</sup>, ma l'angolo  $BGC$  è maggiore di  $AGC$ , e conseguentemente di  $ACG$ , e molto più di  $BCG$ , dunque  $BC$  è maggiore di  $BG$ <sup>g</sup>. Però sempre essendo  $BC$  di  $BG$  maggiore, farà pure maggiore di  $EF$ ; il che, ec.

<sup>c</sup> Prop. 23.<sup>d</sup> Prop. 4.<sup>e</sup> Prop. 21.<sup>f</sup> Prop. 5.<sup>g</sup> Prop. 19.

## PROPOSIZIONE XXV.

*Se il triangolo ABC ha li due lati AB, AC eguali a quelli ED, DF del triangolo DEF, ma la base BC sia maggiore della base EF, l'angolo BAC sarà pure maggiore dell'angolo EDF.*

**P**erchè se ancora li due angoli BAC, EDF fossero uguali, farebbero le basi BC, EF eguali <sup>a</sup>; e se fosse BAC minore di EDF, farebbe BC minore di EF contro l'ipotesi <sup>b</sup>. Dunque BAC è maggiore di EDF.

<sup>a</sup> Prop. 4.

<sup>b</sup> Prop. 24.

## PROPOSIZIONE XXVI.

**FIG. 31.** *Ne i due triangoli ABC, DGE, se due angoli B, C dell'uno sono eguali a gli angoli DGE, GED dell'altro, ed un lato intercetto fra i detti angoli BC sia eguale al lato GE interposto fra gli altri due angoli del secondo, eguali a quelli del primo: o pure un lato AB opposto ad uno di essi angoli C, uguagli il lato DG opposto all'angolo E uguale ad esso C; saranno gli altri lati dell'uno eguali a quelli dell'altro, e l'angolo rimanente al rimanente, e tutto il triangolo primo a tutto il secondo sarà uguale.*

**I**mperocchè quando BC uguaglia GE, se non fosse ancora CA eguale ad ED, sia uno di essi per esempio ED maggiore dell'altro CA, e tagliandone I H uguale ad AC, congiunta GH, riuscirebbe l'angolo EGH eguale all'angolo B <sup>a</sup>, ma questo supponevasi eguale a DGE. dunque la parte EGH farebbe uguale al tutto DGE; il che è impossibile; erano dunque eguali ancora i lati CA, e ED,

e  $ED$ , e conseguentemente ancora  $BA$  era uguale a  $GD$ , e l'angolo  $A$  all'angolo  $GDE$ , e tutto il triangolo a tutto il triangolo <sup>a</sup>. Se poi solamente si supponesse il lato  $AB$  eguale a  $DG$ , farebbe ancora  $BC$  eguale a  $GE$ ; altrimenti se fosse uno di essi, per esempio  $GE$ , maggiore di  $BC$ , posta  $GI$  eguale a  $BC$ , farebbe l'angolo  $GID$  eguale a  $BCA$  <sup>a</sup>, ma  $GID$  è maggiore di  $GED$  <sup>b b Prop. 16</sup>; dunque  $BCA$  non farebbe eguale a  $GED$ , contro l'ipotesi; bisogna dunque, che ancora i lati  $BC$ ,  $GE$  siano eguali, e però ancora  $AC$  a  $DE$ , e l'angolo  $A$  all'angolo  $GDE$ , e tutto il triangolo a tutto il triangolo; Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXVII.

*Se due rette linee  $AB$ ,  $CD$  sono segate da un'altra  $EF$ , in maniera che gli angoli alterni  $AEF$ ,  $DFE$ , di quà, e di là riescano eguali, esse linee  $AB$ ,  $CD$  saranno parallele.* FIG. 32.

**P**Erchè, se prolungate convenissero in un punto  $G$ , dovrebbe l'angolo esterno  $AEF$  essere maggiore dell'interno  $DFE$  <sup>b</sup>; ma gli è eguale, dunque non convengono esse rette  $AB$ ,  $CD$  in veruna parte; e però sono parallele <sup>c</sup>; <sup>c Defn. 35.</sup> Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXVIII.

*Parimente saranno parallele le rette  $AB$ ,  $CD$ , se l'angolo esterno  $AGE$  sarà eguale all'interno opposto dalla medesima parte  $CHG$ : ovvero, se li due interni dalla stessa banda  $AGH$ ,  $CHG$  siano eguali a due retti.* FIG. 33.

Im-

**I**Mperocchè in tal caso farebbe l'angolo  $HGB$ ,  
 a Prop. 15. il quale uguaglia  $AGE^a$ , eguale a  $CHG$  al-  
 terno: siccome essendo  $HGB$  con  $AGH$  eguale  
 b Prop. 13. a due retti<sup>b</sup>, se sono  $AGH$ ,  $CHG$  pure a due  
 retti uguali, bisognerà sia  $HGB$  eguale al detto  
 $CHG$  alterno; dunque le rette  $AB$ ,  $CD$  in qua-  
 lunque di questi due casi debbono essere paral-  
 c Prop. 27. lele<sup>c</sup>. Il che ec.

### AVVERTIMENTO.

*Servendosi Euclide nella seguente Proposizione del suo Axioma, da noi posto nel numero viii. in cui dicesi, che se due linee rette siano segate da una terza, in maniera, che da una parte ne risultino due angoli interni minori di due retti, e dall'altra banda maggiori, prolungate in infinito quelle due rette dalla banda, ove sono gli angoli minori, dovranno insieme concorrere; ed avendo ivi indicato, di doverne in questo luogo dimostrare la verità, ed evidenza di questo Axioma, ne addurrò quì una prova addotta dal P. Clavio, esposta però più brevemente, che sia possibile.*

**I.** Si osservi primieramente, che se sopra la retta  
 FIG. 34.  $BH$  eretta una perpendicolare  $BP$ , la retta  $PX$   
 con essa  $BP$  farà un angolo acuto  $BPX$ , le al-  
 tre perpendicolari  $RQ$ ,  $TS$  erette sopra la mede-  
 sima  $BH$ , ed alla stessa  $PX$  terminate, vanno de-  
 crescendo, imperocchè condotta la  $BQ$  perpendico-  
 lare sopra la  $PX$  (che caderà dalla banda dell'an-  
 golo acuto, dovendo li due angoli  $BPQ$ ,  $BQP$  es-  
 sere minori di due retti<sup>d</sup>, e non un rett., ed uno  
 ottuso nel triangolo  $QBP$ ) indi sopra la  $BH$  con-  
 dotta la perpendicolare  $QR$ , e la  $RS$  perpendicola-  
 re



re alla  $PX$ , e la  $ST$  perpendicolare alla  $BH$  ec. è manifesto, che sarà  $BP$  maggiore di  $BQ$ , e questa  $BQ$  maggiore di  $QR$ , e la  $QR$  maggiore di  $RS$ , e la  $RS$  maggiore di  $ST$  ec. <sup>2</sup> essendo opposte <sup>2</sup> Prop. 19. all'angolo retto, che è il maggiore angolo in qualunque di tali triangoletti.

II. Similmente facendo la retta  $PX$  sopra la  $ST$  perpendicolare a  $BH$ , l'angolo ottuso  $TSP$ , le altre perpendicolari  $QR$ ,  $PB$  ec. condotte sopra la stessa  $BH$ , dalla banda di questo angolo ottuso, si fanno sempre maggiori, essendo  $SR$  maggiore di  $ST$ , e  $RQ$  maggiore di  $RS$ , e  $QB$  maggiore di  $RQ$ , e  $BP$ , maggiore di  $QB$ , come nel §. antecedente.

III. Quindi ne segue, che essendo sopra la retta  $BT$  alzate due perpendicolari  $TS$ ,  $BZ$ , tra di loro uguali, connessa la retta  $SZ$ , farà gli angoli  $SZB$ ,  $ZST$  ambidue retti: perchè se uno di essi fosse acuto, o pure ottuso, le dette perpendicolari  $ZB$ ,  $ST$  non sarebbero uguali, ma decrescerebbero, o si farebbero maggiori l'una dell'altra, come ne' §. §. precedenti si è dimostrato.

IV. Ciò supposto: se la retta  $AP$  sega le due  $PD$ ,  $AL$  in maniera, che gli angoli  $APD$ ,  $PAL$  riescano minori di due angoli retti, dico che prolungate le rette  $PD$ ,  $AL$  dovranno verso quella parte concorrere. Imperocchè verso l'angolo acuto  $APD$  tirata la perpendicolare  $AB$  dal punto  $A$  sopra la  $PD$ , si prenda nella  $AL$  qualunque punto  $E$ , e sopra la  $AB$  si tiri la perpendicolare  $EF$ ; indi presa  $EK$  eguale ad  $AE$ , e prodotta  $EM$  eguale ad  $EF$ , congiunta  $KM$  sarà ancor essa eguale ad  $AF$ , e l'angolo  $EMK$  eguale al retto  $AFE$ , giacchè li due lati  $EK$ ,  $EM$  sono eguali alli due  
AE,

*AE, EF intorno gli angoli eguali alla cima E; però presa FG eguale ad AF. sarà eguale ad MK, e congiunta GK farà pure angoli retti con la AG, come si cava da ciò, che si è dimostrato al num. III. mentre le rette MK, FG sono eguali, e perpendicolari alla retta FM*

*V. Quindi se alla AK, si prenderà eguale la KL, ed alla AG sia eguale la GH, prolungata GK in N, in maniera, che uguagli la GK, congiunta LN si proverà similmente eguale ad AG, e l'angolo N retto come AGK, e congiunta LH sarà pure perpendicolare alla AH: e ponendosi LC eguale ad AL, ed HI uguale ad AH, congiunta CI sarà pure alla medesima AI perpendicolare.*

*VI. E perchè presa FG eguale ad AF, e GH eguale ad AG, ed HI eguale ad AH, e così proseguendo, verrà una volta la AI maggiore della AB, e così la retta BD rimarrà inclusa dentro il triangolo AIC, dunque prolungata la BD dovrà uscire fuori dello spazio finito di questo triangolo; e non potendo concorrere con la base IC, perchè essendo li due angoli DBI, CIB eguali a due retti, le rette*  
 2 Prop. 28. *BD, IC sono parallele<sup>2</sup>, dunque converrà la BD col lato AC in V; e però le rette PBD, AL segate dalla AP, o dalla AB con due angoli minori di due retti, prolungate verso quella banda, necessariamente insieme converranno in V. Il che dovea dimostrarsi.*

## P R O P O S I Z I O N E XXIX.

*Segandosi due linee parallele AB, CD da una*  
 FIG. 33. *retta EF, saranno li due angoli interni da qualunque parte, come AGH, CHG eguali a due*  
 ret-

*retti , e l' esteriore BGE uguale all' interno opposto dalla medesima parte GHD , e gli alterni DHG , AGH tra di loro uguali .*

**P** Erchè , se gli interni  $AGH$  ,  $CHG$  non fossero eguali a due retti , o farebbero essi , o li susseguenti  $BGH$  ,  $DHG$  , minori di due retti , onde non farebbero le rette  $AB$  ,  $CD$  parallele , ma converrebbero insieme <sup>a</sup> . Dunque debbono essere li due angoli interni da qualsivoglia parte eguali <sup>a</sup> *Affirma 8. sopra dimostrato .* a due retti ; ed a due retti essendo pure eguali tanto li due  $EGB$  ,  $BGH$  , quanto li due  $AGH$  ,  $BGH$  , farà qualunque di queste coppie uguale alli due interni  $DHG$  , e  $BGH$  ; e però tolto di comune esso  $BGH$  , rimarrà  $DHG$  eguale , sì all' esterno  $BGE$  , come all' alterno  $AGH$  ; il che &c.

### PROPOSIZIONE XXX.

*Se le rette AB , CD saranno parallele ad una terza EF , saranno pure tra di loro parallele .* FIG. 35.

**P** Erchè segandosi tutte e tre da una retta  $GK$  , ne punti  $G$  ,  $H$  ,  $K$  , l' angolo  $AGK$  , farà eguale all' alterno  $GHF$  <sup>b</sup> , e questo eguale all' interno opposto  $DKH$  ; dunque li due  $AGK$  ,  $DKH$  , che sono alterni tra le due rette  $AB$  ,  $CD$  , faranno uguali ; e però queste rette faranno parallele tra di loro <sup>c</sup> , essendo ciascuna parallela alla medesima <sup>c</sup> *Prop. 27.* terza  $EF$  ; il che doveva dimostrarsi .

### PROPOSIZIONE XXXI. PROBL.

*Per un dato punto H tirare una linea CD parallela ad un'altra linea data AB .* FIG. 36.

Si

**S**I tiri da esso punto sopra la data linea  $AB$  qualunque retta  $HG$ ; indi all'angolo  $AGH$  si faccia eguale l'angolo  $GHD$ <sup>a</sup>, farà la retta  $DHC$  parallela alla data  $AB$ <sup>b</sup>; il che doveva eseguirsi.

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 36. *In qualunque triangolo  $ABC$ , prolungando fuori un lato  $BC$  verso  $D$ , sarà l'angolo esterno  $ACD$  eguale alli due interni opposti  $CAB$ ,  $CBA$  presi insieme: e tutti tre gli angoli di esso triangolo  $CAB$ ,  $CBA$ ,  $BCA$  interni sono eguali a due retti.*

<sup>c</sup> Prop. 31. **S**I tiri dal punto  $C$  la retta  $CE$  parallela ad  $AB$ <sup>c</sup>,  
<sup>d</sup> Prop. 29. farà l'angolo  $ACE$  eguale all'alterno  $CAB$ , e l'esterno  $ECD$  uguaglierà l'interno opposto  $ABC$ <sup>d</sup>; dunque l'angolo  $ACD$  è uguale a tutti due gl'interni opposti  $CAB$ ,  $CBA$ ; e tanto a quello, che a questi due aggiunto l'angolo rimanente interno  $BCA$ , sono li tre angoli interni  $CAB$ ,  $CBA$ ,  $BCA$  eguali alli due  $ACD$ ,  $BCA$ , li quali uguagliano due retti<sup>e</sup>. Però li tre angoli interni di qualunque triangolo uguagliano due retti; il che ec.

PROPOSIZIONE XXXIII.

FIG. 37. *Le rette  $AC$ ,  $BD$ , che congiungono dalle stesse parti li termini delle rette  $AB$ ,  $CD$  parallele, ed uguali, riescono ancor esse uguali, e parallele.*

**S**I connettano colla retta  $CB$  gli angoli opposti, faranno intorno a gli angoli  $ABC$ ,  $BCD$  uguali<sup>f</sup>, essendo alterni di due parallele, il lato  $AB$  eguale al lato  $CD$ , ed il lato  $CB$  comune, dunque le basi  $AC$ ,  $BD$  sono uguali<sup>g</sup>, e gli altri angoli corrispondenti  $BCA$ ,  $CBD$  pure faranno eguali



guali, e però essendo alterni, le stesse rette  $AC$ ,  $BD$  sono parallele <sup>a</sup>. Dunque ec.

<sup>a</sup> Prop. 27.

### PROPOSIZIONE XXXIV.

*Ne' quadrilateri, li cui lati opposti sono paralleli, e però chiamansi PARALLELOGRAMMI come  $ABDC$ , gli opposti lati sono sempre eguali, e gli angoli opposti eguali, e da un angolo all' altro opposto tirata la  $BC$ , che dicesi suo DIAMETRO, rimane detto spazio diviso in due triangoli eguali  $ABC$ ,  $DCB$ .*

**I**mperochè tali triangoli hanno due angoli eguali a due angoli, ed un lato comune  $BC$ , essendo gli alterni  $ABC$ ,  $BCD$  eguali, e gli alterni  $BCA$ ,  $CBD$  pure eguali <sup>b</sup>, onde le basi  $AC$ ,  $BD$  faranno uguali, ed ancora gli angoli opposti  $A$ ,  $D$  uguali faranno, e gli altri due  $ABD$ ,  $ACD$ , e tutto il triangolo  $ABC$  all' altro  $DCB$  <sup>c</sup>, e però il parallelogrammo dal diametro  $BC$  è diviso per mezzo; il che ec

<sup>b</sup> Prop. 29.

<sup>c</sup> Prop. 26.

### PROPOSIZIONE XXXV.

*Li parallelogrammi  $ABCD$ ,  $BCFE$ , sopra la stessa base  $BC$ , fra le medesime parallele  $BC$ ,  $AF$  descritti, sono tra di loro uguali.* FIG. 38.

**I**mperochè il lato  $AD$ , ed il lato  $EF$  essendo uguali al medesimo opposto  $BC$  <sup>d</sup>, sono uguali <sup>d</sup> Prop. 34 tra loro, ed aggiunta la comune  $DE$ , farà  $AE$  uguale a  $DF$ ; ed  $AB$  uguaglia  $DC$  <sup>d</sup>, e l' angolo  $BAE$  è eguale a  $CDF$  <sup>b</sup>, dunque il triangolo  $ABE$  è uguale all' altro  $CDF$ ; e tolto il comune  $DGE$ , faranno eguali i trapezii  $ADGB$ ,  $CGEF$ ; indi ag-  
giun-

giunto all' uno, ed all' altro il triangolo  $BGC$ , farà il parallelogrammo  $ABCD$  eguale all' altro  $BCFE$ ; il che dovea dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE XXXVI.

*Se poi li parallelogrammi  $ABCD$ ,  $EFGH$ , tra le stesse parallele  $AH$ ,  $BG$  disposti saranno sopra eguali basi  $BC$ ,  $FG$ , saranno pure tra di loro eguali.*

**P**Erchè tirate le rette  $BE$ ,  $CH$ , riusciranno ancora esse parallele <sup>a</sup> essendo le parallele  $BC$ ,  $EH$  uguali, giacchè tanto questa, che quella è uguale ad  $FG$ ; dunque  $BCH E$  è un parallelogrammo eguale ad  $ABCD$ , per essere su la stessa base  $BC$ , ed eguale pure ad  $EFGH$  <sup>b</sup>, con cui ha la medesima base  $EH$ , fra le stesse parallele  $AH$ ,  $BG$ ; però li detti parallelogrammi  $ABCD$ ,  $EFGH$  sono tra di loro uguali; il che ec.

## PROPOSIZIONE XXXVII.

*Li triangoli  $BDC$ ,  $BEC$  costituiti su la medesima base  $BC$ , e tra le stesse parallele  $BC$ ,  $AE$ , sono pure tra di loro uguali.*

**I**Imperocchè tirata la  $BA$  parallela a  $CD$ , e la  $CH$  parallela a  $BE$ , ne risultano due parallelogrammi  $ABCD$ ,  $EBCH$ , li quali sono su la stessa base, e fra le medesime parallele, e però sono tra di loro uguali <sup>b</sup>; dunque li triangoli  $BDC$ ,  $BEC$ , che sono la metà di essi parallelogrammi <sup>c</sup>, sono pure tra di loro uguali <sup>d</sup>; il che ec.

PRO-

## PROPOSIZIONE XXXVIII.

*Li triangoli BCD, FHG sopra eguali basi BC, FG disposti fra le stesse parallele BG, DH, sono pure tra di loro uguali.*

**C** Ondotte le rette BA parallela a CD, ed FE parallela a GH, riescono due parallelogrammi ABCD, EFGH sopra basi eguali costituiti, e fra le medesime parallele, che però sono fra di loro eguali<sup>a</sup>, dunque ancora detti triangoli, che sono le loro metà<sup>b</sup>, sono pure tra di loro uguali<sup>c</sup>; il che ec.

<sup>a</sup> Prop. 36<sup>b</sup> Prop. 34<sup>c</sup> Affem. 4

## PROPOSIZIONE XXXIX.

*Se due triangoli BAC, BDC costituiti sopra la stessa base BC, verso la medesima parte, sono uguali tra loro, la retta AD, che le loro cime congiunge, riesce parallela alla base BC.* FIG. 40.

**A** Ltrimenti, se non gli fusse parallela, si tiri AE parallela a BC, la quale segghi il lato BD sopra, o sotto la cima D, nel punto E. Congiunta la retta CE riuscirebbe il triangolo BEC uguale a BAC<sup>d</sup>, e però uguale all' altro triangolo BDC, onde la parte farebbe uguale al tutto; il che è impossibile<sup>e</sup>; dunque la AD era parallela alla base BC, come dovea dimostrarsi.

<sup>d</sup> Prop. 37.<sup>e</sup> Affem. 6.

## PROPOSIZIONE XL.

*Similmente se sopra due porzioni uguali BC, EF della medesima linea BF, siano costituiti verso la medesima parte due triangoli uguali BAC, EDF, la retta AD, che connette le loro cime, sarà parallela a BF.* FIG. 41.

C

Se

**S**e tale non fosse, tirata la  $AH$  parallela à  $BF$  segherebbe il lato  $ED$  in  $H$ , sopra, o sotto la cima  $D$ ; e congiunta la  $FH$ , farebbe il triangolo  $EHF$  uguale ad  $ABC^a$ , e però uguale ad  $EDF$ , il che è assurdo <sup>b</sup>; adunque non altra linea, che la  $AD$  condotta dal punto  $A$  può essere parallela a  $BF$ ; il che ec.

<sup>a</sup> Prop. 38.

<sup>b</sup> Assiom. 6.

### PROPOSIZIONE XLI.

FIG. 39. *Se il parallelogrammo  $ABCD$  ha la stessa base  $BC$  col triangolo  $BEC$ , disposto fra le stesse parallele  $BC$ ,  $AE$ , sarà il parallelogrammo duplo di detto triangolo.*

**I**mperocchè tirata la retta  $BD$ , faranno li triangoli  $BDC$ ,  $BEC$  uguali <sup>c</sup>; dunque essendo  $ABCD$  duplo di  $BDC^d$ , sarà pure duplo di  $BEC$ ; il che ec.

<sup>c</sup> Prop. 37

<sup>d</sup> Prop. 34.

### PROPOSIZIONE XLII. PROEL.

FIG. 42. *Ad un dato triangolo  $ABC$  fare un parallelogrammo eguale  $FECG$  con un angolo uguale ad un dato  $D$ .*

**D**Al punto  $A$  condotta la retta  $AG$  parallela alla base  $BC$ , e questa per mezzo divisa in  $E$ , si faccia l'angolo  $CEF$  uguale al dato  $D^e$ , e condotta  $CG$  parallela ad  $EF$ , sarà il parallelogrammo  $FECG$  al dato triangolo  $ABC$  uguale; perchè tirata la retta  $AE$ , essendo uguali le basi  $BE$ ,  $EC$ , sono uguali li triangoli  $BAE$ ,  $EAC^a$  e però sarà  $ABC$  duplo del triangolo  $AEC$ , di cui essendo ancora duplo il parallelogrammo  $FECG^f$ , sarà dunque al triangolo  $ABC$  uguale il detto parallelogrammo, con l'angolo  $CEF$  uguale al dato  $D$ , come era da farsi.

<sup>e</sup> Prop. 23.

<sup>f</sup> Prop. 41.

PRO-



## PROPOSIZIONE XLIII.

*In ogni parallelogrammo  $ABCE$ , condotto il dia-* FIG. 43.  
*metro  $AC$ , e per qualunque punto  $G$  di esso con-*  
*dotte le rette  $IGF$ ,  $HGK$  parallele a' lati  $AB$ ,  $BC$ ,*  
*saranno li parallelogrammi  $BIGK$ ,  $HGFE$  (che*  
*si chiamano COMPLEMENTI) tra di loro uguali.*

**I**Mperocchè essendo tutto il triangolo  $ABC$  ugua-  
 le ad  $AEC$ , ed il triangolo  $AKG$  uguale ad  
 $AFG$ , ed il triangolo  $GIC$  uguale a  $GHC$ <sup>a</sup>, fa-<sup>a Prop. 34.</sup>  
 rà il rimanente spazio  $BIGK$  uguale al rimanen-  
 te  $HGFE$ ; il che ec.

## PROPOSIZIONE XLIV. PROBL.

*Ad una data retta  $GF$ , nell' angolo dato  $D$ , ap-*  
*plicare un parallelogrammo  $HGFE$ , uguale ad un*  
*dato triangolo  $L$ .*

**S**I faccia un parallelogrammo  $IGKB$  uguale al  
 detto triangolo  $L$  nell' angolo  $IGK$  uguale al  
 dato  $D$ <sup>b</sup>, e posta la data  $GF$  per diritto al lato <sup>b Prop. 42.</sup>  
 $IG$ , si compisca il parallelogrammo  $KGFA$ , e si  
 tiri il diametro  $AG$ , che prolungato concorrerà  
 col lato  $BI$ , in  $C$ <sup>c</sup>, e condotta  $CE$  parallela ad <sup>c Affiom. 8.</sup>  
 $AB$ , si prolunghino ad essa le rette  $KG$ ,  $AF$  in  
 $H$ ,  $E$ ; farà il parallelogrammo  $HGFE$  un comple-  
 mento uguale all' altro  $IGKB$ <sup>d</sup>, e però uguale al <sup>d Prop. 43.</sup>  
 dato triangolo  $L$ , ed applicato alla data retta  $GF$ ,  
 con l' angolo  $HGF$  uguale ad  $IGK$ , e però ugua-  
 le al dato angolo  $D$ ; il che dovea farsi.

## PROPOSIZIONE XLV. PROBL.

*Alla data retta  $FG$  applicare un parallelogram-* FIG. 44.  
<sup>C 2</sup> <sup>mo</sup>

mo  $GFKL$ , eguale ad un dato rettilineo  $ABCD$ , con un angolo uguale al dato  $E$ .

**S**I risolva il rettilineo in triangoli  $ABD$ ,  $BCD$ , (ed in più altri, se avesse più lati). Indi nel dato angolo  $E$  facciasi, applicato alla retta  $FG$  il parallelogrammo  $FGHI$ , uguale al triangolo  $ABD$ <sup>a</sup>, e prolungata la retta  $GH$ , si formi nell'angolo  $IHL$ , applicato alla retta  $HI$ , il parallelogrammo  $LHIK$  eguale all'altro triangolo  $BCD$  (e così proseguiscasi, se vi sono altri triangoli annessi) è manifesto, che tutto il parallelogrammo  $GFKL$ , applicato alla retta  $GF$ , nell'angolo  $FGH$  uguale ad  $E$ , sarà uguale a tutto il dato rettilineo, essendo la prima sua parte uguale al primo triangolo, e la seconda al secondo ec. il che ec.

### PROPOSIZIONE XLVI. PROBL.

FIG. 7. *Sopra una data retta linea  $AB$  descrivere il suo quadrato  $ABCD$ .*

**S**I alzi dal punto  $A$  sopra la data  $AB$  la perpendicolare  $AD$ , uguale alla medesima  $AB$ , e si tirino  $DC$  parallela ad  $AB$ , e  $BC$  parallela alla  $AD$ . Saranno i lati opposti uguali, ed ancora gli angoli opposti uguali, essendo questo pure un parallelogrammo<sup>b</sup>, dunque essendo uguali  $AB$ , ed  $AD$ , saranno pure tutti i lati uguali, e tutti gli angoli retti, perchè le parallele avendo gli angoli interni uguali a due retti<sup>c</sup>, siccome è retto l'angolo  $BAD$ , così pure è retto  $ABC$ , e così  $CDA$ ; però  $ABCD$  è un quadrato<sup>d</sup>, che dovea farsi sopra la data  $AB$ .

PRO-

## PROPOSIZIONE XLVII.

*In qualunque triangolo rettangolo  $ABC$ , il quadrato  $BDEC$  descritto sopra il lato  $BC$  opposto all'angolo retto, uguaglia li due quadrati  $ABFG$ ,  $ACH$ , descritti sopra gli altri due lati  $AB$ ,  $AC$ , contenenti l'angolo retto  $A$ .* FIG. 45.

**S**I tiri la retta  $ALM$ , parallela a' lati  $BD$ ,  $CE$ , e condotte le rette  $FC$ ,  $AD$ , congiunto l'angolo  $ABC$  all'uno, e all'altro de' retti uguali  $FBA$ ,  $DBC$ , farà l'angolo  $FCB$  uguale all'angolo  $ABD$ , ed il lato  $FB$  essendo uguale al lato  $AB$ , ed il lato  $CB$  uguale a  $BD$ , faranno li triangoli  $FCB$ ,  $ABD$  uguali; ma essendo  $CA$  per diritto con la  $GA$ , mercè li due angoli retti  $BAC$ ,  $BAG$ , il triangolo  $FCB$  ha la stessa base col quadrato  $ABFG$ , ed è tra le medesime parallele, onde  $ABFG$  è il duplo del triangolo  $FCB$ , e similmente il parallelogrammo  $BLMD$  è duplo del triangolo  $ABD$ ; dunque il quadrato  $ABFG$  è uguale a  $BLMD$ . Parimente condotte le rette  $IB$ ,  $AE$ , si troveranno uguali i triangoli  $ICB$ ,  $ACE$ , di cui il doppio farà uguale, cioè il quadrato  $ACH$  uguaglierà  $LMCE$ ; e però li due quadrati de' lati  $AB$ ,  $AC$  faranno uguali al quadrato del lato  $BC$  opposto all'angolo retto; il che era da dimostrarsi.

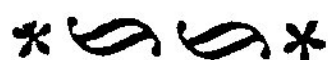
## PROPOSIZIONE XLVIII.

*Viceversa, se il quadrato del lato  $BC$  uguaglia li due quadrati degli altri lati  $AB$ ,  $AC$  del triangolo  $BAC$ , sarà l'angolo  $CAB$  opposto al lato  $BC$  necessariamente un angolo retto.* FIG. 46.

**I**mperocchè dal punto  $A$  tirata la perpendicolare  $AD$  sopra il lato  $AC$ , e tagliando essa  $AD$  uguale alla  $AB$ , congiunta poscia  $CD$ , farà il quadrato di essa  $CD$  uguale alli due quadrati di  $AC$ , e di  $AD$ <sup>a</sup>, cioè di  $AC$ , e di  $AB$ , essendo fatta  $AD$  uguale ad  $AB$ ; dunque il quadrato  $CD$  è uguale al quadrato  $BC$ , ed il lato  $CD$  uguale al lato  $BC$  ne' triangoli  $ADC$ ,  $ABC$ , in cui il lato pure  $AD$  uguaglia il lato  $AB$ , ed il lato  $AC$  è comune ad entrambi; dunque l'angolo retto  $CAD$  è uguale all'angolo  $CAB$ <sup>b</sup>; e però questo pure è retto, onde esso triangolo  $CAB$  è rettangolo, come dovea dimostrarsi.

---

E L E M E N T I  
DELLA GEOMETRIA  
DI EUCLIDE.  
L I B R O II.



D E F I N I Z I O N I.

- I.  Ogni parallelogrammo rettangolo dicesi contenuto da que' due lati, che sono d'intorno all'angolo retto.

*Così quando si nominerà il RETTANGOLO  $ABC$ , o di  $AB$  in  $BC$  (o siano quelle due linee distinte, o congiunte insieme, o l'una parte dell'altra) dovrà intendersi il parallelogrammo  $ABCD$  fatto da tali lati  $AB$ , e  $BC$  congiun-*

Tav. III.

FIG. 47.



giunti insieme ad angolo retto, a' quali lati sono pure uguali gli opposti  $CD$ , e  $DA$  paralleli a' due primi. Ed intanto dicesi esso Rettangolo contenuto da essi lati, perchè se in parti uguali l'uno, e l'altro s' intende diviso, per esempio  $AB$  in 4 parti,  $BC$  in 3. il prodotto del numero delle parti di  $AB$  nel numero delle parti  $BC$ , compone il numero de' quadratelli, i quali compiscono la superficie di tale rettangolo: come 4. moltiplicato in 3. farà dodici quadratini di ciascuna particella de' lati, li quali riempiono il rettangolo  $ABCD$ .

II. In ogni rettangolo  $ABCD$  preso uno de' rettangoli intorno al diametro; come  $AEFH$ , con li due complementi  $FB$ ,  $FD$ , cioè lo spazio  $ABIFGD$ , si chiamerà GNOMONE. FIG. 48.

### PROPOSIZIONE I.

Se di due rette  $AB$ , e  $C$ , l'una sia segata in più parti  $AE$ ,  $EF$ ,  $FB$ , il rettangolo compreso da essa  $C$ , e dall'intera  $AB$ , è uguale alla somma de' rettangoli contenuti da essa  $C$ , e da ciascheduna di tali parti. FIG. 49.

**I**mperochè alla stessa  $AB$  posta ad angolo retto la  $BD$  uguale alla  $C$ , e compiuto il rettangolo  $ABDG$ , si tirino da' punti  $E$ ,  $F$ , che dividono essa  $AB$ , le rette  $EH$ ,  $FI$  parallele a  $BD$ : è manifesto. che  $ABDG$  uguaglia li rettangoli in esso compresi  $FB DI$ ,  $EF IH$ ,  $AE HG$ ; ma quello è contenuto dalla  $AB$ , e dalla  $BD$  uguale a  $C$ , e questi altri si contengono dalle parti  $FB$ ,  $FE$ ,  $AE$ , e dalle rette  $FI$ ,  $EH$  uguali a  $BD$ , e però uguali alla stessa  $C$ ; dunque il rettangolo contenuto dall'intera  $AB$ , e dalla  $C$ , uguaglia la somma de' ret-

tangoli fatti dalla stessa  $C$ , e da ciascuna delle parti  $AE$ ,  $EF$ ,  $FB$  dell'intera  $AB$ ; il che era da dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE II.

FIG. 50.

*Segandosi la retta  $AB$  in due parti  $AD$ ,  $BD$ , il quadrato di tutta  $ABGF$  uguaglia i rettangoli di essa  $AB$  in ciascheduna parte  $AD$ ,  $BD$ .*

**P**Erchè tirata  $DH$  parallela al lato  $AF$ , resta esso quadrato diviso appunto in due rettangoli, l'uno  $FADH$ , contenuto dalla  $AF$  (che uguaglia  $AB$ ) e dalla parte  $AD$ ; l'altro  $DBGH$  contenuto dalla  $BG$  (pure uguale ad  $AB$ ) e dall'altra parte  $DB$ ; sicchè essendo il tutto uguale alla somma delle sue parti, il quadrato  $AB$  uguaglia i rettangoli di  $AB$  in  $AD$ , e di essa  $AB$  in  $BD$ ; il che ec.

## PROPOSIZIONE III.

FIG. 51.

*Essendo pure segata la  $AB$  nel punto  $D$ , il rettangolo di tutta la  $AB$  nella parte  $AD$  uguaglia il quadrato di essa  $AD$ , col rettangolo contenuto da ambe le parti  $AD$ , e  $BD$ .*

**S**I alzi perpendicolarmente ad  $AB$  la retta  $AF$  uguale alla parte  $AD$ , e compiuto il rettangolo  $AFGB$ , che è contenuto da tutta la  $AB$ , e dalla parte  $AD$ , si tiri la  $DH$  parallela ad  $AF$ : farà  $FADH$  il quadrato di  $AD$ , ed  $HDBG$  il rettangolo contenuto dalle parti  $AD$ ,  $BD$  (essendo  $HD$  uguale ad  $AD$ ); dunque essendo il rettangolo di  $AD$  in  $AB$ , cioè  $AFGB$  uguale a questi due spazii, è manifesto, che uguaglia il quadrato  $AD$ , ed il rettangolo  $ADB$ . PRO-

## PROPOSIZIONE IV.

*Essendo la retta  $AB$  divisa in  $C$ , il quadrato di tutta la  $AB$  è uguale a' quadrati delle parti  $AC$ ,  $CB$ , ed a' due rettangoli contenuti da esse parti, cioè da  $AC$  in  $CB$ .* FIG. 54.

**D**Escrivasi esso quadrato  $ABDE$ , e tirato il diametro  $BE$  venga segato in  $G$  dalla  $CF$  parallela al lato  $BD$ , e si tiri per  $G$  la  $HGI$  parallela ad  $AB$ . Essendo i lati  $AB$ ,  $AE$  uguali, l'angolo  $AEB$  uguaglia l'angolo  $ABE^a$ , a cui pure <sup>a 5. 1.</sup> è eguale  $HGE^b$ , dunque sono gli angoli  $GEH$ , <sup>b 29. 1.</sup>  $HGE$  uguali, e però  $EHGF$  è il quadrato di  $HG$ , cioè di  $AC$ : similmente  $CGIB$  si mostrerà essere il quadrato di  $CB$ , come ancora può dedursi dall'essere tutta la  $FC$  uguale ad  $AB$ , e la parte  $FG$  uguale ad  $AC$ , e però la rimanente  $GC$  uguale a  $CB$ . Li due complementi  $ACGH$ ,  $FGID$  sono poi contenuti da lati uguali alle parti  $AC$ ,  $CB$ . Dunque essendo il quadrato  $ABDE$  uguale alli spazii  $EHGF$ ,  $CGIB$ ,  $ACGH$ ,  $FGID$ , è manifesto, essere uguale a' quadrati delle parti  $AC$ ,  $CB$ , ed a due rettangoli contenuti da esse parti; il che era da dimostrarsi.

**COROLLARIO.** Li rettangoli, che si fanno intorno il diametro d'un quadrato sono quadrati, come si è dimostrato  $EHGF$  essere quadrato di  $AC$ , ed  $IBCG$  il quadrato di  $BC$ .

## PROPOSIZIONE V.

*Se la retta  $AC$  è divisa per mezzo in  $B$ , ed in parti disuguali nel punto  $D$ , il quadrato della* FIG. 55.  
me-

*metà di essa BC è uguale al rettangolo delle parti disuguali AD, DC, col quadrato del segmento intermedio BD,*

**S**I descriva il quadrato di essa  $BC$ , il quale sia  $BCEF$ , e tirato il diametro  $CF$ , si conduca la  $DH$  parallela a  $CE$ , la quale feghi il diametro in  $G$ , e si tiri per il punto  $G$  la retta  $IGLK$ , concorrente co' lati  $CE$ ,  $BF$  in  $I$ ,  $L$ , e con la  $AK$ , parallela a detti lati in  $K$ . Sarà il rettangolo  $GIEH$  eguale a  $BDGL$ <sup>a</sup>, ed aggiunto di comune il quadrato  $DGIC$ , farà  $DCEH$  uguale al rettangolo  $BCIL$ , ovvero al rettangolo  $ABLK$ , uguale a questo per essere ambidue sopra basi uguali  $CB$ ,  $AB$ <sup>b</sup>: ed aggiunto di comune il rettangolo  $BDGL$ , farà il Gnomone  $HGLBCE$  uguale al rettangolo  $ADGK$ , il quale è contenuto dalla retta  $AD$ , e dalla  $DG$  uguale a  $DC$ ; onde apposto ad entrambi il quadrato  $LGHF$ , che è quadrato di  $BD$ , farà il Gnomone con tale quadrato, cioè il quadrato intero  $BCEF$ , uguale al rettangolo delle parti disuguali  $ADC$ , col quadrato della parte intermedia  $BD$ ; il che doveasi dimostrare.

### PROPOSIZIONE VI.

**FIG. 54.** *Se alla retta AC, divisa per mezzo in B, si aggiunga per diritto la retta CD, il rettangolo di tutta la composta AD nell' aggiunta CD col quadrato della metà BC, uguaglia il quadrato della BD, composta della metà, e dell' aggiunta.*

**P**Erchè descritto il quadrato  $BDHF$ , e tirato il diametro  $DF$ , da cui si feghi la  $CE$  parallela a  $BF$  in  $I$ , e per lo punto  $I$  tirata la  $GK$ ,  
con-



concorrente co' lati  $DH$ ,  $BF$  in  $I$ ,  $L$ , e con la  $AK$  parallela a  $BF$  in  $K$ ; farà il rettangolo  $ABLK$  uguale a  $BCIL$ , per essere sopra uguali basi <sup>a</sup>; ed <sup>a</sup> 36. 1. è  $BCIL$  uguale all'altro complemento  $GIEH$  <sup>b</sup>; <sup>b</sup> 43. 1. dunque  $ABLK$  uguaglia  $GIEH$ , ed aggiunto ad ambidue il rettangolo  $BDGL$ , farà tutto il rettangolo  $ADGK$  (cioè contenuto dalla composta  $AD$ , e dall'aggiunta  $DC$  uguale a  $DG$ ) uguale al Gnomone  $BLIEHD$ , dunque aggiunto ad ambidue il quadrato  $LIEF$  (che è il quadrato della metà  $BC$ ) riesce il rettangolo  $ADC$ , col quadrato  $BC$ , uguale al detto Gnomone collo stesso quadrato, cioè a tutto il quadrato  $BDHF$ ; il che ec.

## PROPOSIZIONE VII.

*Essendo la retta  $AB$  comunque segata in  $C$ , li quadrati di tutta la  $AB$ , e di una sua parte  $CB$ , FIG 55. sono uguali al duplo del rettangolo di  $AB$  nella stessa  $CB$ , col quadrato della rimanente  $AC$ .*

**S**I descrivano essi due quadrati  $ABDE$ , e  $CBKI$ , e condotto nel maggiore il diametro  $BE$  segante la  $IC$  prolungata in  $G$ , si conduca per  $G$  la  $HL$ , segante i lati  $AE$ ,  $BD$  in  $H$ ,  $L$ , e continuata la  $CG$  convenga col lato  $ED$  in  $F$ . Essendo uguali i complementi  $ACGH$ ,  $LGFD$  <sup>b</sup>, ed i quadrati  $CGLB$ ,  $ICBK$  fatti sopra lo stesso lato  $CB$ , farà il rettangolo  $ABLH$  (contenuto da  $AB$  in  $BC$ ) uguale alla somma del rettangolo  $LGFD$ , e del quadrato  $ICBK$ ; e però il Gnomone  $AHGFDB$ , col quadrato  $ICBK$  uguaglia il duplo del rettangolo di  $AB$  in  $BC$ . Aggiunto dunque da ambe le parti il quadrato  $HGFE$ , che è il quadrato di  $AC$ ,

$AC$ , farà tutto il quadrato  $ABDE$ , col quadrato  $CBKI$ , uguale al duplo rettangolo  $ABC$ , col quadrato  $AC$ ; il che dovea dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 56. *Se alla retta  $AB$  comunque segata in  $C$  si aggiunga per diritto la retta  $BD$  uguale a  $BC$ , il quadrato della composta  $AD$  uguaglia quattro rettangoli di  $AB$  in  $BC$ , col quadrato della rimanente  $AC$ .*

DESCRITTO il quadrato  $ADKG$ , e condotte le  $BI$ ,  $CH$  parallele al lato  $AG$ , si seghino col diametro  $DG$  in  $N$ ,  $P$ , e per questi punti siano tirate le  $ENM$ ,  $FPL$ , seganti le altre rette  $CH$ ,  $BI$  in  $O$ ,  $Q$ . E' manifesto essere il rettangolo  $ABNE$  uguale ad  $NMKI^a$ , a cui pure è uguale  $ONIH$  per essere le basi  $ON$ ,  $NM$  tra di loro ugali (come lo sono  $CB$ , e  $BD$ ); ed al rettangolo  $EOPF$ , che uguaglia  $PQH I^a$ , aggiunto il quadrato  $BDMN$  (uguale all' altro  $ONPQ$ ) sarà uguale la loro somma al rettangolo  $ONIH$ , ed a ciascheduno degli altri due  $NMKI$ , ed  $ABNE$ , contenuto dalla  $AB$ , e dalla  $BC$ , che uguaglia  $BN$ , ovvero  $BD$ . Dunque il Gnomone  $AFPHKD$  è quadruplo del rettangolo di  $AB$  in  $BC$ ; ed aggiunto di quà, e di là il rettangolo  $FPHG$ , che è il quadrato di  $AC$ , farà tutto il quadrato  $ADKG$  uguale alli quattro rettangoli di  $AB$  in  $BC$ , col quadrato della rimanente  $AC$ ; il che dovea dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE IX.

FIG. 57. *La retta  $AC$  essendo segata in parti uguali nel punto  $B$ , ed in disuguali nel punto  $D$ , saranno li*  
qua-

*quadrati delle parti disuguali  $AD$ ,  $DC$ , il doppio del quadrato della metà  $AB$ , e del quadrato della linea intermedia  $BD$ .*

**S**I alzi dal punto  $B$  ad angoli retti la  $BE$  uguale ad  $AB$ , e congiunte le rette  $AE$ ,  $CE$  si tirì la  $DF$  perpendicolare anch' essa ad  $AD$ , cioè parallela a  $BE$ , e posta  $FG$  parallela a  $BD$ , si congiunga  $AF$ . Essendo i lati  $AB$ ,  $BE$  eguali, intorno l'angolo retto  $B$ , faranno eguali li due angoli  $BAE$ ,  $BEA$ <sup>a</sup>, che uguagliano un altro retto<sup>b</sup>, e però faranno semiretti. Similmente li angoli  $BEC$ ,  $BCF$  per la stessa ragione sono semiretti; dunque è retto l'angolo  $AEC$  composto di due semiretti; e faranno ancora semiretti gli angoli  $EFG$ ,  $DFC$ , che uguagliano ciascuno delli due  $BCF$ ,  $BEC$ <sup>c</sup>; dunque  $EG$  uguaglia  $GF$ , cioè  $BD$ ,<sup>c</sup> 29. 1. e  $DF$  uguaglia  $DC$ . Per tanto li due quadrati  $AD$ ,  $DC$  sono uguali alli due  $AD \cdot DF$ , cioè al quadrato  $AF$ <sup>d</sup>, ovvero alli due quadrati  $AE$ ,  $EF$ <sup>d</sup>; ed è<sup>d</sup> 47. 1. il quadrato  $AE$  duplo del quadrato  $AB$ , essendo uguale ad ambidue li quadrati  $AB$ ,  $BE$ , tra di loro uguali; ed il quadrato  $EF$  è parimente duplo del quadrato  $BD$ , uguagliando li due quadrati  $EG$ ,  $GF$ , uguali a quello di  $BD$ . Dunque li quadrati delle parti disuguali  $AD$ ,  $DC$  sono il doppio del quadrato della metà  $AB$ , e del quadrato della parte intermedia  $BD$ ; il che ec.

### PROPOSIZIONE X.

*Se alla retta  $AC$  divisa ugualmente in  $B$ , si aggiunga per diritto un'altra retta  $CD$ , il quadrato della composta  $AD$ , e dell'aggiunta  $CD$  sono il du-*

FIG. 58.

*duplo del quadrato della metà  $AB$ , e della  $BD$  composta della metà, e dell' aggiunta.*

**A**Lzata  $BE$  perpendicolare ad  $AB$ , ed uguale alla stessa, si congiungano  $AE$ ,  $EC$ , e tirata la  $DF$  parallela ad  $EB$  concorra colla  $EC$  in  $F$ , e si tiri  $FG$  parallela a  $BD$ , che convenga colla  $EB$  in  $G$ ; indi congiungasi  $AF$ . E' manifesto, essere l'angolo  $AEC$  retto, essendo semiretti gli angoli  $AEB$ ,  $BEC$ , come ancora li altri  $DCF$ ,  $DFC$ ,  $CFG$ , come si è provato nell' antecedente proposizione; e però  $DF$  è uguale a  $DC$ , ed  $EG$  uguale ad  $FG$ , cioè alla  $BD$ ; onde il quadrato  $EF$  è il duplo del quadrato  $BD$ , ed il quadrato  $AE$  è duplo del quadrato  $AB$ , a' quali essendo eguale il quadrato  $AF$ , per essere l'angolo  $AEF$  retto; e lo stesso essendo uguale a' quadrati  $AD$ ,  $DF$  (per essere ancora retto l'angolo  $ADF$ ) cioè a' quadrati  $AD$ ,  $DC$ ; è manifesto, che questi due quadrati  $AD$ ,  $DC$  sono uguali al doppio del quadrato  $AB$ , ed al doppio del quadrato  $BD$ ; il che ec.

### PROPOSIZIONE XI. PROBL.

FIG. 59. *Segare una data retta linea  $AB$  in  $C$ , talmente che il rettangolo di essa  $AB$  nella parte minore  $BC$  riesca uguale al quadrato della rimanente parte maggiore  $AC$ .*

**D**Esritto il quadrato di tutta la  $AB$ , il quale sia  $ABDE$ , si divida per mezzo in  $F$  un lato  $AE$  contiguo ad essa  $AB$ ; e congiunta la retta  $BF$ , si prolunghi  $FA$  verso  $G$ , in maniera, che sia  $FG$  uguale ad  $FB$ ; Indi sopra l' eccello  $AG$  si descriva il quadrato  $AGIC$ , il cui lato  $IC$  pro-

lun-



lungato feghi i lati  $AB$ ,  $ED$  in  $C$ , &  $H$ . Dico  
 effere il punto  $C$  quel fegamento della retta  $AB$ ,  
 che fi ricercava. Perchè effendo  $AE$  divifa per  
 mezzo in  $F$ , ed aggiuntavi  $AG$ , farà il rettango-  
 lo  $EGA$  (cioè  $EGIH$ , per effere  $GI$  uguale a  $GA$ )  
 infieme col quadrato  $AF$ , uguale al quadrato  
 $FG^a$ , cioè al quadrato  $FB$ , che uguaglia  $FG$ , o <sup>a 6. 2.</sup>  
 pure alli due quadrati  $AB$ ,  $AF$ , che uguagliano  
 effo quadrato  $FB^b$ ; Però tolto di comune il qua- <sup>b 47. 1.</sup>  
 drato  $AF$ , rimane il rettangolo  $EGIH$  uguale al  
 quadrato  $ABDE$ , e tolto di comune  $ACH$ , re-  
 fta il quadrato  $ACIG$  uguale al rettangolo  $DBCH$ ,  
 cioè il quadrato  $AC$  uguale al rettangolo  $ABC$ ;  
 il che era il quefito.

## PROPOSIZIONE XII.

*Ne' triangoli ottusiangoli, come  $ABC$ , il quadra- FIG. 60.*  
*to del lato  $AC$  oppofto all' angolo ottuso è maggiore*  
*de' quadrati degli altri due lati  $AB$ ,  $BC$ , e li fu-*  
*pera di due rettangoli contenuti da uno di effi lati*  
 *$CB$ , e dalla porzione  $BD$  intercetta fra l' angolo*  
 *$B$ , e la perpendicolare  $AD$ , tirata fopra il lato  $CB$*   
*prolungato, dall' angolo  $A$  oppofto ad effo.*

**I**mperocchè il quadrato  $AC$  uguaglia li due qua-  
 drati  $AD$ ,  $CD^c$ ; ma il quadrato  $CD$  è uguale <sup>c 47. 1.</sup>  
 a' quadrati  $CD$ ,  $BD$ , ed a' due rettangoli  $CBD^d$ ; <sup>d 4. 2.</sup>  
 dunque il quadrato  $AC$  è uguale a' quadrati  $AD$ ,  
 $BD$ ,  $CB$ , ed a' due rettangoli  $CBD$ ; effendo a-  
 dunque li due quadrati  $AD$ ,  $BD$  uguali al qua-  
 drato  $AB^c$ ; ne fegue, che il quadrato  $AC$  è u-  
 guale a' quadrati  $AB$ ,  $CB$ , ed a' due rettangoli  
 $CBD$ ; il che ec.

PRO-

## PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 61. *Il quadrato del lato AC opposto ad un angolo acuto B del triangolo ABC è minore de' quadrati de' lati AB, CB, da' quali è superato per due rettangoli CBD compresi da uno de' lati CB, e dall'intercetta DB fra l'angolo B, e la perpendicolare condotta sopra CB dall'opposto angolo A.*

**I**mperocchè il quadrato CB col quadrato DB è uguale a due rettangoli CBD, ed al quadrato CD<sup>a</sup>. Si aggiunga a questi e a quelli il quadrato della perpendicolare AD, farà la somma de' quadrati CB, BD, ed AD uguale alla somma de' due rettangoli CBD, del quadrato CD, e del quadrato AD; ma li due quadrati BD, ed AD uguagliano il quadrato AB; e li due quadrati CD, AD sono uguali al quadrato AC<sup>b</sup>, dunque li quadrati AB, CB sono uguali al quadrato AC con due rettangoli CBD, e però il quadrato AC è minore de' due quadrati AB, CB della quantità di detti due rettangoli; il che ec.

## PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

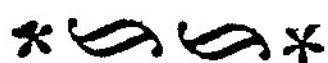
FIG. 62. *Ritrovare un quadrato uguale ad un dato rettilineo A.*

**S**i faccia in un angolo un parallelogrammo BDEF uguale al dato rettilineo A<sup>c</sup>, e si prolunghi BD in G, sicchè sia DG uguale al lato DE, poscia divisa per mezzo la BG in C, dal centro C descrivasi col raggio CB il semicircolo BHG, a cui si stenda il lato DE, il quale concorra colla periferia in H. Dico essere il quadrato DH uguale

le al detto rettilineo  $A$  imperocchè congiunta  $CH$ ,  
 fara il quadrato  $CH$  uguale a' due quadrati  $CD$ ,  
 $DH^a$ , ma il raggio  $CH$  uguaglia il raggio  $CG$ , <sup>a 47. 1.</sup>  
 dunque gli due quadrati  $CD$ , e  $DH$  uguagliano il  
 quadrato  $CG$ . Ma per essere  $BG$  segata pel mez-  
 zo in  $C$ , e non pel mezzo in  $D$ , esso quadrato  $CG$   
 uguaglia il rettangolo  $B DG$ , col quadrato  $CD$  <sup>b 5. 2.</sup>  
 dunque il quadrato  $CD$  col quadrato  $DH$  è ugua-  
 le al quadrato  $CD$  col rettangolo  $B DG$ ; e però  
 il quadrato  $DH$  uguaglia esso rettangolo  $B DG$ , o  
 $B DEF$ ; ma questo si era fatto uguale al rettili-  
 neo  $A$ , dunque al medesimo rettilineo è uguale  
 il quadrato  $DH$ , che dovea ritrovarsi.

# E L E M E N T I DELLA GEOMETRIA DI EUCLIDE.

## LIBRO III.



### DEFINIZIONI.

I.  Na linea retta dicesi **TANGENTE** del  
 Cerchio, se incontrandosi in qual-  
 che punto della sua circonferenza,  
 benchè si prolunghi, non la sega.

II. Similmente diconsi **TOCCARE**  
 le circonferenze de' Cerchj, quando in qualche pun-  
 to convengono, ma non si segano.

III. Diconsi **EGUALMENTE** dal centro **DISTANTI**  
 D quel-

quelle rette linee, sopra di cui le perpendicolari condotte da esso centro si trovano uguali.

IV. SEGMENTO di cerchio chiamasi quella porzione, che da un arco di esso, e dalla corda di una linea retta al medesimo sottotesa, è contenuto.

V. ANGOLO DEL SEGMENTO si nomina quello, che nel termine dell' arco dalla sua periferia, e dalla corda sottoposta comprendesi.

VI. ANGOLO poi NEL SEGMENTO dicesi qualunque di quelli, che dalle rette condotte da ambi i termini della corda, a qualunque punto dell' arco, sono contenuti.

VII. Lo stesso angolo si dice INSISTERE sopra l' arco circolare opposto, il quale, con quello del segmento, compisce il Cerchio.

VIII. SETTORE si chiama lo spazio compreso da due raggi del cerchio, e dall' arco da essi intercetto.

IX. SEGMENTI SIMILI diconsi quelli, che comprendono angoli uguali, contenuti dalle rette tirate da qualunque punto dell' arco a' termini della corda.

### PROPOSIZIONE I. PROBL.

FIG. 63. *Trovare il centro E d' un dato cerchio ABC.*

a 10. I. **S**I tiri dentro di esso qualunque retta  $AC$ , e dividasi per mezzo in  $F^a$ , indi si alzi sopra di essa una perpendicolare  $FB$ , la quale segghi la circonferenza in  $B$ , e  $D^b$ ; e divisa pure essa  $BD$  per mezzo in  $E$ , dico essere questo punto  $E$  il centro ricercato. Imperocchè, se fosse fuori della linea



nea  $BD$ , come in  $G$ , tirate le linee  $GA$ ,  $GC$  farebbero uguali, e congiunta  $GF$ , essendo comune a' triangoli  $GFA$ ,  $GFC$ , in cui pure i lati  $AF$ ,  $FC$  sono uguali, farebbe pure l'angolo  $AFG$  uguale al conseguente  $GFC$ <sup>a</sup>; e però ambidue retti, dunque l'angolo  $AFG$  farebbe uguale all'angolo  $AFE$ , che si era pure fatto retto dalla perpendicolare  $FB$ <sup>b</sup>; il che è assurdo<sup>c</sup>; dunque il centro non è fuori della retta  $BD$ , nè può essere altrove, che nel mezzo di essa; e però  $E$  è il centro ricercato.

a 8. 1.

b Assiom. 7.

c Assiom. 6.

COROLLARIO. Condotta dunque nel cerchio qualunque linea  $CA$ , e dal punto di mezzo  $F$  eretta la perpendicolare, in essa deve sempre essere il centro del cerchio.

## PROPOSIZIONE II.

*La retta  $AB$ , che congiunge due punti  $A$ ,  $B$  della periferia d' un cerchio, giace tutta dentro al medesimo cerchio.* FIG. 64.

**I**Mperocchè tra' punti  $A$ , e  $B$  preso qualunque punto  $D$  in essa linea, ed al centro  $C$  congiunte le rette  $CA$ ,  $CB$ ,  $CD$ , o faranno gli angoli  $ADC$ ,  $BDC$  retti, o l' uno acuto, l' altro ottuso; sia per esempio  $ADC$  ottuso, o retto; gli altri angoli faranno in esso triangolo acuti<sup>d</sup>, e però il lato  $AC$ <sup>d</sup> 17. 1. sarà maggiore di  $CD$ ; ma segandosi la circonferenza da essa  $CD$  in  $F$ , la  $CF$  uguaglia il raggio  $AC$ ; dunque essendo  $DC$  minore del raggio  $CF$ , il punto  $D$  è più accolto al centro, che non è la periferia del cerchio; e però qualunque punto  $D$  della retta  $AB$  si prova dentro al circolo; dunque giace tutta la linea  $AB$  dentro al medesimo; il che ec.

d 17. 1.

e 19. 1.

D 2

PRO-

## PROPOSIZIONE III.

FIG. 65. *Se nel cerchio ABCD la retta BD, che passa pel centro E, sega per mezzo la retta AC, che non passa pel centro, la segnerà ad angolo retto: e viceversa, se la sega ad angolo retto in F, ivi la divide pel mezzo.*

**P**Erchè ne' triangoli  $AEF$ ,  $CEF$ , essendo il lato  $EF$  comune, se ancora il lato  $AF$  uguaglia  $FC$ , e la base  $AE$  è uguale all' altra  $EC$ , gli angoli  $AFE$ , e  $CFE$  faranno uguali <sup>a</sup>, e però retti, e se sono questi retti, essendo ancora gli angoli  $EAF$ ,  $ECF$  uguali <sup>b</sup>, ed il lato  $EF$  comune, sarà ancora il lato  $AF$  uguale ad  $FC$  <sup>c</sup>; il che ec.

a 8. 1.  
b 5. 1.  
c 26. 1.

## PROPOSIZIONE IV.

FIG. 66. *Se due linee AB, CD, che non passano pel centro, si segano in F, non saranno ivi ambedue divise pel mezzo.*

**D**Al centro  $E$  si conduca la  $EF$ . Se fosse  $AB$  divisa pel mezzo in  $F$ , gli farebbe  $EF$  perpendicolare <sup>d</sup>; e se pure  $CD$  si dividesse per mezzo nel medesimo punto  $F$ , farebbe a questa ancora perpendicolare la stessa  $EF$ ; dunque l'angolo retto  $AFE$  uguaglierebbe il retto  $CFE$ , onde il tutto farebbe uguale alla parte; il che è impossibile <sup>e</sup>. Dunque non si segano l' una, e l' altra pel mezzo fuori del centro. Il che era da dimostrarsi.

a 3. 3.  
e Affiom. 6.

## PROPOSIZIONE V.

FIG. 67. *Se due cerchi AB, CD si seghino in B, non avranno il medesimo centro E comune ad entrambi.*

Im-

**I**mperochè congiunta al segmento la retta  $EB$ , e tirata qualunque altra  $EAD$ , che segghi ambedue le circonferenze, ove sono distinte, in  $A, D$ , se fosse il punto  $E$  centro d'ambi i cerchj, farebbe  $EB$  uguale tanto ad  $EA$ , che ad  $ED$ , onde queste due farebbero uguali tra loro<sup>a</sup>, essendo uguali<sup>a</sup> *Affiom. 1.* ad una terza; il che è impossibile, perchè il tutto non può essere uguale ad una sua parte<sup>b</sup>; dunque tali cerchj non hanno un centro comune  $E$ ; il che era da dimostrarsi. *b Affiom. 6.*

## PROPOSIZIONE VI.

*Parimente, se detti cerchj si toccassero in  $B$ , non potrebbero avere un centro comune  $E$ .* FIG. 68.

**P**erchè giunta al contatto  $EB$ , e tirata l'altra  $EAD$ , ne seguirebbe lo stesso assurdo, come neli' antecedente. Dunque è verissima ancora questa proposta.

## PROPOSIZIONE VII.

*Preso dentro al cerchio  $ADB$  il punto  $G$  fuori del centro  $E$ , e condotta pel centro la retta  $GEA$ , continuata dall'altra parte in  $B$ , e tirate altre rette  $GF, GD$ , sarà primieramente la  $GA$  massima di tutte; secondo la  $GF$  più vicina alla massima, sarà maggiore della  $GD$  più lontana da essa; terzo la  $GB$  residua del diametro, è la minima di tutte; quarto facendo l'angolo  $GEH$  uguale all'altro  $GEF$  congiunta  $GH$  riuscirà uguale a  $GF$ , onde due sole linee si possono tirare tra di loro uguali dal punto  $G$  alla circonferenza, una di quà, ed una di là dalla massima.* Tav. IV. FIG. 69.

D 3

Ti-

**T**irati dal centro  $E$  i raggi  $EF$ ,  $ED$ ,  $EH$ , essendo  $EF$  uguale ad  $EA$ , aggiunta ad ambedue la  $EG$ , farà  $GA$  uguale alli due lati  $GE$ ,  $EF$ , i quali sono maggiori del terzo  $GF$ <sup>a</sup>, dunque  $GA$  è maggiore di  $GF$ , e similmente si mostrebbe maggiore di qualunque altra  $GD$ , che però è la massima di tutte, come in primo luogo dovea dimostrarsi.

Secondo, essendo ne' triangoli  $GEF$ ,  $GED$  il lato  $GE$  comune, ed il lato  $EF$  uguale ad  $ED$ , ma l'angolo  $GEF$  maggiore di  $GED$ , farà la base  $GF$  maggiore dell' altra  $GD$ <sup>b</sup>, e però la retta più prossima alla massima  $GA$ , è maggiore della più lontana.

Terzo, quindi la  $GB$  direttamente opposta alla massima  $GA$ , e però più remota da essa di qualunque altra, è la minima di tutte, essendo qualunque  $GD$  maggiore di essa, perchè  $GD$  con  $GE$  è maggiore di  $ED$ , e però maggiore di  $EB$ , e però tolta di comune  $GE$ , rimane  $GD$  maggiore di  $GB$ <sup>c</sup>.

Quarto, essendo fatti gli angoli al centro uguali  $GEH$ ,  $GEF$ , contenuti da lati uguali, essendo  $GE$  comune, ed  $EH$  uguale ad  $EF$ , le basi  $GH$ ,  $GF$  faranno pure uguali<sup>d</sup>; ma se si tirasse da esso punto  $G$  qualunque altra linea alla circonferenza, farebbe più vicina, o più lontana dalla massima, che non sono queste due; dunque due sole linee uguali si possono tirare da un punto, che non sia centro, alla circonferenza, una di quà, e una di là dalla massima; il che ec.

PRO-



## PROPOSIZIONE VIII.

*Se il punto G è preso fuori del cerchio, primie- FIG. 70.  
ramente condotta pel centro la retta GEA fino al  
concavo della circonferenza, sarà questa la massima  
di tutte. Secondo la GF più vicina alla massima, sa-  
rà maggiore della GD più lontana. Terzo la GB  
terminata al convesso della periferia, che continuata  
passa pel centro, è la minima di tutte. Quarto di  
tutte le rette terminate al convesso, sempre la Gf  
più vicina alla minima, è minore della Gd più lon-  
tana. Quinto due sole linee uguali una di quà, e una  
di là dalla massima, o dalla minima potranno tirarsi  
da esso punto G al concavo, o al convesso della circon-  
ferenza, facendo al centro gli angoli uguali GEH,  
GED, ovvero GEh, GEf.*

**I**L primo, ed il secondo si prova come nell' an-  
tecedente; il terzo si dimostra ancora, perchè  
essendo  $Ed$ , con  $dG$  maggiore di  $EG^a$ , tolte  $Ed$ , <sup>a 20. 1.</sup>  
ed  $EB$  raggi uguali, rimane  $Gd$  maggiore di  $GB$ ,  
e così qualunque altra  $Gf$  farà maggiore di  $GB$ ,  
e però questa è la minima di tutte.

Il quarto si prova, perchè le due  $Gd, dE$  sono  
maggiori delle due  $Gf, fE^b$ : ma  $dE, fE$  sono <sup>b 21. 1.</sup>  
uguali, dunque  $Gd$  è maggiore di  $Gf$ ; e però le  
più vicine alla minima  $GB$ , sopra il convesso del  
cerchio, sono minori delle più lontane.

Il Quinto si prova, come il quarto della propo-  
sizione precedente.

## PROPOSIZIONE IX.

*Se da un punto E dentro al circolo si possono tira- FIG. 71.  
re*

*re alla circonferenza più di due linee uguali EA, ED, EF, sarà quello il centro di esso cerchio.*

**I**Mperocchè da un punto, che non fosse centro non si potrebbero tirare, se non due linee uguali, come si è dimostrato di sopra<sup>a</sup>.

## PROPOSIZIONE X.

FIG. 72. *Due cerchj non possono segarsi, se non in due soli punti.*

**P**Erchè se si segassero in tre punti *A, B, C*, condotte dal centro *E* di uno di essi le rette *EA, EB, EC* a' segamenti, essendo uguali, dovrebbe essere il punto *E* centro ancora dell' altro cerchio *b*, il che è impossibile<sup>c</sup>.

## PROPOSIZIONE XI.

FIG. 73. *Se due cerchj si toccano al di dentro in B, la retta, che congiunge i loro centri E, C, prolungata passerà pel contatto B.*

**A**Ltrimenti, se fosse del maggior cerchio il centro *e*, che congiunto col centro *C* del minore segasse le circonferenze, ove sono disgiunte, in *D, A*; tirate al contatto le rette *CB, e B*, essendo *CD* uguale a *CB*, farà *De* uguale alle due *BC, Ce*, e però maggiore di *Be*<sup>d</sup>, cioè dell' altro raggio *e A*; e così la parte *e D* maggiore del tutto *e A*; il che è impossibile<sup>e</sup>. Dunque il vero centro del cerchio maggiore era *E*, che connesso con *C* centro del minore manda la linea *EC* al contatto *B*; il che era da dimostrarsi.

PRO-

## PROPOSIZIONE XII.

*Ancora toccandosi due cerchj per di fuori in  $B$ , la retta, che congiunge i loro centri  $E, C$ , passerà pel contatto  $B$ .* FIG. 74.

**I**Mperocchè, se non fosse  $E$  il centro d'uno di essi cerchj, ma un altro punto  $e$ , sicchè congiunta la  $eC$  segasse le periferie in  $A, D$ , tirata la  $eB$ , farebbe  $eB$  con  $BC$  uguale agl' altri due raggi  $eA$ , e  $CD$ , e però que' due lati  $eB, BC$  riuscirebbero minori del terzo  $Ce$ ; il che è impossibile<sup>a</sup>, dunque il centro deve essere in  $E$ , nella retta  $EC$ , che passa pel contatto  $B$ ; il che ec.

## PROPOSIZIONE XIII.

*Due cerchj, che si tocchino dentro, o fuori, avranno il loro contatto in un solo punto  $B$ .* FIG. 75.

**S**I congiungano i loro centri  $E, C$  colla retta  $CE$ , che passerà pel contatto  $B$ <sup>b</sup>; ma se si toccassero in altro punto  $D$ , si congiunga ancora la  $CD$ . Perchè dunque la  $CB$  passa pel centro  $E$  dell' altro cerchio maggiore, farà  $CB$  la minima di quelle, che dal punto  $C$  si conducono alla periferia del detto cerchio, il cui centro  $E$ <sup>c</sup>, dunque non farebbe  $CD$  uguale a  $CB$ , e però non farebbero ambedue raggi del cerchio, il cui centro  $C$ ; e però non si toccano essi cerchj in altro punto, che in  $B$ .

## PROPOSIZIONE XIV.

*Nel cerchio le rette  $AC, BD$  se sono uguali saranno ugualmente distanti dal centro  $E$ ; e se sono da esso ugualmente distanti, sono tra di loro uguali.* FIG. 76.

Ti-

**T**irate le perpendicolari  $EF$ ,  $EG$  sopra di esse dal centro  $E$ , faranno divise pel mezzo le rette  $AC$ ,  $BD^a$ , onde sarà  $AF$  uguale a  $BG$ , se tutta la  $AC$  era uguale a tutta la  $BD$ ; e congiunti i raggi  $EA$ ,  $EB$ , li cui quadrati sono uguali, faranno altresì li quadrati  $AF$ , ed  $FE$  uguali a' quadrati  $BG$ ,  $EG$ , perchè uguagliano i quadrati de' raggi opposti agli angoli retti  $F$ ,  $G^b$ , dunque essendo uguali li quadrati  $AF$ ,  $BG$  devono essere uguali i rimanenti quadrati  $EF$ ,  $EG^c$ , e però ancora esse perpendicolari sono uguali e però le rette uguali  $AC$ ,  $BD$  sono ugualmente distanti dal centro  $E^d$ . Viceversa le rette, che saranno ugualmente distanti dal centro, dovranno essere uguali, perchè i due quadrati  $AF$   $FE$  uguagliando gli altri due  $BG$ ,  $GE$ , essendo tanto que  $i$ , che quelli uguali al quadrato del raggio, però siccome il quadrato  $EF$  uguaglierà il quadrato  $EG$ . ancora i quadrati rimanenti  $AF$ ,  $BG$  faranno uguali, ed essendo  $AF$ ,  $BG$  la metà delle rette  $AC$ ,  $BD^a$ , ancora le intiere  $AC$ ,  $BD$  riescono uguali; il che ec.

## PROPOSIZIONE XV.

*Delle rette inscritte in un circolo la massima è il diametro, e dell'altre la più vicina  $IK$  al centro  $E$ , è maggiore della più lontana  $AC$ .*

**T**irate dal centro sopra le rette  $AC$ ,  $IK$  le perpendicolari  $EF$ ,  $EH$ , si prolunghi questa in  $G$ , sicchè sia  $EG$  uguale ad  $EF$ , e si tiri la  $BGD$  parallela ad  $IK$  cui parimente sarà perpendicolare la  $EG$  onde  $DB$  riuscirà uguale ad  $AC^c$ ; ma congiunti i raggi  $EI$ ,  $EK$ ,  $ED$ ,  $EB$ , essendo gli

due



due lati  $IE$ ,  $KE$  uguali agli due  $BE$ ,  $DE$ , ma l'angolo  $IEK$  maggiore di  $BED$ , dunque la base  $IK$  è maggiore dell'altra  $BD$ <sup>a</sup>, e però è maggio- a 24. 1.  
re la più vicina al centro della più lontana  $AC$ , che uguaglia  $BD$ ; ed il diametro è vicino più di tutti al centro, dunque è maggiore di qualunque altra retta non condotta pel centro, e però è la massima di tutte, uguagliando sempre gli due raggi come  $EI$ ,  $EK$ , i quali sono maggiori della base  $IK$ <sup>b</sup>; onde è manifesto ciò, che dovea provarsi. b 20. 1.

## PROPOSIZIONE XVI.

*La retta  $EAD$  tirata dal termine  $A$  del diametro  $AH$ , perpendicolare ad esso, sarà tangente del cerchio  $AB$ , rimanendo tutta negli altri punti esteriore alla circonferenza: nè potrà inserirsi veruna linea retta  $LA$  tra la stessa tangente  $AE$ , e la circonferenza; e però l'angolo del semicircolo  $CAB$ , o  $CAF$  sarà maggiore di qualsivoglia angolo acuto  $LAH$ ; e l'angolo del contatto  $FAE$  è minore di qualsivoglia piccolo angolo rettilineo  $LAE$ .* FIG. 78.

**T**irata dal centro  $C$  a qualunque altro punto  $D$  della retta  $EAD$ , che nel punto  $A$  conviene colla circonferenza, la retta  $CD$ , questa opposta all'angolo retto  $CAD$  farà maggiore del raggio  $CA$  opposto all'angolo acuto  $CDA$ <sup>c</sup>, e però c 19. 1.  
è maggiore del raggio  $CB$ ; dunque il punto  $D$  è di là della circonferenza; e così qualunque altro punto di essa linea  $EAD$  rimane fuori del cerchio, che però solamente in esso punto  $A$  resta toccato dalla retta  $EAD$ . Che poi non possa tra la circonferenza, e la tangente inserirsi al contatto  $A$

19. 1. veruna retta  $LA$ , è manifesto, perchè condotta dal centro  $C$  la perpendicolare  $CG$  sopra essa  $LA$ , farà  $CG$  minore di  $CA$ , come opposta quella ad angolo minore del retto  $CGA$ , cui si oppone questa <sup>a</sup>, dunque il punto  $G$  della retta  $LA$  essendo più vicino del raggio al centro  $C$ , farà dentro esso cerchio; e però la retta  $LA$  sega il circolo, non resta interposta fra la circonferenza, e la tangente; onde l'angolo del semicircolo eccede qualunque angolo acuto  $LAC$ , e l'angolo del contatto è minore di qualsivoglia piccolissimo angolo  $EAL$ ; Il che era da dimostrarfi.

## PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

FIG. 79. *Da un dato punto  $E$  condurre una tangente  $EA$  al dato cerchio  $FBA$ .*

4. 1. 15. III. **C**ongiunta al centro  $C$  del dato cerchio la retta  $EC$ , segante la periferia in  $B$ , si descriva col raggio  $CE$  un altro cerchio concentrico  $ED$ , e posta  $BD$  perpendicolare alla  $EC$ , la quale concorra colla periferia di questo secondo cerchio in  $D$ , si congiunga  $CD$ , segante la prima data circonferenza in  $A$ ; congiunta  $EA$  farà tangente; imperocchè gli triangoli  $ECA$ ,  $DCB$ , avendo intorno il comune angolo  $C$  i lati  $CE$ ,  $CA$  uguali a  $CD$ ,  $CB$ , non solo le loro basi  $EA$ ,  $BD$  faranno uguali, ma ancora gli angoli corrispondenti <sup>b</sup>, e però l'angolo  $EAC$  farà retto, come l'angolo  $DBC$ , dunque essendo  $AE$  perpendicolare al termine del diametro  $ACE$  farà essa  $AE$  tangente <sup>c</sup>; il che dovea eseguirsi.

FRO-

## PROPOSIZIONE XVIII.

*Se la retta  $AE$  tocca il cerchio  $ABF$ , condotta dal centro  $C$  al contatto  $A$  la retta  $CA$ , farà con essa tangente angolo retto.* FIG. 80.

**S**E nò si conduca la  $CD$  perpendicolare ad essa tangente; farà dunque  $AC$  maggiore di  $CD$ <sup>a</sup>; ma  $CB$  uguaglia  $CA$ , dunque sarebbe la parte  $CB$  del tutto  $CD$  maggiore; il che è assurdo<sup>b</sup>. a 19. 1.  
b Affom. 6.

## PROPOSIZIONE XIX.

*Toccandosi il cerchio in  $A$  dalla retta  $AE$ , se dal contatto  $A$  si alza la perpendicolare  $AH$  ad essa tangente, passerà per lo centro  $C$  del Cerchio.*

**A**Ltrimenti se fosse il centro in  $G$  fuori della retta  $AH$ , congiunta  $GA$  farebbe ancor essa angolo retto con  $AE$ <sup>c</sup>, dunque gli angoli  $GAE$ , c 18. III.  $CAE$  farebbero uguali<sup>d</sup>, ed il tutto riuscirebbe uguale alla parte; il che è impossibile<sup>b</sup>. d Affom. 7.

## PROPOSIZIONE XX.

*Se da i termini dell' arco  $AB$  si conducono due raggi al centro  $C$ , e due linee a qualche punto  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , della circonferenza opposta a detto arco, farà l'angolo  $ACB$  duplo di qualsivoglia di detti angoli  $ADB$ ,  $AEB$ ,  $AFB$ .* FIG. 81.

**N**EL triangolo  $CEB$  fatto dal raggio  $AC$  prolungato in  $E$  sono gli angoli  $AEB$ , e  $CBE$  uguali<sup>e</sup>, ma l'angolo esterno  $ACB$  è uguale ad e 5. 1. ambidue gl' interni opposti  $AEB$ ,  $CBE$ <sup>f</sup>, dunque f 32. 1.  
 $ACB$

$ACB$  è duplo di  $AEB$ . Quanto all'angolo  $ADB$  fatto sotto l'altro  $AEB$ , congiunta la retta  $DC$ , e prolungata in  $G$ , farà l'angolo  $GCB$  uguale a' due interni tra di loro uguali  $CDB, CBD^a$ , e però è duplo  $GCB$  di  $CDB$ ; similmente l'angolo  $GCA$  farà duplo di  $CDA$ , uguagliando ancor esso gli due interni tra di loro uguali  $CDA, CAD^a$ ; dunque il rimanente  $ACB$  è duplo del rimanente  $ADB$ . Se poi l'angolo  $AFB$  è al di sopra, di maniera, che la retta  $FC$  prolungata in  $H$  sieghi l'angolo centrale  $ACB$ , tanto farà l'esterno  $ACH$  duplo dell'interno  $AFC$ , quanto il rimanente  $HCB$  duplo di  $CFB$ , dunque tutto l'angolo  $ACB$  farà pure il doppio dell'angolo intero  $AFB$ ; il che ec.

## PROPOSIZIONE XXI.

*Li angoli  $ADB, AEB, AFB$  insistenti al medesimo arco, e disposti nello stesso segmento, sono tra di loro uguali.*

Imperocchè ciascuno di essi è la metà dell'angolo fatto al centro  $ACB^b$ , dunque riescono tra di loro uguali.

## PROPOSIZIONE XXII.

FIG. S2. *Ogni quadrilatero  $ABCD$  inscritto in un circolo ha gli angoli opposti uguali a due retti.*

SI conducano le diagonali  $AC, BD$ . Sarà l'angolo  $ABD$  uguale all'angolo  $ACD^c$ , e l'angolo  $DBC$  uguale all'angolo  $DAC$ ; dunque tutto l'angolo  $ABC$  uguaglia li due  $DCA, DAC$ ; ed aggiunto di quà, e di là l'angolo  $ADC$ ; sono li due angoli opposti  $ABC, ADC$  del detto quadrilatero,



ro, eguali a tutti tre gli angoli del triangolo  $ADC$ , i quali sono uguali a due retti <sup>a</sup>. Il che era da dimostrare. a 32. 1.

## PROPOSIZIONE XXIII.

*Sopra la stessa retta  $AC$  non possono essere descritti verso la medesima parte due segmenti simili, e disuguali  $ADC$ ,  $ABC$ .* FIG. 83.

**M**Ercecchè condotta da un termine  $C$  la retta  $CBD$ , segante le due circonferenze in  $B$ ,  $D$ , e congiunte all'altro termine  $A$  le rette  $BA$ ,  $DA$ , se fossero i segmenti simili, farebbero gli angoli  $ADC$ ,  $ABC$  uguali <sup>b</sup>, il che è impossibile, <sup>b</sup> *Defin. 9.* essendo l'uno esterno, l'altro interno opposto del triangolo  $ADB$  <sup>c</sup>; dunque non possono tali segmenti essere simili. c 16. 1.

## PROPOSIZIONE XXIV.

*Simili porzioni di cerchj  $ADC$ ,  $BEF$ , descritte sopra linee uguali tra di loro  $AC$ ,  $BF$ , sono porzioni uguali.* FIG. 84.

**A**Ltrimenti soprapponendo l'una all'altra, adattandosi la base  $AC$  all'altra uguale  $BF$ , riuscirebbero sopra la stessa linea descritti due segmenti simili, e disuguali, il che è impossibile <sup>d</sup>; <sup>d</sup> 23. III. dunque è necessario, che dette porzioni siano uguali.

## PROPOSIZIONE XXV. PROBL.

*Data una porzione di cerchio  $EAF$ , trovarne il centro  $C$ , per poterne compire tutto il circolo.* FIG. 85.

Di-

**D**ivisa la corda  $EF$  pel mezzo in  $D$ , gli si conduca la perpendicolare  $DH$ ; e tirata un'altra qualsivoglia retta  $EA$  dentro la stessa porzione, dividasi per mezzo in  $B$ , e gli si conduca la perpendicolare  $BC$ , concorrente in  $C$  con l'altra  $DH$ . Dico essere  $C$  il centro ricercato, di maniera che congiunta  $CE$ , si potrà con questo raggio compirne il cerchio  $EAH$ , dovendo esserne il centro di questo circolo in qualunque di dette perpendicolari seganti per mezzo esse corde  $EF$ ,  $EA^a$ , e però nel loro concorso  $C$ ; il che ec.

*a Coroll.  
Prop. I.  
III.*

## PROPOSIZIONE XXVI.

*Ne' cerchj uguali  $ABD$ ,  $EFH$ , gli angoli uguali fatti al centro  $ACB$ ,  $EGF$ , o fatti alla circonferenza  $ADB$ ,  $EHF$ , insistono ad archi uguali  $AB$ ,  $EF$ .*

**S**i conducano le corde  $AB$ ,  $EF$ ; queste faranno uguali, essendo basi di due triangoli  $ACB$ ,  $EGF$ , che intorno gli angoli uguali  $C$ ,  $G$ , hanno i lati uguali  $CA$ ,  $GE$ , e  $CB$ ,  $GF^b$ , dunque essendo le rette  $AB$ ,  $EF$  uguali, e li segmenti  $ADB$ ,  $EHF$  simili, per l'ugualità degli angoli in essi contenuti<sup>c</sup>, onde sono porzioni di cerchio eguali<sup>d</sup>, però ancora gli rimanenti archi  $AB$ ,  $EF$  sono uguali; Il che cc.

*b 4. I.*

*c Defin. 9. b.*

*d 24. III.*

## PROPOSIZIONE XXVII.

*Ne' cerchj uguali, gli angoli fatti sopra archi uguali  $AB$ ,  $EF$ , al centro, o alla circonferenza, saranno uguali.*

Im-

**I**mperochè se non fosse l'angolo  $ACB$  uguale ad  $EGF$ , suppongasi uguale ad  $EGL$ ; dunque sarebbe l'arco  $AB$  uguale ad  $EL$ <sup>a</sup>, e non ad  $EF$ <sup>a 26. III</sup> contro l'ipotesi; pertanto sono uguali gli angoli  $ACB$ ,  $EGF$  al centro, e così ancora gli altri  $ADB$ ,  $EHF$  fatti alla circonferenza, di cui sono dupli quelli altri fatti al centro. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXVIII.

*Le rette uguali  $AB$ ,  $EF$ , in cerchj uguali, ne segano archi uguali, il maggiore  $ADB$  al maggiore  $EHF$ , ed il minore  $AB$  al minore  $EF$ .*

**F**atti al centro gli angoli  $ACB$ ,  $EGF$ , faranno uguali, essendo i lati, e le basi uguali in tali triangoli<sup>b</sup>, dunque l'arco  $AB$  farà all'altro  $EF$  u-<sup>b 8. I.</sup>guale<sup>a</sup>, e però ancora il rimanente  $ADB$  al residuo  $EHF$ ; il che ec.

## PROPOSIZIONE XXIX.

*Ne' cerchj uguali sono gli archi uguali segati da corde uguali.*

**E**ssendo gli archi  $AB$ ,  $EF$  uguali, ancora gli angoli al centro  $ACB$ ,  $EGF$  faranno uguali<sup>c</sup>,<sup>c 27. III.</sup> dunque per essere ancora uguali i lati di detti triangoli, le basi pure  $AB$ ,  $EF$ , sono uguali; il che ec.

## PROPOSIZIONE XXX. PROBL.

*Dato un arco circolare  $AEB$ , dividerlo pel mezzo.* FIG. 87.

**S**i divida la corda  $AB$  pel mezzo in  $D$ , e vi si alzi la perpendicolare  $DE$ ; dico che questa segherà  
E gherà

a 4. 1. gherà l' arco pel mezzo in  $E$ ; perchè giunte le  
 rette  $AE, BE$  faranno le basi uguali de' triangoli  
 $ADE, BDE$ , in cui il lato  $DE$  è comune, ed i  
 lati  $AD, BD$  sono uguali, intorno ad angoli ret-  
 ti<sup>a</sup>, ma le rette uguali in cerchj uguali, e però an-  
 cora nel medesimo cerchio, corrispondono ad ar-  
 chi uguali<sup>b</sup>, dunque sono uguali gli archi  $AE, BE$ ,  
 ne' quali è diviso l' arco dato  $AEB$  dalla retta  $DE$ .  
 Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXXI.

FIG. 88. *L' angolo  $ADB$ , fatto nel semicircolo  $BEA$ , è retto; l' angolo  $BAD$ , fatto nel maggiore segmento  $BFA D$ , è acuto, e l' angolo  $BED$ , fatto nel segmento minore, sarà ottuso.*

**C**ongiunta al centro la retta  $DC$ , e prolunga-  
 ta all' altra parte del circolo in  $F$ , essendo  
 tanto l' angolo  $ACF$ , duplo di  $ADF$ , che l' ang-  
 lo  $FCB$  duplo di  $FDB$ <sup>c</sup>, faranno gli angoli  $ACF$ ,  
 $FCB$  dupli dell' angolo  $ADB$ ; ma quelli due sono  
 uguali a due retti<sup>d</sup>, dunque quest' angolo fatto nel  
 semicircolo è retto; Però nel triangolo  $ADB$  l'  
 angolo  $A$ , che è descritto nel segmento maggiore  
 $BFA D$ , è acuto, essendo l' altro  $ADB$ , retto<sup>e</sup>; e  
 perchè nel quadrilatero  $BEDA$  i due angoli oppo-  
 sti  $BAD, BED$ , sono uguali a due retti<sup>f</sup>, essendo  
 $BAD$  acuto, l' altro  $BED$  nel segmento minore,  
 sarà ottuso. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 89. *Se nello stesso punto  $B$  della circonferenza, la ret-  
 ta  $GH$  tocca il cerchio, e la  $BD$  lo sega, l' ang-  
 lo*



*lo della tangente, e della segante uguaglia quello, che si descriverebbe nell' alterno segmento, cioè  $DBH$  è uguale all' angolo  $BAD$ , e  $DBG$  uguale a  $BED$ .*

**S**I conduca pel centro  $C$  dal contatto la linea  $BCA$ , e congiungasi  $AD$ ; farà l' angolo  $CBH$  retto <sup>a</sup>, <sup>a</sup> 18. III. ed essendo ancora retto nel semicircolo l' angolo  $ADB$  <sup>b</sup>, gli altri due  $ABD$ ,  $BAD$  faranno uguali <sup>b</sup> 31. III. pure ad un retto <sup>c</sup>, e però uguali a' due  $ABD$ , <sup>c</sup> 32. I.  $DBH$ ; dunque tolto di comune  $ABD$ , rimane l' angolo  $BAD$  uguale a  $DBH$ ; e perchè l' angolo  $BED$  con l' opposto  $BAD$  del quadrilatero  $ADEB$  uguaglia due retti <sup>d</sup>, come ancora  $DBH$  con <sup>d</sup> 22. III.  $DBG$  compisce due retti <sup>e</sup>, farà l' angolo  $BED$  <sup>e</sup> 13. I. uguale a  $DBG$ . Il che ec.

### PROPOSIZIONE XXXIII. PROBL.

*Sopra una data retta  $BD$  descrivere una porzio- FIG. 90.  
ne di circolo, capace di un angolo uguale al dato  
angolo  $F$ .*

**S**I faccia l' angolo  $DBH$  uguale ad  $F$  <sup>f</sup>, e divi- <sup>f</sup> 23. I.  
fa  $BD$  pel mezzo in  $E$ , si alzi  $EC$  perpendi-  
colare ad essa, e dal punto  $B$  si tiri pure  $BA$  per-  
pendicolare a  $BH$ ; e convenendo queste due per-  
pendicolari nel punto  $C$ , col raggio  $CB$  descrivasi  
un cerchio, che passerà ancora per  $D$ , essendo  
congiunta la  $CD$  uguale a  $CB$ , per essere basi de'  
triangoli rettangoli  $CED$ ,  $CEB$ , ne' quali il lato  
 $EC$  è comune, ed i lati  $ED$ ,  $EB$  uguali; e farà  
esso circolo toccato dalla  $BH$  <sup>g</sup>, però l' angolo  $DAB$  <sup>g</sup> 16. III.  
fatto nel segmento, che riesce sopra la data retta  
 $BD$ , farà uguale all' angolo  $DBH$  <sup>h</sup>, cioè al dato <sup>h</sup> 32. III.  
angolo  $F$ , per la costruzione. Il che ec.

E 2

PRO-

## PROPOSIZIONE XXXIV. PROBL.

*Da un dato cerchio tagliare una porzione capace dell'angolo uguale al dato F.*

**S**I tiri la retta  $BH$ , che tocchi in  $B$  il dato cerchio, e si faccia l'angolo  $HBD$  uguale al dato  $F$ , è manifesto, che la porzione  $BAD$  farà capace dell'angolo dato <sup>a</sup>. Il che ec.

a 33. III.

## PROPOSIZIONE XXXV.

**FIG. 91.** *Se dentro al cerchio AGE due rette AB, EG si segano in F, il rettangolo delle parti dell'una uguaglia quello delle parti dell'altra, cioè AFB è uguale ad EFG.*

**S**E si segassero nel centro, farebbe ciò manifesto, essendo le parti di tali linee tanti raggi uguali del medesimo cerchio; ma essendo il loro concorso  $F$  diverso dal centro  $C$ , si tirino da esso centro  $C$  le perpendicolari  $CD, CH$  sopra dette linee, che da queste faranno segate pel mezzo <sup>b</sup>, e si congiungano  $CF, CE, CB$ . Il rettangolo  $AFB$  col quadrato  $DF$  farà uguale al quadrato <sup>c</sup>  $DB$ , ed aggiunto il quadrato  $CD$  farà il rettangolo  $AFB$  con li due quadrati  $DF, CD$ , cioè col quadrato  $CF$  <sup>d</sup>, uguale a' due quadrati  $DB$ , e  $CD$ , cioè al quadrato del raggio  $CB$  <sup>d</sup>, o dell'altro raggio  $CE$ ; e questo pure essendo uguale a' quadrati  $EH, CH$  <sup>c</sup>, cioè al rettangolo  $EFG$  col quadrato  $FH$  <sup>b</sup>, e col quadrato  $CH$ , che è quanto dire al rettangolo  $EFG$  col quadrato  $CF$ ; farà dunque il rettangolo  $AFB$  col quadrato  $CF$ , uguale al rettangolo  $EFG$  col medesimo quadrato  $CF$ ; onde  
tol-

b 3. III.

c 5. II.

d 47. I.

tolto di quà, e di là questo quadrato  $CF$ , rimane il rettangolo  $AFB$  uguale all'altro  $EFG$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXXVI.

*Da un punto  $F$  fuori del cerchio tirata la tangente  $FH$ , ed una segante  $FBA$ , sarà il quadrato della tangente  $FH$  uguale al rettangolo  $AFB$  di tutta la segante, e della sua parte esteriore.* FIG. 92.

**C**ondotta dal centro  $C$  la perpendicolare  $CD$  sopra la segante, che dividerà pel mezzo la parte interna  $AB$ <sup>a</sup>, e congiunti li raggi  $CB, CH$ ; a 3. III. essendo il quadrato  $FD$  uguale al rettangolo  $AFB$  col quadrato  $BD$ <sup>b</sup>, aggiuntovi il quadrato  $CD$ , b 6. II. faranno li due quadrati  $FD, CD$ , cioè il quadrato  $CF$ , o li due quadrati  $FH, CH$ <sup>c</sup> (essendo l'an- c 47. I. golo  $CHF$  retto<sup>d</sup>) uguali al rettangolo  $AFB$ , co' d 18. III. quadrati  $BD$ , e  $CD$ , cioè col quadrato del raggio  $CB$ ; essendo adunque il quadrato della tangente  $FH$ , col quadrato del raggio  $CH$  uguale al rettangolo  $AFB$ , col quadrato del raggio  $CB$ , tolti gli uguali quadrati di detti raggi, rimane il quadrato  $FH$  della tangente uguale al rettangolo  $AFB$  di tutta la segante  $FA$  nella parte esterna  $FB$ ; il che ec.

**COROLLARIO I.** Quindi se da un medesimo punto  $F$  si tireranno due tangenti  $FH, FI$  al medesimo circolo, queste faranno uguali, essendo ciascheduno di tali quadrati uguale al medesimo rettangolo  $AFB$  della segante condotta dallo stesso punto  $F$ .

**COROLLARIO II.** E se più seganti  $FBA, FGE$  si conducano da un punto  $F$  allo stesso cerchio, faranno i loro rettangoli  $AFB, EFG$  tra di loro u-

quali, essendo ciascheduno di essi uguale al quadrato della tangente  $FH$ .

## PROPOSIZIONE XXXVII.

*Se il rettangolo di una secante  $AFB$  sarà uguale al quadrato della retta  $FI$ , che condotta dallo stesso punto  $F$ , si accosti alla periferia del cerchio, sarà questa  $FI$  tangente di esso.*

**I**Mperocchè tirata la tangente  $FH$ , il cui quadrato uguaglia pure il rettangolo  $AFB^a$ , e però ancora è uguale al quadrato  $FI$ , e conseguentemente faranno le rette  $FH$ ,  $FI$  uguali: e condotti li raggi  $CH$ ,  $CI$  pure sono uguali; e congiunta al centro la retta  $FC$ , è questa lato comune a' due triangoli  $FHC$ ,  $FIC$ ; dunque l'angolo  $FIC$  uguaglia l'angolo  $FHC^b$ , il quale è retto<sup>c</sup>; pertanto essendo pure l'angolo  $FIC$  retto, questa  $FI$  farà tangente<sup>d</sup>. Il che dovea dimostrarfi.



# E L E M E N T I

## DELLA GEOMETRIA

# D I E U C L I D E

### L I B R O I V.

\*~\*~\*

#### D E F I N I Z I O N I.

I.  Icesi INSCRITTA nel circolo una figura rettilinea, quando ciascun' angolo di essa tocca la circonferenza.

II. Ed allora il cerchio dicesi CIRCOSCRITTO ad essa figura rettilinea.

III. CIRCOSCRITTA poi al cerchio dicesi la figura rettilinea, se ciascun' lato di essa tocca la di lui circonferenza.

IV. Ed in tal caso dicesi il cerchio INSCRITTO a detta rettilinea figura.

#### PROPOSIZIONE I. PROBL.

*In un dato cerchio, il cui diametro  $AB$ , inscrivere una linea  $AD$  uguale ad una data  $F$ , non maggiore di esso diametro.* Tav. V.  
FIG. 93.

COL centro  $A$ , e l' intervallo  $AE$  uguale ad  $F$  descrivasi un altro cerchio, che seghi in  $D$  quello già dato: è chiaro, che congiunta  $AD$  farà uguale al raggio  $AE$ , e però alla data  $F$ . Il che dovea farsi.

## PROPOSIZIONE II. PROBL.

FIG. 94. *Nel dato cerchio inscrivere un triangolo  $ABD$  equiangolo ad un altro dato  $IGH$ .*

**S**I tiri al cerchio, in qualche punto  $A$  la tangente  $EAF$ , e si faccia l'angolo  $FAD$  uguale all'angolo  $IGH$ , e l'angolo  $EAB$  uguale all'altro  $IHG$ , e congiungansi li punti  $D, B$ , in cui queste rette segano il cerchio, con la retta  $DB$ . Dico che il triangolo  $ABD$  farà il ricercato; imperocchè l'angolo  $ABD$  uguaglia l'angolo  $DAF^a$ , e però è uguale all'angolo  $IGH$ ; onde ancora l'angolo  $ADB$  uguaglia l'angolo  $EAB$ , e però è uguale all'angolo  $GHI$ , dunque ancora il terzo  $BAD$  uguaglia il terzo  $GHI$ ; adunque tutto il triangolo  $ABD$ , inscritto nel circolo, è equiangolo al dato triangolo  $IGH$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE III. PROBL.

FIG. 95. *Intorno ad un dato cerchio  $ABD$  circoscrivere un triangolo  $EFG$  equiangolo ad un altro dato  $IHK$ .*

**P**rolungato uno de' lati  $HK$  dall'una, e dall'altra parte in  $M, L$ , si faccia al centro  $C$  del dato cerchio l'angolo  $ACD$  uguale all'angolo  $IKL$ , ed appresso si faccia l'angolo  $DCB$  uguale all'altro esterno  $IHM$ ; indi si tirino a' punti  $A, D, B$  le tangenti  $AG, DE, BF$ , le quali concorreranno, e formeranno un triangolo  $EFG$ , circoscritto al cerchio, ed equiangolo a quello dato; imperocchè congiunta  $BD$  per esempio, riescono gli angoli  $BDE, DBE$  minori de' due retti, fatti dalle tangenti col raggio  $CDE, CBE$ , e però concorrono insieme<sup>b</sup>; per-

perchè poi tanto gli angoli del triangolo  $BCD$ , che quelli dell' altro  $BED$  sono uguali a due retti <sup>a 32. 1.</sup>, gli angoli del quadrilatero  $CBED$  uguagliano quattro retti; ed essendo li due  $CDE$ ,  $CBE$  retti, faranno gli altri due  $BCD$ ,  $BED$  uguali a due retti, e però uguali a' due angoli  $IHM$ ,  $IHK$ ; ma l'angolo  $BCD$  fu fatto uguale ad  $IHM$ , dunque l'altro  $BED$  è uguale ad  $IHK$ . Similmente essendo gli angoli  $ACD$ , ed  $AGD$  uguali a due retti, e però uguagliando gli altri due  $IKL$ ,  $IKH$ , dunque essendo fatto  $ACD$  uguale ad  $IKL$ , è l'altro  $AGD$  uguale ad  $IKH$ ; e però ancora il terzo  $AFB$  uguaglia l' altro  $HIK$ ; dunque il triangolo  $EFG$  circoscritto al dato cerchio, si è fatto equiangolo al dato triangolo  $HIK$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE IV. PROBL.

*In un dato triangolo  $EFG$  inscrivere un cerchio  $ABD$ .* FIG. 96.

**S**I dividano pel mezzo gli angoli  $FEG$ ,  $FGE$  colle rette  $EC$ ,  $GC$  concorrenti in  $C$ , e da esso punto  $C$  si tirino le perpendicolari  $CA$ ,  $CB$ ,  $CD$  sopra a' tre lati di esso triangolo; faranno queste uguali, perchè ne' triangoli  $CED$ ,  $CEB$ , essendo gli angoli  $DEC$ ,  $BEC$  uguali, ed ancora li retti  $CDE$ ,  $CBE$  uguali, ed il lato  $EC$  comune, ancora gli altri lati  $CB$ ,  $CD$  sono uguali <sup>b 26. 1.</sup>; e così ancora ne' triangoli  $CDG$ ,  $CAG$  si proverà  $CD$  uguale a  $CA$ , dunque tutte tre le dette perpendicolari sono uguali; onde col centro  $C$ , e con l'intervallo  $CA$  descritto un cerchio passerà per li punti  $A$ ,  $B$ ,  $D$ , e farà toccato da' lati di questo triangolo  $FEG$ , essendo ad angoli retti a ciascheduno

a 16. III. duno de' raggi  $CA, CB, CD^a$ , e però farà inscritto detto circolo nel dato triangolo. Il che ec.

## PROPOSIZIONE V. PROBL.

FIG. 97. *A un dato triangolo ABD circoscrivere un circolo.*

**S**I taglino pel mezzo due lati  $AB, BD$  in  $E, F$ , e si alzino ad essi le perpendicolari  $EC, FC$ , concorrenti in  $C$ , e congiunto il punto  $C$  con tutti tre gli angoli  $A, B, D$ , il cerchio descritto per qualunque de' raggi  $CA, CB, CD$ , i quali faranno uguali, farà circoscritto al dato triangolo; imperocchè, essendo  $AE$  uguale ad  $EB$ , ed  $EC$  comune a' triangoli  $AEC, BEC$ , e gli angoli di qua, e di là dalla retta  $CE$  uguali, perchè retti, la base  $CA$  farà uguale a  $CB$ ; e similmente ne' triangoli  $BFC, DFC$ , per essere intorno ad angoli retti, i lati  $BF, FC, DF, FC$  uguali,  $CB$  uguale b 4. 1. farà a  $CD^b$ , dunque il cerchio passa per tutti gli angoli  $A, B, D$ , e però è circoscritto al dato Triangolo  $ADB$ . Il che era da farsi.

## PROPOSIZIONE VI. PROBL.

FIG. 98. *In un dato cerchio inscrivere un quadrato AEBD,*

**S**I tirino pel centro  $C$  due diametri  $AB, DE$ , che ad angoli retti si seghino in e<sup>ro</sup> centro, e si congiungano le rette  $AE, AD, BE, BD$ , dico che il quadrilino  $AEBD$  farà il quadrato inscritto nel dato cerchio. Imperocchè di tutti i triangoli  $ACE, ACD, BCE, BCD$  tutti i lati intorno agli angoli retti sono uguali; e però le basi loro  $AE, AD, BE, BD$  parimente si uguagliano c; e gli angoli  $AEB$



$AEB$ ,  $EBD$ ,  $BDA$ ,  $DAE$  essendo ne' semicircoli sono retti <sup>a</sup>, dunque il quadrilatero  $AEBD$  è <sup>a</sup> 31. I II. il quadrato <sup>b</sup> che dovea inscriverti nel cerchio dato. <sup>b</sup> Defin. 29.

## PROPOSIZIONE VII. PROBL.

*Intorno al dato cerchio  $AEBD$  descrivere un quadrato.* FIG. 99.

**T**irati, come nella precedente, i diametri  $AB$ ,  $DE$ , che nel centro  $C$  si seghino ad angolo retto, si tirino per gli punti  $A$ ,  $B$  le parallele al diametro  $DE$ , e per gli punti  $D$ ,  $E$  le parallele al diametro  $AB$ ; queste parallele faranno pure a' termini de' diametri angolo retto <sup>c</sup>, e però faranno tangenti <sup>d</sup>; e tutti i lati  $GH$ ,  $HI$ ,  $IF$ ,  $FG$  saranno uguali al diametro del cerchio, e però uguali tra loro; gli angoli pure  $G$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $F$ , in cui convergono esse tangenti, faranno retti, perchè nel parallelogrammo  $FABG$ , l'angolo  $G$  uguaglia l'opposto  $FAC$  <sup>e</sup>, che è retto, l'angolo  $F$  uguaglia l'angolo opposto  $IBC$ , che pure è retto; e così nel parallelogrammo  $ABHI$  si mostrano pure gli altri angoli  $H$ ,  $I$  essere retti; dunque  $FIHG$  è un quadrato circoscritto al dato cerchio: come era proposto di farsi.

## PROPOSIZIONE VIII. PROBL.

*In un dato quadrato  $FGHI$  inscrivere un cerchio.*

**D**ividansi pel mezzo i lati ne' punti  $A$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $D$ , e condotte le rette  $AB$ ,  $ED$ , che si segheranno in  $C$ , e faranno parallele a detti lati, congiungendo i termini di linee parallele, ed uguali <sup>f</sup>; però tutte le rette  $CA$ ,  $CE$ ,  $CB$ ,  $CD$ , ugualian-

gliando la metà de' lati di esso quadrato, faranno uguali fra loro, onde col centro  $C$ , e con uno di questi raggi  $CA$  descritto un cerchio, passerà per gli altri punti  $E, B, D$ , e rimarrà toccato da' lati di esso quadrato, essendo qualunque angolo  $BAI, CEH$  ec. retto, come uguale all'angolo  $I$ , ovvero  $G$  opposto nel parallelogrammo  $ABHI, DEHG$  ec.<sup>a</sup>. Dunque detto circolo riesce inscritto nel dato quadrato; il che ec.

## PROPOSIZIONE IX. PROBL.

FIG. 98. *A un dato quadrato  $AEBD$  circoscrivere un cerchio.*

**S**I tirino le diagonali  $AB, DE$  concorrenti in  $C$ , e perchè qualunque triangolo  $AEB, EBD, BDA, DAE$  è isoscele per l'uguaglianza de' lati del quadrato, tutti gli angoli  $BAE, EBA$  sono uguali b tra loro, e sono semiretti essendo retto l'angolo  $AEB$ , e gli altri due uguali ad un altro retto c, dunque tutti gli angoli semiretti  $CAE, CEA, CEB, CBE, CBD, CDB, CDA, CAD$  essendo uguali, le rette  $CA, CE, CB, CD$  pure sono uguali d, e però fatto centro  $C$ , con l'intervallo  $CA$  descritto un cerchio passerà per tutti gli altri punti  $E, B, D$ ; onde sarà questo il cerchio, che dovea circoscriversi al dato quadrato.

## PROPOSIZIONE X. PROBL.

*Costruire un triangolo isoscele  $ABE$ , li cui angoli alla base  $AEB, ABE$ , siano ciascuno il doppio dell'angolo alla cima  $BAE$ .*

Di-

**D**ividasi una retta  $AB$  in  $D$ , in maniera che il rettangolo  $ABD$  uguagli il quadrato  $AD^a$ , <sup>a 11. 11.</sup> e col raggio  $AB$  descritto un circolo  $BEF$ , si adatti dal punto  $B$  alla circonferenza una retta  $BE$  uguale alla  $AD$ , e si congiunga  $AE$ ; farà il triangolo  $ABE$  isoscele per l'uguaglianza de' raggi; ed aggiunta la retta  $ED$ , circoscritto un cerchio al triangolo  $ADE$ , farà la  $BE$  tangente, per essere il di lei quadrato, come quello di  $AD$ , uguale al rettangolo  $ABD^b$ , e però l'angolo  $DEB$  farà <sup>b 37. 111.</sup> uguale all'angolo  $EAD^c$ , dunque aggiunto di quà, <sup>c 32. 111.</sup> e di là l'angolo  $DEA$ , farà l'angolo  $AEB$ , uguale a' due angoli  $EAD$ ,  $DEA$ ; cioè all'angolo esterno  $BDE^d$ , ma ancora l'angolo  $ABE$  ugua- <sup>d 32. 1.</sup> glia l'angolo  $AEB^e$ , dunque gli angoli  $BDE$ , <sup>e 5. 1.</sup>  $ABE$  sono uguali, e però il lato  $DE$  uguaglia il lato  $EB^f$ , cioè il lato  $AD$ : dunque ancora l'an- <sup>f 6. 1.</sup> golo  $DEA$  uguaglia l'angolo  $EAD^e$ ; e però farà l'angolo  $AEB$  duplo dell'angolo  $EAB$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XI. PROBL.

*In un dato cerchio inscrivere un Pentagono FIG. 101.  $DFGHI$  equilatero, ed equiangolo.*

**F**atto un triangolo isoscele  $ABE$ , di cui ciascheduno angolo sopra la base sia il doppio dell'angolo  $A$  alla cima  $g$ , si inscriva nel cer- <sup>g 10. 1v.</sup> chio il triangolo  $DGH$  equiangolo allo stesso  $ABE^h$ , <sup>h 2. 1v.</sup> poi divisi pel mezzo ambi gli angoli alla base  $DGH$ , e  $DHG$  colle linee  $GI$ ,  $HF^i$ , si congiungano le ret- <sup>i 9. 1.</sup> te  $GF$ ,  $FD$ ,  $DI$ ,  $IH$ . Dico che questo farà un Pentagono equilatero, ed equiangolo inscritto nel dato circolo; imperocchè gli angoli alla base  $HG$  di

di quel triangolo  $DHG$  equiangolo ad  $ABE$ , essendo il doppio dell'angolo  $GDH$ , divisi quelli pel mezzo, ne riusciranno tutti i cinque angoli  $DGI$ ,  $IGH$ ,  $GHF$ ,  $FHD$ ,  $GDH$  uguali, e però gli archi, sopra di cui essi angoli insistono, faranno uguali<sup>a</sup>, e però ancora le rette a detti archi sottese  $DI$ ,  $IH$ ,  $HG$ ,  $GF$ ,  $FD$ , sono uguali; onde questo Pentagono è equilatero; ed essendo l'arco  $DI$  uguale ad  $FG$ , aggiunto di comune l'arco  $IHG$ , farà l'arco  $DIG$  uguale all'arco  $IGF$ , e però l'angolo  $DFG$  è uguale all'angolo  $FDI$ <sup>b</sup>, e così degli altri; dunque esso Pentagono è ancora equiangolo. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XII. PROBL.

FIG. 102. *A un dato cerchio IFH circoscrivere un Pentagono AB EKL equilatero, ed equiangolo.*

**S**I inscriva nel cerchio il pentagono  $IDFGH$ , per l'antecedente, e dal centro  $C$  condotti a qualunque angolo i raggi  $CI$ ,  $CD$ ,  $CF$  ec. si tirino a' medesimi le perpendicolari  $AB$ ,  $BE$ ,  $EK$ ,  $KL$ ,  $LA$ , che faranno tangenti del circolo. Dico essere il poligono da esse compreso un pentagono equilatero, ed equiangolo circoscritto al cerchio. Imperocchè, essendo  $AI$ ,  $AH$  tangenti, faranno uguali<sup>c</sup>, ed essendo uguali i raggi  $CI$ ,  $CH$ , e retti gli angoli  $CIA$ ,  $CHA$ , congiunta la  $CA$  farà l'angolo  $ACI$  uguale ad  $ACH$ , ed  $IAC$  uguale ad  $HAC$ <sup>d</sup>, dunque congiunta ancora  $CB$ , si proverà pure similmente l'angolo  $BCD$  uguale a  $BCI$ , e l'angolo  $DBC$  uguale ad  $IBC$ ; pertanto  $ACI$  è la metà di  $HCI$ , ed  $IAC$  la metà di  $IAH$ , e pari-

<sup>c</sup> Coroll. 1.  
Pr. 36. III.

<sup>d</sup> 4. I.

ri-



rimente  $BCI$  è la metà di  $ICD$ , ed  $IBC$  la metà di  $IBD$ ; onde essendo l'angolo  $HCI$  uguale ad  $ICD$ , per l'uguaglianza de' lati  $HI$ ,  $ID$ <sup>a</sup>, <sup>a 28. III.</sup> farà l'angolo  $ACI$  uguale a  $BCI$ , ed essendo di quà, e di là dal punto  $I$  gli angoli retti, e comune il lato  $IC$  a' triangoli  $ACI$ ,  $BCI$ , gli altri lati, e gli altri angoli faranno uguali<sup>b</sup>, però  $AI$  essendo uguale ad  $IB$ , il lato  $AB$  è duplo di  $AI$ ; similmente si proverà il lato  $AL$  essere duplo di  $AH$ ; dunque essendo  $AI$  uguale ad  $AH$ , ancora  $AB$  farà uguale ad  $AL$ ; e così tutti i lati si proveranno uguali, ed essendo l'angolo  $CBI$  uguale a  $CAI$ , anche i loro doppi  $DBI$ , ed  $HAI$  faranno uguali, e così tutti gli altri angoli di questo pentagono, il quale farà equilatero, ed equiangolo, circoscritto al dato cerchio, come dovea farsi.

COROLLARIO. Nella stessa maniera, qualunque figura equilatera, ed equiangola sia iscritta nel cerchio, tirate da qualsivoglia angolo le tangenti, si proverà essere similmente la figura circoscritta equilatera, ed equiangola.

### PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

*Ad un dato Pentagono equilatero, ed equiangolo  $ABEKL$ , inscrivere un circolo.*

**S**I dividano pel mezzo due angoli prossimi  $LAB$ ,  $ABE$ <sup>c</sup>, colle rette  $AC$ ,  $BC$  concorrenti in  $C$ , <sup>c 9. I.</sup> e da esso punto  $C$  si tirino sopra ciaschedun lato le perpendicolari,  $CH$ ,  $CI$ ,  $CD$ ,  $CF$ ,  $CG$ , queste faranno uguali, e però descritto il cerchio con uno de' raggi  $CH$ , passerà per tutti i punti  $H$ ,  $I$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $G$ , e farà toccato da i lati del dato pentagono,

gono, cui sono perpendicolari essi raggi, onde gli farà inscritto. Imperocchè ne' triangoli  $ABC, CBE$ , essendo uguali i lati  $AB, BE$ , ed il lato  $BC$  comune, e gli angoli  $ABC, CBE$  uguali, farà  $CA$  uguale a  $CE$ , e l'angolo  $CEB$  uguale a  $CAB$ , e però ancor esso la metà dell'angolo  $B EK$ . Similmente ne' triangoli  $CAB, CAL$  si proverà  $CL$  uguale a  $CB$ , e l'angolo  $CLA$  uguale a  $CBA$ , e però ancora esso la metà dell'angolo  $AL K$ ; e così pure farà dalla retta  $CK$  diviso pel mezzo l'angolo  $EKL$ ; e paragonando i triangoli  $HAC, IAC$ , in cui l'angolo  $CAH$  uguaglia  $CAI$ , e gli angoli in  $H$ , ed  $I$  sono retti, ed il lato  $AC$  comune, gli altri lati  $CH, CI$  faranno uguali, e parimente si proverà  $CI$  uguale a  $CD$ , e  $CF$  uguale a  $CD$ , e  $CG$  uguale a  $CF$ ; dunque tutte queste perpendicolari sono raggi uguali, e però il cerchio passa per tutti quei punti, e riesce inscritto al dato pentagono, come dovea farsi.

COROLLARIO. Così in qualunque figura equilatera, ed equiangola, divisi pel mezzo due angoli prossimi, e dal concorso delle linee dividenti condotte le perpendicolari a' lati, riescono uguali, e condotte agli altri angoli dallo stesso concorso altre rette, sono tutte uguali, e dividono pel mezzo gli altri angoli, come si è provato in questo pentagono, onde al medesimo modo gli si può inscrivere un cerchio.

#### PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

*Intorno al dato Pentagono equilatero, ed equiangolo IHGFD circoscrivere un cerchio.*

Se-

**S**Egati per mezzo due angoli prossimi colle rette  $IC, HC$  concorrenti in  $C$ , le linee condotte dal punto  $C$  a tutti gli altri angoli faranno uguali <sup>a</sup>, dunque col raggio  $CI$  descritto il cerchio passerà per tutti li detti angoli, e farà circoscritto al dato Pentagono. Il che ec. <sup>a</sup> Corollar. Prop. preced.

**COROLLARIO.** Nella stessa maniera potrà circoscriversi un cerchio a qualunque altra figura equilatera, ed equiangola.

### PROPOSIZIONE XV. PROBL.

*In un dato cerchio AEF inscrivere un Esagono equilatero, ed equiangolo.* FIG. 103.

**C**ondotto un diametro  $AD$  pel centro  $C$ , si applichino nel cerchio due rette, di quà, e di là dal punto  $A$ , uguali al raggio  $AC$ , quali siano  $AB, AG$  <sup>b</sup>, e congiunte al centro le rette  $BC, GC$  si prolunghino alla periferia in  $F, E$ ; indi tirate le rette  $BE, ED, GF, FD$  rimarrà inscritto nel cerchio un esagono equilatero, ed equiangolo; perchè essendo i triangoli  $ABC, AGC$  equilateri, ciascuno degli angoli di essi  $ACG$ , ed  $ACB$  sarà un terzo di due retti; però ancora  $BCE$ , che con gli altri due compisce due retti, sarà un altro terzo di due retti; e però faranno uguali i detti tre angoli, e gli opposti alla loro cima  $ECD, DCF, FCG$  <sup>c</sup>; e però tutti gli archi opposti a detti angoli, e le rette ad essi sottese sono uguali <sup>d</sup>; dunque  $ABEDFG$  è un esagono equilatero, ed ancora equiangolo, perchè gli angoli  $GAB, ABE, BED$  ec. insistono a quattro di quelli archi uguali. <sup>b</sup> Prop. 11. v.   
 <sup>c</sup> 15. 1.   
 <sup>d</sup> 26. e 29.   
 111.

F

PRO-

## PROPOSIZIONE XVI. PROBL.

FIG. 104. *In un dato cerchio AEH descrivere un Quindecagono equilatero, ed equiangolo.*

**I**Nscrivasi un pentagono  $AIHGF$ ; nel dato cerchio<sup>a</sup>, ed ancora un triangolo equiangolo ad un equilatero<sup>b</sup>, che farà esso ancora di lati uguali,  $ADE$ ; dunque delle quindici parti della circonferenza ne conterrà cinque l'arco  $AE$ , e tre sole l'arco  $AF$ , e nel residuo  $FE$  vi faranno due di dette parti quintedecime; onde divisa  $FE$  pel mezzo in  $K^c$ , faranno  $EK$ , e  $KF$  parti quintedecime, ed applicando intorno alla circonferenza le linee rette uguali a ciascheduna delle corde  $EK$ ,  $KF$ , farà compiuto il quindecagono equilatero, ed equiangolo, insistendo qualunque angolo  $FKE$  di esso sopra tredici di quelle quintedecime parti. Il che ec.

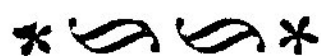


# E L E M E N T I

## DELLA GEOMETRIA

### DI EUCLIDE.

#### LIBRO V.



#### DEFINIZIONI.

I.  ARTE ALIQUOTA si chiama una grandezza minore di un'altra grandezza maggiore, quando quella misura questa esattamente.

II. MULTIPLICE si dice poi questa maggior grandezza di quella minore, da cui alquante volte è misurata.

III. PROPORZIONE, o talvolta RAGIONE, si dice la relazione di due grandezze del medesimo genere, in ordine alla loro quantità comparate l'una con l'altra.

IV. PROPORZIONALITA', ovvero ANALOGIA, dicesi la simiglianza di alcune Proporzioni.

V. Quelle Grandezze si dicono AVER PROPORZIONE, le quali moltiplicate possono superarsi l'una con l'altra.

VI. Si dice SIMILE, ovvero EGUALE, anzi LA MEDESIMA, essere la PROPORZIONE di una prima grandezza ad una seconda, e quella di una terza ad una quarta, quando prese due ugualmente moltiplici della prima, e della terza, ed altre due, secondo qualunque numero, ugualmente moltiplici

ci della seconda, e della quarta, se il multiplice della prima uguaglia il multiplice della seconda, o sia maggiore di essa, o minore, parimente il multiplice della terza uguagli il multiplice della quarta, o sia rispettivamente maggiore, o minore di essa.

VII. E queste grandezze, che averanno simile proporzione si chiameranno PROPORZIONALI.

VIII. Ma se il multiplice della prima superasse il multiplice della seconda, e l'ugualmente multiplice della terza, come quello della prima, non eccedesse quello della quarta ugualmente multiplice, come l'altro della seconda, si dirà LA PROPORZIONE della prima grandezza alla seconda, MAGGIORE di quella della terza alla quarta.

IX. La PROPORZIONALITA', o ANALOGIA deve consistere almeno in tre termini, di cui il mezzano si prende due volte, una per conseguente della prima proporzione, l'altra per antecedente della seconda uguale alla prima.

X. Quando tre grandezze faranno proporzionali, la prima alla terza si dirà avere DOPPIA PROPORZIONE di quella, che è tra la prima, e la seconda, o dell'altra uguale, che è tra la seconda, e la terza.

XI. Se faranno quattro grandezze continuamente proporzionali, averà la prima alla quarta TRIPLA PROPORZIONE di quella, che ha la prima alla seconda, o la seconda alla terza, o la terza alla quarta. Se faranno cinque, la prima all'ultima averà PROPORZIONE QUADRUPLA di quella, che ha la prima alla seconda, e di qualunque altra intermedia; e così sempre crescendo i termini dell'analogo.

logia, la proporzione dell' estreme è moltiplice di quella di due prossime, secondo il numero di essi termini, detrattane l'unità.

XII. Delle quantità proporzionali si dicono OMOLOGI gli antecedenti fra loro, e li conseguenti pure tra di loro comparati.

### AVVERTIMENTO.

*Altre definizioni della Proporzione PERMUTATA CONVERSA ec. si omettono, perchè dalle Proposizioni, che ne parlano susseguentemente, meglio s' intenderanno.*

*Quanto alla similitudine, o uguaglià delle proporzioni, definita al num. VI. per gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, che convengono con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, secondo qualunque altra moltiplicazione, in uguagliarsi, avanzarsi, o mancarsi l' uno dall' altro: si avverta, che sebbene nelle quantità commensurabili, le quali esprimere si possono col numero delle parti uguali, che sono nell' una, e nell' altra, si può definire più chiaramente l' uguaglià delle proporzioni con la definizione, che il medesimo Euclide dà nel suo Libro VII. de' numeri proporzionali, a cui altra proprietà non assegna, se non, che il primo sia ugualmente moltiplice del secondo, come il terzo del quarto, o la medesima parte, o altrettante parti, sia qualunque antecedente del suo conseguente: tuttavolta nelle quantità incommensurabili, di cui non può assegnarsi veruna misura comune, che sia alcune volte in una, ed alquante altre volte nell' altra, non potrebbe assegnarsi tale definizione di proporzionalità; e perciò si adatta quella condizione più universale degli ugualmen-*

*te moltiplici de' termini antecedenti, che convengano nell' ugualità, nell' eccesso, o nel difetto, con altri ugualmente moltiplici de' conseguenti.*

*Le quantità, che si paragonano in proporzione, devono essere del medesimo genere secondo la definizione terza, onde non può paragonarsi una linea ad una superficie, nè ad un corpo, nè un peso ad un tempo, nè un moto ad un suono ec. bensì tutte le linee fra di loro, tutte le superficie tra loro, ogni corpo ad un altro, i pesi tra loro, li tempi fra loro ec. Però non è da attendersi un genere specialissimo, e subalterno, con cui differiscono le linee rette dalle curve, e le superficie piane dalle rotonde ec. ma solamente il genere più universale, di cui allora sono le grandezze, quando qualunque di esse moltiplicata può superare l' altra, secondo la definizione quinta. Così il diametro di un cerchio quadruplicato eccede la di lui circonferenza, e però si possono insieme paragonare una retta, ed una periferia, anzi qualunque altra curva di diversa specie; ed una superficie piana ad una sferica, o conica; e qualsivoglia corpo prismatico a qualunque rotondo. Ma quanto alla proporzionalità, o analogia delle proporzioni, possono essere li due primi termini dello stesso genere, e gli altri due, o del medesimo, o di genere diversissimo; così può essere un corpo ad un altro nella stessa proporzione, che una linea ad un'altra linea; ovvero una superficie ad un'altra superficie; o come un angolo rettilineo ad un altro pur rettilineo; o come un peso ad un altro peso; o come la velocità di un moto a quella di un altro ec. e così qualunque grandezza ad un'altra grandezza dello stesso genere, può paragonarsi, come un numero ad un altro numero, o a qualche radice sorda.*

SPIE-



## SPIEGAZIONE

*Di alcuni segni da adoperarsi per l' avvenire ,  
per esporre con più breve caratterismo le  
cose da spiegarsi circa le proporzioni.*

Il segno  $+$  significa aggiunta , di maniera che  $A + B$  esprime l' aggregato delle due quantità  $A$ , e  $B$  poste insieme.

Il segno  $-$  significa la detrazione di una grandezza dall' altra, come  $A - B$  esprimerebbe l' eccesso della grandezza  $A$  sopra l' altra  $B$ , detratta da quella.

Il segno  $>$  significa l' essere maggiore , e la contraria posizione di esso  $<$  importa l' essere minore. Così  $A > B$  vuol dire , che  $A$  è maggiore di  $B$ ; ma  $C < D$ , importa, che  $C$  sia minore dell' altra  $D$ .

Il segno  $=$  significa l' uguaglià , di maniera che  $A = B$  esprime , che la grandezza  $A$  uguaglia  $B$ ; e così se fosse espresso  $E + F = M - N$ , indicherebbe che la somma delle quantità  $E$ , ed  $F$  fosse uguale all' eccesso di  $M$  sopra  $N$ , cioè alla quantità  $M$ , detrattane l' altra  $N$ , secondo le anteriori espressioni.

La proporzione di una quantità ad un altra si espone con un punto interposto , e la proporzionalità, o analogia si esprime con quattro punti intercetti fra le due proporzioni. Per esempio  $AB \cdot AC :: EF \cdot EG$  vuol dire, che la quantità  $AB$  alla quantità  $AC$ , ha la stessa proporzione, che la quantità  $EF$  all' altra  $EG$ ; ma se fosse espresso  $A \cdot B > C \cdot D$ , importerebbe , che la proporzione di  $A$  a  $B$  fosse maggiore dell' altra , che è tra  $C$ , e  $D$ .

La moltiplicazione di una quantità in un'altra può esprimersi con la croce di S. Andrea, per esempio  $AB \times CD$ , vorrà dire la quantità  $AB$  moltiplicata in  $CD$ ; e così  $7 \times 4 = 28$ . significa, essere sette via quattro uguale a ventiotto &c.

## PROPOSIZIONE I.

FIG. 105.

*Se siano quante si vogliano grandezze  $AD, FI, LO$  ugualmente moltiplici di altrettante  $E, K, P$ , ciascuna di ciascuna, quante volte è moltiplice una di una, per esempio  $AD$  di  $E$ , tante volte sarà moltiplice la somma di tutte l' antecedenti  $AD, FI, LO$  dell' aggregato di tutte le conseguenti  $E, K, P$ .*

**I**mperocchè divisa  $AD$  nelle parti  $AB, BC, CD$  uguali ad  $E$ , potrà dividersi ancora  $FI$  in altrettante parti  $FG, GH, HI$ , uguali a  $K$ ; e così  $LO$  nelle parti  $LM, MN, NO$ , uguali a  $P$ ; dunque  $AB + FG + LM = E + K + P$ ; e similmente di nuovo  $BC + GH + MN = E + K + P$ , ed ancora  $CD + HI + NO = E + K + P$ ; dunque quante volte una delle antecedenti  $AD$  è moltiplice di  $E$ , altrettante volte tutte le antecedenti  $AD + FI + LO$  è moltiplice di tutte le conseguenti  $E + K + P$ ; Il che cc.

## PROPOSIZIONE II.

FIG. 106.

*Se la prima grandezza  $AC$  è moltiplice della seconda  $D$ , come la terza  $GE$  è moltiplice ugualmente della quarta  $H$ ; ed una quinta  $CB$  sia ancora moltiplice della seconda  $D$ , come una sesta  $GF$  è moltiplice ugualmente della quarta  $H$ , sarà l' aggregato della prima, e della quinta  $AC + CB$ , ugualmen-*

*mente moltiplice della seconda  $D$ , come l' aggregato della terza, e della sesta  $EG + GF$ , è moltiplice della quarta  $H$ .*

**I**mperochè il numero delle parti uguali alla  $D$ , che sono nella prima  $AC$ , uguagliando il numero delle parti uguali ad  $H$ , che sono nella terza  $EG$ ; ed ancora il numero delle parti uguali a  $D$ , che sono nella quinta  $CB$ , uguagliando il numero delle parti uguali ad  $H$ , che sono nella sesta  $GF$ ; dunque il numero delle parti uguali a  $D$ , che sono in  $AC + CB$ , uguaglia il numero delle parti uguali ad  $H$ , che sono in  $EG + GF$ <sup>a</sup>, a *Affirm. 2.* dunque l' aggregato  $AC + CB$  ugualmente è moltiplice della seconda  $D$ , come l' aggregato  $EG + GF$  è moltiplice della quarta  $H$ . Il che ec.

### PROPOSIZIONE III.

FIG. 107.

*Se la grandezza  $B$  è moltiplice di  $C$ , come un'altra  $E$  di  $F$ , ed  $IA$  moltiplice di  $B$ , come  $MD$  di  $E$ , sarà pure  $IA$  moltiplice di  $C$ , come  $MD$  di  $F$ .*

**S**i dividano le grandezze  $IA$ ,  $MD$ , quella nelle parti  $AG$ ,  $GH$ ,  $HI$  uguali a  $B$ , questa nelle parti  $DK$ ,  $KL$ ,  $LM$ , uguali ad  $E$ ; essendo adunque  $AG$  moltiplice di  $C$ ; come  $DK$  di  $F$ , ed ancora  $GH$ , e  $HI$  moltiplice di  $C$ , come  $KL$ , ed  $LM$  di  $F$ , farà tutta la  $AI$  moltiplice di  $C$ , come tutta la  $DM$  di  $F$ <sup>b</sup>. Il che ec.

b 2. v.

### PROPOSIZIONE IV.

*Essendo nella stessa proporzione  $A : B :: C : D$ , FIG. 108. prese due grandezze  $E$ ,  $F$  ugualmente moltiplici degli antecedenti  $A$ ,  $C$ , ed altre grandezze  $G$ ,  $H$  egual-*

*ugualmente moltiplici de' conseguenti B, D, saranno parimente proporzionali  $E \cdot G :: F \cdot H$ .*

**I**Mperocchè prese due altre  $K, L$  ugualmente moltiplici di  $E, F$ , faranno queste pure ugualmente moltiplici di  $A, C^a$ ; e similmente prese  $M, N$  ugualmente moltiplici di  $G, H$ , faranno esse pure ugualmente moltiplici di  $B, D^a$ ; dunque se  $K = M$ , ancora  $L = N$ ; se  $K > M$ , farà pure  $L > N$ , se  $K < M$ , parimente  $L < N^b$ ; dunque farà  $E \cdot G :: F \cdot H^b$ . Il che ec.

**COROLLARIO.** Quindi si osservi, che qualunque volta sono quattro grandezze proporzionali, ancora *convertendo*, cioè presi i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti, faranno pure proporzionali, cioè se  $A \cdot B :: C \cdot D$ , ancora  $B \cdot A :: D \cdot C$ ; giacchè per la definizione fatta tutti gli ugualmente moltiplici degli antecedenti  $A, C$  si accordano in uguagliare, superare, o mancare dagli ugualmente moltiplici de' conseguenti  $B, D$ ; dunque ancora gli ugualmente moltiplici di  $B, D$ , presi per antecedenti si devono accordare con gli ugualmente moltiplici di  $A, C$ , presi per conseguenti; e però ancora convertendo sono le grandezze proporzionali.

### PROPOSIZIONE V.

**FIG. 109.** *Se la grandezza AB, è moltiplice della grandezza CD, come la parte AE, levata dalla prima, è moltiplice della parte CF, levata dalla seconda, ancora la rimanente EB sarà moltiplice ugualmente della residua FD.*

Pon-



**P**ongasi  $AG$  ugualmente multiplice di  $FD$ , come  $AE$  di  $CF$ ; dunque sarà  $GE$  multiplice di  $CD$ , come  $AE$  di  $CF$ <sup>a</sup>, ma era  $AB$  multiplice di  $CD$ , come  $AE$  di  $CF$ ; dunque  $GE = AB$ ; e tolta di comune la  $AE$ , sarà  $AG = EB$ ; dunque ancora la rimanente  $EB$  è multiplice della residua  $FD$ , come tutta la  $AB$  di tutta la  $CD$ , e come la parte levata  $AE$ , della parte levata  $CF$ ; Il che ec.

## PROPOSIZIONE VI.

*Se due grandezze  $AB$ ,  $CD$  sono ugualmente moltiplici di due  $E$ ,  $F$ , e da quelle si traggano le due  $AG$ ,  $CH$ , ancor esse ugualmente moltiplici di queste  $E$ ,  $F$ , saranno le rimanenti  $GB$ ,  $HD$ ; o uguali alle medesime; o ugualmente moltiplici di esse.*

Tav. VI.  
FIG. 110.

**E**ssendo il numero delle parti contenute in  $AB$  uguali ad  $E$ , uguale al numero delle parti contenute in  $CD$ , uguali ad  $F$ , detratto dal primo il numero delle parti  $E$  contenute in  $AG$ , e dal secondo il numero uguale delle parti  $F$ , contenute in  $CH$ , il rimanente numero delle parti  $E$  contenute in  $GB$ , uguaglierà pure il numero delle parti  $F$  contenute in  $HD$ <sup>b</sup>; e però se  $GB = E$ ,<sup>b</sup> Aff. 2. contenendola una volta sola, ancora  $HD = F$ , che la conterrà pure una sola volta; ma se  $GB$  resterà alquanto multiplice di  $E$ , ancora  $HD$  rimarrà ugualmente multiplice di  $F$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE VII.

*Se siano due grandezze,  $A$ ,  $B$  tra di loro uguali, averanno a qualunque terza  $C$  la medesima propor-*

FIG. 111.

porzione; ed ancora paragonata  $C$  ad ambedue, averà l'istessa proporzione ad esse.

**C**lò è per se stesso evidente; pure si dimostra, perchè le ugualmente moltiplici  $D, E$ , delle due uguali  $A, B$ , faranno pure uguali, e presa  $F$  in qualunque modo moltiplice di  $C$ , si accorderanno le moltiplici  $D, E$  in uguagliare, superare, o mancare dalla moltiplice  $F$ ; per tanto <sup>a</sup>  $A \cdot C :: B \cdot C$ , e convertendo  $C \cdot A :: C \cdot B$  <sup>b</sup>. Il che ec.

<sup>a</sup> Def. 6. v.

<sup>b</sup> Coroll.  
pr. 4. v.

### PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 112. *Delle disuguali grandezze  $AB$ , e  $D$ , la maggiore  $AB$  ad una terza  $K$  averà maggior ragione, che la minore  $D$  alla medesima  $K$ ; ma viceversa è maggiore la proporzione di  $K$  alla minore  $D$ , che alla maggiore  $AB$ .*

**P**osta  $AC = D$ , si moltiplichino ugualmente  $AC$ , e  $CB$  nelle  $EF, FG$  in maniera tale, che ognuna di queste moltiplici sia maggiore di  $K$ , indi si potrà moltiplicare essa  $K$ , in maniera, che riesca prossimamente maggiore di  $EF$ , ma minore di  $EG$ . Sia questa moltiplice  $EH$ ; dunque  $EG$  essendo moltiplice di  $AB$ , come  $EF$  di  $AC$ , o della uguale  $D$  <sup>c</sup>, il moltiplice di essa  $AB$  supera il moltiplice  $EH$  della grandezza  $K$ , laddove  $EF$  moltiplice di  $D$  è minore di  $EH$  moltiplice di  $K$ ; <sup>d</sup> Def. 8. v. però  $AB \cdot K > D \cdot K$ ; e viceversa, perchè il moltiplice di  $K$ , cioè  $EH$  è maggiore di  $EF$ , che è il moltiplice di  $D$ , ma la stessa  $EH$  è minore di  $EG$  moltiplice di  $AB$ ; però  $K \cdot D > K \cdot AB$ . Il che era da dimostrarsi.

<sup>c</sup> 1. v.

<sup>d</sup> Def. 8. v.

Se

## PROPOSIZIONE IX.

*Se le grandezze A, B ad una terza C hanno la medesima proporzione, sarà  $A = B$ ; e similmente se C ha l' istessa proporzione ad A, ed a B, è  $A = B$ .* FIG. 113.

**P**erchè se non fosse  $A = B$ , ma una di loro maggiore per esempio  $A > B$ , farebbe la proporzione di  $A \cdot C > B \cdot C$ ; e la proporzione  $C \cdot B > C \cdot A^a$ ; dunque essendo  $A \cdot C :: B \cdot C$ , <sup>a 8. v.</sup> ovvero  $C \cdot A :: C \cdot B$ , è necessario, che sia  $A = B$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE X.

*Se A a C ha maggior proporzione, che B a C, FIG. 114. sarà  $A > B$ ; e se C a B ha maggior proporzione, che C ad A, parimente  $B < A$ .*

**I**mperocchè se fosse  $A = B$ , farebbe  $A \cdot C :: B \cdot C^b$ ; e se fosse  $A < B$ , farebbe  $A \cdot C < B \cdot C$ , <sup>b 7. v.</sup> contro la ipotesi; dunque essendo  $A \cdot C > B \cdot C$ , conviene che sia  $A > B$ . Similmente se fosse  $B = A$ , farebbe  $C \cdot B :: C \cdot A$ , e se fosse  $B > A$ , farebbe  $C \cdot B < C \cdot A$ ; dunque essendo  $C \cdot B > C \cdot A$ , è  $B < A$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XI.

*Se le proporzioni di A a B, e di E ad F sono uguali ad una terza di C a D, saranno quelle ancora uguali tra loro.* FIG. 115.

**S**i prendano gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, come 3 A, 3 E, 3 C; e gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, per esempio 4 B, <sub>4 F</sub>

$4 F$ ,  $4 D$ ; perchè dunque  $A \cdot B :: C \cdot D$ , e parimente  $E \cdot F :: C \cdot D$ , se  $3 A = 4 B$ , ancora  $3 C = 4 D$ ; ma se  $3 C = 4 D$ , ancora  $3 E = 4 F$ ; dunque se  $3 A = 4 B$ , ancora  $3 E = 4 F$ ; se poi  $3 A > 4 B$ , sarà  $3 C > 4 D$ , ed allora sarà pure  $3 E > 4 F$ ; dunque essendo  $3 A > 4 B$ , ancora  $3 E > 4 F$ ; e se  $3 A < 4 B$ , sarà  $3 C < 4 D$ , onde in tal caso parimente  $3 E < 4 F$ ; dunque si accordano gli ugualmente multipli di  $A$ , e di  $E$  in uguaglianza, eccesso, o difetto in riguardo a gli ugualmente multipli di  $B$ , ed  $F$ ; e però sono  $A \cdot B :: E \cdot F$ ; dunque le proporzioni uguali a una terza, sono pure uguali tra loro; Il che ec.

## PROPOSIZIONE XII.

FIG. 116. *Se quante grandezze si vogliano dello stesso genere, siano proporzionali, cioè se  $A \cdot B :: C \cdot D :: E \cdot F$ , come sta un antecedente ad un conseguente, così tutti li antecedenti a tutti li conseguenti.*

**S**I piglino alcuni ugualmente multipli degli antecedenti, per esempio  $3 A$ ,  $3 C$ ,  $3 E$ ; ed altri ugualmente multipli de' conseguenti, come  $4 B$ ,  $4 D$ ,  $4 F$ ; perchè dunque  $A \cdot B :: C \cdot D :: E \cdot F$ , se  $3 A = 4 B$ , ancora  $3 C = 4 D$ , e  $3 E = 4 F$ , e però ancora  $3 A + 3 C + 3 E = 4 B + 4 D + 4 F$ ; e se  $3 A > 4 B$ , farà pure  $3 C > 4 D$ , ed anche  $3 E > 4 F$ ; onde  $3 A + 3 C + 3 E > 4 B + 4 D + 4 F$ ; e se  $3 A < 4 B$ , faranno altresì  $3 C < 4 D$ , come pure  $3 E < 4 F$ , e  $3 A + 3 C + 3 E < 4 B + 4 D + 4 F$ ; dunque essendo  $3 A$  multiplice di  $A$ , come  $3 A + 3 C + 3 E$  è multiplice di  $A + C + E$ , e parimente  $4 B$  multiplice di  $B$ , come  $4 B + 4 D + 4 F$



$4D \rightarrow 4F$  è moltiplice di  $B \rightarrow D \rightarrow F$ ; ed accordandosi questi moltiplici di  $A$ , e di  $A \rightarrow C \rightarrow E$ , con gli ugualmente moltiplici di  $B$ , e di  $B \rightarrow D \rightarrow F$ , in uguagliarsi, o avanzarsi, o essere minori quelli di questi, farà  $A \cdot B :: A \rightarrow C \rightarrow E \cdot B \rightarrow D \rightarrow F$ . Il che dovea dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE XIII.

*Se A a B ha l' istessa proporzione, che C a D, ma la proporzione di C a D sia maggiore di quella di E ad F, ancora la proporzione di A a B sarà maggiore di E ad F.* FIG. 117.

**I**mperocchè presi li ugualmente moltiplici degli antecedenti  $C$ , ed  $E$ , ed altri ugualmente moltiplici de' conseguenti  $D$ ,  $F$ , essendo  $C \cdot D > E \cdot F$  potrà essere il moltiplice del primo antecedente  $3C$  maggiore del moltiplice  $4D$  del primo conseguente, ma il moltiplice  $3E$  del secondo antecedente farà minore del moltiplice  $4F$  del secondo conseguente<sup>a</sup>; ma preso ancora  $3A$  ugualmente moltiplice di  $A$ , come  $3C$  di  $C$ , ed ancora preso  $4B$  moltiplice di  $B$ , come  $4D$  di  $D$ , essendo  $A \cdot B :: C \cdot D$ , ficcome  $3C > 4D$ , così ancora  $3A > 4B$ ; dunque essendo  $3E < 4F$ , è  $A \cdot B > E \cdot F$ <sup>a</sup>. Il che dovea dimostrarsi.

<sup>a</sup> Defin. 8.  
lib. v.

## PROPOSIZIONE XIV.

*Essendo  $A \cdot B :: C \cdot D$ , se  $A = C$ , ancora  $B$  sarà  $= D$ , se  $A > C$ , ancora  $B > D$ ; e se  $A < C$ , anche  $B < D$ .* FIG. 118.

**I**mperocchè se  $A = C$ , farà  $A \cdot B :: C \cdot B$ <sup>b</sup>; ma <sup>b</sup> 7. v.  
 $A \cdot B :: C \cdot D$ , dunque  $C \cdot B :: C \cdot D$ <sup>c</sup>; e però <sup>c</sup> 11. v.  
 $B =$

a 9. v.  $B = D^a$ ; ma se  $A > C$ , farà  $A \cdot B > C \cdot E^b$ , on-  
 b 8. v. de ancora farà  $C \cdot D > C \cdot E^c$ , dunque  $B > D^d$ .  
 c 13. v. Similmente, se farà  $A < C$ , si proverà effere  $B <$   
 d 10. v.  $D$ ; dunque di quattro grandezze proporzionali, se-  
 condo che la prima è uguale, maggiore, o minore  
 della terza, ancora la seconda è parimente ugua-  
 le, maggiore, o minore della quarta. Il che ec.

### PROPOSIZIONE XV.

FIG. 119. *Le Parti E, F sono proporzionali co' loro ugual-  
 mente moltiplici AD, GK.*

**I**mperocchè divise  $AD, GK$ , nelle parti uguali  
 ad  $E, F$ , che nella prima sono  $AB, BC, CD$ ,  
 ciascuna  $= E$ , e nell'altra sono  $GH, HI, IK$ , cia-  
 scuna  $= F$ , farà  $E \cdot F :: AB \cdot GH :: BC \cdot HI :: CD \cdot$   
 c 12. v.  $IK$ , dunque ancora  $E \cdot F :: AB + BC + CD \cdot GH$   
 $+ HI + IK^c :: AD \cdot GK$ . Il che ec.

### PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 120. *Se quattro grandezze del medesimo genere sono  
 proporzionali, cioè  $A \cdot B :: C \cdot D$  ancora permutan-  
 do, cioè paragonando tra loro gli antecedenti, ed i  
 conseguenti,  $A \cdot C :: B \cdot D$ , sono proporzionali.*

**I**mperocchè prese due ugualmente moltiplici  $E,$   
 $F$  delle due prime  $A, B$ , ed altre due  $G, H$  u-  
 gualmente moltiplici delle due ultime  $C, D$ , farà  
 f 15. v.  $E \cdot F :: A \cdot B^f :: C \cdot D^g :: G \cdot H^f$ , però effendo  
 g 11. v. proporzionali  $E \cdot F :: G \cdot H^g$ , se  $E = G$ , ancora  
 $F = H$ ; se  $E > G$ , farà  $F > H$ ; se  $E < G$ , ancora  
 h 14. v.  $F < H^h$ , dunque gli ugualmente moltiplici di  $A,$   
 $B$ , confrontando con gli ugualmente moltiplici di  
 $C, D$  nell'effere uguale, maggiore, o minore l'uno  
 dell'

dell' altro suo corrispondente , farà  $A \cdot C :: B \cdot D^a$ , a Def. 6. v.  
e però le grandezze proporzionali, ancora permu-  
tando , sono proporzionali.

## PROPOSIZIONE XVII.

*Se sono proporzionali*  $AB \cdot BC :: DE \cdot EF$ , FIG. 121.  
*ancora dividendo*  $AB - BC \cdot BC :: DE - EF \cdot EF$ ,  
*cioè*  $AC \cdot CB :: DF \cdot FE$ .

**S**I prendano delle  $AC, CB, DF, FE$  le ugual-  
mente multipli  $GH, HI, LM, MN$ ; e poi  
delle  $CB, FE$  altre ugualmente multipli  $IO, NP$ .  
Saranno dunque  $GI$ , ed  $LN$  ugualmente multipli-  
ci di  $AB$ , e  $DE$ , come  $GH$  di  $AC$ , ed  $LM$  di  $DF^b$  b 1. v.  
ed ancora  $HO$  sarà multiplice di  $CB$ , come  $MP$   
di  $FE^c$ ; dunque essendo  $AB \cdot BC :: DE \cdot EF$ , se c 2. v.  
 $GI = HO$ , farà pure  $LN = MP$ , e se maggiore, o  
minore farà  $GI$  di  $HO$ , parimente farà maggiore,  
o minore  $LN$  di  $MP$ ; ma se  $GI = HO$ , tolto di  
comune  $HI$ , farà  $GH = IO$ , ed essendo allora  $LN$   
 $= MP$ , tolto di comune  $MN$ , farà pure  $LM =$   
 $NP$ ; e parimente essendo  $GI > HO$ , farà  $GH >$   
 $IO$ ; ed allora essendo pure  $LN > MP$ , farà pari-  
mente  $LM > NP$ ; e se  $GI < HO$ , farà  $GH < IO$ ,  
onde essendo  $LN < MP$ , farà  $LM < NP$ ; dunque  
 $GH$ , ed  $LM$  ugualmente multipli di  $AC$ , e  $DF$ ,  
si accordano con  $IO$ , ed  $NP$  ugualmente multi-  
plici di  $CB$ , ed  $FE$  nell' essere uguale , maggiore,  
o minore l' uno dell' altro; pertanto  $AC \cdot CB ::$   
 $DF \cdot FE$ ; onde le grandezze, che composte era-  
no proporzionali, ancora divise sono proporzio-  
nali.

## PROPOSIZIONE XVIII.

FIG. 122. *Essendo le divise grandezze proporzionali, come*  
 $AC \cdot CB :: DE \cdot EF$ , *ancora composte faranno*  
*proporzionali*  $AB \cdot BC :: DF \cdot FE$ .

**A** Ltrimenti sia  $AB \cdot BG :: DF \cdot FE$ ; dunque  
 a 17. v. dividendo farebbe  $AG \cdot GB :: DE \cdot EF ::$   
 b 11. v.  $AC \cdot CB^b$ , dunque se fosse  $AG > AC$ , farebbe  
 c 14. v.  $GB > CB^c$ , il che è impossibile; similmente ef-  
 sendo  $Ag < AC$ , farebbe  $gB < CB$ ; il che pure  
 è assurdo, dovendo essere il tutto maggiore, e non  
 d Aff. 6. minore d'una sua parte<sup>d</sup>. Dunque sta componen-  
 do  $AB \cdot BC :: DF \cdot FE$ ; Il che ec.

COROLLARIO. Quindi può provarsi, che essendo  
 tutta la  $AB$  alla parte  $BC$ , come tutta la  $DF$  al-  
 la parte  $FE$ , ancora tutta la  $AB$  alla residua  $AC$   
 è come tutta la  $DF$  alla residua  $DE$ , perchè di-  
 videndo<sup>a</sup> farà  $AC \cdot CB :: DE \cdot EF$ , e conver-  
 tendo<sup>e</sup>  $CB \cdot CA :: EF \cdot DE$ , dunque componen-  
 do<sup>f</sup>  $AB \cdot AC :: DF \cdot DE$ . Il che si dice *Conver-*  
 f 18. v. *sione di ragione*, posta però dagl' Interpreti d' Eu-  
 clide per Corollario della proposizione seguente, in  
 cui la dimostrano solo in grandezze dello stesso ge-  
 nere, usandosi della permutazione, la quale non si  
 adatterebbe al paragone di due quantità di gene-  
 re diverso alle loro parti, ed a' loro residui, co-  
 me importa questa *conversione di ragione*.

## PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 123. *Essendo tutta la*  $AB$  *a tutta la*  $CD$ , *come la par-*  
*te della prima*  $AE$  *alla parte della seconda*  $CF$ ,  
*ancora la rimanente*  $EB$  *alla rimanente*  $FD$  *starà*  
 co-



come tutta la  $AB$  a tutta la  $CD$ , o come la parte levata  $AE$  alla parte levata  $CF$ .

**I**mperocchè essendo  $AB \cdot CD :: AE \cdot CF$ , permutando <sup>a</sup>  $AB \cdot AE :: CD \cdot CF$ , e dividendo <sup>b</sup>  $EB \cdot AE :: FD \cdot CF$ , e di nuovo permutando <sup>a</sup>  $EB \cdot FD :: AE \cdot CF$ , o come  $AB \cdot CD$  <sup>c</sup>. Il che ec. <sup>a</sup> 16. v. <sup>b</sup> 17. v. <sup>c</sup> 11. v.

## PROPOSIZIONE XX.

FIG. 124.

Se siano tre grandezze  $A, B, C$  da una parte, e tre altre  $D, E, F$  da un'altra, e sia  $A \cdot B :: D \cdot E$ , ed ancora  $B \cdot C :: E \cdot F$ , se la prima  $A$  è maggiore, minore, ovvero uguale alla terza  $C$  da una parte, sarà pure dall'altra banda la prima  $D$  rispettivamente maggiore, minore, o uguale alla terza  $F$ .

**P**erchè se  $A > C$ , sarà  $A \cdot B > C \cdot B$  <sup>d</sup>; ma era  $A \cdot B :: D \cdot E$ , e convertendo <sup>e</sup>  $C \cdot B :: F \cdot E$ ; dunque  $D \cdot E > F \cdot E$  <sup>f</sup>, dunque ancora  $D > F$  <sup>g</sup>. Nell'istessa maniera si proverà, che se sarà  $A < C$ , ancora  $D < F$ , e se  $A = C$ , ancora  $D = F$ ; dunque si accordano le prime ad eccedere, mancare, o uguagliare le terze. Il che ec. <sup>d</sup> 8. v. <sup>e</sup> Coroll. prop. 4. v. <sup>f</sup> 13. v. <sup>g</sup> 10. v.

## PROPOSIZIONE XXI.

Se l'istesse grandezze fossero talmente disposte, FIG. 125. che la prima  $A$  alla seconda  $B$  nella prima serie, fosse come la seconda  $E$  alla terza  $F$  dell'altra serie, e la seconda  $B$  alla terza  $C$  della prima serie, fosse come la prima  $D$  alla seconda  $E$  di quell'altra, parimente se  $A > C$ , anche  $D > F$ ; se  $A < C$ , anche  $D < F$ , se  $A = C$ , ancora  $D = F$ .

$a$  10. v. SE  $A > C$  farà pure  $A \cdot B > C \cdot B$ ; ma essendo  $A \cdot B :: E \cdot F$ , e convertendo  $C \cdot B :: E \cdot D$ ; farà pure  $E \cdot F > E \cdot D$ , dunque ancora  $D > F^a$  similmente se  $A = C$ , farà  $A \cdot B :: C \cdot B$ , e però ancora  $E \cdot F :: E \cdot D$ , dunque ancora  $D = F$ ; e così se fosse  $A < C$  si proverebbe  $D < F$ ; dunque si concordano le prime colle terze nell'essere l'una all'altra maggiore, o uguale, o minore. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 126. *Se siano quante si vogliano grandezze in una serie A, B, C, D, ed altrettante in un'altra E, F, G, H, disposte con l'istesso ordine proporzionali, cioè  $A \cdot B :: E \cdot F$ ; e  $B \cdot C :: F \cdot G$ , ed ancora  $C \cdot D :: G \cdot H$ , e così se ce ne fossero dell'altre, sarà per l'uguaglianza ordinata la prima all'ultima nella prima serie, come pure la prima all'ultima nella seconda, cioè  $A \cdot D :: E \cdot H$ .*

$b$  4. v. SI piglino 3  $A$ , 3  $E$  ugualmente moltiplici delle due prime, e 2  $B$ , 2  $F$  ugualmente moltiplici delle seconde, e 4  $C$ , 4  $G$  ugualmente moltiplici delle terze. Essendo  $A \cdot B :: E \cdot F$ , farà ancora 3  $A \cdot 2 B :: 3 E \cdot 2 F^b$ ; ed essendo pure  $B \cdot C :: F \cdot G$ , farà ancora 2  $B \cdot 4 C :: 2 F \cdot 4 G$ ; dunque se 3  $A$  è maggiore, minore, o uguale a 4  $C$ , farà pure 3  $E$  maggiore, minore, o uguale a 4  $G^c$ ; dunque starà  $A \cdot C :: E \cdot G$ , perchè gli ugualmente moltiplici degli antecedenti si accordano con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti; e siccome si è provato essere la prima alla terza della prima serie, come la prima alla terza della serie seconda, così per essere  $A \cdot C :: E \cdot G$ ; ed indi  $C \cdot D :: G \cdot H$ ,

$:: G \cdot H$ , si potrà dedurre, essere  $A \cdot D :: E \cdot H$ ; e così sempre la prima all'ultima in una serie, starà come la prima all'ultima nell'altra serie, per uguagliata ordinata. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXIII.

*Se in una serie la prima grandezza A alla seconda B sta come nell'altra serie, la seconda E alla terza F, indi nella prima sia la seconda B alla terza C, come nella seconda serie, è la prima D alla seconda E: sarà, per uguagliata perturbata, la prima grandezza alla terza di una serie, come la prima alla terza dell'altra serie, cioè  $A \cdot C :: D \cdot F$ .* FIG. 127.

**D**Elle grandezze  $A, B$ , e  $D$  siano ugualmente moltiplici  $2A, 2B, 2D$ , e dell'altre  $C, E, F$  siano ugualmente moltiplici  $3C, 3E, 3F$ . Perchè  $A \cdot B :: E \cdot F$  farà ancora  $2A \cdot 2B :: 3E \cdot 3F^a$ ; ed essendo  $B \cdot C :: D \cdot E$ , farà pure  $2B \cdot a \ 15. \ v. \ 3C :: 2D \cdot 3E^b$ , dunque se  $2A = 3C$ , ancora  $b \ 4. \ v. \ 2D = 3F$ , se  $2A > 3C$ , farà  $2D > 3F$ , se  $2A < 3C$ , anche  $2D < 3F^c$ ; pertanto sono per uguagliata  $c \ 21. \ v. \ perturbata$  proporzionali  $A \cdot C :: D \cdot F$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXIV.

*Se sarà la prima grandezza A alla seconda C, come la terza D alla quarta F, e la quinta B alla seconda C, come la sesta E alla quarta F, sarà ancora la prima con la quinta alla seconda, come la terza con la sesta alla quarta, cioè  $A \rightarrow B \cdot C :: D \rightarrow E \cdot F$ .* FIG. 128.

**I**mperocchè essendo  $A \cdot C :: D \cdot F$ , e convertendo  $C \cdot B :: F \cdot E$ , farà per l'uguagliata ordinata  $A \cdot B :: G \ 3 \ B ::$

a 22. v.  $B :: D \cdot E^a$ , e componendo  $A \rightarrow B \cdot B :: D \rightarrow E \cdot E^b$ ;  
 b 18. v. ma ancora  $B \cdot C :: E \cdot F$ , dunque  $A \rightarrow B \cdot C :: D \rightarrow E \cdot F^a$ , per l'uguaglià ordinata. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXV.

FIG. 129.

*Siano quattro grandezze dell'istesso genere proporzionali  $AB \cdot C :: DE \cdot F$ , la massima  $AB$  con la minima  $F$  sarà maggiore dell'altre due, cioè  $AB \rightarrow F > C \rightarrow DE$ .*

SI tagli dalla prima  $AB$  la parte  $AG =$  alla seconda  $C$ , e dalla terza  $DE$  la  $DH =$  alla quarta  $F$ ; dunque  $AB \cdot AG :: DE \cdot DH$ , e permutando c tutta la  $AB$  a tutta la  $DE$  come la parte levata  $AG$  alla parte levata  $DH$ ; e però ancora la rimanente  $GB$  alla rimanente  $HE$  farà come tutta la  $AB$  a tutta la  $DE^d$ : ma  $AB > DE$  dunque ancora  $BG > HE$ , e sono  $GA = C$ , ed  $HD = F$ , onde  $AG \rightarrow F = C \rightarrow HD$ ; dunque sono  $BG \rightarrow GA \rightarrow F > HE \rightarrow HD \rightarrow C$ , cioè la massima  $AB$  con la minima  $F$ , maggiore dell'altre due  $ED \rightarrow C$ . Il che era da dimostrarsi.

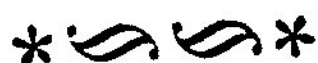


# E L E M E N T I

## DELLA GEOMETRIA

# D I E U C L I D E

### L I B R O VI.



### D E F I N I Z I O N I.

I.  Figure rettilinee *simili* si dicono quelle, in cui ciascun angolo dell' una, uguaglia quello, che gli corrisponde nell' altra, e che d' intorno a gli uguali angoli hanno i lati proporzionali.

II. Diconsi *Reciproche* quelle figure, in cui un lato dell' una ad un lato dell' altra stia proporzionalmente, come un lato di questa seconda ad un lato di quella prima.

III. Una retta  $AB$  si dirà segata *secondo l' estrema, e media ragione* in  $C$ , se sia tutta ad una parte, come questa parte alla rimanente, cioè  $AB \cdot BC :: BC \cdot CA$ . Tav. VII.  
FIG. 13<sup>a</sup>

IV. L' *Altezza* di qualsivoglia figura è la perpendicolare condotta dalla cima alla base.

V. Si dice una proporzione *Composta* di più proporzioni, quando le quantità di queste moltiplicate insieme fanno la quantità di quella.

### A V V E R T I M E N T O.

*La quantità delle proporzioni suol prendersi in più modi. Da alcuni s' intende quantità della propor-*  
G 4
zione

zione il di lei denominatore; per esempio la proporzione dupla ha per denominatore il binario; la tripla il ternario; la sesquialtera una frazione  $\frac{3}{2}$ ; e così tutte l'altre proporzioni possono denominarsi da una frazione, in cui l'antecedente sia posto di sopra come numeratore, ed il conseguente al di sotto, come denominatore; così i denominatori di più proporzioni, se si moltiplicano insieme, ne risulta il denominatore della proporzione composta di quelle; per esempio componendosi la dupla con la tripla, ne risulta la proporzione sestupla, perchè  $2 \times 3 = 6$ ; similmente questa proporzione sestupla composta con un'altra proporzione sesquialtera farà la proporzione nonupla, perchè li denominatori di esse moltiplicati insieme  $6 \times \frac{3}{2}$  fanno  $\frac{18}{2} = 9$ ; se poi si dovessero comporre delle proporzioni di quantità incommensurabili, sarà più difficile il trovarne il denominatore, che talvolta non potrà esprimersi nè meno per via di radici quadre, o cubiche ec.

FIG. 131.

Da altri poi si suppone, che le quantità delle proporzioni, di cui qui tratta Euclide, non siano altro, che i termini delle medesime: sicchè per comporre le ragioni di AB a CD, e di EF a GH, basti moltiplicare insieme gli antecedenti, ed indi li conseguenti tra loro, e tra questi prodotti riuscirà la proporzione di  $AB \times EF$  a  $CD \times GH$ , composta delle date proporzioni AB a CD, ed EF a GH: e parimente se si vorrà aggiungervi un'altra ragione di I a K da comporsi con l'altre, ne risulterà composta la proporzione di  $AB \times EF \times I$  a  $CD \times GH \times K$ ; e così dell'altre. E perchè i termini delle proposte ragioni potrebbero essere tali, che non potessero moltiplicarsi insieme: per esempio se una delle

le componenti ragioni fosse di due angoli, un'altra di due pesi, una di due tempi ec. allora basterà esprimere quelle date ragioni in linee, o numeri proporzionali a quegli altri termini; che così potranno insieme moltiplicarsi.

Il modo però, con cui l'istesso Euclide nella Proposizione 23 di questo libro sesto, si serve della composizione delle proporzioni, mostra doverci avvertire, che se tra due termini  $A, B$  s'interponga uno, due, o più altri termini del medesimo genere, come  $E, F, G$ , la ragione degli estremi  $A \cdot B$  può intendersi composta di tutte le ragioni, che sono fra i prossimi termini; cioè di  $A \cdot E$ , di  $E \cdot F$ , di  $F \cdot G$ , e di  $G \cdot B$ , perchè in fatti  $A \cdot B :: A$  moltiplicata in  $E$ , in  $F$ , e in  $G$ , all'istessa  $B$  moltiplicata ne' medesimi termini  $E, F, G$ <sup>a</sup>, dunque tutti gli antecedenti moltiplicati insieme, a tutti li conseguenti insieme moltiplicati, hanno ragione composta di tutte le ragioni, che ha ciascuno antecedente al suo conseguente. E quindi è, che se la prima grandezza alla seconda ha la medesima ragione, che la seconda alla terza, e questa alla quarta, e la quarta alla quinta, e così in una continua serie di Analogia, dicessi dal medesimo Euclide, che la prima alla terza averà doppia proporzione della prima alla seconda, e la prima alla quarta ne averà proporzione tripla, ec.<sup>b</sup>, per essere quella della prima alla terza composta di due proporzioni uguali, e la prima alla quarta avendo ragione composta di tre uguali proporzioni ec.

FIG. 132.

a 15. v.

b Def. 10.

e 11. v.

## PROPOSIZIONE I.

Li triangoli  $ABC, ABD$ , ed ancora li paralle- FIG. 132.  
lo-

logrammi  $ABCF$ ,  $ABDE$ , che hanno la medesima altezza, sono tra di loro, come le basi  $BC$ ,  $BD$ .

**P**osta  $BI$  moltiplice in qualunque modo di  $BD$ , e tirata la retta  $IA$ , farà il triangolo  $IAB$  ugualmente moltiplice di  $ABD$ , come la base  $IB$  della base  $BD$ , perchè essendo le parti  $DH$ ,  $HI$  uguali a  $BD$ , congiunta ancora  $HA$ , faranno li triangoli  $HAD$ ,  $IAH$  uguali ad  $ABD$ <sup>a</sup>, essendo tra le medesime parallele  $DC$ ,  $EF$ . Similmente presa  $BG$  moltiplice di  $BC$ , farà, congiunta la  $AG$ , il triangolo  $ABG$  ugualmente moltiplice di  $ABC$ , come  $GB$  di  $BC$ ; e secondo che riesca  $BG = BI$ , ancora farà  $ABG = ABI$ ; e se  $BG > BI$ , farà purè  $ABG > ABI$ ; se  $BG < BI$ , ancora  $ABG < ABI$ ; dunque gli ugualmente moltiplici del triangolo  $ABC$ , e della sua base  $BC$ , si accordano con gli ugualmente moltiplici del triangolo  $ABD$ , e della sua base  $BD$ , in uguagliarsi, avanzarsi, o essere avanzati l'uno dall'altro; però il triangolo al triangolo è come la base alla base<sup>b</sup>. E perchè li parallelogrammi  $ABCF$ ,  $ABDE$  sono doppj de' triangoli  $ABC$ ,  $ABD$ <sup>c</sup>, però sono nell'istessa ragione di tali triangoli<sup>d</sup>, dunque ancora essi parallelogrammi ugualmente alti, sono come le loro basi. Il che ec.

## PROPOSIZIONE II.

**FIG. 134.** *Se nel triangolo  $ABC$  si conduce una linea  $DE$  parallela alla base  $BC$ , essa taglierà i lati  $AB$ ,  $AC$  proporzionalmente ne' punti  $D$ ,  $E$ ; e qualunque volta una linea, come  $DE$  taglierà i lati  $AB$ ,  $AC$  proporzionalmente, sarà essa parallela alla base  $BC$ .*

Si



**S**I tirino le rette  $BE, CD$ ; faranno i triangoli  $BDE$ ,  $CE$   $D$  uguali<sup>a</sup>, essendo su la stessa base  $DE$ , e fra  $a$  37. 1. le medesime parallele descritti; dunque  $ADE \cdot BDE :: ADE \cdot CED$ <sup>b</sup>, ed è  $ADE \cdot BDE :: AD \cdot BD$ <sup>c</sup>, essendo triangoli ugualmente alti sopra quelle basi; e similmente  $ADE \cdot CED :: AE \cdot EC$ <sup>c</sup>; dunque  $AD \cdot BD :: AE \cdot EC$ <sup>d</sup>. Il che era da dimostrarsi quanto alla prima parte.

Quanto poi alla seconda, essendo  $AD \cdot DB :: AE \cdot EC$ , farà  $ADE \cdot BDE :: ADE \cdot CED$ <sup>c</sup>; dunque  $BDE = CED$ <sup>e</sup>; e però le rette  $DE, BC$  sono parallele<sup>f</sup>. Il che era in secondo luogo da dimostrarsi. f 34. 1.

## PROPOSIZIONE III.

*Se nel triangolo  $BAC$  l'angolo  $A$  si divide pel mezzo dalla retta  $AD$ , segante la base  $BC$  in  $D$ , saranno i segmenti della base proporzionali a' lati, cioè  $BD \cdot DC :: AB \cdot AC$ ; e viceversa qualunque volta sia  $BD \cdot DC :: AB \cdot AC$ , la retta, che congiunge l'angolo  $A$  col punto  $D$ , cioè  $AD$ , taglia pel mezzo il detto angolo  $BAC$ .*

FIG. 135

**S**I tiri dal punto  $C$  la retta  $CE$  parallela alla  $AD$ <sup>g</sup>, la quale concorra col lato  $BA$  prolungato  $g$  31. 1. in  $E$ ; perchè dunque l'angolo  $BAD = DAC$ ; ed è  $BAD = AEC$ , e  $DAC = ACE$ , per le parallele<sup>h</sup>,  $h$  29. 1. farà pure  $AEC = ACE$ ; e però  $AC = AE$ <sup>i</sup>, ed  $i$  6. 1. è  $BA \cdot AE :: BD \cdot DC$ <sup>k</sup>, dunque  $BA \cdot AC :: BD \cdot DC$ . Che se fosse  $BD \cdot DC :: BA \cdot AC$ , e congiunta la  $DA$ , gli si tiri la  $CE$  parallela, farà ancora  $BA \cdot AE :: BD \cdot DC$ <sup>k</sup> ::  $BA \cdot AC$ ; dunque farà  $AC = AE$ <sup>l</sup>, onde l'angolo  $AEC$ <sup>l</sup> 9. v.  $= ACE$ ; ma  $BAD = AEC$ , ed  $ACE = DAC$ <sup>h</sup>,  
dun-

dunque gli angoli  $BAD$ ,  $DAC$  faranno uguali, onde l'angolo  $BAC$  dalla retta  $AD$  è diviso pel mezzo. Il che ec.

## PROPOSIZIONE IV.

FIG. 136. *Ne' triangoli equiangoli  $ABC$ ,  $DCE$ , i lati, che sono intorno a gli angoli uguali, sono proporzionali, ed i lati omologhi sono quelli, che sono sottoposti a gli angoli uguali.*

**P**ongasi per diritto  $CE$  con  $BC$ , e prolungati i lati  $BA$ ,  $ED$  concorrano in  $F$ . Perche dunque l'angolo  $ABC$  è uguale all'angolo  $DCE$ , e l'angolo  $ACB = CED$ , sono parallele  $BAF$  a  $CD$ , ed  $AC$  ad  $EDF$ <sup>a</sup>, onde  $ACDF$  è un parallelogrammo, in cui  $CA = DF$ , e  $CD = AF$ <sup>b</sup>, dunque essendo  $BA \cdot AF :: BC \cdot CE :: FD \cdot DE$ <sup>c</sup>, sono  $BA \cdot CD :: BC \cdot CE :: AC \cdot DE$ , e permutando  $BA \cdot BC :: CD \cdot CE$ ; e  $BC \cdot AC :: CE \cdot DE$ <sup>d</sup>, onde per l'uguaglià ordinata, ancora  $BA \cdot AC :: CD \cdot DE$ <sup>e</sup>; dunque i lati intorno agli angoli uguali sono proporzionali. Il che ec.

<sup>f</sup>Def. I. VI. **COROLLARIO.** Quindi si ha, che i triangoli equiangoli sono figure simili<sup>f</sup>, avendo i lati proporzionali intorno a' loro angoli uguali.

## PROPOSIZIONE V.

FIG. 137. *Se i triangoli  $ABC$ ,  $DEF$  hanno i lati proporzionali  $AB \cdot BC :: DE \cdot EF$ , e  $BC \cdot AC :: EF \cdot FD$ , averanno ciascun angolo uguale al suo corrispondente, opposto a' lati omologhi.*

**F**acciasi l'angolo  $FEG = CBA$ , e l'angolo  $EFG = BCA$ , e convenendo le rette  $EG$ ,  $FG$  in  $G$ ;

$G$ , riuscirà l'angolo  $G = BAC^a$ ; dunque essendo  $a$  32. 1. equiangolo  $EGF$  a  $BAC$ , farà  $GE \cdot EF :: AB \cdot BC^b :: DE \cdot EF$ , dunque  $GE = DE^c$ ; similmente farà  $GF \cdot EF :: AC \cdot CB^b :: DF \cdot EF$ , e però ancora  $GF = DF^c$ ; ed essendo il lato  $EF$  comune a' triangoli  $EGF$ ,  $EDF$ , che hanno gli altri lati uguali, però faranno ancora essi equiangoli<sup>d</sup>,  $d$  8. 1. dunque essendo  $EGF$  equiangolo ad  $ABC$ , ancora  $EDF$  è allo stesso  $ABC$  equiangolo. Il che ec.

## PROPOSIZIONE VI.

*Se due triangoli  $ABC$ ,  $DEF$  intorno ad angoli  $A = D$  abbiano proporzionali i lati  $AB \cdot AC :: ED \cdot DF$ , faranno ancora gli altri angoli uguali, cioè  $B = E$ , ed ancora  $C = F$ , i quali sono sottoposti a' lati omologhi.* FIG. 138.

**S**I ponga nel lato  $AB$  la parte  $AG = DE$ , e la parte  $AH$  del lato  $AC$  facciafi  $= DF$ . Congiunta la  $GH$  farà  $= EF^e$ , essendo intorno  $e$  4. 1. gli angoli  $A$ ,  $D$  uguali i lati; ma la  $GH$  è parallela a  $BC^f$ , e però gli angoli  $AGH, = ABC$ ,  $f$  2. vi. ed  $AHG = ACB^g$ , dunque il triangolo  $ABC$  essendo equiangolo ad  $AGH$ , e questo ad  $EDF$ , sono i triangoli  $ABC$ ,  $EDF$  pure equiangoli. Il che ec.  $g$  29. 1.

## PROPOSIZIONE VII.

*Ne' triangoli  $ABC$ ,  $DEF$ , se l'angolo  $A = D$ , FIG. 139. e intorno agli altri due angoli  $B$ ,  $E$  siano i lati proporzionali  $AB \cdot BC :: DE \cdot EF$ , e gli altri due angoli  $C$ ,  $F$  siano ambi retti, o tutti e' due minori, o ambidue maggiori di un retto, faranno essi triangoli equiangoli.* Sc

**S**E gli angoli  $C, F$  fossero retti, farebbero uguali, ed ancora essendo l'angolo  $A = D$ , farebbe pure l'angolo  $B = E^a$ . Dunque farebbero essi triangoli equiangoli. Se poi sono ambidue gli angoli acuti, o ambidue ottusi, farà pure l'angolo  $B$  uguale all'angolo  $E$ ; altrimenti se fosse uno di essi maggiore dell'altro, per esempio  $ABC > DEF$ , fattosi  $ABG = DEF$ , ed essendo ancora l'angolo  $A = D$ , farebbe pure  $AGB = F$ , onde essendo li triangoli  $ABG, DEF$  equiangoli, farebbe  $AB \cdot BG :: DE \cdot EF^b$ , cioè, per l'ipotesi  $:: AB \cdot BC$ ; e però  $BG = BC^c$ , e l'angolo  $BGC = BCG^d$ , e così ambidue minori di un retto, e però acuti<sup>a</sup>; onde il conseguente  $BGA$  farà ottuso, ed essendo questi uguale all'angolo  $F$ , farebbe pure l'angolo  $F$  ottuso, quando l'angolo  $C$  si è provato acuto, onde non farebbero ambidue maggiori, o ambidue minori di un retto, contro l'Ipotesi; non è adunque l'angolo  $ABC$  disuguale all'angolo  $E$ , onde essi triangoli sono equiangoli, come dovea dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 140. *Nel triangolo rettangolo  $BAC$ , se dall'angolo retto  $A$  si conduce la perpendicolare  $AD$  sopra l'opposta base  $BC$ , saranno li triangoli  $ADB, CDA$  simili tra di loro, ed a tutto il triangolo  $CAB$ .*

**I**mperocchè essendo l'angolo retto  $ADB = CAB$ , e l'angolo  $B$  comune a questi triangoli, ancora il rimanente  $DAB$  farà uguale al residuo  $ACB^a$ ; dunque sono equiangoli li triangoli  $ADB, CAB$ , e  $CDA$ , e però sono simili<sup>c</sup>. Il che ec.

Co-

<sup>a</sup> Coll'pr  
4. VI.



**COROLLARIO I** Quindi è manifesto, che intorno gli angoli retti de' triangoli simili  $CDA, ADB$ , faranno proporzionali i la i  $CD \cdot DA :: AD \cdot DB$ .

**COROLLARIO II.** E per la similitudine di ciascuno di essi triangoli con l'intero  $CAB$ , farà pure  $BC \cdot BA :: BA \cdot BD$ , ed ancora  $BC \cdot CA :: CA \cdot CD$ .

### PROPOSIZIONE IX. PROBL.

*Da una data retta linea  $AB$  tagliare una parte aliquota (per esempio una terza parte)  $AG$ .* FIG. 141.

**SI** tiri dal punto  $A$  una retta indefinita  $AC$ , in cui presa qualunque parte  $AD$ , si replichi in essa secondo il numero della denominazione, che deve avere la parte di  $AB$  (in questo caso tre volte cioè  $AD, DE, EF$ ), e congiunto il termine  $F$  col punto  $B$ , si tiri la retta  $DG$  parallela ad  $FB$ . Sarà  $AG$  la terza parte di  $AB$ , come  $AD$  di  $AF$ , essendo  $AG \cdot AB :: AD \cdot AF^a$ . a 2. vi.

### PROPOSIZIONE X. PROBL.

*Segare la data retta  $AB$  in  $F, G$  nell'istessa proporzione, in cui sia divisa un'altra  $AC$  ne' punti  $D, E$ .* FIG. 142.

**SI** congiunga la  $BC$ , e ad essa parallele siano tirate le  $DF, EG$ ; è manifesto, che farà  $AF \cdot FG :: AD \cdot DE$ , ed  $AG \cdot GB :: AE \cdot EC$ , ed  $FG \cdot GB :: DE \cdot EC$ , ed  $AF \cdot FB :: AD \cdot DC^a$ . Dunque è divisa  $AB$  in  $F, G$  nell'istessa proporzione, in cui  $AC$  in  $D, E$  era segata.

PRO-

## PROPOSIZIONE XI. PROBL.

FIG. 143. *Alle date due rette AB, BC trovare la terza proporzionale BD.*

**S**I ponga  $BC$  perpendicolare ad  $AB$ , e congiunta  $AC$  si compisca l'angolo retto  $ACD$ , concorrendo la  $CD$  con l' $AB$  prolungata in  $D$ . Sarà  $BD$  la terza proporzionale dopo le due  $AB$ ,  $BC$ <sup>a</sup>. Il che ec.

<sup>a</sup> Cor. 1.  
pr. 5: vi.

## PROPOSIZIONE XII. PROBL.

FIG. 144. *Date tre linee DE, EF, DG trovare la quarta proporzionale GH.*

**I**Nclinate in  $D$  le rette  $DE$ ,  $DG$ , si ponga  $EF$  in diritto alla  $DE$ , e congiunta  $EG$  si tiri a questa dal punto  $F$  la parallela  $FH$  segante  $DG$  prolungata in  $H$ . Sarà  $GH$  la quarta proporzionale ricercata, essendo pure  $DE \cdot EF :: DG \cdot GH$ <sup>b</sup>. Il che ec.

<sup>b</sup> 2. vi.

## PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

FIG. 145. *Date due rette AE, EB, trovare la media proporzionale EF.*

**P**oste per diritto  $AE$ , ed  $EB$ , e divisa pel mezzo tutta la  $AB$  in  $C$ , descrivasi col raggio  $CA$  un semicircolo, e si alzi la perpendicolare  $EF$ , segante la circonferenza in  $F$ : sarà questa  $EF$  media proporzionale tra le date  $AE$ ,  $EB$ ; perchè congiunte le rette  $AF$ ,  $BF$ , l'angolo  $AFB$  è retto<sup>c</sup>, dunque essendo  $FE$  perpendicolare alla base del triangolo rettangolo, stà  $AE \cdot EF :: EF \cdot EB$ <sup>a</sup>. Il che dovea ritrovarsi.

<sup>c</sup> 28. III.

PRO-

## PROPOSIZIONE XIV.

*Se i parallelogrammi ABCD, EBGF sono u-* FIG. 146.  
*guali, ed hanno un angolo  $ABC = GBE$ , saran-*  
*no i lati di essi reciprocamente proporzionali, cioè*  
 $AB \cdot BG :: EB \cdot BC$ ; *e viceversa se intorno agli*  
*angoli uguali sono i lati reciprocamente proporzio-*  
*nali, essi parallelogrammi saranno uguali.*

**E**ssendo posto il lato BG per diritto ad AB,  
 farà pure EB per diritto a BC, perchè sic-  
 come ABC, così l' uguale EBG con l' altro CBG  
 fa due angoli retti<sup>a</sup>, e prolungate le rette FG, <sup>a</sup> 14. 1.  
 DC convenienti in H, farà pure CBGH un pa-  
 rallelogrammo; e perchè  $ABCD = BEFG$ , fa-  
 rà  $ABCD \cdot CBGH :: BEFG \cdot CBGH$ <sup>b</sup>; ma la<sup>b</sup> 7. v.  
 prima ragione ::  $AB \cdot BG$ , e la seconda ::  $EB \cdot$   
 $BC$ <sup>c</sup>; dunque  $AB \cdot BG :: EB \cdot BC$ ; e qualun- <sup>c</sup> 1. vi.  
 que volta ciò sia, farà ancora  $ABCD \cdot CBGH ::$   
 $BEFG \cdot CBGH$ <sup>c</sup>; dunque farà  $ABCD = BEFG$ <sup>d</sup>. <sup>d</sup> 9. v.  
 Il che era da dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE XV.

*Anche li triangoli uguali ABC, DBE, in cui* FIG. 147.  
*l' angolo B in ambidue sia uguale, averanno i lati*  
*intorno al detto angolo reciprocamente proporzionali,*  
*cioè  $AB \cdot BE :: BD \cdot BC$ , e viceversa, se intor-*  
*no ad un angolo uguale i lati di due triangoli sono*  
*reciprochi, saranno essi triangoli uguali.*

**I**mperocchè posta in diritto BD a BC, riesce  
 pure BE per diritto a BA, come si è prova-  
 to ne' parallelogrammi<sup>e</sup>, e congiunta CE, essen- <sup>e</sup> 14. vi.  
 do  $ABC = DBE$ , farà  $ABC \cdot CBE :: DBE \cdot$   
                   H                                   CBE,

*a* 7. v. *b* 1. vi.  $CBE^a$ , dunque  $AB \cdot BE :: BD \cdot BC$ , essendo queste proporzionali a detti triangoli *b*; e viceversa se  $AB \cdot BE :: BD \cdot BC$ , sarà pur  $ABC \cdot CBE :: DBE \cdot CBE^b$ , e però  $ABC = DBE^c$ . Il che era da dimostrarsi.

*c* 9. v. **COROLLARIO.** Quando ancora l'angolo  $DBE$  non fosse uguale all'altro  $ABC$ , ma però con esso compisse due retti, se i lati sono reciprocamente proporzionali, riescono pure uguali i triangoli; imperocchè, essendo  $AB \cdot BE :: BD \cdot BC$ , posta dall'altra banda la  $BF = BD$ , e congiunta  $FE$ , sarà pure  $AB \cdot BE :: BF \cdot BC$ , e permutando *d* 16. v.  $AB \cdot BF :: BE \cdot BC$ , dunque congiunte le rette  $AE, FC$  sono parallele *e*, e li triangoli  $ACF, ECF$  sono uguali *f*, onde aggiunto  $FCB$ , riesce  $ABC = EBF$ , ma essendo  $BF = BD$ , sarà  $EBF = EBD$  *g* 38. 1. dunque  $ABC = EBD$ ; e l'istesso riuscirà ne' parallelogrammi, che intorno ad angoli, i quali insieme facciano due retti abbiano i lati reciprochi, perchè essendo il doppio di detti triangoli, essi pure faranno uguali.

## PROPOSIZIONE XVI.

*FIG. 149.* *Se quattro rette linee sono proporzionali*  $A \cdot B :: C \cdot D$ , *il rettangolo dell'estreme*  $AD$  *uguaglia il rettangolo delle mezzane*  $BC$ ; *e viceversa se due rettangoli*  $AD, BC$  *sono uguali, saranno proporzionali i loro lati reciprocamente presi*  $A \cdot B :: C \cdot D$ .

**P**Erchè essendo posti questi lati intorno ad angoli retti, faranno i lati reciprochi  $A \cdot B :: C \cdot D$ , dunque li rettangoli sono uguali; e se tali rettangoli sono uguali, i loro lati debbono essere re-



reciprocamente proporzionali ( per la prop. 14.)  
Il che era da dimostrarsi.

## PROPOSIZIONE XVII.

*Se tre linee rette A, B, D sono proporzionali, A . B :: B . D, il rettangolo dell' estreme AD è uguale al quadrato della mezzana B; e viceversa se di tre linee il rettangolo dell' estreme uguaglia il quadrato della mezzana, esse tre linee saranno continuamente proporzionali.* FIG. 150.

SI prenda C uguale alla mezzana B, dunque essendo  $A \cdot B :: B \cdot D$ , farà ancora  $A \cdot B :: C \cdot D$ , onde il rettangolo dell' estreme  $AD = BC$  rettangolo delle medie; ma essendo  $C = B$ , il rettangolo  $BC$  uguaglia il quadrato  $BB$ , dunque il rettangolo dell' estreme è uguale al quadrato della media; e viceversa se  $AD = BB$ , farà  $AD = BC$ , onde  $A \cdot B :: C \cdot D$ , cioè essendo  $B = C$ , faranno continuamente proporzionali  $A \cdot B :: B \cdot D$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XVIII. PROBL.

*Sopra una data retta linea AB descrivere un rettilineo ABHG simile, e similmente posto ad un altro dato CDFE.* FIG. 151.

SI risolva il dato rettilineo  $CDFE$  in triangoli  $CDF$ ,  $CFE$ , e sopra la retta  $AB$  si faccia l'angolo  $ABH = CDF$ , e l'angolo  $BAH = DCF$ ; indi l'angolo  $AHG$  facciasi  $= CFE$ , e l'angolo  $HAG = FCE$ ; farà il trilineo  $ABHG$  simile al dato  $CDFE$ , perchè li triangoli  $ABH$ ,  $CDF$  faranno equiangoli, dunque intorno all'angolo  $B = D$ , faranno proporzio-

H 2 na-

nali i lati  $AB \cdot BH :: CD \cdot DF$ ; ed essendo l'angolo  $BHA = DFC$ , ed  $AHG = CFE$ , sarà pure l'angolo  $BHG = DFE$ ; ed essendo  $BH \cdot HA :: DF \cdot FC$ ; ed  $HA \cdot HG :: FC \cdot FE$ , per l'uguaglianza ordinata sarà  $BH \cdot HG :: DF \cdot FE$ ; e similmente si proveranno gli altri angoli di questi poligoni uguali, ed i lati, che gli comprendono, essere proporzionali. Dunque sopra la data retta  $AB$  si è fatto un rettilineo simile al dato. Il che era proposto.

## PROPOSIZIONE XIX.

Tav. VIII.  
FIG. 152.

*La proporzione di due triangoli simili è doppia della proporzione de' loro lati omologhi.*

Siano due triangoli simili  $ABC, DEF$ , ed a due dei loro lati omologhi  $BC, EF$ , sia  $BG$  terza proporzionale, e si congiunga  $GA$ . Perchè  $BC$  a  $BA$  stava come  $EF$  ad  $ED$ , sarà permutando  $BC \cdot EF :: BA \cdot ED$ ; ma  $BC \cdot EF :: EF \cdot BG$ ; dunque  $BA \cdot ED :: EF \cdot BG$ ; onde il triangolo  $DEF = ABG^a$ , onde il triangolo  $ABC$  al triangolo  $DEF$  starà come  $ABC$  ad  $ABG$ , cioè come  $BC$  a  $BG$ ; ma  $BC$  a  $BG$  ha doppia proporzione di quella, che ha  $BC$  ad  $EF^b$ ; dunque  $ABC$  a  $DEF$  ha proporzione doppia di  $BC$  ad  $EF$ . Il che ec.

<sup>a</sup> 15. vi.

<sup>b</sup> Def. 10. v.

COROLLARIO. Se faranno dunque tre linee proporzionali, come  $BC, EF, BG$  qualunque triangolo fatto sopra la prima  $BC$  ad un simile fatto sopra la seconda  $EF$ , sarà come la prima  $BC$  alla terza  $BG$ .

PRO-

## PROPOSIZIONE XX.

*Li Poligoni simili ABCDE, FGHIK si dividono in triangoli simili, ABC, FGH, ed ACD, FHI, ed ADE, FIK, uguali di numero, ed omologhi a' medesimi Poligoni, ed agli altri simili triangoli; e qualunque poligono all' altro simile ha ragione doppia di quella, che ha qualsivoglia lato del primo al lato omologo del secondo.*

FIG. 153.

**I**mperocchè, essendo l' angolo  $B$  uguale all' angolo  $G$ , ed i lati proporzionali  $AB \cdot BC :: FG \cdot GH$ , tirate le rette  $AC, FH$ , i triangoli  $ABC, FGH$  riescono simili <sup>a 6. vi.</sup> Parimente essendo l' angolo  $BCD = GHI$ , e ne' triangoli simili l' angolo  $BCA = GHF$ , il rimanente  $ACD = FHI$ ; e perchè  $AC \cdot CB :: FH \cdot HG$  ne' triangoli simili, e ne' poligoni simili  $BC \cdot CD :: GH \cdot HI$ , dunque per l' uguagliata ordinata <sup>b 22. v.</sup>  $AC \cdot CD :: FH \cdot HI$ , e però condotte le rette  $AD, FI$ , faranno pure simili i triangoli  $ACD, FHI$ ; e così pure si proveranno simili gli altri triangoli; e perchè in ciascun poligono, condotte le rette da un' angolo a tutti gli altri (fuori che a' due prossimi, dove già si stendono i lati del suddetto angolo) ne riescono tanti triangoli, quanti sono i lati del poligono, trattine due; però ne' poligoni simili, che hanno il medesimo numero de' lati, riesce un numero uguale di simili triangoli; ed essendo  $ABC$  ad  $FGH$  in doppia ragione de' lati omologhi  $CB, HG$  <sup>c 19. vi.</sup>, ed ancora  $ACD$  ad  $FHI$  in doppia ragione di  $CD$  ad  $HI$ , siccome ancora  $ADE$  ad  $FIK$  in doppia ragione di  $DE$  ad  $IK$ , essendo la medesima ragione

a 12. v. ne  $CB \cdot HG :: CD \cdot HI :: DE \cdot IK$ , ancora la doppia dell' una è l' istessa, che la doppia di qualsivoglia di esse; però  $ABC \cdot FGH :: ACD \cdot FHI :: ADE \cdot FIK$ , e come uno ad uno, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti <sup>a</sup>, cioè  $ABC \cdot FGH :: ABC + ACD + ADE \cdot FGH + FHI + FIK$ , cioè come un triangolo d' un poligono ad un simile triangolo dell' altro poligono, così tutto il primo poligono a tutto il secondo; onde essendo li triangoli  $ABC$ ,  $FGH$  in doppia ragione de' lati omologhi  $AB$ ,  $FG$ ; ancora detti poligoni  $ABCDE$ ,  $FGHIK$  sono in doppia ragione de' lati omologhi  $AB$ ,  $FG$ . Il che ec.

COROLLARIO Dunque presa una terza proporzionale a due lati omologhi del primo, e del secondo rettilineo simile, starà il primo rettilineo al secondo, come il lato del primo a quella terza proporzionale presa dopo il primo, ed il secondo lato.

## PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 154.

*I rettilinei ABC, DEI, simili ad un terzo HFG, sono pure simili tra di loro.*

b 11. v.

**P**Erchè gli angoli  $A$ ,  $B$ ,  $C$  essendo uguali a gli angoli  $H$ ,  $F$ ,  $G$ ; e questi essendo pure uguali a gli angoli  $DEI$ , dunque ancora gli angoli  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sono uguali a' corrispondenti  $D$ ,  $E$ ,  $I$ ; ed essendo  $AB \cdot BC :: HF \cdot FG$ , ed  $HF \cdot FG :: DE \cdot EI$ , dunque  $AB \cdot BC :: DE \cdot EI$  <sup>b</sup>; e così ancora le ragioni di altri due lati del rettilineo  $ABC$ , e di altri due omologhi del rettilineo  $DEI$ , faranno uguali; dunque essi rettilinei simili al  
ter-



terzo  $HFG$ , sono pure simili tra di loro. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXII.

*Se quattro linee sono proporzionali  $AB \cdot CD :: EF \cdot GH$ , i rettilinei simili, e similmente descritti sopra alle prime due  $AIB$ ,  $CKD$ , sono parimente proporzionali ad altri due rettilinei simili  $ELMF$ ,  $GNOH$ , descritti sopra all'altre due; e viceversa se quattro rettilinei, sopra a quattro linee similmente descritti, a due a due simili, saranno proporzionali, ancora esse linee debbono essere proporzionali.* FIG. 155.

**I**mperocchè, essendo la ragione di  $AB$  a  $CD$  uguale alla ragione di  $EF$  a  $GH$ , la doppia della prima, che è quella del rettilineo  $AIB$  al suo simile  $CKD$ , farà pure uguale alla doppia della seconda, che è quella de' simili rettilinei  $ELMF$ ,  $GNOH$ <sup>a</sup>; dunque  $AIB \cdot CKD :: ELMF \cdot GNOH$ ; <sup>a 20. VI.</sup> e viceversa, essendo proporzionali questi rettilinei, a due, e due simili, farà la ragione doppia di  $AB$  a  $CD$ , uguale alla doppia di  $EF$ , a  $GH$ , che si suppongono i loro lati omologhi; dunque ancora la semplice ragione di  $AB$  a  $CD$  è uguale alla semplice ragione di  $EF$  a  $GH$ ; e però  $AB \cdot CD :: EF \cdot GH$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXIII.

*I parallelogrammi equiangoli  $ABCD$ ,  $ECGF$  hanno tra loro la ragione composta de' lati, cioè di  $BC$  a  $CG$ , e di  $DC$  a  $CE$ .* FIG. 156.

**P**ongasi per diritto  $DC$  alla  $CE$ , e riuscirà pure  $BC$  per diritto alla  $CG$ , essendo l'angolo  $BCD$

H 3

$BCD$

*a* I. VI.  $BCD = ECG$ ; e compiuto il parallelogrammo  $DCGH$ , si faccia come  $DC$  a  $CE$ , così  $CG$  ad un'altra  $K$ . Il parallelogrammo  $ABCD$  all'ugualmente alto  $DCGH$  è come la base  $BC$  alla base  $CG$ <sup>a</sup>, ed esso  $DCGH$  ad  $ECGF$  è come  $DC$  a  $CE$ , o come  $CG$  a  $K$ ; dunque per l'uguaglianza ordinata  $ABCD \cdot ECGF :: BC \cdot K$ ; ma  $BC$  a  $K$  è in ragione composta di  $BC$  a  $CG$ , e di  $CG$  a  $K$ <sup>b</sup>; l'ultima di cui  $CG \cdot K :: DC \cdot CE$ , dunque  $ABCD$  ad  $ECGF$  ha la ragione composta de' lati  $BC$  a  $CG$ , e  $DC$  a  $CE$ . Il che ec.

<sup>b</sup> Avvertimento alla defn. 5. VI.

COROLLARIO. Quindi i parallelogrammi equiangoli sono, come il prodotto de' lati del primo al prodotto de' lati del secondo<sup>b</sup>.

### PROPOSIZIONE XXIV.

FIG. 157. *In ogni parallelogrammo  $ABCD$ , per qualunque punto  $F$  del diametro  $AC$  tirate le parallele a' lati ne risultano intorno al medesimo diametro parallelogrammi  $AEFG$ ,  $CHFK$  tra di loro simili, e simili al tutto.*

**I**Mperocchè riescono equiangoli, e però simili tutti i triangoli  $AEF$ ,  $ABC$ ,  $FHC$ , e gli opposti a questi; dunque  $AE \cdot EF :: AB \cdot BC :: FH \cdot HC$ , ed essendo  $AG = EF$ ,  $AD = EC$ ,  $FK = HC$ , dunque ancora  $AE \cdot AG :: AB \cdot AD :: FH \cdot FK$ ; dunque tali parallelogrammi sono equiangoli, ed intorno agli angoli uguali hanno i lati proporzionali, e però sono simili al tutto, e fra se stessi. Il che ec.

PRO-

## PROPOSIZIONE XXV. PROBL.

*Costituire un rettilineo LMNOP, simile ad un dato ABCDE, ed uguale ad un altro dato F.* FIG. 158.

**F** Acciasi il rettangolo  $ABIH$  uguale al rettilineo  $ABCDE^a$ , ed alla retta  $BI$  si adatti  $a$  45. I. pure il rettangolo  $IBGK = F^a$ , e tra le due  $AB$ ,  $BG$  si trovi la media proporzionale  $LM^b$ , sopra di  $b$  13. VI. cui si descriva il rettilineo  $LMNOP$  simile al dato  $ABCDE^c$ , farà questo stesso uguale ad  $F$ ; imperocchè  $ABIH \cdot BIKG :: ABCDE \cdot F :: AB \cdot BG$ ; ma ancora  $ABCDE \cdot LMNOP :: AB \cdot BG$  (essendo questa ragione doppia di  $AB$  alla media  $LM$ ; quale pure è la ragione del rettilineo  $ABCDE$  al simile  $LMNOP^d$ ) dunque  $LMNOP^d = F$ . Il che dovea farsi. c 18. VI.

## PROPOSIZIONE XXVI.

*Se nel medesimo angolo A del parallelogrammo ABCD si descrive un simile parallelogrammo AEHI similmente posto, sarà d'intorno al diametro AH, parte del tutto AC.* FIG. 159.

**A** Ltrimenti se fosse come il parallelogrammo  $AEFG$ , il cui angolo  $F$  è fuori del diametro  $AC$ , farebbe  $AE \cdot EF :: AB \cdot BC$  per la similitudine de' parallelogrammi, ma  $AB \cdot BC :: AE \cdot EH$ , per la similitudine de' triangoli  $ABC$ ,  $AEH$ ; dunque farebbe  $AE \cdot EF :: AE \cdot EH$ , onde  $EF = EH$ , il tutto alla parte. Il che è impossibile ec.

## PROPOSIZIONE XXVII.

*Di tutti li parallelogrammi all' istessa linea AB* FIG. 160.  
ap-

*applicati, con mancanza di parallelogrammi simili, e similmente posti (come AFGK, ed AHDC, applicati alla retta AB con mancanza di parallelogrammi GKBI, DCBE tra di loro simili) il massimo di tutti è AHDC descritto sopra AC, che è la metà della data AB, e riesce ancora simile al suo difetto d'applicazione BCDE.*

**I**Mperocchè essendo intorno al medesimo diametro  $DB$  li difetti simili  $GKBI$ ,  $DCBE^a$ , farà  $NGIE = MGKC^b$ , ed aggiunto di comune  $KGIB$ , riesce  $\triangle KBE = \triangle CBI = \triangle CAF^c$ , ed aggiunto  $CMGK$ , farà  $AFKG = MCBENG$ ; ma questo è un gnomone minore di  $DCBE$ , e conseguentemente ancora minore di  $AHDC$ ; dunque  $AHDC$  è il massimo di tutti. Il che ec.

**COROLLARIO** Quindi de' parallelogrammi inscritti in un triangolo  $ABL$ , co' lati paralleli a' lati di esso triangolo, il massimo è  $AHDC$ , il quale divide pel mezzo tutti i lati  $BL$ ,  $AL$ ,  $AB$  di esso triangolo<sup>d</sup>, siccome  $AC$  è la metà di  $AB$ .

### PROPOSIZIONE XXVIII. PROBL.

*Ad una data retta linea  $AB$  adattare un parallelogrammo  $AZPS$  uguale ad un dato rettilineo  $C$ , mancante però nell'applicazione del parallelogrammo  $ZPRB$  simile ad un dato parallelogrammo  $D$ . Non deve però il dato rettilineo  $C$  essere maggiore<sup>e</sup> del parallelogrammo, che si potrebbe applicare alla metà della data linea  $AB$ , con mancanza d'applicazione parimente simile a  $D$ .*

**D**ivisa pel mezzo  $AB$  in  $E$ , si descriva sopra  $AE$  il parallelogrammo  $AEFH$  simile al dato



to  $D^a$ , il quale se fosse uguale al dato rettilineo  $C$ , <sup>a 18. vi.</sup> farebbe applicato alla data  $AB$ , col mancamento dell'altro a se uguale, e simile  $EFG B$ ; ma essendo  $AEFH$  maggiore di  $C$ , si faccia il parallelogrammo  $KNMT$  simile pure a  $D$ , ed uguale all'eccesso del medesimo  $AEFH$  sopra  $C^b$ ; e pre- <sup>b 25. vi.</sup> se le rette  $FQ = KT$ , ed  $FO = KN$ , si compisca il parallelogrammo  $FOPQ$ , che sarà uguale a  $KNMT$ , e simile ad  $EFG B$ , e però intorno all'istesso diametro  $FB^c$ ; e prolungate <sup>c 26. vi.</sup>  $QP$  in  $Z$ , ed  $OP$  alle rette  $AH$ ,  $BG$  in  $S$ ,  $R$ , dico, che il parallelogrammo  $AZPS$  farà  $= C$ , ed applicato alla retta  $AB$ , colla mancanza del parallelogrammo  $PZBR$  simile a  $D$ . Imperocchè essendo  $FQPO = KTMN = HFEA = C$ , ovvero ad  $EFG B = C$ , farà il gnomone  $QPOEBG = C$ ; ma essendo  $QPRG = OPZE^d$ , aggiunto <sup>d 43. i.</sup>  $ZR$ , farà  $QZBG = OEBR = SOEA$ , e di nuovo aggiunto  $OPZE$ , farà esso gnomone  $QPOEBG = AZPS$ , e però questo pure  $= C$ , ed applicato alla data  $AB$ , col mancamento  $ZPRB$  simile a  $D$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXIX. PROBL.

*Alla data retta linea  $AB$  applicare un parallelogrammo  $ARNP$  uguale ad un dato rettilineo  $C$ , ed eccedente nella sua applicazione col parallelogrammo  $BONP$  simile al dato  $D$ .* FIG. 162.

**S**I seghi  $AB$  pel mezzo in  $E$ , e sopra  $EB$  fatto il parallelogrammo  $EFG B$  simile al dato  $D$ , si faccia simile al medesimo un parallelogrammo  $HIKS$  uguale alla somma di  $EFG B$ , e del dato

to

- a 29. vi. to rettilineo  $C^a$ . Indi prodotti i lati  $FE$ ,  $FG$ , si tagli  $FL = IH$ , ed  $FM = IK$ , e si compisca il parallelogrammo  $FLNM$ , che farà  $= HIKS$ , e simile ad esso, ed all' altro  $EFG B$ , essendo ambedue simili a  $D$ , onde faranno intorno al medesimo diametro  $FB N^b$ ; ed essendo il gnomone  $ELNMGB$  l' eccesso del parallelogrammo  $FLNM$  sopra  $EFG B$ , farà quel gnomone  $= C$ ; ma essendo  $GMP B = EBOL$ , e questo  $= EARL$ , essendo la base  $EB = EA$ , farà  $GMP B = EARL$ , ed aggiunto  $ELNP$ , il gnomone  $ELNMGB = ARNP$ , dunque questo parallelogrammo applicato alla data  $AB$ , ed eccedente del parallelogrammo  $BONP$  simile a  $D$ , è uguale al dato rettilineo  $C$ . Il che ec.

## A V V E R T I M E N T O .

*Alcuni Matematici, come il P. de Chales nel suo Corso Matematico, ed il P. Jacquet ne' suoi elementi di Geometria, e M. Ozanam negli Elementi d' Euclide tralasciano queste ultime tre proposizioni, asserendo, che nullius ferè sunt usus, e che sono de petite consequence. Io però osservo, essere la proposizione 27. molto utile alla questione de maximis, & minimis, e le altre due proposizioni 28. e 29. essere adattate alla soluzione di qualunque Problema piano, come vedrassi nell' Algebra, che sempre si riduce all' equazione, in cui un dato piano si uguaglia alla somma, o alla differenza di un rettangolo compreso da una linea data, e dalla ignota, che ricercasi, ed al quadrato di questa ignota; la quale somma importa il parallelogrammo rettangolo applicato ad una data linea, coll' eccesso di un parallelogrammo simile*

le

*le ad un quadrato : e la differenza di essi trovasi pure , applicando alla data linea il parallelogrammo , con mancanza di un parallelogrammo simile ad un quadrato ; le quali cose possono eseguirsi , come in queste proposizioni ultime si è insegnato ; e però non parmi doverfi ammettere , che non siano di verun uso , e di piccola conseguenza , come dagli Autori citati si crede .*

## PROPOSIZIONE XXX. PROBL.

*Dividere la data retta  $AB$  in  $C$  nell' estrema , FIG. 163. e media ragione .*

**D**ividasi in maniera , che il rettangolo  $ABC$  sia uguale al quadrato della rimanente  $AC$ <sup>a</sup> ; <sup>a</sup> 11. 11. farà dunque tutta la  $AB$  alla parte  $AC$  , come la medesima  $AC$  alla residua  $CB$ <sup>b</sup> ; dunque tutta la <sup>b</sup> 17. vi.  $AB$  resterà divisa in  $C$  secondo l' estrema , e media ragione <sup>c</sup> . Il che ec. <sup>c</sup> Def. 3. vi.

## PROPOSIZIONE XXXI.

*Nel triangolo rettangolo  $BAC$  le figure simili  $F$  , FIG. 164.  $G$  fatte sopra i lati  $BA$  ,  $CA$  contenenti l' angolo retto  $A$  sono uguali alla figura  $E$  simile a ciascuna di esse , descritta sopra il lato  $BC$  sotteso all' angolo retto .*

**C**ondotta dall' angolo retto la perpendicolare  $AD$  sopra la base  $BC$  , faranno proporzionali le rette  $CB$  ,  $CA$  ,  $CD$ <sup>d</sup> , ed ancora le tre altre <sup>d</sup> Coroll. Pr. 8. vi.  $CB$  ,  $BA$  ,  $BD$  ; dunque la figura  $E$  alla simile  $G$  , sta come  $BC$  a  $CD$ <sup>e</sup> , e convertendo  $G \cdot E :: CD$  <sup>e</sup> Coroll. Pr. 20. vi.  $\cdot BC$  ; ma similmente  $F \cdot E :: BD \cdot BC$  ; dunque  $G \rightarrow F$

a 24. v.  $G \rightarrow F \cdot E :: CD \rightarrow BD \cdot BC^a$ ; ma  $CD \rightarrow BD = BC$ ; dunque ancora  $G \rightarrow F = E$ . Il che dovea dimostrarsi.

NOTA. Essendo tutti li quadrati figure simili, e tutte le simili figure in duplicata proporzione de' lati omologhi, perciò le simili figure sono come i quadrati de' lati corrispondenti, e perciò solo resta dimostrato, che le figure simili fatte sopra li due lati contenenti l'angolo retto, debbono essere uguali alla figura loro simile, fatta sopra la base di esso triangolo rettangolo: siccome li due quadrati fatti da i lati sono uguali al quadrato sopra la base opposta all'angolo retto<sup>b</sup>.

FIG. 165. E perchè ancora li semicircoli sono figure simili (siccome qualsivoglia altro segmento circolare è simile ad un segmento, che comprende un angolo uguale a quello, che si comprende in esso<sup>c</sup>) perciò se nel semicircolo BEC si descriverà il triangolo BAC, che sarà rettangolo in A<sup>d</sup>, e sopra agli altri lati AB, AC si descriveranno li mezzi cerchi BGA, CFA, saranno questi due presi insieme uguali all'altro BEC; onde tolti di comune li segmenti BEA, AHC, rimangono le lunette BGAEB  $\rightarrow$  CFAHC uguali al triangolo BAC. E se il punto A è preso nel mezzo dell'arco BAC, esse lunette dall'una, e dall'altra parte essendo tra di loro uguali, ciascuna di esse sarà uguale alla metà del triangolo BAC, come fu proposto da Ippocrate Chio.

### PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 166. Se due triangoli ABC, DCE hanno due lati proporzionali, cioè  $AB \cdot AC :: DC \cdot DE$ ; e concorrendo nel punto C l'uno, e l'altro triangolo, rie-



*riescano que' lati omologhi paralleli, faranno gli altri lati  $BC$ ,  $CE$  posti per diritto fra loro in una medesima retta linea.*

**I**mperocchè il parallelismo de' lati omologhi fa l'angolo  $A$ , e l'angolo  $D$  uguali al terzo alterno  $ACD$ ; dunque sono essi angoli  $A$ ,  $D$  uguali, ed avendo i lati proporzionali, gli altri angoli pure faranno uguali<sup>a</sup>; dunque l'angolo  $B = DCE$ , ed essendo l'angolo  $A = ACD$ , dunque  $B + A = ECA$ , ed aggiunto l'angolo  $ACB$  sono i tre angoli del triangolo  $ABC$  uguali agli angoli  $ECA + ACB$ ; e però questi sono pure uguali a due retti, onde fanno una retta linea  $BCE$ . Il che ec.

### PROPOSIZIONE XXXIII.

*Ne' cerchj uguali  $ABI$ ,  $EFP$ , gli angoli fatti al centro  $BDC$ ,  $FHG$ ; ed ancora quelli fatti alla circonferenza  $BAC$ ,  $FEG$ , sono proporzionali agli archi  $BC$ ,  $FG$ , cui insistono; ed ancora gli settori  $BDC$ ,  $FHG$  sono come i detti archi, o come gli angoli da loro compresi al centro.* FIG. 167.

**R**Eplicato l'arco  $BC$ , in  $CI$ , e l'arco  $FG$  in  $GK$ , e  $KP$ , quanto multiplice è l'arco  $BCI$  dell'arco  $BC$ , tanto multiplice farà l'angolo  $BDI$  dell'angolo  $BDC$ , essendo gli angoli  $BDC$ ,  $CDI$  uguali, come corrispondono ad archi uguali<sup>b</sup>; e similmente quanto multiplice è l'arco  $FP$  di  $FG$ , tanto multiplice è l'angolo  $FHP$  dell'angolo  $FHG$ . mentre agli archi uguali  $FG$ ,  $GK$ ,  $KP$  corrispondono altrettanti angoli uguali  $FHG$ ,  $GHK$ ,  $KHP$ . E se l'arco  $BI$  fosse uguale all'arco  $FP$ , farebbe l'angolo  $BDI = FHP$ ; se  $BI >$ , o  $<$   $FP$ ,

$FP$ , sarà parimente  $BDI >$ , o  $< FHP$ ; dunque  $BC \cdot FG :: BDC \cdot FHG$ , mentre gli ugualmente moltiplici degli antecedenti si accordano in uguagliare, superare, o mancare dagli ugualmente moltiplici de' conseguenti. Il che primieramente si dovea dimostrare.

In oltre, perchè gli angoli alla circonferenza  $BAC$ ,  $FEG$  sono la metà di quelli al centro  $BDC$ ,  $FHG$ <sup>a</sup>, perciò ancora essi essendo proporzionali a questi angoli fatti al centro, saranno pure come gli archi  $BC$ ,  $FG$ , sopra di cui insistono.

E perchè ancora tirate le corde  $BC$ ,  $CI$  sono uguali tra loro, e similmente sono uguali le corde  $FG$ ,  $GK$ ,  $KP$ <sup>b</sup>, ed i segmenti, cui le corde uguali sono sottese, tra di loro pure sono uguali<sup>c</sup>, siccome ancora uguali sono i triangoli, che hanno le basi uguali, ed i lati uguali; ne segue, che il settore  $CDI = BDC$ , ed il settore  $FHG = GHK = KHP$ , onde quanto moltiplice è l'arco  $BI$  dell'arco  $BC$ , tanto è moltiplice il settore  $BDI$  del settore  $BDC$ ; e similmente quanto moltiplice è l'arco  $FP$  dell'arco  $FG$ , tanto è moltiplice il settore  $FHP$  del settore  $FHG$ ; che se l'arco  $BCI = >$ , o  $<$  dell'arco  $FGKP$ , sarà pure il settore  $BDI = , >$ , o  $<$  del settore  $FHP$ ; dunque il settore  $BDC$  al settore  $FHG$  è come l'arco  $BC$  all'arco  $FG$ , o come l'angolo  $BDC$  all'angolo  $FHG$ . Il che dovea dimostrarsi.

### AVVERTIMENTO.

*Si tralasciano i libri VII. VIII. IX. e X. delli Elementi di Geometria d' Euclide, perchè di essi li primi tre parlano de' numeri, le cui proprietà appar-*  
ten-

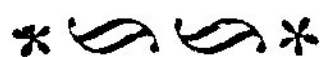
tengono all' *Aritmetica*, e l' altro discorre delle linee incommensurabili, cioè, che non hanno tra di loro veruna misura comune, le quali più brevemente, e più chiaramente potrebbero osservarsi col calcolo dell' *Analitica*. Per ora basta avvertire, che le quantità commensurabili, avendo qualche misura comune, che può prendersi per unità, sono proporzionali a' numeri, i quali sempre si misurano dall' unità, compresa alquante volte in uno, e certe altre volte in qualunque altro numero; ma le quantità continue possono essere incommensurabili, essendo proporzionali non a' numeri, ma alle radici quadrate, cubiche, biquadratiche ec. di numeri non quadrati, ne cubi, ne biquadrati ec.

Così il diametro d' un quadrato è incommensurabile al lato di esso, a cui sta, come la radice quadra di 2. , ad 1. La perpendicolare d' un triangolo equilatero sta al lato di esso, come la radice quadra di 3. a 2. le quali sono radici irrazionali, però queste si dicono incommensurabili in lunghezza, non in potenza. Che se tra due linee, le quali siano tra di loro, come l' unità ad un numero non quadrato, ne cubico, per esempio come 1 a 7. si prendano due linee medie proporzionali, saranno queste  $\sqrt[3]{7}$ , e  $\sqrt[3]{49}$ ; cioè come la radice cubica di 7, e come la radice cubica di 49. le quali paragonate alle date due linee, che erano, come 1. a 7., riescono incommensurabili ad esse, non solo in lunghezza, ma ancora in potenza quadrata; e prese tra esse più medie proporzionali, possono essere incommensurabili ancora in potenza cubica, ed in altre di grado maggiore.

Però essendo più necessario di tali osservazioni l' esame delle figure solide, di cui tratta Euclide nel

*libro XI. e XII. de' suoi Elementi, perciò dopo il sesto libro si fa passaggio all' undecimo, come da altri Matematici si è stimato opportuno di fare.*

E L E M E N T I  
DELLA GEOMETRIA  
DI EUCLIDE.  
LIBRO XI.



D E F I N I Z I O N I.

I.  Hiamasi CORPO SOLIDO quello, che ha l' estensione in lunghezza, in larghezza, ed in grossezza.

II. LI TERMINI di qualunque solido, sono le superficie, da' quali è compreso.

Tav. IX.  
FIG. 168.

III. Una LINEA RETTA  $AB$  dicesi PERPENDICOLARE AL PIANO  $FCE$ , quando con tutte le linee  $BF$ ,  $BD$ ,  $BC$ ,  $BE$ , tirate dal suo termine  $B$  in detto piano, faccia gli angoli retti  $ABF$ ,  $ABD$ ,  $ABC$ ,  $ABE$ .

IV. Il PIANO  $HIE$  dirassi PERPENDICOLARE AL PIANO  $FCE$ , se qualunque retta  $AB$ , condotta in uno di essi piani perpendicolare alla comune sezione  $GE$  di ambidue i piani, riesca pure all' altro piano  $FCE$  perpendicolare.

FIG. 169.

V. L' INCLINAZIONE DELLA RETTA  $AD$  AL PIANO  $FCE$ ,



$FCE$ , è l'angolo  $ADB$ , che risulta, se da un punto sublime  $A$  di essa linea, tirata la perpendicolare  $AB$  sopra esso piano, si tirerà nel medesimo piano la retta  $DB$ , che congiunge i termini d'ambidue queste linee.

VI. L'INCLINAZIONE DEL PIANO  $GFCH$  AL PIANO  $FCE$  è l'angolo acuto  $ADB$ , compreso da due rette linee  $DA$ ,  $DB$ , tirate dal medesimo punto  $D$  della comune sezione  $FC$  di ambi i piani, in ciascuno di essi, perpendicolare all'istessa sezione, di maniera che siano retti gli angoli  $ADC$ , e  $BDC$ . FIG. 17<sup>a</sup>.

VII. Due piani si diranno UGUALMENTE, o SIMILMENTE INCLINATI, come due altri piani, quando l'angolo dell'inclinazione de' due primi farà uguale all'angolo dell'inclinazione degli altri.

VIII. Piani tra di loro PARALLELI sono quelli, che in infinito continuati, mai converrebbero insieme.

IX. Le FIGURE SOLIDE SIMILI, sono quelle, che da piani simili, uguali di numero, e con uguale ordine disposti sono contenute.

X. UGUALI, e SIMILI faranno quelle figure solide, che da simili, ed uguali piani, nell'istesso numero, e col medesimo ordine faranno comprese.

XI. ANGOLO SOLIDO è l'inclinazione di più di due linee, non poste nel medesimo piano, e concorrenti in un medesimo punto: o pure è il concorso di più di due angoli piani, non posti nel piano medesimo, e terminati in un solo punto.

XII. La PIRAMIDE è una figura solida compresa da più piani convenienti in un punto, e dal piano

no opposto a tale punto, in cui convengono li detti piani.

XIII. Il PRISMA è una figura solida compresa da due piani paralleli, simili, ed uguali, e similmente posti, e da altri piani parallelogrammi, compresi e da' lati de' piani opposti, e dalle linee, che ne connettono gli angoli dell' uno, e dell' altro.

XIV. La SFERA è una figura solida, nata dalla rivoluzione d' un semicircolo intorno al suo diametro tenuto fisso, finchè ritorni al medesimo sito, d' onde cominciò a muoversi.

XV. Ezzo diametro fisso dicesi l' ASSE della sfera.

XVI. Il CENTRO della sfera è quel medesimo punto, che serviva di centro al semicircolo generatore.

XVII. Il DIAMETRO di essa sfera è qualunque linea retta, che passa pe' l centro, e termina dall' una, e dall' altra parte, alla superficie sferica.

XVIII. Il CONO si descrive dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno ad uno de' lati contenenti l' angolo retto, il quale rimanga fermo. finchè girando la figura triangolare, ritorni al medesimo sito, d' onde cominciò a muoversi. E se il lato fisso è uguale all' altro intorno all' angolo retto, dirassi il Cono ORTOGONIO, cioè RETTANGOLO: se è minore quello di questo, dirassi AMBIGONIO, cioè OTTUSIANGOLO: e se maggiore, dirassi OXIGONIO, cioè ACUZIANGOLO.

XIX. Quel lato fisso, intorno a cui gira il Triangolo, si dirà ASSE del Cono, generato da esso.

XX. Il cerchio descritto dal lato, che gira, si dice BASE di esso Cono.

• XXI.

XXI. Stando fermo un lato di qualche rettangolo, rivolto intorno ad esso, fino che ritorni al primiero sito, la figura da ciò descritta si dice **CILINDRO**.

XXII. L' **ASSE** del Cilindro è quella linea fissa, intorno a cui girando il rettangolo, la descrive.

XXIII. I cerchj descritti dagli altri due lati opposti di esso rettangolo, sono le **BASI** di esso Cilindro.

XXIV. I **Coni**, ed i **Cilindri SIMILI** sono quelli, che hanno gli assi, ed i diametri delle basi, tra di loro proporzionali, come descritti da triangoli, o rettangoli simili, e similmente mossi.

XXV. Il **CUBO** è una figura solida, contenuta da sei quadrati uguali.

XXVI. Il **TETRAEDRO**, che è una Piramide regolare, è una figura solida contenuta da quattro triangoli uguali, ed equilateri.

XXVII. L' **OTTAEDRO** è una figura solida compresa da otto triangoli uguali, ed equilateri.

XXVIII. Il **DODECAEDRO** è una figura solida contenuta da dodici Pentagoni uguali, ed equilateri, ed equiangoli.

XXIX. L' **ICOSAEDRO** è una figura solida, compresa da venti triangoli uguali, ed equilateri.

XXX. Il **PARALLELEPIPEDO** è la figura solida, contenuta da sei parallelogrammi, di cui gli opposti sono paralleli, ed uguali.

### PROPOSIZIONE I.

*Di una linea retta non può essere una parte BD FIG. 171.  
in un piano ECF, ed un'altra parte di essa DA  
sollevata dal medesimo piano.*

**A**ltrimanti, prolungata la  $BD$  in  $G$  nell' istesso piano, converrebbero due rette linee  $GB$ ,  $AB$  in una porzione comune  $DB$ ; il che è impossibile<sup>a</sup>; dunque della linea retta non è parte nel soggetto piano, e parte in un altro elevato da esso. Il che ec.

<sup>a</sup> *Affom. 10.*  
*lib. 1.*

## PROPOSIZIONE II.

FIG. 172. *Se due linee rette  $AB$ ,  $CD$  si segano in  $E$ , stanno in un medesimo piano, ancora qualunque triangolo  $DEB$ , consiste in un piano stesso.*

**I**mperocchè, se la parte  $EFG$  del triangolo fosse in un piano, ed il resto  $FDBG$  in un altro, della retta  $ED$  la parte  $EF$  farebbe in un piano, e l'altra parte  $FD$  fuori di esso farebbe sollevata, il che è impossibile<sup>b</sup>; dunque il triangolo  $DEB$  è in un istesso piano, e così ancora le rette  $ED$ ,  $EB$  sono in esso, nè le porzioni loro  $CE$ ,  $AE$  possono essere sollevate dal medesimo piano; e però le rette  $AB$ ,  $CD$ , che si segano, stanno in un medesimo piano. Il che ec.

<sup>b</sup> *1. XI.*

## PROPOSIZIONE III.

FIG. 173. *Se due piani  $ABG$ ,  $ECF$  si segano, la loro comune sezione  $HD$  è una linea retta.*

**A**ltrimanti si potrà tirare nel piano  $ABG$  la retta  $HKD$ , e nell' altro  $ECF$  la retta  $HID$ , le quali due rette linee comprenderebbero uno spazio, il che è impossibile<sup>c</sup>; dunque la comune sezione è la retta linea  $HD$ . Il che ec.

<sup>c</sup> *Aff. 9. 1.*

PRO-



## PROPOSIZIONE IV.

*Se la retta AB è perpendicolare a due linee rette CD, EF, che si segano in B, sarà ancora perpendicolare al piano, che passa per dette linee.* FIG. 174.

SI tiri per l'istesso punto  $B$  un'altra linea  $GBH$ , e poste  $BC = BD$ , e  $BF = BE$ , si congiungano le rette  $CE$ ,  $FD$ , seganti la retta  $GH$  in  $G$ , ed  $H$ ; indi da un punto sublime  $A$  della retta  $AB$ , si tirino le rette  $AC$ ,  $AE$ ,  $AF$ ,  $AD$ ,  $AG$ ,  $AH$ . Ne' triangoli  $CBE$ ,  $DBF$ , essendo intorno l'angolo uguale alla cima  $B$ , ancora i lati  $CB$ ,  $BE$  uguali a' lati  $DB$ ,  $BF$ , farà la base  $CE =$  alla base  $DF$ , e gli altri angoli uguali; e però ne' triangoli  $CBG$ ,  $DBH$ , essendo l'angolo  $BCG = BDH$ , e l'angolo  $CBG = DBH$ , ed il lato  $CB = BD$ , farà ancora il lato  $CG = DH$ , e l'altro  $BG = BH$ <sup>a</sup>. Similmente ne' triangoli  $CAB$ ,  $DAB$ , essendo  $CB = BD$ , ed il lato  $AB$  comune, e gli angoli retti in  $B$  uguali, farà la base  $AC = AD$ ; e con simil ragione si proverà ne' triangoli  $ABE$ ,  $ABF$ , essere  $AE = AF$ . Dunque ne' triangoli  $ACE$ ,  $ADF$ , essendo ciascun lato dell'uno, uguale a ciascun lato dell'altro, faranno ancora gli angoli corrispondenti  $ACE$ ,  $ADF$  uguali<sup>b</sup>, onde ne' triangoli  $ACG$ ,  $ADH$  vi sono i lati  $AC$ ,  $AD$ , ed i lati  $CG$ ,  $DH$  uguali, intorno a detti angoli uguali  $ACG$ ,  $ADH$ , e però la base  $AG = AH$ ; e finalmente ne' triangoli  $AGB$ ,  $AHB$  essendo tutti i lati dell'uno, uguali a tutti i lati dell'altro, cioè  $BG = BH$ , ed  $AB$  comune, ed  $AG = AH$ , dunque l'angolo  $ABG = ABH$ <sup>b</sup>, i quali però sono retti; onde la

linea  $AB$  con tutte le linee condotte per lo punto  $B$  nel piano, che passa per le rette  $CD, EF$ , facendo angoli retti, è perpendicolare a detto piano <sup>a Def. 3. xi. no 2.</sup> Il che era da dimostrarfi.

## PROPOSIZIONE V.

*Se la retta  $AB$  è perpendicolare a tre linee rette  $BC, BD, BE$ , queste tre linee saranno in un medesimo piano.*

**A**ltrimanti il piano, che passa per le due  $BC, BD$  segherebbe il piano condotto per le due  $AB, BE$ , in un'altra retta linea  $BF$ , comune sezione di entrambi; onde la retta  $AB$ , che è perpendicolare alle due  $BC, BD$ , farebbe angolo retto ancora colla  $BF$  esistente nell'istesso piano  $CBD$  <sup>b 4. xi.</sup>; dunque nel piano  $ABF$  farebbe l'angolo retto  $EBA$  uguale al retto  $FBA$ , la parte al tutto; il che è impossibile; dunque la  $BE$  era nell'istesso piano dell'altre due  $BC, BD$ , e non sollevata da esso. Il che ec.

## PROPOSIZIONE VI.

*Se le due rette linee  $AB, CD$  sono perpendicolari al piano  $BED$ , saranno fra di loro parallele.*

**C**ongiungasi la  $BD$ , e ad angolo retto  $BDE$  si tiri nell'istesso piano la  $DE = AB$ , e si congiungano le rette  $BE, EA, AD$ . Essendo intorno agli angoli retti  $ABD, BDE$  il lato  $AB = ED$ , ed il lato  $BD$  comune, farà la base  $AD = BE$ ; dunque ne' triangoli  $ADE, ABE$  essendo  $AD = EB, DE = BA$ , e la base  $AE$  comune, l'angolo  $ADE = ABE$ , cioè retto; onde la  $ED$  facendo

cendo angolo retto colle tre linee  $BD, AD, CD$ ; però queste sono in un medesimo piano, <sup>a</sup>; ma <sup>a</sup> 5. XI. nel piano delle due  $BD, AD$  è ancora la  $AB$ , che fa con esse un triangolo <sup>b</sup>; dunque le due <sup>b</sup> 2. XI. rette  $AB, CD$  sono in un medesimo piano, ed essendo li due angoli interni  $ABD, CDB$  retti, esse linee sono parallele. Il che ec.

## PROPOSIZIONE VII.

*La retta  $AC$ , che congiunge due punti  $A, C$  di due linee parallele  $AB, CD$ , è nel medesimo piano di esse.* FIG. 177.

**P**Erchè se si sollevasse in un altro piano, come  $AEC$ , questo continuato segherebbe il piano delle parallele nella retta  $AC$  <sup>c</sup>, dunque due <sup>c</sup> 3. XI. rette linee  $AEC$ , ed  $AC$  comprenderebbero spazio, il che è impossibile <sup>d</sup>. <sup>d</sup> Aff. 9. 1.

## PROPOSIZIONE VIII.

*Essendo le due rette  $AB, CD$  parallele, se una di esse  $AB$  è perpendicolare al piano  $BED$ , ancora l'altra  $CD$  gli sarà perpendicolare.* FIG. 176.

**S**I faccia la costruzione, come nella proposizione 6. e con l'istessa dimostrazione si proverà essere angoli retti  $EDA, EDB$ , onde la  $ED$  è perpendicolare al piano di esse parallele, onde ancora è retto l'angolo  $CDE$ ; ma ancora l'angolo  $CDB$  è retto, essendo l'angolo  $ABD$ , dell'altra parallela, pur retto; dunque ancora la  $CD$  è perpendicolare allo stesso piano. Il che ec.

PRO-

## PROPOSIZIONE IX.

FIG. 178.

*Se le linee rette  $AB$ ,  $CD$  sono parallele ad una terza  $EF$  posta fuori del loro piano, saranno pur esse tra di loro parallele.*

**P**igliasi nella retta  $EF$  un punto  $G$ , da cui nel piano delle due parallele  $AB$ ,  $EF$  si tiri la perpendicolare  $GH$ , e nel piano delle parallele  $EF$ ,  $CD$  la perpendicolare  $GI$ ; dunque essendo gli angoli  $EGH$ ,  $EGI$  retti, è la  $EG$  perpendicolare al piano  $HGI$ ; dunque ancora le  $AB$ , e  $CD$  parallele alla  $EG$ , sono all'istesso piano perpendicolari <sup>a</sup>, e però sono tra di loro parallele <sup>b</sup>. Il che era da dimostrarsi.

a 8. XI.

b 6. XI.

## PROPOSIZIONE X.

FIG. 179.

*Se due rette  $AB$ ,  $CB$  concorrenti in  $B$  sono parallele a due altre  $DE$ ,  $FE$  convenienti in  $E$  fuori del medesimo piano  $ABC$ , saranno gli angoli  $ABC$ ,  $DEF$  tra loro uguali.*

**P**ongasi  $ED = BA$ , ed  $EF = BC$ ; congiunte le rette  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  saranno uguali, e parallele <sup>c</sup>; dunque ancora congiunte le due  $AC$ ,  $DF$  riescono uguali; onde tutti i lati del triangolo  $ABC$  uguagliando i lati dell'altro  $DEF$ , farà l'angolo  $ABC = DEF$ . Il che ec.

c 33. I.

## PROPOSIZIONE XI. PROBL.

FIG. 180.

*Da un punto sublime  $A$  tirare la retta  $AB$  perpendicolare al soggetto piano.*

Si



**S**I tiri in esso piano qualunque retta  $GD$ , a cui dal punto  $A$  si mandi la perpendicolare  $AC$ , ed all' istessa  $GD$  si alzi dal punto  $C$  la perpendicolare  $CB$  nel medesimo piano; indi sopra la  $CB$  dal punto  $A$  tirando la perpendicolare  $AB$ , farà questa perpendicolare al soggetto piano; imperocchè tirata per  $B$  la  $FBE$  parallela a  $GD$ , siccome  $GC$ , facendo l'angolo retto colla  $CA$ , e colla  $CB$ , è perpendicolare al piano  $ACB$ , così ancora la  $FB$  farà perpendicolare al medesimo piano <sup>a</sup>, dunque l'angolo  $ABF$ , e l'angolo  $ABC$  <sup>a 8. xi.</sup> sono retti, e però la  $AB$  è perpendicolare al soggetto piano. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XII. PROBL.

*Dal punto  $C$  posto nel piano  $EFG$  alzare la  $CD$  FIG. 181. perpendicolare a detto piano.*

**D**A qualunque sublime punto  $A$  si tiri al piano la perpendicolare  $AB$  <sup>b</sup>, e congiunta la  $BC$ , si tiri nel piano  $ABC$  la  $CD$  parallela ad  $AB$ ; questa farà pure perpendicolare al piano <sup>c</sup>. Il <sup>c 8. xi.</sup> che ec.

## PROPOSIZIONE XIII.

*Dal medesimo punto  $B$  non possono essere alzate FIG. 182. al piano  $EFG$  due perpendicolari  $BA$ ,  $BC$  verso la medesima parte.*

**P**Erchè il piano, che passa per le due  $AB$ ,  $CB$  segando il piano soggetto  $EFG$  nella retta  $BD$ , farebbero uguali gli angoli retti  $ABD$ ,  $CBD$ , cioè la parte al tutto; il che è impossibile; dunque ec.

PRO-

## PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 183. *Se la retta  $AB$  è perpendicolare a due piani  $CD$ ,  $EF$ , questi saranno paralleli.*

**I**mperocchè se prolungati convenissero in una retta linea  $HG$ , preso in essa un punto  $I$ , e condotte in ambi i piani le rette  $IA$ ,  $IB$ , si farebbe un triangolo, in cui due angoli  $BAI$ ,  $ABI$  farebbero due retti; il che è impossibile <sup>a</sup>; dunque essi piani sono paralleli.

## PROPOSIZIONE XV.

FIG. 184. *Se due rette linee  $AG$ ,  $AD$  congiunte in  $A$  sono parallele a due linee  $EF$ ,  $EC$  poste in un altro piano, li due piani  $DAG$ ,  $CEF$  saranno paralleli.*

**C**onducasi dal punto  $A$  sopra al piano  $CEF$  la perpendicolare  $AB$ , e si tirino in esso piano le  $BI$ ,  $BH$  rette linee parallele alle  $EF$ ,  $EC$ , e conseguentemente saranno parallele alle  $AG$ ,  $AD$  <sup>b</sup>, dunque essendo retti gli angoli  $ABI$ ,  $ABH$ , saranno pure gli angoli  $BAG$ ,  $BAD$  retti, e però la  $AB$  farà perpendicolare ancora al piano  $DAG$ ; dunque sono questi due piani paralleli <sup>c</sup>. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 185. *Se due piani paralleli  $AB$ ,  $CD$  sono segati da un altro piano  $HEGF$ , i loro comuni segmenti  $EH$ ,  $GF$  sono due rette parallele.*

**I**mperocchè se prolungate convenissero in  $I$ , farebbero parte ne' piani paralleli, e parte fuori

ri di essi ( perchè ivi non convengono i piani equidistanti ) il che è impossibile <sup>a</sup> ; Dunque tali comuni sezioni sono parallele. <sup>a</sup> I. XI.

## PROPOSIZIONE XVII.

*Se due rette AEB, CFD sono segate da piani FIG. 186. paralleli HI, KL, MN, saranno da essi tagliate proporzionalmente.*

**S**I tiri nel piano *HI* la retta *AC*, nel piano *MN* la *BD*, e congiunta la *CB* seghi il piano *KL* in *G*, indi si tirino in esso le rette *GE*, *GF*. Il piano del triangolo *ACB* ha li comuni legamenti de' piani paralleli *AC*, *EG* tra loro paralleli <sup>b</sup>, e <sup>b</sup> 16. XI. similmente il triangolo *CBD* fa le sezioni *GF*, *BD* parallele; dunque  $AE \cdot EB :: CG \cdot GB$  <sup>c</sup> ::  $CF \cdot$  <sup>c</sup> 2. VI. *FD*, onde sono proporzionalmente segate le rette *AB*, *CD* da essi piani paralleli. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XVIII.

*Se la retta AB è perpendicolare al piano CD, FIG. 187. qualunque piano EF, che passi per essa linea, sarà perpendicolare al piano soggetto.*

**S**ia la *EG* la comune sezione di detti piani, e da qualunque punto *H* di essa si tiri nel piano *EF* la *HI* parallela ad *AB*. Sarà questa pure al piano *CD* perpendicolare <sup>d</sup>, dunque esso piano <sup>d</sup> 8. XI. *EF* sarà perpendicolare al piano *CD* <sup>e</sup>. Il che ec. <sup>e</sup> Def. 4. XI.

## PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 188.

*Se due piani CGD, FHF perpendicolari al soggetto piano GKH si seghino nella retta AB, sarà questa perpendicolare al soggetto piano.*

Im-

**I**mperochè essa  $AB$  farà perpendicolare alle due comuni sezioni  $EH$ ,  $GD$  di essi piani  $EF$ ,  $CD$ , col piano soggetto  $EK$ ; altrimenti, se nel piano  $EF$  fosse  $BL$  perpendicolare ad  $EH$ , e nell'altro  $CD$  fosse  $BI$  perpendicolare a  $GD$ , farebbero esse  $BL$ ,  $BI$  perpendicolari al piano  $EK$ <sup>a</sup>, il che si è dimostrato impossibile<sup>b</sup>, dunque la comune sezione  $AB$  è perpendicolare al soggetto piano  $EK$ .

<sup>a</sup> Def. 4. XI.<sup>b</sup> 13. XI.

## PROPOSIZIONE XX.

FIG. 189. *Se l'angolo solido  $ABDC$  è contenuto da tre angoli piani  $BAD$ ,  $BAC$ ,  $DAC$ , due di essi saranno maggiori del rimanente.*

**Q**Uando fossero tutti e' tre uguali, è manifesto, essere due maggiori del terzo; ma se sono disuguali, sia  $BAC$  il massimo, da cui si levi l'angolo  $BAE = BAD$  e tirata la retta  $BE$ , posta  $AD = AE$ , si congiungano  $BD$ ,  $CD$ : essendo ne' triangoli  $BAE$ ,  $BAD$ , intorno agli angoli uguali in  $A$ , il lato  $AB$  comune, ed  $AE = AD$ , farà ancora la base  $BE = BD$ ; ma  $BD + DC$  è maggiore di  $BC$ , dunque  $DC$  è maggiore di  $EC$ ; onde ne' triangoli  $EAC$ ,  $DAC$ , essendo il lato  $AC$  comune, ed  $AE = AD$ , ma la base  $EC$  minore della  $DC$ , farà l'angolo  $EAC$  minore dell'altro  $DAC$ <sup>c</sup>, e però essendo  $BAE = BAD$ , sono li due  $BAD$ ,  $DAC$  maggiori del massimo  $BAC$ . Il che cc.

<sup>c</sup> 25. I.

## PROPOSIZIONE XXI.

Tav. X.  
FIG. 190. *Qualunque angolo solido  $A$ , composto di quanti si voglia angoli piani  $BAC$ ,  $CAD$ ,  $DAE$ ,  $EAF$ ,  $FAG$ ,*



*FAG, GAB, averà sempre la somma di detti angoli minore di quattoro retti.*

**S**I tagli con un piano  $BCDEFG$ , che farà la base della piramide, opposta alla cima dell'angolo  $A$ , e preso in essa base qualunque punto  $I$ , si congiungano le rette  $IB, IC, ID, IE, IF, IG$ . Essendo tanti i triangoli, che da' lati della base si alzano alla cima  $A$  della piramide, che i triangoli da' medesimi lati convergenti al punto  $I$  preso dentro la base, dunque tutti gli angoli, che sono in quelli, uguagliano tutti gli angoli di questi, i quali comprendono tutti gli angoli del poligono di essa base, insieme con i quattro retti, che sono intorno al punto  $I$ ; ma essendo gli angoli  $BCA$ , ed  $ACD$  maggiori di  $BCD$ <sup>a</sup>, e così li due  $CDA$ , <sup>a 20. XI.</sup>  $ADE$  maggiori di  $CDE$  ec. sono tutti gli angoli adiacenti a' lati del poligono ne' triangoli esterni diretti ad  $A$ , maggiori degli angoli adiacenti ad essi lati ne' triangoli interni della base, convergenti in  $I$ ; dunque gli angoli rimanenti de' triangoli esterni, che compongono l'angolo solido  $A$ , sono minori degli angoli, che hanno intorno al punto  $I$  i triangoli interni della base, e però essendo questi uguali a quattro retti, quelli ne sono minori. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXII.

*Se siano di tre angoli piani  $BAC, CAD, DAE$ , FIG. 191. due qualsivoglia maggiori del terzo, e contenuti da rette tutte uguali, delle basi  $BC, CD, DE$ , che ne congiungono i termini, si potrà costituire un triangolo.*

Li

**I** Terminì  $B, C, D, E$  di quelle rette uguali, sono in un arco circolare, il cui centro  $A$ , e delle basi suddette faranno sempre due maggiori della rimanente; perchè se si dubitasse, essere le due  $BC + CD$  maggiori dell'altra  $DE$ , congiunta la  $BD$ , per essere li due angoli  $BAC, CAD$ , cioè l'angolo  $BAD$ , maggiore dell'altro  $DAE$ , ed i lati uguali, la base  $BD$  è della base  $DE$  maggiore; ma le due  $BC, CD$  sono maggiori della  $BD$ , dunque sono ancora esse maggiori della  $DE$ ; però delle tre linee  $BC, CD, DE$  riuscendo sempre due maggiori della terza, se ne può fare un triangolo<sup>a</sup>. Il che ec.

2. 22. 1.

## PROPOSIZIONE XXIII. PROBL.

FIG. 192. *Dati i tre angoli, come nella precedente, li quali però siano minori di quattro retti, farne un angolo solido.*

**D**Elle loro basi  $BC, CD, DE$ , congiunte a' termini de' lati uguali di detti angoli, se ne faccia un triangolo  $FGH$ <sup>b</sup>, e gli si circoscriva un cerchio, il cui raggio  $FI$  farà minore del lato  $AB$ , perchè, se gli fosse uguale, essendo nel cerchio  $BDE$  inscritte le due basi  $BC, CD$ , farebbe all'altra  $DE$  uguale la  $BD$ , essendo il cerchio del raggio  $= AB$  circoscritto al triangolo delle tre linee  $AC, CD, DE$ ; ma si è provata la  $BD$  maggiore della  $DE$ <sup>a</sup>, dunque non gli può essere uguale. Ne meno può essere  $FI$  maggiore di  $BA$ , o di  $CA$ , perchè prolungata  $CA$  in  $L$ , e fatta  $CL$  uguale ad  $FI$ , se col raggio  $CL$  si descrive l'arco circolare  $MCN$ , ed in esso si adattasse  $CM = CD$ , e  $CN = CB$ ,

con-

congiunta  $MN$  dovrebbe essere uguale alla  $DE$ ; ma per essere l'angolo  $NCM$  maggiore di  $BCD$ , ed i lati  $CN = CB$ , e  $CM = CD$ , la base  $MN$  farà maggiore di  $BD$ , dunque farebbe ancora maggiore della  $DE$ ; pertanto  $FI$  deve essere minore di  $AB$ , e degli altri lati  $AC, AD, AE$ , uguali; onde il quadrato di  $AB$  farà maggiore del quadrato  $FI$ ; si ponga dunque nel centro  $I$  del circolo  $FGH$  perpendicolare al piano di esso circolo la retta  $IK$ , il di cui quadrato uguagli l'eccesso del quadrato  $AB$  sopra il quadrato  $FI$ ; dunque congiunte le rette  $FK, GK, HK$ , farà ciascuna uguale a' lati  $AB, AC, AD$ , essendo il quadrato  $FK =$  a quadrati  $FI$ , ed  $IK$ , il quale è l'eccesso del quadrato  $AB$ , ovvero  $AC$  sopra il quadrato  $FI$ , onde  $FK = AB$ , e così  $KH = AC$ , e  $KG = AD$ , ed essendo le basi  $HF, FG, GH$  uguali alla base  $BC, CD, DE$ , farà l'angolo  $FKH = BAC$ , e l'angolo  $FKG = CAD$ , e l'altro  $GKH = DAE$ ; dunque l'angolo solido  $FKHG$  è composto de' tre angoli piani dati  $BAC, CAD, DAE$ . Il che dovea farsi.

## PROPOSIZIONE XXIV.

*Il solido  $AB$  composto di piani paralleli, averà FIG. 195  
i piani opposti  $AG$  e  $DB$ ,  $AC$  ed  $FB$  ec. parallelogrammi simili, ed uguali.*

**I**L piano  $AC$  essendo segato da' piani paralleli  $AE, BH$ , le loro comuni sezioni  $AD, HC$  sono parallele; e l'istesso piano  $AC$  essendo ancora segato da' piani  $HF, CE$  paralleli, faranno ancora le rette  $AH, DC$  parallele <sup>a</sup>, dunque  $ADCH$  <sub>2 16. XI.</sub>  
K è un

a 10. XI. e un parallelogrammo, in cui faranno uguali i lati opposti, cioè  $AD = CH$ , ed  $AH = DC$ . Similmente si proverà essere  $EDCB$  un parallelogrammo, e la  $EB$  uguale, e parallela a  $DC$ , e la  $DE$  uguale, e parallela a  $BC$ ; ed  $ADEF$  un parallelogrammo, in cui  $EF$  è uguale, e parallela a  $DA$ , ed  $ED$  uguale, e parallela ad  $FA$ ; onde essendo  $AH$ , ed  $EB$  uguali, e parallele all'istessa  $DC$ , sono uguali, e parallele tra loro, ed altresì  $EF$ , ed  $AD$ , e  $CH$  sono uguali, e parallele; dunque l'angolo  $ADC$  farà uguale all'angolo  $FEB$ <sup>a</sup>, e similmente gli altri angoli  $DCH$ ,  $EBG$  si proveranno uguali; ed è  $AD \cdot DC :: FE \cdot EB$  per l'uguaglianza de' lati omologhi, dunque sono simili, ed uguali i parallelogrammi opposti  $AC$ ,  $FB$ , e l'istesso proverassi degli altri  $FD$ ,  $GC$ , e delli  $FH$ ,  $EC$ . Il che era da dimostrarsi.

### PROPOSIZIONE XXV.

FIG. 124. *Il solido parallelepipedo  $ABCD R$ , segandosi col piano  $EGFH$  parallelo agli opposti  $BTCO$ ,  $ASDR$ , faranno le di lui porzioni  $A EFD$ ,  $B EFC$  proporzionali alle loro basi  $A EHR$ ,  $B EHO$ .*

SI concepisca prolungato dall'una, e dall'altra parte esso parallelepipedo, e presa  $AI = AE$ , e  $BK = EB$ , si concepiscano eretti i piani  $ILQM$ ,  $KOPN$  paralleli a' piani  $ASDR$ ,  $BTCO$ ; faranno li parallelogrammi  $AIMR$ ,  $A EHR$  uguali, e così ancora  $B EHO = BKNO$ , e tutti gli altri corrispondenti si uguaglieranno; perciò il solido  $A EFD = IASQ$ , ed il solido  $B EGC = KBTP$ ; onde quanto si moltiplicasse la base  $A EHR$  nella  
base



base  $EIM$ , tanto riuscirebbe moltiplicato il solido  $A E F D$  nel solido  $I E G Q$ ; e quanto fosse moltiplicata la base  $B E H O$  nella base,  $E K N$  tanto farebbe il solido  $B E G C$  moltiplicato nel solido,  $G E K P$ ; e secondo che fosse la base  $EIM$  uguale, maggiore, o minore della base  $E K N$ , tanto farebbe il solido  $I E G Q$ , uguale, maggiore, o minore del solido  $G E K P$ ; dunque come la base  $A E H R$  alla base  $B E H O$ ; così deve essere il solido  $A E F D$  al solido  $B E G C$ , come dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I. È manifesto, essere dette porzioni parallelepipedo proporzionali alle loro lunghezze, o altezze  $A E$ ,  $E B$ , le quali sono, come  $A E H R$  a  $B E H O$ .

COROLLARIO II. Nell' istessa maniera si proverebbe ancora ne' prismi da qualunque sorta di base poligona equabilmente promossi, che segati da un piano parallelo alle basi, ne riuscirebbero le porzioni proporzionali alle lunghezze, o altezze loro.

### PROPOSIZIONE XXVI. PROBL.

*Alla data retta linea  $A B$  applicare sul punto  $A$  un angolo solido  $B A L I$ , uguale al dato  $D C F E$ .* FIG. 195.

**D**A qualunque punto  $F$  del lato  $C F$ , si tiri sopra il piano  $D C E$  la perpendicolare  $F G$ , e congiunta  $C G$ , e per lo punto  $G$  tirata in esso piano la retta  $D G E$ , si congiungano le rette  $D F$ ,  $F E$ ; indi posta la  $A H = C D$ , e fatto l' angolo  $H A K = D C G$ , e presa la  $A K = C G$ , e l' angolo  $H A I = D C E$ , congiunta la  $H K$  farà  $= D G$ , per essere i lati  $H A$ , ed  $A K$  uguali a' lati  $D C$ , e  $C G$ ,

$CG$ , e l'angolo compreso da essi lati uguale; ed ancora l'angolo  $AHK$  farà  $= CDG$ , e prolungata la  $HK$  in  $I$  alla retta  $AI$ , farà la  $HI = DG$ , e la  $AI = CE$ , perchè ne' triangoli  $HAI$ ,  $DCE$ , gli angoli  $AHI$ , ed  $HAI$  sono uguali agli angoli  $CDE$ ,  $DCE$  ed il lato  $AH = CD$ ; onde ancora la  $KI$ , farà  $= GE$ , ed eretta la  $KL$  perpendicolare al piano  $HAI$ , e fatta  $= GF$ , congiunta la retta  $AL$ , farà fatto l'angolo solido  $BALI = DCFE$ ; imperocchè congiunte le rette  $HL$ ,  $LI$ , essendo  $HK = DG$ , e  $KL = GF$ , e gli angoli retti  $HKL$ ,  $DGF$  uguali, ancora la base  $HL$  farà uguale a  $DF$ ; e similmente essendo  $KI = GE$ , e  $KL = GF$ , e gli angoli in  $K$ , ed in  $G$  retti, la base  $LI = FE$ ; dunque i triangoli  $HAL$ ,  $DCF$  hanno tutti i lati corrispondenti uguali, e però l'angolo  $HAL = DCF$ ; similmente ciascun lato di  $LAI$  uguaglia ciaschedun lato di  $FCE$ , dunque ancora l'angolo  $LAI = FCE$ , e l'angolo  $HAI = DCE$ , dunque tutti gli angoli essendo uguali, l'angolo  $HALI$  uguaglia il dato angolo solido  $DCFE$ . Il che ec.

FIG. 196. *NOTA.* Se l'angolo solido dato, fosse contenuto da più di tre angoli piani, si potrebbe ad ogni modo applicare ad una data retta, in un dato punto l'angolo solido uguale ad esso. Per esempio sia l'angolo dato  $DCFEM$ , contenuto da quattro angoli piani; si seghi con un piano quadrilineo  $DEFM$ , opposto al dato angolo  $C$ , indi condotta una diagonale  $DF$ , col piano  $CDF$  si dividerebbe esso angolo solido in due angoli contenuti da tre angoli piani; onde dopo aver fatto alla data retta linea, nel dato punto, un angolo uguale ad uno de' contenuti da tre angoli-

angoli piani  $DCFE$ , si potrà aggiungere l'altro angolo da tre piani contenuto  $DCMF$ , onde riuscirà descritto al punto della data linea l'angolo quadrilineo uguale al dato  $DCEFM$ , e se fosse il dato angolo compreso da più di quattro angoli piani, la base di tale angolo sarebbe un poligono divisibile in più di due triangoli, onde esso angolo potrebbe dividersi in tanti angoli trilineari, quanti sono i triangoli, in cui si spartirebbe il piano della sua base; e però aggiungendo al medesimo punto dato della data retta linea, concorrente con altre, che formano i triangoli dell'angolo solido già descritto, altri angoli solidi trilineari, che sono nel dato angolo solido, riuscirà di costituire adiacente alla data linea dal punto dato, un angolo solido contenuto da più angoli piani, benchè fossero più di tre, e più di quattro gli angoli componenti il dato angolo solido.

## PROPOSIZIONE XXVII. PROBL.

Sopra una data retta linea  $AB$  descrivere un solido parallelepipedo simile, e similmente posto ad un altro dato  $DCEM$ . FIG. 197.

Costituisca si al punto dato  $A$  sopra la data linea  $AB$  un angolo solido  $BALI =$  al dato  $DCFE^a$ , a 26. xi. e taglisi  $AL$  in proporzione a  $CF$ , come la data  $AB$  al lato  $CD$ ; e si faccia ancora l' $AI$  alla  $CE$  nella medesima proporzione delle date  $AB$ ,  $CD$ ; indi compiuti i parallelogrammi  $BALN$ ,  $IALG$ ,  $NLGO$ , si compisca il parallelepipedo co' piani paralleli a questi, che farà fatto sulla data linea  $AB$  il solido  $BALIO$  simile, e similmen-

te posto al dato  $DCEFM$ , avendo gli angoli uguali ad esso, ed i lati proporzionali a' lati del medesimo. Il che era da farsi.

## PROPOSIZIONE XXVIII.

FIG. 198.

*Segandosi un parallelepipedo AB col piano CFED, che passa per i diametri de' piani opposti, sarà segato pel mezzo.*

**I**Mperocchè essendo i piani opposti uguali, e simili parallelogrammi  $GFEA$ ,  $CDHB$ ; ed ancora  $GADC$ , ed  $FEHB$ ; ed il piano  $CFED$  comune a' due prismi  $CGFEAD$ , e  $CBFEHD$ , eretti sopra i triangoli simili, ed uguali  $DAE$ , ed  $EHD$ , a' quali pure corrispondono altri due  $CGF$ ,  $FBC$  simili, ed uguali tra di loro, e con gli opposti; per tanto essi prismi sono uguali; onde il parallelepipedo dal piano  $CFED$  resta diviso pel mezzo.

## PROPOSIZIONE XXIX.

FIG. 199.

*I solidi parallelepipedi AGHCDEFB, AGHEMLKI, sopra l' istessa base AGHE, tra gli stessi piani paralleli AH, FK, con i lati AM, GL, ed EI, HK prodotti all' istesse linee de' lati FB, DC prolungate nell' istesso piano, sono sempre parallelepipedi tra di loro uguali.*

**I**Mperocchè essendo  $DC = EH = IK$ , aggiunta  $CI$ , è  $DI = CK$ , ma ancora  $DE = CH$ , ed  $EI = HK$ , dunque il triangolo  $DEI$  è uguale, e simile al triangolo  $CHK$ , e così ancora i triangoli  $FAM$ ,  $BGL$  sono simili, ed uguali; ed ancora il parallelogrammo  $DIMF$  è uguale, e simile



le a  $CKLB$ , e così  $DEAF$  a  $CHGB$ , ed  $EIMA$  ad  $HKLG$ , e perciò il prisma triangolare  $DIEMFA$  uguaglia il prisma  $CKHLBG$ , e tolto di comune  $CPIMNB$ , ed aggiunto a' rimanenti pezzi il prisma  $EPHGNA$ , riesce il parallelepipedo  $AGHCDEFB$  uguale all' altro  $AGHEMLKI$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXX.

*Quando ancora il parallelogrammo  $IMLK$  oppo-* FIG. 200.  
*sto alla base comune  $EAGH$  di due parallelepiped*  
*tra i medesimi piani paralleli, non s' incontrasse*  
*colla direzione delle rette parallele  $DC$ ,  $FB$ , ad*  
*ogni modo essi parallelepiped* *faranno uguali.*

**E** Sfe rette prolungate  $DC$ ,  $FB$  parallele ad  $AG$ , e ad  $IK$ , seghino le altre rette tra di loro parallele  $IM$ ,  $KL$  ne' punti  $N$ ,  $O$ ,  $Q$ ,  $P$ , farà il parallelogrammo  $NO PQ = DCFB = AEHG$ ; onde condotte le rette  $EN$ ,  $HO$ ,  $AQ$ ,  $GP$  farà il parallelepipedo  $AEHG PQ NO = AEHGBCDF$ , a 29. XI. e similmente  $AGHEMLKI = AEHG PQ NO$ , terminando all' istesse linee prodotte  $IM$ ,  $KL$ ; dunque sono ancora uguali  $AEHGBCDF$ , ed  $AGHEMLKI$ , posti sull' istessa base, e tra gli stessi piani paralleli, benchè non s' incontrino colla direzione delle rette  $DC$ ,  $FB$ . Il che ec.

**COROLLARIO.** E' manifesto, che se ancora sopra l' istessa base  $IMLK$  fosse tra gli stessi piani paralleli descritto un altro parallelepipedo, farebbe uguale ad esso  $AGHEMLKI$ , e conseguentemente ancora uguale a ciascuno degli altri due  $AEHGBCDF$ , ed  $AEHG PQ NO$ ; onde ancora li parallelepiped, che hanno basi uguali, e so-

no tra i medesimi piani paralleli, sono tra di loro uguali.

### PROPOSIZIONE XXXI.

*I solidi parallelepipedì, che hanno uguali basi, e la medesima altezza, fra loro sono uguali.*

**E**ssendo che gli stessi piani paralleli hanno la medesima altezza in qualunque sito, ed un piano parallelo all' istessa base, se fosse sopra, o sotto il parallelogrammo del parallelepipedo, opposto alla base, averebbe maggiore, o minore altezza; dunque i solidi parallelepipedì, che hanno la medesima altezza, possono disporsi tra gli stessi due piani paralleli, e però avendo le basi uguali, dovranno essere uguali tra loro <sup>a</sup>.

<sup>a</sup> Coroll.  
30. XI.

### PROPOSIZIONE XXXII.

**FIG. 201.** *I solidi parallelepipedì AE, GO, che hanno la medesima altezza, sono tra di loro, come le basi AC, GM.*

**P**rolungata  $LG$  in  $F$ , si faccia il parallelogrammo  $HGFI = ABCD$ , e si compisca il parallelepipedo  $FGNQRH$ , tra gli stessi piani paralleli dell' altro: farà questo parallelepipedo  $= ABCDTEVS$ , avendo uguali basi, e la medesima altezza<sup>b</sup>; ma  $FGNQRH$  all' altro  $GNPLOQH$ , è come la base alla base<sup>c</sup>, cioè come  $IFGH$  (che  $= ABCD$ ) a  $GLMH$ ; dunque ancora il parallelepipedo  $AE$  all' altro  $GO$ , è come la base  $AC$  alla base  $GM$ . Il che ec.

<sup>b</sup> 31. XI.

<sup>c</sup> 25. XI.

Ancora i prismi ugualmente alti sono come le loro basi, perchè se sono basi triangolari, sono la metà

metà de' parallelepipedi eretti sopra i parallelogrammi doppj di tali triangoli: se sono basi poligone, possono dividersi in triangoli, ed essi prismi interi in altrettanti prismi triangolari proporzionali alle loro basi.

## PROPOSIZIONE XXXIII.

*I solidi parallelepipedi simili  $HIMKZ$ ,  $ABDGF$  FIG. 202. sono in proporzione tripla de lati omologhi  $IM$ ,  $EG$ .*

**S**I prolunghino la retta  $LM$  in  $MO = EF$ , la retta  $IM$  in  $MN = EG$ , e la retta  $RM$  in  $MP = EA$ , e compiuti i parallelogrammi  $OMN$ ,  $OMP$ ,  $NMP$ , si tirino gli opposti piani paralleli, da cui si formerà il parallelepipedo  $OPQNM$  uguale, e simile al dato  $ABDGF$ , avendo gli stessi angoli solidi, e i medesimi parallelogrammi uguali, e simili. Prolungati ancora i parallelogrammi, si compiscano i solidi parallelepipedi  $KLSYM$ ,  $LTVSQM$ ; farà il parallelepipedo  $HIMKZ$  al conseguente  $KLSYM$ , come la base  $IR$  alla base  $RN$ , cioè come il lato  $IM$  ad  $MN$ ; ed è  $KLSYM$  ad  $LTVSQM$ , come le basi  $RN$ ,  $NP'$ , cioè come  $RM$  ad  $MP$ ; e finalmente  $LTVSQM$  ad  $OPQNM$ , come le basi  $LN$ ,  $NO$ , cioè come  $LM$  ad  $MO$ ; dunque la proporzione di  $HIMKZ$  ad  $OPQNM$ , ovvero all' uguale solido  $ABDGF$ , è composta delle tre ragioni uguali, cioè di  $IM$  ad  $MN$ , di  $RM$  ad  $MP$ , e di  $LM$  ad  $MO$  (perchè essendo simili i parallelepipedi, i loro lati omologhi devono avere l' istessa proporzione ) dunque la ragione di essi parallelepipedi simili è tripla di quella di un lato  $IM$  al lato omologo  $EG = MN$ . Il che doveasi dimostrare. Co-

**COROLLARIO.** Se quattro linee sono proporzionali, un solido fatto sopra alla prima, al solido simile fatto sopra alla seconda, sta come la prima alla quarta, che ha ragione tripla della prima alla seconda.

### PROPOSIZIONE XXXIV.

FIG. 203.

*I parallelepipedi uguali  $ACD$ ,  $NPI$  hanno le basi reciproche dell' altezze; e quei parallelepipedi, in cui le basi sono in ragione reciproca dell' altezze, sono tra di loro uguali.*

**S**E avessero uguale altezza i solidi, dovrebbero ancora avere le basi uguali, per essere tra di loro uguali; onde la base del primo alla base del secondo farebbe come l' altezza di questo all' altezza di quello. Se poi le altezze sono disuguali, essendo quella di  $NPI$  maggiore di quella di  $ACD$ , si tagli  $NPI$  col piano  $OLKM$  parallelo alla base  $HGIQ$ , in altezza uguale a quella del solido  $ACD$  (tirata  $NX$  perpendicolare al piano della base  $HGIQ$ , e segante il piano  $OLKM$  in  $V$ , in maniera, che  $VX$  sia uguale all' altezza del solido  $ACD$ ) farà  $ACD \cdot OLIQ :: BZDS \cdot HGIQ$ <sup>a</sup>; ma  $ACD = NPI$ , dunque ancora  $NPI \cdot OLIQ :: BZDS \cdot HGIQ$ ; ma  $NPI \cdot OLIQ :: NH \cdot HO$ <sup>b</sup> ::  $NX \cdot VX$ , dunque  $BZDS \cdot HGIQ :: NX \cdot VX$ ; e però la base dell' uno alla base dell' altro, è come l' altezza di questo all' altezza di quello; e viceversa essendo  $BZDS \cdot HGIQ :: NX \cdot VX$ , che uguagli l' altezza di  $ACD$ , farà  $ACD \cdot OLIQ :: NPI \cdot OLIQ$ ; e però  $ACD = NPI$ . Il che dovea dimostrarsi.

Co--



**COROLLARIO.** Ancora i prismi triangolari uguali, essendo la metà di uguali parallelepipedi (*per la Proposizione 28.*) devono avere le basi reciproche dell' altezze; e se hanno le basi reciproche dell' altezze, devono essere uguali, essendo l' istessa proporzione delle basi di questi prismi, che quella de' parallelepipedi, e l' istessa altezza di questi, e di quelli.

## PROPOSIZIONE XXXV.

FIG. 204.

*Essendo uguali i due angoli solidi*  $HALI, DCFE$ , *contenuti da angoli piani*  $HAI = DCE, HAL = DCF, LAI = FCE$ , *se dalle due linee*  $AL, CF$  *sublimi al piano degli angoli uguali*  $HAI, DCE$ , *si tramandano in essi piani le perpendicolari*  $LK, FG$ , *congiunte le rette*  $AK, CG$  *riuscirà l' angolo*  $GCF = KAL$ .

**S**Iano prese le due sublimi  $AL, CF$  tra di loro uguali, e tirate le  $LK, FG$  perpendicolari a' piani soggetti, si tiri la  $KI$ , e la  $GE$  perpendicolari alle  $AI, CE$ , e prodotte  $IK$  in  $H$ , ed  $EG$  in  $D$  agli altri lati  $AH, CD$ , si congiungano  $HL, IL$ , ed  $EF, DF$ . Essendo il quadrato  $AL =$  a' quadrati  $AK, KL$ , ed il quadrato  $AK =$  a' quadrati  $AI, IK$ , dunque il quadrato  $AL =$  a' tre quadrati  $AI, IK, KL$ ; ma i due quadrati  $IK, KL =$  al quadrato  $IL$ ; dunque il quadrato  $AL =$  a' quadrati  $AI$ , ed  $IL$ ; però l' angolo  $AIL$  è retto. Similmente si proverà retto l' angolo  $CEF$ ; dunque essendo l' angolo  $LAI = FCE$ , e l' angolo  $AIL = CEF$ , ed il lato  $AL = CF$ , farà ancora  $AI = CE$ , ed  $IL = EF$ <sup>a 26. l.</sup>; però essendo  
an-

a 26. I. ancora l'angolo  $HAI = DCE$ , ed  $AIH = CED$ , ed il lato  $AI = CE$ , farà pure  $AH = CD$ , ed  $HI = DE^a$ ; ed essendo i lati  $AH = CD$ , ed  $AL = CF$ , e l'angolo  $HIL = DCF$ , farà pure la base  $HL = DF$ ; indi ne' triangoli  $HLI$ ,  $DFE$ , essendo tutti i lati del primo  $=$  a quelli del secondo, ancora gli angoli corrispondenti faranno uguali; perciò ne' triangoli  $KIL$ ,  $GEF$ , essendo l'angolo  $KIL = GEF$ , ed i retti  $IKL$ ,  $EGF$  uguali, ed  $IL = EF$ , farà pure  $IK = IG$ , e  $KL = GF$ ; onde essendo  $AI = CE$ , ed  $IK = EG$ , e l'angolo  $AIK = CEG$ , farà pure  $AK = CG$ ; però ne' triangoli  $AKL$ ,  $CGF$ , essendo  $AL = CF$ , ed  $AK = CG$ , e  $KL = GF$ , l'angolo  $GCF$  farà  $= KAL$ . Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO. Essendosi mostrata  $KL = GF$ , dunque in due angoli solidi compresi da tre angoli piani, ciascuno uguale al suo corrispondente, presi due lati uguali  $AL$ ,  $CF$ , e da' loro termini tirate sopra i piani opposti  $HAI$ ,  $DCE$  le perpendicolari  $LK$ ,  $FG$ , riescono queste tra di loro uguali altezze.

## PROPOSIZIONE XXXVI.

FIG. 205. *Essendo tre linee A, B, C proporzionali, il solido parallelepipedo EDKF fatto dalle date tre linee, è uguale al solido LMQN equiangolo fatto dalla sola media B, cui siano uguali tutti i suoi lati.*

**E**ssendo  $DF = A$ ,  $DE = B$ ,  $DK = C$  nel parallelepipedo  $EDKF$ , e ciascun lato  $MN$ ,  $ML$ ,  $MQ = B$  nell' altro solido equiangolo  $LMQN$ , farà  $DF \cdot MN :: MQ \cdot DK$ , onde intorno agli  
ango-

angoli uguali  $FDK, NMQ$ , essendo i lati reciprochi, è il parallelogrammo  $FDKI = NMQR^a$ , <sup>a 14. vi.</sup>  
 ed essendo  $DE = ML$ , chi tirasse da' punti  $E, L$ , sopra i piani  $KDF, QMN$  le perpendicolari, farebbero nell' uno, e nell' altro solido uguali altezze<sup>b</sup>; dunque essendo ancora le basi  $FI, KI, NMQR$  <sup>b Coroll. 35. xi.</sup> uguali, essi solidi parallelepipedi sono uguali. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XXXVII

FIG. 206

*Se quattro rette linee  $AB, CD, EF, GH$  sono proporzionali, due parallelepipedi simili  $ABK, CDL$  fatti sopra alle prime, saranno proporzionali a due altri simili tra di loro  $EFM, GHN$ , fatti sopra all' ultime.*

**I**mperocchè  $ABK$  a  $CDL$  è in ragione tripla di  $AB$  a  $CD^c$ ; e similmente  $EFM$  a  $GHN$  è <sup>c 33. xi.</sup> in ragione tripla di  $EF$  a  $GH^c$ ; dunque essendo  $AB \cdot CD :: EF \cdot GH$ , ancora la tripla ragione della prima è uguale alla tripla della seconda; e però  $ABK \cdot CDL :: EFM \cdot GHN$ . Il che era da dimostrarfi.

## PROPOSIZIONE XXXVIII.

Tav. XI.  
FIG. 207.

*Sia il piano  $CAD$  perpendicolare ad un altro  $ADB$ ; se da qualunque punto  $E$  del primo, si tira la perpendicolare sopra il secondo, caderà nella loro comune sezione  $AD$ .*

**P**erchè se cadesse fuori in  $F$ , tirata nel piano  $CAD$  sopra la retta  $AD$  la perpendicolare  $EG$ , questa pure farebbe al piano  $ADB$  perpendicolare, e congiunta la  $FG$ , avrebbe il triangolo  $EFG$

$EFG$ , in  $F$ , ed in  $G$  due angoli retti; il che è impossibile; dunque ec.

## PROPOSIZIONE XXXIX.

FIG. 208.

*Nel solido parallelepipedo  $ABCDE$  tirato un piano  $MNQP$ , segante pel mezzo i lati  $AB, DC, GT, EF$  de' parallelogrammi opposti, ed un altro piano  $KLIH$ , segante pel mezzo i lati  $AD, BC, GE, TF$  degli opposti parallelogrammi, la comune sezione  $OR$  di tali piani, ed il diametro del solido  $AF$  congiungente gli angoli opposti, si segheranno pel mezzo nel punto  $S$ .*

**S**I congiungano le rette  $AO, CO, GR, FR$ . Essendo  $AM = CN$  (perchè sono la metà delle opposte parallele, ed uguali  $AB, DC$ ) ed  $MO = NO$  (essendo  $MN$  divisa pel mezzo in  $O$ , siccome l'opposte, e parallele ad essa  $AD, BC$  sono divise pel mezzo dalla  $KL$ ) e l'angolo  $AMO = ONC$ , per essere alterni delle parallele, farà pure  $AO = CO$ , e l'angolo  $MOA = NOC$ , ciascuno de' quali coll'angolo  $AON$  facendo due retti, faranno esse  $AO, OC$  per diritto fra loro; e similmente si proverà essere  $GRF$  una linea drittamente continuata; onde essendo  $AG$  uguale, e parallela a  $CF$  (per essere ciascuna di loro parallela, ed uguale a  $DE$ ) le rette  $AC, GF$  sono pure uguali, e parallele, onde  $ACFG$  è un parallelogrammo, nel di cui piano si segano  $OR$ , ed  $AF$  in  $S$ ; e ne' triangoli  $AOS, FRS$ , l'angolo alterno  $SAO = SFR$ , ed  $AOS = FRS$ , col lato  $AO = FR$ , dimostrano essere pure  $OS = SR$ , ed  $AS = SF$ ; dunque la comune sezione  $OR$  di  
detti



detti piani, ed il diametro, che congiunge gli angoli opposti  $AF$  del medesimo parallelepipedo si tagliano pel mezzo in  $S$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XL.

*Due prismi d' uguale altezza  $ABCFED$ , FIG. 209.  $MGHI LK$ , avendo il primo per base il parallelogrammo  $ABCF$  doppio della base triangolare  $MGH$  dell' altro, sono tra di loro uguali.*

**I**mperocchè compiuti essi prismi in parallelepipedi, con fare i parallelogrammi  $ABDN$   $FCEO$ , ed  $MGHP$ ,  $KL IQ$ , riuscirà la base  $MGHP = ABCF$ , essendo l' una, e l' altra doppia del triangolo  $MGH$ ; dunque tali parallelepipedi  $ABCEON$   $D$ , ed  $MGHI QKL$  sono uguali, avendo uguale altezza, ed uguali basi; ma i suddetti prismi sono la metà di tali parallelepipedi<sup>a</sup>, dunque ancora essi prismi erano tra loro uguali. Il che dovea dimostrarsi.

# E L E M E N T I

## DELLA GEOMETRIA

# D I E U C L I D E

### L I B R O XII.



#### PROPOSIZIONE I.

FIG. 210. *I Poligoni simili ABCDE, FGHIK inscritti ne' cerchi sono come i quadrati de' loro diametri AL, FM.*



Ondotte le rette  $EB$ ,  $EL$ , e  $KG$ ,  $KM$ , essendo l'angolo  $BAE = GFK$ , ed i lati intorno ad essi proporzionali, cioè  $BA \cdot AE :: GF \cdot FK$ , per la similitudine de' poligoni, sono simili i triangoli  $ABE$ ,  $FGK$ , onde l'angolo  $ABE = FGK$ ; ma a quello è uguale l'angolo  $ALE$ , ed a questo si uguaglia l'angolo  $FMK$ <sup>a</sup>, dunque i triangoli  $ALE$ ,  $FMK$ , hanno uguali gli angoli in  $L$ , e in  $M$ , e sono gli angoli  $AEL$ ,  $FKM$  retti<sup>b</sup>; però ancora essi triangoli sono simili, onde  $AE \cdot AL :: FK \cdot FM$ , e permutando,  $AE \cdot FK :: AL \cdot FM$ , però il poligono fatto sopra il lato  $AE$ , al simile sopra il lato  $FK$ , sta come il quadrato di  $AL$  al simile quadrato di  $FM$ <sup>c</sup>. Il che era da dimostrarsi.

## AVVERTIMENTO.

Nella seguente proposizione è supposta la prima del libro x. di cui non si è addotta quì la dimostrazione; però basta osservare, che date due quantità disuguali  $AB$ , e  $C$  (o siano linee, o superficie, o solidi), se dalla maggiore si levi  $AD$ , che ne sia la metà, e dalla rimanente  $DB$  si levi la  $DE$ , che sia la metà di essa, e così di mano in mano si continui di fare, riuscirà finalmente il resto minore della data quantità  $C$ ; imperocchè questa raddoppiata in  $GI$ , e la  $GI$  raddoppiata in  $GH$ , e questa in  $GF$  ec. dovrà finalmente farsi maggiore di essa  $AB$ ; onde la metà di  $AB$  sarà minore di  $FH$ , metà di  $FG$ ; e la metà di  $DB$ , sarà pure minore di  $HI$ , metà di  $HG$ , e la metà di  $EB$ , che sia  $EL$ , è minore di  $IK$ , metà di  $IG$ ; e però il resto  $LB$  sarà minore di  $KG$ , la quale è uguale alla data  $C$ .

FIG. 211.

Che se dalla data  $AB$  si toglie  $AD$  maggiore della metà di essa, e dalla rimanente  $DB$  la  $DE$  maggiore della metà della rimanente  $DB$ , e dalla  $EB$  si tolga la  $EL$  maggiore della metà di quella ec. maggiormente si vede, che alla fine il resto  $LB$  sarà minore della data  $C$ . Il che è quanto si mostra nella proposizione I. del libro x., supposta nella seguente.

## PROPOSIZIONE II.

I cerchj  $ABT$ ,  $EFN$  sono proporzionali a' quadrati de' loro diametri  $AC$ ,  $EG$ .

FIG. 212.

**I**Mperocchè si faccia come il quadrato  $AC$  al quadrato  $EG$ , così il cerchio  $AST$  allo spazio  $Z$ . Se questo non fusse uguale all' altro cerchio  $ENM$ , o farebbe minore, o maggiore di esso. Sia minore, sicchè gli manchi la quantità  $X$  per ugualiarlo. Inscrivasi nel cerchio  $ENM$  il quadrato  $EFGH$ , il quale essendo la metà del quadrato del diametro  $EG$ , che si circoscriverebbe al cerchio, perciò  $EFGH$  è maggiore della metà di esso cerchio; indi ne' segmenti residui, divisi per mezzo gli archi in  $O, M, L, N$ , e congiunte le rette  $EO, OH, GM, MF, EL, FL, GN, HN$ , faranno questi triangoli  $EOH, GMF, ELF, GNH$  maggiori della metà de' segmenti circolari, a cui sono iscritti, essendo qualunque triangolo la metà del rettangolo circoscritto al suo segmento, come  $HNG$  è la metà di  $HPQG$ ; e così proseguendo la divisione per mezzo degli archi rimanenti, con tirarne le sue corde, faranno sempre questi altri triangoli più della metà de' segmenti circolari residui, i quali però finalmente riusciranno minori della quantità  $X^a$ , con cui il cerchio eccede lo spazio  $Z$ , onde l' iscritto poligono, quale sia  $EOHNGMFL$ , o un altro di doppio numero di lati, sarà maggiore dello spazio  $Z$ . Perlochè, iscritto nell' altro cerchio  $AST$  un simile poligono  $AKBSCTDV$ , farebbe questo a quello, come il quadrato  $AC$  al quadrato  $EG^b$ , cioè come il cerchio  $AST$  allo spazio  $Z$ ; dunque essendo quel poligono  $EOHNGMFL$  maggiore di  $Z$ , farebbe ancora l' altro poligono  $AKBSCTDV$  maggiore del cerchio  $AST$ , in cui è iscritto. Dunque non poteva essere  $Z$  minore del cerchio  $ENM$ . Ne  
meno

<sup>a</sup> Avvert.  
preced.

<sup>b</sup> 1. XII



meno poteva supporfi maggiore di esso, perchè facendosi il cerchio  $ENM$  ad uno spazio  $R$ , come il quadrato  $EG$  al quadrato  $AC$ , cioè come  $Z$  al cerchio  $AST$ , essendo il cerchio  $ENM$  minore di  $Z$ , ancora lo spazio  $R$  farebbe minore del cerchio  $AST$ ; il che abbiamo veduto essere impossibile. Era dunque  $Z$  uguale al cerchio  $ENM$ ; e però il cerchio  $AST$  al cerchio  $ENM$  è come il quadrato del diametro  $AC$  al quadrato del diametro  $EG$ . Il che ec.

COROLLARIO I. Quindi si ha, che un cerchio ad un altro sta, come qualunque poligono inscritto nel primo al simile poligono inscritto nel secondo cerchio, essendo tutti proporzionali a' quadrati de' diametri di essi cerchj.

COROLLARIO II. Dal modo, con cui si è dimostrata questa proposizione, può dedursi generalmente, che se in due date grandezze superficiali, o solide, possono tali quantità inscriverti maggiori della metà di esse, e nel rimanente altre quantità, che pure siano maggiori della metà di tali residui, cui sono inscritte; e così nel resto di tali grandezze s'interpongano altre quantità maggiori della metà di tali spazj, e così sempre, onde l'eccesso di qualunque data grandezza sopra la somma di queste inscritte quantità, divenga minore di qualunque data minima grandezza; e la somma delle quantità inscritte in una di tali proposte grandezze, stia alla somma di altrettante inscritte similmente nell'altra, sempre in una data ragione, ancora quelle intere grandezze dovranno essere nella medesima ragione, come quì si è provato ne' cerchi, che essendo in essi inscritti simili poligoni, li

quali ne lasciano l' eccelfo minore della data quantità  $X$ , e fono fempre come i quadrati de' diametri, devono efsere i detti circoli nell' ifteffa ragione.

## PROPOSIZIONE III.

FIG. 213. Ogni Piramide  $ABCD$  triangolare può dividersi in due piramidi  $AEGH$ ,  $EBFI$  uguali, simili tra fe, e con l' intera, ed in due prismi  $EICHKF$ ,  $EHGDKF$ , tra di fe uguali, la cui fomma però farà maggiore della metà della data Piramide  $ABCD$ .

**T** Agliati per mezzo tutti i lati ne' punti  $E$ ,  $H$ ,  $G$ ,  $K$ ,  $F$ ,  $I$ , e congiunte le rette  $EH$ ,  $HG$ ,  $GE$ ,  $EI$ ,  $IF$ ,  $FK$ ,  $KH$ ,  $HI$ ,  $IK$ ,  $EF$ , le quali fegando fempre due lati proporzionalmente, fono parallele a gli oppofti lati, è manifefto efsere uguali i triangoli  $AEH$ ,  $EBI$ , e simili tra di fe, ed all' intero  $ABC$ : parimente i triangoli  $AEG$ ,  $EBF$  fono uguali, e simili ad  $ABD$ ; e così accade ne' triangoli uguali  $AHG$ ,  $EIF$ , simili ad  $ACD$ , e negli altri due  $HEG$ ,  $IBF$  tra loro uguali, e simili a  $CBD$ ; dunque le piramidi  $AEGH$ ,  $EBFI$  fono uguali, e simili tra di fe, e coll' intera  $ABCD$ . I prismi poſcia, che reſtano  $EICHKF$ ,  $EHGDKF$ , fono ugualmente alti, e quello ha per baſe il parallelogrammo  $ICKF$ , doppio del triangolo  $IFK$ , e però doppio della baſe triangolare  $FKD$  di queſt' altro priſma, eſſendo  $IFK = FKD$  nel parallelogrammo  $IFDK$ , però fono prismi uguali <sup>a</sup>; ma il primo è maggiore della Piramide  $IKCH$ , la quale è uguale a qualunque dell' altre due, per eſempio ad  $AEGH$ ; dunque ambidue queſti prismi

fmi sono maggiori dell' altre due piramidi , e però sono più della metà dell'intera piramide  $ABCD$ . Il che ec.

PROPOSIZIONE IV.

*Le due piramidi triangolari ugualmente alte* FIG. 213.  
 $ABCD$ ,  $LMON$ , *se si dividano come nella pre-* 214.  
*cedente in due simili uguali piramidi , e ne' due pris-*  
*mi uguali , e ciascuna delle particolari piramidi si-*  
*milmente dividasi come le intere , e queste , che ne*  
*risultano , pure dividansi , come l' altre , e così di*  
*mano in mano ; come la base  $CBD$  della prima pi-*  
*ramide , alla base  $OMN$  della seconda , così sa-*  
*ranno tutti i prismi fatti in quella , a tutti gli al-*  
*trettanti prismi fatti in questa .*

**E**Ssendo divisi per mezzo tutti i lati delle in-  
 tere piramidi , come nella costruzione della  
 precedente proposizione , siccome sono esse ugual-  
 mente alte , ancora i prismi  $FEHGDK$ ,  $TRPQNV$   
 sono ugualmente alti , e però sono come le loro  
 basi  $FKD$ ,  $TVN^a$  , e queste sono , come le in- a Coroll.  
 tere basi  $CBD$ ,  $OMN$ , quadruple di tali trian- prop. 32 XI  
 goli , dunque i prismi  $FEHGDK$ , e  $TRPQNV$ ,  
 ed ancora li due uguali  $FEHGDK + FEHKCI$ ,  
 e li due uguali  $TRPQNV$ ,  $+ TRPVS$ , sono  
 come le basi dell' intere Piramidi ,  $CBD$ , ed  
 $OMN$ . Che se si farà la costruzione stessa nelle  
 Piramidette  $AEGH$ ,  $LRPQ$ , e nell' altre due  
 $EBFI$ ,  $RMTS$ , li prismi dell' una a quelli dell'  
 altra faranno pure come il triangolo  $EHG \cdot RPO$   
 $:: BIF \cdot MST :: CBD \cdot OMN$ ; e così riuscirà  
 sempre ; dunque la somma di tutti li prismi , che

si fossero inscritti nella Piramide  $ABCD$ , ad altrettanti inscritti nella Piramide  $LMON$  farà sempre, come le basi di esse Piramidi  $BCD$ ,  $MON$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE V.

*Le Piramidi triangolari ugualmente alte  $ABCD$ ,  $LMON$  sono come le basi loro  $BCD$ ,  $MON$ .*

**I**mperocchè fatta in essi la costruzione de' Prismi, *come nella precedente proposizione*, riescono le somme di essi proporzionali alle basi  $BCD$ ,  $MON$ ; ma sono tali, che li primi due prismi sono maggiori della metà di esse Piramidi <sup>a</sup>, e gl' inscritti nelle piramidette residue sono più della metà di esse ec. dunque la piramide intera  $ABCD$  all' ugualmente alta  $LMON$  è nell' istessa proporzione delle basi  $BCD$ ,  $MON$  <sup>b</sup>. Il che ec.

<sup>a</sup> Coroll. 2.  
<sup>b</sup> prop. 2. XII.

## PROPOSIZIONE VI.

FIG. 215. *Le Piramidi  $ABCED$ , ed  $FHIKLG$  ugualmente alte con qualsivoglia basi poligone  $BCED$ , ed  $HGLKI$ , sono pure tra di loro, come le dette basi.*

**D**ividansi le basi poligone colle diagonali  $CD$ ,  $GI$ ,  $GK$ , ne' fuoi triangoli; si vedranno esse piramidi co' piani, che passano per la loro cima, e per dette diagonali, divise in tante piramidi triangolari ugualmente alte, le quali faranno, come le loro basi triangolari <sup>c</sup>, dunque componendo  $BCED$  a  $CED$  farà come la piramide  $ABCED$  alla  $ACDE$ ; ed è  $CDE$  a  $GHI$ , come  $ACDE$  ad  $FHGI$ , e similmente componendo,

<sup>c</sup> 5. XII.



do, e convertendo,  $GHI$  ad  $HGLKI$ , come  $FHGI$  ad  $FHIKLG$ ; dunque per ugualità ordinata,  $BCED \cdot HGLKI :: ABCED \cdot FHIKLG$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE VII.

Ogni Prisma triangolare  $ABCDEF$  può dividersi in tre piramidi uguali  $ACBF$ ,  $ACDF$ ,  $CDEF$ . FIG. 216.

SI tirino i diametri de' parallelogrammi  $AC$ ,  $CF$ ,  $FD$ . I triangoli  $ACB$ ,  $ACD$  essendo uguali, faranno pure uguali le piramidi ugualmente alte  $ACBF$ ,  $ACDF$ ; e parimente essendo uguali i triangoli  $ADF$ ,  $DEF$ , sono pure uguali le piramidi  $ACDF$ ,  $CDFE$  della medesima altezza<sup>a</sup>, dunque le tre piramidi, in cui resta diviso<sup>a</sup> 4. XII. il prisma, sono tra loro uguali Il che ec.

COROLLARIO. Quindi ogni Piramide è la terza parte del prisma eretto sopra l' istessa base alla medesima altezza, quantunque fossero le basi poligone, potendo risolversi in piramidi, e prismi triangolari dell' istessa altezza, eretti sopra i triangoli, in cui dividefi qualunque poligono.

## PROPOSIZIONE VIII.

Le Piramidi simili triangolari  $ABCD$ ,  $EFGH$ , sono in tripla ragione de' loro lati omologhi  $AB$ ,  $EF$ . FIG. 217.

SI compiscano i parallelogrammi  $CABK$ ,  $GEFR$  intorno a' lati de' triangoli simili  $CAB$ ,  $GEF$ , ed intorno a' simili triangoli  $CAD$ ,  $GEH$  li parallelogrammi  $CADI$ ,  $GEHP$ ; e parimente ne' simili triangoli  $DAB$ ,  $HEF$  siano compiuti li paral-

rallelogrammi  $DABN$ ,  $HEFO$ ; onde tirati li piani opposti, ne risulteranno due simili parallelepipedì  $DICABNMK$ ,  $HPGEFOQR$ , i quali faranno in tripla ragione de' loro lati omologhi  $AB$ ,  $EF$ <sup>a</sup>; ma essendo tali parallelepipedì doppj de' prismi  $IDNBAC$ ,  $PHOFEGB$ <sup>b</sup>, e questi tripli delle piramidi  $ABCD$ ,  $EFGH$ <sup>c</sup>, sono que' parallelepipedì sestupli di queste piramidi; dunque ancora esse piramidi simili sono in tripla ragione de' loro lati omologhi  $AB$ ,  $EF$ . Il che ec.

COROLLARIO. Ancora le piramidi simili di base poligona faranno in tripla ragione de' lati omologhi, perchè li poligoni simili dividendosi in simili triangoli, ne risultano simili piramidi triangolari, ciascuna copia essendo in tripla ragione de' lati omologhi, la quale riesce la medesima in ciascuna copia de' lati corrispondenti in qualunque triangolo; e però la somma di tali piramidi triangolari erette sopra un poligono alla somma di altrettante simili erette sopra l'altro poligono simile è pure in tripla ragione de' loro lati omologhi.

### PROPOSIZIONE IX.

*Le piramidi triangolari uguali hanno le basi reciproche dell' altezze: e quelle Piramidi, le cui basi sono delle altezze loro reciproche, sono pure uguali.*

**I**mperochè essendo le piramidi la terza parte de' prismi eretti sopra all' istesse basi, e alle medesime altezze<sup>c</sup>, quando le piramidi sono uguali, sono pure uguali i prismi, e quando i prismi sono uguali, sono altresì uguali le piramidi; ma i prismi uguali hanno le basi reciproche dell' altez-

ze, e se le loro basi sono reciproche dell' altezze, i prismi sono uguali <sup>a</sup>, dunque ancora le piramidi se uguali sono, hanno le basi reciproche delle altezze, e se le basi loro sono reciproche dell' altezze, devono essere Piramidi uguali. Il che ec.

<sup>a</sup> Coroll. 34.  
XI.

COROLLARIO I. Ancora le Piramidi, che hanno le basi poligone, se sono uguali, averanno le basi reciproche all' altezze, e viceversa essendo le basi reciproche all' altezze, faranno Piramidi uguali: perchè se avessero la base triangolare uguale a quel poligono, con le medesime altezze farebbero uguali tra loro <sup>b</sup>, ed uguali ad esse, dunque ciò, che conviene alle piramidi triangolari, ancora appartiene alle Piramidi poligone, che farebbero le medesime, se cangiassero le basi poligone in triangoli uguali ad esse.

<sup>b</sup> 6. XII.

COROLLARIO II. Lo stesso pure vale de' prismi eretti sopra basi poligone, che essendo uguali avrebbero reciproche le basi all' altezze, e viceversa, come accade alle piramidi, che sono le loro terze parti.

### PROPOSIZIONE X.

FIG. 212.

*Il cono è sempre la terza parte del Cilindro alla medesima altezza eretto sopra l' istessa base circolare EHM.*

SE si concepisce un prisma eretto sopra il quadrato *EHGF* inscritto nel cerchio alla medesima altezza del cilindro, farà quel prisma più della metà del cilindro, essendo appunto la metà di quell' altro prisma, che si alzasse alla medesima altezza sopra il quadrato del diametro *EG*, che  
ef-

essendo circoscritto al cerchio, farebbe riuscire il prisma circoscritto al cilindro, e però maggiore di esso; e similmente la piramide eretta all' istessa altezza sopra all' inscritto quadrato  $EHGF$ , farebbe la metà della piramide, che avesse per base il quadrato del diametro  $EG$ , la quale farebbe circoscritta al cono, e però la piramide sopra alla base  $EHGF$  maggiore dovrà essere della metà del cono. Similmente fatti i triangoli  $EOH$ ,  $HNG$  ec. che sono più della metà de' segmenti circolari, cui sono inscritti, eretti sopra di essi li prismi all' altezza del cilindro, e le piramidi all' istessa cima del cono, faranno que' prismi più della metà degli eccessi del cilindro sopra il prisma quadrato, essendo la metà de' prismi eretti sopra un rettangolo, come  $HPQG$  circoscritto al segmento circolare  $HNG$ , il quale prisma circoscritto farebbe a quell' eccesso cilindrico; e similmente le piramidi sopra tali triangoli faranno più della metà degli eccessi del cono sopra la piramide quadrata inscrittagli, e così sempre; dunque il cilindro al cono sta, come il prisma eretto alla medesima altezza sopra qualunque poligono inscritto nel cerchio, alla piramide ugualmente alta eretta sopra lo stesso poligono<sup>a</sup>: la qual proporzione è sempre tripla<sup>b</sup>; dunque il cilindro è sempre triplo del Cono, onde il Cono è la terza parte del cilindro. Il che ec.

<sup>a</sup> Coroll. 2.  
prop. 2. XII.

<sup>b</sup> Cor. prop.  
7. XII.

### PROPOSIZIONE XI.

FIG. 212. *I cilindri ugualmente alti sono come i cerchi  $ABT$ ,  $EHM$  delle loro basi, e così pure sono i coni, sopra all' istesse basi circolari eretti alla medesima altezza.* Ef-



**E**ssendosi dimostrato, che i prismi eretti sopra i quadrati  $ABCD$ ,  $EHGF$  inscritti ne' circoli, alla medesima altezza de' cilindri, ne sono più della metà di essi, ed i prismi pure eretti sopra gli altri triangoli, all' istessa altezza sono più della metà degli eccetti cilindrici sopra gli antecedenti prismi, ec. e tali prismi essendo sempre, come le loro basi, se sono ugualmente alti <sup>a</sup>, le quali basi poligone simili sono, come i medesimi circoli <sup>b</sup>, perciò ancora i cilindri ugualmente alti, sono come le loro basi circolari; ed i Coni parimente, che sono la terza parte di essi cilindri, sono in pari altezza, proporzionali a' cerchj delle loro basi. Il che ec.

<sup>a</sup> Coroll.  
prop. 32. XI.

<sup>b</sup> Coroll. 1.  
prop. 2. XII.

**COROLLARIO.** Quindi può dirsi, che i Cilindri, o i Coni di uguale altezza, sono come i prismi, o le piramidi ugualmente alte, fatte sopra simili poligoni inscritti nelle basi circolari di essi Coni, o Cilindri: essendo tanto questi, che quelli, come i quadrati de' diametri circolari, proporzionali alle basi de' poligoni, o de' cerchj stessi.

PROPOSIZIONE XII.

*I cilindri simili  $ABDC$ ,  $EFHG$ , o i Coni simili inscritti in essi, sono in ragione tripla de' diametri  $CD$ ,  $GH$  delle loro basi.* FIG. 218.

**D**All' asse del maggiore  $MI$  si tagli la parte  $IN$  uguale all' asse  $LK$  del minore, e per lo punto  $N$  si faccia passare un piano parallelo alla base, che ci farà il cerchio  $QR$ . Indi s'intenda eretto un prisma sopra il poligono  $CODP$  inscritto nella base circolare, che pervenga all' altezza dell' as-

l'asse  $TI$ , ed all'altezza  $NI$ ; e nella base  $GVH$  dell'altro Cilindro sia pure un simile poligono inscritto  $GVHX$ , ed elevato all'altezza del cilindro  $LK$ . Il prisma dell'altezza  $MI$  a quello dell'altezza  $NI$  sarà come  $MI$  ad  $NI$  <sup>a</sup>  $= LK$ ; ma  $MI$ . <sup>a</sup>  $LK :: CD \cdot GH$  (per la similitudine de' cilindri) dunque il prisma dell'altezza  $MI$  a quello dell'altezza  $NI$  è come semplicemente  $CD$  a  $GH$ . Ma il prisma dell'altezza  $NI$  all'altro inscritto dentro il minore cilindro, dell'uguale altezza  $LK$ , è come la base  $CODP$  alla simile base  $GVHX$  <sup>b</sup>, cioè come il quadrato  $CD$  al quadrato  $GH$  <sup>c</sup>, e però in ragione dupla di  $CD$  a  $GH$ ; dunque la ragione del prisma dell'altezza  $MI$ , a quello dell'altezza  $LK$  è composta della semplice, e della dupla della ragione de' diametri, e però è in ragione tripla di essi  $CD, GH$ . Ma questi prismi accostandosi indefinitamente a' cilindri, cui sono inscritti, secondo che si aumenta il numero de' lati delle loro basi, come tante volte si è dimostrato, devono avere la ragione medesima, che detti cilindri <sup>d</sup>; adunque essi cilindri simili sono pure in ragione tripla de' loro diametri  $CD, GH$ . Ma i coni simili inscritti in detti cilindri, essendo la terza parte di essi <sup>e</sup>, sono nell'istessa ragione di essi cilindri; dunque sono in tripla ragione de' diametri delle loro basi  $CD, GH$ . Il che cc.

COROLLARIO. È manifesto, essere tanto i cilindri, che i coni simili in tripla ragione ancora de' loro assi proporzionali a' diametri.

### PROPOSIZIONE XIII.

*Se un cilindro è segato con un piano parallelo alle*

*alle basi , le sue porzioni saranno come i loro assi .*

**S**iccome se nel cilindro fosse inscritto un prisma, la cui base fosse qualsivoglia poligono inscritto nella base cilindrica, segandosi esso ancora con l'istesso piano parallelo alla base, saranno le sue porzioni proporzionali alle lunghezze <sup>a</sup>, cioè <sup>a Coroll. 2. prop. 25. XI.</sup> agli assi cilindrici; così ancora le porzioni cilindriche sono come li detti assi, perchè i cilindri sono, come li prismi di simil base, inscritti ne' medesimi, come altre volte si è dimostrato.

#### PROPOSIZIONE XIV.

*I Coni, e i Cilindri di base uguale sono tra loro, come le altezze .*

**Q**uanto a' Cilindri di base uguale, è come se fossero porzioni segate dal medesimo cilindro, col piano parallelo alla base, che però essendo come i loro assi <sup>b</sup>, sono come le altezze; <sup>c</sup> <sup>b 13. XII.</sup> quanto a' conj, che sono un terzo de' cilindri, a' quali sono inscritti <sup>c</sup>, è chiaro dover essere ancor <sup>c</sup> <sup>c 10. XII.</sup> essi nell'istessa ragione degli assi.

#### PROPOSIZIONE XV.

*Ne' coni, o cilindri uguali BAC, EDF, le basi <sup>Tav. XII. FIG. 219.</sup> BC, EF sono reciproche all' altezze, cioè come DM ad AL; e viceversa, qualunque volta siano reciprocamente  $BC \cdot EF :: DM \cdot AL$ , que' coni, o cilindri saranno uguali.*

**S**E le altezze cilindriche sono uguali, ancora le basi faranno uguali negli uguali cilindri: ess-

fendo poi disuguali, dalla maggiore  $DM$  si tagli  
 la  $OM$  uguale alla minore  $AL$ , e si tagli il cilin-  
 dro col piano  $IH$ , condotto per lo punto dell'  
 asse  $O$ , parallelo alla base  $EF$ . Sarà  $DM \cdot OM$   
 a 14. XII.  $(= AL) :: NKF (= GPC) \cdot IHF^a :: BC \cdot$   
 b 11. XII.  $EF^b$ ; dunque  $DM \cdot AL :: BC \cdot EF$ ; e vice-  
 versa se  $DM \cdot AL :: BC \cdot EF$ , posta  $OM =$   
 $AL$ , farà  $NKF \cdot IHF :: DM \cdot OM (= AL)$   
 $:: BC \cdot EF :: GPC \cdot IHF$ ; dunque  $NKF =$   
 $GPC$ . E l'istesso accade ne' Coni, che farebbero  
 la terza parte di essi cilindri Dunque ec.

## PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 210.

*Dati due cerchi concentrici  $ADB$ ,  $LME$ , in-  
 scrivere nel maggiore un poligono di pari lati, che  
 non tocchi il cerchio minore.*

**T**irato pel centro  $C$  il diametro  $ACB$ , segan-  
 te il cerchio interiore in  $L$ ,  $E$ , gli si condu-  
 ca la tangente  $GEH$  concorrente col maggior cer-  
 chio in  $G$ , ed  $H$ ; indi segata la semicirconferen-  
 za  $ADB$  in due parti uguali nel punto  $D$ , si fe-  
 ghi pure l'arco  $DB$  pel mezzo in  $N$ , e l'arco  
 $NB$  dividasì pel mezzo in  $K$ , fino a tanto, che  
 questa divisione riesca tra gli punti  $G$ , e  $B$ . Ta-  
 le sia il punto  $K$  donde si tiri al diametro la  
 perpendicolare  $KIF$ , che farà parallela alla tan-  
 gente  $GEH$ , e gli archi  $EK$ ,  $BF$  faranno tra lo-  
 ro uguali, e le corde loro  $KB$ ,  $FB$  potranno re-  
 plicarsi intorno la circonferenza del cerchio mag-  
 giore, la quale conterrà un numero pari di  
 archi uguali a  $BK$ ; e però ne riuscirà un poli-  
 gono di lati uguali, e pari di numero, li quali non  
 po-



potranno toccare la periferia del cerchio interiore, siccome non vien toccata ne meno dalla retta  $KF$  sottratta a due lati, essendo parallela alla tangente  $GH$  di quella periferia; il che riuscirà in qualunque altro sito di esso poligono. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

*Date due sfere concentriche, li cui raggi  $CB$ ,  $CE$ , FIG. 221. descrivere nella maggiore un solido poliedro, li cui piani non tocchino la superficie della sfera minore.*

**S**Egate esse sfere con un piano, che passi pel centro  $C$ , ne riusciranno due cerchj concentrici, nel maggiore de' quali può descriversi un poligono, che non tocchi la periferia del minore <sup>a</sup>. Sia  $BK$  uno de lati di tale poligono; ed eretto perpendicolare al piano di questo cerchio il semidiametro  $CA$ , si tirino nella sfera li piani  $ALK$ ,  $AHB$ , che faranno quadranti perpendicolari a quel cerchio <sup>b</sup>, ed in essi quadranti si applichino pure le corde  $KO$ ,  $OL$ ,  $LA$ , ed  $AH$ ,  $HD$ ,  $DB$  uguali al lato  $BK$ , e si congiungano le rette  $DO$ ,  $HL$ ; il che se si facesse da per tutto, ne riuscirebbe un intero poliedro, il quale non toccherà in verun luogo l'interiore superficie della sfera minore  $NSME$ . Imperocchè, condotte le  $OF$ ,  $DI$  perpendicolari alle comuni sezioni  $CK$ ,  $CB$  de' detti quadranti col cerchio  $CBK$ , le quali faranno parallele ad  $AC$ , e perpendicolari al medesimo piano circolare, onde parallele tra di loro, ed ancora uguali, perchè ne' triangoli  $OKF$ ,  $DBI$ , oltre gli angoli retti in  $F$ , ed  $I$ , sono uguali

li gli angoli  $K$ , e  $B$ , insistenti alle semiperiferie diminuite degli archi uguali  $OK$ ,  $DB$ , e però essendo  $OK = DB$ , ancora gli altri lati faranno uguali, cioè  $OF = DI$ , ed  $FK = IB$ ; però congiunte le rette  $DO$ ,  $IF$ , faranno parallele, ed uguali; ma  $IF$  è parallela a  $BK$ , segando dagli uguali raggi  $CK$ ,  $CB$  le parti uguali  $FK$ ,  $IB$ ; dunque ancora  $DO$ , e  $BK$  sono parallele, e però le rette  $OK$ ,  $DB$  sono nel medesimo piano; e similmente si proverebbe essere un piano  $HLOD$ , ed il triangolo  $ALH$ ; onde ciò da per tutto continuato, farebbe un poliedro inscritto nella sfera maggiore; e tirando dal centro  $C$  la perpendicolare  $CG$  al piano  $BDOK$ , congiunte le rette  $GB$ ,  $GK$ ,  $GO$ ,  $GD$  faranno uguali, onde passerebbe un cerchio per i quattro punti  $K$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $O$ , mentre li quadrati di qualunque di tali linee, col medesimo quadrato della perpendicolare  $CG$ , fanno il quadrato del raggio della sfera; ma essendo  $BK$  maggiore di  $IF$ , e però maggiore di  $DO$ , e le altre  $OK$ , e  $DB$  uguali a  $BK$ , dunque nel cerchio, che passerebbe per i punti  $K$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $O$ , la  $BK$  sottende più di un quarto, e però il quadrato  $BK$  è più che doppio del quadrato  $GK$ , essendo l'angolo  $BGK$  ottuso; ma congiunta la  $KI$ , che sarà perpendicolare ad  $IB$ ; essendo l'angolo  $KBI = DBI$ , il lato  $BK = BD$ , ed il lato  $BI$  comune, onde ne' triangoli  $KBI$ ,  $DBI$ , sarà  $IK = ID$ , e l'angolo  $BIK$  uguale al retto  $BID$ ; ed è la  $IK$  maggiore della  $BI$  (essendo  $IK$  media proporzionale tra le parti del diametro, di cui l'una è  $BI$ , l'altra farebbe  $IC + CB$ , assai maggiore di  $IK$ ) dunque il quadrato  $BK$  è meno che doppio del quadrato  $IK$ ; e però la  $GK$  è minore

re di  $IK$ , onde la  $CG$  farà maggiore di  $CI$ , ed essendo tanto li due quadrati  $CG$ , e  $GK$  quanto li due  $CI$ , ed  $IK$  uguali al quadrato del raggio  $CK$ . Onde è più lontano il punto  $G$ , che il punto  $I$  dalla superficie della sfera  $CEM$ ; ed essendo la  $IK$  lontana dall'arco  $EM$ , riuscendo parallela alla sua tangente <sup>a</sup>, il piano  $DBKO$  sarà più remoto dalla superficie di quella interna sfera minore, e così ancora gli altri piani  $HDO L$ ,  $AHL$  molto meno potranno toccare detta superficie, essendone più lontani; e però tutto il Poliedro farà come cercavasi di fare. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XVIII.

*Le sfere sono in triplicata ragione de' loro diametri.* FIG. 221.

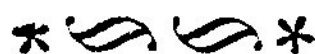
**I**Mperocchè fatto ancora nella sfera minore un simile poliedro al descritto nella maggiore, questi faranno in tripla ragione de' raggi delle loro sfere, perchè la piramide, che avesse la base  $DBKO$ , e la cima in  $C$ , farà simile alla piramide, la di cui base è il simile quadrilineo  $PEMQ$ , e la stessa cima in  $C$ ; e parimente l'altra piramide, la di cui base  $HDO L$ , è simile alla piramide, la di cui base  $RPQS$ , colla stessa cima in  $C$ ; e così l'altre; dunque essendo queste in tripla ragione di quella de' loro lati omologhi, ancora la somma di esse, cioè il poliedro della sfera  $AKB$ , alla somma dell'altre simili, che farebbe il simile poliedro della sfera  $NME$ , starà in ragione tripla de' raggi  $CB$ ,  $CE$ , o de' diametri di esse sfere; e ciò accaderebbe in qualunque numero di piani fossero divisi i po-

M lie-

liedri similmente descritti in esse sfere; e perchè possono esser fatti di tanti piani, che non tocchino la superficie di qualunque interna sfera minore, ma differente dalla maggiore d'una quantità minima; quindi essi poliedri possono differire dalle dette sfere d'una grandezza minore di qualunque data; però avendo sempre essi poliedri simil la ragione tripla di quei diametri, ancora le sfere faranno nell' istessa ragione<sup>a</sup>. Il che doveva dimostrarsi

<sup>a</sup> Coroll. 2.  
prop. 2. XII.

# E L E M E N T I DELLA GEOMETRIA DI EUCLIDE. L I B R O XIII.



## PROPOSIZIONE I.

FIG. 222. *Se la retta AB è divisa in C secondo l' estrema, e media ragione, al maggiore segmento CA aggiunta la AD uguale alla metà di tutta la AB, sarà il quadrato di essa CD quintuplo del quadrato della metà di tutta la AB.*



**I**mperocchè posta  $AF$  uguale alla metà di  $AB$ , e perpendicolare ad essa, congiunta  $BF$ , e ad  $FB$  posta uguale  $FG$ , ed indi dalla porzione  $AG$  descritto il quadrato  $AGIC$ , segante la  $AB$  in  $C$ , questa è la costruzione, che determina la divisione di  $AB$  in  $C$ , in maniera che sia il quadrato  $AC$



$AC = ABC$ , rettangolo di tutta nel resto <sup>a</sup>, il <sup>a Prop. 2. lib. 2.</sup> che rende segata  $AB$  in  $C$  secondo l'estrema, e media ragione, per essere  $AC$  media proporzionale tra la intera  $AB$ , e la residua  $BC$ . Dunque essendo  $GA AC$ , ed  $= AD = AF = \frac{1}{2} AB$ , sarà  $CD = FG = FB$ ; ma posta  $AF = 1$  ed  $AB = 2$ , il cui quadrato  $= 4$ , il quadrato  $FB = a'$  quadrati d' $AF$ , e d' $AB = 1 + 4 = 5$ ; dunque ancora il quadrato  $CD$  è quintuplo del quadrato  $AD$ , cioè del quadrato della metà di  $AB$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE II.

*Se la retta  $CD$  ha il suo quadrato quintuplo del quadrato  $AD$ , posta la  $AB$  dupla di  $AD$ , sarà divisa in  $C$  secondo l'estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sarà la  $AC$ .* FIG. 223.

**I**L quadrato  $CD$  è uguale a' quadrati  $AD$ ,  $AC$ , ed a' due rettangoli  $DAC$  <sup>b + 11.</sup>; dunque essendo  $BA = 2 AD$ , sono li due rettangoli  $DAC = BAC$ , ed essendo il quadrato  $CD$  quintuplo del quadrato  $AD$ , siccome uguaglia li quadrati  $AD$ , ed  $AC$ , ed il rettangolo  $BAC$ , tolto di comune il quadrato  $AD$ , rimarrà il quadruplo del quadrato  $AD$  (che è il quadrato di  $AB$  doppia di  $AD$ ) uguale al quadrato  $AC$ , ed al rettangolo  $BAC$ ; ma è uguale al rettangolo  $ABC + BAC$ ; dunque il quadrato  $AC = ABC$ , e però  $AC$  è media proporzionale tra  $AB$ , e  $BC$ , onde è il maggiore segmento della divisione di  $AB$  nell'estrema, e media ragione. Il che ec.

**COROLLARIO.** Ancora posta dall'altra parte la FIG. 224.  
 $M \quad 2 \quad AB$

$AB$  dupla di  $AD$ , il cui quadrato uguagli la quinta parte del quadrato  $CD$ , farà la  $BC$  divisa in  $A$  secondo l'estrema, e media ragione, il di cui segmento maggiore è  $BA$ ; perchè essendo  $DC$  q.  $= 5 AD$  q.  $= AD$  q.  $+ 2 CAD + CA$  q., e  $2 CAD = CAB$  faranno  $4 AD$  q. (cioè  $AB$  q.)  $= CAB + CA$  q.  $= BCA$ ; dunque è chiaro il proposto.

## PROPOSIZIONE III.

FIG. 225. *Se il maggiore segmento  $AC$  della retta  $AB$  divisa secondo l'estrema, e media ragione, si dividerà per mezzo in  $E$ , la metà  $EC$  del maggiore segmento, col minore segmento  $CB$ , cioè la  $EB$ , può un quadrato quintuplo del quadrato  $CE$ .*

a 6. 11. **I**mperecchè il quadrato  $EB$  è uguale al rettangolo  $ABC$  col quadrato  $CE^a$ , ma  $ABC = AC$  quadrato, che è quadruplo del quadrato  $CE$ ; dunque il quadrato  $EB$  uguaglia il quadrato  $CE$ , ed il quadruplo di esso, e però è quintuplo del quadrato  $CE$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE IV.

FIG. 226. *Il quadrato di tutta la  $AB$ , col quadrato di  $CB$  segmento minore di essa divisa secondo l'estrema, e media ragione, sono tripli del quadrato del segmento maggiore  $AC$ .*

b 7. 11. **I** Due quadrati  $AB$ , e  $BC$  sono uguali a due rettangoli  $ABC$  col quadrato  $AC^b$ ; ma il rettangolo  $ABC = AC$  quadrato, dunque li due quadrati  $AB$ , e  $CB$  sono uguali a' due quadrati  $AC$  col quadrato medesimo  $AC$  un'altra volta

ta preso, e però sono uguali al triplo di esso quadrato  $AC$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE V.

*Alla retta linea  $AB$  divisa in  $C$  secondo l'estrema, e media ragione, aggiunta la  $AD$  uguale al maggiore segmento  $AC$ , sarà la  $BD$  divisa pure in  $A$  secondo l'estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sarà l'intera  $AB$ .* FIG. 227.

**E**ssendo  $AB$  ad  $AC$ , cioè alla  $AD$ , come  $AC$ , a  $CB$ , convertendo farà  $DA \cdot AB :: BC \cdot CA$ , e componendo  $DB \cdot BA :: BA \cdot AC = AD$ , dunque il quadrato  $AB = BDA$ , e però la  $BD$  è divisa in  $A$  secondo l'estrema, e media ragione, il di cui segmento maggiore è la  $AB$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE VI.

*L'uno, e l'altro segmento, il maggiore  $AC$ , ed il minore  $CB$  della retta  $AB$  proposta, e divisa in  $C$  secondo l'estrema, e media ragione, sono incommensurabili, non solo in lunghezza, ma ancora in potenza; cioè non sono come numero a numero, nè essi segmenti, nè i loro quadrati.* FIG. 228.

**I**mperochè aggiunta al segmento maggiore  $AC$  la  $AD = \frac{1}{2} AB$ , presa  $AD = 1$ , il quadrato  $CD$  è quintuplo di esso quadrato  $AD^2$ ; dunque essa  $CD = \sqrt{5}$ ; onde  $AC = \sqrt{5} - 1$ , e la  $BC = DB - DC = 3 - \sqrt{5}$ , essendo  $BD$  tripla di  $AD$ . Ora ne  $\sqrt{5} - 1$  a  $3 - \sqrt{5}$  può avere alcuna proporzione commensurabile di numero a numero, non potendo determinarsi in numero, nè in frazione di numeri. la radice quadra di cin-

que, non essendo verun quadrato quintuplo d' un altro quadrato; nè il quadrato della prima, che farebbe  $5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$  può essere commenturabile al quadrato dell' altra  $= 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$ , non essendo nè meno questi come numero a numero, ma in ragione di  $3 - \sqrt{5}$  a  $7 - 3\sqrt{5}$  (divisi per mezzo essi quadrati) dunque  $AC$ , e  $CB$  sono in lunghezza, ed in potenza incommensurabili. Il che ec.

## PROPOSIZIONE VII.

FIG. 229. *Nel pentagono equilatero ABCDE se vi sono tre angoli, contigui, o non contigui, tra di loro uguali, gli altri angoli pure saranno uguali ad essi.*

Essendo uguali i lati  $EA, AB, BC, CD$ , se gli angoli contenuti tra essi  $A, B, C$  sono uguali, sottese le basi  $EB, AC, BD$ , faranno pure tra di loro uguali; dunque gli angoli  $AEB, CAB, ABE, CBD, BCA, CDB$  sono uguali; dunque  $BF = FA$  e la rimanente  $FE = FC$ , onde i triangoli  $FED, FCD$  hanno tutti i lati uguali, e però l'angolo  $FCD = FED$ , ed aggiunti gli uguali  $AEB, ACB$ , l'angolo  $AED$  farà uguale a  $BCD$ . Similmente si proverebbe  $CDE = ABC$ ; dunque tutti gli angoli del pentagono faranno uguali.

Se poi fossero uguali gli angoli  $BCD, CDE$  al non contiguo  $EAB$ , riuscendo colle sottese  $DB, EP$  gli angoli  $AEB, BDC$  uguali, e per essere  $BE = BD$ , ancora essendo  $BDE = BED$ , dunque tutto l'angolo  $AED = CDE$ , e però sono ancora tre angoli contigui uguali, onde tutti gli altri sono uguali. Il che ec. PRO-



## PROPOSIZIONE VIII.

*Nel pentagono equilatero ABCDE, che ancora FIG. 230  
sia equiangolo, sottese due rette BD, CE a due  
angoli contigui, si segheranno in F secondo l'estre-  
ma, e media ragione, ed i loro maggiori segmenti  
BF, EF saranno uguali ad un lato BC, ovvero  
ED di esso Pentagono.*

**C**ircofscritto ad esso pentagono un circolo ABD,  
gli archi sottesi da' lati di esso sono u-  
guali; dunque l'angolo  $FCD = FDC$ , e l'ester-  
no  $BFC$  farà duplo di ciascuno di essi, cioè  $= 2$   
 $FCD$ ; ma essendo pure l'arco  $BAE$  doppio di  
 $ED$ , ancora l'angolo  $BCF = 2 FCD$ ; dunque  
 $BFC = BCF$ ; e però  $BF = BC$ ; ed essendo gli  
triangoli  $BCD$ ,  $FCD$  equiangoli, farà  $BD \cdot DC$   
 $(= BF) :: DC (= BF) \cdot FD$ ; dunque  $BD$  è  
divisa in  $F$  secondo l'estrema, e media ragione,  
ed il maggiore segmento è  $BF = BC$ ; e l'istef-  
so si dimostrerà di  $CE$ , che sia divisa in  $F$  in ra-  
gione media, ed estrema, essendo  $CE \cdot EF :: EF$   
 $FC$ , ed  $EF = CD$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE IX.

*Se il lato AB del decagono inscritto nel circolo FIG. 231.  
ABE si congiunga col lato dell'esagono uguale a  
BD, cioè al raggio CA di esso circolo, sarà sega-  
ta la AD in B, secondo l'estrema, e media ragio-  
ne, il di cui maggiore segmento sarà BD uguale  
al lato dell'Esagono.*

**T**irato il diametro  $ACE$ , e congiunte le rette  
 $CB$ ,  $CD$ , essendo l'arco  $AB$  la quinta par-

te della semiperiferia  $ABE$ , e però  $BE$  quadruplo di  $AB$ , l'angolo  $ECB$  farà quadruplo di  $ACB$ ; ma il medesimo  $ECB$  è duplo di  $ABC$ , ed  $ABC$  è duplo di  $BCD$  (essendo non solamente  $BC = CA$ , ma ancora  $= BD$ , lato dell'esagono) dunque  $ECB$  è quadruplo ancora dell'angolo  $BCD$ ; farà dunque  $ACB = BCD$ , e l'angolo  $DCA = DAC = ABC$ , essendo ciascuno doppio di  $BCD$ ; però  $DC = DA$ ; ma  $DC \cdot CA :: DB \cdot BA^2$ , dunque ancora  $AD \cdot DB :: DB \cdot BA$ ; onde  $AD$  è divisa in ragione media, ed estrema, il di cui maggiore segmento è  $BD$ . Il che dovea dimostrarsi.

a 3. VI.

## PROPOSIZIONE X.

FIG. 232.

*Il lato  $AB$  del pentagono  $ABDEF$  equilatero, ed equiangolo, ha il suo quadrato uguale al quadrato del lato  $AH$  del decagono inscritto nel medesimo cerchio, ed al quadrato del raggio  $CH$ , cioè del lato dell'esagono, che s'inscrive nel medesimo.*

**S**I conduca il diametro  $ACK$ , il quale dividerà per mezzo l'arco  $DE$  in  $K$ , e diviso pel mezzo l'arco  $AH$  in  $I$ , si congiungano al centro  $IC$ , e  $BC$ . Essendo l'arco  $BD = AB$ , doppio di  $AH$ , o di  $BH$ , e  $DK$  pure  $= AH$ , doppio di  $HI$ , dunque l'arco  $BDK$  è doppio di  $BHI$ , però l'angolo  $BCK = 2 BCI = 2 BAK$ ; dunque  $BCL = BAC$ , onde li triangoli  $ABC$  e  $CBL$ , che hanno l'angolo  $B$  comune, sono equiangoli, e farà  $AB \cdot BC :: BC \cdot BL$ , dunque il quadrato di  $BC = ABL$ . Congiunta pure la retta  $HL$ , farà uguale ad  $AL$ , perchè la  $CI$  divide la corda  $AH$  per mezzo, e ad angoli retti, onde il

trian-

triangolo  $AHL$  farà ifofcele, fimile all' altro  $HBA$ , per effere l' angolo  $AHL = HAL = ABH$ , e l' angolo  $A$  comune, dunque  $AB \cdot AH :: AH \cdot AL$ , e però il quadrato  $AH = B \cdot AL$ ; ma il quadrato  $AB = AB \cdot L + B \cdot AL$ , dunque è uguale a' quadrati  $BC$ , ( che è il raggio uguale al lato dell' efagono ) ed  $AH$ , che è il lato del decagono. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XI.

*Diviso il raggio d' un cerchio  $CB$  in  $E$  secondo l' estrema . e media ragione , il di cui maggiore segmento sia  $CE$  , il lato del pentagono regolare da inscriverti in effo cerchio , è medio proporzionale tra il raggio  $CB$  , e una retta composta da effo raggio , e dal segmento minore ,  $CB + BE$  : che perciò dirassi effo lato del pentagono una irrazionale minore , rispetto al raggio preso per razionale .* FIG. 233.

**D**Al centro si alzi sopra al diametro  $AB$  la perpendicolare  $CD$ , e si congiunga  $DE$ , e prolungata  $EB$  in  $G$ , sia  $BG = CB$ . Effendo  $AC = BC \cdot CE :: CE \cdot EB$ , la somma degli antecedenti  $BC + CE (= AE)$  alla somma de' conseguenti  $CE + EB (= AC)$  farà come un antecedente  $CB$ , ovvero  $AC$  ad un conseguente  $CE$ ; dunque ancora la  $AE$  è divisa in  $C$  secondo l' estrema, e media ragione, effendo  $AE \cdot AC :: AC \cdot CE$ , ed il segmento maggiore  $AC$  effendo il lato dell' efagono da inscriverti in effo cerchio, farà  $CE$  il lato del decagono, il quale è il segmento minore della retta divisa in tale estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sia il lato dell' efagono; dunque effendo il quadrato  $DE$  uguale al quadrato del raggio  $CD$  uguale al lato dell' efagono.

fig. XIII. farò  $DE$  il lato del pentagono <sup>a</sup>; e perchè  $CBE = GBE$ , uguaglia il quadrato  $CE$ , ed il quadrato  $BG$  uguaglia il quadrato  $DC$ , farò il rettangolo  $EGE$ , che  $= GBE + BG$  quadrato, uguale a' quadrati  $CE$ , e  $CD$ , cioè uguale al quadrato  $DE$ ; dunque il lato  $DE$  del Pentagono è medio proporzionale tra  $BG$ , e  $GE$ , cioè tra il raggio del cerchio, e la retta composta del raggio, e del segmento minore  $BE$  di esso raggio  $CB$  diviso in  $E$ , secondo l' estrema, e media ragione. Il che ec. E perciò esso lato del Pentagono è una linea irrazionale minore, così chiamata da Euclide.

### PROPOSIZIONE XII.

TAV. XIII.

FIG. 234.

*Il quadrato del lato  $AB$  d' un triangolo equilatero  $ABD$  inscritto nel cerchio ; è triplo del quadrato del raggio  $AC$ .*

**S**I tiri il diametro  $ACE$ , e si congiunga  $BE$ , che farà un lato dell' esagono uguale al medesimo raggio  $AC$ ; dunque li due quadrati  $AB$ , e  $BE$  essendo uguali al quadrato del diametro  $AE$ , quadruplo del quadrato del raggio  $AC$ , tolti li due quadrati uguali  $BE$ ,  $AC$ , rimane il quadrato  $AB$  triplo del quadrato  $AC$ . Il che ec.

### PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

FIG. 235.

*Nella data sfera  $ADEC$  inscrivere un Tetraedro, cioè una Piramide composta da quattro triangoli equilateri, e dimostrare, che il quadrato del diametro  $AC$  di essa sfera è sesquialtero del quadrato del lato  $AE$  di esso Tetraedro  $AEFG$ .*

Sia



Sia  $ADCE$  un cerchio massimo della sfera, il di cui diametro  $AC$  si divida in  $B$ , di maniera che  $BC$  sia la sua terza parte; indi per il punto  $B$  si seghi la sfera col cerchio  $GDE$  perpendicolare al diametro  $AC$ , ed in questo cerchio descrivasi un triangolo equilatero  $GEF$ , indi al vertice  $A$  si congiungano le rette  $EA$ ,  $FA$ ,  $GA$ . Questo sarà il Tetraedro ricercato  $AELFG$ : imperocchè tutti i lati  $AE$ ,  $AF$ ,  $AG$  sono tra di loro uguali, essendo il quadrato di ciascuno uguale a' quadrati dell'asse  $AB$ , e del raggio  $BE$ , ovvero  $BF$ , o  $BG$ ; ed in oltre ciascuno è uguale a qualsivoglia lato del triangolo equilatero  $GEF$ , perchè  $AC \cdot AB :: AE$  quadrato ad  $AB$  quadrato, ed  $AB \cdot BC :: AB$  quadrato ad  $EB$  quadrato, dunque per l'uguaglià ordinata  $AC \cdot BC :: AE$  quadrato ad  $EB$  quadrato; ma  $AC$  è tripla di  $BC$ ; dunque il quadrato  $AE$  è triplo del quadrato  $EB$ , raggio del cerchio  $GDE$ ; ma del medesimo è triplo il lato  $EF$  del triangolo equilatero  $GFE$ <sup>a</sup>; dunque  $AE = EF$ , e così gli altri lati; e però sono tutti equilateri i triangoli  $AEF$ ,  $AGF$ ,  $AGE$ ,  $GFE$ , onde questo solido è un Tetraedro, ed il quadrato del diametro della sfera  $AC$  al quadrato del lato  $AE$  del Tetraedro, è sesquialtero, essendo come  $CA$  ad  $AB$ , che è  $:: 3 \ 2$ . Il che ec.

## PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

*Nella data sfera  $ADFB$  inscrivere un Ottaedro da otto triangoli equilateri compreso, e dimostrare, che il quadrato del diametro  $AB$  della sfera è duplo del quadrato di qualunque lato  $AE$  dell'Ottaedro  $AEBFDG$ .*

FIG. 236

Nel

**N**El cerchio massimo  $ADBE$  tirati li due diametri  $AB$ ,  $DE$  tra di loro perpendicolari, si tiri ancora  $FCG$  perpendicolare al piano di esso, per cui, e per  $DE$  passerà un altro cerchio massimo  $DFEG$  perpendicolare all'altro, e congiunte le rette  $AD$ ,  $AF$ ,  $AG$ ,  $AE$ ,  $BD$ ,  $BF$ ,  $BG$ ,  $BE$ , faranno tutte tra di loro uguali, perchè i loro quadrati uguagliano li due quadrati de' raggi, tirati dal centro a' loro termini, che tra di loro disposti sono ad angolo retto; e congiunte ancora le rette  $FE$ ,  $EG$ ,  $GD$ ,  $DF$ , faranno uguali all'altre, perchè pure i loro quadrati sono uguali a' due quadrati de' raggi, al di cui angolo retto si oppongono; tutti adunque li triangoli  $AFE$ ,  $BEF$ ,  $AFD$  ec. sono equilateri, come ancora si raccoglie dall'essere ciascun lato la corda sottesa ad un quarto della periferia del massimo cerchio; che però il solido  $AEBFDG$  è un ottaedro, ed il quadrato del diametro  $AB$  è duplo del quadrato del lato  $EA$ , essendo a due quadrati  $EA$ ,  $EB$  uguale, li quali sono uguali tra loro. Il che ec.

#### PROPOSIZIONE XV. PROBL.

FIG. 237.

*Nella data sfera inscrivere un Cubo, da sei quadrati compreso  $ANFOIDKB$ , e dimostrare, che il quadrato del diametro  $DF$  della sfera sia triplo del quadrato di qualunque lato  $AD$  di esso cubo.*

**N**El massimo cerchio  $ABH$  tirato qualunque diametro  $AD$ , si prenda  $DE$  uguale a un terzo di esso, ed eretta la perpendicolare  $EA$ , congiunte le rette  $AD$ ,  $AF$ , e compiuto il rettangolo  $AFBD$ , si seghi la sfera con due piani per-

perpendicolari a quel cerchio  $ABH$ , tradotti per le rette  $AF, DB$ , che faranno due cerchj uguali  $ANFO, DKBI$ , intorno agli uguali diametri  $AF, DB$ , a' quali si tirino gl' altri diametri  $OGN, ILK$  perpendicolari, che li seghino ad angoli retti, e tirate le corde  $AN, NF, FO, OA$ , e  $DK, KB, BI, ID$ , sottoposte ad uguali quadrati, e però uguali tra loro, si congiungano le altre rette  $NK, OI$  uguali pure all' altre  $AD, FB$ ; farà questo il Cubo ricercato; perchè essendo  $FD$  tripla della  $DE$ , ed il quadrato  $FD$  al quadrato  $AD$ , come  $FD$  a  $DE$ , farà il quadrato  $DF$  (cioè gli due  $AF$  ed  $AD$ ) = al triplo del quadrato  $AD$ , e però il quadrato  $AF$  duplo farà del quadrato  $AD$ ; ma l' istesso quadrato  $AF$  è duplo del quadrato  $AN$ , essendo uguale alli due  $AN, NF$  tra di loro uguali; dunque  $AD$  è uguale ad  $AN$ , e però tutte le rette, che comprendono questo solido, sono uguali, e costituiscono sei quadrati  $ADKN, NKBF, FBIO, OIDA, AOFN, DKBI$ , uguali, che contengono questo Cubo, e qualunque di tali quadrati è la terza parte del quadrato del diametro della sfera, essendo il quadrato  $DF$  triplo del quadrato  $AD$ . Il che ec.

COROLLARIO. Essendo il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato dell' inscritto Tetraedro in ragione sesquialtera <sup>a</sup>, cioè come 3 a 2; e lo stesso quadrato del diametro al quadrato del lato del cubo, come 3 ad 1; dunque il quadrato del lato del Tetraedro, col quadrato del lato del cubo, è uguale al quadrato del diametro della sfera, essendo  $2 + 1 = 3$ .

PRO-

## PROPOSIZIONE XVI. PROBL.

FIG. 238. *Nella data sfera inscrivere un Icosaedro, compreso da venti triangoli equilateri uguali, e dimostrare, che il diametro della sfera al lato dell' Icosaedro, stà come la somma del lato dell' esagono, e di due lati del decagono al lato del pentagono inscritto nel medesimo cerchio, perloche chiamasi esso lato dell' Icosaedro da Euclide una linea Irrazionale minore.*

**S**ia  $CI$  media proporzionale tra il raggio  $CA$  della sfera, e la quinta parte di esso, ed eretta sopra al diametro  $AB$ , nel cerchio massimo  $AEF$  la perpendicolare  $OID$ , per lo centro  $C$  condotto l'altro diametro  $DCF$ , si conduca  $FME$  parallela ad  $OID$ , e per queste rette  $DO$ ,  $EF$  si feghi la sfera con due piani perpendicolari a quel massimo cerchio, che faranno due cerchj uguali  $DKOP$ ,  $ERFQ$ , ugualmente distanti dal centro  $C$ , essendo  $CI = CM$ . Indi in questi cerchj si descrivano da' punti opposti  $D, F$  li pentagoni  $DKHLP$ ,  $FRGNQ$ , e di poi si congiungano le rette  $AD$ ,  $AK$ ,  $AH$ ,  $HF$ ,  $HR$ ,  $RK$ ,  $GD$ ,  $DN$ ,  $NB$ ,  $BG$ ,  $BR$ ,  $BF$  ec. ne riusciranno quindi venti triangoli equilateri, che comprenderanno il proposto Icosaedro. Imperocchè si congiungano ancora le rette  $GE$ ,  $NE$ ,  $DE$ . Essendo  $IC$  media proporzionale tra il raggio  $CA$ , ovvero  $CD$ , e la quinta parte di esso, farà il quadrato  $CD$  del quadrato  $CI$  quintuplo, e però  $DI$  quadruplo dello stesso  $CI$ , di cui pure è quadruplo il quadrato della dupla  $IM$ , ovvero  $DE$ ; però  $DI = IM$ , e  $DIME$  è un qua-



quadrato; ed essendo  $GE$  la metà dell'arco  $GEN$  sottoteso dal lato del pentagono  $GN$ , sarà  $GE$  un lato del decagono inscritto nel medesimo cerchio  $ERQ$ , e  $DE$  essendo uguale a  $EM$  raggio di esso, o lato dell'esagono, che si potrebbe inscrivere nel medesimo cerchio, faranno li due quadrati  $DE$ ,  $EG$ , cioè il quadrato del lato  $DG$  (essendo  $DEG$  angolo retto, per essere  $DG$ , ed  $IM$  perpendicolari al piano del cerchio  $ERQ$ ) uguale <sup>a 10. XIII.</sup> al quadrato del lato del pentagono  $GN^a$ ; per tanto le rette  $DG$ ,  $GN$ ,  $DN$  sono uguali, e però il triangolo  $DGN$  è equilatero, e così tutti gli altri triangoli intercetti fra li due cerchi  $DHP$ ,  $ERQ$ , congiungenti gli angoli de' pentagoni inscritti in essi, sono equilateri tutti tra loro uguali. Che poi ancora li triangoli  $BRF$ ,  $BRG$ ,  $AH$ ,  $K$  ec. siano equilateri uguali agli altri, si prova, perchè essendo il quadrato  $CD$  quintuplo del quadrato  $CI$ , e la  $MI$  dupla di  $CI$ , sarà la  $AA$  divisa in  $I$  secondo l'estrema, e media ragione <sup>b Coroll. prop. 2. XIII.</sup>, il di cui maggiore segmento essendo  $MI$  uguale al raggio  $ID$  del cerchio  $DHL$ , il segmento minore  $IA$  sarà uguale al lato del decagono <sup>c 9. XIII.</sup>, siccome  $MI$  uguaglia quello dell'esagono; dunque il quadrato  $AD$  essendo uguale a' quadrati  $DI$ , ed  $AI$ , è uguale a' quadrati del lato dell'esagono, e del decagono, e però uguaglia il quadrato del lato  $DK$  del pentagono <sup>d 10. XIII.</sup>; e così ancora gli altri lati  $AH$ ,  $BN$  ec. sono uguali a' lati di essi pentagoni; onde fanno da per tutto li triangoli equiangoli; e però il solido da essi compreso è l'Icosaedro, come era proposto, ed è manifesto, essere il diametro  $AB$  della sfera  $= IM + AI + MB$ , uguale

guale al lato dell'esagono con due lati  $AI$ , ed  $MB$  del decagono inscritto nel cerchio  $DHL$ , ed il lato dell'Icosaedro è il lato del pentagono inscritto in esso. Il che era da dimostrarsi.

### PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

FIG. 239.

*Nella data sfera inscrivere un Dodecaedro contenuto da dodici pentagoni il di cui lato si dimostri essere un Residuo irrazionale, come Euclide lo chiama, perchè sta al diametro della sfera, come il lato d' un triangolo equilatero al lato del decagono inscritto nel medesimo cerchio.*

**S**I dividano per mezzo in  $LKH$  i lati  $CB$ ,  $DE$ ,  $DC$  di un cubo  $BCDAM$  da inscriverti nella medesima sfera, e congiunta l'  $LK$  divisa altresì per mezzo in  $N$ , si congiunga  $HN$ , e segate ambedue le rette  $NL$ ,  $NK$ , secondo la media, ed estrema ragione, di cui i segmenti  $NP$ ,  $NO$  siano li maggiori, edalzata al piano del quadrato  $BCDE$  dal punto  $N$  la perpendicolare  $VN = NP$ , e condotta per lo punto  $V$  la  $SVR$  parallela ad  $LK$ , si tirino nel piano  $RVN$  le rette  $OR$ ,  $PS$  parallele, ed uguali ad  $NV$ , e prolungata  $VN$  in  $Z$ , posta  $NZ = PL$ , nel piano  $VNH$  si tiri  $ZT$  parallela ad  $NH$ , e congiunta  $VH$  conveniente colla  $ZT$  in  $T$ , siano tirate le rette  $TD$ ,  $DR$ ,  $TC$ ,  $CS$ , e così farà fatto un pentagono regolare  $SRDTC$ , li cui angoli giungeranno alla superficie sferica circoscritta a quel cubo, ed è nel piano delle due rette  $SR$ ,  $CD$  tra di loro parallele, come parallele alla terza  $LK$ . E quanto all' uguaglià de' lati si prova così. Congiunta la  $CP$ , il suo quadrato ugua-

glia

glia li due quadrati  $CL$ ,  $LP$ , onde essendo  $CL = NL$ , ed  $LP$  il minore segmento di essa  $LN$ , divisa secondo l'estrema, e media ragione, farà il quadrato  $CP$  triplo del quadrato  $PN^2$ , ed aggiunto il quadrato  $PS = PN$ , farà il quadrato  $CS$  quadruplo dell'altro  $PN$ , e però  $PS = PO = SR$ . Similmente  $DR$  si proverà uguale alla  $SR$ . Che poi ancora  $DT$  sia uguale ad  $SR$ , tirata  $HQ$  parallela ad  $NZ$ , gli farà uguale, ed essendo  $HQ \cdot QT :: VN \cdot NH :: PN \cdot NL :: LP \cdot PN :: NZ (= HQ) \cdot VN$ , dunque  $QT = VN$ , ed il quadrato  $HT$  uguaglia li quadrati  $HQ$ , e  $QT$ , dunque uguaglia li quadrati  $LP$ ,  $PS$ , ed aggiunto il quadrato di  $HC = CL = LN$ , farà il quadrato  $CT = a'$  quadrati  $PL$ ,  $LC$ , e  $PS$ , e però lo stesso  $CT$  è uguale al quadrato  $CS$ , che ad essi è uguale. Similmente il quadrato  $DT$  è uguale a  $CS$ ; dunque tutti i lati del pentagono si provano uguali. Ancora gli angoli sono uguali, perchè essendo  $NL$  divisa secondo l'estrema, e media ragione in  $P$ , aggiuntovi  $NO = NP$  maggiore segmento, farà ancora  $OL$  divisa in  $N$  secondo l'estrema, e media ragione <sup>b</sup>, <sup>b 5. XIII.</sup> il di cui maggiore segmento farà  $NL$ , ed  $NO = OR$  il minore; dunque li due quadrati  $LO$ ,  $OR$  sono il triplo del quadrato  $NL^2$  <sup>c</sup>, ed aggiunto il quadrato  $LC = NL$ , farà la somma de' quadrati  $OL$ ,  $OR$ ,  $LC$ , cioè  $OR$ , ed  $OC$ , o pure il quadrato  $CR$  uguale a 4 quadrati  $NL$ , cioè al quadrato  $LK$ , ovvero  $CD$ ; dunque  $CR = CD$ , e lo stesso si dimostrerebbe di  $DS$ ; però li triangoli  $CSR$ ,  $CTD$ ,  $DRS$ , essendo tutti i lati dell'uno uguali a' lati dell'altro, e le basi uguali, ave-

ranno gli angoli uguali; onde ancora gli altri due angoli del pentagono sono uguali a qualunque di questi tre <sup>a</sup>, però questo Pentagono è regolare. E perchè il centro della sfera  $X$  è nel mezzo del cubo inscritto in essa, farà  $XN = LN$ , ed  $NV = NP = NO$ , dunque  $XV$  è pure divisa in  $N$  secondo l'estrema, e media ragione, il di cui minore segmento è  $NV = VR$ , onde li due quadrati  $XV$ ,  $VR$ , cioè il quadrato  $XR$  è triplo del quadrato  $XN$  <sup>b</sup>, onde  $XR$  è uguale al raggio della sfera, perchè il suo quadrato è triplo del quadrato della metà del lato cubico, siccome il quadrato del diametro è triplo del quadrato dell'intero lato di esso cubo <sup>c</sup>; e similmente  $XT$  è uguale al raggio della sfera, essendo il punto  $T$  vertice del triangolo  $CTD$  ugualmente alto sopra il quadrato del cubo  $CDAG$ , come il punto  $R$ , vertice dell'uguale triangolo  $DRE$ , è alto sopra l'altro quadrato  $CDEB$ , cui ugualmente s'inclina esso triangolo, essendo ne' triangoletti  $HQT$ ,  $ROK$ , il lato  $HQ (= NZ) = OK$ , ed il lato  $QT = OR$ , intorno ad angoli retti  $HQT$ ,  $KOR$ , e però  $HT = KR$ , e l'angolo  $THQ = RKO$ ; onde tutte le distanze degli angoli del pentagono  $RDTCs$  dal punto  $X$  essendo uguali a' raggi della sfera, tutto il dodecaedro compreso da questi dodici pentagoni, che si descriverebbero sopra i dodici lati del cubo, come questo è descritto sopra  $CD$ , in modo che il lato del cubo sia la corda sottesa ad un angolo di esso pentagono, resterà inscritto nella medesima sfera; il quadrato del cui diametro essendo triplo del quadrato del lato del cubo <sup>c</sup>, come il quadra-



to del lato d'un triangolo equilatero è triplo del quadrato del lato dell' esagono <sup>a</sup> ; ed il quadrato del lato del cubo  $LK$  al quadrato del lato del pentagono  $SR$ , essendo, come il quadrato  $NK$  al quadrato  $NO$ , o come il quadrato  $NO$  al quadrato  $OK$  (per essere in estrema, e media ragione divisa  $NK$  in  $O$ , ed  $NO$  il segmento maggiore,  $OK$  il minore) o come il quadrato dell' esagono al quadrato del decagono (essendo il lato dell' esagono al lato del decagono, come il maggiore segmento al minore della retta divisa in estrema, e media ragione <sup>b</sup>) dunque per l'uguagli- <sup>b 9. XIII.</sup> tà ordinata il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato  $SR$  del dodecaedro è come il quadrato del triangolo equilatero, al quadrato del lato del decagono; e così il diametro della sfera al lato del dodecaedro, è come un lato del triangolo equilatero a quello del decagono inscritto nel medesimo cerchio. Il che ec.

## PROPOSIZIONE XVIII. PROBL.

*Esporre tutti i lati delle passate cinque figure soli- FIG. 240.  
de, e paragonarle tra loro.*

**S**ia  $AHB$  un semicircolo massimo della sfera, e al diametro  $BA$  eretta la perpendicolare  $AE$  uguale ad esso diametro, dal centro  $C$  si tiri la  $CE$ , segante le periferia in  $D$ , e si tiri la  $DI$  perpendicolare al diametro, e presa  $BF = \frac{1}{3}$  di  $AB$ , si alzino le perpendicolari  $FG$ ,  $CH$ , e si congiungano le rette  $AD$ ,  $AH$ ,  $AG$ ,  $BG$ , e questa divida in  $K$ , secondo l' estrema, e media ragione.

N 2

Ef-

Essendo  $3 \cdot 2 :: AB \cdot AF :: AB$  q.  $AG$   
 a 13. XIII. q. , farà  $AG$  il lato del Tetraedro <sup>a</sup>; ed ef-  
 sendo  $2 \cdot 1 :: AB \cdot AC :: AB$  q.  $AH$  q. ,  
 b 14. XIII. farà  $AH$  il lato dell' ottaedro <sup>b</sup> , ed ancora  
 $3 \cdot 1 :: AB \cdot BF :: AB$  q.  $BG$  q. , dun-  
 c 15. XIII. que  $BG$  è il lato del Cubo <sup>c</sup>; ed essendo  $AE$  du-  
 pla di  $AC$  , farà ancora  $DI$  dupla di  $CI$  , e però  
 il quadrato  $DI$  è quadruplo del quadrato  $CI$  , onde  
 li due quadrati  $DI$  .  $CI$  . cioè il quadrato del rag-  
 gio  $CD$  , o vero  $CA$  è quintuplo del quadrato  $CI$  ;  
 onde essendo  $CI$  media proporzionale tra il rag-  
 gio  $CA$  , e la quinta parte di esso , eretta la per-  
 pendicolare  $DI$  , e congiunta la  $AD$  , farà questa ,  
 per la costruzione della Proposizione 15. il lato  
 dell' Icosaedro ; ed essendo  $BK$  la maggior por-  
 zione di  $BG$  segata secondo l' estrema , e media  
 d 17. XIII. ragione , farà essa  $BK$  il lato del dodecaedro <sup>d</sup> .  
 Dunque essi lati  $AG$  ,  $AH$  ,  $BG$  ,  $AD$  ,  $BK$  , sono i  
 lati delle cinque figure solide inscritte nell' istessa  
 sfera ; e presa  $AB = \sqrt{60}$  , faranno  $AG = \sqrt{40}$  ;  
 $AH = \sqrt{30}$  ;  $BG = \sqrt{20}$  ;  $AD = \sqrt{30} - \sqrt{180}$  ( per-  
 chè  $AC = \sqrt{15}$  , e  $CI = \sqrt{3}$  essendo il suo quadra-  
 to la quinta parte del quadrato  $AC$  , quarta parte  
 del quadrato  $AB$  ; onde  $AI = \sqrt{15} - \sqrt{3}$  , però  
 il suo quadrato  $= 15 + 3 - 2\sqrt{45} = 15 + 3 - \sqrt{180}$  , ed aggiunto il quadrato  $DI = 12$  , à  $AD$   
 $= \sqrt{10} - \sqrt{180}$  ) e finalmente  $BK = 5 - \sqrt{5}$  :  
 imperocchè , essendo  $BG = \sqrt{20}$  , la quale  $= 2$   
 $\sqrt{5}$  e chiamando il maggiore segmento  $BK = x$  ,  
 farà  $2\sqrt{5} \cdot x :: x \cdot 2\sqrt{5} - x$  , e però  $x^2 = 4$   
 $\times 5 - 2\sqrt{5}x = 20 - 2\sqrt{5}x$  , e trasportan-  
 do quest' ultimo termine , ed aggiungendo dall' una ,  
 e dal-

e dall' altra parte il quadrato di  $\sqrt{5}$ , farà  $xx + 2\sqrt{5}x + 5 = 25$ , e prese le radici  $x + \sqrt{5} = 5$ , dunque  $x$ , cioè  $BK = 5 - \sqrt{5}$ , il di cui quadrato essendo  $25 + 5 - 10\sqrt{5} = 30 - \sqrt{500}$ , però esso lato  $BK = \sqrt{30 - \sqrt{500}}$ .

I L F I N E.

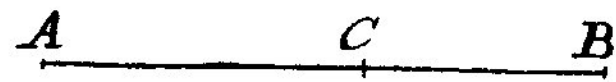
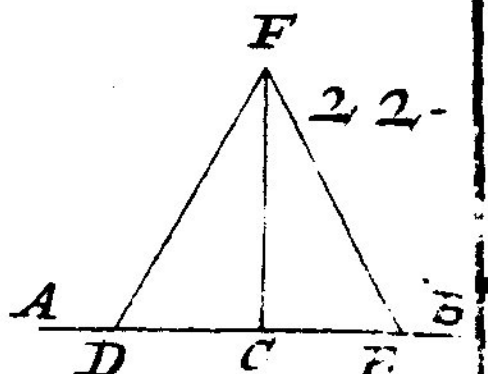
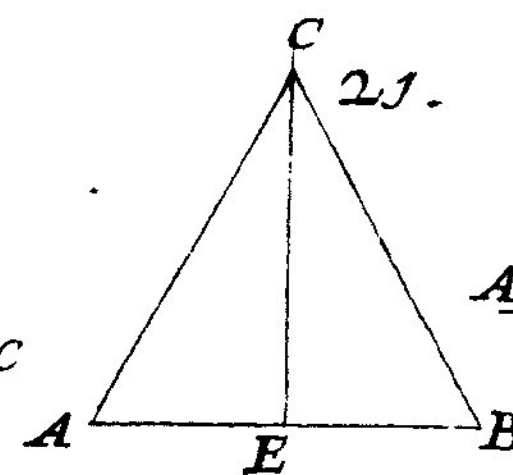
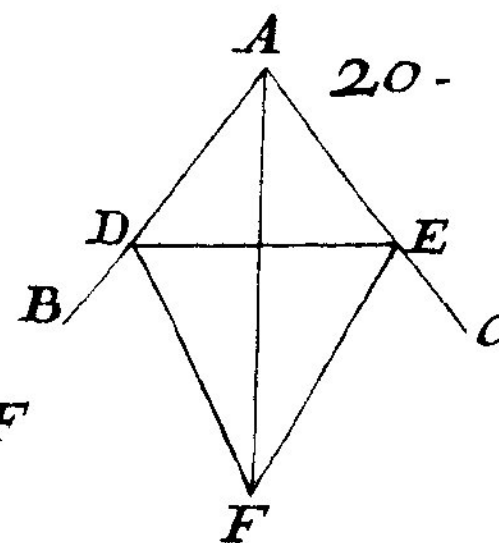
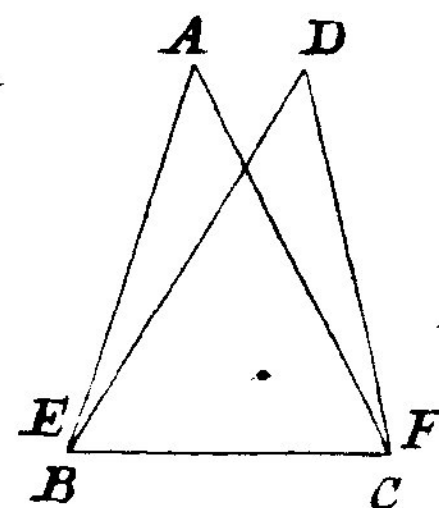
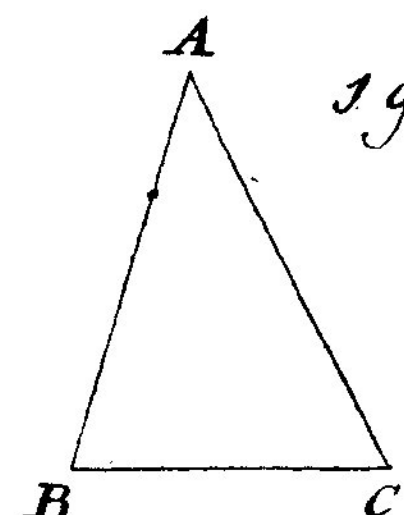
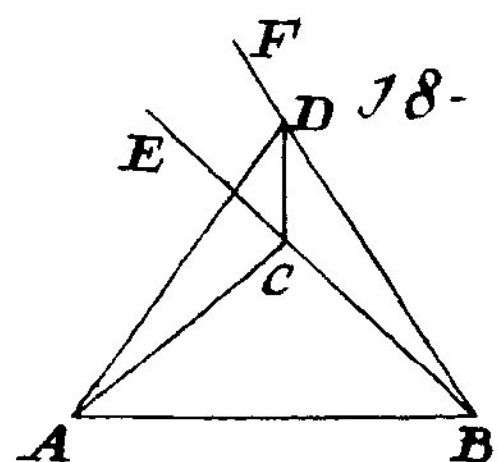
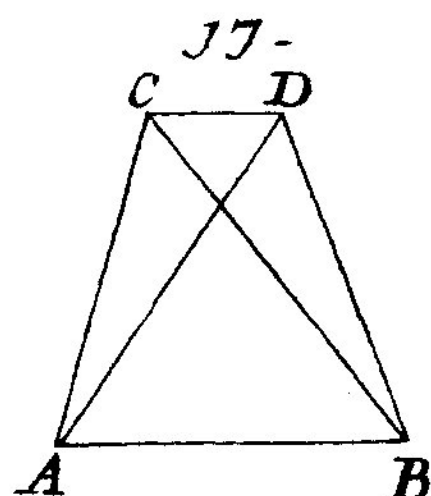
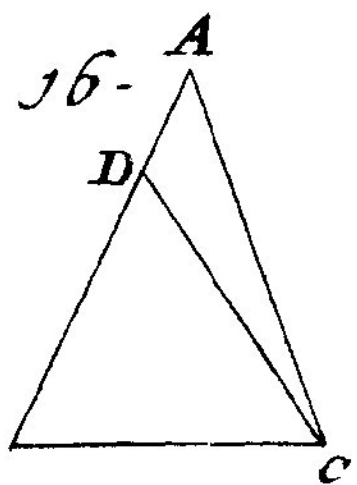
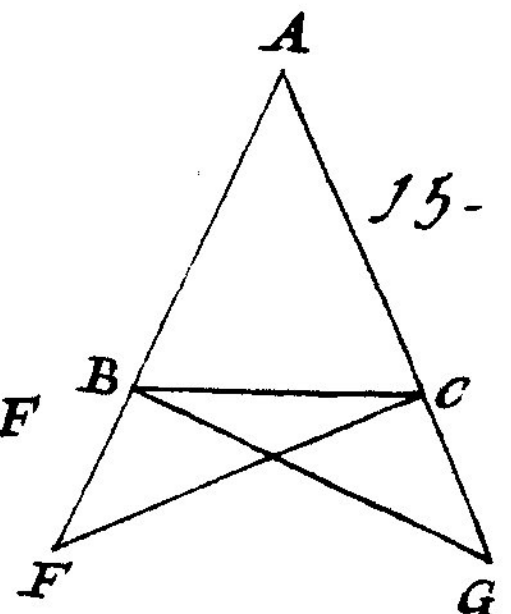
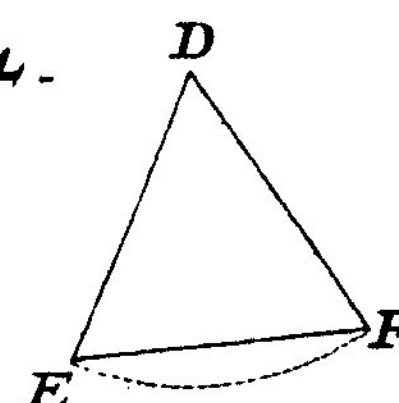
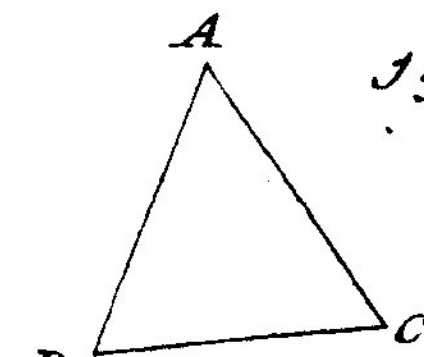
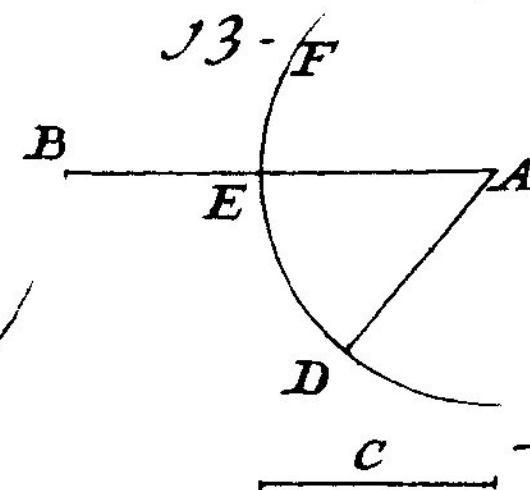
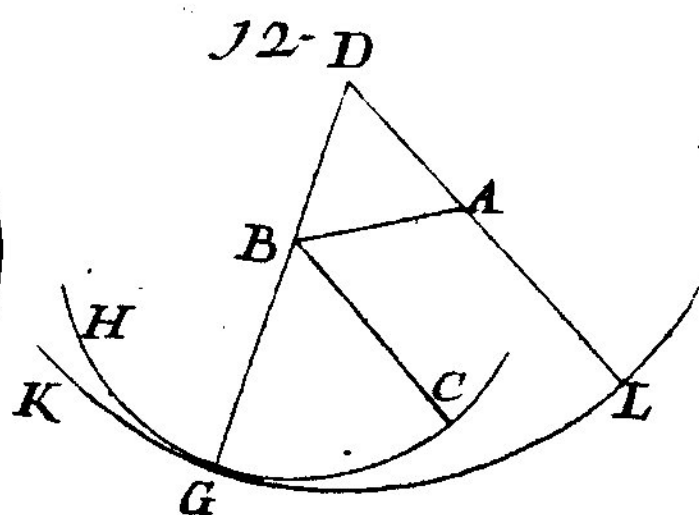
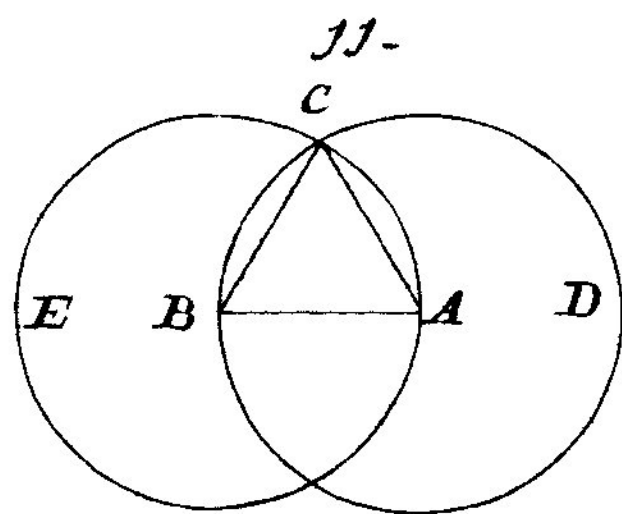
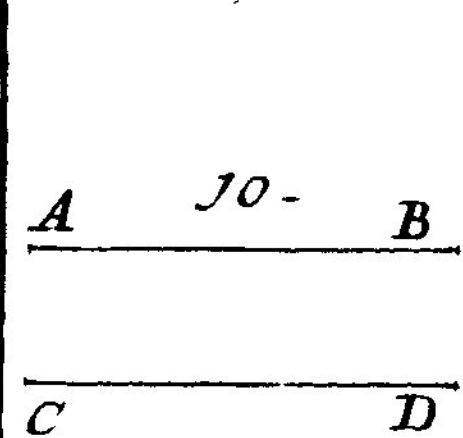
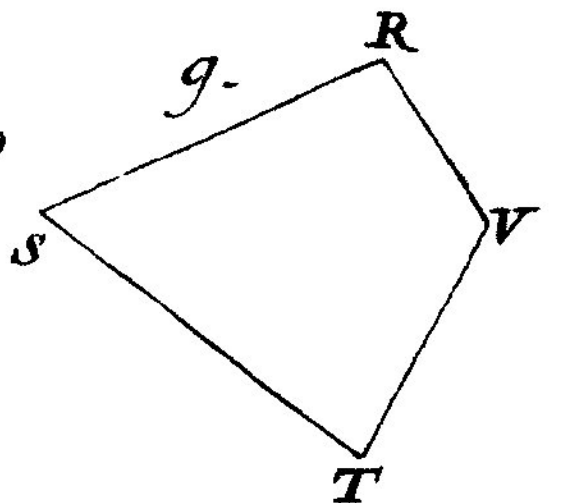
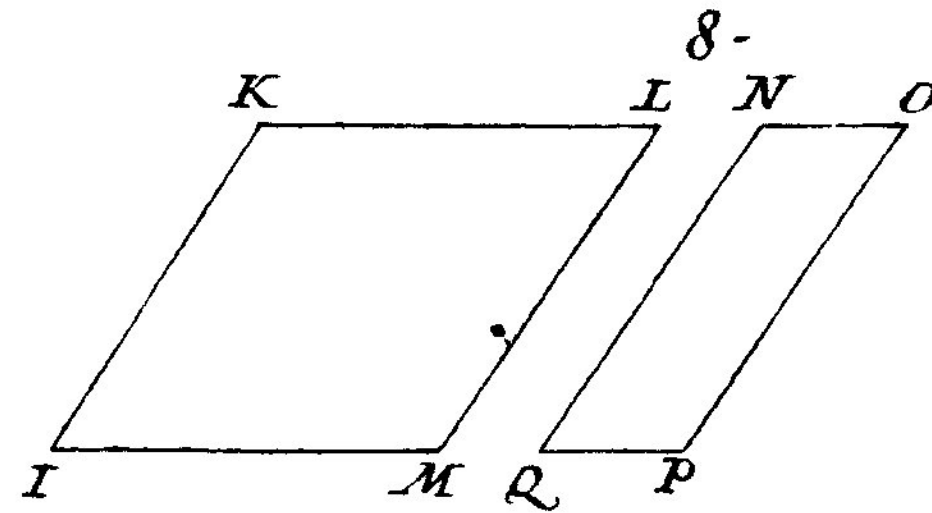
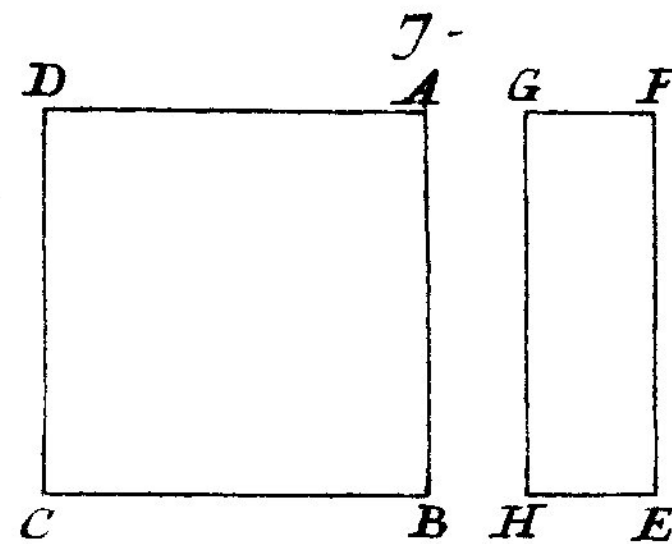
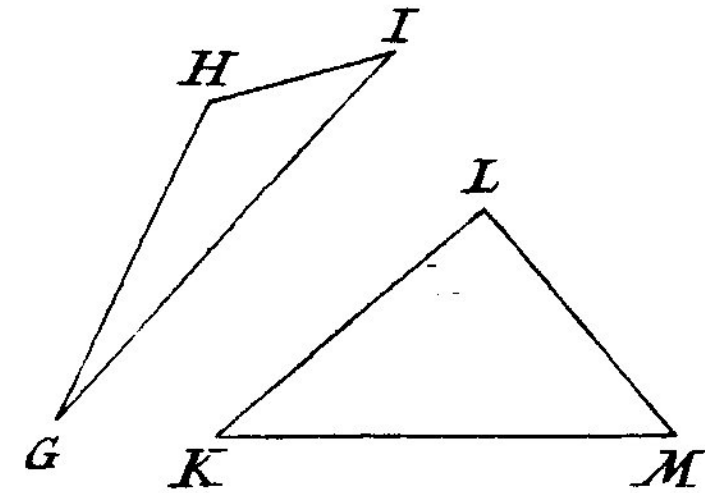
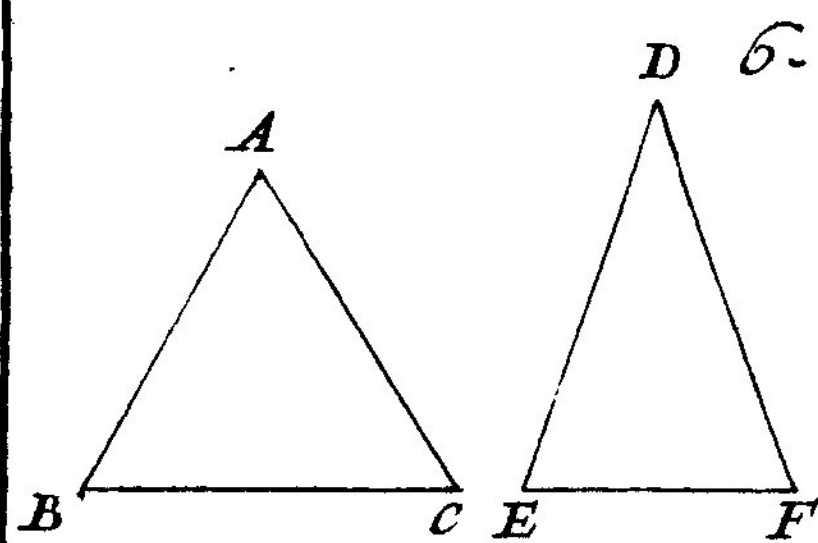
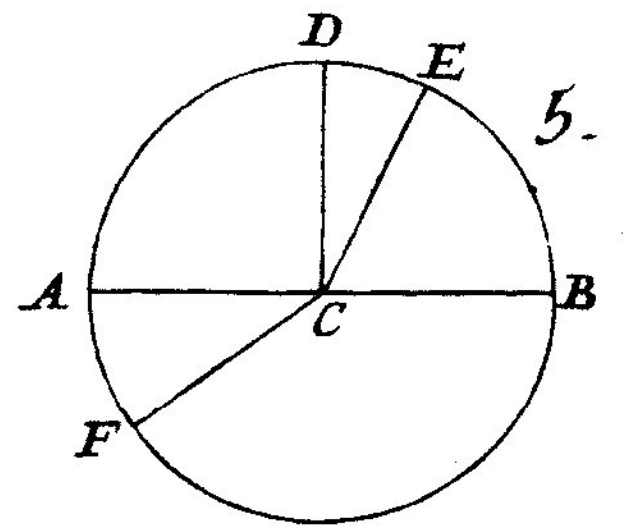
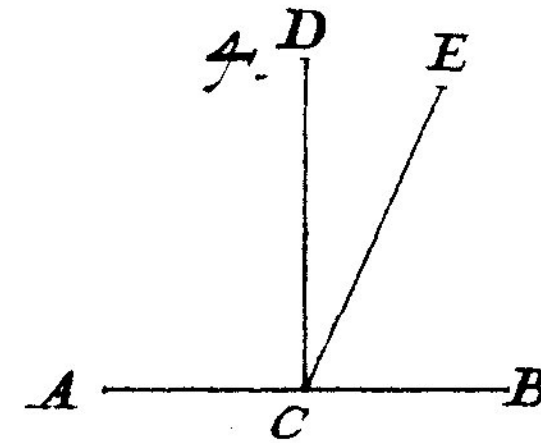
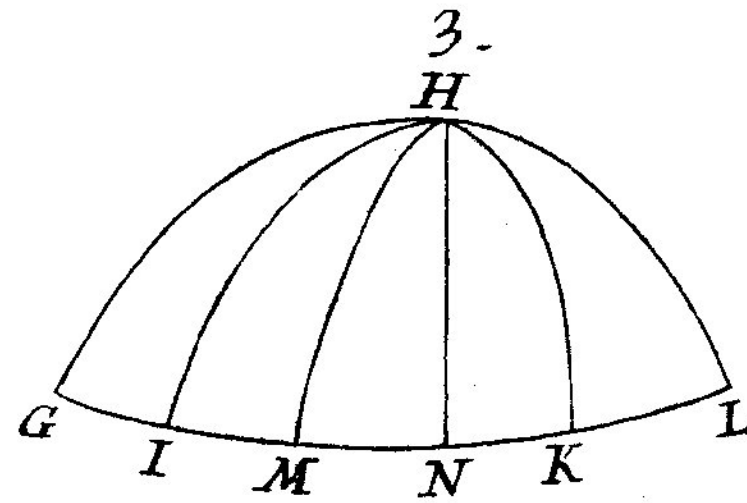
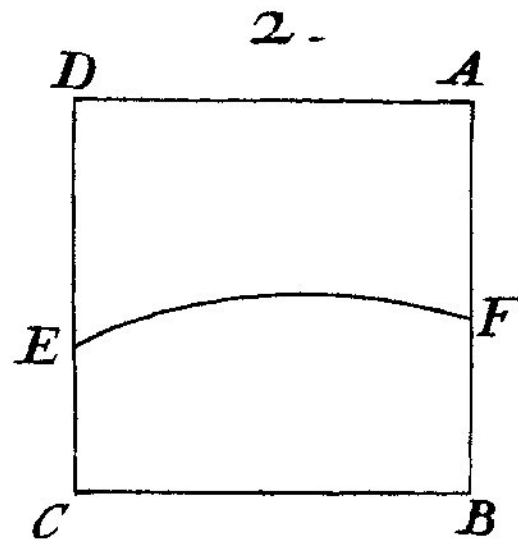
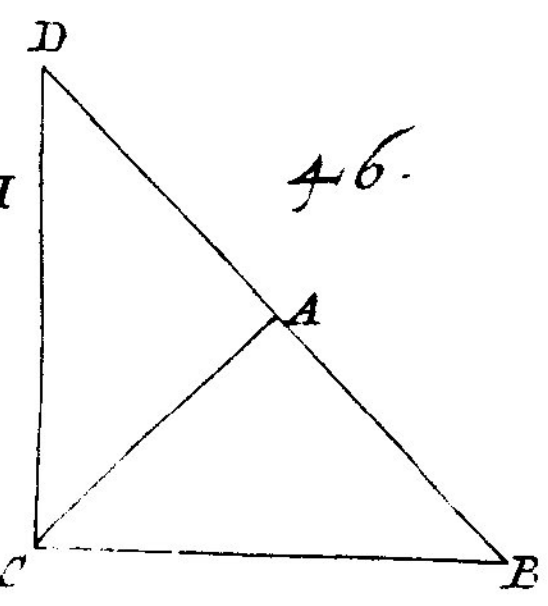
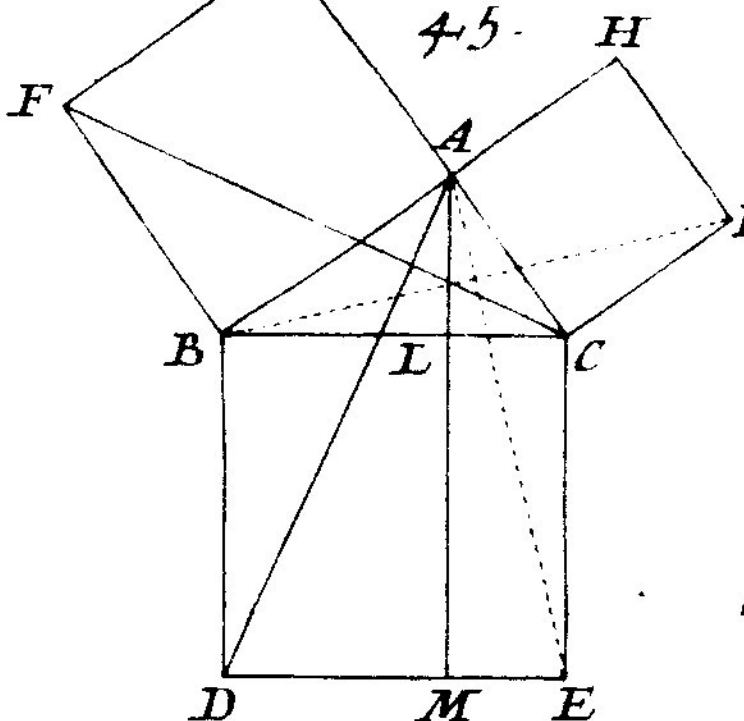
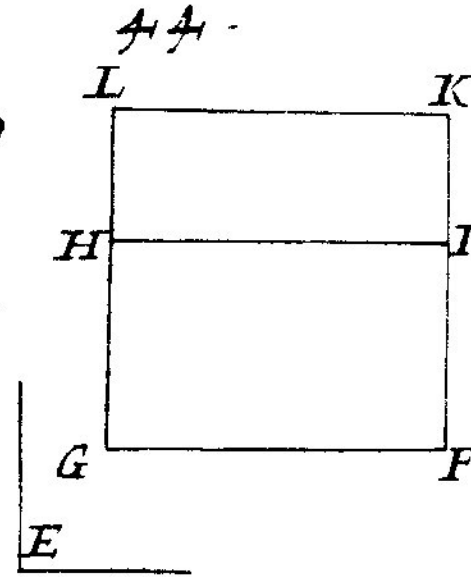
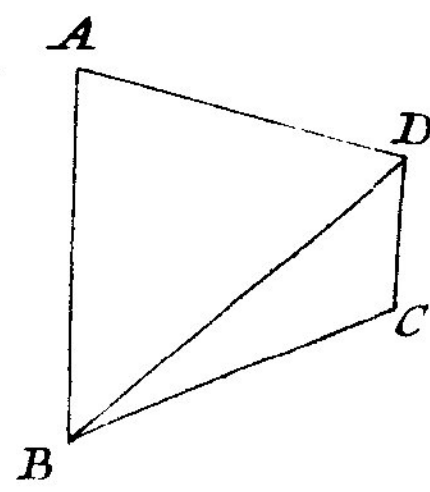
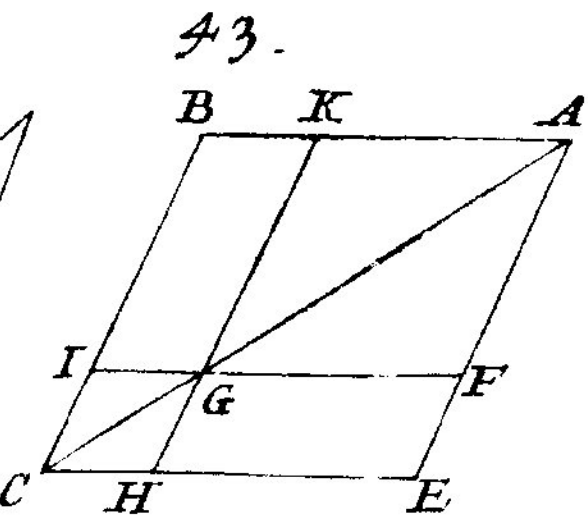
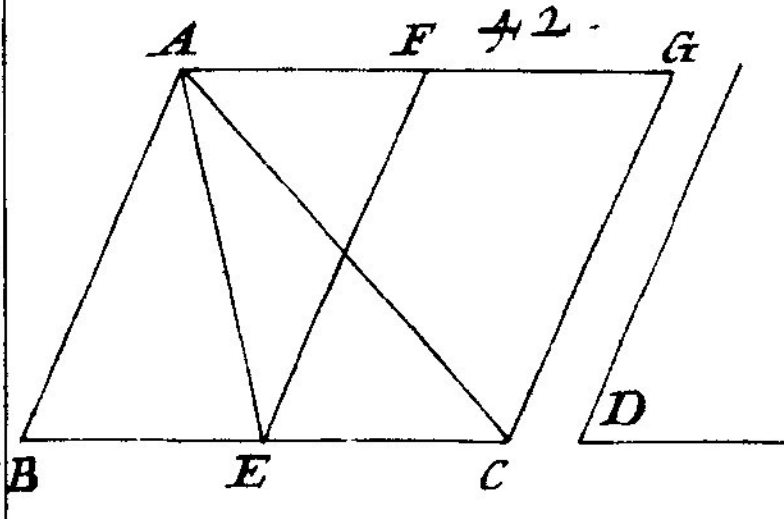
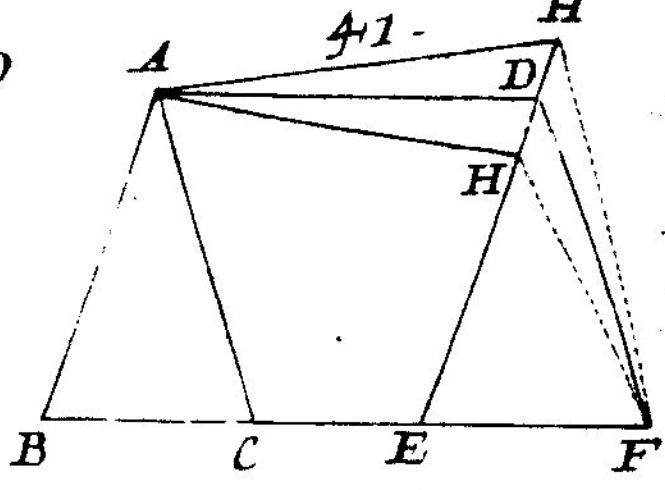
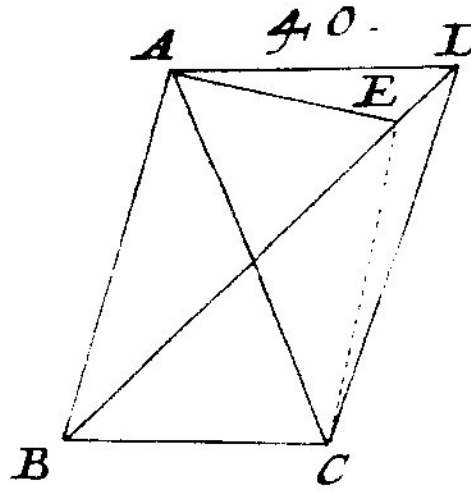
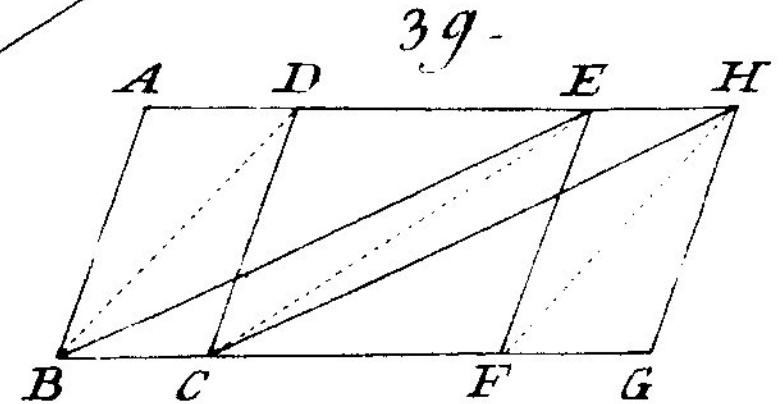
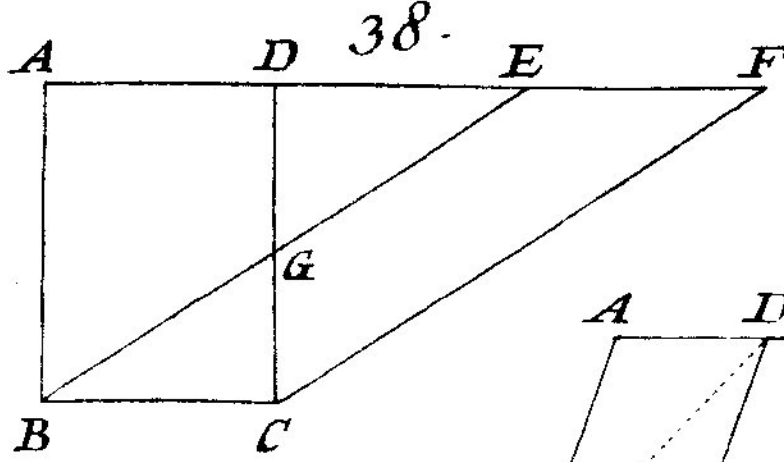
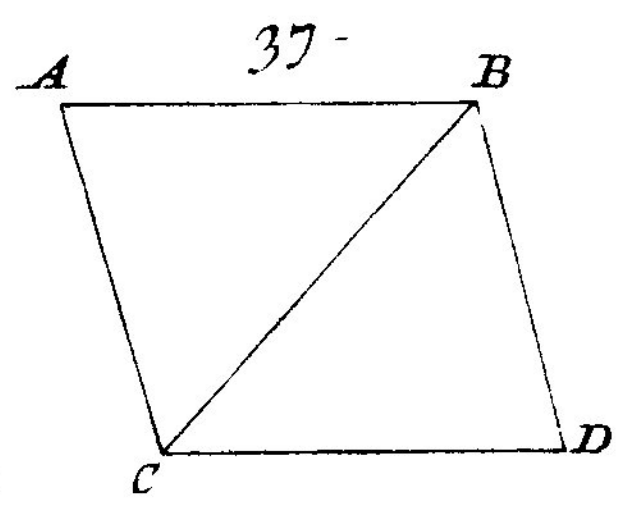
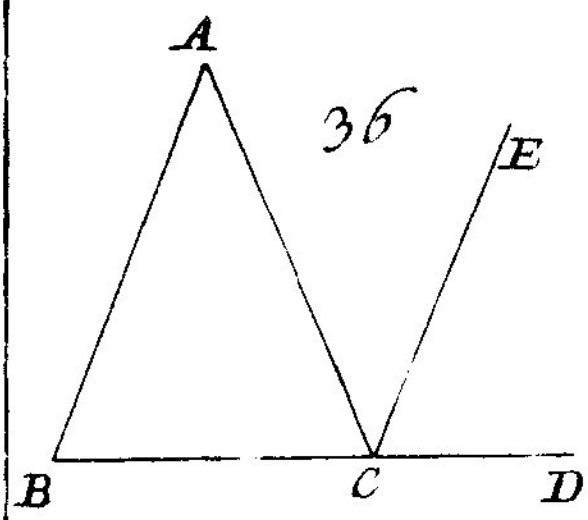
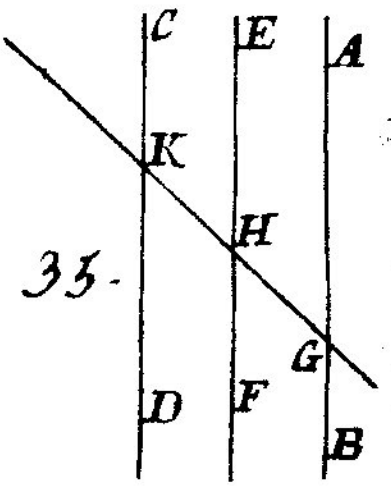
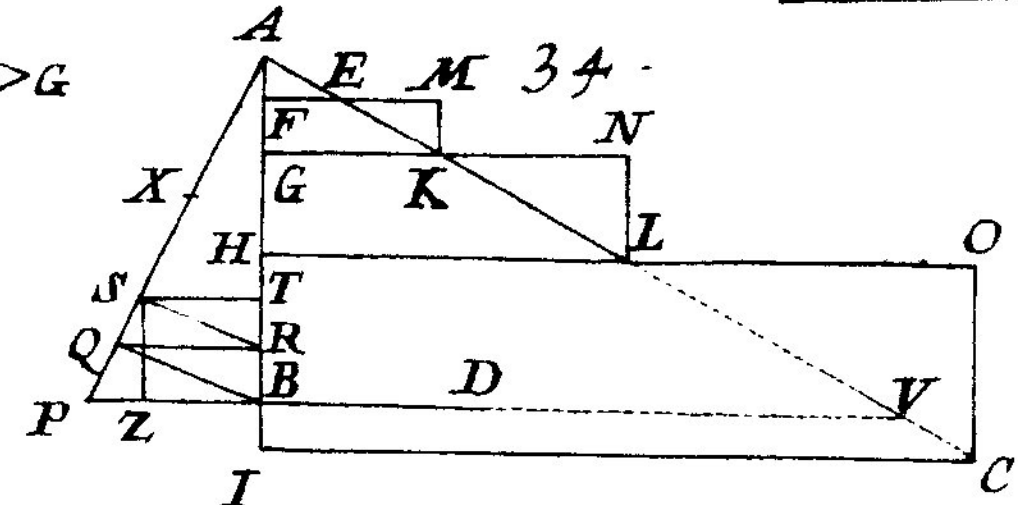
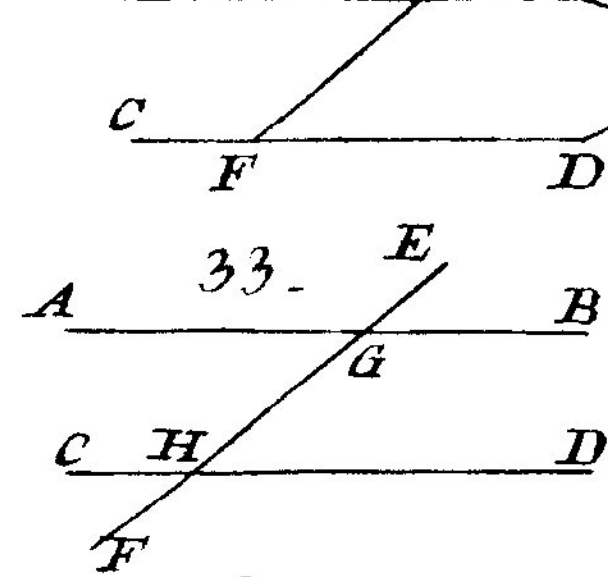
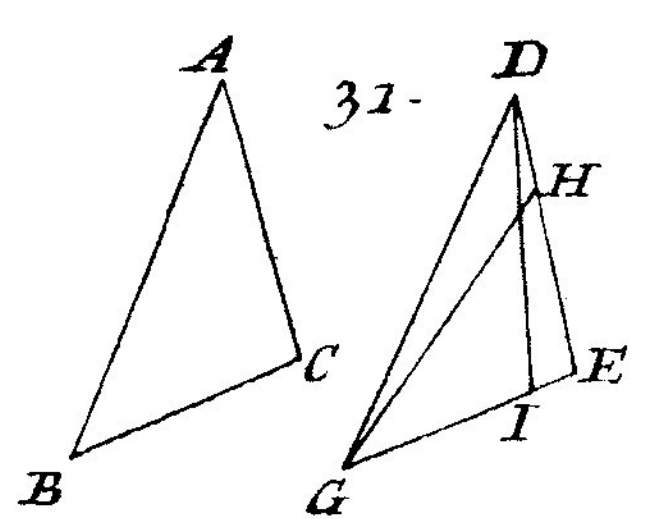
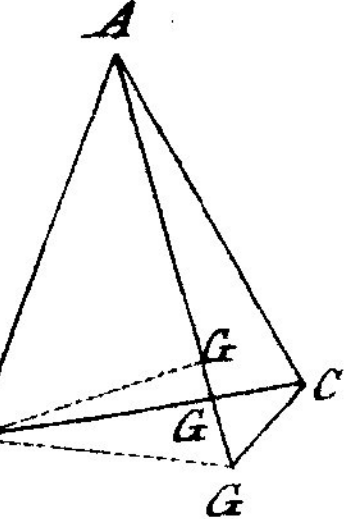
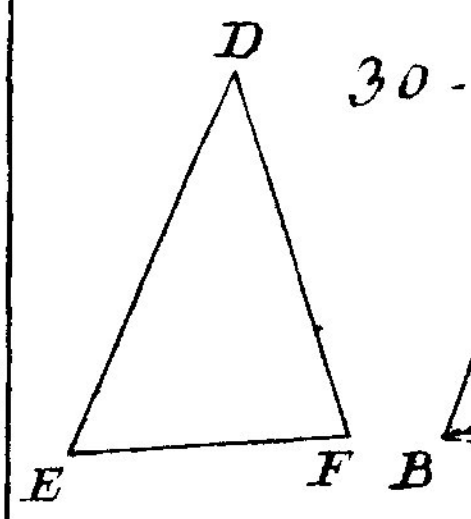
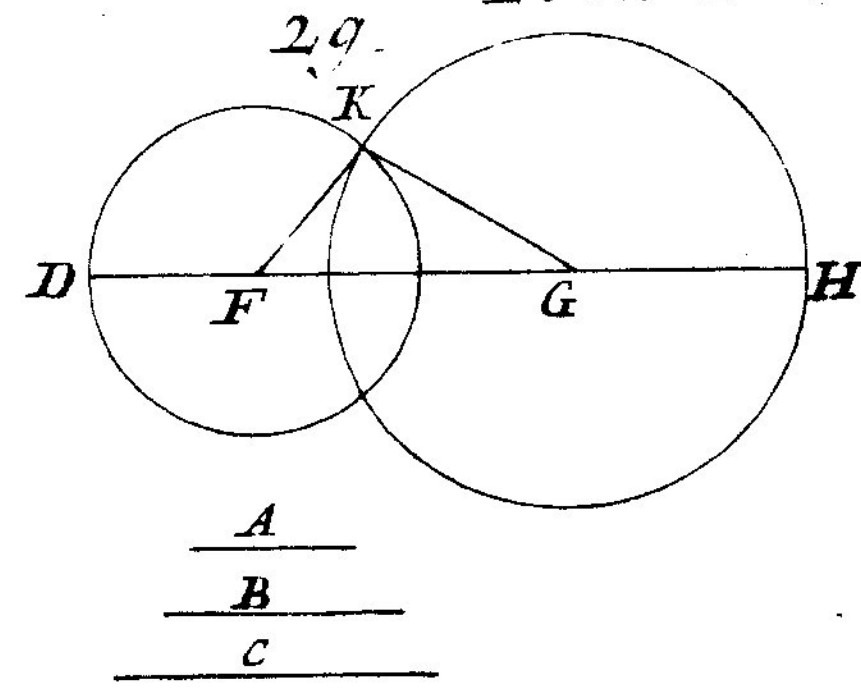
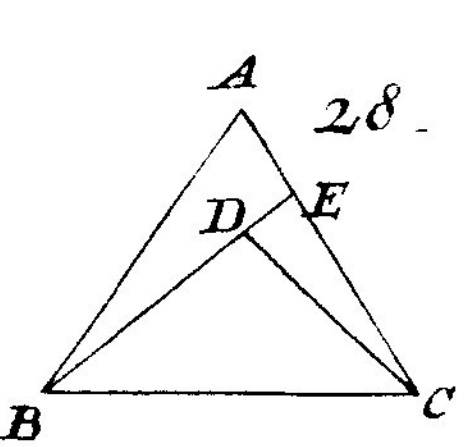
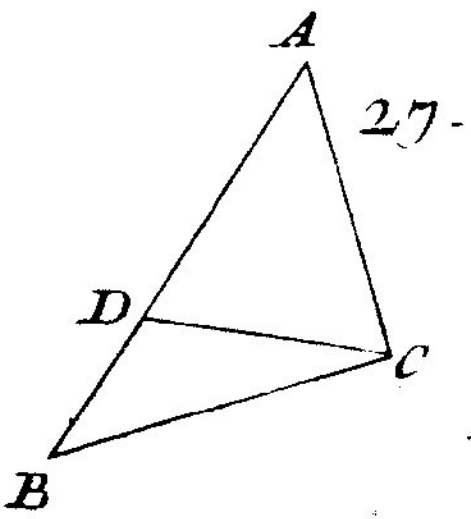
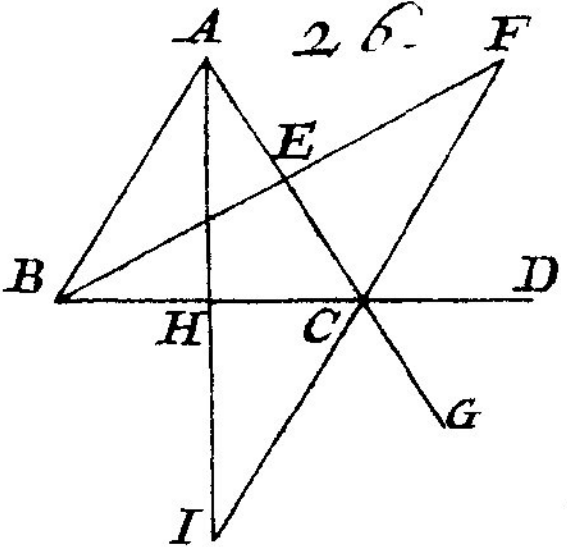
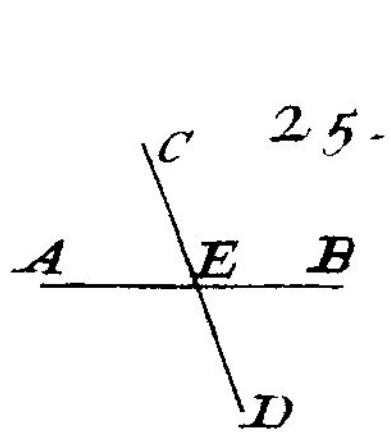
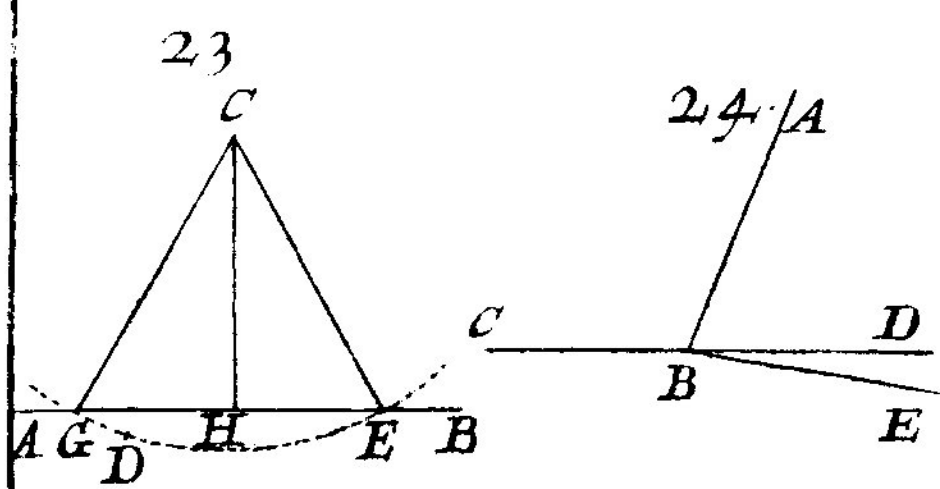
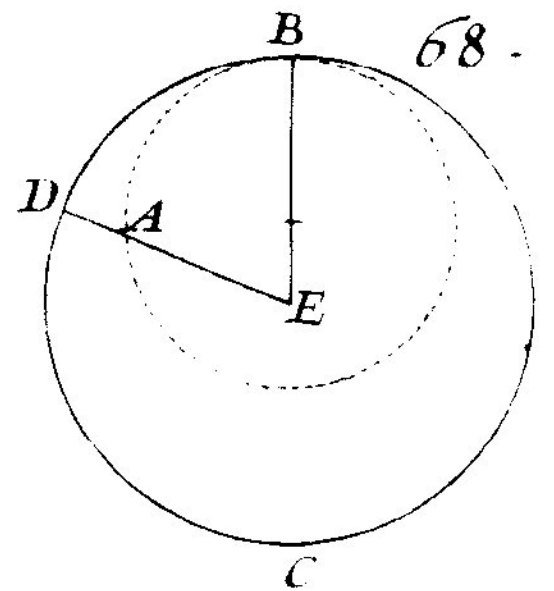
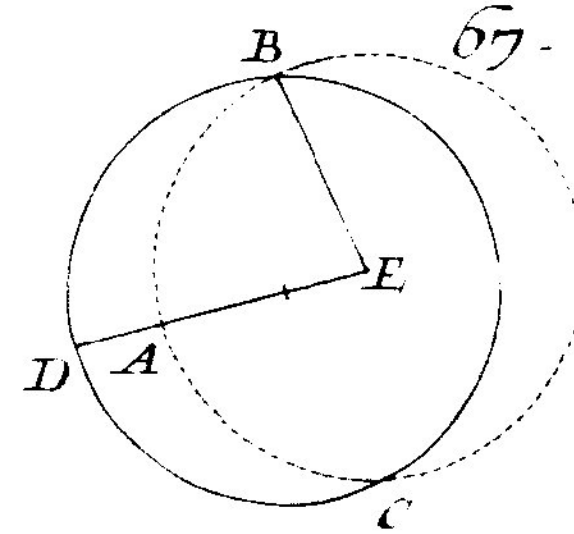
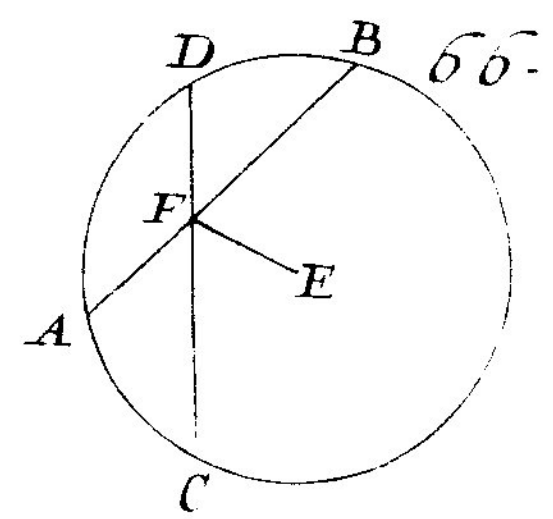
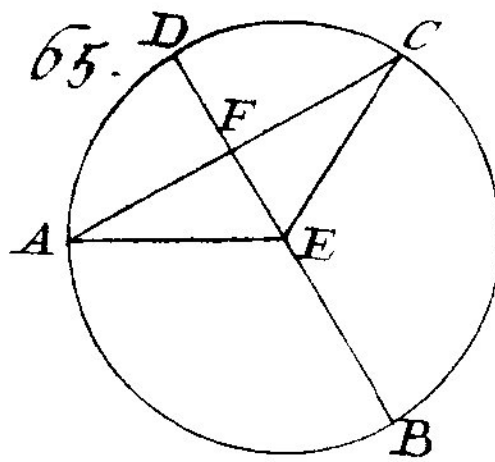
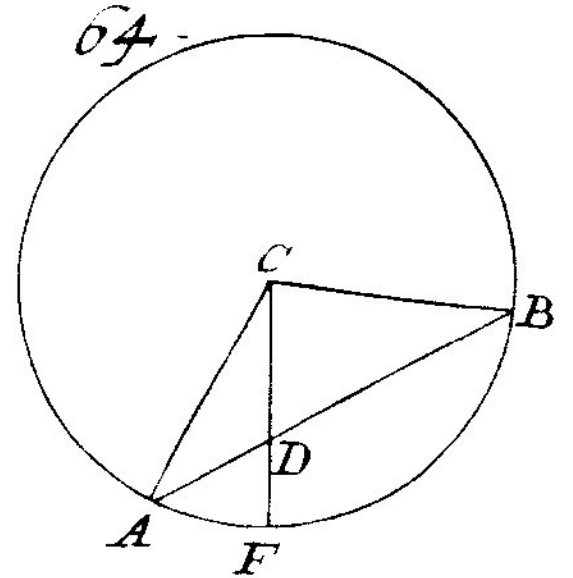
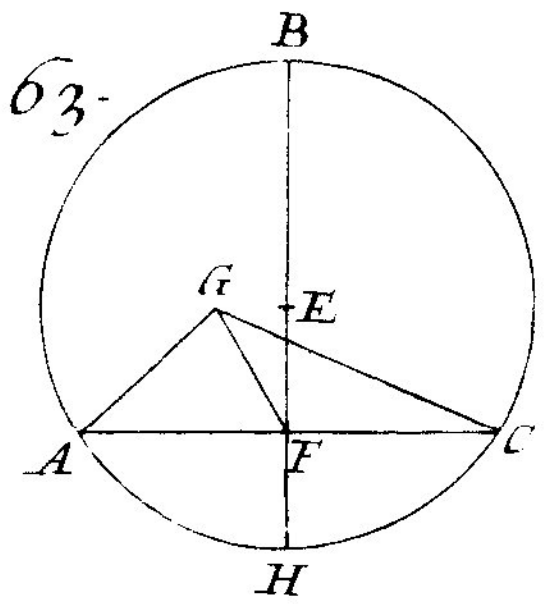
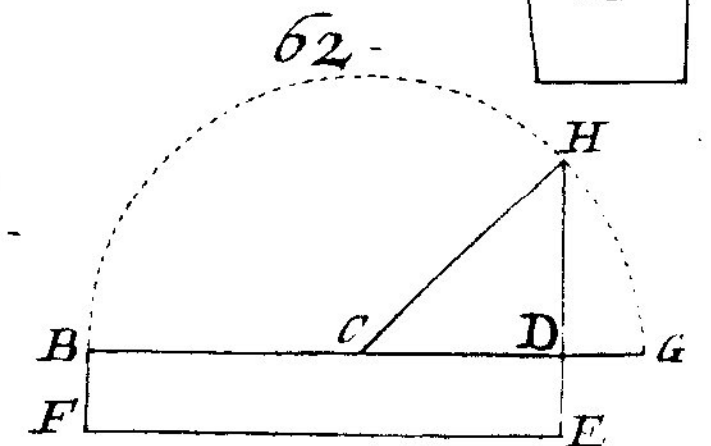
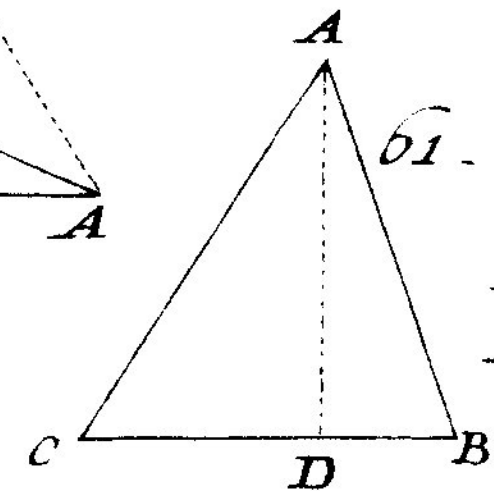
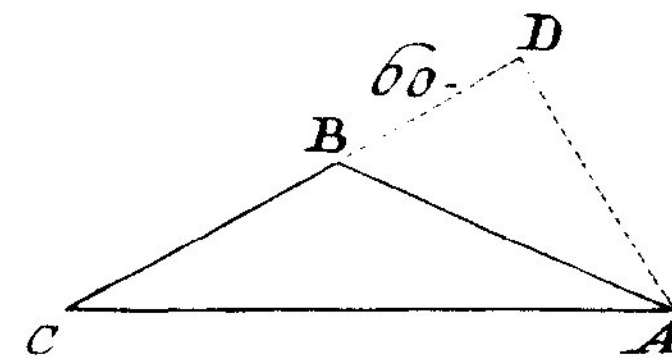
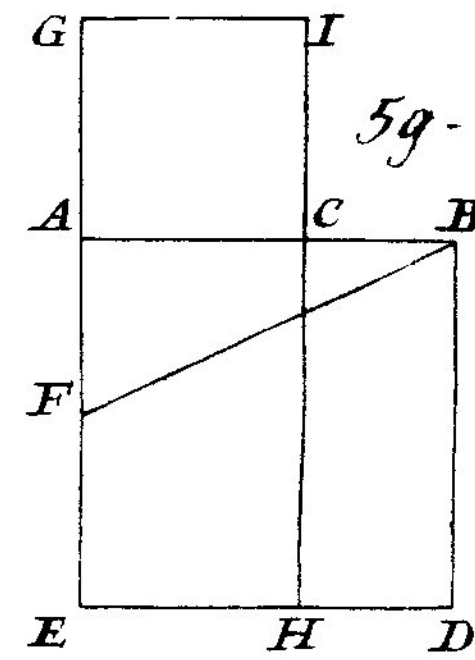
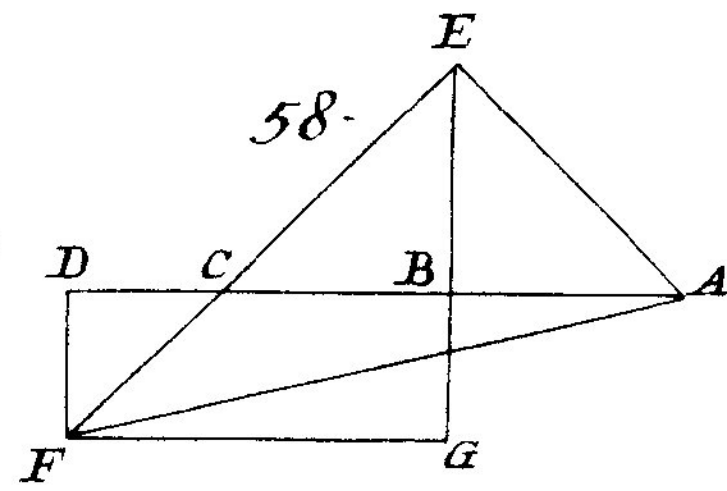
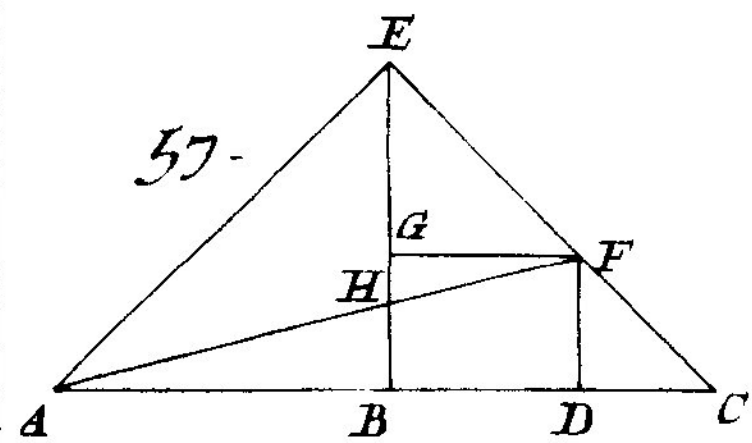
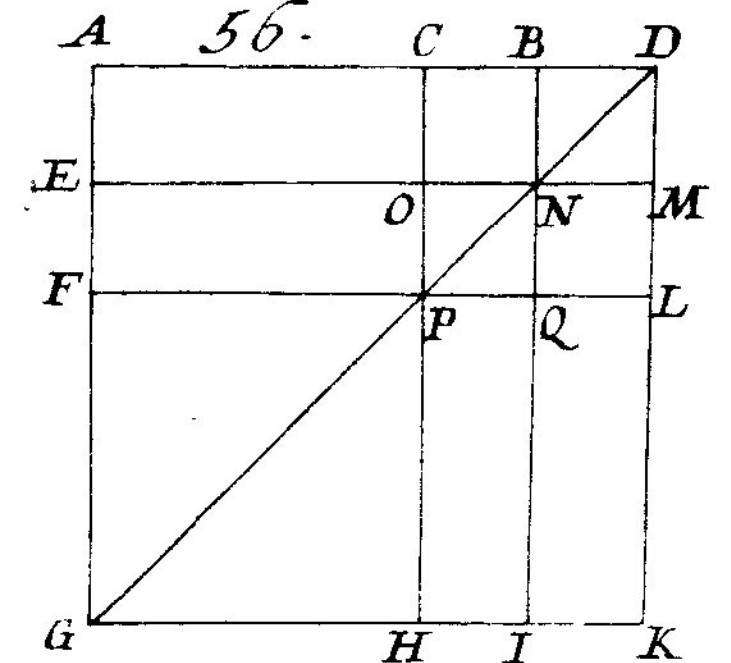
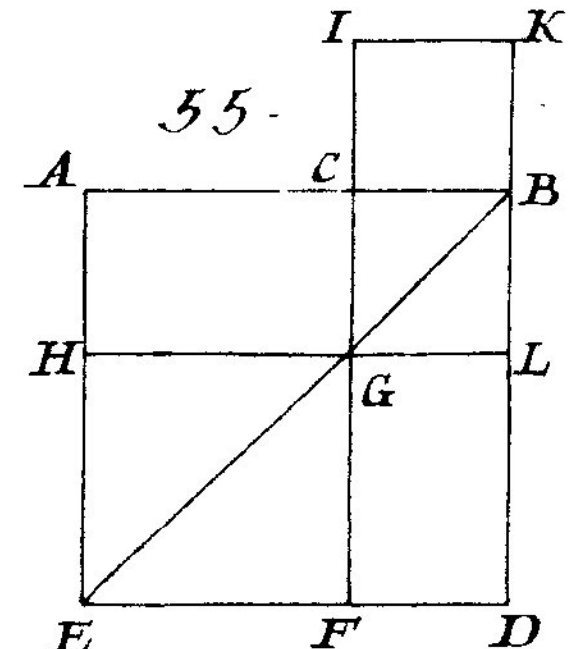
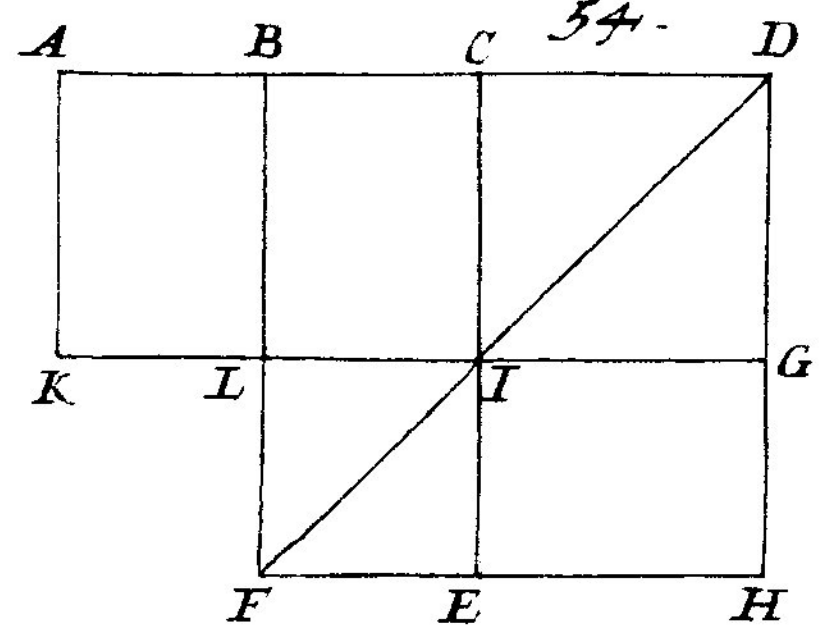
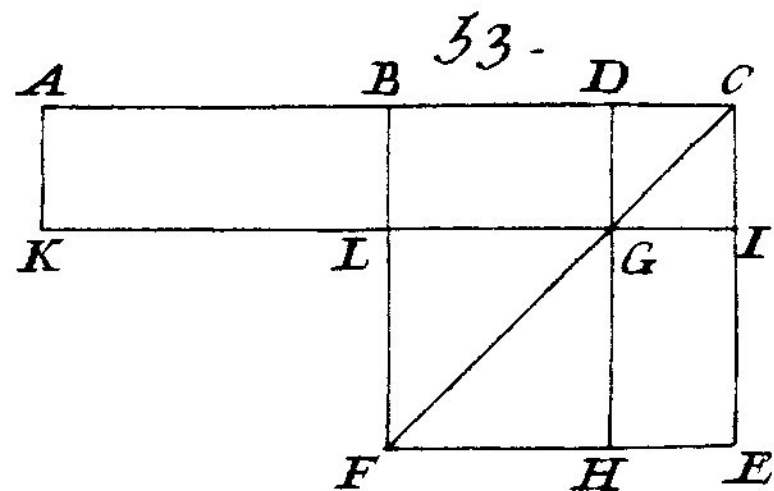
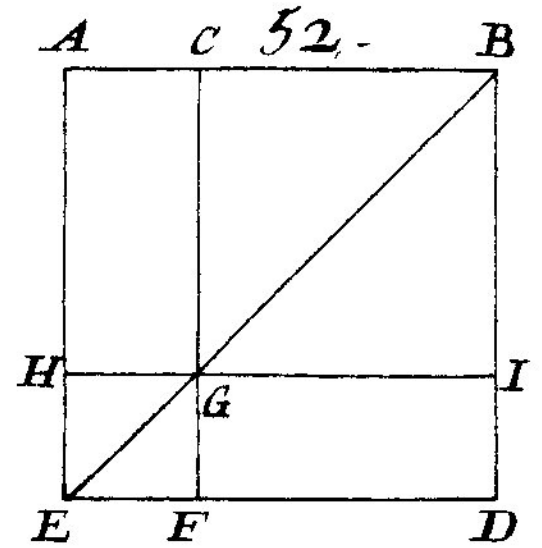
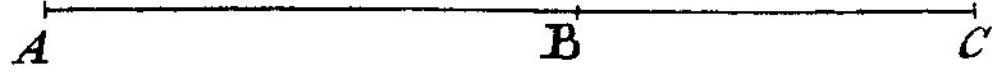
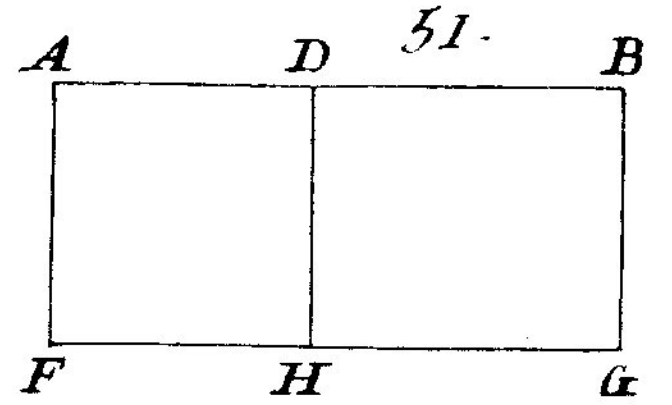
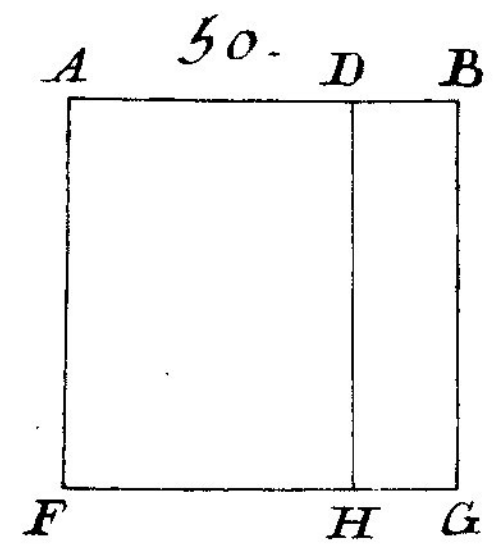
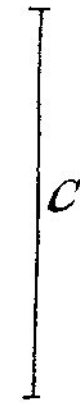
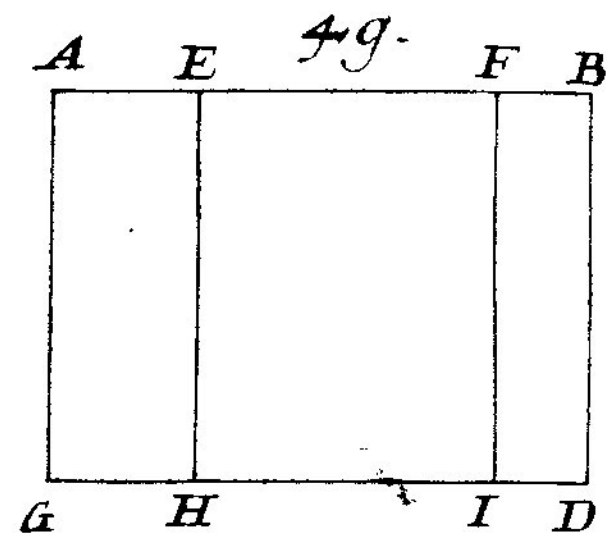
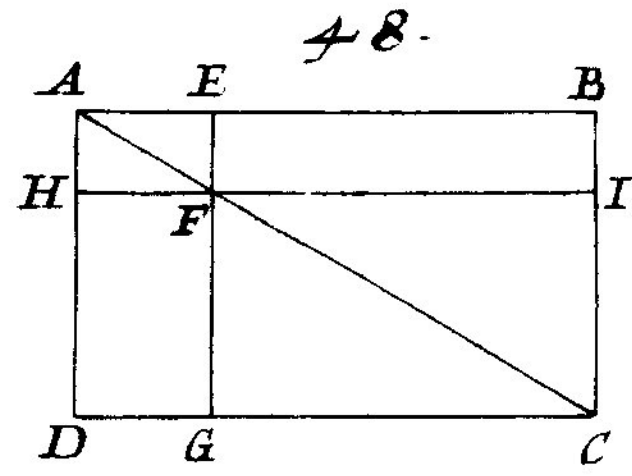
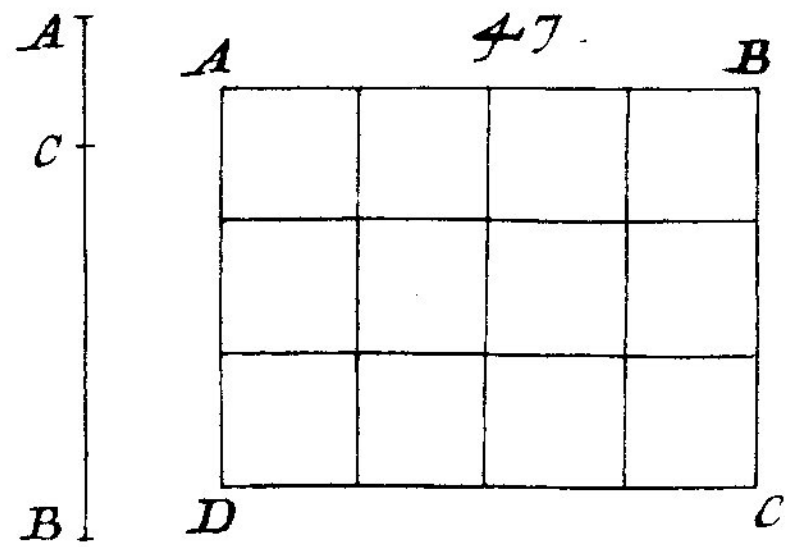


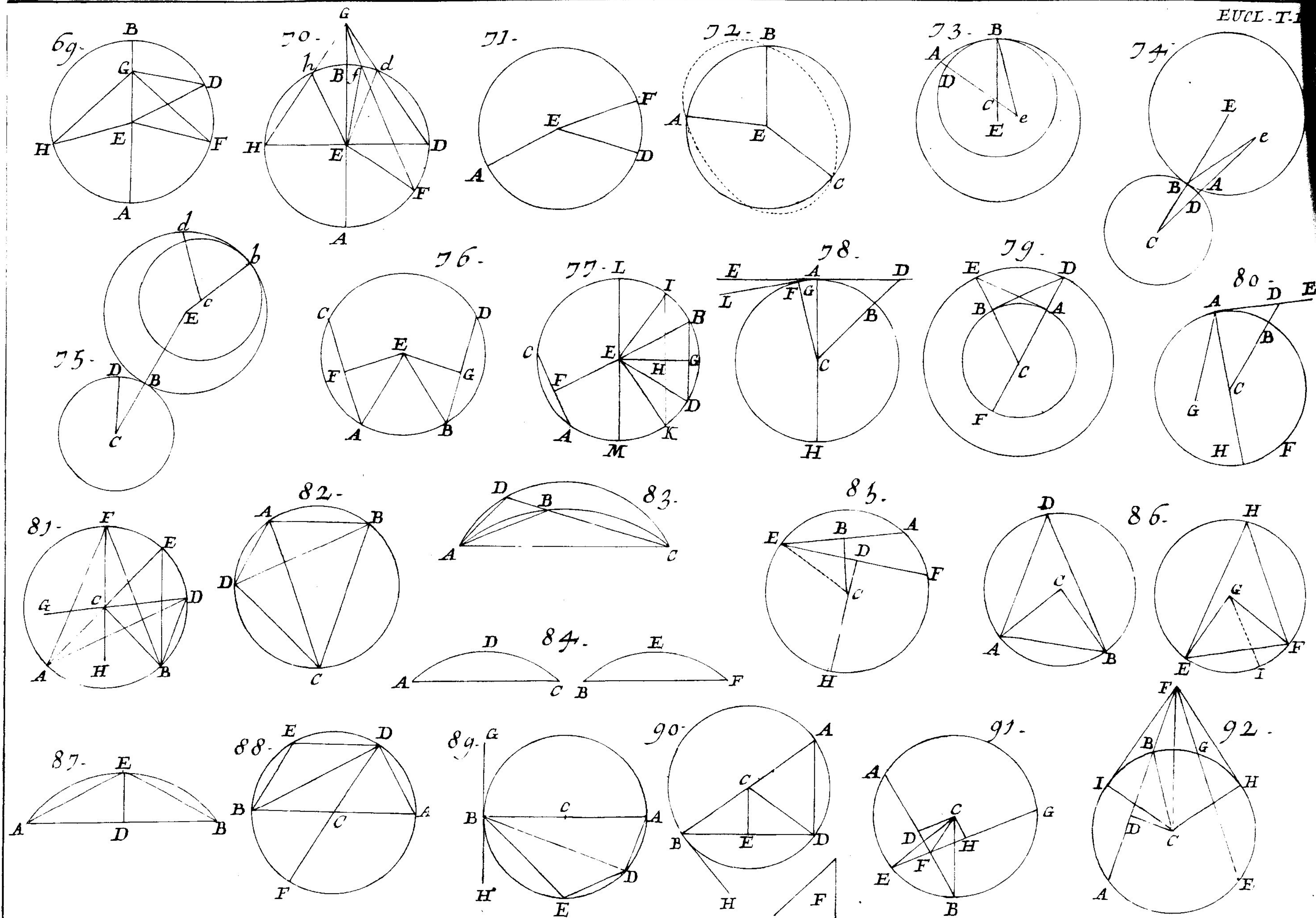
Fig. 1.



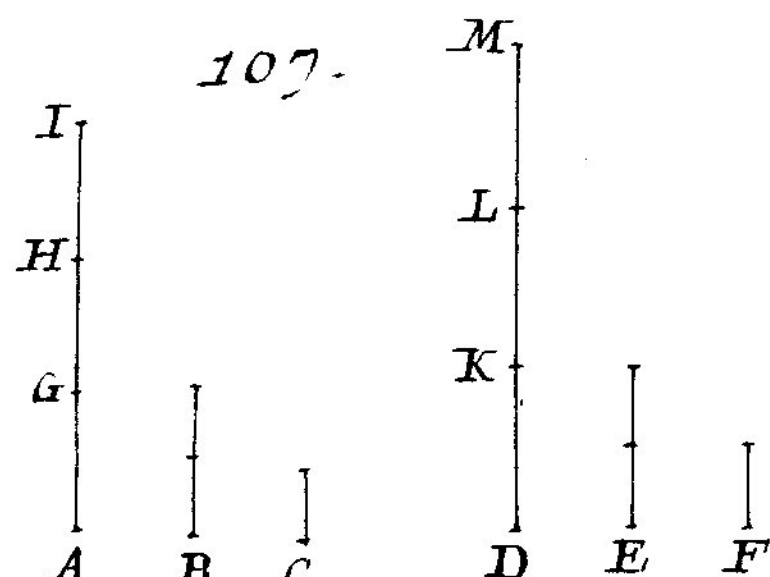
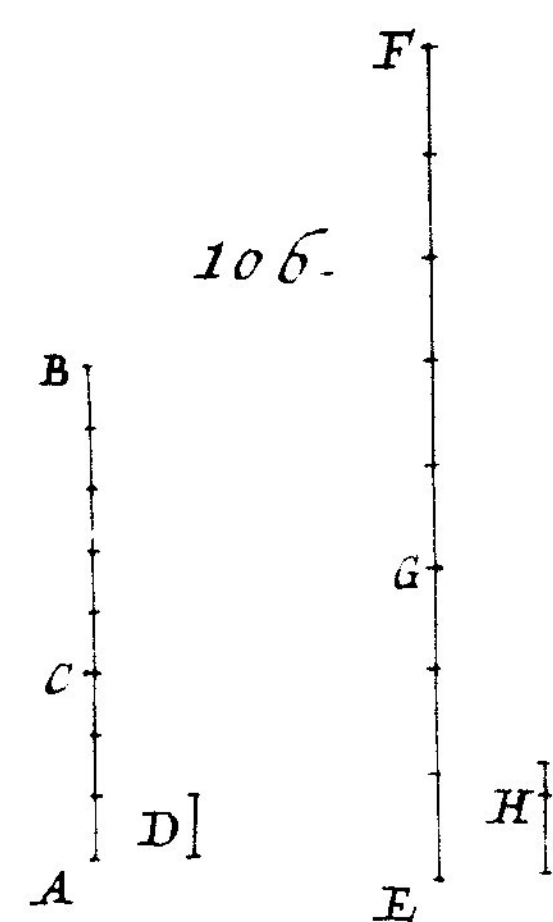
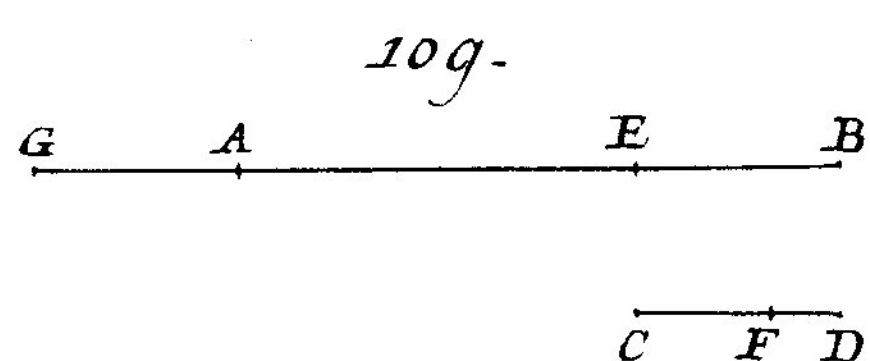
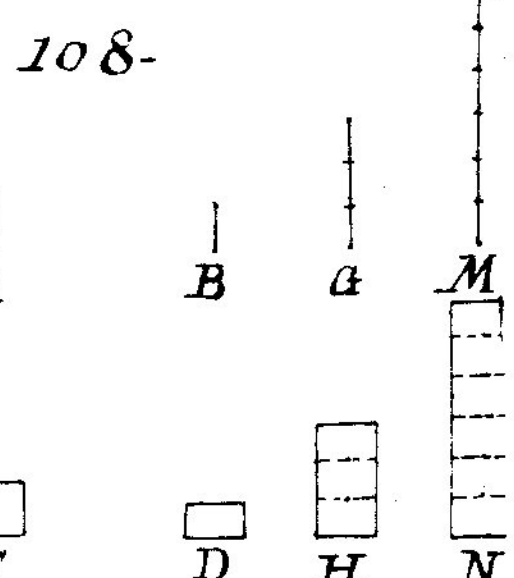
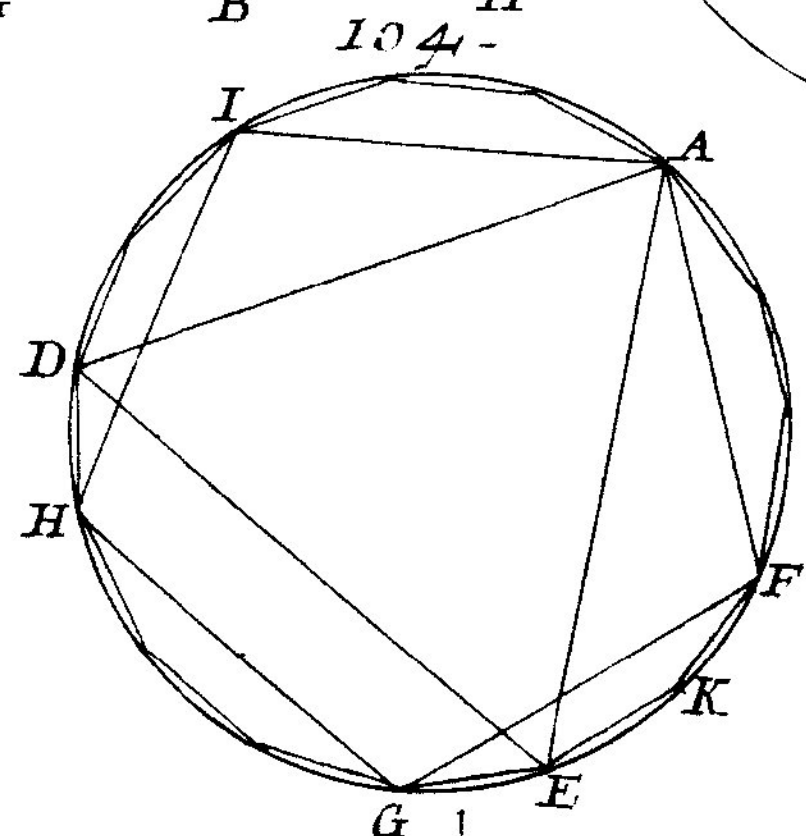
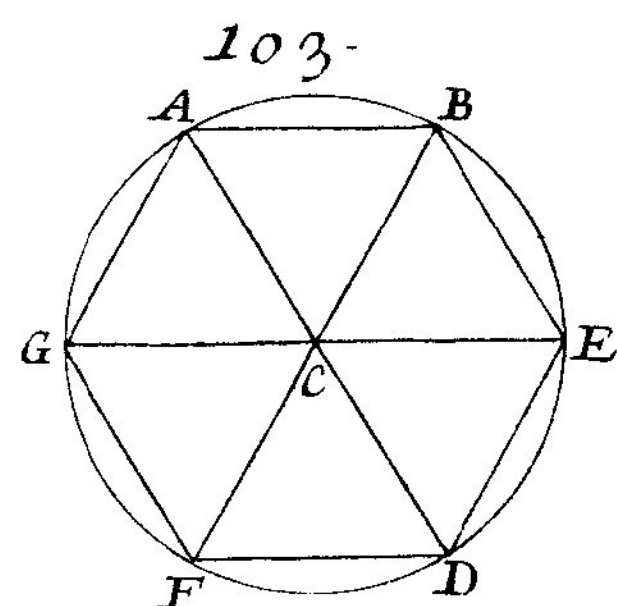
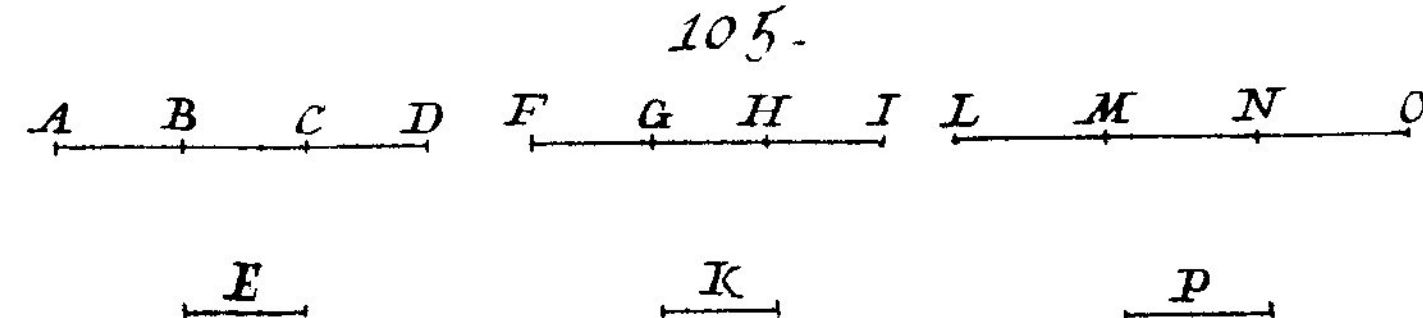
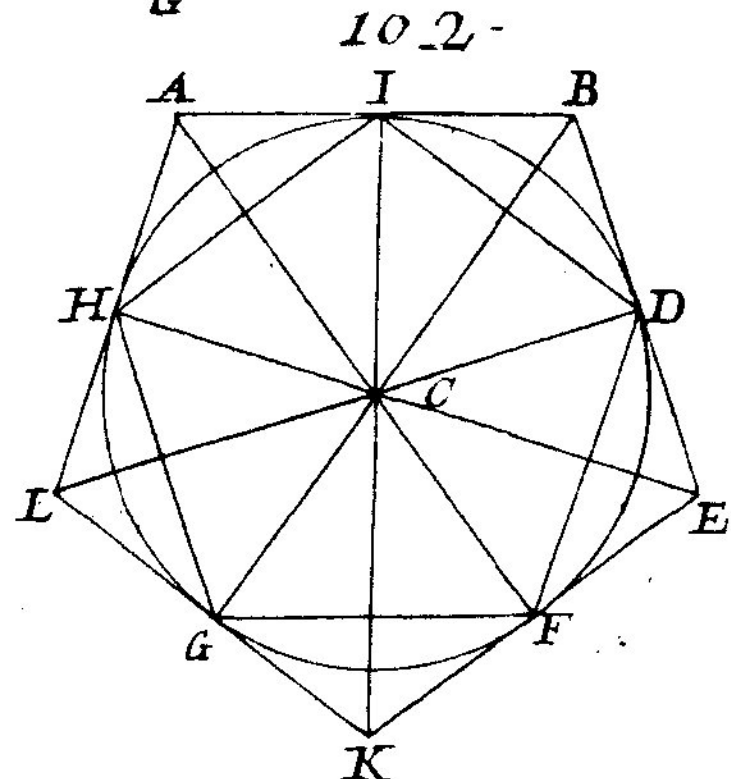
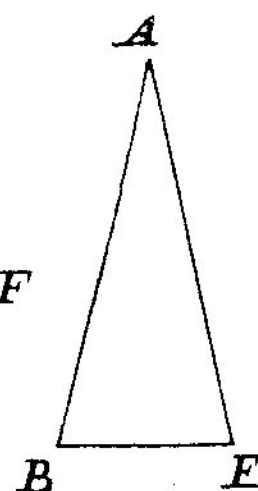
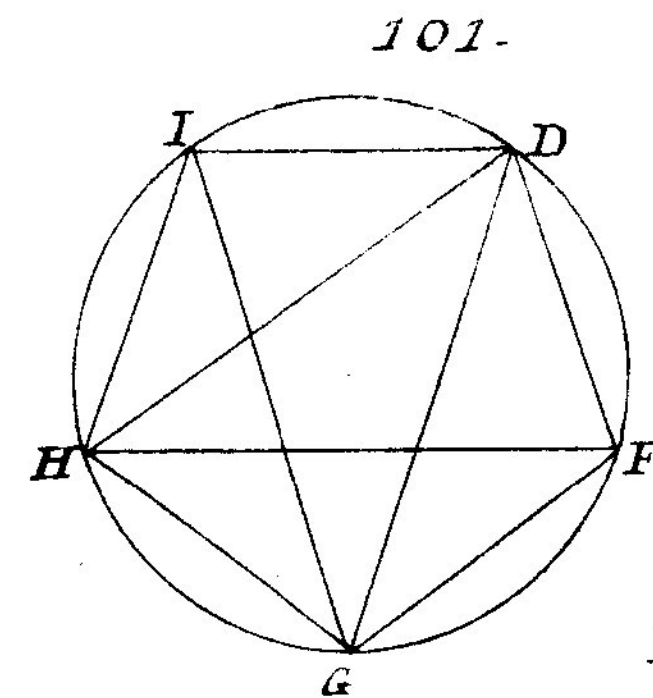
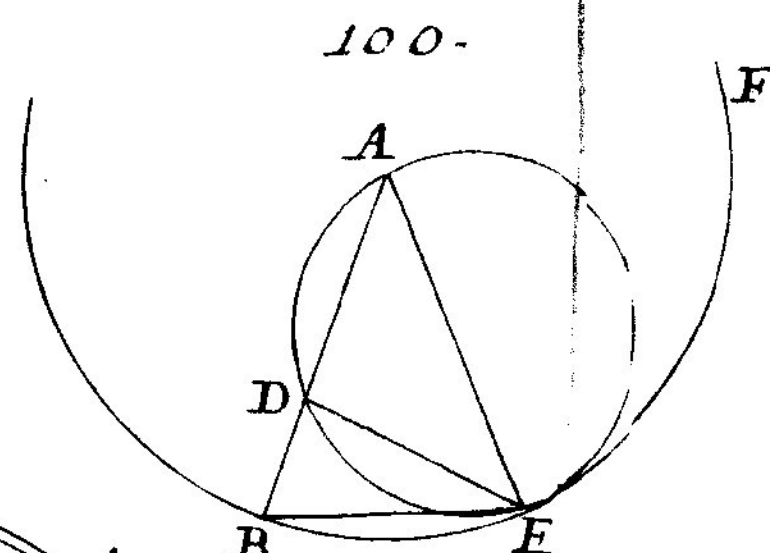
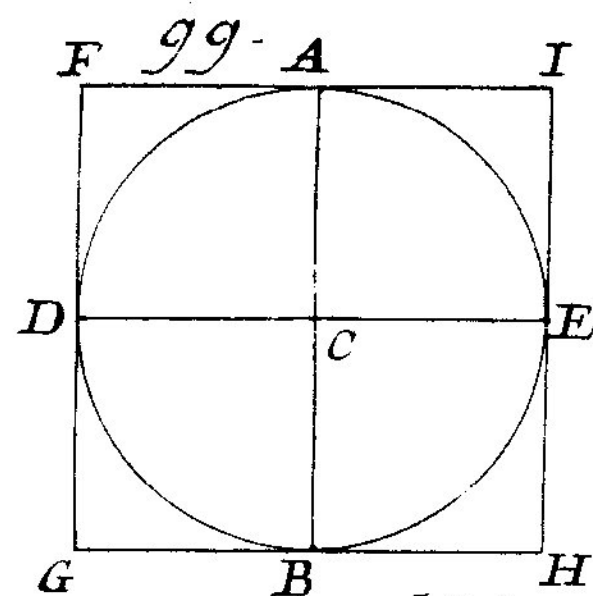
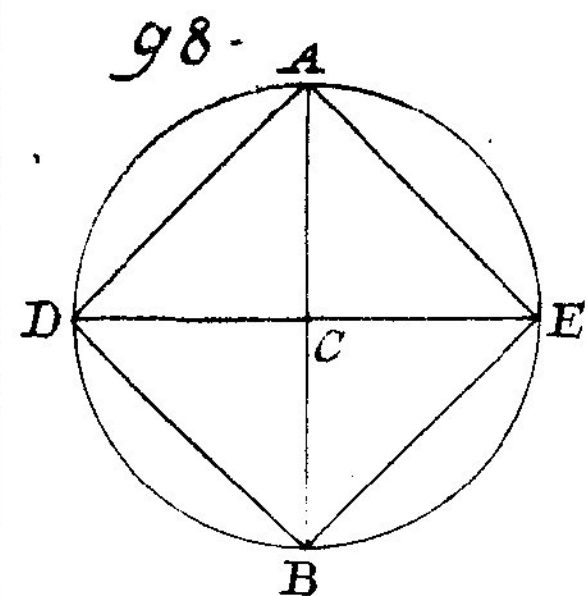
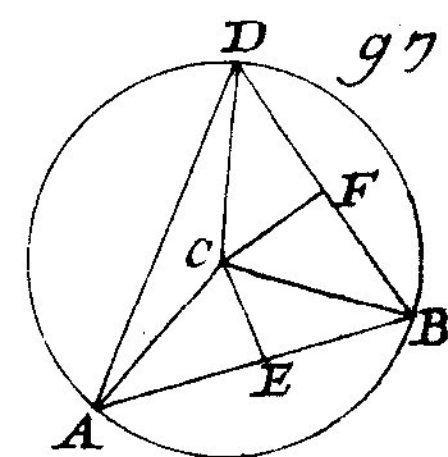
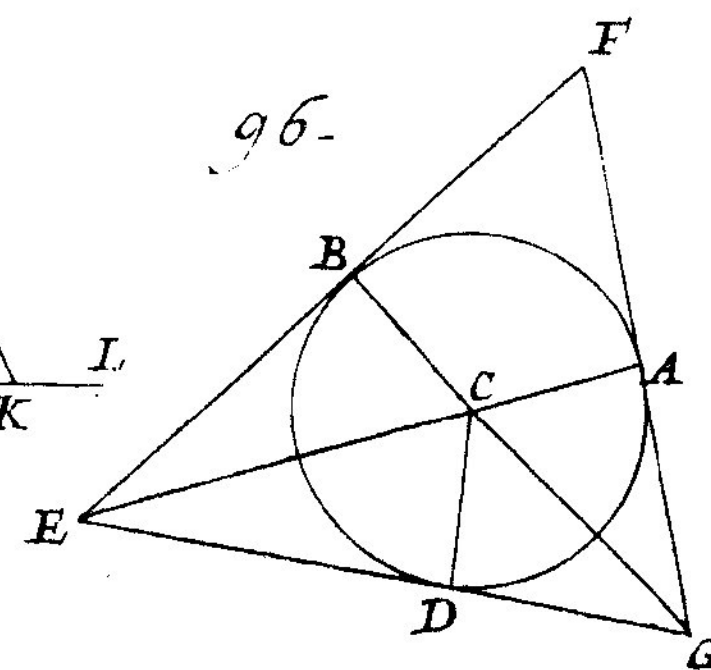
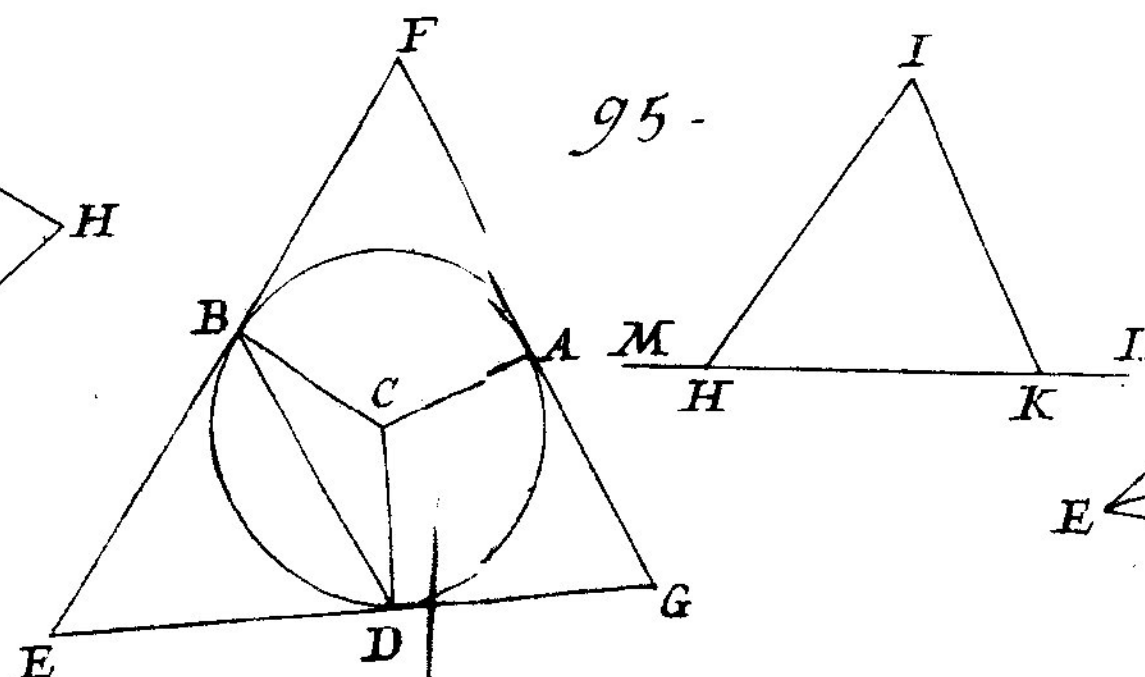
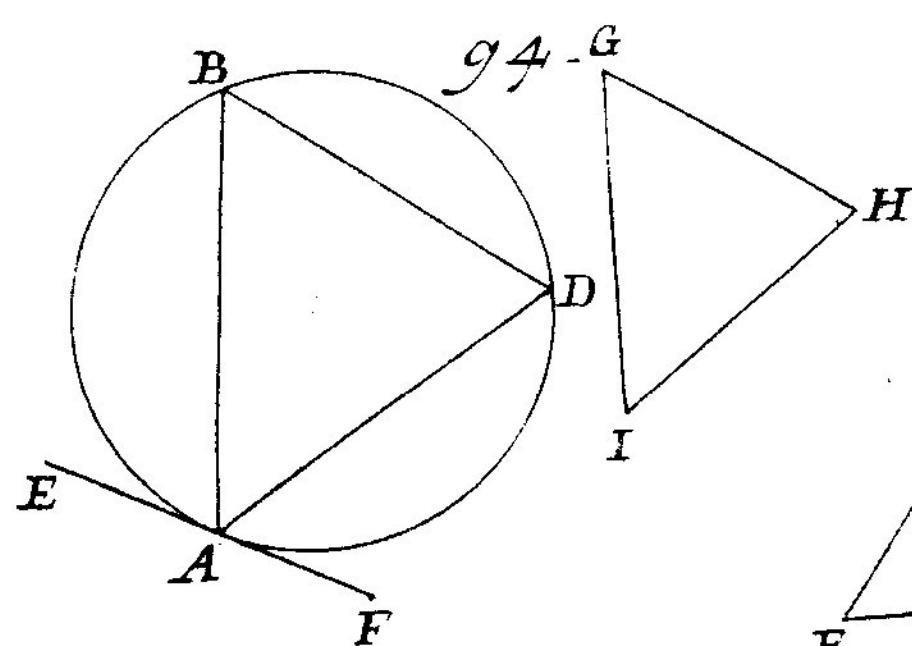
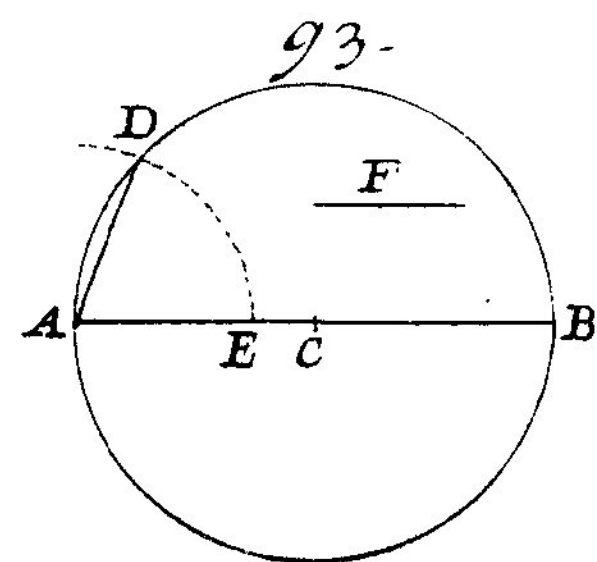




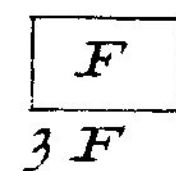
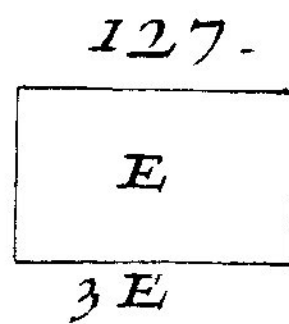
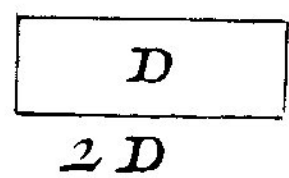
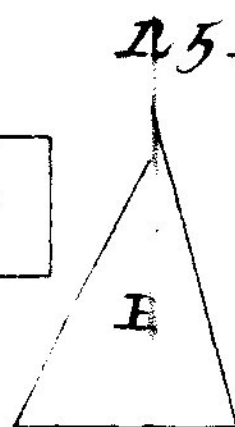
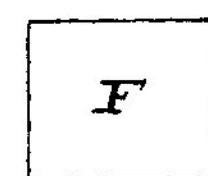
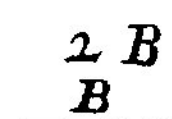
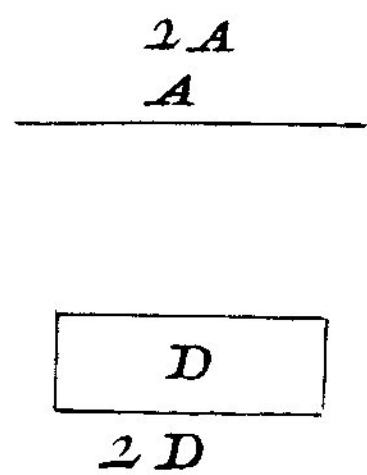
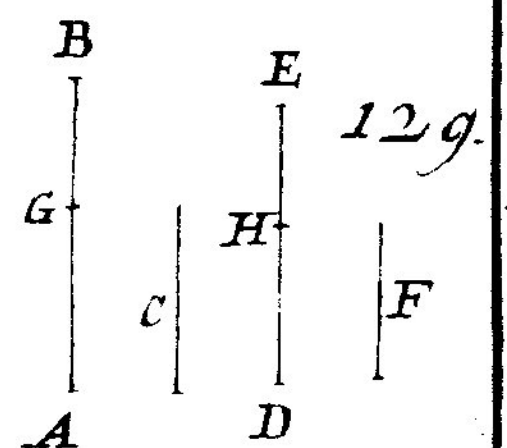
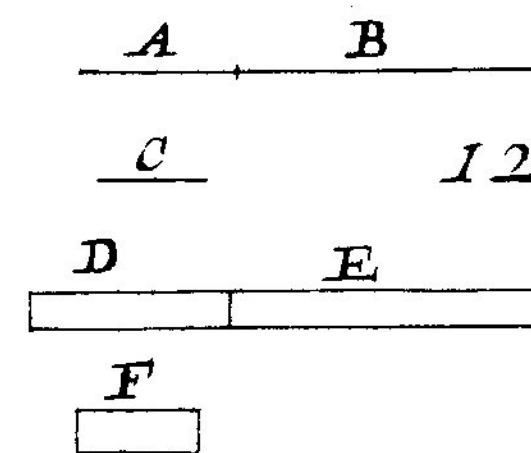
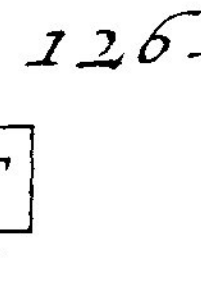
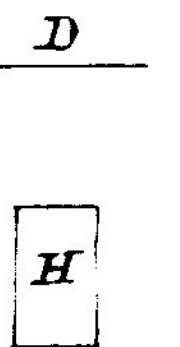
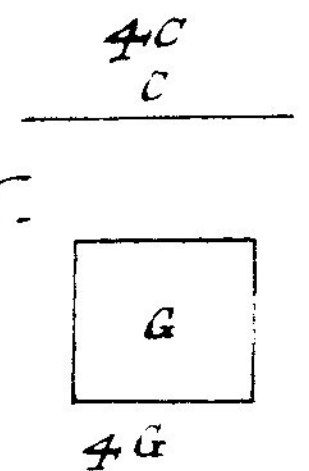
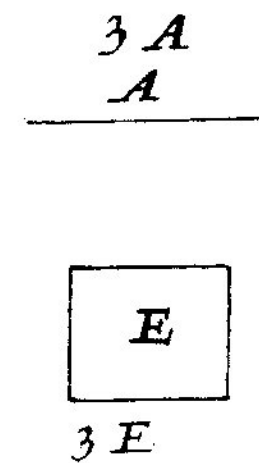
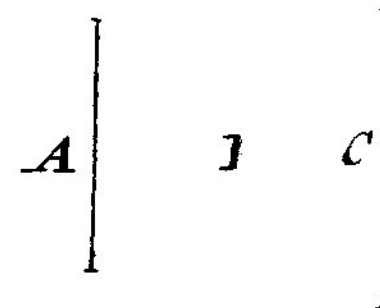
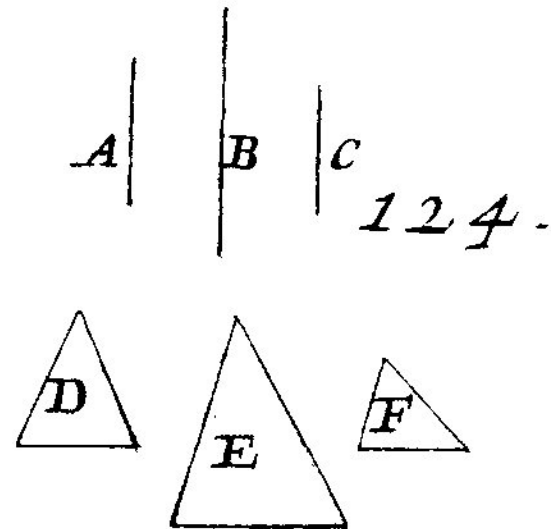
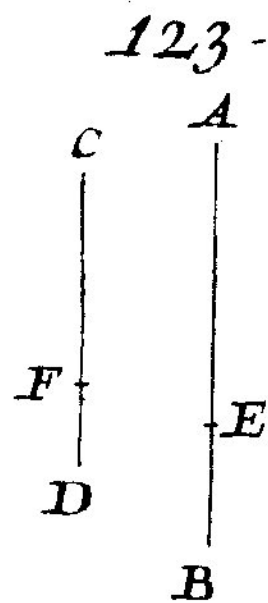
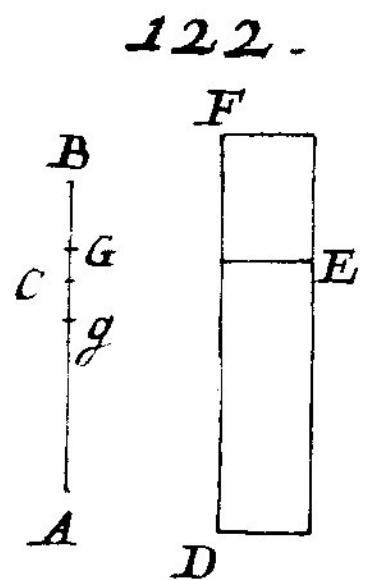
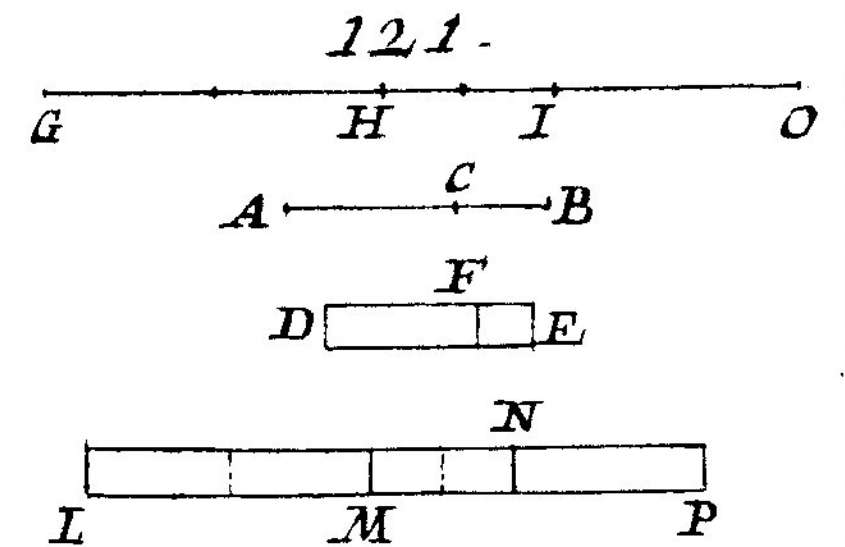
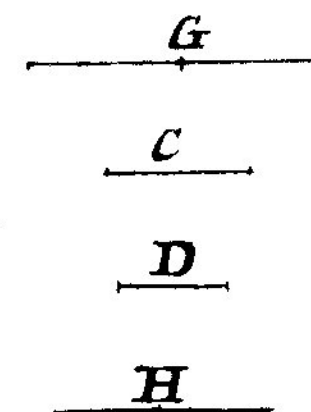
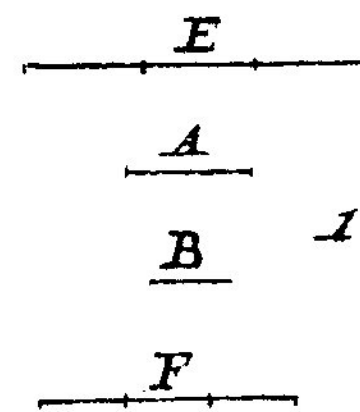
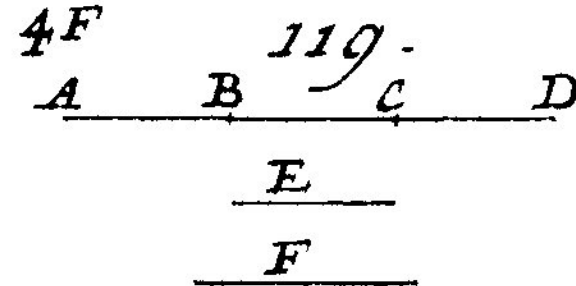
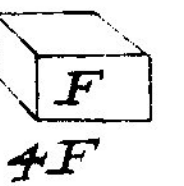
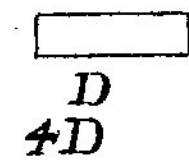
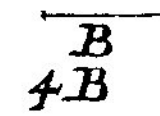
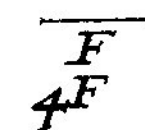
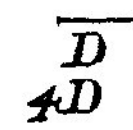
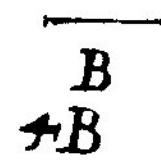
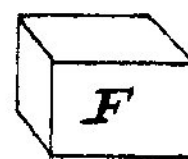
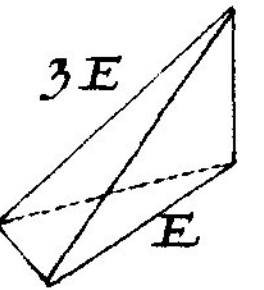
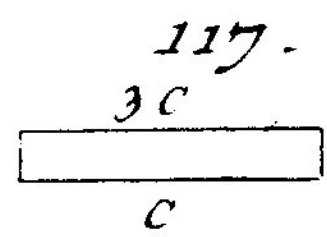
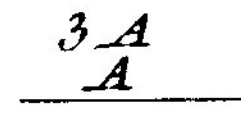
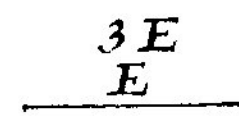
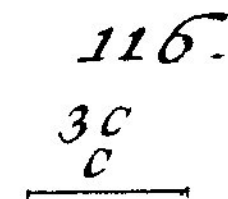
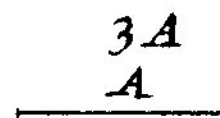
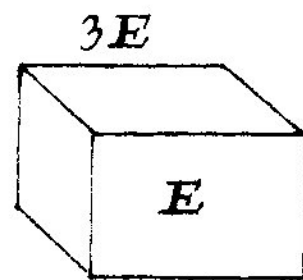
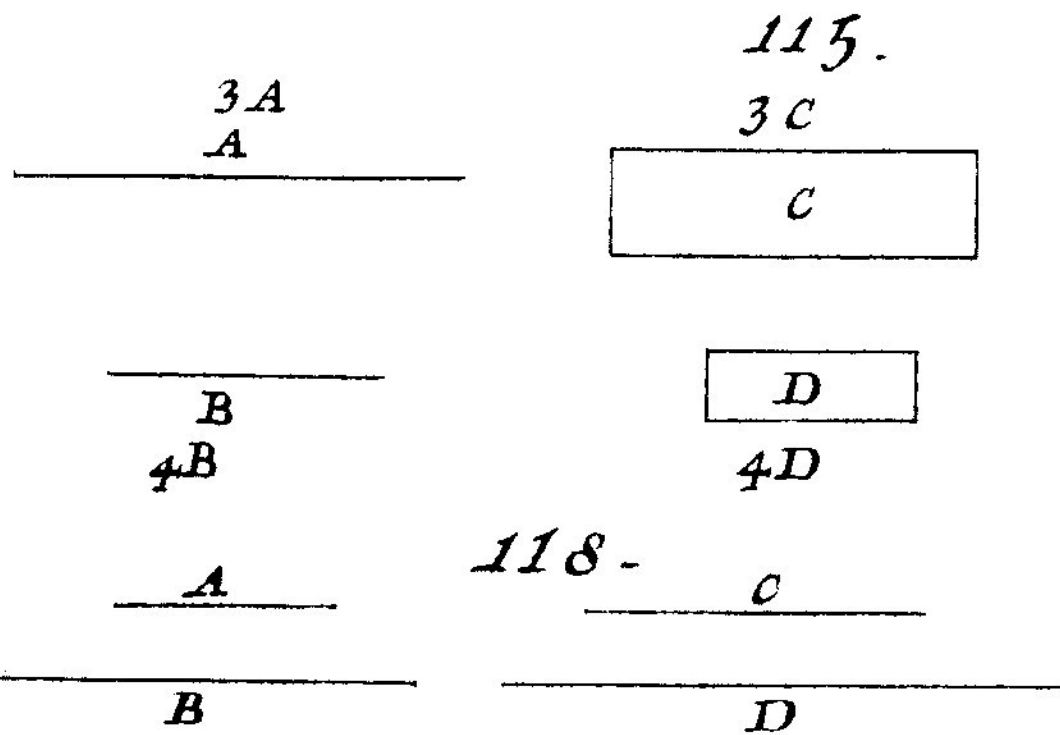
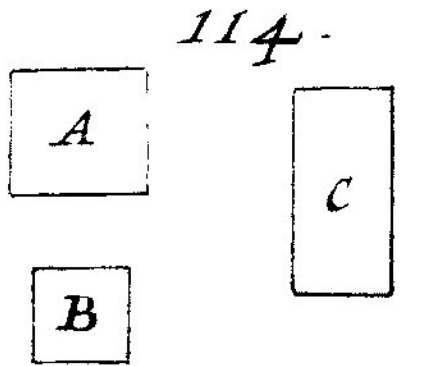
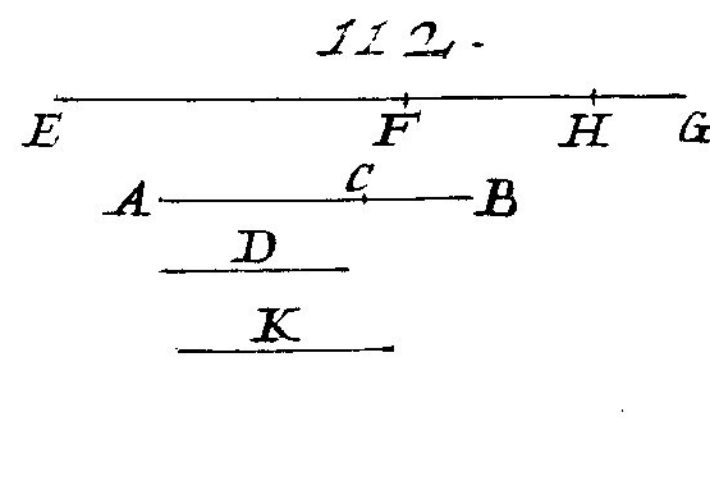
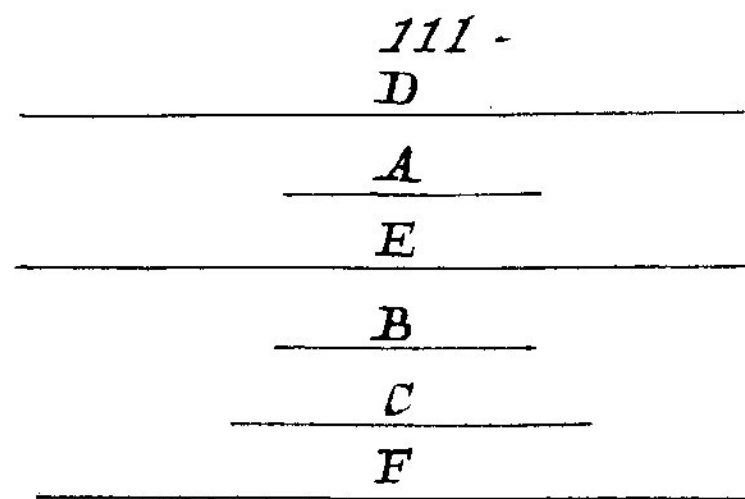
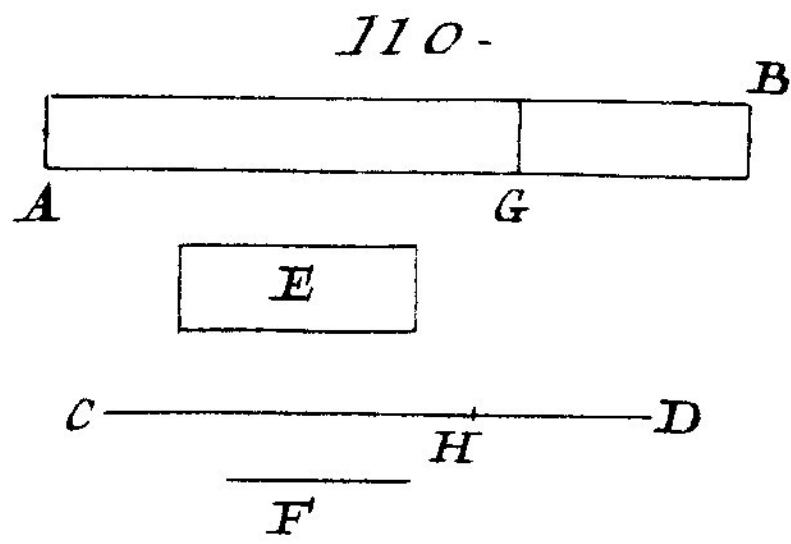


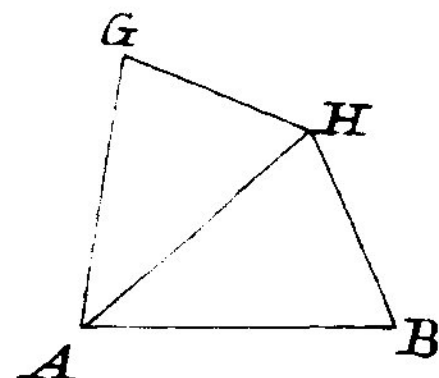
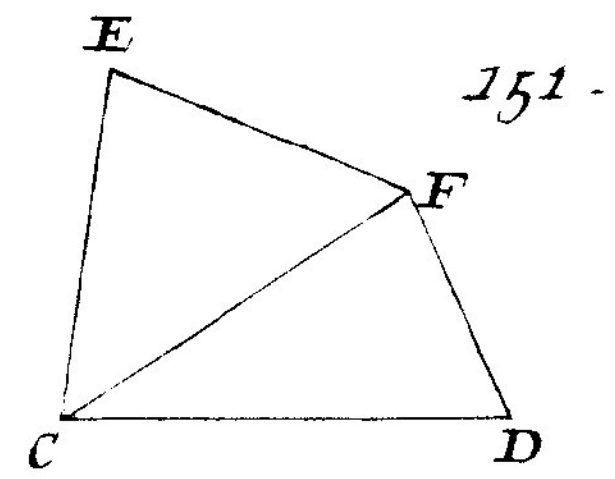
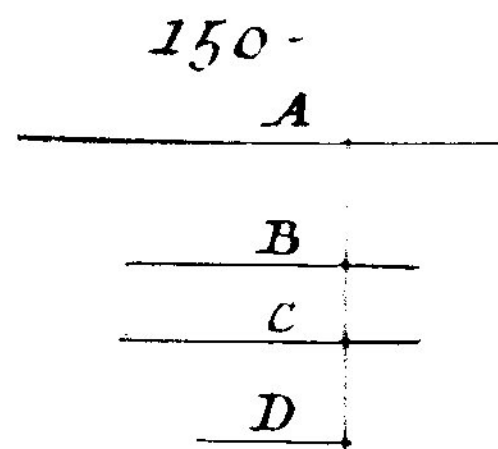
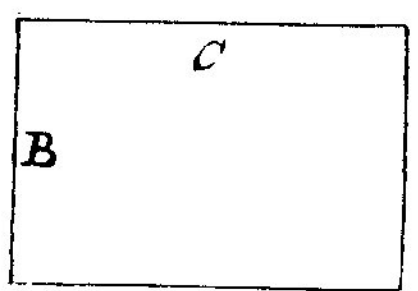
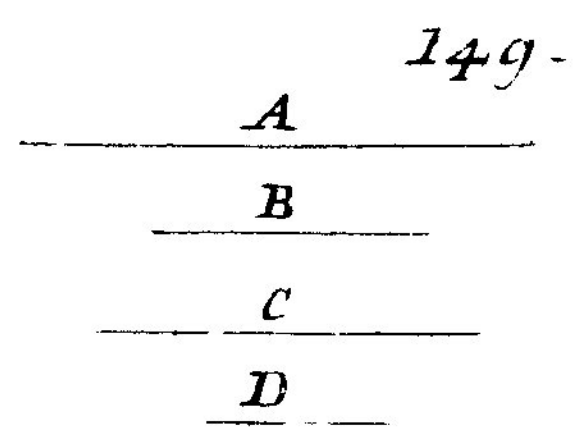
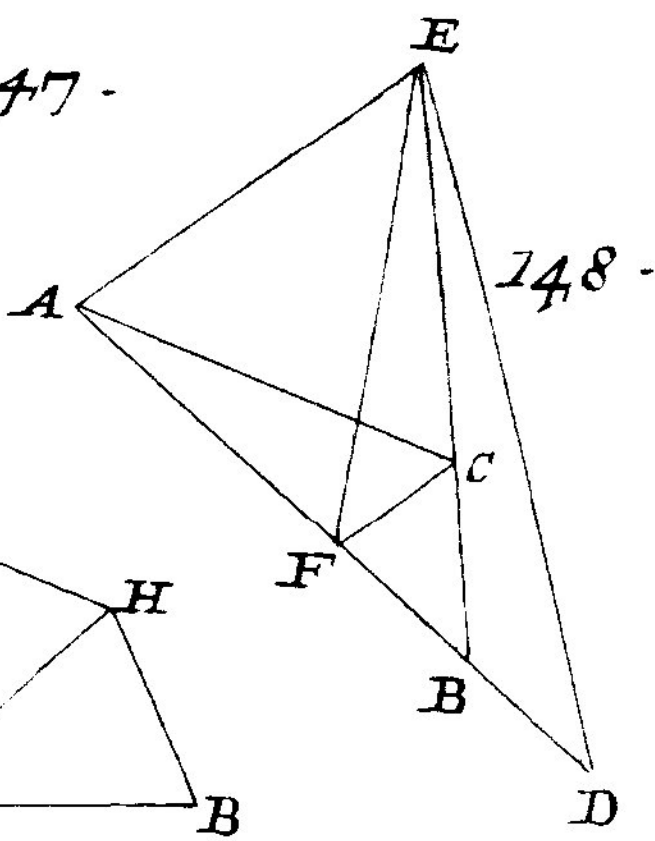
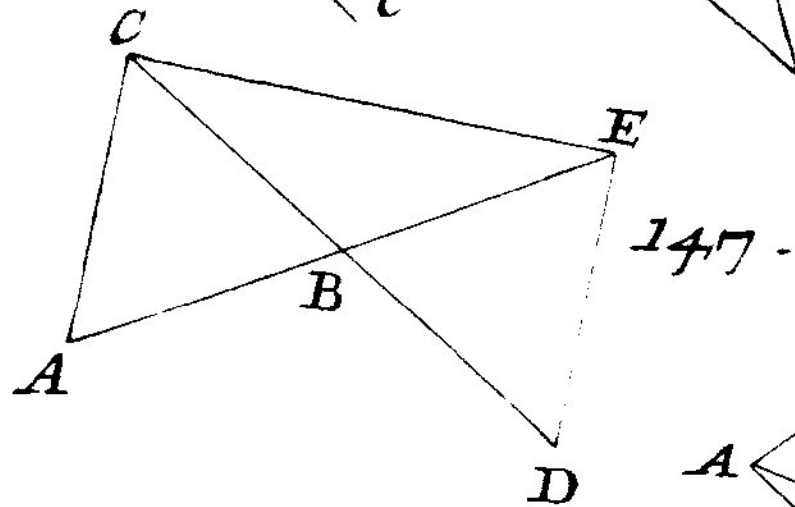
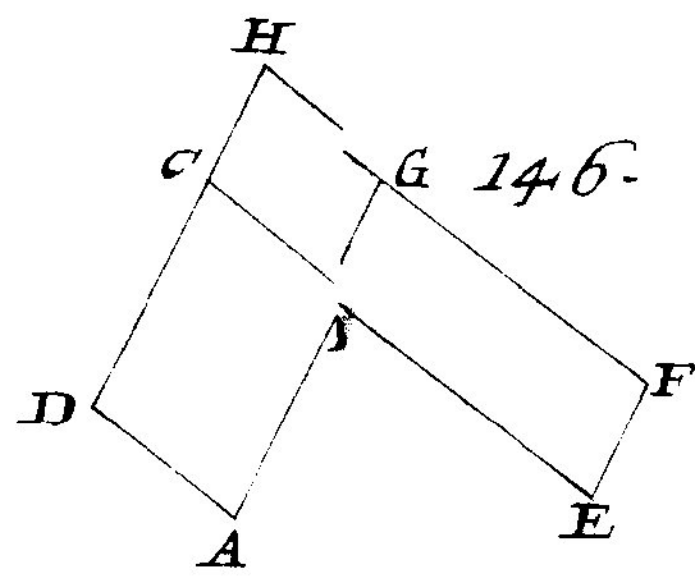
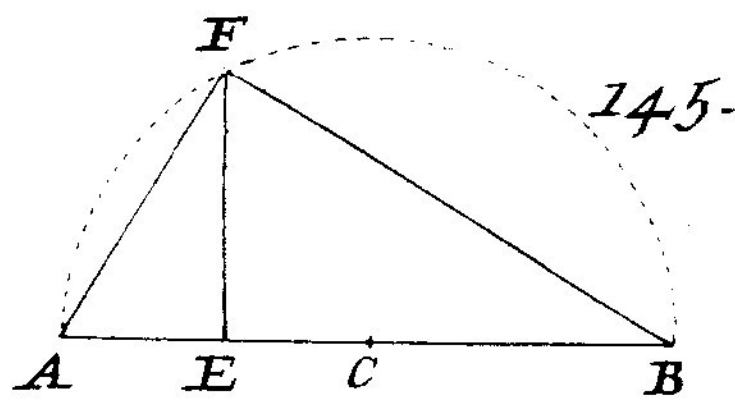
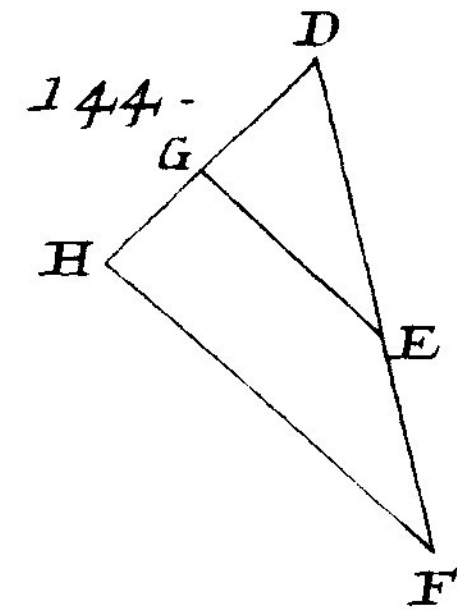
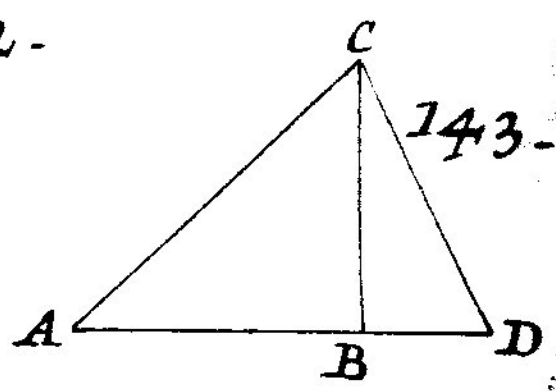
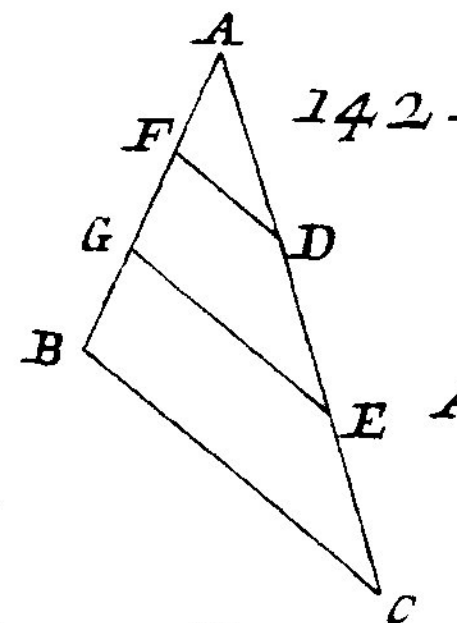
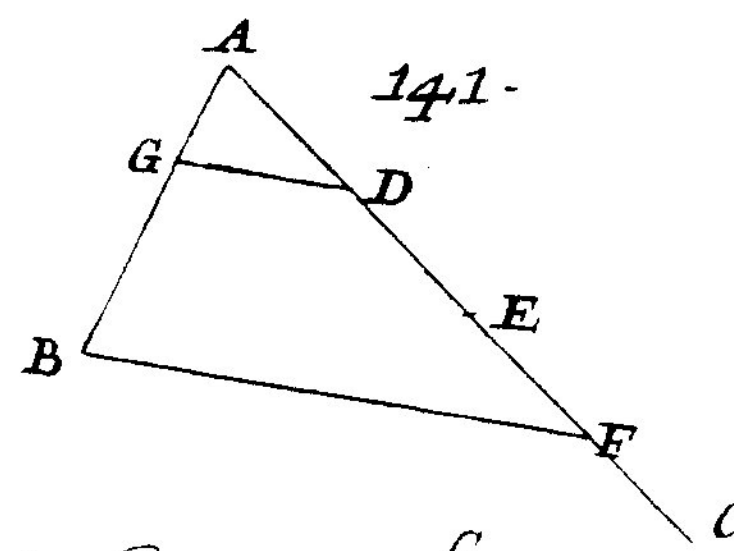
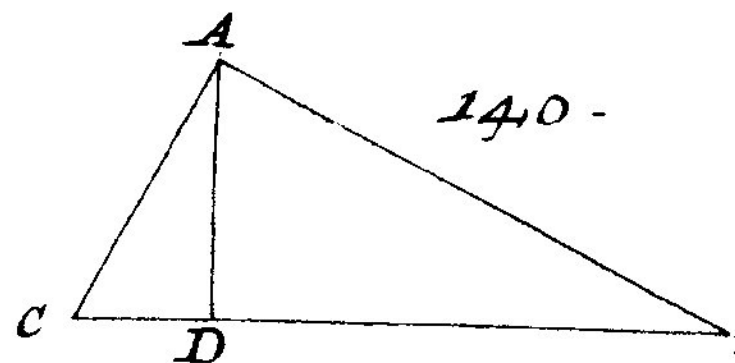
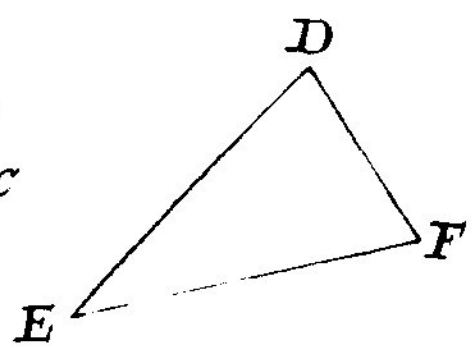
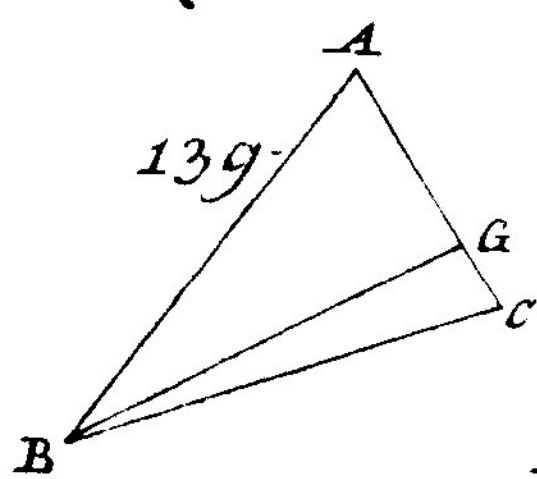
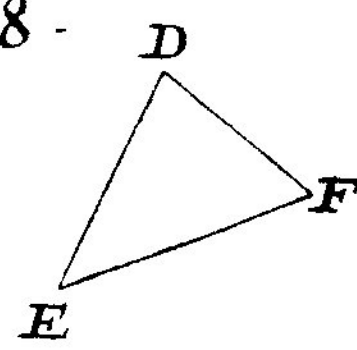
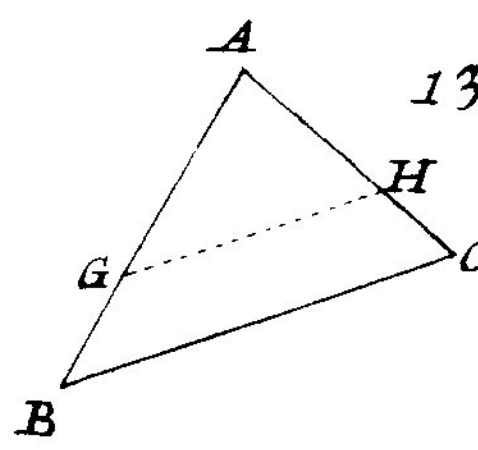
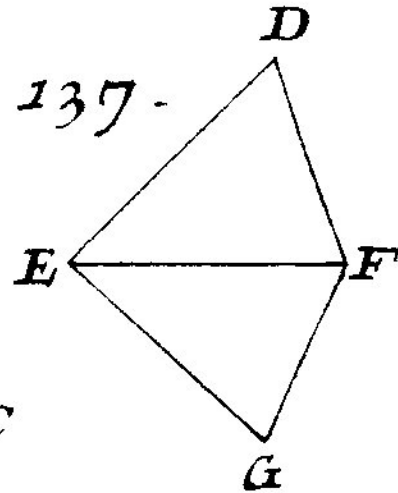
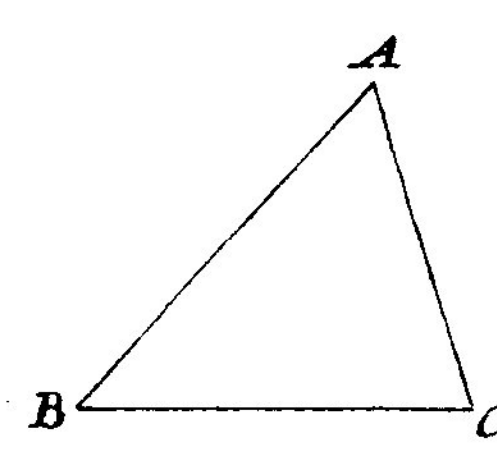
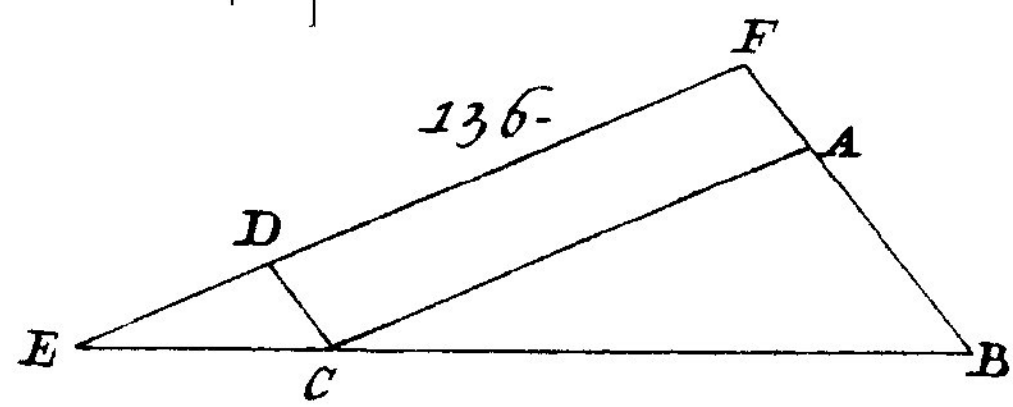
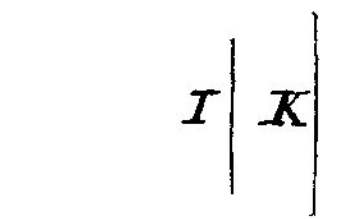
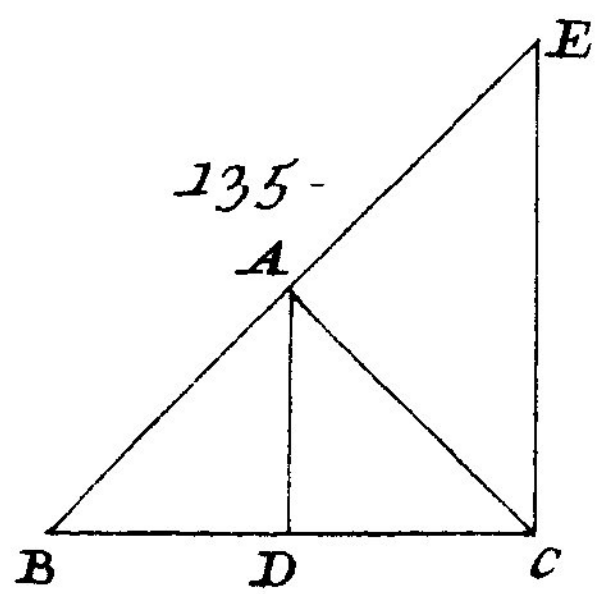
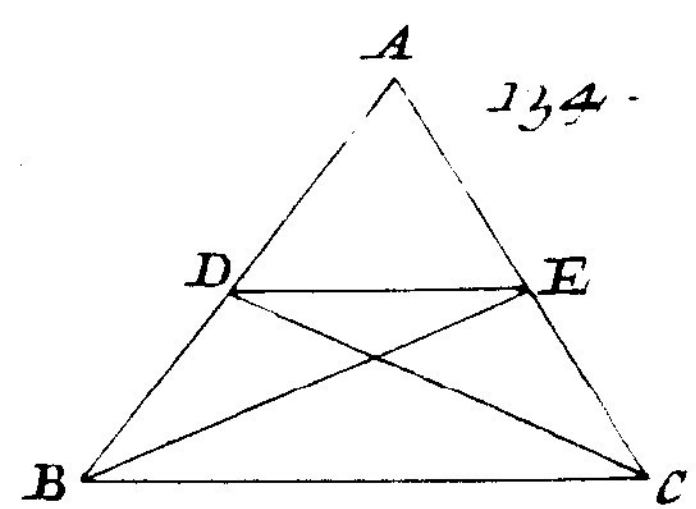
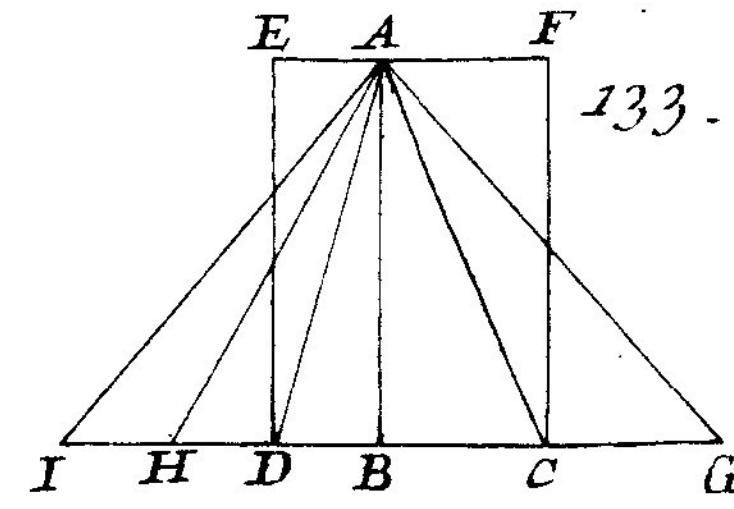
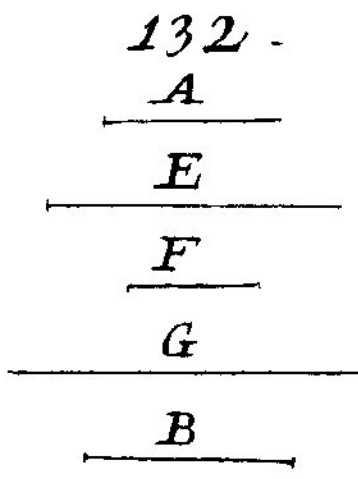
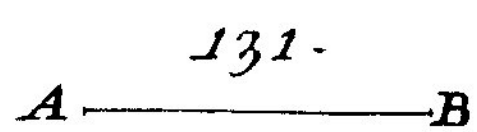
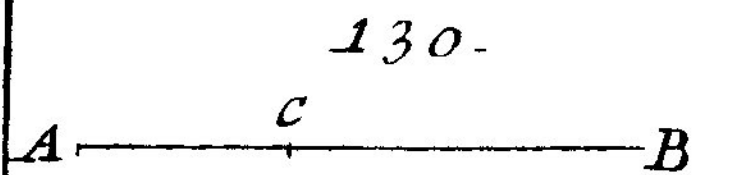


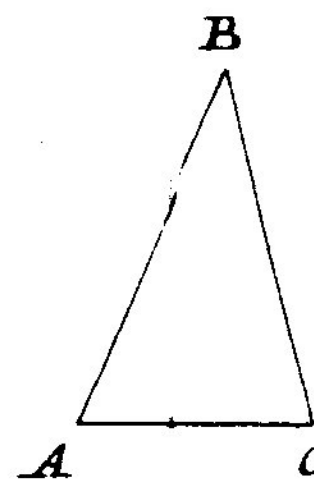
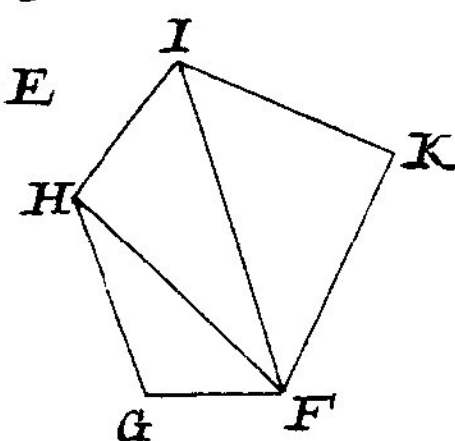
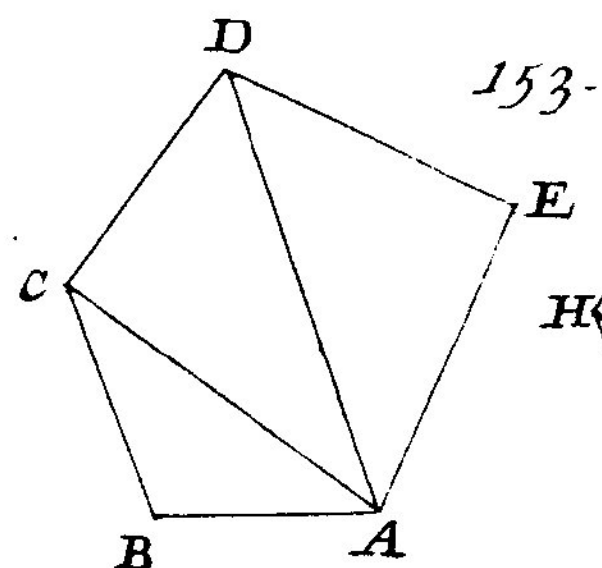
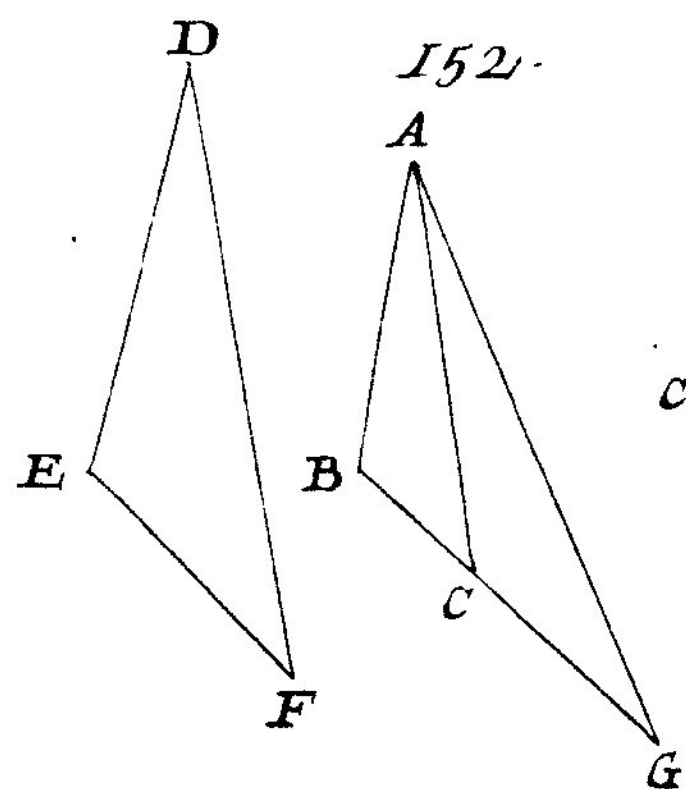




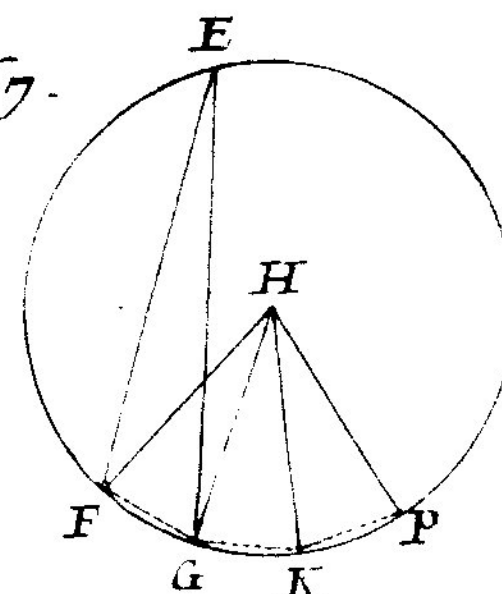
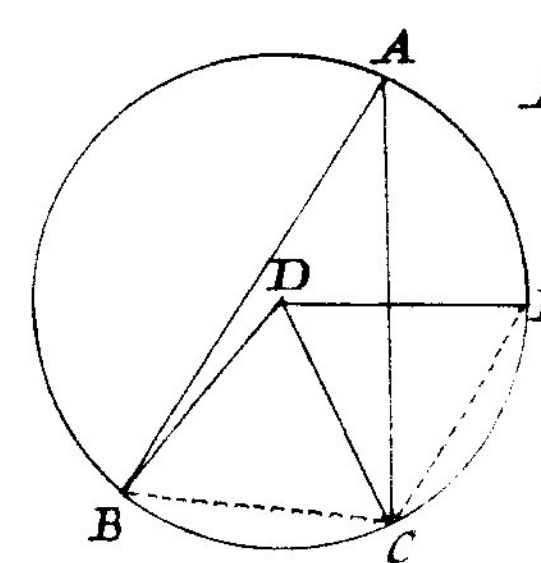
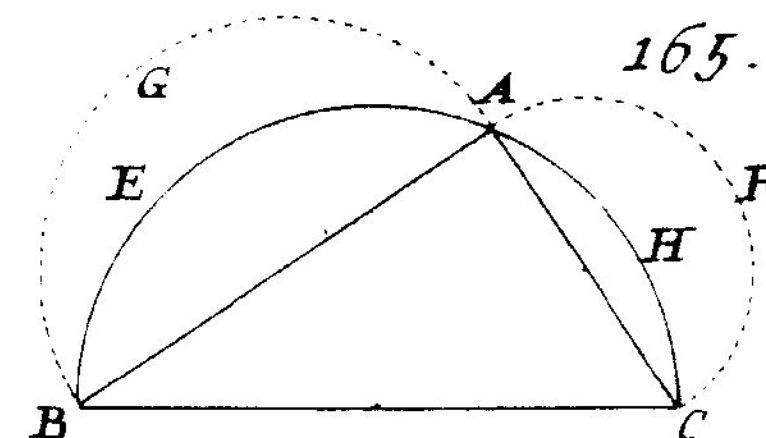
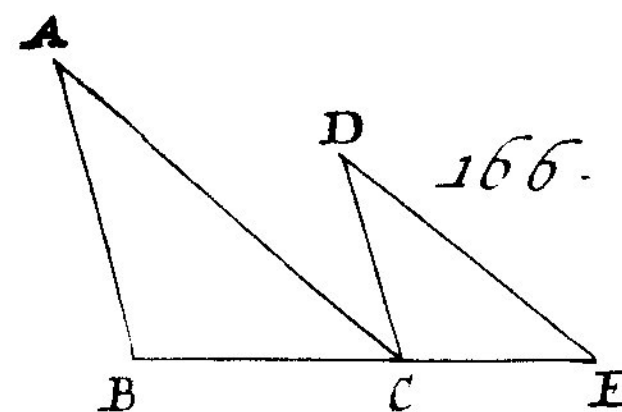
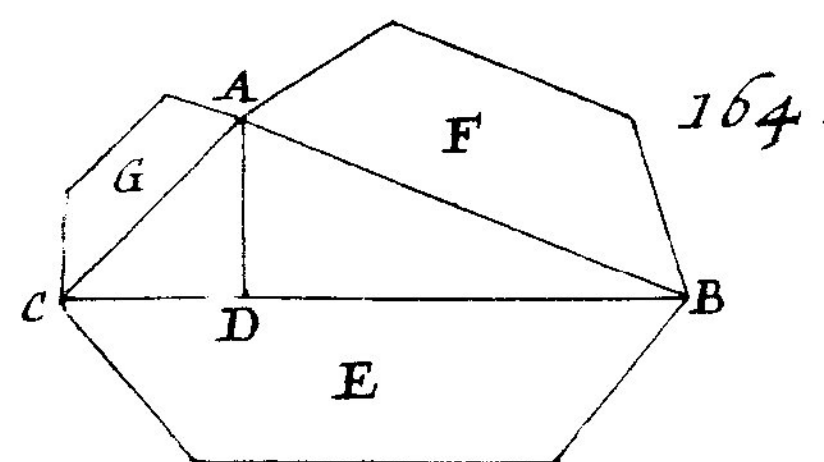
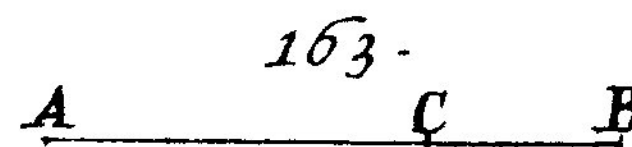
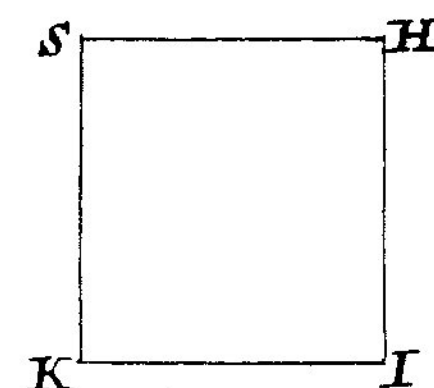
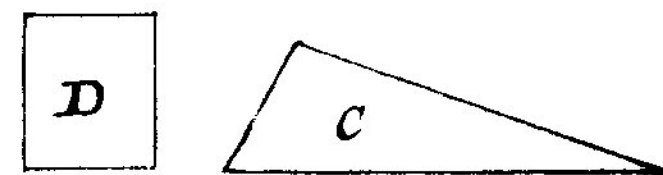
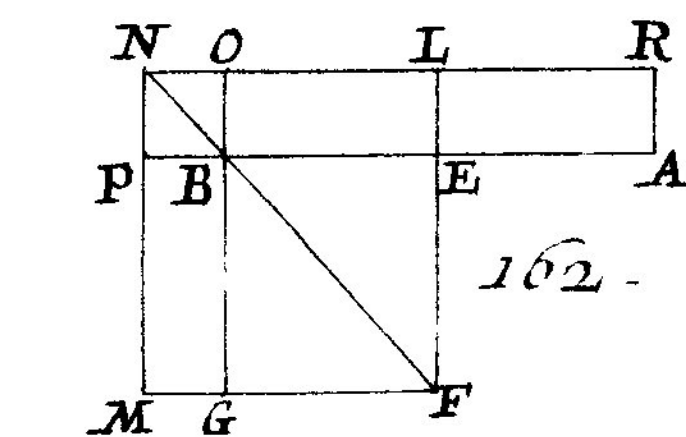
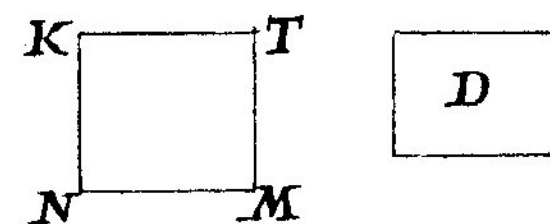
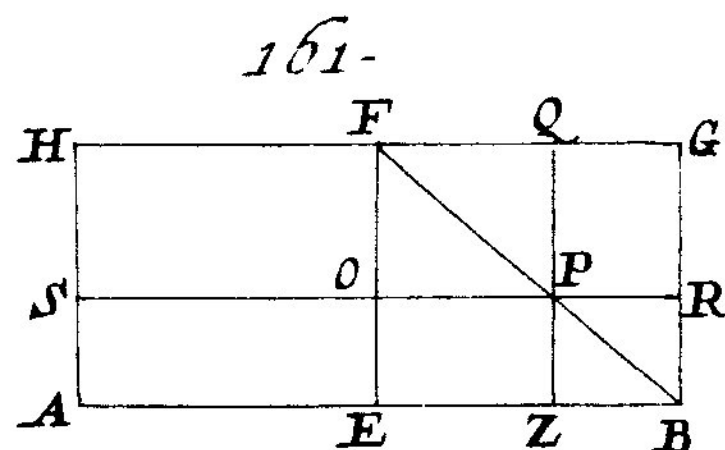
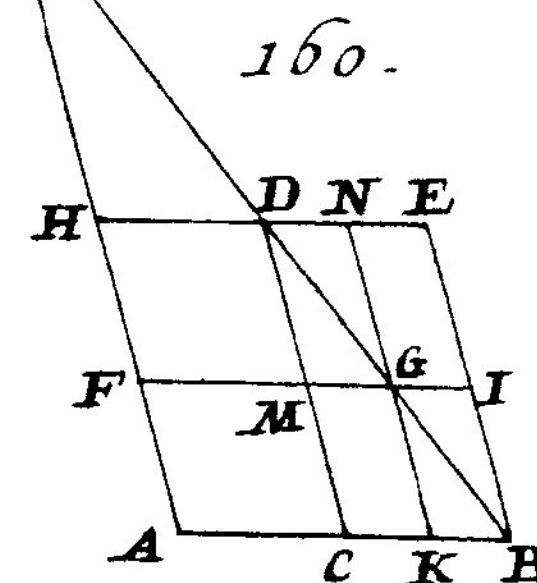
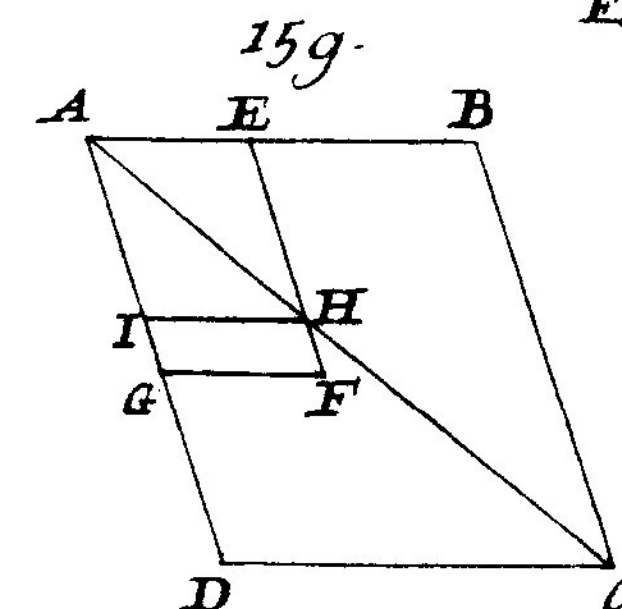
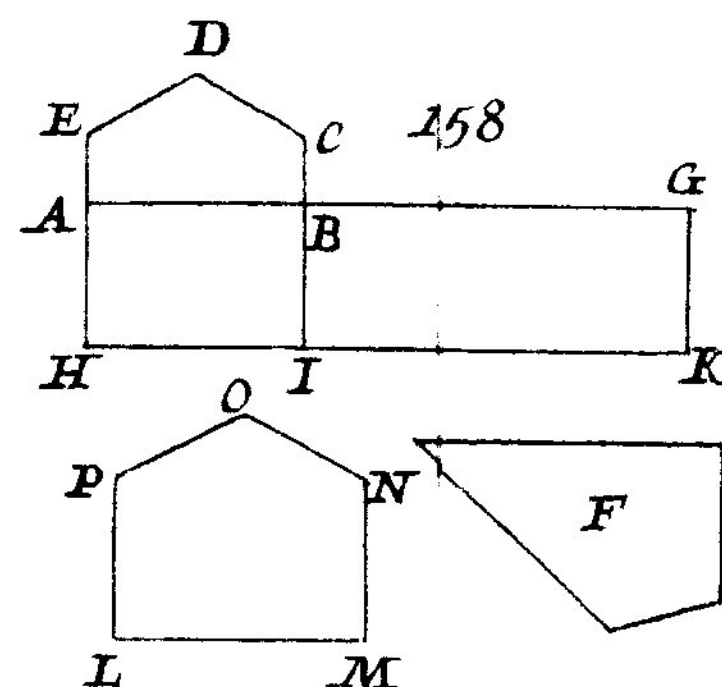
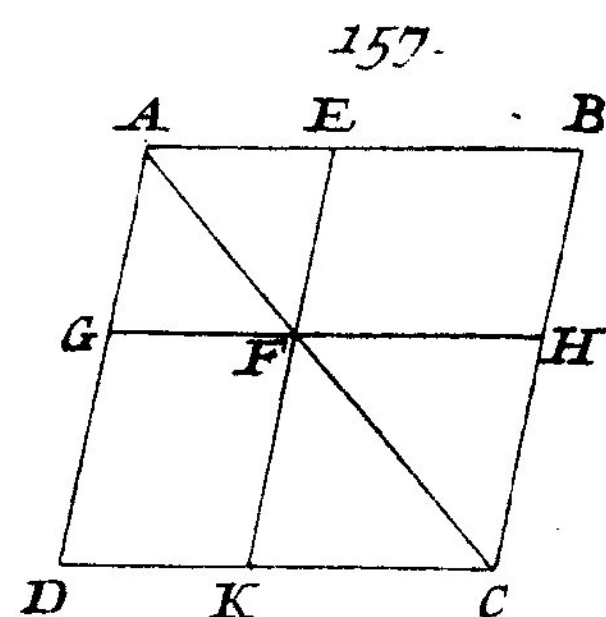
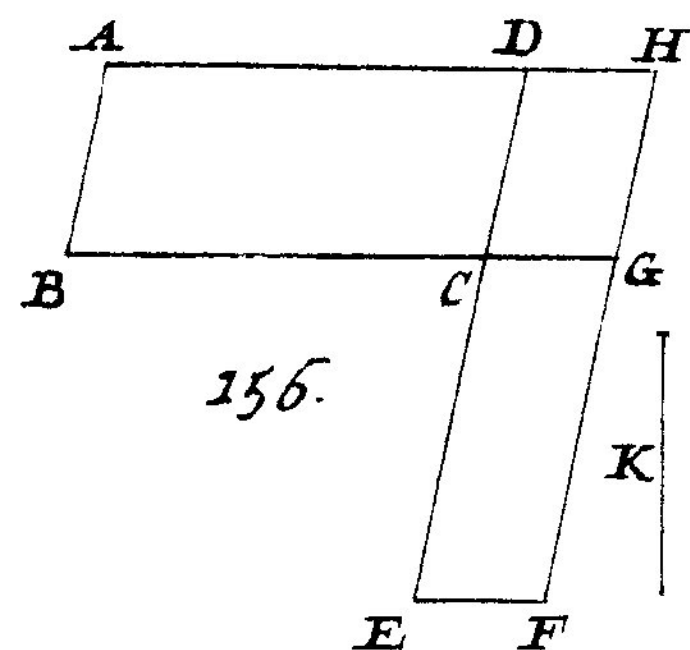
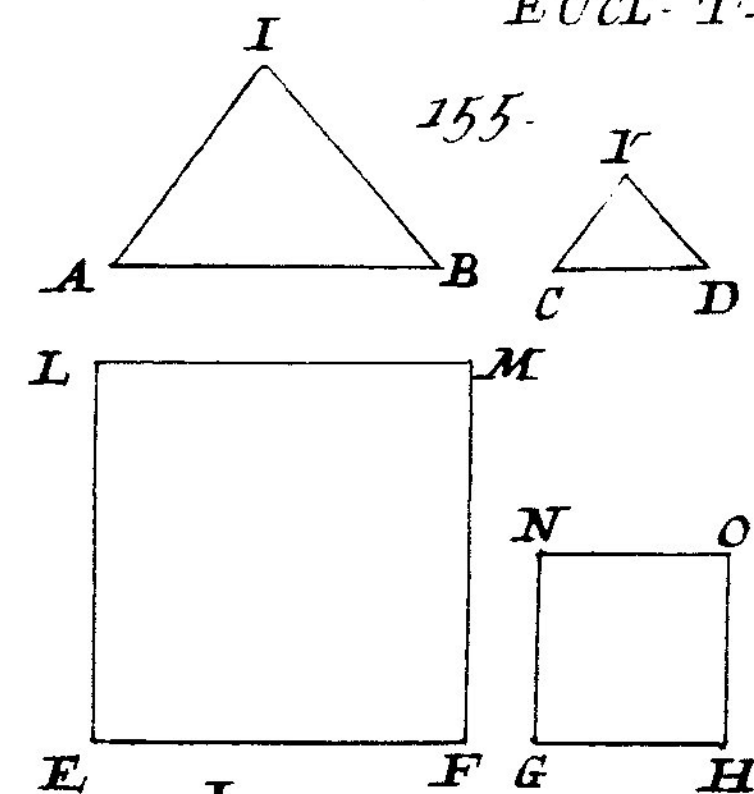
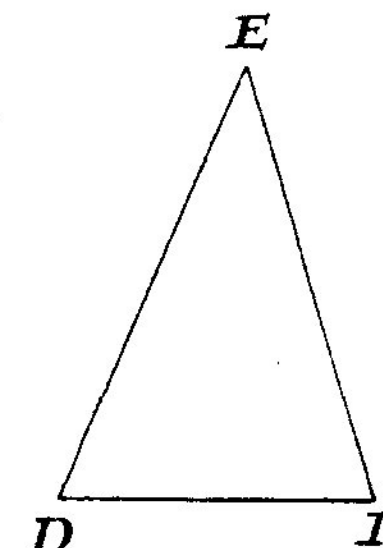
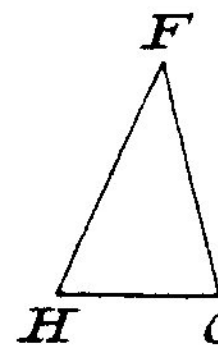




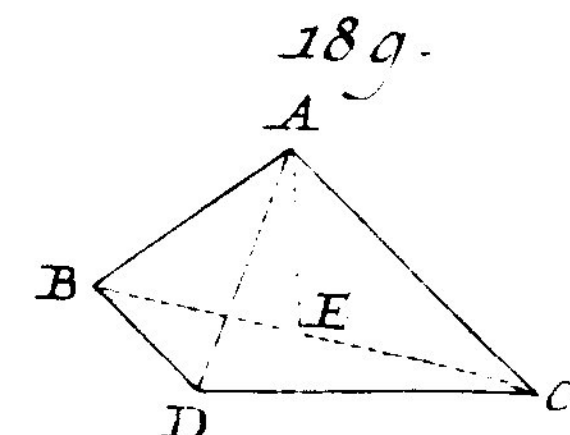
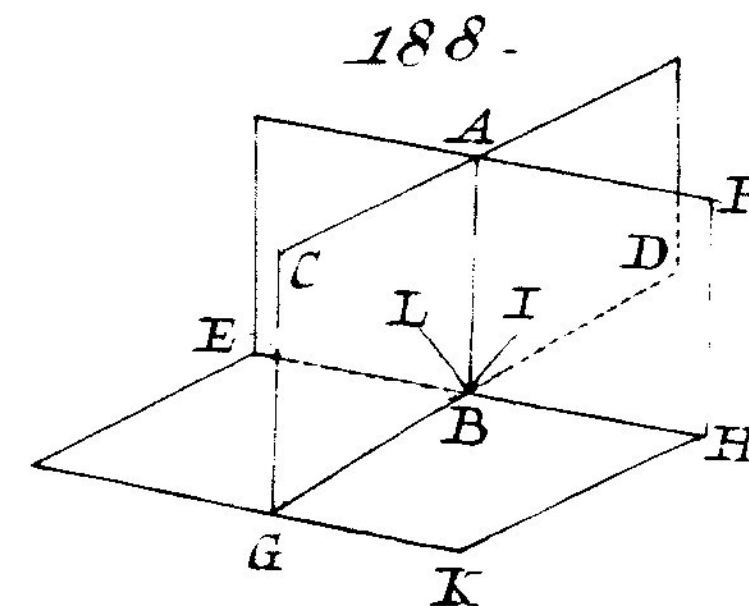
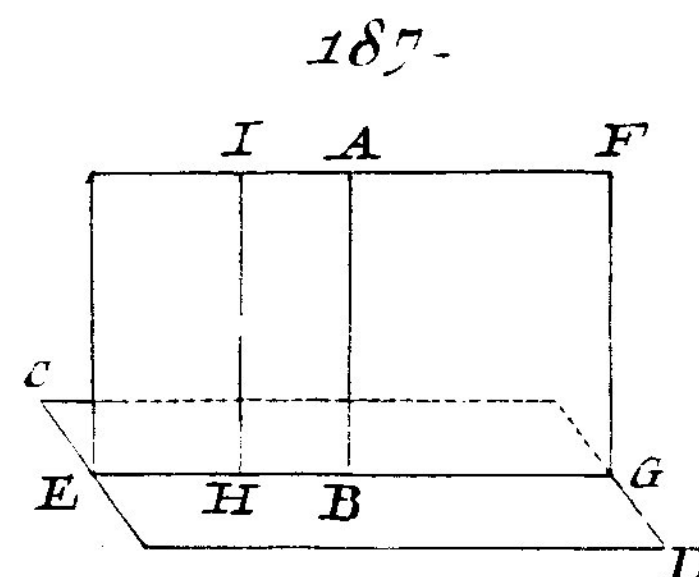
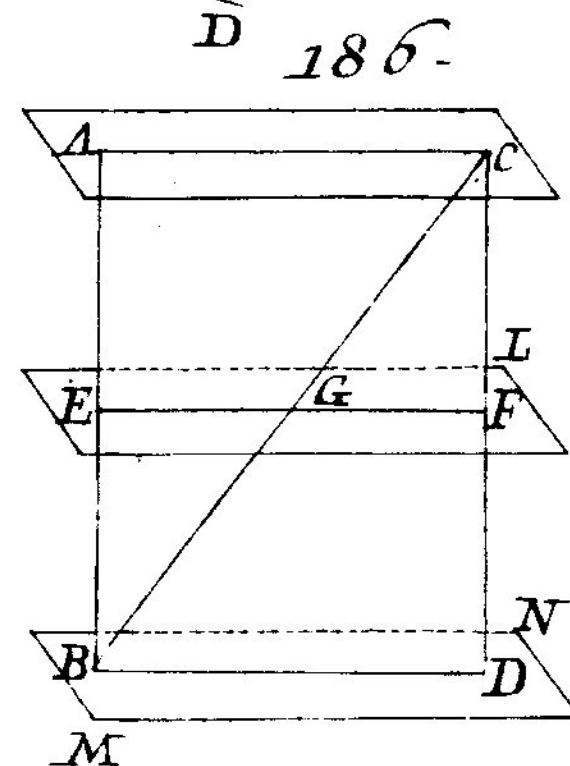
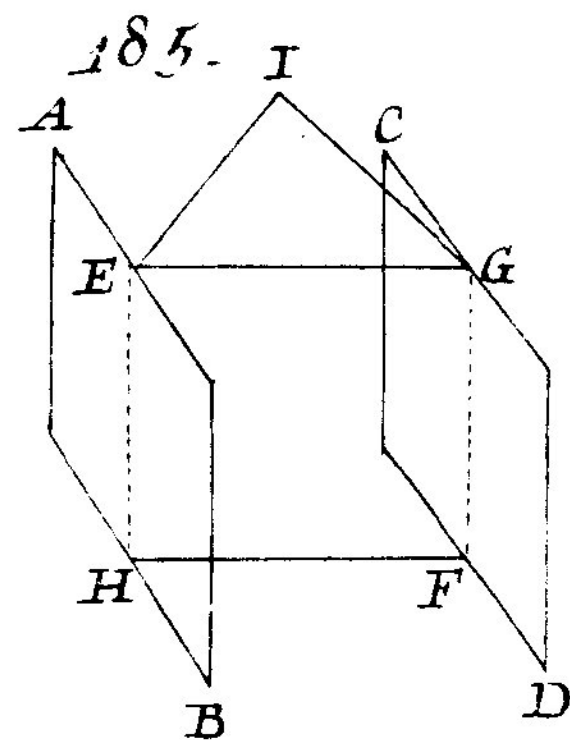
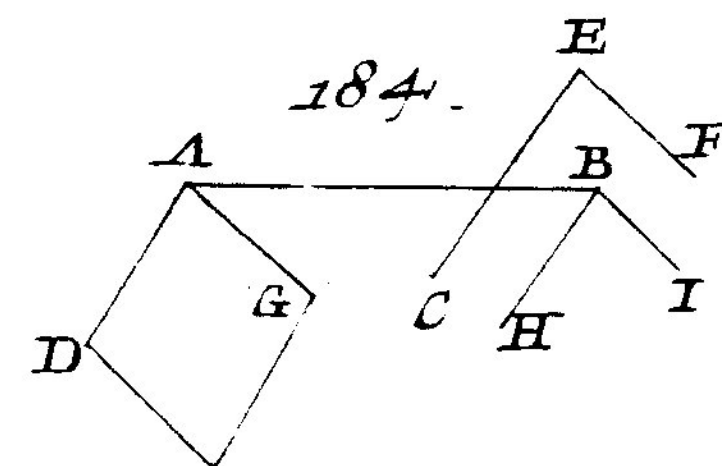
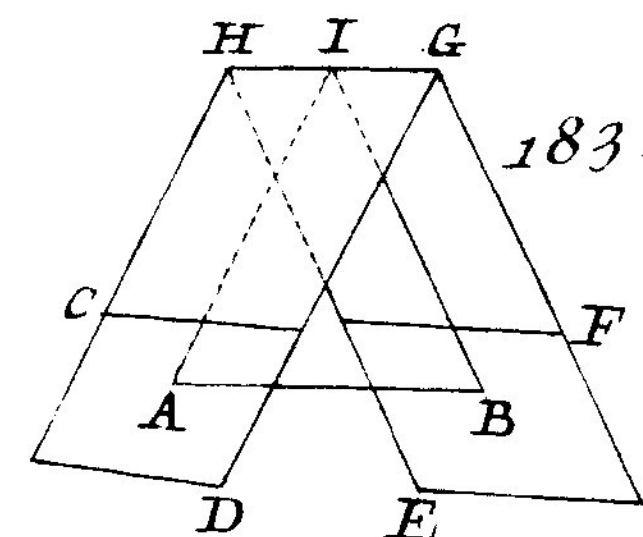
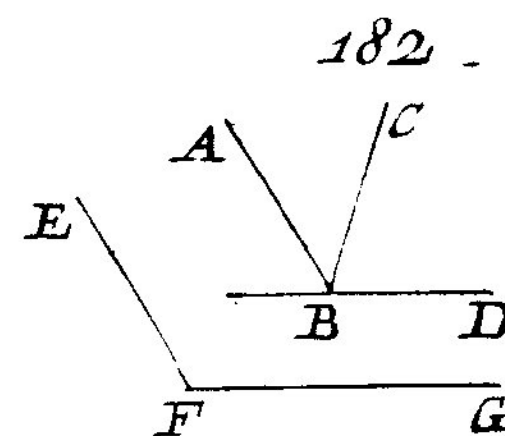
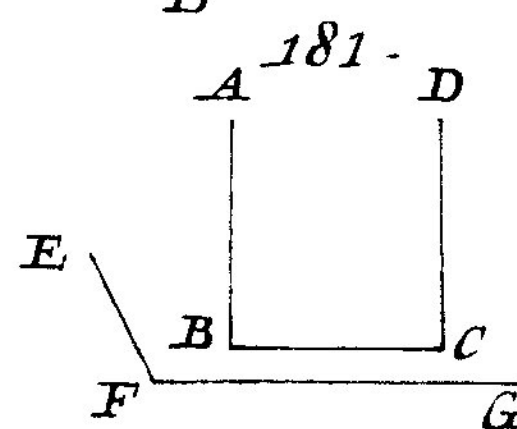
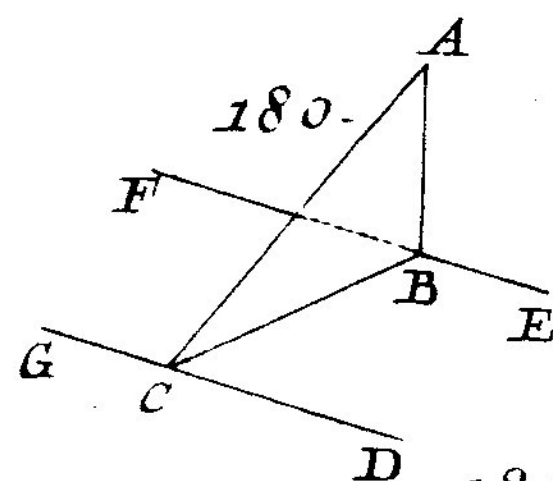
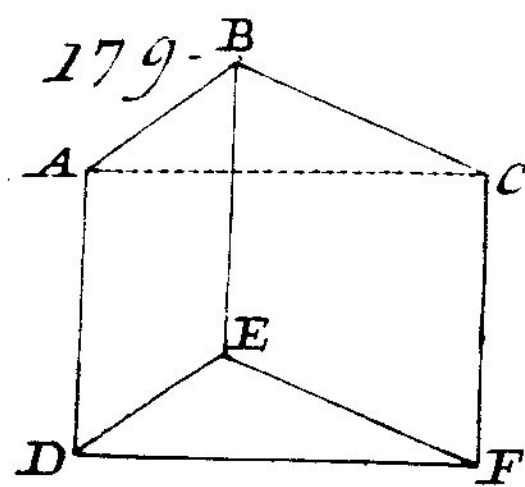
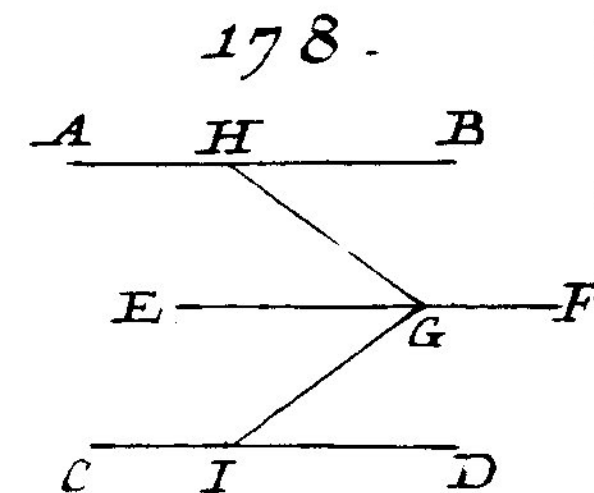
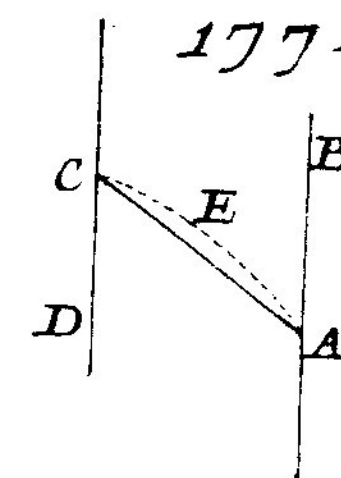
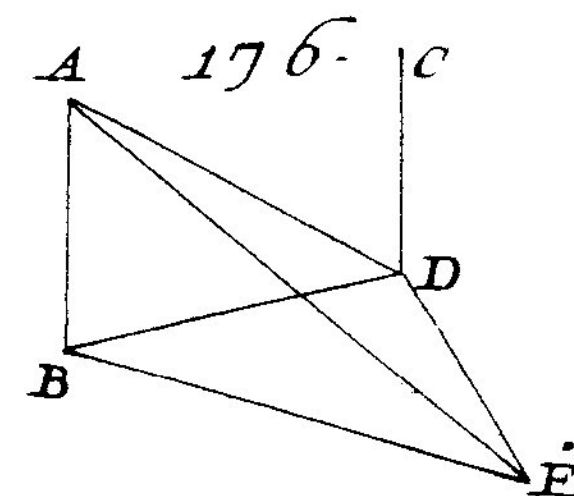
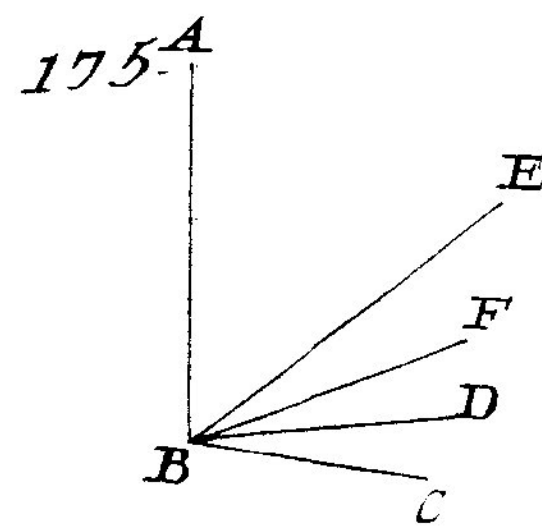
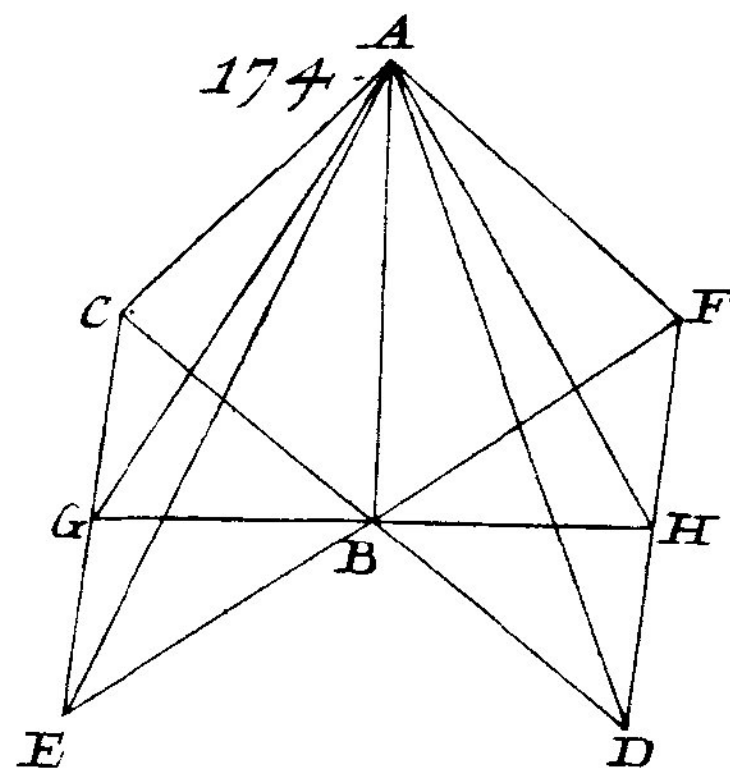
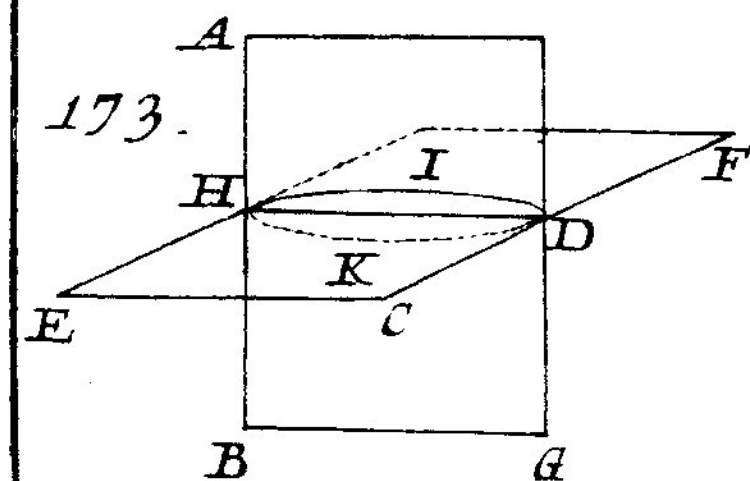
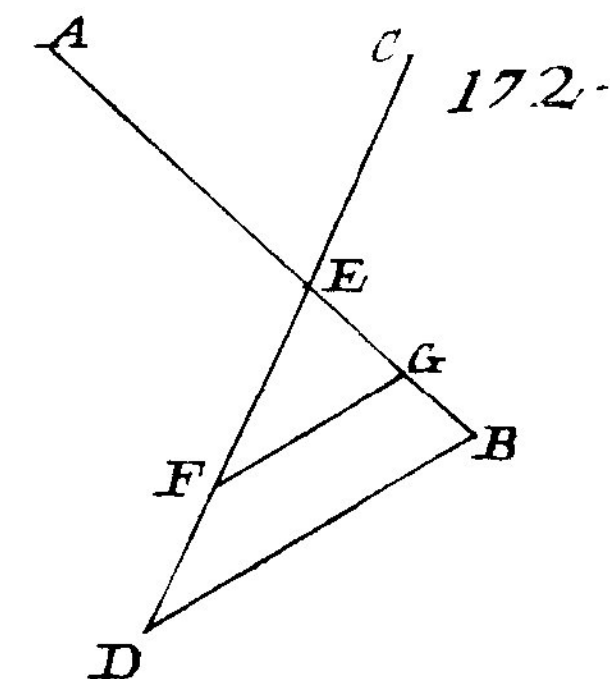
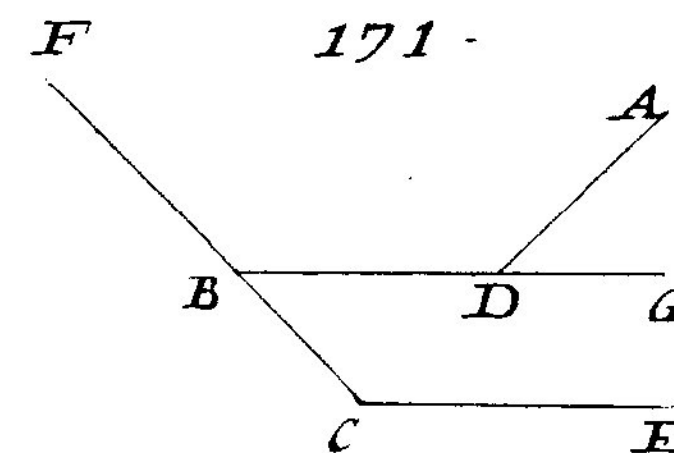
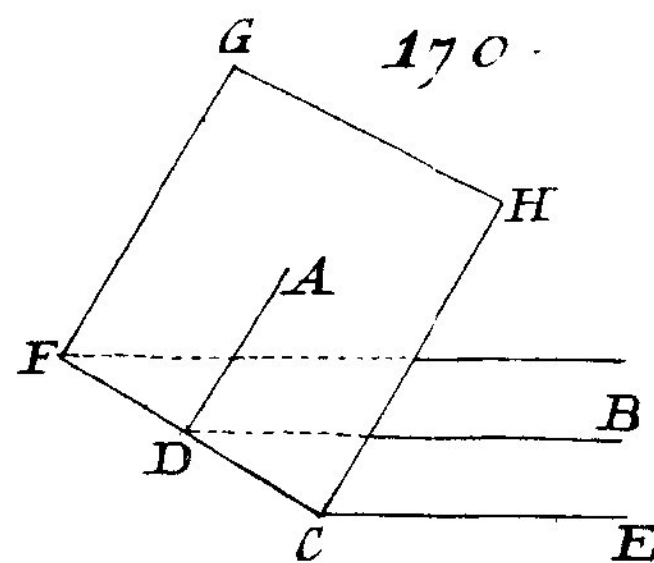
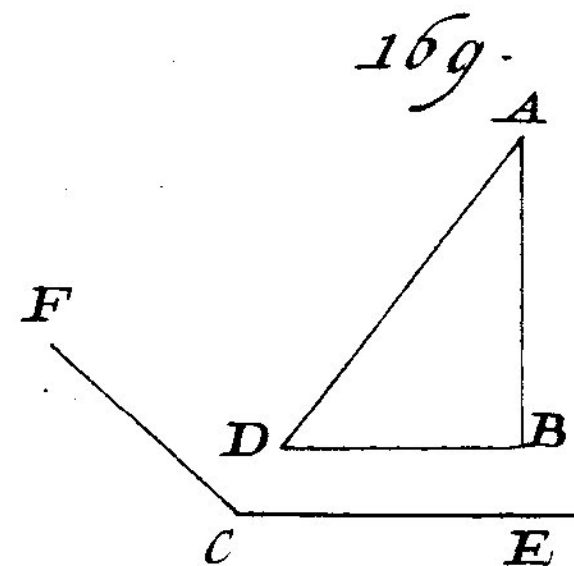
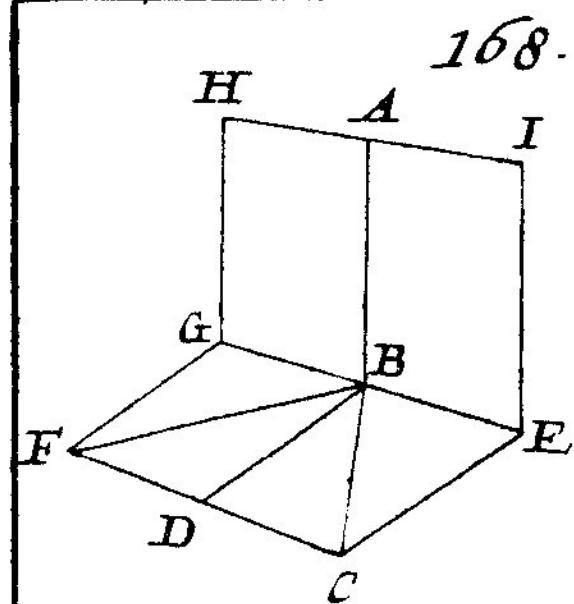




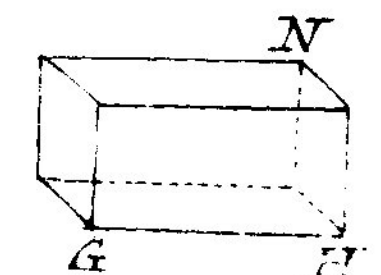
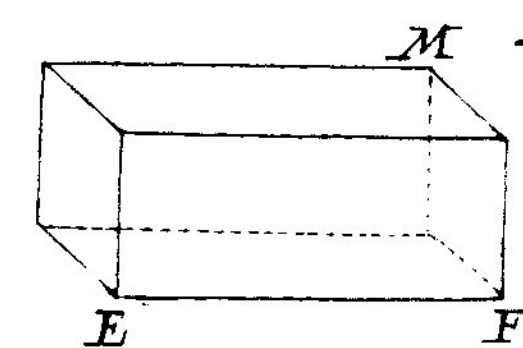
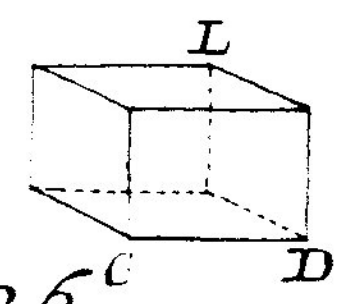
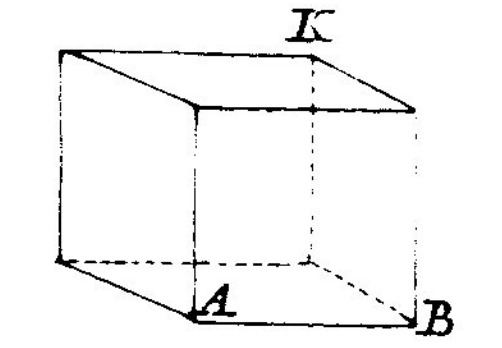
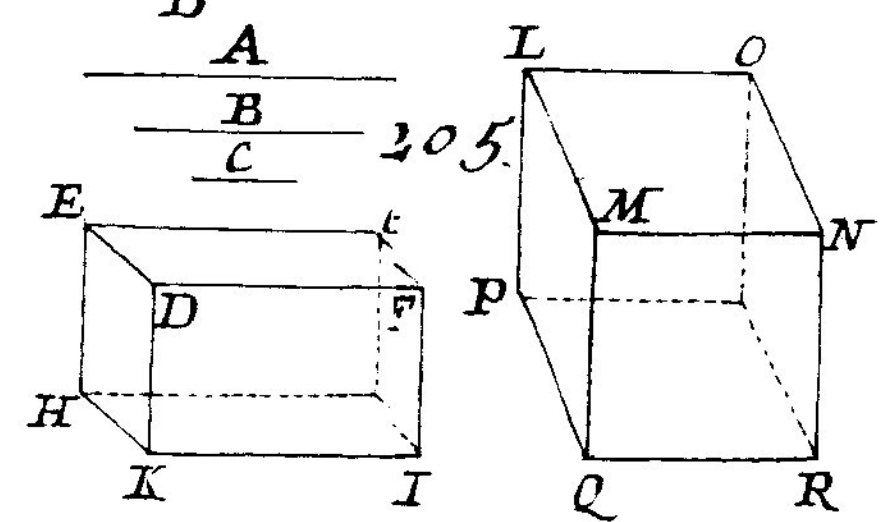
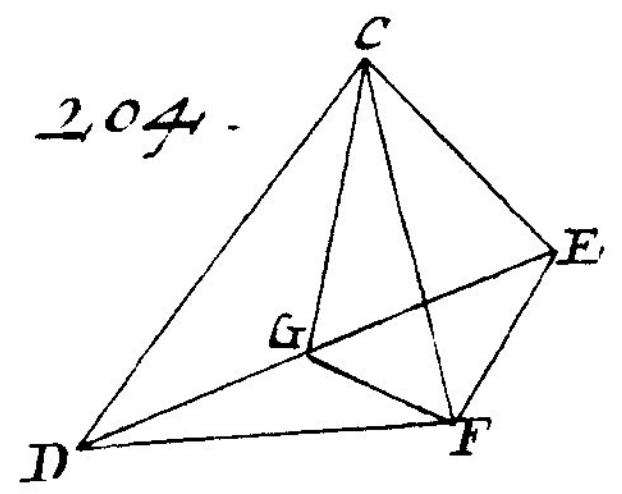
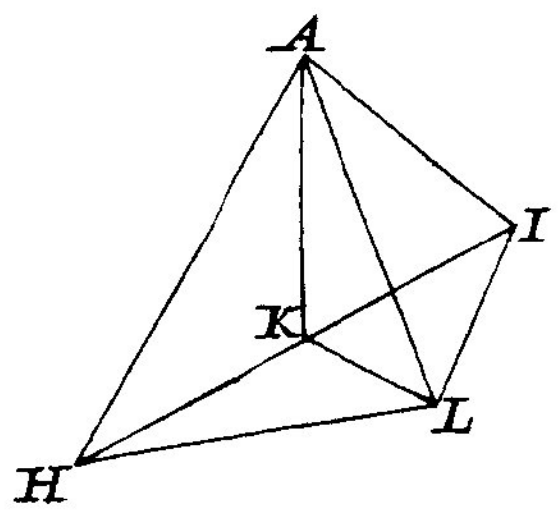
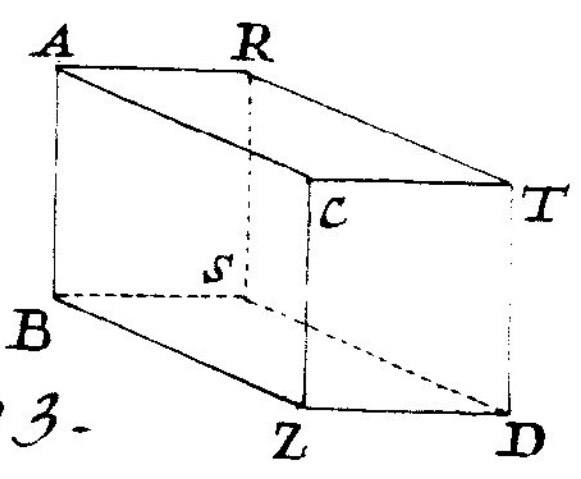
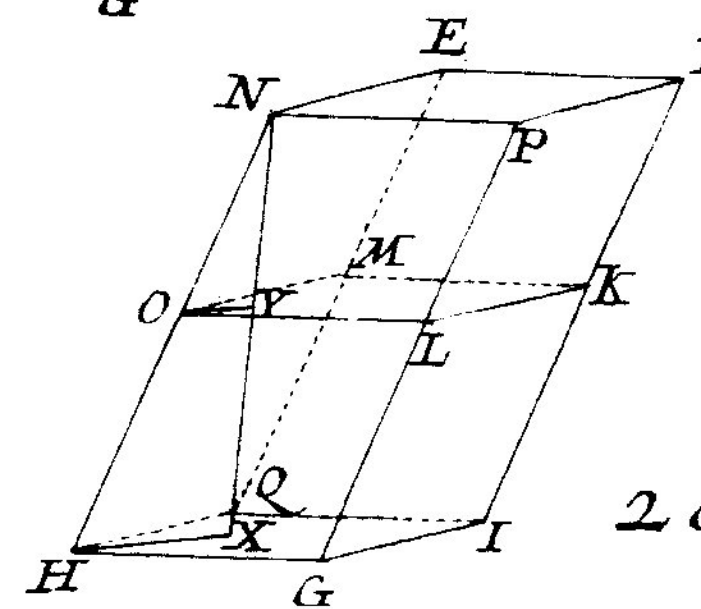
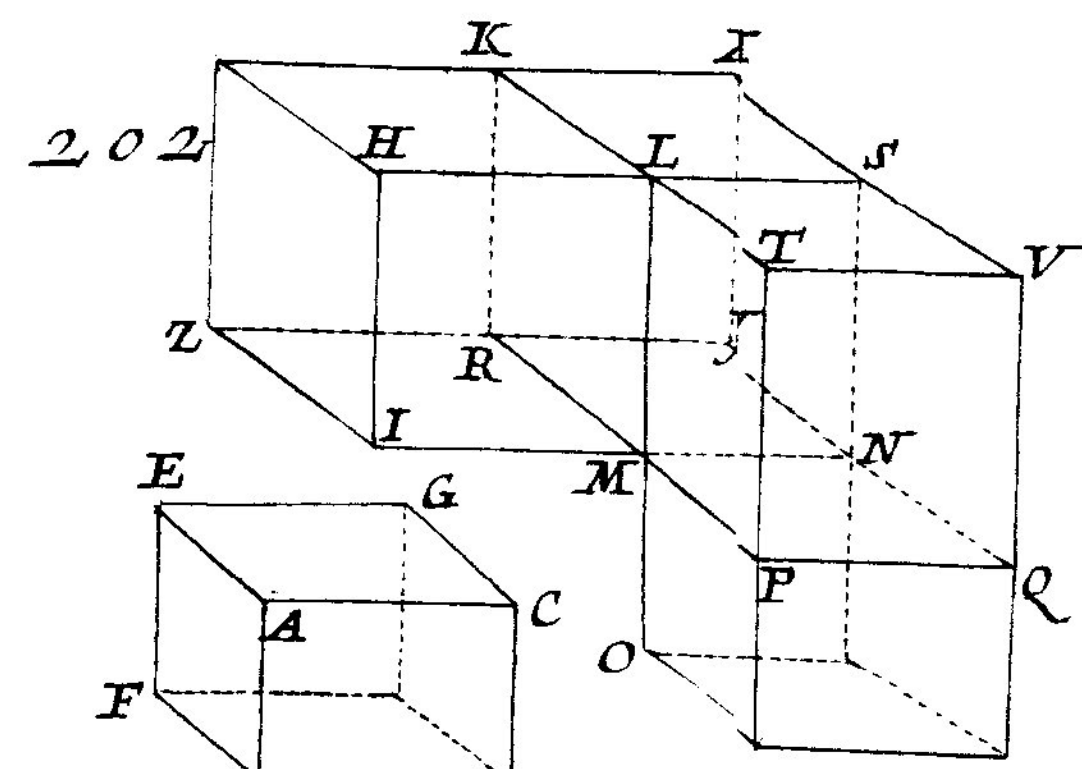
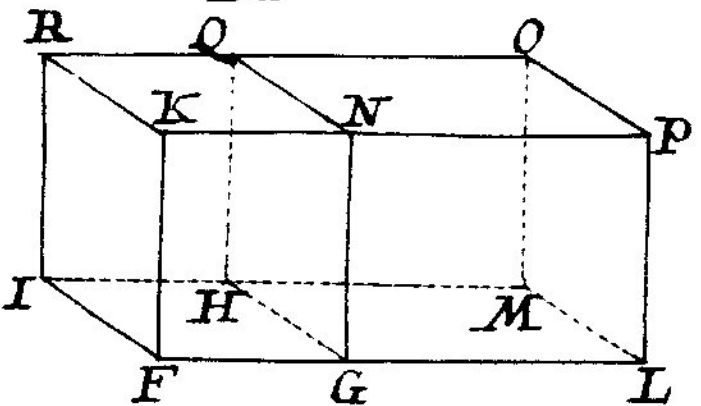
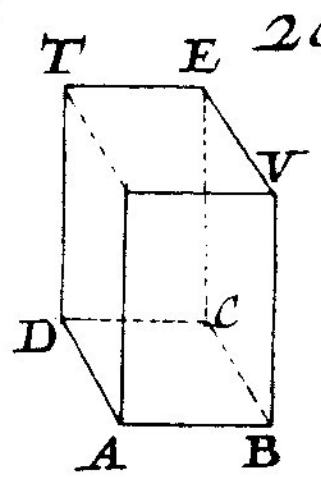
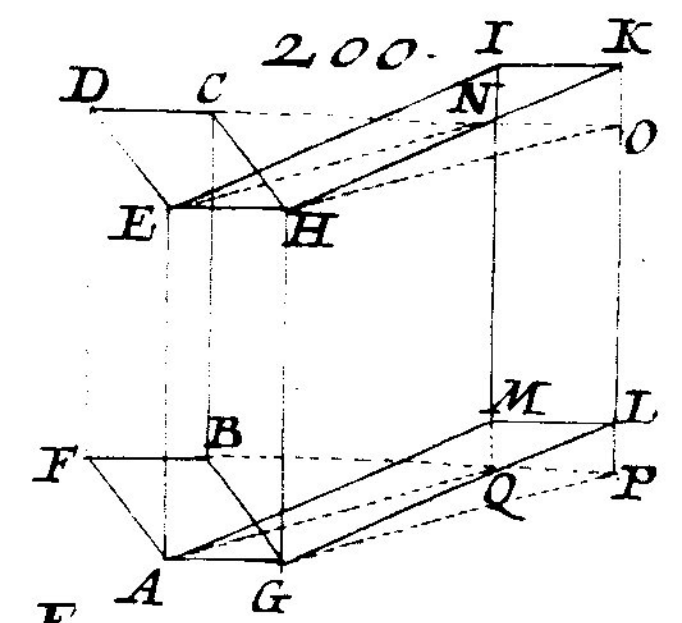
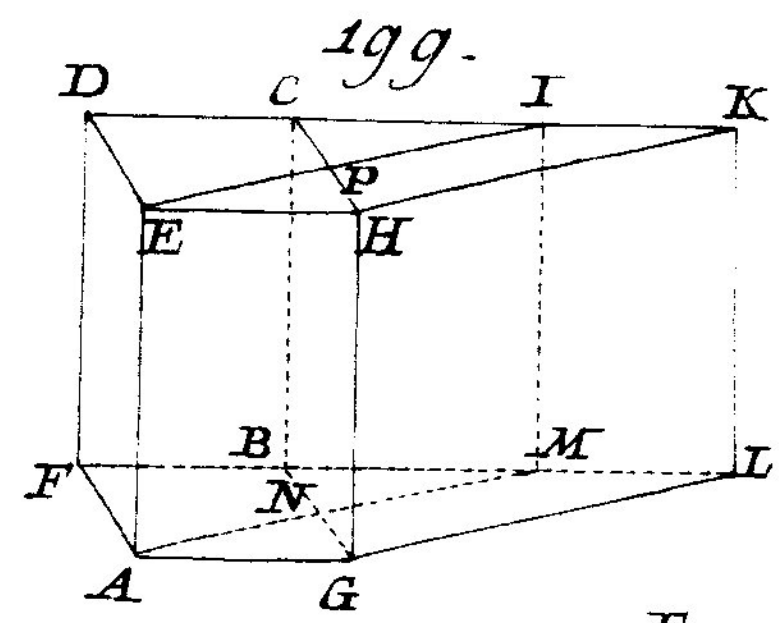
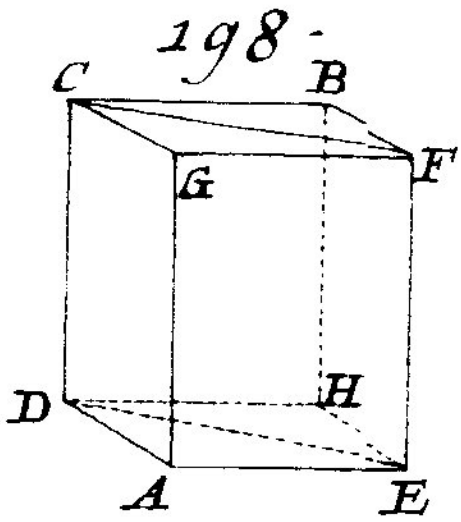
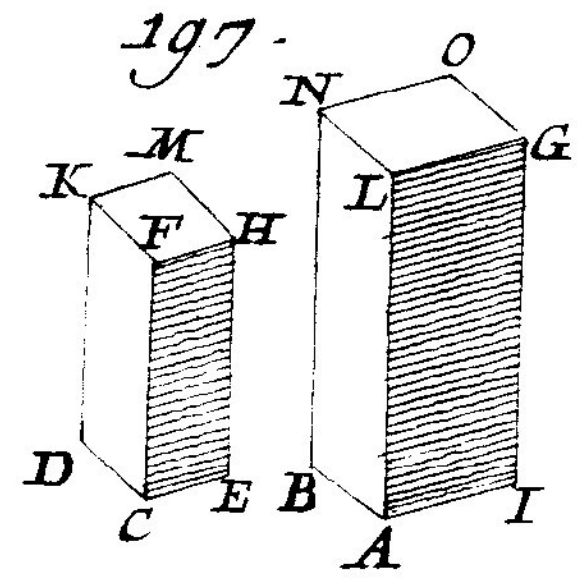
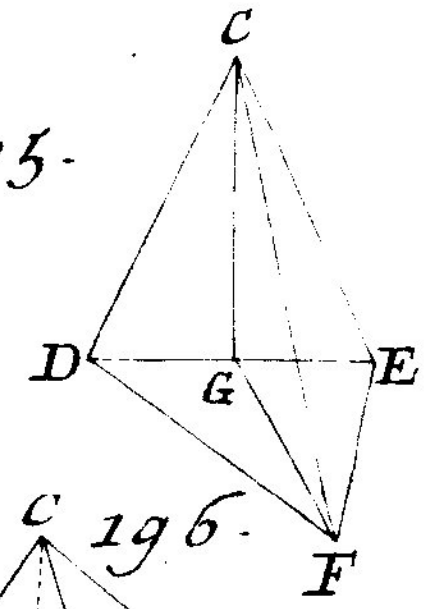
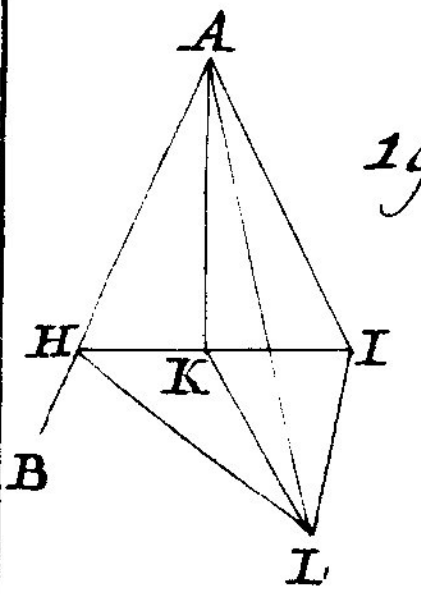
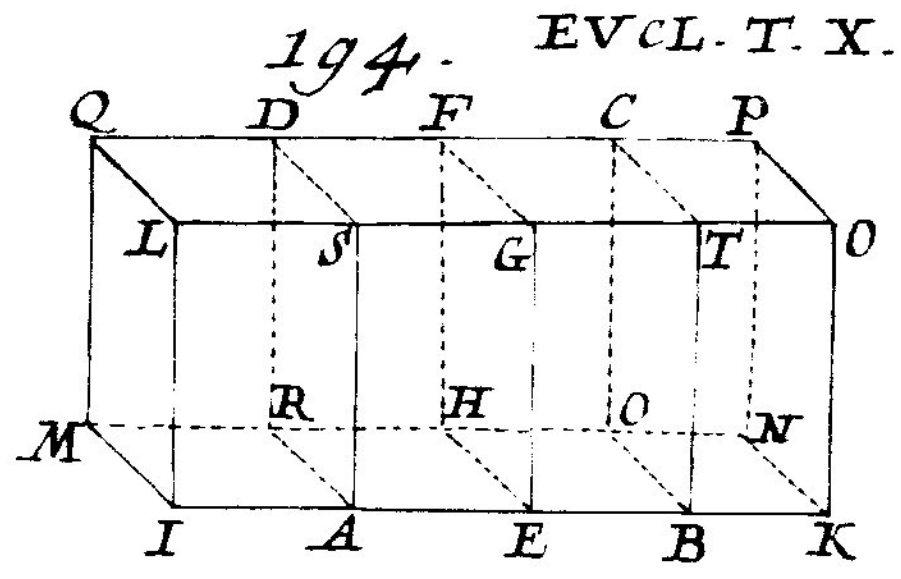
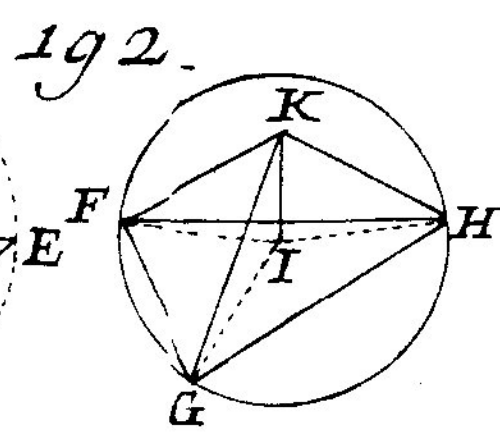
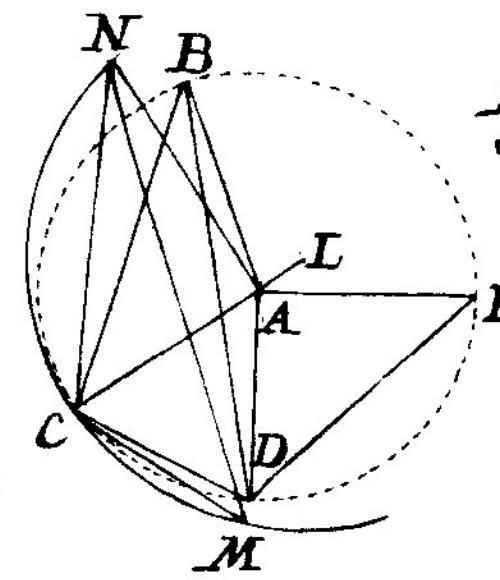
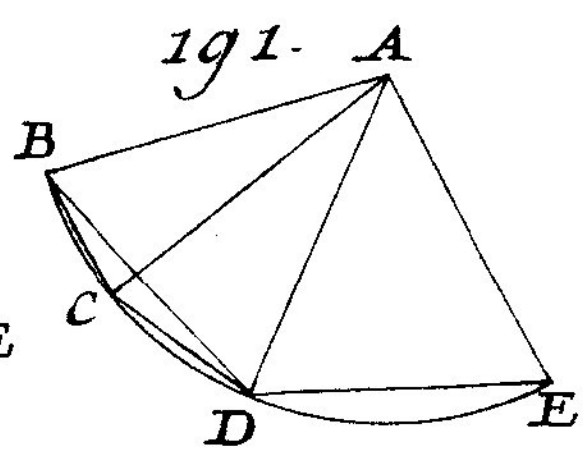
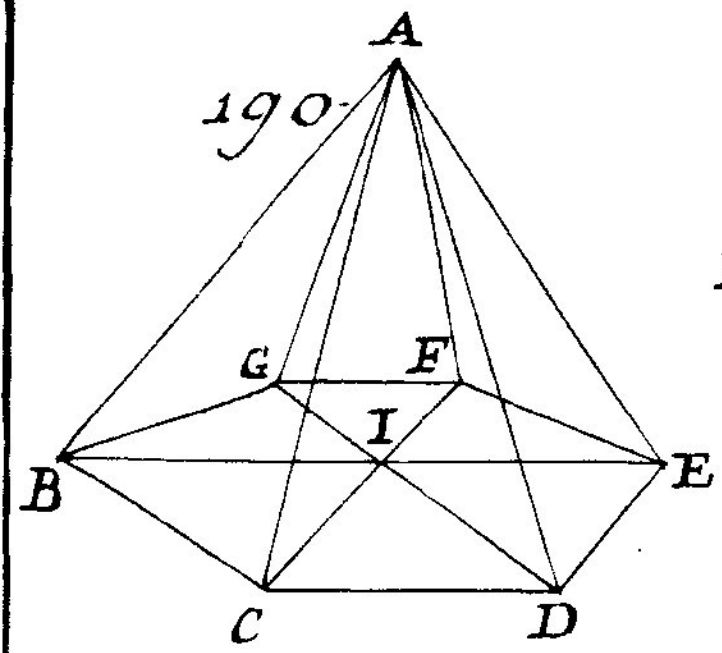
154.

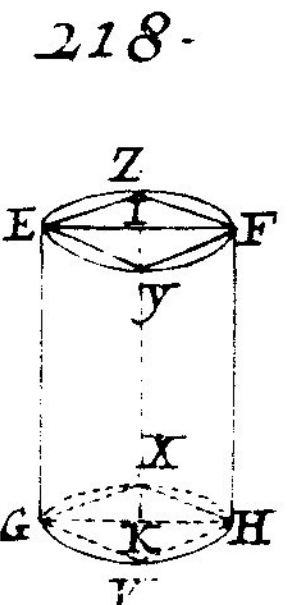
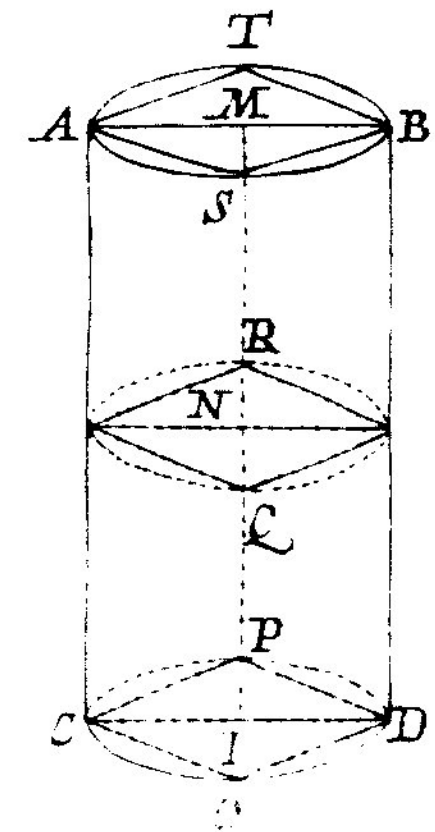
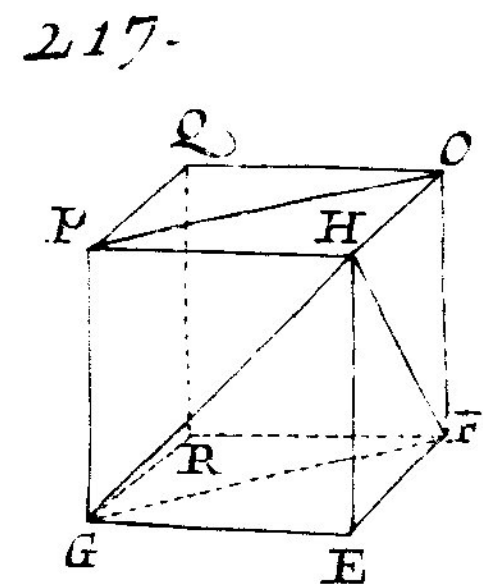
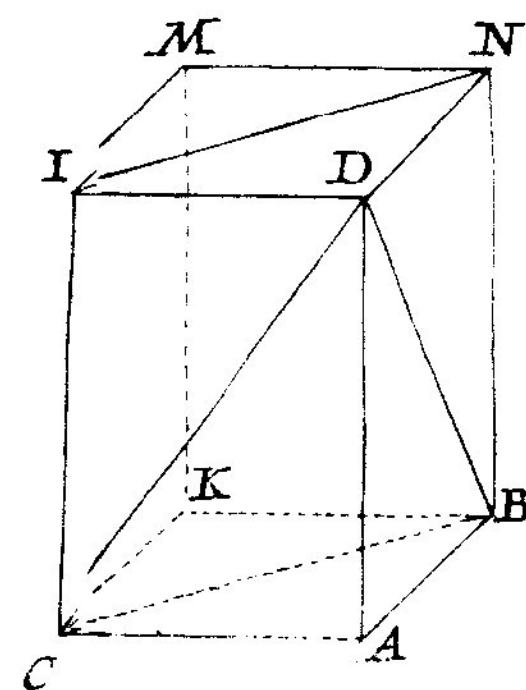
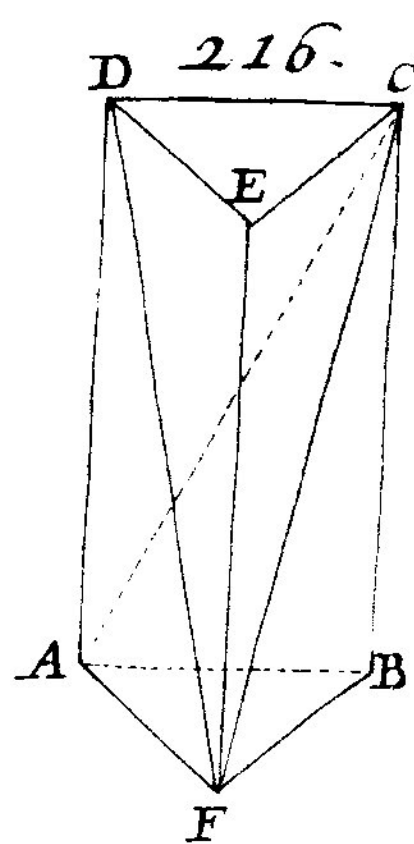
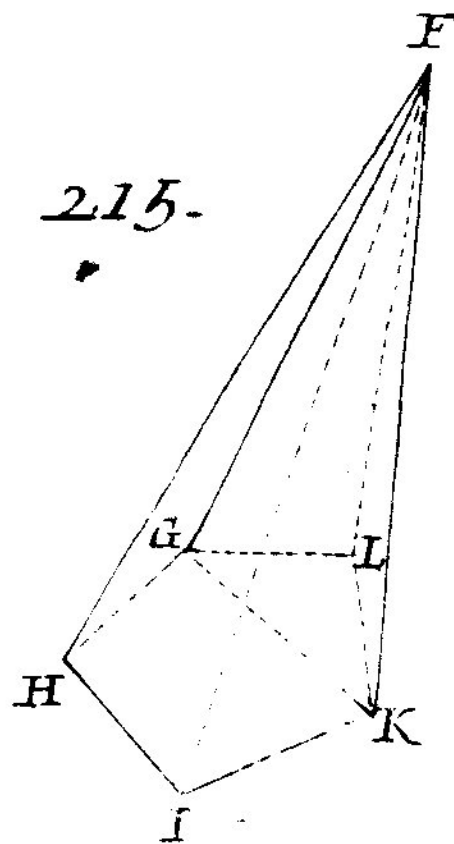
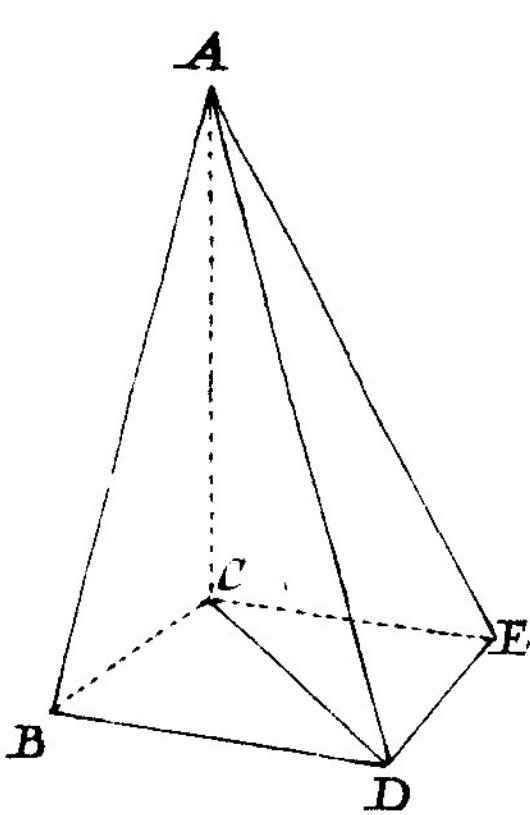
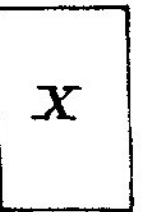
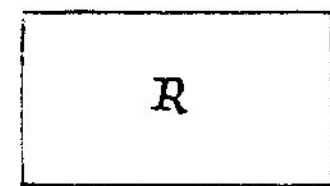
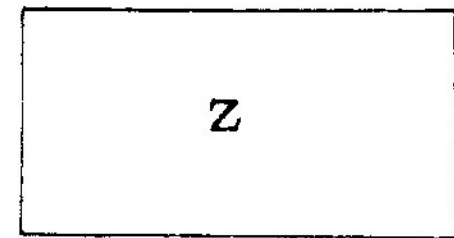
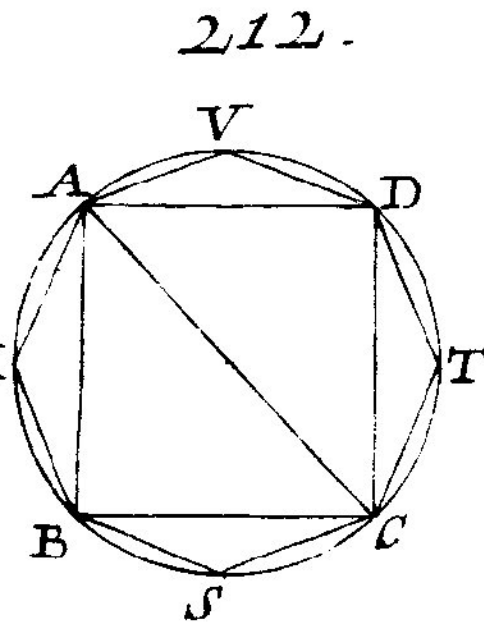
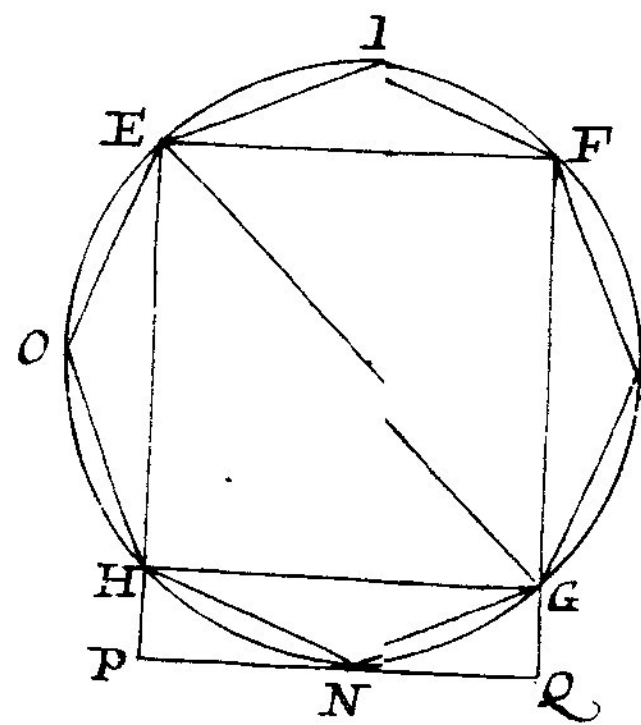
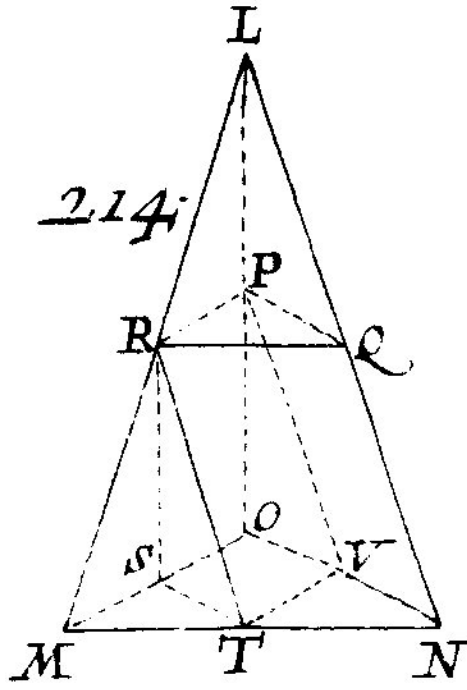
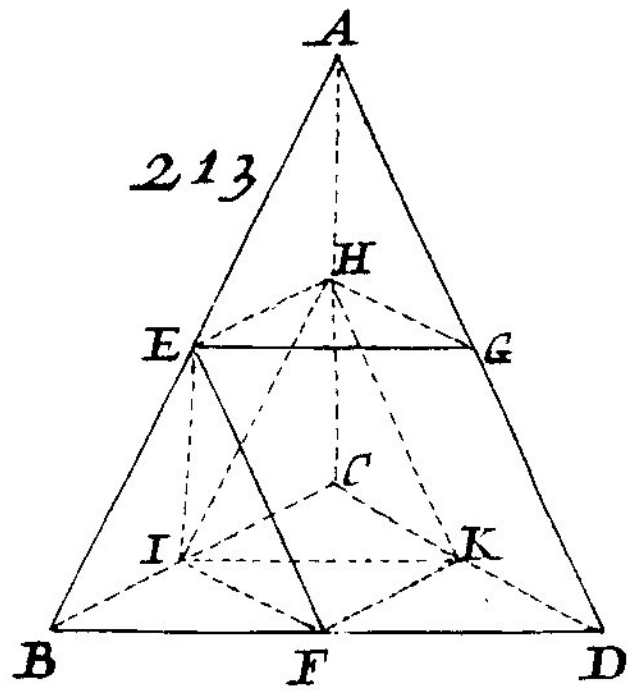
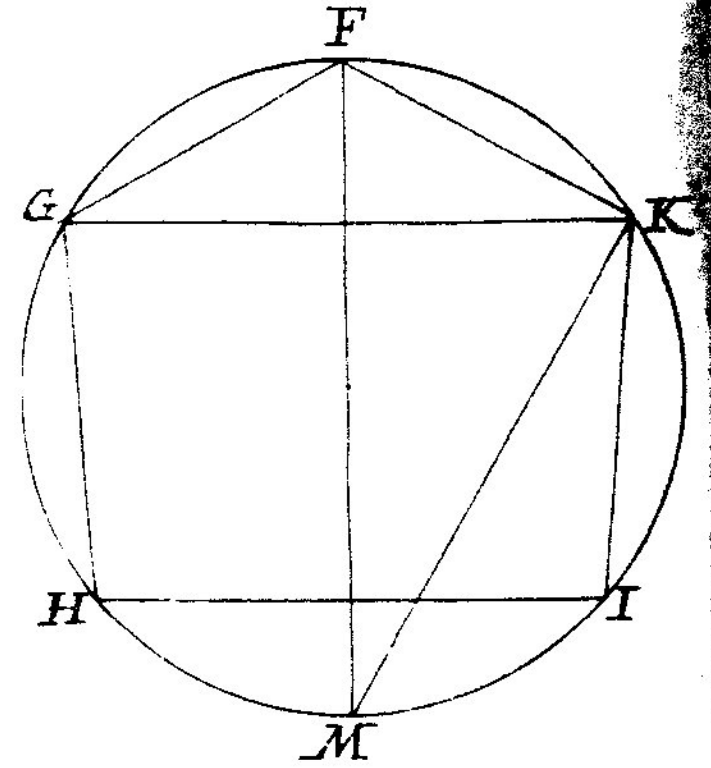
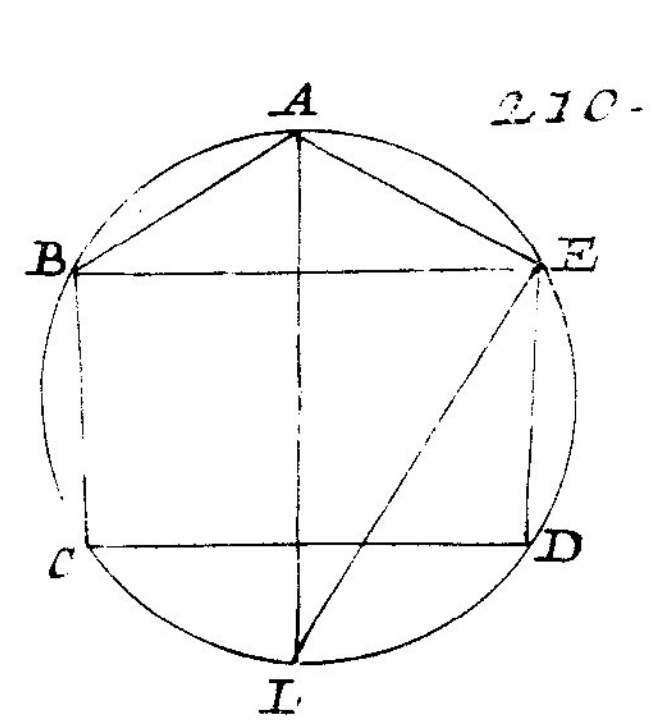
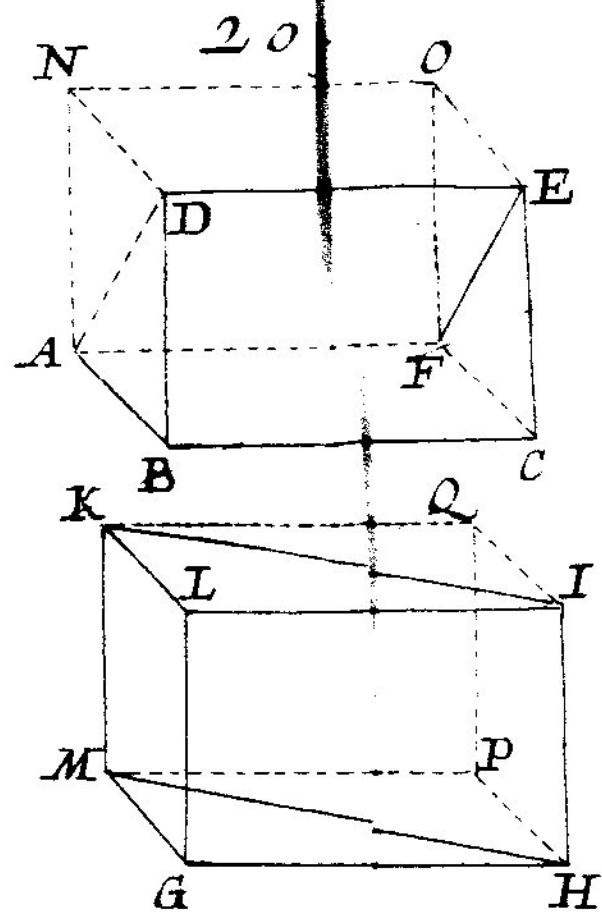
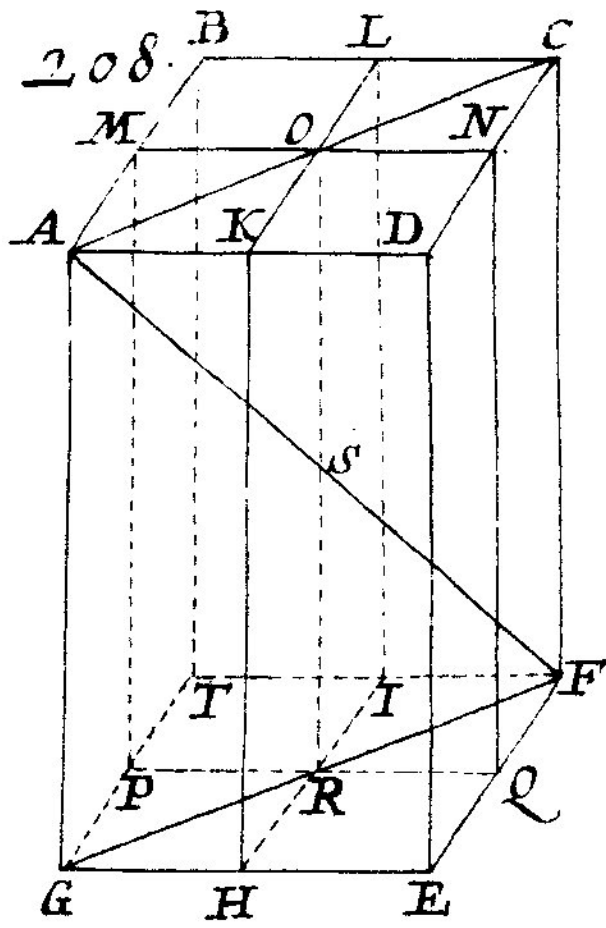
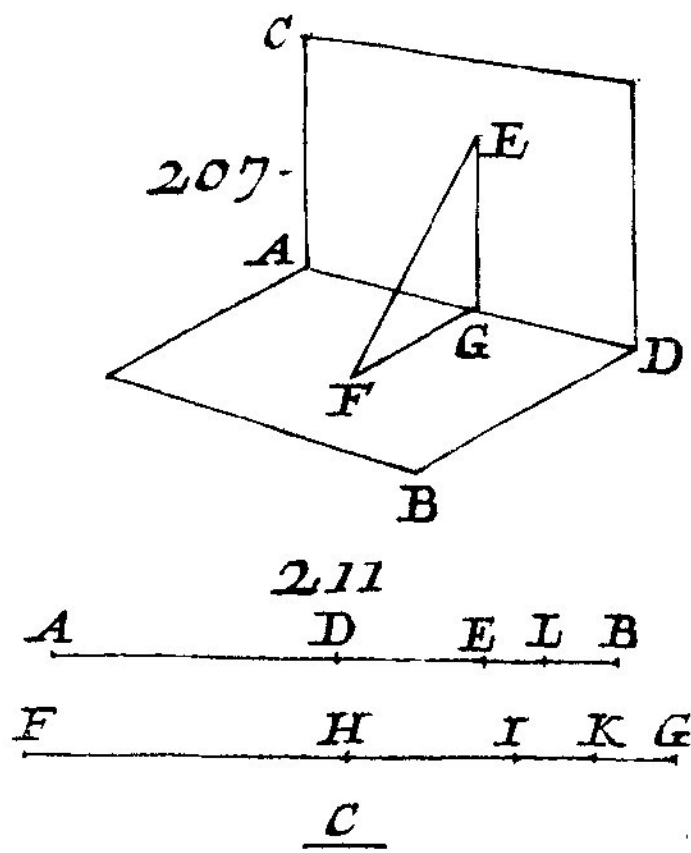










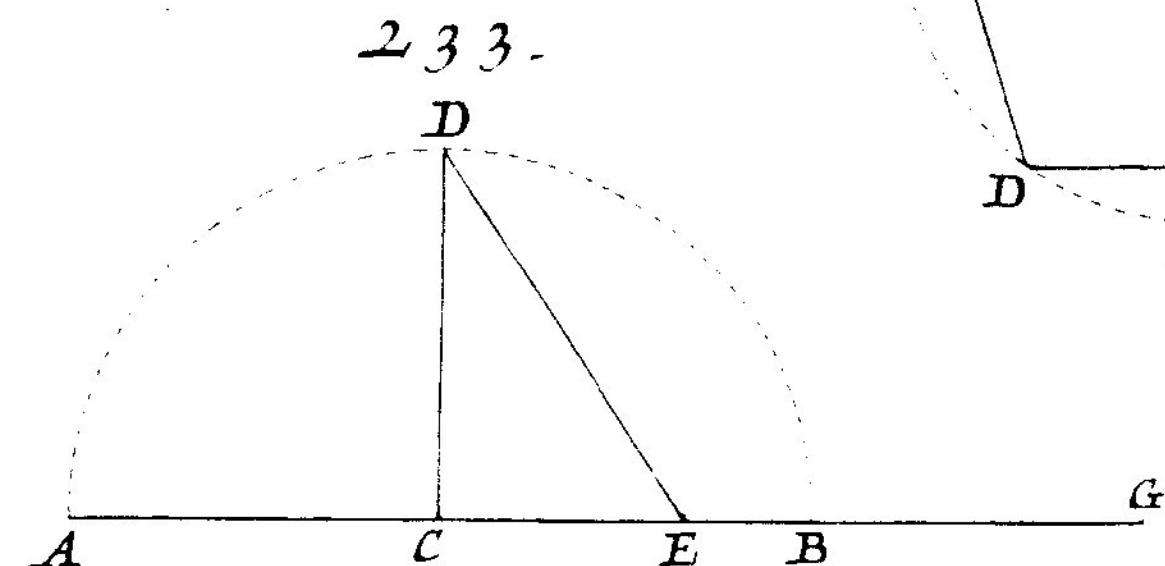
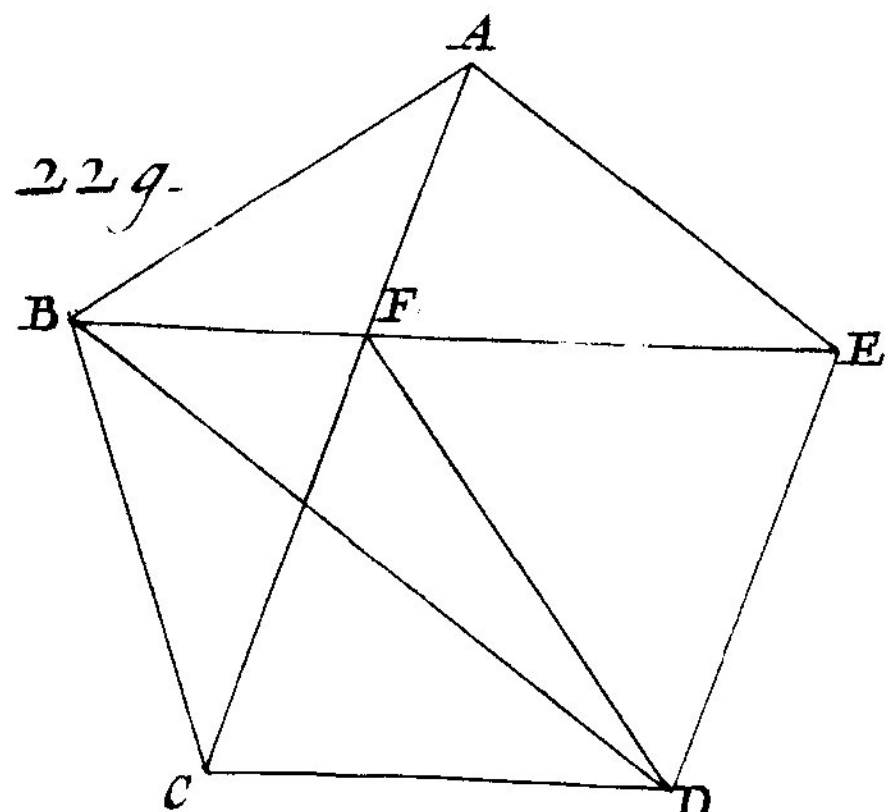
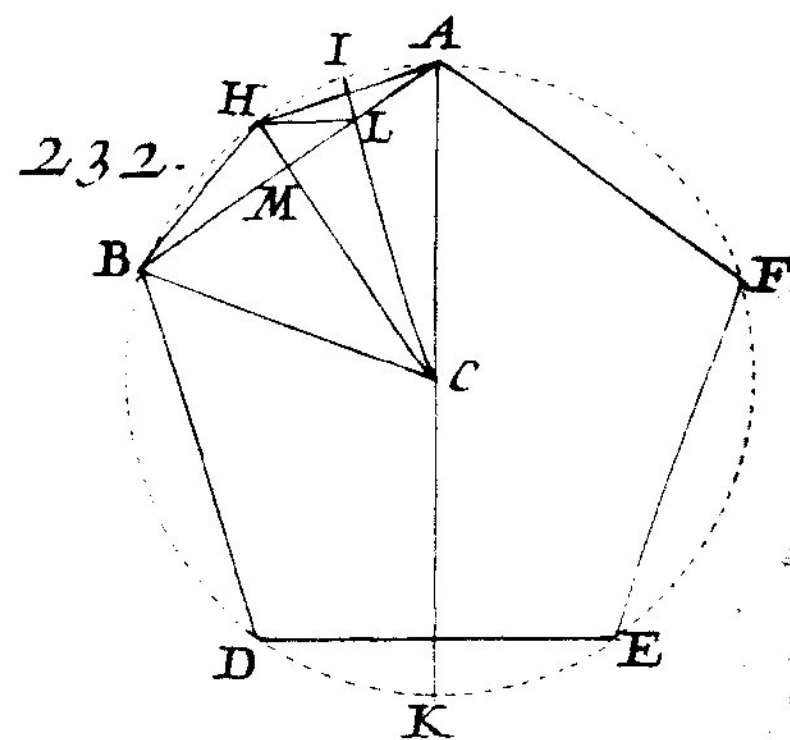
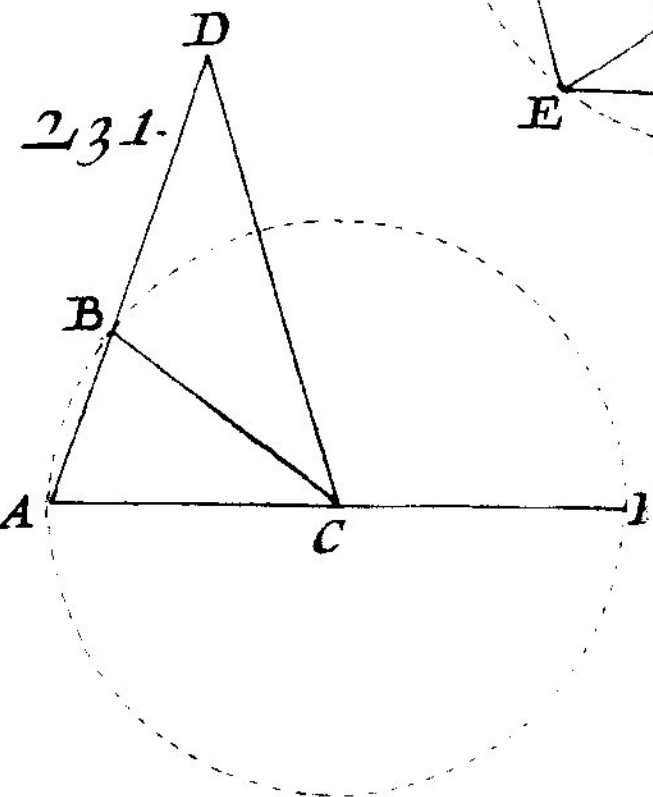
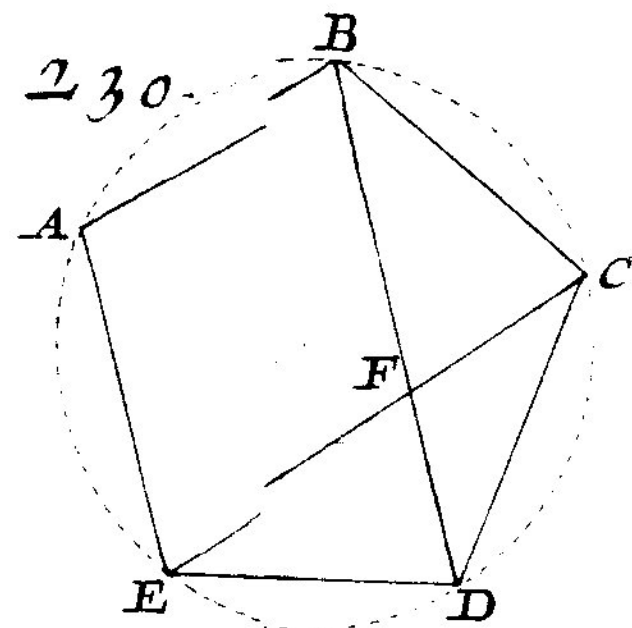
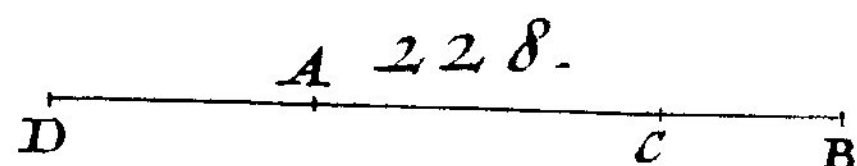
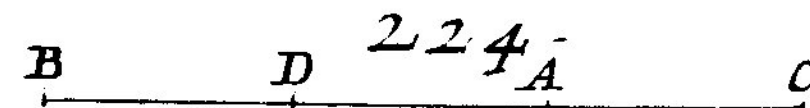
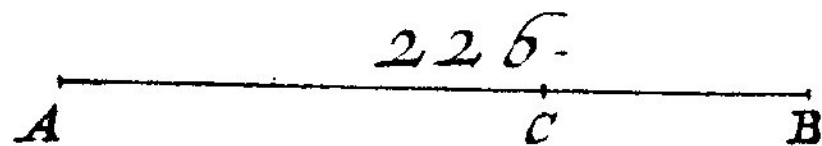
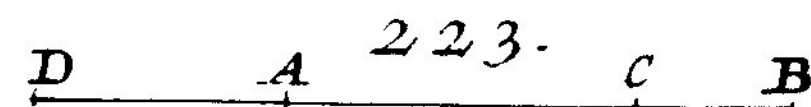
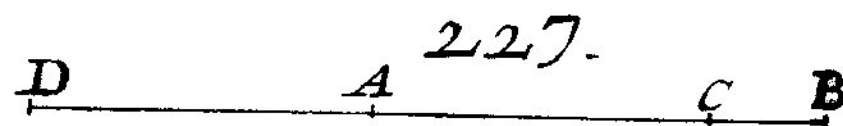
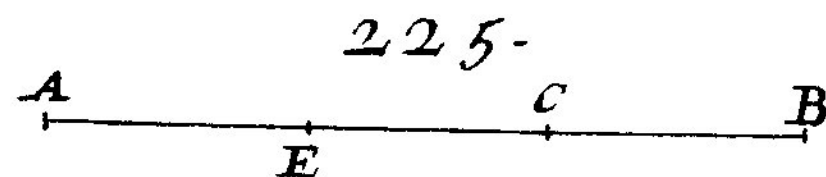
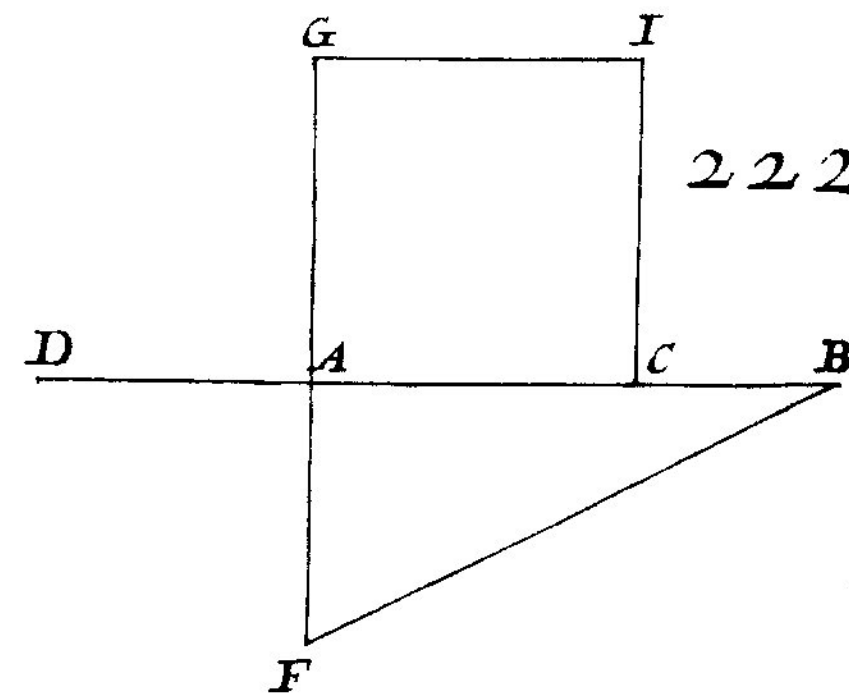
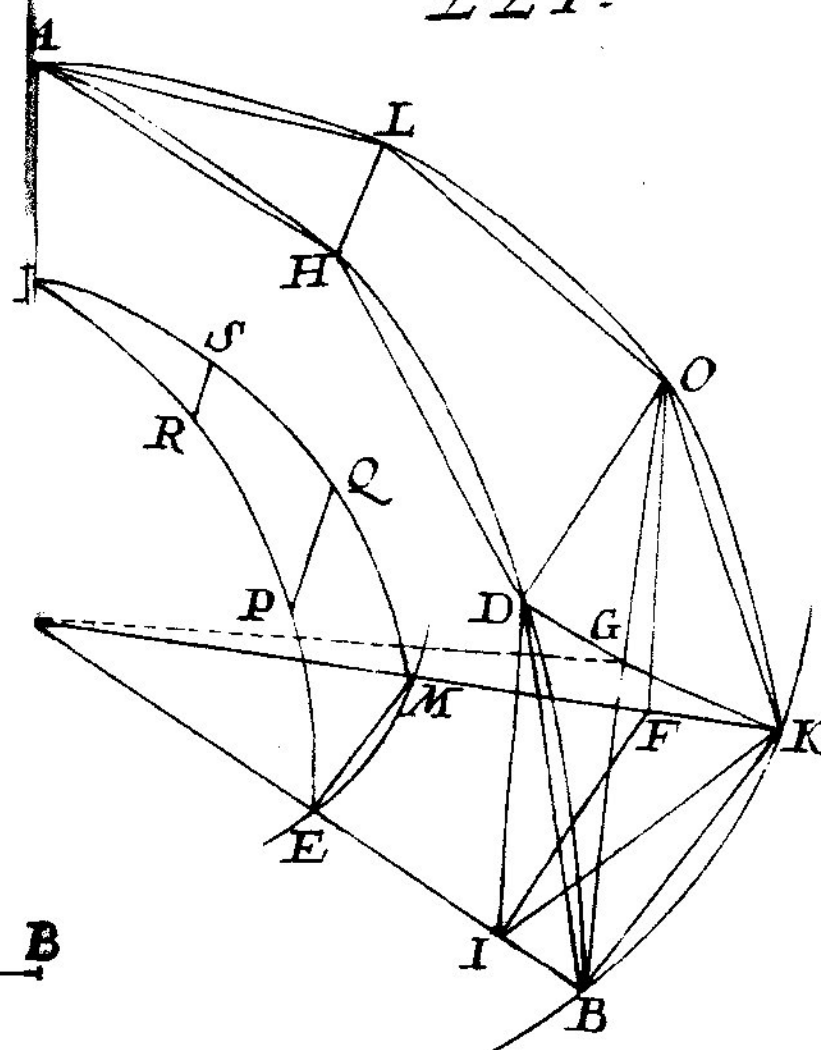
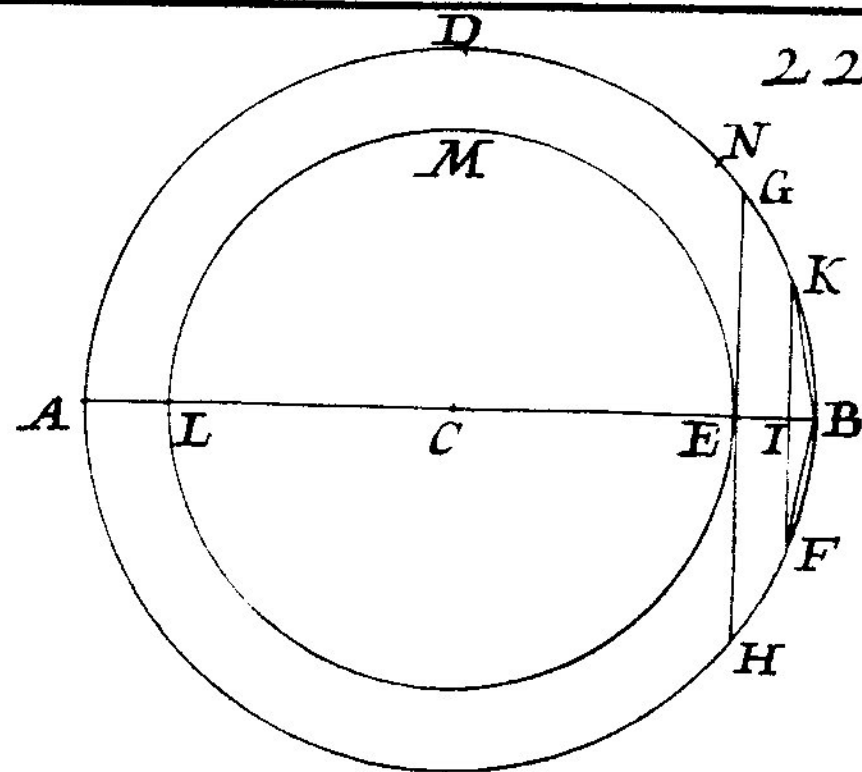
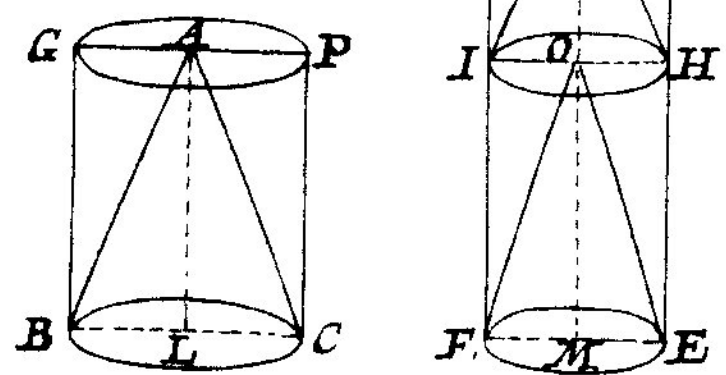


219. N

220.

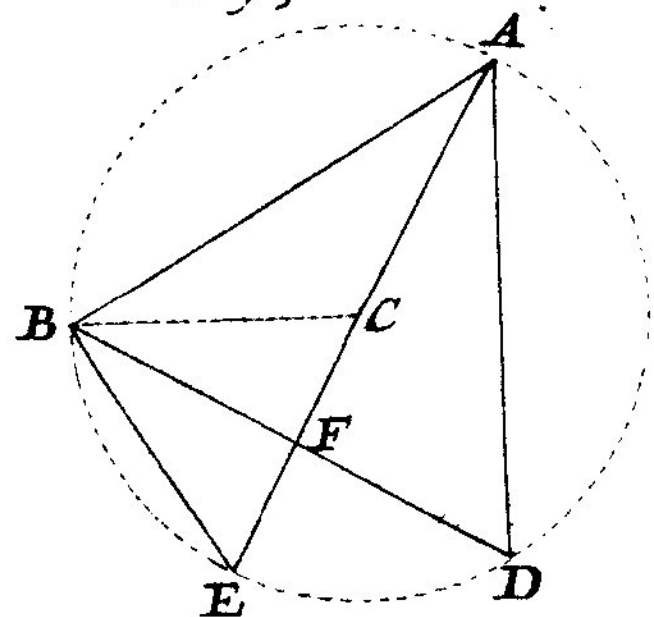
221.

222.

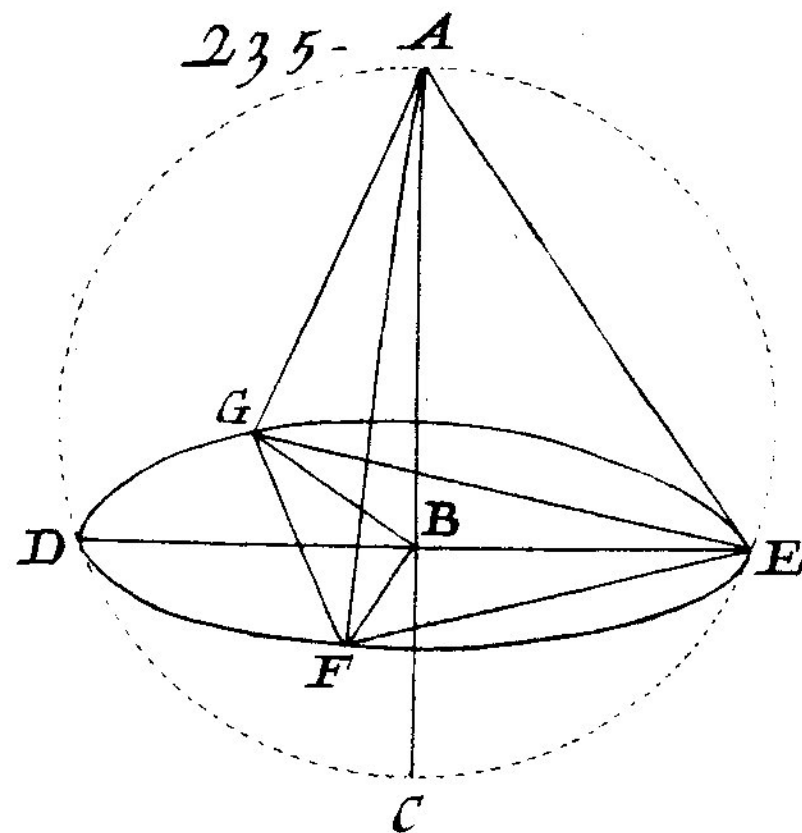




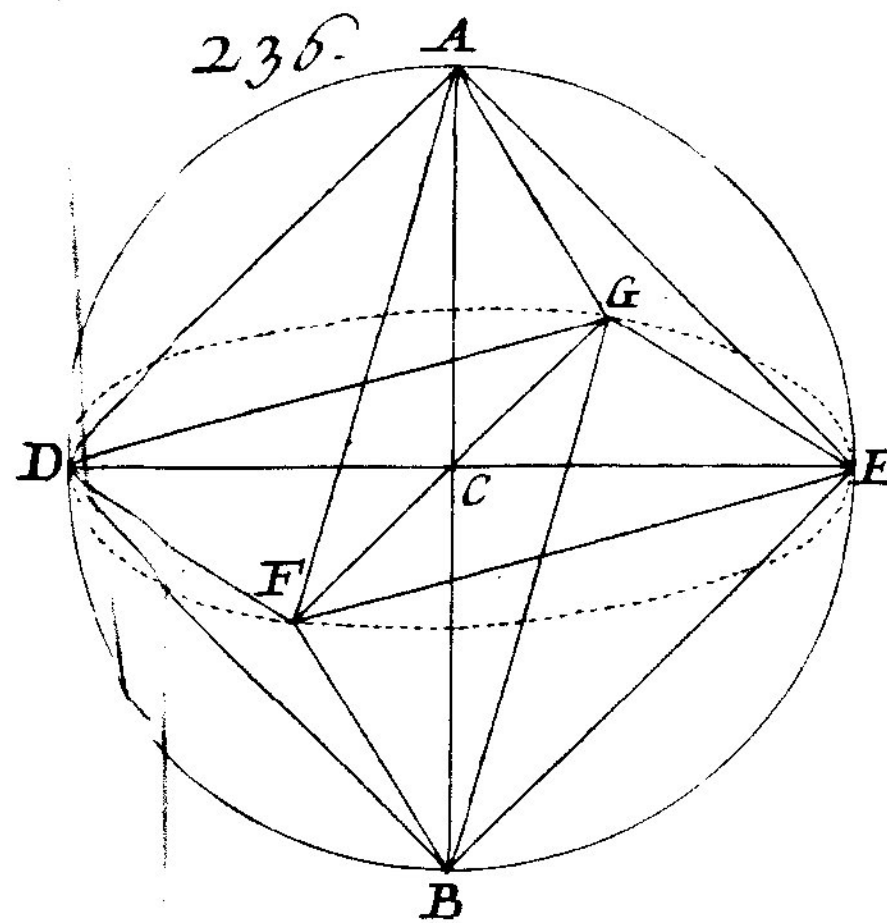
234-



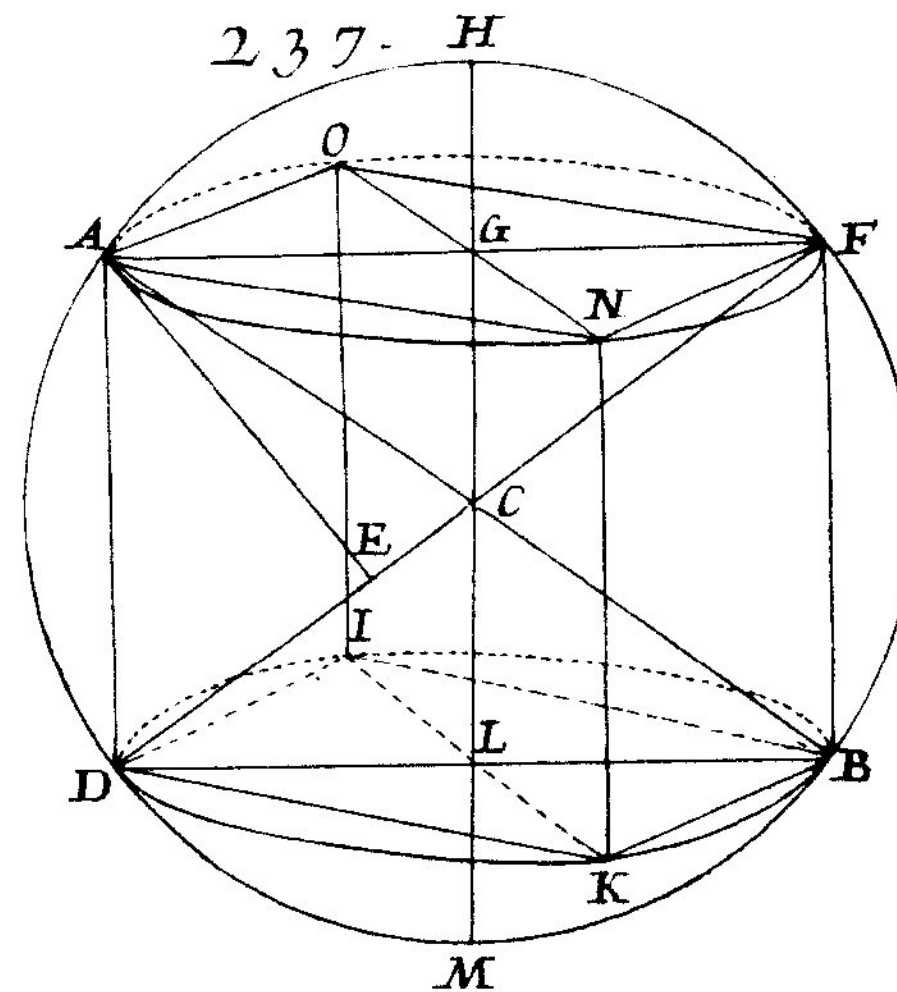
235-



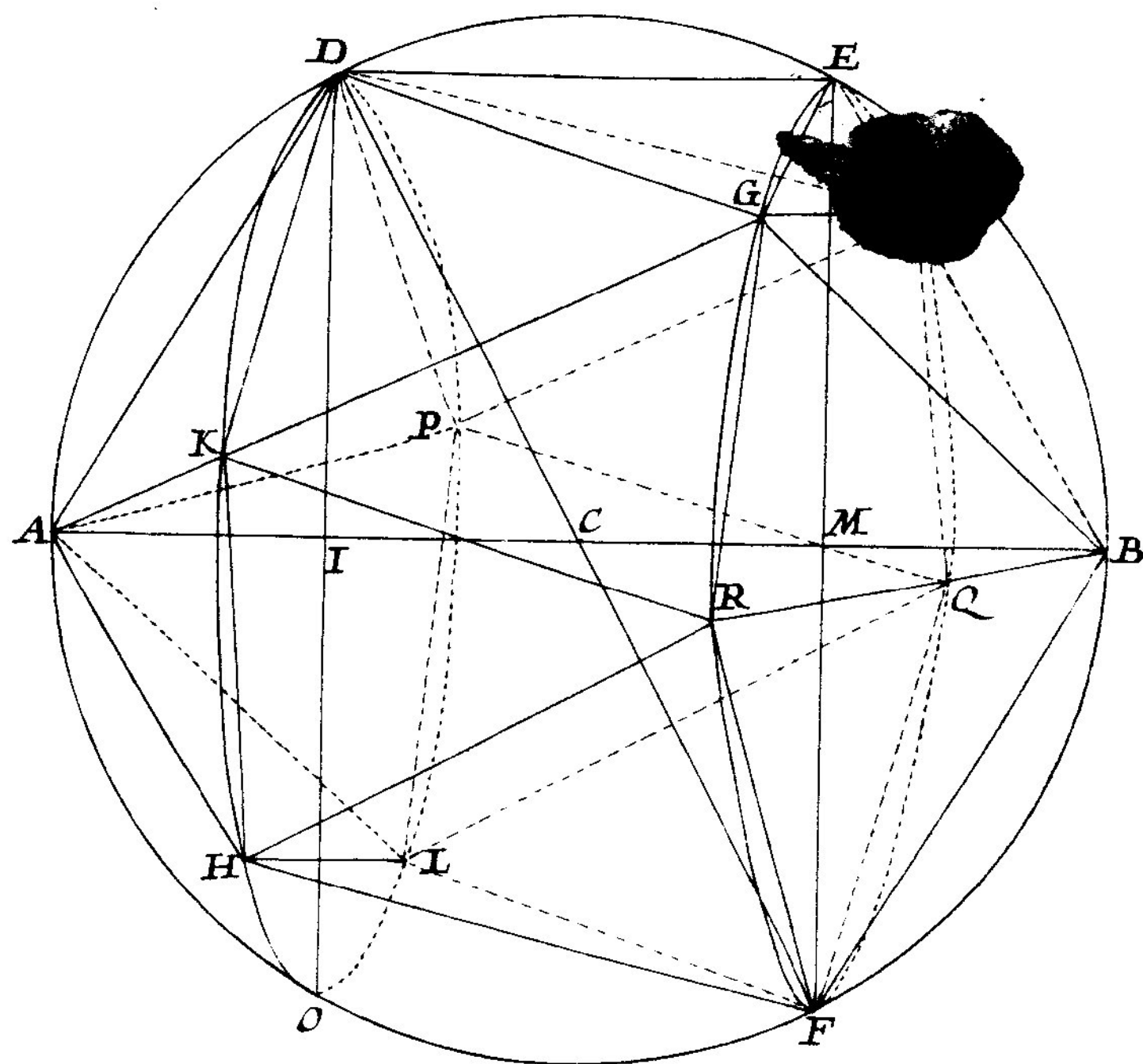
236-



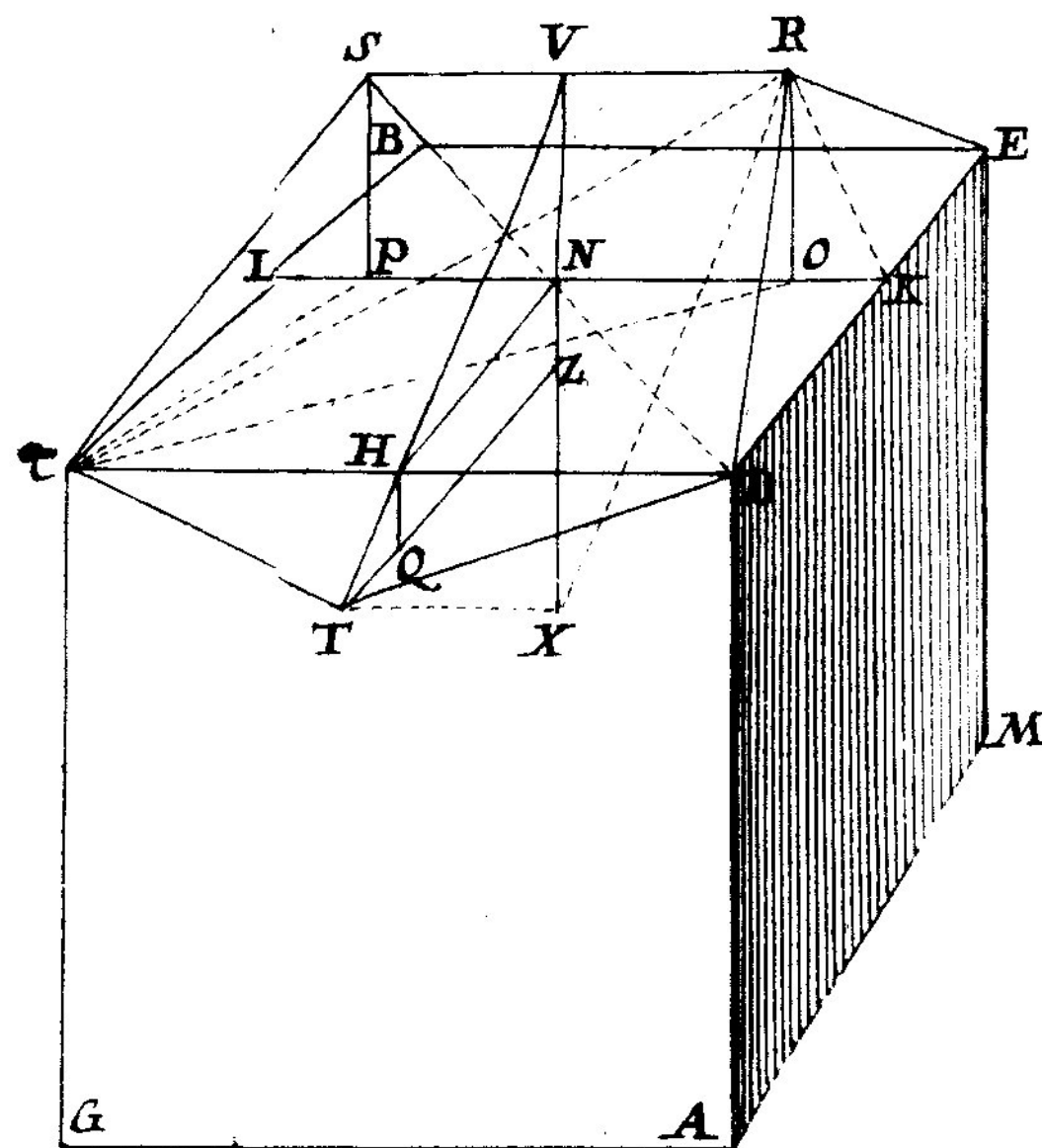
237-



238-



239-



240-

