Prezzo - Lire 10 Fiorentine.

LACROIX

CALCOLO DIFFERENZIALE

E

CALCOLO INTEGRALE

FIRENZE

183

TRATTATO

ELEMENTARE

DEL

CALCOLO DIFFERENZIALE

E DEL

CALCOLO INTEGRALE

TRATTATO

ELEMENTARE

DEL

CALCOLO DIFFERENZIALE

E DEL

CALCOLO INTEGRALE

DI

S. F. LACROIX

PRIMA TRADUZIONE ITALIANA FATTA
SOPRA LA QUARTA FRANCESE

FIRENZE
STAMPERIA DI FRANCESCO CARDINALI
M DCCC XXIX.

PARTE PRIMA

DEL

CALCOLO DIFFERENZIALE

Nozioni preliminari e principii della differenziazione delle funzioni d' una sola variabile.

1. In questa parte d' Analisi si esamina il passaggio per diversi stati di grandezza, di una o di un maggior numero di quantità, ed i cambiamenti che ne risultano in altre, il cui valore dipende da quello delle prime (1).

2. Per esprimere che una quantità dipenda da una o da più altre, sia mediante operazioni qualunque, sia ancora mediante relazioni impossibili, per essere determinate algebraicamente, di cui però l' esistenza è determinata da delle condizioni certe, si dice che la prima è *funzione* dell' altre. L' uso continuo di questa parola ne renderà chiaro il significato.

Si adopera spesso una lettera come segno o *caratteristica* della parola funzione; così i simboli

$$u = \mathrm{f}(x), \quad v = \mathrm{F}(x), \quad z = \varphi(x),$$

esprimono che u, v e z sono diverse funzioni di x.

3. Quella quantità che muta di grandezza o che può mutarla è chiamata *variabile*; e si dà il nome di costante

---

(1) *L' ordine e la brevità mi parvero richiedere che si separassero le nozioni preliminari puramente analitiche, dalle applicazioni geometriche; ma quei lettori che credessero avere bisogno, per determinare le loro idee, di vedere alcune applicazioni, potranno consultare alla fine del libro la nota A.*

a quella che conserva mai sempre lo stesso valore nel corso del calcolo. Da ciò si vede, che è la natura stessa della questione proposta, che determina quali sono le quantità da considerarsi come variabili, e quali le costanti.

4. Per render ciò più chiaro darò alcuni esempi. Sia $u=ax$, considerata a come una costante, u è una funzione di x dell'ordine il più semplice, perchè è una quantità proporzionale a questo valore. Se ora supponiamo che x divenga $x+h$, e che si rappresenti con u' il nuovo valore di u, si avrà .... $u'=ax+ah$; dal che si ricava $u'-u=ah$; e dividendo i due membri per h, verrà $\frac{u'-u}{h}=a$; vale a dire che il rapporto dell'accrescimento della funzione a quello della variabile è indipendente dal loro valore particolare.

Considero ora la funzione un poco più complicata $u=ax^2$; ponendovi $x+h$ in luogo di x, ne risulterà $u'=a(x^2+2xh+h^2)$, e sottraendo la prima equazione dalla seconda, $u'-u=2axh+ah^2$; dividendo i due membri per h, si avrà $\frac{u'-u}{h}=2ax+ah$. In questa equazione il rapporto degli accrescimenti della funzione e della variabile è composto di due parti; l'una non dipende dai valori particolari degli accrescimenti, e l'altra dipende da h. Se si concepisce che questa quantità vada diminuendo, il risultato s'avvicinerà continuamente a $2ax$, e non vi arriverà che nella supposizione di $h=0$, in modo che $2ax$ sarà il *limite* del rapporto $\frac{u'-u}{h}$, vale a dire *il valore verso del quale questo rapporto s'avvicina a misura che la quantità* h *diminuisce, e potrà accostarsi tanto quanto parerà e piacerà.*

È facile accorgersi che la differenza $u'-u$ si annichila sempre nel medesimo tempo che h diventa zero; imperocchè dall'esistenza di questa dipende quella della prima. Ma il rapporto non diventa zero, essendo della specie di quelle quantità dichiarate nel numero 70 degli *Elementi d'Algebra.*

Quando $u=ax^3$, si ha, sostituendo $x+h$ in luogo di x,

$$u'=a(x+h)^3=ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3;$$

sottraendo la prima equazione dalla seconda, si ritrova $u' - u = 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$, e prendendo il rappporto degli accrescimenti,

$$\frac{u' - u}{h} = 3ax^2 + 3axh + ah^2.$$

In questa equazione avvi un termine indipendente da qualunque valore particolare degli accrescimenti, e verso del quale il loro rapporto s'avvicina continuamente, quando h diminuisce, talchè questo rapporto ha pure un limite che è $3ax^2$.

Sia ancora $u = \frac{a}{x}$; ne verrà $u' = \frac{a}{x+h}$, poscia $u' - u = \frac{a}{x+h} - \frac{a}{x} = -\frac{ah}{x^2 + xh}$, riducendo allo stesso denominatore i due termini del secondo membro, si trova quindi che il rapporto degli accrescimentl $\frac{u' - u}{h} = -\frac{a}{x^2 + xh}$, valore che non si annichila quando $h = 0$, ma si riduce al limite $-\frac{a}{x^2}$.

Questo esempio differisce dai precedenti, perchè il limite $-\frac{a}{x^2}$ non si vede a parte dell'espressione generale; ma per isolare questo limite basta aggiungere e togliere nel tempo stesso $-\frac{a}{x^2}$ al secondo membro dell'equazione antecedente, che in allora diviene.

$$\frac{u' - u}{h} = -\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^2} - \frac{a}{x^2 + xh},$$

e di ridurre gli ultimi due termini allo stesso denominatore; imperciocchè si ottiene

$$\frac{u' - u}{h} = -\frac{a}{x^2} + \frac{ah}{x^3 + x^2h}.$$

valore completo il cui il primo termine è il limite, ed il secondo s' annichila quando $h = 0$.

Questo primo termine, o questo limite, non è particolare alle funzioni che ho esaminate; l' esposizione dei metodi mediante i quali possiamo ottenerlo per tutte le funzioni impiegate negli elementi di matematica, e poscia la considerazione delle curve (58, 59) mostreranno che s' incontrano in qualunque funzione in generale. Così, *allorquando gli accrescimenti rispettivi d' una funzione o della sua variabile svaniscano, il loro rapporto non isvanisce, ma giunge ad un limite al quale si è avvicinato a poco a poco, ed esiste fra questo limite e la funzione da cui deriva, una mutua dipendenza, che determina l' uno per l' altra, e reciprocamente.*

5. Farò in prima conoscere i segni con i quali si esprimono le nuove relazioni, che le nozioni precedenti stabiliscono fra le grandezze. Per mostrarne la convenienza, riprendo la funzione $u = a x^3$, già considerata al §. 4. Ponendo $x + h$ invece di x, e togliendo la quantità $a x^3$ dal risultato, si è ottenuto nell' espressione

$$u' - u = 3 a x^2 h + 3 a x h^2 + a h^3,$$

lo sviluppo della *differenza* dei due stati della funzione u, ordinata secondo le potenze dell' accrescimento h, che viene supposto alla variabile x; ed il limite $3 a x^2$ del rapporto degli accrescimenti $u' - u$ ed h non dipende che dalla considerazione del primo termine, $3 a x^2 h$ di questa differenza (4). Questo primo termine, il quale non è che una porzione della differenza, si chiama *differenziale*; e viene espresso con $\mathrm{d}u$, servendosi della lettera d, iniziale del nome, come di una caratteristica; si avrà dunque nel proposto esempio $\mathrm{d}u = 3 a x^2 h$.

Per passare da questa equazione a $3 a x^2$, che è il limite cercato, bisognerà dividerla per h, e si otterrà $\frac{\mathrm{d}u}{h} = 3 a x^2$; ma quando si tratta di una variabile semplice, come la quantità x, la quale si cambia in $x' = x + h$, si ha $x' - x = h$; la differenza e la differenziale non sono in allora che la stessa stessissima cosa: si pone per conseguenza il segno $\mathrm{d}x$ invece della quantità h, affine di rendere uniformi i calcoli, dal che ne viene

$$\mathrm{d}u = 3ax^2\,\mathrm{d}x, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3ax^2.$$

La prima espressione sarà la differenziale di u, o di ax^3, e la seconda, che appartiene al limite del rapporto dei mutamenti simultanei della funzione e della sua variabile, prenderà il nome di *coefficiente differenziale*, perchè la quantità che rappresenta, non è che il moltiplicatore della differenziale $\mathrm{d}x$, nell'espressione della differenziale $\mathrm{d}u$. Da ciò risulta che *il limite del rapporto degli accrescimenti o il coefficiente differenziale, si otterrà dividendo la differenziale della funzione per quella della variabile*, e reciprocamente, *si otterrà la differenziale moltiplicando il limite del rapporto degli accrescimenti, o il coefficente differenziale, per la differenziale della variabile.*

Questa osservazione è importante, perochè vi sono delle funzioni di cui trovasi più facilmente il coefficente differenziale di quello che la differenziale medesima. E difatti onde pervenire immediatamente a quest'ultima, *bisogna scrivere* $\mathrm{x} + \mathrm{d}\,\mathrm{x}$ *in vece di* x, *nella funzione proposta, sviluppare li risultamento secondo le potenze di* $\mathrm{d}\,\mathrm{x}$, *arrestandosi al termine affetto della prima potenza, e togliere dal risultato, l'espressione primitiva.* Questo metodo suppone che si sappia sviluppare la funzione data, la quale sembra richiedere soccorsi stranieri, dai quali possiamo spesso dispensarci colla sola considerazione dei limiti.

Da queste nozioni se ne può concludere che il *calcolo differenziale è la ricerca del limite del rapporto degli accrescimenti simultanei d'una funzione e della variabile da cui dipende.*

6. Bisogna ben por mente di non confondere in generale la differenziale con la differenza $u' - u$. E difatti, nell' esempio del n° 4, l'una è $3ax^2h$, e l'altra

$$3ax^2h + 3axh^2 + ah^3;$$

ma ben si vede che quando la quantità h è piccolissima, la differenziale $3ax^2h$ forma la parte più considerabile della differenza $u' - u$, e che la differenziale maggiormente s'avvicina alla differenza, di mano in mano che h diminuisce.

In generale, *resta tanto meno difficile il prender la differenziale per la differenza, quanto più piccolo si suppone il valore dell' accrescimento della variabile.*

La stessa conseguenza si trae pure dalla considerazione dei limiti; poichè se il rapporto degli accrescimenti simultanei $u' - u$ ed h ha per limite una funzione p, e che per un valore qualunque di h, si abbia $\frac{u' - u}{h} = P$, ciò che è lo stesso che $\frac{u' - u}{h} = p + (P - p)$, bisognerà che la quantità $P - p$ diminuisca nello stesso tempo di h, e s' annichili quando $h = 0$: l' equazione $\frac{u' - u}{h} = p$ sarà dunque tanto più esatta, quanto più piccolo sarà l' accrescimento h; e in questa ipotesi $u' - u = p\,h$ (1).

Da ciò risulta la forma dei primi termini dello sviluppo del secondo stato u'. Difatti, la quantità $P - p$ annichilandosi con h, debbe necessariamente avere questo accrescimento quanto è il numero de'suoi fattori; e ciò che si può fare generalmente, è di supporre che $P - p = Q\,h^n$, essendo l'esponente n qualunque, ma positivo, e Q non divenendo infinito allorquando $h = 0$: ma l' equazione

$$\frac{u' - u}{h} = p + Q\,h^n \quad \text{dà} \quad u' = u + p\,h + Q\,h^{n+1}.$$

7. È facile il vedere che due funzioni eguali hanno differenziali uguali; poichè, allorquando due funzioni sono uguali fra loro, qualunque sia il valore della variabile da cui dipendono, bisogna che i mutamenti rispettivi che ricevono in conseguenza di quello che si attribuisce a questa variabile siano sempre uguali. Se, per esempio u, e v, indicano funzioni di x tali che $u = v$, qualunque sia x, e che quando x diviene $x + dx$, u si cangia in u',

---

(1) *In seguito di questo principio il Leibnitz fondò il calcolo differenziale, considerando le differenziali come differenze infinitamente piccole.*

e v in v', si avrà ancora $u' = v'$; togliendo da questa equazione la precedente, ne risulterà

$$u' - u = v' - v;$$

poscia dividendo per $d\,x$, si otterrà

$$\frac{u' - u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{v' - v}{\mathrm{d}\,x},$$

qualunque sieno x e $\mathrm{d}\,x$. Se dunque p e q indicano i limiti rispettivi dei rapporti sopra espressi, i valori generali di questi rapporti potranno, da quello che precede, essere rappresentati da $p + \alpha$, $q + \beta$, non essendo p e q dipendenti da $d\,x$, mentre che α e β decrescono, e si annichilano nel tempo stesso di $d\,x$; e si avrà

$$p + \alpha = q + \beta, \text{ da dove } p - q = \beta - \alpha.$$

Da ciò ne viene $p = q$; poichè se supponiamo $p - q = \mathrm{D}$, ne risulterebbe che la quantità $\beta - \alpha$ non potrebbe cadere al disotto di D, nel mentre che si annichila: bisogna dunque che sia $\mathrm{D} = 0$ (1); dunque $p\,\mathrm{d}\,x = q\,\mathrm{d}\,x$ e $\mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\,v$, ponendo mente che, secondo quello si è detto al n° 5, $p\,\mathrm{d}\,x$ e $q\,\mathrm{d}\,x$ sono le differenziali delle funzioni u e v.

L' inversa di questa proposizione non è generalmente vera, e si avrebbe torto affermando che due differenziali eguali appartengono a funzioni eguali. Difatti se avessimo $a + b\,x$, e che in luogo di x si ponesse $x + \mathrm{d}\,x$, si avrebbe $a + bx + b\mathrm{d}x$, da cui togliendo $a + bx$ rimarrebbe $b\,\mathrm{d}\,x$, nel qual risultato non rimane nessuna traccia della costante a. La differenziale $b\,\mathrm{d}\,x$ appartiene dunque tanto ad $a + b\,x$, che $a\,b\,x$, ed essa in generale conviene ai diversi casi che presenta la funzione $a + b\,x$, allorquando

---

(1) Questo prova che, *quando due quantità sono il limite d' una stessa quantità variabile, sono eguali fra loro.*

si dà ad a tutti i valori possibili. Da ciò facilmente si vede, che quando si differenzia una funzione qualunque, tutte le costanti separate dalle variabili coi segni $+$ e $-$ spariscono, mentre le altre rimangono nella differenziale.

8. Prima di accingerci alla ricerca delle differenziali col mezzo dei limiti, bisogna osservare,

1°. Che *il limite del prodotto di due quantità variabili nel tempo stesso, è il prodotto dei loro limiti corrispondenti.* 2°. *che il limite dei quozienti delle stesse quantità, è pure il quoziente dei loro limiti.*

Difatti, siano P e Q le due quantità proposte, p e q i loro limiti corrispondenti; i primi, considerati nel loro stato generale, possono essere rappresentati da $p+\alpha$, $q+\beta$, indicando con α e β quantità suscettibili di annichilarsi nel tempo stesso, dopo esser passati per tutti i gradi di piccolezza (4): si avrà dunque in generale

$$PQ=(p+\alpha)(q+\beta)=pq+p\beta+q\alpha+\alpha\beta.$$

Il secondo membro di questa equazione si riduce a pq, allorchè per prendere i limiti, si fa $\alpha=0$, $\beta=0$. Dall' altra parte si vede che dando alle quantità α e β valori convenienti, si potrà ridurre a quella piccolezza che si vorrà la differenza

$$PQ-pq=p\beta+q\alpha+\alpha\beta.$$

Ora, se facciamo $PQ=R$, e $pq=r$, r sarà il limite di R; ma poichè $Q=\frac{R}{P}$, $q=\frac{r}{q}$, ne verrà che il limite del quoziente è anche il quoziente dei limiti.

9. Col mezzo delle precedenti osservazioni, s' ottiene il coefficiente differenziale d' una funzione riferita ad una variabile, da cui non dipenda immediatamente. Siano difatti tre quantità v, u, x tali che la prima sia una funzione della seconda, e questa una funzione della terza, cioè si abbia

$$v=f(u),\quad u=F(x);$$

a prima vista sembra necessaria l' eliminazione di u per

ottenere l'espressione immediata di v in x; ma si vedrà non esservene bisogno. Difatti se queste quantità passano simultaneamente ad un nuovo stato di grandezza, rappresentato da v', u', x', o acquistino gli accrescimenti rispettivi

$$v' - v, \quad u' - u, \quad x' - x$$

si avrà $$\frac{v' - v}{x' - x} = \frac{v' - v}{u' - u} \times \frac{u' - u}{x' - x};$$

ed i limiti dei tre rapporti

$$\frac{v' - v}{x' - x}, \quad \frac{v' - v}{u' - u}, \quad \frac{u' - u}{x' - x}$$

essendo rappresentato da

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

si concluderà dalla prima osservazione del n° precedente che

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \text{ (1).}$$

Onde si possa ben comprendere il significato di questa espressione, l'applicherò ad un esempio, facendo

---

(1) *A primo aspetto si potrebbe credere che questo risultato fosse evidente per se stesso, se non si considerasse la differenza che esiste fra il* d u *divisore di* d v, *e* d u, *diviso da* d x. *Il primo è un accrescimento semplice, completo e indipendente dal secondo, il quale non è che una parte dell' accrescimento che riceve* u, *per cagione di quello di* x (5); *e solo considerandoli tutti e due come infinitamente piccoli si potrebbero prendere nello stesso significato* (6).

$$v = b\,u^3, \quad u = a\,x^2.$$

Si trova prima, (§.4 e 5)

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,u} = 3\,b\,u^2, \quad \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}x} = 2\,a\,x,$$

e questa formola dà poscia $\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}x} = 6\,a\,b\,u^2\,x$, nel qual risultato invece di u^2si può sostituire il suo valore a^2x^4, divenendo allora $6a^3bx^5$. In tal modo si è, in questo calcolo, trasposta l' eleminazione di u dopo la differenziazione.

Indicando questa eliminazione con i simboli generali impiegati nel principio di questo articolo, si avrà

$$v = \mathrm{f}\left[\,\mathrm{F}\,(x)\,\right];$$

che è lo stesso che dire, che v è una funzione di un'altra funzione di x; e da ciò che si è detto antecedentemente, *il coefficiente differenziale d' una funzione di funzione s' otterrà moltiplicando l' uno per l' altro i coefficienti differenziali di queste funzioni, riferiti ognuno alla sua variabile immediata.*

Quando due quantità u ed x sono unite fra loro da una mutua dipendenza, si può dire egualmente che u è funzione di x, o che x è funzione di u, e ciò a seconda che si considera o u come determinata da x, o x come determinata da u; il coefficiente differenziale può anche rappresentarsi sotto ciascuno di questi aspetti, come

$$\frac{x' - x}{u' - u} = \frac{1}{\dfrac{u' - u}{x' - x}},$$

risulta dalla seconda osservazione del n° precedente, che

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,u} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}},$$

perchè essendo l' unità una quantità costante forma da se stessa il suo limite

Sia, per esempio, $u = x^3$, da dove si trae $x = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$; si avrà

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{3x^2},$$

valore che si riduce a $\dfrac{1}{3u^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

Più generalmente ancora, quando si suppone $v = \mathrm{f}(u)$, $x = \mathrm{F}(u)$, cioè che due delle variabili sieno espresse dalla terza, si ha $\dfrac{v' - v}{x' - x} = \dfrac{\dfrac{v' - v}{u' - u}}{\dfrac{x' - x}{u' - u}}$, e per conseguenza, ha il il limite

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}}.$$

10. Voglio ora applicare ciò che precede alla ricerca delle differenziali delle funzioni che si presentano negli elementi d'Algebra, cioè delle somme, delle differenze, dei prodotti, dei quozienti, delle potenze e delle radici. Primieramente, allorquando molte quantità dipendenti da x, e delle quali si sa rinvenire la differenziale, sono congiunte insieme per addizione e sottrazione come in $u + v - w$, se la sostituzione di $x + dx$, in vece di x, debbe mutare

$$u \text{ in } u + \alpha, \; v \text{ in } v + \beta, \; w \text{ in } w + \gamma,$$

l' espressione $u + v - w$ diverrà

$$u + v - w + \alpha + \beta - \gamma.$$

Il suo mutamento, formato dai termini $\alpha+\beta-\gamma$, e paragonato all'accrescimento $\mathrm{d}x$ della variabile x darà

$$\frac{\alpha}{\mathrm{d}x}+\frac{\beta}{\mathrm{d}x}-\frac{\gamma}{\mathrm{d}x},$$

quantità il cui limite sarà

$$p+q-r,$$

indicando p, q, r, i limiti rispettivi dei rapporti particolari $\frac{\alpha}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\beta}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\gamma}{\mathrm{d}x}$; e se si moltiplicherà per $\mathrm{d}x$ la quantità $p+q-r$, il risultato $p\,dx+q\,dx-r\,dx$ sarà la differenziale della funzione proposta; ma $p\,dx$, $q\,dx$, $r\,dx$ sono i differenziali propri di ognuna delle funzioni u, v, e w, che si rappresentano con du, dv, dw; si avrà dunque

$$\mathrm{d}(u+v-w)=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v-\mathrm{d}w,$$

cioè che *la differenziale d'una funzione di* x, *composta di molti termini, s'otterrà prendendo la differenziale di ciascun termine con il segno di cui è affetto questo termine.*

11. In secondo luogo, se nel prodotto di due funzioni u e v, u si muta in $u+\alpha$, v in $v+\beta$, questo prodotto diviene

$$uv+u\beta+v\alpha+\alpha\beta,$$

e il suo accrescimento

$$u\beta+v\alpha+\alpha\beta,$$

paragonato a dx, dà l'espressione

$$u\frac{\beta}{dx}+v\frac{\alpha}{dx}+\frac{\alpha}{dx}\beta.$$

Indicando come sopra con p e q, i limiti rispettivi dei

rapporti $\frac{\alpha}{dx}$, $\frac{\beta}{dx}$, poscia osservando che l'accrescimento β s'annichila nel tempo stesso di dx, di cui le quantità u e v sono per altra parte indipendenti, si riconosce che il limite del termine $\frac{\alpha}{dx}\beta$ è *p*.o, per conseguenza zero (8), e che quello degli altri due è

$$uq + vp .$$

Da ciò si conclude che la differenziale di uv è

$$uq\,dx + vp\,dx ;$$

ma $q\,dx$ sono rappresentate da dv e du: dunque $d.uv = u\,dv + v\,du$ (1).

La formola $d.uv = u\,dv + v\,du$, c'insegna che *per avere la differenziale del prodotto di due funzioni, bisogna moltiplicare ognuna per la differenziale dell' altra, ed aggiungere insieme i due risultati.*

Quando uno dei fattori è costante, u per esempio, si ha $du = 0$, e per conseguenza $d.uv = u\,dv$.

Per ottenere immediatamente quest' ultima formola, basta mutare v in $v + \beta$ da cui risulta l'accrescimento $u\beta$, e poscia il rapporto $u\frac{\beta}{dx}$, il cui limite $uq = u\frac{dv}{dx}$, e per conseguenza $d.uv = u\,dv$.

Se dividonsi i due membri dell' equazione

$$d.uv = u\,dv + v\,du .$$

per la funzione primitiva uv, si troverà

$$\frac{d.uv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} ;$$

---

(1) *Allorchè si trova un punto dopo la caratteristica* d, *vuol dire che ella opera sopra tutto ciò che la segue immediatamente*; *così* d.uv *è la stessa cosa che* d(uv), *e* d.x^n *la stessa cosa che* d(x^n).

il che facilmente ci condurrà all'espressione della differenziale di un prodotto composto di quanti fattori si vorrà. Per giungervi, supporremo $v = ts$; ne verrà

$$\frac{dv}{v} = \frac{d.ts}{ts} = \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s}.$$

e per conseguenza

$$\frac{d.uts}{uts} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s};$$

nello stesso modo si troverà che

$$\frac{d.utsr\ldots\text{ec.}}{utsr\ldots\text{ec.}} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s} + \frac{dr}{r} + \text{ec.}$$

Se si fanno sparire i denominatori nell'equazione

$$\frac{d.uts}{uts} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s},$$

si trovera $d.uts = ts\,du + us\,dt + ut\,ds$; e facilmente si vedrà che, *qualunque sia il numero dei fattori, la differenziale del loro prodotto sarà uguale alla somma dei prodotti della differenziale di ognuno, moltiplicato per tutti gli altri.*

12. Si ottiene la differenziale di $\frac{u}{v}$, facendo $\frac{u}{v} = t$, imperciocchè allora viene $u = vt$, e da ciò che abbiamo detto precedentemente $dv = vdt + tdv$; prendendo il valore di dt, e sostituendo in vece di t la frazione $\frac{u}{v}$, si avià $dt = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2}$, e riducendo allo stesso denominatore,

$$dt = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

dal che risulta *che per trovare la differenziale d'una frazione, bisogna moltiplicare il denominatore per la differenziale del numeratore, togliere da questo prodotto quello del numeratore per la differenziale del denominatore*

e *dividere il tutto pel quadrato del denominatore*.

Quando il numeratore della frazione proposta è costante, u non essendo dipendente di x, non ha differenziale, cioè $du = 0$, e ne viene solo

$$dt = -\frac{u\,dv}{v^2}.$$

13. La funzione u^2 indicando, quando n è un numero intero e positivo, il prodotto di n fattori eguali ad u, si dedurrà dal n° 11,

$$\frac{d.u^n}{u^n} = \frac{d.uuuu....}{uuuu....}$$
$$= \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \ldots,$$

in cui l'ultimo membro conterrà tante volte $\frac{du}{u}$ quanti saranno i fattori in u^n, cioè n; si avrà dunque

$$\frac{d.u^n}{u^n} = \frac{n\,du}{u};$$

dal che si concluderà $d.u^n = n\,u^{n-1}\,du$.

Se il numero n è frazionario, rappresentandolo con $\frac{r}{s}$, si farà $u^{\frac{r}{s}} = v$, da dove $u^r = v^s$; e siccome i numeri r ed s si suppongono interi, si avrà, da ciò che abbiamo detto precedentemente,

$$r\,u^{r-1}\,du = s\,v^{s-1}\,dv;$$

da cui si ricava

$$dv = \frac{r\,u^{r-1}}{s\,v^{s-1}}\,du = \frac{r\,u^{r-1}}{s\,u^{\frac{r}{s}(s-1)}}\,du.$$

E riducendo si trova

$$dv = \frac{r}{s}\,u^{\frac{r}{s}-1}\,du,$$

il che ancora si riduce a $\mathrm{d}.u^n = n\,u^{n-1}\,\mathrm{d}\,u$, essendo n eguale ad $\frac{r}{s}$.

Finalmente essendo il numero n negativo, si ha $u^{-n} = \frac{1}{u^n}$, da cui si trae, mediante l'ultima formola del n° 12,

$$\mathrm{d}.u^{-n} = \mathrm{d}.\frac{1}{u^n} = \frac{-\mathrm{d}.u^n}{u^{2n}};$$

e siccome, da ciò che si è detto in precedenza, $\mathrm{d}.u^n = n\,u^{n-1}\,\mathrm{d}\,u$, in tutti i casi in cui n è positivo, si ha dunque

$$\mathrm{d}.u^{-n} = \frac{-n\,u^{n-1}\,\mathrm{d}\,u}{u^{2n}} = -n\,u^{-n-1}\,\mathrm{d}\,u.$$

Da questa enumerazione si conclude che *per differenziare una potenza qualunque d'una funzione, bisogna moltiplicarla pel suo esponente, diminuir poscia questo esponente d'un'unità, e moltiplicare il risultato per la differenziale della funzione* (1).

14. Le regole annunciate nei §. 10, 11, 12, 13 bastano per differenziare tutte le funzioni in cui la variabile trovasi unita solo per addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, inalzamento alle potenze intere o fratte, positive o negative, funzioni che risultando da operazioni algebraiche, si chiamano per questa ragione *funzioni algebraiche*. Basta di rammentarsi che la differenziale della semplice variabile x è $d\,x$ (5).

Primieramente, per la funzione monomia $u = a\,x^n$, nella quale a indica una costante, la regola dei prodotti

---

(1) *Avrei potuto immediatamente dedurre dallo sviluppo del binomio* $(\mathrm{x}+\mathrm{d}\,\mathrm{x})^n$ *la differenziale di* x^n, *perchè essendo questo sviluppo* $\mathrm{x}^n + \mathrm{n}\,\mathrm{x}^{n-1}\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} +$ *ec.*, *se noi da questo togliamo* x^n, *il primo termine della differenza sarà* $\mathrm{n}\,\mathrm{x}^{n-1}\,\mathrm{d}\,\mathrm{x}$; *ma io non ho voluto supporre la dimostrazione della formola del binomio, perchè il calcolo differenziale ce ne porge una generalissima e semplicissima*.

(11) dà $\mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}.x^n$, e la regola delle potenze (13) conduce a $\mathrm{d}u = n a x^{n-1}\,\mathrm{d}x$.

Passiamo ora alle funzioni complesse; sia 1°. $u = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$: prendendo separatamente la differenziale di ciascuno dei termini di questa funzione, il primo scompa-risce perchè è costante (7); il secondo, posto sotto la forma $b x^{\frac{1}{2}}$, dà, per l'applicazione della regola del n° 13, $\frac{1}{2} b x^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}x$, o $\frac{b\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$; il terzo $-\frac{c}{x}$ conduce a $+\frac{c\,\mathrm{d}x}{x^2}$ (12); riunendo i risultati parziali (10), si troverà

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}\right)\mathrm{d}x, \text{ e } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}.$$

2°. $u = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{c}{x^2}$; e scrivendo questa funzione come segue

$$u = a + b x^{-\frac{2}{3}} - c x^{-1-\frac{1}{3}} + e x^{-2},$$

l'applicazione della regola del n° 13 darà

$$\mathrm{d}u = -\frac{2 b\,\mathrm{d}x}{3 x^{\frac{5}{3}}} + \frac{4}{3}\frac{c\,\mathrm{d}x}{x^{\frac{7}{3}}} - \frac{2 e\,\mathrm{d}x}{x^3},$$

il che si riduce a $\mathrm{d}u = -\frac{2 b\,\mathrm{d}x}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4 c\,\mathrm{d}x}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2 e\,\mathrm{d}x}{x^3}$.

3°. $u = (a + b x^m)^n$: questa funzione non può essere decomposta in monomi, senza uno sviluppo preliminare, ma che non è necessario per la sua differenziazione, perchè facendo $a + b x^m = z$, prende la forma di monomio $u = z^n$, e applicandovi la regola delle potenze (13), si trova

$$du = nz^{n-1}dz = n(a+bx^m)^{n-1}d(a+bx^m)$$
$$= n(a+bx^m)^{n-1} \times mbx^{m-1}dx = mnbx^{m-1}dx(a+bx^m)^{n-1}.$$

15. Siccome si ha spesso bisogno di differenziare dei radicali del secondo grado, si è formato, per queste funzioni una regola a parte la quale risulta dal seguente calcolo.

Sia $v = \sqrt{u}$, da cui $v = u^{\frac{1}{2}}$; ne viene

$$dv = \tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}du = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{du}{2\sqrt{u}};$$

e per conseguenza *la differenziale radicale del secondo grado s'ottiene dividendo quella della quantità che trovasi sotto il segno, pel doppio radicale.*

16. La regola data (11) per differenziare i prodotti essendo applicata alla funzione

$u = x(a^2+x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}$, conduce a

$$du = dx(a^2+x^2)\sqrt{(a^2-x^2)} + x\sqrt{(a^2-x^2)}.d(a^2+x^2) + x(a^2+x^2)d\sqrt{(a^2-x^2)}$$

Gli ultimi due termini di quest'espressione contengono operazioni che non sono indicate, ma che si effettuano successivamente, osservando che

$$d(a^2+x^2) = d.x^2 = 2x\,dx,$$
$$d\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{d(-x^2)}{2\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

e poscia si trova

$$du = \left[(a^2+x^2)\sqrt{(a^2-x^2)} + 2x^2\sqrt{(a^2-x^2)} - \frac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\right]dx;$$

riducendo tutti i termini allo stesso denominatore si ha finalmente

$$du = \frac{(a^4+a^2x^2-4x^4)\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

La regola riguardante la differenziazione delle frazioni,

applicata alla funzione $u = \frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2 x^2 + x^4}$, dà immediatamente

$$du = \frac{(a^4+a^2x^2+x^4)\mathrm{d}(a^2-x^2) - (a^2-x^2)\mathrm{d}(a^4+a^2x^2+x^4)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2},$$

da cui si ricava

$$\mathrm{d}u = \frac{-2x(2a^4+2a^2x^2-x^4)\,\mathrm{d}x}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}.$$

Terminerò questi esempi con la funzione

$$u = \sqrt[4]{\left(a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{[(c^2-x^2)]^2}\right)^5},$$

la quale contiene molte operazioni algebraiche da effettuare successivamente. Per facilitarne la differenziazione si può fare

$$\frac{b}{\sqrt{x}} = y \qquad \sqrt[3]{[(c^2-x^2)]^2} = z,$$

e si avrà

$$u = \sqrt[4]{((a-y+z))^3} = (a-y+z)^{\frac{3}{4}};$$

la regola del n° 13 darà

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \tfrac{3}{4}(a-y+z)^{\frac{3}{4}-1}\,\mathrm{d}(a-y+z)\\ &= \tfrac{3}{4}(a-y+z)^{-\frac{1}{4}}(-\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)\\ &= \frac{-3\,\mathrm{d}y+3\,\mathrm{d}z}{4\sqrt[4]{(a-y+z)}};\end{aligned}$$

si troverà poscia

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}.\frac{b}{\sqrt{x}} = -b\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{x} = \frac{-b\,\mathrm{d}x}{2x\sqrt{x}},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= \mathrm{d}.(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}} = \tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}-1}\,\mathrm{d}(c^2-x^2)\\ &= \tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}} \times -2x\,\mathrm{d}x = \frac{-4x\,\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{(c^2-x^2)}};\end{aligned}$$

e sostituendo questi valori e quelli di y e di z nell'espressione di du, ne verrà

$$\mathrm{d}u = \left\{ \frac{\frac{3b}{2x\sqrt{x}} - \frac{4x}{\sqrt{(c^2-x^2)}}}{4\sqrt[4]{\left(a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt{[(c^2-x^2)]^3}\right)}} \right\} \mathrm{d}x .$$

Delle differenziazioni successive.

17. Il coefficiente differenziale essendo una nuova funzione di x, può essere sottomesso alla differenziazione, e dare, pel limite del rapporto del suo accrescimento a quello della variabile x, il suo proprio coefficiente differenziale, il quale sarà esso pure una funzione di x. Facendo in tal modo succedere delle differenziazioni le une alle altre, si deduce dalla funzione proposta una serie di limiti e di coefficienti differenziali, che si distinguono in ordini, secondo il numero delle differenziazioni che si sono dovute eseguire per ottenerli.

Se facciamo $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = p$, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q$, $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = r$, ec.,

p rappresenterà il coefficiente differenziale del primo ordine della funzione proposta, q quello della funzione p, o il coefficiente del second'ordine della funzione proposta, r quello della funzione q, o il coefficiente del terzo ordine della funzione proposta, ec.

Bisogna osservare in primo luogo che i coefficienti q, r, ec., si traggono dalle differenziali successive di $\mathrm{d}u$, prese considerandovi l'accrescimento dx come una costante. Difatti l'equazioni.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = p, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = r, \text{ ec.}$$

daranno

$$\mathrm{d}u = p\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\,\mathrm{d}x, \text{ ec.},$$

ma se differenziamo $p\,\mathrm{d}x$, senza variarvi $\mathrm{d}x$, si avrà $\mathrm{d}p\,\mathrm{d}x$, espressione che diviene $q\,\mathrm{d}x^2$ (1), allorquando in luogo di $\mathrm{d}p$ vi si sostituisce il suo valore $q\,\mathrm{d}x$, basta poi dividerla per $\mathrm{d}x^2$ per trarne quella di q. Siano dunque

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}u) = \mathrm{d}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}^2u,\ \mathrm{d}(\mathrm{d}^2u) = \mathrm{d}^3u,\ \text{ec.}$$

i simboli delle differenziali successive di $\mathrm{d}u$, presi come se $\mathrm{d}x$ fosse costante; e rammentiamoci che l'esponente che affetta la caratteristica d, indica una operazione ripetuta, e non già una potenza della lettera d, la quale non è mai considerata come una quantità, ma solo come un segno: noi avremo allora, mediante i precedenti valori di $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, ec. le equazioni

$$\mathrm{d}u = p\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}^2u = \mathrm{d}p\,\mathrm{d}x = q\,\mathrm{d}x^2,$$
$$\mathrm{d}^3u = \mathrm{d}q\,\mathrm{d}x^2 = r\,\mathrm{d}x^3,\ \text{ec.}$$

dalle quali ricaveremo

$$p = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\ q = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2},\ r = \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3},\ \text{ec.}$$

18. Se la funzione proposta fosse stata per esempio ax^n, si troverebbe $\mathrm{d}.ax^n = nax^{n-1}\mathrm{d}x$ (14); essendo i fattori na e $\mathrm{d}x$ considerati come costanti nella prima differenziale $nax^{n-1}\mathrm{d}x$, basta per ottenere la seconda differenziale, di differenziare x^{n-1}, e moltiplicare il risultato per $na\,\mathrm{d}x$; ma $\mathrm{d}.x^{n-1} = (n-1)x^{n-2}\mathrm{d}x$: si avrà dunque $\mathrm{d}^2.ax^n = n(n-1)ax^{n-2}\mathrm{d}x^2$.

In un modo simile si troverà,

$\mathrm{d}^3.ax^n = n(n-1)(n-2)ax^{n-3}\mathrm{d}x^3$,
$\mathrm{d}^4.ax^n = n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}\mathrm{d}x^4$,
ec.,

---

(1) *Bisogna ben osservare che le espressioni* $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}x^3$.... *sono equivalenti a* $(\mathrm{d}x)^2$, $(\mathrm{d}x)^3$... *e non a* $\mathrm{d}.x^2$, $\mathrm{d}.x^3$.... (vedi *la nota della pag.* 15).

e i coefficienti differenziali avranno i seguenti valori:

$$\frac{\mathrm{d}.ax^n}{\mathrm{d}x} = n\,a\,x^{n-1},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2.ax^n}{\mathrm{d}x^2} = n(n-1)\,a\,x^{n-2},$$
$$\frac{\mathrm{d}^3.ax^n}{\mathrm{d}x^3} = n(n-1)(n-2)\,a\,x^{n-3},$$
$$\frac{\mathrm{d}^4.ax^n}{\mathrm{d}x^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)\,a\,x^{n-4},$$

ec.

Sarà facile il vedere che nel caso in cui l'esponente n è un numero intero e positivo la funzione ax^n non ha numero limitato di differenziali, la più alta delle quali è $\mathrm{d}^n.ax^n = n(n-1)(n-2)\ldots 1.a\,\mathrm{d}x^n$; espressione che non è più suscettibile di differenziazione, perchè non contiene più variabili; si avrà dunque allora per l'ultimo coefficiente differenziale,

$$\frac{\mathrm{d}^n.ax^n}{\mathrm{d}x^n} = n(n-1)(n-2)\ldots 1.a.$$

cioè una quantità costante.

19. Le differenziazioni manifestano nelle funzioni proprietà che ne facilitano molto lo sviluppo. Non v'è cosa più facile il dedurre da ciò che precede lo sviluppo dell'espressione $(x+y)^n$; ma invece di arrestarci a questo caso particolare, ci occuperemo di una funzione qualunque dello stesso binomio $x+y$. Faremo primieramente osservare che *una funzione qualunque del binomio* x + y *dà lo stesso coefficiente differenziale, qualunque sia quello delle due quantità* x, y *che si prendono per variabili.* Se per esempio questa funzione è $(x+y)^n$, si trova, tanto nell'uno che nell'altro caso $n(x+y)^{n-1}$. In generale se si fa $x+y=x'$, in una funzione qualunque $\mathrm{f}(x+y)$, diviene $\mathrm{f}(x')$, e sia ha $\mathrm{d}\,\mathrm{f}(x') = p'\,\mathrm{d}x'$, essendo il coefficiente differenziale p' una funzione di x' nella quale $\mathrm{d}x'$ non entra, e che per conseguenza rimane

la stessa, o si prenda $dx' = dx$, facendo variare x, o $dx' = dy$, facendo variare y.

Ciò posto, se si fa

$$f(x+y) = L + My^a + Ny^b + Py^c + \text{ec.}$$

L, M, N, P, ec. essendo funzioni incognite di x, senza y, ed a, b, c, ec. esponenti indeterminati, è chiaro che nessuno di questi esponenti pnò esssere negativo; poichè un termine per esempio della forma di My^{-a} o $\frac{M}{y^a}$, divenendo infinito quando $y = 0$, renderebbe infinito anche il secondo membro dell'equazione superiore, mentre poi il primo si ridurrebbe ad $f(x)$: ma se gli esponenti saranno tutti positivi, in allora si avrà $L = f(x)$. Formando poscia il coefficente differenziale dello sviluppo di $f(x+y)$, col prendere prima x per variabile, si troverà

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dx}y^a + \frac{dN}{dx}y^b + \frac{dP}{dx}y^c + \text{ec.};$$

e se poscia invece di x si prende y per variabile, si avrà il risultato

$$aMy^{a-1} + bNy^{b-1} + cPy^{c-1} + \text{ec.}$$

che dovrà essere identico col precedente, qualunque sia y, e questo non può accadere se gli esponenti delle potenze di y ed i loro coefficienti non sono gli stessi sì nell' uno che nell' altro. Ma se gli esponenti sono posti per ordine di grandezza nel primo, lo saranno pure nel secondo; bisognerà dunque che sia

$$a - 1 = 0,\ b - 1 = a,\ c - 1 = b,\ \text{ec.}$$

da cui

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad c = 3, \text{ ec.}$$

ed il paragone dei coefficienti darà l'equazioni

$$M = \frac{dL}{dx},\ N = \frac{1}{2}\frac{dM}{dx},\ P = \frac{1}{3}\frac{dN}{dx},\ \text{ec.},$$

dalle quali facendo

$$f(x) = u, \quad \text{e} \quad f(x+y) = u',$$

si ricaverà

$$L = u,\ M = \frac{1}{1}\frac{du}{dx},\ N = \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2},\ P = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3},\ \text{ec.},$$

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{y}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{y^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{y^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Questa è quella formola che chiamasi *teorema di Taylor*, perchè fu scoperta da un geometra inglese di tal nome (1).

21. Questo teorema ci dà lo sviluppo di $(x+y)^n$; perchè, in questo caso,

$$u = x^n,\ \frac{du}{dx} = n x^{n-1},\ \frac{d^2u}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2},\ \text{ec.}$$

da cui si ricava

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2$$

$$+ n\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \text{ec.}$$

Avendo noi antecedentemente stabilite le regole della differenziazione, senza bisogno di supporre lo sviluppo

---

(1) *La suddetta dimostrazione è la stessa nell'essenziale, di quella data dal Lagrange nelle* Mémoires de l'Académie de Berlin, *anno* 1772, *pag.* 187, *e poscia nella* Théorie des Fonctions analytiques: *ma l'impiego dei segni differenziali l'abbrevia e la semplifica assai.*

Il teorema di Taylor essendo divenuto la base delle applicazioni del calcolo differenziale se ne sono date molte dimostrazioni; io ne ho riprodotte moltissime nel mio Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, *in* 4°, *vedi la* 2 *ediz. tom. I° pag.* 160 *e* 277; *tom. III°, pag.* 60, 396 *e* 399 *la nota.*

della potenza n del binomio, si deve ora considerarlo come provato per tutti i casi in cui l'esponente n è intero o fratto, positivo o negativo.

Ponendo, per esempio, le espressioni

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{(a^2+x^2)} \\ \sqrt[3]{[(a^2-x^2)]^2} \\ \dfrac{1}{a+x} \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{(a^4+x^4)}} \end{array}\right\} \text{ sotto la forma } \left\{\begin{array}{l} a\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ a^{\frac{4}{3}}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ a^{-1}\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{-1} \\ a^{-1}\left(1+\dfrac{x^4}{a^4}\right)^{-\frac{1}{4}} \end{array}\right.$$

ne otteniamo lo sviluppo, seguendo il processo indicato nel §. 144 degli Elementi d'Algebra; ma allora la formola non viene mai più ad un termine, riducendosi ad una *serie infinita*, simile a quella che abbiamo fatto vedere nel §. 236 dell'opera citata.

22. Se si fa $x=0$, e che si esprima con U, U′, U″, U‴, ec. i valori particolari che prendono

$$u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}, \text{ ec.}$$

con sì fatta supposizione, che muta $\mathrm{f}(x+y)$ in $\mathrm{f}(y)$ ne verrà

$$\mathrm{f}(y)=\mathrm{U}+\mathrm{U}'\frac{y}{1}+\mathrm{U}''\frac{y^2}{1.2}+\mathrm{U}'''\frac{y^3}{1.2.3}+\text{ec.};$$

ma avendo luogo questa equazione qualunque sia il valore di y, si potrà sostituire x in luogo di y, la qual sostituzione non muterà nulla alle quantità U, U′, U″, U‴, ec., le quali non contengono questa lettera, in allora si avrà la formola

$$\mathrm{f}(x) \text{ o } u=\mathrm{U}+\mathrm{U}'\frac{x}{1}+\mathrm{U}''\frac{x^2}{1.2}+\mathrm{U}'''\frac{x^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

che esprimerà lo sviluppo di f (x) secondo le potenze *ascendenti* di x.

Facendo $u = (a+x)^n$, da cui risulta $\frac{du}{dx} = n(a+x)^{n-1}$, $\frac{d^2u}{dx^2} = n(n-1)(a+x)^{n-2}$, ec. valori che posto $x = 0$ si mutano in

$$U = a^n,\ U' = n a^{n-1},\ U'' = n(n-1)a^{n-2},\ \text{ec.},$$

si ottiene anche

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}x^2 + \text{ec. (1)}.$$

---

(1) *Il sig. Peacock ha fatto osservare che lo sviluppo di* f(x) *qui sopra riferito, è falsamente attribuito al geometra inglese Maclaurin, ma era stato dato fin dal* 1717 *dal suo concittadino Stirling, nella sua opera intitolata:* Lineœ tertii ordinis Newtonianœ, *Prop. III. Il modo col quale lo Stirling perviene a questo sviluppo differisce dal seguente per la sola notazione.*

Sia

$$u = A + B x + C x^2 + D x^3 + E x^4 + \text{ec.},$$

A, B, C, D, E, *ec. sono coefficienti costanti ed indeterminati; se passiamo ai coefficienti differenziali*

$$\frac{du}{dx} = B + 2C x + 3D x^2 + 4E x^3 + \text{ec.},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1.2C + 2.3D x + 3.4E x^2 + \text{ec.},$$
$$\frac{d^3u}{dx^3} = 1.2.3D + 2.3.4E x + \text{ec.},$$

e che si faccia $x = 0$, *come pure in* u, *esprimendo con* U, U′, U″, U‴, *ec. i valori che in allora prendono c questa funzione, ed i suoi coefficienti differenziali, sotto la loro forma non sviluppata, si avrà*

23. Il teorema di Taylor dà pure lo sviluppo del secondo stato d'una funzione qualunque $u = f(x)$, allorquando x diviene $x+h$, perchè cambiando y in h, si ha $f(x+h)$, o

$$u' = u + \frac{du\,h}{dx\,1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Da ciò risulta che i diversi coefficienti differenziali hanno anche l'osservabile proprietà di formare, quando vengono divisi rispettivamente dai prodotti

$$1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ \text{ec.}$$

i moltiplicatori delle potenze dell'accrescimento h nello sviluppo completo della differenza

$$u' - u = \frac{du\,h}{dx\,1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec. (1).}$$

$$A = U,\ B = \frac{1}{1}U',\ C = \frac{1}{1.2}U'',\ D = \frac{1}{1.2.3}U''',\ ec.,$$

e per conseguenza

$$u = U + U'\frac{x}{1} + U''\frac{x^2}{1.2} + U'''\frac{1}{1.2.3} + ec.$$

(1) *Si vedono in questa espressione due segni diversi, cioè,* dx *ed* h, *i quali rappresentano degli accrescimenti di* x, *ma bisogna rammentarsi che il primo introdotto nel calcolo solo per formare le differenziali, e che poscia scomparisce col mezzo della divisione indicata, onde passare ai coefficienti differenziali, rimane sempre indeterminato: l'accrescimento* h *al contrario, esprime una quantità che può essere determinata quando si voglia calcolare il mutamento effettivo che riceve la funzione* u, *per un mutamento assegnato ad* x.

Non v'è nessuna difficoltà a scrivere piuttosto dx, *che* h; *ma in allora i coefficienti differenziali si cambiano nei differenziali come si vedrà in seguito.*

Quessto sviluppo, cambiato che sia h in dx, diviene (17)

$$u' - u = \frac{\mathrm{d}u}{1} + \frac{\mathrm{d}^2 u}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3 u}{1.2.3} + \text{etc.},$$

forma semplicissima, che dimostra come la differenza di u, corrispondente all'accrescimento qualunque dx, si compone colle differenziali di ordini diversi relative allo stesso accrescimento.

Della differenziazione delle funzioni trascendenti.

24. Le funzioni che non sono comprese nell'enumerazione fatta al n°. 14, chiamansi *trascendenti*. La funzione esponenziale di $u = a^x$ è la più semplice di questo genere. Quando si sostituisce $x + dx$ invece di x, si trova il rapporto degli accrescimenti

$$\frac{a^{x+\mathrm{d}x} - a^x}{\mathrm{d}x} = a^x \frac{(a^{\mathrm{d}x} - 1)}{\mathrm{d}x};$$

per isviluppare questo rapporto secondo le potenze di $\mathrm{d}x$, si fa $a = 1 + b$, e si ha

$$a^{\mathrm{d}x} = (1+b)^{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{\mathrm{d}x}{1} b + \frac{\mathrm{d}x(\mathrm{d}x-1)}{1.2} b^2 + \frac{\mathrm{d}x(\mathrm{d}x-1)(\mathrm{d}x-2)}{1.2.3.} b^3 + \text{etc.}$$

poscia

$$\frac{a^{\mathrm{d}x} - 1}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{1} + \frac{\mathrm{d}x - 1}{1.2} b^2 + \frac{(\mathrm{d}x-1)(\mathrm{d}x-2)}{1.2.3} b^3 + \text{etc.};$$

e se nel secondo membro di questa equazione si fa $dx = 0$, rimarrà pel limite,

$$\left(\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.}\right);$$

e ponendo invece di b il suo valore $a - 1$, ne verrà (5).

$$\frac{\mathrm{d}.a^x}{\mathrm{d}x} = a^x\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.}\right);$$

così prendendo

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.},$$

si avrà $\mathrm{d}.a^x = k\,a^x\,\mathrm{d}x$. Tale è la forma della differenziale della funzione proposta; e si troverà bentosto una nuova espressione del numero costante k.

25. È chiaro che

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2.a^x = k\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}.a^x = k^2\,a^x\,\mathrm{d}x^2,\\
&\mathrm{d}^3.a^x = k^3\,a^x\,\mathrm{d}x^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\mathrm{d}^n.a^x = k^n\,a^x\,\mathrm{d}x^n;
\end{aligned}$$

segue da ciò che

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = k\,a^x, \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = k^2\,a^x, \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3} = k^3\,a^x, \text{ etc.}$$

Quando $x = 0$, la funzione u ed i suoi coefficienti differenziali diventano

$$U = 1,\ U' = k,\ U'' = k^2,\ U''' = k^3, \text{ etc.};$$

dunque si otterrà (22)

$$a^x = 1 + \frac{k\,x}{1} + \frac{k^2\,x^2}{1.2} + \frac{k^3\,x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

26 Lo sviluppo della funzione a^x, che abbiamo trovato, servirà per riconoscere da qual quantità ha avuto origine la serie rappresentata da k.

Se supponiamo $x = \frac{1}{k}$, ne verrà

$$a^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{ce.};$$

ed indicando con e il valore del secondo membro, i primi

dodici termini del quale convertiti in decimali danno

$$e = 2{,}7182818,$$

si avrà l'equazione

$$a^{\frac{1}{k}} = e, \text{ da cui si ricaverà } a = e^{k};$$

e prendendo il logaritmo di ciascun membro si otterrà

$$k \, \mathrm{l}\, e = \mathrm{l}\, a, \text{ o } k = \frac{\mathrm{l}\, a}{\mathrm{l}\, e}:$$

dunque si avrà

$$\mathrm{d}\, . \, a^x = k \, a^x \, \mathrm{d}\, x = \frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e} \, a^x \, \mathrm{d}\, x \, (1).$$

27. S'incontra spesso nelle ricerche analitiche il numero e, e vien preso per base di un sistema logaritmico, che è chiamato *Neperiano*, da Neper inventore de'logaritmi,

---

(1) *Questo metodo impiegato da Lagrange, onde pervenire a questo risultato è elegante e semplice, pure ad alcuni geometri parve difettoso, perchè la serie trovata prima per* k (24), *è convergente allora solo che* a *differisce poco dall'unità. Ma oltre di non servire questo primo sviluppo ad ottenere la forma della differenziale cercata, si può sempre partire da una esponenziale la cui base sia vicinissima all'unità; basta solo cambiare*

$$a^x \text{ in } a^{\frac{1}{m}\cdot mx} = (\sqrt[m]{a})^{mx} = a'^{x'}.$$

e dando ad m *un valore bastantemente grande,* $\sqrt[m]{a}$ a o a' *s'avvicinerà all'unità quanto si vorrà, e si avrà*

$$\mathrm{d}\, . \, a^x = \mathrm{d}\, . \, a'^{x'} = \frac{\mathrm{l}\, a}{\mathrm{l}\, e} \, a^{x'} \, \mathrm{d}\, x'.$$

ma $\mathrm{l}\, a' = \frac{\mathrm{l}\, a}{m}$, $\mathrm{d}\, . \, x' = m \, \mathrm{d}\, x$; *dunque* $\mathrm{d}\, . \, a = \frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}e} \, a^x \, \mathrm{d}x$, *qualunque sia* a.

e che rappresento con la caratteristica l': si ha allora $l'e = 1$, venendo

$$d.a^x = a^x dx . l'a,$$

$$a^x = 1 + \frac{x(l'a)}{1} + \frac{x^2(l'a)^2}{1.2} + \frac{x^3(l'a)^3}{1.2.3} + \text{etc. (25).}$$

E se si facesse $a = e$, si avrebbe solamente

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.,}$$

espressione nella quale non vi sono più logaritmi.

Se prendiamo a per base d' un sistema di logaritmi, avremo allora $la = 1$, $x = lu$, e per conseguenza

$$u = 1 + \frac{1}{1}\frac{lu}{le} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{lu}{le}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{lu}{le}\right)^3 + \text{etc.,}$$

si conosce il numero u di questa serie mediante il suo logaritmo, che finisce sempre coll' essere convergente.

Di fatti, se si pone per abbreviare $\frac{lu}{le} = M$, due termini consecutivi, presi in un ordine qualunque, essendo rappresentati da

$$\frac{M^n}{1.2.3...n} + \frac{M^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)},$$

saranno nel rapporto di 1 a $\frac{M}{n+1}$; ma il numero n aumentando unitamente a quello dei termini della serie, terminerà sempre col essere maggiore di M, che non muta mai di valore; in tal modo i termini della serie diverranno finalmente decrescenti.

28. Possiamo ora ottenere la differenziale della funzione logaritmica, mediante il secondo teorema del §. 9; poichè avendo trovato $\frac{du}{dx} = \frac{la}{le} a^x$, se si considera u come funzione di x, nell' equazione $u = a^x$, ne viene che $\frac{dx}{du} = \frac{le}{la} \times \frac{1}{a^x}$; e se invece si considera x come funzione

di u, il che corrisponde all'equazione $x = \frac{l u}{l a}$; ma allora essendo a la base del sistema, $l a = 1$, e si ha soltanto

$$\frac{d x}{d u} = \frac{l e}{a^x} = \frac{l e}{u},$$

da cui risulta

$$\frac{d l u}{d u} = \frac{l e}{u} \quad \text{e} \quad d l u = l e \frac{d u}{u}.$$

Per passare dal sistema di base e a quello di base a, esprimendo questi sistemi con le caratteristiche l' ed l si avrebbe

$$l u = l e \,.\, l' u;$$

e siccome si paragonano tutti i sistemi di logaritmi al sistema neperiano, si chiama *modulo* il numero $l e$ pel quale bisogna moltiplicare $l' u$, per ottenere il logaritmo corrispondente in un altro sistema: per conseguenza si dice che la *differenziale del logaritmo, o la differenziale logaritmica, è uguale al prodotto del modulo, per la differenziale del numero, divisa pel numero stesso.*

29. Se da ciò passar si volesse allo sviluppo di x in u, o del logaritmo secondo le potenze del numero, si troverebbe che le quantitità

$$x, \quad \frac{d x}{d u}, \quad \frac{d^2 x}{d u^2}, \text{ etc.}$$

divengono infinite col supporre $u = 0$, e si potrebbe concludere che il logaritmo non potrebbe svilupparsi nella forma

$$x = A + B u + C u^2 + D u^3 + \text{etc.}$$

il che è facile di riconoscere anche *a priori*, osservando che la funzione x diviene infinita quando $u = 0$ (*Alg.* 251); la qual cosa non risulta dalla serie qui sopra, che in allora si riduce ad $x = A$.

Non accaderebbe lo stesso se si cambiasse u in $1 + u$; poichè si avrebbe

$$x = l(1+u), \frac{dx}{du} = \frac{le}{1+u} = le(1+u)^{-1},$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = -le(1+u)^{-2}, \frac{d^3x}{du^3} = 2le(1+2)^{-3}, \text{ etc.};$$

e facendo $u = 0$ ed $le = M$, si otterrebbe

$$l(1+u) = M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \text{etc.}\right\} (*).$$

30. Allorquando u è una frazione la serie del secondo membro non è abbastanza convergente (*Alg.* 236) onde

---

(*) Si sarà certamente osservato che la equazione $k = \frac{la}{le}$, del §. 26, unitamente all' espressione del §. 24,

$$k = \frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.}$$

conduce

$$la = le\left\{\frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} + \text{etc.}\right\};$$

e facendo $a = 1+u$, si ritroverà lo sviluppo ottenuto qui sopra.

Il Lagrange ha dimostrato che si potea rendere convergente questa serie, osservando che $la = m l \sqrt[m]{a}$, da cui

$$la = m le\left\{\frac{\sqrt[m]{a}-1}{1} - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^3}{3} - \text{etc.}\right\};$$

perchè $\sqrt[m]{a} - 1$ decresce più rapidamente di quello che m aumenti. Da ciò ne viene che prendendo m grandissimo, si avrà, con maggior esattezza.

$$la = m le(\sqrt[m]{a} - 1).$$

essere impiegata nel calcolo dei logaritmi; ma si sono trovati dei mezzi da trasformarla in altre che si applicano con maggiore o minor vantaggio, ai diversi casi. Si è primieramente osservato che cangiando $+u$ in $-u$, veniva

$$1(1-u) = M\left\{-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \frac{u^5}{5} - \text{etc.}, \right\},$$

e togliendo questa equazione dalla precedente, si è trovato

$$1(1+u) - 1(1-u) = 1\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2M\left\{\frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{etc.}\right\};$$

facendo poscia $\frac{1+u}{1-u} = 1 + \frac{z}{n}$, il che ci dà $u = \frac{z}{2n+z}$,

ed osservando che $1\left(1+\frac{z}{n}\right) = 1\left(\frac{n+z}{n}\right) = 1(n+z) - 1n$,

ne è risultato

$$1(n+z) - 1n = 2M\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \text{etc.}\right\};$$

da cui si è concluso

$$1(n+z) = 1n + 2M\left\{\frac{z}{2+nz} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \text{etc}\right\};$$

Questa serie che fa conoscere il logaritmo di $n+z$, quando si ha quello di n, dà, supponendovi $n = 1$ e $z = 1$,

$$1\,2 = 2\,M\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \text{etc}\right\},$$

poichè $1\,1 = 0$. Essa è molto convergente e lo diviene ancor più per un numero maggiore. Se si prende $M = 1$. si trova $1'\,2 = 0{,}693147180$.

Il modulo M s' ottiene calcolando il logaritmo di uno stesso numero, tanto nel sistema che si vuole adottare che nel neperiano, prendendo il rapporto dei due risultati (§. 28). Prontamente si arriva al modulo dei logaritmi ordinarii, calcolando prima il logaritmo neperiano di 5 per quello di 4, che si deduce da quello di 2, poichè

$l4 = 2\,l2$; poscia conoscendo $l'5$ e $l'2$, si ha $l'10 = l'5 + l'2$. In tal modo si trova

$$l'10 = 2{,}302585093;$$

e dividendo per questo ultimo logaritmo l' unità che è il logaritmo ordinario di 10, si ha pel modulo cercato

$$M = 0{,}434294482.$$

Tale è il numero pel quale bisogna moltiplicare i logaritmi neperiani per ottenere i logaritmi ordinari (o di Briggs).

Reciprocamente per ritornare ai logaritmi neperiani, bisogna dividere i logaritmi ordinari per questo numero, o moltiplicarli per

$$\frac{1}{0{,}434294482} = 2{,}302585093.$$

31. Mi accingo a dare alcuni esempi dell' applicazione delle regole della differenziazione delle funzioni logaritmiche; ma per maggior semplicità, supporrò d'ora in avanti che i logaritmi sieno neperiani, a meno che non faccia avvertito del contrario.

Sia 1.° $u = l\left(\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$; facendo $\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = z$, si avrà $\frac{du}{dx} = \frac{du\,dz}{dz\,dx}$, da cui $du = \frac{dz}{z}$, perchè .... $\frac{du}{dz} = \frac{1}{z}$ (28); ma

$$dz = \frac{dx\sqrt{(a^2+x^2)} - \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}}{a^2+x^2} = \frac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

dunque $du = \frac{a^2\,dx}{x(a^2+x^2)}$.

2.° $u = l\left\{\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}\right\}$; si farà

$\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)} = y$, $\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)} = z$,

il che darà

$$u = \mathrm{l}\left(\frac{y}{z}\right) = \mathrm{l}y - \mathrm{l}z,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}z}{z};$$

ma si ha

$$dy = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{(1+x)}} - \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-\mathrm{d}x}{2\sqrt{(1-x^2)}} \ldots\ldots$$

$$[\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}] = -\frac{z\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$dz = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{(1+x)}} + \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{(1-x^2)}} \ldots\ldots$$

$$[\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}] = \frac{y\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{(1-x^2)}},$$

da cui si ricava

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{z\,\mathrm{d}x}{2y\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{y\,\mathrm{d}x}{2z\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= \frac{-(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x}{2yz\sqrt{(1-x^2)}},$$

ed osservando che $y^2 + z^2 = 4$, $yz = 2x$, si troverà finalmente $du = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(1-x^2)}}$.

Quest'esempio merita d'essere osservato per le riduzioni della differenziale, e per la sua semplicità, in riguardo però alla funzione di cui deriva; sarà facile ora di eseguire il calcolo dei seguenti esempi, di cui non riferirò che i risultati.

3°. $u = \mathrm{l}\left[x + \sqrt{(1+x^2)}\right]$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)}}$;

4°. $u = \dfrac{1}{\sqrt{(-1)}}\mathrm{l}\left[x\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1-x^2)}\right]$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$;

5°. $u = \mathrm{l}\left\{\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}+x}{\sqrt{(1+x^2)}-x}\right\}^{\frac{1}{2}}$ $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)}}$;

6°. Se si avesse $u = (1x)^n$, facendo $1x = z$, si troverebbe

$$u = z^n, \qquad du = n z^{n-1} dz;$$

e rimettendo in luogo di z e di dz i loro valori, ne verrà

$$d.(1x)^n = n(1x)^{n-1}\frac{dx}{x}.$$

7°. Sia finalmente $u = 1.1x$, cioè il logaritmo del logaritmo di x; ponendo come sopra $1x = z$, si avrà

$$u = 1z, \qquad du = \frac{dz}{z}, \qquad dz = d.1x = \frac{dx}{x},$$

da cui poscia si dedurrà $du = \dfrac{dx}{x\,1x}$.

32. La considerazione de'logaritmi facilita molto la differenziazione delle formole esponenziali, allorquando sono complicate.

1°. Sia per esempio, $u = z^y$, z ed y sono due funzioni qualunque di x; prendendo il logaritmo di ciascun membro, si avrà $1u = y\,1z$, e poscia differenziando, si otterrà

$$\frac{du}{u} = dy\,1z + y\,d.1z\ (11,\ 28), \quad = dy\,1z + y\frac{dz}{z},$$

d' onde

$$du = u\left(dy\,1z + y\frac{dz}{z}\right), \quad d.z^y = z^y\left(dy\,1z + y\frac{dz}{z}\right).$$

2°. Sia $u = a^{b^x}$; si farà $b^x = y$, e si avrà

$$u = a^y, \qquad du = a^y\,dy\,1a\ (27);$$

ma $dy = d.b^x = b^x\,dx\,1b$: dunque

$$du = a^{b^x} b^x\,dx\,1a\,1b.$$

3°. Sia $u = z^{r^s}$, z, r, e s, funzioni di x, si farà $r^s = y$; ne verrà

$$u = z^y, \quad du = z^y \left(dy\, lz = \frac{y\, dz}{z} \right),$$

$$dy = r^s \left(ds\, lr + \frac{s\, dr}{r} \right),$$

e per conseguenza

$$du = z^{r^s} r^s \left(ds\, lr\, lz + \frac{s\, dr\, lz}{r} + \frac{dz}{z} \right).$$

Col mezzo di queste formole, facilmente si troverà la differenziale d'una funzione esponenziale qualunque

33. I seni, i coseni, le tangenti e le altre linee trigonometriche considerate per rapporto all'arco del circolo da cui dipendono, sono esse pure funzioni trascendenti, e ordinariamente si chiamano *funzioni circolari.*

Cerchiamo primieramente la differenziale di sen x; e perciò consideriamo le equazioni

$$\text{sen}\,(a+b) = \frac{\text{sen}\,a \cos b + \text{sen}\,b \cos a}{R},$$

$$\text{sen}\,(a-b) = \frac{\text{sen}\,a \cos b - \text{sen}\,b \cos a}{R} \text{ (}\textit{Trig.}\text{ 11),}$$

si tolga la seconda dalla prima, per ottenere

$$\text{sen}\,(a+b) - \text{sen}\,(a-b) = \frac{2\,\text{sen}\,b \cos a}{R},$$

col mezzo della quale troveremo

$$\text{sen}\,(x+dx) - \text{sen}\,x = \frac{2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,dx \cos\left(x + \tfrac{1}{2}\,dx\right)}{R},$$

facendo

$$a+b = x+dx, \qquad \text{e} \qquad a-b = x.$$

Prendendo poscia il rapporto degli accrescimenti di x e del sen x, avremo

$$\frac{\text{sen}\,(x+\mathrm{d}x)-\text{sen}\,x}{\mathrm{d}x}=\frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\mathrm{d}x\cos\left(x+\frac{1}{2}\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{R}\,\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\times\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{R}},$$

dividendo per 2 il numeratore ed il denominatore del secondo membro. Per passare poi al limite, bisogna cercare cosa diventino i due fattori allorchè l'accrescimento $\mathrm{d}x$ s'annichila (8), circostanza che riduce il secondo fattore a $\frac{\cos x}{\mathrm{R}}$.

In quanto al primo, $\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}\mathrm{d}x}$, il suo limite è l'unità, imperocchè da $\text{tang}\,a=\frac{\mathrm{R}\,\text{sen}\,a}{\cos a}$, se ne deduce $\frac{\text{sen}\,a}{\text{tang}\,a}=\frac{\cos a}{\mathrm{R}}$; e poichè $\cos a=\mathrm{R}$, allorquando $a=0$, il rapporto fra il seno e la tangente ha dunque per limite l'unità, quando l'arco s'annichila: ma essendo l'arco minore della tangente, e maggiore del seno, il rapporto $\frac{\text{sen}\,a}{a}$ sarà sempre compreso fra $\frac{\text{sen}\,a}{\text{tang}\,a}$ ed 1, e per conseguenza avrà esso pure 1 per limite.

Si avrà dunque in virtù di queste osservazioni

$$\frac{\mathrm{d}.\,\text{sen}\,x}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos x}{\mathrm{R}},\ \text{o}\ \mathrm{d}.\,\text{sen}\,x=\frac{\mathrm{d}x\cos x}{\mathrm{R}}.$$

34. Ottenuta questa differenziale, le altre si ottengono senza fatica; poichè

1°. $\cos x=\text{sen}\,(1^{q}-x)$, $\mathrm{d}.\cos x=\mathrm{d}.\,\text{sen}\,(1^{q}-x)$; ma da ciò che precede

$$\mathrm{d}.\,\text{sen}\,(1^{q}-x)=\frac{1}{\mathrm{R}}\mathrm{d}\,(1^{q}-x)\cos(1^{q}-x)$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{R}}\mathrm{d}x\cos(1^{q}-x),$$

e $\cos(1^q - x) = \operatorname{sen} x$: dunque

$$\mathrm{d}.\cos x = -\frac{\mathrm{d}x \operatorname{sen} x}{\mathrm{R}};$$

2°. sen verso $x = \mathrm{R} - \cos x$: dunque

$$\mathrm{d}.\,\text{sen. verso}\, x = -\mathrm{d}.\cos x = -\frac{\mathrm{d}x \operatorname{sen} x}{\mathrm{R}},$$

3.° $\operatorname{tang} x = \dfrac{\mathrm{R} \operatorname{sen} x}{\cos x}$,

$$\mathrm{d}.\operatorname{tang} x = \frac{\mathrm{R}\cos x\,\mathrm{d}.\operatorname{sen} x - \mathrm{R}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}.\cos x}{\cos x^2} \quad (12)$$

$$= \frac{(\cos x^2 + \operatorname{sen} x^2)\,\mathrm{d}x}{\cos x^2};$$

ma $\cos x^2 + \operatorname{sen} x^2 = \mathrm{R}^2$: dunque

$$\mathrm{d}.\operatorname{tang} x = \frac{\mathrm{R}^2\,\mathrm{d}x}{\cos x^2};$$

4°. $\cot x = \dfrac{\mathrm{R}^2}{\operatorname{tang} x}$,

$$\mathrm{d}.\cot x = -\frac{\mathrm{R}^2\mathrm{d}.\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x^2} = -\frac{\mathrm{R}^2\,\mathrm{d}x}{\operatorname{tang} x^2 \cos x^2} = -\frac{\mathrm{R}^2\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x^2},$$

mettendo in luogo di tang x il suo valore;

5°. $\sec x = \dfrac{\mathrm{R}^2}{\cos x}$,

$$\mathrm{d}.\sec x = \frac{\mathrm{R}^2\mathrm{d}.\cos x}{\cos x^2} = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{d}x \operatorname{sen} x}{\cos x^2} = \frac{\mathrm{d}x \operatorname{tang}.\, x \sec x}{\mathrm{R}^2},$$

poichè $\dfrac{\mathrm{R} \operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tang} x$, e $\dfrac{\mathrm{R}^2}{\cos x} = \sec x$;

6°. $\operatorname{cosec} x = \frac{R^2}{\operatorname{sen} x}$,

$$\text{d.cosec } x = -\frac{R^2 \,\text{d. sen } x}{\operatorname{sen} x^2} = -\frac{R\, dx \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = -\frac{dx \cot x \operatorname{cosec} x}{R^2}.$$

Ordinariamente si fa il raggio $R = 1$, ciò che molto semplifica la formola superiore, e dà

$$\text{d. sen } x = dx \cos x, \quad \text{d. cos } x = -dx \operatorname{sen} x,$$

$$\text{d. tang } x = \frac{dx}{\cos x^2}, \quad \text{d. cot } x = -\frac{dx}{\operatorname{sen} x^2},$$

35. Con queste formole si può ritrovare la differenziale di qualunque espressione che contenga seni, coseni, e tangenti etc. perciò bisognerà differenziare, considerando però queste quantità come funzioni particolari, e porre in luogo delle loro differenziali i risultati di sopra ottenuti; io qui non darò che un solo esempio, e cioè, $u = \cos x^{\operatorname{sen} x}$. Si farà

$$\cos x = z, \qquad \operatorname{sen} x = y;$$

si avrà $u = z^y$ e

$$du = \text{d. } z^y = z^y \left(dy \, l\, z + \frac{y\, dz}{z} \right) (32)$$

$$= dx \cos x^{\text{sen. } x} \left(\cos x \, l \, . \cos x - \frac{\operatorname{sen} x^2}{\cos x} \right).$$

36. Dopo avere considerato i seni e coseni, etc. come funzioni dell'arco, bisogna ora considerar l'arco come una funzione del suo seno e del suo coseno, etc. e determinarne la differenziale per tutti questi diversi punti. Per ciò fare sia x la funzione proposta, ed u la variabile da cui dipende questa funzione; 1°. per cagione del $\operatorname{sen} x = u$ e del $\cos x = \sqrt{(R^2 - u^2)}$, e l'equazione $\text{d. sen } x = \frac{dx \cos x}{R}$, dà $du = \frac{dx \sqrt{(R^2 - u^2)}}{R}$ e, per conseguenza (9) $dx = \frac{R\, du}{\sqrt{(R^2 - u^2)}}$; tale è il valore

della differenziale dell'arco espresso pel seno e per la sua differenziale.

2. Se esprimer si volesse la differenziale dell' arco pel suo coseno, bisognerebbe partire dall' equazione

$$d.\cos x = -\frac{dx \operatorname{sen} x}{R},$$

che dà facendo $\cos x = u$,

$$du = -\frac{dx\sqrt{(R^2-u^2)}}{R}, \quad \text{o} \quad dx = -\frac{R\,du}{\sqrt{(R^2-u^2)}}.$$

Per passare da questa espressione a quella del seno verso, si farebbe $u = R - y$, poichè $\cos x = R -$ seu. verso x, per conseguenza si avrebbe $du = -dy$, e $dx = \frac{R\,dy}{\sqrt{(2Ry-y^2)}}$.

3. Sia $\operatorname{tang} x = u$; l'equazione $d.\operatorname{tang} x = \frac{R^2\,dx}{\cos x^2}$ dà $du = \frac{R^2\,dx}{\cos x^2}$ e $dx = \frac{du\cos x^2}{R^2}$; ma siccome $\sec x = \frac{R^2}{\cos x}$, si ha $\cos x^2 = \frac{R^4}{\sec x^2}$, per conseguenza

$$dx = \frac{R^2\,du}{\sec x^2}, \text{ e per essere}$$

$$\sec x^2 = R^2 + \operatorname{tang} x^2 = R^2 + u^2,$$

ne viene finalmente

$$dx = \frac{R^2\,du}{R^2+u^2}.$$

Facendo $R = 1$, le tre espressioni di dx qui sopra ottenute per du, si riducono a

$$dx = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}, \quad dx = -\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} \quad dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

Terminerò quest' articolo coll' esempio seguente.

Sia x un arco che ha per seno la funzione $2u\sqrt{(1-u^2)}$; si farà

$$2u\sqrt{(1-u^2)} = z,$$

per cui si avrà

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}},$$

ma $$dz = \frac{2\,du\,(1-2u^2)}{\sqrt{(1-u^2)}},$$

e $$\sqrt{(1-z^2)} = 1-2u^2:$$

dunque $$dx = \frac{2\,du}{\sqrt{(1-u^2)}}.$$

37. Col mezzo delle espressioni differenziali ottenute precedentemente, si possono formare gli sviluppi delle principali funzioni circolari.

1°. Per sen x, si ha

$$\frac{du}{dx} = \cos x,\ \frac{d^2u}{dx^2} = -\operatorname{sen} x,\ \frac{d^3u}{dx^3} = -\cos x,$$
$$\frac{d^4u}{dx^4} = \operatorname{sen} x, \text{ etc.}$$

facendo $x = 0$, ne verrà (§. 22), $U = 0$, ed

$$U' = 1,\ U'' = 0,\ U''' = -1,\ U'''' = 0, \text{ etc.},$$

dal che si concluderà

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

2°. Per cos x si troverà

$$\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} x,\ \frac{d^2u}{dx^2} = -\cos x,\ \frac{d^3u}{dx^3} = \operatorname{sen} x,$$
$$\frac{d^4u}{dx^4} = \cos x, \text{ ec.};$$

facendo $x = 0$, ne risulterà $U = 1$, ed

$$U' = 0,\ U'' = -1,\ U''' = 0,\ U'''' = 1,\ \text{ec.},$$

il che darà

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{ec.}$$

Queste due formole, la cui legge è evidente e semplice offrono uno di quei metodi esatti e solleciti per calcolare il seno ed il coseno corrispondente ad un arco dato, specialmente quando quest'arco non è grande. Se ne troveranno delle simili per la tangente e le altre linee trigonometriche; ma la legge di quest'ultime formole non è semplice quanto quella delle precedenti, e sono molto meno comode nell'applicazione delle relazioni date dalla tangente, secante ec. per mezzo del seno e del coseno; per questa ragione non mi fermerò molto sopra questo oggetto; ma farò invece osservare che le prime, terminando sempre col divenir convergenti (27), si estendono anche a quegli archi che sorpassano la circonferenza.

38. Egualmente si potrebbe formare lo sviluppo dell'arco, o pel seno, o per la tangente; ma in questo caso, l'espressione de' coefficenti differenziali, complicandosi di mano in mano che il loro ordine s'innalza difficilmente lascierebbe scorgere la legge che seguono, inconveniente dal quale va esente il metodo su dichiarato.

Essendo il coefficente differenziale dell'arco considerato come funzione del seno

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)}} = (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ (36)},$$

può essere sviluppato in serie col mezzo della formola del binomio (21); e non facendo nessuna riduzione ai coefficienti numerici, si ritrova

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1.3}{2.4}u^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}u^6 + \text{ec.}$$

Non contenendo questo sviluppo, che delle potenze pari di u, mostra che quello di x non deve contenerne che delle impari, e che fa d'uopo stabilire come necessaria conseguenza

$$x = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + \text{ec.},$$

senza niun termine indipendente da u, affinchè l'arco x svanisca quando $u = 0$: ciò fatto, si ottiene differenziando

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \mathrm{A} + 3\,\mathrm{B}\,u^2 + 5\,\mathrm{C}\,u^4 + 7\,\mathrm{D}\,u^6 + \text{ec.}$$

e parogonandola alla prima serie, si ritrova

$$\mathrm{A} = 1,\ 3\,\mathrm{B} = \frac{1}{2},\ 5\,\mathrm{C} = \frac{1.3}{2.4},\ 7\,\mathrm{D} = \frac{1.3.5}{2.4.6},\ \text{ec.}$$

da dove si ha

$$x = \frac{u}{1} + \frac{1\,u^3}{2.3} + \frac{1.3\,u^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5\,u^7}{2.4.6.7} + \text{ec.}$$

Siccome non si può prendere $u > 1$, si vede che questa serie non potrebbe dare per x un valore maggiore del quarto della circonferenza; questa espressione dell'arco pel suo seno è dunque meno generale di quelle del seno e del coseno per l'arco.

Per esprimer l'arco per la tangente, bisogna prima sviluppare

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{1+u^2} = (1+u^2)^{-1}\ (36),$$

il che ci dà

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 - u^2 + u^4 - u^6 + \text{ec.}$$

e ponendo

$$x = \mathrm{A}\,u + \mathrm{B}\,u^3 + \mathrm{C}\,u^5 + \mathrm{D}\,u^7 + \text{ec.}$$

ne risulta

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \mathrm{A} + 3\,\mathrm{B}\,u^2 + 5\,\mathrm{C}\,u^4 + 7\,\mathrm{D}\,u^6 + \text{ec.},$$

ed

$$x = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \text{ec.}$$

Qest' ultimo sviluppo dà una espressione osservibile dell'arco $o^q,5$, la cui tangente è, come si sa, eguale ad 1; difatti se supponiamo $u = 1$, si ha

$$0^q,5 = 1 - 1/3 + 1/5 + 1/7 - 1/9 - \text{ec.}$$

Questa serie non è abbastanza convergente per essere impiegata; ma si può calcolare lo stesso arco in molte parti, ognuna delle quali avendo una tangente minore dell'unità, sarà espressa da una serie convergentissima. Il geometra inglese Machin ha ritrovato che l'arco $0^q,5$ è eguale a quattro volte quello che ha per tangente $\frac{1}{5}$, meno però l'arco di cui la tangente è $\frac{1}{239}$, della qual cosa è facile l'assicurarsene coll'osservare che se $\text{tang } a = \frac{1}{5}$, ne risulta (*Trig.* 27).

$$\text{tang } 2a = \frac{2 \text{ tang } a}{1 - \text{tang } a^2} = \frac{5}{12},$$

$$\text{tang } 4a = \frac{2 \text{ tang } 2a}{1 - (\text{tang } 2a)^2} = \frac{120}{119}.$$

L'ultimo numero, un poco maggiore dell'unità, tangente di $0^q,5$, mostra che $4a > 0^q,5$; facendo dunque

$$4a = A, \qquad 0^q,5 = B,$$

si ha, mediante la differenza $4a - 0^q,5$ o $A - B$,

$$\text{tang } (A - B) = \frac{\text{tang } A - \text{tang } B}{1 + \text{tang } A \text{tang } B} = \frac{1}{239},$$

e facendo $A - B = b$, si ha $0^q,5 = 4a - b$. Ora prendendo successivamente $u = \frac{1}{5}$, $u = \frac{1}{239}$, si trovano i valori di a e di b, e poscia

$$0^q,5 = \left\{ \begin{array}{l} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \text{ec.}\right) \\ -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \text{ec.}\right) \end{array} \right\},$$

da cui si dedurrà prontamente che la semicirconferenza $= 3,14159265\overline{3}$.

Della differenziazione delle funzioni di due o di un maggior numero di variabili.

39. Sia $f(x, y)$ una funzione qualunque di x e di y; supponendo primieramente che la variabile x sia la sola che cangi e divenga $x+h$, farà d'uopo considerare y come una costante, e trattare la funzione proposta nello stesso modo che una funzione di x sola: si avrà dunque pel teorema del §. 23, facendo per brevità $f(x, y) = u$,

$$f(x+h, y) = u + \frac{du\,h}{dx\,1} + \frac{d^2u\,h^2}{dx^2\,1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Per trovare quello che divenga la funzione proposta, allorquando il solo y prende un accrescimento k, si dovrà considerare x come una costante, e $f(x, y)$ o u, come una funzione del solo y, da ciò si avrà

$$f(x, y+k) = u + \frac{du\,k}{dy\,1} + \frac{d^2u\,k^2}{dy^2\,1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Nel caso in cui le quantità x ed y variano nel tempo stesso, e divengano $x+h$, ed $y+k$, siccome non si è assegnata niuna forza particolare alla funzione $f(x, y)$, non è possibile di fare nel tempo stesso le due sostituzioni indicate; ma è facile il vedere che si perverrà allo stesso risultato mutando prima x in $x+h$, e ponendo poscia $y+k$ in luogo di y nello sviluppo che si sarà ottenuto mediante la prima operazione.

Già abbiamo

$$f(x+h, y) = u + \frac{du\,h}{dx\,1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

rappresentando u, $f(x, y)$. Per isviluppare i coefficenti dei diversi termini di questa serie, avuto riguardo al mutamento accaduto ad y, osserverò primieramente che in ciascheduno di essi, x debbe essere considerato come una quantità costante, e che per conseguenza bisogna trattarli come funzioni della sola variabile y. Dopo ciò, $f(x, y)$ ovvero u, diverrà

$$u+\frac{\mathrm{d}u\,k}{\mathrm{d}y\,1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

Se nello sviluppo si scrive $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, invece di u, si avrà per risultato quello che diviene la funzione $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, allorquando y si muta in $y+k$; cioè,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y}\frac{k}{1}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

Ma siccome, partendo dalla funzione u, l'espressione $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y}$ indica due differenziazioni fatte successivamente, la prima non considerando che la variabilità della sola x, e la seconda quella della sola y, si dà a questa espressione una forma più semplice, scrivendola nel modo seguente: $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}$. Medesimamente si rappresenta $\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y^2}$ con $\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^2\,\mathrm{d}x}$; ed in generale bisogna intendere per $\frac{\mathrm{d}^{n+m}u}{\mathrm{d}y^n\mathrm{d}x^m}$, il coefficiente differenziale dell'ordine n, relativo alla funzione $\frac{\mathrm{d}^mu}{\mathrm{d}x^m}$, suppostavi y sola variabile, mentre questa stessa funzione è il coefficente differenziale dell'ordine m della funzione proposta, suppostavi x sola variabile.

Ciò posto, la sostituzione di $y+k$ in luogo di y muterà

$$\frac{du}{dx} \text{ in } \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dy\,dx}\frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dy^3dx}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ in } \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dy\,dx^2}\frac{k}{1} + \frac{d^4u}{dy^2dx^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^5u}{dy^3dx^2}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} \text{ in } \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^4u}{dy\,dx^3}\frac{k}{1} + \frac{d^5u}{dy^2dx^3}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^6u}{dy^3dx^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

ec.

Sostituendo questi valori nello sviluppo di $f(x+h, y)$ ed ordinandoli in modo che tutti i termini ne' quali gli esponenti di h e di k fanno una stessa somma, siano posti in una stessa colonna, ne verrà.

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k) = u &+ \frac{du\,k}{dy}\frac{}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{ec.} \\ &+ \frac{du\,h}{dx}\frac{}{1} + \frac{d^2u}{dy\,dx}\frac{k\,h}{1.1} + \frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2h}{1.2.1} + \text{ec.} \\ &+ \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy\,dx^2}\frac{k\,h^2}{1.1.2} + \text{ec.} \\ &+ \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.} \\ &+ \text{ec.} \end{aligned}\right\}.$$

Per ben inteudere quello che vuol significare questa formola, basta fare $u = x^m y^n$, e ricavarne lo sviluppo di $(x+h)^m(y+k)^n$, cosa facile a formare *a priori*.

4o. Il precedente sviluppo si è ottenuto ponendo prima $x+h$ in luogo di x, e poscia $y+k$ in luogo di y, ma si sarebbe potuto procedere in un ordine inverso, e cominciare colla sostituzione relativa ad y; allora $f(x,y)$ sarebbe divenuta

$$f(x, y+k),$$

ovvero

$$u + \frac{du\,k}{dy}\frac{}{1} + \frac{d^2u\,k}{dy^2}\frac{}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

La sostituzione di $x+h$ in luogo di x, avrebbe prima mutato u in

$$u+\frac{\mathrm{d}u\,h}{\mathrm{d}x\,1}+\frac{\mathrm{d}^2u\,h^2}{\mathrm{d}x^2\,1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

e poscia

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\text{ in }\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}^2u\,h}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\;1}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^3\mathrm{d}y}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\text{ in }\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}^3u\,h}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2\;1}+\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^3\mathrm{d}y^2}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\text{ in }\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}+\frac{\mathrm{d}^4u\,h}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^3\;1}+\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y^3}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^6u}{\mathrm{d}x^3\mathrm{d}y^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec},$$

ec.

e per conseguenza si avrà

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{f}(x+h,y+k)=u&+\frac{\mathrm{d}u\,h}{\mathrm{d}x\,1}+\frac{\mathrm{d}^2u\,h^2}{\mathrm{d}x^2\,1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\\&+\frac{\mathrm{d}u\,k}{\mathrm{d}y\;1}+\frac{\mathrm{d}^2u\,h\,k}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\;1.1}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\frac{h^2\,k}{1.2.1}+\text{ec.}\\&+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\frac{h\,k^2}{1.1.2}+\text{ec.}\\&+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.}\\&+\text{ec.}\end{aligned}\right\}.$$

È chiaro che questo secondo sviluppo dovrà essere identico col primo; perchè tanto è il mutar prima x in $x+h$, e poscia y in $y+k$, e fare le stesse sostituzioni in un ordine inverso, perchè tanto nell' un modo che nell' altro si ottiene sempre $\mathrm{f}(x+h,y+k)$.

Se paragoniamo, in questi due sviluppi i termini che sono affetti dalle stesse potenze di h e di k, si troverà questa serie d'equazioni;

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

$$\frac{d^3u}{dy\,dx^2} = \frac{d^3u}{dx^2\,dy},$$

$$\frac{d^3u}{dy^2\,dx} = \frac{d^3u}{dx\,dy^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n+m}u}{dy^n\,dx^m} = \frac{d^{m+n}u}{dx^m\,dy^n},$$

etc. etc.

Risulta dalla prima, che *il coefficente differenziale del secondo ordine d'una funzione di due variabili, preso differenziando per rapporto ad una di esse, e poscia per rapporto all'altra, resta lo stesso, qualunque sia l'ordine seguito nelle differenziazioni.*

Sia per esempio $u = x^m y^n$; se differenziamo prima, considerando x come sola variabile, si ha $\frac{du}{dx} = m x^{m-1} y^n$; differenziando poscia questo risultato, facendo variare solo y, si ottiene $\frac{d^2u}{dy\,dx} = m n x^{m-1} y^{n-1}$: ed operando in ordine inverso, si trova

$$\frac{du}{dy} = n x^m y^{n-1}, \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} = m n x^{m-1} y^{n-1},$$

e si vede che l'ultimo risultato è uguale in tutti due i casi. Le altre equazioni riferite qui sopra non sono che conseguenze della prima.

41. Sottraendo $f(x, y)$, ovvero u, da $f(x+h, y+k)$, collocando in una stessa linea i termini compresi in ognuna delle colonne, e riducendoli allo stesso denominatore, si trova

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right) \\ \quad + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right) \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Se estendiamo alle funzioni di due variabili la differenziazione che ho data (5) della differenziale d'una funzione, si vedrà che quella di $f(x, y)$ o di u, è compresa nei due termini che formano la prima linea dello sviluppo precedente; e mutando h in dx, e k in dy, si avrà

$$df(x,y) = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

Da ciò ne viene che la *differenziale totale* d'una funzione di due variabili, contiene due parti, cioè $\frac{du}{dx}dx$, o la differenziale presa considerando x come sola variabile, e $\frac{du}{dy}dy$, o sia presa la differenziale riguardata y come sola variabile.

Dunque si può applicare alle funzioni di due variabili, le regole date (§. 10 e seg.) per la differenziazione di quelle che dipendono da una sola, e per ciò *si differenzierà la funzione proposta, prima riguardo ad una delle variabili, e poscia riguardo all'altra; la somma dei due risultati sarà la differenziazione totale cercata.*

42. Non credo necessario il dare molti esempi relativi alla differenziazione delle funzioni di due variabili, poichè fa parte di quella delle funzioni che non ne contengono che una sola; mi limiterò dunque ai seguenti.

Immediatamente si vede, secondo la regola qui sopra dichiarata, che

$$d(x+y) = dx + dy,$$

$$d.xy = y\,dx + x\,dy,$$

$$d.\frac{x}{y} = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

Sia pure 1°. $u = x^m y^n$; si ha

$$\frac{du}{dx}dy = m\,x^{m-1}y^n\,dx,$$

$$\frac{du}{dy}dy = n\,x^m y^{n-1}\,dy;$$

dunque

$$du = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy = x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx + nx\,dy);$$

2°. $u = \dfrac{ay}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = ay\,(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$; si ha

$$\frac{du}{dx}\,dx = -\frac{ay\,x\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{du}{dy}\,dy = \frac{a\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ay^2\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

dunque

$$du = -\frac{ay\,x\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ay^2\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

oppure riducendo,

$$= \frac{-axy\,dx + ax^2\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

3°. $u = \text{arco}\left(\text{tang} = \dfrac{x}{y}\right)$, espressione che è quella di un arco di cerchio il cui raggio è 1, e la tangente $\dfrac{x}{y}$; per differenziare si farà $\dfrac{x}{y} = z$, da cui risulterà $u =$ arc $(\text{tang} = z)$, e $du = \dfrac{dz}{1+z^2}$ (36); poscia ponendo in luogo di z e di dz il loro valore si avrà

$$du = \frac{\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2+x^2}.$$

43. Il modo con cui si scrivono le differenziali delle funzioni che dipendono da molte variabili, dà luogo ad importanti osservazioni. In allora non bisogna confondere

$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x$ con $\mathrm{d}\,u$, come potrebbe esser fatto se u non contenesse che la sola variabile x, poichè qui il $\mathrm{d}\,u$ dell'espressione $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}$, non indica la differenziale totale della funzione u, ma solo la parte che produce la variazione di x (41); e siccome è il divisore $\mathrm{d}\,x$ che segna questa restrizione (39), così bisogna conservarlo per distinguere $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x$, dalla differenziale totale rappresentata semplicemente da $\mathrm{d}\,u$: lo stesso è di $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}\,\mathrm{d}\,y$, per riguardo ad y (41).

Le quantità $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}$, ... $\frac{\mathrm{d}^{m+n}\,u}{\mathrm{d}\,x^m\,\mathrm{d}\,y^n}$, sono spesso chiamate *differenziali parziali*; ma questo linguaggio non è esatto; perchè quelle formole che vengono contrassegnate con questo nome non esprimono la differenza fra due quantità.

Le vere *differenze parziali* di u sono

$$\mathrm{f}(x+h,\,y)-\mathrm{f}(x,\,y),$$
$$\mathrm{f}(x,\,y+k)-\mathrm{f}(x,\,y),$$

nella prima non si è considerato che il mutamento di x, e nella seconda quello solo di y. Le espressioni

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}\,h,\ \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}\,k,\ \text{o}\ \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x,\ \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}\,\mathrm{d}\,y,$$

le quali non sono che i primi termini degli sviluppi di queste differenze, essere debbono chiamate *differenziali parziali* (5); $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}$, rimarranno sempre *coefficenti differenziali* del primo ordine della funzione proposta, ed in generale, $\frac{\mathrm{d}^{m+n}u}{\mathrm{d}\,x^m\mathrm{d}\,y^n}$ sarà, nell' ordine $m+n$, il coefficente differenziale preso differenziando rapporto ad x, m volte, e rapporto ad y, n volte; ma ossevar bisogna

che una funzione di una sola variabile non ha in ogni ordine che un coefficente differenziale (17), mentre una funzione di due variabili ha due coefficenti differenziali pel primo ordine, tre pel secondo, quattro pel terzo, e così via discorrendo.

44. Ecco come si possono trovare questi diversi coefficenti, partendo dai primi due.

Si ha primieramente

$$\mathrm{d}\,u = \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}\,\mathrm{d}\,y,$$

prendendo poscia la differenziale delle funzioni $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}$ e $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}$, le quali debbono essere trattate come funzioni di due variabili, ne viene

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}\,x^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}\,y,$$

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}\,y^2}\,\mathrm{d}\,y;$$

e siccome la differenziale seconda non è che la differenziale della differenziale prima, si avrà,

$$\mathrm{d}^2\,u = \frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}\,x^2}\,\mathrm{d}\,x^2 + 2\,\frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}\,y^2}\,\mathrm{d}\,y^2$$

considerando $\mathrm{d}\,x$ e $\mathrm{d}\,y$ come delle costanti, ed osservando che i coefficienti differenziali, i cui denominatori non presentano che i diversi collocamenti d'uno stesso prodotto in $\mathrm{d}\,x$ e $\mathrm{d}\,y$, sieno identici (40).

Se differenziamo i coefficenti differenziali che si trovano nel precedente risultato, ne verrà

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}\,x^2} = \frac{\mathrm{d}^3\,u}{\mathrm{d}x^3}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{d}^3\,u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}\,y,$$

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}^3\,u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{d}^3\,u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}\,y,$$

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}^2\,u}{\mathrm{d}\,y^2} = \frac{\mathrm{d}^3\,u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{\mathrm{d}^3\,u}{\mathrm{d}\,y^3}\,\mathrm{d}\,y,$$

e per conseguenza,

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3,$$

Facilmente si continuerà questa formazione, e si vedrà l'analogia che questi risultati hanno con le potenze del binomio.

Fa d'uopo osservare che, in seguito della precedente formola, la serie del §. 41. si converte in quella del §. 23, allorchè si sostituisca dx ad h, dy a k; di modo che se $f(x+dx, y+dy)$ si indica con u', si ha egualmente

$$u' - u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \text{ec.}$$

formola generale quanto quella del §. 41, perchè gli accrescimenti dx e dy sono egualmente arbitrarii.

45. È facile l'estendere queste considerazioni alle funzioni d'un numero qualunque di variabili, e di assicurarsi, che se si ha

$$u = f(t, x, y, z),$$

ne risulta

$$f(t+g, x+h, y+k, z+l) - f(t, x, y, z) = \frac{du}{dt}g + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \text{ec},$$

da cui si concluderà

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

indicando con

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz},$$

i coefficenti differenziali della funzione u, presi facendo variare soltanto t, o x, o y, o z.

Questa notazione, della quale siamo debitori a Fontaine, è la più semplice e la più espressiva fra tutte quelle che

sono state proposte onde adempire le stesse indicazioni. L' Eulero per tema che non si confondesse, per esempio, il coefficente differenziale $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ col rapporto della differenziale totale $\mathrm{d}u$ alla differenziale $\mathrm{d}t$, rapporto che è equivalente a

$$\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

indica questo rapporto con $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, nel mentre che esprime il coefficente differenziale per $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)$. Il significato del discorso rende quasi sempre superfluo questa distinzione. Il Fontaine dall'altra parte avea previsto il caso in cui fosse assolutamente necessario, proponendo di scrivere il rapporto in questo modo $\frac{1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}u$; e siccome questo rapporto è impiegato più di rado del coefficente differenziale, avea applicato a quest' ultimo il più semplice segno, ciò ch' è conforme alla teorica di tutte le nomenclature, e precisamente contrario a ciò che avea fatto l'Eulero.

46. I risultati del calcolo differenziale dovendo sempre essere indipendenti dagli accrescimenti delle variabili il rapporto $\frac{1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}u$ non potrebbe avere un senso determinato, che nel caso in cui le variabili x, y, z sono, almeno implicitamente, funzioni di t; ed allora $\mathrm{d}u$ esprime la differenziale d' una funzione composta di un numero qualunque d' altre funzioni della stessa variabile. Difatti, se supponiamo che le variabili x, y, z, dipendono dalla variabile t, e che si sostituisca agli accrescimenti g, h, k, l, espressioni della forma seguente,

$$\mathrm{d}t, p\,\mathrm{d}t, q\,\mathrm{d}t, r\,\mathrm{d}t,$$

l' insieme de' termini che conterranno $\mathrm{d}t$ alla prima potenza, si comporrà de' termini ne' quali gli accrescimenti g, h, k, l, non oltrepassano questa potenza, e non si moltiplicano fra loro: dunque si avrà pure

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,p\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,q\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,r\,\mathrm{d}t,$$

il che si riduce a

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z,$$

ponendo in luogo di $p\,\mathrm{d}t$, $q\,\mathrm{d}t$, $r\,\mathrm{d}t$ le differenziali $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, le quali rappresentano queste quantità.

In tal modo *la differenziale d'una funzione contiene un numero qualunque d'altre funzioni d'una sola variabile, e la somma delle differenziali parziali relative ad ognuna di queste funzioni.*

La regola del §. 11, non è che un caso particolare di questo enunciato, imperciocchè se prendiamo

$$\mathrm{d}u = xyz\,\mathrm{d}t + tyz\,\mathrm{d}x + txz\,\mathrm{d}y + txy\,\mathrm{d}z.$$

Egualmente, quando $u = z^y$, si ha

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z = y\,z^{y-1}\,\mathrm{d}z\ (13),\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = z^y \mathrm{d}y\,\mathrm{l}z\ (27),$$

e per conseguenza

$$\mathrm{d}u = y\,z^{y-1}\,\mathrm{d}z + z^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{l}z.$$

47. Pochissime cose dirò in questo luogo, intorno al modo di ridurre in serie le funzioni di due variabili, perchè il più delle volte avviene che non si sviluppano che per rapporto ad una delle variabili, mentre l'altra si suppone avere un valore costante, ed in questo caso tali funzioni debbono essere trattate come quelle d'una sola variabile. Nondimeno sarà forse utile di far vedere che la formola del §. 39 s'impiega a sviluppare le funzioni di due variabili, come quella del n° 21 si applica alle funzioni che non ne contengono che una (22).

Se si fa $x = 0$, $y = 0$, nella formola del §. 41, cioè in u ed in ciascuno de' suoi coefficienti differenziali, darà lo sviluppo di $\mathrm{f}(h, k)$ ordinato secondo le potenze delle quantità h, e k; ma si potrà scrivere x invece di h, ed y invece di k, e ne risulterà

$$f(x,y) = u + \frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y\right\} + \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}xy + \frac{d^2u}{dy^2}y^2\right\} + \text{ec.},$$

facendo però x ed y nulli, tanto in u che nelle espressioni che si otterranno per ciascuno dei coefficienti differenziali (*)

(*) *Si potrebbe ancora pervenire allo sviluppo di* $f(x,y)$ *per mezzo della differenziazione, nel modo che si è pervenuto a quello di* $f(x)$, *nella nota della pag.* 28; *imperciocchè se si suppone*

$$u = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \text{ec.}$$

le lettere A, B, C, *ec. rappresentano delle quantità indipendenti da* x *e da* y, *e se si differenzia più volte di seguito quest'equazione per rispetto ad* x, *e rispetto ad* y *in modo da formare l'espressioni dei coefficienti differenziali*

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \text{ ec.}$$

si avrà, eguagliando a zero x *ed* y, *dopo le differenziazioni,*

$$\frac{du}{dx} = B, \qquad \frac{du}{dy} = C,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1.2D, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 1.1E, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 1.2F, \text{ ec.}$$

il valore di A *si troverà cercando quello della funzione* u, *allorchè* x *ed* y *sono nulli.*

Della differenziazione dell' equazioni qualunque a due variabili.

48. Non ho fin qui differenziato che *equazioni separate*, vale a dire equazioni in cui la variabile si trovava sola in un membro, e la funzione nell'altro; tali sono le equazioni della formola $Y = X$, essendo Y una funzione di y, e X una funzione di x; ma le equazioni che si rinvengano nelle ricerche analitiche, per lo più non si presentano sotto tal formola, ma bensì spesso la variabile e la funzione si trovano mescolate o combinate fra loro.

Allorchè si ha una qualunque equazione $f(x, y) = 0$, fra x e y, suo divisamento è di determinare x per y, o y per x, in modo che una di queste quantità sia funzione dell'altra; e se si cangia x in $x + h$, e y in $y + k$, conviene anche che si abbia

$$f(x + h, y + k) = 0,$$

d' onde

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = 0,$$

equazione, che per il n° 41, si viluppa nella formola

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right) \\ &+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\,\frac{d^2u}{dx\,dy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right) \\ &+ \text{ec.} \end{aligned}\right\} = 0,$$

in cui u rappresenta $f(x, y)$.

Ciò posto, cercare il coefficente differenziale di y, è lo stesso che cercare il limite del rapporto $\frac{h}{k}$: ma se nell' equazione qui sopra, si fa $k = \pi h$, tutti i suoi termini divengono divisibili per h; e quando poscia si fa $h = 0$, onde avere il limite richiesto, non vi rimane più che

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\pi = 0,$$

ove in luogo di π si dovrà porre il suo limite $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (5): si avrà dunque

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0, \quad \text{o} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=0.$$

L'ultimo risultato, confondendosi col differenziale totale della funzione u (41), mostra che *per trovare il coefficente differenziale di prim ordine d'una funzione* y *data da una equazione* u = o *fra due variabili* x *e* y, *bisogna differenziare il primo membro di questa equazione, come se le variabili fossero indipendenti l'una dall'altra, eguagliare indi a zero il risultato, e prendere il valore di* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Fatto ciò, se si osserva che il valore $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, che rappresenterò per p, non contenendo che x ed y, è, in virtù dell'equazione $u=0$, una funzione della sola x, si conchiuderà che p deve cangiare quando si fa variare x, e prendere un accrescimento che dinoterò con l, ed allora si può riguardare il primo membro dell'equazione

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}p=0,$$

come una funzione di x, y e p uguagliata a zero, che rimaner deve sempre nulla; e se si rappresenta con u', si avrà, per la formola del n°. 45,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}h+\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}y}k+\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}p}l\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}=0.$$

Ora se si fa $k=\pi h$, $l=\rho h$, tutti i termini di questa espressione saranno divisibili per h; e i termini che non sono scritti, contenendo le quantità h, k ed l a delle potenze più elevate della prima, svaniranno allorchè si farà $h=0$, per passare al limite loro, ove debbesi in luogo di

π porre $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, e $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ in luogo di ρ;

non rimarrà dunque che

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0,$$

locchè conduce a

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p=0,$$

e si confonde col differenziale totale della funzione u'; così, *per formare l'equazione che esprima la relazione fra il coefficente differenziale di primo ordine e quello di secondo, bisogna differenziare l'equazione che determina il primo di questi coefficenti, riguardandolo come una nuova variabile, quindi dividere il risultato per* $\mathrm{d}x$.

Facendo poscia $\frac{dp}{\mathrm{d}x}=q$, l'equazione che si ottiene potrà essere considerata come una funzione u'' di x, y, p e q, che uguagliata a zero darà un'equazione equivalente a $du''=0$, la quale determinerà il coefficente differenziale r della funzione q, vale a dire il coefficente differenziale di terzo ordine di y, per riguardo ai precedenti.

Perlocchè si vede che *le equazioni, che esprimono le relazioni dei coefficenti differenziali d'una funzione data da una equazione fra due variabili, si deducono le une dalle altre, con delle differenziazioni successive, trattando ciascuno di questi coefficenti come una nuova variabile.*

49. L'esempio seguente spiegherà tutto ciò che precede. Sia l'equazione

$$y^2-2mxy+x^2-a^2=0;$$

ove la funzione u è rappresentata per $y^2-2mxy+x^2-a^2$: se si differenzia, facendo variare x e y, e che si uguagli il risultato a zero, si troverà

$$2y\,dy - 2mx\,dy - 2my\,dx + 2x\,dx = 0,$$
ovvero $y\,dy - mx\,dy - my\,dx + x\,dx = 0 \ldots (1)$,

togliendo il fattore comune 2 ; e si ricaverà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Per avere $\frac{dy}{dx}$ espresso dal solo x, converrà sostituire in questa espressione il valore di y, che, nell' equazione proposta, è

$$y = mx \pm \sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)};$$

e verrà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + m^2x \pm m\sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)}}{\pm\sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)}}$$

$$= m \pm \frac{-x + m^2x}{\sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)}},$$

risultato simile a quello, che si dedurrebbe immediatamente dall' espressione

$$y = mx \pm \sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)},$$

ottenuta risolvendo l equazione proposta.

Ma se si fa $\frac{dy}{dx} = p$, ne risulta $dy = p\,dx$, e l'equazione (1) si cangia in

$$(y - mx)p - my + x = 0;$$

e se questa si differenzia di nuovo, considerando che y e p sono funzioni di x, si perviene a

$$(y - mx)\,dp + p(dy - m\,dx) - m\,dy + dx = 0;$$

nella quale ponendo $p\,dx$ in luogo di dy, $q\,dx$ in luogo di dp, e riducendo, ne viene

$$(y - mx)q + p^2 - 2mp + 1 = 0,$$

equazione, che dà la relazione che, il coefficente differenziale del secondo ordine q, o $\frac{d^2y}{dx^2}$, deve avere con quello del primo ordine p, o $\frac{dy}{dx}$, e colle variabili x ed y.

Continuando nella medesima maniera a differenziare, si formerebbe l'equazione dalla quale dipende il coefficente differenziale di terzo ordine, e così di seguito.

5o. Se si fa attenzione che $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, e che $d^2y = d(dy)$, si riconoscerà che l'equazione

$$(y - mx)q + p^2 - 2mp + 1 = 0,$$

si deduce immediatamente dall'equazione

$$y\,dy - mx\,dy - my\,dx + x\,dx = 0 \ldots \quad (1),$$

quando si differenzia facendo variare dy, come funzione di x, e dividendo poscia per dx^2. In fatti, si ha primieramente

$$y\,d^2y - mx\,d^2y + dy^2 - 2m\,dx\,dy + dx^2 = 0 \quad (2),$$

secondariamente

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

equazione che, cangiando $\frac{dy}{dx}$ in p, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in q, diviene quella che ho ottenuto precedentemente per determinare q.

In generale, il far variare le quantità p, q, etc. come funzioni di x, è lo stesso che prendere i differenziali delle espressioni equivalenti $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, differenziali che sono rispettivamente rappresentati da $\frac{d^2y}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^2}$, etc. che è infine considerare le quantità dy, d^2y, etc., come funzioni di x.

L'equazione (1) è *la differenziale prima* della proposta;

l'equazione (2) è *la differenziale seconda*, etc.; e dietro la fatta osservazione, *i differenziali d'una equazione* PRIMITIVA *proposta si deducono gli uni dagli altri colla differenziazione, considerando* y, dy, dy, *etc. come funzioni di* x.

Si passa alle equazioni che danno i coefficienti differenziali, osservando che questi coefficenti sono rappresentati da

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.},$$

ovvero facendo

$$dy = p\,dx, \qquad d^2y = q\,dx^2, \text{ etc.}$$

Con queste ultime sostituzioni i differenziali svaniscono, e non resta nei risultati che le funzioni p, q, etc., assolutamente indipendenti dal valore dell'incremento dx.

51. L'equazione proposta

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0,$$

essendo di secondo grado, dà per y due valori, mediante i quali l'equazione

$$(y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0 \qquad (1),$$

da cui si ricava

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

dà pure per il coefficente differenziale $\frac{dy}{dx}$, due valori corrispondenti a quelli della funzione y.

Se in vece di risolvere l'equazione proposta, per dedurne il valore di y, si eliminasse questa variabile per mezzo dell'equazione differenziale (1), si avrebbe, in virtù di ciò, prontamente

$$y = \frac{x(m\,dy - dx)}{dy - m\,dx};$$

che sostituito nella prima, verrebbe, dopo le riduzioni,

$$(x^2 - a^2 - m^2 x^2)\,\mathrm{d}y^2 - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (x^2 - m^2x^2 - a^2m^2)\,\mathrm{d}x^2 = 0.$$

Quest' ultima risolvendola per rapporto a dy, darebbe i medesimi risultati che si ottengono differenziando i valori di y (49); e dopo averla divisa per $\mathrm{d}x^2$, se ne ricaverebbe immediatamente quelli del coefficente differenziale. Si avrebbe allora

$$(x^2 - a^2 - m^2x^2)\frac{\mathrm{d}y^2}{dx^2} - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 - m^2x^2 - a^2m^2 = 0;$$

e liberando la seconda potenza dal coefficente differenziale, espressa da $\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}$ si arriverebbe a

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} - 2m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x^2 - m^2x^2 - a^2m^2}{x^2 - a^2 - m^2x^2} = 0.$$

52. È facile l'applicare ciò che precede a degli esempi più complicati o nei quali le variabili si trovano elevate ad una maggior potenza. Sia anche l'equazione

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0;$$

la differenziazione darà

$$3y^2\,\mathrm{d}y - 3ax\,\mathrm{d}y - 3ay\,\mathrm{d}x + 3x^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

e togliendo il fattore comune 3,

$$y^2\,\mathrm{d}y - ax\,\mathrm{d}y - ay\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (1),$$

e per conseguenza $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

La funzione y, in questo esempio, essendo data da una equazione di terzo grado, dovrà avere tre valori, che sostituiti successivamente nell'espressione di $\frac{dy}{\mathrm{d}x}$, si otterrà un egual numero di valori pel coefficente differenziale.

Si vede in generale che questo coefficente avrà sempre un numero di valori eguale a quello di cui la funzione y è suscettibile nell'equazione proposta, ed avverrà lo stesso riguardo alla differenziale.

Se si eliminasse y fra le due equazioni

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$
$$y^2\,dy - ax\,dy - ay\,dx + x^2\,dx = 0 \qquad (1),$$

si avrebbe per risultato un'equazione di terzo grado, per rapporto a dy, e che rinchiuderebbe li tre valori di cui questa differenziale è suscettibile.

Avendo trovata l'espressione di dy o quella di $\frac{dy}{dx}$, si perverrà a quelle di d^2y e di $\frac{d^2y}{dx^2}$, differenziando per rapporto a dy, a y ed a x, seguendo la regola stabilita §. 50, l'equazione (1) differenziale prima della proposta. Così operando, e riducendo si avrà

$$y^2\,d^2y - ax\,d^2y + 2y\,dy^2 - 2a\,dx\,dy + 2x\,dx^2 = 0,$$

oppure

$$(y^2 - ax)\,d^2y + 2y\,dy^2 - 2a\,dx\,dy + 2x\,dx^2 = 0 \quad (2):$$

che è la differenziale seconda dell'equazione proposta.

Questa equazione se si combina colla differenziale prima, si potrà eliminare dy, ed il risultato darà l'espressione di d^2y per x, dx e y. Si toglierà, se si vuole, la funzione y, col mezzo della proposta equazione.

Dividendo l'equazione (2) per dx^2, prende la forma

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

la quale non contiene più che i coefficenti differenziali $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{dy}{dx}$: e se ora si pone in luogo di $\frac{dy}{dx}$ il suo valore $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$ ricavato da (1), risulterà

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$+2y\left(\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)^2 - 2a\left(\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\right) + 2x = 0,$$

e riducendo allo stesso denominatore, verrà

$$(y^2-ax)^3\frac{d^2y}{dx^2} + 2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y + 2a^3xy = 0;$$

ma la quantità

$$2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y$$

non è che

$$2xy(y^3 - 3axy + \ ^3).$$

la quale è nulla, in virtù dell'equazione proposta, e per conseguenza si ha

$$(y^2 - ax)^3\frac{d^2y}{dx^2} + 2a^3xy = 0,$$

oppure $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$$

Differenziando l'equazione (2) per rapporto a d^2y, dy, y e x, si formerà la differenziale terza dell'equazione proposta, e se ne ricaverà il valore di d^3y, quando si avrà eliminato d^2y e dy col mezzo delle equazioni (1) e (2); dividendo il risultato per dx^3, si avrà l'espressione del coefficente $\frac{d^3y}{dx^3}$. E così proseguendo si perverrà alle differenziali ulteriori.

53. L'osservazione del §. 7, sopra le costanti, che svaniscono colla differenziazione delle funzioni, egualmente si applica all' equazioni. Se si avesse, per esempio, $y^2 = ax + b$, la differenziale $2y\,dy = a\,dx$, essendo indipendente da b, apparterrebbe a ciascuna dell'equazioni particolari che risultano dalla proposta, dando a b tutti i possibili valori.

Ma si può analogamente pervenire, nel caso attuale, a una equazione indipendente da a, benchè la differenziazione non abbia fatto scomparire questa costante: basta per questo eliminare a dalle due equazioni

$$y^2 = ax + b, \qquad 2y\,dy = a\,dx;$$

e si troverà

$$y^2\,dx = 2xy\,dy + b\,dx.$$

Quantunque quest' ultima equazione non sia la differenziale immediata della proposta, pure se ne ricava che, essendo divisa per dx, esprime la relazione che esister debbe fra la variabile x, la funzione y, e il coefficente $\frac{dy}{dx}$, qualunque sia a.

Se la costante che si elimina non è al primo grado nell' equazione proposta, si otterrà un risultato che racchiuderà delle potenze di dy e di dx superiori alla prima: prenderò per esempio,

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2.$$

Differenziando si troverà

$$y\,dy - a\,dy + x\,dx = 0,$$

d' onde $$a = \frac{y\,dy + x\,dx}{dy};$$

che sostituito nella proposta, verrà, dopo aver ordinato per rapporto a dy e diviso per dx^2,

$$(x^2 - 2y^2)\frac{dy^2}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0:$$

tale è la relazione che esister deve fra la variabile x, la funzione y e il suo coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, in dipendentemente da alcun valore particolare della costante a. Risolvendo l' equazione

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2,$$

per rapporto ad a, se ne ricaverà

$$a = -y \pm V(2y^2 + x^2).$$

ed a essendo allora liberato dalle variabili x e y, la sola differenziazione l'avrebbe fatto svanire, e si sarebbe trovato

$$-\mathrm{d}y \pm \frac{2y\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}x}{V(2y^2 + x^2)} = 0.$$

Facendo scomparire il radicale, si accerterà che questa equazione è la stessa, di quella che risulta dall' eliminazione.

54. Si possono fare sparire quante si vorranno costanti, differenziando un numero di volte eguale a quello delle costanti. Sia

$$y^2 = m(a^2 - x^2);$$

si avrà tosto

$$y\,\mathrm{d}y = -m\,x\,\mathrm{d}x;$$

differenziando di nuovo, si troverà

$$y\,\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}y^2 = -m\,\mathrm{d}x^2;$$

sostituendo per m il suo valore $-\frac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}$, ricavato dall'equazione precedente, e dividendo per $\mathrm{d}x^2$, verrà

$$xy\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} - y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

risultato indipendente dalle costanti m ed a

55. La differenziazione combinata con l'eliminazione, fornisce il mezzo di fare sparire gli esponenti. Sia per es.

$$\mathrm{P}^n = \mathrm{Q};$$

P e Q sono funzioni qualunque di x e di y; e differenziando questa equazione, verrà

$$n\,\mathrm{P}^{n-1}\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \mathrm{d}\,\mathrm{Q}, \text{ o } n\,\mathrm{P}^n\,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \mathrm{P}\,\mathrm{d}\,\mathrm{Q},$$

moltiplicando i due membri per P; e se si pone per P^n il suo valore, si otterrà

$$n\,Q\,d\,P = P\,d\,Q\,,$$

equazione in cui la quantità P è liberata dall'esponente n.

Si perviene allo stesso risultato, prendendo il logaritmo di ciascun membro dell' equazione proposta, per cui si ha successivamente

$$n\,l\,P = l\,Q, \quad n\,\frac{d\,P}{P} = \frac{d\,Q}{Q}\ (28),$$

e per conseguenza $n\,Q\,d\,P = P\,d\,Q$.

Questa osservazione serve a sviluppare, secondo le potenze di x, la funzione

$$(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4 + \text{ec.})^n,$$

qualunque sia l'esponente n. Si ponga per ciò,

$$(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4 + \text{ec.})^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ec.};$$

passando poscia ai logaritmi, ne risulta

$$n\,l(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4 + \text{ec.}) = l(A + B\,x + Cx^2 + Dx^3 + E\,x^4 + \text{ec.});$$

e quindi differenziando, si ottiene

$$\frac{n(b + 2\,c\,x + 3\,d\,x^2 + 4\,e\,x^3 + \text{ec.})\,d\,x}{a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4 + \text{ec.}} = \frac{(B + 2\,C\,x + 3\,C\,x^2 + 4\,E\,x^3 + \text{ec.})\,d\,x}{A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \text{ec.}};$$

sopprimendo il fattore comune $d\,x$, facendo sparire i denominatori, sviluppando ed ordinando per rapporto alle potenze di x, si ha l' equazione

$$\left.\begin{array}{r} n\,b\,A + 2\,n\,c\,A\,x + 3\,n\,d\,A\,x^2 + 4\,n\,e\,A\,x^3 + \text{ec.} \\ + \ n\,b\,B\,x + 2\,n\,c\,B\,x^2 + 3\,n\,d\,B\,x^3 + \text{ec.} \\ + \ n\,b\,C\,x^2 + 2\,n\,c\,C\,x^3 + \text{ec.} \\ + \ n\,b\,D\,x^3 + \text{ec.} \end{array}\right\} =$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} a\,B+ & 2\,a\,C\,x+ & 3\,a\,D\,x^2+ & 4\,a\,E\,x^3+ & \text{ec.} \\ + & b\,B\,x+ & 2\,b\,C\,x^2+ & 3\,b\,D\,x^3+ & \text{ec.} \\ & + & c\,B\,x^2+ & 2\,c\,C\,x^3+ & \text{ec.} \\ & & + & d\,B\,x^3+ & \text{ec.} \end{array}\right\},$$

che dev' essere identica per qualunque valore abbia x; bisogna dunque che i coefficienti di ciascuna delle potenze di x siano i medesimi nei due membri; perciò risultano le equazioni

$$\begin{aligned} n\,b\,A &= a\,B \\ 2\,n\,c\,A+ n\,b\,B &= 2\,a\,C+ b\,B, \\ 3\,n\,d\,A+ 2\,n\,c\,B+ n\,b\,C &= 3\,a\,D+ 2\,b\,C+ c\,B, \\ &\text{ec.,} \end{aligned}$$

dalle quali si ricaveranno i valori dei coefficenti B, C, D, ec.

Il coefficente A sembra restare indeterminato, ma se ne trova il valore facendo $x=0$ nell' equazione

$$(a+b\,x+\text{ec.})^n = A+B\,x+\text{ec.},$$

che per tale supposizione si riduce ad $a^n = A$.

Sostituendo questa espressione nell' equazioni precedenti, si conclude

$$B = \frac{n}{1}\,a^{n-1}\,b,$$

$$C = n\,a^{n-1}\,c+\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,b^2,$$

$$D = n\,a^{n-1}d+\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,1}\,a^{n-2}bc+\frac{n\,(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}b^3,$$

ec.

d' onde $(a+b\,x+c\,x^2+d\,x^3+\text{ec.})^n =$

$$a^n+\frac{n}{1}\,a^{n-1}\,b\,x+\left\{n\,a^{n-1}\,c+\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,b^2\right\}x^2$$

$$+\left\{n\,a^{n-1}d+\frac{n(n-1)}{1\,.\,1}\,a^{n-2}bc+\frac{n\,(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}b^3\right\}x^3$$

$$+\,\text{ec.}$$

56. Si possono pure fare sparire le quantità trascendenti d'un' equazione; combinandola con i suoi differenziali. Una delle più semplici di queste funzioni è

$$l(a+bx+cx^2+dx^3+\text{ec.});$$

se si rappresenta il suo sviluppo per

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.},$$

e che si prenda il differenziale dell' equazione

$$l(a+bx+cx^2+dx^3+\text{ec.})=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.},$$

si troverà

$$\frac{b+2cx+3dx^2+\text{ec.}}{a+bx+cx^2+dx^3+\text{ec.}}=B+2Cx+3Dx^2+\text{ec.},$$

e si determineranno i coefficenti A, B, C, D, ec. nel modo ordinario.

Sia per esempio

$$\text{sen}\,(a+bx+cx^2+dx^3+\text{ec.})=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ec.};$$

facendo, per brevità

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{ec.}=u,$$
$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}=y,$$

ne risulterà $y=\text{sen}\,u$; e differenziando verrà $dy=du\cos u$. Si potrebbe eliminare cos. u col mezzo del suo valore $\sqrt{(1-\text{sen}\,u^2)}$, che dà $\cos u=\sqrt{(1-y^2)}$, e perciò si avrebbe $dy=du\sqrt{(1-y^2)}$; ma resterebbe ancora da fare sparire il radicale.

Per evitare quest' inconveniente, si differenzierà una seconda volta l'equazione $dy=du\cos u$, rammentandosi che u è una funzione di x, come lo è y; e ne verrà $d^2y=d^2u\cos u-du^2\,\text{sen}\,u$: mettendo per sen u e cos u i loro valori y e $\frac{dy}{dx}$, si avrà

$$d^2y=\frac{dy}{du}d^2u-y\,du^2,\text{ o }du\,d^2y-dy\,d^2u+y\,du^3=0.$$

Ora non si tratta che di sostituire ad y, $\mathrm{d}y$, d^2y, $\mathrm{d}u$, d^2u, $\mathrm{d}u^3$, il loro valore; ma

$$y = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x^3 + \text{ec.},$$

locchè dà

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= (\mathrm{B} + 2\,\mathrm{C}x + 3\,\mathrm{D}x^2 + \text{ec.})\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}^2y &= \qquad (2\,\mathrm{C} + 2.\,3\mathrm{D}x + \text{ec.})\,\mathrm{d}x^2; \end{aligned}$$

e per non impegnarmi in calcoli troppo lunghi ridurrò la funzione proposta a $\mathrm{sen}\,(a + bx + cx^2)$, facendo d, e, ec. $= 0$: in questo caso particolare,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= (b + 2cx)\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}^2u &= 2c\,\mathrm{d}x^2, \\ \mathrm{d}u^3 &= (b^3 + 6b^2cx + 12bc^2x^2 + 8c^3x^3)\,\mathrm{d}x^3. \end{aligned}$$

Per mezzo di questi valori, l' equazione

$$\mathrm{d}u\,\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2u + y\,\mathrm{d}u^3 = 0,$$

diventa divisibile per $\mathrm{d}x^3$; ed ordinandola per rapporto ad x, prende la seguente forma:

$$\left.\begin{array}{rrrr} 2b\mathrm{C} + & 6b\mathrm{D}x + & 12b\mathrm{E}x^2 + & \text{ec.} \\ + & 4c\mathrm{C}x + & 12c\mathrm{D}x^2 + & \text{ec.} \\ + b^3\mathrm{A} + & 6b^2c\mathrm{A}x + & 12bc^2\mathrm{A}x^2 + & \text{ec.} \\ + & b^3\mathrm{B}x + & 6b^2c\mathrm{C}x^2 + & \text{ec.} \\ & + & b^3\mathrm{C}x^2 + & \text{ec.} \\ -2c\mathrm{B} - & 4c\mathrm{C}x - & 6c\mathrm{D}x^2 - & \text{ec.} \end{array}\right\} = 0.$$

Ed eguagliando a zero i coefficenti di ciascuna potenza di x, si otterranno le equazioni, che determinano C, D, E, ec. ma per A e B conviene ricorrere all' equazioni

$$y = \mathrm{sen}\,u \quad \text{e} \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}u\cos u.$$

Quando $x = 0$, vicne

$$u = a, \qquad y = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{d}u = b\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{B}\,\mathrm{d}x;$$

e da questi valori risulta

$$\mathrm{A} = \mathrm{sen}\,a, \qquad \mathrm{B} = b\cos a.$$

57. Il calcolo differenziale, di cui si è usato solo per lo sviluppo delle funzioni, può anche essere utile nella risoluzione delle equazioni algebraiche, nelle quali ci limiteremo semplicemente a mostrare come osservazione del §. 18, conduce alla determinazione delle radici uguali.

Sia $V=0$, una equazione avente un numero n di radici uguali ad a, il suo primo membro V sarà necessariamente della forma

$$V=X(x-a)^n,$$

X contenendo i fattori disuguali; e se si differenzia, cominciando dal fattore $(x-a)^n$, si troverà

$$\frac{dV}{dx}=nX(x-a)^{n-1}+\frac{dX}{dx}(x-a)^n,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=n(n-1)X(x-a)^{n-2}+2n\frac{dX}{dx}(x-a)^{n-1}+\frac{d^2X}{dx^2}(x-a)^n,$$

ec.

ciò che basta per far vedere che il fattore $x-a$ rimarrà comune a tutti i termini dei coefficenti differenziali di V, finchè l'esponente del loro ordine sarà $<n$. Svaniranno questi coefficienti sino all'ordine n esclusivamente, quando si farà $x=a$; e le equazioni

$$V=0,\ \frac{dV}{dx}=0,\ \frac{d^2V}{dx^2}=0,\ \ldots\ \frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}}=0,$$

avranno luogo nello stesso tempo, col mezzo d'un divisore comune: questo divisore, per riguardo alla prima e seconda, sarà $(x-a)^{n-1}$.

Si conoscerà facilmente che l'equazioni $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{d^2V}{dx^2}=0$, ec., sono precisamente quelle che si sono indicate con $A=0$, $B=0$, ec. nel §. 205 degli *Elementi d'Algebra*.

Queste considerazioni si potranno con facilità applicare al caso in cui l'equazione proposta racchiuderà molte specie di radici eguali, che sarà della forma

$$X(x-a)^n(x-b)^p = 0;$$

perchè differenziando il primo membro, seguendo la regola del §. 11, si troverà

$$\left.\begin{array}{l} n X (x-a)^{n-1}(x-b)^p + pX(x-a)^n(x-b)^{p-1} \\ + \dfrac{dX}{dx}(x-a)^n(x-b)^p \end{array}\right\}$$

quantità che svanisce pure quando si fa $x = a$, ovvero $x = b$, e di cui il divisore comune, col primo membro dell'equazione proposta, è evidentemente

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}.$$

Egualmente si opera, qualunque sia il numero dei fattori $(x-a)^n$, $(x-b)^p$, $(x-c)^q$, etc. e si troverà sempre che il *divisore comune alle funzioni* V, $\frac{dV}{dx}$, *contener deve i fattori eguali ciascuno innalzato ad una potenza minore d'unità, che nell'equazione proposta* $V = 0$.

Applicazione del calcolo differenziale alla teorica delle curve.

58. Le considerazioni geometriche provano in modo evidentissimo, che il rapporto degli incrementi d'una funzione e della sua variabile è generalmente suscettibile di limite.

Ogni funzione d'una sola variabile può essere rappresentata dall'ordinata d'una curva di cui questa variabile è l'ascissa (Trig. 86); *ed il rapporto dell'ordinata della curva con la sottotangente corrisponde al coefficente differenziale della funzione.* In fatti, se in una curva qualunque CD, fig. 1, si conduca pei due punti M e M′ una secante MM′ prolungata sino tanto che essa incontri in S l'asse delle ascisse AB, e per il punto M si tiri la tangente MT; si conducano le due ordinate PM, P′M′, e la retta MQ parallela ad AB, i triangoli

simili $M'QM$ ed MPS mostreranno che i rapporti $\frac{M'Q}{MQ}$ e $\frac{PM}{PS}$ sono sempre uguali. Ma se si immagina che il punto M' si avvicini incessantemente al punto M, il punto S si avvicinerà pure al punto T; la retta PS tenderà dunque a diventar uguale alla sottotangente PT: il rapporto $\frac{PM}{PS}$ egualmente si avvicinerà al rapporto $\frac{PM}{PT}$, che avrà per limite, e che sarà per conseguenza ancor quello del rapporto degli incrementi MQ, e $M'Q$, che ricevono simultaneamente l'ascissa AP e l'ordinata PM.

Da ciò ne segue che, allorquando l'espressione del rapporto $\frac{PM}{PT}$ sarà conosciuta, essa darà il coefficente differenziale della funzione corrispondente all'ordinata (7) e che reciprocamente, se questa funzione è conosciuta, il suo coefficente differenziale determinerà la sottotangente PT, poichè designando PM con y, ed il suo coefficente differenziale con p, si avrà $p = \frac{y}{PT}$, onde $PT = \frac{y}{p}$, valore per mezzo del quale, si condurrà la tangente al punto M.

59. Si vede dunque, che per il suo principio fondamentale, il calcolo differenziale risolve direttamente il *problema delle tangenti*, spettante alle curve di cui si ha l'equazione; ed è dalla ricerca della soluzione di questo problema che i geometri sono pervenuti al calcolo differenziale, che si è di poi presentato sotto variatissimi punti di vista: ma qualunque siasi l'origine, che gli si assegna, essa poserà sempre immediatamente sopra un *fatto analitico* anteriore ad ogni ipotesi, siccome la caduta dei gravi verso la superficie della terra è anteriore alle diverse spiegazioni che se ne sono date: e questo fatto è precisamente la proprietà di cui godono tutte le funzioni di ammettere un limite nel rapporto, che i loro incrementi hanno con quelli della variabile da cui dipendono. Questo limite differente, in ogni funzione, ed indipendente sempre dai valori assoluti degli incrementi, caratterizza,

in un modo suo proprio, l' *andamento* della funzione nei diversi stati pei quali può passare. In fatti più gl' incrementi della variabile indipendente sono piccoli, più i valori successivi della funzione sono rinchiusi, finalmente più questa funzione si avvicina ad essere sottomessa alla legge di continuità nei suoi cambiamenti, e più il loro rapporto a quelli della variabile indipendente si approssima ad uguagliare il limite assegnato dal calcolo. Per *la legge di continuità* devesi intendere quella che si osserva nella descrizione delle linee pel movimento, per cui i punti consecutivi d' una stessa linea si succedono senza alcuno intervallo. Il modo di considerare le grandezze nel calcolo, non sembra da prima ammettere questa legge, poichè si suppone sempre un intervallo fra due valori consecutivi della stessa variabile, per la qual cosa togliendolo, per arrivare al limite, si dice esservi continuità.

Parmi ora evidentissimo che la metafisica precedente racchiuda la spiegazione filosofica delle proprietà del calcolo differenziale e del calcolo integrale, sia per rapporto alle ricerche su le curve, sia per rapporto a quelle che riguardano il moto. E la difficoltà che si incontra in sì fatte ricerche, proviene dalla continuità nei cambiamenti delle linee o in quelle delle velocità, la quale però può essere tolta colla considerazione dei limiti, o tutt' altro equivalente, che fornisce il mezzo di stabilire questa continuità nel calcolo (*).

60. Quando si dà all' ascissa dei valori successivi, le ordinate che corrispondono a questi valori, determinano su la curva dei punti che si possono riguardare come i vertici degli angoli d'un poligono inscritto in questa curva.

Se si prende, per esempio, sull' asse delle ascisse i punti P, P′, P″, ec. *fig.* 12, distanti fra loro d'una stessa quantità h, si avrà

$$AP = x, \quad AP' = x + h, \quad AP'' = x + 2h, \text{ etc.};$$

s'innalzino le ordinate corrispondenti PM, P′M′, P″M″ ec.

(*) Coloro che desiderassero un ulteriore sviluppo riguardo a queste considerazioni, potranno consultare la nota A posta alla fine dell' opera.

e si congiungano i punti M, M′, M″, ec., con delle corde, si formerà un poligono M M′ M″ ec., che differirà tanto meno dalla curva proposta, quanto i punti M, M′, M″, ec. s' avvicineranno di più, ma nell' istesso tempo il numero de' suoi lati aumenterà via maggiormente, poichè la distanza P P′ sarà contenuta un numero di volte sempre maggiore in un' ascissa determinata A B. La curva C D sarà evidentemente il limite di tutti questi poligoni, e per conseguenza le proprietà che converranno a questo limite, converranno ancora alla curva proposta (*).

Ciò posto, se si conducono M Q e M′ Q′ parallele all' asse A B, M′Q sarà la differenza delle due ordinate consecutive P M e P′ M′, M″ Q′ quella delle ordinate P′ M′ e P″ M″. Prolungando la retta M M′ sino in N″, si formeranno i triangoli eguali M M′ Q, M′ N″ Q′, che daranno M′ Q = N″ Q′; onde risulterà

$$M''N'' = N''Q' - M''Q' \text{ ovvero } M''N'' = M''Q' - N''Q';$$

e per conseguenza $M''Q' - M'Q = \pm M''N''$ secondo che la curva è concava o convessa verso l' asse delle ascisse: M″ N″ sarà dunque la differenza delle linee M′ Q e M″ Q′.

Il calcolo differenziale dà l'espressione di ciascuna di queste diverse rette; imperocchè si ha successivamente (23)

(*) Il Leibnitz ha sempre veduto il calcolo differenziale sotto un punto di vista quasi simile.

„ Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenus „ adhibitas omnes, deduci posse ex generali quodam meo „ dimetiendorum curvilineorum principio, *quod figura „ curvilinea censenda sit aequipollere polygono infini- „ torum laterum*, unde sequitur, quicquid de tali poly- „ gono demonstrari potest, sive ita, ut nullus habeatur „ ad numerum laterum respectus, sive ita, un tanto ma- „ gis verificetur, quanto major sumitur laterum nume- „ rus, ita, ut error tandem fiat quovis dato minor; id „ de curva posse pronuntiari. (*Acta Eruditorum*, *ann.* 1684, *pag.* 585.).

È evidente che questa metafisica è essa pure chiarissima, e non differisce da quella, che ho presentato qui

$$P\,M = y,$$

$$P'\,M' = y + \frac{dy\,h}{dx\,1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$P''\,M'' = y + \frac{dy\,2h}{dx\,1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{4h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$P'\,M' - P\,M = M'Q = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

$$P''\,M'' - P'\,M' = M''Q' = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{3h^2}{2} + \text{etc.},$$

$$M''\,Q' - M'Q = \pm M''N'' = \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{etc.};$$

per cui ne viene che si cambia h in dx, il valore di $M'Q$ si avvicinerà di più in più al differenziale primo dy, quello di $M''N''$ al differenziale secondo d^2y, a misura che si prenderà dx più piccolo. Considerando un quarto punto del poligono, si troverebbe egualmente la linea corrispondente al differenziale terzo.

61. Le rette PM, $M'Q$, $M''N''$, hanno, per rapporto al calcolo dei limiti, una dipendenza indicata dall' esponente di cui è dotato l' incremento h, esistente nel loro primo termine, e questo esponente è lo stesso che quello che rappresenta l' ordine del differenziale cui esse corrispondono. Difatti si vede che il rapporto di $M'Q$ a PM incessantemente diminuisce e termina con lo sparire, quando $h = 0$, locchè è egualmente del rapporto di $M''N''$ ad $M'Q$; ma che se si paragonasse il primo di questi al quadrato del secondo, sopprimendo da prima il fattore h^2, comune ai due termini del rapporto, avrebbe allora questo rapporto un limite assegnabile, che sarebbe di $\frac{d^2y}{dx^2}$ a $\frac{dy^2}{dx^2}$ (*).

---

sopra se non che il *limite* vi è designato come un poligono d'un numero infinito di lati infinitamente piccoli.

(*) Fornisce questo una spiegazione semplicissima dei diversi ordini degli infinitamente piccoli, che il Leibnitz ammetteva. Riguardava il differenziale primo come infinitamente

62. Si vede nello stesso tempo, perciò che precede, che il coefficente differenziale del prim'ordine $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, esprimente il rapporto $\frac{\mathrm{P\,M}}{\mathrm{P\,T}}$, fig. 1, dà la tangente trigonometrica dell'angolo M T P, che fa con l'asse delle ascisse A B, la retta che tocca la curva nel punto M, e determina il particolar andamento della curva presso il punto M; imperciocchè se A B rappresenta la parte positiva dell'asse delle ascisse, l'angolo M T P e la sua tangente saranno positivi, quando cresceranno le ordinate come nella fig. 1, e negativi nel caso contrario.

Così pure può dirsi dell'espressione di M′Q, che è la differenza delle ordinate consecutive PM e P′M′, osservando che è sempre possibile di prendere l'incremento h talmente piccolo che il primo termine $\frac{dy}{dx}h$, oltrepassando la somma di tutti gli altri, determini il segno del risultamento della serie: imperocchè un'espressione della forma

$$\mathrm{A}\,h^{\mathrm{a}} + \mathrm{B}\,h^{\mathrm{b}} + \mathrm{C}\,h^{\mathrm{c}} + \text{ec.},$$

in cui gli esponenti a, b, c, ec., sono tutti positivi e crescenti, può porsi sotto quest'altra

$$h^{\mathrm{a}}\left[\,\mathrm{A} + \mathrm{B}\,h^{\mathrm{b}-\mathrm{a}} + \mathrm{C}\,h^{\mathrm{c}-\mathrm{a}} + \text{ec.}\,\right],$$

facilmente si vede che la parte $\mathrm{B}\,h^{\mathrm{b}-\mathrm{a}} + \mathrm{C}\,h^{\mathrm{b}-\mathrm{a}} + \text{ec.}$

---

piccolo rispetto all'ordinata, il differenziale secondo come infinitamente piccolo riguardo al differenziale primo, e così di seguito. Dietro questo principio, trascurava gli uni per rapporto agli altri; ed è infatti ciò che devesi fare quando passare si vuole ai limiti: poichè rimanere non può nell'espressione del limite del rapporto delle serie su indicate che i termini ove h trovasi al grado meno elevato, e che il differenziale d'un ordine qualunque m, essendo necessariamente della formola $\mathrm{d}^{\mathrm{m}}y = t\,dx^{\mathrm{m}}$ (17) è solamente paragonabile all'espressioni differenziali omogenee, o dello stesso grado, per rapporto all'incremento $\mathrm{d}x$.

del secondo fattore, decrescendo sino a zero, quando h diminuisce fino a scomparire, debbe, prima di giugnere a questo termine, divenire più piccola della quantità A, che è indipendente da h (*). In questo stato di cose, si scorge essere il segno di A che determina quello di tutta l'espressione, la quale sarà dunque positiva se A è positivo, e negativa in caso contrario.

Da ciò ne segue che la funzione y sarà crescente o decrescente, secondo che $\frac{dy}{dx}$ sarà positivo o negativo.

Di più, se si riflette che allorquando l'ordinata è positiva, la differenza $M''Q' - M'Q$, *fig.* 2, è negativa o positiva secondo che la curva è concava o convessa verso l'asse delle ascisse, e che tale circostanza dovrà aver luogo per quanto vicini si suppongano i punti P, P', P'', o per quanto sia più piccolo h; dal che si conchiuderà che il termine $\frac{d^2y}{dx^2}h^2$, pel quale comincia lo sviluppo di $M''Q' - M'Q$, e che può rendersi maggiore di tutti gli altri, aver deve lo stesso segno che la differenza $M''Q' - M'Q$; ora la quantità h^2, essendo essenzialmente positiva, risulta per ciò che precede, che $\frac{d^2y}{dx^2}$ è negativo quando la curva è concava verso l'asse delle ascisse, e positivo nel caso contrario.

La considerazione delle curve cm poste al di sotto dell'asse delle ascisse mostra che i segni di $\frac{d^2y}{dx^2}$ debbono esser presi in un ordine inverso, quando l'ordinata è negativa, e che per conseguenza *una curva è concava o convessa verso l'asse delle ascisse, secondo che l'ordinata ed il suo coefficiente differenziale del second'ordine hanno contrari segni o eguali.*

63. Ordinariamente si suppone, come cosa evidente, che *un piccolo arco di una curva può esser preso*

(*) *Si troverà alla fine di questo Trattato il modo di assegnare i valori di* h *che adempiano questa condizione nella serie di Taylor.*

per la sua corda, vale a dire che *il rapporto dell' arco e della sua corda ha per limite l'unità*: questa importantissima proposizione, ha non pertanto bisogno di essere dimostrata, e può esserla come segue.

Il triangolo rettangolo M M′ Q, *fig.* 3, dà

$$\mathrm{M\,M'} = \sqrt{[(\mathrm{M\,Q})^2 + (\mathrm{M\ Q})^2]};$$

si ha di più (60)

$$\mathrm{M\,Q} = h, \quad \mathrm{M'\,Q} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\frac{h}{1} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{ec.}$$

Si può mettere questo sviluppo sotto la forma

$$p\,h + \mathrm{P}\,h^2,$$

facendo

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = p\,, \text{ e } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1\,.\,2} + \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}\,x^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.} = \mathrm{P}\,h^2;$$

si otterrà

$$\mathrm{MM'} = \sqrt{[h^2 + (ph + \mathrm{P}\,h^2)^2]} = h\sqrt{[1 + (p + \mathrm{P}\,h)^2]}.$$

Conducendo poscia la tangente M N, si troverà

$$\mathrm{N\,Q} = \mathrm{M\,Q\ tang\ N\,M\,Q} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\,h = p\,h \ (62),$$

$$\mathrm{MN} = \sqrt{(h^2 + p^2 h^2)} = h\sqrt{(1 + p^2)},$$

$$\mathrm{M'N} = \mathrm{N\,Q} - \mathrm{M'Q} = -\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}\frac{h^2}{1.2} - \text{ec.} = -\mathrm{P}\,h^2.$$

e si conchiuderà da ciò

$$\frac{\mathrm{MN} + \mathrm{M'N}}{\mathrm{M\,M'}} = \frac{h\sqrt{(1+p)^2} - \mathrm{P}h^2}{h\sqrt{[1 + (p + \mathrm{P}h)^2]}} = \frac{\sqrt{(1+p^2)} - \mathrm{P}\,h}{\sqrt{[1 + (p + \mathrm{P}h)^2]}},$$

rapporto che ha per limite

$$\frac{\sqrt{(1+p)}}{\sqrt{(1+p^2)}} = 1\,.$$

Ma l'arco M O M′ è sempre compreso fra la corda MM′ e la linea spezzata MN + M′N; dunque con più ragione, il rapporto $\frac{\text{M O M}'}{\text{M M}'}$ ha per limite l'unità.

64. È cosa evidente che l'arco d'una curva sia una funzione dell'ascissa; e per avere il coefficente differenziale di questa funzione, bisogna cercare il limite del rapporto $\frac{\text{M O M}'}{\text{P P}'}$: ora si ha

$$\frac{\text{M O M}'}{\text{P P}'} = \frac{\text{M M}'}{\text{P P}'} \times \frac{\text{M O M}'}{\text{M M}'},$$

Sostituendo il valore del primo rapporto del secondo membro, facendo quindi $h = 0$ per passare al limite, il secondo rapporto diverrà l'unità, e si avrà (8) $\sqrt{(1+p^2)}$; se dunque si nomina z l'arco CM, si otterrà

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}. \quad \text{o} \quad dz = \sqrt{(dx^2+dy^2)}.$$

Il circolo di cui l'equazione è

$$x^2+y^2 = a',$$

dando

$$x\,dx + y\,dy = 0, \quad \text{o} \quad dy = -\frac{x\,dx}{y},$$

si trova.

$$dz = \sqrt{\left(dx^2+\frac{x^2dx^2}{y^2}\right)} = \frac{dx}{y}\sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{a\,dx}{y} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

risultato, che rientra in quello del §. 36, quando si suppone $a = R$.

65. Il differenziale dell'area del *segmento* ACMP *fig.* 4, d'una curva, si ottiene osservando che il rapporto dei rettangoli P P′ Q M e P P′M′N, che hanno l'istessa base, è eguale a $\frac{\text{P}'\text{M}'}{\text{P M}}$, e che il suo limite è per conseguenza

l'unità. Ma il trapezio curvilineo P P′ M′ M, che rappresenta l'incremento che riceve il segmento ACMP quando l'ascissa aumenta di P P′, essendo sempre compreso fra i due rettangoli di cui si è parlato, il suo rapporto, con ciascuno di questi rettangoli ha egualmente per limite l'unità. Ciò posto, è evidente che

$$\frac{\text{P P}' \text{ M}' \text{ M}}{\text{P P}'} = \frac{\text{P P}' \text{ Q M}}{\text{P P}'} \cdot \frac{\text{P P}' \text{ M}' \text{ M}}{\text{P P}' \text{ Q M}} = \text{P M} \cdot \frac{\text{P P}' \text{ M}' \text{ M}}{\text{P P}' \text{ Q M}} .$$

e dietro ciò che si è detto, il limite di quest'ultima espressione è P M × 1 o pure P M. Chiamando dunque s la funzione di x, corrispondente all'area A C M P, il suo coefficente differenziale (8) sarà

$$\frac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, x} = y, \text{ per cui } d\, s = y\, d\, x.$$

Nel circolo

$$\mathrm{d}\, s = \mathrm{d}\, x \sqrt{(a^2 - x^2)};$$

così, quantunque non si possa assegnare l'espressione algebraica del segmento circolare, si perviene a quella del suo differenziale mediante la considerazione dei limiti; e se ne avrebbe lo sviluppo in serie, col mezzo del teorema del §. 22, o con un processo simile a quello del §. 38.

66. Conoscendo per mezzo del coefficente $\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}$, l'angolo M T P, niente vi ha di più facile che di costruire la tangente M T fig. 1; ma ordinariamente si serve della *sottotangente* P T, la quale si calcola, osservando che

$$\frac{\text{P M}}{\text{P T}} = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} \text{ che dà P T} = \frac{\text{P M} \cdot \mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, y} = \frac{y\, \mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, y} \text{ (*)} .$$

Il triangolo P M T, rettangolo in T, dà la *tangente*

$$\text{M T} = \sqrt{(\text{P M}^2 + \text{P T}^2)} = y \sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}\, x^2}{\mathrm{d}\, y^2}\right)} .$$

(*) Si fa qui astrazione dal segno che aver debbe la retta P T, per rapporto all'ascissa A P, come si vedrà in seguito.

La considerazione dei triangoli simili P M T e P M R (*Trig.* 161), dà la *sottonormale*

$$\mathrm{P\,R}=\mathrm{P\,M}\times\frac{\mathrm{P\,M}}{\mathrm{P\,T}}=\frac{y\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Il triangolo P M R, rettangolo in P, dà la *normale*

$$\mathrm{M\,R}=\sqrt{(\mathrm{P\,M}^2+\mathrm{P\,R}^2)}=y\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}.$$

67. Ecco ora alcune applicazioni di queste formole.

L'equazione generale delle linee di secondo grado, essendo

$$y^2=mx+nx^2\ (\textit{Trig.}\ 157),$$

si ha

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m+2nx}{2y}=\frac{m+2nx}{2\sqrt{(mx+nx^2)}};$$

e da ciò si ricava

$$\mathrm{P\,T}=\frac{y\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2(mx+nx^2)}{m+2nx},$$

$$\mathrm{M\,T}=y\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}\right)}=\sqrt{\left\{mx+nx^2+4\left(\frac{mx+nx^2}{m+2nx}\right)^2\right\}},$$

$$\mathrm{P\,R}=\frac{y\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m+2nx}{2},$$

$$\mathrm{M\,R}=y\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}=\sqrt{\left[mx+nx^2+\tfrac{1}{4}(m+2nx)^2\right]}.$$

Nel caso in cui $n=0$, la curva diviene una parabola (*Trig.* 160), ed allora si ha solamente

$$\mathrm{P\,T}=2x,\qquad \mathrm{M\,T}=\sqrt{(mx+4x^2)},$$

$$\mathrm{P\,R}=\frac{m}{2},\qquad \mathrm{M\,R}=\sqrt{(mx+\tfrac{1}{4}m^2)}.$$

Da questi valori si dedurrebbero i risultati e costruzioni indicate nell' *Applicazioni dell' Algebra alla Geometria*; per le linee di secondo grado.

Nella curva rappresentata dall' equazione

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

si troverà

$$PT = \frac{y^3 - axy}{ay - x^2} = \frac{2axy - x^3}{ay - x^2},$$

valore che facilmente si costruirà, allorchè sarà stato assegnato quello di x, e determinato quello di y (*Trig.* 68).

68. Alle volte è più comodo, e più elegante il considerare la tangente e la normale per la loro equazione (*Trig.* 157). Per ottenere quella della prima, cercheremo in generale le relazioni che debbono aver luogo allorchè due linee si toccano. Considerando primieramente queste linee come se avessero due punti M ed M′ *fig.* 1, comuni, è chiaro che le loro equazioni aver debbono gli stessi valori dell'ordinata P M e della differenza M′Q, corrispondenti all'ascissa A P ed al suo accrescimento P P′. Se dunque comprender vogliamo per x, y le coordinate particolari al punto M nella curva proposta, e che si esprima per x', y' quelle dei punti qualunque della linea che la taglia in M ed in M′, si avrà per questi due punti,

$$y' = y, \frac{dy'}{dx'} h + \text{etc.} = \frac{dy}{dx} h + \text{etc.} \qquad (60).$$

La seconda equazione è divisibile per h, ed allorchè si passa al limite, supponendo $h = 0$, essa si riduce a

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx};$$

ma in quest'ipotesi i due punti d'intersecazione si riuniscono in un solo, che diventa il punto di contatto delle linee proposte, poichè non hanno più che questo di comune. Da ciò ne segue che quando due linee si toccano si ha pel solo punto di contatto,

$$y' = y, \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}.$$

Quando si tratta della linea retta di cui l'equazione è della forma

$$y' = \mathrm{A}\,x' + \mathrm{B}\ (\textit{Trig.}\ 87), \text{ che dà } \frac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,x'} = \mathrm{A},$$

le condizioni del contatto di questa retta con la curva proposta, sono

$$y = \mathrm{A}\,x + \mathrm{B}, \qquad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x},$$

donde si conchiude

$$\mathrm{B} = y - x\,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \text{ e } y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\,x' + y - x\,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x},$$

ovvero

$$y' - y = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\,(x' - x).$$

Dietro a quest'equazione, quella della normale, che è perpendicolare alla tangente, e che passa pel punto M, sarà

$$y' - y = -\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}\,(x' - x)\ (\textit{Trig.}\ 90).$$

Facendo in queste equazioni, $y' = 0$ per determinare l'intersecazione della retta coll'asse delle x, si ricava

$$x' - x = -\frac{y\,\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} \text{ e } x' - x = \frac{y\,\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}.$$

Il primo di questi valori, corrispondente ad A T — A P, è quello della sottotangente P T preso negativamente, perchè il punto T è al di qua del punto P; il secondo valore, essendo quello di A R — A P, dà la sottonormale P R positiva, perchè il punto R è al di là del punto P.

69. Riguardo al circolo di cui l'equazione è

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

si trova

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = -\frac{x}{y};$$

l'equazione della sua tangente sarà per conseguenza

$$y'-y=-\frac{x}{y}(x'-x),\ \text{o}\ yy'+xx'=y^2+x^2,$$

o finalmente $yy'+xx'=a^2,$

poichè $y^2+x^2=a^2.$

L'equazione della normale diviene

$$y'-y=\frac{y}{x}(x'-x),$$

e si riduce a

$$y'=\frac{y}{x}x',$$

locchè fa vedere che le normali del circolo passano pel suo centro, e che è qui l'origine delle coordinate (*Trig.* 83); ed è ciò che infatti deve essere, perchè le normali d'un circolo altra cosa non sono che i suoi raggi.

Passiamo alla curva data dall'equazione

$$x^3-3axy+y^3=0;$$

quella della sua tangente sarà

$$y'-y=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}(x'-x),$$

ovvero

$$y^2y'-axy'-y^3+axy=ayx'-x^2x'-axy+x^3$$

Se si mette per y^3 il suo valore, e che si riduca, si otterrà

$$(y^2-ax)y'+(x^2-ay)x'=axy.$$

70. Se si proponesse di condurre per un dato pnnto, preso fuori d'una curva, e di cui α fosse l'ascissa e β l'ordinata, una tangente a questa curva, è evidente che bisognerebbe sostituire α in luogo di x', e β invece di y' nell'equazioue della tangente, che diverrebbe allora

$$\beta - y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\alpha - x),$$

e servirebbe, unitamente all'equazione della curva proposta, a determinare le coordinate x e y del punto di contatto.

Prendo il circolo per primo esempio; l'equazione della sua tangente essendo

$$yy' + xx' = a^2 \text{ (§. preced.)},$$

si avrà

$$\beta y + \alpha x = a^2.$$

Questa equazione combinata con quella del circolo, determinerà le coordinate x e y dei punti di contatto, o ciò che torna lo stesso, questi punti saranno quelli d'incontro del circolo con la retta espressa dall'equazione

$$\beta y + \alpha x = a^2 \text{ (}Trig.\text{ 105)}.$$

Nella curva corrispondente all'equazione

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

il punto di contatto si troverebbe, cercando l'intersecazione di questa curva con la linea di secondo grado risultante dall'equazione

$$\beta(y^2 - ax) + \alpha(x^2 - ay) = axy.$$

71. Per condurre una retta che tocchi una curva data, e che nello stesso tempo sia parallela ad una retta data di posizione, o che faccia, coll'asse delle ascisse, un angolo di cui la tangente sia rappresentata da a, basterà fare $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a$ (*Trig.* 89); combinando questa equazione con quella della curva proposta, si determineranno i valori di x e di y, che appartengono al punto di contatto domandato.

Nel caso in cui la curva proposta fosse la parabola ordinaria, si avrebbe

$$y^2 = mx, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{m}{2y} = a,$$

ciò che darebbe

$$y = \frac{m}{2a} \quad \text{e} \quad x = \frac{m}{4a^2}.$$

72. Da ciò che si è precedentemente detto, si sono supposte le coordinate x ed y fra loro ortogonali; ma è facil cosa il vedere che se facessero un angolo qualunque, il rapporto di M′Q ad MQ avrebbe ancora per limite quello di PM a PT, e l'equazione della tangente non cangierebbe di formola. I triangoli MPT, e MPR non sarebbero più rettangoli, ma dal primo si conoscerebbero i lati MP, PT e l'angolo compreso MPT, e dal secondo il lato MP cogli angoli MPR e PMR, complemento di TMP.

73. Cercando le posizioni che prende la tangente d'una proposta curva, quando il punto di contatto si allontana sempre più dall'origine delle coordinate, si può scoprire se questa curva ha, come l'iperbola, delle rette per assintoti (*Trig.* 163), e determinare la loro posizione.

Difatti si vede che in una curva MX *fig.* 5, la quale ha un assintoto RS, a misura che il punto M si allontana dall'origine, la tangente MT s'avvicina all'assintoto, ed i punti T, e D vanno rispettivamente verso i punti R ed E, in modo che AR ed AE sono limiti che i valori di AT e di AD non possono oltrepassare, nè pure pervenirvi, ma ai quali possono approssimarsi quanto più piacerà. Segue da ciò che per conoscere se una curva ha degli assintoti, conviene osservare se le espressioni di AT e di AD, relative a questa curva, sono suscettibili di limiti; e quando ciò sia, costruendo questi limiti, daranno i due punti R ed E, pei quali si condurrà la retta RS, che sarà l'assintoto domandato.

Le espressioni di AT e di AD si ricavano da quella di PT; la prima, osservando che AT = AP — PT; la seconda mediante i triangoli simili ADT e MPT (*): ma queste egualmente si deducono dall'equazione della tangente (68), facendo successivamente $y' = 0$ e $x' = 0$ (*Trig.* 87). Si troverà

(*) Bisogna osservare che nella figura la retta AT è negativa.

$$AT = x - y\frac{dx}{dy}, \quad AD = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Se una delle quantità A R o A E rimanendo finita, l'altra divenisse infinita, è evidente che l'assintoto sarebbe parallelo all'asse sul quale trovasi quest'ultima.

Affine poi di non ammettere alcuno degli assintoti, che aver deve la curva proposta, bisogna fare successivamente x ed y infiniti, e sostituire nell'espressioni di A T, e di A D ciascuno dei risultati, che l'una e l'altra ipotesi forniscono. E quando i valori di A T e di A D saranno contemporaneamente infiniti, si conchiuderà che la proposta curva non ha assintoti.

Se si riflette che $AD = -AT\frac{dy}{dx}$, si vedrà che le due rette in quistione possono nell'istesso tempo essere nulle, eccettuato il caso in cui $\frac{dy}{dx}$ sia nullo o infinito. E nel caso che queste rette spariscano, l'assintoto passa per l'origine delle coordinate, per cui non si ha che un solo punto di quest'assintoto; onde, per determinare la sua direzione, cercare conviene il limite dell'espressione $\frac{dy}{dx}$, che rappresenta la tangente dell'angolo N T P (62), e si ottiene la tangente dell'angolo S R B.

74. Applicando ciò che precede all'equazione

$$y^2 = mx + nx^2;$$

conduce ad

$$AT = x - \frac{2y^2}{m + 2nx} = \frac{-mx}{m + 2nx},$$

$$AD = y - \frac{mx + 2nx^2}{2y} = \frac{mx}{2\sqrt{(mx + nx^2)}}.$$

I secondi membri di quest'equazione, potendo esser sotto le formole

$$-\frac{m}{\frac{m}{x} + 2n}, \quad \frac{m}{2\sqrt{\left(\frac{m}{x} + n\right)}},$$

i rispettivi loro limiti, nel caso in cui si supponga x infinita, sono

$$-\frac{m}{2n} = \text{A R} \text{ e } \frac{m}{2\sqrt{n}} = \text{A E}.$$

Se n fosse nulla, le espressioni di A T, e di A D diverrebbero infinite nell'istesso tempo che x, e la curva proposta non avrebbe assintoti; e dei quali rimarrà anche priva, quando n sarà negativo, poichè allora la sua equazione non ammetterà per x un valore infinito.

Nella curva rappresentata dall'equazione

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

si ha

$$\text{A T} = \frac{axy}{x^2 - ay}, \qquad \text{A D} = -\frac{axy}{y^2 - ax};$$

e per trovare il limite verso il quale queste espressioni tendono, a seconda che cresce y, converrebbe sostituire in luogo di esse il loro limite, e conoscere per conseguenza il suo valore dato per x; ma si può supplire a questo valore, nel presente esempio, con un artificio analitico semplicissimo. Se si fa $y = tx$, l'equazione proposta diventa divisibile per x^2; se ne ricava $x = \frac{3at}{1+t^3}$; ed è cosa facile il vedere che la supposizione di $t = -1$, renderà x infinita, e darà $y = -x$. Cambiando y in $-x$, nelle espressioni di A T e di A D, poscia prendendo i limiti, si avrà

$$\text{A R} = -a = \text{A E};$$

e conducendo per i punti R ed E *fig.* 6, fissati coi valori precedenti, la retta R E sarà l'assintoto dei rami cercati A Y ed A Z.

Delle curve osculatrici.

75. La tangente d'una curva, essendo il limite di tutte le rette che incontrano questa curva in due punti, si può, per analogia, cercare in generale fra tutte le linee di una data specie, il limite di quelle che tagliano

la curva proposta in un numero dato di punti. Si sa, per esempio, che abbisognano tre punti per determinare un circolo; si può supporre che questi tre punti sieno presi sopra la proposta curva, e quindi cercare a qual circolo in particolare si perverrà quando i tre punti vengano a coincidersi. Questo circolo, che si chiama il *circolo osculatore*, sarà il limite di tutte le altre, come la tangente è quello di tutte le secanti; ma il criterio che gli ho assegnato, quantunque sufficente per determinarlo, non offrendo all'occhio che distinguere lo possa dai circoli semplicemente tangenti, vi sostituirò le seguenti considerazioni (*).

Si è veduto negli *Elementi di Geometria*, che fra un circolo e la sua tangente, non poteva passare alcun'altra retta, ma che vi passavano infiniti circoli. Egualmente fra una curva qualunque e la sua tangente non si può far passare alcun'altra retta, ma bensì vi si possono far passare infiniti circoli di raggi diversi, avendo la stessa tangente che ha la curva, e fra i quali trovar se ne deve uno, che presso al punto di contatto s'avvicini di più alla curva di qualunque altro.

Per esprimere queste considerazioni analiticamente siano x ed y, x' ed y', x'' ed y'' le coordinate di tre curve diverse, avendo un punto comune, che è quanto dire si abbia

$$x = x' = x'', \qquad y = y' = y''.$$

Se si prende primieramente la differenza delle serie

$$y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$y' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\frac{h}{1} + \frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}x'^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3 y'}{\mathrm{d}x'^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

(*) Si può vedere nel *Trattato del Calcolo differenziale e del Calcolo integrale*, in-4°, t. I. §. 229, e t. III, §. 229 a pag. 638, il calcolo fondato su questa riunione d'intersecazioni, che merita d'essere osservato come un *fatto* singolare della teorica dei limiti.

che esprimono le ordinate dei punti corrispondenti all'ascissa $x+h$, nelle prime due curve, si troverà in generale

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\right)\frac{h}{1}+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}x'^2}\right)\frac{h^2}{1.2}$$
$$+\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-\frac{\mathrm{d}^3y'}{\mathrm{d}x'^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ecc.},$$

per l'espressione della distanza N'N, fig. 7, di queste curve secondo le ordinate; e sostituendo in vece di y' ed i suoi coefficenti differenziali, y'' ed i suoi coefficenti differenziali, si avrà l'espressione della distanza N'' N fra la prima curva e la terza. Siano δ' e δ'' queste due distanze; le loro espressioni saranno dunque della formola

$$\delta'=\mathrm{A}'\frac{h}{1}+\mathrm{B}'\frac{h^2}{1.2}+\mathrm{C}'\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ecc.},$$

$$\delta''=\mathrm{A}''\frac{h}{1}+\mathrm{B}''\frac{h^2}{1.2}+\mathrm{C}''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ecc.}$$

Ciò posto, nel confronto delle precedenti serie, si potrà sopprimere il fattore h, comune a tutti i loro termini; ed affinchè $\delta'<\delta''$, vale a dire che la seconda curva s'avvicini più alla prima di quello che faccia la terza, converrà che

$$\mathrm{A}'+\mathrm{B}'\frac{h}{2}+\mathrm{C}'\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}<\mathrm{A}''+\mathrm{B}''\frac{h}{2}+\mathrm{C}''\frac{h^2}{2.3}+\text{etc.}$$

Questa condizione, dovendo aver luogo per quanto h sia piccola, dipenderà dai valori relativi dei primi termini A' ed A'' (62); ma se si facesse $\mathrm{A}'=0$, essa diverrebbe

$$\mathrm{B}'\frac{h}{2}+\mathrm{C}'\frac{h^2}{2.3}+\text{ecc.}<\mathrm{A}''+\mathrm{B}''\frac{h}{1}+\mathrm{C}''\frac{h^2}{2.3}+\text{ecc.}$$

e il primo membro di questo rapporto, scomparendo quando $h=0$, locchè non avviene del secondo, sarebbe necessariamente più piccolo di questo, non tanto per un

valore di h piccolissimo, quanto che A'' non sarebbe nullo; così la seconda curva si avvicinerebbe sempre più alla prima di quello che la terza.

Ma se nell' istesso tempo si avesse $A''=0$, la condizione da adempirsi nella rispettiva situazione assegnata alle tre curve sarebbe

$$B'\frac{h}{2}+C'\frac{h^2}{2.3}+\text{ecc.}<B''\frac{h}{2}+C''\frac{h^2}{2.3}+\text{ecc.};$$

e togliendovi il fattore comune $\frac{h}{2}$, diverrebbe

$$B'+C'\frac{h}{3}+\text{etc.}<B''+C''\frac{h}{3}+\text{ecc.},$$

e se si facesse $B'=0$, avrebbe luogo finchè B'' non sarebbe nullo.

Quest' esame, che si può spignere tant' oltre quanto piacerà, fa vedere che se l'espressione di δ' principia con un termine in cui l' esponente dell' h sorpassi quello, che porta questa lettera nell'espressione δ'', si avrà sempre $\delta'<\delta''$.

Quando è tale la seconda curva, che al punto M si abbiano le n equazioni

$$y'=y,\frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}}=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

gli $n-1$ primi termini dell' espressione di δ' scompariscono, ed allora incomincia sul termine affetto da h^n; se dunque la terza curva non istabilisce l' uguaglianza fra y'',y ed i loro coefficenti differenziali che sino all'ordine $n-2$ inclusivamente, l' espressione di δ'' comincerebbe col termine affetto da h^{n-1}; si avrebbe $\delta'<\delta''$, e per conseguenza la seconda curva si avvicinerebbe alla prima più della terza.

76. Supponiamo ora che la seconda curva sia solamente data di specie, vale a dire che le costanti che entrano nella sua equazione sieno indeterminate; si potrà, col mezzo di queste costanti, soddisfare ad un egual numero di condizioni superiormente dichiarate, e la curva,

in questo modo determinata, sarà tale che niuna curva, che non adempia ad altrettante condizioni, non potrà passare fra essa e la prima curva.

Sia, per primo esempio, l'equazione generale della linea retta

$$y' = \alpha x' + \beta, \text{ che dà } \frac{dy'}{dx'} = \alpha;$$

cambiando x' in x, le equazioni

$$y' = y, \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} \text{ diverranno } y = \alpha x + \beta, \frac{dy}{dx} = \alpha,$$

dalle quali si ricaveranno i valori di α e di β, e si avrà

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

per l'equazione della tangente, come nel §. 68.

Se la curva M N' è il circolo rappresentato dall'equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \gamma^2 \text{ (}Trig.\ 94\text{)},$$

differenziandola due volte di seguito, ne risulterà

$$(x' - \alpha)\,dx' + (y' - \beta)\,dy' = 0,$$
$$dx'^2 + dy'^2 + (y' - \beta)\,d^2y' = 0,$$

e bisognerà che cambiando x' in x, in queste tre equazioni, esse diano

$$y' = y, \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

o ciò che è lo stesso, che sieno soddisfatte dai valori di x, y, dy, d^2y, relativi al punto M nella prima curva; si avrà dunque

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2,$$
$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta)\,d^2y = 0:$$

ma siccome le quantitá derivate dalla curva proposta,

sono determinate, poichè appartengono ad un punto particolare M, così converrà che le quantità α, β, γ ricevano dei valori propri a verificare le suesposte equazioni.

Determinando con le due ultime equazioni i valori di $y-\beta$ e di $x-\alpha$, per sostituirli nella prima, si troverà

$$y-\beta=-\frac{dx^2+dy^2}{d^2y},$$

$$x-\alpha=\frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right),$$

$$\gamma=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}.$$

77. Tutte le curve che hanno un punto comune, e nel quale le ordinate hanno lo stesso coefficente differenziale, partecipano nello stesso punto d'una tangente comune, e per conseguenza si toccano: ma esse possono distinguersi le une dalle altre, come il circolo, che si è determinato, si distingue da tutti quelli che non di tanto s'accostano alla curva proposta. Ed è perciò che i contatti si dividono in ordini, secondo l'ordine dei coefficenti differenziali consecutivi, i quali ricevono, in ciascuna curva, lo stesso valore.

Il massimo contatto, fra quelli che aver possa in generale, una curva data solamente di specie con la curva proposta, chiamasi *osculazione*; e l'ordine suo è precisato dal numero delle costanti meno una, che racchiude l'equazione di questa curva. Così la tangente, che generalmente non può avere che un contatto semplice o di primo ordine, con una curva data, è una osculatrice di prim'ordine. Il circolo, di cui l'equazione contiene tre costanti, può avere o un contatto di primo o di secondo ordine; ma quest'ultimo, essendo il massimo, prende il nome d'osculazione, e distingue il *circolo osculatore* da tutti i circoli semplicemente tangenti.

Una particolarità degna d'essere osservata del circolo osculatore D'M N', si è, che in generale esso taglia la curva proposta nell'istesso tempo che la tocca. Ciò si vede dalla formola dell'espressione di c', di cui il primo

termine trovandosi affetto da h^3, potenza dispari, cangia di segno con h, e mostra per conseguenza che sopra le ascisse $x-h$, e $x+h$, il circolo osculatore è situato in due diversi sensi, relativamente alla proposta curva ed all'asse delle ascisse, che è quanto dire al di sotto della prima da una parte del punto di contatto, e dall'altro al di sopra; ciò che non ha luogo per la tangente ed i circoli semplicemente tangenti, poichè l'espressione di $\grave{c}''$ principia col termine affetto da h^2.

La stessa considerazione mostra che se il contatto di due curve è d'un ordine pari, debb'esservi nell'istesso tempo intersecazione.

78. Il numero dei circoli, semplicemente tangenti, è infinito in ciaschedun punto d'una curva qualunque; imperocchè se si conduce per questo punto una normale, tutti i circoli che hanno il loro centro su questa normale, e che passano per il punto preso su la curva proposta, hanno la stessa tangente che questa curva, e per conseguenza la toccano; ma ciò che fa d'uopo osservare si è che gli uni la toccano al di dentro, gli altri al di fuori o l'abbracciano, e che il circolo osculatore separa i primi dai secondi.

In fatti, se si destinano le coordinate x'', y'' ai circoli semplicemente tangenti, siccome non adempieranno che le condizioni

$$y''=y, \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x''}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

si avrà

$$\grave{c}''=\mathrm{B}''\frac{h^2}{1.2}+\mathrm{C}''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

espressione di cui il segno dipende da quello di

$$\mathrm{B}''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^2y''}{\mathrm{d}x''^2},$$

di modo che il circolo tangente sarà al di sotto della curva, rapporto all'asse delle x, se $\frac{\mathrm{d}^2y''}{\mathrm{d}x''^2}<\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, e al di sopra nel caso contrario; ma fra i valori α, β, γ, che

appartengono all'uno o all'altro di questi casi, si trovano quelli che corrispondono a

$$\frac{d^2 y''}{d x''^2} = \frac{d^2 y}{d x^2},$$

e che, dietro quello che si è veduto (76), danno il circolo osculatore.

Questo modo di determinarlo rende, per così dire, sensibile all'occhio la relazione della sua curvatura con quella della curva data, poichè la curvatura di quest'ultima è evidentemente minore di quella dei circoli che la toccano interiormente, e maggiore di quella dei circoli che la toccano esteriormente. Così si prende, per misurare la curvatura della curva proposta, in un qualunque punto, quella del circolo osculatore in quel punto, ed il suo raggio si chiama per conseguenza *raggio di curvatura*.

79. Si prende, generalmente, per la curvatura dell'arco A E B fig. 8, d'una qualunque curva, l'angolo D C B formato dalle due tangenti condotte alle estremità di quest'arco. Nel circolo, l'angolo D C B è eguale all'angolo A O B, formato dai raggi O A, e O B condotti alle estremità dell'arco, ed egualmente per tutti gli archi di lunghezza eguale, presi nello stesso circolo. Ed è con ciò che si comprende che la curvatura del circolo è uniforme. Posto ciò, se si paragonano due archi di lunghezza eguale di diversi circoli, chiamando a questa lunghezza, r e r' i raggi dei circoli, π il rapporto della circonferenza al diametro, si avranno pel numero dei gradi centesimali dell'arco di cui la lunghezza è a su ciascuno di questi circoli, le espressioni

$$\frac{400^\circ . a}{2\pi r}, \quad \frac{400^\circ . a}{2\pi r'},$$

che sono nel rapporto di $\frac{1}{r}$ a $\frac{1}{r'}$, o $:: r' : r$, cioè in ragione inversa dei raggi dei circoli di cui l'arco proposto fa parte.

Quanto agli archi diversi dello stesso circolo, la loro

curvatura è evidentemente in ragione della loro lunghezza; e se si prendesse per unità di curvatura quella dell'arco di lunghezza eguale al raggio, nel circolo di cui il raggio è 1, la curvatura dell'arco a, nel circolo di cui il raggio $=r$, sarebbe misurato da $\frac{a}{r}$.

80. Le coordinate α e β del centro del circolo osculatore, essendo come il suo raggio γ funzioni di x, variano per ciascun punto della curva proposta; l'insieme di tutte le posizioni di questo centro forma una curva F Z, fig. 9, di cui le coordinate sono α e β, e che gode molte ragguardevoli proprietà, le quali facilmente se si deducono dalle equazioni

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2 \ldots\ldots (1),$$
$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy=0 \ldots\ldots (2),$$
$$dx^2+dy^2+(y-\beta)\,d^2y=0 \ldots\ldots (3),$$

trovate nel n°. 76.

1°. La relazione fra α e β, o l'equazione della curva F Z, si ottiene, eliminando x e y dall'equazione della curva proposta e dalle equazioni (2) e (3), dopo che in queste si sono posti i valori di dy e di d^2y.

2°. La seconda equazione, dando

$$\beta-y=-\frac{dx}{dy}(\alpha-x),$$

è quella della normale condotta dal punto di cui le coordinate sono α e β (68), cioè dal punto O della curva F Z, al punto M della curva proposta D X.

3. Differenziando le prime due equazioni non solamente per rapporto ad x, y, ma anche rapporto alle quantità α, β, e γ, in quanto che queste ultime sono funzioni di x, si avrà

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy-(x-\alpha)\,d\alpha-(y-\beta)\,d\beta=\gamma\,d\gamma,$$
$$dx^2+dy^2+(y-\beta)\,d^2y-d\alpha\,dx-d\beta\,dy=0.$$

Le equazioni (2) e (3) riducono queste a

$$-(x-\alpha)\,d\alpha-(y-\beta)\,d\beta=\gamma\,d\gamma \ldots (4),$$
$$-d\alpha\,dx-d\beta\,dy=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

l'ultima dà $\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy}$, espressione che cambia l'equazione

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x),$$

in

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha),$$

e che mostra per conseguenza che la normale M O è tangente alla curva di cui le coordinate sono α e β (9 e 68) cioè alla curva F Z.

4°. Se si pone quest'ultimo valore di $y - \beta$, nelle equazioni (1) e (4), e che si elimini in seguito $x - \alpha$, si avrà

$$d\gamma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2, \text{ o } \frac{d\gamma}{d\alpha} = \sqrt{\left(1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}$$

ciò che dà il coefficente differenziale di γ, per rapporto alla variabile α; ora quest'espressione è anche quella del coefficente differenziale dell'arco della curva di cui le coordinate sono α e β (64); e risulta da questa identità che il raggio del circolo osculatore varia col variare dell'arco della curva F Z (23), proprietà che merita tutta la considerazione.

In fatti il raggio M O del circolo osculatore dal punto M, essendo tangente alla curva F Z, ha necessariamente la stessa direzione, che prenderebbe un filo ravvolto intorno la convessità di questa curva, allorquando sviluppandolo, si perverrebbe al punto O. Si osserverà che proseguendo lo sviluppamento da O in O′, questo filo si allungherebbe d'una quantità eguale all'arco O O′ della curva F Z; e siccome, per quello che si è detto, la differenza dei raggi O M ed O′ M′ è essa pure eguale allo stesso arco O O′, ne segue che l'estremità M del filo *si* troverebbe ancora in M′ su la curva proposta, che non l'abbandonerebbe nell'effettuato sviluppamento dall'uno di questi punti sino all'altro: si può dunque riguardare la curva D X come generata dallo sviluppamento della curva F Z.

Questo processo ha una grande analogia con la descrizione del circolo, giacchè la curva F Z fa l' ufficio di centro; ma il raggio M O, in vece di essere costante, varia per ogni punto. La curva F Z si chiama la *sviluppata* o *l'evoluta*, la curva D X la *sviluppante* o l' *evolvente*, e il raggio del circolo osculatore raggio della *sviluppata* (*).

Fa d' uopo osservare ancora che la sviluppata è il *limite* delle intersecazioni delle normali della curva proposta, prese consecutivamente due a due, poichè il punto K intersezione dei due raggi M O ed M' O' che sono perpendicolari alla curva D X in M e M', tanto più si avvicina alla curva F Z, quanto i punti M ed M' sono più vicini l' uno all' altro.

Da quest' ultima considerazione si dedurrebbe tutta la precedente teorica.

81. Non mi stenderò molto sull' applicazione delle formole

$$\gamma = \pm \frac{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y},$$

$$x - \alpha = \frac{\mathrm{d}y\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y},$$

$$y - \beta = -\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}^2y},$$

perchè quando si possiede bene il meccanismo del calcolo differenziale, non presenta veruna difficoltà.

Il valore di γ, essendo suscettibile del doppio segno

(*) *Si è con quest' ultima considerazione che l' Huygens ha determinato il circolo osculatore, il quale è stato il primo ad osservarlo; e può condurre ancora alle formole del §. 76; ma questo punto di vista, separando la ricerca del circolo osculatore dalla teorica generale dei contatti delle curve di cui far debbe parte, è troppo limitato per lo stato attuale della scienza.*

$\pm$, si può domandare quale dei due fa d'uopo impiegare; giacchè è ben chiaro che generalmente a ciascun punto della curva, non vi è che un sol raggio di curvatura, e questo raggio non essendo diretto secondo l'ordinata o l'ascissa eccettuato in alcuni punti particolari, non ha propriamente parlando alcun segno per rapporto a queste linee. La determinazione del segno, che ordinariamente lo precede, dipende dalla convenzione, che si è stabilita riguardo all'andamento della curvatura per rapporto alla normale. Se si vuole che il raggio di curvatura sia positivo, per le curve di cui la concavità guarda l'asse delle ascisse, siccome il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ è allora negativo (62), conviene far precedere l'espressione di γ dal segno $-$; ed in questi casi il raggio di curvatura diventerà negativo, se la concavità della curva passa dall'opposto lato, perchè cangia segno con $\frac{d^2y}{dx^2}$. Per conformarsi a questa convenzione, si potrà nelle applicazione supporre

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y},$$

L'equazione generale delle linee di secondo grado

$$y^2 = mx + nx^2,$$

conducendo a

$$dy = \frac{(m+2nx)dx}{2y},\quad dx^2+dy^2 = \frac{[4y^2+(m+2nx)^2]dx^2}{4y^2}$$

$$d^2y = \frac{2nydx^2-(m+2nx)dxdy}{2y^2} = \frac{[4ny^2-(m+2nx)^2]dx^2}{4y^3},$$

ne risulterà

$$\gamma = -\frac{[4y^2+(m+2nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{2[4ny^2-(m+2nx)^2]}.$$

Se si sostituisce il valore di y^2, in questa espressione, si avrà

$$\gamma = \frac{\left[4(mx+nx^2)+(m+2nx)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2m^2}.$$

Tale è l'espressione generale del raggio di curvatura nelle linee di secondo grado; si particolarizzerà, dando ad m e ad n i valori che appartengono a ciascuna specie di queste linee (*Trig.* 157).

Questo risultato si riduce a $^1/_2 m$, quando $x = 0$; la curvatura delle linee proposte è dunque alla sommità loro, la stessa che quella del circolo descritto con un raggio eguale al mezzo parametro (*Trig.* 138).

Avvicinendo il valore di γ a quello che si è trovato al §. 66 per la normale, si vedrà che $\gamma = \frac{(MR)^3}{\frac{1}{4}m^2}$, ovvero che *il raggio di curvatura nelle linee di secondo grado, è eguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semi-parametro.*

Nella parabola in cui $n = 0$, si ha soltanto

$$\gamma = \frac{(m^2+4mx)^{\frac{3}{2}}}{2m^2},$$

Egualmente si applicherebbero le espressioni generali di $x-\alpha$, e di $y-\beta$, e mettendo per y il suo valore, si avrebbero due equazioni fra x, α e β, dalle quali eliminando x, si dedurrebbe l'equazione fra α e β appartenenti alla sviluppata o evoluta. Non effettuerò questo calcolo che per la parabola. In questo caso si ha

$$dy = \frac{m\,dx}{2y}, \quad d^2y = -\frac{m^2\,dx^2}{4y^3},$$

e viene

$$y-\beta = \frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2+m^2}{4y^2}\right) = \frac{4y^3}{m^2}+y,$$

$$x-\alpha = -\frac{m}{2y}\frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2+m^2}{4y^2}\right) = -\frac{4y^2+m^2}{2m};$$

da ciò si conchiude

$$-\beta = \frac{4y^3}{m^2}, \qquad x-\alpha = -\frac{2y^2}{m} - \frac{1}{2}m;$$

ponendo in ciascuna di queste equazioni, in luogo di y il suo valore $m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, verrà

$$-\beta = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}, \quad x-\alpha = -2x - \frac{1}{2}m;$$

prendendo poscia il valore di x dalla seconda di queste equazioni, per sostituirlo nella prima, si otterrà.

$$x = \frac{1}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}m\right), \qquad \beta^2 = \frac{16}{27m}\left(\alpha - \frac{1}{2}m\right)^3:$$

l'ultima di queste equazioni appartiene alla sviluppata della parabola.

Se ora si cangia $\alpha - \frac{1}{2}m$ in α', o che si porti l'origine delle ascisse in D *fig.* 10, si avrà questa semplicissima equazione $\beta^2 = \frac{16\alpha'^3}{27m}$, la quale mostra che la curva DF è una delle parabole di terzo grado (*), composta di due rami DF, e Df, di cui il primo genera, pel suo sviluppamento, il ramo AX della parabola ordinaria X A x, e il secondo produce il ramo A x.

82 Bisogna osservare che per la descrizione della parabola X A x, mediante lo sviluppamento della curva F Df, il filo, il quale si ravvolge attorno all' uno o all' altro dei rami DF e Df, aver debbe al punto D, nel prolungamento della tangente BD, una lunghezza AD eguale al raggio di curvatura al punto A, cioè alla metà del parametro della parabola; qualunque altro punto, fuori di I, preso su questo filo, produrrebbe una curva diversa. Se il punto I cadesse sul punto D, il raggio di

---

(*) *L'equazione* $y^2 = mx$, *essendo generalizzata così* : $y^q = mx^p$, *rappresenta una famiglia di curve di cui la parabola ordinaria non è che un caso particolare ; si dicono egualmente* parabole, *ma si distinguono dall' esponente che forma il loro grado.*

curvatura della curva, allora descritta, sarebbe nullo alla sua origine; e per conseguenza avrebbe a quel punto una curvatura infinita (78).

Si vede pure che la curva F Df è *rettificabile*, vale a dire che assegnare si possono delle linee rette che siano della stessa lunghezza de' suoi archi, giacchè la lunghezza dell' arco D F è eguale alla differenza fra il raggio di curvatura corrispondente M F ed il raggio di curvatura A D, che appartiene all' origine.

Questa osservazione è generale, giacchè si può sempre pervenire all' espressione del raggio di curvatura delle curve algebraiche; le sviluppate di queste curve sono tutte rettificabili.

Ricerca dei punti singolari delle curve, ed esame dei valori particolari che in certi casi prendono i coefficenti differenziali.

83. Chamansi *punti singolari* d' una curva, quelli nei quali offre qualche ragguardevole particolarità Una gran parte di queste particolarità incontrandosi nella *famiglia* delle curve rappresentate dall' equazione semplicissima

$$y = b + c\,(x - a)^m,$$

ci porta a discutere particolarmente quest'equazione, fornendo sempre tutte le considerazioni geometriche delle considerazioni analitiche, onde rischiarare le une con le altre.

La prima quistione che si presenta, è la determinazione dell' andamento dei valori delle ordinate y, per sapere se crescono o decrescano indefinitamente, ovvero se il loro accrescimento si arresta, quando sono pervenuti ad un certo grado di grandezza, e si cambia in decrescimento; oppure, se, dopo esser giunti ad un certo grado di piccolezza, il loro decrescimento si cangia in accrescimento. Il valore il quale ha luogo, nel passaggio dell' accrescimento al decrescimento, essendo maggiore di quelli che lo precedono e che lo seguono immediatamente, si chiama *maximum*; il *minimum* è quello che corrisponde al punto ove il decrescimento si cangia in accrescimento; questo è,

per conseguenza più piccolo dei valori che lo precedono e che lo seguono immediatamente: dico immediatamente, perchè vi sono delle funzioni, nelle quali queste alternative hanno spesse volte luogo.

Si è già veduto nel §. 62, che le coordinate positive d' una curva sono crescenti fintantochè $\frac{dy}{dx}$ ha un valore positivo, e che sono decrescenti nel caso contrario. Segue dunque da ciò che nel *maximum* come nel *minimum*, il coefficente differenziale $\frac{dy}{dx}$ cangia segno: nel primo caso va dal positivo al negativo, e dal negativo al positivo nel secondo.

L' equazione presa ad esempio, dà in generale

$$\frac{dy}{dx} = m\,c\,(x-a)^{m-1},$$

quantità di cui il segno cambia con quello di x, o si mantiene lo stesso, secondo la natura dell' esponente m.

1.° Se questo esponente è un numero pari, $m-1$ sarà dispari, e $(x-a)^{m-1}$ sarà negativo quando $x<a$, positivo quando $x>a$; così vi sarà un *minimum* quando $x=a$, ciò che si può immediatamente verificare su la funzione y. Facendo $x=a-h$, ed $x=a+h$, si otterrà nell' uno e nell'altro caso, $y=b+c\,h^m$, valore $>b$, che corrisponde ad $x=a$.

Quest' ultimo valore dando $\frac{dy}{dx}=0$, quando l' esponente $m-1$ è positivo, mostra che la tangente è parallela all' asse delle ascisse, ciò che rappresenta la *fig.* 11. al punto M di cui l'ascissa AP $=a$, e l'ordinata PM $=b$.

Se la quantità c è negativa, ciò che dà $y=b-c\,(x-a)^m$, rimanendo lo stesso il resto, il punto M, *fig.* 12, è un *maximum*, e la tangente rimane sempre parallela all' asse delle ascisse.

2°. Non vi sarebbe nè *minimum* nel primo caso, nè *maximum* nel secondo, se l' esponente m fosse dispari. Allora $m-1$ essendo pari, $(x-a)^{m-1}$ riterrebbe sempre il segno $+$, qualunque fosse quello di $x-a$,

in fatti, se si fa successivamente $x = a - h$, $x = a + h$, si trova, essendo c positivo,

$$y = b - c h^m, \; y = b + c h^m,$$

valori, l'uno $< b$, e l'altro $> b$, che corrispondono ad $x = a$; per altro si ha ancora $\frac{dy}{dx} = 0$: questo criterio non indica dunque necessariamente un *maximum* ovvero un *minimum*.

Al punto M fig. 13, ove $x = a$, la tangente è ben anche parallela all'asse delle ascisse, ma la curva offre di più un'altra particolarità: la sua concavità cambia di direzione, ciò che vedesi pel cambiamento di segno del coefficente differenziale del second'ordine (62); imperocchè si ha

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)c(x-a)^{m-2};$$

ed $m - 2$ essendo pure un numero dispari, $(x-a)^{m-2}$ passa dal negativo al positivo, quando si va da $x < a$ ad $x > a$. E il punto M della curva chiamasi punto di *flesso contrario* o semplicemente di *flesso*; e quivi la tangente M T taglia la curva, nel tempo istesso che la tocca.

3°. Se m fosse una frazione di numeratore pari, e di denominatore dispari, che si avesse, per esempio, $m = \frac{2}{3}$, ne seguirebbe

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{2}{3} c(x-a)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2c}{3(x-a)^{\frac{1}{3}}},$$

quantità che cangia ancora di segno con $x - a$, ed evvi di fatto *minimum*; imperocchè sia che si cangi x in $a - h$ o in $a + h$, si trova sempre $y = b + c h^{\frac{2}{3}}$ valore $> b$, ma allora il valore $x = a$, in vece di fare sparire $\frac{dy}{dx}$, lo rende infinito. Ciò viene da questo, che una quantità intera non può cambiare di segno che passando per lo zero,

una quantità frazionaria, quando essa cambia di segno pel suo denominatore, debbe nell' intervallo diventar infinita. L' espressione $\frac{\alpha}{x}$, per esempio, dà successivamente.

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{0}, \quad -\frac{\alpha}{\beta},$$

quando vi si fa $x = \beta$, $x = o$, $x = -\beta$.

Considerate su la *fig.* 14, questo *minimum* presenta una forma diversa da quella del *minimum* della *fig.* 11; imperciocchè $\frac{dy}{dx}$ divenendo infinito, la tangente MT è perpendicolare all' asse delle ascisse. Si vede d' altronde dall' espresione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3}\frac{1}{3}c(x-a)^{\frac{1}{3}-2} = -\frac{2c}{9(x-a)^{\frac{1}{3}}},$$

che questo coefficiente differenziale, avendo un valore negativo qualunque siasi, la curva volta sempre la sua concavità verso l' asse dell' ascisse, e prende per conseguenza la forma indicata nella figura.

Il punto M, ove la curva si arresta bruscamente nella riunione delle parti DM ed EM, si chiama di *regresso*, e si distingue bastantemente dal punto M della *fig.* 11; contuttociò debb' esser compreso nella specie del *minimum*; poichè se si formasse una tavola dei valori numerici delle ordinate della curva DE, non si vedrebbe altra cosa in questa tavola, per $x = a$, che un numero più piccolo del precedente e del susseguente, ciò che è un vero *minimum*,

Avvi un *maximum* analogo; l' equazione

$$y = b - c(x-a)^{\frac{2}{3}},$$

ne fornisce un esempio, *fig*, 15.

Così per dare una regola, la quale faccia conoscere, senza eccezione. tutti i punti ove le ordinate d' una curva da crescenti diventano decrescenti, o viceversa, bisogna

prescrivere d' *uguagliare a zero o all' infinito l' espressione di* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, *vi sarà* maximum, *se il vvlore di questo coefficente passa allora dal positivo al negativo*, minimum *nel caso contrario.* Non vi sarebbe nè *maximum* nè *minimum* se non vi fosse cangiamento di segno, ciò che accadrà tutte le volte che il fattore che sparirà, sia nel numeratore, sia nel denominatore, avrà per esponente un numero pari o una frazione di numeratore pari.

84. Conviene bene osservare che ai punti di flesso o di regresso la tangente può trovarsi in una situazione qualunque, relativamente all' asse delle ascisse; poichè per rendere questa situazione tal quale si vorrà, basta cangiare la direzione degli assi delle coordinate, ciò che non cangia la natura e la forma della curva; ma si scopriranno sempre questi punti, cercando quelli, in cui il coefficente differenziale del second' ordine cangia segno, ciò che non può accadere a meno che non sia nullo o infinito. Si determineranno da prima i valori che lo rendono tale; ma non si conoscerà la specie del punto che dalla disamina della curva istessa, nelle vicinanze loro.

Così, mentre che l' equazione

$$y = b + c(x-a)^{\frac{1}{3}}$$

dà, per il valore $x = a$, che rende $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ e $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ infiniti, il punto di regresso M della figura 14, l' equazione

$$y = b + c(x-a)^{\frac{3}{5}}$$

in cui l' esponente di $x-a$ è una frazione di numeratore e di denominatore dispari, dà in parità di circostanze un punto di flesso, perchè

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}(x-a)^{\frac{3}{5}-2} = -\frac{6c}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$$

passa dal positivo al negativo, quando si va da $x < a$ ad $x > a$.

L' ordinata y conservando nell'uno e nell'altro caso un valore reale, fa vedere che la curva si estende da ciascun lato del punto ove $x=a$, ciò che non avrebbe luogo per l' equazione

$$y=b+c(x-a)^{\frac{3}{4}},$$

a causa che $(x-a)^{\frac{3}{4}}$ diventa immaginario, quando $x<a$, e sarà lo stesso in tutti i casi ove l'esponente di $x-a$ sarà una frazione di denominatore pari; ma è d'uopo osservare che allora $(x-a)^{\frac{3}{4}}$, essendo un radicale di grado pari, è suscettibile del segno $\pm$, ciò che fa vedere che il punto M *fig.* 16, è la riunione dei due rami D M ed E M.

Nel regresso indicato *fig.* 14, i due rami si toccano nella loro convessità; ma qualche volta avviene che l' uno abbraccia l' altro, e l'equazione

$$(y-x^2)^2=x^5$$

ne offre un esempio. Se si risolve per rapporto ad y, si trova

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}},$$

e facilmente si concepisce che i due rami di curva, somministrati dai valori di y, si riuniscono al punto A *fig.* 17, corrispondente ad $x=o$, e che non passano nella parte delle ascisse negative, poichè allora il termine $x^{\frac{5}{2}}$ diventa immaginario; ma l' espressioni

$$\frac{dy}{dx}=2x\pm\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2\pm\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

fanno vedere che in A, i due rami hanno per tangente comune l'asse delle x, e che rivolgono ambidue la loro convessità verso quest' asse, poichè, facendo $x=0$, il coefficente differenziale del primo ordine è nullo, e quello del secondo è positivo. Questo punto è chiamato di *regresso della seconda specie*, per distinguerlo dagli altri.

È da osservarsi che il coefficente del terzo ordine

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \pm\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

diventa allora infinito.

Sonovi ancora delle curve in cui i rami che si toccano, estendonsi da ciascuna parte del punto di contatto, sia opponendo la loro convessità *fig.* 18, sia abbracciandosi *fig.* 19 (*).

85. Qnalche volta i rami delle curve, in vece di riunirsi toccandosi, si tagliano, e hanno ognuno la loro tangente particolare: eccone un esempio.

Quando si fa $x = a$, nell' espressione

$$y = b \pm (x-a)\sqrt{(x-c)},$$

i suoi due valori divengano eguali: questo punto è dunque la riunione dei due rami della curva alla quale appartengono; ma quantunque non siavi più che una sola ordinata y, l' espressione di

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(x-c)} \pm \frac{x-a}{2\sqrt{(x-c)}},$$

riducendosi a $\pm\sqrt{(a-c)}$, rimane anche doppio; il valore positivo corrisponde al ramo superiore, ed il valore negativo al ramo inferiore; l' uno e l' altro saranno reali se $a > c$, e genereranno la *fig.* 20.

I punti ove molti rami si riuniscono e s' incontrano si chiamano *punti multipli*; quello che si è indicato è un punto doppio, poichè vi passano due rami.

Se si generalizza l' espressione precedente di y nella formola

$$y = b + (x-a)\sqrt[m]{(x-c)}$$

il punto corrispondente ad $x = a$, non sarà doppio che per i valori pari dell' esponente m, perchè soltanto allora il radicale sarà suscettibile del doppio segno $\pm$.

(*) Vedete il Trattato del Calcolo differenziale e del Calcolo integrale, t. III, pag. 633. n. 202.

Questa osservazione, dovuta al Sig. Poisson, concorre utilmente con ciò che si è veduto nei precedenti articoli, a mostrare che non vi ha che la discussione o l' esame della curva, presso il punto singolare, che ne possa far conoscere la specie.

Conviene ancora osservare che se si facesse passare il fattore $x-a$ sotto il radicale, nella prima espressione di y, si avrebbe,

$$y=b+\sqrt{[(x-a)^2(x-c)]},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(x-a)(x-c)+(x-a)^2}{2\sqrt{[(x-a)^2(x-c)]}},$$

e che la supposizione di $x=a$ darebbe $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, per essere ora il fattore $x-a$ comune ai due termini della frazione. Sopprimendolo, si trova

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(x-c)+x-a}{2\sqrt{(x-c)}}=\sqrt{(x-c)}+\frac{x-a}{2\sqrt{(x-c)}}$$

86. Le curve sono talora accompagnate da punti isolati, che hanno il carattere dei punti multipli; ma si distinguono, perchè ivi i coefficenti differenziali divenendo immaginari, sia fin dal primo ordine, sia più tardi, indicano non esservi punti consecutivi (60).

Sia l' equazione

$$ay^2-x^3+bx^2=0,$$

dalla quale si ricava

$$y=\sqrt{\frac{[x^2(x-b)]}{a}},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(3x-2b)}{2\sqrt{[ax^2(x-b)]}}.$$

Qui il coefficente differenziale del prim ordine diventa $\frac{0}{0}$, quando $x=0$; ma si può avere il vero valore, sopprimendo il fattore x, comune ai due termini della frazione, e si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 2b}{2\sqrt{[a(x-b)]}},$$

facendo ora $x = 0$, ne risulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2b}{2\sqrt{(-ab)}},$$

espressione immaginaria.

Nell' ipotesi stessa l' equazione proposta dà $y = 0$; ma quest' ordinata, che è immaginaria quando x è negativo, ritorna eziandio a zero per $x = b$; così il punto A, *fig.* 21, è assolutamente staccato dalla curva, quantunque compreso nella sua equazione.

I punti di questa specie si chiamano *punti coniugati*; e risultano da ciò che una porzione finita della curva proposta sparisce, per la particolare determinazione di qualche costante della sua equazione. La curva corrispondente all' equazione

$$ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0,$$

che dà

$$y = \pm\sqrt{\frac{[x(x-b)(x+c)]}{a}},$$

fornisce un esempio di questi cangiamenti. Primieramente essa ha il corso rappresentato nella *fig.* 22; la supposizione di $c = 0$, riduce la parte A F al solo punto A *fig.* 21, come si è veduto superiormente: prende la *fig.* 23, quando $b = 0$, senza che c sparisca, e la *fig.* 24 se si fa contemporaneamente $b = 0$, $c = 0$.

La funzione

$$y = (x-a)^m (x-b)^{\frac{2n+1}{2}}$$

in cui m ed n indicano numeri interi positivi: ed ove si suppone $a < b$, dà, quando $x = a$, $m - 1$ coefficenti differenziali nulli; non è che all' ordine m che appare l'immaginario.

Le curve hanno pure talvolta dei punti singolari che non sono visibili: e sono quelli che risultano da un

numero pari di flessi, i quali si riuniscono in un solo (*).

87. Tutte queste specie di punti risultano generalmente dalla riunione di molti rami, prodotta dall' eguaglianza alla quale pervengono diversi valori di y, siccome ha luogo nell' equazione $y = b + c(x-a)^m$, quando l' esponente m è un numero frazionario; ma questa circostanza conduce a dei coefficenti infiniti, poichè nell' espressione

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,c(x-a)^{m-n}$$

l' esponente $m-n$ diventa negativo tosto che $n > m$, e che partendo da questo termine la supposizione di $x = a$ rende infiniti tutti i coefficenti differenziali,

La stessa cosa ha luogo quando la relazione fra y ed x è data da una equazione, in cui trovansi frammischiate le variabili. In fatti, sia $u = o$ una qualunque equazione fra x ed y; si avrà generalmente

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = o, \text{ onde } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}.$$

Ma qnando un valore particolare $x = a$, rende eguali molti valori di y, la funzione u che allora più non contiene che le quantità y ed a, prendendo la formola $U(y-b)^m$, conduce a

$$\frac{du}{dy} = \frac{dU}{dy}(y-b)^m + mU(y-b)^{m-1},$$

valore, che divenendo nullo allorqnando $y = b$, rende infinito quello di $\frac{dy}{dx}$ se $\frac{du}{dx}$ non isparisce, e dà $\frac{o}{o}$ se sparisce, ciocchè avviene quando ha per fattore $x-a$ o $y-b$.

(*) *Vedete* per questi punti e per quelli di *serpeggiamento* da cui derivano, il *Trattato* di Calcolo differenziale e di Calcolo integrale, t. III, pag. 632, n. 190.

Le equazioni

$$(y-b)^2-(x-a)=0, \quad (y-b)^3-(x-a)^2=0,$$

dalle quali si ricava

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y-b)}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2(x-a)}{3(y-b)^2},$$

forniscono degli esempi di tali casi, quando vi si fa $x=a$, da cui risulta $y=b$; ma ponendo per y il suo valore nel secondo caso, e sopprimendo i fattori comuni ai due termini della frazione, si trova $\frac{dy}{dx}$ infinito, quando $x=a$.

88. È chiaro che quando i coefficenti differenziali diventano infiniti, la serie di Taylor formata da questi coefficenti, non può più essere adoperata; ma qui non vi è maggior paradosso di quello che sia in tutte le altre circostanze ove si manifestano delle eccezioni. Quando si risale all' origine di queste formole si riconosce che il carattere il quale annunzia l' eccezione, mostra nel tempo stesso perchè abbia luogo.

In fatti, la serie di Taylor, esprimendo il secondo stato d' una funzione u di cui la variabile x ha ricevuto l' incremento h (23), non debbe generalmente racchiudere che delle potenze intere di h (20), finchè vi si lascia x indeterminata; ma non così è per tutti i particolari valori di questa variabile. Per esempio, quando $x=a+h$, la funzione

$$u=b+c(x-a)^{\frac{p}{q}},$$

diventa

$$u'=b+c(a+h-a)^{\frac{p}{q}}=b+c\,h^{\frac{p}{q}}$$

e la stessa cosa avrà luogo ogni volta che sparirà una quantità sottoposta ad un radicale; poichè se la sostituzione di $x+h$, in vece di x cangia in generale $\sqrt[m]{P}$ in

$$\sqrt[m]{(P+p'h+q\,h^2+\text{ecc.})},$$

e che un valore particolare di x renda $P=0$, la precedente espressione diverrà

$$\sqrt[m]{(ph+qh^2+\text{etc.})}=h^{\frac{1}{m}}(p+qh+\text{etc.})^{\frac{1}{m}},$$

lo sviluppamento della quale non mancherà di contenere delle potenze frazionarie dell'incremento h.

Questo cambiamento di formola è la conseguenza necessaria della momentanea riduzione, che apporta la sparizione del radicale nel numero dei valori della funzione proposta. Nello stato generale della funzione, ciascun valore ha il suo particolare incremento che lo perpetua; così per

$$u=b\pm\sqrt{(x-a)},$$

il teorema di Taylor dà le due serie

$$u'-u=\pm\frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}h\pm\frac{1}{8}(x-a)^{-\frac{3}{2}}h^2\pm\text{ecc.};$$

il segno superiore è corrispondente ad uno dei valori di u, e l'inferiore all'altro. Egualmente quando la funzione dipende da una equazione, ove le variabili sono frammischiate, l'espressione dei coefficenti differenziali contenendo, oltre la variabile indipendente, la funzione stessa, riceve da questa tanti valori quanti ne può comportare (51), ed il numero degli incrementi dati dalla serie di Taylor, rimane eguale a quello dei valori della funzione.

Ma nei casi particolari in cui molti di questi valori si riducono ad un solo, bisogna che a quest'unico valore corrispondano molti diversi incrementi, affinchè la funzione possa ricuperare tutte quelle che generalmente, aver debbe. Ora è ciò che risulta dalle pontenze frazionarie di h, perchè sono suscettibili d'un numero di determinazioni segnate dal grado del radicale di cui trovansi affette. Così, nell'esempio su indicato, quando $x=a$, si ha

$$u=b,\quad u'-u=\pm h^{\frac{1}{2}};$$

le due differenze $+h^{\frac{1}{2}}$, $-h^{\frac{1}{2}}$, applicate al valore unico $u=b$, riproducono i due valori che la funzione u generalmente comporta.

89. Qui ben si vede che il coefficente differenziale della funzione u, essendo espresso da

$$\frac{u'-u}{h}=\pm\frac{h^{\frac{1}{2}}}{h}=\pm\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}},$$

conserva h per denominatore, e diventa infinito quando $h=0$.

L'infinito non sempre così si mostra nel primo coefficente differenziale; ma si trova partendo da un ordine più o meno elevato, allorchè lo sviluppo di $u'-u$ racchiuder debbe delle potenze fratte di h.

Sia in generale

$$u'=u+Ph^{\alpha}+Qh^{\beta}\ldots+Th^{\varepsilon}+\text{etc.}$$

essendo u' funzione del binomio $x+h$, si avrà $\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h}=\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}$ (19), equazione di cui ciascun membro è, pure una funzione di $x+h$. Se si differenziano successivamente per rapporto ad h e per rapporto ad x, ne verrà

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2}=\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}h},\quad \frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}h}=\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}x^2},\text{ onde }\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2}=\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}x^2},$$

e così degli altri, locchè fa vedere che la funzione u' ha, per rapporto ad h, gli stessi coefficenti differenziali che per rapporto ad x: si passa poscia a quelli di u, facendo $h=0$.

Posto ciò, un termine qualunque Th^{ε} ne produce nell'espressione di $\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}h^n}$, uno della formola

$$\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)\ldots(\varepsilon-n+1)\,\mathrm{T}\,h^{\varepsilon-n}.$$

Finchè il numero n sarà minore di ε, l'esponente $\varepsilon-n$ essendo positivo, la supposizione di $h=0$ farà svanire questo termine; e se il numero $\varepsilon=n$, verrà

$$\frac{\mathrm{d}^n u'}{\mathrm{d}\,h^n}=\varepsilon(\varepsilon-1)\ldots\ldots 1\,\mathrm{T};$$

ma se il numero ε è frazionario, l'esponente $\varepsilon-n$ passerà dal positivo al negativo senza svanire. In quest'ultimo caso, che ha luogo tosto che n sorpassa ε, il termine diventa infinito, quando vi si fa $h=0$, e per conseguenza anche il valore di $\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}$ di cui fa parte.

È chiaro che i termini coll'esponente frazionario possono essere preceduti da termini, ove l'esponente è intero, e di cui la funzione semplicissima

$$u=b\,x^m+c\,(x-a)^{\frac{p}{q}}$$

offre un esempio quando $\frac{p}{q}>m$, e che vi si fa $x=a$; i suoi coefficienti differenziali rimangono finiti inclusivamente sino all'ordine m.

90. Conviene ben osservare che in quello che precede, è la quantità contenuta sotto i radicali che si distrugge, imperocchè potrebbero essi pure sparire, se fossero moltiplicati per un fattore che il valore particolare di x rendesse nullo; ma questo caso non fa eccezione alla serie di Taylor, poichè i radicali che sono spariti nei valori della funzione, ricompariscono nei suoi coefficienti differenziali.

Sia per esempio,

$$u=b\pm(x-a)^m\sqrt{(x-c)};$$

la supposizione di $x=a$, che rende eguali i due valori di u, non fa scomparire i coefficenti differenziali che sino all'ordine m esclusivamente, giacchè operando quivi

come nel §. 57, si trova che tutti i coefficenti differenziali degli ordini inferiori contengono il fattore $x-a$ in ciascuno de' loro termini, ma che

$$\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}x^m} = \pm m(m-1)\ldots 1 . V(x-c) + \text{etc.}$$

Questo coefficente differenziale e quelli che lo seguono, avendo ognuno due valori, formano due serie, le quali riproducono i valori della proposta funzione.

91. Le considerazioni geometriche confermano le osservazioni precedenti; si vede che la curva della figura 25, la quale non ha che una sola ordinata al punto corrispondente all'ascissa A C, non può averne due, per riguardo all'ascissa consecutiva A c, se non in quanto che l'ordinata C E riceve due distinti cambiamenti $q\,e$ e $q\,e'$; ma le ordinate $c\,e'$ e $c\,e$ non proveranno più che un sol cambiamento, quando si passerà a un'ascissa diversa da A c.

Accade la stessa cosa al punto multiplo G, in cui due rami della curva si tagliano; la particolare ordinata FG prova essa pure per un solo incremento Ff dell'ascissa due cangiamenti $r\,g$ e $r\,g'$.

92. Non solamente la serie che esprime il cangiamento d'una funzione, debbe in certi casi particolari contenere degli esponenti fratti, ma se ne possono eziandio trovare dei negativi.

Se si avesse, per esempio,

$$u = \frac{\mathrm{P}}{(x-a)^m},$$

P non racchiudendo il fattore $x-a$, il cangiamento di x in $a+h$ darebbe

$$u' = \frac{\mathrm{P} + p\,h + q\,h^2 + \text{etc.}}{h^m},$$

espressione la quale contiene delle potenze negative di h. Ed è ciò che avviene pure alla funzione lx, quando $x=0$; ed in fatti una funzione che diventa infinita,

quaudo $x=a$, non può rientrare nelle quantità finite, quando $x=a+h$, che per un cangiamento infinito.

93. Diversi casi singolari, che abbiamo esaminati, non occupandosi che dei valori particolari della variabile indipendente, non saprebbero annullare le conclusioni ricavate dallo stato generale della funzione; ma evitare si possono nella discussione delle curve, considerando ciò che passa prima e dopo il punto di cui si vuol conoscere la natura; di modo che la ricerca dei punti singolari si riduce a questa regola del pari generale che certa, e che non esige che l'impiego del Calcolo differenziale: *si otterrà generalmente l'indicazione dell' ascissa alla quale corrisponde un punto singolare, cercando in quali casi i coefficenti differenziali, partendo da un ordine qualunque divengono nulli, o infiniti, o* $\frac{0}{0}$ *: si assegnerà la specie del punto,* 1° *esaminando quanti rami passano dalla curva per questo punto, e se si estendono o no da una parte e dall'altra;* 2° *determinando la posizione della loro tangente;* 3° *la direzione che prende la loro concavità* (*)

Esame dei veri valori dell' espressioni che divengono $\frac{0}{0}$.

94. Si è veduto, in quello che precede, che i coefficenti differenziali si presentavano qualche volta sotto la formola $\frac{0}{0}$, che sembra indeterminata; con tutto ciò hanuo sempre un valore determinato, la conoscenza del quale esser può utile, e al quale si perviene coi principii che ora esporrò.

(*) *Abbandonando questo soggetto, farò osservare che l' andamento seguito in quello che precede, per determinare i punti singolari delle curve, era già abbozzato nel primo volume del* Trattato del Calcolo differenziale e Calcolo integrale, 1ª *edizione, e che la regola qui esposta si trova nella prima edizione di questo compendio.*

Supponiamo primieramente questi coefficenti dati immediatamenie dalla variabile indipendente. Quando si trovano sotto formola frazionaria, se il loro numeratore e il loro denominatore hanno un comun fattore, il valore che lo farà sparire darà $\frac{0}{0}$: per altro è chiaro che ogni espressione della formola

$$\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n},$$

che diventa $\frac{0}{0}$ quando $x=a$, ha non pertanto un valor vero, il quale è nullo, finito o infinito, secondo che $m>n$, $m=n$, $m<n$, poichè togliendo i comuni fattori ai suoi due termini, si ottiene

$$\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q}, \text{ o } \frac{P}{Q}, \text{ o } \frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}.$$

Facilissimo sarebbe l'arrivare a questi risultati, se il fattore $x-a$ fosse evidentemente come nell'esempio del §. 85; ma vi si può sempre porre, colla considerazione del cangiamento delle funzioni, come segue.

Sia $\frac{X}{X'}$ una frazione di cui il numeratore ed il denominatore spariscono ambidue quando $x=a$; sostituendo $a+h$ in vece di x, le funzioni X ed X′ si svilupperanno in serie della formola

$$Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\text{etc.}, \qquad A'h^{\alpha'}+B'h^{\beta'}+\text{etc.},$$

ed *ascendenti*, vale a dire, nelle quali gli esponenti α, β, ecc., anderanno crescendo e saranno positivi, poichè queste serie diventar debbono nulle, nell'ipotesi di $h=0$, che corrisponde a quello di $x=a$: in luogo della proposta frazione, si avrà dunque

$$\frac{Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\text{ecc.}}{A'h^{\alpha'}+B'h^{\beta'}+\text{ecc.}},$$

espressione di cui i due termini hanno un fattore comune, in h, e che può presentare i tre casi $\alpha > \alpha'$, $\alpha = \alpha'$, e $\alpha < \alpha'$.

Nei due primi termini, tanto del numeratore quanto del denominatore, essa si riduce

$$\frac{A h^{\alpha-\alpha'} + B h^{\beta-\alpha'} + \text{ec.}}{A' + B' h^{\beta'-\alpha'} + \text{ecc.}};$$

e se vi si fa $h = 0$, per ritornare al valore che prende $\frac{X}{X'}$, quando $x = a$, il risultato è nullo qualunque volta che α sorpassa α', ed è eguale ad $\frac{A}{A'}$, quando $\alpha = \alpha'$. Nel terzo caso al contrario, ove $\alpha < \alpha'$, si ha

$$\frac{A + B h^{\beta-\alpha} + \text{etc.}}{A' h^{\alpha'-\alpha} + B' h^{\beta'-\alpha} + \text{ecc.}},$$

ciò che diventa infinito per la supposizione di $h = 0$.

In tutti i casi, il valor vero non dipende che dal primo termine di ciascuna serie.

Così, per trovare il valor vero delle funzioni che si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, *cercate il primo termine di ciascuna delle serie ascendenti, le quali esprimono lo sviluppo del numeratore e del denominatore, quando* $x = a + h$; *riducete alla sua più semplice espressione la nuova frazione formata da suoi primi termini, e fate poscia* $h = 0$; *il risultato che otterrete sarà il vero valore che prende la proposta frazione quando* $x = a$.

95. Quando il secondo stato delle funzioni X ed X′, corrispondendo a $x = a + h$, può svilupparsi per mezzo del teorema di Taylor, si ottiene

$$\frac{X+\frac{dX}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3X}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ecc.}}{X'+\frac{dX'}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2X'}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3X'}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}}$$

e se il valore $x=a$ fa sparire X ed i suoi coefficenti differenziali sino all'ordine m, X′ ed i suoi coefficenti differenziali sino all'ordine n, la frazione proposta si riduce a

$$\frac{\frac{d^mX}{dx^m}\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}+\text{etc.}}{\frac{d^nX'}{dx^n}\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}+\text{ecc.}},$$

quantità, che sarà nulla se $m>n$, infinita se $m<n$, ed eguale a $\frac{d^mX}{d^mX'}$ se $m=n$.

Veniamo alle applicazioni.

96. 1.° La formola $\frac{x^n-1}{x-1}$ che esprime la somma degli n primi termini della progressione per quoziente $\div 1 : x : x^2 : x^3 :$ ecc., diventa $\frac{0}{0}$ quando $x=1$; per altro questa somma, nella progressione $\div 1 : 1 : 1 : 1 :$ ecc., alla quale si è allora condotti, ha un valore determinato ed eguale ad n, che la regola precedente ci darà essa pure. In fatti, dopo di aver differenziato il numeratore ed il denominatore dell' espressione $\frac{x^n-1}{x-1}$ si trova $\frac{n\,x^{n-1}\,dx}{dx}$, e scrivendo 1 in luogo di x, viene n.

2°. Il vero valore di $\frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$, nel caso in cui $x=c$ non può ottenersi che dopo due differenziazioni, poichè la prima dà $\frac{ax-ac}{bx-bc}$, risultato che

diventa ancora $\frac{0}{0}$; ma differenziandolo si trova $\frac{a}{b}$.

3°. Se si cerca il valore della frazione

$$\frac{x^3 - a\,x^2 - a^2\,x + a^3}{x^2 - a^2},$$

quando $x = a$: si troverà, dopo di aver differenziato una volta il numeratore e il denominatore, che il primo, cioè il numeratore, solamente diventa ancor nullo, quando si mette a in luogo di x; ciò che insegna che il vero valore della funzione proposta è nullo. Sarebbe il contrario per la funzione

$$\frac{a\,x - x^2}{a^4 - 2\,a^3\,x + 2\,a\,x^3 - x^4}.$$

4°. La funzione trascendente $\frac{a^x - b^x}{x}$, la quale diventa $\frac{0}{0}$, quando $x = 0$, essendo egualmente trattata, dà $a^x\,l\,a - b^x\,l\,b$, che si riduce ha $l\,a - l\,b$.

Questo risultato tosto si ottiene, sostituendo alle funzioni a^x e b^x i loro sviluppi (27), imperocchè si trova

$$\frac{a^x - b^x}{x} = l\,a - l\,b + \left[(l\,a)^2 - (l\,b)^2\right]\frac{x}{1\,.\,2} + \text{ecc.},$$

e la supposizione di $x = 0$, riduce il secondo membro di quest'equazione al suo primo termine. Facendo l'operazione, si osserverà esservi un fatore x che sparisce mediante la divisione.

5°. La funzione $\frac{1 - \text{sen}\,x + \cos x}{\text{sen}\,x + \cos x - 1}$ si riduce a $\frac{0}{0}$, quando l'arco $x = 1^q$; ma applicandovi la regola, si trova che il suo valor vero è allora 1.

6°. Indicherò ancora le funzioni

$$\frac{a - x - a\,l\,a + a\,l\,x}{a - \sqrt{(2\,a\,x - x^2)}} \quad \text{e} \quad \frac{x^x - x}{1 - x + l\,x},$$

di cui la prima diventa $\frac{0}{0}$, quando $x=a$, e la seconda quando $x=1$: i veri loro valori sono rispettivamente -1 e -2.

97. Quando i fattori, i quali spariscono nei due termini della frazione proposta, sono inalzati a potenze frazionarie, gli sviluppi non si possono più ottenere per mezzo della serie di Taylor (88), il processo del §. 95 non può aver effetto.

Se si avesse, per esempio, $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, quantunque il vero valore di questa frazione, quando $x=a$, sia $(2a)^{\frac{3}{2}}$, non vi si giungerebbe giammai colla differenziazione: si troverebbe successivamente

$$\frac{3x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+3x^2(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}, \text{ ec.}$$

Il primo di questi risultati diventa anche $\frac{0}{0}$, quando si fa $x=a$; e la stessa supposizione rende infiniti i numeratori ed i denominatori di tutti i seguenti risultati. Se si fanno sparire gli esponenti negativi, passando al denominatore quelli, che si trovano nel numeratore, e viceversa, le nuove espressioni che nasceranno da questo cangiamento, si ridurranno tutte a $\frac{0}{0}$. Ma se si ricorre allo sviluppo immediato, secondo la formola del n° 94, la frazione $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, diventa

$$\frac{(2ah+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}=(2a+h)^{\frac{3}{2}},$$

cangiando x in $a+h$; e facendo $h=0$, si ottiene il vero valore $(2a)^{\frac{3}{2}}$.

Lo stesso processo sembrerà, qualche volta, più comodo della differenziazione, nel caso ove esso possa impiegarsi. Non è, per esempio, che dopo l'aver differenziato quattro volte di seguito il numeratore ed il denominatore della frazione

$$\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{(2ax-a^2)}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{(2ax-x^2)}},$$

che si perviene a trovare il vero valore, nel caso ove $x=a$.

Scrivendo $a+h$ in luogo di x, come la regola lo prescrive, ne viene

$$\frac{2a^3+2a^2h-ah^2+h^3-2a^2\sqrt{(a^2+2ah)}}{-2a^2+h^2+2a\sqrt{(a^2-h^2)}};$$

riducendo in serie le due quantità radicali, si avrà

$$\sqrt{(a^2+2ah)}=a+h-\frac{h^2}{2a}+\frac{h^3}{2a^2}-\frac{5h^4}{8a^3}+\text{ecc.},$$

$$\sqrt{(a^2-h^2)}=a-\frac{h^2}{2a}-\frac{h^4}{8a^3}-\text{ecc.}$$

La sostituzione di queste due serie nella precedente frazione, darà $-5a$ pel vero valore cercato.

98. Una funzione può presentarsi ancora sotto molte forme indeterminate, diverse in apparenza da $\frac{0}{0}$, ma che in fondo ad esso fanno ritorno, e che è bene di conoscere.

1.° Il numeratore ed il denominatore della frazione

$\frac{X}{X'}$ possono nel tempo istesso diventare infiniti; ma questa frazione, essendo scritta così : $\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}}$ si riduce a $\frac{0}{0}$, quando X ed X′ sono infiniti.

2.° Può avvenire che s'incontri un prodotto composto di due fattori, l'uno infinito e l'altro nullo. Sia PQ questo prodotto; se la supposizione di $x = a$ dà $P = 0$; $Q = \frac{b}{0}$, si osserverà che $PQ = \frac{P}{\frac{1}{Q}}$, che $\frac{1}{Q} = 0$; e sotto questa forma PQ diventerà $\frac{0}{0}$.

Prenderemo per esempio la funzione

$$(1 - x) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} \pi x;$$

indicando π la semicirconferenza. Quando vi si fa $x = 1$, il primo fattore diventa nullo, ed il secondo infinito; ma siccome

$$\frac{1}{\text{tang. } \frac{1}{2} \pi x} = \text{cot. } \tfrac{1}{2} \pi x,$$

si ottiene

$$(1 - x) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} \pi x = \frac{1 - x}{\text{cot } \frac{1}{2} \pi x};$$

funzione di cui il vero valore $\frac{2}{\pi}$ si trova col processo del n°. 95

99. Se si domanda il valore che riceve la funzione $\frac{lx}{x^n}$ quando x è infinita, o ciò che è la stessa cosa, il limite di questa funzione, non vi si perverrebbe con alcuno dei procedimenti di cui sin ora abbiamo fatto uso per motivo dell'impossibilità di ridurre lx in serie (29), e bisognerebbe ricorrere alle considerazioni particolari, ed alla natura della funzione proposta lx.

Cambiando x in n, ed a in x, nello sviluppo di a^x (27), si avrà

$$x^n = 1 + \frac{n\,l\,x}{1} + \frac{n^2\,(l\,x)^2}{1\,.\,2} + \frac{n^3\,(l\,x)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ecc.},$$

dal che si conchiuderà

$$\frac{l\,x}{x^n} = \frac{l\,x}{1 + \frac{n\,l\,x}{1} + \frac{n^2\,(l\,x)^2}{1\,.\,2} + \frac{n^3\,(l\,x)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ecc.}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{l\,x} + n + \frac{n^2\,l\,x}{1\,.\,2} + \frac{n^3\,(l\,x)^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ecc.}},$$

quantità, la quale tende a diventar nulla a misura che x aumenta, finchè almeno n non è d' una piccolezza paragonabile a quella di $\frac{1}{l\,x}$ (98).

Ciò conduce al valore che prende il prodotto $x^n\,l\,x$, quando $x = 0$; imperocchè facendo $x = \frac{1}{y}$, si trova $x^n\,l\,x = -\frac{l\,y}{y^n}$; il secondo membro diventando nullo quando y è infinito, ne segue che $x^n\,l\,x = 0$, quando $x = 0$.

100. Il valor vero dei coefficenti differenziali dati da un' equazione, in cui trovansi frammischiate le variabili, si ottiene in un modo analogo, passando all' equazioni differenziali degli ordini superiori. In fatti, se $\frac{d\,u}{d\,x}$ e $\frac{d\,u}{d\,y}$ si annientano nello sviluppo di

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = 0 \qquad (48),$$

si ridurrebbe a

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2\,u}{d\,x^2}\,h^2 + 2\,\frac{d^2\,u}{d\,x\,d\,y}\,h\,k + \frac{d^2\,u}{d\,y^2}\,k^2 \\ + \text{ecc.} \end{array}\right\} = 0;$$

facendovi $k = \pi h$, si avrebbe per determinare il limite di π, o $\frac{dy}{dx}$, l'equazione

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

di secondo grado, per rapporto al coefficente differenziale cercato, e dando per conseguenza due valori in vece di un solo, che fornito avesse l'equazione

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

s'essa non fosse divenuta illusoria (48).

È facil cosa il vedere che se le tre funzioni

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2u}{dy^2},$$

divenissero nulle, s'incorrerebbe in un'equazione di terzo grado, e così di seguito.

Queste elevate equazioni risultano dalle differenziazioni successive della prima, considerandovi dx e dy come costanti: ma non è necessario di fermarsi a questa considerazione, perchè si trovano queste stesse equazioni nella serie delle differenziali fornite dalla proposta $u = 0$; giacchè la prima

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = 0,$$

essendo rappresentata, per abbreviare, da

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

il suo differenziale preso, riguardando y siccome funzione di x, seguendo la regola del n. 50, è della forma

$$P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2 + N\,d^2y = 0,$$

e riducendosi a

$$P\,dx^2 + Q\,dx\,dy + R\,dy^2 = 0,$$

quando $N = o$, diventa del primo ordine; allora essa dà due valori di dy, e per conseguenza di $\frac{dy}{dx}$, in vece di un solo. Se i coefficenti P, Q, R, si annientassero essi pure, converrebbe allora passare all'equazione differenziale del terz'ordine, che diventerebbe del primo. Si vedranno fra poco (108) delle applicazioni di questa osservazione, ed è perciò che tralascio ora di darne.

101. La determinazione dei massimi e dei minimi, essendo una delle più importanti dell'analisi, io credo bene di doverla ripigliare in un modo generale ed indipendente dalla considerazione delle curve.

Si è già veduto (83) che *il criterio essenziale del massimo consiste in ciò che sorpassa nello stesso tempo i valori che lo precedono e quelli che lo seguono immediatamente; il contrario ha luogo pel minimo: questi è minore de' valori che lo precedono e che lo seguono immediatamente.*

Consideriamo sotto la formola più generale lo sviluppo del secondo stato di $u = f(x)$, quando si dà ad x un valore particolare a, e che si cangia poscia a in $a+h$; e quindi facciamo

$$u' = u + P h^{\alpha} + Q h^{\beta} + R h^{\gamma} + \text{ecc.}$$

gli esponenti α, β, γ, ecc., essendo interi, o frazionari, ma disposti secondo l'ordine della loro grandezza, cominciando dal più piccolo. Ciò posto, lo stato di u corrispondendo ad $a-h$, si dedurrà da u', scrivendo $-h$ in vece di h; e disegnandolo con $u_,$ si avrà

$$u_, = u + P(-h)^{\alpha} + Q(-h)^{\beta} + R(-h)^{\gamma} + \text{ecc.},$$

donde ne segue che le differenze fra lo stato primitivo u ed i precedenti e seguenti saranno

$$u_, - u = P(-h)^{\alpha} + Q(-h)^{\beta} + R(-h)^{\gamma} + \text{ecc.},$$

$$u' - u = P h^{\alpha} + Q h^{\beta} + R h^{\gamma} + \text{ecc.};$$

e queste debbono essere tutte due negative, quando u è

un massimo, e positivo nel caso contrario, per quanto sia piccolo l'incremento h: conviene dunque, nell'uno e nell'altro caso, che i primi termini $P(-h)^\alpha$ e Ph^α abbiano un egual segno. Ma il coefficente P essendo una funzione di a, che punto non cambia per bisogno affinchè la potenza α di h non cambi segno, che il suo esponente sia un numero pari, o una frazione, la quale ridotta alla sua più semplice espressione abbia un numeratore pari. Allora si avrà

$$u_{,} - u = P h^\alpha + \text{ecc.},$$
$$u' - u = P h^\alpha + \text{ecc.}:$$

se P ha per se stesso il segno +, queste due differenze saranno positive, ed u sarà un minimo; se P ha il segno —, queste stesse differenze saranno negative, ed u sarà un massimo.

102. Per applicare la precedente osservazione alla determinazione che ci occupa, conviene distinguere il caso in cui l'esponente α è intero, da quello in cui è frazionario, quando si fa $x = a$.

Nel primo caso la serie di Taylor si accorda con lo sviluppo di u', per lo meno sino al termine Ph^α inclusivamente (89), di modo che

$$P = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots \alpha} \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha};$$

e poichè l'esponente α debb'essere un numero pari, quando u è un massimo o un minimo, conviene primieramente che la supposizione $x = a$, faccia sparire il coefficente differenziale $\frac{du}{dx}$, che è d'ordine dispari: a è dunque una delle radici dell'equazione $\frac{du}{dx} = 0$. Bisogna inoltre che questo stesso valore non renda nullo $\frac{d^2 u}{dx^2}$, o che se

ciò avviene, renda pure nulla $\frac{d^3u}{dx^3}$, ma non $\frac{d^4u}{dx^4}$, e in generale, che il primo dei coefficenti differenziali che non fa sparire, sia d'ordine pari; renderà allora u massimo, se qnest'ultimo coefficente è negativo, e minimo nel caso contrario. Ecco pel caso in cui l'esponente α sia intero.

Se è frazionario e > 1, il valore $x = a$, che dà allo sviluppo di u' la forma particolare che allora prende, annientar debbe tutti i coefficenti differenziali degli ordini di cui l'esponente è $< \alpha$ (89): l'equazione $\frac{du}{dx} = 0$, indicherà dunque ancora questo valore $x = a$; ma onde assicurarsi se essa dà un massimo o un minimo, sarà necessario di calcolare a *priori* le differenze $u_, - u$ ed $u' - u$, nella supposizione che h sia piccolissima, affine di sapere se i loro primi termini sieno di segno eguale, e quale sia.

Finalmente, quando $\alpha < 1$, $\frac{du}{dx}$ divenendo infinito, si ha allora l'equazione

$$\frac{1}{\frac{du}{dx}} = 0,$$

la quale indica il valore $x = a$, di cui si discute la proprietà, come si disse pel caso $\alpha > 1$. Perciò si vede ancora, come al §. 83, che *per abbracciare i diversi casi della determinazione dei valori di* x, *che render possono la funzione* u *massima o minima, esaminare conviene tutti quelli che rendono* $\frac{du}{dx}$ *nullo o infinito;* ma penso che il modo più semplice d'istituire quest'esame, sarà spesso quello di cercare se $\frac{du}{dx}$ cangia segno o no (83), all'approssimarsi del valore trovato di x.

L'applicazione delle precedenti regole alla funzione $u = b + c(x - a)^m$, di cui mi sono servito d'esempio

nel n.° 83, è troppo semplice per fermarvisi, per la qual cosa passerò alle susseguenti quistioni.

103. *Dividere una quantità* a *in due parti, di modo che il prodotto della potenza* m *della prima, per la potenza* n *della seconda, sia il maggiore e il massimo di tutti i prodotti simili, che formare si potrebbero.*

Sia x una delle parti di a; l'altra sarà $a - x$, ed il prodotto di cui si cerca il massimo essendo rappresentato da u, si avrà $u = x^m (a - x)^n$, da cui si ricaverà

$$\frac{d\,u}{d\,x} = m\,x^{m-1}(a-x)^n - n\,x^m(a-x)^{n-1}$$
$$= (m\,a - m\,x - n\,x)\,x^{m-1}(a-x)^{n-1};$$

e facendo eguale a zero ciascuno dei fattori di questo risultato, si troverà

$$x = \frac{m\,a}{m+n}, \quad x = 0, \quad x = a.$$

Il primo di questi valori corrisponde ad un massimo; imperocchè, quando si sostituisce nell'espressione generale di $\frac{d^2 u}{d x^2}$, essa dà la quantità negativa

$$-\frac{m^{m-1} n^{n-1} a^{n+m-2}}{(m+n)^{m+n-3}}.$$

Le due altre corrisponderanno a dei minimi, quando m ed n saranno pari, come si può assicurarsene coll'esame dei coefficenti differenziali, o più semplicemente ancora, facendo $x = \pm h$ ed $x = a \pm h$. Si troverà sempre un risultato positivo nell'uno e nell'altro caso, qualunque sia il segno che si dà ad h, ciò che prova che la funzione proposta, dopo essere scemata sino a divenir nulla, non passa al negativo, ma ch'essa comincia a crescere.

104. Considererò ancora la funzione che y indica nell'equazione

$$y^2 - 2\,m\,x\,y + x^2 - a^2 = 0.$$

della quale il differenziale è

$$(y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0 \qquad (49);$$

ne verrà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

da che si ricaverà

$$my - x = 0.$$

Per ottenere il valore di x, converrà combinare questa ultima equazione con la proposta; si avrà con ciò

$$y = \frac{x}{m}, \quad \frac{x^2}{m^2} - x^2 - a^2 = 0,$$

da cui risulta

$$x = \frac{ma}{\sqrt{(1 - m^2)}}, \quad y = \frac{a}{\sqrt{(1 - m^2)}}.$$

Rimane ad esaminare ciò che diventa il coefficente $\frac{d^2y}{dx^2}$. Il differenziale secondo dell'equazione proposta dà la seguente

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

che la supposizione di $\frac{dy}{dx} = 0$ la riduce a

$$(y - mx)\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0,$$

d'onde si ricava

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-m}{x(1 - m^2)},$$

ponendo per y il suo valore dato per x. Bisogna ancora sostituire quello di x; ciò facendo si trova

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\sqrt{(1-m^2)}};$$

questo risultato essendo negativo, mostra che il volore di y determinato superiormente è un *massimo*.

Esempio d' analisi di una curva.

105. Le linee si dividono in diversi ordini secondo il grado della loro equazione. La linea retta forma il primo ordine, poichè rappresenta l equazione generale di primo grado a due indeterminate. Le linee del secondo e del terzo ordine sono quelle di cui le equazioni ascendono al secondo o al terzo grado, e così delle altre. Il Newton considerando che il primo ordine non racchiudeva che la linea retta, e che le curve non cominciavano a mostrarsi che nel secondo, divise queste ultime in generi, e chiamò *curve del primo genere* le linee di second' ordine, *curve del secondo genere* quelle di terzo, e così di seguito.

Le linee di un istesso ordine si suddividono in ispecie, per la considerazione delle principali circostanze del loro corso.

Se fosse possibile di risolvere le equazioni di tutti i gradi, niente sarebbe più facile che seguire il corso della curva che rappresenta un'equazione algebraica qualunque. In fatti, supponiamo che quest'equazione, essendo risoluta per rapporto all'una delle indeterminate ch'essa racchiude, y per esempio, desse le diverse radici X', X'', X''', ecc., le quali saranno necessariamente funzioni di x e di costanti; la quistione si ridurrà particolarmente ad esaminare il corso di ciascuna delle linee generate dall' equazioni

$$y = X', \quad y = X'', \quad y = X''', \text{ ecc.},$$

quando si dà ad x tutti i valori tanto positivi che negativi che ammetter possono le funzioni X', X'', X''', ecc., senza cessare d' essere reali. Saranno queste linee altrettanti rami della curva che l'equazione proposta rappresenta.

L' estensione di ciascun ramo sarà determinato da quella, che è compresa dalle diverse soluzioni di cui è suscettibile l' equazione ch'essa in particolare rappresenta.

Se fra le quantità X', X'', X''', ecc., se ne trovano che diventino infinite, o nelle quali si possa supporre x infinita, ne nasceranno dei rami dei quali il corso sarà infinito, poichè esse potranno allontanarsi indefinitamente dall'uno degli assi, o da tutti e due in una volta.

Nelle curve algebraiche, un ramo non si arresta se non in quanto che l'espressione della sua ordinata diventa immaginaria; ma il corso della curva non è perciò interrotto: ma soltanto avviene allorchè si riuniscono due rami e reciprocamente si seguitano. Se ne convincerà osservando che i valori immaginari di y sono necessariamente in numero pari, e che quelli d'una stessa coppia sono stati reali ed eguali prima di diventar immaginari. In fatti la proposta equazione potendo sempre decomporsi in fattori reali di primo e di secondo grado, se si rappresenta con $y^2 - 2Py + Q = 0$, uno di questi ultimi si vedrà che le sue radici $P \pm \sqrt{(P^2 - Q)}$, non diventano immaginarie se non perchè Q diventa maggiore di P^2, di minore che era prima, e che vi è per conseguenza, un punto ove le funzioni di x che rappresentano le lettere P e Q, sono tali che $P^2 = Q$, ciò che annulla la quantità radicale, e dà per y due valori eguali.

Se molti rami si tagliano in un punto, avverrà che un simil numero di valori di y diverranno eguali.

106. Sia per esempio l'equazione

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0.$$

Questa equazione, risolvibile nello stesso modo di quelle di secondo grado, sia per rapporto ad y, come per rapporto ad x, dà

$$y = \pm\sqrt{[48a^2 \pm \sqrt{(2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4)}]};$$

e se per brevità si fa

$$2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4 = N,$$

si ricaveranno i quattro valori

$$y = \sqrt{(48a^2 + \sqrt{N})}\ (1),\quad y = \sqrt{(48a^2 - \sqrt{N})}\ (2),$$

$$y = -\sqrt{(48a^2 + \sqrt{N})}\ (3),\quad y = -\sqrt{(48a^2 - \sqrt{N})}\ (4),$$

delle quali conviene, per ciò che precede, esaminare l'andamento, onde determinare il corso delle linee che rappresentano.

Si vede tosto che i valori (3) e (4) non differendo da (1) e (2) che pel segno, debbono dare dei rami simili a quelli che risultano da questi ultimi, ma situati soltanto al di sotto dell'asse delle x. Inoltre siccome la funzione N non racchiude che delle potenze pari di x, essa rimane la stessa, quando vi si cangia $+x$ in $-x$; così il lato negativo dell'asse delle x, offrir debbe delle parti della curva simili a quelle, che sono dal lato delle x positive, di modo che questa curva è divisa dagli assi delle coordinate, in quattro parti eguali e simili: ed è ciò che mostra l'equazione stessa, la quale punto non cangia, per qualunque segno si dia ad ognuna delle variabili x ed y.

Esaminiamo dunque separatamente i valori (1) e (2). Questi esser non possono reali che quando il valore di N è positivo; ma questa funzione essendo razionale ed intera, non cambiarebbe segno che passando per zero: le radici dell'equazione

$$x^4 - 100\,a^2\,x^2 + 2304\,a^4 = 0,$$

saranno dunque i limiti dei valori che dar si possono ad x. Si troverà che il primo membro di questa equazione si decompone nei fattori

$$x - 6a,\ x + 6a,\ x - 8a,\ x + 8a:$$

sarà dunque questi negativo quando $x > 6a$ e $< 8a$, perchè allora un solo de' suoi fattori cambierà segno; così la curva non si stende al di sopra della parte dell'asse delle ascisse compresi fra $x = 6a$ ed $x = 8a$; ma da $x = 8a$, N diverrà costantemente positivo.

Si osserverà poscia che ad

$$x = 0, \qquad x = 6a, \qquad x = 8a,$$

corrispondono, nell'equazione (1), i valori

$$y = V(96a^2),\ y = V(48a^2),\ y = V(48a^2).$$

Fornisce dunque quest'equazione 1.° una parte D F *fig.* 26, che si estende dal punto D, preso nell'asse A C al punto F di cui l'ascissa $AE = 6a$; 2°. un'altra parte H X, che partendo dal punto H di cui l'ascissa $AG = 8a$, si stende all'infinito nell'angolo B A C, in cui le x e le y sono positive.

L'equazione (2) non darà, come l'equazione (1), che valori immaginari fra $x = 6a$, ed $x = 8a$, ma ai valori

$$x = 0, \qquad x = 6a, \qquad x = 8a,$$

corrispondono

$$y = 0, \quad y = \sqrt{(48a^2)}, \quad y = \sqrt{(48a^2)},$$

i quali fanno vedere 1° che l'equazione (2) somministra una parte A F, che va a congiugnersi alla parte D F al punto F, in cui le radici (1) e (2) diventano eguali; 2° che dal punto H, su la parte H X fornita dall'equazione (1), parte una porzione H K risultante dall'equazione (2) nella quale y decresce sino a zero, quando $48a^2 = \sqrt{N}$; ciò che indica il punto I situato su l'asse delle x; passato questo punto, $\sqrt{N}$ divenendo $> 48a^2$, il valore (2) è costantemente immaginario, e la porzione H I finisce al suo congiungimento, con la porzione corrispondente, situata al di sotto dell'asse delle x. L'ascissa A I è evidentemente determinata dall'equazione

$$(48a^2)^2 = 2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4,$$

che si riduce a

$$x^4 - 100a^2x^2 = 0,$$

da cui si ricava

$$x = 0 \text{ ed } \quad x = \pm 10a.$$

L'ascissa $x = 0$, essendo quella del puuto A già indicato, sarà $x = 10a$ quella che dà il punto I, ove termina la parte H I.

È necessario l'osservare che i punti A, D ed I, si determinerebbero immediatamente coll'equazione proposta, cercando quelli ove la curva incontra gli assi delle coordinate, e che la discussione precedente, analoga a quella dell'equazione generale di secondo grado (*Trig.* 111),

basta per far conoscere l'estensione delle diverse parti, della curva, ma non fornisce la precisa forma di quella; mentre all' opposto ottiene quello che fa l'applicazione del calcolo differenziale, che in oltre abbrevia molto la ricerca dei limiti dei rami, ed ha il vantaggio di mostrare come questa ricerca potrebbe effettuarsi, quand' anche l'equazione della curva proposta fosse d'un grado molto elevato, purchè ottener si possa l'espressione generale di una delle variabili, col mezzo dell' altra.

107. Comincerò questa nuova discussione dall'esame dei rami infiniti della curva proposta. La considerazione dei valori di y (106) ci ha già fatto conoscere che questa curva ha in ciascun angolo delle coordinate un ramo, pel quale le variabili x ed y sono contemporaneamente infinite; ma senza ricorrere alle citate formole, se si fa $y = t\,x$, l'equazione di questa curva si divide per x^2, e diventa

$$t^4 x^2 - 96\,a^2 t^2 + 100\,a^2 - x^2 = 0,$$

donde si ricava

$$x^2 = \frac{100\,a^2 - 96\,a^2\,t^2}{1 - t^4},$$

risultato che dà $x = \pm$ infinito, quando $t = 1$, ed allora $y = x$.

Si avrà dipoi (73)

$$x - y\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \frac{x^4 - 50\,a^2 x^2 - y^4 + 48\,a^2 y^2}{x^3 - 50\,a^2 x},$$

$$y - x\,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{y^4 - 48\,a^2 y^2 - x^4 + 50\,a^2 x^2}{y^3 - 48\,a^2 y},$$

espressioni che quando vi si pone per y il suo valore si riducono a

$$\frac{50\,a^2 x^2 - 48\,a^2 y^2}{x^3 - 50\,a^2 x}, \qquad \frac{48\,a^2 y^2 - 50\,a^2 x^2}{y^3 - 48\,a^2 y},$$

diminuiscono incessantemente a misura che x ed y aumentano, e delle quali il limite, quando x ed $y = \pm$

infinito, è zero. Da ciò si vede (73) che la curva proposta ha due assintoti, che passano per l'origine delle coordinate. Per compire la loro determinazione, bisogna prendere nella stessa ipotesi il limite dell'espressione di $\frac{dy}{dx}$, e formando tutte le combinazioni dei segni + e — si troverà ± 1, ciò che mostra che gli assintoti fanno, coll'asse delle ascisse, degli angoli $\pm 0^q, 5$: non si sono condotti per non complicare di troppo la figura.

108. Veniamo ora ai punti singolari della curva che noi consideriamo. La sua equazione differenziale prima

$$(y^3 - 48a^2y)\,dy + (50a^2x - x^3)\,dx = 0,$$

dà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 50a^2x}{y^3 - 48a^2y},$$

Facendo il numeratore di questo coefficente differenziale eguale a zero, si trova $x = 0$ ed $x^2 - 50a^2 = 0$. Il primo valore di x sostituito nella proposta equazione, conduce ad $y = 0$, ed $y = \pm\sqrt{96a^2}$; ma siccome facendo $x = 0$ ed $y = 0$, viene $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; bisogna seguo il processo del §. 100, passare all'equazione differenziale seconda, che la precedente supposizione riduce a

$$-48a^2\,dy^2 + 50a^2\,dx^2 = 0, \text{ onde } \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{50}{48}}.$$

Segue da questi valori che al punto A la curva è toccata da due rette, che fanno coll'asse delle ascisse degli angoli di cui le tangenti trigonometriche sono

$$\sqrt{\frac{50}{48}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad -\sqrt{\frac{50}{48}} = -\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}},$$

e che per conseguenza è un punto multiplo (85)

Per completamente conoscere la forma della curva, in questo punto conviene sapere da qual lato i rami presentano la loro concavità, e determinare quindi prima e dopo

il segno di $\frac{d^2y}{dx^2}$, ciò che potrebbe condurre a lunghissime operazioni, stante che le due variabili entrano nell'espressione simultaneamente. Si perviene più prontamente allo scopo, cercando il valore di questo coefficente dato per lo stesso punto, dall' equazione differenziale terza, che la supposizione di $x = 0$, $y = 0$ riduce a $144\, a^2 dy\, d^2y = 0$, e da cui conviene necessariamente conchiudere $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, poichè $\frac{dy}{dx}$ non è nullo. Essendo eguale a zero il secondo coefficente differenziale, passar dobbiamo al terzo, il quale si ricava dal differenziale quarto. Quest' ultimo, facendo x, y e d^2y nulli, si riduce a

$$-4 \cdot 48\, a^2 dy\, d^3y + 6\, dy^4 - 6\, dx^4 = 0;$$

se ne deduce allora

$$-32a^2 \frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy^4}{dx^4} - 1 = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{50}{48}\right)^2 - 1}{\pm 32\, a^2 \sqrt{\frac{50}{48}}},$$

ponendo per $\frac{dy}{dx}$ il suo valore $\pm\sqrt{\frac{50}{48}}$. Con questo mezzo l' espressione della distanza fra la curva e la sua tangente, per l' ascissa $x + h$ (76), diventa

$$\delta'' = \pm \frac{\left(\frac{50}{48}\right)^2 - 1}{32\, a \sqrt{\frac{50}{48}}} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

ciò che mostra che il ramo toccato dalla retta A L, che corrisponde al valor positivo di $\frac{dy}{dx}$, è al di sopra di questa retta dal lato delle ascisse positive, e al di sotto del lato delle ascisse negative, e che il contrario ha luogo pel ramo toccato dalla retta A L'; che per conseguenza ogni ramo della curva subisce al punto A un' inflessione.

109. Ritorno ai valori $y = \pm \sqrt{96\,a^2} = \pm 4\,a\sqrt{6}$. Questi rendono veramente nulla l'espressione di $\frac{dy}{dx}$, poichè non fanno sparire il suo denominatore: così ai punti D e D′, che questi valori indicano, la tangente è parallela all'asse delle ascisse.

Si conoscerà che l'ordinata al punto D è un massimo positivo, sia cercando quello che diventa $\frac{d^2y}{dx^2}$ (102), sia assicurandosi che l'ordinata che la precede, e quella che immediatamente la segue, sono tutte due più piccole. Sono egualmente facili questi due mezzi, e primieramente il secondo, poichè si hanno i valori di y (106), e che si tratta di quelli in cui il secondo radicale ha il segno $+$. Quanto al primo mezzo l'equazione differenziale seconda facendovi $x = 0$, $y = \pm\sqrt{96\,a^2}$ e $\frac{dy}{dx} = 0$, dà per conseguenza il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ col segno — pel punto D, ciò che indica bene un massimo, e col segno $+$ per il punto D′, che conviene considerare come un minimo, poichè ogni aumento, nel senso negativo corrisponde ad un decrescimento per rapporto alle quantità positive.

Rimane ancora ad esaminare le radici dell'equazione

$$x^2 - 50\,a^2 = 0, \quad \text{cioè} \quad x = \pm 5\,a\sqrt{2}.$$

Sostituendoli nell'equazione proposta, immaginarie rendono l'espressioni di y, e per conseguenza non appartengono alla curva.

110. Cerchiamo ora i valori di x e di y che render possono infinito quello di $\frac{dy}{dx}$. Perciò facciamo il suo denominatore eguale a zero, locchè darà l'equazione $y^3 - 48\,a^2y = 0$; onde risulta $y = 0$, e $y = \pm\sqrt{48a^2}$. Il primo valore posto nell'equazione della curva, dà $100\,a^2x^2 - x^4 = 0$; e dalla quale si ricava $x = 0$, $x = \pm 10\,a$. La radice $x = 0$ indica pure il punto multiplo posto all'origine A; le due altre corrispondono ai punti I ed I′, in cui la curva incontra nuovamente l'asse delle ascisse, ma in modo che la sua

tangente è perpendicolare a quest'asse, poichè i valori $x = \pm 10a$ non fanno svanire il numeratore di $\frac{dy}{dx}$.

Si vede che questi sono i punti a partir dai quali i valori di y, ove il secondo radicale ha il segno —, diventano per sempre immaginari. Si potrebbero questi considerare, come massimi, per riguardo alla variabile x ed all'asse AC; e si avvererebbero coll'esame dei valori corrispondenti di $\frac{d^2x}{dy^2}$, ottenuti considerando nelle differenziazioni x come funzione di y, in vece di prendere y per una funzione di x.

I due ultimi valori $y = \pm \sqrt{48a^2} = \pm 4a\sqrt{3}$, conducono ad $x = \pm 6a$, $x = \pm 8a$; l'uno di questi risultati fa conoscere il punto F ed i suoi analoghi, l'altro il punto H ed i suoi analoghi. In tutti questi punti la tangente è perpendicolare all'asse delle ascisse; e la curva non avendo ordinate reali, da $x = 6a$ sino ad $x = 8a$, vale a dire sullo spazio EG, questa circostanza basta per far vedere com'essa debb'essere posta per riguardo alla sua tangente ai punti F ed H.

111. Dopo d'aver determinata la natura di tutti i punti singolari, indicati dal coefficente differenziale di prim'ordine, conviene ancora cercare se i coefficenti degli ordini superiori non ne manifesterebbero altri. Perciò bisogna considerare da prima il coefficente differenziale di secondo ordine; la sua espressione generale è

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2 - 50a^2 - (3y^2 - 48a^2)\frac{dy^2}{dx^2}}{y^3 - 48a^2y};$$

e questa diventa $\frac{0}{0}$, quando x ed y sono nulli; ma non ci fermeremo su questi valori, poichè il punto A al quale appartengono essi è abbastanza discusso (108).

La supposizione di $y^2 - 48a^2 = 0$, che fa sparire il denominatore, non debbe neppure arrestarci, perchè sappiamo che corrisponde ai punti F ed H (110); ma il numeratore essendo eguale a zero, darà un'equazione, la

quale indicar può altri valori che i precedenti. Quest'equazione è

$$3x^2 - 50a^2 - (3y^2 - 48a^2)\frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

conviene togliere $\frac{dy}{dx}$ col mezzo della sua espressione generale, e fare sparire i denominatori: si otterrà

$$(3x^2-50a^2)(y^3-48a^2y)^2-(3y^2-48a^2)(x^3-50a^2x)^2=0,$$

risultato al quale dar si può la forma

$$y^2(y^2-48a^2)^2(3x^2-50a^2)-x^2(x^2-50a^2)^2(3y^2-48a^2)=0.$$

Se ora si osserva che l'equazione proposta si riduce alla stessa

$$(y^2 - 48a^2)^2 - (x^2 - 50a^2)^2 + 196a^4 = 0,$$

e che si prenda in quest'equazione il valore di $(y^2 - 48a^2)^2$, per sostituirlo nella precedente si troverà dopo e riduzioni

$$(x^2 - 50a^2)^2(25y^2 - 24x^2) + 98a^2y^2(3x^2 - 50a^2) = 0.$$

Ricavando da quest'ultima il valore di y^2, per sostituirlo nella proposta, si avrà un'equazione finale la quale non conterrà più che x, e di cui bisognerebbe determinare le radici, come ho fatto negli articoli precedenti; ma siccome l'andamento dei rami della curva indica bastantemente l'esistenza dei punti di flesso K, posti fra i punti H ed I, si potrebbe limitarsi alla risoluzione dell'equazione finale di cui abbiamo parlato, per ottenere il preciso valore delle ascisse dei punti K; ciò che sarebbe ancora difficilissimo, a motivo del grado al quale si eleva questa equazione: così sarà sempre necessario di ricorrere a dei mezzi particolari per determinare i punti singolari delle curve. Lo sviluppo in serie dell'ordinata è uno di questi mezzi; ma non potrebbe ciò far parte di un trattato elementare (*).

(*) *Se ne troveranno i principii nel I.° vol. del Trattato in* 4°.

Delle curve trascendenti.

112 Fin' ora non ho considerato che delle curve algebraiche; farò ora conoscere alcuna delle curve *trascendenti* più rimarchevoli: si chiamano con tal nome quelle di cui l'equazione non può ottenersi in termini algebraici. Mi occuperò dapprima della *Logaritmica* o della curve nella quale le ordinate sono i logaritmi delle ascisse. Il modo più semplice di costruirla per punti, per formarsene un' idea, è di dividere l'asse delle ascisse in parti eguali, per rappresentare i numeri, e di prendere i logaritmi corrispondenti nelle tavole, per portarli su le ordinate.

Secondo questo processo la sua equazione è $y = l\,x$; e quando si prende $x = 1$, viene $y = 0$, ciò che fa vedere che essa incontra l'asse A B al punto E, *fig.* 27, ove l'ascissa A E è eguale all' unità. Il ramo E X, che corrisponde alle ascisse positive maggiori dell' unità, è infinito, poichè i logaritmi di queste ascisse sempre crescono. Nella parte A E, in cui le ascisse sono frazionarie, le ordinate sono negative ed aumentano a misura che queste frazioni diminuiscono, di modo che il ramo E x ha per asintoto la parte negativa A c dell' asse delle ordinate: finalmente la logaritmica non si estende dal lato delle ascisse negative, perchè i loro logaritmi sono immaginari (*).

Facendo fare un quarto di rivoluzione alla figura, le ascisse diventano le ordinate; si ha $x = l\,y$; e se a indica la base del sistema, ne risulta l'equazione $y = a^x$, nella quale i logaritmi sono le ascisse.

Si può allora, con delle medie proporzionali ricavate dal circolo, trovare tanti punti della logaritmica quanti se ne vorranno, poichè alle ascisse

$$x = \frac{1}{2},\quad x = \frac{3}{2},\ \text{ecc.},\quad x = \frac{1}{4},\ \text{ecc.},$$

(*) *Vedete* alla fine di quest' opera la nota B e il I° vol. del Trattato in 4°.

corrispondono le ordinate

$$y = \sqrt{a \cdot 1}, \; y = \frac{a\sqrt{a \cdot 1}}{1}, \text{ ecc.}, \; y = \sqrt{(1 \cdot \sqrt{a \cdot 1})}, \text{ ecc.}$$

Aggiugnendo a questi valori di y quelli che si presentano da loro stessi, quando x è un numero intero, si avrà un processo grafico semplicissimo, per segnare con punti una logaritmica, senza il soccorso delle tavole.

È evidente che le logaritmiche non differiscono che per ragione della base, o del modulo del sistema ch'esse rappresentano.

113. Differenziando l' equazione $y = lx$, viene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{x} \; (28);$$

per ciò si vede che la tangente di questa curva è perpendicolare alla linea delle ascisse, quando $x = 0$, e riesce poi parallela supponendo x infinita (83). L'espressione generale della sottotangente (66) dà $PT = \frac{xy}{M}$; ma togliendo y, s' introduce il logaritmo di x, perlocchè quest'espressione è trascendente. Per altro prendendo la sottotangente OD su l' asse AC, si avrà $OD = \frac{x\,dy}{dx} = M$, risultato rimarchevolissimo, giacchè mostra che la sottotangente OD è costante ed eguale al modulo, per tutti i punti della curva. Si troverebbero nello stesso modo che la tangente, la sottonormale e la normale, prese per rapporto all' asse AB, le quali riescano trascendenti perchè l' ordinata y entra nella loro espressione, ma che diventano algebraiche, quando si considerano riguardo all' asse AC.

Passo alla ricerca del raggio di curvatura. Si ha

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{x^2 + M^2}{x^2}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{x^2},$$

per cui (81) $$y = \frac{(x^2 + M^2)^{\frac{3}{2}}}{Mx},$$

$$y - \beta = \frac{x^2 + M^2}{M}, \qquad x - \alpha = -\frac{x^2 + M^2}{x}.$$

Non mi fermerò punto a considerare la sviluppata, che necessariamente sarebbe trascendente; ma solamente osserverò che ottener si potrebbe immediatamente l'equazione differenziale di questa curva, eliminando mediante i valori di $y - \beta$, $x - \alpha$ e dei loro differenziali x, dx e dy, dall'equazione $dy = M\frac{dx}{a}$

114 La *cicloide*, o la curva descritta da un punto preso su la circonferenza di un circolo, mentre che questo circolo ruota sopra una retta data di posizione, è pure una curva trascendente; la relazione fra le sue ordinate e le sue ascisse, dipende dagli archi del circolo generatore: ecco come si può esprimerla.

L'origine del moto del circolo, essendo arbitraria, la prendo al punto A, *fig.* 28, ove il punto *descrivente* M si trova su la retta A B percorsa dal circolo generatore Q M G. Poichè questo circolo, ruotando, applica successivamente tutti i punti della sua circonferenza su la retta A B, è evidente che quando è pervenuto in una qualunque situazione Q M G, la distanza A Q è eguale all'arco M Q, compreso fra il punto M, che toccava la retta A B in A, ed il punto Q che la tocca nella presente posizione.

Se s'innalza su A B, al punto Q, la perpendicolare QO, che passerà pel centro del circolo generatore, e che si conduca M N parallela ad A B, sarà M N il seno dell'arco M Q, ed N Q sarà il seno verso (Trig. 5).

Ponendo dunque $QO = a$, $AP = x$, $PM = QN = y$, si avrà

$x = AQ - PQ =$ arc. M Q — sen. M Q, $y =$ sen. verso MQ,

$$MN = \text{sen. } MQ = \sqrt{(2ay - y^2)};$$

e facendo uso dell'osservazione impiegata alla pagina 59, si scriverà

$$x = \text{arc. (sen. verso} = y) - \sqrt{(2ay - y^2)},$$

Ed è questa l'equazione primitiva della cicloide (*).

L'arco M Q può egualmente indicarsi col suo coseno O N, ovvero $a-y$: si fa sparire colla differenziazione servendosi della formola del §. 36, nella quale si cambia R in a, u in $a-y$, x in M Q; si trova

$$\text{d. arc M Q} = \frac{a\,dy}{\sqrt{(2a-y^2)}},$$

e poscia si ha

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}} - \frac{a\,dy-y\,dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}},$$

o sia

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}},$$

tal è l'equazione differenziale della cicloide.

Quando il punto di contatto è pervenuto ad una distanza A I eguale alla semicirconferenza del circolo generatore, il punto descrivente si trova in K, e la sua elevazione al di sopra di A B è eguale al diametro di questo circolo: poscia discende sino al punto L, in cui il punto di contatto ha percorso una distanza A L eguale all'intera circonferenza.

(*) Se si volesse costruire la cicloide per punti, sarebbe cosa comoda l'impiegare le tavole trigonometriche; e siccome queste sono calcolate in un circolo di cui il raggio è l'unità, converrebbe prendere in questo circolo un arco t dello stesso numero di gradi che l'arco M Q; si avrebbe

$$\text{arc M Q} = a\,t,\ \text{sen. M Q} = a\ \text{sen.}\ t,\ \text{sen. verso M Q} = a\ \text{sen. verso}\ t,$$

e per conseguenza

$$x = a\,(t - \text{sen.}\,t),\quad y = a\ \text{sen. verso}\ t,$$

o, ciò che è lo stesso

$$x = a\left\{\text{arc}\left(\text{sen. verso} = \frac{y}{a}\right) - \sqrt{(2ay-y^2)}\right\}.$$

La cicloide non è terminata a questo punto, conciossiachè nulla limita la durata del moto del circolo generatore. Si debbe bene osservare nella descrizione delle curve, che le diverse parti risultanti da una stessa costruzione, o da uno stesso moto, appartengono tutte alla stessa curva. Così il circolo Q M G, continuando a ruotare su la retta A B, al di là del punto L, descrive una serie di porzioni simili ad A K L; e bisogna concepirne altrettante su la sinistra del punto A, poichè il circolo non ha potuto pervenire a questo punto che in conseguenza d' un moto incominciato da un tempo infinito. L' equazione della curva conduce a queste osservazioni; imperciocchè nulla impedisce di supporre l' arco M Q aumentato o diminuito di quante si vorranno circonferenze. Si vede d' altronde che y non potrà mai sorpassare $2a$. Da ciò segue che la cicloide, concepita in tutta l' estensione, che aver debbe, esser può tagliata in una infinità di punti da una stessa retta.

115. Non v' è nulla di più facile che di ottenere le espressioni della sottotangente e della tangente, della sottonormale e della normale, in questa curva. Si trova, per le formole generali del §. 66.

$$PT=\frac{y^2}{\sqrt{(2ay-y^2)}}, \qquad MT=\frac{y\sqrt{2ay}}{\sqrt{(2ay-y^2)}},$$

$$PR=\sqrt{(2ay-y^2)}, \qquad MR=\sqrt{2ay}.$$

Si possono costruire questi valori in un modo semplicissimo; poichè è facile l' osservare che P M o y, essendo considerata come l' ascissa Q N nel circolo Q M G, il valore dato qui sopra a P R è precisamente quello dell' ordinata M N di questo circolo, e che per conseguenza la normale si confonde con la corda dell' arco M Q, come si può ancora vedere dall' espressione di M R. Da ciò segue che la tangente M T è il prolungamento della corda M G. Se ora si descrive sopra I K, come diametro, un circolo che sia eguale al circolo generatore, e che si prolunghi la retta M N sino in m, è chiaro che le corde m I ed m K saranno eguali e parallele alle corde M Q ed M G; basterà dunque, per costruire la

tangente e la normale in un dato punto M, di riferire questo punto sul circolo fisso I *m* K, conducendo la retta M *m* parallela ad A B, e di poscia condurre M T parallelamente ad *m* K, ed M Q parallelamente ad *m* I (*).

116. Passo alla ricerca del raggio di curvatura. Differenziando l' equazione

$$\mathrm{d}x = \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(2ay-y^2)}},$$

ottengo, poichè d x è costante,

$$0 = (y\,\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}y^2)\sqrt{(2ay-y^2)} - \frac{y\,\mathrm{d}y\,(a\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}y)}{\sqrt{(2ay-y^2)}},$$

riducendo e dividendo per y, viene

$$0 = (2ay-y^2)\,\mathrm{d}^2y + a\,\mathrm{d}y^2,$$

da cui ricavo

$$\mathrm{d}^2y = -\frac{a\,\mathrm{d}y}{2ay-y^2}:$$

sostituendo questo valore e quello di d y nell' espressione del raggio di curvatura (81), trovo, dopo le necessarie riduzioni,

$$y = 2^{\frac{1}{2}}\,(ay)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ay}.$$

Questo risultato mostra che il raggio di curvatura M M′ è doppio della normale M Q, e che non può per conseguenza divenire maggiore del doppio del diametro del

---

(*) Se si ponesse al punto I l' origine delle ascisse, si avrebbe P I = M n = M m + m n, ma nel parallelogrammo M Q I m, M m = I Q, e di più

I Q = A I — A Q = Q M G — arc Q M = arc G M = arc K m:

dunque M n = arc. K m + sen. K m, ciò che rende facilissima la costruzione della curva, per punti, dando diversi valori a K m.

circolo generatore, diametro che è contemporaneamente l' ordinata e la normale al punto K della cicloide, corrispondente all' ascissa A I (114).

L' espressioni di $x-\alpha$ e di $y-\beta$ danno di poi

$$y-\beta=2y,\quad x-\alpha=-2\sqrt{(2ay-y^2)};$$

da ciò si conchiude

$$y=-\beta,\qquad x=\alpha-2\sqrt{(-2a\beta-\beta^2)}.$$

Sostituendo questi valori nell' equazione primitiva della cicloide, e riducendo, si ottiene

$$\alpha=\text{arc}\,(\text{sen. verso}=-\beta)+\sqrt{(-2a\beta-\beta^2)},$$

risultato, che ha molta analogia con questa equazione. Il radicale $\sqrt{(-2a\beta-\beta^2)}$ diventa simile a $\sqrt{(2ay-y^2)}$, qando si fa $\beta=-2a+\beta'$, ciò che dà di nuovo, in vece dell' ordinata E M', sempre negativa, l' ordinata P' M' riferita ad un asse A' B' posto al di sotto di A B ad una distanza A' I = 2 a. Per questa trasformazione viene

$$\alpha=\text{arc}\,(\text{sen. verso}=2a-\beta')+\sqrt{(2a\beta'-\beta'^2)};$$

poi se si osserva che due archi di cui i seni versi riuniti compongono il diametro, sono supplementi l' uno dell' altro, e che s' indica la semiperiferia con π, si potrà scrivere

$$\alpha=\pi-\text{arc.}\,(\text{sen. verso}=\beta')+\sqrt{(2a\beta'-\beta'^2)}.$$

Prendendo in fine $\alpha=\pi-\alpha'$, cioè, sostituendo all'ascissa A E, l'ascissa A' P' = A I — A E, verrà

$$\alpha'=\text{arc}\,(\text{sen. verso}=\beta')-\sqrt{(2a\beta'-\beta'^2)},$$

equazione d'una cicloide di cui l' origine è al punto A', e descritta su l'asse A' B', col medesimo circolo generatore della proposta, ma nel senso A' B' contrario ad A B.

La stessa conseguenza si può immediatamente ricavare dalla determinazione del raggio di curvatura. Prolungando la retta G Q fino che incontri A' B' in Q', e conducendo Q' M', si formeranno i triangoli G M Q e Q M' Q' fra loro eguali; l' angolo Q M' Q' sarà dunque retto; e se

si descrive sopra Q Q′ come diametro, un circolo, che passerà per il punto M′, e sarà eguale al circolo generatore. Ciò posto, poichè l'arco M′ Q′ è il supplemento di M′ Q, che è eguale ad M Q, si avrà

$$\begin{aligned}\text{arc M}'\,\text{Q}' &= \text{Q M G} - \text{arc M Q}\\ &= \text{A I} - \text{A Q} = \text{Q I} = \text{A}'\,\text{Q}',\end{aligned}$$

ciò che mostra chiaramente che la sviluppata o l'evoluta A′ M′ A, è una cicloide descritta dal circolo Q M′ Q′, ruotando sopra A′ B′, da A′ verso B′.

Segue pure da quello che precede, che la cicloide è rettificabile, poichè è ella stessa la sua sviluppata, e che l'espressione del suo raggio di curvatura è algebraica; e se ne dedurrà questo singolare risultato, che la lunghezza dell'arco A′ M′ A o del suo eguale A M K, che compone la metà del ramo descritto da una intera rivoluzione del circolo generatore, è precisamente lo stesso che quello di A′ K, o il doppio del diametro di questo circolo.

Bisogna ancora osservare che il coefficente differenziale del second'ordine $\frac{d^2 y}{d x^2}$, essendo eguale a $-\frac{a}{y^2}$ è sempre negativo, e che diventa infinito, come pure $\frac{dy}{dx}$, quando $y = 0$, ciò che avviene quando l'arco M Q è nullo o eguale ad un qualunque multiplo della circonferenza; la cicloide è dunque concava verso il suo asse, ed i punti A, L, ecc., ove si toccano i diversi suoi rami, sono punti di regresso della prima specie, nei quali la tangente è perpendicolare all'asse delle ascisse (83).

117 Le spirali compongono pure un ordine di curve trascendenti, rimarchevoli per la loro forma e la loro proprietà. Ecco come si genera quella che immaginò Conone di Siracusa, e di cui Archimede scoprì le principali proprietà.

Mentre che il raggio A O, *fig.* 29, si muove uniformemente attorno al centro A del circolo O G O, un punto mobile, partito da questo centro, percorre nello stesso modo la linea A O, e con una velocità tale, che arriva al punto O, quando questa retta termina la sua rivoluzione. Da ciò segue che per un punto qualunque M

della spirale A M O M′ X, il rapporto di A M ad A N, è lo stesso che quello dell'arco O G N alla circonferenza O G O; ma siccome nulla si oppone affine che il punto *descrivente* continui il suo moto al di là del punto O, sul raggio prolungato, e che questo raggio può egli stesso fare un numero infinito di rivoluzioni, la curva A M O si prolungherà rivolgendosi sempre attorno al punto A, in modo che il rapporto fra la distanza di ciascuno de' suoi punti al punto A ed il raggio del circolo, sia eguale a quello che si trova fra l'arco percorso dal punto O, dal principio del moto e la intera circonferenza. In M′, per esempio, ove il raggio A N ha fatto una rivoluzione più l'arco O G N, si avrà

$$\frac{A\,M'}{A\,N} = \frac{O\,G\,O + O\,G\,N}{O\,G\,O},$$

se dunque si fa

$$O\,G\,N = t, \qquad A\,M = u,$$

e che, prendendo per unità il raggio A N, e si rappresenti con 2π la circonfenza O G O, verrà $u = \frac{t}{2\pi}$,

Le variabili di quest'equazione sono quelle che i geometri chiamano le *coordinate polari*. Il centro A del circolo O G O, si chiama il *polo*; la linea A M, soggetta a passare sempre per questo punto, è il *raggio vettore*, e tien luogo dell'ordinata della curva, mentre l'angolo percorso da A M, e misurato dall'arco O G N, tien luogo dell'ascissa.

In quanto poi ai segni di queste coordinate, conviene dapprima prendere gli archi negativi in senso contrario a quello, che si è scelto per gli archi positivi. Quest'ultimo essendo, per esempio O G O, l'altro dovrà esser O G O. I valori negativi del raggio vettore debbono pure trovarsi per rapporto al polo, dalla parte opposta ai valori positivi. Nella *fig.* 30, ho preso i raggi negativi, non sulla parte che passa per l'estremità dell'arco O G′ N′, ma sopra il suo prolungamento A *n*; ed è in questo modo che cade la secante trigonometrica, quando è negativa (*Trig. nota del* §. 77).

In tal guisa operando su la curva precedente, si trova

un secondo ramo A m x, e che prende la forma disegnata sopra la figura

La spirale che ho considerato, e che porta il nome di *spirale d' Archimede*, non è che un caso particolare delle curve, che rappresenta l' equazione $u = at^n$, indicando n un esponente qualunque.

Fintanto che n è un numero positivo, le spirali date dall' equazione $u = at^n$, prendono la loro origine al punto A; ma quando n è negativo, u che diventa infinito, quando $t = 0$, diminuisce a misura che quest' arco aumenta, ed a ciascuna nuova rivoluzione, il punto descrivente s' avvicina al punto A senza potervi mai pervenire.

Quando $n = -1$, la curva di cui l' equazione è allora $u = a\,t^{-1}$, o $u\,t = a$, e che si chiama *spirale iperbolica*, ha inoltre un asintoto retto. In fatti, se si pone successivamente

$$t = 1, \quad = \frac{1}{2}, \quad = \frac{1}{3}, \quad = \frac{1}{4} \text{ ecc.},$$

i valori corrispondenti

$$u = a, \quad = 2\,a, \quad = 3\,a, \quad = 4\,a, \text{ etc.},$$

mostrano che la spirale, allontanandosi di più in più dal punto A, s'avvicina nell' istesso tempo ad una retta D E *fig.* 31, condotta parallelamente all' asse A O, ad una distanza A D $= a$; poichè P M perpendicolare sopra A B, avendo per espressione

$$u \operatorname{sen} \mathrm{M\,A\,P} = u \operatorname{sen} t = a\,\frac{\operatorname{sen} t}{t};$$

quando vi si pone per u il suo valore $a\,t^{-1}$, ha per limite a, quando $t = 0$: la spirale iperbolica ha dunque ancora per limite la retta D E.

I valori negativi di t producono un secondo ramo, posto sul prolungamento A B′ del raggio A O, ed avendo per asintoto D E′, prolungamento di D E. Finalmente dando alla costante a il segno —, si ripeterebbe al disotto di B B′ la curva, che ho indicata superiormente

Se in vece della distanza A M, *fig.* 129, si prendesse per u la parte M N del raggio vettore, compresa

fra il punto M e la circonferenza del circolo O G O, l'equazione $u^2 = at$ sarebbe quella della *spirale parabolica* o della curva che si formerebbe, ruotando l'asse d'una parabola attorno al circolo O G O; le ordinate si troverebbero allora perpendicolari alla circonferenza di questo circolo, e caderebbero sopra i suoi raggi.

118. Quando si riferiscono le curve a delle coordinate polari, il cambiamento del raggio vettore A M, *fig.* 32, è la parte Q M′ levata dal raggio vettore seguente, dall'arco di circolo M Q descritto dal punto A come centro, col raggio A M; e l'incremento dell'angolo M A O si misura con un arco di circolo N N′, descritto da un raggio A N eguale all'unità. Si vede, come nel §. 60, che il differenziale primo di A M è il primo dello sviluppo di M′ Q, secondo le potenze di N N′; e quando si passa ai limiti, si considera il piccolo arco M Q come una linea retta (74) ed il triangolo M Q M′ come rettilineo rettangolo, ciò che dà $MM' = \sqrt{(QM^2 + QM'^2)}$. Allora Q M′ essendo du, e N N′ dt, viene $QM = u\,dt$; quindi $MM' = \sqrt{(du^2 + u^2\,dt^2)}$ per il differenziale dell'arco D M.

119. Se si conduce A S parallela alla corda dal piccolo arco del circolo Q M, e che si prolunghi finchè s'incontri in questa retta, la corda dell'arco M M′ della curva D M, si avrà, per la similitudine dei triangoli M′ Q M e M′ A S,

$$\frac{QM'}{QM} = \frac{AM'}{AS},$$

Quando si passa ai limiti, la corda Q M può esser presa per l'arco, l'angolo M′ Q M potendo avvicinarsi quanto si vorrà ad un retto, il triangolo M′ A S si avvicina al triangolo M A T rettangolo in A, nel quale A T è il limite di A S, e che dà

$$\frac{du}{u\,dt} = \frac{u}{AT},$$

da cui si conchiude

$$AT = \frac{u^2\,dt}{du}.$$

Si costruirà la tangente, conducendo pel punto A una perpendicolare al raggio vettore A M, e portando su questa retta il valore di A T, dato dalla formola qui sopra esposta.

Se si applica questa formola all'equazione $u = a\,t^n$, si troverà.

$$\mathrm{A\,T} = \frac{u^2}{n\,a\,t^{n-1}} = \frac{a}{n}\,t^{n+1}.$$

Nella spirale d'Archimede, si ha $n = 1$ e $a = \frac{1}{2\pi}$; ne risulta $\mathrm{AT} = \frac{t^2}{2\pi}$, *fig.* 29. Si vede da quest'espressione che quando $t = 2\pi$, o dopo una rivoluzione del punto descrivente, la sottotangente è eguale alla circonferenza O G O rettificata. Dopo m rivoluzioni, $t = 2m\pi$, $\mathrm{A\,T} = 2m^2\pi$, m volte la circonferenza di cui il raggio è m. A O, e che abbraccia queste m rivoluzioni: questo è ciò che Archimede ha trovato.

Quando $n = -1$, ciò che è il caso della spirale iperbolica, si ha $\mathrm{A\,T} = -a$, cioè che la sottotangente di questa curva è costante.

Non mi fermo alla ricerca della sottonormale e della normale, perchè facilmente si ottengono quando la sottotangente è conosciuta.

Osserverò soltanto che $\frac{\mathrm{A\,T}}{\mathrm{AM}} = \frac{u\,\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}$, esprime la tangente dell'angolo, che fa col raggio vettore A M, la retta M T che tocca la curva nel punto M, e che si ha

$$\mathrm{M\,T} = \sqrt{(\mathrm{A\,M}^2 + \mathrm{A\,T}^2)} = u\,\sqrt{\left(1 + \frac{u^2\,\mathrm{d}\,t^2}{\mathrm{d}\,u^2}\right)}.$$

120. L'incremento dell'area A D M, *fig.* 32, preso relativamente alle coordinate polari, non è un trapezio, come nel caso delle ordinate parallele, ma un settore A M M′. Il limite del rapporto di questo settore coll'arco N N′, sarà lo stesso che quello dei rapporti che i settori A M Q, A M′ R, fra i quali si trova compreso e che tendono verso l'egualianza, hanno con lo stesso arco N N′; si conchiuderà dunque da questo che l'area A D M,

essendo rappresentata da s, il suo coefficente differenziale dev'essere

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{AM} \times \mathrm{MQ}}{2\,\mathrm{NN}'} = \frac{u^2}{2}, \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{d}s = \frac{u^2\,\mathrm{d}t}{2}.$$

121. La differenziale seconda d^2u sarà il primo termine dello sviluppo $\mathrm{M}''\mathrm{Q}' - \mathrm{M}'\mathrm{Q}$, secondo le potenze di NN' (60); è d'uopo osservare che allorchè si suppone l'arco NN' costante, o che si fa sempre variare l'angolo t dalla stessa quantità, gli archi QM, $\mathrm{Q}'\mathrm{M}'$, non sono perciò eguali fra loro, perchè sono raggi differenti.

Si può dedurre da ciò l'espressioni relative al centro di curvatura ed alla sviluppata, ma si è prescelto di applicare alle curve che sono riferite a delle coordinate polari, l'espressioni trovate relativamente alle coordinate rettangoli; perciocchè questo andamento fornisce l'occasione di trasformare le coordinate del primo sistema in quelle del secondo, passando da questo all'altro. Perciò sarà tanto più utile, riferendo qualche volta le curve algebraiche a delle coordinate polari; si fa soprattutto per riguardo alle curve di secondo grado, prendendo il loro foco per polo.

122. Porrò al punto A, fig. 33, per maggior semplicità, l'origine delle coordinate rettangole

$$\mathrm{AP} = x, \qquad \mathrm{PM} = y;$$

e per istabilire la posizione dell'asse AB delle ascisse, chiamerò m l'arco QO, compreso fra quest'asse ed il punto O, origine dell'arco t. Conducendo PM perpendicolare sopra AB, ed osservando che l'angolo MAP è misurato dall'arco NQ, eguale a $t - m$, si troverà

$$(\mathrm{AM})^2 = (\mathrm{AP})^2 + (\mathrm{PM})^2,$$
$$\mathrm{AP} = \mathrm{AM}\cos \mathrm{NQ},$$
$$\mathrm{PM} = \mathrm{AM}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{NQ},$$

ovvero

$$u = \sqrt{(x^2 + y^2)} \qquad (a)$$
$$u = u\cos(t - m) \qquad (b)$$
$$y = u\,\mathrm{sen}\,(t - m) \qquad (c)$$

Mediante i due ultimi valori, si cambierà qualunque equazione algebraica fra x ed y, in un'altra, la quale

non conterrà più che il seno, il coseno dell'arco t ed il raggio vettore u. Se ne deduce ancora

$$\cos(t-m)=\frac{x}{u}, \quad \text{sen}(t-m)=\frac{y}{u},$$

dalle quali si ricaveranno dei valori di cos t e di sen t, dati per x, y, u, sen m e cos m, che sostituiti in un'equazione qualunque fra u, sen t e cos t, condurranno ad un risultato che non racchiuderà più che x e y, poichè si potrà porre, in luogo di u, $\sqrt{(x^2+y^2)}$.

Giova osservare che

$$\text{tang}(t-m)=\frac{x}{y},$$

e che per conseguenza

$$t-m=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right).$$

Se per abbreviare si suppone che la retta A B si confonda colla A O, si avrà solamente

$$\cos t=\frac{x}{u}, \ \text{sen}\, t=\frac{y}{u}, \quad \text{onde} \quad \text{tang}\, t=\frac{y}{x}.$$

Quando l'equazione fra u e t, che si propone di trasformare, contiene l'arco t stesso, non è più possibile di ottenere una relazione algebraica fra x ed y; poichè non se ne ha una simile fra l'arco t, il suo seno ed il suo coseno; ma si giunge, come si vedrà ad un'equazione differenziale la quale più non contiene che x, y, dx e dy.

L' equazioni (b) e (c), aggiungendole a quelle della curva, stabiliscono fra le quattro variabili x, y, u e t relazioni tali, che tre di queste variabili sono funzioni della quarta; si possono dunque differenziare l' equazioni (a), (b) e (c), considerando t, u ed y siccome funzioni di x (46), e si avrà pure

$$\begin{aligned} du &= d.\sqrt{(x^2+y^2)}, \\ dx &= du\cos(t-m)-u\,dt\,\text{sen}(t-m), \\ dy &= du\,\text{sen}(t-m)+u\,dt\cos(t-m). \end{aligned}$$

Se si elimina $\mathrm{d}u$ dalle due ultime equazioni, ne verrà

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y\cos(t-m) - \mathrm{d}x\,\mathrm{sen}(t-m)}{u};$$

ponendo per $\cos(t-m)$, $\mathrm{sen}(t-m)$ ed u, i loro valori si avrà

$$\mathrm{d}t = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\ (*).$$

Si potranno dunque togliere dall' equazione fra u e t ed il suo differenziale, le quantità u, $\cos t$, $\mathrm{sen}\,t$, $\mathrm{d}u$ e $\mathrm{d}t$; i due risultati che si otterranno non contenendo più che t, si farà sparire mediante l' eliminazione

Sia per esempio l' equazione $u = a\,t^n$, che dà

$$u^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\,t, \quad \frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u = a^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t;$$

l' espressioni di u, di $\mathrm{d}u$ e di $\mathrm{d}t$, essendo indipendenti dall' angolo m, sostituendole e riducendole allo stesso denominatore, verrà

$$\frac{1}{n}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = a^{\frac{1}{n}}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

Con questa equazione si determinerebbero le sottotangenti, le tangenti, ecc., delle spirali, facendo uso delle formole del §. 66; ma poichè è fra u e t che sono da prima espresse le equazioni di queste curve, sarà più semplice e nell' istesso tempo più generale, di trasformare

---

(*) Spesso s' incontra l'espressione del settore $d\,s$ (120) a coordinate rettangole, ed è per conseguenza utile di osservarla. Questa si ottiene, ponendo per $\mathrm{d}t$ e per u^2 loro valori trovati qui sopra; allora viene

$$\mathrm{d}s = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{2}.$$

relativamente alle stesse variabili, le formole citate, ed è ciò che ora passo a fare.

123. Per ottenere queste formole, si è considerato y come immediatamente legata alla variabile x, nell'equazione proposta fra x ed y; ma ora che la curva è data da un'equazione fra le coordinate polari u e t, si è una di queste variabili che è indipendente e di cui l'incremento debb'essere supposto costante. Sia dunque $u = f(t)$; in questo caso x ed y sono funzioni di t, determinate dall'equazioni

$$x = u \cos.(t - m), \quad y = u \operatorname{sen}(t - m) \quad (122);$$

e col mezzo dell'ultima osservazione del §. 9, esprimere facilmente si possono i coefficenti differenziali di y relativi ad x, per quelli di u relativi a t.

Perciò, cominciamo dal porre in chiaro i primi, facendo

$$\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}^2y = q\,\mathrm{d}x^2;$$

allora x, y e p essendo frattanto considerate come funzioni di t, si avrà pel §. citato,

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}, \qquad q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}},$$

i quali infine si riducono a

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \qquad q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

purchè s'intenda ora per $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}p$, dei differenziali riferiti alla variabile t considerata come indipendente (*).

Effettuando in quest'ipotesi la differenziazione di p, si ottiene

$$q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3}.$$

(*) Si può ancora pervenire allo stesso risultato,

Con queste formole si possono ora trasformare l' espressioni della sottotangente, della tangente, ecc., e quelle che si riferiscono al centro di curvatura, purchè vi s' introducano, in vece di $\mathrm{d}y$ e d^2y, i coefficenti differenziali p e q, pei quali si sostituiranno in seguito i valori qui sopra trovati.

124. Si vede tosto pel valore di p, che l' espressione della sottotangente, come tutte quelle ove non entrano che dei differenziali di prim'ordine, non debbe cambiare e che

$$\mathrm{PT} = \frac{y}{p}\ (66), \qquad \text{resta } \frac{y\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, \quad \text{o} \quad -\frac{y\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},$$

se si ha riguardo al segno (68). Mettendo per y, $\mathrm{d}x$, e $\mathrm{d}y$ i loro valori (122), viene

$$\mathrm{PT} = -u \operatorname{sen}(t-m)\frac{\mathrm{d}u\cos(t-m) - u\,\mathrm{d}t \operatorname{sen}(t-m)}{\mathrm{d}u \operatorname{sen}(t-m) + u\,\mathrm{d}t\cos(t-m)}.$$

Si semplificherà molto questo risultato, osservando che la situazione della linea delle ascisse, su la quale cade la distanza PT, è arbitraria, e che si può per conseguenza prendere sempre m in modo che l'arco QN sia 19, nel qual caso l' ordinata PM si confonde col raggio vettore AM, $\cos(t-m) = 0$, $\operatorname{sen}(t-m) = 1$, e PT si cangia in $\mathrm{AT}' = \frac{u^2\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$.

125. Se nella differenziale

---

riguardando y come funzione di x, ed x come funzione di t; in quest' ultimo caso si avrà (9)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{ onde } p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}},$$

come superiormente.

$$dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \qquad (64),$$

dell'arco d'una curva qualunque, riferita a delle coordinate rettangole, si sostituisce per dx e dy i loro valori a coordinate polari, si avrà

$$dz = \sqrt{(du^2 + u^2 dt^2)},$$

espressione trovata per MM', nel §. 118.

126. Passo alla ricerca del raggio di curvatura. La formola

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} \quad \text{diventa} \quad \gamma = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

quando vi si pone $p\,dx$ e $q dx^2$, in luogo dei differenziali dy e d^2y ancora relativi alla variabile x; ponendo poscia per p e q i loro valori differenziali relativi a t, si ottiene

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Ora se si fa variare dx, dy e du, come funzioni di t, nei valori di dx e dy (122), esse conducono a

$$d^2x = d^2u\cos(t-m) - 2\,du\,dt\,\mathrm{sen}(t-m) - u\,dt^2\cos(t-m),$$
$$d^2y = d^2u\,\mathrm{sen}(t-m) + 2\,du\,dt\cos(t-m) - u\,dt^2\,\mathrm{sen}(t-m);$$

ponendo in seguito $t-m=19$, come nel §. 124, e per la stessa ragione verrà

$$dx = -u\,dt, \qquad dy = du,$$
$$d^2x = -2\,du\,dt, \qquad d^2y = d^2u - u\,dt^2,$$

valori coi quali si troverà

$$\gamma = \frac{(du^2+u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{u\,dt\,d^2u - u^2dt^3 - 2\,du^2dt}.$$

127. Si pratica quando si fa uso delle coordinate polari, di determinare la posizione del centro del circolo osculatore, mediante quella della normale e la distanza

M E, compresa fra il punto M ed il piede della perpendicolare EF, abbassata dal centro del circolo osculatore su la retta A M, ciò che dà dell'eleganza, qualche volta, alla costruzione del raggio di curvatura.

La linea A M essendo presa per l'asse delle ordinate y, la parte AE rappresenta l'ordinata β della sviluppata o evoluta (81); e per conseguenza

$$\mathrm{M\,E} = \mathrm{A\,M} - \mathrm{A\,E} = y - \beta = -\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}^2 y},$$

espressione che diventa

$$\mathrm{M\,E} = -\frac{1 + p^2}{q},$$

quando si sostituisce $p\,\mathrm{d}x$ e $q\,\mathrm{d}x^2$ ai differenziali $\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}^2 y$, relativi alla variabile x. Se in seguito vi si mette per p e q i loro valori differenziali relativi a t, si ha

$$\mathrm{M\,E} = -\frac{\mathrm{d}x\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2 y - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2 x} = -\frac{u\,(\mathrm{d}u^2 + u^2\,\mathrm{d}t^2)}{u\,\mathrm{d}^2 u - u^2\,\mathrm{d}t^2 - 2\,\mathrm{d}u^2},$$

quando in vece di $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2 x$, $\mathrm{d}^2 y$ si pongono i valori ottenuti nel precedente numero.

128. Per fare un'applicazione di queste formole, prendo la *spirale logaritmica* di cui l'equazione è $t = l\,u$ (*). Differenziando viene

$$\mathrm{d}t = \mathrm{M}\frac{\mathrm{d}u}{u}\ (28), \quad \text{o} \quad \frac{u\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{M},$$

(*) Quando in quest'equazione si fa $t = 0$, viene $u = 1$, così la curva passa pel punto O, *fig.* 34; in seguito i valori di u, crescendo con quelli di t, mostrano che la curva fa un'infinità di rivoluzioni al di fuori del circolo O N G Le interne rivoluzioni sono prodotte dai valori negativi di t, che danno per u dei valori sempre più piccoli; la curva si avvicina dunque di più in più al polo A, senza mai arrivarvi.

ciò che fa vedere (119) che in tutti i punti di questa curva, la tangente fa lo stesso angolo con il raggio vettore.

Effettuata su l'equazione

$$dt = \frac{M\,du}{u}.$$

una seconda differenziazione, supponendo dt costante, dà

$$u\,d^2u - du^2 = 0, \quad \text{per cui } d^2u = \frac{du^2}{u};$$

e sostituendo nell'espressioni di γ o MF e di ME, questo valore di d^2u, poscia quello di dt in du, si avrà

$$MF = -\frac{u\sqrt{(1+M^2)}}{M}, \quad ME = u = AM.$$

Segue da questo che la retta QF, *fig.* 35, condotta perpendicolarmente al raggio vettore AM, incontrerà la normale MF al centro del circolo osculatore, o sul punto corrispondente dell'evoluta FZ.

Questa evoluta sarà una spirale simile alla proposta; poichè l'angolo AFM, essendo eguale a TMA, sarà lo stesso per tutti i punti della curva FZ, come per quelli della curva AX.

Si ottiene l'equazione dell'evoluta osservando che

$$AF = \sqrt{[(MF)^2 - (ME)^2]} = \frac{u}{M};$$

poichè se si fa $\frac{u}{M} = u'$, per cui $u = M\,u'$, si avrà $l\,u = l\,M + l\,u'$, e per conseguenza $t = l\,M + l\,u'$, ciò che ritorna a $t' = l\,u'$, quando si fa $t - l\,M = t'$; ma conviene osservare che $t = ON = ONP - 19$.

Del cambiamento della variabile indipendente o come si cambia il differenziale che si è preso per costante, in un altro che più non lo sia.

129. La trasformazione impiegata nei numeri 123 e 126, per la determinazione del circolo osculatore delle curve

a coordinate polari, e che consiste nel cambiare un' espressione differenziale presa considerando y come una funzione di x, con un' altra ove x ed y sieno tutte riguardate come funzioni di una terza variabile t, che si suppone indipendente, essendo spesso utile; è necessario riprenderla per estenderla a dell' espressioni qualunque differenziali.

Il coefficente $p = \frac{dy}{dx}$ ritorna allora a

$$p = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} \quad (123),$$

ove riguardar si debbe ancora dy e dx come funzioni di t, e quindi differenziarle, ciò che darà

$$dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2};$$

facendo poscia $dp = q\,dx$, si troverà

$$q = \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Proseguendo nel modo stesso si avrà

$$dq = d\left\{\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = d\left(\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}\right)$$

$$= \frac{dx^2\,d^3y - 3\,dx\,d^2x\,d^2y + 3\,dy\,d^2x^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^4};$$

e facendo $dq = r\,dx$, si otterrà

$$r = \frac{dx^2\,d^3y - 3\,dx\,d^2x\,d^2y + 3\,dy\,d^2x^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5}.$$

È in questo modo che le quantità p, q, r, ecc., che sono implicitamente funzioni di x, si esprimono col mezzo

di $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, d^2x, ecc., considerate come funzioni di t; e sostituendo questi valori in qualunque siasi formola, ridotta a non contenere che i coefficenti differenziali p, q, r, ecc., si trasformerà sotto il punto di vista generale proposto.

130. Le espressioni di q, r, ecc., sono indeterminate; finchè non si assegna alcuna relazione fra le variabili x, y, e t; ma l'effetto di questa relazione stabilisce una dipendenza fra d^2x, e d^2y, poichè t potendo pure essere considerata come una funzione di x e di y, $\mathrm{d}t$ è egualmente di queste una variabile e dei loro differenziali, e la supposizione di $\mathrm{d}t$ costante conduce all'equazione $\mathrm{d}^2t=0$.

Non è neppure necessario, per ottenere quest'ultima, di conoscere la relazione primitiva fra x, y e la variabile t, che riguardar si debbe come indipendente; basta avere l'espressione di $\mathrm{d}t$.

Se si prendesse, per esempio, per questa variabile l'arco della curva proposta, si avrebbe allora (64).

$$\mathrm{d}t=\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)};$$

e differenziando $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ come funzioni di t, l'equazione $\mathrm{d}^2t=0$ condurrebbe a

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2y=0, \text{ onde } \mathrm{d}^2x=-\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x};$$

togliendo mediante questo valore e de' suoi differenziali, i differenziali d^2x, d^3x, ec. dalle espressioni di q, r, ec. si avrebbero le formole che prendono questi coefficenti differenziali, quando si fa variare x e y, in conseguenza del cambiamento dell'arco t, o quando si riguarda questo arco come la variabile indipendente, o finalmente quando si prende il suo differenziale per costante.

Sia per esempio l'espressione

$$\gamma=-\frac{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x} \quad (126);$$

ponendo per d^2x il suo valore, si otterrà

$$\gamma=-\frac{\mathrm{d}x(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}^2y}=-\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}^2y},$$

risultato che non conterrà più che le variabili y e t, quando si avrà per dx il suo valore $\sqrt{(dt^2 - dy^2)}$.

Si può fare ancora a suo piacimento

$$dt = dx, \quad \text{o} \quad dt = dy,$$

da che risulta

$$d^2x = 0, \quad \text{o} \quad d^2y = 0;$$

e col mezzo di queste ipotesi, si prende alternativamente x ed y per variabile indipendente, vale a dire che si riguardi y come funzione di x, o x come funzione di y. Nel primo caso

$$q = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{e nel secondo } q = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Se si mette quest' ultimo valore nell' espressione

$$\gamma = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \quad (126)$$

si trasformerà immediatamente in quella che conviene al caso ove si considera x come funzione di y, e che è

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2x}.$$

131. Si possono ancora far dipendere immediatamente da x, i differenziali formati d' una funzione y, prendendo per variabile indipendente una funzione t, data per x ed y. Perciò basta osservare che riguardando queste come funzioni di t, come pure i coefficienti differenziali p, q, ec., si hanno ancora, pel §. 123, le equazioni

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx, \text{ ec.};$$

nel qual caso

$$dy = p\,dx,$$

conduce, mediante la differenziazione, all' equazioni

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2y &= \mathrm{d}p\mathrm{d}x + p\mathrm{d}^2x \\ &= q\mathrm{d}x^2 + p\mathrm{d}^2x, \\ \mathrm{d}^3y &= \mathrm{d}q\mathrm{d}x^2 + 2q\mathrm{d}x\mathrm{d}^2x + \mathrm{d}p\mathrm{d}^2x + p\mathrm{d}^3x \\ &= r\mathrm{d}x^3 + 3q\mathrm{d}x\mathrm{d}^2x + p\mathrm{d}^3x, \end{aligned}$$

ec.,

aggiungendo alle quali

$$\mathrm{d}^2t = 0, \quad \mathrm{d}^3t = 0, \text{ ec.}$$

che daranno le relazioni dei differenziali d^2x, d^3x, ec., con d^2y, d^3y, ec., si avrà tutto ciò che abbisogna per togliere le une e le altre dall'espressione differenziale proposta, di modo che non resteranno più che i coefficienti differenziali p, q, r, ec., ove y è supposto funzione immediata di x.

Se si prende, come qui sopra,

$$\mathrm{d}t = \sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}, \text{ onde } \mathrm{d}x\mathrm{d}^2x + \mathrm{d}y\mathrm{d}^2y = 0,$$

verrà

$$\mathrm{d}^2x = -\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x} = -p\mathrm{d}^2y, \quad \mathrm{d}^2y = q\mathrm{d}x^2 - p^2\mathrm{d}^2y,$$

e per conseguenza

$$\mathrm{d}^2y = \frac{q\mathrm{d}x^2}{1+p^2}, \quad \mathrm{d}^2x = -\frac{pq\mathrm{d}x^2}{1+p^2}.$$

Il primo di questi valori, posto in

$$\gamma = -\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}^2y} = -\frac{\mathrm{d}x\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}}{\mathrm{d}^2y} = -\frac{\mathrm{d}x^2\sqrt{(1+p^2)}}{\mathrm{d}^2y},$$

ridà l'espressione

$$\gamma = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

dalla quale si è partito nel §. 126.

132. Il cambiamento della variabile indipendente ha pure una geometrica interpretazione. In fatti è chiaro che per particolarizzare il poligono M M′ M″ ecc., *fig.* 2, che si propone d'inscrivere in una curva qualunque C M,

conviene stabilire una legge nella successione degli angoli di questo poligono. Ho primieramente preso le differenze delle ascisse P P′, P′ P″, ecc., eguali fra loro; ma può essere sorrogata questa legge da tutt'altra, come per esempio supporre che i lati M M′, M′ M″, ecc. siano eguali.

Questi diversi modi però non riguardano che i segni, e non sono che una maniera particolare di scrivere i coefficenti differenziali; poichè y varia a cagione del cambiamento che spontaneamente subisce x, o in riguardo di quello che subisce un'altra variabile t, dalla quale x dipende, tutto ciò conviene pure ai limiti, che sono indipendenti dai valori degl'incrementi; così quando si differenzia un'equazione fra x ed y, facendo variare contemporaneamente dx e dy, si possono trasformare in seguito i risultati in coefficenti differenziali col mezzo delle formole del §. 129; poichè mettendovi i valori dei differenziali di una delle variabili, tutti quelli dell'altra spariscono da loro stessi: si perviene allo stesso risultato finale come che si fosse supposto costante uno dei differenziali primi, e si è condotto a delle formole più eleganti, perchè le due variabili vi sono trattate simmetricamente (*).

133. Da ciò che si è veduto, si potrà sempre differenziare il sistema di due equazioni contenenti tre variabili, sistema dal quale risulta che due qualunque di queste variabili sono funzioni determinate della terza. Se $U=0$, $V=0$ indicano due equazioni fra x, y e z, se ne prenderanno i successivi differenziali, facendo variare nello stesso tempo quelle delle due indeterminate che si riguardano come funzioni della terza.

Se si avessero tre equazioni $U=0$, $V=0$ e $W=0$ fra quattro variabili t, x, y, z, tre di queste variabili,

---

(*) *Si troverà, su questo soggetto, nel primo capitolo del* Trattato del calcolo differenziale e del calcolo integrale, *dei dettagli abbastanza importanti, e che non erano ancora stati dati da alcuno, ch' io sappia, prima della pubblicazione di quest' Opera.*

determinate necessariamente dalla quarta, sarebbero funzioni di questa, ed i loro differenziali dovrebbero variare.

Generalmente, un numero m d'equazioni fra $m+1$ variabili, determinando m di queste variabili mediante quella che rimane, non debbono essere riguardate che come contenenti delle funzioni di questa variabile; bisogna dunque, nelle successive differenziazioni di queste equazioni, far variare i differenziali delle indeterminate, le quali rappresentano delle funzioni della variabile, che si considera come indipendente, e di cui si prende il differenziale per costante.

134. Quando si hanno dell'equazioni di tal natura, se ne può sempre ricavare un'unica risultante, fra due qualunque delle variabili, con un processo, che passo ora ad esporre sopra due equazioni a tre variabili, e che sarà facile di poi estendere quanto si vorrà.

Sieno $U=0$, $V=0$ queste equazioni, l'una di ordine m e l'altra di ordine n, fra le variabili t, x, y, ed i loro differenziali, e di cui si voglia eliminare t; la prima potrà contenere, oltre la variabile t, i differenziali dt, d^2t, ... d^mt, e la seconda dt, d^2t, ... d^nt. Siccome non si hanno le equazioni primitive, nè tutti i differenziali degli ordini inferiori a quelli dei proposti, bisogna procurarsi necessariamente nuove equazioni per levare le quantità incognite dt, d^2t, ec.; ed è ciò che si farà differenziando n volte l'equazione $U=0$, ed m volte l'equazione $V=0$. Si otterranno con questo mezzo $n+m$ nuove equazioni; e se ne avrà in tutto un numero $m+n+2$, contando le due proposte: le incognite da eliminarsi, cioè, dt, d^2t, .. $d^{m-1}t$, ... $d^{m+n}t$, essendo in numero di $m+n+1$, rimarrà dunque un'equazione finale fra x, y ed i loro differenziali.

Se dt fosse costante, parerrebbe che differenziando una sol volta una delle equazioni proposte si potesse eliminare t e dt, poichè allora si avrebbero tre equazioni; ma debbesi osservare che i differenziali d^2x, d^2y contengono implicitamente t, giacchè allora si è considerato x ed y come funzioni di questa variabile (133); dunque convien prendere per costante il differenziale di una delle variabili che si vuol conservare.

Della differenziazione delle equazioni contenenti più d'una variabile indipendente.

135 Quando non si ha che una sola equazione fra tre variabili, bisogna da prima stabilire arbitrariamente i valori di due qualunque di queste variabili per determinare la terza, che per conseguenza è una funzione delle due prime. Se si ha, per esempio, l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

non si potrà ottenere z, senza avere antecedentemente assegnato dei valori ad x e ad y; ma conviene osservare che le quantità x ed y non essendo fra loro legate da alcuna relazione, la seconda può restare la stessa, abbenchè la prima abbia cangiato, e reciprocamente.

Da ciò risulta che il valore di z può variare in molti modi; 1°. in conseguenza d'un cambiamento avvenuto ad x o ad y solo; 2°. pel concorso di queste due circostanze. Nel primo caso, la quantità y o la quantità x, essendo riguardata come costante, l'equazione proposta si riduce infine ad un'equazione a due variabili; così quando cambia solamente x, si ha

$$x\mathrm{d}x + z\mathrm{d}z = 0, \quad \text{o} \quad x + z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0,$$

e quando è y, viene

$$y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0, \quad \text{o} \quad y + z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0.$$

Dunque si ha successivamente

$$\mathrm{d}z = -\frac{x\mathrm{d}x}{z}, \qquad \mathrm{d}z = -\frac{y\mathrm{d}y}{z};$$

ma bisogna osservare che il primo di questi differenziali è relativo alla variazione particolare di x, e il secondo a quella di y; ed è ciò che si esprime, dicendo che l'uno è il *differenziale parziale* relativo ad x, e l'altro il *differenziale parziale* relativo ad y (43).

Per evitare poi che questi confondere si possano, basta conoscere il significato della quistione; ed altronde si distinguono bastantemente ponendo attenzione al differenziale della variabile indipendente di cui trovansi affetti.

I coefficienti differenziali sono

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}.$$

136. In generale sia $u = o$ un' equazione che racchiude x, y e z; se si considerano x ed y come le due variabili indipendenti, sarà z una funzione dell' una e dell' altra, e quando x riceverà un incremento qualunque, supponendo y costante, proverà z un cambiamento subordinato a quello di x. In quest' ipotesi, l'equazione $u = o$ dovrà essere riguardata come una equazione fra due variabili x e z; si avrà dunque (48)

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = o,$$

si ricaverà da ciò il coefficiente differenziale di z relativo alla variabile x. Conviene ricordarsi, in questo luogo, dopo la distinzione che è stata fatta §. 135, che in $\frac{dz}{dx}$, dz non è che il differenziale parziale di z, preso per rapporto al solo cambiamento di x.

È evidente che se si fosse fatto variare y si avrebbe avuto, differenziando la proposta equazione come non contenendo che le variabili y e z,

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = o.$$

Se si moltiplica per dx la prima delle superiormente trovate equazioni, e la seconda per dy, e che poscia si aggiungono, verrà

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right) = o;$$

ma $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ altro non è che il differenziale totale di z (41): si avrà dunque

$$\frac{du}{dx}\,dx+\frac{du}{dy}\,dy+\frac{du}{dz}\,dz=0,$$

cioè, che si potrà eguagliare a zero il differenziale primo dell' equazione $u=0$, preso per rapporto alle tre variabili x, y e z. Però non conviene dimenticarsi che questo differenziale debb' essere riguardato come equivalente a due equazioni; poichè, quando sarà stato sostituito per dz il suo valore $\frac{dz}{dx}\,dx+\frac{dz}{dy}\,dy$, l' indipendenza degl' incrementi dx e dy, esigerà che le due quantità che li moltiplicano sieno separatamente eguali a zero.

137. Si perverrà all' equazioni che danno i coefficienti degli ordini superiori, differenziando l' equazioni

$$\frac{du}{dx}+\frac{du\,dz}{dz\,dx}=0\ (X),$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{du\,dz}{dz\,dy}=0\ (Y).$$

Osservando, primieramente, che al cambiamento di x, non solamente z varierà, ma nello stesso tempo il coefficiente del prim' ordine $\frac{dz}{dx}$ farà conoscere il coefficiente del second' ordine $\frac{d^2z}{dx^2}$. Dunque differenziando l'equazione (X) per rapporto ad x, si avrà, come nell' equazioni a due variabili,

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\,\frac{d^2u}{dx\,dz}\,\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dz^2}\,\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{du}{dz}\,\frac{d^2z}{dx^2}=0\ (XX).$$

Se si differenzia (X) per rapporto ad y e a z, o (Y) per rapporto ad x e a z, osservando che, nel primo caso, $\frac{dz}{dx}$ dà $\frac{d^2z}{dy\,dx}$, e nel secondo, $\frac{dz}{dy}$ dà $\frac{d^2z}{dx\,dy}=\frac{d^2z}{dy\,dx}$, si avrà un unico risultato, che sarà

$$\frac{d^2u}{dxdy}+2\frac{d^2u}{dzdy}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dzdx}\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u\,dz}{dz^2dxdy}\frac{dz}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dxdy}=0\ (XY).$$

Finalmente l'equazione (Y) differenziata, considerando y e z come le sole variabili, produrrà

$$\frac{d^2u}{dy^2}+2\frac{d^2u}{dydz}\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u\,dz^2}{dz^2\,dy^2}+\frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dy^2}=0\ (YY).$$

I coefficienti differenziali della funzione z non essendo che tre solamente pel second'ordine, saranno dunque determinati dalle tre equazioni che abbiamo ottenuto.

Bisogna osservare che se si moltiplica l'equazione (XX) per dx^2, l'equazione (XY) per $2dxdy$, l'equazione (YY) per dy^2, e che si addizionino i prodotti, sostituendo in luogo dei termini

$$\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy \text{ per } dz\ (41),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy+\frac{d^2z}{dy^2}dy^2 \text{ per } d^2z\ (44),$$

si formerà la stessa equazione finale, che quella che si sarebbe ottenuta se si avesse differenziato l'equazione

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0,$$

facendovi variare contemporaneamente le quantità x, y, z e dz, e riguardando dx e dy come costanti, ciò che darebbe il differenziale secondo totale di u, nell'ipotesi di z funzione di x e di y.

138. Si estenderanno senza difficoltà queste considerazioni a qualunque ordine di differenziazione, o a qualunque numero che si vorrà di variabili; poichè tutto si riduce a determinare quelle che sono indipendenti, ciò che non puossi fare che dietro la natura della quistione, la quale ha condotto all'equazione o all' equazioni proposte; e di poi si differenzierà per rapporto a ciascuna di queste

variabili in particolare, trattando le altre come funzioni di queste.

Se, per esempio, si avessero le due equazioni

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

fra le cinque variabili s, t, x, y e z, si vedrebbe che tre di queste variabili sono indipendenti. Supponendo adunque che y e z sieno le due variabili subordinate, o due funzioni di s, t, x, date dall' equazioni proposte, si differenzieranno successivamente u e v per rapporto ad s, per rapporto a t, per rapporto ad x, e si avranno

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0,$$

Se si moltiplicano rispettivamente queste equazioni per $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$, che si aggiungano e che si ponga $\mathrm{d}y$ in vece di

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

$\mathrm{d}z$ in luogo di

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

verrà

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}u = 0.$$

Si ricaverà un risultato simile dall' equazione $v = 0$; e ne segue che differenziando le equazioni $u = 0$ e $v = 0$ per rapporto a tutte le variabili s, t, x, y e z, e sostituendovi invece di $\mathrm{d}y$ e di $\mathrm{d}z$, l' espressioni di questi differenziali, considerati come appartenenti a funzioni di tre variabili (45) converrà eguagliare separatamente a

zero il coefficiente del differenziale di ciascuna variabile indipendente.

Riguardando i coefficienti stessi differenziali come nuove funzioni delle variabili indipendenti, non si sarebbe arrestati nella ricerca dei differenziali ulteriori; così, dopo alcune osservazioni su l'eliminazione delle costanti e delle funzioni, terminerò ciò che spetta la formazione delle equazioni differenziali.

139. L'equazione $u = 0$, fra x, y e z, avendo due differenziali primi, è evidente che si possono eliminare due costanti fra queste tre equazioni, ed il risultato esprimerà la relazione delle variabili x, y, z e dei coefficienti differenziali $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, indipendentemente dalle quantità eliminate.

Se si aggiungono alle precedenti equazioni le tre del second' ordine, si avranno sei equazioni, fra le quali si potranno eliminare cinque quantità, e così di seguito.

140. Questo conduce ad una importante osservazione, la quale è che eliminare si posson da una equazione a tre, o a un maggior numero di variabili, delle funzioni di cui è assolutamente incognita la formola. Sia, per esempio, l'equazione $z = f(ax + by)$, nella quale il simbolo f indica una funzione, la cui formola non è in alcun modo determinata; voglio ricavarne un' equazione fra $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, indipendente da questa funzione, e che convenga egualmente a $z = ax + by$, a $z = \sqrt{(ax + by)}$, a $z = \text{sen}(ax + by)$, ed in generale a tutte le funzioni della quantità $ax + by$ di qualunque forma ch'esse siano. Per ciò faccio $ax + by = t$; la proposta equazione diventa $z = f(t)$, e per conseguenza si avrà $dz = f'(t)\,dt$, rappresentando $\frac{df(t)}{dt}$ con $f'(t)$; ma

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy,$$

$$dt = \frac{dt}{dx}\,dx + \frac{dt}{dy}\,dy,$$

onde $\frac{dz}{dx} = f'(t)\frac{dt}{dx}$, $\frac{dz}{dy} = f'(t)\frac{dt}{dy}$.

Ponendo dunque per $\frac{dt}{dx}$ e $\frac{dt}{dy}$ i loro valori a e b, poscia eliminando $f'(t)$, verrà

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0.$$

Quest'equazione esprime un criterio, mediante il quale si potrà riconoscere se una quantità proposta sia o non lo sia una funzione di $ax+by$; poichè dalla sua formazione deve essere soddisfatta o divenire identica tutte le volte che vi si sostituirà invece di $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, i valori che risulterebbero dalla differenziazione d' una funzione di $ax+by$. Suppongo che s' ignori l' origine del polinomio $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$; eguagliando a z, e differenziandolo si troverà

$$\frac{dz}{dx} = 2a^2x + 2aby, \quad \frac{dz}{dy}\ 2abx + 2b^2y;$$

questi valori messi nell' equazione $b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0$, la rendono identica: se ne conchiuderà dunque che il polinomio rappresentato da z è una funzione di $ax+by$, ciò che è per altra parte evidente, poichè

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2 = (ax+by)^2.$$

Si vede in generale che $u = 0$ essendo un' equazione fra x, y, z ed una funzione qualunque rappresentata da $f(t)$, e nella quale non si conosce che la composizione di t per x, y e z, si potranno sempre eliminare $f(t)$ e $f'(t)$, coll' aiuto di quest' equazione e de' suoi differenziali relativi ad x e ad y (*).

(*) *Quando* b = a, $f(ax+by)$ *diventando* $f[a(x+y)]$,

Passando al second' ordine, diventando maggiore il numero dell' equazioni, è possibile, in molti casi, di eliminare due funzioni indeterminate; ma non entrerò in questi dettagli, nè in ciò che riguardano l'equazioni che racchiudono più di tre variabili.

Applicazione del Calcolo differenziale alla teorica delle superficie curve.

141. Qualunque equazione a tre variabili, rappresentando una superficie, si prenderà per ordinata di questa superficie, la variabile che si riguarderà come determinata dalle altre due. Indicando con x, y, z queste tre variabili, le quali in tutto quello che è per seguire, noi supporremo riferite a tre assi fra loro ortogonali, e prenderemo z per l' ordinata, x e y per le ascisse d'un punto qualunque, di modo che z sarà una funzione di x e di y.

Nel modo istesso che le linee sono generate dal moto di un punto, le superficie lo sono da quello delle linee. Per esempio, i cilindri ed i coni dei quali ci occupiamo negli Elementi di Geometria, non sono che casi particolari di due famiglie di *superficie generate da una linea retta, movendosi parallelamente a se stessa, o soggetta a passare costantemente per un dato punto*. Per dirigere il moto di questa retta, nulla impedisce di sostituire al circolo, da dove risultano i coni ed i cilindri, una qualunque curva e situata nello spazio nel modo che si vorrà;

---

si riduce ad una funzione del binomio $x+y$, *e l' equazione* $b\frac{dz}{dx}-a\frac{dz}{dy}=0$, *si cambia in* $\frac{dz}{dx}-\frac{dz}{dy}=0$, *che è l' espressione della proprietà caratteristica impiegata a sviluppare* $f(x+y)$, *nel n°* 19. *Si trovano nel Trattato in* 4°., *t.* I., *cap. II., altri esempi dell' applicazione dell' equazioni differenziali parziali nello sviluppo delle funzioni, e particolarmente la formola chiamata* teorema di Lagrangia.

ma, e questo è degno d'osservazione, si può, coll'uso dei differenziali parziali, allontanare quello che assomiglia alla forma di questa curva, ed esprimere generalmente il carattere comune di tutte le superficie d'una medesima famiglia.

Infatti, se supponiamo primieramente che tutte le rette generatrici esser debbono fra loro parallele, bisogna che, nelle loro equazioni

$$y = ax + \alpha,\ z = bx + \beta \ (Trig.\ 181),$$

i coefficienti a e b siano costanti, e che le quantità α e β variano insieme, di maniera che l'una sia funzione dell'altra; poichè, la prima essendo data, il piano proiettante della retta generatrice, sul piano delle xy è dato, e la sua intersecazione, con la quale dirige il moto di questa retta, finisce di determinarla (*): si avrà dunque

$$y = ax + \alpha,\ z = bx + \varphi(\alpha),$$

essendo φ una funzione di cui la forma dipende dalla curva direttrice; ma la prima di queste equazioni dando

$$\alpha = y - ax,$$

risulta

$$z - bx = \varphi(y - ax).$$

Se in questa equazione si fa $b = 0$, si avrà

$$z = \varphi(y - ax),$$

equazione che appartiene a quella del n° 140.

Eliminando la funzione φ nel caso generale, dopo aver fatto $dz = pdx + qdy$, si ottiene

$$p + aq = b.$$

(*) *Ovvero ancora; siano* $y' = \psi(x')$, $z' = \pi(x')$, *le equazioni della curva direttrice; bisogna che facendo* $x = x'$, *si abbia* $y = y'$, $z = z'$, *e per conseguenza* $ax' + \alpha = \psi(x')$, $bx' + \beta = \pi(x')$, *da cui eliminando* x', *risulterà un'equazione fra* α *e* β.

142. Quando le rette generatrici debbono tutte passare per uno stesso punto di cui le coordinate sono α, β, γ, le loro equazioni diventano

$$y-\beta=a(x-\alpha),\quad z-\gamma=b(x-\alpha),$$

e sono i coefficienti a e b che insieme variano ad ogni nuova posizione che prende la retta generatrice; conviene, per conseguenza, porre $b=\varphi(a)$, ciò che dà

$$a=\frac{y-\beta}{x-\alpha}\text{ e }\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right).$$

L'eliminazione della funzione φ conduce a

$$z-\gamma=p(x-\alpha)+q(y-\beta).$$

143 Si vede ancora, senza difficoltà, che se una curva piana qualunque gira attorno all'asse delle z, ciascuno de' suoi punti descriverà un circolo, il centro del quale si troverà su quest'asse, ed avrà per raggio l'ordinata della curva generatrice riferita a questo stesso asse, ed inoltre, che il raggio di questo circolo varia con la sua distanza dal piano delle xy, cioè con z. Se dunque si prende per sua equazione $x^2+y^2=a^2$, dovrà essere a considerata come una funzione di z, e *viceversa*, donde segue

$$x^2+y^2=\varphi(z),\quad\text{o}\quad z=\psi(x^2+y^2),$$

indicando ψ una funzione di φ.

L'eliminazione di ψ conduce all'equazione

$$py-qx=0,$$

la quale esprime il carattere delle superficie generate come si è veduto, di cui la sfera non è che un caso particolare, e che si chiamano *superficie di rivoluzione*. Per considerarle sotto il punto di vista il più generale, converrebbe supporre, in una situazione qualunque, l'asse attorno del quale gira la curva generatrice.

Nell'espressione delle famiglie delle superficie, che abbiamo esaminate, vi si trova una sola funzione arbitraria;

mentre ve ne sarebbero state un maggior numero, se si fossero lasciate più condizioni da adempire nel moto o nella natura delle linee generatrici; ma qui non si può che accennare questo argomento. Per altro avremo ben presto occasione di far conoscere ancora una classe di superficie rimarchevoli; tali sono tutte quelle le quali, come i cilindri ed i coni, possono senza rottura nè doppiatura, stendersi sopra un piano, e che per questa ragione si chiamano *superficie sviluppabili* (161).

Finalmente, bisognerebbe pure mostrare l'andamento che seguir si debbe onde particolarizzare dietro una data condizione, la forma delle funzioni arbitrarie contenute nelle primitive equazioni delle famiglie delle superficie; ma siccome il suo principale uso si riferisce al Calcolo integrale, così io l'esporrò in seguito dell'integrazione delle equazioni differenziali parziali.

144. Consideriamo ora le diverse maniere di passare da un punto ad un altro sopra una qualunque superficie.

Allorchè solamente x varia e diventa $x+h$, si passa dal punto M, *fig.* 36, al punto m, situato sulla sezione QMm, fatta da un piano parallelo a quello delle xz, e condotto per il punto M: l'ordinata $m'm$ di questa sezione ha per isviluppo la serie

$$z+\frac{\mathrm{d}z\,h}{\mathrm{d}x\;1}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

Se è invece y che si cangi in $y+k$, e che x rimanga costante si passerà al punto n situato sopra la sezione PMn fatta da un piano parallelo a quello delle yz, condotto pure pel punto M, e lo sviluppo dell'ordinata $n'n$ di questa sezione sarà

$$z+\frac{\mathrm{d}z\,k}{\mathrm{d}y\;1}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

Facendo x ed y variare contemporaneamente, si passerà dal punto M ad un punto qualunque N, e ciò in due diversi modi, cioè, sostituendo $y+k$ in luogo di y nel primo sviluppo sopra indicato, ovvero $x+h$ in luogo di x nel secondo. Mediante una di queste operazioni si passa

dall'ordinata $n'm$ all'ordinata N'N, nella sezione pmN, mentre coll'altra si passa da $n'n$ a N'N, nella sezione qnN. È evidente che queste due sezioni incontrar si debbono nel punto N, senza di che la superficie proposta non sarebbe continua; bisogna dunque che i risultamenti riferiti nei numeri 39 e 40 sieno identici: l'equazione $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}$, alla quale vi si unisce questa circostanza, non è dunque che l'espressione della legge di continuità.

Dovendo considerare particolarmente la serie

$$z + \frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}h^2 + 2\,\frac{d^2z}{dxdy}hk + \frac{d^2z}{dy^2}k^2\right) + \text{ec.}$$

che esprime lo sviluppo del valore di z, corrispondente a $x+h$ ed a $y+k$, per abbreviare, io la rappresenterò con

$$z + ph + qk + \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \text{ec.}$$

ponendo

$$\frac{dz}{dx} = p,\ \frac{dz}{dy} = q,\ \frac{d^2z}{dx^2} = r,\ \frac{d^2z}{dxdy} = s,\ \frac{d^2z}{dy^2} = t;$$

e farò osservare che il rapporto

$$\frac{k}{h} = \frac{N'm'}{M'm'} = \text{tang}\,N'M'm',$$

determinando la direzione di M'N', per rapporto agli assi delle x e delle y, fa conoscere quella del piano M'MNN', condotto perpendicolarmente al piano ABC, e tagliando secondo MN la superficie proposta.

145. Dalle precedenti considerazioni e da ciò che si è detto al n° 136, ne segue che se $u = 0$ rappresenta l'equazione d'una superficie curva, le equazioni differenziali

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}=0 \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y}=0,$$

apparterranno rispettivamente a due sezioni QMm e PMn; la coordinata y non entrerà nella prima che come una costante arbitraria, la quale determina la posizione del piano tangente: egualmente sarà della coordinata x nella seconda. Non debbesi confondere il dz dell' una di queste equazioni con quello dell' altra, poichè questi due differenziali non sono che parziali (135).

Il differenziale totale, o l'insieme dei termini del primo ordine, avendo per espressione

$$\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y,$$

$\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x$ è il differenziale dell' ordinata della sezione parallela al piano delle xz; similmente $\mathrm{d}z=q\mathrm{d}y$ è quello dell' ordinata della sezione parallela al piano delle yz.

Se si domandasse il differenziale dell' ordinata della sezione fatta con un piano qualunque M′ M N N′ perpendicolare a quello delle xy, l'equazione di questo piano, come quella della sua comune sezione M′N′, essendo della forma $y=\alpha x+\beta$ (*Trig.* 176), stabilirebbe una dipendenza fra le coordinate x e y; e perciò non sarebbe più permesso di far variare l' una senza l' altra, e z non potrebbe cambiare che in un modo solo: quindi converrebbe allora impiegare il differenziale totale $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$, osservando che l'equazione del piano secante dà $\mathrm{d}y=\alpha\mathrm{d}x$, onde segue

$$\mathrm{d}z=(p+\alpha q)\,\mathrm{d}x.$$

Quest' esempio offre la spiegazione geometrica di ciò che si è veduto al §. 46, relativamente all'uso dei differenziali totali. Supponendo sempre una dipendenza fra le due variabili, si fissa la direzione nella quale si passa da un punto ad un altro sopra la superficie proposta; poichè se la sezione M N non fosse fatta da un piano perpendicolare a quello delle xy, e che essa avesse, per conseguenza, sopra quest' ultimo una curva per proiezione,

la retta M′N′ sarebbe la tangente di questa curva al punto M′, e la proiezione della retta che toccherebbe al punto M la sezione MN fatta nella proposta superficie.

146. La prima osservazione che si presenta, è che il limite del rapporto

$$\frac{NN' - MM'}{M'N'},$$

dando la tangente trigonometrica dell' angolo che fa colla sua proiezione M′N′, la retta che tocca al punto M la sezione formata nella superficie dal piano M′MNN′ (58), misura l' inclinazione di questa sezione per rapporto al piano delle xy, e indica per conseguenza la *pendenza* della superficie, nella direzione MN. Ora, per passare al limite, conviene sostituire agli incrementi

$$NN' - MM' \text{ e } M'N' = (\sqrt{}[M'm')^2 + (N'm')^2],$$

i differenziali corrispondenti

$$dz = (p + \alpha q)\,dx, \quad \sqrt{}(dx^2 + dy^2) = dx\sqrt{}(1 + \alpha^2)\ (145),$$

per cui risulterà pel limite cercato,

$$\frac{p + \alpha q}{\sqrt{}(1 + \alpha^2)}.$$

Ciò posto, si può domandare quale debb' essere la situazione del piano secante M′MNN′ affinchè l' espressione superiore, la quale varia con l' angolo N′M′m', di cui la tangente $= \alpha$, sia un massimo. Per risolvere questo problema, bisogna differenziare questa stessa espressione per rapporto ad α, ed eguagliare a zero il risultato (101); si troverà

$$\frac{q - p\alpha}{(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \text{ onde } q - p\alpha = 0,\ \alpha = \frac{q}{p};$$

e se si pone per α il suo valore $\frac{dy}{dx}$, si formerà l' equazione differenziale

$$q\,dx - p\,dy = 0,$$

la quale unitamente a quella della superficie

$$dz = p dx + q dy,$$

farà conoscere la direzione nella quale debbono succedersi i punti consecutivi, per discendere dal punto M al piano delle xy, per gli archi i più inclinati, o la *linea di maggior pendenza*, che conduce da questo punto al piano delle xy. Questa linea, che sarà generalmente curva, si presenta spesso nelle arti di costruzione.

147. Veniamo ora alle osculazioni delle superficie; immaginiamone due che passino per uno stesso punto, avendo per coordinate x, y, z, e che cambiando x in $x+h$, y in $y+k$, l'equazione della prima superficie dà

$$z + ph + qk + \tfrac{1}{1}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \text{ec.},$$

e quella della seconda

$$z + Ph + Qk + \tfrac{1}{1}(Rh^2 + 2Shk + Tk^2) + \text{ec.}$$

la distanza loro riguarda il secondo punto che si considera, sarà, nel senso dell'ordinata z,

$$\begin{gathered}(p - P)h + (q - Q)k \\ + \tfrac{1}{2}\left[(r - R)k^2 + 2(s - S)hk + (t - T)k^2\right] \\ + \text{ec.},\end{gathered}$$

serie che si può rendere convergente, prendendo h e k piccolissimi, e che scemerà di più in più di valore, allorchè perderà i termini della sua prima, della sua seconda, ec. linea.

Ragionando qui come si è fatto per rapporto alle curve, nel n° 75, si convincerà che una terza superficie, per la quale questi termini non iscomparirebbero, passerebbe necessariamente fuori delle altre due in tutti i punti che circondano il comune loro punto.

Allorchè si avrà

$$p - P = 0, \quad q - Q = 0,$$

le due prime snperficie proposte si toccheranno, ed il contatto loro sarà di prim' ordine; sarà di secondo, se si ha uello stesso tempo

$$r - \mathrm{R} = 0, \quad s - \mathrm{S} = 0, \quad t - \mathrm{T} = 0,$$

e così di seguito.

148. Se ora si suppone che l'equazione della seconda superficie contenga un certo numero di costanti indeterminate, si potrà disporre di queste costanti per annientare i primi termini della distanza delle due superficie, e stabilire in questo modo fra esse, il massimo possibile contatto, vale a dire, una oscillazione.

Rappresentando con x', y', z', le coordinate della seconda superficie, la prima condizione da stabilirsi è che cambiando nella sua equazione, che rappresenterò con $\mathrm{V}' = 0$, x' ed y' in x ed y, se ne ricava

$$z' = z,$$

affinchè le due superficie abbiano un punto comune. Sostituendo poscia alle lettere

$$p, q, r, s, t, \text{ ec.}, \quad \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \text{ ec.},$$

i coefficienti differenziali ch' esse dinotino, le condizioni poste nel no precedente diverranno, per un contatto di prim' ordine,

$$\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y};$$

di più, per un contatto di second' ordine,

$$\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}x'^2} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \quad \frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}y'^2} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2};$$

e così di seguito, ciò che stabilisce che i differenziali parziali di prim' ordine, poi quelli di second' ordine, ec., dell'equazione $\mathrm{V}' = 0$, sono soddisfatti quando vi si cangia x', y', z' e loro differenziali in x, y, z e loro differenziali.

149. Applichiamo tosto ciò che precede al piano, prendendo per $\mathrm{V}' = 0$, l'equazione

$$z' = \mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{D} \ (\textit{Trig.}\ 176);$$

siccome qui non vi sono che tre costanti, così non si possono soddisfare che le tre condizioni del contatto di prim' ordine. La prima dà

$$z' - z = Ax + By + D,$$

le altre due

$$\frac{dz'}{dx'} = A = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz'}{dy'} = B = \frac{dz}{dy}.$$

In virtù di queste equazioni, viene subitamente

$$z = \frac{dz}{dx}x + \frac{dz}{dy}y + D,$$

e togliendo questa equazione da quella del piano, si ottiene

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dz}{dy}(y' - y),$$

ovvero $z' - z = p\ (x' - x) + q\ (y' - y)$:

tale è l'equazione del piano tangente alla prima superficie, nel puntó in cui le coordinate sono x, y e z.

Si determinerebbe ancora questo piano con la condizione che contener debbe le tangenti di tutte le sezioni che far si potrebbero nella superficie per il punto M; perchè per queste tangenti, si ha

$$dz = (p + \alpha q)\,dx \text{ (145)},$$

e, allorchè si fa $dy = \alpha dx$, l'equazione del piano dà

$$dz' = A\,dx + B\,dy = (A + \alpha B)\,dx,$$

risultato, che sarà identico col precedente, qualunque sia α, se $A = p$, e $B = q$.

150. La retta perpendicolare al piano tangente, condotta pel punto in cui tocca la superficie proposta, si chiama *normale*, e le sue equazioni sono in seguito di quella del piano tangente,

$$x' - x + p(z' - z) = 0,$$
$$y' - y + q(z' - z) = 0 \text{ (}Trig.\text{ 182) (*)}.$$

(*) *Noi le rinverremo più lungi* (159), *mediante una considerazione del massimo e del minimo.*

La distanza del punto considerato su la superficie curva, ad un qualunque punto preso sulla normale, sarà

$$\sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}=(z-z')\sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

e ciò per l'equazioni di sopra; e se si fa $z'=0$, il risultato

$$z\sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

darà la lunghezza della parte della normale compresa fra la superficie proposta ed il piano delle xy.

151. Le condizioni di un contatto di second' ordine, essendo in numero di sei (148), non possono esser sempre adempite dalla sfera, poichè la sua equazione generale non contiene che quattro costanti, cioè le tre coordinate del centro ed il raggio (*Trig.* 184): essa dunque non potrebbe avere, in tutti i sensi, la stessa curvatura come la superficie proposta. Per misurare questa curvatura, conviene impiegare due circoli osculatori differenti, che l'Eulero ha pel primo determinati, ma ai quali il Monge è in seguito pervenuto mediante elegantissime considerazioni, che esporrò in appresso.

Si è veduto, nel n° 80, che i punti della sviluppata, o i centri di curvatura d'una curva sono i limiti delle intersecazioni delle normali; applichiamo questa definizione alle superficie, cercando i limiti delle intersecazioni delle loro normali consecutive, e per ciò riprendiamo le equazioni

$$x'-x+p(z'-z)=0\ (a),$$
$$y'-y+q(z'-z)=0\ (b),$$

trovate nel n° precedente. Le quantità x, y, z, p, q, relative al punto che si considera su la superficie proposta, sono costanti per la stessa normale, ma esse cambiano di valore, allorchè si passa ad una seconda normale; ora potendosi effettuare questo passaggio in un' infinità di direzioni, cioè dal punto dato a ciascuno dei punti circonvicini, bisogna far variare nello stesso tempo x, y e z; e poichè non si cerca che il punto d' intersecazione della prima normale con la seconda, si considereranno come costanti le coordinate x', y' e z', appartenenti a questo punto.

Differenziando pure l' equazioni (a) e (b), e ponendo

$$dp = r dx + s dy,\ dq = s dx + t dy \text{ (144 e 44)},$$

si troveranno le due seguenti equazioni

$$-dx - p^2 dx - pq dy + (z' - z)(r dx + s dy) = 0 \ (c),$$
$$-dy - q^2 dy - pq dx + (z' - z)(s dx + t dy) = 0 \ (d).$$

Ma le equazioni (a) e (b) danno i valori di $x' - x$ e di $y' - y$ allorchè quello di $z' - z$ sarà conosciuto, bisogna perchè la proposta quistione abbia una soluzione, che le due equazioni (c) e (d) s' accordino nella determinazione di quest' ultima quantità, vale a dire che si abbia

$$\frac{dx + p^2 dx + pq dy}{r dx + s dy} = \frac{dy + q^2 dy + pq dx}{s dx + t dy};$$

ciò che stabilisce una relazione fra dx e dy, e mostra che la seconda normale non incontra la prima, poichè il punto donde ella parte è nella direzione stabilita dal valore di $\frac{dy}{dx}$. Ora facendo

$$dy = m dx,$$

nell'equazinne precedente, ed ordinando per rapporto ad m, si ottiene il risultato

$$[(1 + q^2) s - p q t] m^2 + [(1 + q^2) r - (1 + p^2) t] m - [(1 + p^2) s - p q r] = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e).$$

che dà per m due valori; dunque non vi sono generalmente, in ciascun punto di una superficie, che due direzioni, nelle quali due normali consecutive si taglino e sieno per conseguenza nello stesso piano.

Un semplice cambiamento di coordinate basta per mettere in chiaro la relazione, che queste direzioni hanno fra loro sulla superficie proposta. Si vede primieramente che si può far coincidere il piano delle xy con il piano tangente al punto che si considera, e porre l' origine

delle coordinate in questo punto, senza per ciò scomporre la posizione rispettiva della superficie proposta e delle sue normali; ma allora $x=0$, $y=0$, $z=0$, e nell'equazione del piano tangente, z' debb' esser nullo qualunque siano x' ed y', ciò che esige che $p=0$, $q=0$, e riduce l'equazione (e) a

$$s\,m^2+(r-t)\,m-s=0, \quad \text{o} \quad m^2+\frac{(r-t)}{s}m-1=0.$$

Chiamando m' ed m'' le radici di questa, si ha

$$m'\,m''+1=0;$$

e siccome ora tutte le rette che toccano al punto M, fig. 37, la superficie proposta, si confondono colla loro proiezione su il piano della xy, m' ed m'' rappresenteranno le tangenti degli angoli che fanno, coll' asse delle x, le rette indicando le direzioni su le quali si trovano le normali che si tagliano; così queste direzioni saranno fra loro perpendicolari (*).

152. Si vede inoltre che conducendo per l'asse delle z, il quale presentemente coincide con la normale M G, e per ciascuna delle tangenti MN′ e Mn', corrispondenti ai valori m' ed m'' dei piani, questi taglieranno la superficie proposta, seguendo due curve, di cui i circoli osculatori saranno pure quelli della superficie, poichè esse avranno due normali comuni con questa superficie, mentre le altre curve non potrebbero averne che una.

Mediante poi i raggi di questi circoli si misurano le curvature della superficie proposta; ora la loro espressione è evidentemente quella della distanza

$$\sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]},$$

fra l' intersecazione delle normali e' il punto che si considera su questa superficie. Colla sostituzione dei valori

---

(*) m *resterebbe indeterminata se si avesse inoltre* s = o, r — t = o, *ciò che ha luogo per la sfera, di cui tutte le normali passano per il suo centro, che qui si suppone nell' asse delle z.*

di $x-x'$ e di $y-y'$, ricavati dalle equazioni (a) e (b), si trova

$$(z-z')\sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

ove non occorre che di sostituire per $z-z'$ il suo valore ricavato da una delle equazioni (c) e (d); ma si perviene ad un valore indipendente di m, eliminando primieramente $\frac{dy}{dx}$ da queste due equazioni, locchè dà

$$\frac{-(1+p^2)+(z'-z)r}{pq-(z'-z)s}=\frac{pq-(z'-z)s}{-(1+q^2)+(z'-z)t};$$

ponendo poscia

$(z-z')\sqrt{(1+p^2+q^2)}=\delta$, per cui $z'-z=\frac{-\delta}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$,

poi sostituendo questo valore di $z'-z$, nella precedente equazione, facendo sparire i denominatori, e ordinando per rapporto a δ, si ottiene

$$(rt-s^2)\delta^2+[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\delta\sqrt{(1+p^2+q^2)}+(1+p^2+q^2)^2=0\ldots(f),$$

equazione di cui le radici esprimeranno i raggi dei due circoli osculatori.

I valori di m dati in funzione di x, y, z, cambiando con queste variabili per ciascun punto della superficie proposta, risultano le equazioni differenziali

$$dy=m'dx,\quad dy=m''dx,$$

che determinano, sul piano delle xy, due curve, che passano per il punto M′ fig. 36, e che sono le proiezioni di quelle, le quali seguir conviene su la superficie, onde incontrare delle normali che si taglino.

Ciascun punto M della superficie proposta si trova su due di queste curve; quella che corrisponde al più piccolo dei valori di δ, è la *linea di maggior curvatura*, l' altra è la *linea di minor curvatura*.

Quando i valori di δ hanno lo stesso segno, le due

curvature della superficie sono disposte nel medesimo senso, ed in senso contrario, se questi valori sono di segni differenti.

Finalmente, se si eliminano x, y, z e m, dall' equazione della superficie proposta, e dall'equazioni (b), (c), (d), (e), (251) si avrà, per le coordinate x', y', z', l' equazione della superficie, che è il luogo di tutti i centri di curvatura della proposta, e che, generalmente, sarà composta di due sezioni, di cui l'una conterrà tutti i centri della maggior curvatura e l' altra quelli della minor curvatura (*).

Dei punti singolari delle superficie curve, dei massimi, *e* minimi *delle funzioni di più variabili.*

153. Le superficie curve offrono, nei loro corsi, non solamente dei punti singolari in numero limitato e distinti, ma questi punti vi formano pure qualche volta delle serie continue, che chiamar si potrebbero *linee singolari*; gli uni e gli altri corrispondono a dei valori particolari dei coefficienti differenziali dell' ordinata della superficie, analoghi a quelli che ci hanno condotti alla determinazione dei punti singolari delle curve. Ma per formarsi una idea della forma di una superficie, non basta cercare dei punti isolati; conviene, come per costruirla, immaginare un insieme di sezioni fatte con dei piani o delle superficie assoggettate ad una legge costante e determinata.

Ed è con ciò che si può scoprire, in qual punto di una superficie, la sua ordinata è un massimo od un minimo, vale a dire, maggiore o minore di tutte quelle, che immediatamente la circondano in qualunque direzione che si prendano; perchè debb' esservi allora un massimo o un minimo su tutte le sezioni, che formano, nella superficie proposta, i diversi piani che passano per questa ordinata. Ora ponendo, per una di queste sezioni

---

(*) *Si troverà alla pag.* 580 *del vol. I. del Trattato in* 4°. *la formola per determinare mediante queste curvature, quella d' una sezione fatta nella superficie, da un qualunque piano.*

$$dy = \alpha\, dx,$$

il coefficiente differenziale di z considerato come l'ordinata di questa sezione, sarà espresso da

$$\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \frac{p+\alpha q}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} \quad (146),$$

e dovrà esser nullo o infinito (101), indipendentemente da nissun valore di α, purchè vi sia massimo o minimo qualunque sia la situazione del piano secante.

Le condizioni del primo caso saranno dunque

$$p = 0, \quad q = 0,$$

o pure

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0,$$

e col loro mezzo si determineranno le ascisse del punto cercato; ma, come nelle curve, non si potrà conchiudere da queste sole condizioni che vi sia massimo o minimo: tutto ciò che ne segue necessariamente, è che il piano tangente è parallelo a quello di xy, poichè la sua equazione si riduce allora a $z' - z = 0$ (149).

Se la superficie proposta è la sfera data dall'equazione

$$x^2+y^2+z^2 = a^2,$$

si avrà

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z},$$

onde

$$x = 0, \quad q = 0;$$

e si vedrà, dall' espressione

$$z = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)},$$

che tutti i valori di z che corrispondono a delle ascisse differenti da zero, sono $< a$.

154. Non avendo riguardo che all'andamento dei valori dell' ordinata z, s' incontrano pure dei massimi e dei minimi, i quali rendono infiniti i coefficienti differenziali p e q; eccone un esempio.

Se nell' equazione

$$z = b + (x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$$

si fanno x ed y nulli, si avrà $z=b$, e tosto che si prenderanno x ed y differenti da zero, si renderà $z>b$. Questo valore è bensì dunque un minimo; ma supponendo pure x ed y nulli nell' espressioni

$$p=\frac{2x}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}, \qquad q=\frac{2y}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}},$$

si trova $^0/_0$. Per conoscerne il vero valore, bisogna primieramente porre $y=mx$, ciò che le cangia in

$$p=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}(1+m^2)^{\frac{2}{3}}}, \qquad q=\frac{2m}{3x^{\frac{1}{3}}(1+m^2)^{\frac{2}{3}}},$$

e dimostra che esse sono realmente infinite, allorchè $x=0$ e che m è assegnabile, onde risulta $y=0$.

Per verità, se si cerca la forma di questa parte della superficie, si riconoscerà facilmente che il punto il quale corrisponde a $x=0$, $y=0$, è una specie di becco o di regresso, al di là del quale la superficie non si estende, e simile a quello che produrrebbe la curva EM, fig. 14, girando attorno la linea PM. Egualmente si vedrà che p e q si presentano sotto la forma di $\frac{0}{0}$, perchè la posizione del piano tangente, in questo punto, è indeterminata, stante che ogni piano che passa per l'asse delle z, tocca e sega la superficie.

Esiston pure, nelle superficie curve, delle serie di punti, o delle linee nelle quali esse ritornano sopra se stesse, che sono chiamate *spigolo di regresso*, e di cui si vedrà ben presto un esempio; altre linee in cui le curvature cangiano di andamento; queste sono *linee di flesso*, che riconoscer si possono dal cambiamento di segno dei raggi di curvatura; ma siffatti dettagli, oltre passando i limiti da me prescritti, li tralascio e m'accingo alla ricerca puramente analitica dei massimi e dei minimi delle funzioni a due variabili.

155. È evidente che la differenza

$$u'-u=f(x+h, y+k)-f(x, y),$$

fra due successivi valori di una funzione, allorchè gl'incrementi rimangono piccolissimi, ma sono però qualunque, restar debbe sempre positiva se il primo valore di u è un minimo, o negativo nel caso contrario.

Per esaminare le conseguenze di questa condizione, conviene generalmente sviluppare la differenza indicata qui sopra, secondo le potenze ascendenti delle quantità h e k; ma limitandoci ora al caso in cui i coefficienti differenziali non divengono infiniti, potremo far uso della serie del n° 41, e per abbreviare, indicheremo con

$$B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ \text{ec.},$$

le funzioni

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{du}{dy},\quad \frac{d^2u}{dx^2},\quad \frac{d^2u}{dxdy},\quad \frac{d^2u}{dy^2},\ \text{ec.}$$

Ponendo poscia $k = \alpha h$, verrà

$$u' - u = \frac{h}{1}(B + C\alpha) + \frac{h^2}{1\cdot 2}(D + 2E\alpha + F\alpha^2), + \text{ec.},$$

serie nella quale il termine affetto della prima potenza di h, potrà divenire maggiore della somma di tutti gli altri; e siccome cangerebbe di segno contemporaneamente ad h, così converrà che sparica pel massimo o pel minimo, locchè fornisce l'equazione

$$B + C\alpha = 0,$$

la quale, dovendo sussistere per tutte le relazioni di k con h, debbesi verificare indipendentemente da α: si avrà dunque

$$B = 0,\quad C = 0,\quad \text{o}\quad \frac{du}{dx} = 0,\quad \frac{du}{dy} = 0,$$

come si è dedotto dalle considerazioni geometriche (153).

Queste condizioni essendo adempite pei valori di x e di y in seguito determinati, bisogna ancora che i coefficienti D, E ed F, non ispariscano nello stesso tempo, e

di più, che il segno della quantità la quale forma la seconda linea dello sviluppo superiore, sia indipendente dai valori di α. Dando a questa linea la forma

$$\frac{Fh^2}{1.2}\left(\frac{D}{F}+\frac{2E}{F}\alpha+\alpha^2\right)\ldots(a),$$

si vede che il suo segno resterà il medesimo, se il polinomio

$$\frac{D}{F}+\frac{2E}{F}\alpha+\alpha^2$$

non cangia per alcun valore di α; ed è ciò che succederà, se, essendo eguale a zero, non ammette per α, che dei valori immaginari o dei valori eguali; dunque questi valori espressi generalmente da

$$\alpha=\frac{-E\pm\sqrt{(E^2-FD)}}{F},$$

saranno immaginari allorchè $E^2<FD$, ed eguali se $E^2=FD$.

Senza tali condizioni non vi sarà nè massimo nè minimo; e siccome esse esigono da prima che F e D abbiano lo stesso segno, così quando esse saranno adempite, quello della quantità (a) non dipenderà più che dal segno del coefficiente F; si avrà dunque un minimo se è positivo, ed un massimo se è negativo.

L'Eulero, nelle sue *Institutiones Calculi differentialis*, non indica che una sola condizione, cioè che D e F sieno dello stesso segno. Il Lagrangia fu il primo a mostrare che essa non era sufficiente, e diede su questo argomento una teorica alla quale più non mancava che l'esame del caso in cui $E^2=FD$, discusso dopo dal sig. *Français* (*).

Se i coefficienti di second' ordine sparissero contemporaneamente a quelli del primo non vi sarebbe massimo o minimo, in quanto che i coefficienti di terzo ordine egualmente sparirebbero, e che i termini del quarto formerebbero una quantità il cui segno non dipenderebbe in

(*) *Osservate il Trattato in quarto, III. vol. pag.* 631.

verun modo da α, cioè che il polinomio in α, il quale salirebbe allora al quarto grado, essendo considerato come un' equazione di questo grado, non avrebbe che delle radici immaginarie o delle radici eguali.

156. Per esempio analitico ho scelto la quistione seguente, analoga a quella del §. 103. *Dividere la quantità* a *in tre parti*, x, y, $a-x-y$, *tali che il prodotto* $x^m y^n (a-x-y)^p$ *sia un massimo.*

Sia allora

$$u = x^m y^n (a-x-y)^p,$$

$$\frac{du}{dx} = x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1} [ma-mx-my-px] = 0,$$

$$\frac{du}{dy} = x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1} [na-nx-ny-py] = 0;$$

i fattori $ma-mx-my-px$ e $na-nx-ny-py$, essendo eguali a zero, forniscono l'equazioni

$$m(a-x-y)-px = 0, \quad n(a-x-y)-py = 0,$$

le quali coll' eliminazione di $a-x-y$, conducono a

$$mpy-npx = 0, \quad \text{onde} \quad y = \frac{nx}{m};$$

e si trova di poi

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \; y = \frac{na}{m+n+p}, \; a-x-y = \frac{pa}{m+n+p}.$$

Per sapere se questi valori appartengono veramente ad un massimo, si sostituiranno nell' espressioni generali di

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \frac{d^2u}{dy^2};$$

facendo per abbreviare $m+n+p = q$, si troveranno

$$D = -(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$E = -\frac{mna}{q}\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$F = -(n+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}.$$

Le quantità D ed F sono tutte due negative, e si assicurerà, senza difficoltà, ch' esse adempiono la condizione $E^2 < DF$, quando gli esponenti m, n, p sono positivi; in questa guisa si è ottenuto il massimo dimandato.

157. Intorno ad un' applicazione geometrica, prenderò la determinazione della più corta distanza fra un piano ed un dato punto.

Sieno x, y, z, le coordinate del piano, che sono le incognite del problema, x', y', z', quelle del punto che sono date; la distanza fra il punto ed il piano sarà espressa da

$$u = \sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]},$$

la quale dovrà essere considerata come una funzione di due variabili x ed y, a causa della dipendenza che stabilisce fra queste e l' ordinata z, l' equazione del piano dato. Se si rappresenta con $z = Ax + By + D$, e si differenzi u in questa ipotesi (136), si avrà $dz = Adx + Bdy$; e sopprimendo i denominatori dei valori di $\frac{du}{dx}$ e di $\frac{du}{dy}$, si troveranno

$$x-x'+(z-z')A = 0, \quad y-y'+(z-z')B = 0,$$

equazioni che sono precisamente quelle della perpendicolare al piano dato.

Se egli tocca nel punto di cui le coordinate sono x, y, z, una superficie curva, per la quale $dz = pdx + qdy$, siccome allora $A = p$, $B = q$, l' equazioni superiormente trovate diverranno quelle della normale a questa superficie (150).

Dell' applicazione del Calcolo differenziale alle curve a doppia curvatura, e delle superficie sviluppabili.

158. Si sa (*Trig.* 193) che due equazioni fra tre variabili, si rappresentano con una linea considerata nello spazio, mentre che una sola equazione fra tre variabili appartiene ad una superficie. Allorchè si vuole applicare il Calcolo differenziale alle curve a doppia curvatura, si possono considerare come i limiti di poligoni di cui tre lati consecutivi non potrebbero essere nel medesimo piano. Il prolungamento di uno di questi lati dà la tangente nell' istesso modo che nelle curve piane.

Così la tangente MT della curva MX, fig. 38, è la retta che passa per i punti di cui le coordinate sono

$$x,\ y,\ z,\quad x+\mathrm{d}x,\quad y+\mathrm{d}y,\quad z+\mathrm{d}z,$$

e perciò l' equazioni delle sue proiezioni su i piani delle xy e delle xz, saranno

$$y'-y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x'-x),$$

$$z'-z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x'-x)\ (\textit{Trig.}\ 179),$$

le quali evidentemente appartengono alle linee M′ T′ e M″ T″, tangenti alle proiezioni M′ X′ e M″ X″ della curva proposta (68). Più non rimane che porre in queste equazioni, in luogo delle coordinate y, z e dei loro differenziali, i valori ricavati dall' equazioni delle proiezioni della curva proposta.

159. Due consecutive tangenti TM e *tm* determinano il piano che passa per due lati consecutivi o che si chiama *piano osculatore*, Si può trovare la sua equazione, considerandolo passare per tre punti consecutivi della curva proposta: sia dunque

$$z'=\mathrm{A}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{D}$$

la sua equazione; converrà che primieramente si abbia

$$z=\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{D},$$

poichè contener debbe il punto di cui le coordinate sono x, y e z; ed affinchè i due punti seguenti egualmente vi si trovino, bisognerà inoltre che il differenziale primo e il differenziale secondo della sua equazione abbiano luogo contemporaneamente quelli dell' equazioni della curva proposta.

Si potrebbe prendere uno dei differenziali dx, dy o dz per costante (133); ma sarà più regolare di trattarli tutti, nello stesso tempo, come variabili e verrà

$$dz = A\,dx + B\,dy,$$
$$d^2z = A\,d^2x + B\,d^2y,$$

da cui si ricaveranno

$$A = \frac{dz\,d^2y - dy\,d^2z}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \quad B = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dx\,d^2y - dy\,d^2x};$$

poi togliendo l'equazione

$$z = Ax + By + D,$$

da

$$z' = Ax' + By' + D,$$

ponendo in seguito per A e B i loro valori, facendo sparire i denominatori, e passando tutti i termini in un sol membro, si troverà

$$(x'-x)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (y'-y)(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + (z'-z)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0,$$

risultamento degno d' essere osservato per la sua forma.

Sostituendo a due qualunque delle tre coordinate x, y, z, i loro valori ricavati dall' equazioni della curva proposta, si avrà l' equazione del piano osculatore, particolarizzato dalla rimanente coordinata.

Offresi qui l' occasione di verificare ciò che si legge alla fine del n° 132; poichè se considerando primieramente y e z come funzioni di x, si fa

$$dy = p\,dx, \quad d^2y = q\,dx^2, \quad dz = p'dx, \quad d^2z = q'dx^2,$$

e che in seguito si suppongano le tre variabili funzioni d' una quarta t, si avrà pel n° 131,

$$d^2y = q dx^2 + p d^2x\,,\quad d^2z = q' dx^2 + p' d^2x\,,$$

valori di cui la sostituzione nell' equazione del piano osculatore, facendo sparire d^2x, conduce allo stesso risultamento, come si fosse fatto dx costante.

160. Si osserverà di passaggio che il differenziale dell'arco della curva ha per espressione

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)},$$

poichè è quella della distanza dei punti di cui le rispettive coordinate sono

$$x,\ y,\ z,\ x + dx,\ y + dy,\ z + dz\,.$$

161. La serie delle tangenti d' una curva a doppia curvatura, o ciò che è lo stesso, la serie del suoi piani osculatori, allorchè si conducono per dei punti poco lontani, forma un poliedro composto di piani angolari, uniti gli uni agli altri da un lato comune, e che possono essere ridotti allo stesso piano o svilupparsi, facendoli girare attorno a questo lato: ed è ciò che rappresenta la fig. 39. Se per maggior semplicità non vi si considerano in primo luogo che le linee in gran copia tirate, si vedrà bene come i lati del poligono $MM_1M_2M_3$ ec., prolungati, nello stesso senso, formano gli angoli

$$TMM_{1\,1},\quad TMT_{1\,2\,2},\quad TMT_{2\,3\,3},\quad TMT_{3\,4\,4},\ \text{ec.}$$

situati primieramente in piani diversi, e che si riducono in un solo, girando attorno le linee

$$MT_{1\,1},\quad MT_{2\,2},\quad MT_{3\,3},\ \text{ec.}$$

Considerando di poi i loro prolungamenti nel senso opposto, parti che sono punteggiate, e che incrociano la direzione delle altre, passando tanto al di sopra che al di sotto, per cui si vede nascere una seconda sezione del poliedro, la quale incontra la prima seguendo i lati del poligono, si ottiene così una linea di regresso sopra questo poliedro.

È necessario l' osservare che ciascun lato di questo poligono può essere considerato come l'intersecazione di due faccie consecutive del poliedro, e ciascuno de'suoi angoli, come quello di tre faccie consecutive dello stesso poliedro.

Posto ciò, se si concepisce che i punti presi sopra la proposta curva, per formare il poligono, s'avvicinino grado a grado, il poliedro tenderà incessantemente verso un corpo continuo, che ne farà il limite, come i cilindri ed i coni sono quelli dei prismi e delle piramidi, e la sua linea di regresso si cambierà nella curva proposta, la quale è pure chiamata *spigolo del regresso* della superficie formata dalle sue tangenti. Tale si è l'origine la più semplice delle superficie sviluppabili, annunciate nel n°. 143.

Allorchè si hanno l'equazioni della curva proposta, quella della superficie delle sue tangenti si ottiene facilmente; imperciocchè se nell'equazioni della tangente,

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x),$$

$$z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x) \quad (158),$$

si cambia x, y, z, in α, β, γ onde poter sopprimere gli accenti posti alle coordinate in corso di questa retta, e che si rappresentano con

$$\beta=\varphi(\alpha), \quad \frac{d\beta}{d\alpha}=\varphi'(\alpha), \quad \gamma=\psi(\alpha), \quad \frac{d\gamma}{d\alpha}=\psi'(\alpha),$$

l'equazioni delle proiezioni della curva proposta, ed i loro differenziali, di modo che l'equazioni della sua tangente diventano

$$y-\Phi(\alpha)=\varphi'(\alpha)(x-\alpha) \quad (a),$$
$$z-\psi(\alpha)=\psi'(\alpha)(x-\alpha) \quad (b),$$

questa retta non è più particolarizzata che dal valore di α. Se dunque si elimina α, la qual cosa è sempre possibile quando le funzioni Φ e ψ sono cognite, la risultante fra x, y e z apparterrà all'insieme delle tangenti della curva proposta, e sarà per conseguenza l'equazione della superficie ch'esse formano.

È evidente che si potrà riconoscere con questa equazione, se la data curva è piana o a doppia curvatura, poichè nel primo caso la superficie di cui si è parlato sarà un piano, e nel secondo una superficie curva.

Quando le forme delle funzioni φ e ψ non sono date, l'eliminazione non può effettuarsi che differenziando, ed allora si perviene al criterio generale delle superficie sviluppabili. Conviene primieramente osservare che l'equazione (a), stabilendo una relazione fra x, y ed α, mostra che l'ultima di queste quantità è una funzione delle altre due; differenzio dunque sotto questo punto di vista, e successivamente per rapporto ad x e per rapporto ad y, l'equazioni (a) o (b). Per brevità, pongo

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad \frac{d\alpha}{dx} = \alpha', \quad \frac{d\alpha}{dy} = \alpha';$$

dopo le riduzioni, viene

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(\alpha) + (x-\alpha)\,\alpha'\,\varphi''(\alpha), \\ 1 &= (x-\alpha)\,\alpha''\,\varphi''(\alpha), \\ p &= \psi'(\alpha) + (x-\alpha)\,\alpha'\,\psi''(\alpha), \\ q &= (x-\alpha)\,\alpha''\psi''(\alpha); \end{aligned}$$

mettendo allora nei valori di p e di q quelli di $(x-\alpha)\,\alpha'$, e di $(x-\alpha)\,\alpha''$, ricavati dalle due prime equazioni, p e q saranno espressi solamente per α, da delle funzioni arbitrarie di questa quantità: si avrà dunque

$$p = \pi(q),$$

indicando π una funzione dipendente da φ e da ψ ed arbitraria quanto queste.

Ora, se si fa come nel n°. 151,

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

che si differenzi successivamente per rapporto ad x e per rapporto ad y, l'equazione $p = \pi(q)$, si otterrà

$$r = \pi'(q)\,s, \quad s = \pi'(q)\,t;$$

ed eliminando la funzione π', si avrà finalmente l'equazione differenziale parziale di second'ordine

$$rt - s^2 = 0, \text{ ovvero } \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = 0,$$

che esprime il criterio generale delle superficie sviluppabili, scoperto dall'Eulero.

Conviene osservare primieramente che l'equazione (f) del §. 152 si riduce al primo grado, allorchè vi si fa $rt - s^2 = 0$, locchè mostra che le superficie sviluppabili non hanno che una sola curvatura, e che a parlare propriamente, l'uno dei due valori di δ diventa, in questo caso, infinito. La linea di curvatura che appartiene a siffatta equazione, è precisamente una delle tangenti generatrici, quella cioè che passa pel punto che si considera.

Il piano che tocca la curva in questo punto, passa per la stessa retta, in tutti i punti della quale si estende il contatto fra il piano e la proposta superficie, ed è ciò facile a vedersi, poichè questo piano altro non è che il limite dei piani condotti per due consecutive tangenti.

Tale proprietà particolare alle superficie sviluppabili, in quanto che esse sono composte di linee rette che si tagliano due a due, le distingue da tutte le altre superficie, su le quali il contatto con un piano non ha generalmente luogo che in un sol punto.

162. Condurre una normale ad una curva considerata nello spazio è un problema indeterminato; conciossiachè esiste un numero infinito di rette, le quali passando pel punto dato, sono nello stesso tempo perpendicolari alla tangente, l'insieme di queste rette forma un piano perpendicolare a questa tangente, e che si chiama *piano normale*. Dando all'equazioni della tangente (158) la forma

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z),$$

si vede che l'equazione del piano normale è

$$(x' - x)\frac{dx}{dz} + (y' - y)\frac{dy}{dz} + z' - z = 0 \ (Trig.\ 182),$$

ovvero

$$(x' - x)\,dx + (y' - y)\,dy + (z' - z)\,dz = 0 \ (1).$$

Consideriamo ora il piano normale al punto consecutivo; è evidente che taglierà quello che si è poc'anzi determinato, e che su questa intersecazione, le coordinate x', y', z

non avranno variato, quantunque x sia divenuta $x + dx$; dunque si avrà allora

$$(x' - x)\,d^2x + (y' - y)\,d^2y + (z' - z)\,d^2z - ds^2 = 0 \quad (2),$$

e ponendo per brevità,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

ed il sistema dell' equazioni (1) e (2) esprimerà la retta di cui si tratta. Se si combina con l' equazioni della curva proposta, per eliminare x, y, e z, rimarrà una sola equazione appartenente alla superficie, che è il limite delle intersecazioni successive dei piani normali, come la sviluppata delle curve piane è quella delle intersecazioni delle loro normali (80).

Questa superficie è evidentemente sviluppabile, essendochè come quella delle tangenti, è composta di linee rette, che si tagliano a due a due; giacchè se si sostituisce un poligono alla proposta curva, l' intersecazione del primo piano normale con il secondo, e quella del secondo col terzo, saranno tutte due nel secondo, e così dicasi degli altri piani consecutivi.

Quello che poc' anzi si è esposto viene pure provato dall' analisi; imperciocchè se si cambia x in α, come nel n° precedente, e si faccia $d\alpha$ costante, e che si sopprimano gli accenti, l' equazioni (1) e (2) diventeranno

$$x - \alpha + [y - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) + [z - \psi(\alpha)]\psi'(\alpha) = 0 \quad (1'),$$

$$\left.\begin{array}{l} [y - \varphi(\alpha)]\varphi''(\alpha) + [z - \psi(\alpha)]\psi''(\alpha) \\ -1 - \varphi'(\alpha)^2 - \psi'(\alpha)^2 \end{array}\right\} = 0 \quad (2');$$

la seconda essendo il differenziale della prima per rapporto ad α, indica che differenziare si può queste per rapporto ad x e y senza far variare α, poichè i termini che risulterebbero da siffatta funzione, sarebbero nulli in virtù della seconda equazione. Dunque la prima darà solamente

$$1 + p\psi'(\alpha) = 0, \qquad \varphi'(\alpha) + q\psi'(\alpha) = 0.$$

da cui conchiudere conviene, come nel n°. citato, che $p = \pi(q)$ (*).

163. Siamo ora in istato di determinare le curvature, o *flessi*, d'una curva a doppia curvatura. La prima, quella che sussisterebbe eziandio quando si sviluppasse la superficie delle sue tangenti o de' suoi piani osculatori, è quella del circolo che è il limite di tutti i circoli che passano per tre punti consecutivi di questa curva, e contenuto per conseguenza nel piano osculatore. Il suo centro che è evidentemente l'intersecazione di questo piano con i due piani normali consecutivi, sarà dato aggiungendo l'equazione del n°. 159, al sistema dell'equazioni (1) e (2) del n°. precedente.

Mediante queste equazioni si determineranno i valori di

$$x' - x, \qquad y' - y, \qquad z' - z,$$

onde sostituirli nell'espressione

$$\sqrt{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]},$$

che sarà quella del raggio cercato, che rappresenterò con u.

Se si pone primieramente per abbreviare,

(*) *Se nell'equazione* (1'), *si cambia* x *in* z, y *in* x, z *in* y, *e che si faccia*

$$\alpha + \varphi(\alpha)\,\varphi'(\alpha) + \psi(\alpha)\,\psi'(\alpha) = m$$

si potrà mettere

$$\varphi'(\alpha) = -F(m), \qquad \psi'(\alpha) = -H(m)$$

e ne verrà

$$z - m = x\,F(m) + y\,H(m) \quad (1''),$$
$$-1 = x\,F'(m) + y\,H'(m) \quad (2'').$$

Queste equazioni, che derivano da quella del piano $z = Ax + By + m$, *nella quale si è reso due delle costanti funzioni della terza, appartengono alle serie delle intersecazioni d'un piano soggetto a moversi in qualunque modo nello spazio; tale è l'enunciato il più conciso della formazione delle superficie sviluppabili.*

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = Z,$$
$$d\,z\,d^2x - dx\,d^2z = Y,$$
$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = X,$$

indicando ognuna di queste espressioni colla lettera che non vi si trova, l'equazione del piano osculatore (159) diverrà

$$X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z) = 0;$$

e combinando questa equazione con quella del primo piano normale, n°. precedente, se ne ricaveranno da prima i valori di $x'-x$, e di $(y'-y)$ dati in funzione di $z'-z$, che si porranno nell'equazione del secondo piano normale, che darà

$$z'-z = \frac{X\,dy - Y\,dx}{D}\,ds^2,$$

ovvero

$$D = (Y\,dz - Z\,dy)\,d^2x + (Z\,dx - X\,dz)\,d^2y + (X\,dy - Y\,dx)\,d^2z,$$

poi

$$x'-x = \frac{(Y\,dz - Z\,dy)\,ds^2}{D},$$
$$y'-y = \frac{(Z\,dx - X\,dz)\,ds^2}{D};$$

Aggiugnendo all' equazioni (1″) *e* (2″) *il differenziale della seconda preso solamente per rapporto ad* m, *onde passare al punto comune a due successive intersecazioni di piani generatori, si avrà per questo punto,*

$$0 = x\,F''(m) + y\,H''(m) \quad (3'');$$

e se si elimina m *fra l' equazioni* (1″), (2″) *e* (3″), *si otterrà la fermata del regresso della superficie sviluppabile* (161).

La famiglia delle superficie sviluppabili non comprende tutte quelle che sono generate dal movimento d' una retta; sonovi inoltre le superficie gobbe o regolate: vedete, *su questo argomento il Trattato in* 4°. *t. I, pag.* 606, *e t. III. pag.* 666.

e sostituendo questi valori nell' espressione di u^2, si troverà

$$u^2 = \frac{[(X dy - Y dx)^2 + (Z dx - X dz)^2 + (Y dz - Z dy)^2]\, ds^4}{D^2}.$$

Fatto ciò, si assicurerà facilmente che

$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

ed aggiungendo il quadrato di questa espressione al primo fattore del numeratore di u^2, si avrà

$$u^2 = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)\, ds^6}{D^2}.$$

Si vedrà pure sviluppando il valore di D, ch' essa si riduce a $X^2 + Y^2 + Z^2$: dunque per ultimo risultato, si otterrà

$$u^2 = \frac{ds^6}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

L' intersecazione di due cosecutivi piani normali essendo perpendicolare al piano del circolo che passa per i tre punti presi sopra la proposta curva, è l' asse, e ciascuno de' suoi punti può servire a descrivere il circolo, prendendo per raggio la distanza di questo punto a quelli del circolo; ma fra tutti questi raggi, si distingue sotto il nome di *raggio di curvatura assoluta*, quello che è nel piano istesso del circolo e che abbiamo trovato.

I valori di x', y' e z' faranno conoscere la posizione del centro di curvatura; ed eliminando , y e z si otterranno l' equazioni della curva formata da tutti questi centri; ma questa curva non è la sviluppata della proposta, se non quando cotesta è piana (*).

La precedente formola, dando come caso particolare, la curvatura dell' intersecazione d' una superficie e di un qualunque piano, si unisce a ciò che si è veduto sulla curvatura delle superficie (151). Mi limiterò qui al caso

---

(*) *Vedete pag.* 625 *e* 630 *del I. vol. del Trattato in* 4°.

in cui il piano secante passa per la normale alla superficie proposta; prenderò il piano tangente per quello delle xy, e per origine delle coordinate il punto ove si cerca la curvatura. Con questa ipotesi si ha $dz = 0$, ed ancora $d^2y = 0$, in causa che il piano secante essendo perpendicolare al piano tangente, l'intersecazione del primo con la superficie si proietta in linea retta su il secondo. Facendo poscia dx costante, risulta

$$Z = 0, \quad Y = -dx\,d^2z, \quad X = dy\,d^2z, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$u^2 = \frac{(dx^2 + dy^2)^2}{d^2z^2};$$

ma se si pone in generale $dz = p\,dx + q\,dy$, se ne dedurrà, nell'attuale ipotesi,

$$\begin{aligned} d^2z &= d\,(p\,dx + q\,dy) = dp\,dx + dq\,dy \\ &= (r + 2sm + tm^2)\,dx^2, \end{aligned}$$

secondo la notazione del §. 151, ove $dy = m\,dx$; e da ciò risulta

$$u = \pm \frac{1 + m^2}{r + 2sm + tm^2}.$$

Dipendendo questa espressione da m, cambia di valore con la direzione del piano secante, e può per conseguenza essere suscettibile di massimo o di minimo. Facendo eguale a zero il suo differenziale relativo ad m, si trova

$$(r + 2sm + tm^2)\,m - (1 + m^2)(s + tm) = 0,$$

locchè si riduce a

$$sm^2 + (r - t)\,m - s = 0;$$

così i valori di m son quivi i medesimi che al §. 151. Di più l'eliminazione di m condurrebbe fra u, r, s, t, a quello che diverrebbe l'equazione (f) (152), se vi si facesse $p = 0$, $q = 0$, $\delta = u$, di modo che i due valori di δ appartengono alle sezioni normali di maggior e minor curvatura.

164. La seconda curvatura, o il secondo flesso delle

curve che non sono piane, è la curvatura delle superficie sviluppabili formate dalle loro tangenti, ed indicate dagli angoli compresi fra i piani osculatori, siccome il loro primo flesso lo è dagli angoli compresi fra le loro tangenti. Ora le rette che sono le intersecazioni dei piani normali, essendo perpendicolari ai piani osculatori, comprendono fra loro il medesimo angolo di questi ultimi; di più siccome esse formano per il loro incontro la fermata del regresso della superficie dei piani normali, sono esse pure le tangenti di questa linea di fermata, che fanno per conseguenza fra loro degli angoli eguali a quelli dei piani osculatori corrispondenti; così il *secondo flesso della curva è eguale al primo flesso dello spigolo di regresso dei piani normali*. Questa relazione osservata da M. Fourier, è reciproca fra le due curve, poichè le tangenti della proposta comprendono evidentemente fra loro degli angoli eguali a quelli che formano i suoi piani normali, che sono i piani osculatori della fermata di regresso della superficie sviluppabile che compongono.

Sarebbe questo il luogo di parlare dei punti singolari, che possono presentare le curve a doppia curvatura; ma questa discussione troppo lungi mi condurrebbe; onde mi contenterò di far osservare che esse sono suscettibili di due sorte di flessi: l'uno che si riferisce alla loro prima curvatura, si manifesta come nelle curve piane, pel cambiamento di segno del loro raggio di curvatura assoluto; l'altro per quello del raggio di curvatura della superficie delle loro tangenti, o dello spigolo di regresso della superficie dei loro piani normali.

PARTE SECONDA

DEL

CALCOLO INTEGRALE

Dell'integrazione delle funzioni razionali d'una sola variabile.

165 Il Calcolo integrale è l'inverso del Calcolo differenziale; ed ha per oggetto di risalire dai coefficienti differenziali alle funzioni da cui derivano. L'esposizione dei principii di questo Calcolo presenta delle analoghe divisioni a quelle che offre il calcolo differenziale. Può accadere che la composizione dei coefficienti differenziali della cercata funzione, sia immediatamente data dalle variabili indipendenti, o che si abbia solamente un'equazione fra alcuni di questi coefficienti ed una o più delle variabili: essendo il primo caso il più semplice, è quello che primieramente conviene trattare.

Allorchè il coefficiente differenziale del prim'ordine d'una funzione di x è dato per x, si ha

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{X}, \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{d}y = \mathrm{X}\mathrm{d}x;$$

la funzione cercata è dunque quella di cui il differenziale è $\mathrm{X}\mathrm{d}x$, e s'indica come qui sotto

$$y = \int \mathrm{X}\mathrm{d}x,$$

la caratteristica $\int$, essendo l'inversa della caratteristica d (*).

Posto ciò, le diverse forme che aver può la funzione data X, si classificano come segue: funzioni razionali,

$$\frac{Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots.}{A'x^{m'} + B'x^{n'} + C'x^p + \ldots.} = \frac{U}{V};$$

funzioni irrazionali

$$U.V^{\frac{m}{n}};$$

funzioni trascendenti

$$f(U, l\,V), \quad f(U, \text{sen } V), \text{ ec.}$$

166. Si vede tosto che per effettuare l'integrazione, conviene distruggere le regole che hanno servito a differenziare; ma dalla prima di queste regole, si ha

$$d(u + v - w) = du + dv - dw \quad (10),$$

e se s'integra il primo membro, soppirmendovi la caratterristica d, si trova

---

(*) *Coloro che per i primi hanno scritto sul Calcolo integrale, hanno impiegato la lettera* $\int$ *come l'iniziale della parola* somma, *poichè seguendo le idee di Leibnitz, i differenziali rappresentano gli incrementi infinitamente piccoli delle variabili* (6), *ne segue che una variabile qualunque è la somma del numero infinito degli incrementi ch' essa ha ricevuto dalla sua origine sino al momento in cui si considera; ed è per questo che si è dato alla funzione, che ho chiamato* primitiva, *il nome d'* Integrale, *come essendo il risultamento dell' aggregazione di tutti i differenziali: si vedrà in seguito, ch'essa è in tutto rigore, il* limite *delle loro somme: siffatte denominazioni, essendo ben capite, si può indifferentemente servirsi dell' una o dell' altra.*

$$u + v - w = \int (du + dv - dw),$$

locchè riducesi a

$$\int du + \int dv - \int dw = \int (du + dv - dw);$$

onde risulta che

$$\int (Pdx + Qdx - Rdx) = \int Pdx + \int Qdx - \int Rdx,$$

vale a dire che *l'integrale della somma di più funzioni differenziali è eguale alla somma degli integrali di ciascuna di queste funzioni.*

Egualmente $d.au = adu$ (11) dà $au = \int adu$, e per conseguenza $\int adu = a\int du$, onde $\int Xdx = a\int Xdx$: si può dunque metter fuori dal segno $\int$ la costante a.

167. Il differenziale di $Ax^m + B$, essendo $mAx^{m-1}dx$, si conchiuderà che l'integrale di $ax^n dx$ è $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + B$; giacchè paragonando $ax^n dx$ con $mAx^{m-1}dx$, si ha

$$m - 1 = n, \quad \text{ed} \quad mA = a, \quad \text{o} \quad A = \frac{a}{m} = \frac{a}{n+1}.$$

Risulta da questo esempio che quando

$$dy = ax^n dx; \quad y = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + B,$$

cioè che *per integrare il differenziale monomio* $ax^n dx$, *bisogna aumentare l'esponente della variabile d'un'unità poi dividere pel nuovo esponente e per* dx.

La costante B è rimasta arbitraria, come si dovea aspettarsi (7).

168. Prima d'andare oltre è bene l'esaminare un caso particolare, nel quale la regola stabilita è fallace; ed è quello in cui $n = -1$. Risulta allora

$$y = \frac{ax^0}{0} + B = \frac{a}{0} + B;$$

ma se si osserva che

$$dy = ax^{-1}dx = \frac{adx}{x} = ad.lx \ (29),$$

subitamente si conoscerà che

$$y = alx + B,$$

e che l'eccezione che qui presenta la regola del §. precedente, viene dall'impossibilità d'esprimere la trascendente lx in un numero finito di termini algebraici.

Nondimeno un semplice cambiamento di forma nella costante B, basta per unire questo caso particolare alla formola generale; poichè se si scrive $-\frac{a}{n+1}+B$ in vece di B, ciò che è permesso, giacchè questa costante è arbitraria, la formola generale è allora

$$y = \frac{ax^{n+1}-a}{n+1}+B,$$

e diventa $^{o}_{o}$ quando $n=-1$: ma se vi si applica il processo del §. 95, prendendo n per variabile, si otterrà il vero valore

$$y = alx + B,$$

come il superiore.

169. L'espressione

$$dy = ax^m dx + bx^n dx - cx^p dx \ldots\ldots$$

che rappresenta un differenziale razionale ed intero, d'altronde qualunque, conduce a

$$y = \frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{n+1}}{n+1}-\frac{cx^{p+1}}{p+1}\ldots\ldots+B,$$

inseguito delle regole dei §. 166 e 167.

Non vi aggiungo che una costante arbitraria; imperocchè è facile il vedere che se ne fosse aggiunta una per ciaschedun monomio, esse non equivalerebbero tutte insieme che ad una sola, la quale sarebbe eguale alla loro somma.

170. Se si avesse $dy=(ax+b)^m dx$, si svilupperebbe l'indicata potenza, e s'integrerebbe ciascun monomio che risulterebbe da quest'operazione; ma è bene l'osservare che giugnere si può al risultamento, senza effettuare lo sviluppo. Basta fare $ax+b=z$, ciò che dà $x=\frac{z-b}{a}$,

$dx = \frac{dz}{a}$; sostituendo nell' espressione di dy, si trova $dy = \frac{z^m dz}{a}$, e per conseguenza $y = \frac{z^{m+1}}{a(m+1)} + B$. Ponendo per z il suo valore, si avrà dunque, allorchè

$$dy = (ax+b)^m dx, \quad y = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + B.$$

Egualmente se $dy = (ax^n + b)^m x^{n-1} dx$, riesce la trasformazione; imperciocchè ponendo $ax^n + b = z$, risulta $nax^{n-1}dx = dz$, onde

$$x^{n-1}dx = \frac{dz}{na}, \quad dy = \frac{z^m dz}{na} \quad \text{e} \quad y = \frac{z^{m+1}}{na(m+1)} + B,$$

ciò che dà, allorchè

$$dy = (ax^n + b)^m x^{n-1} dx, \quad y = \frac{(ax^n + b)^{m+1}}{na(m+1)} + B.$$

171. Passo alle funzioni frazionarie, e per cominciare dal caso più semplice, suppongo che si abbia $dy = \frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$. Facendo $ax + b = z$, si trova

$$x = \frac{z-b}{a}, \qquad dx = \frac{dz}{a},$$

e per conseguenza

$$dy = \frac{A(z-b)^m dz}{a^{m+1} z^n};$$

sviluppando la potenza $(z-b)^m$, moltiplicando il risultamento per dz, e dividendo poscia per z^n, si avrà una serie di monomii da integrare.

Prendiamo per esempio il caso in cui $m=3$ ed $n=2$; verrà

$$dy = \frac{A(z-b)^3 dz}{a^4 z^2} = \frac{A}{a^4}\left[z dz - 3b dz + 3b^2 z^{-1} - b^3 z^{-2} dz\right];$$

applicando a ciascuno di questi monomii la regola generale (167), ne risulterà

$$y = \frac{A}{a^4}\left(\frac{z^2}{2} - 3bz + 3b^2 lz + b^3 z^{-1}\right) + B.$$

Si riporrà di poi per z il suo valore, e si avrà finalmente, quando

$$dy = \frac{Ax^3 dx}{(ax+b)^2},$$

$$y = \frac{A}{a^4}\left[\tfrac{1}{2}(ax+b)^2 - 3b(ax+b) + 3b^2(ax+b) + b^3(ax+b)^{-1}\right] + B.$$

Si costruirebbe senza difficoltà la formola generale; e avendosi

$$dy = \frac{Ax^n dx + Bx^p dx + Cx^q dx \ldots\ldots}{(ax+b)^m},$$

si scriverebbe come segue,

$$dy = \frac{Ax^n dx}{(ax+b)^m} + \frac{Bx^p dx}{(ax+b)^m} + \frac{Cx^q dx}{(ax+b)^m} \ldots,$$

poi si opererebbe in particolare su ciascun termine, siccome ho fatto sul primo.

172. I differenziali frazionari e razionali sono generalmente della forma

$$\frac{(Ax^m + Bx^n + Cx^p \ldots)\, dx}{A'x^m + B'x^{n'} + C'x^{p'} \ldots},$$

che per brevità rappresenterò con $\frac{U dx}{V}$. Primieramente conviene osservare che l'esponente di x nel numeratore può supporsi minore di quello che è nel denominatore; poichè se ciò non fosse, dividendo U per V, e chiamando Q il quoziente di questa divisione ed R il resto, verrebbe $\int \frac{U dx}{V} = \int Q dx + \int \frac{R dx}{V}$; ma Q essendo una funzione razionale ed intera, $\int Q dx$ si otterrebbe mediante l'immediata applicazione della regola del §. 167, e più non resterebbe da trovare se non che $\int \frac{R dx}{V}$, nella

quale la funzione R è, per rapporto ad x, d'un grado meno elevata della funzione V. La formola più generale che aver possa la frazione $\frac{U dx}{V}$, sarà dunque

$$\frac{(A\,x^{n-1} + B\,x^{n-2} + C\,x^{n-3} \ldots T)dx}{x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} \ldots + T'},$$

Il metodo generale per integrare i differenziali espressi da frazioni razionali, consiste in decomporli in altri di cui i denominatori sieno più semplici, che s'indicano sotto il nome di frazioni parziali, e che si ottengono come segue.

Facendo eguale a zero il denominatore della proposta frazione, si formerà l' equazione

$$x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} \ldots + T = 0,$$

e supponendo che si sieno determinate le diverse radici di quest' equazione, si potranno rappresentare con

$$a,\quad a',\quad a'',\quad a''',\quad \text{ec.}$$

considerandole tutte disuguali; con questo mezzo, il primo membro della suddetta equazione, o il denominatore della frazione proposta, sarà messo sotto la formola d'un prodotto di n fattori

$$x-a,\quad x-a',\quad x-a'',\quad x-a''',\ \text{ec.}$$

Fatto ciò si considererà la proposta frazione come la somma delle frazioni

$$\frac{N dx}{x-a},\quad \frac{N' dx}{x-a'},\quad \frac{N'' dx}{x-a''},\quad \text{ec.}$$

avendo per denominatori i fattori del denominatore della proposta, e per numeratore delle costanti indeterminate.

Immagino, per fissare le idee, che il differenziale da integrare sia

$$\frac{(Ax^2 + Bx + C)\,dx}{x^3 + A'x^2 + B'x + C'},$$

e che si abbia trovato

$$x^3 + A'x^2 + B'x + C' = (x-a)(x-a')(x-a'').$$

Riducendo allo stesso denominatore le frazioni

$$\frac{N\,dx}{x-a}, \quad \frac{N'\,dx}{x-a'}, \quad \frac{N''\,dx}{x-a''},$$

ed aggiungendole verrà

$$\frac{N(x-a')(x-a'')+N'(x-a)(x-a'')+N''(x-a)(x-a')}{(x-a)(x-a')(x-a'')}\,dx;$$

il denominatore sarà lo stesso che quello della proposta, ed il numeratore sarà necessariamente una funzione di grado inferiore a quello del numeratore, cioè di secondo grado. Sviluppando si ha infatti

$$\left[(N+N'+N'')x^2 - N((a'+a'')+N'(a+a'')+N''(a+a'))x + Na'a''+N'aa''+N''aa'\right]dx,$$

Questa funzione essendo paragonata col numeratore della proposta funzione, dà le tre equazioni

$$\begin{aligned} N+N'+N'' &= A, \\ -N(a'+a'')-N'(a+a'')-N''(a+a') &= B, \\ Na'a''+N'aa''+N''aa' &= C, \end{aligned}$$

le quali sono di primo grado, per rapporto alle indeterminate N, N' e N''.

Per risolvere queste equazioni, basta moltiplicare la prima per a^2, la seconda per a, ed aggiungere i prodotti con la terza; in questo modo si trova

$$\begin{aligned} Aa^2+Ba+C &= N\left[a^2-(a'+a'')a+a'a''\right] \\ &= N(a-a')(a-a''), \end{aligned}$$

dalle leggi della composizione dell' equazioni, e per conseguenza

$$N = \frac{Aa^2+Ba+C}{(a-a')(a-a'')},$$

ove *il numeratore è ciò che diventa quello della frazione proposta, quando vi si cambia* x *in* a, *ed il*

denominatore, il prodotto delle differenze fra la radice a *e tutte le altre.*

Seguendo questa legge, si avrà senza calcolo,

$$N' = \frac{Aa'^2 + Ba' + C}{(a' - a)(a' - a'')}, \quad N'' = \frac{Aa''^2 + Ba'' + C}{(a'' - a)(a' - a')},$$

e non sarebbe difficile l' accertarsi che conviene al caso generale; ma ben presto vi giugneremo ancora più facilmente.

Posto ciò, poichè

$$\frac{(Ax^2 + Bx + C)}{x^3 + A'x^2 + B'x + C'} = \frac{N dx}{x - a} + \frac{N' dx}{x - a'} + \frac{N'' dx}{x - a''},$$

si farà primieramente $x - a = z$, e si avrà $\frac{N dx}{x - a} = \frac{N dz}{z}$, di cui l' integrale è $N lz$, o $N l(x - a)$. Egualmente si troverà che

$$\int \frac{N' dx}{x - a'} = N' l(x - a'), \quad \int \frac{N'' dx}{x - a''} = N'' l(x - a'');$$

e per conseguenza si avrà

$$\int \frac{(Ax^2 + Bx + C)\, dx}{x^3 + A'x^2 + B'x + C'}$$
$$= N l(x - a) + N' l(x - a') + N'' l(x - a'') + \textit{costant.}$$
$$= l\left[(x - a)^N (x - a')^{N'} (x - a'')^{N''}\right] + \textit{costant.}$$

173. L' integrazione delle frazioni razionali non ha dunque difficoltà alcuna, quando sono decomposte come si è veduto in frazioni parziali, i denominatori delle quali sono binomii di primo grado; ma questa formola non ha luogo che per i fattori i quali sono semplici nel denominatore della proposta frazione. In fatti, la supposizione di $a' = a$, nell' esempio del n° precedente, rende infiniti i valori di N, N', ed avviene questo, perchè nell' insieme delle frazioni parziali,

$$\frac{N}{x-a}+\frac{N'}{x-a}=\frac{N+N'}{x-a},$$

la somma delle indeterminate $N+N'$, riguardandola come fosse una sola, più non se ne trova un numero bastevole.

Si previene questo inconveniente, sostituendo a queste due frazioni, che più non ne formano che una, la seguente

$$\frac{(Nx+N')\,dx}{(x-a)^2};$$

e riducendola allo stesso denominatore, coll'ultima $\frac{N''dx}{x-a}$, si ottiene ancora un numero d'equazioni eguale a quello delle incognite N, N' ed N''.

L'integrazione della nuova frazione non offre d'altronde alcuna difficoltà, poichè facendo $x-a=z$, si ricade su dei monomii, come nell'esempio ultimo del nº 171, di cui questo non è che un caso particolare.

In generale se il denominatore V della frazione proposta contenesse il fattore $(x-a)^m$, bisognerebbe prendere per questo fattore una frazione parziale della forma

$$\frac{(Nx^{m-1}+N_1x^{m-2}+N_2x^{m-3}\ldots+N_{m-1})\,dx}{(x-a)^m},$$

la quale s'integrerebbe ponendo

$$x-a=z, \quad \text{onde} \quad x=a+z, \quad dx=dz.$$

Ma il risultato di questa sostituzione essendo della forma

$$\frac{(M+M_1z+M_2z^2\ldots+M_{m-1}z^{m-1})\,dz}{z^m},$$

ritorna a

$$\frac{Mdz}{z^m}+\frac{M_1dz}{z^{m-1}}+\frac{M_2dz}{z^{m-2}}\ldots+\frac{M_{m-1}dz}{z},$$

e mostra che alla frazione primitiva sostituire si possono le seguenti

$$\frac{M dx}{(x-a)^m} + \frac{M_1 dx}{(x-a)^{m-1}} + \frac{M_2 dx}{(x-a)^{m-2}} \cdots + \frac{M_{m-1} dx}{x-a},$$

i numeratori delle quali sono costanti, e che s' integrano ancora nel modo istesso del n°. 171.

174. Quest' ultima formola e quella che corrisponde ai fattori disuguali (172), sono le più semplici nelle quali decompor si possano le frazioni razionali da integrare, e danno luogo ad una sussidiaria operazione, che si divide in due parti. La prima, che consiste a determinare i fattori del denominatore V, dipende, come l' abbiamo già detto, dalla soluzione dell' equazione $V = o$ (172); la seconda parte, che è la determinazione dei numeratori delle frazioni parziali, s' effettua in molti modi, delle quali ecco le più elementari.

Mettendo da parte un fattore semplice $x - a$ del denominatore, si pone

$$V = (x-a)Q \quad e \quad \frac{U}{V} = \frac{N}{x-a} + \frac{P}{Q},$$

essendo P una funzione di x, proveniente dalla riduzione allo stesso denominatore di tutte le frazioni toltone $\frac{N}{x-a}$, che entra nella proposta; sarà questa per conseguenza una funzione intera per rapporto ad x. Ma riducendo allo stesso denominatore i due membri dell'ultima equazione, posta qui sopra, si avrà

$$U = NQ + (x-a)P, \text{ onde } P = \frac{U - NQ}{x-a},$$

e poichè P è una funzione intera di x, bisognerà che $U - NQ$ sia divisibile per $x - a$, ciò che non può aver luogo, secondo il teorema fondamentale della composizione dell' equazioni, a meno che il polinomio $U - NQ$ non isparisca, allorchè vi si cambia x in a.

Se dunque s' indica con u e con q, ciò che diventa U e Q, dopo questa sostituzione, la quale non cambia nulla ad N, poichè è una costante, si avrà

$$u - Nq = o, \quad e \quad N = \frac{u}{q},$$

erpressione di cui il valore sarà sempre finito; imperocchè il suo numeratore ed il suo denominatore non potrebbero diventar nulli, giacchè la frazione essendo ridotta alla sua più semplice espressione, il fattore $x-a$ non farà parte di U, e non entrerà neppure in Q, stante che non si trova che una volta in V: sarà dunque sempre possibile d'ottenere la frazione parziale corrispondente ad un fattore di questa specie.

Se si pone in vece di U, ciò che rappresenta (172), e che si osservi che

$$Q = (x-a')\ (x-a'')\ (x-a''')\ \text{ec.}$$

si ottiene

$$N = \frac{u}{q} = \frac{Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + Ca^{n-3} \ldots + T}{(a-a')\ (a-a'')\ (a-a''')\ \text{ec.}},$$

espressione, che rientra nell' enunciata legge (172).

175. Vediamo ora come si possono trovare i numeratori delle frazioni parziali, che corrispondono ai fattori eguali. Sia $V = Q(x-a)^m$; poniamo

$$\frac{U}{V} = \frac{N}{(x-a)^m} + \frac{N_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{N_2}{(x-a)^{m-2}} \ldots + \frac{N_{m-1}}{x-a} + \frac{P}{Q}$$

(173), formola che dalla determinazione delle incognite rimane verificata. Riducendo allo stesso denominatore, verrà

$$U = Q\left[N + N_1(x-a) + N_2(x-a)^2 \ldots + N_{m-1}(x-a)^{m-1}\right] + P(x-a)^m,$$

$$P = \frac{U - Q\left[N + N_1(x-a) + N_2(x-a)^2 \ldots + N_{m-1}(x-a)^{m-1}\right]}{(x-a)^m};$$

e siccome P debb' essere una funzione intera, bisognerà che il numeratore della sua espressione sia divisibile m volte di seguito per $x-a$; dunque questo numeratore sparirà allorchè vi si cambierà x in a. Si vede primieramente che si riduce in questo caso ad $U - QN$; ma affinchè $U - QN$ sia divisibile per $x-a$ bisogna, conservando le stesse denominazioni come nel n° precedente, che si abbia $u - qN = 0$, ovvero $N = \frac{u}{q}$.

Questo valore cambierà $U - QN$ in $U - \frac{u}{q} Q$, il quale dividendo allora per $x-a$, sarà della formola $U_1 (x-a)$, indicando U_1 il quoziente; e la soppressione del fattore $x-a$ nei due termini di P, darà

$$P = \frac{U_1 - Q\left[N_1 + N_2(x-a) \ldots + N_{m-1}(x-a)^{m-2}\right]}{(x-a)^{m-1}}.$$

Per ottenere ora N_1, si farà $x - a = 0$, e chiamando u_1, ciò che diventa U_1, pel cambiamento di x in a, si avrà $u_1 - q N_1 = 0$, o $N_1 = \frac{u_1}{q}$.

Ponendo poscia, in vece di N_1, il suo valore in $U_1 - QN_1$, ne risulterà la quantità $U_1 - \frac{u_1}{q} Q$, la quale, sparendo quando $x - a = 0$, sarà divisibile per $x - a$, e per conseguenza P si ridurrà a

$$P = \frac{U_2 - Q\left[N_2 + N_3 x - a) \ldots + N_{m-1}(x-a)^{m-3}\right]}{(x-a)^{m-2}},$$

rappresentando U_2 il quoziente della divisione di $U_1 - \frac{u_1}{q} Q$ per $x - a$. Continuando nella maniera stessa, si troverà ancora $u_2 - q N_2 = 0$, onde $N_2 = \frac{u_2}{q}$, e così degli altri, senza giammai cadere sopra valori infiniti.

176 Il calcolo differenziale facilita molto le precedenti operazioni. In fatti, se si differenzia successivamente $n-1$ volte, l'equazione

$$U = Q\left[N + N_1 (x-a) + N_2 (x-a)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + N_{m-1}(x-a)^{m-1}\right] + P(x-a)^m,$$

e che si faccia in seguito $x - a = 0$, in questa equazione, e in quelle che si avranno dedotte, verranno

$$U = N Q,$$
$$dU = N\,dQ + N_1 Q\,dx,$$
$$d^2 U = N\,d^2 Q + 2 N_1\,dQ\,dx + 2 N_2 Q\,dx^2,$$
$$d^3 U = N\,d^3 Q + 3 N_1\,d^2 Q\,dx + 6 N_2\,dQ\,dx^2 + 6 N_3 Q\,dx^3$$
etc.,

equazioni, che determinano ciascuna delle incognite N, N_1, N_2, ecc., mediante quelle che la precedono; ben inteso che dopo le differenziazioni, bisognerà cambiare x in a.

Il mezzo più semplice per ottenere il valore di Q, in questo caso, è di dividere V per $(x-a)^m$; altro pervenirvi si può colla differenziazione; conciossiachè avendo $V = Q(x-a)^m$, differenziando un numero m di volte ciascuno dei membri di questa equazione, e facendo di poi $x-a=0$, si troverà $d^mV = m(m-1)\ldots 2.1.Q\,dx^m$ (57), e per conseguenza $Q = \frac{d^m V}{1.2\ldots m\,dx^m}$.

Si perverrà all'espressione dei differenziali di Q, nell'ipotesi di $x-a=0$, prendendo successivamente quelli dell'ordine $m+1$, $m+2$, ecc., dall'equazione $V = Q(x-a)^m$; poichè è facile vedere dopo, l'osservazione del n. 57, che in questo caso $d^{m+1}V = d^{m+1}Q(x-a^m)$, per esempio, si riduce a $(m+1)m..2.1\,dQ\,dx^{m+1}$. Perlocchè ne segue che esprimere si potranno le indeterminate N_1, N_2, N_3, ecc., coll'aiuto dei differenziali del numeratore U, e di quelli del denominatore V della frazione proposta (1).

177. La sostanza del calcolo non cambiarebbe, quando anche qualcheduna delle radici a, a', a'', ecc., non fossero reali; le immaginarie che s'introdurrebbero allora nei numeratori delle frazioni parziali, sparirebbero mediante le riduzioni allo stesso denominatore; ma è forse più semplice l'evitare queste formole, non scomponendo il denominatore V che in fattori reali, ciò che è sempre possibile, poichè i fattori immaginari d'un polinomio qualunque, si aggruppano due a due in fattori reali del secondo grado. (*Supplemento agli elementi dell'algebra*).

(*) *Vedete* il Trattato in 4.°, t. II, pag. 19; *vedete* pure negli *Atti dell' Accademia di Pietroburgo, anno* 1780, *parte* 1.ª, *pag.* 32, come l'Eulero, col mezzo di uno sviluppo analogo a quello di u', nel n.° 92, determina i numeratori delle frazioni parziali, le quali sono i coefficenti delle negative potenze di h, quando si cangia P in $\frac{U}{Q}$.

Questi fattori possono essere generalmente rappresentati da

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2;$$

e per ottenere le frazioni parziali corrispondenti, non bisogna che pochissimo modificare i processi dei numeri 174 e 175.

Nel caso d'un fattore semplice, si pone

$$\frac{U}{V} = \frac{Mx + N}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} + \frac{P}{Q},$$

donde si ricava

$$U = Q(Mx + N) + P(x - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2),$$

$$P = \frac{U - Q(Mx + N)}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2};$$

e ragionando come nel no. 174, poichè P debb'esser sempre una funzione intera di x: bisogna che la quantità $U - Q(Mx + N)$ sia divisibile per $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$: dunque racchiuder debbe, nel numero de'suoi fattori, quelli di quest'ultimo, e per conseguenza sparire nelle stesse circostanze. Ma le radici di $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0$, sono

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad x = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

valori, che sostituiti successivamente in $U - Q(Mx + N)$ debbono fare sparire questa quantità. Sieno dunque $u \pm u'\sqrt{-1}$, e $q \pm q'\sqrt{-1}$, quello che diventano U e Q, dopo questa sostituzione; si avrà

$$u \pm u'\sqrt{-1} - (q \pm q'\sqrt{-1})\left[M(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) N\right] = 0\ (*),$$

equazione doppia, a motivo del segno $\pm$ di cui sono affetti molti de'suoi termini, e che è equivalente a quelle che si formerebbero, eguagliando a zero separatamente la

---

(*) Sviluppando le potenze $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^m$ e $(\alpha - \beta\sqrt{-1})^m$, si vedrà che l'espressioni tali come $Ax^m + Bx^n - Cx^p +$ ecc., debbono in fatti prendere la supposta formola.

parte reale e la parte immaginaria. Dietro questa considerazione, si avrà

$$u-(q\alpha-q'\beta)\,\mathrm{M}-q\,\mathrm{N}=0,$$
$$u'-(q'\alpha+q\beta)\,\mathrm{M}-q'\mathrm{N}=0,$$

equazioni che daranno i valori di M e di N.

178. Se il fattore $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, che per brevità rappresenterò con R, si trova molte volte nel denominatore V, e che si abbia

$$\mathrm{V}=\mathrm{Q}(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^m=\mathrm{Q}\,\mathrm{R}^m,$$

si prenderà in questo caso (175),

$$\frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{\mathrm{R}^m}+\frac{\mathrm{M}_1x+\mathrm{N}_1}{\mathrm{R}^{m-1}}+\frac{\mathrm{M}_2x+\mathrm{N}_2}{\mathrm{R}^{m-2}}\ldots\ldots+\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}};$$

riducendo allo stesso denominatore, e ricavando il valore di P, verrà

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{U}-\mathrm{Q}\left[\mathrm{M}x+\mathrm{N}+(\mathrm{M}_1x+\mathrm{N}_1)\mathrm{R}+(\mathrm{M}_2x+\mathrm{N}_2)\mathrm{R}^2+\ldots\right]}{\mathrm{R}^{m-1}}.$$

Ragionando in questo caso come nei precedenti, si conchiuderà che il numeratore di quest' espressione sparir debbe nella supposizione di $x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, che rende pure $\mathrm{R}=0$; e ritenendo le stesse denominazioni come sopra; si avrà, dopo questa operazione,

$$u\pm u'\sqrt{-1}-(q\pm q'\sqrt{-1})\left[\mathrm{M}(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+\mathrm{N}\right]=0,$$

ciò che darà per determinare M ed N le stesse equazioni che nel n°. precedente. Avendo trovato i valori di queste quantità, si sostituiranno nel numeratore di P; ed i termini $\mathrm{U}-\mathrm{Q}(\mathrm{M}x+\mathrm{N})$, diventando divisibili per R, ovvero $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, l'intera espressione lo diventerà pure. Chiamando dunque U_1, il quoziente di $\mathrm{U}-\mathrm{Q}(\mathrm{M}x+\mathrm{N})$ per $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, si verrà a

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{U}_1-\mathrm{Q}\left[\mathrm{M}_1x+\mathrm{N}_1+(\mathrm{M}_2x+\mathrm{N}_2)\mathrm{R}+\ldots\right]}{\mathrm{R}^{m-1}}.$$

Rimettendo in questo nuovo numeratore per x, i valori $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, poi eguagliando il risultato a zero, M_1 e N_1 saranno determinate, come lo sono state superiormente M ed N, e si continuerà l'operazione nello stesso modo per pervenire ai valori delle lettere M_2, N_2, M_3, N_3, ecc.

179. Questo caso è perfettamente analogo a quello che si è trattato nel n. 175; e il calcolo differenziale si applica nello stesso modo, all'uno e all'altro, mediante l'equazione

$$U = Q\left[Mx + N + (M_1 x + N_1)R + (M_2 x + N_2)R^2 + \ldots\right] + PR^m,$$

e dei suoi differenziali, nei quali sino all'ordine $m - 1$ inclusivamente, quelli pel termine PR^m svaniscono allorchè si fa $R = 0$. Si otterranno in questo modo le equazioni

$$U = (Mx + N)Q$$
$$dU = (Mx + N)\,dQ + MQ\,dx + (M_1 x + N_1)Q\,dR,$$

ecc.,

ciascuna delle quali diventerà doppia, quando si porrà in luogo di x i valori di cui è suscettibile in virtù dell'equazione $R = 0$, o $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0$. Facendo separatamente eguale a zero la parte reale e la parte immaginaria, si otterranno un numero sufficente di equazioni, per determinare M, N, M_1, N_1, ecc.

È necessario ancora osservare che da

$$V = Q\,R^m,$$

si ricaverà

$$d^m V = Q\,d^m.R^m, \text{ onde } Q = \frac{d^m V}{d^m.R^m}.$$

quando si supporrà

$$R \text{ o } x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Si troveranno dQ, d^2Q, ecc., nell'istessa ipotesi, prendendo i differenziali degli ordini $m + 1$, $m + 2$, ecc. dell'equazione

$$V = Q\,R^m,$$

e sopprimendo di poi i termini che rendono nulli quest' ipotesi.

180. Per integrare la fiazione

$$\frac{(\mathrm{M}x+\mathrm{N})\,\mathrm{d}x}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2},$$

si osserverà che

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=(x-\alpha)^2+\beta^2,$$

si farà

$$x-\alpha=z,$$

e verrà

$$\frac{(\mathrm{M}x+\mathrm{N})\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{(\mathrm{M}z+\mathrm{M}\alpha+\mathrm{N})\,\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}=\frac{(\mathrm{M}z+\mathrm{N}')\,\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2},$$

ponendo

$$\mathrm{M}\alpha+\mathrm{N}=\mathrm{N}'.$$

E siccome

$$\frac{(\mathrm{M}z+\mathrm{N}')\,\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}=\frac{\mathrm{M}z\,\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}+\frac{\mathrm{N}'\,\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}:$$

la prima parte del secondo membro della qui sopra equazione è integrabile; poichè, facendo $z^2+\beta^2=u$, si ha $z\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}u}{2}$, locchè dà

$$\int\frac{\mathrm{M}z\,\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}=\frac{\mathrm{M}}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\mathrm{M}.\frac{1}{2}\,\mathrm{l}u=\mathrm{M}\,\mathrm{l}\sqrt{(z^2+\beta^2)}.$$

In quanto poi alla seconda parte, se vi si fa $z=\beta u$, si cambia in

$$\frac{\mathrm{N}'\,\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}=\frac{\mathrm{N}'}{\beta}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1};$$

ma si è veduto, n°. 36, che $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ è il differenziale dell'arco di cui la tangente $=u$: dunque

$$\int \frac{N'}{\beta}\frac{du}{u^2+1} = \frac{N'}{\beta}\,\text{arc}\,(\text{tang} = u) + \textit{costant.}$$

$$= \frac{N'}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{\beta}\right) + \textit{costant.}$$

Riunendo questi due risultati, si otterrà.

$$\int \frac{(Mz+N')dz}{z^2+\beta^2} = M\,l\sqrt{(z^2+\beta^2)} + \frac{N'}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{\beta}\right) + \textit{cost.}$$

È bene l'osservare che l'arco di cui la tangente è $\frac{z}{\beta}$ ha per seno $\frac{z}{\sqrt{(z^2+\beta^2)}}$, per coseno $\frac{\beta}{\sqrt{(z^2+\beta^2)}}$ (Trig. 29); imperciocchè questa considerazione offre il mezzo di rappresentare il proposto integrale sotto molte formole, indicando l'arco per il suo seno o per il suo coseno.

Quando si ripone per z il suo valore, si trova

$$\int \frac{(Mx+N)}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} =$$

$$M\,l\sqrt{(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)} + \frac{M\alpha+N}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \textit{cost.}$$

Veniamo ora al differenziale

$$\frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^m}:$$

si farà primieramente $x-\alpha = z$ ed $M\alpha+N = N'$; con questo mezzo non si avrà più che a trovare $\int \frac{(Mz+N')dz}{(z^2+\beta^2)^m}$, che si può scrivere in questo modo:

$$M\int \frac{z\,dz}{(z^2+\beta^2)^m} + N'\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^m}.$$

La prima parte è immediatamente integrabile; e ciò vede facendo $z^2+\beta^2 = u$, poichè si ha

$$z\,dz = \frac{du}{2},$$

dal che si ricava

$$M\int \frac{z\,dz}{(z^2+\beta^2)^m} = \frac{M}{2}\int \frac{du}{u^m} = \frac{M\,u^{-m+1})}{2\,(1-m)}.$$

In quanto alla seconda parte, essa è compresa in una classe di formole di cui tosto ci occuperemo, e mediante le qnali la sua integrazione si fa dipendere da quella della formola $\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{m-1}}$ (200), in cui l'esponente del denominatore è minore d'un'unità, e così di seguito sino a $\int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$, già ottenuto.

Avvicinando i precedenti risultati, si osserverà indubitabilmente che i differenziali, i quali si presentano sotto la formola di frazioni razionali, possono sempre integrarsi, sia algebraicamente, sia per mezzo dei logaritmi o degli archi circolari.

181. Darò ora di quello che precede un'applicazione. Sia la frazione

$$\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}:$$

i fattori del suo denominatore sono facili da scoprirsi; poichè si può porre sotto la formola

$$x^3(x^5+x^4-x-1) = x^3(x+1)(x^4-1).$$

Il fattore x^4-1 si decompone in x^2-1, e x^2+1, o $x-1$, $x+1$ e x^2+1: si ha dunque

$$x^8+x^7-x^4-x^3 = x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1);$$

e per conseguenza la frazione proposta è decomponibile come segue (172,173):

$$\frac{A\,dx}{x-1}+\frac{B\,dx}{(x+1)^2}+\frac{C\,dx}{x+1}+\frac{D\,dx}{x^3}+\frac{E\,dx}{x^2}+\frac{F\,dx}{x}+\frac{(Gx+H)\,dx}{x^2+1}.$$

Riducendo allo stesso denominatore, e paragonando il risultato con $\frac{dx}{x^5+x^7-x^7-x^3}$, si determinerebbero i numeratori incogniti; ma farò uso degli altri sopraindicati modi di procedere.

Considero perciò separatamente i quattro fattori.

$$x-1,\ (x+1)^2,\ x^3 \text{ e } x^2+1,$$

che formano il denominatore della proposta frazione. Al primo corrisponde una frazione della formola $\frac{N}{x-1}$; le quantità $U=1$ e $Q=x^3(x+1)^2(x^2+1)$, quando vi si fa $x=1$, danno $u=1$, $q=8$; si ha dunque (174) $N=\frac{1}{8}$, e per la prima frazione parziale $\frac{1}{8}\frac{1}{x-1}$.

Farò osservare che si sarebbe immediatamente trovato il valore di q, differenziando il denominatore $x^8+x^7-x^7-x^3$, facendo poscia $x=1$ (176).

Al fattore $(x+1)^2$ corrispondono due frazioni parziali della formola

$$\frac{N}{(x+1)^2}+\frac{N_1}{x+1}\ (175);$$

avendo allora $Q=x^3(x-1)(x^2+1)$, faccio $x+1=0$, per cui $x=-1$, $q=4$, e $\frac{u}{q}=\frac{1}{4}$; così la seconda frazione parziale è $\frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2}$.

Ponendo in $U-NQ$, in vece di N il suo valore $\frac{1}{4}$, per ottenere l'espressione di U_1 (175), ho

$$U_1=\frac{U-NQ}{x+1}=\frac{4-x^6+x^5-x^4+x^3}{4(x+1)}$$

$$=\frac{-x^5+2x^4-3x^3+4x^2-4x+4}{4}.$$

d'onde viene $\frac{u_1}{q} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$; si ha dunque per la terza frazione parziale $\frac{9}{8}\frac{1}{x+1}$.

Per applicare, in questo luogo il calcolo differenziale, si formerebbe (176) l'equazione

$$1 = Q\left[N + N_1(x+1)\right] + P(x+1)^3,$$

che basterebbe differenziare una volta; e mettendo in seguito $x = -1$, verrebbe

$$1 = NQ,$$
$$0 = N\,dQ + N_1 Q\,dx;$$

Q essendo $x^6 - x^5 + x^4 - x^3$, la prima di queste equazioni darebbe $N = \frac{1}{4}$, e la seconda $N_1 = \frac{9}{8}$.

Il fattore x^3 ci dà le tre frazioni parziali

$$\frac{N}{x^3} + \frac{N_1}{x^2} + \frac{N_2}{x},$$

le quali si determinano per mezzo dell'equazione

$$1 = Q(N + N_1 x + N_2 x^2) + P x^3.$$

e de' suoi differenziali primo e secondo. Osservando che $Q = x^5 + x^4 - x - 1$, e facendo in Q, dQ, d^2Q,.. $x = 0$, si ottiene

$$N = -1,\ N_1 = 1,\ N_2 = -1;$$

si ha dunque $-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Non rimane più che a trovare la frazione parziale corrispondente al fattore $x^2 + 1$, e di cui la formola è $\frac{Mx+N}{x^2+1}$. Si potrebbe dedurla togliendo dalla proposta tutte le precedenti; ma si può pervenire direttamente colle formole del n. 177. Si ha primieramente . . .

$Q = x^3(x-1)(x+1)^2 = x^6 + x^5 - x^4 - x^3$; poi il fattore x^2+1, essendo eguale a zero, dà

$x = \pm(\sqrt{-1})$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, da cui si ricava
$q \pm q'\sqrt{(-1)} = -2 \pm 2\sqrt{(-1)}$, $u = 1$, e $u' = 0$,

le equazioni che determinano M ed N diventano

$$1 + 2M + 2N = 0, \quad 2M - 2N = 0;$$

e si trova per conseguenza $M = N = -\frac{1}{4}$.

Ecco dunque la frazione proposta $\frac{dx}{x^8 + x^7 - x^4 - x^3}$, decomposta nelle seguenti:

$$\frac{1}{8}\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{9}{8}\frac{dx}{x+1}.$$

$$-\frac{dx}{x^3} + \frac{dx}{x^2} - \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\frac{(x+1)\,dx}{x^2+1}.$$

L'integrazione di queste non presenta alcuna difficoltà, e si otterrà per risultato

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{8}\,l(x-1) - \tfrac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} \\ &+\tfrac{9}{8}\,l(x+1) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - l\,x \\ &-\tfrac{1}{8}\,l(x^2+1) - \tfrac{1}{4}\,\text{arc}\,(\text{tang} = x) + \textit{const.}\,) \end{aligned}\right\}$$

La riunione di tutti i termini algebrici produrrà la frazione $\frac{2 - 2x - 5x^2}{4x^2(1+x)}$, e quella dei termini logaritmici darà

$$\tfrac{1}{8}\,l(x-1) + \tfrac{1}{8}\,l(x+1) + l(x+1) - \tfrac{1}{8}\,l(x^2+1) - l\,x$$

$$= \tfrac{1}{8}\,l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + l\left(\frac{x+1}{x}\right);$$

si avrà dunque

$$\int \frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3} = \frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)} + \frac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + l\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{4}\text{arc}\,(\text{tang}=x) + \text{costan.}$$

Dell' integrazione delle funzioni irrazionali.

182. Le funzioni irrazionali debbono essere riguardate come integrate, ogni volta che per qualche trasformazione si sono rese razionali, o almeno quando si sono condotte ad una serie di monomii irrazionali; poichè allora vi si possono immediatamente applicare le regole precedenti.

Sia per esempio $\frac{(1+x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2})\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; è evidente che facendo $x=z^6$, tutte le estrazioni indicate si effettuano, e si ha $\frac{6z^5\,dz\,(1+z^3-z^4)}{1+z^2}$; dividendo per $1+z^2$, viene

$$-5\left(z^7\,dz-z^6\,dz-z^5\,dz+z^4\,dz-z^2\,dz+dz-\frac{dz}{1+z^2}\right)$$

da cui l'integrale è

$$-6\left(\frac{z^9}{8}-\frac{z^7}{7}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}+z-\text{arc}(\text{tang}=z)\right)+\textit{costan.}$$

e rimettendo per z il suo valore $\sqrt[6]{x}$, si ottiene

$$-\frac{6}{8}x\sqrt[6]{x^2}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x}+6\,\text{arc}\,(\text{tang}=\sqrt[6]{x})+\textit{const.}$$

183. La prima specie di funzioni razionali di cui mi occuperò è quella che non racchiude che il radicale

$\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$, e che non potrebbe avere che l'una o l'altra delle formole $X\,dx\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$, e $\frac{X\,dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}$, essendo X una funzione razionale di x. Bisogna osservare primieramente che una di queste formole riducesi all'altra; poichè si può scrivere la prima nel modo seguente,

$$Xdx\,\frac{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}\times\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}$$

$$=\frac{X(A+Bx+Cx^2)\,dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}},$$

ed il numeratore del risultato è una funzione allora razionale.

Prima d'indicare i mezzi di rendere razionale, per rapporto ad x, l'espressione $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$, porrò la quantità $A+Bx+Cx^2$, sotto la formola

$$C\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x+x^2\right);$$

e facendo per brevità

$$C=\gamma^2,\ \frac{A}{C}=\alpha,\ \frac{B}{C}=\beta;$$

ne risulterà $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}=\gamma\sqrt{(\alpha+\beta x+x^2)}$.

Ciò posto, se si prende

$$\sqrt{(\alpha+\beta x+x^2)}=z-x,$$

ed elevandola al quadrato, verrà $\alpha+\beta x=z^2-2xz$,

ciò che darà $x=\frac{z^2-\alpha}{\beta+2z}$, onde

$$\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}=\gamma(z-x)=\gamma\left(\frac{\alpha+\beta z+z^2}{\beta+2z}\right),$$

$$dx=\frac{2(\alpha+\beta z+z^2)dz}{(\beta+2z)^2}.$$

Mediante questi valori, si cambierà il differenziale $\frac{X\,dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}$ in un altro della formola $Z\,dz$, essendo Z una funzione razionale di z, e reale finchè C sarà positivo; ma se C fosse negativo, γ diventerebbe immaginaria, e la trasformata potrebbe pure divenire immaginaria.

In questo caso, si avrebbe $\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}$, e facendo

$$C=\gamma^2,\ \frac{A}{C}=\alpha,\ \frac{B}{C}=\beta,$$

verrebbe $\gamma\sqrt{(\alpha+\beta x-x^2)}$. La quantità $x^2-\beta x-\alpha$ può sempre decomporsi in fattori reali di primo grado; se si rappresentano per $x-a$ e $x-a'$, è evidente che

$$\alpha+\beta x-x^2=-(x^2-\beta x-\alpha)=(x-a)(a'-x).$$

Facendo in seguito $\sqrt{(x-a)(a'-x)}=(x-a)z$, e innalzando al quadrato i due membri di questa equazione, essa diventerá divisibile per $x-a$, e si avrà $a'-x=(x-a)z^2$, da cui si ricaverà

$$x=\frac{az^2+a'}{z^2+1},\ (x-a)z=\frac{(a'-a)z}{z^2+1},\ dx=\frac{2(a-a')z\,dz}{(z^2+1)^2},$$

valori, che renderanno ancora razionale il proposto differenziale.

184. Prendo dapprima, per esempio, il differenziale $\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}$; la prima delle precedenti trasformazioni darà $\frac{2dz}{\sqrt{(\beta+2z)}}$, di cui l' integrale è . . . . . .

$\frac{1}{\gamma} l(\beta + 2z) +$ *costant.* Rimettendo per z il suo valore $x + \sqrt{(\alpha + \beta x + x^2)}$, e per α, β e γ le quantità che rappresentano, verrà

$$\frac{1}{\sqrt{C}} l \left\{ \frac{2}{\sqrt{C}} \left(\frac{B}{2\sqrt{C}} + x\sqrt{C} + \sqrt{(A + Bx + Cx^2)} \right) \right\} + \text{costante},$$

risultato al quale si può dar la forma

$$\frac{1}{\sqrt{C}} l \left\{ \frac{B}{2\sqrt{C}} + x\sqrt{C} + \sqrt{(A + Bx + Cx^2)} \right\} + \frac{1}{\sqrt{C}} l \frac{2}{\sqrt{C}} + \text{costante},$$

per poscia riunire, con la costante arbitraria, il termine costante $\frac{1}{\sqrt{C}} l \frac{2}{\sqrt{C}}$.

185. Sia per second' esempio $\frac{dx}{\sqrt{(A + Bx - Cx^2)}}$; facendo uso dell' ultima trasformazione del n. 183, si avrà $\frac{-2dz}{\gamma(z^2 + 1)}$, di cui l' integrale è

$$-\frac{2}{\gamma} \text{arc } (\text{tang} = z) + \textit{costante}.$$

Sostituendo in luogo di z il suo valore $\frac{\sqrt{(a' - x)}}{\sqrt{(x - a)}}$, ricavato dall' equazione

$$a' - x = (x - a) z^2,$$

e ponendo $\sqrt{C}$ per γ, si otterrà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(A + Bx - Cx^2)}} = -\frac{2}{\sqrt{C}} \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{\sqrt{a' - x}}{\sqrt{x - a}} \right) + \textit{cost.}$$

essendo a e a' le radici dell' equazione

$$x^2 - \frac{B}{C} x - \frac{A}{C} = 0.$$

Se si prende $A = C = 1$ e $B = 0$, il differenziale proposto diventa, in questo caso particolare, $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, e la formola precedente dà per suo integrale . . . . . $-2.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}}\right) + costan.$, poichè a e a' essendo allora le radici di $x^2 - 1 = 0$, conviene prendere $a = -1$ e $a' = 1$, per non cadere nell' immaginario.

Farò notare che questo risultato si riduce all' arco il di cui seno $= x$, e di cui si sa che $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ esprime il differenziale (36). Perciò, io ricorderò che

$$\text{tang } 2A = \frac{2\text{tang } A}{1 - \text{tang } A^2} \; (Trig.\ 27),$$

dal che segue che l' arco doppio di quello che è indicato nella precedente formola, ha per tangente $\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$, e che per conseguenza è il complemento dell' arco di cui $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ sarebbe la tangente ed x il seno (*Trig.* 9). Chiamando dunque s quest' ultimo, si avià

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = s - \frac{\pi}{2} + costante,$$

e comprendendo l' arco $-\frac{\pi}{2}$ nella costante arbitraria, verrà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = s + costante.$$

Generalmente in tutti i casi ove si ottengono due diversi integrali in apparenza, per lo stesso differenziale, la differenza non può avvenire che su la costante arbitraria; imperocchè se due funzioni V e X sono tali che $dX = dV$, o $dX - dV = d(X - V) = 0$, bisogna necessariamente che $X - V = costante$.

186. Si può immediatamente ricondurre il differenziale $\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}} = \frac{dx}{\gamma\sqrt{(\alpha+\beta x-x^2)}}$ a quello di un arco di circolo; poichè, facendo primieramente $x-\frac{\beta}{2}=z$, si avrà $\frac{dz}{\gamma\sqrt{(\alpha+{}^1/_4\beta^2-z^2)}}$; ponendo, dopo ciò, $\alpha+{}^1/_4\beta^2=g^2$ e $z=gu$, si troverà $\frac{du}{\gamma(\sqrt{1-u^2})}$, di cui l'integrale è $\frac{1}{\gamma}$. arc $(\text{sen}=u)+$ *costante.*

187. L'integrazione della formula $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ può pure effettuarsi per mezzo dei logaritmi, ed allora conduce, con dell'espressioni immaginarie, ad una rimarchevolissima relazione fra l'arco, il seno ed il coseno.

Paragonando questa formola con $\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}$ si trova $A=1$, $B=0$, $C=-1$, e l'integrale generale diventa (184).

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left[x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-x^2)}\right]+\textit{costante.}$$

Se si rappresenta con z l'arco di cui $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ è il differenziale, si avrà dunque

$$z=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left[x\sqrt{1-}+\sqrt{(1-x^2)}\right]+\textit{costante.}$$

Ma se si vuole che quest'arco sia nullo contemporaneamente ad x, sopprimere conviene la costante arbitraria; poichè, facendo $x=0$, il secondo membro si riduce a questa costante, a causa che $l\,1=0$ (*).

(*) Può essere cosa utile il mostrare che quest'integrale s'ottiene immediatamente, ponendo

$$\sqrt{(1-x^2)}=t-x\sqrt{-1},$$

donde segue

Ciò posto, osservando che x, essendo il seno dell' arco z, $\sqrt{(1-x^2)}$ ne è il coseno, la precedente equazione diventerà

$$z\sqrt{-1} = l(\cos. z + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ z);$$

e se si suppone z negativa, siccome

$$\text{sen.}\ (-z) = -\text{sen.}\ z,\ \cos.(-z) = \cos. z,$$

si avrà ancora

$$-z\sqrt{-1} = l(\cos, z - \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ z),$$

di modo che

$$\pm z\sqrt{-1} = l(\cos. z \pm \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ z).$$

Prendendo in ciascun membro, in luogo dei logaritmi, i numeri corrispondenti, verrà

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos. z \pm \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ z,$$

equazione che può verificarsi sostituendovi in vece dell' esponenziale, del coseno e del seno, i loro sviluppi ricavati dai n. 27 e 37.

$$1 = t^2 - 2tx\sqrt{-1},$$

poi differenziando, e dividendo per 2,

$$0 = (t - x\sqrt{-1})\,dt - t\,dx\sqrt{-1},$$

da cui si conchiude

$$\frac{dx}{t - x\sqrt{-1}} = \frac{dt}{t\sqrt{-1}},$$

e per conseguenza

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{dx}{t - x\sqrt{-1}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, lt + \textit{costante.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l[\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{-1}] + \textit{costante.}$$

Se si considerano a parte l'equazioni

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos. z + \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ z,$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos. z - \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ z,$$

per aggiugnerle, si ricaverà

$$\cos. z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2};$$

e togliendo la seconda dalla prima, risulterà

$$\text{sen.}\ z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Queste espressioni non sono in sostanza che puri simboli algebrici, rappresentando, sotto una formola abbreviata, le serie del n.° 37; ma quantunque non si possa assegnar loro valori sotto alcuna formola finita, non è perciò che non si prestino al calcolo con grandissima facilità, e manifestino tutte le proprietà di cui godono le linee trigonometriche che esprimono.

Mettendo nz in luogo di z nell'equazione

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos. z \pm \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ z,$$

diventa

$$e^{\pm nz\sqrt{-1}} = \cos. nz \pm \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ nz;$$

ma si ha pure

$$e^{\pm nz\sqrt{-1}} = (e^{\pm z\sqrt{-1}})^n = (\cos. z \pm \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ z)^n:$$

dunque

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}\ \text{sen.}\ z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{+1}\ \text{sen.}\ nz,$$

Queste equazioni conducono a dei risultati importantissimi (*); qui mi fermerò sull'uso che se ne può fare

---

(*) *Vedete* la nota *B*, alla fine dell'opera.

per iscoprire i fattori della funzione $x^n \mp a^n$, perchè questa ricerca è necessaria nell' integrazione della formola $\frac{x^m dx}{x^n \mp a^n}$.

188 La funzione $x^n \mp a^n$ si trasforma in $a^n(y^n \mp 1)$ quando si fa $x = ay$; e per conoscerne i fattori, basta risolvere l' equazione.

$$y^n \mp 1 = 0,$$

che riducesi a

$$y^n = \pm 1.$$

L' espressione

$$y = \cos. z + \sqrt{-1} \text{ sen } z.$$

soddisfa a quest' equazione, con una semplicissima determinazione dell' arco z; poichè si ha

$$y^n = (\cos. z + \sqrt{-1} \text{ sen. } z)^n = \cos. nz + \sqrt{-1} \text{ sen. } nz;$$

e siccome, indicando con π la semiperiferia, e con m un numero intero qualunque, viene

$$\text{sen. } m\pi = 0, \qquad \cos. m\pi = \pm 1,$$

secondo che m è un numero pari o dispari, non si avrà che a supporre $nz = m\pi$, per ottenere $y^n = \pm 1$.

Onde distinguere più particolarmente il caso in cui il numero m è pari, da quello che è dispari, si scrive per il primo $2m$ in luogo di m, e pel secondo $2m + 1$, e si fa

$$nz = 2m\pi, \quad \text{e} \quad nz = (2m + 1)\pi.$$

Nella prima ipotesi viene

$$y = \cos \frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ sen. } \frac{2m\pi}{n}, \quad y^n = +1,$$

e nella seconda,

$$y = \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ sen} \frac{(2m+1)\pi}{n}, \quad y^n = -1.$$

189. Col mezzo del numero indeterminato m, si ottengono

da quello che precede, tutti i valori di cui y è suscettibile; poichè la prima espressione, facendovi

$m=0$, dà $y=1$;

$m=1$, $y=\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$;

$m=2$, $y=\cos\frac{4\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n}$;

.....

$m=n-2$, $y=\cos\frac{(2n-4)\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-4)\pi}{n}$;

$m=n-1$, $y=\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-2)\pi}{n}$.

1. Passato questo termine non si trovano più nuovi valori, ma solamente i precedenti, i quali ritornano nello stesso ordine. In fatti, se si suppone $n=m$, unicamente viene $y=\cos 2\pi=1$, e si ricade sul primo valore, che si riprodurrà ogni volta che si prenderà per m un multiplo di n. Facendo poscia $m=n+1$, viene l' arco

$$\frac{(2n+2)}{n}\pi=2\pi+\frac{2\pi}{n},$$

di cui il coseno ed il seno sôno gli stessi che quelli dell' arco $\frac{2\pi}{n}$ (*Trig.* 22), ciò che riconduce al secondo valore, e così degli altri.

2.° Il quadro anzidetto non sembra presentare che un sol valore reale, cioè il primo; ma se ne trova un secondo, quando n è pari, perchè si passa allora per $m=\frac{n}{2}$, che dà $y=\cos\pi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\pi=-1$.

3.° I valori immaginari dello stesso quadro si accoppiano due a due, vale a dire, l' ultimo col primo, il penultimo col secondo, e così di seguito, perchè

$$\frac{(2n-2)\pi}{n}=2\pi-\frac{2\pi}{n},\quad \frac{(2n-4)\pi}{n}=2\pi-\frac{4\pi}{n},\text{ etc.,}$$

e che in generale

$$\cos(2\pi-a)=\cos a,\quad \operatorname{sen}(2\pi-a)=-\operatorname{sen} a\ (Trig.\ 29).$$

Così, quando n è uu numero dispari, $n-1$ essendo pari, tutte le radici immaginarie da $m=1$ fino ad $m=n-1$, si riuniscono in $\frac{n-1}{2}$ coppie della formula

$$y=\cos\frac{2m\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2m\pi}{n},$$

ove basta estendere i valori di m sino ad $\frac{n-1}{2}$

Quando n è un numero pari, si formano solamente $\frac{n-2}{2}$ coppie, perchè la radice che corrisponde ad $\frac{n}{2}$, e che è reale, occupa il mezzo di quelle che sono immaginarie.

Si perviene a delle simili conseguenze coll'equazione $y^n+1=0$, ove

$$y=\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

formola nella quale

$m=0$, dà $y=\cos\frac{\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$,

$m=1$, $y=\cos\frac{3\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n}$;

.....

$m=n-2$, $y=\cos\frac{(2n-3)\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-3)\pi}{n}$;

$m=n-1$, $y=\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{n}$

Al di là di questo termine non si trovano più che gli stessi valori, come nel caso precedente e per la medesima ragione. Non può esservene un reale se non quando n è dispari, ed allora corrisponde a

$$m = \frac{n-1}{2}, \text{ che dà } \gamma = \cos\pi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\pi = -1.$$

Siccome questa occupa il mezzo della tavola, le radici immaginarie che sono egualmente lontane, si riuniscono in $\frac{n-1}{2}$ coppie della formula

$$\gamma = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

in cui basta di spurgare i valori di m sino a $m = \frac{n-1}{2}$. Conviene, quando n è pari, andare sino ad $m = \frac{n}{2}$, perchè più non vi sono che delle radici immaginarie.

Se si trovasse qualche difficoltà per conoscere questi enunciati, si potrebbero illustrare, dando ad n dei valori particolari.

190. È facile il dedurre da ciò che precede i fattori reali delle quantità $\gamma^n \mp 1$.

Primieramente la formula

$$\gamma = \cos\frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2m\pi}{n}$$

dà per fattore del primo grado della quantità $\gamma^n - 1$, le due espressioni immaginarie

$$\left(\gamma - \cos\frac{2m\pi}{n}\right) - \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2m\pi}{n}$$

$$\left(\gamma - \cos\frac{2m\pi}{n}\right) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2m\pi}{n};$$

e moltiplicandole, si ottiene l'espressione

$$\gamma^2 - 2\gamma\cos\frac{2m\pi}{n} + 1,$$

che comprende tutti i fattori reali del secondo grado.

Si trova egualmente che i fattori di secondo grado della quantità $y^n + 1$ sono

$$y^2 - 2y\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + 1.$$

Bisogna osservare che queste formole comprendono ancora i fattoti reali di primo grado, ma vi si presentano come doppi; poichè se si fa $m = 0$ nella prima, diventa

$$y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2;$$

e se n fosse pari, prendendo $m = \frac{n}{2}$, si troverebbe ancora

$$y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2,$$

risultato che dà pure la seconda formula quando n è dispari, e che vi si fa $m = \frac{n-1}{2}$.

191. Le funzioni della formula $x^{2n} - 2px^n + q$ possono essere trattate come quelle che non racchiudono che due termini. Risolvendole nel modo dell' equazioni di secondo grado, se ne ricaveranno i fattori

$$x^n - [p \pm \sqrt{(p^2 - q)}],$$

i quali saranno reali, fintantochè p^2 sorpasserà q, ed ai quali si darà la formola

$$x^n \mp a^n,$$

prendendo successivamente per a^n i valori di

$$p + \sqrt{(p^2 - q)} \quad p - \sqrt{(p^2 - q)},$$

astrazion fatta dai loro segni; questo caso entra dunque nei precedenti.

Quando si avrà $p^2 < q$, se farà $p = \alpha^n$, $q = \beta^{2n}$, $x = \beta y$, e verrà

$$\beta^{2n}y^{2n} - 2\alpha^n\beta^n y^n + \beta^{2n} = \beta^{2n}\left(y^{2n} - \frac{2\alpha^n}{\beta^n}y^n + 1\right);$$

ma la condizione $p^2 < q$ o $\alpha^{2n} < \beta^{2n}$, dando $\alpha^n < \beta^n$, la quantità $\frac{\alpha^n}{\beta^n}$ sarà una frazione, e potrà per conseguenza essere presa per un coseno. Sia dunque δ l'arco corrispondente; la proposta funzione diventerà.

$$\beta^{2n}(y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1),$$

e più non si tratterà che di risolvere l'equazione

$$y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1 = 0.$$

Si ricava primieramente

$$y^n = \cos\delta \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\delta;$$

poi prendendo

$$y = \cos z \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z,$$

viene (187)

$$y^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,nz,$$

e confrontandolo coll'altro valore di y^n, si ottiene

$$\cos nz = \cos\delta, \qquad \mathrm{sen}\,nz = \mathrm{sen}\,\delta.$$

Si soddisfa generalmente a queste relazioni, supponendo $nz = 2m\pi + \delta$, essendo m un numero qualunque poichè

$$\cos(2m\pi + \delta) = \cos\delta, \qquad \mathrm{sen}\,(2m\pi + \delta) = \mathrm{sen}\,\delta:$$

dunque si avrà

$$z = \frac{2m\pi + \delta}{n}, \quad y = \cos\frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{2m\pi + \delta}{n};$$

e i fattori di primo grado della funzione

$$y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1,$$

saranno, per conseguenza compresi nella formola

$$\gamma - \left(\cos \frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2m\pi + \delta}{n} \right)$$

Se si avesse $x^{2n} + 2px^n + q = 0$, si farebbe ancora $\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \cos\delta$; ma si prenderebbe

$$\gamma^{2n} - 2\gamma \cos(\pi - \delta) + 1,$$

poichè $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta$; verrebbe in seguito

$$\cos nz = \cos(\pi - \delta), \quad \operatorname{sen} nz = \operatorname{sen}(\pi - \delta),$$

e perciò

$$nz = 2m\pi + \pi - \delta = (2m + 1)\pi - \delta \text{ (*)}.$$

Dell' integrazione dei differenziali binomiali.

192. Questi differenziali sono rappresentati dalla formola.

$$x^{m-1}\, dx\, (a + bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

di cui non si toglie la generalità, suppouendo che m ed n sieno numeri interi

Se si avesse, per esempio, $x^{\frac{4}{3}}\, dx\, (a + bx^{\frac{2}{7}})^{\frac{p}{q}}$, si farebbe $x = z^6$, da cui risulterebbe $6z^7\, dz\, (a + bz^3)^{\frac{p}{q}}$. Si può anche riguardare n come essenzialmente positivo, perchè nel caso ove si avesse $x^{m-1} dx\, (a + b\, x^{-n})^{\frac{p}{q}}$, si

(*) Le formole dei numeri 190 e 191 contengono implicitamente i teoremi di *Cotes* e di *Moivre*, e possono con vantaggio far le veci di questi teoremi, che più non sono ora che un oggetto di mera curiosità; per questa ragione non ho creduto doverli qui inserire: si trovano nel Trattato in 4°, t. I, pag. 125.

supporrebbe $x = \frac{1}{z}$, e verrebbe $-z^{-m-1}\,dz\,(a+bz^n)^{\frac{p}{q}}$.

La formola $x^{m-1}\,dx\,(a\,x^r + b\,x^n)^{\frac{p}{q}}$, si riduce ancora alla precedente, dividendo per x^r, sotto la parentesi; perchè si ottiene

$$x^{m-1}dx\left[x^r(a+bx^{n-r})\right]^{\frac{p}{q}} = x^m + \frac{pr}{q}{}^{-1}dx(a+bx^{n-r})^{\frac{p}{q}}.$$

Per cercare in quali casi $x^{m-1}dx\,(a+b\,x^n)^{\frac{p}{q}}$ può diventar razionale, si fa $a + b\,x^n = z^q$, di modo che $(a+b\,x^n)^{\frac{p}{q}} = z^p$; poi si trova

$$x^n = \frac{z^q - a}{b},\quad x^m = \left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},\quad x^{m-1}dx = \frac{q}{nb}z^{q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}dz,$$

ed il differenziale proposto divenendo perciò

$$\frac{q}{nb}\,z^{p+q-1}dz\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1},$$

si conosce allora che sarà razionale ogni volta che $\frac{m}{n}$ sarà un numero intero.

L'espressione $x^8\,dx\,(a+b\,x^3)^{\frac{p}{q}}$ soddisfa a questa condizione, poichè $m=9$, $n=3$, $\frac{m}{n}=3$, e si trasforma in

$$\frac{q}{3b}\,z^{p+q-1}dz\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^3.$$

Il differenziale $x^{m-1}dx\,(a+b\,x^n)^{\frac{p}{q}}$ è suscettibile d'un altra formola, facendo negativo l'esponente di x nella parentesi, o dividendo per x^n la quantità $a+b\,x^n$; in questo modo viene

$$x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{1}} = x^{m+\frac{np}{q}-1}\,dx\,(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{1}}.$$

Fatto ciò, se si cangia n in $-n$, a in b, b in a, m in $m+\frac{np}{q}$, nella trasformata in z antecedentemente ottenuta si dedurrà l'espressione

$$-\frac{q}{na}\,z^{p+q-1}\,dz\left(\frac{z^q-b}{a}\right)^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}-1},$$

la quale sarà razionale se $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ è un numero intero.

Conduce ciò a immediatamente fare

$$ax^{-n}+b=z^q, \text{ onde } a+bx^n=x^n z^q,$$

trasformazione impiegata dall'Eulero.

Ed è a questo caso che si riferisce il differenziale

$$x^4\,dx\,(a+bx^3)^{\frac{3}{1}},$$

pel quale

$$\frac{m}{n}=\frac{5}{3},\ \frac{p}{q}=\frac{1}{3},\ \frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{6}{3}=2,$$

193 Poichè non è possibile d'integrare generalmente la formola $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ l'idea che da prima si presenta è di cercare di ridurlo ai casi più semplici che può racchiudere.

Vi si perviene facilissimamente per mezzo dell'*integrazione per parti*, processo secondo il quale serve a ricondurre un integrale ad un altro. Si ricava dall'integrazione dei due membri dell'equazione

$$d.uv=u\,dv+v\,du\ (11),$$

che conduce a

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du, \text{ per cui } \int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Da ciò si vede che se nel differenziale $X\,dx$, la funzione X può decomporsi in due fattori P e Q, e che si sappia integrare il differenziale $Q\,dx$, chiamando v il suo integrale, e facendo $u = P$, si avrà

$$\int P\,Q\,dx = P\,v - \int v\,dP,$$

ciò che riconduce la difficoltà ad integrare $\int v\,dP$.

194. Per abbreviare un poco i risultati nell'applicazione di quello che alla formola $x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$ precede, scriverò p in vece di $\frac{p}{q}$, e bisognerà supporre che p è un numero frazionario qualunque: allora si avrà la formola

$$x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^P.$$

Fra modi diversi di decomporre in fattori questo differenziale scelgo quello che tende a diminuire l'esponente di x fuori della parentesi, e che si opera scrivendo così

$$\int x^{m-n}.\,x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^P,$$

la formola proposta. Con questo mezzo il fattore . . . . $x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^P$ è integrabile, qualunque sia p (170); rappresentando dunque questo fattore con dv, si ha

$$v = \frac{(a+bx^n)^{P+1}}{(p+1)\,n\,b} \qquad \text{e} \qquad u = x^{m-n},$$

donde risulta

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^P =$$

$$\frac{x^{m-n}\,(a+bx^n)^{P+1}}{(p+1)\,n\,b} - \frac{m-n}{(p+1)\,nb}\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{P+1};$$

ora

$$\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{P+1} =$$

$$\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^P\,(a+bx^n) =$$

$$a\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^P + b\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^P;$$

ponendo quest'ultimo valore, nell'equazione precedente, e riunendo i termini affetti dell'integrale $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^P$, viene

$$\left(1+\frac{m-n}{(p+1)n}\right)\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^p=$$

$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-a(m-n)\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{(p+1)nb};$$

da cui si ricava (A) . . . . . $\int x^{m-1}\,dx\,(b+bx^n)^p=$

$$\frac{x^{m-n}\,(a+bx^n)^{p+1}-a\,(m-n)\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{b\,(p\,n+m)}.$$

Facile è il vedere che, poichè si può ricondurre con questa formola, l'integrazione di $\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p$, si ricondurrà pure quest'ultima a quella di $\int x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^p$, scrivendo $m-n$ in luogo di m nell'equazione (A); poi cangiando ancora m in $m-2n$, in questa stessa equazione, farà essa conoscere $\int x^{m-2r-1}d\,x\,(a+b\,x^n)^p$, col mezzo di $\int x^{m-3n-1}d\,x\,(a+bx^n)^p$, e così di seguito.

In generale, un numero r di ridnzioni conduce a . . . $\int x^{m-rn-1}d\,x\,(a+b\,x^n)^p$, e l'ultima formola è

$$\int x^{m-r\,n-1}d\,x\,(a+b\,x^n)^p=$$
$$\frac{x^{m-rn}(a+bx^n)^{p+1}-a(m-rn)\int x^{m-rn-1}dx)a+bx^n)^p}{b\left[pn+m-(r-1)n\right]}.$$

Egli è evidente mediante questa formola che se m è un multiplo di n, l'integrazione del differenziale $x^{m-1}dx\,(a+b\,x^n)^p$ si effettuerà algebraicamente, poichè allora l'annientamento del coefficiente $m-r\,n$ farà sparire l'ultima integrale $\int x^{m-rn-1}dx\,(a+b\,x^n)^p$. Questo risultato si accorda con quello del n. 192.

195. Si può ottenere ancora una riduzione, per la quale l'esponente della parentesi sia diminuito dell'unità; basta perciò osservare che

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p=\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)$$
$$=a\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}+b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1},$$

e che la formula (A), cangiandovi m in $m+n$, e p in $p-1$, dà

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^m(a+bx^n)^p - am\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{b(pn+m)}.$$

Sostituendo questo valore nel 'equazione precedente, si avrà (B)

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^p + pna\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{pn+m}.$$

Con questa formola si toglieranno dal numero q tutte le unità che può contenere, semplificazione che aggiunta a quella che procura la formola (A), farà dipendere l'integrale

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p \quad \text{da} \quad \int x^{m-r0-1}dx(a+bx^n)^{p-1},$$

essendo rn il massimo multiplo di n contenuto in $m-1$, ed s il massimo numero intero contenuto in p.

L'integrale $\int x^7 dx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}$, per esempio, sarà ricondotto successivamente, mediante la formola (A), a

$$\int x^4 dx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}, \quad \int x dx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}};$$

poi la formola (B) farà dipendere $\int x dx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}$ da $\int x dx(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}$, e questo da $\int x dx(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}$.

196. Se m e p fossero negativi, è chiaro che le formole (A) e (B) non adempirebbero il fine per cui sono state costruite, stantechè allora aumenterebbero gli esponenti di x fuori della parentesi, e quello della parentesi; ma rovesciandoli se ne trovano che si applicano ai casi di cui si tratta.

Si ricava da (A)

$$\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-n)} - \frac{b(m+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p}{a(m-n)};$$

e mettendo $-m+n$ in vece di m, viene (C)

$$\int x^{-m-1}dx(a+bx^n)^p = -\frac{x^{-m}(a+bx^n)^{p+1}+b(m-n-np)\int x^{-m+n-1}dx(a+bx^n)^p}{am},$$

formola che diminuisce gli esponenti fuori della parentesi.

Per capovolgere la formola (B), si prende

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1} = -\frac{x^m(a+bx^n)^p-(m+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p}{pna};$$

poi si scrive $-p+1$ iu luogo di p, e viene (D)

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{-p} = \frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1}-(m+n-np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{-p+1}}{(p-1)na},$$

formola che perviene allo scopo proposto.

Le formole (A), (B), (C), (D) divengono illusorie, quando il denominator loro sparisce. Avviene questo alla formola (A), per esempio, quando $m=-np$: ma in tutti i casi di questa specie, il proposto differenziale può ricondursi ad un monomio, ovvero ad una frazione razionale (*).

197. Sia $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, essendo m un numero intero positivo la formola (A), facendovi $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-1/2$, dà

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^{m-2}\sqrt{(1-x^2)}}{m-1}+\frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

e ponendo m in luogo di $m-1$, viene

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{(1-x^2)}}{m}+\frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

(*) *Vedete il trattato in* 4° t. II, pag. 41.

Se si dà successivamente ad m diversi valori, cominciando dai numeri dispari, si avrà

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)} + const.,$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -{}^1/_3\, x^2 \sqrt{(1-x^2)} + {}^2/_3 \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -{}^1/_5\, x^4 \sqrt{(1-x^2)} + {}^4/_5 \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -{}^1/_7\, x^6 \sqrt{(1-x^2)} + {}^6/_7 \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

ecc.

Da ciò si ricava

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)} + costant.,$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1.2}{1.3}\right)\sqrt{(1-x^2)} + costant.,$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{1.4}{3.5}x^2 + \frac{1.2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{(1-x^2)} + costant.$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{7}x^6 + \frac{1.6}{5.7}x^4 + \frac{1.4.6}{3.5.7}x^2 + \frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}\right)\sqrt{(1-x^2)} + cost.$$

ecc.,

la legge di questi valori è evidente.

Passando ai valori pari di m, e supponendo $m = 2$, $m = 4$, $m = 6$, ecc., si trova

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{4}x^3\sqrt{(1-x^2)} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{6}x^5\sqrt{(1-x^2)} + \frac{5}{6}\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

ecc.

In questo caso tutti gl' integrali proposti dipendono da

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{arc}\,(\text{sen}=x)+costant.\ (36),$$

e rappresentando con A l'arco indicato, si avrà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = A+const.,$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1}{2}A+costant.$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{(1-x^2)}+\frac{1.3}{2.4}A+const.,$$

$$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1.5}{4.6}x^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{(1-x^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}A+cost.$$

ecc.

198. Passo ora a cercare le formole che corrispondono ai casi ove m è negativa. Si ha allora, per la formola (C) (196),

$$\int \frac{x^{-m-1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^{-m}\sqrt{(1-x^2)}}{m}+\frac{m-1}{m}\int \frac{x^{-m+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

e scrivendo $-m$ in vece di $-m-1$, viene

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Non si può supporre $m=1$, poichè questo valore rende nullo il denominatore; conviene dunque cercare *a priori* l'integrale di $\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$. Si troverà facilmente dopo ciò che si è detto n° 192; si farà $1-x^2=z^2$, da cui risulterà

$$x=\sqrt{(1-z^2)}, \qquad dx=\frac{-zdz}{\sqrt{(1-z^2)}},$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{-dz}{1-z^2},$$

equazione di cui il secondo membro ha per integrale

$$-\tfrac{1}{2}l(1+z)+\tfrac{1}{2}l(1-z) = -\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{1-z}\right);$$

rimettendo in vece di z il suo valore, si avrà

$$-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{1-\sqrt{(1-x^2)}}\right);$$

moltiplicando per $1+\sqrt{(1-x^2)}$, i due termini della frazione compresa sotto il simbolo l, si otterrà

$$-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{[1+\sqrt{(1-x^2)}]^2}{x^2}\right) = -\tfrac{1}{2}l\left\{\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right)^2\right\}$$
$$= -l\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right):$$

si avrà dunque finalmente

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}} = -l\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right) + \textit{costant.}$$

Ora se primieramente si suppone $m=3$, $m=5$, ecc., verrà

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{4x^4} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$\int\frac{dx}{x^7\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{6x^6} + \frac{5}{6}\int\frac{dx}{x^5\sqrt{(1-x^2)}},$$

ecc.

Facendo poscia $m=2$, $m=4$, $m=6$, ecc., si troverà

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} + costant.,$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{3x^3} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{5x^5} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^4\sqrt{(1-x^2)}},$$

ecc.

Da qneste due serie d'equazioni si ricaverà, come nel n°. precedente, una classe di formole integrate mediante i logaritmi, ed un'altra classe che sarà algebraica.

199. Il differenziale $x^{m-1}dx(ax^r+bx^n)^p$, potendosi ridurre alla formola $x^{m+pr-1}dx(a+bx^{n-r})^p$ (192), è suscettibile come questa delle stesse riduzioni. Per dare di ciò un esempio prenderò l'espressione $\frac{x^q dx}{\sqrt{(2cx-x^2)}}$, che si presenta nella Meccanica. Si ha da prima

$$\int \frac{x^q dx}{\sqrt{(2cx-x^2)}} = \int x^q dx(2cx-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int x^{q-\frac{1}{2}} dx(2c-x)^{-\frac{1}{2}};$$

la formola (A) (194), facendovi

$$m=q+{}^1/_2,\ n=1,\ p=-{}^1/_2,\ a=2c,\ b=-1,$$

dà

$$\int x^{q-\frac{1}{2}} dx(2c-x)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{x^{q-\frac{1}{2}}(2c-x)^{\frac{1}{2}}}{q} + \frac{2c(q-{}^1/_2)}{q}\int x^{q-\frac{3}{2}} dx(2c-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

e se si osserva che

$$x^{q-\frac{1}{2}} = x^{q-1}x^{\frac{1}{2}}, \qquad x^{q-\frac{1}{2}} = x^{q-1}x^{-\frac{1}{2}}$$

quindi si facciano rientrare le potenze frazionarie di x sotto le parentesi, le quali si cambieranno dopo ciò, in radicali, si avrà la formola

$$\int \frac{x^q dx}{\sqrt{(2cx-x^2)}} =$$

$$-\frac{x^{q-1}\sqrt{(2cx-x^2)}}{q}+\frac{(2q-1)c}{q}\int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt{(2cx-x^2)}}.$$

200. Li tre esempi precedenti si riferiscono alle formole (A) e (C); non meno utili risultati si ricavano dalla formola (D) (196), poichè serve ad integrare il differenziale

$$\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^m} = dz(\beta^2+z^2)^{-m},$$

il quale è stato posto da parte nelle frazioni razionali (180); poichè se si fa

$$x=z,\ a=\beta^2,\ b=1,\ m=1,\ n=2,\ p=m,$$

la formola (D) diventa

$$\int dz(\beta^2+z^2)^{-m} = \frac{z(\beta^2+z^2)^{-m+1}+(2m-3)\int dz(\beta^2+z^2)^{-m+1}}{(2m-2)\beta^2},$$

donde risulta

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^m} = \left(\frac{1}{(2m-2)\beta^2}\cdot\frac{z}{(z^2+\beta^2)^{m-1}}\right) + \frac{2m-3}{(2m-2)\beta^2}\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{m-1}}$$

La riduzione indicata in questa formula si arresta a $\int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$, poichè se si facesse $m=1$, il divisore $2m-2$, diventando nullo, il secondo membro sarebbe infinito. Facile è il vedere che questa circostanza è dello stesso genere, che quella del n.° 168, giacchè se si passasse da $m=1$, ad $m=0$, si cadrebbe nell' integrale

$\int dz = z$, e si avrebbe algebraicamente l' integrale $\int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$, che è necessariamente trascendente (180).

Dell' integrazione per serie.

201. L' integrale $\int X dx$ si ottiene facilmente, quando si è sviluppata la funzione X in serie, perchè non si ha più da integrare che dei monomi, ai quali si applica immediatamente la regola del n.° 167. In fatti sia

$$X = A x^m + B x^{m+n} + C x^{m+2n} + D x^{m+3n} + \text{ec.};$$

se si moltiplicano i due membri di quest' equazione per dx, e che si integri separatamente ciascun termine del secondo, si troverà

$$\int X dx = \frac{A x^{m+1}}{m+1} + \frac{B x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{C x^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{ec.} + cost.$$

Quando s' incontrerà nello sviluppo di X un termine della formola $\frac{A}{x}$, risulterà nell' integrale il termine Alx (168).

202. La funzione più semplice che si possa ridurre in serie è $\frac{1}{a+x}$, avendo per isviluppo

$$\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{ec.},$$

per cui

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{ec.} + costant.;$$

ma si sa d' altronde che $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + costant.$: si avrà dunque

$$l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{ec.} + costant.$$

Per trovare ciò che esprime la costante, non vi è che da fare $x = 0$; in questa supposizione viene $la = costante$, e per conseguenza

$$l(a+x) - la = l\left(1+\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{ec.},$$

risultato conforme a quello del n.° 29.

Sia il differenziale $\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$, il quale potendosi mettere sotto la formola $\frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}$, appartiene all' arco di cui la tangente $= \frac{x}{a}$ (36): riducendo $\frac{a}{a^2+x^2}$ in serie, si otterrà

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^6}{a^7} + \text{ec.};$$

e l' integrazione, dopo ciò, darà

$$\int \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right) + \textit{costante} =$$

$$\frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{ec.} + \textit{costante}.$$

Se trar si vuole da quest' operazione il valore del più piccolo degli archi di cui la tangente è $\frac{x}{a}$, converrà sopprimere la costante arbitraria, giacchè l' arco cercato è nullo, quando $x = 0$, e si avrà

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{ec.}$$

risultato conforme a quello del n.° 38.

Egualmente operando su $\frac{x^m dx}{a^n+x^n}$, si trova

$$\int \frac{x^m dx}{a^n+x^n} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n} - \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}} + \frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}} - \text{ec.} + \textit{costante.}$$

203. Lo scopo dell' integrazione per serie, quello essendo di procurarsi dei valori, che si avvicinino agl' integrali che ottener non si possono rigorosamente, si conosce tosto esser cosa importante l'avere molte serie atte ad espimere lo stesso integrale, affine di scegliere quella che rende convergente il valore particolare che si propone di dare ad x. Le serie le quali procedono secondo le potenze positive di x, di cui gli esponenti vanno crescendo, o *le serie ascendenti*, non convengono generalmente che nel caso in cui la variabile x rimanga piccolissima; mentre quelle che procedono con potenze negative di x, o *le serie discendenti*, convengono tanto più, quanto questa variabile è grande.

Onde per venire ad una serie di questa specie, nel su indicato esempio, converrebbe cangiare l' ordine dei termini del binomio a^n+x^n, ovvero porre x in luogo di a, nello sviluppo di $\frac{1}{a^n+x^n}$; si avrebbe

$$\frac{1}{x^n+a^n} = \frac{1}{x^n} - \frac{a^n}{x^{2n}} + \frac{a^{2n}}{x^{3n}} - \frac{a^{3n}}{x^{4n}} + \text{ec.},$$

e dopo di aver moltiplicato per $x^m dx$ e integrato, verrà

$$\int \frac{x^m dx}{x^n+a^n} = -\frac{1}{(n-m-1)x^{n-m-1}} + \frac{a^n}{(2n-m-1)x^{2n-m-1}} - \frac{a^{2n}}{(3n-m-1)x^{3n-m-1}} + \text{ec.} + \textit{cost.}$$

Sarebbe questa serie illusoria, se alcuno de' suoi denominatori, compresi nella formola $in-m-1$, sparisse, ciò

che accaderebbe se $m+1$ fosse un multiplo di n; in questo caso il differenziale sviluppato conterrebbe un termine della formola $a(^{i-1}{}_{,}{}^{n}\,\frac{dx}{x}$, di cui l'integrale sarebbe $a(^{i-1})^{n}\,lx$.

Se si fa nel risultato $m=0$, $n=2$, e $a=1$, diventa

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{ec.}+\textit{costante};$$

ma quantunque l'espressione $\frac{dx}{1+x^2}$ sia il differenziale dell'arco di cui la tangente è x, concludere non bisogna che la precedente serie sia lo sviluppo di quest'arco, poichè, quando $x=0$, dà l'infinito. La considerazione della costante arbitraria toglierà questa difficoltà, se si riflette che per conoscere il vero valore di una serie, conviene sempre partire dal caso ove essa è convergente. Ora la serie

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{ec.}$$

lo è tanto più, quanto x è più grande, e sparisce quando x è infinito: a questo limite, l'equazione

$$\text{arc (tang}=x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{ec.}+\textit{costante},$$

si cangia in arco di $1=\frac{\pi}{2}=\textit{costante}$, e sostituendo questo valore della costante, si ottiene

$$\text{arc (tang}=x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{ec.}$$

Si potrebbe ancora integrare la funzione razionale $\frac{U\,dx}{V}$ (172), sviluppando in serie l'espressione $\frac{U}{V}$: ma questo mezzo non condurrebbe che a risultati complicatissimi, e

rare volte convergenti; d' altronde questi calcoli sono presso a poco iuutili, giacchè si sa ricondurre questo differenziale ai logaritmi ed agli archi di circolo, di cui si ottengono i valori mediante le tavole trigonometriche.

204. La formola $\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ è facile a integrare collo sviluppo della quantità $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ in serie, e viene per risultato

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{x^m}{m} + \frac{pb\,x^{m+n}}{qam+n}\right.$$
$$\left. + \frac{p(p-q)b^2}{1.2q^2a^2}\,\frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \frac{p(p-q)(p-2q)b^3}{1.2.3q^3a^3}\,\frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \text{ec.}\right\}$$
$$+ \textit{costant.}$$

Se ottener si volesse una serie discendente, per rapporto ad x, bisognerebbe dare al differenziale proposto la formola $x^{m+\frac{pn}{q}-1}dx\,(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, e dopo avere sviluppato $(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, moltiplicato il risultato per $x^{m+\frac{pn}{q}-1}dx$, ed integrato, si avrebbe

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = b^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{qx^{m+\frac{pn}{q}}}{mq+np}\right.$$
$$\left. + \frac{pa}{qb}\,\frac{qx^{m+\frac{(p-q)n}{q}}}{mq+(p-q)n} + \frac{p(p-q)a^2}{1.2q^2b^2}\,\frac{qx^{m+\frac{(p-2q)n}{q}}}{mq+(p-2q)n} + \text{ec.}\right\}$$
$$+ \textit{costante.}$$

Fintanto che le quantità a e b saranno tutte due positive, o che q sarà un numero dispari, si potrà indifferentemente servirsi di quest' ultima serie ovvero della precedente; ma quando q sarà pari, la prima formola diventerà immaginaria pel fattore $a^{\frac{p}{q}}$, se a^p è negativo,

e la stessa cosa avverrà alla seconda, se bP è negativo.

205. Sia $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, espressione che è il differenziale dell'arco di cui il seno $=x$(36); si avrà

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\text{ec.},$$

e da ciò

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\text{ec.}+cost.$$

Sopprimendo la costante, la serie si annienterà, quando $x=0$; e per conseguenza darà il valore del più piccolo degli archi di cui il seno $=x$, siccome nel n.° 38.

Ecco ancora alcuni risultamenti facili ad ottenersi, dopo ciò che precede, ma che è bene il conoscere

1.° $\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}=\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(1-x)}}$, facendo $\sqrt{x}=u$, si ha $\frac{2du}{\sqrt{(1-u^2)}}$; ma per la serie precedente, viene

$$\int\frac{2du}{\sqrt{(1-u^2)}}=2\left(u+\frac{1}{2}\frac{u^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{u^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{u^7}{7}+\text{ec.}\right)+cost.,$$

dunque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}}=2\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{7}+\text{ec.}\right)\sqrt{x}+cos.$$

2.° $dx\sqrt{(2ax-x^2)}=(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$

ora

$$\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\frac{x}{2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{8a^3}-\text{ec.}:$$

dunque

$$\int dx\sqrt{(2ax-x^2)}=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5.2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7.4a^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9.8a^3}-\text{ec.}\right)\sqrt{(2a)}+\textit{costante},$$

$$\text{o}\int dx\sqrt{(2x-x^2)}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{x}{5.3a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{7.4a^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{9.8a^3}-\text{ec.}\right)2x\sqrt{(2ax)}+\textit{costant.}$$

3.° $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$ dà, dopo la riduzione di $\sqrt{(1+x^2)}$ in serie, e l'integrazione,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}-\frac{1,3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\text{ec.}$$

$$+\textit{const.}$$

$$4.^\circ\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}=lx-\frac{1}{2.2x^2}-\frac{1.3}{2.4.4x^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6.6x^6}$$

$$-\text{ec.}+\textit{costant.}$$

Questa serie che racchiude la trascendente lx, è tanto più convergente, quanto x è più grande; ottenerne si può un' altra interamente algebraica, e tanto più convergente quanto x differisce meno dall' unità. Per ciò conviene fare $x=1+u$, locchè dà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}=\int\frac{du}{\sqrt{(2u+u^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int u^{-\frac{1}{2}}du\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

sviluppando $\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, moltiplicando ciascun termine per $u^{-\frac{1}{2}}du$, ed integrando, si trova

$$\int \frac{du}{\sqrt{(2u+u^2)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3.2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7.8} + \text{ec.}\right) + \textit{costant.}$$

$$= \left(1 - \frac{1.u}{2.3.2} + \frac{1.3.u^2}{2.4.5.4} - \frac{1.3.5u^3}{2.4.6.7.8} + \text{ec.}\right)\sqrt{(2u)} + \textit{cost.}$$

e poichè $u = x - 1$, i termini di questa serie sono tanto più piccoli quanto $x - 1$ è poco considerabile.

206. L'utilità della riduzione dei differenziali in serie, essendo soltanto di trasformarli in una serie di termini di cui ciascuno sia in particolare integrabile, non è sempre neeessario che i termini di queste serie sieno monomi.

Se si ha per esempio,

$$\frac{dx\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

e che e sia una quantità piccolissima, lo sviluppo di $\sqrt{(1-e^2x^2)}$ dà una serie convergentissima, perchè nel proposto differenziale x^2 è sempre < 1, a cagione del radicale $\sqrt{(1-x^2)}$; si trova

$$\sqrt{(1-e^2x^2)} = 1 - \frac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1.1}{2.4}e^4x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6 - \text{ec.},$$

e risulta da integrarsi la serie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\left(1 - \frac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1.1}{2.4}e^4x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6 - \text{ec.}\right),$$

di cui ciascun termine è compreso nella formola $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ trattata al n.° 197. Sostituendo in vece di

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}, \int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}, \text{ ec.}$$

l' espressioni date nel n.° citato, risulterà

$$\int \frac{dx\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}} = A$$

$$+\frac{1}{2}e^2\left\{\frac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)}-\frac{1}{2}A\right\}$$

$$+\frac{1.1}{2.4}e^4\left\{\left(\frac{1}{4}x^5+\frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{(1-x^2)}-\frac{1.3}{2.4}A\right\}$$

$$+\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\left\{\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1.5}{4.6}x^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{(1-x^2)}-\frac{1.3.5}{2.4.6}A\right\}$$

$$+\text{ec.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\textit{costant.}$$

In un modo analogo si tratterebbe il differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(a+x)]}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\,\frac{1}{\sqrt{(a+x)}}$$

e riducendo in serie la quantità

$$\frac{1}{\sqrt{(a+x)}} = (a+x)^{-\frac{1}{2}},$$

e in quanto al differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{[(2cx-x^2)(b-x)]}},$$

che nella Meccanica s' incontra, lo svilnppo di

$$(b-x)^{-\frac{1}{2}} = b^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$b^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{x}{b}+\frac{1.3.}{2.4}\frac{x^2}{b^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{b^3}+\text{ec.}\right\}$$

ricondurrebbe all' integrazione di

$$\int \frac{x^q dx}{\sqrt{(2cx-x^2)}}$$ (199).

Dell' integrazione delle funzioni logaritmiche ed esponenziali.

207. Sia primieramente il differenziale $Pdx(lx)^n$, essendo P una funzione algebraica di x; l' integrazione per parti fornisce il mezzo di semplificarlo, diminuendo l' esponente di lx.

In fatti, se nell' espressione generale $\int z^n P dx$, si può integrare il fattore Pdx, e che quindi si esponga

$$Pdx = dv, \quad u = z^n \text{ e } dz = z' dx,$$

la formola $\int u dv = uv - \int v du$ (193) darà

$$\int z^n P dx = z^n v - n \int z^{n-1} v z' dx \quad (1),$$

risultamento in cui la differenziazione ha diminuito d' un' unità l' esponente di z, se però quest' esponente è positivo.

Avrà luogo il contrario se è negativo; converrà allora cambiare il modo di operare, e far cadere l' integrazione su il fattore z^n, ciò che si può, osservando che l' equazione

$dz = z' dx$, dando $dx = \frac{dz}{z'}$, si ha $\int \frac{P dx}{z^n} =$

$$\int \frac{P}{z'} \frac{dz}{z^n} = -\frac{P}{(n-1) z' z^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{z^{n-1}} d\frac{P}{z'} \quad (2).$$

208. Pel differenziale $x^m dx(lx)^n$, si ponga

$$x^m dx = dv, \text{ onde } v = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

e l' equazione (1) conduce a

$$\int x^m dx(lx)^n = \frac{x^{m+1}(lx)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m dx(lx)^{n-1}$$

Se in quest' ultima si cangia successivamente n in $n-1$, in $n-2$, ec., si troverà

$$\int x^m dx(lx)^{n-1} = \frac{x^{m+1}(lx)^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int x^m dx(lx)^{n-2},$$

$$\int x^m \mathrm{d}x(\mathrm{l}x)^{n-2} = \frac{x^{m+1}(\mathrm{l}x)^{n-2}}{m+1} - \frac{n-2}{m+1}\int x^m \mathrm{d}x(\mathrm{l}x)^{n-3},$$

ec.

Proseguendo queste ridnzioni, si toglieranno dall' esponente n, se è frazionario, tutte le unità che contiene; e si può pure col loro soccorso costruire la formola generale

$$\int x^m \mathrm{d}x(\mathrm{l}x)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(\mathrm{l}x)^n - \frac{n}{m+1}(\mathrm{l}x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(\mathrm{l}x)^{n-2} - \frac{n'n-1)(n-2}{(m+1)^3}(\mathrm{l}x)^{n-3} + \text{ec.}\right\} + \textit{costante},$$

che si terminerà qualunque volta che n sarà un numero intero positivo.

Prendendo $n=1$, e $n=2$, si trova

$$\int x^m \mathrm{d}x\mathrm{l}x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{\mathrm{l}x - \frac{1}{m+1}\right\} + \textit{costante},$$

$$\int x^m \mathrm{d}x(\mathrm{l}x)^2 = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(\mathrm{l}x)^2 - \frac{2}{m+1}\mathrm{l}x + \frac{1.2}{(m+1)^2}\right\} + \textit{costante}.$$

Allorchè $m=-1$, la superior formola cessa d' essere applicabile; ma facendo $\mathrm{l}x=u$, si ha

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}(\mathrm{l}x)^n = \int u^n \mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + \textit{cost.}$$

$$= \frac{1}{n+1}(\mathrm{l}x)^{n+1} + \textit{cost.};$$

e la stessa trasformazione renderebbe algebraico il differenziale $\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\mathrm{U}$, nel quale U indicherebbe una funzione algebraica di $\mathrm{l}x$.

Quando n è negativo o frazionario, la serie si prolunga all' infinito; facendo $n=-1/2$, per esempio viene

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(lx)}} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{\frac{1}{(lx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(m+1)(lx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{4(m+1)^2(lx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.5}{8(m+1)^3(lx)^{\frac{7}{2}}} + \text{ec.}\right\} + \textit{costante.}$$

209. Per determinare l'esponente di lx, quando è negativo, bisogna impiegare la formola (2) del n.° 207, colla quale si trova

$$\int \frac{x^m dx}{(lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{(lx)^{n-1}};$$

e ripetendo questa riduzione, cambiando n in $n-1$, in $n-2$, ec., si otterrà

$$\int \frac{x^m dx}{(lx)^n} = \left\{-\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{(m+1)^2 x^{m+2}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} \cdots\cdots\cdots\right\},$$
$$\cdots\cdots + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{x^m dx}{lx}$$

supponendo che n sia un numero intero.

Quando $m=-1$, la formola precedente conduce a

$$\int \frac{dx}{x(lx)^n} = -\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \textit{costante.}$$

risultamento che diventa illusorio quando $n=1$; ma il differenziale $\frac{dx}{xlx}$, il quale corrisponde a questo caso, immediatamente s'integra, facendo $lx=u$, poichè si trasforma in $\frac{du}{u}$, e si dà per suo integrale $l(lx)+$ *costante*.

210. L'integrale $\int \frac{x^m dx}{lx}$ dal quale dipende $\int \frac{x^m dx}{(lx)^n}$ quando n è un numero intero, sembra dover costituire una quantità trascendente a parte. Tale quantità ci conduce ad una formola più semplice, facendo $x^{m+1}=z$: poichè viene allora $x^m dx=\frac{dz}{m+1}$, $lx=\frac{lz}{m+1}$, e per conseguenza $\int \frac{x^m dx}{lx}=\frac{dz}{lz}$.

Si troverà inferiormente lo sviluppo in serie di quest'ultima, che si riferisce pure alle funzioni esponenziali, ponendo $lz=u$, ciò che dà $z=e^u$, $dz=e^u du$, e $\int \frac{dz}{z}=\int \frac{e^u du}{u}$.

211. Mi occuperò ora dell'integrazione delle funzioni esponenziali; primieramente farò osservare che l'equazione $d.a^x=a^x dx la$ (27) dà

$$a^x dx=\frac{1}{la} d.a^x, \text{ onde } \int a^x dx=\frac{a^x}{la}+cost.$$

Da ciò si ricava pure $dx=\frac{d.a^x}{a^x la}$; con questo mezzo il differenziale Vdx diventando $\frac{Vd.a^x}{a^x la}$, si cangia in $\frac{Vdu}{ula}$, allorchè si fa $a^x=u$, ed è algebraico per rapporto ad u quando V è una funzione algebraica di a^x. Si trova in questo modo, che $\frac{a^x dx}{\sqrt{(1+a^{nx})}}=\frac{du}{la\sqrt{(1+u^n)}}$.

212. Passiamo alla formula $\int a^x x^n dx$, dalla quale dipende $\int Pa^x dx$, quando P è una funzione razionale e intera di x. L'equazione (1) del n.° 207 dà

$$\int a^x x^n dx=\frac{a^x x^n}{la}-\frac{n}{la}\int a^x x^{n-1} dx;$$

e continuando questa riduzione di $n-1$ ad $n-2$, ec., si perviene, allorchè n è un numero intero positivo, a

$$\int a^x x^n \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\mathrm{l}a}\left\{x^n - \frac{n}{\mathrm{l}a}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(\mathrm{l}a)^2}x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(\mathrm{l}a)^3}x^{n-3} \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{(\mathrm{l}a)^n}\right\} + costant.$$

213. Se l' esponente n è negativo, l' applicazione della formola (2) del n:° 207, conduce a

$$\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\mathrm{l}a}{n-1}\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^{n-1}};$$

e quaudo l' esponente n è intero, si ottiene

$$\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x \mathrm{l}a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^x(\mathrm{l}a)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} \ldots\ldots - \frac{a^x(\mathrm{l}a)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 1x} + \frac{(\mathrm{l}a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x}.$$

Non si potrebbe spingere la riduzione al di là di $\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x}$ poichè l' equazione

$$\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\mathrm{l}a}{n-1}\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^{n-1}},$$

non dà cosa alcuua, allorchè $n=1$.

Si ricade ancora in quest' esempio, su la trascendente $\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x}$, di cui ho già parlato n.° 210; e se si potesse ottenere la sua espresssione, si avrebbe nello stesso tempo l' integrale $\int a^x x^n \mathrm{d}x$, per tutti i casi ove n fosse un numero intero.

Allorchè n è un numero frazionario, i due sviluppi, di cui si è fatto uso, non hanno termine. Se si avesse, per esempio, $n=-1/2$, il primo darebbe la serie

$$\int\frac{a^x dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{la\sqrt{x}}\left\{1+\frac{1}{2xla}+\frac{1.3}{4x^2(la)^2}+\frac{1.3.5}{8x^3(la)^3}+\text{ec.}\right\}+\textit{costant.}$$

e facendo $n=1/2$ nel secondo, si avrebbe

$$\int\frac{a^x dx}{\sqrt{x}}=2a^x\sqrt{x}\left\{\frac{1}{1}-\frac{2xla}{1.3}+\frac{4x^2(la)^2}{1.3.5}-\frac{8x^3(la)^3}{1.3.5.7}+\text{ec.}\right\}+\textit{costant.}$$

214. In luogo di a^x ponendo il suo sviluppo (27) nella funzione $\int Pa^x dx$, si otterrà

$$\int Pa^x dx+\int P dx+\frac{la}{1}\int Px\,dx+\frac{(la)^2}{1.2}\int Px^2 dx+\frac{(la)^3}{1.2.3}\int Px^3 dx+\frac{(la)^4}{1.2.3.4}\int Px^4 dx+\text{ec.},$$

ciò che darà un nuovo sviluppo di $\int Pa^x dx$, ogni volta che si potranno ottenere le funzioni

$$\int P dx,\ \int Px\,dx,\ \ldots\ \int Px^n dx,\ \text{ec.}$$

Se $P=x^n$, verrà

$$\int a^x x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^{n+2}la}{1(n+2)}+\frac{x^{n+3}(la)^2}{1.2(n+3)}+\frac{x^{n+4}(la)^3}{1.2\,3(n+4)}+\text{ec.}+\textit{costant.},$$

in cui converrà porre lx in luogo di $\frac{x^{n+i}}{n+i}$, quando n sarà un intiero negativo ed eguale a $-i$.

L'applicazione di questo mezzo all'integrale $\int\frac{a^x dx}{x}$, dà lo sviluppo

$$\int \frac{a^x dx}{x} = lx + \frac{xla}{1.2} + \frac{x^2(la)^2}{1.2.2} + \frac{x^3(la)^3}{1,2.3.3} + \frac{x^4(la)^4}{1.2.3.4.4} + \text{ec.} + cost.$$

e che la supposizione di $a^x = z$, da cui risulta $x = \frac{lz}{la}$ e $lx = llz - lla$, trasforma in

$$\int \frac{dz}{lz} = llz + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\frac{(lz)^4}{1.2.3.4} + \text{ec.} + costante.$$

215. Havvi ancora un altro mezzo d' integrare una funzione esponenziale, come per esempio $\frac{e^x x dx}{(1+x)^2}$, ed è di cercare di riferirla al differenziale $e^x P$, che è $e^x(Pdx + dP)$, e nella quale P rappresenta una funzione algebraica di x. Ciò che condur può, in questo processo, si è principalmente la sagacità e l' abitudine del calcolo. Il proposto esempio essendo semplicissimo, basta fare $1+x=z$: allora si ha

$$\frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^{z-1}(z-1)dz}{z^2} = \frac{1}{e}\left\{ e^z \left(\frac{1}{z}dz = \frac{dz}{z^2}\right)\right\};$$

e con un poco di attenzione, ben si vede che $-\frac{dz}{z^2}$ essendo il differenziale di $\frac{1}{z}$, conviene prendere $P = \frac{1}{z}$, onde risulta l' integrale $\frac{e^z}{ez} + costant.$ Rimettendo in luogo di z il suo valore si trova $\int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + costante.$

Dell' integrazione delle funzioni circolari.

216. Col mezzo dell' equazione (1) del n.° 207, ed osservando che

$$\text{d.arc}(\text{sen}=x)=\frac{\text{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}\,(36),$$

si troverà che

$$\int x^n \text{d}x\,\text{arc}(\text{sen}=x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}.\,\text{arc}\,(\text{sen}=x)-\frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\text{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

e $\int\frac{x^{n+1}\text{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ è stato trattato nei numeri 197 e 198.

Quest' esempio basta per mostrare che $\int \text{P}z\text{d}x$, indicando z un arco di circolo e x una qualunque delle linee trigonometriche corrispondenti a quest' arco, potrà essere ricondotto all' integrale di un differenziale algebraico, ogni volta che $\int \text{P}\,\text{d}\,x$ sarà una funzione algebraica di questa variabile, poichè i differenziali dell' arco sono pure funzioni simili (36).

Supponendo sempre che x sia il seno dell' arco z, si ottiene mediante l' equazione (1),

$$\int z^n \text{d}x=xz^n-n\int z^{n-1}\frac{x\,\text{d}\,x}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$\int z^{n-1}\frac{x\text{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}}=-z^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}+(n-1)\int z^{n-2}\text{d}x,$$

e così di seguito, onde si conchiude

$$\int z^n \text{d}x=$$
$$z^n x+nz^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}-n(n-1)z^{n-2}x$$
$$-n(n-1)\,(n-2)z^{n-3}\sqrt{(1-x^2)}+\text{etc.};$$

serie che si arresta quando n è un numero intero positivo.

Se si avesse $\text{P}\text{d}x=\text{d}z$, l' integrale $\int \text{P}z^n\text{d}x$ si cambierebbe in $\int z^n\text{d}z+\frac{z^{n+1}}{n+1}+$ *costant.*; e se si sostuisce a z^n una

qualunque funzioue algebraica di z, l'integrale considerato per riguardo a z rientrerebbe in qualcheduna delle formole precedentemente trattate.

217. Le funzioni le quali più frequentemente s'incontrano non contengono l'arco, ma solamente il suo differenziale, e per integrarle conviene ricordarsi che per i numeri 33 e 34,

$$\text{d. sen } nz = n\,dz \cos nz, \text{ onde } \int dz \cos nz = \frac{1}{n} \text{sen } nz + cost.$$

$$\text{d. cos } nz = -n\,dz \text{ sen } nz, \qquad \int dz \text{ sen } nz = -\frac{1}{n} \cos nz + cost.$$

$$\text{d. tang } nz = \frac{n\,dz}{(\cos nz)^2}, \qquad \int \frac{dz}{(\cos nz)^2} = \frac{1}{n} \text{tang } nz + cost.$$

$$\text{d. cos } nz = -\frac{n\,dz}{(\text{sen } nz)^2}, \qquad \int \frac{dz}{(\text{sen } nz)^2} = -\frac{1}{n} \cos nz + cost.$$

$$\text{d. sen } nz = \frac{n\,dz \text{ sen } nz}{(\cos nz)^2}, \qquad \int \frac{dz \text{ sen } nz}{(\cos nz)^2} = \frac{1}{n} \sec nz + cost.$$

$$= \frac{1}{n \cos nz} + cost.$$

$$\text{d. cosec } nz = -\frac{n\,dz \cos nz}{(\text{sen } nz)^2}, \qquad \int \frac{dz \cos nz}{(\text{sen } nz)^2} = -\frac{1}{n} \text{cosec } nz + cos.$$

$$= -\frac{1}{n \text{ sen } nz} + cost.$$

218. Da queste integrazioni risulta primieramente quella di tutte le funzioni razionali ed intere de' seni e de' coseni, perchè col mezzo dell'espressioni di

$$\text{sen } a \cos b, \quad \cos a \text{ sen } b, \quad \text{sen } a \text{ sen } b, \quad \cos a \cos b,$$

riferite nel quadro delle formole trigonometriche (*Trig.* 29), si possono cambiarle in semplici seni e coseni.

Sia per esempio,

$$dx \text{ sen } (mx+n) \cos (px+q);$$

se si fa da prima

$$a = mx+n, \qquad b = px+q,$$

si trova

$$\text{sen}\,(mx+n)\cos(px+q)=$$
$$\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\left[(m+p)x+n+q\right]+\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\left[(m-p)x+n-q\right];$$

e ponendo

$$(m+p)x+n+q=z\,,\quad (m-p)x+n-q=z'\,,$$

onde

$$dx=\frac{dz}{m+p}\,,\quad dx=\frac{dz'}{m-p}\,,$$

non si avrà più da integrare che il differenziale

$$\frac{1}{2(m+p)}dz\,\text{sen}\,z+\frac{1}{2(m-p)}dz'\,\text{sen}\,z'\,,$$

che darà

$$-\frac{1}{2(m+p)}\cos z-\frac{1}{2(m-p)}\cos z'+\textit{costante.}$$

Rimettendo per z e z' i loro valori verrà

$$-\frac{\cos\left[(m+p)x+n+q\right]}{2(m+p)}-\frac{\cos\left[(m-p)x+n-q\right]}{2(m-p)}+\textit{cost.}$$

Non vi è più difficoltà pei seni e coseni elevati a potenze intere e positive, perchè le citate formole trigonometriche convertono queste potenze in seni e coseni d'archi multipli.

Si è in questa guisa, che la formola

$$\text{sen}\,a^2=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2a\,;$$

cambiando

$$\left[\text{sen}\,(mx+n)\right]^2\ \text{in}\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2(mx+n)\,,$$

conduce all'integrazione di

$$dx\left[\text{sen}\,(mx+n)\right]^2\,;$$

imperciocchè se si fa

$$2(mx+n)=z\text{, onde } dx=\frac{dz}{2m},$$

si otterrà il differenziale

$$\frac{dz}{2m}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos.\,z\right),$$

di cui l' integrale

$$\frac{z-\operatorname{sen} z}{4m}+cost.=\frac{2(mx+n)-\operatorname{sen} 2(mx+n)}{4m}+costante.$$

219. S' innalzerebbero facilmente dell' espressioni di $\operatorname{sen} a^2$, e di $\cos a^2$, a quelle di $\operatorname{sen} a^3$ e di $\cos a^3$, e così delle altre successive; ma quelle del n.° 187 conducono a delle formole che comprendono tutti questi casi particolari.

In fatti, si ha primieramente, per quest' articolo,

$$\cos z^n=\frac{\left[e^{z\sqrt{(-1)}}+e^{-z\sqrt{(-1)}}\right]^n}{2^n},\text{ o }2^n\cos z^n=\left[e^{z\sqrt{(-1)}}+e^{-z\sqrt{(-1)}}\right]^n;$$

e se si sviluppa il secondo membro di quest' equazione, considerando l' esponente n come un numero intero, verrà

$$2^n\cos z^n=$$

$$e^{nz\sqrt{(-1)}}+\frac{n}{1}e^{(n-2)z\sqrt{(-1)}}+\frac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-4)z\sqrt{(-1)}}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}e^{(n-6)z\sqrt{(-1)}}\ldots+\frac{n}{1}e^{-(n-2)z\sqrt{(-1)}}+e^{-nz\sqrt{(-1)}},$$

ma allorchè si cangia z in mz, l' equazione

$$e^{\pm z\sqrt{(-1)}}=\cos z\pm\sqrt{(-1)}\operatorname{sen} z,$$

dando

$$e^{\pm mz\sqrt{(-1)}}=\cos mz\pm\sqrt{(-1)}\operatorname{sen} mz$$

fornisce il mezzo di esprimere in seni e coseni tutti i termini dello sviluppo su indicato, che può dipoi scriversi così:

$$\cos nz + \frac{n}{1}\cos(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)z$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)z\ldots+\frac{n}{1}\cos-(n-2)z+\cos-nz$$

$$+\sqrt{(-1)}\Big\{\operatorname{sen} nz+\frac{n}{1}\operatorname{sen}(n-2)z+\frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{sen}(n-4)z$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\operatorname{sen}(n-6)z\ldots+\frac{n}{1}\operatorname{sen}-(n-2)z+\operatorname{sen}-nz\Big\},$$

e nel quale i termini affetti da $\sqrt{(-1)}$ si distruggono, siccome si vedrà.

1.° Se n è dispari, il numero di questi termini è pari, e tutti quelli che sono ad egual distanza dagli estremi hanno lo stesso coefficiente, ma sono di segni contrari, perchè

$$\operatorname{sen} -niz = -\operatorname{sen} mz \ (Trig.\ 26),$$

qualunque sia m; la prima metà è dunque distrutta dalla seconda, e non rimane che la parte reale dello sviluppo. Se si provasse qualche difficoltà ad intendere quello che precede, per toglierla basta fare il calcolo, assegnando ad n nn valore particolare come 3 o 5.

In quest' operazione si vedrà, senza difficoltà, che la parte reale la quale forma il valore di $2^n \cos z^n$, quando il numero n è dispari, può essere ridotta alla metà de' suoi termini, osservando che

$$\cos -mz = \cos mz \ (Trig.\ 26),$$

donde segue che i termini posti ad eguale distanza dagli estremi sono eguali, si può dunque limitarsi ai termini, che compongono la prima metà della formola, purchè si raddoppiano. In questo modo, si trova

$$2^n \cos z^n =$$

$$2\cos nz + \frac{2n}{1}\cos(n-2)z + \frac{2n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)z + \text{ec.}$$

o dividendo i due membri per 2,

$$2^{n-1}\cos z^n = \cos nz + \frac{n}{1}\cos(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)z + \text{ec.},$$

fermandosi all' ultimo arco positivo, che è..... $[n-(n-1)]z = z$.

2.° Quando l' esponente n è pari, ciascuna parte dello sviluppo ha un numero dispari di termini; ma nella parte immaginaria quello di mezzo essendo

$$\frac{n(n-1)(n-2)....\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3....\frac{n}{2}}\operatorname{sen}(n-n)z,$$

sparisce: dunque questa parte è pur nulla.

Quanto al termine di mezzo della parte reale, siccome è affetto da

$$\cos(n-n)z = \cos 0 = 1$$

si riduce al suo coefficiente, come superiormente; ed a motivo che è unico nella formola, conviene prenderne la metà, se si vuole sottometterlo al comun fattore 2, soppresso nel precedente caso, di modo che si può ancora servirsi della stessa formola in questo caso, purchè si abbia cura di non prendere che la metà del coefficiente del coseno dell' arco nullo che allora si presenta.

Con questa avvertenza, sarà facile di formare i valori della tavola seguente:

$$\cos z = \cos z,$$
$$2\cos z^2 = \cos 2z + 1,$$
$$4\cos z^3 = \cos 3z + 3\cos z,$$
$$8\cos z^4 = \cos 4z + 4\cos 2z + 3,$$
$$16\cos z^5 = \cos 5z + 5\cos 3z + 10\cos z,$$
$$32\cos z^6 = \cos 6z + 6\cos 4z + 15\cos 2z + 10,$$
$$64\cos z^7 = \cos 7z + 7\cos 5z + 21\cos 3z + 35\cos z,$$
ec.

220. L'espressione del seno (187) dà l'equazione

$$\operatorname{sen} z^n = \frac{(e^{z\sqrt{(-1)}} - e^{-z\sqrt{(-1)}})^n}{2^n[\sqrt{(-1)}]^n},$$

e per conseguenza

$$2^n[\sqrt{(-1)}]^n \operatorname{sen} z^n = (e^{z\sqrt{(-1)}} - e^{-z\sqrt{(-1)}})^n =$$
$$e^{nz\sqrt{(-1)}} - \frac{n}{1} e^{(n-2)z\sqrt{(-1)}} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-4)z\sqrt{(-1)}}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} e^{(n-6)z\sqrt{(-1)}} \ldots \mp \frac{n}{1} e^{-(n-2)z\sqrt{(-1)}} \mp e^{-nz\sqrt{(-1)}},$$

in cui i termini dell'ultimo membro sono alternativamente positivi e negativi. Allorchè si collocano in vece degli esponenziali i loro valori dati pei seni e coseni (n.° preced.), viene

$$2^n[\sqrt{(-1)}]^n \operatorname{sen} z^n =$$
$$\cos nz - \frac{n}{1} \cos (n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos (n-4)z$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos (n-6)z \ldots \mp \frac{n}{1} \cos -(n-2)z \mp \cos -nz$$
$$+\sqrt{(-1)}\Big\{ \operatorname{sen} nz - \frac{n}{1} \operatorname{sen} (n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \operatorname{sen} (n-4)z$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \operatorname{sen}(n-6)z \ldots \mp \frac{n}{1} \operatorname{sen} -(n-2)z \mp \operatorname{sen} -nz \Big\},$$

ove ancora convien distinguere due casi.

1.° Quando n è dispari, il numero dei termini di ciascuna parte dello sviluppo, essendo pari e quelli della parte reale, avendo, quando sono ad ugual distanza dagli estremi, lo stesso coefficiente con segni contrari, si distruggono; poichè $\cos -mz = \cos mz$. Dunque questa parte reale è nulla: così non avviene della parte immaginaria, giacchè i termini posti ad egual distanza dagli estremi s'aggiungono, stantechè quelli dell'ultima metà cambiano segno a motivo di

$$\operatorname{sen} -mz = -\operatorname{sen} mz$$

In questo caso, la superiore equazione, essendo in questo modo ridotta al suo primo membro ed alla parte immaginaria del secondo, diventa divisibile per $\sqrt{(-1)}$, e i quozienti

$$2^n[\sqrt{(-1)}]^{n-1}\operatorname{sen} z^n =$$

$$\operatorname{sen} nz - \frac{n}{1}\operatorname{sen}(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{sen}(n-4)z$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\operatorname{sen}(n-6)z \ldots \mp \frac{n}{1}\operatorname{sen}(n-2)z \mp \operatorname{sen} nz.$$

sono tutti e due reali, poichè $n-1$ essendo un numero pari,

$$[\sqrt{(-1)}]^{n-1} = \mp 1,$$

secondo che $n-1$ è divisibile solamente per 2 o per 4.

Qui, come nel precedente numero, i termini situati ad eguale distanza dagli estremi, avendo lo stesso valore, si può ancora limitarsi a raddoppiare quelli della prima metà, fermandosi all' ultimo degli archi positivi.

2.° Quando n è pari, i termini posti ad egual distanza dagli estremi, avendo lo stesso segno, la parte immaginaria è quella che si annienta, come nel n.° precedente, mentre la parte reale sussiste, come in quest' articolo, con un termine di mezzo; allora dunque osservando che $[\sqrt{(-1)}]^n = \mp 1$, e sopprimendo un fattore 2, in ciascun membro si può porre

$$\mp 2^{n-1}\operatorname{sen} z^n =$$

$$\cos nz - \frac{n}{1}\cos(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)z - \text{ec.},$$

purchè si abbia cura di fermarsi al termine in cui l' arco è nullo, e di non prendere che la metà del coefficiente.

Con questa formola, e combinando tutti i segni allorchè quello del primo membro è —, si troveranno, senza fatica i valori contenuti nella seguente tavola:

$$\text{sen } z = \text{sen } z,$$
$$2\,\text{sen } z^2 = -\cos 2z + 1,$$
$$4\,\text{sen } z^3 = -\text{sen } 3z + 3\,\text{sen } z,$$
$$8\,\text{sen } z^4 = \cos 4z - 4\cos 2z + 3,$$
$$16\,\text{sen } z^5 = \text{sen } 5z - 5\,\text{sen } 3z + 10\,\text{sen } z,$$
$$32\,\text{sen } z^6 = -\cos 6z + 6\cos 4z - 15\cos 2z + 10,$$
$$64\,\text{sen } z^7 = -\text{sen } 7z + 7\,\text{sen } 5z - 21\,\text{sen } 3z + 35\,\text{sen } z,$$

ec. (*)

(*) *Nelle suindicate formole mi sono limitato a considerare l'esponente n come intero, essendo questo il solo caso necessario pel maggior numero delle applicazioni: si era, riguardo agli altri, in un errore che il Sig. Poisson ha rilevato il primo; ma rimaneva ancora su questo soggetto alcune difficoltà da schiarire* (*vedete il III vol. del Trattato in* 4° *pag.* 605 *e* 616, *poi il* Bullettino delle scienze matematiche, fisiche e chimiche, *pubblicato dal Sig. Férussac, t. IV, pag.* 216, 338, *l'estratto di una Memoria del Sig. Poinsot, p.* 140, 344, *delle Osservazioni del Sig. Poisson; t. V, p.* 4, *quelle del Sig. Pagani; p.* 250, *quelle del Sig. Ohm; finalmente gli Annali di Matematica pubblicati dal Sig. Gergonne, t. XVI, p.* 254.)

Siccome non è che per rapporto al loro uso nell'integrazione che qui ho posto queste formole, non ho creduto dover parlare nel testo di quelle che servono ad esprimere colle potenze del seno e del coseno dell'arco semplice, il seno ed il coseno d'un arco multiplo qualunque; nondimeno quest'ultime formole essendo rimarchevoli ne indicherò qui la costruzione.

Si ha pel n° 187,

$$\cos nz + \sqrt{(-1)}\,\text{sen } nz = \left[\cos z + \sqrt{(-1)}\,\text{sen } z\right]^n,$$
$$\cos nz - \sqrt{(-1)}\,\text{sen } nz = \left[\cos z - \sqrt{(-1)}\,\text{sen } z\right]^n,$$

prendendo la somma di queste equazioni, se ne conchiude

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{(-1)}\,\text{sen } z)^n + (\cos z - \sqrt{(-1)}\,\text{sen } z)^n}{2};$$

221. Ora, sia da integrare il differenziale $\int dz \cos z^4$; si ricaverà primieramente dalle formole del n° 219,

$$\cos z^4 = {}^1/_8 \cos 4z + {}^1/_2 \cos 2z + {}^3/_8,$$

e si avrà

$$\int dz \cos z^4 = {}^1/_8 \int dz \cos 4z + {}^1/_2 \int dz \cos 2z + {}^3/_8 \int dz$$
$$= \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4z + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2z + \frac{3z}{8} + \textit{costante}.$$

---

e se si toglie la seconda dalla prima viene

$$\operatorname{sen} nz = \frac{(\cos z + \sqrt{(-1)} \operatorname{sen} z)^n - (\cos z - \sqrt{(-1)} \operatorname{sen} z)^n}{2\sqrt{(-1)}},$$

espressioni, che quantunque affette d'immaginari, non sono però meno reali, perchè questi simboli spariscono tutti per lo sviluppo delle indicate potenze. In fatti, si ha

$$(\cos z + \sqrt{(-1)} \operatorname{sen} z)^n = \cos z^n + \frac{n}{1} \sqrt{(-1)} \cos z^{n-1} \operatorname{sen} z$$
$$- \frac{n(n-1)}{1.2} \cos z^{n-2} \operatorname{sen} z^2 - \text{ec.},$$

$$(\cos z - \sqrt{(-1)} \operatorname{sen} z)^n = \cos z^n - \frac{n}{1} \sqrt{(-1)} \cos z^{n-1} \operatorname{sen} z$$
$$- \frac{n(n-1)}{1.2} \cos z^{n-2} \operatorname{sen} z^2 + \text{ec.},$$

e sostituendo queste serie nei superiori valori, si perviene a

$$\cos nz = \cos z^n - \frac{n(n-1)}{1.2} \cos z^{n-2} \operatorname{sen} z^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cos z^{n-4} \operatorname{sen} z^4 - \text{ec.},$$

$$\operatorname{sen} nz = \frac{n}{1} \cos z^{n-1} \operatorname{sen} z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos z^{n-3} \operatorname{sen} z^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} \cos z^{n-5} \operatorname{sen} z^5 - \text{ec.}$$

Quest' esempio mostra abbastanza in qual modo converrebbe operare su tutti quelli che offerir si potrebbero.

222. Le formole

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{z\sqrt{(-1)}} - e^{-z\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}},$$

$$\cos z = \frac{e^{z\sqrt{(-1)}} + e^{-z\sqrt{(-1)}}}{2} \quad (187),$$

cambiando le funzioni dei seni e dei coseni in esponenziali, riconducono l' integrazione delle une a quelle delle altre.

Si può pure cambiare il differenziale $dz \operatorname{sen} z^m \cos z^n$, in un altro che sia contenuto nei differenziali binomii: basta fare $\operatorname{sen} z = x$, donde risulta

$$\cos z = \sqrt{(1-x)^2}, \quad dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (36);$$

e dipoi s' ottiene

$$\int dz \operatorname{sen} z^m \cos z^n = \int x^m dx (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

Quest' ultima espressione s' integra da prima qualunque sia m, allorchè n è pari, poichè $\frac{n-1}{2}$ è un intiero. Quando n è dispari, $\frac{n-1}{2}$ si cambia in $\pm i - {}^1/_2$, essendo i un intiero, e l' uso, sia della formola (B) (195), sia della rmola (D) (196), conduce a

$$\int x^m dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

che si ottiene quando m è un intiero (197, 198).

In tutti gli altri casi si ridurrà l' integrale proposto a quello del più semplice analogo differenziale.

È chiaro che si possono trasformare nello stesso modo i differenziali contenenti le altre linee trigonometriche.

223. Prima d' andar più oltre, è necessario l' osservare che se uno degli esponenti m, n, è dispari, l' integrale

$\int dz$ sen z^m cos z^n si riconduce subitamente alle funzioni algebraiche intere, osservando che

$$\int dz \text{ sen } z^{2p+1} \cos z^q = \int dz \text{ sen } z, \cos z^q (\text{sen } z^2)^p,$$
$$\int dz \text{ sen } z^p \cos z^{2q+1} = \int dz \cos z. \text{sen } z^p (\cos z^2)^q,$$

che

$$(\text{sen } z^2)^p = (1 - \cos z^2)^p, \quad (\cos z^2)^q = (1 - \text{sen } z^2)^q,$$

e che

$$dz \text{ sen } z = -\text{d. cos } z, \quad dz \cos z = \text{d. sen } z$$

Per cui si perviene a

$$-\int u^q du (1-u^2)^p, \quad \int u^p du (1-u^2)^q,$$

facendo cos $z = u$, o sen $z = u$; e questi integrali si ottengono, sviluppando le potenze intere di $1-u^2$.

224. Le formole (A), (B), (C) e (D) dei numeri 194, 195, 196, potrebbero essere facilmente trasformate, per rapporto al differenziale dz sen z^m cos z^n (222); ma si pervengono immediatamente agli stessi risultati, decomponendo in fattori questo differenziale.

Se si pone sotto la formola dz sen z cos z^n. sen z^{m-1}, il primo fattore dz sen z cos z^n, potendo integrarsi, in grazia che dz sen $z = -$ d. cos z, si trova

$$\int dz \text{ sen } z^m \cos z^n = \int dz \text{ sen } z \cos z^n \text{ sen } z^{m-1} =$$
$$-\frac{1}{n+1} \cos z^{n+1} \text{sen} z^{m-1} + \frac{m-1}{n+1} \int dz \cos z^{n+2} \text{ sen } z^{m-2};$$

e poiché cos $z^{n+2} =$ cos z^n cos $z^2 =$ cos z^n $(1 -$ sen $z^2)$, si ottiene

$$\int dz \cos z^{n+2} \text{ sen } z^{m-2} = \int dz \cos z^n \text{sen} z^{m-2} - \int dz \cos z^n \text{ sen } z^m$$

sostituendo nella prima equazione, e prendendo il valore di $\int dz$ sen z^m cos z^n, risulterà (A)

$$\int dz \text{ sen } z^m \cos z^n = -\frac{\text{sen} z^{m-1} \cos z^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dz \text{sen} z^{m-2} \cos z^n$$

225. Si può nello stesso modo costruire la formola propria a diminuire l'esponente di cos z; ma questa immediatamente si deduce dalla precedente, ponendo

$$z = 1' - y, \text{ onde } dz = -dy, \text{ sen } z = \cos y, \cos z = \text{sen } y$$

Con questo mezzo, e combiandovi tutti i segni, la formola (A) diventa

$$\int dy \cos y^m \text{sen } y^n = \frac{\cos y^{m-1} \text{sen } y^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dy \cos y^{m-2} \text{sen } y^n;$$

ed ora se si cambia y in z, come pure si cambi m in n e reciprocamente, si avrà la formola (B)

$$\int dz \text{ sen } z^m \cos z^n = \frac{\text{sen } z^{m+1} \cos z^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dz \text{sen} z^m \cos z^{n-2}$$

226. In quanto poi ai loro analoghi differenziali binomii, queste formole esser debbono rovesciate, allorchè l'esponente che si propone di ridurre è negativo (196).

Prendendo nella formola (A) il valore dell' integrale del secondo membro, si ottiene

$$\int dz \text{sen} z^{m-2} \cos z^n = \frac{\text{sen} z^{m-1} \cos z^{n+1}}{m-1} + \frac{m+n}{m-1} \int dz \text{ sen } z^m \cos z^n;$$

se si cambia di poi m in $-m+2$, e che si passino le potenze negative nel denominatore, verrà la formola (C)

$$\int \frac{dz \cos z^n}{\text{sen } z^m} = -\frac{\cos z^{n+1}}{(m-1)\text{sen} z^{m-1}} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{dz \cos z^n}{\text{sen } z^{m-2}}$$

Egualmente operando su la formola (B), se ne deduce la formola (D)

$$\int \frac{dz \text{sen} z^m}{\cos z^n} = \frac{\text{sen } z^{m+1}}{(n-1)\cos z^{n-1}} + \frac{n-m-2}{m-1} \int \frac{dz \text{ sen} z^m}{\cos z^{n-2}}$$

227. Vediamo ora l' uso di queste quattro formole.

Se si applica la prima, per esempio, a $\int dz \operatorname{sen} z^4 \cos z^2$, darà primieramente

$$\int dz \operatorname{sen} z^4 \cos z^2 = -\frac{\operatorname{sen} z^3 \cos z^3}{6} + \frac{3}{6}\int dz \operatorname{sen}^2 z \cos z^2 ;$$

poi

$$\int dz \operatorname{sen} z^2 \cos z^2 = -\frac{\operatorname{sen} z \cos z^3}{4} + \frac{1}{4}\int dz \cos z^2 ;$$

impiegando poscia la seconda, facendovi $m=o$, $n=2$, si troverà

$$\int dz \cos z^2 = \frac{\operatorname{sen} z \cos z}{2} + \frac{1}{2}\int dz = \frac{\operatorname{sen} z \cos z}{2} + \frac{z}{2} ;$$

finalmente, risalendo da questi valori a quello dell' integrale proposto, verrà

$$\int dz \operatorname{sen} z^4 \cos z^2 = -\frac{1}{6}\operatorname{sen} z^5 \cos z^3 - \frac{3.1}{6.4}\operatorname{sen} z \cos z^3$$

$$+\frac{3.1.1}{6.4.2}\operatorname{sen} z \cos z + \frac{3.1.1}{6.4.2}z + \textit{costante}$$

Si vede bene, con quest' esempio, come il ripetuto uso delle formole (A) e (B) fa trovare $\int dz \operatorname{sen} z^m \cos z^n$, allorchè gli esponenti m ed n sono interi e positivi. La prima conduce a $\int dz \operatorname{sen} z \cos z^n$, quando l' esponente m è dispari; e siccome $d.\operatorname{sen} z = -dz \cos z$, l' integrazione, che rimane da farne subito si effettua (223).

Se l' esponente m è pari, si perviene a $\int dz \cos z^n$, e la formola (B), facendovi $m=o$, conduce a $\int dz \cos z = \operatorname{sen} z$, quando n è dispari, ed a $\int dz = z$, quando ha luogo il contrario.

Se gli esponenti m ed n fossero equali, ma di segni contrari, le formole (A) e (B) più non potrebbero servire, a causa della sparizione del loro denominatore $m+n$. Per evitare quest' inconveniente, basta cominciare dal ridurre quello dei due esponenti, che è negativo.

La formola (C) primieramente applicata a $\int \frac{dz \cos z^n}{\operatorname{sen} z^m}$

conduce a $\int \frac{dz \cos z^n}{\text{sen } z}$, ovvero a $\int dz \cos z^n$, secondo che m è dispari o pari. La formola (B), applicata dipoi a $\int \frac{dz \cos z^n}{\text{sen } z}$, conduce a

$$\int \frac{dz \cos z^n}{\text{sen } z} = \int \frac{\text{d. sen } z}{\text{sen } z} = \text{l. sen } z + \textit{costante.}$$

se n è dispari, e a $\int \frac{dz}{\text{sen } z}$, nel caso contrario. Quest'ultimo risultato non essendo compreso nei differenziali precedentemente integrati, debb'essere posto a parte.

Con le formole (D) ed (A), si passa da $\int \frac{dz \text{ sen } z^m}{\cos z^n}$ a $\int \frac{dz}{\cos z}$, quando m è pari e n dispari.

Finalmente se m ed n sono tutti e due negativi e dispari, la formola (C) conduce primieramente a

$$\int \frac{dz \cos z^{-n}}{\text{sen } z} = \int \frac{dz \text{ sen } z^{-1}}{\cos z^n},$$

integrale che la formola (D) riconduce a

$$\int \frac{dz \text{ sen } z^{-1}}{\cos z} = \int \frac{dz}{\text{sen } z \cos z},$$

nuovo risultamento che conviene pure particolarmente trattare.

228. Mi occuperò per conseguenza, in quest' articolo, dell' integrazione dei tre differenziali.

$$\frac{dz}{\text{sen } z}, \quad \frac{dz}{\cos z}, \quad \frac{dz}{\text{sen } z \cos z},$$

cominciando dall' ultimo. Se si dividono i due termini di questo per $\cos z^2$, diventa

$$\frac{\frac{dz}{\cos z^2}}{\frac{\text{sen } z}{\cos z}} = \frac{d \cdot \text{tang } z}{\text{tang } z} \quad (34),$$

e ne risulta

$$\int \frac{dz}{\text{sen } z \cos z} = l \cdot \text{tang } z + \textit{costant.}$$

Ponendo $z = 2z'$, e mettendo per sen $2z'$ il suo valore $2 \text{ sen } z' \cos z'$ (*Trig.* 11), si ottiene

$$\int \frac{dz}{\text{sen } z} = \int \frac{dz'}{\text{sen } z' \cos z'} = l \cdot \text{tang } z' + \textit{costante}$$

da ciò che si è veduto: dunque

$$\int \frac{dz}{\text{sen } z} = l \cdot \text{tang } {}^1/_2 z + \textit{costante.}$$

Cambiando poscia z in $1^q - y$, viene

$$\int \frac{dz}{\cos z} = -\int \frac{dy}{\text{sen } y} = -l \cdot \text{tang } {}^1/_2 y + \textit{costante}$$
$$= -l \cdot \text{tang } {}^1/_2 (1^q - z) + \textit{costante},$$

ciò che si può trasformare in l. cot. $^1/_2 (1^q - z) + \textit{costante}$, poichè $l \cdot \cot a = -l \cdot \text{tang } a$ (*Trig.* 9).

Si vede dunque che l' integrale $\int dz \text{ sen } z^m \cos z^n$ si ottiene ogni volta che gli esponenti m ed n sono numeri interi, sieno positivi, sieno negativi; ciò non avviene quando questi esponenti sono frazionari. Conviene aver ricorso alle serie, eccettuato in un piccol numero di casi, ove l' integrazione di per se si presenta. (1)

---

(1) *Per quelli che amano di vedere maggiormente, e più generalmente trattata questa parte d' analisi potrà*

Metodo generale per ottenere i valori approssimati degli integrali.

229 Lo sviluppo degli integrali in serie non conduce ad un' approssimazione che nel caso in cui le serie che si ottengono, sieno convergenti, cosa che non sempre avviene; ed è perciò che i matematici hanno cercato i mezzi di pervenire a dei valori che si avvicinino agli integrali, qualunque sieno le proposte funzioni differenziali. Il teorema di Taylor conduce, in un modo semplicissimo, alle formole che l'Eulero ha per questo oggetto formate; ma prima di pervenirvi, farò conoscere alcune relative denominazioni ai diversi punti di vista, sotto i quali gl' integrali si considerano.

La necessità di aggiugnere una costante arbitraria ad un integrale, per dargli tutta la generalità di cui è suscettibile, fa vedere che queste funzioni sono doppiamente indeterminate, poichè non basta per assegnare i loro valori di stabilirne uno alla variabile da cui queste dipendono, ma che conviene ancora determinare la loro costante, la quale è suscettibile di tutti i valori possibili. Ordinariamente si determina questa costante, assoggettando l'integrale a sparire, per un dato valore di x. Si sono già veduti molti esempi (187, 202, 203), e ciò riducesi generalmente a quello che segue.

Se $\int X\,dx = f(x) + C$, indicando $f(x)$ la funzione variabile immediatamente dedotta dal processo dell' integrazione, C la costante arbitraria, e che debba l' integrale sparire per un valore $x=a$, locchè si esprime coll'equazione $f(a) + C = 0$, dalla quale si ricava

$$C = -f(a) \qquad \text{e} \qquad \int X\,dx = f(x) - f(a).$$

Sotto questa formola, l' integrale $\int X\,dx$ non è più che la differenza fra il valore che prende $f(x)$, allorchè $x=a$,

---

consultare una dissertazione del professore Francesco Cardinali pubblicata, in unione ad altre, in Treviso l anno 1818, *in un volume in* 4°.

e quello che acquista, per qualunque altro valore della variabile stessa. Per $x = b$, per esempio, viene

$$\int X \, dx = f(b) - f(a).$$

È bene l'osservare che questo risultamento si ottiene immediatamente, senza aver bisogno di determinare la costante, e soltanto prendendo la differenza dei risultamenti, i quali corrispondono ai valori $x = a$ ed $x = b$, che danno $f(a) + C$, e $f(b) + C$.

Il valore $x = a$, pel quale l'integrale sparisce è l'origine; e allora dicesi che l'*integrale cominciar debbe allorchè* $x = a$. Il valore al quale si arresta, corrispondendo ad $x = b$, si dice, per conseguenza, che l'*integrale è completo* quando $x = b$.

I due valori $x = a$ e $x = b$ sono comunemente indicati col nome di *limiti dell'integrale*.

Qualunque integrale che si enunci senza stabilire la sua origine, o senza indicare i suoi limiti, si chiama *integrale indefinito*, e debbe, per essere *completo*, contenere una *costante arbitraria*.

Allorchè si assegnano questi limiti, l'integrale è *definito*. Se questi sono $x = a$ e $x = b$, per esempio, si dice allora che l'*integrale* $\int X \, dx$ *debb'esser preso da* $x = a$ *sino ad* $x = b$; *e questo si effettua calcolando successivamente ciò che diventa l'espressione variabile dell'integrale quando* $x = a$, *poi quando* $x = b$, *e togliendo il primo risultamento dal secondo*. In questo caso, è inutile lo scrivere, dopo l'integrale la costante arbitraria, poichè scompar isce per la sottrazione

Per indicare l'integrale definito preso fra i limiti a e b, l'Eulero scriveva $\int X \, dx \left[\begin{matrix} x = a \\ x = b \end{matrix} \right]$, alla quale annotazione il Sig. Fourier ha sostituito $\int_a^b X \, dx$, che è più semplice; e per conseguenza quando $\int X \, dx = f(x)$, risulta

$$\int_a^b X \, dx = f(b) - f(a).$$

Segue da ciò, che se a, b, c sono tre valori di x disposti per ordine di grandezza, si avrà

$$\int_a^c X\,dx = \int_a^b X\,dx + \int_b^c X\,dx;$$

poichè

$$f(c) - f(a) = f(b) - f(a) + f(c) - f(b);$$

vale a dire che prendendo la somma degli integrali definiti corrispondenti agli intervalli consecutivi $b-a$, $c-b$, si forma quello il quale corrispoude alla somma $c-a$ di questi intervalli. È cosa importante di famigliarizzarsi con queste espressioni, che spesso si rinvengono, e le considerazioni che sono per esporre le renderanno maggiormente significative.

230. Il teorema di Taylor dando

$$y' = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

allorchè x diventa $x+h$, non può determinare il valore che prende in questa circostanza una funzione di cui non si conosce che i coefficienti differenziali, partendo anche dal prim' ordine, poichè il valore primitivo y rimane indeterminato, e rappresenta per conseguenza una costante arbitraria; ma così non è della differenza fra questo valore e quello che corrisponde ad $x+h$, poichè

$$y' - y = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

Se si fa dunque $\int X\,dx = y$, si avrà

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2X}{dx^2}, \text{ ecc.,}$$

i coefficenti differenziali si dedurranno tutti dalla funzione data X, e verrà

$$y' - y = X\frac{h}{1} + \frac{dX}{dx}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

Per ricavare da questa formola il valore di $\int X\,dx$ da $x = a$ sino ad $x = b$, basterà prendere $h = b - a$, e di sostituire x in luogo di a, nella funzione X ed i suoi coefficenti differenziali, che rappresenterò allora con A, A', A'', ecc., si troverà

$$\int_a^b X\,dx = A\frac{(b-a)}{1} + A'\frac{(b-a)^2}{1.2} + A''\frac{(b-a)^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

Questa serie è generalmente tanto più convergente, quanto l'intervallo $b - a$ è più piccolo; ma allorchè un valore troppo rimarchevole, si divide in un numero di parti abbastanza grande, per formare degl' intervalli sufficientemente piccoli, e si calcola a parte il valore dell'integrale relativo a ciascuno di questi intervalli. Suppongo che la differenza $b - a$ sia divisa in n parti eguali ad α, e che le quantità A, A', A'', ecc., si cambino rispettivamente in A_1, A'_1, A''_1, ecc., A_2, A'_2, A''_2, ecc., allorchè vi si pone $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, ecc., in luogo di a; si avrà fra a e $a + \alpha$,

$$\frac{A\alpha}{1} + \frac{A'\alpha^2}{1.2} + \frac{A''\alpha^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

fra $a + \alpha$ e $a + 2\alpha$,

$$\frac{A_1\alpha}{1} + \frac{A'_1\alpha^2}{1.2} + \frac{A''_1\alpha^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

fra $a + 2\alpha$ e $a + 3\alpha$,

$$\frac{A_2\alpha}{1} + \frac{A'_2\alpha^2}{1.2} + \frac{A''_2\alpha^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

e la somma di tutte queste serie, di cui il numero è n, comporrà il valore totale di $\int_a^b X\,dx$, che sarà per conseguenza ..... (l)

$$\int_a^b X\,dx = \begin{cases} + \frac{\alpha}{1}(A + A_1 + A_2 \ldots\ldots\ldots + A_{n-1}) \\ + \frac{\alpha^2}{1.2}(A' + A'_1 - A'_2 \ldots\ldots\ldots + A'_{n-1}) \\ + \frac{\alpha^3}{1.2.3}(A'' + A''_1 + A''_2 \ldots\ldots\ldots + A''_{n-1}) \\ + \text{ecc.} \end{cases}$$

231. Si è costruita la precedente formola, passando dal valore di y corrispondente ad x, al valore di y' corrispondente ad $x+h$, la quale rappresenta la differenza di questi due valori; ma si può ancora ottenere questa differenza, retrogradando da x ad $x-h$, mediante la formola

$$y_1 = y - \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

nella quale y_1 corrisponde ad $x-h$, che dà

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Per applicare quest' ultima a $\int_a^b X dx$, bisogna, in X e ne' suoi coefficienti differenziali, cambiare x in b; e supponendo che se ne ricavino le quantità B, B', B'', ec., si troverà

$$\int_a^b X dx = \frac{B(b-a)}{1} - \frac{B'(b-a)^2}{1.2} + \frac{B''(b-a)^3}{1.2.3} - \text{ec.}$$

Allorchè si divide lo spazio $b-a$ in n parti eguali ad α, si ottiene, per la formola superiore, fra i limiti $a+\alpha$ ed a,

$$\frac{A_1\alpha}{1} - \frac{A'_1\alpha^2}{1.2} + \frac{A''_1\alpha^3}{1.2.3} - \text{ec.}$$

fra $a+2\alpha$ ed $a+x$,

$$\frac{A_2 x}{1} - \frac{A'_2 x^2}{1.2} + \frac{A''_2 x^3}{1.2.3} - \text{ec.},$$

fra $a+3x$ e $a+2x$,

$$\frac{A_3 x}{1} - \frac{A'_3 x^2}{1.2} + \frac{A''_3 x^3}{1.2.3} - \text{ec.},$$

ec.,

serie egualmente di numero n, e di cui la somma dà (II)

$$\int_a^b X dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{1}(A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n) \\ -\frac{\alpha^2}{1.2}(A'_1 + A'_2 + A'_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + A'_n) \\ +\frac{\alpha^3}{1.2.3}(A''_1 + A''_2 + A''_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + A''_n) \\ -\text{ec.} \end{cases}$$

232. Ognuna di queste due formole può essere in particolare applicata; ma il loro confronto fa scoprire i limiti dell'approssimazione ch' esse danno.

Per istabilire questo confronto, bisogna primieramente osservare che in una serie della formola

$$M\alpha + N\alpha^2 + P\alpha^3 + \text{ec},$$

di cui veruno dei coefficienti M, N, P, ec., non diventa infinito, ove si può supporre α tanto piccola quanto si vorrà, e rendere per conseguenza un qualunque termine superiore alla somma di tutti quelli che lo seguono (62), l'errore che allora si commette, ristringendosi ad un numero limitato dei primi termini è di segno contrario a quello del primo dei termini che si trascurano, cioè che il risultamento peccherà in difetto se questo termine è positivo, ed in eccesso se è negativo.

Da ciò risulta che se i valori della funzione X vanno crescendo da $x=a$ ad $x=b$, e che si limiti in ciascuna formola ai termini moltiplicati per α solamente, la prima

formola sarà in difetto e la seconda in eccesso; imperciocchè se la serie

$$A, A_1, A_2; \text{ec.},$$

è crescente, tutti i valori corrispondenti

$$A', A'_1, A'_2, \text{ec.},$$

del coefficiente differenziale $\frac{dX}{dx}$ saranno positivi (162); così i termini affetti da α^2, saranno positivi nella prima formola, e negativi nella seconda: dunque si avrà

$$\int_a^b X dx > \alpha(A + A_1 + A_2 \ldots + A_{n-1})$$

e

$$< \alpha(A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_n).$$

Di più, la differenza $\alpha (A_n - A)$ di queste due quantità diventerà tanto minore, quanto si prenderà α più piccola, ciò che si effettua aumentando il numero n, senza cambiare A e A_n, che corrispondono ai limiti a e b, assegnati ad x.

Segue da ciò che ognuna delle due somme fra le quali è compresa $\int X dx$, s'avvicinerà quanto si vorrà al vero valore di quest'integrale, che per questa ragione può essere considerato come una somma di differenziali, poichè i prodotti Ax, $A_1 x'$ ec., non sono che i valori di $X dx$ corrispondenti ad $x = a$, $= a + \alpha$, ec., e nei quali α ha preso il posto di dx.

Questa conclusione, la quale sarrebbe ben presto verificata, per le considerazioni geometriche (235), suppone, siccome si vede, che le funzioni X e $\frac{dX}{dx}$ non cambino segno e non diventino infinite entro i limiti $x = a$, $x = b$, ciò che si può sempre ottenere, separando le parti dell'integrale, nelle quali una di queste circostanze avesse luogo (*).

(*) *Le formole precedenti sono spesso scritte nel modo*

È pure evidente che l'ordine dei limiti di $\int X dx$ sarebbe inverso, se i valori di X andassero decrescendo: la prima linea della formola (I) sarebbe in eccesso, quella della formola (II) in difetto.

233. Le stesse osservazioni possono essere estese ai termini affetti dalle potenze di α superiori alla prima: ne risulta, come sopra, che quando due linee corrispondenti in ciascuna formola, hanno segni contrari, la somma di quelle, che le precedono è in eccesso nell'una delle formole, in difetto nell'altra, e che, per conseguenza, se s'ignora la grandezza dell'errore, come ciò quasi sempre avviene, sarà convenevole di prendere il medio fra li due risultamenti Se si opera immediatamente sopra le due formole, verrà (III)

---

indicato alla pagina 323: *avendo posto* $\int X dx = f(x)$, *per cui segue* $X = \frac{d\,f(x)}{dx}$, *che s'indica con* $f'(x)$, *viene*

$$A = f'(a),\ A_1 = f'(a+\alpha),\ \ldots\ A_n = f'(a+n\alpha) = f'(b),$$

$$\alpha(A_n - A) = \frac{b-a}{n}\left[f'(b) - f'(a)\right],$$

e per conseguenza $\int_a^b X dx = f(b) - f(a)$ *è il limite di cui l'espressione*

$$\alpha\left\{f'(a) + f'(a+\alpha) \ldots + f'\left[a+(n-1)\alpha\right]\right\}$$

s'avvicina via maggiormente, a misura che il numero n aumenta e che α, *che è* $\frac{b-a}{n}$, *diminuisce.*

Se non si volesse che stabilire questa relazione, si potrebbe sostituire alla serie di Taylor l'espressione che fornisce il n° 6.

$$\int_a^b X\,dx = \begin{cases} \quad \frac{\alpha}{1}\,[A_1+A_2+A_3\ldots+A_{n-1}+\frac{1}{2}(A+A_n)] \\ +\ \frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{1}{2}(A'-A'_n) \\ +\ \frac{\alpha^3}{1.2.3}\,[A''_1+A''_2+A''_3\ldots+A''_{n-1}+\frac{1}{2}(A''+A''_n)] \\ +\ \frac{\alpha^4}{1.2.3.4}\,\frac{1}{2}(A'''-A'''_n) \\ +\text{ec.} \end{cases}$$

234. Ciò che si è veduto nel n° 232 fornisce ancora, pei valori degli integrali, dei limiti meno ristretti che nondimeno essere possono utilissimi.

Se s' indica con M il massimo valore di X, con m il minimo, nell' intervallo di $x=a$ ad $x=b$, e si sostituisca m in vece di A, A_1, ec., nella prima dell' espressioni dei limiti di $\int X\,dx$, ed M nella seconda, si otterrà

$$\int_a^b X\,dx > n\alpha m \text{ e } < n\alpha M,$$

ovvero $$> (b-a)m \text{ e } < (b-a)M$$

poichè $n\alpha=b-a$(230).

Da ciò si vede che esiste fra m e M un valore μ tale, che

$$\int_a^b X\,dx=(b-a)\mu\ (*)$$

(*) *Il valore di x che dà $X=\mu$, essendo intermedio fra a e b, può rappresentarsi con $a+\theta(b-a)$, indicando θ una quantità compresa fra* 0 *e* 1; *e se si scrive* $f(x)$ *in luogo di* X, *si avrà*

$$\int_a^b dx\,f(x)=(b-a)f[a+\theta(b-a)],$$

espressione la quale qualche volta s' incontra.

Se si trattasse di ottenere $\int XQdx$, e che si sapesse integrare $\int Qdx$, come fra i limiti di x, si avrebbe

$$XQdx > mQdx, \quad XQdx < MQdx,$$

per tutti i valori di x, altri che m o M, esisterebbe fra gl'integrali la stessa dipendenza, e verrebbe

$$\int XQdx > m\int Qdx, \quad \int XQdx < M\int Qdx,$$

ove più non vi sarebbe che da porre per $\int Qdx$, il suo valore fra i limiti $x=a$ e $x=b$.

235. La considerazione delle curve conduce pure, in un modo semplicissimo, alle principali conseguenze stabilite nei precedenti articoli.

Esprimendo $\int Xdx$ l'area del segmento d'una curva di cui l'ordinata è X (65), se BCZ, fig. 40, rappresenta questa curva, che l'origine delle ascisse sia in A, e che X=PM, l'espressione Xdx sarà tanto il differenziale dei segmenti BMP, DEMP, quanto del segmento ACMP, il quale comincia all'origine; così l'ordinata che limita il segmento da questo lato sarà assolutamente indeterminata. L'ordinata PM, che forma l'altro limite lo è parimente, tanto che non si assegni alcun valore all'ascissa AP; ma quando si avranno fissate le ascisse della prima e dell'ultima ordinata, il segmento sarà affatto determinato.

Se la parte variabile dell'integrale $\int Xdx=f(x)+C$, sparisce da se stessa al punto B, questa funzione esprime immediatamente le aree BCA, BED, BMP; allora se si vogliono far partire i segmenti dall'ordinata AC, bisogna togliere da queste aree lo spazio BCA: questo spazio rappresenta la costante determinata, purchè la quantità $f(x)+C$ sparisca al punto A: ma considerando contemporaneamente i due limiti di un segmento, è inutile l'occuparsi della costante; poichè sia che si contino le aree, partendo dal punto B o dal punto A sull'asse delle ascisse, il segmento DEMP, per esempio, si otterrà egualmente dalla differenza dei segmenti BMP, BED, o da quella dei segmenti ACMP, e ACED.

236. L'esame della figura mostra che l'area del segmento d'una curva qualunque è sempre compresa fra la somma d'una serie di rettangoli inscritti PR, P'R', P''R'', ec., e

quella d'una serie di rettangoli circoscritti P'S, P''S', P'''S'', ec., i primi costruiti su la più piccola ordinata di ciascuno dei trapezi curvilinei PM', P'M'', P''M''', ec., ed i secondi su la più grande; si prova di più che queste due serie possono avvicinarsi l'una all'altra tanto quanto si vorrà.

In fatti il rettangolo MRQN è evidentemente eguale alla somma dei rettangoli

$$MRM'S,\quad M'R'M''S',\quad M''R''M'''S'',$$

che formano la differenza fra i poligoni

$$PMRM'R'M''R\,P''',\quad PSM'S'M''S''M'''P''',$$

l'uno inscritto e l'altro circoscritto al segmento..... PMM'M''M'''P'''; ma questo rettangolo MRQN ha per altezza la differenza MN, fra le due ordinate estreme PM, e P'''M''', che mai non cambiano, fintanto che l'intervallo PP''' rimane lo stesso, mentre la base $MR = PP'$ può rendersi tanto piccola quanto si vorrà, moltiplicando le ordinate intermedie; può dunque il detto rettangolo diventare tanto piccolo quanto si vorrà.

Da ciò segue che il poligono inscritto ed il poligono circoscritto possono avvicinarsi al segmento tanto quanto piacerà.

Ciò posto, se si prende

$$AP=a,\quad PP'=P'P''=P''P'''=\text{ec.}=\alpha,$$

si avrà

$$PM=A,\quad P'M'=A_1\quad P''M''=A_2,\quad P'''M'''=A_3,\ \text{ec.},$$

la somma dei rettangoli inscritti sarà

$$A\alpha+A_1\alpha+A_2\alpha\ldots+A_{n-1}\alpha\ (1),$$

quella dei rettangoli circoscritti

$$A_1\alpha+A_2\alpha+A_3\alpha\ldots+A_n\alpha\ (2)$$

e queste due somme dar potranno l'area del segmento PMM'M''M'''P''', con altrettanta approssimazione quanta si

vorrà, ciò che conferma la conclusione ricavata, n° 232, dal principio della convergenza delle serie.

Per ciò si vede ancora come l'integrale $\int X dx$ può esser preso per una somma d'elementi, poichè rappresentando l'area d'un segmento di curva, è il limite della somma dei rettangoli

$$A\alpha, \quad A_1\alpha, \quad A_2\alpha, \quad \text{ec.},$$

che sono gli incrementi delle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al segmento.

Nella figura, in cui le ordinate vanno sempre crescendo, i rettangoli inscritti sono formati su la prima ordinata di ciascun trapezio curvilineo, ed i rettangoli circoscritti su l'ultima; ma se questi passassero per un massimo, come nella figura 41, non sarebbe se non che nella parte CM''', anteriore a questo massimo, ed il contrario avrebbe luogo nella parte posteriore M'''Z: allora la serie (1) da prima minore dello spazio curvilineo, diverrebbe maggiore, e la serie (2) da prima maggiore di questo spazio, diventerebbe più piccola.

237. Di più si avvicinerà al vero valore del segmento della proposta curva, prendendo in vece dei rettangoli inscritti, la somma dei trapezi terminati dalle corde degli archi MM', M'M'', M''M''', ec.

Questi trapezi, avendo tutti la stessa altezza PP', e ciascuna ordinata, eccettuata la prima e l'ultima, essendo comune a due trapezi, la loro somma sarà precisamente eguale alla serie

$$\alpha\left[A_1+A_2+A_3.\ldots.+A_{n-1}+\tfrac{1}{2}(A+A_n)\right],$$

che è media fra le serie (1) e (2), e che è la prima linea delle formola (III) (233) (*).

(*) *Si potrebbe ai poligoni rettilinei sostituire un poligono formato di archi di curve d'una più semplice natura della proposta, ed avvicinandosi più che far non possono le linee rette; ed è perciò che ritornano in sostanza le formole (I) e (II).* Vedete *il Trattato in 4°, t. II, pag.* 140.

Finalmente è evidente, mediante la figura 42, che l'area curvilinea PMNQ è $<$ del rettangolo QE e $>$ del rettangolo PF, costruiti, l'uno su la maggiore, e l'altro su la minore delle ordinate comprese fra i limiti AP e AQ di questo segmento, ciò che si accorda col n. 234.

238. L'uso della formola (III) del n° 233, può presentare qualche difficoltà: e non potrebbe servire quando la funzione X diventa infinita; questa circostanza avviene all'approssimarsi dei valori di x, e non basta di diminuire l'intervallo ω, o di ristringere le ordinate, onde compensare l'effetto del loro rapido accrescimento; bisogna ancora aver ricorso a delle convenienti trasformazioni.

Sia, per esempio, $X=\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$; è tosto evidente che quando x si avvicina all'unità, un piccolissimo cambiamento nel valore di questa variabile ne produce un grandissimo in quello di X; se dunque si domandasse l'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$, da $x=0$ sino ad $x=1-\delta$, essendo δ una quantità piccolissima, bisognerebbe, verso l'ultimo limite, di molto aumentare i valori intermedi dati ad x. Di più, lo stesso integrale non si può immediatamente calcolare sino ad $x=1$; perciocchè X diventa allora infinito, senza che per altro il valore di $\int X dx$ lo sia, poichè $\int -\frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = -2\sqrt{(1-x)} + costante.$

Questa difficoltà proviene da ciò che nell'integrazione, il fattore $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ passa dal denominatore al numeratore; ed avrà luogo, in generale, quando x sarà della formola $\frac{V}{(n-x)^{\frac{p}{q}}}$ e che si avrà $p<q$. Per toglierla, si farà $a-x=z^q$

ciò che darà

$$x=a-z^q,\ dx=-qz^{q-1}dz \text{ e } Xdx=-qVz^{q-p-1}dz,$$

quantità, la quale più non diverrà infinita quando $x=a$, o $z=o$, se la funzione V rimane in questa circostanza finita; dunque si calcolerà allora l'integrale $\int Vz^{q-p-1}dz$, da $z=o$ sino a $z=\delta$, essendo δ una quantità assai piccola, e si avrà in questo modo la parte del valore di $\int \frac{V}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ corrispondente all'intervallo compreso fra $x=a$ e $x=a-\delta^q$.

Si può ancora ottenere l'integrale $\int \frac{Vdx}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ da $x=a$ sino ad $x=a-\delta$, facendo soltanto $x=a-z$, perchè la piccolezza della variabile z, racchiusa fra i limiti strettissimi o e δ, permette di molto semplificare il coefficiente differenziale, Se si avesse, per esempio, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$, il diferenziale da integrare, dopo la indicata trasformazione, sarebbe

$$\frac{-(a-z)^2dz}{\sqrt{(4a^3z-6a^2z^2+4az^3-z^4)}}=\frac{-(a^2-2az+z^2)dz}{\sqrt{z}\sqrt{(4a^3-6a^2z+4az^2-z^3)}}$$

Riducendo la frazione

$$\frac{a^2-2az+z^2}{\sqrt{(4a^3-6a^2z+4az^2-z^3)}}$$

in serie ordinata secondo le potenze di z, e fermandosi al quadrato di questa variabile, si avrebbe finalmente

$$-\int \frac{dz\sqrt{a}}{2\sqrt{z}}\left(1-\frac{5z}{4a}-\frac{5z^2}{32a^2}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{(az)}\left(2-\frac{5z}{6a}-\frac{z^2}{16a^2}\right)$$

Questo risultamento, che sparisce quando $z=o$, darà, per la sostituzione di δ in luogo di z, il valore dell'integrale cercato, da $x=a$ sino ad $x=a-$. Il rimanente

di quest' integrale potrà calcolarsi mediante la serie del n° 233.

239. L' integrale $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$ non potendo ottenersi colla riduzione di $e^{-\frac{1}{x}}$ in serie, che pel caso ove x fosse grandissimo, mostrerò come l'Eulero ne ha calcolato il valore da $x=0$ sino ad $x=1$. mediante la formola del n° 233.

Si può primieramente cambiare

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x} \text{ in } \int x\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2}=e^{-\frac{1}{x}}x-\int e^{-\frac{1}{x}}dx,$$

di cui la parte $e^{-\frac{1}{x}}x$ sparisce, quando $x=0$, diventa e^{-1}, quando $x=1$.

Rimane a trovare $\int e^{-\frac{1}{x}}dx$, pel quale

$$X=e^{-\frac{1}{x}} \quad \frac{dX}{dx}=e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^2X}{dx^2}=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right),$$

$$\frac{d^3X}{dx^3}=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right); \text{ ec.,}$$

espressioni che spariscono quando $x=0$, e donde risulta che A, A', A'', ec., sono nulli (*)

(*) *Questo ha bisogno di una spiegazione. Un qualunque termine delle precedenti espressioni, essendo rappresentato da* $ke^{-\frac{1}{x}}x^{-m}$, *diventa* $ke^{-z}z^m=ke^{-z+m\ln z}$, *allorchè si fa* $\frac{1}{x}=z$; *ora a misura che* x *diminuisce* z *cresce*,

Se si pone in seguito α, 2α, 3α, ec., in luogo di x, si otterranno i valori di A_1, A'_1, ec., A_2, A'_2, e da o sino a $x=n\alpha$,si avrà

$$\int e^{-\frac{1}{x}} dx =$$

$$\frac{\alpha}{1}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}}+e^{-\frac{1}{2\alpha}}\ldots+e^{-\frac{1}{(n-1)\alpha}}\right]+\frac{1}{2}\frac{\alpha e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{a^2 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2}\frac{1}{n^3\alpha^3}$$

$$+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha 4}-\frac{2}{\alpha^2}\right)+e^{-\frac{1}{2\alpha}}\left(\frac{1}{16\alpha^4}-\frac{2}{8\alpha^3}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{1}{(n-1)\alpha}}\left(\frac{1}{(n-1)^4\alpha^4}-\frac{2}{(n-1)^3\alpha^3}\right)\right]\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha^3 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3}\left(\frac{1}{n^4\alpha^4}-\frac{2}{n^3\alpha^3}\right)-\frac{1}{2}\frac{\alpha^4 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{n^6\alpha^6}-\frac{6}{n^5\alpha^5}+\frac{6}{n^4\alpha^4}\right)$$

$$+\text{ ec.}$$

---

e sempre più rapidamente per rapporto ad lz (99)*; l'esponente* $-z+m\text{lz}$ *tende dunque verso l'infinito negativo, allorché m non è paragonabile a z. Ma il numero m, il quale dipende da quello delle differenziazioni, non avendo alcun limite, si può concepirne dei valori tali che* $m\text{lz}$ *eguagli z, poi lo sorpassi tanto quanto si vorrà, qualunque siasi; allora l'esponente* $-z+m\text{lz}$ *passerà dal negativo al positivo, ed aumenterà incessantemente; così*

Allorchè si vuole fermarsi al limite $x=1$, bisogna fare $\alpha=\frac{1}{n}$, ed allora viene $\int e^{-\frac{1}{x}}dx=$

$$\frac{1}{n}\left[e^{-\frac{n}{1}}+e^{-\frac{n}{2}}.....+e^{-\frac{n}{n-1}}\right]+\frac{1}{2ne}-\frac{1}{4n^2e}$$
$$+\frac{1}{6}\left[\frac{(n-2)}{1}e^{-\frac{n}{1}}+\frac{(n-4)}{16}e^{-\frac{n}{2}}+\frac{(n-6)}{81}e^{-\frac{n}{3}}.....\right.$$
$$\left.+\frac{n-2(n-1)}{(n-1)^4}e^{-\frac{n}{n-1}}\right]$$
$$-\frac{1}{12n^3e}-\frac{1}{48n^4e}+\text{ec.}$$

limitandosi ai termini che sono scritti, e facendo $n=10$, si troverà secondo l'Eulero, il valore di $\int e^{-\frac{1}{x}}dx$ presso a poco di un milionesimo di unità, e si otterrà con un esattezza venti volte ancora più grande se si prende $n=20$.

240. Il teorema di Taylor dà pure due sviluppi generali dell' integrale $\int \mathbf{X}dx$. Indicando con C il valore di quest'integrale, quando $x=0$, e rappresentando con A, A', A'', ec., ciò che diventano allora le quantità $\mathbf{X}$, $\frac{d\mathbf{X}}{dx}$, $\frac{d^2\mathbf{X}}{dx^2}$, ec. si avrà

$$\int \mathbf{X}dx=\mathrm{C}+\mathrm{A}\frac{x}{1}+\mathrm{A}'\frac{x^2}{1.2}+\mathrm{A}''\frac{x^3}{1\,2.3}+\text{ec.},$$

serie, nella quale C tien luogo della costante arbitraria.

---

i coefficienti differenziali della funzione $e^{-\frac{1}{x}}$ *non spariscono tutti, quando* $x=0$: *dopo essere stati nulli crescono sino all' infinito Questa circostanza per altro non nuoce all' applicazione indicata nel testo, perche i primi termini della formola (III) bastano soli per dare un approssimazione sempre più grande* (236).

Partendo dal valore generico di $\int X dx$, che rappresenterò con y, per ritornare a quello il quale corrisponde ad $x=0$, e che C indica, è evidente che bisogna fare $h=-x$, nella serie di Taylor, ciò che darà

$$C=y-\frac{dy}{dx}\frac{x}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{x^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

rimettendo in quest'equazione in vece di y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ec., i loro valori, e prendendo quello di $\int X dx$, si avrà

$$\int X dx=C+X\frac{x}{1}-\frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3}-\text{ec.},$$

la quantità C è qui pure la costante arbitraria.

L'integrazione per parti conduce egualmente a questo sviluppo. Infatti se si decompone il differenziale $X dx$ nei due fattori X e dx, e s'integri il secondo, si avrà $\int X dx=Xx-\int x dX$, poi

$$\int x\,dX=\int\frac{dX}{dx}.x\,dx=\frac{1}{2}x^2\frac{dX}{dx}-\frac{1}{2}\int x^2\frac{d^2X}{dx}$$

$$\int x^2\frac{d^2X}{dx}=\int\frac{d^2X}{dx^2}.x^2dx=\frac{1}{3}x^3\frac{d^2X}{dx^3}-\frac{1}{3}\int x^3\frac{d^3X}{dx^2}$$

$$\int x^3\frac{d^3X}{dx^2}=\int\frac{d^3X}{dx^3}.x^3dx=\frac{1}{4}x^4\frac{d^3X}{dx^3}-\frac{1}{4}\int x^4\frac{d^4X}{dx^3}$$

ec.,

ponendo successivamente per $\int x dX$, $\int x^2\frac{d^2X}{dx}$, ec., i loro valori risulterà

$$\int X dx=X\frac{x}{1}-\frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3}-\text{ec.},$$

ed affinchè l'espressione dell'integrale sia completa, converrà aggiungere una costante a questo sviluppo, che

perciò diventerà simile al precedente. Questa serie è stata data per la prima volta da Giovanni Bernoulli, ed essa porta il di lui nome, siccome quella del n° 20 porta quello del Taylor.

241. Sino ad ora non ho considerato che il coefficiente differenziale del prim' ordine; ma se non si conoscesse che quello di second' ordine, bisognorebbero allora due successive integrazioni, onde risalire alla primitiva funzione da cui trae la sua origine.

Sia X il coefficiente differenziale di second' ordine della funzione y; si avrà $\frac{d^2y}{dx^2}=X$, e moltiplicando i due membri per dx, verrà $\frac{d^2y}{dx}=Xdx$; ora $\frac{d^2y}{dx}$ è il differenziale di $\frac{dy}{dx}$ preso considerando dx come costante: si avrà dunque $\frac{dy}{dx}=\int Xdx$. Se P rappresenta la funzione primitiva di x, eguale a $\int Xdx$, e C la costante arbitraria, verrà $\frac{dy}{dx}=P+C$; moltiplicando poscia i due membri per dx si troverà $dy=Pdx+Cdx$, ed integrando, si otterrà $y=\int Pdx+Cx+C'$, essendo C' una seconda costante arbitraria. Se si rimette $\int Xdx$, in luogo di P, risulterà $y=\int dx\int Xdx+Cx+C'$, espressione in cui $\int dx\int Xdx$ indica due successive integrazioni.

Passo ora ai differenziali del terz' ordine. Sia X il coefficiente differenziale della funzione y, relativo a quest'ordine; si avrà $\frac{d^3y}{dx^3}=X$, onde $\frac{d^3y}{dx^2}=Xdx$; ma $\frac{d^3y}{dx^2}=d\frac{d^2y}{dx^2}$: dunque $\frac{d^2y}{dx^2}=\int Xdx+C$, ciò che dà $\frac{d^2y}{dx}=dx\int Xdx+Cdx$. Integrando una seconda volta, verrà $\frac{dy}{dx}=\int dx\int X\,dx+Cx+C'$, per cui si conchiuderà

$$dy=dx\int dx\int Xdx+Cxdx+C'dx,$$

e con una terza integrazione, si avrà finalmente

$$y=\int dx\int dx\int X dx+\frac{C}{2}x^2+C'x+C''.$$

In quest' espressione si può dapprima cambiare $\frac{C}{2}$ in C, poichè la costante C è arbitraria: in seguito bisogna ben osservare che ogni simbolo $\int$ debb'essere considerato come applicato a tutti quelli che lo seguono: ed è per questo che facendo astrazione dalle costanti arbitrarie, s' indicano ancora più semplicemente le successive integrazioni, con la presente annotazione.

Allorchè X indica il coefficiente differenziale di secondo ordine, si ha $d^2y=X\,dx^2$, e prendendo l' integrale di ciascun membro si trova $dy=\int X\,dx^2$; poi integrando ancora una volta viene $y=\iint X\,dx^2=\int^2 X\,dx^2$. Si ha egualmente, quando X è il coefficiente differenziale di terz' ordiue, $d^3y=X\,dx^3$, poi integrando,

$$d^2y=\int X dx^3,\quad dy=\iint X\,dx^3,\quad y=\iiint X\,dx^3=\int^3 X dx^3,$$

e così di seguito per gli ordini superiori.

242. Ricondur si possono queste espressioni ad integrali semplici mediante l' integrazione per parti; poichè ponendo P in luogo di $\int X\,dx$ in $\int^2 X\,dx^2=\int dx\int X\,dx$, viene

$$\int dx\int X dx=\int P dx=Px-\int x dP=x\int X dx-\int Xx dx,$$

onde

$$\int^2 X dx=x\int X dx-\int Xx dx.$$

Passando in seguito a $\int^3 X dx^3=\int dx\int^2 X dx^2$, e mettendo per $\int^2 X dx^2$ il precedente valore, si ottiene

$$\int^3 X dx^3=\int x dx\int X dx-\int dx\int Xx dx;$$

osservando allora che

$$\int x dx\int X dx=\tfrac{1}{2}x^2\int X dx-\tfrac{1}{2}\int Xx^2 dx,$$
$$\int dx\int Xx dx=x\int Xx dx-\int Xx^2 dx,$$

si trova

$$\int^3 X dx^3=\tfrac{1}{2}(x^2\int X dx-2x\int Xx dx+\int Xx^2 dx),$$

e così continuando si forma questo quadro:

$$\int \mathrm{X}dx = \int \mathrm{X}dx,$$

$$\int^2 \mathrm{X}dx^2 = \frac{1}{1}\ (x\int \mathrm{X}dx - \int \mathrm{X}x dx),$$

$$\int^3 \mathrm{X}dx^3 = \frac{1}{1.2}\ (x^2\int \mathrm{X}dx - 2x\int \mathrm{X}x dx + \int \mathrm{X}x^2 dx),$$

$$\int^4 \mathrm{X}dx^4 = \frac{1}{1.2.3}(x^3\int \mathrm{X}dx - 3x^2\int \mathrm{X}x dx + 3x\int \mathrm{X}x^2 dx - \int \mathrm{X}x^3 dx),$$

ecc.

I coefficienti numerici di queste espressioni sono gli stessi che quelli delle potenze del binomio $a-b$; e mentre che l'esponente di x fuori del simbolo $\int$ diminuisce d'un unità in ciascun termine, andando verso la destra il suo esponente sotto questo simbolo aumenta della stessa quantità.

Si restituiranno le costanti arbitrarie, le quali ho omesso in queste formole scrivendo $\int \mathrm{X}dx + \mathrm{C}$ per $\int \mathrm{X}dx$, $\int \mathrm{X}x dx + \mathrm{C}'$ per $\int \mathrm{X}x dx$, $\int \mathrm{X}x^2 dx + \mathrm{C}''$ per $\int \mathrm{X}x^2 dx$, e così delle altre; imperciocchè le costanti C, C′, C″ ecc, essendo affette da diverse potenze di x fra loro irredutibili.

243. I differenziali che ho sin qui trattati sono presi, considerando dx come costante, perchè sono i soli i quali non racchiudono che un coefficiente differenziale. In fatti, allorchè si fa variare nello stesso tempo dy e dx, si ha (131) $d^2y = q dx^2 + p d^2x$; se dunque si proponesse il differenziale $\mathrm{V}dx^2 + \mathrm{V}d^2x$, bisognerebbe che si avesse $\mathrm{V} = p$ e $\mathrm{U} = q$, d'onde risulta $\mathrm{U} = \frac{d\mathrm{V}}{dx}$; e questa condizione essendo adempiuta, più non si avrebbe che da integrare $\int \mathrm{V}dx$.

Questa condizione non sarebbe necessaria, se si particolarizzasse la relazione che si suppone fra x e t; poichè col mezzo suo si eliminerebbero x, dx, e d^2x, e si avrebbe d^2y dato dai soli t e dt.

Applicazione del Calcolo integrale alla quadratura delle curve ed alla loro rettificazione, alla quadratura delle superficie curve ed alla valutazione dei volumi ch'esse comprendono.

Della quadratura delle curve.

244. La quadratura delle curve si riduce all' integrazione del differenziale $X dx$, chiamando X la funzione di x, la quale esprime l'ordinata y della proposta curva (65) non si tratterà dunque qui che di applicare alle curve più conosciute i metodi precedentemente dati, onde effettuare quest' integrazione.

Quelle di cui l' equazione è la più semplice, sono le parabole di diversi ordini, nelle quali $y^n = px^m$; se ne ricava $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$, e per conseguenza

$$\int X dx = \int p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n p^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} + \text{costante.}$$

Tutte queste curve come si vede possono *quadrarsi*; vale a dire che si ha l' espressione finita ed algebraica della superficie del segmento compreso fra il loro arco, l' asse delle ascisse e l'ordinata. È facile per l'espressione di questo segmento, di calcolare quella di qualunque altro spazio contenuto fra una porzione della curva e delle linee rette, formando con le ascisse e le ordinate dei poligoni di cui la geometria elementare dà la misura; più basso se ne vedranno degli esempi (252—255)

Le curve proposte passando per l' origine delle ascisse, giacchè si ha nello stesso tempo $x = o$ ed $y = o$, se si vuole avere la loro area, partendo da questo punto, bisogna sopprimere la costante arbitraria, perchè l' espressione $\frac{n p^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ di per se si annienta quando vi si fa $x = o$. Per avere di poi l' area BCMP, *fig.* 43, compresa fra le ordinate BC e PM, corrispondenti alle ascisse AB

$=a$, e $AP=x$, basterà togliere da $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$, che esprime l'area ACMP, la quantità $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}a^{\frac{m+n}{n}}$ eguale all'area ACB, e si avrà in questo modo

$$BCMP=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}\left(x^{\frac{m+n}{n}}-a^{\frac{m+n}{n}}\right).$$

Quando l'esponente n è pari, l'espressione..... $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ è suscettibile del doppio segno $\pm$; e siccome allora le stesse ascisse AP appartengono a due rami ACM ed Acm, si hanno due segmenti ACMP ed $AcmP$: quello che contiene le ordinate positive ha un valore positivo, e l'altro un valore negativo.

Allorchè gli esponenti m ed n sono dispari l'uno e l'altro, la quantità $x^{\frac{m+n}{n}}$ non ha che un solo segno e rimane sempre positiva, qualunque sia il segno di x; ma è facile il vedere che in questo caso, l'uno dei due rami della curva proposta ha le sue ascisse e le sue ordinate nello stesso tempo negative: segue dunque da ciò che le aree corrispondenti a delle ascisse e a delle ordinate negative, debbono essere considerate come positive,

Se n solo è dispari, allora la quantità $x^{\frac{m+n}{n}}$ diventa negativa, nel tempo istesso che x; ma in questo caso i due rami della curva proposta sono dalla parte istessa della linea delle ascisse, e le ordinate rimangono sempre positive.

Ravvicinando queste osservazioni, se ne dedurrà che

l'area d'una curva è positiva, quando l'ascissa e l'ordinata sono di egual segno, e negativa allorché ha luogo il contrario.

Tutti i segmenti parabolici hanno un rapporto costante, col rettangolo ADMP, formato su l'ascissa e su l'ordinata; poichè l'espressione

$$\frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n} x . p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}},$$

equivale ad $\frac{n}{m+n} xy$, in virtù dell'equazione $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$.

Allorchè $n=m$, la parabola diventa una linea retta, poichè si ha $y=p^{\frac{1}{n}}x$; il segmento ACMP si cangia nel triangolo AMP; del quale il valore è per la formola superiore, come per la Geometria elementare, eguale ad $^1/_2 xy$.

Facendo $n=2$ ed $m=1$, si cade sul caso della parabola ordinaria, e si trova $^2/_3 xy$ pel valore del segmento ACMP.

245. Cercherò ora il valore del segmento delle curve rappresentate dall'equazione $x^m y^n = p$. Quest'equazione si ricava da $y^n = px^m$, cambiando $+m$ in $-m$; si ha $y = p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}}$ e

$$\int X dx = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} + \textit{costante.}$$

Le curve proposte sono le iperboli d'ordini diversi, riferite ai loro asintoti, e sono composte di molti rami, come UMV, fig. 44, inscritti negli angoli, che formano queste rette. Contando i segmenti dall'origine delle ascisse, comprendono essi lo spazio infinito in lunghezza, contenuto fra la parte CV della curva e il suo asintoto AY, e di cui l'area è infinita o finita secondo che m è maggiore

o minore di n. In fatti, per avere lo spazio BCMP, preso dall'ascissa AB$=a$ sino all'ascissa AP$=b$, bisogna (235) fare successivamente $x=a$ ed $x=b$, nell'espressione $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}}$, e togliere il primo risultamento dal secondo; si avrà dunque BCMP$=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}}-a^{\frac{n-m}{n}}\right)$. Se ora si suppone $a=$o, il punto B cadrà sul punto A, e lo spazio BCMP si cambierà in YAPMV; ora la quantità $a^{\frac{n-m}{n}}$ sarà infinita o nulla, secondo che si avrà $m>$ o $<n$: nel primo caso

$$\text{YAPMV}=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n}\left(\frac{1}{0}-b^{\frac{n-m}{n}}\right),$$

e nel secondo caso

$$\text{YAPMV}=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}}-\text{o}\right)=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}b^{\frac{n-m}{n}}$$

Lasciando a d'una grandezza assegnabile, e facendo b infinito, si avrà allora lo spazio XBCU, che sarà infinito se m è minore di n, e che sarà eguale a $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n}a^{\frac{n-m}{n}}$ se m sorpassa n. Risulta da questo che quando m ed n sono disuguali dei due spazi asintotici, l'uno è infinito e l'altro finito.

La ragione di questa differenza si trova nella maggiore o minore rapidità colla quale la curva s'avvicina al suo

asintoto; e poichè $y = \frac{p^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$ ed $x = \frac{p^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{n}{m}}}$, è facile il vedere

che quando $m > n$, y decresce molto più presto di x, per conseguenza la curva s'avvicina molto più rapidamente all'ascisse che a quello delle ordinate e *viceversa*.

Ponendo y in vece di $p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}}$ nell' espressione

$$\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n}{n-m} x.p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}}$$

diventerà $\frac{n}{n-m} xy$, ed il valore dell'area YAPMV sarà $\frac{nxy}{n-m}$ + *costante*. Parrebbe che il termine $\frac{nxy}{n-m}$ dovesse sparire quando si fa $x=0$; ma ciò che precede prova la necessità di nulla pronunciare riguardo a questo, prima d'aver sostituito per y il suo valore dato per x.

246. Quando $n=m$, si ha $xy=p^{\frac{1}{n}}$, ovvero $xy=p$, cambiando $p^{\frac{1}{n}}$ in p, cosa che è indifferente; la curva di cui si tratta in questo caso, è l'iperbola ordinaria ed equilatera, se l'angolo delle coordinate è retto. L'espressione generale dell'area, trovata al n° precedente, si presenta allora sotto una formola infinita, qualunque sia x ed il differenziale di quest' espressione, essendo $\frac{pdx}{x}$, ha per integrale $p\mathrm{l}x$ + *costante*. Gli spazi asintotici sono infiniti l'uno e l'altro, poichè $\mathrm{l}x$ diventa tale per la supposizione di $x=0$, e per quella di x infinito.

Sia UMV, fig. 45, uno dei rami dell'iperbola equilatera, di cui la metà dell'asse traversale $AC=a$, e la potenza $BC \times AB = AB^2 = \frac{1}{2} a^2$ (*Trig.* 164); si avrà

$p={}^1/_2a^2$, e contando le aree partendo dall'ordinata BC, corrispondente alla sommità C, si otterrà $BCMP={}^1/_2a^2 l.AP - {}^1/_2a^2 l.AB={}^1/_2a^2 l.\frac{AP}{AB}$. Se si prende AB per unità verrà a causa di $l.1=0$, $BCMP=l.AP$. Si avrà egualmente $BCM'P'=l.AP'$, $BCM''P''=l.AP''$, ec., donde ne segue che se le ascisse AP, AP′, AP″. ec., sono in progressione per quoziente, le aree corrispondenti BCMP, BCM'P', BCM''P'', ec. saranno in progressione per differenza.

247. L'iperbola che ho considerato, essendo equilatera, non ha dato che dei logaritmi neperiani; ma variando l'angolo degli asintoti, e prendendo sempre AB=1 si può ottenere un infinità d'altri sistemi di logaritmi. Sia UMV, fig. 46, un' iperbola qualunque; conducendo le ordinate PM parallele all'asintoto AY, si proverà con dei ragionamenti analoghi a quelli del n° 65, che il parallelogrammo PMRP' è il differenziale di BCMP. Ora se si conduce P'Q perpendicolare su PM, si troverà $P'Q=PP'.\text{ sen }P'PQ=PP'.\text{ sen }XAY$; indicando con ω l'angolo degli asintoti, si avrà $P'Q=dx\text{ sen }\omega$, e per conseguenza $PMRP'=y\,dx\text{ sen }\omega$. Se si pone per y il suo valore $\frac{1}{x}$, ne risulterà $\frac{dx}{x}\text{ sen }\omega$ per il differenziale dell'area BCMP; e per conseguenza $BCMP=l.x=l.AP$, prendendo sen ω per modolo (28).

Quello dei logaritmi ordinari essendo 0, 4342945 (30), si ha sen $\omega=0$, 4342945, donde segue che gli asintoti dell'iperbola, di cui le aree danno i logaritmi ordinari, fanno fra loro un angolo di 0^g, 28601.

248. Considerata analiticamente la quadratura dell'iperbola ordinaria, presenta una singolarità la quale non può esser passata sotto silenzio; ed è che gli spazii asintotici γApm, fig. 45, corrispondenti alle ascisse negative, non potrebbero essere compresi nella stessa formola che gli spazii YAPM, i quali corrispondono alle ascisse positive. In fatti, la funzione lx che esprime l'area YAPM (246), non solamente diventa infinita quando $x=0$, ma passa all'immaginario quando x diventa negativo, perchè l'equazione $u=lx$, derivando da $x=e^u$, non ammette valore negativo per x.

Questa difficoltà, su la quale non mi arresterò in questo luogo, sussiste al passaggio dell' ordinata y per l'infinito, che qualche volta sembra rompere il legame fra le aree, della continuità (*). Si esprime frattanto benissimo in particolare ognuna di queste aree; poichè se si prendono sul lato negativo dell'asse delle ascisse delle parti $Ab = AB$, $Ap = AP$, si avrà

$$bcmp = BCMP = 1.\frac{AP}{AB} = 1.\frac{Ap}{Ab} \quad (246).$$

La stessa cosa egualmente si conchiude dal calcolo, osservando che se si cambia x in $-x$, il differenziale dell' area, diventando

$$\frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x},$$

ha ancora per integrale $1x +$ *costante*.

249 Facendo $AC = a$, $AP = x$ e $PN = y$, fig. 47, l' equazione del circolo ANE sarà $y^2 = 2ax - x^2$, ed il segmento ANP avrà per espressione $\int dx \sqrt{(2ax - x^2)}$, che si trasforma in $-\int du(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}$, allorchè si fa $x = a - u$. Ma la formula (B) (195) dà

$$-\int du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}u(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}a^2\int du(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\tfrac{1}{2}u\sqrt{(a^2-u^2)} + \tfrac{1}{2}a^2\int \frac{-du}{\sqrt{(a^2-u^2)}};$$

di più

$$\int \frac{-du}{\sqrt{(a^2-u^2)}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{u}{a}\right) \quad (36);$$

ponendo questo valore e quello di u, viene

$$\int dx\sqrt{(2ax-x^2)} =$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)} + \tfrac{1}{2}a^2\,\text{arc}\left(\cos = \frac{a-x}{a}\right),$$

(*) *V. il trattato in 4.°, tom. I. pag. 134; tom. II. pag. 161. tom. III, pag. 613.*

risultamento che sparisce quando $x=o$.

È facile di riconoscere nella parte

$$^1/_2(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}$$

l'area del triangolo PCN, e di vedere che

$$^1/_2a^2\text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right);\ \text{o}\ ^1/_2\ \text{AC. arc. AN},$$

è quella del settore ACN.

Quando vi si fa $x=2a$, l'espressione di ANP diventa $^1/_2\ a^2$ arc $(\cos=-1)=^1/_2\ a^2\pi$, rappresentando π la semicirconferenza del circolo il cui raggio è 1; e questa appartiene allora al mezzo circolo: dunque per l'intero circolo si avrà $a^2\pi=^1/_2\ a.2a\pi$, come si prova negli elementi di Geometria.

Lo sviluppo di $\int dx\sqrt{(2ax-x^2)}$, trovato nel n.° 205, dà dei valori approssimativi dell'area ANP.

Se l'equazione del circolo si riferisse al centro, immediatamente si otterrebbe

$$\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}=^1/_2x\sqrt{(a^2-x^2)}+^1/_2a^2\text{arc}\left(\text{sen}=x\right).$$

250. L'ordinata dell'elisse essendo $\frac{b}{a}\sqrt{(2ax-x^2)}$, il segmento ellittico AMP sarà eguale a $\frac{b}{a}\int dx\sqrt{(2ax-x^2)}$; e siccome è nullo nello stesso tempo che il segmento circolare ANP, si avrà ANP : AMP :: a : b; imperciocchè è facile di concludere dal n.° 236, che quando due differenziali sono in un costante rapporto, questo rapporto è pure quello degli integrali, se questi integrali sono contemporaneamente nulli.

In seguito di ciò che precede l'area del circolo descritto su l'asse maggiore di un'elissi, presa per diametro, stando all'area di questa curva come l'asse maggiore sta al minore, questa è equivalente al circolo descritto su un raggio medio proporzionale fra le metà di questi assi. In fatti, pel

rapporto superiore, l'area dell'ellissi è $\pi a^2 \times \frac{b}{a}$ ovvero πab, e quest'ultima quantità rappresenta evidentemente l'area del circolo di cui il raggio sarebbe $\sqrt{ab}$.

251. L'iperbola riferita al suo asse traversale ha per equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, e dà

$$\text{AQR} = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{(2ax + x^2)}.$$

Quest'integrale si può ottenere mediante i logaritmi (183) o con isvilupparlo in serie; ma invece di fermarmi a calcolare questi risultati, mi occuperò dei settori ellittici e dei settori iperbolici, di cui l'espressioni differenziali spesso s'incontrano.

252. Sia ABab un'ellisse di cui il semiasse maggiore AC$=a$; il semiasse minore BC$=b$; facendo CP$=x$, risulta

$$\text{PM} = y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

È evidente che il settore

$$\text{ACM} = \text{CMP} + \text{AMP},$$

e che

$$\text{d.ACM} = \text{d.CMP} + \text{d.AMP},$$

$$\text{CMP} = \frac{1}{2} \text{CP} \times \text{PM} = \frac{1}{2} \frac{bx}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

$$\text{d.CMP} = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \left(dx \sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \right),$$

$$\text{d.AMP} = -\frac{b}{a} dx \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

L'ultimo di questi differenziali è affetto del segno —, perchè l'area AMP decresce allorchè x aumenta; e questi danno

$$\text{d.ACM} = -\frac{1}{2} \frac{b}{a} \frac{a^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Se si fa $\frac{a}{b}=1$, il settore ellittico ACM si cambierà nel settore A C N che appartiene al circolo A E ae descritto sull'asse maggiore Aa, come diametro; si avrà dunque

$$\text{d.ACN}=-\tfrac{1}{2}\frac{a^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\tfrac{1}{2}a\times-\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

ma $-\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ essendo il differenziale dell'arco AN, ne risulta, come dalla Geometria elementare,

$$\text{ACN}=\tfrac{1}{2}a\times\text{AN}=\tfrac{1}{2}\text{AC}\times\text{AN}$$

e poichè i settori ACN e ACM hanno la loro origine comune al punto A, si concluderà (250) che il settore ellittico

$$\text{ACM}=\frac{b}{a}\text{ACN}=\tfrac{1}{2}\text{BC}\times\text{AN}.$$

253. Nell'iperbola X Ax, descritta su i medesimi assi dell'ellisse ABab, e di cui l'equazione è

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)},$$

il settore ACR=CQR—AQR, locchè dà

$$\text{d. ACR}=\text{d. CQR}-\text{d.AQR};$$

e siccome

$$\text{CQR}=\tfrac{1}{2}\text{CQ}\times\text{QR}=\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{(x^2-a^2)},$$

$$\text{d.AQR}=\frac{b}{a}\,dx\sqrt{(x^2-a^2)},$$

si avrà

$$\text{d. ACR}=-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{a^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

donde si vede che il differenziale del settore iperbolico è, eccettuato i segni, lo stesso che quello del settore ellittico.

254. Il settore iperbolico ACM, fig. 46, è eguale allo spazio asintotico BCMP; imperciocchè

$$ACM=BCMP+ABC-AMP,$$

e

$$ABC=\frac{AB\times BC\times \text{sen}B}{2}=\frac{AP\times PM\times \text{sen}B}{2}=AMP.$$

255. Quello che precede basta per far vedere come il calcolo integrale si applica alla quadratura delle curve; non posso per altro abbandonare questo argomento senza dare alcuni degli interessanti risultati ai quali i Geometri sono pervenuti, riguardo alle curve trascendenti.

Nella Logaritmica, di cui l'equazione è $y=lx$, si ha $\int y\,dx=\int dx\,lx=x\,lx-x+$ *costante* (207). La parte variabile di questa espressione diventa nulla allorchè $x=o$; poichè facendo $x=\frac{1}{m}$, prende la forma $-\frac{lm}{m}-\frac{1}{m}$, sotto la quale è nulla, quando m è infinita (99): dietro a ciò, è dunque inutile di aggiugnervi una costante, allorchè si vogliono i segmenti, partendo dal punto A, fig. 48.

Facendovi $x=AE=1$, dà l'espresissione dello spazio asintotico $cAEx$, il quale è finito ed $=a-1$.

Se si prendono le ordinate in luogo delle ascisse, si avrà $\int x\,dy=\int dx=x$, per lo spazio $cOMx$, appoggiato sull'asse delle ordinate AC, e di cui l'espressione è algebrica; non vi ho aggiunto niuna costante, perchè sparisce contemporaneamente della x. Lo spazio $cAEx$, che corrisponde ad $x=AE=1$, ha, con questa formola, lo stesso valore che colla precedente, astrazion fatta dal segno.

Si è supposto la modula eguale all'unità; se è stata designata per M, si avrà

$$\int dx\,lx=x\,lx-\int M\,dx=x\,lx-Mx \text{ e } \int x\,dy=Mx.$$

256. Discutendo la curva di cui l'equazione è

$$y=\frac{a^x}{x},$$

si troverà, senza difficultà la forma indicata nella fig. 49. L'asse CC delle y è asintoto dei rami HF R'F', ed AB', parte negativa dell'asse delle x, lo è del ramo M'K'.

La quadratura di questa curva dipende dall'integrale $\int \frac{a^x dx}{x}$ di cui lo sviluppo in serie, ottenuto nel n. 214. sembra non poter convenire alla parte dell'area corrispondente all' ascisse negative, a causa del suo primo termine lx, il quale diventa immaginario; per altro, se si applicasse a tale ricerca il processo del n.° 233, si otterrebbero dei resultati reali. Questa difficoltà dello stesso genere di quella che è stata indicata nel n.° 248, si toglie cangiando il segno di x prima dell'integrazione; poichè

$$\int \frac{a^{-x} \times -dx}{-x} = \int \frac{a^{-x} dx}{x} =$$

$$lx - \frac{xla}{1.1} + \frac{x^2(la)^2}{1.2.2} - \frac{x^3(la)^3}{1.2.3.3} + \text{ec.} + \textit{costante}$$

come se si avesse cambiato x in $-x$ nei soli termini algebraici del citato sviluppo.

Per sapere ciò che sono i tre spazi asintotici della proposta curva, conviene cercare i valori che prende l'integrale $\int \frac{a^x dx}{x}$ fra i limiti

$$x = 0 \text{ e } x = n, \quad x = 0 \text{ e } x = -n,$$

$$x = -n \text{ e } x = -\text{ infinito},$$

indicando n una qualunque quantità finita. Nel primo e nel secondo caso si trova un risultato finito, poichè facendo $x = 0$, tanto nella serie del n.° 214, quanto in quella che si è riportata, si riducono a l.o; ma non si saprebbe dir nulla su il terzo caso, perchè i termini dello sviluppo di $\int \frac{a^{-x} dx}{x}$, essendo alternativamente di segni contrari, può

darsi che la differenza fra la parte positiva e la parte negativa rimanga finita, quantunque ciascuna di queste parti sia infinita; ed è ciò che avviene di fatto, come lo ha provato il Mascheroni, determinando la costante arbitraria, in modo che l'integrale sparisca, allorchè vi si pone x infinito; di maniera che lo spazio asintotico B'P'MK' compreso fra i limiti $x=-n$ ed $x=-$ infinito, è d'una finita grandezza(*).

La trasformata $\int\frac{dz}{lz}$ (214), ottenuta facendo $a^x=z$, presenta le stesse circostanze a cagione del termine lz che principia il suo sviluppo, e che diventa immaginaria quando lz è negativo.

257. L'equazione della cicloide essendo

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}}\ (114),$$

viene

$$\int y dx=\int\frac{y^2dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}},$$

espressione, che sarebbe facile d'integrare cogli archi di circolo, mediante la formula del n.° 199; ma pervenire si può ad un più semplice risultato, prendendo il differenziale del segmento ACQM, fig. 50, di cui l'ordinata $QM=AC-PM=2a-y$.

Facendo, per conseguenza, $2a-y=z$, si avrà

$$d.ACQM=zdx,$$

e si otterrà

$$zdx=\frac{(2a-y)y\,dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}}=dy\sqrt{(2ay-y^2)};$$

dunque

$$ACQM=\int dy\sqrt{(2ay-y^2)}+costante.$$

Ora quest'integrale, esprimendo l'area d'un segmento

(*) *Vedi il Trattato in 4.°, t. III, pag.* 513.

di circolo di cui il diametro è $2a$, e l'ascissa y (249), rappresenta il segmento Imn, il quale sparisce quando $y=o$, egualmente che il segmento ACQM: dunque..... ACQM=Imn. Al punto K, ove $y=2a$, il segmento ACK diventa eguale al semicircolo ImKI Finalmente è chiaro che lo spazio KMQ=ACK—ACQM=Kmn.

Il rettangolo AK, avendo per altezza IK e per base AI=ImK, sarà quadruplo del semicircolo ImKI; togliendo da questo rettangolo lo spazio ACK=ImKI, rimarrà.... AMKI=3 volte ImKI. Da ciò segue che lo spazio AKLA, compreso fra un ramo della cicloide ed il suo asse, è triplo del circolo generatore.

258. Mi rimane a parlare delle spirali; io mi occuperò da prima di quella che rappresenta l'equazione $u=at^n$ (117). nella quale t è eguale all'arco ON, fig. 51, ed u=AM. Le coordinate essendo polari, il differenziale dell' area sarà $\frac{u^2\,dt}{2}$ (120); mettendo per u il suo valore ed integrando, verrà $\frac{a^2t^{2n+1}}{4n+2}$ + *costante*; e quando n è positivo, trascurare debbesi la costante, allorchè si contano le aree, partendo dalla linea AO su la quale $t=o$: allora l'aree ACM=$\frac{a^2t^{2n+1}}{4n+2}$. Dopo una rivoluzione del raggio vettore, si avrà lo spazio ACMB=$\frac{a^2(2\pi)^{2n+1}}{4n+2}$, π essendo la semicirconferenza del circolo ON.

Nella spirale d'Archimede (117), $a=\frac{1}{2\pi}$, $n=1$ ed ACM=$\frac{t^3}{24\pi^2}$, risultato che, quando vi si fa $t=2\pi$, dà ACMB=$\frac{\pi}{3}$, cioè il terzo del circolo ON, giacchè si tratta di unità quadrate, e che l' area di questo circolo è $\pi(1)^2$.

Nella seconda rivoluzione, il raggio vettore AN ripassa su l'area tracciata nella prima, e così di seguito ad ogni

rivolgimento, in modo che queste aree si aggiungono le une alle altre, e che per dare solamente quella che è terminata dall'm^{mo} rivoluzioae, l'integrale $\int \frac{u\,dt}{2}$, debbe essere preso fra i limiti $t=(m-1)2\pi$, e $t=m.2\pi$.

In quanto alla spirale d'Archimede, si trova analogamente $\frac{m^3-(m-1)^3}{3}\pi$.

Se si calcola l'area terminata dalla seguente rivoluzione, cioè la $(m+1)^{mo}$, e che se ne levi quella che la precede, si avrà per lo spazio compreso fra due rivoluzioni, o *spire*,

$$\frac{(m+1)^3-2m^3+(m-1)^3}{3}\pi=2m\pi,$$

locchè riducesi a 2π quando $m=1$, e mostra che lo spazio compreso fra la m^{mo} e la $(m+1)^{mo}$ spire, è eguale ad m volte quello che è rinchiuso fra la prima e la seconda, come Archimede lo ha trovato.

Nella spirale iperbolica ove $n=-1$. si ha

$$\int \frac{u^2dt}{2}=-\frac{a^2}{2t}+\textit{costante},$$

e l'area compresa fra i due raggi vettori corrispondenti a $t=b$, e a $t=c$, sarà

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

espressione la quale diventa infinita quando $t=0$, per motivo dello spazio compreso fra l'asse AB, fig. 31, ed il ramo infinito MK (p. 173).

Finalmente nella spirale logaritmica $t=lu$ (128),

$$dt=\frac{du}{u},\quad \int \frac{u^2dt}{2}=\int \frac{u\,du}{2}=\frac{u^2}{4}+\textit{costante}.$$

259 Il differenziale dell'arco d'una curva, riferita a delle coordinate fra loro ortogonali, è espresso da.....

$\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (64); sostituendovi, in vece di dy^2, il suo valore ricavato dall'equazione differenziale della curva proposta, prenderà la forma Xdx, ed il suo integrale darà la lunghezza dell'arco di questa curva. Domandare la lunghezza dell'arco d'una curva, è chiedere la sua *rettificazione*, giacchè la risoluzione di questo problema, allorchè esattamente si ottiene, pone in istato di assegnare una linea retta che sia eguale all'arco di cui si tratta.

260. Prendo per primo esempio le parabole di diversi gradi, rappresentate dall'equazione $y=px^n$, essendo n un numero qualunque intero o fratto; risulta

$$dy=npx^{n-1}dx\,,\quad \sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{(1+n^2p^2x^{2n-2})}$$

l'arco parabolico sarà dunque espresso da

$$\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx$$

Quest'integrale si ottiene sotto una forma finita ed algebraica, allorchè l'esponente $2n-2$ sarà eguale all'unità o vi si troverà contenuto un esatto numero di volte (192).

Sia primieramente $2n-2=1$, ne risulterà $n=\frac{3}{2}$, e

$$\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx=\frac{8}{27p^2}\left(1+\frac{9}{4}p^2x\right)^{\frac{3}{2}}+\textit{costante},$$

la proposta curva sarà data dall'equazione $y=px^{\frac{3}{2}}$, o $y^2=p^2x^3$, e sarà per conseguenza la stessa, siccome la parabola di terzo grado è la sviluppata della parabola ordinaria (81). Se si contano gli archi, partendo dal punto in cui $x=0$, si avrà

$$\frac{8}{27p^2}\left[\left(1+\frac{9}{4}p^2x\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$$

Facendo $\frac{1}{2n-2}=i$, indicando i un numero intero, si

troverà $n=\frac{2i+1}{2i}$, e l'equazione $y^{2i}=p^{2i}x^{2i+1}$ somministrerà un infinità di parabole rettificabili: in quanto poi alle altre, non si possono ottenere gli archi loro che per approssimazione.

Per la parabola ordinaria, nella quale $n=2$, si ha...

$\int dx(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}$; colla formola (B) del n° 195, si trova

$$\int dx(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+p^2x^2)}}$$

e siccome

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+4p^2x^2)}}=\frac{1}{2p}l[2px+\sqrt{(1+4p^2x^2)}]+cons\ (184)$$

risulterà

$$\int dx(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4p}l[2px+\sqrt{(1+4p^2x^2}]$$
$$+\ costante.$$

Tal è il valore d'un arco qualunque della parabola ordinaria: e nel quale si può sopprimere la costante, facendo cominciare l'integrale quando $x=0$.

L'arco delle iperbole date dall'equazione $y=px^{-n}$, ha $\int x^{-n-1}dx(x^{2n+2}+n^2p^2)^{\frac{1}{2}}$ per espressione e non può ottenersi che per approssimazione.

261. Il differenziale dell'arco di circolo è $\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ allorchè si parte dall'equazione $y^2=a^2-x^2$ (164), e $\frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, quando s'impiega l'equazione $y^2=2ax-x^2$; sotto l'una e l'altra di queste formole, il suo integrale non può ottenersi che per approssimazione, e ne ho già dato molti sviluppi (205).

262. Passo all'ellisse, e prendo per equazione di curva

$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; il differenziale del suo arco sarà..... $\frac{dx\sqrt{(a^4-[a^2-b^2]x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$: facendo per più semplicità l'asse maggiore $a=1$, ed il quadrato dell'eccentricità $a^2-b^2=1-b^2=e^2$, diverrà l'arco $\int\frac{dx\sqrt{(1-e^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Ho riportato di già nel n° 206 una serie, che dà il valore approssimato di quest'integrale, allorchè e è piccolissimo, e che apparterrà all' ellissi poco schiacciate.

Supponendo $x=1$ in questa serie, e mettendo $\frac{\pi}{2}$ in luogo dell'arco A, il quale è allora di 1^q, diventa

$$\frac{1}{2}\pi\left(1-\frac{1.1}{2.2}e^2-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}e^4-\frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}e^6-\text{ec.}\right),$$

sviluppo convergentissimo quando e è una piccola frazione.

263. Il differenziale dell'arco ellittico si esprime, in un modo semplicissimo, per mezzo dell'arco che gli corrisponde nel circolo descritto sull'asse maggiore, come diametro. Sia $EN=\varphi$, fig. 47, si avrà

$$CP=x=\text{sen }\varphi,\quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=d\varphi,$$

e per conseguenza

$$d.BM=d\varphi\sqrt{(1-e^2\,\text{sen}\,\varphi^2)}$$

264. L'equazione dell' iperbola essendo

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

si ha $\frac{dx\sqrt{[(a^2+b^2)x^2-a^4]}}{a\sqrt{(x^2-a^2)}}$, per il differenziale del suo arco; facendo $a=1$, $a^2+b^2=1+b^2=e^2$, quest'arco si

trova espresso da $\int \frac{dx\sqrt{(e^2x^2-1)}}{\sqrt{(x^2-1)}}$ e può, nel caso ove e fosse vicinissimo all' unità, svilupparsi in serie con un processo analogo a quello del n° 206.

265. Mi rimane a parlare delle curve trascendenti. L' equazione della cicloide essendo

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}} \quad (114),$$

si ricava

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dy\sqrt{(2a)}}{\sqrt{(2a-y)}},$$

differenziale di cui l' integrale è

$$= -2\sqrt{[2a(2a-y)]} + \textit{costante}.$$

È evidente che $\sqrt{[2a(2a-y)]}$ è l' espressione della corda mK, fig. 50, del circolo generatore; e siccome la parte variabile dell' integrale sparisce al punto K, in cui $y=2a$, ne segue che essa esprime l' arco MK; si ha dunque

$$MK = 2\sqrt{[2a(2a-y)]} = 2mK.$$

Quando $y=0$, quest' arco diventa $AK = 2IK$, risultato che si accorda con ciò che si è veduto nel n° 126, e per cui segue che l' arco totale AKL è quadruplo del diametro del circolo generatore (*).

266. Per dare un esempio dell' uso della formola..... $\sqrt{(u^2dt^2+du^2)}$, la quale esprime il differenziale dell' arco

---

(*) *Se si rappresenta con s l' arco* MK, *con y' la linea* $Kn=2a-y$. *e che si cambia* 2a *in a', l' espressione di* MK, *soperiormente trovata, dà l' equazione*

$$s = 2\sqrt{(a'y')}, \quad o \quad s^2 = 4a'y',$$

della quale se ne fa uso nella Meccanica.

di una curva riferita alle coordinate polari (125), prenderò le spirali di cui l'equazione è $u=at^n$, ed avrò da integrare il differenziale

$$dt\sqrt{(a^2t^{2n}+n^2a^2t^{2n-2})}=at^{n-1}dt(t^2+n^2)^{\frac{1}{2}}$$

Allorchè $n=1$, si ha solamente $adt(t^2+1)^{\frac{1}{2}}$, differenziale della stessa forma che quella dell'arco della parabola ordinaria (260), e donde segue che è alla rettificazione di questa curva che si riferisce quella della spirale d' Archimede.

Nella spirale logaritmica si ha $t=lu$, ciò che dà

$$\sqrt{(u^2dt^2+du^2)}=du\sqrt{2};$$

l'arco di questa curva ha dunque per espressione $u\sqrt{2}$ + *costante*, o solamente $u\sqrt{2}$, partendo dall' origine dei raggi vettori; e si vede che quantunque si trovi, fra quest' origine ed un punto qualunque della curva, un' infinità di rivoluzioni, esse per altro non compongono che una lunghezza finita, eguale alla diagonale del quadrato fatto su il raggio vettore.

Della cubatura dei corpi terminati da superficie curve, della quadratura delle loro aree, e dell' integrazione dei differenziali parziali.

267. Le prime superficie curve che i Geometri hanno considerato, sono quelle di rivoluzione, perchè i differenziali delle loro aree e dei volumi ch' esse comprendono, hanno un'espressione più semplice di quelle che hanno le loro analoghe nelle superficie curve in generale.

Sia u il volume del corpo generato dal segmento AMP, fig. 52, di una qualunque curva AZ. girando attorno all'asse AB preso nel suo piano; è evidente che questo volume, terminato dal piano circolare descritto dall'ordinata MP, è una funzione dell' ascissa AP$=x$. Se si prende un' altra ascissa AP', e si conduca una seconda ordinata M'P', siccome pure le rette MR e SM' parallele a PP', si vedrà

che il volume u si accresce di quello che descrive il trapezio curvilineo PMM'P', girando attorno a PP', e che quest' ultimo corpo, compreso fra i cilindri generati dai rettangoli MP', e M'P, differisce tanto meno dall'uno e dall'altro, quanto più punti M ed M' si avvicinano, di modo che il limite dei rapporti di questi tre corpi è l'unità; si può dunque, quando si tratta di limiti, prendere il cilindro descritto da MP', pel corpo generato da PMM'P'. Questo cilindro avendo per base il circolo descritto dal raggio PM$=y$, il suo volume sarà πy^2PP', chiamando π il rapporto della circonferenza al diametro, e si troverà, per il ragionamento del num. 65, che $\frac{du}{dx}=\pi y^2$, onde $u=\pi\int y^2 dx$. Allorchè dunque si avrà l'equazione della curva AMZ, si sostituirà per y il suo valore dato per x, e l'integrazione farà conoscere il volume di un qnalunque segmento del corpo generato da questa curva.

268. Per trovare il differenziale dell'area dello stesso corpo, bisogna osservare che il suo incremento o l'area descritta dall'arco MOM', che incessantemente si avvicina alla sua corda MM', tende a confondersi coll'area del tronco di cono retto descritto da questa corda; e passando ai limiti, si può prendere l'una per l'altra (*). Ma l'area del tronco di cono retto descritto da MM', avrà per espressione,

$$\tfrac{1}{2}(2\pi MP+2\pi M'P')MM'=\pi(MP+M'P')MM';$$

e paragonandola all'incremento dell'ascissa PP', si otterrà

$$\pi(MP+M'P')\frac{MM'}{PP'};$$

ora passando ai limiti, M'P' si confonde con MP, o y, e

(*) *Si vedrà facilmente che non è così di quelle dei cilindri inscritti e circoscritti, generati da* MR *e* SM'.

$\frac{MM'}{PP'}=V\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)$ (64): dunque il coefficiente differenziale dell'area descritta dall'arco AM è eguale a

$$2\pi y V\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

e per conseguenza $2\pi y V(dx^2+dy^2)$ è il differenziale di quest'area.

Si perviene tosto a quest'espressione, come pure a quella del numero precedente, considerando la curva AMZ come un poligono; poichè allora l'elemento del volume è il cilindro descritto dal rettangolo MP', quello dell'area è il tronco di cono descritto dal lato MM'.

269. Insisterò poco sulle applicazioni, le quali non hanno per loro stesse difficoltà alcuna. Se si prende l'equazione dell'elisse, $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$ si troverà che il volume d'un segmento del corpo ch'essa genera, girando attorno all'asse indicato da $2a$, è espresso da

$$\frac{\pi b^2}{a^2}\int(2ax-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2-\frac{x^3}{3}\right)+cost.\ (267),$$

e l'integrale essendo preso da $x=0$ sino ad $x=2a$, dà $\frac{4\pi ab^2}{3}$, per l'intiero corpo.

Quando $a=b$, questo corpo diventa una sfera, e il suo volume è $\frac{4\pi a^3}{3}$, siccome si trova dalla Geometria elementare.

Se l'elisse fosse riferita al suo centro, o che s'impiegasse l'equazione $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, il segmento sarebbe

$$\int\frac{xb^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{3a^2}(3a^2x-x^3)+costante,$$

integrale che bisognerebbe prendere da $x=-a$ sino ad

$x=a$, per otteaere il corpo intero, e che darebbe allora lo stesso risultato come il superiore,

Si avrebbe

$$\int \frac{2\pi b\,dx\sqrt{(a^4-[a^2-b^2]x^2)}}{a^2}$$

per l'espressione dell'area. Allorchè $a>b$, quest'integrale si riferisce facilmente all'area del segmento circolare di cui l'ascissa è x e il raggio $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$; ella è logaritmica quando $a<b$, poichè il radicale prende allora la formola $\sqrt{(a^4+[b^2-a^2]x^2)}$: finalmente se si suppone $a=b$, si ha solamente

$$\int 2\pi a\,dx = 2\pi a x + costante,$$

integrale che dà prendendolo da $x=-a$ sino ad $x=a$, $4\pi a^2$ per l'area totale della sfera.

270. Considero ora le superficie curve in generale, riferendole a tre piani perpendicolari fra di loro, per mezzo delle tre coordinate AP$=x$, PM'$=y$, M'M$=z$, fig. 53.

Il segmento APGMM'QHD, avendo per base APM'Q sul piano delle xy, e terminato dai due piani PM'MG, QM'MH, rispettivamente paralleli a quelli delle yz e delle xz, e della superficie curva proposta, è necessariamente una funzione delle due variabili indipendenti x e y; può successivamente estendersi nel senso d'ognuna, o variare per rapporto a tutte due simultaneamense. In fatti, se si suppone che y rimanendo costante, x si cangia in AP+Pp, questo segmento si aumenterà della porzione PGMM'$m'mgp$, e dell'altra porzione QHM'M$n'nhq$, se si fa variare solamente y di Qq; finalmente se x ed y diventano contemporaneamente AP+Pp. AQ+Qq, lo stesso segmento, avendo allora per limiti i piani pN'Ng, qN'Nh, differirà dal suo stato primitivo delle due porzioni già enunciate, e della specie di prisma troncato M'm'N'$n'n$MmN, che altro non è che l'incremento della prima porzione, allorchè si fa variare y solo, o quello della seconda quando in quest'ultima si fa vatiare solamente x.

Se si rappresenta con u la funzione di x e di y, la quale esprime il volume del segmento APGMM'QHD, è chiaro che nell' espressione del totale cambiamento di questa funzione (41), i termini in cui solo la x ha variato daranno l' espressioue della prima porzione, quelli ove y solo ha variato, quella della seconda porzioue, e gli altri apparterranno al prisma troncato M'N; si avrà dunque

$$M'N = \frac{d^2u}{dxdy}\,hk + \frac{1}{2}\frac{d^3u}{dx^2dy}\,h^2k + \frac{1}{2}\frac{d^3u}{dxdy^2}\,hk^2 + \text{ec.},$$

dividendo i due membri di quest' equazione per hk, e passando ai limiti relativi all' annientamento di h e di k, quello del secondo membro sarà $\frac{d^2u}{dxdy}$. Ora il prisma troncato M'N tende incessantemente verso il parallelepipedo formato sulla base M'm'N'n' e l' ordinata M'M; e può avvicinarsene quanto più si vorrà; ma se prendendo l' uno per l' altro, poichè si tratta di limiti, si sostituisce M'm'$\times$M'n'$\times$M'M al prisma M'N, e si faccia M'm' o Pp=h, M'n' o Qq=k, il rapporto $\frac{M'N}{hk}$ si riduce a M'M =z: dunque da ciò risulta che $\frac{d^2u}{dxdy}$ =z, e che per ottenere il segmento APGMM'QHD, bisogna, mediante l'integrazione, risalire dal coefficiente differenziale $\frac{d^2u}{dxdy}$ alla funzione u.

271. Abbenchè il coefficiente differenziale $\frac{d^2u}{dxdy}$ sia relativo a due variabili, si può nondimeno arrivare alla funzione da cui deriva, coi metodi dati per l' integrazione delle funzioni d' una sola variabile, perchè ciascuna di queste variabili è riguardata una volta come costante.

In fatti, a causa di $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$, si avrà $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}dy = zdy$, e prendendo l'integrale di ciascun membro, non considerato

che la sola y come variabile, verrà $\frac{du}{dx}=\int z dy$, per cui si ricaverà

$$\frac{du}{dx}dx=dx\int z dy;$$

integrando di nuovo, ma per rapporto ad x solamente, si troverà $u=\int dx\int z dy$,

Non considerando questa ricerca che dal lato puramente analitico, è chiaro che la costante che converrà aggiugnere onde completare il primo integrale, può racchiudere x in un modo qualunque; e quella che si aggiungerà al secondo integrale debb' essere considerata come una qualunque funzione di y; e ciò perchè qualsiasi funzione della sola x sparir debbe come una costante, allorchè si differenzia per rapporto ad y; ed è lo stesso per qualsivoglia funzione di y, quando si differenzia per riguardo ad x.

È indifferente l' ordine delle integrazioni (40) (*). Occupandosi primieramente della variabile x, si avrebbe avuto $\frac{d'u}{dxdy}=\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$, e da ciò si sarebbe ricavato successivamente

$$\frac{du}{dy}=\int z dx, \quad u=\int dy\int z dx.$$

Siffatto risultamento ed il precedente si scriveranno come segue:

$$u=\iint z dy dx \quad \text{e} \quad u=\iint z dx dy,$$

(*) *Il Sig.* Cauchy *ha mostrato che ciò non era generalmente vero, allorchè si trattava d' integrali definiti; se ne troveranno degli esempi nella determinazione di alcuni di questi integrali, alla fine di quest' opera. Vedete la nota* C.

facendo passare i due differenziali sotto l'ultimo segno $\int$ lo che è permesso, quando si osserva che ciascun segno non è relativo che ad una delle variabili in particolare.

Per rischiarare e confermare quello che precede sia $z=\frac{1}{x^2+y^2}$; verrà

$$u=\iint\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}=\int dx\int\frac{dy}{x^2+y^2}=\int dy\int\frac{dx}{x^2+y^2}$$

La prima integrazione dà

$$\int\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x}\text{arc.}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)+X',$$

risultato nel quale X' rappresenta una funzione arbitraria di x, aggiunta per completare l'integrale; nuovamente integrando per rapporto ad x, e facendo $\int X'dx=X$, si trova

$$\int dx\int\frac{dy}{x^2+y^2}=\int dx\left[\frac{1}{x}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)+X'\right]$$
$$=\int\frac{dx}{x}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)+X.$$

L'integrale $\int\frac{dx}{x}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)$ si ottiene in serie, ponendo in luogo di $\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{y}{x}\right)$ il suo sviluppo $\frac{y}{x}-\frac{y^3}{3x^3}+\frac{y^5}{5x^5}-$ ecc. (202); e siccome conviene, dopo quest'integrazione, aggiugnere una funzione arbitraria di y, indicandola con Y, si avrà finalmente

$$\iint\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}=X+Y-\frac{y}{x}+\frac{y^3}{9x^3}-\frac{y^5}{25x^5}+\frac{y^7}{49x^7}-\text{ecc.}$$

Operando in ordine inverso dopo la seconda integrazione, si troverà

$$\int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{y}\right)+Y',$$

$$\int dy \int \frac{dx}{x^2+y^2} = \int dy \left[\frac{1}{y} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{y}\right)+Y'\right]$$

$$= \int \frac{dy}{y} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{y}\right)+Y.$$

Ma se si osserva che

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right),$$

si avrà in seguito dell'ultima integrazione ed aggiunta di una funzione arbitraria di x,

$$\iint \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2} ly - \int \frac{dy}{y} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right)+Y+X;$$

e siccome si può comprendere il termine $\frac{\pi}{2} ly$ nella funzione arbitraria Y, questo risultato il quale si cambierà per ciò in

$$\iint \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = X+Y - \int \frac{dy}{y} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right),$$

sarà lo stesso che il precedente come si può convincersene, mettendo per $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right)$ il suo sviluppo.

272. Allorchè si considera $\iint z\,dx\,dy$ come esprimente il volume di un corpo, conviene aver riguardo ai limiti, fra i quali debb'esser preso ogni integrale, che siano della natura delle superficie che terminano lateralmente il corpo proposto.

Il caso più semplice è quello in cui il corpo è terminato da quattro piani paralleli due a due ai piani coordinati CAD, BAD. Supponendo che i primi corrispondono alle ascisse $x=a$, $x=a'$, ed i secondi alle ascisse $y=b$, $y=b'$, si prenderà l'integrale $\int z\,dx$, da $x=a$ sino ad $x=a'$,

considerando d'altronde y come costante; e chiamando P l'ottenuto risultato, rimarrà da prendere l'integrale $\int P dy$, da $y=b$ sino ad $y=b'$.

Quando il corpo proposto è terminato lateralmente da superficie curve, gli estremi valori dell'una delle variabili sono legati con quelli dell'altra, siccome si vedrà nel seguente esempio, ove si tratta di trovare il volume di una sfera il cui centro è in A, e di cui il raggio è eguale ad r.

Si ha $x^2+y^2+z^2=r^2$, e per conseguenza

$$\iint z dx dy = \iint dx dy \sqrt{(r^2-x^2-y^2)};$$

poi supponendo y costante e $r^2-y^2=r'^2$,

si trova $\int z dx = \int dx \sqrt{(r'^2-x^2)} = \frac{1}{2} x \sqrt{(r'^2-x^2)}$

$$+\frac{1}{2} r'^2 \text{arc}\left(\text{sen}=\frac{x}{r'}\right) (249).$$

Posto ciò, l'integrale $\int z dx$, esprimendo l'area della sezione fatta nella sfera, parallelamente al piano delle xz, e alla distanza AQ$=y$, debb'essere presa fra i limiti di questa sezione, che sono da una parte il piano CAD, e dall'altra il circolo BFEC, secondo il quale la sfera incontra il piano BAC. Al primo limite $x=0$, al secondo $x=$QF; ma quest'ultimo è legato con AQ, perchè facendo $z=0$, si trova $x^2+y^2=r^2$ per l'equazione del circolo BFEC, d'onde segue che $\text{QF}=\sqrt{\left[r^2-(\text{AQ})^2\right]}=\sqrt{(r^2-y^2)}=r'$; e per conseguenza, per un qualunque valore di y, i valori estremi di x sono 0 ed r'.

Mediante questi valori, il risultato ottenuto superiormente si riduce a $\frac{\pi}{4} r'^2$, poichè $\text{arc}\,(\text{sen}=1)=\frac{\pi}{2}$, e l'integrale $\int dy \int z dx$ diventa

$$\frac{\pi}{4}\int r'^2 dy = \frac{\pi}{4}\int dy (r^2-y^2) = \frac{\pi}{4}\left(r^2 y - \frac{y^3}{3}\right).$$

Quest'ultmo debb'esser preso dal più piccolo valore di y, che supporrò nullo chiudendo da questo lato il corpo col piano BAD, sino al più grande, che nel caso attuale

è AC$=r$: il volume del segmento ABCD, che è l'ottava parte della sfera, sarà dunque $\frac{\pi r^3}{6}$, e quindi il volume dell'intera sfera sarà $\frac{4\pi r^3}{3}$.

È necessario l'osservare che immediatamente si può ottenere il volume di tutto l'emisfero superiore al piano BAC, prendendo il primo integrale da $x=-\sqrt{(r^2-y^2)}$ sino ad $x=+\sqrt{(r^2-y^2)}$; poichè in questo caso i valori estremi di x terminano dall'una e l'altra parte alla circonferenza del circolo BFEC, di cui AC è il raggio, e si ha il valore completo di $\int z\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(r^2-y^2)$. Prendendo poscia l'integrale.

$$\frac{\pi}{2}\int \mathrm{d}y(r^2-y^2)=\frac{\pi}{2}\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right),$$

in tutta l'estensione della parte dell'asse delle y compresa nel circolo BFEC, vale a dire dall'estremità del suo diametro situato posteriormente al piano BAD, ove $y=-r$, sino all'estremità C, in cui $y=+r$, si trova $\frac{2\pi r^3}{3}$; e duplicando si ha come qui sopra $\frac{4\pi r^3}{3}$ per l'intera sfera.

273. Considerando i differenziali come gli incrementi infinitamente piccoli delle variabili, si può trascurare la differenza del prisma troncato M'N al prisma completo, avendo per altezza M'M, e riguardarlo allora come formato di piccoli parallelepipedi, che hanno per base il rettangolo M'm' N'n', per altezza dz, e vengono per conseguenza espressi da $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Per ottenere la somma dei parallelepipedi contenuti nel prisma intero, bisogna integrare questa espressione per rapporto a z solamente, ciò che darà

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

siccome superiormente si è trovato.

Si osserverà inoltre che il valore completo di $\mathrm{d}y\int z\mathrm{d}x$ è l'espressione della somma dei parallelepipedi contenuti

nella porzione FHQ*qhf*, compresa fra due piani paralleli al piano BAD delle xz; ma $\int z\mathrm{d}x$, essendo l'area della sezione FHQ, ne segue che la porzione infinitamente tenue FHQ*qhf* può essere considerata come eguale a FHQ$\times$Qq, cioè all'area della curva, che gli serve di base moltiplicata per la grossezza Qq. Si vede finalmente che $\int \mathrm{d}y \int z\mathrm{d}x$ esprime la somma di tutte le porzioni simili, comprese nel volume cercato.

È evidente che si rappresentano tutte queste operazioni, considerando l'integrale triplo $\iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, di cui ciaschedun segno si riferisce ad una delle variabili x, y e z.

274. In generale se bisognerò determinare la porzione del corpo proposto, terminata lateralmente dal cilindro innalzato perpendicolarmente al piano BAC, *fig.* 54, su la curva data E'N'G', si prenderà l'integrale $\int z\mathrm{d}x$, da $x=$ AP sino ad $x=$Ap, affinchè l'espressione $\mathrm{d}y\int z\mathrm{d}x$ diventi quella della porzione MM'N'N$nn'm'm$. Le linee AP ed Ap, rispettivamente eguali a QM' e QN' saranno date in funzione di AQ$=y$, mediante l'equazione della curva E'N'G', di cui sono le ascisse; rappresentandole con F(y) e F(y) si dovrà prendere $\int z\mathrm{d}x$ da $x=$F(y) sino ad $x=f(y)$, locchè come si vede, introdurrà nuove funzioni di y che z non racchiudeva, e potrà aumentare o diminuire la difficoltà della seconda integrazione. Per ottenere poi da questa il valore totale dello spazio cercato o la somma delle porzioni delle quali si ha già l'espressione generale, bisognerà prendere $\int \mathrm{d}y \int z\mathrm{d}x$ da $y=$AF sino ad $y=$AH, valori che corrispondono ai limiti E' e G' della curva E'N'G', nel senso delle y.

Potrebbe avvenire che il contorno E'N'G', in vece di essere una curva continua, fosse l'insieme di molte porzioni di curve diverse; e l'applicazione in questo caso dei principii precedenti è facilissima, onde non occorre di fermarvisi.

275. Si perviene all'espressione generale del differenziale dell'area d'una superficie curva, immaginando questa superficie divisa in zone, come EG*ge*, *fig.* 53, con dei piani paralleli ad uno dei piani coordinati, e supponendo che ognuna di queste zone sia tagliata in porzioni quadrangolari MmNn, con dei piani paralleli ad un altro piano coordinato. Dall'esame della figura si vede che l'area DGMH, che rappresenterò con s, si accresce del quadrilatero curvilineo GMmg, quando x aumenta di Pp, e che questo

quadrilatero si accresce di $Mm\,Nn$, quando y poi si aumenta di Qq. Un ragionamento simile a quello del n° 270 farà vedere che il limite del rapporto di $\frac{Mm\,Nn}{Pp \times Qq}$ è eguale al coefficiente differenziale $\frac{d^2s}{dx\,dy}$.

Per arrivare a questo limite si osserva primieramente che i quattro piani

$$m'M \text{ e } N'n, \qquad n'M \text{ e } N'm,$$

paralleli due a due ai piani delle xz e delle yz, e che determinano il quadrilatero curvo $Mm\,Nn$, determinano pure sul piano tangente al punto M, *fig.* 55, un parallelogrammo MXZY, su il quale tutte le linee condotte dal punto M sarebbero tangenti alle diverse sezioni che farebbero nel quadrilatero curvo dei piani condotti per l'ordinata M'M, ed avrebbero cogli archi di queste sezioni un rapporto, tendente incessantemente verso l'unità (63); dunque si può nel limite cercato sostituire al quadrilatero curvo $Mm\,Nn$ il parallelogrammo MXZY, di cui l'area sta a quella della sua proiezione $M'm'N'n'$, come il raggio sta al coseno dell'angolo compreso fra il piano tangente e quello delle xy (*). Ora la normale MG e l'ordinata M'M, essendo rispettivamente perpendicolari a questi piani, l'angolo che comprendono sarà eguale a GMM', ed avrà per conseguenza per coseno

$$\frac{M'M}{MG} = \frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \quad (150),$$

ciò che dà

$$MXZY = M'm'N'n' \cdot \frac{MG}{M'M} = dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)};$$

si ha dunque

$$s = \iint dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

in cui bisogna osservare che $dy\int dx\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ rappresenta l'area della zona FHhf, *fig.* 53.

(*) *Vedete per questa proposizione il n° 60 del* Supplemento degli Elementi di Geometria, *e per quello che precede il Trattato in 4°, t. II, pag.* 198, nota.

276. Prendendo ancora la sfera per esempio, la sua equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$ darà

$$p=-\frac{x}{z},\quad q=-\frac{y}{z},\quad \sqrt{(1+p^2+q^2)}=\frac{r}{z},$$

$$\int dx\sqrt{(1+p^2+q^2)}=\int\frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}};$$

ponendo poi $r^2-y^2=r'^2$, questo integrale diverrà

$$r\int\frac{dx}{\sqrt{(r'^2-x^2)}}=r.\,\text{arc}\left(\text{sen}=\frac{x}{r'}\right)(186),$$

che preso da $x=0$ sino ad $x=r'=\sqrt{(r^2-y^2)}$, è eguale a $\frac{\pi}{2}$, e non lascia per la seconda integrazione che

$$\frac{\pi r}{2}\int dy=\frac{\pi r}{2}y.$$

È facile vedere che siccome non si è preso il radicale $\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}$ che con il segno $+$, non si è ottenuto che la porzione d'area superiore al piano delle xy, di più che i limiti assegnati ad x non abbracciano che una metà della parte superiore della zona perpendicolare all'asse delle y, e che quindi la zona intera sarebbe espressa da $2\pi ry$, cioè dalla circonferenza di un circolo massimo, moltiplicata dalla porzione del diametro compresa fra i piani che terminano questa zona, risultato conforme a ciò che si è veduto nella Geometria elementare. In quanto poi ai limiti di y è evidente che conviene prendere $-r$ e $+r$, allorchè ottener si vuole l'area totale della sfera.

277. L'applicazione dell'Analisi alla Meccanica spesse volte conduce a degli integrali della forma $\iiint V dx dy dz$, nei quali la funzione V può racchiudere le tre variabili x, y, z, considerate come indipendenti le une dalle altre, di modo che ciascun segno d'integrazione non cade che sopra una di esse in particolare (273). È facile vedere che questi integrali provengono dalla determinazione d'una funzione u dipendente da tre variabili x, y, z, e di cui si conosce solamente il coefficente differenziale $\frac{d^3u}{dxdydz}$, dato dall'equazione $\frac{d^3u}{dxdydz}=V$; poichè si ricava da questa operando

come nel n°. 271, 1°. riguardando x ed y costanti,

$$\frac{d^3u}{dxdydz}dz=d\frac{d^2u}{dxdy}=Vdz,\ \frac{d^2u}{dxdy}=\int Vdz+T'',$$

essendo T'' una funzione arbitraria di x ed y; 2°. riguardando x e z costanti,

$$\frac{d^2u}{dxdy}dy=d\frac{du}{dx}=dy\int Vdz+T''dy,\ \frac{du}{dx}=\int dy\,Vdz+T'+S',$$

indicando T' la funzione arbitraria di x e di y risultante da $\int T''dy$, ed S' una funzione arbitraria di x e di z; 3°. finalmente considerando y e z come costanti,

$$\frac{du}{dx}dx=dx\int dy\int Vdz+T'dx+S'dx,$$

$$u=\int dxdy\int df\,Vdz+T+S+R,$$

T ed S rappresentando funzioni arbitrarie, risultanti da $\int T'dx$ e da $\int S'dx$, ed R essendo una funzione arbitraria di y e di z: l'integrale completo racchiude dunque tre funzioni arbitrarie, cioè una di x e di z, ed una di y e di z. Riunendo i differenziali sotto l'ultimo segno d'integrazione $\int dx\int dy\int Vdz$ diventa $\iiint Vdxdydz$, ed ha sotto quest'ultima forma la stessa significazione che sotto la precedente.

Questo esempio basta per mostrare in qual modo si ritornerà dal coefficiente differenziale d'un ordine qualunqne di una funzione di molte variabili a questa stessa funzione. Le funzioni arbitrarie in questo luogo introdotte, non hanno rapporto come nel n°. 272, che nel caso in cui gli integrali sono presi fra i limiti pei quali le variabili x, y, z sono indipendenti le une dalle altre; ma il più delle volte l'integrale relativo a z debb'esser preso da $z=F(x, y)$, fino a $z=f(x, y)$, essendo F e f funzioni date, l'integrale relativo ad y, da $y=F_1(x)$ sino a $y=f_1(x)$, e finalmente l'integrale relativo a x, da $x=a$ sino ad $x=a'$.

Dell' integrazione dei differenziali totali, i quali comprendono più variabili indipendenti.

278. Le funzioni che contengono molte variabili indipendenti, hanno due sorta di differenziali, cioè differenziali parziali e differenziali totali (46); si è già veduto nei numeri 271,277, come si poteva risalire da un differenziale parziale espresso da variabili indipendenti, alla primitiva funzione, ed è sempre possibile questo problema, giacchè si riferisce immediatamente all' integrazione d' un differenziale ad una sola variabile. Non è più lo stesso quando si prende a caso un' espressione della forma $Mdx+Ndy$, per il differenziale totale di una funzione di due variabili, poichè l' equaaione $\frac{d^2u}{dydx}=\frac{d^2u}{dxdy}$ (40) stabilisce fra le quantità M ed N, una relazione senza la quale non possono derivare da una stessa funzionc primitiva.

In fatti se si pone

$$du=Mdx+Ndy,$$

risulta

$$\frac{du}{dx}=M,\ \frac{du}{dy}=N,\ \frac{d^2u}{dydx}=\frac{dM}{dy},\ \frac{d^2u}{dxdy}=\frac{dN}{dx},$$

e per conseguenza

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx},$$

Bisognerà dunque che ogni espressione $M\,dx+N\,dy$, quand' essa sarà il differenziale totale d'una funzione delle variabili x ed y, renda identica l' equazione superiore; ed allora per pervenire al suo integrale u, si avrà $M=\frac{du}{dx}$, $N=\frac{du}{dy}$, dalle quali si dedurrà il valore dei differenziali parziali.

Prendendo quella del differenziale relativo ad x, per esempio, verrà $\frac{du}{dx}dx=Mdx$, e per conseguenza $u=\int Mdx$

$+Y$. Si aggiugne in questo caso come in quello nel n° 271, una funzione arbitraria di y, poichè l'integrazione ha avuto luogo solamente per rapporto alla variabile x; ma quivi tale funzione si determina, perchè il valore di u debba ancora soddisfare all'equazione $N=\frac{du}{dy}$.

L'equazione $u=\int M dx+Y$ dà

$$\frac{du}{dy}=\frac{d\int M dx}{dy}+\frac{dY}{dy};$$

rappresentando $\int M dx$ con v, si avrà

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dy}+\frac{dY}{dy}=N,$$

donde si ricaverà

$$\frac{dY}{dy}=N-\frac{dv}{dy},$$

ed integrando

$$Y=\int\left(N-\frac{dv}{dy}\right)dy;$$

si troverà dunque

$$u=\int M dx+\int\left(N-\frac{dv}{dy}\right)dy:$$

tal è l'integrale della proposta funzione.

Questo risultamento fa vedere che la funzione $N-\frac{dv}{dy}$ racchiuder non deve che la sola variabile y, senza di che non sarebbe vero come si è supposto che $M dx$ e $N dy$ fossero i differenziali parziali di una stessa funzione u. Da ciò ne segue che la funzione $N-\frac{dv}{dy}$, non contenendo x, non deve variare per rapporto a questa quantità come pure

$$\frac{dN}{dx}-\frac{d^2v}{dx\,dy}=0;$$

ma si ha

$$\frac{d^2v}{dxdy}=\frac{d^2v}{dydx}=\frac{d\frac{dv}{dx}}{dy},\ \text{e}\ \frac{dv}{dx}=M:$$

risulta dunque

$$\frac{d^2v}{dxdy}=\frac{dM}{dy}\ \text{e}\ \frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}=0.$$

Questa condizione superiormente trovata è per conseguenza la sola necessaria onde assicurare l'integrabilità del differenziale $Mdx+Ndy$; e quando non è adempita, l'espressione proposta non potendo risultare dalla differenziazione di una funzione primitiva a due variabili, non potrebbe essere un *differenziale esatto.*

279. La funzione $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$, essendo in questo modo scritta

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

dà successivamente

$$M=\frac{y}{x^2+y^2},\ N=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{dN}{dx},$$

$$\int Mdx=\int\frac{ydx}{x^2+y^2}=\int\frac{\frac{dx}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}$$

$$=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)=v,$$

onde

$$u=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)+Y.$$

Differenziando e facendo tutto variare, si troverà

$$du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}+dY;$$

paragonando con la funzione proposta, si avrà

$$dY=o, \text{ per cui } Y=costante,$$

e per conseguenza

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)+costante\ (*)$$

Sia ancora la funzione

$$\frac{dx}{x}+\frac{y^2dx}{x^3}-\frac{ydy}{x^2}+\frac{(ydx-xdy)\sqrt{(x^2+y^2)}}{x^3}+\frac{dy}{2y};$$

paragonandola con la formola $Mdx+Ndy$, si ha

$$M=\frac{1}{x}+\frac{y^2+y\sqrt{(x^2+y^2)}}{x^3},\quad N=\frac{-y-\sqrt{(x^2+y^2)}}{x^2}+\frac{1}{2y},$$

dal che si deduce

$$\frac{dM}{dy}=\frac{2y+\sqrt{(x^2+y^2)}}{x^3}+\frac{y^2}{x^3\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

$$\frac{dN}{dx}=\frac{2y+2\sqrt{(x^2+y^2)}}{x^3}-\frac{x}{x^2\sqrt{(x^2+y^2)}};$$

questi valori essendo ridotti, danno

$$\frac{dM}{dy}=\frac{2y}{x^3}+\frac{x^2+2y^2}{x^3\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{dN}{dx},$$

e per conseguenza la proposta funzione può immediatamente integrarsi. Primieramente si ottiene

---

(*) Mi sono fermato sopra questa integrazione, perchè serve di base ad una dimostrazione elegantissima del principio della composizione delle forze, data dal Sig. Laplace nella sua *Meccanica celeste*.

$$\int \mathrm{M}dx = lx - \frac{y^2}{2x^2} + y\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{(x^2+y^2)};$$

ma l'integrazione per parti dà

$$\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{(x^2+y^2)} = \int \sqrt{(x^2+y^2)}\cdot\frac{dx}{x^3} =$$

$$-\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

e facendo $\sqrt{(x^2+y^2)} = yz$, si trova operando come nel n°. 198,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{1}{y}l\frac{\left[-y+\sqrt{(x^2+y^2)}\right]}{x};$$

dunque

$$\int \mathrm{M}dx = lx - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{(x^2+y^2)}}{2x^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}l\frac{\left[-y+\sqrt{(x^2+y^2)}\right]}{x} = v.$$

Si ha in seguito

$$\mathrm{N} - \frac{dv}{dy} = -\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{2x^2} + \frac{y^2}{2x^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2y},$$

per cui risulta $\mathrm{Y} = \frac{1}{2}ly + cost.$, e finalmente

$$u = lx - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{(x^2+y^2)}}{2x^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}l\left(\frac{-y^2+y\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}\right) + cost.$$

280. I differenziali contenenti un qualunque numero di variabili s'integrano con una maggior estensione del metodo precedente, che basterà applicare alle funzioni di tre variabili. Sia

$$Mdx+Ndy+Pdz.$$

un differenziale di questo genere, M, N, P, indicando funzioni di x, y e z; supponendovi alternativamente dz, dy, dx nulli, cioè riguardando vicendevolmente z, y ed x come costanti, debbesi successivamente ottenere tre differenziali esatti, fra due variabili, cioè,

$$Mdx+Ndy, \quad Mdx+Pdz, \quad Ndy+Pdz,$$

dai quali necessariamente risulterà

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}, \quad \frac{dM}{dz}=\frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy} \text{ (278).}$$

Allorchè queste equazioni di condizione sono verificate, il differenziale proposto è esatto, e può integrarsi cominciando dall'operare sopra uno qualunque dei differenziali a due variabili che si sono dedotti. Se per esempio si è fatto nel primo $Mdx+Ndy$, l'applicazione del processo del n°. 278, e che il risultamento sia rappresentato da v, si avrà

$$\int(Mdx+Ndy+Pdz)=v+z,$$

Z essendo una funzione della sola z, e provenendo dai termini della cercata funzione primitiva che non contengono x ed y. Posto ciò se si differenzia l'equazione superiore facendovi variar tutto, verrà,

$$M=\frac{dv}{dx}, \; N=\frac{dv}{dy}, \; P=\frac{dv}{dz}+\frac{dZ}{dz},$$

L'ultima di queste equazioni dà

$$\frac{dZ}{dz}=P-\frac{dv}{dz},$$

onde

$$Z=\int\left(P-\frac{dv}{dz}\right)dz+\textit{costante},$$

purchè $P-\frac{dv}{dz}$ non contenga nè x, nè y: debbesi dunque avere

$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2v}{dxdz} = 0, \quad \frac{dP}{dy} - \frac{d^2v}{dydx} = 0,$$

ciò che riducesi a

$$\frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} = 0, \quad \frac{dP}{dy} - \frac{dN}{dz} = 0,$$

ed invertendo l'ordine delle due differenziazioni indicate sopra v, e ponendo per $\frac{dv}{dx}$ e $\frac{dv}{dy}$ i loro valori M ed N. Le due condizioni trovate aggiunte a

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

la quale suppone l'integrazione del differenziale $Mdx + Ndy$, essendo le stesse che quelle che si sono presentate al principio dell'articolo, fanno vedere che queste ultime sono bastanti per avverare l'integrazione d'una funzione qualunque differenziale a tre variabili; e allorchè queste condizioni non sono soddisfatte, la proposta non può derivare da alcuna primitiva funzione racchiudendo lo stesso numero di variabili indipendenti.

In generale è chiaro che un differenziale esatto comprendendo n variabili, presentar debbe $\frac{n(n-1)}{2}$ differenziali esatti a due variabili, locchè somministra un simil numero d'equazioni di condizione; e da ciò si può elevare alle condizioni che adempir debbono i differenziali degli ordini superiori: ma queste si offriranno quasi da loro stesse nel *Calcolo delle variazioni*, che entra nel piano di quest'opera ed è perciò, che in questo luogo non mi fermerò (*).

281. Il praticato processo, per ottenere nel n° 278, l'espressione di $\frac{dv}{dy}$, equivalente a $\frac{d\int Mdx}{dy}$, conduce ad una

---

(*) *Vedete altronde il Trattato in 4°, t. II pag.* 232.

formola utilissima, la quale insegna a differenziare sotto il segno $\int$, per rapporto ad un' altra variabile diversa da quella alla quale si riferisce.

In fatti l' equazione

$$\frac{d^2v}{dxdy} = \frac{dM}{dy},$$

riducendosi a

$$d\frac{dv}{dy} = \frac{dM}{dy}, \text{ dà } \frac{d\frac{dv}{dy}}{dx} dx = \frac{dM}{dy} dx,$$

e ciascuno dei membri di quest' ultima essendo integrato per rapporto ad x, viene

$$\frac{dv}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx \text{ ovvero } \frac{d\int M dx}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx,$$

rimettendo per v il suo valore $\int M dx$ (*).

(*) *Il Leibnitz al quale è dovuto questo teorema lo chiama* differentiatio de curva in curvam, *perchè nella quistione che si proponeva di risolvere, passa da una curva ad un' altra della stessa specie, facendo variare una costante.*

Vi si perviene ancora cercando immediatamente il differenziale di $\int M dx$, *per rapporto ad* y, *poichè è evidente che per ottenere questo differenziale, conviene sostituire* $y+dy$ *ad* y *nella funzione* $\int M dx$, *la quale diventa allora*

$$\int \left(M + \frac{dM}{dy} dy + \text{ecc} \right) dx = \int M dx + \int \frac{dM}{dy} dx dy + \text{ecc.}$$
$$= \int M dx + dy \int \frac{dM}{dy} dx + \text{ecc.}$$

poichè il segno $\int$ non è relativo che alla variabile x; dunque si avrà

$$\frac{d\int M dx}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx.$$

Dell' integrazione delle equazioni differenziali a due variabili.

Della separazione delle variabili nelle equazioni differenziali di prim' ordine.

282. In quello che precede ho supposto che i coefficienti differenziali della cercata funzione, fossero immediatamente espressi, mediante la variabile indipendente; ma per lo più non si ha che una equazione differenziale la quale racchiude ancora questa funzione. In quanto al prim' ordine, l' equazione differenziale, allorchè è di primo grado per rapporto a dx e a dy, ha necessariamente la forma $Mdx+Ndy=0$, ed esprime come si è fatto vedere al n° 48, una relazione fra la variabile x, la funzione y ed il suo coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$.

Il mezzo che pel primo si è presentato agli analitici; per iscoprire l' equazione primitiva da cui questa trae la sua origine, è stato di cercare di separare le variabili, cioè a ricondurre l' equazione $Mdx+Ndy=0$ alla forma $Xdx+Ydy=0$, essendo X una funzione della sola x, ed Y una funzione della sola y. In fatti, allorchè si è pervenuto a questo punto, i termini Xdx ed Ydy s'integrano coi metodi insegnati precedentemente, e si ha $\int X\,dx+\int Ydy=C$, indicando C una costante arbitraria.

Per dare un esempio dei casi in cui l' equazione differenziale si presenta immediatamente sotto la forma superiore, sia $x^m dx+y^n dy=0$; si troverà tosto $\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{y^{n+1}}{n+1}=C$.

Se la proposta equazione fosse $ydx-xdy=0$, la separazione sarebbe facile ad effettuarsi, poichè si vede che dividendo per xy, si troverebbe $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$; prendendo separatamente l' integrale di ciascun termine di quest' ultima, si avrebbe $lx-ly=C$, ovvero $l\frac{x}{y}=C$, e poichè si

può considerare la costante arbitraria come un logaritmo, si conchiuderebbe quindi $1\frac{x}{y}=1c$. Passando dai logaritmi ai numeri, verrebbe $\frac{x}{y}=c$, o pure $x=cy$.

Dopo quest' esempio si conosce senza difficoltà, che la separazione delle variabili si effettuerà nello stesso modo nell' equazioni $Ydx-Xdy=0$, $XY_1dx-YX_1dy=0$; poichè la prima dà

$$\frac{dx}{X}-\frac{dy}{Y}=0,$$

e la seconda

$$\frac{Xdx}{X_1}-\frac{Ydy}{Y_1}=0.$$

In generale se quando si prende il valore di $\frac{dy}{dx}$ nell' equazione proposta, si trova $\frac{dy}{dx}=XY$, è facile di ricavare

$$Xdx-\frac{dy}{Y}=0,$$

e per conseguenza

$$\int Xdx-\int\frac{dy}{X}=C.$$

283. Avvi ancora un caso estesissimo in cui si separano facilmente le variabili; ed è quando M ed N sono funzioni omogenee di x e di y. Si appoggia perciò su questo che *se in una funzione algebrica delle quantità* x, y, z, ecc., *ove la somma degli esponenti di ciascuna di queste lettere è la stessa in tutti i termini, ed eguale ad* m, *si sostituisce* Px *ad* y, Qx *a* z, *ecc., il risultamento sarà divisibile per* x^m. In fatti un termine qualunque di questa funzione, essendo della forma $Ax^ny^pz^q$ ecc., diventerà per la sostituzione indicata, $AP^pQ^q\ldots\ldots x^{n+p+q+ecc.}$; ma per l' ipotesi si ha in tutti i termini $n+p+q+$ ecc. $=m$: dunque x^m sarà fattor comune. Da ciò segue che se la proposta

funzione fosse eguale a zero, ovvero che fosse una frazione la quale avesse per numeratore e per denominatore due polinomi omogenei dello stesso grado, la quantità x sparirebbe intieramente dal risultato.

Da quello che precede basta fare $y=xz$, per separare le variabili nell'equazione $Mdx+Ndy=0$. In fatti le funzioni M ed N prendono la forma Zx^m, $Z_1 x^m$, Z e Z_1 non contengono che la nuova variabile z; dividendo allora per x^m, e ponendo per dy il suo valore $zdx+xdz$, viene $Zdx+Z_1(zdx+xdz)=0$, risultato che si può cambiare in

$$\frac{dx}{x}+\frac{Z_1 dz}{Z+zZ_1}=0,$$

e da cui si ricava

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{Z_1 dz}{Z+zZ_1}=C.$$

Applicherò primitivamente questa trasformazione all'equazione

$$xdx+ydy=nydx,$$

la quale diventa

$$(x-ny)dx+ydy=0.$$

passando tutti i termini in un membro; avrò $Z=1-nz$, $Z_1=z$ e $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{zdz}{1-nz+z^2}=C$, o $lx+\int\frac{zdz}{1-nz+z^2}=C$. L'integrale $\int\frac{zdz}{1-nz+z^2}$ può semplificarsi osservando che

$$\frac{zdz}{1-nz+z^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2zdz-ndz}{1-nz+z^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{ndz}{1-nz+z^2};$$

poichè viene allora

$$lx+\frac{1}{2}l(1-nz+z^2)+\frac{1}{2}\int\frac{ndz}{1-nz+z^2}=C.$$

L'integrale che rimane ad ottenersi dipenderà dai logaritmi se $\frac{n}{2}>1$, dagli archi di circolo se $\frac{n}{2}<1$, e sarà

algebraico se $\frac{n}{2}=1$. Non riporterò che il risultamento relativo a quest' ultimo caso: $\int \frac{n\mathrm{d}z}{1-nz+z^2}$ diventa allora

$$\int \frac{2\mathrm{d}z}{(1-z)^2}=\frac{2}{1-z},\quad \mathrm{l}(1-nz+z^2)=\mathrm{l}(1-z)^2,$$

e si ha per conseguenza $\mathrm{l}x+\mathrm{l}(1-z)+\frac{1}{1-z}=\mathrm{C}$, o pure $\mathrm{l}(x-y)+\frac{x}{x-y}=\mathrm{C}$, rimettendo per z il suo valore $\frac{y}{x}$.

Il termine $\frac{x}{x-y}$ può essere cambiato in un logaritmo, osservando che per la definizione dei logaritmi neperiani, una qualunque quantità u è il logaritmo del numero e^u; e dietro questa osservazione, si scriverà la precedente equazione sotto la forma

$$\mathrm{l}(x-y)+\mathrm{l}e^{\frac{x}{x-y}}=\mathrm{l}c.$$

da cui successivamente si deduce

$$\mathrm{l}.(x-y)e^{\frac{x}{x-y}}=\mathrm{l}c,\quad \text{e}\quad (x-y)e^{\frac{x}{x-y}}=c.$$

È bene il riflettere al presente modo di passare cioè dai logaritmi ai numeri perchè spesso se ne fa uso.

Sia ancora da integrare l' equazione

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\mathrm{d}x\sqrt{(x^2+y^2)}.$$

Facendo $y=xz$, e dividendo per x tutti i suoi termini, riuniti in un solo membro si troverà

$$\mathrm{d}x\sqrt{(1+z^2)}-x\mathrm{d}z=0,$$

lo che darà

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1+z^2)}}=0.$$

Si otterrà poscia per l' integrazione di ciascun termine in particolare,

$$lx-l[z+\sqrt{(1+z^2)}]=lc, \text{ o } \frac{x}{z+\sqrt{(1+z^2)}}=c.$$

e rimettendo per z, il suo valore $\frac{y}{x}$, verrà

$$\frac{x^2}{y+\sqrt{(x^2+y^2)}}=c, \quad \text{o} \quad -y+\sqrt{(x^2+y^2)}=c,$$

moltiplidando i due termini del primo membro per $y-\sqrt{(x^2+y^2)}$: e facendo sparire il radicale si avrà finalmente $x^2=c^2+2cy$.

284. L' equazione

$$(a+mx+ny)dx+(b+px+qy)dy=0,$$

può facilmente esser resa omogenea. Sostituendo $t+\alpha$ in luogo di x, e $u+\beta$ in quello di y, si ha $dx=dt$, $dy=du$,

$$(a+m\alpha+n\beta+mt+nu)dt+(b+p\alpha+q\beta+pt+qu)du=0,$$

si fanno sparire i termini costanti, ponendo l' equazioni $a+m\alpha+n\beta=0$, $b+p\alpha+q\beta=0$, per mezzo delle quali si determinano le quantità α e β, e rimane allora l' equazione differenziale

$$(mt+nu)dt+(pt+qu)du=0,$$

omogenea per rapporto alle nuove variabili u e t.

La precedente trasformazione è la stessa che quella di cui si serve per cambiare l'origine delle coordinate sopra un piano (*Trig.* 122): essa non dà alcun risultato, quando $mq-np=0$, caso nel quale i valori di α e di β diventano infiniti; ma allora si ha $q=\frac{np}{m}$, per cui

$$px+qy=\frac{p}{m}(mx+ny),$$

e l' equazione proposta cambiandosi in

$$adx+bdy+(mx+ny)\left(dx+\frac{p}{m}dy\right)=0,$$

basta fare $mx+ny=z$, onde separarci le variabili.

Sostituendo questo valore come quello di dy, che ne risulta e liberando dx, si trova

$$dx+\frac{(bm+pz)dz}{amn-bm^2+(mn-pm)z}=0,$$

equazione di cui l' integrale racchiuderà dei logaritmi, eccettuato il caso di $mn-pm=0$, onde risulta

$$x+\frac{2bmz+pz^2}{2(amn-bm^2)}=C.$$

La sostituzione di z in vece di $mx+ny$, ha cambiato l' equazione proposta in un' altra, ove l' una delle variabili non entra che col suo differenziale; ed è facile vedere che qualunque sia l' equazione su la quale si abbia prodotto quest' effetto, gli si potrà dare la forma $dx+Zdz=0$, essendo Z una funzione della sola z, e quindi si ricaverà $x+\int Zdz=C$.

285. La separazione delle variabili si opera in un modo semplicissimo su l'equazione $dy+Pydx=Qdx$, nella quale P e Q indicano delle funzioni qualunque di x. Sostituendovi Xz e $zdX+Xdz$ in luogo di y e di dy, diventa

$$zdX+Xdz+PXzdx=Qdx;$$

la quantità X essendo considerata come una funzione indeterminata di x, è permesso di disporne per dividere l' equazione precedente in due altre in cui le variabili possano separarsi: ora è facile di vedere che questa condizione sarà adempita se si fa $Xdz+PXZzdx=0$, lo che dà $zdX=Qdx$. Dividendo la prima di queste equazioni per X, essa si riduce a $dz+Pzdx=0$; se ne ricava $\frac{dz}{z}+Pdx=0$, $lz+\int Pdx=lc$, e passando ai numeri, $z=ce^{-\int Pdx}$. Prendendo poscia il valore di dX nella seconda equazione dopo avervi sostituito quello di z che si è trovato, si avrà

$$dX=\frac{1}{c}e^{\int Pdx}Qdx, \quad X=\frac{1}{c}\int e^{\int Pdx}Qdx+C,$$

e per conseguenza

$$x=e^{-\int P dx}\left(\int e^{\int P dx} Q dx+C\right),$$

giacchè si può cambiare in C il prodotto arbitrario Cc, ciò che mostra che si avrebbe potuto fare $lc=0$.

L'equazione $dy+Pydx=Qdx$, rimarchevole stante che la variabile y ed il suo differenziale non vi si trovano che al primo grado, si chiama in causa di questa circostanza, *equazione lineare* del prim'ordine, denominazione che ho creduto di dover cambiare in quella di *equazione di primo grado e di primo ordine* (*).

286. I primi Analitici che si sono occupati del Calcolo integrale, classificavano le equazioni differenziali dal numero dei loro termini. In quelle che non ne hanno che due, e di cui la forma è per conseguenza $\beta u^r z^s dz=\alpha u^a z^c du$, le variabili immediatamente si separano, imperciocchè se ne ricava $\beta z^{s-c} dz=\alpha u^{a-r} du$; ma non è lo stesso delle equazioni a tre termini comprese nella formola

$$\gamma u^i z^k dz+\beta u^r z^s du=\alpha u^c z^a du.$$

Si può dar loro una forma più semplice dividendo tutti i suoi termini per $\gamma u^i z^a$; e diverrà

$$z^{k-a} dz+\frac{\beta}{\gamma} u^{r-i} z^{s-a} du=\frac{\alpha}{\gamma} u^{c-i} du;$$

supponendo di poi

$$z^{k-a} dz=\frac{dy}{k-a+1}, \quad u^{r-i} du=\frac{dx}{r-i+1},$$

si avrà

$$z^{k-c+1}=y, \quad u^{r-i+1}=x,$$

onde

$$dy+b'y^n dx=a'x^m dx$$

(*) *La parola* lineare *è impropria, giacchè è relativa alla Geometria, e applicandola all'equazioni, si è avuto in vista la linea retta nell'equazione della quale l'ordinata e l'ascissa non si trovano che al primo grado: non si potrebbero dunque considerare come lineari dell'equazioni tali come* $dy+Pydx=Qdx$, *che spess volte appartengono a curve trascendenti.*

avendo fatto per abbreviare

$$\frac{(k-a+1)\beta}{(r-i+1)\gamma}=b', \qquad \frac{(k-a+1)\alpha}{(r-i+1)\gamma}=a'$$

$$\frac{s-a}{k-a+1}=n, \qquad \frac{a-r}{r-i+1}=m,$$

287. Il caso più semplice, dopo quello che appartiene all'equazione di primo grado, è quello ove $n=2$; si cade allora su l'equazione $dy+by^2dx=ax^mdx$, trattata per la prima volta dal Conte Giacomo Riccati, geometra italiano, e di cui essa ha conservato il nome.

Le variabili immediatamente si separano in quest'equazione quando $m=0$; nel qual caso diventa $dy+by^2dx=adx$, e dà

$$dx=\frac{dy}{a-by^2}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{dy}{\sqrt{a}+y\sqrt{b}}+\frac{dy}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right].$$

Integrando si trova

$$x=\frac{1}{2\sqrt{ab}}l\left(\frac{\sqrt{a}+y\sqrt{b}}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right)+C.$$

Per cercare di rendere la stessa equazione omogenea si fa $y=z^k$; per cui si cambia in

$$kz^{k-1}dz+bz^{2k}dx=ax^mdx,$$

e prenderà la forma domandata se $k-1=2k=m$, locchè dà $k=-1$, e suppone che si abbia $m=-2$; dal che risulta

$$-\frac{dz}{z^2}+\frac{bdx}{z^2}=\frac{adx}{x^2}.$$

Non mi fermerò punto sull'integrazione di quest'ultima equazione; ma passerò ad una trasformazione più generale, quella che risulta da $y=Ax^p+x^qz$. Si trova in quest'ipotesi

$$dy=(pAx^{p-1}+qx^{q-1}z)dx+x^qdz,$$
$$y^2dx=(A^2x^{2p}+2Ax^{p+q}z+x^{2q}z^2)dx,$$

e per conseguenza

$$x^q\mathrm{d}z+(qx^{q-1}+2b\mathrm{A}x^{p+q}+bx^{2q}z)z\mathrm{d}x$$
$$+(p\mathrm{A}x^{p-1}+b\mathrm{A}^2x^{2p})\mathrm{d}x=ax^m\mathrm{d}x.$$

Questa equazione si ridurrà ella stessa a tre termini, se si hanno le seguenti:

$$p-1=2p,\ p\mathrm{A}+b\mathrm{A}^2=0,\ q-1=p+q,\ q+2b\mathrm{A}=0.$$

La prima e la terza si accordano a dare $p=-1$; si ricava dalla seconda e dalla quarta $\mathrm{A}=\frac{1}{b}$, $q=-2$, valori che conducono a $y=\frac{1}{bx}+\frac{z}{x^2}$,

$$x^{-2}\mathrm{d}z+bx^{-4}z^2\mathrm{d}x=ax^m\mathrm{d}x,$$

ovvero

$$\mathrm{d}z+bz^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=ax^{m+2}\mathrm{d}x.$$

Questo mezzo ridurrà la proposta equazione all'omogeneità se $m=-2$, ed in oltre mostra che si potranno separare le variabili se $m=-4$, poichè si avrà in questo caso

$$\mathrm{d}z+(bz^2-a)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=0,\quad \text{ovvero}\quad \frac{\mathrm{d}z}{bz^2-a}+\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=0.$$

Se nell'equazione $\mathrm{d}z+bz^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=ax^{m+2}\mathrm{d}x$, si fa $z=\frac{1}{y'}$, verrà

$$-\mathrm{d}y'+b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=ay'^2x^{m+2}\mathrm{d}x,\ \text{o}\ \mathrm{d}y'+ay'^2x^{m+2}\mathrm{d}x=b\frac{\mathrm{d}x}{x^2};$$

ponendo poscia $x^{m+2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x'}{m+3}$, si troverà

$$x^{m+3}=x',\ \mathrm{d}x=\frac{1}{m+3}x'^{-\frac{m+2}{m+3}}\mathrm{d}x',$$

$$\mathrm{d}y'+\frac{a}{m+3}y'^2\mathrm{d}x'=\frac{b}{m+3}x'^{-\frac{m+4}{m+3}}\mathrm{d}x';$$

poi facendo per abbreviare

$$\frac{a}{m+3}=b', \quad \frac{b}{m+3}=a', \text{ e } -\frac{m+4}{m+3}=m',$$

si cadrà su l'equazione

$$dy'+b'y'^{s}dx'=a'x'^{m'}dx',$$

simile alla proposta, e per conseguenza suscettibile delle stesse trasformazioni: la separazione delle variabili y' ed x' sarà dunque possibile, dopo la sostituzione di $y'=\frac{1}{b'x'}+\frac{z'}{x'^{2}}$, se $m'=-4$.

Se questa condizione non avesse luogo si farebbe ancora nella trasformata per z',

$$z'=\frac{1}{y''}, \qquad x'^{m'+3}=x'',$$

$$\frac{a'}{m'+3}=b'', \quad \frac{b'}{m'+3}=a'', \quad -\frac{m'+4}{m'+3}=m'';$$

queste espressioni simili alle precedenti conducono necessariamente all'equazione

$$dy''+b''y''^{2}dx''=a''x''^{m''}dx'',$$

pure simile alla proposta e suscettibile della separazione delle veriabili quando $m''=-4$.

Continuando in questo modo si giugnerebbe ad un'equazione separabile se nella serie degli esponenti

$$m, \; m'=-\frac{m+4}{m+3}, \; m''=-\frac{m'+4}{m'+3},$$

$$m'''=-\frac{m''+4}{m''+3}, \text{ ecc.},$$

se ne trovasse uno eguale a -4. Supponendo successivamente che sia m, m', m'', m''', ec.; si ottengono per m i

numeri $-\frac{4}{1}$, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{12}{5}$, $-\frac{16}{7}$, ecc., compresi nella formola

$$m=-\frac{4i}{2i-1},$$

indicando i un qualunque numero intero positivo. Questa formola dà pure il valore $m=0$, osservato nel numero precedente: e il valore $m=-2$ corrisponde ad i infinito (*).

(*) *Si perviene direttamente alla formola generale di m, riportando a questa quantità i valori di* m', m'', *ecc.; poichè ponendo il valore di* m' *in quello di* m'', *poi il risultato nel valore di* m''', *e così di seguito si trova*

$$m'=-\frac{m+4}{m+3},\quad m''=-\frac{3m+8}{2m+5},\quad m'''=-\frac{5m+12}{3m+7},\ \text{ecc.},$$

e perciò si conchiude che

$$m^{(i)}=-\frac{(2i-1)m+4i}{im+2i+1}.$$

Questo valore si verifica per la relazione

$$m^{(i+1)}=-\frac{m^{(i)}+4}{m^{(i)}+3}=-\frac{\left[2(i+1)-1\right]m+4(i+1)}{(i+1)m+2(i+1)+1},$$

che fa conoscere che la legge avendo luogo per un numero qualunque i, *avrà luogo pure pel numero seguente* $i+1$.

La proposta equazione essendo integrabile quando l'esponente di x *nel secondo membro è nullo, se si fa* $m^{(i)}=0$, *si troverà*

$$m=-\frac{4i}{2i-1}.$$

Se si fa $m^{(i)}=-4$, *si otterrà*

$$m=-\frac{4i+4}{2i+1}=-\frac{4(i+1)}{2(i+1)-1},$$

ció che indica una trasformata di più che nel caso precedente e riducesi alla supposizione di $m^{(i+1)}=0$.

Questi casi non racchiudono ancora tutti quelli che dedurre si possono dalle precedenti trasformazioni. Di fatti se ne troverà una nuova serie facendo nella proposta $y=\frac{1}{y'}$, ciò che darà

$$dy'+ay'^2x^m dx=b dx\ ;$$

e ponendo

$$x^{m+1}=x',\ \frac{a}{m+1}=b',\ \frac{b}{m+1}=a',\ -\frac{m}{m+1}=m',$$

ne risulterà

$$dy'+b'y'^2dx'=a'x'^{m'}dx'.$$

Questa nuova equazione essendo simile alla proposta, è pure suscettibile delle stesse operazioni; vale a dire che facendovi

$$y'=\frac{1}{b'x'}+\frac{z'}{x'^2},$$

e continuando come si è indicato nei primi casi, si perverrebbe ad una trasformata separabile se il numero m fosse qualcheduno di quelli che comprende la formola $-\frac{4i}{2i-1}$, e per conseguenza se si avesse

$$-\frac{m}{m+1}=-\frac{4i}{2i-1}.$$

Da ciò si ricava

$$m=-\frac{4i}{2i+1};$$

e facendo i eguale ad 1, 2, 3, ecc., risulta la serie dei numeri

$$-\frac{4}{3},\ -\frac{8}{5},\ -\frac{12}{7},\ -\frac{16}{9},\ \text{ecc.}$$

Dunque emerge dal fin qui esposto, che l'equazione del Riccati è separabile quando l'esponente m è della forma $\frac{-4i}{2i+1}$, contenendo o e -2.

Si potrebbero gli esempi maggiormente moltiplicare; ma tutte queste particolari equazioni, di una forma spesse volte bizzarra, non incontrandosi mai nelle applicazioni non offrono interesse veruno: dunque passerò ad un altro metodo ad Eulero dovuto.

Ricerca del fattore proprio a rendere integrabile un' equazione differenziale di prim' ordine.

288. Conviene rammentarsi che un' equazione differenziale non è sempre il prodotto immediato della differenziazione di un' equazione a due variabili, ma ch' essa generalmente risulta dall' eliminazione d' una costante arbitraria, fra l' equazione primitiva da cui trae la sua origine ed il differenziale di questa equazione (53).

Si effettua all' istante l' eliminazione, allorchè l' equazione è della forma $u=c$, indicando u una funzione qualunque di x e di y; poichè differenziando si ha $du=0$. Se la funzione du non ha alcun fattore pel quale potesse essa esser divisa, conserverà la forma del differenziale esatto a due variabili, e potrà per conseguenza integrarsi mediante il processo del n° 278.

289 Allorchè la primitiva equazione non è della forma $u=c$, o che il differenziale $du=0$ racchiude dei fattori che spariscono, l'equazione del prim' ordine che ne risulta non è più immediatamente integrabile. Se si avesse per esempio, $u=y-cx=0$, si troverebbe $du=dy-cdx=0$, ed eliminando c, verrebbe $xdy-ydx=0$, equazione che non soddisfa alla condizione d' integrabilità, poichè dà

$$M=-y, \quad N=x, \quad \frac{dM}{dy}=-1, \quad \frac{dN}{dx}=1.$$

Ma se si libera la costante c, si avrà $\frac{y}{x}=c$, e differenziando $\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$; sotto questa forma

$$M=-\frac{y}{x^2}, \quad N=\frac{1}{x}, \quad \frac{dM}{dy}=-\frac{1}{x^2}=\frac{dN}{dx};$$

si vede dunque che l'integrabilità dell'equazione $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$, dipende dalla restituzione del fattore $\frac{1}{x^2}$, che è sparito con la differenziazione e l'eliminazione della costante arbitraria.

In generale qualunque equazione differenziale a due variabili, e nella quale i due differenziali non oltrepassano il primo grado è suscettibile di diventare un differenziale esatto per mezzo di un fattore se essa corrisponde ad una equazione primitiva. In fatti siano

$$\mathrm{M}\mathrm{d}x + \mathrm{N}\mathrm{d}y = 0 \text{ e } u = c,$$

l'equazione differenziale proposta e la sua equazione primitiva; la prima dar debbe per $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, lo stesso valore che

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = 0,$$

differenziale immediato della seconda; bisogna dunque che si abbia

$$-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}}, \text{ onde } \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}}{\mathrm{N}} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{M}},$$

e chiamando z questi ultimi quozienti se ne conchiuderà

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{M}z, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \mathrm{N}z, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{M}z\mathrm{d}x + \mathrm{N}z\mathrm{d}y.$$

Si determinerebbe in questo modo il fattore z, se l'integrale della proposta equazione fosse conosciuto, imperocchè basterebbe risolvere questo integrale per rapporto alla costante arbitraria, onde dargli la forma $u = c$; e siccome si vedrà fra poco che tutte le equazioni differenziali a due variabili ammettono necessariamente un integrale completo per lo meno sotto la forma d'una serie, così ne segue che esiste almeno sotto questa forma un fattore proprio a rendere differenziale esatto una qualunque di queste equazioni.

290. Quando l' integrale non è conosciuto non si ha per determinare il fattore z, che la condizione

$$\frac{\mathrm{d.Mz}}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d.Nz}}{\mathrm{d}x},$$

alla quale soddisfar debbe $\mathrm{Mz}dx+\mathrm{Nz}dy=du$, come differenziale esatto; e sviluppando questa condizione si trova

$$\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+z\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}y}=\mathrm{N}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{d}x},$$

ovvero

$$\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\mathrm{N}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{d}x}\right)z=0\ldots.\ (\mathrm{A}).$$

Se si potesse generalmente ricavare dall' equazione (A) un valore di z, l' integrazione dell' equazioni differenziali qualunque di prim' ordine si effettuerebbe col processo del n° 278; ma tale equazione è quasi sempre più difficile da trattarsi che non è la proposta, poichè la funzione z che essa racchiude dipendendo da due variabili, ha due coefficienti differenziali ed è per conseguenza della specie di quelle di cui la formazione è stata indicata n. 140. Non intraprenderò nel momento la sua risoluzione, la quale come in seguito si vedrà, riconduce al punto da dove si è partito; ma bensì mostrerò alcune proprietà del fattore z.

È da notare che quando si conosce un valore di z, se ne deduce un' infinità d'altri, osservando che se si moltiplicano i due membri dell' equazione $z\mathrm{M}dx+z\mathrm{N}dy=du$, per una qualunque funzione di u, che indicherò con $\varphi(u)$, i due membri del risultato

$$z\varphi(u)\mathrm{M}dx+z\varphi(u)\mathrm{N}dy=\varphi(u)du.$$

saranno pure differenziali esatti; così z essendo un fattore atto a rendere integrabile l'equazione $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=0$, il prodotto $z\varphi(u)$ godrà della stessa proprietà.

Da ciò segue che se si arrivasse a scoprire due distinti fattori atti a rendere integrabile la proposta equazione differenziale, si avrebbe subitamente il suo integrale; imperocchè l' uno di questi fattori essendo rappresentato con

z, l'altro sarebbe della forma $z\varphi(u)$, e ponendo $\frac{z\varphi(u)}{z} = c$, si avrebbe $\varphi(u) = c$, locchè conduce ad $u = costante$.

291. Sonovi dei casi ove il fattore z non debbe racchiudere che una delle variabili x od y, e allora è facile di ottenerne l'espressione col mezzo dell'equazione (A). In fatti supponendo in questa equazione $\frac{dz}{dy} = 0$, essa diventerà

$$-N\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0,$$

e se ne ricaverà

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)dx,$$

equazione che avrà luogo se la quantità

$$\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)$$

si riduce ad una funzione di x. Rappresentando questa funzione con X, ed integrando si troverà

$$lz = \int X dx, \text{ o } z = e^{\int X dx}.$$

Questa formola si applica all'equazione

$$dy + Pydx = Qdx,$$

poichè risulta

$$M = Py - Q,\ N = 1,\ \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = P,$$

e quindi $z = e^{\int P dx}$. Moltiplicando di poi l'equazione $dy + Pydx - Qdx = 0$, per $e^{\int P dx}$, si trova $e^{\int P dx} dy + (Py - Q) e^{\int P dx} dx = 0$; integrando il termine $e^{\int P dx} dy$, per rapporto ad y, si ottiene $u = ye^{\int P dx} + X$, essendo X una funzione di x, determinata dall'equazione

$$\frac{\mathrm{d}.ye^{\int \mathrm{P}dx}}{dx}+\frac{d\mathrm{X}}{dx}=(\mathrm{P}y-\mathrm{Q})\,e^{\int \mathrm{P}dx},$$

dalla quale si ricava

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx}=-e^{\int \mathrm{P}dx}\mathrm{Q},\quad \mathrm{X}=-\int e^{\int \mathrm{P}dx}\mathrm{Q}dx,$$

e per conseguenza

$$ye^{\int \mathrm{P}dx}-\int e^{\int \mathrm{P}dx}\mathrm{Q}dx=\mathrm{C},$$

o come nel n° 285,

$$y=e^{-\int \mathrm{P}dx}\left(\int e^{\int \mathrm{P}dx}\mathrm{Q}dx+\mathrm{C}\right).$$

Non mi fermerò al caso in cui il fattore z racchiuda la sola variabile y, giacchè facilmente si vede che la sua espressione sarebbe allora $z=e^{\int \mathrm{Y}dy}$, facendo

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{\mathrm{M}}\left(\frac{d\mathrm{N}}{dx}-\frac{d\mathrm{M}}{dy}\right),$$

e che questo caso non avrebbe luogo, se non quando Y fosse assolutamente indipendente da x.

292. Esistono fra una funzione omogenea ed i suoi coefficienti differenziali delle relazioni particolari, le quali molto facilitano l'integrazione.

Se V indica una funzione omogenea di x, y, ecc., e che vi si sostituisca tx, ty, ecc., in luogo di x, y, ecc., necessariamente prenderà essa la forma $t^m\mathrm{V}$, essendo m la somma degli esponenti delle variabili in ciascun termine (283). Supponendo in seguito che $t=1+g$, si avrà $(1+g)^m\mathrm{V}$ in vece di V; nell'istessa ipotesi x, y, ecc., si cambieranno rispettivamente in

$$x+gx,\ y+gy,\ \text{ecc.},$$

e ponendo gx in luogo di h, gy in luogo di k, nella formola del n° 41, si perverrà a quest'equazione

$$\mathrm{V}+\frac{d\mathrm{V}}{dx}gx+\frac{d\mathrm{V}}{dy}gy+\text{ecc.}$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}g^2x^2+2\frac{d^2\mathrm{V}}{dxdy}g^2xy+\frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2}g^2y^2+\text{ecc.}\right\}=(1+g)^m\mathrm{V}.$$
$$+\text{ecc.}$$

Sviluppando il secondo membro, e paragonando insieme i termini affetti della stessa potenza dell' indeterminata g, si avrà

$$\frac{dV}{dx}x+\frac{dV}{dy}y+\text{ecc.}=mV,$$
$$\frac{d^2V}{dx^2}x^2+2\frac{d^2V}{dxdy}xy+\frac{d^2V}{dy^2}y^2+\text{ecc.}=m(m-1)V,$$
ecc.

293. Mediante queste relazioni il fattore z si determina facilissimamente nell' equazioni differenziali omogenee. Ecco come M. Poisson vi è pervenuto con un processo più esatto di quello di cui l'Eulero aveva da prima fatto uso.

Se $Mdx+Ndy=0$ è una equazione omogenea, e che la somma degli esponenti di x e di y in M ed in N, sia eguale ad m, supponendo che z sia pure una funzione omogenea di grado n, e facendo $Mzdx+Nzdy=du$, risulta, dai teoremi del numero precedente che

$$\frac{d(Mz)}{dx}x+\frac{d(Mz)}{dy}y=(m+n)Mz;$$

ma conviene affinchè il proposto differenziale sia esatto che

$$\frac{d(Mz)}{dy}=\frac{d(Nz)}{dx},$$

equazione che somministra il mezzo di far sparire $\frac{d(Mz)}{dy}$ dalla precedente, la quale si cambia in

$$\frac{d(Mz)}{dx}x+\frac{d(Nz)}{dx}y=(m+n)Mz.$$

Posto ciò è chiaro che

$$\frac{d(Mzx)}{dx}=\frac{d(Mz)}{dx}x+Mz,\frac{d(Nzy)}{dx}=\frac{d(Nz)}{dx}y;$$

l' equazione superiormente trovata, può dunque scriversi così:

$$\frac{d(Mzx)}{dx}+\frac{d(Nzy)}{dx}=(m+n+1)Mz;$$

ora l'esponente n essendo inderminato, se si fa

$$m+n+1=0,$$

risulterà

$$\frac{d(Mzx)}{dx}+\frac{d(Nzy)}{dx}=0,$$

onde

$$Mzx+Nzy=c \text{ e } z=\frac{c}{Mx+Ny};$$

d'altronde è evidente che si può fare $c=1$, quindi $\frac{1}{Mx+Ny}$ sarà uno dei fattori atti a rendere integrabile l'equazione $Mdx+Ndy=0$(*).

Dell' equazioni di prim' ordine, nelle quali i differenziali oltrepassano il primo grado.

294. Nella generazione delle equazioni differenziali di cui ho dato molti esempi, n° 53, si vede che presentarsene possono, nelle quali i differenziali oltrepassano il primo grado. La formola generale di queste equazioni è

$$dy^n+Pdy^{n-1}dx+Qdy^{n-2}dx^2\ldots+Tdydx^{n-1}+Udx^n=0;$$

se si divide per la maggior potenza di dx, essa diventerà

(*) *Si è in questo luogo supposto essere il fattore z una funzione omogenea, e si verifica questa ipotesi mostrando il differenziale* $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$ *è esatto tutte le volte che* M *ed* N *sono funzioni omogenee* (*Vedete il Trattato in 4°, t. II, pag.* 266). *Si trova, alla pagina seguente dello stesso volume, la determinazione a posteriori del fattore z, dietro la separazione delle variabili.*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} \ldots + T\frac{dy}{dx} + U = 0;$$

risolvendola per rapporto al coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, ed indicando con p, p', p'', ecc., le sue radici, si avrà

$$\frac{dy}{dx} - p = 0,\ \frac{dy}{dx} - p' = 0,\ \frac{dy}{dx} - p'' = 0,\ \text{etc.},$$

risultati che potranno tutti trattarsi coi metodi precedenti, poichè i differenziali non vi si trovano che al primo grado. L'integrale di ciascun d'essi sarà egualmente l'integrale dell'equazione proposta, la quale sarà ancora soddisfatta dai valori ricavati dall'equazione formata dal prodotto di tutti questi integrali.

In fatti, essendo la proposta equivalente a

$$\left(\frac{dy}{dx} - p\right)\left(\frac{dy}{dx} - p'\right)\left(\frac{dy}{dx} - p''\right)\ldots = 0,$$

sarà verificata da tutte l'equazioni le quali annulleranno uno di questi fattori. Di più se si considera che una equazione primitiva della forma

$$MNP\ldots. = 0,$$

non ha luogo che pel successivo annientamento di ciascuno dei suoi fattori, se ne conchiuderà che il differenziale immediato del suo primo membro, cioè

$$dM \,.\, NP\ldots. + dN \,.\, MP\ldots. + \text{ecc.} = 0,$$

si riduce sempre ad un sol termine; imperocchè se si prende per esempio $M=0$, rimarrà che $dM.NP\ldots = 0$, o soltanto $dM=0$: l'equazione $MNP\ldots=0$ verificherà dunque l'equazione differenziale alla quale soddisferebbe l'equazione $M=0$.

I due seguenti esempi, abbenchè semplicissimi, schiariranno tutte le difficoltà, che racchiuder potrebbero le cose superiormente enunciate.

295. 1°. Sia $dy^2 - a^2dx^2 = 0$; questa equazione si decompone in $dy + adx = 0$, $dy - adx = 0$, di cui gl'integrali

sono $y+ax=c$, $y-ax=c'$; ed è facile il vedere che ciascheduno di questi risultati soddisfa alla proposta. L'equazione $(y+ax-c)(y-ax-c')=0$ egualmente vi soddisfa; perchè dà

$$(y+ax-c)(dy-adx)+(y-ax-c')(dy+adx)=0,$$

onde

$$dy=\frac{[(y+ax-c)-(y-ax-c')]adx}{2y-(c+c')}$$

e ponendo successivamente in luogo di y, i suoi valori $c-ax$. $c'+ax$, si trova

$$dy=-adx,\ dy=+adx.$$

L' integrale $(y+ax-c)(y-ax-c')=0$, racchiudendo due costanti arbitrarie ed irreducibili, sembrerebbe più generale che quelli delle altre equazioni del prim'ordine, le quali non ammettono che una sola costante; ma conviene por bene attenzione che ciascuno de' suoi fattori debb' essere considerato isolatamente, e che non se ne ricavano altre linee che quelle le quali risulterebbero da un integrale, racchiudendo una sola costante, di cui questa equazione è pure suscettibile Quest'ultimo integrale si ottiene, facendo $dy=mdx$ nell' equazione differenziale $dy^2-a^2dx^2=0$, la quale si cambia in $m^2-a^2=0$, ciò che determina la quantità m, di cui bisognerebbe sostituire in seguito il valore nell' integrale di $dy=mdx$, che è $y=mx+c$. Da ciò segue che l' integrale della proposta è il risultato dell' eliminazione di m, fra l' equazioni

$$y=mx+c,\qquad m^2-a^2=0,$$

dalle quali si ricava

$$m=\frac{y-c}{x}\ \text{e}\ \left(\frac{y-c}{x}\right)^2-a^2=0.$$

L' ultima essendo di secondo grado, dà per ciascun valore particolare della costante due linee rette, inclinate in sensi diversi per rapporto all'asse delle x, e ciò quello che fornisce l'altro integrale $(y+ax-c)(y+ax-c')=0$,

eccettuato che ciascun fattore non rappresenta che le linee nello stesso senso inclinate ; ma siccome dando separatamente a c ed a c' tutti i valori possibili, queste quantità passeranno necessariamente per gli stessi gradi di grandezza, e se si assomigliano le rette corrispondenti agli stessi valori delle costanti c e c', si ricaderà sopra le soluzioni comprese nell' integrale $\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 - a^2 = 0$, che non contiene che la sola costante c.

È bene l' osservare che qualunque equazione, non racchiudendo che dy, dx e delle quantità costanti può essere integrata facendovi come qui di sopra $dy = m dx$.

2°. Sia ancora l' equazione $dy^2 - ax dx^2 = 0$, se ne ricava $dy + dx\sqrt{ax} = 0$, $dy - dx\sqrt{ax} = 0$, ed integrando si avrà

$$y + \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - c = 0, \quad y - \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - c' = 0.$$

Queste equazioni, come pure il loro prodotto, potranno essere considerate separatamente come integali della proposta; ma questo caso differisce dal precedente, in quanto che i radicali, che contengono i due integrali ottenuti formano fra loro stessi un legame il quale permette di comprenderli tutti due in una stessa equazione, con una sola costante. In fatti, se si fa sparire il radicale nell' equazione

$$y + \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} - c = 0,$$

si ottiene $(y-c)^2 = \frac{4}{9} ax^3$. Questo risultato è ancora l'integrale della proposta equazione, alla quale immediatamente ci condurrà, mediante l' eliminazione di c. Appartiene egli ad una specie di parabole di cui ciascuna delle equazioni irrazionali non presenta che un ramo; ed il prodotto di queste equazioni, non corrisponderebbe che a dei gruppi di rami appartenenti a delle curve diverse, ma che essendo unite due a due per gli stessi valori delle costanti, non darebbero nulla di più che l' integrale razionale.

296. Quello che precede facendo dipendere l'integrazione dell'equazioni in cui i differenziali oltrepassano il primo grado dalla risoluzione dell' equazioni algebraiche, in virtù di che si è subitamente fermati; ma ecco alcuni processi che in certi casi possono eludere almeno in parte le difficoltà che presenta la risoluzione dell'equazione differenziale proposta, per rapporto a $\frac{dy}{dx}$.

Quando questa equazione non contiene con $\frac{dy}{dx}$, che l'una delle variabili, x per esempio, e che è più facile di risolvere per rapporto ad x che per rapporto al coefficiente $\frac{dy}{dx}$, il quale rappresenterò per brevità con p, se ne ricava primieramente $x=P$, indicando P una funzione qualunque di p; e siccome l'equazione $\frac{dy}{dx}=p$ dà $dy=pdx$, onde $y=px-\int xdp+C$, se si pone per x il suo valore P, verrà

$$y=Pp-\int Pdp+C.$$

Allora l'eliminazione di p, fra le due equazioni

$$x=P, \quad y=Pp-\int Pdp+C,$$

conducendo ad una equazione primitiva fra x, y e la costante C, darà l'integrale domandato.

Sia per esempio, $xdx+ady=b\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, o $x+ap=b\sqrt{(1+p^2)}$, scrivendo p in luogo di $\frac{dy}{dx}$; quest'ultima equazione dà immediatamente

$$x=-ap+b\sqrt{(1+p^2)}, \quad P=-ap+b\sqrt{(1+p^2)},$$

e per conseguenza

$$y=bp\sqrt{(1+p^2)}-\frac{1}{2}ap^2-b\int dp\sqrt{(1+p^2)}+C.$$

297. Quando le due variabili entrano contemporaneamente nell'equazione proposta, e che una di esse y per

esempio non trovasi elevata che al primo grado, se si prende allora il valore di y dato per x e p, se ne ricaverà

$$dy=Rdx+SdP,$$

donde segue

$$pdx=Rdx+Sdp \quad \text{ovvero} \quad (R-p)+Sdp=0;$$

e se si pervenisse ad integrare quest' ultima equazione, si avrebbe fra p, x ed una costante arbitraria, una relazione, mediante la quale eliminando p dall' equazione proposta, si otterrebbe una equazione primitiva, che sarebbe l' integrale cercato.

Quando la variabile x non s' innalza essa pure al di là del primo grado, l' equazione proposta essendo allora della forma

$$y=Nx+P,$$

in cui N e P indicano delle funzioni di p, conduce ad un differenziale analogo all' equazione trattata nel n°. 285; ma per maggior semplicità, limitiamoci al caso particolare

$$y=px+P.$$

Si ha $dy=pdx+\left(x+\frac{dP}{dp}\right)dp$; e poichè $dy=pdx$, rimane l' equazione $\left(x+\frac{dP}{dp}\right)dp=0$, la quale si decompone in due fattori $x+\frac{dP}{dp}=0$, $dp=0$. Il primo non è in sostanza che una equazione primitiva fra x e p; e non puossi integrare che il secondo, che dà $p=c$, o $dy=cdx$ ed $y=cx+c'$. Le costanti c e c' non sono tutte due arbitrarie; poichè facendo nella proposta equazione $p=c$, si ha $y=cx+C$, essendo C quello che diventa P nella stessa circostanza, e da ciò si ricava $c'=C$: l' integrale domandato è dunque $y=cx+C$, e si ottiene cambiando p in c.

Il fattore $x+\frac{dP}{dp}=0$, non è straniero in modo alcuno alla quistione. Imperocchè se si combina con l' equazione proposta, onde eliminare p, si ottiene fra x ed y un' equazione

primitiva, la quale soddisfa essa pure a questa proposta; giacchè la relazione che stabilisce fra x e p, riduce ancora a pdx il valore di dy, dedotto dall'equazione stessa proposta; ma quest' ultima soluzione, non racchiudendo niuna nuova costante, non è che particolare.

Sia per esempio l' equazione

$$y\,dx-x\,dy=n\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

la quale si pone primieramente sotto la forma

$$r=px+n\sqrt{(1+p^2)};$$

e differenziandola si trova

$$dy=p\,dx+x\,dp+\frac{np\,dp}{\sqrt{(1+p^2)}},$$

ed in causa che $dy=p\,dx$, rimane

$$x\,dp+\frac{np\,dp}{\sqrt{(1+p^2)}}=0.$$

Questa equazione si decompone in due fattori

$$x+\frac{np}{\sqrt{(1+p^2)}}=0, \text{ e } dp=0;$$

il secondo conduce a $p=c$, e l'integrale domandato è

$$y=cx+n\sqrt{(1+c^2)}.$$

Il primo fattore dà

$$p=\mp\frac{x}{\sqrt{(n^2-x^2)}}, \quad \sqrt{(1+p^2)}=-\frac{np}{x}=\mp\frac{n}{\sqrt{(n^2-x^2)}};$$

sostituendo nella proposta equazione, si ha $y^2+x^2=n^2$, equazione che non racchiude in alcun modo nessuna costante arbitraria, che compresa non sia nell' integrale

$$y=cx+n\sqrt{(1+c^2)},$$

e tale nondimeno che i valori di y e di dy, che se ne deducono, soddisfanno all'equazione differenziale proposta,

di cui offre essa una *soluzione particolare.* Ritornerò in seguito su questo genere di soluzioni.

Dell' integrazione dell' equazioni differenziali del second' ordine e degli ordini superiori.

298. La difficoltà d' integrare le equazioni tanto più cresce, quanto queste equazioni sono d' un ordine più elevato: e solameute vi si riesce per rapporto ad un piccol numero d' equazioni particolarissime; e però qualunque equazione differenziale a due variabili, di qualsivoglia ordine, non esprime una relazione assurda, se non quando dà un valore immaginario pel coefficiente differenziale dell' ordine il più elevato. Questa proposizione già enunciata nel n° 289 si prova facilmente col teorema di Taylor.

In fatti, un' equazione qualunque differenziale dell'ordine n, essendo risoluta per rapporto al coefficiente differenziale di quest'ordine, darà l'espressione per quelli degli ordini inferiori, e si avrà generalmente

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \mathrm{f}\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right),$$

donde con delle differenziazioni successive, si ricaveranno l' espressioni di

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} y}{\mathrm{d}x^{n+1}}, \quad \frac{\mathrm{d}^{n+2} y}{\mathrm{d}x^{n+2}}, \text{ ecc.},$$

avendo cura dopo ciascuna differenziazione di porre per $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, il valore ricavato dalla proposta equazione. Con questo mezzo si otterranno tutti i coefficienti differenziali, dall' ordine n inclusivamente in funzione delle variabili primitive e dei $n-1$ primi coefficienti differenziali.

Se in queste funzioni, si può supporre $x=0$, senza che cessino di essere reali e finite, converrà pure per finire di determinare i coefficienti differenziali, che esse esprimono, prendere arbitrariamente i corrispondenti valori delle quantità

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

che la proposta equazione non fa conoscere; e rappresentandoli con

$$A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1},$$

si avrà per un qualunque valore di x,

$$y = A + A_1 \frac{x}{1} + A_2 \frac{x^2}{1.2} \ldots\ldots + A_{n-1} \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$+ f(A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}) \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \text{etc. (22)},$$

serie in cui i coefficienti degli n primi termini sono quantità costanti arbitrarie.

Se avvenisse che la supposizione di $x=0$ rendesse immaginaria od infinita l'espressione del coefficiente differenziale dell'ordine n o dei seguenti, si farebbe $x = a$, indicando a uno dei valori qualunque che quest' effetto non producono, e si avrebbe

$$y = A + A_1 \frac{x-a}{1} + A_2 \frac{(x-a)^2}{1.2} \ldots + A_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$+ f(a, A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}) \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} + \text{ecc.},$$

serie ove le quantità arbitrarie $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ sono i valori di y e dei suoi coefficienti differenziali corrispondenti ad $x=a$.

In questo modo come nell'altro si vede che se la funzione indicata con f, non è costantemente immaginaria per tutti i valori di x, si ricaverà sempre dall' equazione differenziale proposta un numero infinito di valori consecutivi di y, espressi da una serie che sarà tanto più convergente, quanto i valori di x differiranno meno dalla quantità a: non cadrà dunque l'equazione proposta nel caso di una assoluta impossibilità, quantunque si manchi di mezzi per integrarla. Questa proprietà che è particolare

alle equazioni differenziali a due variabili, si riconosce ancora mediante considerazioni geometriche, come si vedrà in seguito.

299. Si conchiude pure da ciò che precede che l'espressione generale di y data in funzione di x racchiuder debbe n costanti arbitrarie.

La quantità a, che quivi introduce la variabile indipendente x, non debbesi contare nel numero delle costanti arbitrarie introdotte dall'integrazione, come si può assicurarsene su gl'integrali completi delle equazioni del prim'ordine, considerate nella loro forma generale $F(x, y, C)=0$. La costante arbitraria C si determina in questo caso, assegnando contemporaneamente un valore ad x e ad y; e se questi si rappresentano con a e b, si avrà l'equazione $F(a, b, C)=0$, dalla quale si ricaverà il valore di C in funzione di a e b; ma quello che necessita di attentamente osservare è che la funzione di queste quantità, colla quale si viene così a rimpiazzare la costante arbitraria, può egualmente essere eliminata mediante la differenziazione: poichè se si pone l'integrale proposto sotto la forma

$$F_1(x,y)=C, \quad \text{viene } C=F_1(a,b),$$

e di poi l'equazione

$$F_1(x,y)=F_1(a,b),$$

di cui il secondo membro sparisce colla differenziazione.

Similmente si determinano due costanti C e C_1, in una equazione primitiva della forma $F(x, y, C, C_1)=0$, allorchè per un dato valore di x si assegnano quelli di y e di $\frac{dy}{dx}$; imperocchè aggiugnendo alla superiore equazione il suo differenziale primo che rappresenterò con

$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, C, C_1\right)=0,$$

e supponendo che ad $x=a$ corrisponda

$$y=b, \quad \frac{dy}{dx}=c,$$

si hanno le due equazioni

$$F(a, b, C, C_1)=0, \quad F,(a,' b, c, C, C_1)=0,$$

col mezzo delle quali si determina C e C_1 in funzione di a, b, c, con delle espressioni che si considerano nelle differenziazioni ed eliminazioni, come le semplici lettere C e C_1.

300. Queste considerazioni ci conducono alla formazione delle equazioni differenziali, per l'eliminazione delle costanti, di cui si è già veduto nel n° 54, un esempio conducente sino al second' ordine.

Partendo dall'equazione

$$y^2=m(a^2-x^2) \text{ (U)},$$

una prima differenziazione conduce a

$$y\,dy=-m\,x\,dx \text{ (V)},$$

risultato che più non contiene a; poi una seconda differenziazione seguita dall'eliminazione di m, dà l'equazione di second' ordine

$$y\frac{dy}{dx}-x\frac{dy^2}{dx^2}-x\,y\frac{d^2y}{dx^2}=0 \text{ (Z)},$$

che più non racchiude le costanti m ed a.

Questa stessa equazione puossi ancora ottenere, cominciando dall'eliminare m, fra l'equazione primitiva e il suo primo differenziale, ciò che darà

$$xy\,dx+dy(a^2-x^2)=0 \text{ (V')},$$

poi differenziando questa, onde eliminare per l'ultimo la costante a. Finalmente, se la costante a non isparisse da se stessa, mediante la prima differenziazione, si potrebbe cominciare dal differenziare due volte di seguito l'equazione (U), poi eliminare fra questa equazione e i suoi differenziali primo e secondo le costanti m ed a.

Qualunque sia di questi tre processi che si abbia seguito, si giugne sempre all'equazione (Z); ma quello che conviene osservare si è che ciascuna delle equazioni (V) e (V'), conducendo alla detta equazione in particolare colla

differenziazione e l'eliminazione di una costante, è di questa un integrale. Si chiamano per conseguenza, *integrali primi*, per distinguerle dall'equazione (U), che è l'*integrale secondo* o l'*integrale primitivo*, a motivo che (Z) non è che del second' ordine.

Da ciò si vede che un'equazione differenziale del second'ordine può avere due integrali primi, e che eliminando da questa il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, si otterrebbe fra x, y e due costanti arbitrarie, un'equazione primitiva, che dovrebb'essere della forma dell'equazione (U): per cui segue che basta conoscere i due integrali primi, per trovare l'integrale secondo.

Tali osservazioni si estendono alle equazioni di tutti gli ordini. Nel terzo, per esempio, l'equazione primitiva contener debbe tre costanti arbitrarie (299), poichè si hanno le quattro equazioni

$$U=o, \quad dU=o, \quad d^2U=o, \quad d^3U=o;$$

ma se si eliminano primieramente due delle costanti arbitrarie, fra le equazioni $U=o$, $dU=o$, $d^2U=o$, si avranno tre equazioni differenziali del second'ordine, imperciocchè si potrà a suo tempo conservare ciascuna delle tre costanti. Le equazioni che si ottengono in questo modo sono *integrali primi* dell'equazione differenziale del terz'ordine, che necessariamente risulterà dall'eliminazione della costante, ch'esse racchiudono. Gl'*integrali secondi* sono in questo luogo le equazioni del prim'ordine, che danno l'eliminazione di ciascuna delle costanti, fra le equazioni $U=o$ e $dU=o$, e l'equazione primitiva $U=o$ è *l'integrale terzo*. Senza più oltre spingere sì fatte considerazioni, se ne debbe conchiudere che *un'equazione differenziale dell'ordine* n *ha un numero* n *d'integrali primi*; e siccome questi integrali sono dell'ordine $n-1$, non racchiudono che gli $n-1$ coefficienti

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}};$$

se dunque si possono eliminare, si avrà l'integrale n^{esimo},

o l'equazione primitiva, la quale corrisponde all'equazione differenziale proposta.

301. Per generalizzare la teorica precedente, il Lagrangia, coll'applicazione della serie di Taylor, ha dedotto dall'equazione differenziale stessa, questa moltiplicità dei loro integrali primi, che si è già stabilita, partendo dall'equazione primitiva.

Se si pone da prima, come nel n° 240, $h=-x$, e che si rappresenti con A il valore di y, allorchè $x=0$, si trova

$$A=y-\frac{dy}{dx}\frac{x}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{x^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3}+\text{ecc. }(a),$$

equazione in cui si possono fare sparire tutti i coefficienti differenziali degli ordini superiori a quello dell'equazione differenziale proposta. Supponiamo per esempio, questo del second'ordine e posto sotto la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)(Z);$$

se ne dedurranno i valori dei coefficienti differenziali degli ordini più elevati, e con questo l'equazione (a) divenendo

$$A=y-\frac{dy}{dx}\frac{x}{1}+f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)\frac{x^2}{1.2}$$

$$-f_1\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)\frac{x^3}{1.2.3}+\text{ecc. }(1),$$

e ricondotta al prim'ordine, ed è un'integrale primo dell'equazione (Z), rappresentando allora A la costante arbitraria.

Posto ciò, si può scrivere nel secondo membro dell'equazione (a), $\frac{dy}{dx}$ in vece di y, e darà il valore di $\frac{dy}{dx}$, corrispondente ad $x=0$; indicando questo valore A_1, si avrà

$$A_1=\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\frac{x}{1}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^2}{1.2}-\text{ecc.},$$

e rimpiazzando ancora $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ecc., coi loro valori tratti dall' equazione (Z), si otterrà

$$A_1 = \frac{dy}{dx} - f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\frac{x}{1}$$

$$+ f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\frac{x^2}{1.2} - \text{ecc. (2)},$$

che sarà pure un altro integrale primo della proposta equazione. Non si potrà andar più lungi, giacchè non vi è d'arbitrario che i primi valori di y e di $\frac{dy}{dx}$.

Si vede senza che sia necessario d'entrare in nuovi dettagli, che se l' equazione proposta fosse dell' ordine n, si ricaverebbero dall' equazione (a) delle espressioni di

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

corrispondenti ad $x=0$, che sarebbero tutte arbitrarie, e collocandosi in essa in luogo dei coefficienti differenziali dell' ordine n e degli ordini superiori, i loro valori ricavati dalla proposta equazione, si formerebbero n equazioni dell'ordine $n-1$, che ne sarebbero gl' integrali primi.

302. Cominceremo l'integrazione delle equazioni differenziali degli ordini superiori, da quelle che non racchiudono le variabili primitive.

Nel second'ordine, queste equazioni non contengono che $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$; e allorchè vi si fa per abbreviare $\frac{dy}{dx} = p$, ciò che dà $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, esse conducono a $\frac{dp}{dx} = P$, essendo P una funzione di p. Da ciò si ricava $dx = \frac{dp}{P}$, e per conseguenza $x = \int \frac{dp}{P} + C$; ponendo per dx il suo valore

nell'equazione $dy=pdx$, si trova ancora $y=\int\frac{pdp}{P}+C'$: non si tratta più che di eliminare p fra le due equazioni $x=\int\frac{dp}{P}+C$, e $y=\int\frac{pdp}{P}+C'$, onde aver l'integrale in x e y, che sarà completo; poichè racchiuderà due costanti arbitrarie (299). L'eliminazione di p non potrà farsi che quando si saranno effettuate le integrazioni indicate; ma mediante le quadrature, si costruirà la curva cercata.

Sia per esempio l'equazione $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}=a$. Mettendo pdx per dy, e $dpdx$ per d^2y, si cambierà quest'equazione in $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dp}=a$, e se ne ricaverà

$$dx=\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\quad dy=pdx=\frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'integrazione darà

$$x=C+\frac{ap}{\sqrt{(1+p^2)}},\quad y=C'-\frac{a}{\sqrt{(1+p^2)}};$$

eliminando p, verrà

$$(x-C)^2+(y-C')^2=a^2,$$

risultato facile da prendere, imperocchè l'equazione differenziale proposta non essendo altra cosa che l'espressione generale del raggio di curvatura, eguale ad una costante $-a$ (81), esprime la proprietà fondamentale del circolo.

303. Si riducono egualmente all'integrazione delle funzioni d'una sola variabile, le equazioni di un ordine qualunque, nelle quali un coefficiente differenziale è espresso da quello dell'ordine immediatamente inferiore.

Se si avesse, per esempio, $\frac{d^3y}{dx^3}$ in funzione di $\frac{d^2y}{dx^2}$, si

farebbe $\frac{d^2y}{dx^2}=q$, donde risulterebbe $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dq}{dx}$, e per conseguenza la proposta equazione sarebbe trasformata in $\frac{dq}{dx}=Q$, rappresentando Q una data funzione di q. Si concluderebbe da questa equazione

$$dx=\frac{dq}{Q},\quad x=\int\frac{dq}{Q}+C;$$

poi da $\frac{d^2y}{dx^2}=q$ si ricaverebbe successivamente

$$\frac{dy}{dx}=\int q\,dx=\int\frac{q\,dq}{Q}+C',$$

$$y=\int dx\int q\,dx=\int\frac{dq}{Q}\left(\int\frac{q\,dq}{Q}+C'\right)+C'':$$

l'integrale domandato sarebbe dunque il risultato dell'eliminazione di q fra le due equazioni

$$x=\int\frac{dq}{Q}+C,\quad y=\int\frac{dq}{Q}\left(\int\frac{q\,dq}{Q}+C'\right)+C'',$$

e vi sarebbero tre costanti arbitrarie nel risultato. Si stenderebbe facilmente questo processo ad un ordine qualunque.

304. Si riducono pure facilissimamente all'integrazione delle funzioni d'una sola variabile, le equazioni d'un ordine qualunque, nelle quali un coefficiente differenziale è dato da quello dell'ordine inferiore di due unità. Se si avesse per esempio $\frac{d^4y}{dx^4}$ in funzione di $\frac{d^2y}{dx^2}$, si rappresenterebbe $\frac{d^2y}{dx^2}$ con q, da cui seguirebbe

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dp}{dx},\quad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2q}{dx^2},$$

e la proposta si trasformerebbe in

$$\frac{d^2q}{dx^2}=Q,$$

indicando Q una data funzione di q. Moltiplicando allora i due membri per dq, verrebbe

$$\frac{dq}{dx}\cdot\frac{d^2q}{dx}=Qdq,$$

e siccome $\frac{d^2q}{dx}=d\frac{dq}{dx}$, da ciò si ricaverebbe

$$\frac{1}{2}\frac{dq^2}{dx^2}=\int Qdq+C,\quad\text{e}\quad\frac{dq}{dx}=\sqrt{(2\int Qdq+C)},$$

$$dx=\frac{dq}{\sqrt{(2\int Qdq+C)}},\qquad x=\int\frac{dq}{\sqrt{(2\int Qdq+C)}}+C;$$

ma da $\frac{d^2y}{dx^2}=q$ si deduce successivamente

$$\frac{dy}{dx}=\int qdx=\int\frac{qdq}{\sqrt{(2\int Qdq+C)}}+C',$$

$$y=\int dx\int qdx=\int\frac{dq}{\sqrt{(2\int Qdq+C)}}\left\{\int\frac{qdq}{\sqrt{(2\int Qdq+C)}}+C'\right\}+C'';$$

l' integrale sarebbe per conseguenza il risultato dell' eliminazione di q, fra le equazioni

$$x=\int\frac{dq}{\sqrt{(2\int Qdq+C)}}+C',$$

$$y=\int\frac{dq}{\sqrt{(2\int Qdq+C)}}\left\{\int\frac{qdq}{\sqrt{(2\int Qdq+C)}}+C'\right\}+C'',$$

contenendo quattro costanti arbitrarie. Si tratterebbero similmente le equazioni analoghe, negli ordini più elevati.

305. L' equazione $\frac{d^2y}{dx^2}=Y$, in cui Y indica una qualunque funzione di y, è il caso più semplice della classe di equazioni che ci occupa: risulta allora

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx}=Y dy,$$

$$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\int Y dy+C, \text{ e } \frac{dy}{dx}=\sqrt{(2\int Y dy+C)}.$$

Se si applica questo processo all' equazione particolare

$$d^2y\sqrt{ay}=dx^2,$$

si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{ay}},\quad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx}=\frac{dy}{\sqrt{ay}},$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2}{a}\sqrt{ay}+C,$$

integrando. Cambiando C in $\frac{2c}{\sqrt{a}}$, si ricaverebbe da ciò

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{4}{\sqrt{a}}(\sqrt{y}+c),\ \frac{2dx}{\sqrt[4]{a}}=-\frac{dy}{\sqrt{(c+\sqrt{y})}};$$

facendo poscia $c+\sqrt{y}=z$, verrebbe

$$\frac{dx}{\sqrt[4]{a}}=\frac{(z-c)dz}{\sqrt{z}}=(cz^{\frac{1}{2}}-cz^{-\frac{1}{2}})dz,$$

e finalmente

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a}}=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}-2cz^{\frac{1}{2}}+c'=\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2c)\sqrt{(c+\sqrt{y})}+c'.$$

306. Le equazioni differenziali che non contengono che una sola delle variabili primitive, si abbassano almeno d'un ordine.

Ciò è subito chiaro per quelle che sono della forma

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,$$

rappresentando x la variabile indipendente; giacchè se si fa $\frac{dy}{dx}=p$, viene

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right)=0.$$

equazione, la quale non è più che dell'ordine $n-1$ per rapporto alle variabili x e p. Quando si potrà integrarla e ricavarne p in x, ovvero x in p, si avrà y dalle formole

$$y=\int p dx+C, \text{ o } y=px-\int x dp+C.$$

Sia per esempio l'equazione differenziale

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dx d^2y}=X,$$

indicando X una data funzione della sola x; questa equazione si trasforma in

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp}=X,$$

o

$$\frac{dx}{X}=\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Integrando viene

$$\int\frac{dx}{X}+C=\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}};$$

rappresento $\int\frac{dx}{X}+C$ con V, e ne risulta

$$p=\frac{V}{\sqrt{(1-V^2)}},\quad y=\int p\,dx+C'=\int\frac{V\,dx}{\sqrt{(1-V^2)}}+C'.$$

307. Se la funzione y entrasse nell'equazione proposta, in vece della variabile indipendente x, si ricondurrebbe questo caso al precedente, prendendo dy costante, invece del dx (130).

Si potrebbe ancora, se l'equazione proposta non fosse che del second'ordine, eliminare dx mediante il suo valore $\frac{dy}{p}$, ricavato dall'equazione $dy=p\,dx$, e si avrebbe così

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{p\,dp}{dy}:$$

la trasformata non racchiuderebbe allora che p, dy, y e dy. Se tale equazione si potesse integrare, e che desse p per y, si troverebbe x mediante la formola $x=\int\frac{dy}{p}$, e dalla formola $x=\frac{y}{p}+\int\frac{y\,dp}{p^2}$, allorchè si avesse y dato per p.

L'equazione $\frac{d^2y}{dx^2}=Y$, di già trattata nel n° 305, diventa pel processo superiore,

$$\frac{p\,dp}{dy}=Y,\text{ onde }p^2=2\int Y\,dy+C,$$

$$p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{(2\int Y\,dy+C)},\text{ e }x=\int\frac{dy}{\sqrt{(2\int Y\,dy+C)}}+C'.$$

308. Fra le equazioni differenziali che contengono contemporaneamente le due variabili primitive, conviene osservare quelle che sono omogenee fra la funzione y ed i suoi differenziali considerati come fattori algebrici: una trasformata semplicissima, facendo sparire la funzione primitiva y, le riconduce al caso precedente.

Basta porre $y=e^u$, donde risulta

$$dy=e^{u}du,\quad d^{2}y=e^{u}(d^{2}u+du^{2}),$$
$$d^{3}y=e^{u}(d^{3}u+3dud^{2}u+du^{3}),\ \text{etc.};$$

il fattore e^{u}, divenendo allora comune a tutti i termini dell'equazione, scomparisce, e non rimangono più che i differenziali di u, con x e dx.

Il caso il più semplice di queste equazioni è quello in cui y ed i suoi differenziali non oltrepassano il primo grado; ed è rappresentato dalla formola generale

$$d^{n}y+Pd^{n-1}ydx+Qd^{n-2}ydx^{2}\ldots.+Uydx^{n}=0.$$

Prendiamo per esempio quella del terz'ordine

$$d^{3}y+Pd^{2}ydx+Qdydx^{2}+Uydx^{3}=0;$$

i valori di y e de' suoi differenziali la ridurranno a

$$\left.\begin{aligned}d^{3}u+3dud^{2}u+du^{3}+P(d^{2}u+du^{2})dx\\+Qdudx^{2}+Udx^{3}\end{aligned}\right\}=0,$$

che si abbassa al secondo grado, ponendo $du=tdx$, per cui risulta

$$d^{2}t+(3t+P)dtdx+(t^{3}+Pt^{2}+Qt+U)dx^{2}=0.$$

La forma di questa equazione dà luogo ad un'osservazione importante, cioè, che se le quantità P, Q e U fossero costanti, si potrebbe supporre t costante; poichè facendo $d^{2}t=0$, $dt=0$, non rimarrebbe per determinare t che l'equazione.

$$t^{3}+Pt^{2}+Qt+U=0$$

di cui i coefficienti sarebbero costanti.

Indicando con m_1, m_2, m_3, le tre radici di quest'equazione, potrebbesi prendere successivamente

$$t=m_1,\quad t=m_2,\quad t=m_3.$$

e siccome

$$du=tdx,\quad \text{dà}\quad u=\int tdx+c,\quad y=e^{\int tdx+c},$$

si avrebbe per y, i tre valori

$$y_1=e^{m_1x+c_1},\quad y_2=e^{m_2x+c_2},\quad y_3=e^{m_3x+c_3},$$

che condncono a

$$y=C_1e^{m_1x},\quad y_2=C_2e^{m_2x},\quad y_3=C_3e^{m_3x},$$

prendendo per costanti arbitrarie le quantità

$$e^{c_1},\quad e^{c_2},\quad e^{c_3}.$$

309. Questi non sono fin'ora che valori particolari della funzione y, poichè non racchiudono che una costante; ma aggregandoli si forma l'integrale primitivo completo

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}+C_3e^{m_3x}.$$

Non solamente è facile l'assicurarsi che quest'espressione di y soddisfa all'equazione differenziale proposta; ma si può stabilire su questo argomento una proposizione generale, qualunque sieno i coefficienti P, Q ed U, cioè: che se y_1, y_2, y_3, sono tre valori di y, i quali soddisfacciano ciascuno in particolare a quest'equazione, la loro somma $y_1+y_2+y_3$, essendo presa per l'espressione di y, soddisferà egualmente, e che se le funzioni y_1, y_2, y_3, non contenessero delle costanti arbitrarie, come superiormente si potrebbe prendere

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3;$$

imperciocchè differenziando tre volte quest'espressione, sostituendo nell'equazione proposta i valori di y, dy, d^2y, d^3y, e riunendo tutti i termini in cui entra la medesima costante, viene

$$\left.\begin{array}{l} C_1(d^3y_1+Pd^2y_1dx+Qdy_1dx^2+Uy_1dx^3)\\ +C_2(d^3y_2+Pd^2y_2dx+Qdy_2dx^2+Uy_2dx^3)\\ +C_3(d^3y_3+Pd^2y_3dx+Qdy_3dx^2+Uy_3dx^3)\end{array}\right\}=0,$$

risultato nel quale la funzione che moltiplica ciascuna costante è nulla per se stessa, poichè si è supposto che le funzioni y_1, y_2, y_3 soddisfacessero separatamente all'equazione

$$d^3y+Pd^2ydx+Qdydx^2+Uydx^3=0.$$

Si vede facilmente che questa dimostrazione può applicarsi all'equazione d'un ordine qualunque

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 \ldots\ldots + U y dx^n = 0,$$

e che per conseguenza se si trovano n valori particolari

$$y_1, y_2, y_3, y_n,$$

che vi soddisfacciano, si potrà porre

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots + C_n y_n,$$

rappresentando C_1, C_2, C_3, ... C_n delle costanti arbitrarie.

È egualmente chiaro che se i coefficienti P, Q, ... U sono costanti, i valori di y si otterranno, con la supposizione di $y = e^{mx}$, essendo m una costante, locchè dà

$$dy = e^{mx} m dx, \quad d^2 y = e^{mx} m^2 dx^2, \quad \ldots\ldots d^n y = e^{mx} m^n dx^n,$$

e rendendo divisibile per $e^{mx} dx^n$, l'equazione proposta, si riduce allora

$$m^n + P m^{n-1} + Q m^{n-2} \ldots + U = 0.$$

Se si rappresenta con m_1, m_2, ... m_n, le radici di questa, si avrà

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}, \ldots y = e^{m_n x},$$

e quindi

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \ldots\ldots + C_n e^{m_n x}.$$

310. Allorchè fra i valori di m, se ne trovano degli immaginari, l'espressione superiore, la quale perciò non cessa di verificare l'equazione differenziale proposta, ha bisogno di essere trasformata in un'altra, ove non siano che delle quantità reali, lo che si effettua col mezzo delle formole del n° 187.

Se m_1 e m_2, per esempio, indicano un gruppo di radici immaginarie, queste saranno della forma

$$m_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad m_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

e forniranno nell'espressione generale di y una parte

$$C_1 e^{\alpha x + \beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{\alpha x - \beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}\left[C_1 e^{\beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x\sqrt{-1}}\right];$$

ma per l' articolo citato, si ha

$$e^{\beta x\sqrt{-1}}=\cos\beta x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\beta x, e^{-\beta x\sqrt{-1}}=\cos\beta x-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\beta x,$$

questi valori sostituiti nell'espressione precedente, la cambiano in

$$e^{\alpha x}\left[(C_1+C_2)\cos\beta x+(C_1-C_2)\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\beta x\right];$$

e siccome le costanti C_1 e C_2 spariscono dall' equazione differenziale, senza che siavi bisogno di assegnar loro alcun valore, così si può loro suporne una tale che le quantità C_1+C_2 e $(C_1-C_2)\sqrt{-1}$ sieno reali, e fare per conseguenza

$$C_1+C_2=E_1,\quad (C_1-C_2)\sqrt{-1}=E_2,$$

onde risulterà per l' espressione cercata,

$$e^{\alpha x}\left[E_1\cos\beta x+E_2\,\mathrm{sen}\,\beta x\right],$$

valore interamente reale.

Si può cambiare quest' ultima di forma, ponendovi

$$E_1=p\,\mathrm{sen}\,q,\quad E_2=p\cos q,$$

p e q essendo nuove quantità arbitrarie; ed essa diverrà

$$e^{\alpha x}\left[p\,\mathrm{sen}\,q\cos\beta x+p\cos q\,\mathrm{sen}\,\beta x\right]=pe^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(q+\beta x).$$

Si tratterebbero nello stesso modo gli altri gruppi di termini immaginari, che racchiuder potrebbe l'espressione generale di y.

311. Se alcune delle radici m_1, m_2, ecc. divengono eguali, questa espressione perde della sua generalità; quando per esempio $m_1=m_2$, i due primi termini prendendo la forma

$$C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_1x}=(C_1+C_2)e^{m_1x},$$

si riuniscono in un solo di cui il coefficiente C_1+C_2 non conta più che per una sola costante.

Fra i diversi processi che si sono dati per ovviare a questo inconveniente, quello che ha il d'Alembert proposto

mi sembra il più ingegnoso ed anche il più semplice: ecco in che consiste (*).

In luogo di supporre che le radici m_1 e m_2 sieno eguali, si fa primieramente

$$m_2 = m_1 + h ,$$

lo che dà

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = e^{m_1 x}(C_1 + C_2 e^{hx}) =$$

$$e^{m_1 x}\left[C_1 + C_2 \left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{1 \cdot 2} + \text{ecc.} \right) \right] ,$$

sviluppando l'esponenziale e^{hx}(27); allora se si pone

$$C_1 + C_2 = E_1 , \qquad C_2 h = E_2 ,$$

viene

$$e^{m_1 x}\left(E_1 + E_2 x + E_2 \frac{hx^2}{2} + \text{ecc.} \right) ;$$

ora C_1 e C_2 essendo arbitrarie, E_1 e E_2 lo saranno egualmente, e l'espressione $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$, soddisfacendo all'equazione differenziale proposta, indipendentemente da alcun valore di C_1 e di C_2 (309), lo stesso sarà dello sviluppo superiore e delle costanti E_1 e E_2, e ciò per quanto sia piccola la quantità h. Se dunque si suppone $h = 0$, l'espressione superiore riducesi a

$$e^{m_1 x}(E_1 + E_2 x)$$

e contenendo due costanti arbitrarie irreducibili, soddisferà pure alla proposta; ma questo caso corrisponde precisamente ad $m_1 = m_2$.

Da ciò si passa facilmente al caso in cui $m_1 = m_2 = m_3$; imperocchè, non supponendo da prima che l'equazione $m_1 = m_2$, si avrà

$$y = e^{m_1 x}(E_1 + E_2 x) + C_3 e^{m_3 x} \ldots + C_n e^{m_n x} ,$$

e facendo per conseguenza $m_3 = m_1 + h$, verrà

(*) *Vedete ancora il trattato in 4°, t. III, pag.* 695.

$$e^{m_1 x}(E_1+E_2 x)+C_3 e^{m_3 x}=e^{m_1 x}(E_1+E_2 x+C_3 e^{hx}),$$

che lo sviluppo di e^{hx} cambierà in

$$e^{m_1 x}\left(E_1+C_3+(E_2+C_3 h)x+C_3\frac{h^2x^2}{2}+C_3\frac{h^3x^3}{2.3}+\text{ecc.}\right),$$

e facendo

$$E_1+C_3=F_1,\ E_2+C_3 h=F_2,\ \frac{1}{2}C_3 h^2=F_3,$$

si avrà l'espressione

$$e^{m_1 x}\left(F_1+F_2 x+F_3 x^2+F_3\frac{hx^3}{3}+\text{ecc}\right),$$

soddisfacendo ancora all'equazione differenziale proposta, qualunque sieno le costanti F_1, F_2, F_3, e per quanto sia piccola h: ponendo dunque $h=0$, ne risulterà pel caso ove $m_1=m_2=m_3$, l'espressione

$$e^{m_1 x}(F_1+F_2 x+F_3 x^2),$$

che rimpiazzerà completamente la parte $C_1 e^{m_1 x}+C_2 e^{m_2 x}+C_3 e^{m_3 x}$, e così di seguito, in qualunque numero sieno i valori eguali di m.

312. L'equazione differenziale proposta può di rado integrarsi allorchè i coefficienti sono variabili; il caso seguente

$$\left.\begin{array}{c}(a+bx)^n d^n y+P(a+bx)^{n-1}d^{n-1}y\,dx\\ +Q(a+bx)^{n-2}d^{n-2}y\,dx^2+\ldots+U y\,dx^n\end{array}\right\}=0,$$

in cui P, Q, ... U indicano delle costanti, è uno dei più rimarchevoli. Se si fa $a+bx=t$, da cui segue $dx=\frac{dt}{b}$, l'equazione superiore si cambia in

$$t^n d^n y+\frac{P}{b}t^{n-1}d^{n-1}y\,dt+\frac{Q}{b^2}t^{n-2}d^{n-2}y\,dt^2.\ldots.+\frac{U}{b^n}y\,dt^n=0.$$

alla quale si soddisfa ponendo $y=t^m$, essendo m un esponente indeterminato; poichè dt essendo costante, come pure dx, la sostituzione di y e de' suoi differenziali rende l'equazione superiore divisibile per $t^m dt^n$, e si ha solamente

$$\left.\begin{array}{l} m(m-1)\ldots(m-n+1)+\dfrac{P}{b}m(m-1)\ldots(m-n+2) \\ +\dfrac{Q}{b^2}m(m-1)\ldots(m-n+3)\ldots+\dfrac{U}{b^n} \end{array}\right\}=0,$$

che determina m per mezzo delle costanti n, b, P, Q... U.

313. È facile di applicare quello che precede all'equazione del second' ordine

$$d^2y+Pdydx+Uydx^2=0,$$

e di ricavarne i risultati seguenti, che è utile di conoscere.

1°. Se y_1 e y_2 sono due valori che soddisfacciano a questa equazione il suo integrale completo è

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \quad (309).$$

2°. Quando P ed U sono costanti, si ha

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x},$$

m_1 e m_2 essendo le radici dell'equazione

$$m^2+Pm+U=0.$$

3°. Se queste radici sono immaginarie, risulta

$$y=pe^{\alpha x}\operatorname{sen}(q+\beta x) \quad (310).$$

4°. Se sono eguali

$$y=e^{m_1x}(E_1+E_2x) \quad (311).$$

5°. Finalmente l' equazione

$$(a+bx)^2d^2y+(a+bx)Pdydx+Uydx^2=0,$$

si cambia in

$$t^2d^2y+\frac{P}{b}tdydt+\frac{U}{b^2}ydt^2=0,$$

allorchè si fa $a+bx=t$, e dipende da

$$m(m-1)+\frac{P}{b}m+\frac{U}{b^2}=0 \quad (312),$$

lo che riconduce a

$$m^2+\left(\frac{P}{b}-1\right)m+\frac{U}{b^2}=0\ ;$$

così il suo integrale è

$$y=C_1t^{m_1}+C_2t^{m_2}=C_1(a+bx)^{m_1}+C_2(a+bx)^{m_2},$$

m_1 e m_2 essendo i due valori di m.

314. L' equazione

$$d^ny+Pd^{n-1}ydx+Qd^{n-2}ydx^2\ldots+Uydx^n=0\ (1),$$

non è che un caso particolare dell'equazione differenziale dell' ordine n e del primo grado; poichè questa per essere generale contener debbe un termine indipendente da y, ed avere per conseguenza la forma

$$d^ny+Pd^{n-1}ydx+Qd^{n-2}ydx^2\ldots+Uydx^n=Vdx^n\ (2)\ ;$$

ma l' integrazione di quest' ultima si riconduce facilmente a quella della prima, siccome si è già veduto pel primo ordine nel n° 285; e in un ordine qualunque *basta conoscere un numero* n *di valori di* y, *che soddisfacciano all' equazione* (1), *onde pervenire all' integrale completo dell' equazione* (2).

Lagrangia, che ha scoperto questo importante teorema lo ha provato portando all'equazione (2), mediante la variazione delle quantità C_1, $C_2\ldots C_n$, l'espressione generale di y relativa all'equazione (1).

Per fissare le idee, prendo l'equazione proposta del terzo ordine solamente; viene $y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$, espressione nella quale conviene determinare C_1, C_2 e C_3, in modo che soddisfaccia a

$$d^3y+Pd^2ydx+Qdydx^2+Uydx^3=Vdx^3.$$

Se si formano successivamente i valori di dy, d^2y, e d^3y, trattando C_1, C_2, C_3 come variabili, si troverà primieramente

$$dy=C_1dy_1+C_2dy_2+C_3dy_3+y_1dC_1+y_2dC_2+y_3dC_3\ ;$$

ma siccome si hanno tre quantità da determinare, e che la proposta equazione non offre che una condizione, così se ne possono scegliere altre due a volontà, e fare quindi

$$y_1 dC_1 + y_2 dC_2 + y_3 dC_3 = 0,$$

lo che darà

$$dy = C_1 dy_1 + C_2 dy_2 + C_3 dy_3,$$

come se le quantità C_1, C_2 e C_3, non avessero variato Differenziando questo valore verrà

$$d^2y = C_1 d^2y_1 + C_2 d^2y_2 + C_3 d^2y_3 + dy_1 dC_1 + dy_2 dC_2 + dy_3 dC_3;$$

ponendo ancora

$$dy_1 dC_1 + dy_2 dC_2 + dy_3 dC_3 = 0,$$

rimarrà

$$d^2y = C_1 d^2y_1 + C_2 d^2y_2 + C_3 d^2y_3,$$

da cui si ricaverà

$$d^3y = C_1 d^3y_1 + C_2 d^3y_2 + C_3 d^3y_3 + d^2y_1 dC_1 + d^2y_2 dC_2 + d^2y_3 dC_3.$$

Per la sostituzione dei valori di y, dy, d^2y e d^3y, l'equazione proposta diverrà

$$\left.\begin{array}{l} C_1(d^3y_1 + Pd^2y_1 dx + Qdy_1 dx^2 + Uy_1 dx^3) \\ + C_2(d^3y_2 + Pd^2y_2 dx + Qdy_2 dx^2 + Uy_2 dx^3) \\ + C_3(d^3y_3 + Pd^2y_3 dx + Qdy_3 dx^2 + Uy_3 dx^3) \\ + d^2y_1 dC_1 + d^2y_2 dC_2 + d^2y_3 dC_3 \end{array}\right\} = V dx^3,$$

locchè riducesi a

$$d^2y_1 dC_1 + d^2y_2 dC_2 + d^2y_3 dC_3 = V dx^3,$$

quando le funzioni y_1, y_2, y_3 soddisfanno all'equazione

$$d^3y + Pd^2y dx + Qdy dx^2 + Uy dx^3 = 0:$$

esisteranno dunque fra i differenziali dC_1, dC_2 e dC_3, le tre equazioni

$$\begin{aligned} y_1 dC_1 + y_2 dC_2 + y_3 dC_3 &= 0, \\ dy_1 dC_1 + dy_2 dC_2 + dy_3 dC_3 &= 0, \\ d^2y_1 dC_1 + d^2y_2 dC_2 + d^2y_3 dC_3 &= V dx^3, \end{aligned}$$

donde si ricaveranno i valori di ciascuno di questi differenziali espressi per x e dx, allorchè le funzioni y_1, y_2, y_3 saranno cognite. I risultati avendo la forma

$$dC_1=X_1dx,\ dC_2=X_2dx,\ dC_3=X_3dx,$$

se ne dedurrà

$$C_1=\int X_1dx+c_1,\ C_2=\int X_2dx+c_2,\ C_3=\int X_3dx+c_3,$$

e per conseguenza

$$y=y_1(\int X_1dx+c_1)+y_2(\int X_2dx+c_2)+y_3(\int X_3dx+c_3),$$

sarà l'integrale completo della proposta equazione.

Se non si conoscessero che due valori particolari di y, la proposta non potrebbe integrarsi che col soccorso di un'equazione di second'ordine, riducibile al primo. Infatti si avrebbe allora

$$y=C_1y_1+C_2y_2,\quad dy=C_1dy_1+C_2dy_2,$$

facendo

$$y_1dC_1+y_2dC_2=0;$$

ma poichè non potrebbesi disporre che d'una sola delle quantità C_1 e C_2 converrebbe impiegare lo sviluppo completo di d^2y, che sarebbe

$$d^2y=C_1d^2y_1+C_2d^2y_2+dy_1dC_1+dy_2dC_2,$$

e che darebbe

$$d^2y=C_1d^2y_1+C_2d^2y_2+2d^2y_1dC_1+2d^2y_2dC_2 \\ +dy_1d^2C_1+dy_2d^2C_2.$$

Sostituendo nella proposta e riducendo nello stesso modo che si è fatto superiormente si otterrebbe

$$\left.\begin{array}{r} dy_1d^2C_1+dy_2d^2C_2+2d^2y_1dC_1+2d^2y_2dC_2 \\ +Pdy_1dC_1dx+Pdy_2dC_2dx \end{array}\right\}=Vdx^2,$$

equazione dalla quale si eliminerà dC_2 e d^2C_2, ricavando i loro valori dall'equazione $y_1dC_1+y_2dC_2=0$, e dal suo differenziale; la risultante non contenendo che d^2C_1, dC_1 e delle funzioni di x, si ricondurrà al prim'ordine (306).

Finalmente, allorchè non si avrà che un sol valore di y, si cadrà su un'equazione ausiliaria del terz'ordine, riducibile al secondo; e di ciò è facile convincersi, ponendo nella proposta

$$C_1y_1,\ C_1dy_1+y_1dC_1,\ C_1d^2y_1+2dy_1dC_1+y_1d^2C_1,$$
$$C_1d^3y_1+3d^2y_1dC_1+3dy_1d^2C_1+y_1d^3C_1,$$

in luogo di

$$y,\ dy,\ d^2y \text{ e } d^3y:$$

l'equazione formata con queste sostituzioni sarà ridotta a

$$\left.\begin{array}{l} y_1d^3C_1+3dy_1d^2C_1 \quad +3d^2y_1dC_1 \\ \quad +Py_1d^2C_1dx \ +2Pdy_1dC_1dx \\ \qquad\qquad +Qy_1dC_1dx^2 \end{array}\right\} =Vdx^3.$$

Se nei precedenti calcoli si suppone $V=0$, mostreranno come con due, o solamente un valore particolare della funzione y, pervenire si può alla sua espressione generale, nell'equazione

$$d^3y+Pd^2ydx+Qdydx^2+Uydx^3=0;$$

e da ciò risulta per tutte le equazioni differenziali di primo grado il teorema seguente:

Se si hanno n *valori di* y, *per l'equazione* (1), *se ne dedurrà immediatamente l'espressione generale di questa funzione; per le equazioni* (1) *e* (2); *e nel caso in cui non si conoscesse che* n—1 *valori particolari, si perverrebbe pure alla stessa espressione, integrando un'equazione del primo grado e del prim'ordine.*

315. Prenderò per esempio l'equazione del secondo ordine

$$d^2y+Pdydx+Uydx^2=Vdx^2.$$

Indicando primieramente con y_1, y_2, i valori particolari di y, i quali soddisfanno all'equazione

$$d^2y+Pdydx+Uydx^2=0,$$

l'integrale completo della proposta sarà

$$y=C_1y_1+C_2y_2,$$

C_1 e C_2 essendo determinati dall' equazioni

$$y_1 dC_1 + y_2 dC_2 = 0,$$
$$dy_1 dC_1 + dy_2 dC_2 = V dx^2 \text{ (n° precedente).}$$

Ora se si suppone che i coefficienti P ed U sieno costanti, V rimanendo una funzione qualunque di x, si avrà

$$y_1 = e^{m_1 x},\ y_2 = e^{m_2 x} \quad (313),$$

e per conseguenza

$$e^{m_1 x} dC_1 + e^{m_2 x} dC_2 = 0,$$
$$e^{m_1 x} m_1 dC_1 + e^{m_2 x} m_2 dC_2 = V dx,$$

da cui si dedurrà

$$dC_1 = \frac{V e^{-m_1 x} dx}{m_1 - m_2},\quad dC_2 = \frac{V e^{-m_2 x} dx}{m_2 - m_1},$$

poi

$$C_1 = E_1 + \frac{\int V e^{-m_1 x} dx}{m_1 - m_2},\quad C_2 = E_2 + \frac{\int V e^{-m_2 x} dx}{m_2 - m_1},$$

e finalmente

$$y = \frac{e^{m_1 x}(E_1 + \int V e^{-m_1 x} dx) - e^{m_2 x}(E_2 + \int V e^{-m_2 x} dx)}{m_1 - m_2},$$

daudo alle costanti arbitrarie E_1, E_2, il divisore comune $m_1 - m_2$, lo che conduce a

$$y = \frac{e^{m_1 x} \int V e^{-m_1 x} dx - e^{m_2 x} \int V e^{-m_2 x} dx}{m_1 - m_2},$$

supponendo che ciascun integrale comprenda implicitamente la sua costante arbitraria.

316. Questa formola è sottomessa alle circostanze che nascono dalla natura dei valori di m_1 e m_2 (310, 311).

Si potrebbe ristringerne l'impiego al caso in cui le quantità m_1, m_2 sono reali e disuguali, e formare immediatamente dell' espressioni di y per ciascuno degli altri due, impiegando i valori di y_1 e y_2 particolari a questo caso,

Per esempio, allorchè m_1 e m_2 sono immaginari, si ricaverà dal valore completo

$$y=e^{\alpha x}(E_1 \cos \beta x + E_2 \operatorname{sen} \beta x),$$

trovata nel n° 310, i valori particolari

$$y_1=e^{\alpha x}\cos \beta x,\ y_2=e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x,$$

coi quali sarebbe facile di ottenere l'integrale completo della proposta equazione, ma è forse più semplice l'operare immediatamente, su la formola del n° precedente; la trasformazione propria a farne sparire le immaginarie, cioè di cambiarvi

$$m_1 \text{ in } \alpha+\beta\sqrt{-1},\quad m^2 \text{ in } \alpha-\beta\sqrt{-1},$$

e di rimpiazzare poscia le esponenziali immaginarie colle loro espressioni in seni e coseni. Con tali sostituzioni si ha da prima

$$y=\frac{1}{2\beta\sqrt{-1}}\left[e^{\gamma x+\beta x\sqrt{-1}}\int V e^{-\gamma x-\beta x\sqrt{-1}}dx\right.$$
$$\left.-e^{\gamma x-\beta x\sqrt{-1}}\int V e^{-\alpha x+\beta x\sqrt{-1}}dx\right]=$$

$$\frac{e^{\gamma x}}{2\beta\sqrt{-1}}\left[(\cos\beta x+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\beta x)\int V e^{-\alpha x}(\cos\beta x-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\beta x)dx\right.$$
$$\left.-(\cos\beta x-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\beta x)\int V e^{-\alpha x}(\cos\beta x+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\beta x)dx\right];$$

poi effettuando le moltiplicazioni indicate, separando gli integrali in monomi, e riducendo il fattore $2\sqrt{-1}$ diventa comune ai due termini della frazione, e si perviene alla espressione reale

$$y=\frac{e^{\alpha x}}{\beta}\left[\operatorname{sen}\beta x\int V e^{-\gamma x}dx\cos\beta x\right.$$
$$\left.-\cos\beta x\int V e^{-\alpha x}dx\operatorname{sen}\beta x\right].$$

Se V fosse nullo, bisognerebbe porre una costante arbitraria in luogo di ciascuu integrale, e si avrebbe solamente

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\,(\mathrm{E}_1 \operatorname{sen}\beta x - \mathrm{E}_2 \cos\beta x),$$

la quale è della stessa forma di quella del n° 310.

S' incontra frequentemente nelle applicazioni dell' analisi alla fisica celeste l' equazione

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a^2 y = \mathrm{V},$$

per la quale

$$m = \pm a\sqrt{-1} \quad (313),$$

onde

$$\alpha = 0, \quad \beta = a,$$

e

$$y = p \operatorname{sen} ax + q \cos ax + \frac{\operatorname{sen} ax \int \mathrm{V}\mathrm{d}x \cos ax - \cos ax \int \mathrm{V}\mathrm{d}x \operatorname{sen} ax}{a},$$

restituendo le costanti arbitrarie. La funzione V ha ordinariamente la forma

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos\beta x + \mathrm{C}\cos\gamma x + \text{ecc.},$$

A, B, C, ecc. β, γ, ecc. indicando dei coefficienti costanti, e le integrazioni indicate si effettuano col processo del n° 218.

317. L' eguaglianza delle radici m_1 e m_2, riducendo a $\frac{0}{0}$ l' espressione

$$y = \frac{e^{m_1 x}\int \mathrm{V} e^{-m_1 x}\mathrm{d}x - e^{m_2 x}\int \mathrm{V} e^{-m_2 x}\mathrm{d}x}{m_1 - m_2},$$

basta per ottenere il valor vero di differenziare per rapporto ad m_1 il suo numeratore ed il suo denominatore, osservando per gl' integrali la regola del n° 281, e viene

$$y = e^{m_1 x}\left(x\int \mathrm{V} e^{-m_1 x}\mathrm{d}x - \int \mathrm{V} e^{-m_1 x} x\mathrm{d}x\right).$$

Quest' ultima espressione comprende quella del n° 311; imperocchè quando $\mathrm{V} = 0$, gl' integrali si riducono alla loro costante arbitraria, viene solamente

$$y=e^{m+1x}(E_1x-E_2).$$

318. Se si ha un numero m d' equazioni differenziali, le quali racchiudano un numero $m+1$ di variabili, una sola di queste variabili sarà indipendente, e le m altre saranno funzioni di quella. Supponiamo primieramente che queste funzioni, ed i loro coefficienti differenziali non si elevino al di là della prima potenza, nelle proposte equazioni, le quali sono allora del primo grado: il metodo indicato al n° 133, condurrebbe in questo caso, ad una equazione differenziale del primo grado, fra l'una delle funzioni da determinare e la variabile che si riguarda come indipendente; ma si può qualche volta evitare i calcoli dell'eliminazione, integrando unitamente le proposte equazioni.

Allorchè esse non sono che del prim' ordine e che non racchiudono che tre variabili, queste equazioni possono essere rappresentate da

$$\begin{aligned} M\,du+N\,dx+(P\,u+Q\,x)dt&=R\,dt,\\ M'du+N'dx+(P'u+Q'x)dt&=R'dt; \end{aligned}$$

ma se si toglie da queste alternativamente du e dx, e che si liberi dal suo coefficiente quello di questi differenziali che si conserva, le equazioni risultanti prenderanno la forma

$$\begin{aligned} du+(P\,u+Q\,x)dt&=T\,dt,\\ dx+(P'u+Q'x)dt&=T'dt, \end{aligned}$$

P, Q, T, P', ecc., rappresentando nuove funzioni di t, derivate dalle prime in seguito delle operazioni indicate. Ed è sotto quest'ultima forma che il d'Alembert ha trattato le equazioni differenziali simultanee, con un metodo ingegnosissimo, che esporrò come lo ha presentato il signor Ampère.

Moltiplicando la seconda equazione per un fattore θ, ed aggiugnendo il prodotto alla prima, viene

$$du+\theta dx+\left[(P+P'\theta)u+(Q+Q'\theta)x\right]dt=(T+T'\theta)dt;$$

facendo poscia $u+\theta x=z$, si avrà

$$du+\theta dx=dz-x\,d\theta,\quad u=z-\theta x,$$

e mediante questi valori, la qui sopra trasformata diventerà

$$\left.\begin{matrix} dz+(P+P'\theta)z\,dt \\ -x\{d\theta+[(P+P'\theta)\theta-(Q+Q'\theta)]dt\} \end{matrix}\right\}=(T+T'\theta)dt\,;$$

finalmente eguagliando a zero il moltiplicatore di x, si dividerà l'equazione superiore in due altre,

$$dz+(P+P'\theta)z\,dt=(T+T'\theta)\,dt \qquad (a),$$
$$d\theta+[(P+P'\theta)\,\theta-(Q+Q'\theta)]dt=0 \quad (b),$$

di cui l'ultima più non racchiude che le due variabili θ e t. Allorchè si potrà trovare un valore di θ che soddisfaccia a questa, si ridurrà per mezzo suo la prima a non contenere che le due variabili z e t; ed in oltre non essendo che del primo grado, s' integrerà completamente con la formola del n° 285.

Quando i coefficienti P, P', Q e Q' sono costanti, si può fare

$$d\theta=0, \quad (P+P'\theta)\theta-(Q+Q'\theta)=0;$$

θ è allora determinata da un' equazione del secondo grado, di cui indicherò le radici con θ_1 e θ_2.

Nella stessa ipotesi l'equazione (a) faceudovi, per abbreviare,

$$P+P'\theta=m, \quad T+T'\theta=V,$$

ha per integrale l'equazione

$$z=e^{-mt}(\int e^{mt}V\,dt+C),$$

donde si ricavano le due seguenti,

$$u+\theta_1 x=e^{-m_1 t}(\int e^{m_1 t}V_1\,dt+C_1),$$
$$u+\theta_2 x=e^{-m_2 t}(\int e^{m_2 t}V_2\,dt+C_2),$$

allorchè vi si pone successivamente i due valori di θ: il problema è dunque completamente risoluto, poichè si hanno fra le variabili u, x e t, due equazioni primitive, racchiudendo ciascuna una costante arbitraria.

319. Passiamo al sistema d'equazioni a quattro variabili, al quale si può sempre dare la forma

$$du+(Pu+Qx+Ry)dt=T\,dt,$$
$$dx+(P'u+Q'x+R'y)dt=T'dt,$$
$$dy+(P''u+Q''x+R''y)dt=T''dt.$$

Se si moltiplica la seconda per θ, la terza per θ', e si aggiungono i prodotti alla prima, e che si faccia

$$u+\theta x+\theta' y=z,$$

onde segue

$$du+\theta dx+\theta' dy=dz-x\,d\theta-y\,d\theta',$$
$$u=z-\theta x-\theta' y,$$

e che dopo la sostituzione di questi valori si raccolgano per eguagliarli a zero, i termini affetti della x e della y per cui l'equazione superiore si dividerà nelle tre seguenti,

$$dz+(P+P'\theta+P''\theta')z.dt=(T+T'\theta+T''\theta')dt \qquad (a),$$
$$d\theta+\left[(P+P'\theta+P''\theta')\theta-(Q+Q'\theta+Q''\theta')\right]dt=0\ (b),$$
$$d\theta'+\left[(P+P'\theta+P''\theta')\theta'-(R+R'\theta+R''\theta')\right]dt=0\ (b');$$

e allorchè si potranno trovare i valori di θ e di θ', che soddisfanno all' equazioni (b) e (b'), l'equazione (a) ridotta alle variabili z e t, s' integrerà pure come nel numero precedente.

Limitandosi al caso in cui i coefficienti delle funzioni u, x ed y sono costanti, si può supporre $d\theta=0$, $d'\theta=0$ per cui risulterà

$$(P+P'\theta+P''\theta')\theta-(Q+Q'\theta+Q''\theta')=0,$$
$$(P+P'\theta+P''\theta')\theta'-(R+R'\theta+R''\theta')=0;$$

e se si fa $P+P'\theta+P''\theta'=m$, le superiori equazioni diventano

$$(m-Q')\theta-Q''\theta'=Q,$$
$$(m-R'')\theta'-R'\theta=R,$$

daranno per θ e θ', dei valori i quali sostituiti nell'espressione di m, condurranno ad un'equazione finale, ove questa incognita giugnerà al terzo grado. Ciascuno di questi valori somministrandone uno per i fattori θ, θ', se si distinguono questi con degli indici inferiori, e che si faccia $T+T'\theta+T''\theta'=V$, si avranno i tre sistemi di quantità

θ_1, θ'_1, m_1, V_1, θ_2, θ'_2, m_2, V_2, θ_3, θ'_3, m_3, V_3.

di cui la sostituzione in $z=e^{-mt}\left[\int e^{mt} V\,dt+C\right]$, integrale dell' equazione (a), darà le tre equazioni primitive

$$u+\theta_1 x+\theta'_1 y=e^{-m_1 t}\left(\int e^{m_1 t} V_1\,dt+C_1\right),$$
$$u+\theta_2 x+\theta'_2 y=e^{-m_2 t}\left(\int e^{m_2 t} V_2\,dt+C_2\right),$$
$$u+\theta_3 x+\theta'_3 y=e^{-m_3 t}\left(\int e^{m_3 t} V_3\,dt+C_3\right).$$

Si può ora ottenere questo processo per qualunque numero si avranno di equazioni. Per completarne l'esposizione, converrebbe esaminare i casi ove i valori di θ, θ' diventano immaginari o pure fra loro uguali; ma siffatti dettagli, che molto luogo occuperebbero, sono facili a supplire, con ciò che si è veduto nei numeri 310, 311.

320. D' Alembert applica pure il suo processo all'equazioni di primo grado d'un ordine qualunque, e con questo le riconduce al prim' ordine, nel modo seguente.

Avendo per esempio due equazioni della forma

$$d^2u+(A\,du+B\,dx)dt+(C\,u+D\,x)dt^2=T\,dt^2,$$
$$d^2x+(A'du+B'dx)dt+(C'u+D'x)dt^2=T'dt^2,$$

fa $du=p\,dt$, $dx=q\,dt$; ed ha per conseguenza fra le cinque variabili p, q, t, u ed x, le quattro equazioni del primo ordine

$$dp+(A\,p+B\,q+C\,u+D\,x)dt=T\,dt,$$
$$dq+(A'p+B'q+C'u+D'x)dt=T'dt,$$
$$du-p\,dt=0,$$
$$dx-q\,dt=0,$$

che trattar si possono col metodo del numero precedente.

Si è servito dello stesso artificio per l' equazioni che non contengono che due variabili; ma il processo del numero 314 è più semplice e più elegante.

321. Consideriamo ora l' equazioni di prim' ordine

$$dy-\alpha dx=0, \qquad dz-\beta dx=0,$$

nelle quali α e β sono funzioni qualunque delle tre variabili x, y, z: ecco come si può applicare il processo del n° 133.

Si differenzia la prima, e risulta

$$d^2y - \frac{d\alpha}{dx}dx^2 - \frac{d\alpha}{dy}dxdy - \frac{d\alpha}{dz}dxdz = o\,;$$

ponendo per dz il suo valore βdx, si ottiene

$$d^2y - \left(\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\alpha}{dz}\right)dx^2 - \frac{d\alpha}{dy}dxdy = o;$$

eliminando poscia z, col mezzo dell'equazione

$$dy - \alpha dx = o,$$

si perviene ad una risultante in x e y del second' ordine, e che ha necessariamente un integrale primitivo con due costanti arbitrarie a e b (298).

Sieno

$$\psi(x, y, a, b) = o \text{ e } dy = mdx$$

quest'integrale ed il valore di dy che se ne ricaverà; sostituendo questo in $dy - \alpha dx = o$, si avrà una seconda equazione primitiva $m - \alpha = o$, fra x, y e z, di modo che le equazioni differenziali proposte saranno verificate nel sistema dell'equazioni primitive

$$\psi(x, y, a, b) = o\,, \quad m - \alpha = o,$$

e in tutte quelle che saranno equivalenti a queste ultime.

Posto ciò, si vede tosto che esistono sempre per lo meno due sistemi di fattori, mediante i quali si deducono dalle equazioni proposte, due differenziali esattì. In fatti, se dalle equazioni primitive superiormente indicate, si eliminano alternativamente le costanti a e b, e che i risultati sieno posti sotto la forma

$$M = a\,, \quad N = b\,,$$

i loro differenziali

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz = o\,,$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz} = o,$$

dovendo essere verificati dai valori

$$dy = \alpha dx, \qquad dz = \beta dx,$$

ricavati dalle proposte, ne segue che

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy}\alpha + \frac{dM}{dz}\beta = 0,$$

$$\frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dy}\alpha + \frac{dN}{dz}\beta = 0$$

sono quantità identicamente nulle; si ha dunque

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{dM}{dy}\alpha - \frac{dM}{dz}\beta,$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{dN}{dy}\alpha - \frac{dN}{dz}\beta,$$

e ponendo questi valori nei differenziali di M e N, locchè non li cambia punto, si ottengono i differenziali esatti

$$\frac{dM}{dy}(dy - \alpha dx) + \frac{dM}{dz}(dz - \beta dx) = 0,$$

$$\frac{dN}{dy}(dy - \alpha dx) + \frac{dN}{dz}(dz - \beta dx) = 0,$$

comprendendo i prodotti dell'equazioni proposte moltiplicate rispettivamente pei fattori

$$\frac{dM}{dy} \text{ e } \frac{dM}{dz}, \quad \frac{dN}{dy} \text{ e } \frac{dN}{dz}.$$

Si concepisce facilmente che vi sono dei teoremi analoghi, per le equazioni nelle quali il numero delle variabili è maggiore di tre.

Delle soluzioni particolari dell' equazioni differenziali del prim' ordine.

322. Nel n° 297 si è presentato per un' equazione differenziale una *soluzione particolare*, che non derivava dall' integrale completo, e si può qualche volta cadere su dell' equazioni primitive, senza costanti arbitrarie, e verificare un' equazione differenziale di cui non si conosce l' integrale completo: queste due circostanze fanno nascere le seguenti quistioni: *donde vengono le soluzioni particolari? e come distinguere se un' equazione primitiva che soddisfa ad un' equazione differenziale proposta, derivi o nò dal suo integrale?* questo è ciò di cui ora mi occuperò.

La relazione che esiste fra un' equazione differenziale ed il suo integrale, è tale che quest' ultima equivale ad un numero infinito d' equazioni primitive che si otterrebbe, dando successivamente alla costante arbitraria tutti i possibili valori, e di cui ciascuna soddisferebbe all' equazione differenziale (53). S' indicano queste diverse equazioni primitive sotto il nome *d' integrali particolari*, poichè sono casi particolari dell' integrale completo. Le *soluzioni particolari*, di cui il numero è sempre limitato, sono equazioni primitive essenzialmente diverse dagli integrali particolari. Queste soluzioni sono di due sorta: le une altra cosa non sono che fattori dell' equazione differenziale proposta, nei quali dx e dy non entrano punto, e per conseguenza, essendo eguali a zero danno dell' equazioni primitive, stabilendo fra x ed y delle relazioni che rendono identica la proposta. Cercando i divisori comuni delle funzioni M ed N, si troveranno le soluzioni di questa specie, di cui è suscettibile l' equazione

$$Mdx+Ndy=0.$$

La seconda specie di soluzioni particolari, di cui l'equazione $ydx-xdy=n\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (297) ha somministrato un esempio, è intimamente legata all' equazione differenziale da cui deriva, quantunque non possa esser compresa in alcuno dei casi dell' integrale completo, per qualunque valore che si dia alla costante arbitraria, siccome

è facile di vederlo, paragonando le equazioni $y=cx+n\sqrt{(1+c^2)}$ e $x^2+y^2=n^2$.

Eccò la teorica che Lagrangia nel 1774 diede di queste ultime soluzioni, riguardate prima di lui come formanti un paradosso nel Calcolo integrale (*).

323 Le soluzioni particolari senza essere comprese implicitamente nell' integrale completo, póssono tuttavia essere dedotte, cessando di riguardare la costante arbitraria come invariabile. Infatti, sia U=o un' equazione primitiva che racchiude le variabili x, y ed una costante c; la corrispondente equazione differenziale, che indicherò con V=o, sarà il risultato dell'eliminazione di questa costante, fra le equazioni $U=o, \frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=o$ (53); ma se si suppone che c sia una qualunque funzione di x, si darà all' equazione U=o un' estensione tale, ch'essa rappresentare potrà un' equazione qualunque a due variabili, e per conseguenza ancora tutte le soluzioni particolari dell' equazione V=o. Ciò posto, il valore che l' equazione U=o dà per y e il suo differenziale che rappresenterò con $dy=pdx$, verificando indipendentemente da c, l' equazione V=o, si potrebbe supporre c variabile, purchè la legge della sua variazione fosse tale che si avesse sempre $dy=pdx$. Ora riguardando come variabile tanto c che la x, risulta generalmente $dy=pdx+qdc$, essendo p e q funzioni di x e di c, si avrà nondimeno $dy=pdx$ solamente se $q=o$; determinando dunque c da quest' ultima equazione, e sostituendo in U=o, il valore che si troverà, il risultato soddisferà ancora all' equazione differenziale V=o.

(*) *Le chiamò* integrali particolari, *e diede il nome di soluzioni particolari ai diversi casi dell' integrale completo. Il Laplace che si è occupato con successo dello stesso argomento, prima di Lagrangia, impiega queste denominazioni in un senso inverso, ed io l' ho seguito. Mi è parso che l' equazioni primitive che risolvono l' equazioni differenziali, senza essere comprese nel loro integrale completo, non potendosi ottenere coi processi dell'integrazione, non debbano portare un nome che richiami tali processi.*

Da quello che precede, y è stato riguardato come una funzione di x e di c; considerando a suo tempo x come una funzione di y e di c, si avrà $dx=mdy$, e ragionando nello stesso modo che si è fatto superiormente, si troverà che se il valore di dx preso facendo variar c, è $dx=mdy+ndc$, l'equazione risultante dall'eliminazione di c, fra $n=0$ e $U=0$ soddisferà pure l'equazione differenziale $V=0$.

Si possono comprendere questi due processi in un solo, facendo sparire i denominatori nell'equazione $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dc}dc=0$, differenziale di $U=0$, preso supponendo c variabile con x ed y; perlocchè prenderà la forma

$$Mdx+Ndy+Pdc=0;$$

dalla quale si ricaverà

$$dy=-\frac{M}{N}dx-\frac{P}{N}dc,\quad dx=-\frac{N}{M}dy-\frac{P}{M}dc;$$

e se le funzioni intere M, N sono algebriche, oppure trascendenti, non possono diventar infinite per qualunque valore di c, mentre il coefficiente di dc non iscomparirà che per la supposizione di $P=0$, che darà così tutto ciò che si può ricavare dalle operazioni superiormente indicate.

Le equazioni alle quali questi processi conducono, non sono necessariamente soluzioni particolari dell'equazione $V=0$; ma per non errare su ciò, conviene esaminare le diverse circostanze che offrir può l'equazione $P=0$.

È a bella prima evidente che se questa equazione dà a c un valore costante, essa non condurrà che ad un integrale particolare; e se invece questo valore è variabile, non se ne dovrà tosto conchiudere che il risultato dell'eliminazione di c fra $P=0$ e $U=0$, sia necessariamente una soluzione particolare; imperocchè potrà ancora avvenire che l'equazione risultante non sia che un caso particolare di $U=0$. Per riconoscerlo conviene eliminare una delle variabili fra questa nuova equazione ed $U=0$. Se si può fare sparire l'altra variabile, determinando c con delle costanti solamente, si ottiene in questo caso un integrale

particolare; e se si trovasse $c=\frac{0}{0}$, bisognerebbe conchiuderne che l'equazione P=o è un fattore di U=o, indipendente dalla costante c, e per conseguenza straniero all'equazione differenziale V=o.

Quando c non è che al primo grado in U, non entra punto in P, il quale non contiene allora che le variabili x e y; l'equazione P=o soddisfa ella stessa a V=o, poichè U=o, essendo della forma Q+c P=o, V=o riducesi a PdQ—QdP=o; ma è facile vedere che P=o non è che un integrale particolare corrispondente a c= infinito.

324. Applicherò primieramente questa teorica all'equazione $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=n\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)}$, avendo per integrale completo $y-cx=n\sqrt{(1+c^2)}$ (297). Facendo variare c, nello stesso tempo che variano x ed y, e riducendo tutti i termini allo stesso denominatore, si ha

$$c\mathrm{d}x\sqrt{(1+c^2)}-\mathrm{d}y\sqrt{(1+c^2)}+\left[x\sqrt{(1+c^2)}+nc\right]\mathrm{d}c=0;$$

eguagliando a zero il coefficiente di $\mathrm{d}c$, viene

$$x\sqrt{(1+c^2)}+nc=0,$$

da cui si ricava $c=\frac{x}{\sqrt{(n^2-x^2)}}$, valore che cambia l'equazione $y-cx=n\sqrt{(1+c^2)}$ in $x^2+y^2=n^2$, e dà la soluzione particolare ottenuta nel n° citato.

Tutte l'equazioni della forma $y=px+\mathrm{P}$ (297), nella quale si trova compresa la precedente, hanno pure una soluzione particolare analoga. Il loro integrale completo, rappresentato da $y=cx+\mathrm{C}$, essendo C composta di c, siccome P lo è di p, dà

$$c\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+\left(x+\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}}{\mathrm{d}c}\right)\mathrm{d}c=0;$$

e ponendo $x+\frac{\mathrm{d}\mathrm{C}}{\mathrm{d}c}=0$, se ne ricava il valore di c, dal quale dipende la soluzione particolare. Questa soluzione particolare si è mostrata allorchè si è integrata l'equazione $y=px+\mathrm{P}$; poichè differenziandola si è pervenuto ad un'equazione composta dei due fattori

$$x+\frac{dP}{dp}=0, \quad dp=0,$$

e il risultato dell' eliminazione di p fra

$$y=px+P \quad \text{e} \quad x+\frac{dP}{dp}=0,$$

è lo stesso che quello dell' eliminazione di c, fra

$$y=cx+C, \quad \text{e} \quad x+\frac{dC}{dc}=0.$$

Le equazioni $y=px+P$ sono state da prima osservate da Clairaut, tanto per la proprietà ch' esse hanno d' integrarsi facilmente dopo una nuova differenziazione, quanto per rapporto alla soluzione particolare che questa differenziazione all' istante manifesta.

Sia ancora l' equazione

$$xdx+ydy=dy\sqrt{(x^2+y^2-a^2)},$$

di cui l' integrale è

$$\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}=y+c, \text{ o } x^2-2cy-c^2-a^2=0,$$

facendo sparire il radicale. Si trova

$$xdx-cdy-(y+c)dc=0,$$

donde segue

$$y+c=0,$$

e per conseguenza

$$\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}=0, \text{ ovvero } x^2+y^2-a^2=0,$$

equazione che non può risultare dalla proposta, per niun valore costante di c, dunque la detta equazione è una soluzione particolare.

Sia finalmente l' equazione primitiva

$$(x^2+y^2-a^2)(y^2-2cy)+(x^2-a^2)c^2=0.$$

Trattandola come la precedente, si trova

$$c=\frac{(x^2+y^2-a^2)y}{x^2-a^2},$$

valore il quale quantunque variabile non conduce ad una soluzione particolare; poichè se si sostuisce nella proposta equazione, questa diventando

$$\frac{y^4(x^2+y^2-a^2)}{x^2-a^2}=0,$$

dà

$$y=0, \text{ oppure } x^2+y^2-a^2=0,$$

equazione che si ricava immediatamente dalla proposta, facendovi $c=0$: queste non sono dunque soluzioni, ma integrali particolari dell'equazione differenziale, prodotta dall'eliminazione della costante arbitraria c.

325. Una proprietà delle soluzioni particolari che facilmente si presenta su il secondo esempio, e che è generale, è questa che *l'equazione differenziale può essere preparata in modo che la soluzione particolare ne divenga un fattore.* In fatti, se si pone

$$\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}=u,$$

si avrà

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=u\mathrm{d}u,$$

e l'equazione proposta diverrà

$$u\mathrm{d}u-u\mathrm{d}y=0.$$

Se si prendesse $u=x^2+y^2-a^2$, il radicale resterebbe evidentemente nella trasformata, che diverrebbe

$$\mathrm{d}u-2\mathrm{d}y\sqrt{u}=0;$$

differenziandola si perverrebbe a

$$\mathrm{d}^2u-2\mathrm{d}^2y\sqrt{u}-\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}=0,$$

facendo sparire il divisore ne risulterebbe

$$\mathrm{d}^2u\sqrt{u}-2u\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}u=0,$$

equazione che sarebbe ancora verificata dalla supposizione di $u=0$. Queste trasformazioni possono essere continuate quanto si vuole, per cui segue che vi sono dei modi di preparare tutti i differenziali della proposta, affinchè la soluzione particolare vi soddisfaccia essa pure, lo chè non avrebbe luogo senza di questo; poichè se quando si fa variare la costante c, e che si pone $\frac{dy}{dc}=0$, si ha per la soluzione particolare, come per l'integrale completo, $dy=p\,dx$, il valore di d^2y diventa per la prima

$$\left(\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dc}\frac{dc}{dx}dx\right)dx,$$

mentre essa è solamente $\frac{dp}{dx}dx^2$ per la seconda; ciò non è nè pure al fattore istesso che questi due valori generalmente soddisfanno: si vede anzi che l'equazione

$$d^2u\sqrt{u}-2u\,d^2y-dy\,du=0,$$

sarebbe verificata dalla soluzione particolare, indipendentemente dai differenziali del secon' ordine.

Lo sviluppo e le dimostrazioni delle circostanze che ho indicato troppo lungi mi condurrebbero, e di più trovar le potranno in una memoria in cui il Poisson ha rischiarato con fortuna molte difficoltà che rimanevano ancora su la teorica delle soluzioni particolari dei diversi generi d'equazioni differenziali (*).

326. Per riconoscere da ciò che precede se un'equazione primitiva che non contiene niuna costante arbitraria, e che soddisfa ad un'equazione differenziale data, sia un integrale particolare o solamente una soluzione particolare, conviene averne l'integrale completo; questa circostanza che non ha sempre luogo, conduce naturalmente alla quistione seguente:

(*) *Giornale della scuola Politecnica*, 13° *Quaderno*; *osservate pure* il Trattato in-4°, t. II, p. 388.

Essendo dato un valore $y=X$, *che soddisfaccia a una equazione differenziale, determinare se è o no compreso nell' integrale completo, e ricavar questo qui se è possibile.*

Supponendo che s'ottenga da quest' ultima $y=V$, e che comprenda $y=X$, la funzione V sarà necessariamente composta della variabile x e della costante arbitraria C, in modo da cambiarsi in X, mediante una conveniente determinazione di C. Se si indica con C' questo valore di C, e che si osservi che la supposizione di $C=C'$ dia $V=X$, o che la differenza $V=X$ sparisca quando $C-C'=0$, se ne conchiuderà che almeno pel suo sviluppo l'espressione di V—X, può esser messa sotto la forma

$$V-X=V'(C-C')^{\mu}+V''(C-C')^{\nu}+\text{ecc.},$$

gli esponenti μ, ν, ecc., essendo tutti positivi, e le quantità V', V'', ecc., indipendenti da C—C'. Si può prendere $(C-C')^{\mu}=h$; la quantità h rimarrà arbitraria come la quantità C; e cambiando pure $-$ in μ essendo $\mu>1$, verrà

$$V-X=V'h+V''h^{\mu}+\text{ecc.},$$

onde

$$V=X+V'h+V''h^{\mu}+\text{ecc.},$$

espressione la quale si potrà considerare come lo sviluppo del valore completo di y.

Ciò posto se si rappresenta con $dy=pdx$, l'equazione differenziale proposta risoluta per rapporto a dy, questa nuova equazione alla quale soddisfa, per ipotesi, l'equazione $y=X$, dovrà essere verificata indipendentemente da h, dal valore completo di y. Indicando primieramente questo con $X+k$, converrà per sostuirlo in $dy=pdx$, cercare ciò che diventa p, allorchè vi si cambia y in $X+k$. Sia

$$P+P'k^{m}+P''k^{n}+\text{ecc.},$$

lo sviluppo di questo valore di p, gli esponenti m, n, ecc. che suppongo ordinati secondo la lor grandezza, saranno necessariamente positivi; poichè p non diventa infinito, quando $k=0$, giacchè l'equazione $dy=pdx$, in modo che $dX=Pdx$.

Allorchè si fa $y=X+k$, si ha per risultato

$$dX+dk=(P+P'k^m+P''k^n+\text{ecc.})dx,$$

che l'equazione $dX=Pdx$ riduce a

$$dk=(P'k^m+P''k^n+\text{ecc.})dx;$$

e rimettendo per k lo sviluppo

$$V'h+V''h^\mu+\text{ecc.},$$

viene

$$hdV'+h^\mu dV''+\text{ecc}=\left\{\begin{array}{l} P'h^m dx(V'+V''h^{\mu-1}+\text{ecc.})^m \\ +P''h^n dx(V'+V''h^{\mu-1}+\text{ecc.})^n \\ +\text{ecc.} \end{array}\right\}(A),$$

equazione dalla quale bisogna determinare V', V'', ecc., indipendentemente da h. Prendendo primieramente i soli termini in cui questa quantità ha il più piccolo esponente, si forma l'equazione

$$hdV'=P'V'^m h^m dx,$$

la quale non può aver luogo qualunque sia h, che quando $m=1$: in questo caso h sparisce e viene

$$dV'=P'V'dx, \quad V'=e^{\int P'dx}.$$

Quando $m>1$, non si può più paragonare il primo termine $P'V'^m h^m dx$ del secondo membro, al termine hdV' del primo; ma si fa sparire questo ponendo $dV'=0$, locchè dà $V'=$ *costante*, o più semplicemente $V'=1$; poscia si suppone $\mu=m$, e si ha $dV''=P'dx$, donde risulta $V''=\int P'dx$; e proseguendo in questo modo, si trovano gli altri termini della serie.

Quando $m<1$, non è più possibile di soddisfare all'equazione (A) in modo alcuno, poichè non si potrebbe paragonare il termine $P'V'^m h^m dx$ nè al termine hdV', nè ad alcuno di quelli che lo seguono, e di cui gli esponenti sorpassano tutti l'unità; l'equazione $y=X$ non può allora ammettere una costante arbitraria, e perciò non è un integrale particolare ma bensì una soluzione particolare.

327. Tutto ciò somministra un processo per iscoprire

tosto le soluzioni particolari dell'equazioni differenziali del prim'ordine, senza conoscere il loro integrale completo. Imperocchè lo sviluppo di p, quando vi si cambia y in $y+k$, sarebbe in generale, per il teorema di Taylor,

$$p+\frac{dp}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2p}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\text{ecc.},$$

e allorchè si prende la forma

$$P+P'k^m+\text{ecc.},$$

essendo $m<1$, il coefficiente differenziale $\frac{dp}{dy}$ diventa infinito (89); bisogna dunque che la differenziazione, per la quale si passa da p a questo coefficiente, conduca un divisore il quale svanisca. Risulta da ciò, che se si rappresenta $\frac{dp}{dy}$ con $\frac{K}{L}$, ogni soluzione particolare darà $L=0$, e sarà per conseguenza un fattore di L, e reciprocamente, ogni fattore di L che non lo sarà nel tempo istesso di K, e che essendo eguale a zero, verificherà l'equazione differenziale proposta, e sarà una soluzione particolare.

Si evita la risoluzione per rapporto a dy, dell'equazione differenziale proposta, osservando che se $Z=0$ indica questa equazione, essendo Z funzione di x, y e p, allorchè si scrive pdx in vece di dy, si ha

$$\frac{dZ}{dx}dx+\frac{dZ}{dy}dy+\frac{dZ}{dp}dp=0,$$

donde

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{\frac{dZ}{dy}}{\frac{dZ}{dp}},$$

e che se si è preparata l'equazione $Z=0$, in modo ch'essa non contenga nè frazioni nè radicali basterà per rendere $\frac{dp}{dy}$ infinito, d'uguagliare a zero un fattore di $\frac{dZ}{dp}$.

In questo modo non si otterrebbero che le soluzioni particolari nelle quali entra y; ma si perverrebbe a quelle che racchiudono la sola x, e che sono della forma $x=costante$, considerando nella proposta x come funzione di y.

328. Cercherò con questo mezzo primieramente le soluzioni particolari dell' equazione

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\mathrm{d}y\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}$$

del n° 324. Questa equazione diventa dopo la sparizione del radicale,

$$x^2\mathrm{d}x^2+2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(a^2-x^2)\mathrm{d}y^2=0,$$

ovvero

$$x^2+2xyp+(a^2-x^2)p^2=0,$$

e la differenziazione dà

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}p}=2xy+2(a^2-x^2)p:$$

la cercata soluzione particolare debb' essere dunque tale che coll' aiuto del valore che il suo differenziale fornisce per p, essa verifica contemporaneamente le due equazioni

$$x^2+2xyp+(a^2-x^2)p^2=0,$$

$$xy+(a^2-x^2)p=0.$$

Segue da ciò che senza il soccorso del suo differenziale, essa verificherà l' equazione risultante dell'eliminazione di p fra le due precedenti. Ciò posto l' equazione

$$xy+(a^2-x^2)p=0,$$

moltiplicata per p e tolta dalla proposta, conduce a

$$x^2+xyp=0, \quad \text{onde} \quad p=-\frac{x}{y};$$

e sostituendo questo valore di p nella prima, si trova l'equazione

$$x^2+y^2-a^2=0,$$

che si sa essere una soluzione particolare della proposta.

L'equazione più generale $y=px+\mathrm{P}$, essendo trattata nello stesso modo, conduce a $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}p}=x+\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}}{\mathrm{d}p}$; è dunque all'equazione

$$x+\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}}{\mathrm{d}p}=0,$$

che soddisfar debbono le soluzioni particolari; e risulteranno dall'eliminazione di p fra queste e l'equazione differenziale proposta.

Finalmente per dare un esempio delle soluzioni particolari della forma $y=costante$, prenderò l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=b(y-a)^m,$$

dalla quale si ricava immediatamente

$$\frac{dp}{dy}=mb(y-a)^{m-1}.$$

Questa espressione non può divenir infinita se non quando l'esponente $m-1$ è negativo, e che si ha nel tempo istesso $y=a$, valore che soddisfa alla proposta allorchè m è positivo; bisogna dunque che l'esponente m sia una frazione positiva. In questo caso $y=a$ è una soluzione particolare mentre l'integrale completo è

$$\frac{(y-a)^{1-m}}{1-m}-bx=costante.$$

329. In generale fra le funzioni algebriche, non vi sono che i radicali che acquistino un denominatore mediante la differenziazione, e che possano per conseguenza dare $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{0}$, allorchè p ha un valore finito; è dunque nei radicali che conviene cercare le soluzioni particolari, eguagliando

a zero le funzioni che affettano, ed assicurandosi che le equazioni risultanti soddisfanno alla proposta. Per questo processo l'equazione

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\mathrm{d}y\sqrt{(x^2+y^2-a^2)},$$

dà immediatamente $x^2+y^2-a^2=0$; e l'equazione

$$y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=n\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)},$$

dalla quale si ricava

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-xy}{n^2-x^2}\pm\frac{n\sqrt{(x^2+y^2-n^2)}}{n^2-x^2},$$

che conduce a $x^2+y^2-n^2=0$, siccome in molti modi si è già trovato.

Dei metodi per risolvere per approssimazione l'equazioni differenziali.

330. Quando una equazione differenziale non si può integrare con alcuno dei processi conosciuti, conviene cercare di risolverla per approssimazione, vale a dire a trarne il valore di y in x, per mezzo di una serie. Si è già veduto nel n° 298, come quella di Taylor poteva applicarsi a quest'uso; si può ancora prendere per y una serie a coefficienti indeterminati, ordinata secondo la potenza di x; ma occorrano spesse volte artifizi particolari onde determinare gli esponenti, allorchè non seguono la progressione dei numeri interi. Quando la forma di questa serie è conosciuta, si perviene a trovare i suoi coefficienti, sostituendola, come pure i suoi differenziali, in luogo di y, $\mathrm{d}y$, d^2y, ecc., nella proposta equazione.

Se si avesse per esempio l'equazione

$$\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=mx^n\mathrm{d}x,$$

si supporrebbe

$$y=Ax^\alpha+Bx^{\alpha+1}+Cx^{\alpha+2}+\text{ ecc.},$$

ponendo questo valore e il suo differenziale nell'equazione

proposta, osservando di raccogliere i termini in modo da poter formare un numero sufficiente di equazioni per determinare gli esponenti e i coefficienti senza cadere nelle contradizioni, si avrebbe

$$\left.\begin{array}{llllll} \alpha A x^{\alpha-1} + (\alpha+1)Bx^{\alpha} + (\alpha+2)Cx^{\alpha+1} + (\alpha+3)Dx^{\alpha+2} + \text{ecc.} \\ -mx^{n} + Ax^{\gamma} + Bx^{\gamma+1} + Cx^{\gamma+2} + \text{ecc.} \end{array}\right\} = 0,$$

equazione che si renderebbe identica facendo $n=\alpha-1$, o

$$\alpha=n+1, \text{ e } A=\frac{m}{\alpha}, B=\frac{-m}{\alpha(\alpha+1)}, C=\frac{m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

$$D=\frac{-m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}, \text{ ecc.}$$

locchè darebbe

$$y=m\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\text{ecc.}\right).$$

Questo valore di y è incompleto, poichè non racchiude alcuna costante arbitraria; egualmente sarà per tutti i casi in cui la costante non può essere isolata dalla variabile x, nello sviluppo dell'integrale; ma dopo ciò che si è veduto nel n° 299, si arriverebbe ad un risultato tanto generale quanto l'integrale completo, se si potesse dargli una forma tale che facendovi $x=a$, ne risultasse $y=b$; ora è ciò che si effettua ponendo $x=a+t$, $y=b+u$, e prendendo per rappresentare u, una serie di cui tutti i termini spariscano, quando $t=0$.

L'equazione $dy+ydx=mx^{n}dx$ diventa per questa trasformazione $du+(b+u)dt=m(a+t)^{n}dt$, e facendo

$$u=At^{\alpha}+Bt^{\alpha+1}+Ct^{\alpha+2}+\text{ecc.},$$

si troverà

$$\left.\begin{array}{llllll} \alpha A t^{\alpha-1} + (\alpha+1)Bt^{\alpha} + (\alpha+2)Ct^{\alpha+1} + \text{ecc.} \\ +b + At^{\alpha} + Bt^{\alpha+1} + \text{ecc.} \\ -ma^{n} - m\frac{n}{1}a^{n-1}t - m\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}t^{2} - \text{ecc.} \end{array}\right\} = 0;$$

converrà supporre in questa equazione $\alpha-1=0$, ovvero $\alpha=1$, e verrà

$$A=ma^n-b\,,\quad B=\frac{mna^{n-1}-ma^n+b}{2}\,,$$

$$C=\frac{mn(n-1)a^{n-2}-mna^{n-1}+ma^n-b}{2\,.\,3}\,,\ \text{ecc.}$$

331. L'impiego delle serie a coefficienti indeterminati, nell'equazioni del primo grado e del second' ordine presenta qualche volta delle circostanze che è bene conoscere, e di cui l'equazione semplicissima

$$d^2y+ax^ny\,dx^2=0.$$

offre un esempio rimarchevole.

Se si suppone

$$y=Ax^\alpha+Bx^{\alpha+\delta}+Cx^{\alpha+2\delta}+\text{ecc.}\,,$$

si avrà

$$d^2y=\big[\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}+(\alpha+\delta)(\alpha+\delta-1)Bx^{\alpha+\delta-2}+(\alpha+2\delta)(\alpha+2\delta-1)Cx^{\alpha+2\delta-2}+\text{ecc.}\big]\,dx^2.$$

$$ax^ny\,dx^2=\big[aAx^{\alpha+n}+aBx^{\alpha+\delta+n}+aCx^{\alpha+2\delta+n}+\text{ecc.}\big]\,dx^2\,.$$

Si vede da prima che non sarà possibile di far corrispondere i termini

$$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}\,,\quad aAx^{\alpha+n}\,,$$

pei quali cominciano rispettivamente l'espressioni precedenti, se non che nel caso particolare in cui $n=-2$; ma basterà di porre

$$\alpha=0\,,\quad \text{o pure}\ \alpha=1\,,$$

per fare sparire il primo termine dal valore di d^2y; e il

secondo di cui l'esponente è $\alpha+\delta-2$, potrà essere paragonato con $aAx^{\alpha+n}$: risulterà da ciò

$$\zeta-2=n, \text{ onde } \zeta=n+2.$$

Partendo da questi termini, le due serie si corrisponderanno esattamente, e per determinare i coefficienti si avranno l'equazioni

$$(\alpha+\zeta)(\alpha+\delta-1)B+aA=0,$$
$$(\alpha+2\delta)(\alpha+2\zeta-1)C+aB=0,$$
ecc.,

nelle quali A rimane arbitraria.

Se vi si pongono sucessivamente i due valori di α con quello di δ, si otterranno per y i due sviluppi

$$A-\frac{aAx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{a^2Ax^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}$$
$$-\frac{a^3Ax^{3n+6}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)}+\text{ecc.},$$

$$Ax-\frac{aAx^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+\frac{a^2Ax^{2n+5}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}$$
$$-\frac{a^3Ax^{3n+7}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)}+\text{ecc.}$$

Ancora non sono che particolari, imperocchè non contengono che la costante arbitraria A; ma scrivendo nell'ultimo A_1 in luogo di A, e prendendo poscia la loro somma si avrà a causa della forma particolare dell'esempio proposto (309), l'espressione generale di y.

332. Ponendo qui fine a ciò che riguarda l'integrazione approssimata dell'equazioni differenziali, debbo dire che i metodi superiormente esposti, non dando che rare volte delle serie convergenti, e soltanto per dei valori molto limitati della variabile indipendente, non sono molto in uso. Nei problemi fisico-matematici ai quali si applicano le approssimazioni del calcolo integrale, non si tratta per lo più che di determinare le piccole correzioni che far

conviene ad un primo valore approssimato conosciuto per altra parte, e considerato come uno stato medio. Il vero valore cercato non allontanandosene che per delle funzioni di cui si può trascurare da prima il quadrato e le potenze superiori si riducono al primo grado le equazioni differenziali che determinano queste funzioni, e vi si applicano in seguito dei processi che sono ancora troppo variati per poter entrare negli elementi, ed anche perchè si trovano sempre sviluppati nei diversi trattati speciali in cui se ne fa uso.

Risoluzione di alcuni problemi geometrici dipendenti dall'equazioni differenziali.

333. Il porre in equazione dei problemi geometrici, che dipendono dall' equazioni differenziali, basando soltanto su le proprietà delle tangenti, delle normali, dei raggi di curvatura, non presenta maggior difficoltà delle altre traduzioni analitiche, allorchè si conoscono l'espressioni delle linee che conviene considerare; per cui nè darò solamente alcuni esempi.

Primieramente osserverò che l'integrazione dell' equazioni differenziali del prim'ordine si chiama ancora *Metodo inverso delle tangenti*, perchè qualunque equazione differenziale di quest' ordine, dando l' espressione di $\frac{dy}{dx}$ in x e in y, fa conoscere la relazione che esiste fra le coordinate e la sottotangente, o la tangente, o la normale, ec. nella curva ch'essa rappresenta. In fatti se dall' equazioue proposta si ricava $\frac{dy}{dx}=p$, la sottotangente avrà per espressione $\frac{y}{p}$, la tangente $\frac{y\sqrt{(1+p^2)}}{p}$, ecc. (66). S' inventò il calcolo differenziale per condurre le tangenti alle curve, vale a dire, per risolvere il *problema diretto delle tangenti*: si occupò poscia del calcolo integrale per arrivare all' equazioni primitive delle curve, mediante le proprietà delle loro tangenti; ma i progressi e le numerose applicazioni di questo calcolo han fatto abbandonare la denominazione di *Metodo inverso delle tangenti*, che non conveniva che ad un solo de' suoi usi.

Nei primi tempi si cercò di determinare colle aree, o pure cogli archi di alcune curve conosciute, l'ordinata della curva domandata; di poi si sono lasciate da parte queste costruzioni, perchè per quanto eleganti fossero nella teorica, erano sempre meno comode e soprattutto meno esatte nella pratica delle formole approssimative che han preso il loro luogo.

Un' equazione differenziale non può costruirsi generalmente, se non quando se ne sono separate le variabili, perchè allora l'espressione di una di esse, più non dipende che dalla quadratura d'una curva di cui l'equazione primitiva è conosciuta.

334. Prendo per esempio la costruzione delle curve nelle quali la sottotangente è eguale ad una data funzione dell'ascissa x; l'equazione differenziale di questa curva sarà $\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\mathrm{X}$, rappresentando X la funzione data. Si separano le variabili all'istante in questa equazione, e viene $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{X}}$. Moltiplicando allora i due membri per una quantità costante m, si ha $\frac{m\mathrm{d}y}{y}=\frac{m\mathrm{d}x}{\mathrm{X}}$; e indicando con Ly il logaritmo di y preso nel sistema di cui il modulo è m, l'integrazione dà

$$\mathrm{L}y=\int\frac{m\mathrm{d}x}{\mathrm{X}}=\frac{1}{m}\int\frac{m^2\mathrm{d}x}{\mathrm{X}}.$$

Costruendo da prima la curva DN *fig.* 56, in modo che l'ordinata corrispondente all'ascissa AP, sia $\mathrm{PN}=\frac{m^2}{\mathrm{X}}$, l'area ADNP darà il valore di $\int\frac{m^2\mathrm{d}x}{\mathrm{X}}$. Si ridurrà quest'area ad un rettangolo FQ, di cui il lato AF sia m; l'altro lato AQ esprimerà $\frac{1}{m}\int\frac{m^2\mathrm{d}x}{\mathrm{X}}$; descrivendo in seguito sul modulo m, il logaritmo ER, di cui le ordinate sieno perpendicolari all'asse AC, ed inalzando dal punto Q la perpendicolare RQ, si avrà $L.\mathrm{RQ}=\mathrm{AQ}$ (112), o

L . RQ= $\frac{1}{m}\int\frac{m^2 dx}{X}$: sarà dunque RQ eguale all'ordinata PM della curva cercata.

Conviene ben osservare che questa costruzione non esige che si abbia l'espressione analitica della funzione X ; si potrebbe prendere in suo luogo l'ordinata di una curva qualunque riferita all'asse AB, ed effettuare sopra questa ordinata e su la linea arbitraria *m*, le operazioni grafiche indicate dalle superiori formole. Si vede pure che la linea *m* non è stata introdotta che per rendere queste formole omogenee, e può essere supposta eguale all'unità.

335. Riporterò pure la soluzione di un problema celebre nei primi tempi in cui si sono occupati del Calcolo integrale, del *problema delle traiettorie*. Questo ha per oggetto di *determinare la curva che taglia sotto un dato angolo tutte quelle di una data specie*. S'intende in questo luogo per curve d'una data specie le diverse curve particolari che si ottengono assegnando successivamente ad una delle costanti d'una equazione primitiva tutti i possibili valori. Se per esempio si fa variare il parametro di una parabola, ne risulterà una serie di parabole riferite allo stesso asse avendo la sommità stessa, e di cui gli estremi saranno da una parte l'asse e dall'altra la linea che gli è perpendicolare e che passa per la sommità: la curva che taglierà tutte queste sotto un angolo dato, ne sarà la traiettoria (*).

Siano $D_1 N_1$, DN, D'N', ecc., *fig.* 57, le curve tagliate, e MZ la curva tagliante o la traiettoria cercata; se per un qualunque M de' suoi punti si conduce una tangente M*t*, e che si tiri ancora quella della curva tagliata, che passa per questo punto, l'angolo TM*t*, dietro l'enunciato della quistione, debb'essere eguale all'angolo dato. Indico con x', y', le coordinate delle curve tagliate

---

(*) *Si dà ancora in Meccanica il nome di* traiettoria, *alla curva descritta da un corpo sollecitato da delle forze qualunque; ma non sarebbevi quistione di questa specie di traiettoria in un' opera consacrata unicamente all' analisi ed alla geometria.*

con x, y, quelle della curva tagliante, e con a la tangente trigonometrica dell'angolo costante TMt, che è eguale alla differenza degli angoli MTP, MtP, di cui le tangenti rispettive danno per espressione $\frac{dy'}{dx'}$ e $\frac{dy}{dx}$ (66), la relazione

$$\text{tang TM}t = \text{tang (M}t\text{P—MTP)},$$

dà poscia

$$a = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}} \quad \text{(Trig. 26)}.$$

Supporrò qui che si conosca l'equazione primitiva delle curve tagliate; se ne ricaverà colla differenziazione $dy' = pdx'$, e l'equazione superiore diverrà

$$a\left(1 + p\frac{dy}{dx}\right) + p - \frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(A)}.$$

Converrà da per tutto scrivere x ed y in vece di x' e di y', perchè al punto M la curva tagliata e la curva tagliante hanno le stesse coordinate. Fatto ciò se si elimina fra l'equazione (A) e l'equazione primitiva delle curve tagliate, la costante di cui i diversi valori particolarizzano ciascuna di queste curve, si avrà un risultato che abbraccerà tutte le successive intersezioni loro, con la traiettoria, e ne sarà per conseguenza l'equazione.

Siano per esempio le parabole, avendo lo stesso asse e la stessa sommità, e di cui l'equazione è $y'^m = \alpha x'^m$; ne verrà $p = \frac{m\alpha x'^{m-1}}{ny'^{n-1}}$. Si potrà togliere immediatamente da questa espressione, mediante la proposta equazione, il parametro α, che particolarizza ciascuna parabola d'uno stesso grado, sostituendo il risultato nell'equazione (A), dopo di aver cambiato x' e y' in x e in y, e poscia dividendo per $x^{m-1}y^{n-1}$, si troverà

$$a(nxdx + mydy) + mydx - nxdy = 0.$$

Questa equazione essendo omogenea, può trattarsi col processo del n° 283. Allorchè si ha $m=n=1$, essa diventa integrabile dividendola per x^2+y^2, poichè

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\,.\,l\sqrt{(x^2+y^2)},$$

e che $\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\,.\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\dfrac{x}{y}\right)$ (279); si ha dunque

$$al\sqrt{(x^2+y^2)}+\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x}{y}\right)=\mathrm{C},$$

ovvero

$$al\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{c}+\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{y}{x}\right),$$

cambiando la costante arbitraria. Se si fa

$$\sqrt{(x^2+y^2)}=u,\ \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{y}{x}\right)=t,$$

si ricadrà su l'equazione delle spirali logaritmiche, che hanno la proprietà di tagliare il loro raggio vettore sotto un angolo costante (128): imperocchè nel caso attuale, le curve tagliate altra cosa non sono che tutte le linee rette condotte per l'origine delle coordinate, e di cui l'equazione è $y'=ax'$.

Se si volesse che l'angolo TMt fosse retto, bisognerebbe supporre a infinito, e per conseguenza non tener conto che dei termini ch'egli moltiplica; la superiore equazione si ridurrebbe a $nx\mathrm{d}x+my\mathrm{d}y=0$, di cui l'integrale $nx^2+my^2=c$, mostra che la curva che taglia ad angoli retti tutte le parabole proposte è un'ellisse descritta su lo stesso asse di queste curve, ed avente per centro la loro comune sommità. Le traiettorie in cui l'angolo TMt è retto si chiamano *traiettorie ortogonali*, e la supposizione di a infinito nell'equazione (A), dà $1+p\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ per loro equazione differenziale.

336. Le geometriche considerazioni, come si è annunciato nel n° 298, stabiliscono pure la possibilità dell'equazioni

differenziali a due variabili. In fatti, quando si tratta di una equazione del primo ordine, se ne ricava il valore di $\frac{dy}{dx}$, il quale esprime la tangente trigonometrica dell'angolo che fa con la linea delle ascisse, la tangente della curva relativa a quest'equazione; prendendo dunque arbitrariamente le coordinate AP$=a$, PM$=b$, di un primo punto M, *fig.* 58, si condurrà la linea MT, facendo con MQ, parallela ad AB, un angolo M'MQ, di cui la tangente sia eguale al valore corrispondente di $\frac{dy}{dx}$: questa retta toccherà al punto M la curva cercata. Riguardando la curva e la sua tangente come confuse assieme, presso al punto di contatto, la retta MT determinerà per un punto P', infinitamente prossimo a P, l'ordinata P'M', colla quale si calcolerà mediante l'equazione differenziale proposta, la tangente dell'angolo M''M'Q', relativo alla tangente M'T' consecutiva a MT. La continuazione di questo processo darà un poligono, il quale a misura che se ne moltiplicheranno i lati, differirà tanto meno dalla curva, alla quale appartiene la proposta equazione. Risulta ancora da questa costruzione, che un'equazione differenziale del prim'ordine rappresenta un'infinità di curve, poichè si può prendere il primo punto M ove si vorrà.

Nell'equazioni del second'ordine che non danno che il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, si sostituiscono le parabole osculatrici alle tangenti. Avendo arbitrariamente preso un primo punto di cui l'ascissa e l'ordinata siano $x=a$ e $y=b$, si forma l'equazione

$$y-b=A(x-a)+b(x-a)^2,$$

la quale appartiene a una parabola che passa per questo punto. Differenziandola due volte di seguito, e facendo $x=a$, se ne ricava

$$\frac{dy}{dx}=A, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=2B;$$

il coefficiente A rimarrà arbitrario, ma B è determinato

ponendo nell' equazione proposta a, b, A, invece di x, y, $\frac{dy}{dx}$; si costruisca dunque in primo luogo una parabola MN, *fig.* 59, che passa pel punto M, e di cui la tangente a questo punto faccia con l' ascissa un angolo avente A per tangente trigonometrica. Si calcola il valore dell'ordinata P'M' di questa curva e quello di $\frac{dy}{dx}$, corrispondenti a un punto P', preso vicinissimo al punto P, su l'asse delle ascisse; mettendo poi questi valori nell' equazione differenziale proposta, se ne deduce un nuovo valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$. Rappresentando questo con $2B_1$, e con b_1 e A_1 quelli di P'M' e di $\frac{dy}{dx}$, si forma l' equazione

$$y-b_1=A_1(x-a_1)+B_1(x-a_1)^2,$$

della seconda parabola osculatrice M'N', colla quale se ne determinerebbe una terza, e così di seguito.

Si modificherebbe facilmente questo processo per sostituirvi in posto della parabola osculatrice il circolo osculatore, o per estenderlo a tutti gli ordini.

337. Il seguente problema mostrerà come le considerazioni geometriche che conducono alla teorica delle soluzioni particolari che ho esposto nel n° 323. *Trovare una curva tale che tutte le perpendicolari abbassate da un punto dato, su le tangenti di questa curva siano eguali?* Per giungere all' equazione differenziale, conviene ricordarsi che chiamando x ed y le coordinate d'una curva, x' e y' quelle della sua tangente, l'equazione di questa retta è $y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x)$ (68); prendendo per origine delle coordinate il punto conosciuto, dal quale debbono essere abbassate tutte le perpendicolari, ciascuna di esse avrà per equazione $y'=-\frac{dx}{dy}x'$ (*Trig.* 90), e la sua lunghezza sarà espressa da $\sqrt{(x'^2+y'^2)}$. Ponendo per x' e per y', le coordinate del punto ove essa incontra la tangente che gli

corrisponde, e di cui i valori si ottengono dalle due superiori equazioni (*Trig.* 92), si avrà in virtù di quest' equazioni,

$$x' = \frac{(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}, \quad y' = -\frac{(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2},$$

e
$$\sqrt{(x'^2+y'^2)} = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)}} = n;$$

l' equazione differenziale della curva cercata sarà dunque

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = n\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)}.$$

Posto ciò è facile vedere che il circolo di cui il raggio $=n$, e di cui il centro è all' origine delle coordinate, soddisfa alla quistione. Questo circolo avendo per equazione $y^2+x^2=n^2$, è precisamente la soluzione particolare trovata al n. 297; ma qualunque linea retta situata per rapporto all' origine delle coordinate, in modo che la sua più corta distanza a questo punto sia eguale ad n, risolve egualmente il problema proposto; e siccome vi è un'infinità di linee rette che adempier possono questa condizione, così nell' equazione che tutte le comprende, vi risiede l' integrale completo dell' equazione differenziale superiormente trovata, e che è in fatti

$$y - cx = n\sqrt{(1+c^2)} \quad (297).$$

Una circostanza degna di rimarco e che all' istante si scorge, è che tutte le linee rette di cui si è parlato saranno necessariamente toccate dal circolo rappresentante la soluzione particolare, poichè ha per raggio la perpendicolare abbassata sopra ciascuna di esse.

La stessa relazione ha luogo fra le diverse curve che rappresenta l' integrale completo d'una equazione differenziale del prim'ordine, e quello che risulta da una soluzione particolare di quest' equazione: l' ultima tocca tutte le altre. In fatti, l'equazione differenziale non determina che la direzione della tangente, ed ogni curva la quale in un qualunque punto avrà la stessa tangente che una delle curve dedotte dall' integrale completo vi soddisferà

necessariamente; ora è ciò che avviene alla curva che tocca tutte queste.

Segue da ciò che la sviluppata d'una curva, non è altra cosa che la soluzione particolare dell' equazione differenziale, che rappresenta tutte le normali di questa curva (80), e che questa, vale a dire la sviluppata, è parimenti la soluzione particolare dell'equazione differenziale comune a tutti i suoi circoli osculatori, ma con la differenza che i contatti sono di second'ordine.

Il legame stabilito nel n° 323, fra gl' integrali completi e le soluzioni particolari, si deduce anche dalle considerazioni geometriche; poichè ciaschedun punto del circolo dell' esempio precedente, può essere considerato come l' intersezione di due tangenti consecutive, cioè come l' intersezione di due rette somministrate da due consecutivi valori dati alla costante c; l'ascissa e l' ordinata di questa intersezione dipendono dai valori di c, che per conseguenza è a suo tempo funzione di queste quantità o di x e di y. È evidente che per formare l' equazione d'una linea consecutiva a quella che rappresenta l' equazione

$$y-cx=n\sqrt{(1+c^2)},$$

conviene differenziare questa facendo variare c; e poichè si cerca soltanto l' intersezione di queste due linee, punto in cui le loro ordinate sono comuni, riguardar si debbono x ed y come costanti: quest' intersezione sarà dunque determinata dalle due equazioni

$$y-cx=n\sqrt{(1+c^2)},$$

$$-x=\frac{nc}{\sqrt{(1+c^2)}},$$

se si assegna a c un valore particolare. Ma se si elimina c, il risultato più non indicando alcuna intersezione in particolare, abbraccierà tutti i punti risultanti dagl'incontri delle rette fornite da tutti i valori di c, e combinate due a due consecutivamente, cioè il circolo che è la soluzione particolare, e che si deduce qui pure dalla variazione attribuita alla costante arbitraria dell' integrale completo. Le stesse osservazioni si verificano su le sviluppate, allorchè si

considerano queste curve come prodotte dalle intersecazioni delle normali consecutive della sviluppante (80).

Dell' integrazione dell' equazioni differenziali che contengono tre o un maggior numero di variabili.

Dell' equazioni differenziali totali.

338. Le funzioni le quali dipendono da due o da più variabili, differiscono da quelle d' una sola in ciò ch' esse hanno per ciascun' ordine molti coefficienti differenziali. Se z, a cagion d'esempio, è una funzione di due variabili, vi saranno per il prim' ordine due coefficienti differenziali cioè $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, l' uno preso facendo variare unicamente x e l' altro facendo variare la sola y. Nel second' ordine il numero dei coefficienti differenziali si eleva a tre, e si accresce così successivamente d'ordine in ordine (44). Onde risalire dai coefficienti differenziali d' una funzione di due o più variabili a questa funzione si presentano molti casi: 1°. si possono avere tutti i suoi coefficienti d'uno stesso ordine espressi mediante le variabili indipendenti, locchè dà esplicitamente i differenziali totali della funzione cercata, la quale si perviene coi processi esposti nei numeri 278-280; 2°. la stessa funzione entrar può con le variabili indipendenti nell' espressioni dei coefficienti differenziali, ciò che fornisce un' equazione totale; 3°. finalmente si può avere una semplice relazione fra questi coefficienti, la funzione da cui derivano e le variabili indipendenti.

339. Mi occuperò primieramente del secondo caso considerando l' equazione

$$Pdx+Qdy+Rdz=0.$$

Questa s' integrerebbe col processo del n°. 280, se il primo membro fosse un differenziale esatto a tre variabili; ma se non lo è, è suscettibile di divenirlo col mezzo di un conveniente fattore, quando questa equazione deriva da una equazione primitiva $u=c$: ciò si vede come pel caso di

due variabili (289). Difatti l'equazione differenziale proposta debbe allora accordarsi con

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0,$$

vale a dire che i valori di dz, ricavati dall'una e dall'altra debbono essere identici, indipendentemente da dx e da dy (136); ora questi valori essendo rispettivamente

$$dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy,\quad dz=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}}dx-\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}}dy,$$

ne segue che

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}}=\frac{P}{R},\quad \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}}=\frac{Q}{R},\quad \text{onde}\quad \frac{\frac{du}{dx}}{P}=\frac{\frac{du}{dy}}{Q}=\frac{\frac{du}{dz}}{R};$$

e chiamando μ i quozienti indicati, verrà

$$du=\mu Pdx+\mu Qdy+\mu Rdz.$$

Posto ciò, affinchè questo differenziale sia esatto, conviene ancora che si verifichino le condizioni

$$\frac{d.\mu P}{dy}=\frac{d.\mu Q}{dx},\quad \frac{d.\mu R}{dx}=\frac{d.\mu P}{dz},\quad \frac{d.\mu Q}{dz}=\frac{d.\mu R}{dy},$$

lo sviluppo delle quali somministra l'equazioni

$$\left.\begin{aligned}\mu\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)+P\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{dx}=0\\ \mu\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{dz}=0\\ \mu\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+Q\frac{d\gamma}{dz}-R\frac{d\mu}{dy}=0\end{aligned}\right\}\quad (A).$$

Si scorge tosto che la funzione μ sparisce quando si moltiplica la prima di queste equazioni per R, la seconda per Q, la terza per P, e che si aggiungono i prodotti; perchè la somma essendo divisibile per μ, si riduce a

$$R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)=0\ (B),$$

equazione di condizione che debbe tosto essere soddisfatta colla proposta, affinchè questa possa diventare differenziale esatto mediante un fattore, e che possa per conseguenza derivare da una equazione primitiva a tre variabili, o ciò che è lo stesso essere verificata da una funzione di due.

Quest' ultima considerazione conduce pure all'equazione (B), mediante l' applicazione immediata del teorema del n° 278; perchè se si avesse l' espressione primitiva di z in x e in y, e che si sostituisce in quella di dz tratta dall' equazione

$$Pdx+Udy+Rdz=0,$$

ne risulterebbe necessariamente un differenziale esatto a due variabili, e della forma

$$dz=pdx+qdy, \quad \text{ove} \quad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}.$$

Ma nel caso attuale in cui

$$p=-\frac{P}{R}, \quad q=-\frac{Q}{R},$$

P, Q, R, racchiudendo z, bisogna nelle indicate differenziazioni egualmente farla variare e porre quindi p e q in luogo di $\frac{dz}{dx}$ e di $\frac{dz}{dy}$; allora in vece di $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$, verrà

$$\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}=\frac{dq}{dx}+p\frac{dq}{dz},$$

ovvero

$$\frac{dp}{dy}-\frac{dq}{dx}+q\frac{dp}{dz}-p\frac{dq}{dz}=0 \quad (C).$$

Se si sostituisce $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$, in luogo di p e di q, si avrà dopo le riduzioni

$$P\frac{dR}{dy}-R\frac{dP}{dy}+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}-P\frac{dQ}{dz}=0,$$

vale a dire l'equazione (B) del n° precedente.

Per lungo tempo si sono chiamate *equazioni assurde*, e si riguardavano come insignificanti quelle che non soddisfacevano all'equazione (B); ma il Monge ha fatto vedere che tutte l'equazioni differenziali a tre variabili avevano una significazione reale, e mentre che quelle di cui l'integrale era espresso da una sola equazione fra le tre variabili, appartenevano a delle superficie curve, ciascuna delle altre rappresentava un' infinità di curve a doppia curvatura, godendo d'una proprietà comune. Mi occuperò primieramente delle prime.

340. Quando l'equazione (B) è soddisfatta, due qualunque dell'equazioni (A) bastano per determinare il fattore μ, e si vedrà che l'integrazione della proposta si riduce a quella dell'equazioni a due variabili.

Perciò sia μ il fattore che rende integrabile il differenziale

$$Pdx+Qdy,$$

allorchè vi si considera z come costante; ponendo

$$f(\mu Pdx+\mu Qdy)=U,$$

si avrà pel cercato integrale

$$U+Z=0,$$

in cui Z indica una funzione della sola z. Se ora si differenzia quest'integrale facendovi tutto variare, ed osservando che

$$\frac{dU}{dx}=\mu P, \quad \frac{dU}{dy}=\mu Q,$$

si avrà l'equazione

$$\mu P dx + \mu Q dy + \left(\frac{dU}{dz} + \frac{dZ}{dz}\right) dz = 0 ,$$

di cui il paragone con la proposta darà

$$\mu R = \frac{dU}{dz} + \frac{dZ}{dz},$$

ovvero

$$\frac{dZ}{dz} = \mu R - \frac{dU}{dz};$$

ma affinchè la determinazione di Z possa aver luogo secondo l'ipotesi stabilita, bisognerà che il secondo membro di quest'ultima equazione si riduca ad una funzione di z e di Z, almeno dopo che si avrà tolto y, mediante il suo valore preso nell'equazione U+Z=o: considerando dunque allora y come una funzione di x e di Z, si avrà l'equazione di condizione

$$\frac{d\left(\mu R - \frac{dU}{dz}\right)}{dx} + \frac{d\left(\mu R - \frac{dU}{dz}\right)\frac{dy}{dx}}{dy} = 0 ,$$

o sviluppando

$$\mu \frac{dR}{dx} + R\frac{d\mu}{dx} - \frac{d^2U}{dxdz} + \left(\mu \frac{dR}{dy} + R\frac{d\mu}{dy} - \frac{d^2U}{dzdy}\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ora l'equazione differenziale proposta, essendo posta sotto la forma

$$dy = -\frac{P}{Q}dx - \frac{R}{Q}dz ,$$

dà

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} ,$$

si ha pure

$$\frac{d^2U}{dxdz} = \frac{d \cdot \mu P}{dz} = \mu \frac{dP}{dz} + P\frac{d\mu}{dz},$$

$$\frac{d^2U}{dydz} = \frac{d \cdot \mu Q}{dz} = \mu \frac{dQ}{dz} + Q\frac{d\mu}{dz};$$

in oltre il fattore μ, rendendo esatto il differenziale $\mu P dx + \mu Q dy$, soddisfa all' equazione

$$P\frac{d\mu}{dy} - Q\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0 \quad (290);$$

e se si ricava da quest' ultima il valore di $\frac{d\mu}{dx}$, per sostituirlo con quelli di

$$\frac{d^2U}{dxdz}, \quad \frac{d^2U}{dydz}, \quad \frac{dy}{dx},$$

nell' equazione di condizione trovata superiormente, il risultato essendo con diligenza ridotto sarà precisamente l'equazione (B): così quando è verificata l' integrazione dell' equazione differenziale a tre variabili, non dipende che da quella dell' equazioni a due variabili.

341. Allorchè i differenziali dx, dy e dz oltrepassano il primo grado nella proposta equazione non può integrarsi con ciò che precede se non quando soddisfa ad una nuova condizione che farò conoscere nell' equazione

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 + 2Sdxdy + 2Tdxdz + 2Vdydz = 0.$$

Affinchè possa questa risultare da un' equazione primitiva $u = c$, conviene prima di tutto che si riduca alla forma

$$P'dx + Q'dy + R'dz = 0 \quad (339).$$

o ciò che è lo stesso che risolvendola per rapporto all'uno dei differenziali dx, dy, dz, gli altri due sortino dai radicali: ma questo è ciò che non avviene sempre; perchè si ha

$$dz = \frac{1}{R}\left\{-Tdx - Vdy \pm \sqrt{(T^2 - PR)dx^2 + 2(TV - RS)dxdy + (V^2 - QR)dy^2}\right\}$$

e se la quantità che è sotto il radicale non è un quadrato perfetto, o almeno se non si ha

$$(TV - RS)^2 = (T^2 - PR)(V^2 - QR),$$

i differenziali dx e dy resteranno impegnati sotto questo radicale. In generale qualunque sia il grado dell' equazione proposta per rapporto a dz, dx, dy, conviene che essendo ordinata secondo le potenze di dz, possa quella decomporsi in fattori della forma

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Dell'equazioni differenziali totali che non soddisfanno alle condizioni d' integrabilità.

342. Ho fatto vedere nel n° 339 che un' equazione differenziale del prim' ordine a tre variabili della forma $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, non poteva essere soddisfatta da una funzione di due variabili, finattantochè l' equazione

$$P\frac{dR}{dy} - R\frac{dP}{dy} + R\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dR}{dx} + Q\frac{dP}{dz} - P\frac{dQ}{dz} = 0,$$

era di per se identica; ma stabilendo una dipendenza qualunque fra x, y, z, si cambierà la proposta equazione in un' altra la quale più non conterrà che due di queste variabili, e determinerà per conseguenza l' una di queste in funzione dell' altra.

Se si avesse per esempio l' equazione

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x(x-a) + y\,(y-b)},$$

la quale non può adempiere alla condizione qui sopra enunciata, sin a tanto che a e b non sono nulli, e che vi si facesse $y = \varphi(x)$, indicando φ una funzione qualunque, si cambierebbe in

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{\left[x + \varphi(x)\varphi'(x)\right]dx}{x(x-a) + \varphi(x)\left[\varphi(x) - b\right]},$$

e darebbe tante relazioni diverse fra z e x, quante si assegnerebbero forme particolari alla funzione φ.

Prendendo $\varphi(x) = x$, si avrebbe

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{2x\,dx}{x(x-a) + x\,(x-b)} = \frac{2dx}{2x-a-b},$$

donde si ricaverebbe $z-c=C(2x-a-b)$, essendo C una costante arbitraria; e la proposta sarebbe soddisfatta dal sistema d' equazioni

$$\left.\begin{array}{c} y=x \\ z-c=C(2x-a-b) \end{array}\right\}.$$

Il Newton nel suo Trattato delle Flussioni (*), aveva già indicato questo modo di risolvere l'equazioni differenziali che contenevano più di due variabili; ma ha l' inconveniente di esigere un' integrazione per ciascun risultato che ottener si vuole, e il Monge ha osservato nel 1784 che si poteva, mediante l' introduzione di una funzione arbitraria, pervenire ad un sistema generale d'equazioni che ne desse un' infinità di particolari soddisfacendo tutti alla proposta.

343. Il processo che seguir debbesi per integrare l' equazione

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

con una sola equazione primitiva, allorchè la cosa è possibile (340), conduce pure alla soluzione la più generale che ottener si possa da questa equazione nel caso contrario. In fatti se s'integra primieramente considerando una delle variabili ch'essa racchiude come costante, z per esempio, che si rappresenta con $U=C$, l'equazione primitiva, la quale corrisponde a $Pdx+Qdy=0$, e si differenzia quest' equazione primitiva, facendo variare contemporaneamente x, y, z e C, e che si paragoni il risultato alla proposta si giugnerà all' equazione

$$\frac{dC}{dz}=\frac{dU}{dz}-\mu R,$$

essendo μ il fattore che rende $Pdx+Qdy$ un differenziale esatto. A dir vero il secondo membro non si ridurrà più ad una funzione della sola z, come ciò avviene nel caso in cui la condizione d' integrabilità è adempita, e non potrà dare C, come lo esige questa condizione; ma è evidente

---

(*) Newtoni Opuscula, *t. I. p.* 83, *edizione del* 1744.

che supponendo che C sia una funzione di z, l'equazione proposta sarà soddisfatta coll' equazione primitiva U=C, se si ha nell' istesso tempo

$$\frac{dC}{dz}=\frac{dU}{dz}-\mu R:$$

facendo dunque $C=\varphi(z)$, il sistema dell' equazioni

$$\left.\begin{aligned} U&=\varphi(z)\\ \frac{dU}{dz}-\mu R&=\varphi'(z)\end{aligned}\right\}$$

soddisferà alla proposta, qualunque sia la forma della funzione φ, e potrà particolarizzarsi in un' infinità di modi, prendendo φ arbitrariamente.

Applicando questo all' equazione

$$\frac{dz}{z-c}=\frac{x\,dx+y\,dy}{x(x-a)+y(y-b)},$$

che ho preso per esempio nel numero precedente, si avrà

$$P\,dx+Q\,dy=\frac{x\,dx+y\,dy}{x(x-a)+y(y-b)},\quad R=-\frac{1}{z-c};$$

e facendo

$$\mu=x(x-a)+y(y-b),$$

si troverà $U=x^2+y^2$: si otterranno per conseguenza le equazioni

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=\varphi(z)\\ \frac{x(x-a)+y(y-b)}{z-c}&=\varphi'(z)\end{aligned}\right\}$$

Integrazione dell' equazioni differenziali parziali del prim' ordine.

344. Passerò al terzo caso della ricerca delle funzioni di due o più variabili. In questo caso si ha per determinare la funzione incognita, soltanto alcuni de' suoi coefficienti

differenziali d'un cert'ordine, o una sola equazione fra loro. Egli costituisce quello che chiamasi *Calcolo integrale colle differenze parziali*, e che dovrebbesi nominare, dietro le osservazioni del n° 43, *Calcolo integrale coi differenziali parziali;* perchè i coefficienti differenziali isolatamente considerati, fanno conoscere unicamente le differenziali parziali, e non le differenze che sono l'oggetto d'un calcolo a parte, che si troverà nell'*Appendice* che termina quest'opera. Il coefficiente differenziale $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}$, essendo moltiplicato da $dx^m dy^n$, diventa $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n} dx^m dy^n$, ed esprime allora il differenziale m^{simo}, per rapporto ad x, del differenziale n^{simo} di z, per rapporto ad y, e viceversa.

345. L'equazioni differenziali parziali le più semplici sono quelle che non contengono che un solo coefficiente differenziale espresso con le variabili indipendenti: tali sono quelle del secondo e del terz'ordine che sono trattate nei numeri 271,277. Nel prim'ordine se si ha $\frac{dz}{dx} = R$, R non contenendo punto z, si moltiplicherà per dx, onde ottenere $\frac{dz}{dx} dx = R dx$, o $dz = R dx$; ed integrando per rapporto ad x solamente verrà

$$z = \int R dx + C.$$

In questo risultato C non indica una semplice costante arbitraria, ma una funzione assolutamente indeterminata di tutte le variabili fuori di x, che conterrebbe la funzione z. Se per esempio z dipendesse contemporaneamente da x e da y, si avrebbe $z = \int R dx + \varphi(y)$, indicando con φ una arbitraria funzione composta in un modo qualunque della variabile y mista a delle costanti. In generale per un qualunque numero di variabili indipendenti s, t, u, x, y, ecc., l'integrale di $\frac{dz}{dx} = R$, sarà $z = \int R dx + \varphi(s, t, u, y, \text{ecc.})$, poichè è evidente che la funzione $\varphi(s, t, u, y, \text{ecc.})$, qualunque essa sia, non variando punto quando x varia, si ha sempre $\frac{dz}{dx} = R$.

Allorchè z entra in R, l'equazione

$$\frac{dz}{dx}-R=0, \text{ ovvero } \frac{dz}{dx}dx-Rdx=0,$$

cade allora nel caso generale dell'equazioni differenziali a due variabili z e x; se si può integrarla mediante qualcheduno dei metodi precedenti, e che s'indichi il suo integrale con $V=const.$, si avrà

$$V=\varphi(s, t, u, y, \text{ecc.})$$

per l'equazione primitiva dalla quale dipende la funzione z. Imperocchè se si differenzia quest'equazione facendo variare solamente x e z, il risultato della forma

$$Pdz+Qdx=0,$$

è tale che $-\frac{Q}{P}=R$, locchè dà $\frac{dz}{dx}=R$.

346. Se per brevità si pone

$$dz=pdx+qdy \quad (1),$$

l'equazione

$$Pp+Qq=R \quad (2),$$

nella quale P, Q, R contengono contemporaneamente x, y e z, è la più generale che si possa avere fra i coefficienti differenziali del prim'ordine p e q, allorchè non oltrepassano il primo grado. Prendendo il valore di p in quest'equazione onde sostituirlo nella (1), sarà ridotta la quistione ad integrare l'equazione

$$Pdz-Rdx=q(Pdy-Qdx) \quad (3),$$

in cui il coefficiente q è ancora indeterminato. Si presentano qui due casi: 1°. la composizione di P, Q e R, può esser tale che la funzione $Pdz-Rdx$ racchiuda le sole variabili x e y; 2°. l'una o l'altra di queste funzioni, ovvero tutte due possono contenere le tre variabili x, y e z.

Nel primo caso esiste un fattore μ, che rende $Pdy-Qdx$ differenziale esatto (289), ed un fattore μ', che opera

la medesima cosa sopra $Pdz-Rdx$; indicando questi differenziali con dM e dN, si ha

$$Pdy-Qdx=\frac{1}{\mu}dM, \quad Pdz-Rdx=\frac{1}{\mu'}dN,$$

e l'equazioue (3) diventa $dN=\frac{q\mu'}{\mu}dM$, la quale non può essere integrata a meno che $\frac{q\mu'}{\mu}$ non sia una funzione qualunque di M. Si porrà dunque $\frac{q\mu'}{\mu}=\varphi'(M)$, per cui $dN=\varphi'(M)dM$, ed integrando verrà $N=\varphi(M)$, risultato nel quale φ indica sempre una funzione arbitraria, locchè si accorda con ciò che si è veduto intorno la formazione dell'equazioni differenziali parziali (140).

Per dare un esempio di questo caso, prendo l'equazione

$$px+qy=nz;$$

se ne ricava

$$P=x, \quad Q=y, \quad R=z,$$
$$Pdy-Qdx=xdy-ydx,$$
$$Pdz-Rdx=xdz-nzdx;$$

si trova mediante l'integrazione dell'equazioni

$$xdy-ydx=0, \quad xdz-nzdx=0,$$

che i fattori μ e μ' sono rispettivamente $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^{n+1}}$, e che per conseguenza $M=\frac{y}{x}$, $N=\frac{z}{x^n}$: ne segue dunque

$$\frac{z}{x^n}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ ovvero } z=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

cioè che z è una funzione omogenea in x e y, del grado n. Difatti l'equazione $px+qy=nz$, altro non è che il teorema delle funzioni omogenee, dato al n° 292, e di cui quello che precede somministra pure una dimostrazione pel caso di due variabili.

347. Quando le variabili x, y e z sono frammischiate indistintamente nelle funzioni $Pdy-Qdx$, $Pdz-Rdx$, non è più possibile di rendere queste funzioni integrabili, ciascuna in particolare col mezzo dei fattori, stantechè non si potrebbero integrare isolatamente l'equazioni

$$Pdy-Qdx=0, \qquad Pdz-Rdx=0,$$

perciocchè conviene ben osservare che z non debb'essere supposta costante nella prima, nè y nella seconda; ma si può ancora trasformare l'equazione (3) in un'altra che sia un differenziale esatto della forma $dN=\varphi'(M)\,dM$, purchè si riguardino le funzioni M e N come contenenti simultaneamente le tre variabili x, y, z.

In questo stato di cose l'equazione

$$dN=\varphi'(M)dM,$$

si sviluppa in

$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz=\varphi'(M)\left(\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz\right),$$

che debbe accordarsi con l'equazione (3). Ricavando dall'una e dall'altra il valore di dz, ed eguagliando i coefficienti dei differenziali dy e dx (339), si trova

$$-q=\frac{\frac{dN}{dy}-\varphi'(M)\frac{dM}{dy}}{\frac{dN}{dz}-\varphi'(M)\frac{dM}{dz}}, \qquad \frac{qQ-R}{P}=\frac{\frac{dN}{dx}-\varphi'(M)\frac{dM}{dx}}{\frac{dN}{dz}-\varphi'(M)\frac{dM}{dz}}.$$

La prima di quest'equazioni lascia arbitraria la funzione $\varphi'(M)$, poichè q è indeterminato; ma togliendolo dalla seconda equazione si cambia questo in

$$-\frac{Q}{P}\left(\frac{dN}{dy}-\varphi'(M)\frac{dM}{dy}\right)-\frac{R}{P}\left(\frac{dN}{dz}-\varphi'(M)\frac{dM}{dz}\right)=\left(\frac{dN}{dx}-\varphi'(M)\frac{dM}{dx}\right);$$

e siccome vi sono due funzioni incognite M e N, si potrà

dividere quest' ultima equazione in due altre, eguagliando separatamente a zero la parte che è moltiplicata per $\varphi'(M)$. In questo modo si avrà

$$\frac{dM}{dx}+\frac{Q}{P}\frac{dM}{dy}+\frac{R}{P}\frac{dM}{dz}=0,$$

$$\frac{dN}{dx}+\frac{Q}{P}\frac{dN}{dy}+\frac{R}{P}\frac{dN}{dz}=0,$$

ora dietro quello che si è veduto nel n° 321, le su esposte equazioni stabiliscono che $M=a$, $N=b$ sono gl' integrali del sistema dell' equazioni differenziali

$$dy-\frac{Q}{P}dx=0, \quad dz-\frac{R}{P}dx=0;$$

che conducono a

$$Pdy-Qdx=0, \quad Pdz-Rdx=0 \ (4):$$

è dunque all' integrazione di questo sistema che si riduce in questo luogo la determinazione delle funzioni M ed N.

Prendiamo a cagion d' esempio l' equazione

$$xp+zq=-y;$$

se ne ricava da prima

$$xdy-zdx=0, \quad xdz+ydx=0 \ (4'),$$

equazioni di cui niuna è integrabile in particolare; ma come ha notato il Monge, non è necessario di discendere sino al second' ordine, per dedurne dei differenziali esatti: basta eliminare dx, ciò che dà

$$ydy+zdz=0 \quad \text{e} \quad y^2+z^2=a.$$

Prendendo in quest' ultima il valore di y, si cambia la seconda dell' equazioni $(4')$ in

$$xdz+dx\sqrt{(a-z^2)}=0, \text{ o } \frac{dz}{\sqrt{(a-z^2)}}+\frac{dx}{x}=0,$$

della quale l'integrale è

$$\text{arc}\left(\text{sen}=\frac{z}{\sqrt{a}}\right)+lx=lb;$$

rimettendo per a il suo valore, e passando ai numeri, si ottiene

$$\text{arc}\left(\text{sen}=\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)_{x=b}$$

e

onde si conchiude

$$\text{arc}\left(\text{sen}=\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)_{x=\Phi(y^2+z^2)},$$

e

per l'integrale dell'equazione differenziale parziale proposta.

348. Si facilita molto in un gran numero di casi, l'integrazione dell'equazioni differenziali parziali del prim'ordine a tre variabili, dividendole in due altre mediante l'introduzione d'una quantità indeterminata, come si vedrà nel seguente esempio.

Sia l'equazione $f(p, x)=F(q, y)$; se si fa $f(p, x)=\omega$, si avrà nello stesso tempo $F(q, y)=\omega$, e se ne ricaveranno l'equazioni

$$p=f_1(\omega, x), \quad q=F_1(\omega, y);$$

f_1 e F_1 essendo funzioni dedotte da quelle che indicano f ed F. L'equazione $dz=pdx+qdy$, diverrà

$$dz=dxf_1(\omega, x)+dyF_1(\omega, y);$$

ma se si rappresentano gl'integrali

$$\int dxf_1(\omega, x), \quad \int dyF_1(\omega, y),$$

presi per riguardo alle sole variabili x e y, con P e Q, queste ultime quantità essendo pure funzioni di ω, verrà

$$dxf_1(\omega, x)=\frac{dP}{dx}dx=dP-\frac{dP}{d\omega}d\omega,$$

$$dy\,F_1(\omega, y)=\frac{dQ}{dy}dy=dQ-\frac{dQ}{d\omega}d\omega,$$

e per conseguenza

$$dz=dP+dQ-\left(\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega}\right)d\omega.$$

Quest' ultima equazione non può diventare differenziale esatta, che nella supposizione di

$$\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega}=\varphi'(\omega),$$

donde segue

$$\int\left(\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega}\right)d\omega=\varphi(\omega):$$

si avrà dunque

$$z+\Phi(\omega)=P+Q,\quad \varphi'(\omega)=\frac{dP}{d\omega}+\frac{dP}{d\omega},$$

equazioni fra le quali converrà eliminare ω, allorchè la funzione asbitraria $\varphi(\omega)$ sarà determinata.

Basta spesse volte di sostituire nell' equazione

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

il valore di p o di q, ricavato immediatamente dalla proposta, e d' integrare poscia per parti. Allorchè si ha, esempligrazia $p=f(q)$ (161), viene

$$dz=dx\,f(q)+q\,dy;$$

si trova

$$z=x\,f(q)+qy-\int\left[x\,f'(q)+y\right]dq;$$

e siccome l' integrazione indicata non si effettua che ponendo $x\,f_1(q)+y=\varphi'(q)$, ne risulta

$$z+\varphi(q)=x\,f(q)+qy,\quad \varphi'(q)=x\,f'(q)+y\ (^*).$$

(*) *Il Monge ha legato mediante considerazioni ingegnosissime, l'integrazione dell'equazioni differenziali parziali*

Dell' integrazione dell' equazioni differenziali parziali degli ordini superiori al primo.

349. Nel second' ordine i coefficienti differenziali sono tre di numero, per una funzione di due variabili, e una equazione differenziale parziale dello stess'ordine esprime, generalmente una relazione fra le variabili indipendenti, la cercata funzione e i suoi coefficienti differenziali, tanto del secondo che del primo. In un ordine qualunque siffatta

---

con la generazione delle superficie (Vedi la sua Geometria analitica). *L'analogia dei due argomenti si mostra pure con le forme degl' integrali su i quali siamo caduti in quello che precede. L' equazione* $N=\varphi(M)$ (347) *si riferisce al modo della generazione indicata nel n°.* 141; $M=a$, $N=\varphi(a)=b$, *sono l' equazioni delle linee di cui si compongono le superficie corrispondenti all' equazione differenziale parziale proposta, e che si succedono secondo la legge espressa dalla forma della funzione* φ.

La seconda forma d' integrale ottenuta nel numero precedente corrisponde al modo citato nel n° 162, *per la generazione delle superficie sviluppabili alle quali si riferisce il secondo esempio* $p=f(q)$ *L' integrale essendo allora espresso da due equazioni della forma*

$$V=0,\ \frac{dV}{d\omega}=0.$$

rappresenta le intersecazioni successive d' una serie di superficie dedotte dall' equazione $V=0$, *mediante la variazione della quantità* ω, *ed appartiene quindi al limite di tutte queste intersezioni: questo limite è dunque formato da linee di cui la natura è data dalle due equazioni che compongono l' integrale, allorchè si è particolarizzata la funzione arbitraria. Il Monge chiama queste linee* caratteristiche, *ed appella* superficie inviluppanti, *quelle che risultano dal sistema dell' equazioni ultimamente considerate.*

relazione può abbracciare con le variabili tutti i coefficienti differenziali dal prim' ordine sino a quello dell'equazione inclusivamente. Frattanto ne riferirò alcuni che si abbassano a degli ordini inferiori.

1°. Ogni equazione a tre variabili la quale sia della forma

$$f\left(x, y, \frac{d^n z}{dy^n}, \frac{d^{n+1} z}{dx dy^n}, \frac{d^{n+2} z}{dx^2 dy^n}, \cdots \frac{d^{n+m} z}{dx^m dy^n}\right) = 0,$$

si abbassa subito dell'ordine $m+n$ all'ordine m facendo $\frac{d^n z}{dy^n} = v$, poichè essa si cambia in

$$f\left(x, y, v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2 v}{dx^2}, \cdots \frac{d^m v}{dx^m}\right) = 0.$$

Debbesi allora supporvi y costante, stantechè tutti i coefficienti differenziali di v, che vi si trovano sono relativi ad x, e può per conseguenza trattarsi come fosse fra le sole variabili x e v; ma è evidente che per dare all'espressione di v tutta la generalità di cui è suscettibile, sarà necessario di sorrogare le m costanti arbitrarie ch'essa debbe racchiudere con altrettante funzioni arbitrarie della variabile y, presa da prima per costante. Avendo v ottenuta si risale a z, mediante l'equazione $\frac{d^n z}{dy^n} = v$, nella quale debbesi allora considerare x come costante, e che divenendo con ciò un' equazione dell' ordine n fra due variabili solamente, potrà trattarsi come l'equazioni di questo genere, osservando nondimeno di cambiare in funzioni arbitrarie di x, le n costanti arbitrarie introdotte, mediante questa nuova integrazione.

2°. L'equazioni della forma

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \cdots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0,$$

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}, \cdots \frac{d^n z}{dy^n}\right) = 0,$$

possono esser sempre immediatamente trattate come se vi entrassero due variabili soltanto, cioè x e z nella prima,

y e z nella seconda ; e dopo l' integrazione si sostituiranno alle costanti nell' una delle funzioni di y, e nell'altra delle funzioni di x.

L' equazioni del second' ordine

$$\frac{d^2z}{dxdy}+P\frac{dz}{dx}=Q\,,\qquad \frac{d^2z}{dxdy}+P\frac{dz}{dy}=Q,$$

nelle quali P e Q non contengono che x ed y, si riferiscono alla prima forma. Facendo $\frac{dz}{dx}=v$, la prima diventa $\frac{dv}{dy}+Pv=Q$, equazione del primo grado e del prim' ordine per rapporto alle variabili v e y, e di cui l' integrale è

$$v=e^{-\int Pdy}\left(\int e^{\int Pdy}Q\,dy+C\right)\quad (285).$$

Se si pone per v il suo valore $\frac{dz}{dx}$, e che si cambi C in $\varphi(x)$, si avrà

$$\frac{dz}{dx}=e^{-\int Pdy}\left[\int e^{\int Pdy}Qdy+\varphi(x)\right];$$

integrando questa volta per rapporto a z ed a x soltanto, si troverà

$$z=\int dx e^{-\int Pdy}\left[\int e^{\int Pdy}Qdy+\varphi(x)\right]+\psi(y):$$

trattando egualmente la seconda equazione si giungerebbe a

$$z=\int dy e^{-\int Pdx}\left[\int e^{\int Pdx}Qdx+\varphi(y)\right]+\psi(x).$$

Allorchè si avrà P=o, i superiori risultamenti si ridurranno a

$$z=\int dx\int Qdy+\int dx\varphi(x)+\psi(y),$$

in un caso e nell' altro a

$$z=\int dy\int Qdx+\int dy\varphi(y)+\psi(x);$$

ma siccome la funzione φ è arbitraria si scriverà semplicemente

$$z=\int dx\int Q dy+\varphi(x)+\psi(y),$$

$$z=\int dy\int Q dx+\varphi(y)+\psi(x).$$

Osserverò che questi ultimi casi non dipendono che dall'integrazione delle funzioni di una sola variabile, e sono stati trattati sotto questo punto di vista nel n° 271.

Si hanno degli esempi della seconda forma generale nelle due equazioni

$$\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}=Q, \quad \frac{d^2z}{dy^2}+P\frac{dz}{dy}=P;$$

la prima debb'essere trattata come un'equazione del second'ordine fra le variabili x e z; le costanti arbitrarie dovute alla sua integrazione saranno funzioni di y: si opererà nello stesso modo su la seconda per rapporto alle variabili y e z, e si cambieranno le costanti arbitrarie in funzioni di x. Per dare unicamente il caso più semplice, ridurrò l'equazioni proposte a

$$\frac{d^2z}{dx^2}=Q, \quad \frac{d^2z}{dy^2}=Q,$$

e supporrò che Q non contenga che x e y; le formole del n° 241 daranno immediatamente

$$z=\int dx\int Q dx+Cx+C', \quad z=\int dy\int Q dy+Cy+C',$$

donde si conchiuderà

$$z=\int dx\int Q dx+x\varphi(y)+\psi(y), \quad z=\int dy\int Q dy+y\varphi(x)+\psi(x).$$

350. Nel second'ordine considererò solamente l'equazioni in cui tutti i coefficienti differenziali di quest'ordine non sono che al primo grado e per semplificare i calcoli, farò uso delle seguenti denominazioni:

$$dz=p dx+q dy,$$
$$dp=r dx+s dy, \quad dq=s dx+t dy,$$
$$d^2z=dp dx+dq dy=r dx^2+2s dx dy+t dy^2,$$

già impiegate nel n° 144.

L'equazione differenziale parziale del second'ordine e a tre variabili considerata nel caso generale, non può dare

che l'espressione di uno dei coefficienti r, s, t, in funzione degli altri due e delle quantità p, q, x, y, z, locchè non basta per determinare i differenziali dp e dq. Si può ancora per mezzo di questi differenziali eliminare dalla proposta equazione, due dei tre coefficienti r, s, t, ed il risultamento sarà la relazione che quest'equazione suppone fra dp e dq : questo è quel processo che il Monge ha seguito.

L'applicherò all'equazione

$$Rr+Ss+Tt=V,$$

in cui suppporrò che le quantità R, S, T e U contengano in un modo qualunque x, y, z, p e q. Sostituendovi i valori di r e di t ricavati dall'equazioni

$$dp=rdx+sdy, \quad dq=sdx+tdy,$$

e che sono

$$r=\frac{dp-sdy}{dx}, \qquad t=\frac{dq-sdx}{dy},$$

si trova

$$Rdpdy+Tdqdx-Vdxdy=s(Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2),$$

equazione di cui sembra che converrebbe integrare separatamente i due membri, a motivo del coefficiente differenziale indeterminato s, che moltiplica il secondo; ma qui come nel n° 347, basta pervenire a due equazioni primitive $M=a$, $N=b$, le quali soddisfacciano contemporaneamente all'equazioni

$$Rdpdy+Tdqdx-Vdxdy=0,$$
$$Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2=0;$$

l'integrale della proposta sarà pure $N=\varphi(M)$.

Per dimostrarlo io trasformo da prima l'equazioni precedenti in altre, in cui i differenziali non oltrepassano il primo grado, e perciò faccio $dy=mdx$. La seconda di queste equazioni diventando dopo la sostituzione

$$Rm^2-Sm+T=0 \ldots . (A),$$

determina la quantità m; ponendo poscia per dy il suo valore nella $Rdpdy+Tdqdx-Vdxdy=0$, si avrà per

ciascuno dei valori di cui m è suscettibile, un sistema di equazioni della forma

$$\left.\begin{aligned} dy - m dx &= 0 \\ R m dp + T dq - V m dx &= 0 \end{aligned}\right\} (1),$$

al quale converrà aggiungere l'equazione

$$dz = p dx + q dy,$$

che esprime la relazione che hanno con la funzione z, i coefficienti p e q.

Posto ciò se l'equazioni $M = a$, $N = b$ soddisfanno all'equazioni (1), e che nei loro differenziali

$$\frac{dM}{dx} dx + \frac{dM}{dy} dy + \frac{dM}{dz} dz + \frac{dM}{dp} dp + \frac{dM}{dq} dq = 0,$$

$$\frac{dN}{dx} dx + \frac{dN}{dy} dy + \frac{dN}{dz} dz + \frac{dN}{dp} dp + \frac{dN}{dq} dq = 0,$$

si mette in luogo di dz, il suo valore $p dx + q dy$, ed in vece di dy e di dq, quelli che danno l'equazioni (1), le risultanti

$$\left(\frac{dM}{dx} + m \frac{dM}{dy} + (p + qm) \frac{dM}{dz} + \frac{Vm}{T} \frac{dM}{dq}\right) dx + \left(\frac{dM}{dp} - \frac{Rm}{T} \frac{dM}{dq}\right) dp = 0,$$

$$\left(\frac{dN}{dx} + m \frac{dN}{dy} + (p + qm) \frac{dN}{dz} + \frac{Vm}{T} \frac{dN}{dq}\right) dx + \left(\frac{dN}{dp} - \frac{Rm}{T} \frac{dN}{dq}\right) dp = 0,$$

dovranno essere identiche, ciascuna in particolare, e dividersi quindi nelle seguenti:

$$\frac{dM}{dx} + m \frac{dM}{dy} + (p + qm) \frac{dM}{dz} + \frac{Vm}{T} \frac{dM}{dq} = 0,$$

$$\frac{dM}{dp} - \frac{Rm}{T} \frac{dM}{dq} = 0,$$

$$\frac{dN}{dx}+m\frac{dN}{dy}+(p+qm)\frac{dN}{dz}+\frac{Vm}{T}\frac{dN}{dq}=0,$$
$$\frac{dN}{dp}-\frac{Rm}{T}\frac{dN}{dq}=0.$$

L'equazione $N=\varphi(M)$, essendo differenziata dà

$$dN=\varphi'(M)dM,$$

ovvero

$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\frac{dN}{dp}dp+\frac{dN}{dq}dq=$$
$$\varphi'(M)\left\{\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\frac{dM}{dp}dp+\frac{dM}{dq}dq\right\};$$

se si sostituisce in quest'ultima i valori di

$$\frac{dM}{dx},\ \frac{dM}{dp},\ \frac{dN}{dx},\ \frac{dN}{dp},$$

presi nelle quattro precedenti, e che si cambia dz in $pdx+qdy$, si otterrà

$$\left(\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}\right)(dy-mdx)$$
$$+\frac{1}{T}\frac{dN}{dq}(Rmdp+Tdq-Vmdx)=$$
$$\varphi'(M)\left\{\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)(dy-mdx)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{T}\frac{dM}{dq}(Rmdp+Tdq-Vmdx)\right\},$$

locchè conduce a

$$Rmdp+Tdq-Vmdx=\omega(dy-mdx),$$

facendo

$$\omega=\frac{\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}-\varphi'(M)\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)}{\frac{1}{T}\left(\frac{dN}{dq}-\varphi'(M)\frac{dM}{dq}\right)}.$$

Se si rimette $rdx+sdy$ e $sdx+tdy$, per dp e dq, e che si eguagli a zero ciò che moltiplica ciascuno dei differenziali indipendenti dx e dy, si otterrà

$$Rmr+Ts-Vm=-\omega m\ ,\quad Rms+Tt=\omega\ ;$$

poi ricavando da queste equazioni i valori dei coefficienti differenziali r e t, per sostituirli nella proposta, essa diventerà dopo le riduzioni

$$s(Rm^2-Sm+T)=0,$$

e in virtù dell' equazione (A), sarà soddisfatta indipendentemente dalle quantità ω e s.

Il teorema superiormente dimostrato, come i suoi analoghi negl' ordini superiori non ha la stessa generalità di quello del n° 347; poichè conviene bene osservare che le equazioni (1) possono simultaneamente contenere le cinque variabili x, y, z, p e q, e che aggiugnendovi anche l'equazione $dz=pdx+qdy$, si perverrebbe mediante l'eliminazione ad una risultante contenente soltanto tre variabili, la quale per conseguenza non potrebbe derivare da una sola equazione primitiva, che sotto certe condizioni (339). S' ingannerebbe tuttavia se si concludesse da ciò che quando le condizioni di cui si è parlato, non sono adempite l' equazione differenziale parziale proposta non può ella stessa derivare da una sola equazione primitiva; ma per pervenire al suo integrale, conviene aver ricorso ad altri processi e spesse volte non si arriva che ad uno sviluppo in serie come più lungi si vedrà (352, 353).

351. Sia per esempio l' equazione

$$Ar+Bs+Ct=V,$$

nella quale A, B e C sono costanti, e V è una funzione di x e di y. L'equazione (A) diventa in questo caso $Am^2-Bm+C=0$; le sue radici che rappresenterò con m' e m'', essendo costanti, somministrano due sistemi d' equazioni (1) che danno coll' integrazione

$$\left.\begin{aligned} y-m'x&=a\\ Am'p+Cq-m'\int V\,dx&=b\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y-m''x&=a'\\ Am''p+Cq-m''\int V\,dx&=b'\end{aligned}\right\},$$

e nelle quali l'integrale $\int V dx$ non dipende che da una sola variabile, perchè si può levare y da V, mediante il suo valore preso nella prima equazione di ciascun sistema: si hanno dunque nel tempo istesso i due integrali primi della proposta

$$Am'p+Cq-m'\int V dx=\Phi(y-m'x),$$
$$Am''p+Cq-m''\int V dx=\psi(y-m''x),$$

ed integrando una qualunque di quest' equazioni, si perverrà all' integrale secondo.

Se si prende la prima per esempio, essa dà

$$p=-\frac{C}{Am'}q+\frac{1}{A}\int V dx+\Phi(y-m'x);$$

si può per semplificare, porre m'' in luogo di $\frac{C}{Am'}$, poichè in virtù dell' equazione (A), $m'm''=\frac{C}{A}$; e sostituendo in $dz=pdx+qdy$, si troverà

$$dz-\frac{dx}{A}\int V dx-dx\varphi(y-m'x)=qdy-m''dx):$$

le equazioni da integrare (357) saranno dunque

$$dy-m''dx=0,\quad dz-\frac{dx}{A}\int V dx-dx\varphi(y-m'x)=0.$$

Si ricava dall' una, $y-m''x=a'$, locchè cambia l'altra in

$$dz-\frac{dx}{A}\int V dx-dx\varphi[a'+(m''-m')x]=0;$$

ma l' ultimo termine di questa equazione può essere posto sotto la forma

$$(m''-m')dx\varphi'[a'+(m''-m')x],$$

stantechè la funzione φ è arbitraria; e si vede allora che l' integrale di questo termine è $\varphi[a'+(m''-m')x]$, φ

indicando una nuova funzione arbitraria dipendente da φ'. Con questo mezzo, l'equazione precedente s'integra e dà

$$z-\frac{1}{A}\int dx\int V dx-\varphi(y-m'x)=b',$$

allorchè si rimette per a' il suo valore. Conviene notar bene che, per ottenere $\int dx\int V dx$, debbesi integrare la prima volta, per rapporto ad x, sostituendo in luogo di y il suo valore ricavato dall'equazione $y-m'x=a$, come si è detto di sopra; ma quando si sarà pervenuto al risultato si rimetterà in luogo di a, il suo valore $y-m'x$, e prima di effettuare la seconda integrazione, si cambierà y in $a'+m''x$, come lo esige l'equazione $y-m''x=a'$, in ultimo luogo trovata. In generale quando si avranno molte di siffatte integrazioni successive da effettuarsi, si potranno impiegare per la semplificazione loro, le sole equazioni, che debbono contemporaneamente aver luogo. Con queste diligenze, l'integrale secondo della proposta equazione $Ar+Bs+Ct=V$, sarà

$$z-\frac{1}{A}\int dx\int V dx=\mathcal{P}(y-m'x)+\mathcal{Q}(y-m''x),$$

Se si avesse $A=1$, $B=0$, $C=-c^2$ e $V=0$, locchè cangerebbe l'equazione proposta in

$$r-c^2t=0, \text{ ovvero } \frac{d^2z}{dx^2}=c^2\frac{d^2z}{dy^2}\ (*),$$

l'integrale diventerebbe

$$z=\varphi(y-cx)+\psi(y+cx).$$

352. Non solamente il metodo precedente non abbraccia tutti i casi dell'equazione di primo grado e di second'ordine

$$Ar+Bs+Ct+Dp+Eq+Fz=U,$$

(*) *Quest'equazione è quella delle corde vibranti.*

quand'anche vi si suppongano costanti i coefficienti del primo membro, ma essa ricade sull'equazione semplicissima

$$r=q, \quad \text{o} \quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dz}{dy},$$

ch'ella fa dipendere dall'integrazione dell'equazioni simultanee.

$$dy=0, \qquad dp-qdx=0 \ (350);$$

poichè la seconda che racchiude tre variabili p, q e x, non potrebbe diventare una differenziale esatta (339).

Non bisogna pertanto conchiudere da ciò che l'equazione differenziale parziale proposta non possa essere integrata, ed anche in un modo generalissimo. Se primieramente vi si fa $z=Ae^{mx+ny}$, le lettere A, m ed n rappresentano delle costanti indeterminate, il coefficiente A e l'esponenziale spariranno, e non rimarrà che l'equazione a due incognite

$$m^2=n,$$

alla quale si potrà con un'infinità di modi soddisfare. Se le si fissa m, se ne dedurrà l'espressione

$$z=Ae^{mx+m^2y},$$

che verifica l'equazione proposta qualunque siano i valori di A e di m: se dunque si prende per queste quantità una serie infinita di valori

$$A_1, m_1, A_2, m_2, A_3, m_3, \text{ ecc.},$$

si troveranno tante espressioni di cui la somma soddisferà ancora alla proposta (309), di modo che si avrà

$$z=Ae^{mx+m^2y}+Ae^{m_1x+m_1^2y} + A_2e^{m_2x+m_2^2y}+\text{ecc.},$$

serie alla quale si potranno dare quanti termini si vorranno.

Se si fosse preso m per incognita, ne sarebbe risultato

$$m=\pm\sqrt{n} \quad \text{e} \quad z=Ae^{\pm x\sqrt{n}+ny},$$

donde si avrebbero potuto dedurre per z, due serie differenti in apparenza cioè

$$z=Ae^{x\sqrt{n+ny}}+A_1e^{x\sqrt{n_1+n_1y}}+\text{ecc.},$$
$$z=Ae^{-x\sqrt{n+ny}}+A_1e^{-x\sqrt{n_1+n_1y}}+\text{ecc.};$$

ma questi risultamenti non sono più generali del primo, poichè si può dare ad m dei valori negativi come dei positivi.

353. Il Laplace credeva da prima che la proposta equazione non poteva ammettere delle funzioni arbitrarie nel suo integrale; il signor Paoli, ha pel primo riconosciuto il contrario, allorchè quest' ingrale era sviluppato in serie secondo le potenze di y. Di fatto se si pone

$$z=P+Qy+Ry^2+Sy^3+\text{ecc.},$$

P, Q, R, S indicando delle funzioni di x, si avrà

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dx^2}y+\frac{d^2R}{dx^2}y^2+\text{ecc.},$$

$$\frac{dz}{dy}=Q+2Ry+3Sy^2+\text{ecc.},$$

donde si conchiuderà

$$Q=\frac{d^2P}{dx^2},\quad R=\frac{1}{2}\frac{d^2Q}{dx^2}=\frac{1}{2}\frac{d^4P}{dx^4},\ \text{ecc.},$$

e siccome nulla determina P, così si può supporlo eguale ad una funzione arbitraria di x: si avià in questo modo

$$z=\varphi(x)+\varphi''(x)\frac{y}{1}+\varphi^{IV}(x)\frac{y^2}{1.2}+\text{ecc.}$$

in cui

$$\varphi''(x)=\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2},\quad \varphi^{IV}(x)=\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4},\ \text{ecc.}$$

Se si fosse sviluppato l'integrale secondo le potenze di x, ponendo

$$z = P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + \text{ecc.}$$

P, Q, R, S, ecc. indicando allora delle funzioni di y, i due primi coefficienti P, Q rimarrebbero indeterminati, e si potrebbero per conseguenza introdurre nell'espressione di z, due funzioni arbitrarie; ma il signor Poisson ha mostrato che questo secondo risultamento non era niente più generale del primo, e che la stessa circostanza si offriva in ogni equazione che non contenesse nello stesso tempo i due coefficienti differenziali del suo ordine presi per rapporto ad x sola, e ad y soltanto (*).

354. Quello che precede basta per provare che stabilir non debbesi un' analogia completa fra le funzioni arbitrarie che entrano negli integrali dell' equazioni parziali, e le costanti degl' integrali dell' equazioni differenziali ordinarie (298). Il numero delle prime non è sempre eguale all' esponente dell' ordine dell' equazione differenziale parziale proposta.

Questa osservazione può farsi direttamente sopra l' eliminazione delle funzioni arbitrarie, fra le primitive equazioni e i loro differenziali parziali (140); poichè sia $u=0$ un' equazione contenente con le variabili x, y, z, due funzioni arbitrarie $\varphi(s)$, $\psi(t)$ delle quantità s e t dati in x, y, z; se si passa ai differenziali primi e secondi secondo ciò che è stato prescritto nel n. 137, si troveranno cinque nuove equazioni cioè

$$\frac{du}{dx}=0, \qquad \frac{du}{dy}=0$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}=0, \quad \frac{d^2u}{dxdy}=0, \quad \frac{d^2u}{dy^2}=0,$$

e si saranno introdotte le quattro funzioni

$$\frac{d\varphi(s)}{ds}=\varphi'(s), \quad \frac{d\psi(t)}{dt}=\psi'(t),$$
$$\frac{d^2\chi(s)}{ds^2}=\varphi''(s), \quad \frac{d^2\perp(t)}{dt^2}=\psi''(t);$$

(*) *Vedi il Trattato in 4°, t. II. p. 639.*

si avranno dunque da eliminare sei funzioni incognite, vale a dire tante quante equazioni si hanno locchè si farà nel solo caso in cui mediante la forma particolare dell'equazione $u=0$, due di queste funzioni spariranno nello stesso tempo.

355. Le funzioni arbitrarie che entrano negl'integrali dell'equazioni differenziali parziali, si determinano supponendo che la funzione z prenda delle forme particolari, allorchè si assegnano delle relazioni fra le variabili y ed x. Ecco due esempi di siffatte determinazione, nei casi i più semplici.

1.° Se si ha $1=M\varphi(V)$, M e T indicando delle funzioni date in x, y e z, e che determinar si voglia la funzione rappresentata dalla caratteristica φ, in modo che ponendo $F(x, y, z)=0$, si abbia nello stesso tempo $f(x, y, z)=0$, le caratteristiche F e f indicando delle funzioni cognite, si farà $V=t$, e si combineranno le tre equazioni

$$V=t, \qquad F(x, y, z)=0, \qquad f(x, y, z)=0,$$

per ricavarne dei valori di x, y e z in t; sostituendo questi valori in M, che diverrà una funzione di t, che indico con T, si avrà

$$1=T\varphi(t), \quad \text{ovvero} \quad \varphi(t)=\frac{1}{T},$$

e la funzioue φ sarà per conseguenza determinata, se si rimette in quest'ultima equazione per t e T, i loro valori in x, y e z.

2°. Sia

$$1=M\varphi(V)+N\psi(V);$$

siccome vi sono due funzioni da determinare così conviene che vi siano due condizioni: debbesi supporre che

$$F(x, y, z)=0 \quad \text{dà} \quad f(x, y, z)=0,$$

e che $$F'(x, y, z)=0 \quad \text{dà} \quad f'(x, y, z)=0.$$

Facendo sempre $V=t$, e ricavando dalle tre equazioni

$$V=t, \quad F(x, y, z)=0, \quad f(x, y, z)=0,$$

i valori di x, y, z in t, si cambieranno M, N in funzioni di t; ed indicando con T e θ queste funzioni, si avrà

$$1=T\varphi(t)+\theta\psi(t) \ldots\ldots (1).$$

Si combineranno poscia l'equazioni

$$V=t, \quad F'(x, y, z)=0, \quad f'(x, y, z)=0,$$

per dedurne dei valori di x, y, z in t, affine di trasformare ancora M e N in funzioni di questa sola variabile; e se i risultamenti vengono rappresentati da T' e θ', verrà

$$1=T'\varphi(t)+\theta'\psi(t) \ldots\ldots (2).$$

Mediante l'equazioni (1) e (2) si determineranno le funzioni φ e ψ in t, poi si rimetterà in luogo di t il suo valore V (*).

Del metodo delle variazioni.

Ricerca della variazione d'una funzione qualunque

356. Tutte le applicazioni del calcolo differenziale presentate precedentemente suppongono che la dipendenza delle variabili rimanga costantemente la stessa nel corso della quistione; ma vi sono diversi generi di problemi, pei quali conviene concepire che questa dipendenza cambia: eccone un esempio. Quando V indica una funzione contenente x,

(*) *La determinazione delle funzioni arbitrarie dipende in far passare per delle curve date, le superfice che rappresentano l'equazioni proposte; e queste curve possono essere continue o discontinue, come le funzioni stesse. Se le funzioni* φ *e* ψ *dipendessero da quantità diverse, non si potrebbe più procedere come qui sopra.* (Vedi *il Trattato in* 4°, t. *III*, *p.* 228).

y e i coefficienti differenziali di y, l' integrale $\int V dx$ è suscettibile tra gli stessi valori di x, d' un infinità di valori, i quali dipendono dalla stabilita relazione tra x e y; di modo che si può domandare qual è fra tutte le possibili relazioni, quella che fa prendere all' integrale $\int V dx$, allorchè, non si particolarizzi la relazione di y ad x, esprimendo la misura d'una comune proprietà a tutte le curve si domanda allora per qual curva questa proprietà è un *massimo* o un *minimo*. È chiaro che se CE, *fig.* 60, rappresenta questa curva bisognerà che per qualunque altra $\gamma\varepsilon$, l' integrale $\int V dx$ abbia un più piccol valore nel primo caso, e più grande nel secondo. Per soddisfare a questa condizione la prima cosa da cercarsi è la differenza, che un cambiamento qualunque nella relazione di y ad x, o nella natura della curva che rappresenta questa relazione, produce nell' integrale $\int V dx$. Questo cambiamento si esprime facendo variare y indipendentemente da x; poichè quando si considerano due curve CE e $\gamma\varepsilon$, la stessa ascissa AP corrisponde a due ordinate PM e Pμ, e la loro differenza Mμ debb' essere distinta dalle differenze M'R e $\mu' p$, che hanno luogo fra due ordinate consecutive prese sulla stessa curva.

Il Lagrangia che segnò il principio della sua carriera colla scoperta del calcolo delle variazioni ne ha fatto ancora alla meccanica un' applicazione della più grande importanza di cui si conoscerà facilmente lo scopo, se si osserva che si possono considerare le coordinate dei diversi punti d' un corpo che si muove, sia per paragonare nel medesimo istante due punti di questo corpo, sia per confrontare due posizioni consecutive dello stesso punto. In uno di questi casi, non vi è fra le coordinate altra dipendenza che quella che risulta dalle superficie, le quali terminano il corpo; nell' altro le coordinate cambiano secondo le condizioni del moto stabilito, e con una nuova variabile, che è la misura del tempo: ecco dunque ancora due modi di far variare le stesse quantità, che è bene di notare con segni distinti. Quello di questi modi che succede all'altro costituisce il *calcolo delle variazioni* di cui non si possono abbracciare i diversi usi, che riguardandola come *avente per scopo di differenziare sotto un nuovo punto di vista delle quantità che già sono state differenziate sotto un altro*; si stabilisce poscia nel

secondo modo di differenziazione, l'ipotesi propria alla natura delle quistioni le quali si propongono di risolvere (*).

357. Si è con la caratteristica δ che il Lagrangia indica la nuova differenziazione, ed è stato quest'uso adottato. Per non escire dai confini del mio proposto mi limiterò a sviluppare i principii dell'applicazione del calcolo delle variazioni alle quistioni geometriche.

In queste quistioni la caratteristica d s'impiega pel passaggio di un punto ad un altro su la stessa curva, e la caratteristica δ è applicata al cambiamento di curva: così M R, essendo rappresentata da dy (60), M μ sarà δy; e da ciò segue che

$$P'M'=y+dy,\ P\mu=y+\delta y.$$

Passando dal punto M' al punto μ', poi tirando μr parallela a MM, si vedrà che

$$\mu' r=\mu'\rho-M'R=d.P\mu-d.PM.$$

è il cambiamento di dy, da una curva all'altra e si avrà

$$\begin{aligned} P'\mu'&=P\mu+\rho r+\mu' r=y+\delta y+dy+\delta dy \\ &=y+dy+\delta(y+dy); \end{aligned}$$

ma il punto μ', essendo consecutivo al punto μ, su la curva $y\varepsilon$, si avrà pure

$$P'\mu'=y+\delta y+d(y+\delta y)=y+\delta y+dy+d\delta y,$$

ed il confronto di queste due espressioni darà

$$\delta dy=d\delta y.$$

La stessa cosa può egualmente provarsi senza la considerazione delle curve rappresentando con $\varphi(x)$ lo stato primitivo di y, e con un' altra funzione $\psi(x)$ il suo stato dopo la variazione (**). Allora $\delta y=\psi(x)-\varphi(x)$ sarà una

---

(*) *Vedete la meccanica analitica, seconda edizione p. 80 del t. I.*

(**) *Onde dare un origine comune alle funzioni* φ *e* ψ

certa funzione di x, e per conseguenza una funzione di y, in causa del primitivo legame di queste variabili; indicando dunque con π quest' ultima funzione si avrà

$$\delta y = \pi(y).$$

Dietro questa legge e facendo per brevità $y+dy=y'$, similmente si avrà

$$\delta y' = \pi(y');$$

per cui si conchiuderà

$$\delta y' - \delta y = \pi(y') - \pi(y) = d.\pi(y) = d\delta y;$$

Eulero che si affrettò di addottare ed illustrare il calcolo delle variazioni riguardava il valore primitivo di y, o $\varphi(x)$, *come dedotto da un' altra funzione contenente, con la variabile* x, *una nuova variabile* t, *e cambiandosi in* $\varphi(x)$ *allorchè* $t=0$. (Novi Comm. Acad. Petrop., t. XVI, p. 35). *Con questo mezzo* $y+\delta y$ *diventa* $y+\frac{dy}{dt}dt$, e $\frac{dy}{dt}$ *essendo preso nell' ipotesi di* $t=0$, *rappresenta finchè non si particolarizzi la composizione di* y *in* t, *una funzione arbitraria di* x. *Il valore generale di* y *sarebbe espresso dalla serie*

$$y+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{1}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{1.2}+\text{ecc.},$$

la variabile t, *essendo supposta eguale a zero in* y *e i suoi coefficienti differenziali; e prendendo i coefficienti differenziali di questa serie per rapporto ad* x, *si formerebbero tutte le quantità che bisogna sostituire per ottenere lo stato variato dell' integrale* $\int V dx$, *ordinato secondo le potenze di* dt. *Si è sotto questa forma che il Lagrangia nell' ultima edizione delle sue* lezioni su il calcolo delle funzioni *presenta quello delle variazioni riguardo al quale entra in molti dettagli interessantissimi. (Vedete il trattato in* 4°, *t. II pag* 723).

ma siccome

$$dy=y'-y.$$

verrà prendendo le variazioni

$$\delta dy=\delta y'-\delta y=\pi(y')-\pi(y),$$

ciò che dà ancora

$$\delta dy=d\delta y.$$

Da ciò segue che $\delta d^2y=d\delta dy+d^2\delta y$; e continuando in questo modo si otterrà il teorema fondamentale

$$\delta d^n y=d^n\delta y,$$

in virtù del quale *si può trasportare la caratteristica* δ *dopo la caratteristica* d.

Per dare più simmetria al calcolo come per abbracciare delle circostanze relative ai limiti degli integrali, e di cui si vedrà più lungi alcuni esempi si fa variare x come pure y; ma il superiore teorema non cessa per questo d'aver luogo perchè la legge della variazione essendo costante, quantunque arbitraria δx è una funzione di x dalla quale si ricava $\delta x'$ cambiandovi x in x': ne risulta $\delta dx=d\delta x$, e similmente $\delta dV=d\delta V$, per qualunque funzione V dipendente da x, da y e dai loro differenziali.

358. Esiste un teorema analogo per rapporto al segno $\int$. In fatti se si rappresenta $\int U$ con U_1, verrà

$$dU_1=U, \text{ poi } \delta dU_1=\delta U;$$

trasportando la caratteristica d, e passando poscia agli integrali si troverà successivamente

$$d\delta U_1=\delta U, \quad \delta U_1=\int \delta U;$$

poi rimettendo per U_1 il suo valore si avrà finalmente

$$\delta \int U=\int \delta U.$$

359. Posto ciò si vede che per ottenere la variazione di una funzione qualunque U, contenente x, y e i loro differenziali di qualunque ordine conviene supporre che x e y si cambiano rispettivamente in $x+\delta x, y+\delta y$, e riguardare δx e δy come funzioni arbitrarie l'una di x, l'altra

di y. Limitandosi ai termini in cui le variazioni non oltrepassano il primo grado, l'operazione riducesi a differenziare mediante il processo ordinario la funzione U tanto per rapporto ad x e ad y quanto per rapporto ai differenziali loro considerati come variabili distinte, ma segnando con la caratteristica δ l'ultima differenziazione. Egli è chiaro diffatti che in quest'ipotesi i differenziali di

$$x,\ y,\ \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \text{ecc.},$$

sono

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta \mathrm{d}x,\ \delta \mathrm{d}y,\ \text{ecc.}$$

Se dunque il differenziale ordinario di U è

$$\begin{aligned}\mathrm{dU} = {} & \mathrm{M}\mathrm{d}x + \mathrm{N}\mathrm{d}^2x + \mathrm{P}\mathrm{d}^3x + \mathrm{Q}\mathrm{d}^4x + \text{ecc.} \\ & + m\mathrm{d}y + n\mathrm{d}^2y + p\mathrm{d}^3y + q\mathrm{d}^4y + \text{ecc.},\end{aligned}$$

basterà cambiarvi l'ultimo d in δ, e verrà

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{U} = {} & \mathrm{M}\delta x + \mathrm{N}\delta\mathrm{d}x + \mathrm{P}\delta\mathrm{d}^2x + \mathrm{Q}\delta\mathrm{d}^3x + \text{ecc.} \\ & + m\delta y + n\delta\mathrm{d}y + p\delta\mathrm{d}^2y + q\delta\mathrm{d}^3y + \text{ecc.}\end{aligned}$$

Quando la funzione U sarà sotto la forma $\mathrm{V}\mathrm{d}x$ non contenendo allora V che

$$x,\ y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p,\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q,\ \text{ecc.},$$

si avrà

$$\mathrm{dV} = \mathrm{M}\mathrm{d}x + \mathrm{N}\mathrm{d}y + \mathrm{P}\mathrm{d}p + \mathrm{Q}\mathrm{d}q + \mathrm{R}\mathrm{d}r + \text{ecc.},$$

e la variazione di V sarà

$$\delta\mathrm{V} = \mathrm{M}\delta x + \mathrm{N}\delta y + \mathrm{P}\delta p + \mathrm{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \text{ecc.},$$

osservando che le quantità p, q, r, ecc. debbono esservi riguardate come contenenti due variabili indipendenti x ed y (n° precedente) e che per conseguenza si può prendere la variazione loro in due ipotesi diverse, cioè facendo variare soltanto una di queste quantità o facendole variare tutte due. Opererò quivi sotto quest' ultimo punto di vista, poichè come ho già detto è più generale e che d'altronde se ne ricavano i risultati che convengono al primo, sopprimendo i termini relativi a quella delle variabili che si

vuole trattare come costante. Differenziando con la caratteristica δ, le frazioni

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{dy}{dx} \\ q &= \frac{dp}{dx} \\ r &= \frac{dq}{dx} \end{aligned}\right\} \text{ si trova } \left\{\begin{aligned} \delta p &= \frac{dx\delta dy - dy\,\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y - p d\delta x}{dx}, \\ \delta q &= \frac{dx\delta dp - dp\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta p - q d\delta x}{dx}, \\ \delta r &= \frac{dx\delta dq - dq\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta q - r d\delta x}{dx}, \end{aligned}\right.$$

ecc. ecc.,

e coll'aiuto di queste formole si ottiene la variazione di una espressione qualunque contenente x, y e i loro differenziali di qualsiasi ordine.

360. Allorchè si tratta d'una formola integrale $\int U$, nella quale U, è come superiormente una funzione di x, y e dei loro differenziali si ha $\delta \int U = \int \delta U$(358), e mediante il numero precedente

$$\begin{aligned} \int \delta U = \int (&M\delta x + N\delta dx + P\delta d^2x + Q\delta d^3x + \text{ecc.}) \\ &+ \int (m\delta y + n\delta dy + p\delta d^2y + q\delta d^3y + \text{ecc.}) \end{aligned}$$

Questa espressione non è ridotta alla forma più semplice che aver possa: bisogna fare in modo che non rimanga sotto il segno $\int$ alcun termine che contenga simultaneamente le caratteristiche d e δ applicata l'una sull'altra; ed è a ciò che si perviene trasportando da prima la caratteristica δ dopo la caratteristica d, ed integrando in seguito a parti come qui sotto si vede

$$\int M\delta x = \int M\delta x,$$

$$\int N\delta dx = \int N d\,\delta x = N\delta x - \int dN\delta x,$$

$$\int P\delta d^2x = \int P d^2\delta x = P d\delta x - \int dP d\,\delta x = P d\,\delta x - d\,P\delta x + \int d^2P\delta x,$$

$$\int Q\delta d^3x = \int Q d^3\delta x = Q d^2\delta x - \int dQ d^2\delta x = Q d^2\delta x - dQ d\delta x + \int d^2Q d\delta x$$

$$= Q d^2\delta x - dQ d\delta x + d^2Q\delta x - \int d^3Q\delta x,$$

ecc. ecc.

Si avrà similmente

$$\int m\delta y = \int m\delta y,$$
$$\int n\,dy = \int n\,d\delta y + n\delta y - \int dn\,\delta y,$$
$$\int p\delta d^2y = \int p\,d^2\delta y = p\,d\delta y - dp\delta y + \int d^2p\delta y,$$
$$\int q\delta d^3y = \int q\,d^3\delta y = q\,d^2\delta y - dq\,d\delta y + d^2q\delta y - \int d^3q\delta y,$$

ecc.

e sostituendo verrà

$$\begin{aligned}\int \delta U = {} & (N - dP + d^2Q - \text{ecc.})\delta x + (P - dQ + \text{ecc.})\,d\delta x, \\ & + (Q - \text{ecc.})\,d^2\delta x + \text{ecc.} \\ & + (n - dp + d^2q - \text{ecc.})\delta y + (p - dq + \text{ecc.})\,d\delta y \\ & + (q - \text{ecc.})\,d^2\delta y + \text{ecc.} \\ & + \int (M - dN + d^2P - d^3Q + \text{ecc.})\delta x \\ & + \int (m - dn + d^2p - d^3q + \text{ecc.})\delta y.\end{aligned}$$

Questo risultamento è composto di due parti simili l'una prodotta dalla variazione di x; e l'altra da quella di y; ed è facile vedere che si estenderebbe ad una funzione di un numero qualunque di variabili, aggiuguendovi per ciascuna dei termini simili a quelli, che ha fornito la variabile x o la variabile y.

361. Quando l'espressione $\int U$ è posta sotto la forma $\int V dx$, cioè che entrano in V le variabili x, y e i coefficienti differenziali di y, il calcolo dello sviluppo della variazione sembra un poco più complicato, ma conduce a delle conseguenze rimarchevoli. Conviene da prima osservare che

$$\delta \int V\,dx = \int \delta(V\,dx) = \int V\,d\delta x + \int dx\,\delta V,$$
$$\int V\,d\delta x = V\delta x - \int dV\,\delta x,$$

e che per conseguenza

$$\delta \int V\,dx = V\delta x + \int (dx\,\delta V - dV\delta x).$$

La quantità $dx\delta V - dV\delta x$ si forma scrivendo per δV e dV i valori riferiti nel n° 359 e viene

$$\begin{aligned}dx\delta V - dV\delta x = {} & N(dx\delta y - dy\,\delta x) + P(dx\delta p - dp\delta x) \\ & + Q(dx\delta q - dq\delta x) + \text{ecc.};\end{aligned}$$

poi ponendo $p\,dx$ per dy, in quello che moltiplica N, e il valore di δp (359), in quello che moltiplica P, si troverà

$$\mathrm{d}x\delta y-\mathrm{d}y\delta x=\mathrm{d}x(\delta y-p\delta x),$$
$$\mathrm{d}x\delta p-\mathrm{d}p\delta x=\mathrm{d}\delta y-p\mathrm{d}\delta x-\mathrm{d}p\delta x=\mathrm{d}(\delta y-p\delta x),$$

donde segue

$$\mathrm{d}x\delta p-\mathrm{d}p\delta x=\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x\delta y-\mathrm{d}y\delta x}{\mathrm{d}x}\right).$$

Se si cambia y in p e p in q, si otterrà egualmente

$$\mathrm{d}x\delta p-\mathrm{d}q\delta x=\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x\delta p-\mathrm{d}p\delta x}{\mathrm{d}x}\right),$$

e così di seguito: facendo dunque

$$\delta y-p\delta x=\omega,$$

ne risulterà

$$\mathrm{d}x\delta y-\mathrm{d}y\,\delta x=\omega\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}x\delta p-\mathrm{d}p\delta x=\mathrm{d}\omega,$$
$$\mathrm{d}x\delta q-\mathrm{d}q\delta x=\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}, \text{ ecc.}$$

e per conseguenza

$$\int(\mathrm{d}x\delta \mathrm{V}-\mathrm{d}\mathrm{V}\delta x)=\int \mathrm{N}\omega\,\mathrm{d}x+\int \mathrm{P}\mathrm{d}\omega + \int \mathrm{Q}\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}+\text{ ecc.}$$

Integrando a parte nel secondo membro di quest'equazione, ciascuno dei termini in cui vi sono delle differenziazioni indicate sulla quantità ω si avrà

$$\int \mathrm{P}\mathrm{d}\omega=\mathrm{P}\omega-\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}}{\mathrm{d}x}\cdot\omega\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{Q}\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}=\mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}-\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\omega$$

$$=\mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}}{\mathrm{d}x}\omega+\int\frac{1}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}}{\mathrm{d}x}\cdot\omega\mathrm{d}x$$

ecc. ;

e con queste espressioni, si otterrà

$$\delta\int V dx = V dx + \left(P - \frac{dQ}{dx} + \text{ecc.}\right)\omega + \left(Q - \text{ecc.}\right)\frac{d\omega}{dx} + \text{ecc.} + \int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\,d\,\frac{dQ}{dx} - \text{ecc.}\right)\omega dx.$$

si estenderebbe senza difficoltà, questo risultamento ad un maggior numero di variabili dipendenti da x, aggiugnendo per ciascuno dei termini simili a quelli che si sono trovati considerando la sola y; ma ciò che importa di osservare si è che se si rimette per ω il suo valore $\delta y - p\delta x$, la parte affetta dal segno $\int$ prende la forma

$$\int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\,d\,\frac{dQ}{dx} - \text{ecc.}\right)dx\delta y - \int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\,d\,\frac{dQ}{dx} - \text{ecc.}\right)p dx\delta x;$$

e si vede che in questo caso il coefficiente di δy e quello di δx hanno una relazione che non si scorge nel numero precedente: rappresentando il primo di questi coefficienti con ψ, il secondo sarà $-\psi p$.

362. Un'osservazione non meno degna di attenzione, è quella che se nello sviluppo di $\delta\int U$(360), si avesse

$$M - dN + d^2P - d^3Q + \text{ecc.} = 0,$$
$$m - dn + d^2p - d^3q + \text{ecc.} = 0,$$

la variazione $\int\delta U$ sarebbe interamente liberata dal segno $\int$; ma queste equazioni sono precisamente quelle che debbono aver luogo, affinchè la funzione U sia per se stessa integrabile. Questa proposizione annunziata nel n° 280, si prova *a priori*, applicando alla ricerca di queste condizioni il metodo stesso delle variazioni.

Imperocche sia U il differenziale di una funzione U_1, si avrà $U = dU_1$, e per conseguenza

$$\delta U = \delta dU_1 = d\delta U_1,$$

onde segue che se U è un differenziale esatto, δU debb'esserne similmente uno, e per consegenza quando si è fatto sortire dal segno $\int$, nell'espressione di $\int \delta U$, tutti i termini che possono integrarsi, conviene che l'insieme di quelli che rimangono sia per se stesso nullo senza che si abbia bisogno di supporre alcuna relazione fra x, y, δx e δy.

Lo sviluppo di $\delta \int V dx$, non somministrando che la sola condizione

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ}{dx} - \text{ecc.} = 0,$$

mostra che quella che si riferisce alla variabile x, diventa inutile quando la funzione U è ricondotta alla forma $V dx$, V contenendo soltanto x, y e dei coefficienti differenziali di y (*).

363. Queste osservazioni non si limitano all'espressione di $\int U$, ma anche si estendono a quelle $\int\int U$, $\int\int\int U$, ecc., qualunque sia il numero dei segni d'integrazione; e cercando pure la variazione di queste ultime formole, si trovano le equazioni di condizione che debbono aver luogo affinchè la quantità U sia il differenziale esatto d'una funzione U_1 d'un ordine immediatamente inferiore, di una funzione U_2 d'un ordine inferiore di due unità, e così di seguito.

In fatti, poichè

$$U_2 = \int U_1, \quad U_1 = \int U,$$

(*) *Questa trasformazione non è sempre possibile. Siano per esempio le funzioni*

$$\frac{dx d^2y + dy d^2x}{dx^2} \text{ e } \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^2};$$

se vi si cambia

$$dy \text{ in } p dx, \; d^2y \text{ in } q dx^2 + p d^2x \text{ (131).}$$

d^2x *non sparisce che nella seconda: non si può dunque nella prima considerare* y *come dipendente immediatamente da* x. (Vedete il Trattato in 4° t. I. p. 217).

verrà

$$\delta U_2 = \delta \int U_1 = \int \delta U_1 = \int \delta \int U ;$$

e si otterrà δU_2, integrando di nuovo $\delta \int U$. Ora, per n.° 360.

$$\begin{aligned}\delta \int U = {} & (N - dP + d^2Q - \text{ecc.})\delta x + (P - dQ + \text{ecc.})d\delta x \\ & + (Q - \text{ecc.})d^2\delta x + \text{ecc.} \\ & + (n - dp + d^2q - \text{ecc.})\delta y + (p - dq + \text{ecc.})d\delta y \\ & + (q - \text{ecc.})d^2\delta y \text{ ecc.} \\ & + \int (M - dN + d^2P - d^3Q + \text{ecc.})\delta x \\ & + \int (m - dn + d^2p - d^3q + \text{ecc.})\delta y .\end{aligned}$$

si avrà dunque

$$\begin{aligned}\delta U_2 = {} & \int (N - dP + d^2Q - \text{ecc.})\delta x + \int (P - dQ + \text{ecc.})d\delta x \\ & + \int (Q - \text{ecc.})d^2\delta x + \text{ecc.} \\ & + \int (n - dp + d^2q - \text{ecc.})\delta y + \int (p - dq + \text{ecc.})d\delta y \\ & + \int (q - \text{ecc.})d^2\delta y + \text{ecc.} \\ & + \iint (M - dN + d^2P - d^3Q + \text{ecc.})\delta x \\ & + \iint (m - dn + d^2p - d^3q + \text{ecc.})\delta y ;\end{aligned}$$

ed integrando a parti i termini i quali contengono ancora dei differenziali di δx o di δy, si troverà

$$\begin{aligned}\delta U_2 = {} & (P - 2dQ + 3d^2R - \text{ecc.})\delta x + (Q - 2dR + \text{ecc.})d\delta x \\ & + (R - \text{ecc.})d^2\delta x + \text{ecc.} \\ & + (p - 2dq + 2d^2r - \text{ecc.})\delta y + (q - 2dr + \text{ecc.})d\delta y \\ & + (r - \text{ecc.})d^2\delta y + \text{ecc.} \\ & + \int (N - 2dP + 3d^2Q - 4d^3R + \text{ecc.})\delta x \\ & + \int (n - 2dp + 3d^2q - 4d^3r + \text{ecc.})\delta y \\ & + \iint (M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \text{ecc.})\delta x . \\ & + \iint (m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \text{ecc.})\delta y .\end{aligned}$$

Tale è la variazione domandata che non sarà liberata dai due segni $\int$ che quando le equazioni

$$\begin{aligned} N - 2dP + 3d^2Q - 4d^3R + \text{ecc.} &= 0, \\ n - 2dp + 3d^2q - 4d^3r + \text{ecc.} &= 0, \\ M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \text{ecc.} &= 0, \\ m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \text{ecc.} &= 0, \end{aligned}$$

saranno identiche; allora δU_2, essendo integrato una sol volta per rapporto alle variazioni darrà U_2, o l'integrale secondo della proposta.

Sia esempligrazia.

$$U=xd^2y+2dxdy+yd^2x;$$

si ha
$$\delta U=d^2y\delta x+2dyd\delta x+yd^2\delta x$$
$$+d^2x\delta y+2dxd\delta y+xd^2\delta y,$$

$$M=d^2y,\ N=2dy,\ P=y,$$
$$m=d^2x,\ n=2dx,\ p=x,$$

e le equazioni qui sopra di condizione divengono

$$2dy-2dy=0,$$
$$2dx-2dx=0,$$
$$d^2y-2d^2y=d^2y=0,$$
$$d^2x-2d^2x+d^2x=0:$$

la proposta funzione è dunque immediatamente integrabile. La parte $y\delta x+x\delta y$, liberata dal segno $\int$, dà integraudola per rapporto alle variazioni $U_2=xy$.

L'andamento dei calcoli precedenti mostra che la prima integrazione d'una funzione differenziale di m variabili, esige m condizioni, quando queste variabili sono considerate come indipendenti, e che per un numero n d'integrazioni successive, vi sarebbe mn equazioni di condizione. Ve ne sarebbero soltanto $m-1$, per la prima integrazione, e $n(m-1)$ per tutte insieme, se la funzione proposta fosse la forma $\int^n V dx^n$ non contenendo V che dei coefficenti differenziali.

Dei massimi e dei minimi delle formole integrali indeterminate.

364. Si possono chiamare *integrali indeterminati*, le espressioni come $\int y dx$, $\int V(dx^2+dy^2)$ allorchè non si assegna alcuna forma alla funzione y; ma per essere suscettibile di *massimo* o di *minimo*, questi integrali debbono essere *definiti* (229), poichè questi sono fra dei limiti dati i quali avranno un valor fisso, quando y sarà determinato in x.

I principii esposti nel n° 155 riguardo alle funzioni di cui la forma è data, si applicano pure col soccorso del calcolo delle variazioni agl'integrali indeterminati. Diffatti

dall' andamento tracciato nel n° 45 il risultato della sostituzione di

$$x+\ x,\ y+\delta y,\ \mathrm{d}x+\delta\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y+\ \mathrm{d}y,\ \text{ecc.},$$

in luogo delle quantità

$$x,\ y,\ \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \text{ecc.},$$

in una qualunque funzione u di queste quantità potrà ordinarsi secondo le potenze delle variazioni

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta\mathrm{d}x,\ \delta\mathrm{d}y,\ \text{ecc.},$$

e conterrà δu tutti i termini di questo sviluppo nei quali le variazioni non arrivano che al primo grado. Questi termini cambiando di segno contemporaneamente alle variazioni debbono secondo la teorica superiormente richiamata annientarsi all' occasione del *massimo* e del *minimo* qualunque siano le variazioni δx e δy: conviene dunque che $\delta u=0$. Allorchè $u=\int U$ risulta $\delta u=\int\delta U$(358): pel massimo e pel minimo di $\int U$, si ha dunque $\int\delta U=0$, osservando che è fra i limiti assegnati a $\int U$ che $\int\delta U$ debbe sparire.

Risulta pure dalla stessa teorica che la condizione $\delta u=0$, non toglie necessariamente l' esistenza del massimo o del minimo, perchè bisogna inoltre che i termini in cui le variazioni si elevano al secondo grado conservino sempre lo stesso segno; la discussione di queste ultime condizioni è troppo complicata e troppo delicata per trovar qui luogo.

365. Lo sviluppo di $\int\delta U$ è composto di due parti ben distinte (360), poichè l' una è liberata dal segno $\int$, e l' altra vi rimane sottoposta; si può rappresentare la prima con

$$\alpha\delta x+\beta\delta y+\alpha_1\mathrm{d}\delta x+\beta_1\mathrm{d}\delta y+\text{ecc.},$$

e la seconda con

$$\int(\chi\delta x+\psi\delta y).$$

Queste parti non potrebbero essere paragonate fra loro poichè l ultima non è in modo alcuno integrabile finchè δx e δy conservano l' indipendenza che esige la natura

del problema; ed in questo stato non si può farla sparire che ponendo separatamente l' equazioni

$$\chi=0, \quad \psi=0,$$

di cui il numero è generalmente eguale a quello delle variazioni indipendenti; ma allorchè non vi sono che due variabili, e che U può prendere la forma $V dx$, lo sviluppo della variazione di $\int V dx$, nel n° 361, fa vedere che $\chi=-\psi p$, e che per conseguenza $\chi dx+\iota dy=0$, condizione d' altronde facile da verificarsi in particolare su ciascun esempio. Risulta da ciò che l' una dell' equazioni $\chi=0$, $\psi=0$, avendo luogo l' altra che segue e nella quale soltanto esiste fra x e y, una sola relazione si sarebbe egualmente ottenuta ponendo $\delta x=0$, vale a dire non facendo in alcun modo variare x; ma siffatta ipotesi restringerebbe di molto come si vedrà fra poco le proprietà della parte liberata dal segno $\int$ nelle variazioni.

Segue da ciò che precede che l' equazioni indicate nel n° 362, come esprimenti le condizioni che rendono integrabili le formole $\int U$ e $\int V dx$ e che sono allora identiche determinano quando cessano di esserlo la relazione di y ad x, mediante la quale gl' integrali proposti diventano un massimo o un minimo. Facilmente si conosce che quest' equazioni possono elevarsi sino all' ordine di cui l' esponente è doppio di quello del più alto differenziale contenuto sia in U sia in V.

366. Dopo la sparizione della parte affetta dal segno $\int$, rimane

$$\alpha\delta x+\beta\delta y+\alpha_1 d\delta x+\beta_1 d\delta y+\text{ecc.},$$

espressione che per brevità rappresenterò con Φ: si avrà dunque $\int\delta U=\varphi+$ *costant.*, e il valore completo di questo integrale si otterrà prendendo la differenza di quelli che riceve la quantità φ' in ciascuno dei due limiti (229); di modo che se φ' indica questo valore pel primo limite e φ'' per l' ultimo si avrà $\int\delta U=\varphi''-\varphi'$, onde risulterà ancora per il *massimo* ed il *minimo* all' integrale $\int U$, la condizione

$$\varphi''-\varphi'=0;$$

ma bisogna bene osservare che quest' equazione contiene soltanto delle quantità che si riferiscono ai limiti dell' integrale $\int U$ per cui le variazioni δx, δy, $\delta \mathrm{d}x$, $\delta \mathrm{d}y$, ecc., possono essere nulle o semplicemente legate fra loro con delle relazioni date secondo che questi limiti saranno determinati o variabili. La spiegazione geometrica di queste diverse circostanze bastantemente le rischiarirà.

La prima ha luogo allorchè la curva che rende *massimo* o *minimo* l' integrale proposto debb' esser preso fra le curve soggette a passare per due punti di cui le coordinate sono determinate come tutto ciò che vi si riferisce, e che l' integrale debbe cominciare da uno di questi punti e finire all' altro. Se x' e y' rappresentano le coordinate del primo, x'' e y'' quelle del secondo, queste quantità appartenendo a tutte le curve che considerar si potranno nella quistione di cui si tratta non proveranno alcuna variazione: quando dunque si cambierà x e y in x' e in y', poi in x'' ed in y'', converrà fare

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta x'' = 0, \quad \delta y'' = 0.$$

Allora i termini affetti da queste variazioni spariranno da loro stessi dall' equazione $\varphi'' - \varphi' = 0$, che sarà per conseguenza verificata se contiene unicamente questi termini; e la curva deposta dall' equazione $\chi = 0$, risolverà completamente il problema purchè si disponga a passare per i due punti dati; locchè generalmente si effettuerà mediante la determinazione delle costanti arbitrarie comprese nell' integrale della citata equazione che sarà allora del second' ordine.

Se l' equazione $\varphi'' - \varphi' = 0$ contenesse inoltre i termini affetti di $\delta \mathrm{d}x'$, $\delta \mathrm{d}y'$, $\delta \mathrm{d}x''$, $\delta \mathrm{d}y''$, e che oltre la condizione precedente le tangenti della curva cercata aver dovessero ai limiti dell' integrale una inclinazione data, questi termini scomparirebbero pure da loro stessi perchè i differenziali $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ non provando alcun cambiamento ai limiti, le variazioni $\delta \mathrm{d}x'$, $\delta \mathrm{d}y'$, $\delta \mathrm{d}x''$, $\delta \mathrm{d}y''$, sarebbero zero e farebbero sparire i prodotti in cui entrano esse: ma per assoggettare la curva cercata a questa condizione per rapporto alle tangenti de' suoi punti estremi, bisognerebbe che la sua equazione contenesse due costanti arbitrarie di più che nel caso esaminato precedentemente, e che quindi

l'equazione differenziale $\chi = o$ fosse del quart'ordine. Ecco quanto basta per mostrare come debbe verificarsi l'equazione $\varphi'' - \varphi' = o$, allorchè le coordinate dei limiti e i loro coefficenti differenziali hanno dei determinati valori: passo ai casi in cui i limiti debbono essere considerati come variabili.

367. Si può domandare che la curva dottata del *massimo* o del *minimo* della proposta proprietà sia presa non fra tutte le curve le quali passano per due punti dati, ma fra tutte quelle che condotte sarebbero fra due curve date AA' e BB' *fig.* 61, senza determinare i punti ove quest'ultime sono tagliate da quella che si cerca. È chiaro che passando allora dalla curva AB, ad un'altra A'B', le estremità A e B si muovono; le ascisse che corrispondono al principio ed alla fine dell'integrale dopo ch'esso ha variato non sono più quelle che convenivano al suo stato primitivo, e le ordinate che vi si riferiscono hanno cambiato seguendo la legge stabilita dalle curve AA' e BB'. In questa circostanza le variazioni delle ordinate e quelle delle loro ascisse debbono avere le relazioni stesse che i differenziali relativi alle curve AA', BB', relazioni espresse dall'equazioni di queste curve che date sono; è dunque necessario d'introdurle nell'equazione $\varphi'' - \Phi' = o$; e per poscia verificarla converrà eguagliare separatamente a zero i coefficienti delle variazioni le quali rimarranno indipendenti.

A misura che la funzione $\int U$ conterrà dei differenziali di un ordine più elevato, il numero dei termini dell'equazione $\varphi'' - \varphi' = o$ aumentando si potranno aggiugnere delle nuove condizioni ai limiti; supporre esempligrazia che la curva AB debb'esser presa fra tutte quelle che toccano contemporaneamente le due curve AA' e BB'. Con quest'ultima condizione non solamente le coordinate x e y aver debbono ai limiti dell'integrale le relazioni espresse dall'equazioni di queste curve; ma lo stesso debb'essere dei loro differenziali: così le variazioni $\delta dx'$, $\delta dy'$, $\delta dx''$, $\delta dy''$, non sono più indipendenti, e coincider debbono coi differenziali secondi, relativi alle proposte curve. Si potranno con siffatte relazioni eliminare alcune delle variazioni $\delta dx'$, $\delta dy'$, $\delta dx''$, $\delta dy''$, dall'equazione $\Phi'' - \varphi' = o$; e in seguito si verificherà uguagliando

separatamente a zero i coefficienti delle rimaneuti variazioni i quali saranno del tutto arbitrari.

Le equazioni che si procureranno con questo mezzo stabilendo delle relazioni fra le coordinate dei punti estremi della curva proposta, porteranno necessariamente su le costanti introdotte con l' integrazione dell' equazione $\chi = o$, e serviranno a determinarle.

368. Debbesi in seguito osservare che, poichè vi sono delle circostanze in cui bisogna aver riguardo alle variazioni dei limiti degl' integrali se le coordinate $x' y'$, $x'' y''$ di questi limiti entrassero nell' espressione di U sarebbe necessario di farvele variare come pure x ed y, e di aumentare per conseguenza δU dei termini

$$\begin{gathered} A'\delta x' + B'\delta y' + A''\delta x'' + B''\delta y'' \\ + A'_1 d\delta x' + B'_1 d\delta y' + A''_1 d\delta x'' + B''_1 d\delta y'' + \text{ecc.} \end{gathered}$$

Ora siccome le variazioni $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$ sono indipendenti dalle coordinate indeterminate x e y, così passerebbero esse fuori dal segno $\int$, mentre che le funzioni A', A'', ecc., A'_1, A''_1, ecc., vi rimarrebbero sottoposte: converrebbe dunque introdurre nella prima parte della variazione $\int \delta U$ i termini

$$\begin{gathered} \delta x' \int A' + \delta y' \int B' + \delta x'' \int A'' + \delta y'' \int B'' \\ + d\delta x' \int A'_1 + d\delta y' \int B'_1 + d\delta x'' \int A''_1 + d\delta y'' B''_1 + \text{ecc.}, \end{gathered}$$

avendo cura di prendere questi integrali fra i limiti stessi della proposta.

Non si scorge subitamente ciò che diverrebbero i termini precedenti se l' uno dei limiti fosse nel tempo istesso l' origine delle coordinate. Si evita questa difficoltà facendo da prima

$$x = X - x', \quad y = Y - y',$$

e concependo che l' origine delle coordinate X, Y sia determinata ma che le quantità x' e y' siano variabili; risulta allora

$$\delta x = \delta X - \delta x', \quad \delta y = \delta Y - \delta y'.$$

Quanto ai differenziali dx, dy, ecc., non dipendono essi in modo alcuno dalle quantità x' e y', e non prendono per conseguenza alcuna variazione: l' espressione di δU diventa dunque solamente

$$M(\delta X-\delta x')+N\delta dX+\text{ecc.}$$
$$+m(\delta Y-\delta y')+n\delta\, dY+\text{ecc.}$$

È lecito di fare in seguito x', y' eguali a zero purchè si lascino sussistere le variazioni $\delta y'$ che possono essere considerate come il primo grado di grandezza di queste quantità, allora X e Y ritornano x ed y e il cambiamento dell' espressione di $\int\delta U$ si riduce ai termini $-\delta x'\int M-\delta y'\int m$ di cui bisogna prendere gl' integrali nei limiti primitivi.

369. Sia proposto di determinare y in x affinchè l'integrale $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, preso fra due dati limiti diventi un *minimo* ovvero ciò che è lo stesso *trovare la linea più corta che condur si possa fra due punti sopra un piano.* Si ha

$$\delta U=\delta\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dx\delta dx+dy\delta dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}},$$

$$\text{e}\quad \int\delta U=\int\frac{dx}{ds}d\delta x+\int\frac{dy}{ds}d\delta y,$$

facendo $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=ds$ e trasponendo la caratteristica δ Integrando poscia a parti si trova

$$\int\delta U=\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y-\int\left(d\frac{dx}{ds}\delta x+d\frac{dy}{ds}\delta y\right),$$

e la parte affetta dal segno $\int$ dà (365)

$$d\frac{dx}{ds}=0,\ \text{onde}\ \frac{dx}{ds}=C,\ \frac{dy}{dx}=C',\quad y=C'x+C''.$$

Questo risultamento, come aspettar si dovea, indica la linea retta e le costanti che racchiude serviranno ad adempiere le condizioni relative ai punti fra i quali debb' essere condotta.

La parte che è liberata dal segno $\int$, o φ (366), contenendo soltanto le variazioni delle coordinate dei punti estremi sparisce quando sono determinati, e le costanti C' e C'' si determinano allora assoggettando la proposta retta a passare per questi punti. Quando non sono

determinati, ma che trovar si debbono solamente sopra delle date curve conviene che le quantità x' e y', x'', e y'', che sono incognite soddisfacciano come le loro variazioni all'equazione $\varphi''-\varphi'=0$, che diventa

$$\frac{dx''}{ds''}\delta x''+\frac{dy''}{ds''}\delta y''-\frac{dx'}{ds'}\delta x'-\frac{dy'}{ds'}\delta y'=0,$$

e coll'equazioni delle curve date di cui rappresenterò i differenziali con

$$dy=mdx,\quad dy=ndx:$$

si avrà dunque (379),

$$\delta y'=m'\delta x',\qquad \delta y''=n''\delta x'',$$

$$\left(\frac{dx''}{ds''}+n''\frac{dy''}{ds''}\right)\delta x''-\left(\frac{dx'}{ds'}+m'\frac{dy'}{ds'}\right)\delta x'=0.$$

A motivo della indipendenza delle variazioni $\delta x''$ e $\delta x'$, quest'equazione si divide nelle seguenti:

$$dx''+n''dy''=0,\quad \text{ovvero } \frac{dy''}{dx''}=-\frac{1}{n''},$$

$$dx'+m'dy'=0,\quad \text{ovvero } \frac{dy'}{dx'}=-\frac{1}{m'},$$

le quali esprimono che la retta proposta debb'essere normale a ciascuna delle date curve.

Dall'equazione $y=C'x+C''$, si ha $dy=C'dx$ per tutti i punti della retta, e l'equazioni precedenti diventano per conseguenza

$$1+C\,n''=0,\qquad 1+C'm'=0;$$

ma la costante C' dipende dalle coordinate dei punti estremi, poichè l'equazione della retta condotta per questi punti essendo

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x');\ \text{dà } C'=\frac{y'-y''}{x'-x''};$$

e sostituendo questo valore di C', ne risultano l'equazioni

$$x'-x''+n''(y'-y'')=0, \qquad x'-x''+m'(y'-y'')=0,$$

di cui la combinazione con quelle delle curve date determina i punti in cui avviene la più corta distanza di queste curve, e completa la soluzione del problema proposto.

Si perverrebbe alle stesse equazioni supponendo primieramente che i punti estremi siano determinati circostanza nella quale si ha fra x e y, l'equazione

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

In fatti mediante questa relazione l'integrale $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ diventa fra le ascisse x' e x'',

$$(x'-x'')\sqrt{\left\{1+\left[\frac{y'-y''}{x'-x''}\right]^2\right\}}=\sqrt{[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2]};$$

e la sola applicazione del calcolo differenziale basta per determinare il minimo di quest'espressione avendo riguardo alla dipendenza che stabiliscono fra x' e y', x'' e y'' l'equazioni delle curve date.

È in questo modo che si determina senza il soccorso dell'equazione $\varphi''-\varphi'=0$, e per cui i metodi del Bernoulli e dell'Eulero non davano la soluzione dei problemi simili al precedente, tutte le volte che ottener si sapeva l'integrale proposto, ma considerando che quest'ingrale è una funzione implicita delle quantità che si riferiscono a suoi limiti, il Sig. Poisson, col mezzo della differenziazione sotto il segno $\int$ (281), ha cercato immediatamente per rapporto a queste quantità le condizioni del massimo assoluto dell'integrale proposto, ed è pervenuto all'equazione $\varphi''-\varphi'=0$, tale come risulta dal metodo delle variazioni (*).

370. Il problema del n° precedente essendo trasportato nello spazio, conduce a determinare z e y, in funzioni di

---

(*) Vedi il trattato in 4°, t. II, p. 70.

x, nell'espressione $\int \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Facendo $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=ds$, viene

$$\int \delta \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} = \int \frac{dx}{ds} d\delta x + \int \frac{dy}{ds} d\delta y + \int \frac{dz}{ds} d\delta z =$$

$$\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z - \int \left(d\,\frac{dx}{ds}\delta x + d\frac{dy}{ds}\delta y + d\frac{dz}{ds}\delta z \right).$$

La parte affetta dal segno $\int$ fornisce la tre equazioni

$$d\frac{dx}{ds}=0, \quad d\frac{dy}{ds}=0, \quad d\frac{dz}{ds}=0,$$

di cui tutte le combinazioni 2 a 2 si accordano a dare

$$\frac{dz}{dx}=costant., \quad \frac{dz}{dy}=costant.,$$

e mostrano che la cercata linea è retta.

Se quesra retta debb'essere condotta fra un punto determinato ed una superficie curva di cui l'equazione differenziale sia

$$dz=pdx+qdy,$$

converrà che all'ultimo limite $\delta z''=p''\delta x''+q''\delta y''$. Il primo essendo determinato renderà $\varphi'=0$, ed il valore di $\delta z''$ cambierà $\varphi''=0$ in

$$(dx''+p''dz'')\delta x''+(dy''+q''dz'')\delta y''=0;$$

eguagliando a zero i coefficienti delle variazioni indipendenti verrà

$$dx''+p''dz''=0, \qquad dy''+q''dz''=0,$$

onde si vedrà pel n° 150 che la retta cercata è normale alla superficie data.

Se questa più corta linea debb'essere tutt'intera sopra una data superficie curva, bisognerà che le variazioni δx, δy, δz, sotto il segno $\int$, soddisfacciano all'equazione differenziale di questa superficie che rappresenterò con $dz=pdx+qdy$: si farà dunque

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

in $\int \delta U$, che diverrà con questa sostituzione

$$\left(\frac{dx}{ds} + p\frac{dz}{ds}\right)\delta x + \left(\frac{dy}{ds} + q\frac{dz}{ds}\right)\delta y$$
$$- \int \left\{ \left(d\frac{dx}{ds} + p d\frac{dz}{ds} \right) \delta x + \left(d\frac{dy}{ds} + q d\frac{dz}{ds} \right) \delta y \right\}.$$

Dalla parte affetta dal segno $\int$, si ricavano l'equazioni

$$d\frac{dx}{ds} + p\, d\frac{dz}{ds} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} + q d\frac{dz}{ds} = 0,$$

di cui una sola basta (361), congiuntamente a quella della superficie data per determinare la natura della linea più corta che condur si possa su questa superficie, fra due de' suoi punti.

Supponendo che questa linea debba esser condotta fra un punto fisso ed una curva presa su la stessa superficie si avrà primieramente $\varphi' = 0$; e indicando con $dy = n dx$, l'equazione differenziale della proiezione su il piano delle xy, della curva data, verrà $\delta y'' = n'' \delta x''$; poi l'equazione $\varphi'' = 0$, cambiandosi in

$$dx'' + p'' dz'' + (dy'' + q'' dz'') n'' = 0,$$

esprimerà che le due curve di cui si tratta si tagliano ad angolo retto.

371. Cercherò pure la relazione di x ad y propria a rendere minima l'espressione $\int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{[2(y - Y)]}}$, nella quale considererò Y come una funzione delle coordinate x' e y', x'' e y'', relative ai limiti (*).

Per risolvere la quistione in tutta la sua generalità, conviene far variare Y come y (368). Sia

---

(*) *Questo problema è quello della Brachistocrona, curva lungo la quale un corpo discende nel minor tempo possibile da un punto ad un altro.*

$$\sqrt{[2(y-Y)]}=u, \qquad \sqrt{(dx^2+dy^2)}=ds;$$

verrà

$$\delta u=\frac{\delta y-\delta Y}{u}, \quad \delta ds=\frac{dx}{ds}d\delta x+\frac{dy}{ds}d\delta y$$

$$e \int \frac{ds}{u}=-\int \frac{ds}{u^3}(\delta y-\delta Y)+\int \frac{dx}{uds}d\delta x+\int \frac{dy}{uds}d\delta y$$

$$=\delta Y\frac{ds}{u^3}+\frac{dx}{uds}\delta x+\frac{dy}{uds}\delta y$$

$$-\int\Big\{d\frac{dx}{uds}\delta x+\Big(\frac{ds}{u^3}+d\frac{dy}{uds}\Big)\delta y\Big\}.$$

Si ricavano dai termini affetti dal segno f, l'equazioni

$$d\frac{dx}{uds}=0, \quad \frac{ds}{u^3}+d\frac{dy}{uds}=0;$$

la prima, che è la più semplice dà

$$\frac{dx}{uds}=C, \quad \text{onde} \quad \frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=C\sqrt{[2(y-Y)]},$$

Questo risultamento indica una cicloide (114); poichè se vi si fa $y-Y=z$, se ne dedurrà

$$dx=\frac{dz\sqrt{2C^2}.\sqrt{z}}{\sqrt{(1-2C^2z)}}=\frac{zdz}{\sqrt{\Big(\frac{1}{2C^2}z-z^2\Big)}}.$$

Allorchè $\delta y=0$, la quantità φ dà pei limiti l'equazioni

$$dx''\delta x''+dy''\delta y''=0, \qquad dx'\delta x'+dy'\delta y'=0,$$

dietro le quali si riconoscerà come nel n.° 369, che se la curva cercata è condotta fra due altre, essa incontrar le debbe ad angolo retto.

Quando δY non è nullo bisogna calcolare il valore di $\int \frac{ds}{u^3}$, fra i limiti dell'integrale proposto; ora l'equazione

$$\frac{ds}{u^3}+d\frac{dy}{uds}=0,$$

somministrata dal coefficiente di δy sotto il segno $\int$, dà

$$\int\frac{ds}{u^3}=-\frac{dy}{uds}+constant.;$$

ed osservando che δY, non dipendendo in alcun modo dalle variabili indeterminate x e y, non debbe cambiare da un limite ad un altro l'equazione $\varphi''-\varphi'=0$ diventa

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{dy''}{u''ds''}\delta Y+\frac{dx''}{u''ds''}\delta x''+\frac{dy''}{u''ds''}dy''\\&+\frac{dy'}{u'ds'}\delta Y-\frac{dx'}{u'ds'}\delta x'-\frac{dy'}{u'ds'}\delta y'\end{aligned}\right\}=0.$$

Se si prende soltanto $Y=y'$, donde segue $\delta Y=\delta y'$, si avrà riducendo e separando le variazioni relative a ciascun limite

$$\frac{dx''}{u''ds''}\delta x''+\frac{dy''}{u''ds''}\delta y''=0,\quad \frac{dx'}{u'ds'}\delta x'+\frac{dy'}{u'ds'}\delta y'=0;$$

poi facendo come nel n.° 369,

$$\delta y''=n''\delta x'',\qquad \delta y'=m'\delta x',$$

e ricordandosi che $\frac{dx}{uds}=C$, le superiori equazioni prenderanno la forma

$$C+\frac{dy''}{u''ds''}n''=0,\quad C+\frac{dy''}{u'ds}m'=0,$$

per cui $n''=m'$. Questo risultamento fa vedere che ai punti ove la curva cercata incontra le date curve, queste aver debbono le loro tangenti parallele. Inoltre l'equazione relativa all'ultimo limite riducendosi a

$$dx''\delta x''+dy''\delta y''=0,$$

mostra ancora che la curva cercata tagliar deve ad angolo retto la seconda curva data.

372. I problemi precedenti si riferiscono a dei massimi o a dei minimi assoluti; eccone uno in cui si tratta del massimo e del minimo relativo: *Fra tutte le relazioni, che aver possono fra loro le variabili* x, y, *e che danno uno stesso valore all'integrale indeterminato* $\int U_1$ *preso da* $x=x'$ *sino a* $x=x''$ *trovar quello che rende la forma* $\int U$ *un massimo o un minimo nelle stesse circostanze.* Questo problema si risolve eguagliando a zero la variazione della funzione $\int U+a\int U_1$, essendo a un coefficiente costante indeterminato. Non è qui il luogo di dimostrare dettagliatamente questa regola; si concepisce d'altronde che se la funzione superiore è un massimo o un minimo e che si faccia $\int U_1=A$ l'integrale $\int U$ avrà sempre il maggiore od il minore dei valori ch'egli prender potrebbe in quest'ipotesi (*) Il coefficiente indeterminato a serve ad adempiere la condizione $\int U_1=A$.

Se esempligrazia si domandasse *la curva che sotto un dato perimetro racchiude il maggiore o minor spazio* si avrebbe

$$\int U+a\int U_1=\int\left[y\,dx+a\sqrt{(dx^2+dy^2)}\right];$$

facendo $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=ds$, la parte della variazione affetta dal segno $\int$ sarebbe

$$-\int\left\{\left(dy-a\,d\frac{dx}{ds}\right)\varrho x-\left(dx-a\,d\frac{dy}{ds}\right)\varrho y\right\},$$

e darebbe le equazioni

$$dy+a\,d\frac{dx}{ds}=0,\quad dx-a\,d\frac{dy}{ds}=0,$$

di cui una sola basta per determinare la curva cercata (365); ma il calcolo è più semplice allorchè s'impiegano tutte due. Gl'integrali loro

---

(*) *Vedi il trattato in* 4°, *t. II*, *pag.* 803.

$$y+a\frac{dx}{ds}=C', \qquad x-a\frac{dy}{ds}=C,$$

essendo posti sotto la forma

$$y-C'=-a\frac{dx}{ds}, \quad x-C=a\frac{dy}{ds},$$

poscia elevati al quadrato e quindi addizionati fra loro i corrispondenti membri conducono a

$$(y-C')^2+(x-C)^2=a^2,$$

locchè rappresenta un circolo di cui il raggio è a.

Questo raggio si determina dal valore assegnato al perimetro $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; le costanti C e C' servir possono a far passare il circolo per dei limiti fissi e dati. È dottato del massimo in quanto all'area allorchè presenta la sua concavità verso l'asse delle ascisse, e del minimo se il contrario ha luogo. Tale è il caso più semplice del *problema degl'isoperimetri* così chiamato perchè da prima vi si considerano delle curve soltanto dello stesso perimetro.

APPENDICE

AL

TRATTATO ELEMENTARE

DEL CALCOLO

DIFFERENZIALE E INTEGRALE

DELLE DIFFERENZE E DELLE SERIE

Del calcolo diretto delle differenze.

373. Nel calcolo differenziale si fanno variare unicamente le funzioni considerando la forma dei termini del loro sviluppo, o i limiti dei rapporti dei loro incrementi a quelli delle variabili da cui dipendono, non avendo riguardo ai valori di questi incrementi. Siffatta ricerca non portava che su nuove funziozi derivate dalla prima e non su i valori numerici de' suoi incrementi ; ma l'esame di questi valori ha mostrato che in un gran numero di casi esse seguono delle leggi più semplici che quella della funzione stessa , o almeno formano spesso delle serie decrescenti le quali si prestano più facilmente alle approssimazioni ed alle quali per conseguenza può esser utile di ridurre le quantità primitive. Ed è sotto questo punto di vista che si sono da prima occupati del *calcolo colle differenze* propriamente detto.

Gli hanno dato il nome di *calcolo colle differenze finite* per distinguerlo dal *calcolo colle differenze infinitamente piccole ;* ma la denominazione di *calcolo differenziale* esclusivamente applicata a quest' ultimo e mentovata come si è veduto (5) prevenendo ogni equivoco non è necessario d' aggiugnere l' epiteto *finite* alle *differenze* che non potrebbero confondersi con i differenziali.

Lo scopo del calcolo diretto è dunque di determinare gli incrementi per loro stessi deducendoli non solamente dall' espressione analitica delle funzioni, ma anche dai loro valori numerici o particolari allorchè l' espressione analitica è mancante o fosse troppo complicata.

374. Esaminando l' andamento delle serie formate dai quadrati e dai cubi dei termini della serie dei numeri naturali, si arriva a delle proprietà rimarchevoli ed utili, delle differenze come lo mostrerà la spiegazione delle tavole qui sotto.

Quadrati	Differ. 1°.	Differ. 2°.
1		
4	3	
9	5	2
16	7	2
25	9	2
36	11	2
49	13	2
ecc.	ecc.	ecc.

Cubi	Differ. 1°.	Differ. 2°.	Differ. 3°.
1			
8	7		
27	19	12	
64	37	18	6
125	61	24	6
216	91	30	6
343	127	36	6
ecc.	ecc.	ecc.	ecc.

Non ho fatto entrare in queste tavole la serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, ecc., perchè la differenza dell'uno all'altro è sempre eguale all'unità.

Accanto ai quadrati la prima tavola contiene in una seconda colonna la differenza fra ciascuno di questi e quello che lo procede; poi in una terza colonna la differenza fra ciascuno dei numeri della seconda e quello che lo precede. Queste ultime sono chiamate *differenze seconde* come essendo le differenze delle *differenze prime.*

Queste formando una progressione per differenze, presentano già una legge più semplice che i numeri della prima colonna; e le altre seconde costanti offrono ancora una nuova semplificazione. Una conseguenza assai importante della connessione di queste differenze, e che si può col mezzo dei soli numeri 1, 3, 2, posti rispettivamente alla testa delle tre colonne della tavola, formare mediante semplici addizioni la colonna dei quadrati, poichè aggiugnendo 2 a 4, si avrà 7, e si formerà così la seconda colonna: aggiugnendo poscia 3 con 2, si avrà 4, 5 con 4, si avrà 9, e così degli altri quadrati.

La prima colonna della seconda tavola contiene i cubi, la seconda le loro differenze prime; la terza le loro differenze seconde, che più non formano che una progressione per differenze; e finalmente nella quarta colonna le differenze delle differenze seconde, o le *differenze terze*, le quali sono costanti.

In questo luogo col mezzo dei quattro numeri 1, 7, 12 e 6 posti rispettivamente in testa delle diverse colonne della tavola *si potranno formare tutte queste colonne, cominciando da quella della destra, ed aggiugnendo ciascuno dei numeri d'una stessa colonna, con quello che si trova su una linea più alta nella colonna a sinistra.*

Questa regola la quale non è ancora stabilita che su una semplice induzione, e per due serie di numeri solamente; sarà ben presto dimostrata ed estesa a un numero infinito di funzioni per le quali si ottengono così delle determinazioni rigorose.

Dall'altra parte, che in una tavola di logaritmi si prendono le differenze prime fra quelli dei numeri consecutivi avranno esse un inegualissimo andamento se si opera nel

cominciamento della tavola in cui molto varia la funzione; ma passando alle differenze seconde terze ecc., se ne troveranno che diverranno piccolissime e finiranno col restare le stesse in un intervallo più o meno grande. I logaritmi seguiranno dunque sensibilmente nel tempo di quest'intervallo una legge analoga a quella che abbiamo fatto superiormente osservare per rapporto ai quadrati e ai cubi, e di cui si può far uso per semplificare la costruzione di questa tavola.

375. Quando si è veduto il partito che si può ricavare dalla considerazione delle successive differenze spinte sino all'ordine ove sono costanti, sia rigorosamente, sia prossimamente sembra semplicissimo di cercare l'espressione generale delle loro relazioni. Perciò sia

$$u, u_1, u_2, u_3 \ldots u_n,$$

una serie di valori consecutivi che riceve una quantità in virtù delle variazioni che prova per se stessa o per l'effetto di quelle che provono da un'altra da cui essa dipende; le cifre inferiori sono in questo luogo indici che fanno conoscere il posto che occupa ciascun valore nella serie, notando il numero di quelle che la precedono, di modo che la prima u, è considerata corrispondere all'indice o. Si fa poscia

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u = \Delta u \\ u_2 - u_1 = \Delta u_1 \\ u_3 - u_2 = \Delta u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

servendosi della caratteristica Δ, per denotare l'operazione di prendere la differenza fra due valori consecutivi d'una stessa quantità.

Allorchè questa quantità varia per gradi uguali, le differenze Δu, Δu_1, Δu_2, ecc. sono tutte eguali; ma se ha luogo il contrario si fa per analogia.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u_1 - \Delta u = \Delta\Delta u = \Delta^2 u \\ \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta\Delta u_1 = \Delta^2 u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta\Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1} \\ \text{ecc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = \Delta\Delta^2 u = \Delta^3 u \\ \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = \Delta\Delta^2 u_1 = \Delta^3 u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n-1} = \Delta\Delta^2 u_{n-1} = \Delta^3 u_{n-1}\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

ecc.

Proseguendo in questo modo si ricava dai valori u, u_1, u_2, $\ldots\ldots u_n$, una serie di differenze di cui il numero degli ordini è, al più, eguale a quello di questi valori diminuito dell'unità.

376. È chiaro che secondo la superiore osservazione, la differenza di una qualunque espressione s'indicherà ponendo davanti a ciascuno de' suoi termini la caratteristica Δ, di modo che

$$\begin{aligned}\Delta(u+v-w) &= u_1+v_1-w_1-(u+v-w) \\ &= \Delta u+\Delta v-\Delta w,\end{aligned}$$

egualmente che

$$d(u+v-w) = du+dv-dw \quad (10).$$

si ha pure

$$\Delta(au) \text{ ovvero } \Delta.au = a(u_1-u) = a\Delta u,$$

egualmente che $d.au = adu$; e le costanti isolate dalle variabili spariscono quando si prende la differenza di una funzione (7).

377. Col mezzo di queste regole e dell'equazioni (1), si ottengono per i valori u_1, u_2, u_3, $\ldots\ldots u_n$, delle espressioni che dipendono soltanto dal valor primordiale u e dalle sue differenze Δu, $\Delta^2 u$, ecc.; poichè essendo

$$\Delta u_1 = \Delta(u+\Delta u) = \Delta u+\Delta^2 u,$$

ne risulta

$$\begin{aligned}u_2 = u_1+\Delta u_1 &= u+\Delta u+\Delta(u+\Delta u) \\ &= u+2\Delta u+\Delta^2 u,\end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned}u_3 &= u_2+\Delta u_2 \\ &= u+2\Delta u+\Delta^2 u+\Delta(u+2\Delta u+\Delta^2 u) \\ &= u+3\Delta u+3\Delta^2 u+\Delta^3 u.\end{aligned}$$

La forma di queste espressioni di cui i coefficienti numerici sono i medesimi di quelli del quadrato e del cubo del binomio, conduce per analogia a

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 u + \text{ecc.};$$

locchè si può facilmente verificare mediante l'equazione

$$u_{n+1} = u_n + \Delta n_n,$$

di cui lo sviluppo mostra che la legge avendo luogo per l'ordine n, ha necessariamente luogo anche per l'ordine $n+1$.

378. Si può pure esprimere immediatamente la differenza di un qualunque ordine coi termini delle serie primitive i quali concorso hanno a formare questa differenza.

Avendo primieramente

$$\Delta u = u_1 - u \quad \text{e} \quad \Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u,$$

si osserverà che Δu_1 debb'essere composto con u_1 e u_2, come Δu lo è con u e u_1, vale a dire che basta di aumentare dell'unità gl'indici per passare a $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, e si otterrà

$$\begin{aligned}\Delta^2 u &= u_2 - u_1 - (u_1 - u)\\ &= u_2 - 2u_1 + u;\end{aligned}$$

poi aumentando di una unità gl'indici in quest'ultimo risultamento per formare $\Delta^2 u_1$, verrà

$$\begin{aligned}\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u &= u_3 - 2u_2 + u_1\\ &\quad - (u_2 - 2u_1 + u)\\ &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u,\end{aligned}$$

e per analogia

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1}u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}u_{n-3} + \text{ecc.},$$

legge che si verificherebbe collo sviluppo dell'equazione $\Delta^{n+1} u = \Delta^n u_1 - \Delta^n u$.

Tale risultamento e il precedente riduconsi a

$$u_n = (1 + \Delta u)^n, \quad \Delta^n u = (u - 1)^n,$$

purchè si cambino nello sviluppo dell'uno, gli esponenti delle potenze di Δu in esponenti della caratteristica Δ, e in quello dell'altro gli esponenti di u in indici; si può eziandio porre in un tratto

$$u_n = (1+\Delta)^n u,$$

e non vi sarà nulla da cambiare nello sviluppo.

379. Allorchè una funzione è data, niente è più facile di ottenerne le differenze successive; prenderò per esempio la funzione x^m. Facendo $u=x^m$, e supponendo che x aumenti della quantità h, si avrà $u_1=(x+h)^m$, e per conseguenza

$$\Delta u = (x+h)^m - x^m = mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}h^3 + \text{ecc.}$$

Per passare alle differenze ulteriori $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ecc., conviene di nuovo far variare x, ciò che presenta due ipotesi. L'una consiste in supporre che la quantità x prenda sempre degl'incrementi eguali, e l'altra che questi incrementi sieno loro stessi variabili: non mi occuperò quivi che della prima. Sostituendo $x+h$ in luogo di x in Δu, si avrà

$$\Delta u_1 = m(x+h)^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+h)^{m-2}h^2 + \text{ecc.}$$

È chiaro che se si sviluppa l'espressione di Δu_1 e che se ne sottragga quello di Δu, il risultato ordinato per rapporto alle potenze di h, sarà della forma

$$\Delta^2 u = m(m-1)x^{m-2}h^2 + M_3 x^{m-3}h^3 + M_4 x^{m-4}h^4 + \text{ecc.}$$

M_3, M_4, ecc. indicando dei coefficienti dipendenti dall'esponente m.

Con una nuova sostituzione di $x+h$ in quest'ultima equazione, si perverrebbe a $\Delta^2 u$, ed osservando che $\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u$, si otterrebbe

$$\Delta^3 u = m(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3 + M'_4 x^{m-4}h^4 + \text{ecc.}$$

La legge dei primi termini di ciascuno di questi sviluppi è evidente e si vede che l'espressione di $\Delta^n u$ debbe cominciare con

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}h^n.$$

Si vede pure che quando l'esponente m è intero e positivo il numero dei termini dello sviluppo di $\Delta^n u$, ordinato secondo le potenze di x diminuisce dell'unità, allorchè n aumenta di questa quantità e che quando $n=m$ viene

$$\Delta^m u = m(m-1)(m-2)\ldots 1 . h^m.$$

Questa differenza essendo costante, ne segue che quelle degli ordini superiori sono nulle.

Si perviene facilmente al termine generale di $\Delta^n u$, formando l'espressione di questa differenza mediante i valori di u, u_1, u_2, u_3, ecc., senza passare per quelle di Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ecc. (378). È evidente che nell'ipotesi presente i valori

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots . n^e$$

corrispondono a

$$x+h, \quad x+2h, \quad x+3h, \ldots . x+nh,$$

e si ha per conseguenza

$$u_1=(x+h)^m, \quad u_2=(x+2h)^m, \ldots . u_n=(x+nh)^m;$$

si ricaverà da ciò

$$\Delta^n u = (x+nh)^m - \frac{n}{1}\left[x+(n-1)h\right]^m + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left[x+(n-2)h\right]^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left[x+(n-3)h\right]^m + \text{ecc.}$$

Se si indica con i l'esponente di h nel termine generale

dello sviluppo della superiore equazione l'espressione di questo termine sarà

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\,i}\,x^{m-i}h^i\times$$

$$\left(n^i-\frac{n}{1}(n-1)^i+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^i-\text{ecc.}\right);$$

ma siccome si è veduto che lo sviluppo di $\Delta^n u$ non poteva contenere delle potenze di h di cui l'esponente fosse minore di n, segue che la funzione

$$n^i-\frac{n}{1}(n-1)^i+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^i-\text{ecc.},$$

composta di $n+1$ termini è nulla finchè $i<n$. Dall'altra parte il coefficente

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\,.\,i}$$

sparendo allorchè $i=m+1$, ne risulta che la più alta potenza di h, nello sviluppo di $\Delta^n u$, non può essere che h^m.

380. Dietro la proprietà del menomio x^m, qualunque funzione razionale ed intera di x ha sempre delle differenze costanti, cioè quelle di cui l'ordine è indicato dall'esponente della più alta potenza di x, che sia nella funzione proposta. Di fatto questa funzione essendo della forma $Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\text{ecc.}$, si avrà

$$\Delta^n(Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\text{ecc.})$$
$$=A\,\Delta^n.\,x^\alpha+B\,\Delta^n.\,x^\beta+C\,\Delta^n.\,x^\gamma+\text{ecc.}\ (*)\ (376);$$

---

(1) Non bisogna confondere $\Delta^n.\,x^\alpha$ con $\Delta^n x^\alpha$; imperocchè la prima di queste espressioni è la differenza dell'ordine n della funzione x^α mentre che $\Delta^n x^\alpha=(\Delta^n x)^\alpha$.

e se α indica l'esponente maggiore di x, verrà pel caso in cui $n=\alpha$,

$$\Delta^{\alpha}.x^{\alpha}=1.2\ldots\alpha h^{\alpha},\quad \Delta^{\alpha}.x^{\beta}=0,\quad \Delta^{\alpha}.x^{\gamma}=0,\text{ ecc.},$$

di modo che

$$\Delta^{\alpha}(Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\text{ecc.})=1.2.3\ldots\alpha A h^{\alpha}.$$

381. Egli è soprattutto per rapporto alle funzioni trascendenti di cui il calcolo approssimativo è laborioso, e molto si acquista a far uso delle differenze, come lo farà vedere l'esempio seguente tratto dai logaritmi.

Sia $u=lx$; si avrà

$$u_1=l(x+h)=lx+l\left(1+\frac{h}{x}\right)=$$

$$lx+M\left\{\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\text{ecc.}\right\}\ (29),$$

donde si ricaverà u_2, u_3, ecc., ponendo $2h$, $3h$, ecc., in vece di h, e le formole del n° 378 daranno

$$\Delta u=M\left(\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\text{ecc.}\right),$$

$$\Delta^2 u=-M\left(\frac{h^2}{x^2}-\frac{2h^3}{x^3}+\text{ecc.}\right),$$

$$\Delta^3 u=M\left(\frac{2h^3}{x^3}-\text{ecc.}\right),$$

ecc.

Si protraranno queste serie, secondo la grandezza del numero x, sino a che l'ultima differenza sia piccolissima ond'essere trascurata senza sensibile errore.

Se si avesse per esempio $x=10000$ ed $h=1$, si troverebbe per i logaritmi ordinari

$$\Delta u = 0{,}00004\ 34272\ 76863,$$
$$\Delta^2 u=-0{,}00000\ 00043\ 42076,$$
$$\Delta^3 u=-0{,}00000\ 00000\ 00868;$$

ed è evidente che se si volessero avere gli ultimi risultati con sole dieci cifre, si sarebbero potute senza tema di errore sensibile, trascurare per lungo tempo le differenze del quart'ordine; poichè converrebbe che fossero ripetute un numero grande di volte, per contribuire su la differenza terza; si formerebbero dunque successivamente, seguendo la regola del n° 374, le colonne delle differenze terze, seconde, prime, ed in fine i logaritmi dei numeri.

10001, 10002, 10003, ecc.,

partendo da quello del 100000, che è eguale a

4,00000 00000 00000.

Bisognerebbe fare il calcolo con 15 decimali onde riconoscere quando l'accumulazione delle trascurate quantità comincerà ad influire su l'ultima cifra la quale si propone di conservare o di cui si assicura mediante alcuni logaritmi calcolati rigorosamente a lontani intervalli; poichè quando per la serie delle addizioni successive, si perviene a questi logaritmi, conviene che il metodo delle differenze li dia tale quali sono stati dedotti *a priori*, almeno nelle dieci prime cifre, se è a questo numero che si vuole fermarsi. Allorchè l'ultima di queste cifre cessasse di essere esatta, lo che non può aver luogo ancora pel numero 10050, si calcolerebbero di nuovo *a priori* le differenze Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, e servirebbero i nuovi valori come i precedenti per ottenere i logaritmi dei numeri interi che seguono quello al quale si è dovuto fermarsi.

Applicazione del calcolo delle differenze all'interpolazione delle serie.

382. Uno dei principali usi del calcolo delle differenze, ha per oggetto l'*interpolazione delle serie*, operazioni che consiste ad inserire fra i termini d'una serie, nuovi termini assoggettati alla stessa legge dei primi. Perciò se riguardano i diversi termini di questa serie come valori che riceve la funzione, la quale esprime il termine generale, allorchè si assegnano egualmente dei valori particolari

alla variabile da cui dipende questo termine, e che esso stesso dipende dal posto che occupa nella proposta serie. Quando l'espressione di questo termine è data se ne ricavano tanti valori quanti se ne vogliono; ma non è così allorchè si conosce solamente un certo numero dei primi termini della serie, ed è ciò il caso ordinario al quale si applica l'interpolazione.

Converrebbe allora dedurre l'espressione analitica d'una funzione da quella d'un numero limitato di valori numerici, locchè non puossi, quando la forma della funzione è incognita; poichè debbesi osservare che questo problema riducesi a formare l'equazione di una curva, la quale passa per i punti di cui i valori della variabile indipendente rappresentano le ascisse, e quelli della funzione, le ordinate, e che in qualunque numero siano questi punti non potrebbero particolarizzare la curva, se non è data di specie (*Trig.* 168) Ma siccome si cerca d'interpolare una serie in spazi ristrettissimi, si concepisce che l'espressione del suo termine generale è sviluppato secondo le potenze ascendenti della sua variabile, ed è perciò permesso di limitarsi ad un piccol numero delle prime potenze di questa variabile; con questo mezzo la formola della funzione che è allora razionale, si trova determinata.

Così sapendo che ai valori

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \text{ecc.},$$

d'una qualunque variabile corrispondono i valori

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \text{ecc.},$$

d'una funzione di questa variabile, si suppone che si abbia per tutt'altro valore x',

$$u'=\alpha+\beta x'+\gamma x'^2+\delta x'^3+\text{ecc.}$$

e si determinano i coefficienti α, β, γ, ecc., con la condizione che u' divenga successivamente u, u_1, u_2, ecc, allorchè si cambia x' in x, x_1, x_2, ecc.

Questa determinazione presenta due casi: il primo in cui i valori x, x_1, x_2, ecc. sono *equidifferenti*, si risolve immediatamente mediante l'espressione di u'' del n° 377

Imperocchè quando si ferma la serie

$$u'=\alpha+\beta x'+\gamma x'^{2}+\text{ecc.},$$

ad uno de' suoi termini che indicherò con $\mu x'^{m}$, e che si prendono i valori di x' nella progressione x, $x+h$, $x+2h$, ecc., la funzione u ha nell' ordine m delle differenze costanti (380) e per conseguenza al valore $x+nh$ della variabile x' corrisponde

$$u_n=u+\frac{n}{1}\Delta u+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 u\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ldots m}\Delta^m u.$$

In questa formola le quantità

$$u,\ \Delta u,\ \Delta^2 u,\ \text{ecc.}\quad (374)$$

sono numeri; se vi si fa $x+nh=x'$, per cui segue $n=\frac{x'-x}{h}$, essa si trasformerà in una funzione razionale ed intera di x', dello stasso grado dell' espressione di n', e poichè si cambia in u, u_1, u_2, ecc., allorchè vi si pone 0, 1, 2, ecc., per n, prenderà gli stessi valori quando x' diverrà $x, x+h, x+2h$ ecc. sarà dunque la funzione richiesta.

Si può semplificarla facendo $x'=x+h'$, cio che dà

$$n=\frac{h'}{h}\ \text{e}\ u_n=u'=$$
$$u+\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h\cdot 2h}\Delta^2 u+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h\cdot 2h\cdot 3h}\Delta^3 u+\text{ecc.}$$

Finalmente se si rappresenta $u'-u$ con $\Delta' u$, verrà

$$\Delta' u=\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h\cdot 2h}\Delta^2 u+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h\cdot 2h\cdot 3h}\Delta^3 u+\text{ecc.}$$

383. Passo ora alle applicazioni.

Sia primieramente la serie

$$3,\ 7,\ 19,\ 39,\ 67,\ \text{ecc.},$$

corrispondente agl' indici

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \text{ecc.},$$

si ha in questo caso

$$u=3, \quad \Delta u=4, \quad \Delta^2 u=8, \quad \Delta^3 u=0, \quad h=1;$$

l' espressione di $\Delta' u$ si riduce ai suoi due primi termini, e si ottiene per mezzo suo

$$\Delta' u=4h'+4h'(h'-1)=4h'^2:$$

così per l' indice h', verrà $u'=3+4h'^2$. Prendendo $h'=\frac{5}{2}$, per esempio si troverebbe che il corrispondente termine a quest' indice è 28.

Sia ancora la serie

$$1, \quad 4, \quad 2, \quad 3, \quad 9, \quad 16, \quad \text{ecc.};$$

prendendo gl' indici nel modo ordinario, cioè

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \text{ecc},$$

e formando le differenze si troverà

$$u=1, \ \Delta u=3, \ \Delta^2 u=-5, \ \Delta^3 u=8,$$
$$\Delta^4 u=-6, \ \Delta^5 u=0, \ h=1,$$

donde si ricava

$$u'=1+3\frac{h'}{1}-5\frac{h'(h'-1)}{1.2}+8\frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1.2.3}$$
$$-6\frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{1.2.3.4}$$

Riducendo quest' espressione ed ordinandola per rapporto alle potenze di h', si avrà

$$u'=\frac{12+116h'-111h'^2+34h'^3-3h'^4}{12}$$

Bisogna osservare che quest' esempio ed il precedente

non offrono che un numero limitato d'ordini di differenze. In questo stato l'espressione di u' che è pure limitata rappresenta esattamente il termine generale delle proposte serie e servir può a protrarle quanto si vorrà. Tutti i numeri che se ne dedurranno, segairanno la stessa legge per rapporto alle loro differenze come i primi termini dai quali si è partito; le serie deriveranno così da una funzione razionale ed intera.

384. Allorchè si tratta di funzioni frazionarie irrazionali o trascendenti la serie delle differenze Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ ecc., non si termina più rigorosamente ma quando è decrescente essa rende convergente l'espressione

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h\,.\,2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h\,.\,2h\,.\,3h}\Delta^3 u + \text{ecc.},$$

e permette di ridurla ad un picciol numero di termini almeno per un intervallo poco considerevole. Eccone un esempio tratto dalle tavole logaritmiche. Suppongo che mediante una tavola contenente i logaritmi da 1 sino a 1000 con dieci decimali si voglia avere il logaritmo di 3,1415926536 numero pochissimo differente dal rapporto della circonferenza al diametro; allora si considereranno i logaritmi contenuti nella tavola come valori particolari della funzione u, i numeri come gl' indici ai quali questi valori corrispondono e si formerà il quadro seguente:

u =0,4969296481				
u_1=0,4983105538	1380957			
u_2=0,4996870826	1376288	—4669		
u_3=0,5010592622	1372196	—4092	+277	
u_4=0,5024271200	1367858	—4338	+246	—31

di cui la prima colonna racchiude i logaritmi di

3,14, 3,15, 3,16, 3,17, 3,18,

la seconda le loro differenze prime, la terza le loro differenze seconde, la quarta le loro differenze terze, la quinta le loro differenze quarte che si riducono a tre unità dell'ultim' ordine. Si avrà con questo mezzo

$$\Delta u = +0{,}0013809057, \qquad \Delta^2 u = -0{,}0000043769,$$
$$\Delta^3 u = +0{,}0000000277, \qquad \Delta^4 u = -0{,}0000000003,$$

e siccome $h, = 0{,}01$ $\quad h' = 0{,}0015926536,$

si otterrà

$$\frac{h'}{h} = 0{,}15926536, \quad \frac{h'-h}{2h} = \frac{h'}{2h} - \frac{1}{2} = -0{,}42036732,$$
$$\frac{h'-2h}{3h} = \frac{h'}{3h} - \frac{2}{3} = -0{,}61357821,$$
$$\frac{h'-3h}{4h} = \frac{h'}{4h} - \frac{3}{4} = -0{,}71018366:$$

con questi valori sarà facilissimo di mettere in numeri la formola

$$u' = u + \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h\,.\,2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h\,.\,2h\,.\,3h}\Delta^3 u$$
$$+ \frac{h'(h'-h)(h'-2h)(h'-3h)}{h\,.\,2h\,.\,3h\,.\,4h}\Delta^4 u,$$

la quale darà $u' = 0{,}4971498726$.

Esistono dei mezzi più facili per ottenere i logaritmi dei numeri espressi da molte cifre, ma il precedente è attissimo a servir d'esempio per il metodo d'interpolazione. Debbesi già conoscere che questo metodo si estende a molti altri casi; ed è questo soprattutto d'un grandissimo uso nei calcoli astronomici.

385. Allorchè i valori x, x_1, x_2, x_3, ecc. non sono equidifferenti s'impiega immediatamente la formola

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \text{ecc.},$$

nella quale la sostituzione dei valori particolari x, x_1 x_2, x_3, ecc. fornisce l'equazioni

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{ecc.},$$
$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x^2_1 + \delta x^3_1 + \text{ecc.},$$
$$u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x^2_2 + \delta x^3_2 + \text{ecc.},$$
$$u_3 = \alpha + \beta x_3 + \gamma x^2_3 + \delta x^3_3 + \text{ecc.},$$
ecc.,

di cui il numero debb'essere eguale a quello dei coefficenti indeterminati α, β, γ, δ, ecc.; ed ecco come si ottiene l'espressione di questi coefficenti.

Levando successivamente la prima equazione dalla seconda questa dalla terza ecc., si perviene a dei risultati rispettivamente divisibili per x_1-x, x_2-x_1, x_3-x_2, ecc. e donde si ricava

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\beta+\gamma(x_1+x)+\delta(x^2_1+x_1x+x^2)+\text{ecc.},$$
$$\frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=\beta+\gamma(x_2+x_1)+\delta(x^2_2+x_2x_1+x^2_1)+\text{ecc.},$$
$$\frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=\beta+\gamma(x_3+x_2)+\delta(x^2_3+x_3x_2+x^2_2)+\text{ecc.}$$
ecc.

Ponendo per abbreviare

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\mathrm{U},\quad \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=\mathrm{U}_1,\quad \frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=\mathrm{U}_2\ \text{ecc.},$$

si avranno l'equazioni

$$\mathrm{U}=\beta+\gamma(x_1+x)+\delta(x^2_1+x_1x+x^2)+\text{ecc.}$$
$$\mathrm{U}_1=\beta+\gamma(x_2+x_1)+\delta(x^2_2+x_2x_1+x^2_1)+\text{ecc.}$$
$$\mathrm{U}_2=\beta+\gamma(x_3+x_2)+\delta(x^2_3+x_3x_2+x^2_2)+\text{ecc.}$$
ecc.;

togliendo ancora U da U_1, U_1 da U_2, e così di seguito e designando con U', U'_1, ecc., le quantità

$$\frac{\mathrm{U}_1-\mathrm{U}}{x_2-x},\quad \frac{\mathrm{U}_2-\mathrm{U}_1}{x_3-x_1},\ \text{ecc.},$$

si troverà

$$\mathrm{U}'=\gamma+\delta(x_2+x_1+x)+\text{ecc.},$$
$$\mathrm{U}'_1=\gamma+\delta(x_3+x_2+x_1)+\text{ecc.},$$

da cui si ricaverà

$$\mathrm{U}'_1-\mathrm{U}'=\delta(x_3-x)+\text{ecc.}$$

Ora se si fa

$$\frac{U'_1-U'}{x_3-x}=U'',$$

si avrà $U''=\delta+$ecc., e se per fissare le idee si suppongono soli quattro termini all'espressione di u' l'operazione sarà terminata all'equazione superiore. Prendendo il valore che quella dà per δ, e risalendo a quelli di γ β, α, mediante le quantità U', U e u verrà

$$\begin{aligned}
\delta&=U'',\\
\gamma&=U'-U''(x_2+x_1+x),\\
\beta&=U-U'(x_1+x)+U''(x_2x_1+x_2x+x_1x),\\
\alpha&=u-Ux+U'x_1x-U''x_2x_1x.
\end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nell'espressioue di u', si avrà

$$\left.\begin{aligned}u'=u&+U(x'-x)+U'\left[x'^2-(x_1+x)x'+x_1x\right]\\&+U''\left[x'^3-(x_2+x_1+x)x'^2+(x_2x_1+x_2x+x_1x)x'-x_2x_1x\right]\end{aligned}\right\}$$

Facilmente si vede che i coefficienti di U, U' e U'' sono decomponibili in fattori semplici e che si può mettere u' sotto la forma

$$\begin{aligned}u'=u&+U(x-x)+U'(x'-x)(x'-x_1)\\&+U''(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2).\end{aligned}$$

Proseguendo secondo questo metodo si otterrebbe una formola analoga alla precedente; e qualunque fosse il numero dei valori x, x_1, x_2, ... dell'ascissa x', si avrebbe in generale

$$\begin{aligned}u=u&+U(x'-x)+U'(x'-x)(x'-x_1)+U''(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2)\\&+U'''(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)+\text{ecc.}\end{aligned}$$

facendo

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=U,\ \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=U_1,\ \frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=U_2,\ \frac{u_4-u_3}{x_4-x_3}=U_3,\ \text{ecc.},$$

$$\frac{U_1-U}{x_2-x}=U',\ \frac{U_2-U_1}{x_3-x_1}=U'_1,\ \frac{U_3-U_2}{x_4-x_1}=U'_2,\ \text{ecc.},$$

$$\frac{U'_1-U'}{x_3-x}=U'',\ \frac{U'_2-U'_1}{x_4-x_1}=U''_1,\ \text{ecc.},$$

$$\frac{U''_1-U''}{x_4-x}=U''',\ \text{ecc.},$$

ecc.

Quando i valori x, x_1, x_2, x_3, ecc., sono equidifferenti si ha

$$x_1=x+h,\ x_2=x+2h,\ x_3=x+3h,\ \text{ecc.},$$

donde si deduce

$$\mathrm{U}=\frac{\Delta u}{h},\quad \mathrm{U}_1=\frac{\Delta u_1}{h},\quad \mathrm{U}_2=\frac{\Delta u_2}{h},\quad \mathrm{U}_3=\frac{\Delta u_3}{h}\text{ecc.},$$

$$\mathrm{U}'=\frac{\Delta^2 u}{1\,.\,2h^2},\quad \mathrm{U}'_1=\frac{\Delta^2 u_1}{1\,.\,2h^2},\quad \mathrm{U}'_2=\frac{\Delta^2 u_2}{1\,.\,2h^2},\ \text{ecc.},$$

$$\mathrm{U}''=\frac{\Delta^3 u}{1.2.3h^3},\quad \mathrm{U}''_1=\frac{\Delta^3 u_1}{1.2.3h^3},\ \text{ecc.},$$

$$\mathrm{U}'''=\frac{\Delta^4 u}{1.2.3.4h^4},\ \text{ecc.},$$

ecc.;

facendo poscia $x'=x+h'$, ne risulta

$$x'-x=h',\quad x'-x_1=h'-h,\quad x'-x_2=h'-2h,$$

$$x'-x_3=h'-3h,\ \text{ecc.},$$

e si vede in questo modo che l'espressione di u', che diventa allora

$$u'=u+\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h\,.\,2h}\Delta^2 u$$
$$+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h\,.\,2h\,.\,3h}\Delta^3 u+\text{ecc.},$$

è della forma di quella del n. 382, ottenuta con tutt'altro mezzo.

386. Lagrangia ha presentato l'espressione di u' sotto una nuova forma osservando che poichè l'equazioni

$$u=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{ecc.},$$
$$u_1=\alpha+\beta x_1+\gamma x^2{}_1+\delta x^3{}_1+\text{ecc.},$$
$$u_2=\alpha+\beta x_2+\gamma x^2{}_2+\delta x^3{}_2+\text{ecc.},$$
$$\text{ecc,}$$

sono soltanto di primo grado per rapporto a ciascuna delle

quantità α, β, γ, ecc., u, u_1, u_2, ecc., e che u' debb' essere espresso in x', in modo che facendovi successivamente $x'=x$, $x'=x_1$, $x'=x_2$, ecc., venga $u'=u$ $u'=u_1$, $u'=u_2$, si può scrivere

$$u'=Xu+X_1u_1+X_2u_2+\text{ecc.},$$

purchè X, X_1, X_2, ecc., siano tali funzioni di x' che per la supposizione di $x'=x$, si abbia contemporaneamente

$$X=1, \quad X_1=0, \quad X_2=0, \text{ ecc.},$$

che per quella di $x'=x_1$, si abbia

$$X=0, \quad X_1=1, \quad X_2=0, \text{ ecc.},$$

che per quella di $x'=x_2$, si abbia

$$X=0, \quad X_1=0, \quad X_2=1, \text{ ecc.},$$

e così di seguito, condizioni che saranno edempite se si prende

$$X=\frac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots.}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots.},$$

$$X_1=\frac{(x'-x\ )(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots.}{(x_1-x\ )(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots.},$$

$$X_2=\frac{(x'-x\ )(x'-x_1)(x'-x_3)\ldots.}{(x_2-x\ )(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots.},$$

ecc.

La legge che conviene osservare nella formazione di queste quantità non può essere più semplice; il loro numeratore contiene come pure il denominator loro, tanti fattori quante sono le quantità x, x_1, x_2, ecc., meno una; e se vi si fanno le ipotesi superiormente indicate non solamente si convincerà che soddisfano alla proposta quistione ma si vedrà di più come è stato possibile di prevedere che vi soddisferebbero; si ha dunque questa nuova formola d' interpolazione.

$$u'=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots.}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots.}\,u\\ +\dfrac{(x'-x)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots.}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots.}\,u_1\\ +\dfrac{(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_3)\ldots.}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots.}\,u_2\end{array}\right\},$$
$$+\text{ ecc.}$$

comodissima nella pratica perchè se ne può calcolare ciascun termine mediante i logaritmi. Non sarebbe difficile di ricondurla e quella del numero precedente ed anche a quella del n. 382; ed è perciò che non mi vi fermerò.

387. Qui è facile vedere in un modo evidente che il problema dell' interpolazione è indeterminato quando delle particolari considerazioni non fissano la formola della funzione che rappresentar debbe il termine generale dei numeri dati.

In fatti le sole condizioni alle quali siano soggette le incognite X, X_1, X_2, ecc., possono essere adempite mediante funzioni molto diverse da quelle che Lagrangia ha scelto.

Si trova primieramente la semplicissima espressione

$$\text{sen } m(x'-x_1)\,\text{sen } n(x'-x_2)\,\text{sen } p(x'-x_3)\,\text{ecc.},$$

che gode della proprietà di sparire allorchè

$$x'=x_1,\quad x'=x_2,\quad x'=x_3,\ \text{ecc.},$$

qualunque siano i numeri m, n, p, ecc.: si potrà dunque porre l' equazione

$$X=\frac{\text{sen } m(x'-x_1)\,\text{sen } n(x'-x_2)\,\text{sen } p(x'-x_3)\text{ecc.}}{\text{sen } m(x-x_1)\,\text{sen } n(x-x_2)\,\text{sen } p(x-x_3)\text{ecc.}},$$

di cui il secondo membro riducesi all' unità allorchè $x'=x$; e su questo modello facilmente si formano i valori di X_1, X_2, ecc., in ciascuno de' quali si potrà prendere per i coefficienti m, n, p, ecc., qualunque numero si voglia.

Se simili espressioni si accordano con quelle del numero precedente per i valori di x', compresi nella serie x, x_1, x_2, ecc., da quelle molto differiscono negli intervalli da che gli archi non sono più abbastanza piccoli per essere sensibilmente proporzionali ai loro seni: d'altronde si possono sostituire le tangenti ai seni, e le condizioni precedenti saranno pure adempite.

388. Le formole d'interpolazione si applicano in un modo utilissimo nella determinazione approssimata dell'integrale $\int X dx$, o della quadratura delle curve. La prima idea che si è presentata sopra questo soggetto è stata di sostituire alla proposta curva una curva parabolica costretta e passare per un dato numero di punti della prima: è evidente che quanto più questi punti saranno moltiplicati e ristretti tanto più l'esattezza crescerà.

Prendendo da prima la formola

$$u' = x + \beta x' + \gamma x'^2 + \text{ecc.},$$

onde rappresentare l'ordinata della curva parabolica, l'area di questa curva sarà espressa da

$$\int u' dx' = \frac{\alpha x'}{1} + \frac{\beta x'^2}{2} + \frac{\gamma x'^3}{3} + \text{ecc.} + \textit{costant.};$$

in quanto ai coefficienti α, β, γ, ecc., si conchiuderanno senza difficoltà dallo sviluppo dell'espressione di u', di cui si farà uso.

Se s'impiega quella del n° 382, e vi si faccia $\frac{h'}{h} = x'$, essa diventerà

$$u' = u + \frac{x'\Delta u}{1} + \frac{x'(x'-1)\Delta^2 u}{1.2} + \frac{x'(x'-1)(x'-2)\Delta^3 u}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

e converrà spingerla sino allo stesso numero di termini della precedente, cioè quello dei punti pei quali debb'essere determinata la curva parabolica.

Supponiamo che questo numero sia 3: non si prenderanno che i tre primi termini della formola superiore; ordinandola secondo le potenze di x', verrà

$$\alpha = u, \quad \beta = \Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u, \quad \gamma = \frac{1}{2}\Delta^2 u,$$

quantità che non dipenderanno che dalle tre ordinate consecutive u, u_1, u_2, corrispondenti ai valori

$h' = 0$, $h' = h$, $h' = 2h$, ovvero $x' = 0$, $x' = 1$, $x' = 2$,

e se si assegna o e 2 pei limiti di $\int u' dx'$, il suo valore sarà

$$2u + 2\left[\Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u\right] + \frac{4}{3}\Delta^2 u$$

$$= 2\left[u + \Delta u + \frac{1}{6}\Delta^2 u\right].$$

In questo caso u' sarebbe l'ordinata d'una parabola QR *fig.* 62 che passa per tre punti della curva proposta DE e $\int u' dx'$ l'area del segmento di questa parabola compreso fra la prima ordinata PM e la terza P_2M_2.

In generale questa parabola QR sarà alternativamente interna ed esterna alla proposta e *viceversa*; di modo che l'area del suo segmento differirà in una parte per difetto e nell'altra per eccesso dall'area del segmento corrispondente della curva proposta DE; e allora potrà operarsi nel risultato totale una compensazione più o meno approssimata fra queste differenze.

La formola precedente diventa più simmetrica quando si sostituisca invece delle differenze Δu e $\Delta^2 u$ i loro valori

$$u_1 - u \text{ e } u_2 - 2u_1 + u \quad (378);$$

si ottiene dopo le riduzioni

$$\frac{1}{3}(u + 4u_1 + u^2).$$

Se si concepisce egualmente che passi una nuova parabola per i punti M_2, M_3, M_4 e così di seguito e che si riuniscano le aree di ciascuno dei loro segmenti si potrà abbracciare una porzione tanto grande quanto si vorrà della proposta curva; e se l'ultima ordinata è rappresentata da u_m, essendo m un numero pari si avrà

$$\frac{1}{3}(u+4u_1+u_2)+\frac{1}{3}(u_2+4u_3+u_4)\ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{3}(u_{m-2}+4u_{m-1}+u_m)$$

$$=\frac{1}{3}(u+u_m)+\frac{2}{3}(u_2+u_4\ldots.+u_{m-2})$$

$$+\frac{4}{3}(u_1+u_3\ldots.+u_{m-1}).$$

Questo risultamento d'una forma abbastanza elegante comprendendo soltanto delle linee le quali misurar si possono su la figura può servire a valutare delle aree rinchiuse da delle curve di cui non si ha l'equazione, vantaggio che punto non offre il metodo del n° 233. Del resto nell'uno e nell'altro metodo bisogna calcolare a parte le porzioni comprese fra due punti singolari e moltiplicare di più le ordinate in quelle ove la variazione di curvatura è più considerabile.

Dell'analogia delle differenze con le potenze.

389. Il calcolo differenziale e quello delle differenze quantunque siano ben distinti come in seguito si vedrà, hanno nondimeno dei grandi rapporti fra loro e possono applicarsi l'uno all'altro. Allorchè si considera il primo sotto il punto di vista in cui Leibnitz lo ha presentato o per la teorica dei limiti diventa un caso particolare del secondo: ciò si è dovuto notar al principio di quest'opera e per confirmarlo ancora dedurrò la serie del Taylor dall'equazione

$$u_n=u+\frac{n}{1}\Delta u+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u+\text{ecc.}\,(377).$$

Sia $u=f(x)$ e che la variabile x riceva successivamente un numero n d'incrementi eguali rappresentati da α; il valore u_n sarà quello che prende u quando x diventa

$x+nx$; facendo poscia $n\alpha=h$, si avrà $n=\frac{h}{\alpha}$, e

$$u_n=u+\frac{h}{\alpha}\Delta u+\frac{h(h-\alpha)}{1\cdot 2n\alpha^2}\Delta^2 u + \frac{h(h-\alpha)(h-2\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\alpha^3}\Delta^3 u+\text{ecc.},$$

che si può anche scrivere in questo modo

$$f(x+h)=u+\frac{h}{1}\frac{\Delta u}{\alpha}+\frac{h(h-\alpha)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 u}{\alpha^2} + \frac{h(h-\alpha)(h-2\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\Delta^3 u}{\alpha^3}+\text{ecc.}$$

Se s'immagina ora che h rimanendo costante α decresca indefinitamente che è lo stesso che supporre il numero n sempre più grande, il secondo membro dell'equazione superiore tenderà verso un limite che si otterà facendo $\alpha=0$ e osservando che i rapporti

$$\frac{\Delta u}{\alpha},\quad \frac{\Delta^2 u}{\alpha^2},\quad \frac{\Delta^3 u}{\alpha^3},\ \text{ecc.}$$

hanno allora per limiti i coefficenti differenziali

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{d^2u}{dx^2},\quad \frac{d^3u}{dx^3}\ \text{ecc.};$$

si avrà dunque ancora

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ecc.},$$

per lo sviluppo della funzione u quando x è divenuta $x+h$. Ed è presso a poco in questo modo che il Taylor è pervenuto al superiore teorema che porta il di lui nome.

Allorchè una volta vi si è pervenuto la teorica analitica del calcolo differenziale più non offre alcuna difficoltà; così quello che precede basta per mostrare come risulti dal calcolo delle differenze.

390. Coll'aiuto del teorema di Taylor lo sviluppo delle differenze di un qualunque ordine si ottiene senza difficoltà alcuna. Si ha primieramente

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.};$$

e se in questa equazione si pone successivamente Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ecc., in vece di u si formeranno l'espressioni

$$\Delta^2 u = \frac{d\Delta u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Delta u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.};$$

$$\Delta^3 u = \frac{d\Delta^2 u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta^2 u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{ecc.},$$

$$\Delta^4 u = \frac{d\Delta^3 u}{dx}\frac{h}{1} + \text{ecc.},$$

ecc,

per mezzo delle quali lo sviluppo di ciascuna differenza si deduce da quello della precedente. Si otterrà da prima

$$\Delta^2 u = \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3} + \text{ecc.}$$

$$+ \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.2} + \text{ecc.}$$

$$+ \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3} + \text{ecc.}$$

Sarebbe facile di trovare la legge che seguono i termini di questa espressione ma vi si perviene in un modo più generale mediante l'analogia che esiste fra la differenziazione delle quantità e la loro elevazione alle potenze, analogia di cui il n° 378 le prime tracce contiene.

391. Si è veduto (27) che

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

e segue da questa formola che

$$e^{\frac{du}{dx}h} = 1 + \frac{du\,h}{dx\;1} + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

$$e^{\frac{du}{dx}h} - 1 = \frac{du\,h}{dx\;1} + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

Se ora si trasportano gli esponenti di du alla caratteristica d, il secondo membro della precedente equazione diventerà

$$\frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

e sarà la stessa cosa che Δu: si avrà dunque

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1,$$

purchè nello sviluppo del secondo membro si trasporti alla caratteristica degli esponenti delle potenze di du.

Da questo il risultato il Lagrangia fu il primo ad osservare che si aveva in generale

$$\Delta^n u = \left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^n,$$

osservando di trasportar sempre alla caratteristica d gli esponenti delle potenze di du.

Dopo si è semplificato questo modo di scrivere ponendo

$$\Delta u = \left(e^{\frac{d}{dx}h} - 1\right)u, \qquad \Delta^n u = \left(e^{\frac{d}{dx}h} - 1\right)^n u;$$

poichè non vi è più nulla da cambiare nello sviluppo; ma bisogna bene ricordarsi che la lettera d, esprimendo una caratteristica e non una quantità le superiori equazioni non diventano effettive che per lo sviluppo del loro secondo membro. Ecco come il Laplace ha dimostrato questo bel risultato.

Egli è evidente per quello che si è detto nel numero precedente che qualunque sia l'espressione di $\Delta^n u$, debbesi avere

$$\Delta^n u = \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n} h^n + \mathrm{A}' \frac{\mathrm{d}^{n+1} u}{\mathrm{d}x^{n+1}} h^{n+1} + \mathrm{A}'' \frac{\mathrm{d}^{n+2} u}{\mathrm{d}x^{n+2}} h^{n+2} + \text{ecc.},$$

indicando A', A'', ecc. dei coefficienti che dipendono soltanto da n Questa equazione dovendo sussistere per tutte le forme che prender può la funzione u, converrà necessariamente al caso in cui $u = e^x$; ma allora

$$\frac{du}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} = \text{ecc.} = e^x,$$

$\Delta u = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$, $\Delta^2 u = (e^{x+h} - e^x)(e^h - 1) = e^x(e^h - 1)^2$,

$\Delta^3 u = e^x(e^h - 1)^3$, ... $\Delta^n u = e^x(e^h - 1)^n$.

Sostituendo questo valore di $\Delta^n u$, nel primo membro della superiore equazione e quelli di $\frac{du}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$ ecc., nel secondo verrà

$$(e^h - 1)^n = h^n + \mathrm{A}' h^{n+1} + \mathrm{A}'' h^{n+2} + \text{ecc.},$$

donde segue che i coefficienti A', A'', ecc debbono essere gli stessi che quelli dello sviluppo di $(e^h - 1)^n$, poichè l'incremento h rimaner debbe indeterminato Non può d'altronde esistere alcuna difficoltà riguardo ai coefficenti differenziali di u, che si deducono tutti dalle potenze di du per l'indicato cambiamento negli esponenti.

La stessa relazione fra le potenze e le differenze si trovano nelle funzioni d'un qualunque numero di variabili e si prova in un modo analogo.

392. Da $\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1$ si ricava $e^{\frac{du}{dx}h} = 1 + \Delta u$; e se si prendono i logaritmi dall'una e l'altra parte verrà

$$\frac{du}{\mathrm{d}x} h = \mathrm{l}(1 + \Delta u).$$

Il Lagrangia ha inoltre riconosciuto che questa equazione

sarebbe vera, se nello sviluppo di $l(1+\Delta u)$, si trasportassero alla caratteristica Δ gli esponenti delle potenze di Δu; si avrebbe con questo mezzo

$$\frac{du}{dx}h=\Delta u-\frac{1}{3}\Delta^2 u+\frac{1}{3}\Delta^3 u-\frac{1}{4}\Delta^4 u+\text{ecc. (29).}$$

In vece di fermarmi a dimostrare questo caso particolare proverò che in generale

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n=\left[l(1+\Delta u)\right]^n,$$

cambiando Δu^2, Δu^3, ecc. in $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ecc.. ovvero

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n=\left[l(1+\Delta)\right]^n u,$$

senza nulla cambiare nello sviluppo.

Si vede che la quistione riducesi a determinare i coefficenti differenziali $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$ ecc., in funzione delle differenze successive di u, e che per questo si hanno delle equazioni della forma

$$\Delta^n u=\frac{d^n u}{dx^n}h^n+A'\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1}+A''\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2}+\text{ecc.},$$

$$\Delta^{n+1}u=\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1}+A'_1\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2}+\text{ecc.},$$

$$\Delta^{n+2}u=\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2}+\text{ecc.},$$

ecc.,

nelle quali i coefficenti differenziali salgono al primo grado semplicemente: si può dunque fa e

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n=\Delta^n u+B'\Delta^{n+1}u+B''\Delta^{n+2}u+B'''\Delta^{n+3}u+\text{ecc.},$$

Si otterrebbe facilmente il valore dei coefficenti incogniti B', B'', B''', ecc., mediante l'eliminazione successiva di

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}u}{\mathrm{d}x^{n+1}}h^{n+1},\ \frac{\mathrm{d}^{n+2}u}{\mathrm{d}x^{n+2}}h^{n+2},\ \text{ecc. ;}$$

ma poichè l'equazione ipotetica debbe aver luogo qualunque sia u, essa sussisterà ancora quando vi si farà $u=e^x$, ciò che darà

$$\frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}x^i}=e^x,\quad \text{e}\quad \Delta^i u=e^x(e^h-1)^i,$$

qualunque valore abbia il numero intero i ; e si troverà per conseguenza

$$h^n=(e^h-1)^n+\mathrm{B}'(e^h-1)^{n+1}+\mathrm{B}''(e^h-1)^{n+2}+\text{ecc.}$$

Per mettere in evidenza l'identità dei due membri di quest'equazione, basta osservare che

$$h^n=\left[1(1+e^h-1)\right]^n,$$

stantechè lo sviluppo di $1(1+e^h-1)]^n$, ordinato secondo le potenze di e^h-1, che è

$$e^h-1-\frac{1}{2}(e^h-1)^2+\frac{1}{3}(e^h-1)^3-\frac{1}{4}(e^h-1)^4+\text{ecc.},$$

essendo elevato alla potenza n diverrà paragonabile alla serie

$$(e^h-1)^n+B'(e^h-1)^{n+1}+\mathrm{B}''(e^h-1)^{n+2}+\text{ecc.},$$

di cui i coefficienti numerici B', B'', ecc. saranno per conseguenza determinati. Se si scrive Δu in luogo di e^h-1, e $\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}h^n$ a quello di h^n, si avrà l'equazione $\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}h^n=\left[1(1+\Delta)\right]^n u$, posta precedentemente.

Facendo per brevità $e^h-1=\alpha$, e sviluppando $\left[\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha^4+\text{ecc.}\right]^n$, secondo le potenze di α col metodo del n° 55, si otteranno i valori di B', B'', ecc.

393. La formola del n° 382 si deduce ancora dal teorema di Taylor che diventa una formola d'interpolazione

allorchè vi sostituiscono ai coefficenti differenziali le loro espressioni in differenze tratte dal numero precedente.

In fatti l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}x^i} h^i = \Delta^i u + \mathrm{A}'\Delta^{i+1}u + \mathrm{A}''\Delta^{i+2}u + \mathrm{A}'''\Delta^{i+3}u + \text{ecc.}$$

Se si ricavassero successivamente da questa equazione i valori di $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}$, ecc., per sostuirli nella serie

$$u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h'}{1} + \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h'^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h'^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

la quale esprime ciò che diventa u allorchè x diventa $x+h'$, si avrebbe un risultato della forma

$$u + \frac{h'}{h}\Delta u + \left(\mathrm{B}'\frac{h'}{h} + \mathrm{B}''\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2 u + \left(\mathrm{B}'_1\frac{h'}{h} + \mathrm{B}'_1\frac{h'^2}{h^2} + \mathrm{B}''_1\frac{h'^3}{h^3}\right)\Delta^3 u + \text{ecc.},$$

B', B'', B'_1, B''_1, B'''_1, ecc. essendo come A', A'', ecc. coefficenti di h; e indicando con $\Delta' u$ l'incremento che riceve la funzione u nel passaggio di x ad $x+h$, verrebbe

$$u + \Delta' u = u + \frac{h'}{h}\Delta u + \left(\mathrm{B}'\frac{h'}{h} + \mathrm{B}''\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2 u + \text{ecc.}$$

Questa equazione dovendo aver luogo qualunque sia u, sussiste pure nel caso in cui $u = e^x$, e si cambia allora in

$$e^{h'} = 1 + \frac{h'}{h}(e^h - 1) + \left(\mathrm{B}'\frac{h'}{h} + \mathrm{B}''\frac{h'^2}{h^2}\right)(e^h - 1)^2 + \text{ecc.}$$

da cui si riconduce collo sviluppo il primo membro alla stessa forma del secondo osservando che $e^{h'} = \left[1 + (e^h - 1)\right]^{\frac{h'}{h}}$; e siccome rimettendo nel secondo u, Δu, $\Delta^2 u$, ecc., in luogo delle quantità 1, $e^h - 1$, $(e^h - 1)^2$, ecc., si ricade su lo sviluppo di $u + \Delta' u$, debbesi da ciò conchiudere che

$$u+\Delta' u=(1+\Delta)^{\frac{h}{h}} u.$$

Questo risultato tanto semplice che elegante è stato presentato dal Lagrangia come una conseguenza dell'analogia che le differenze hanno con le potenze. Imperocchè segue dall'equazione $e^{\frac{du}{dx}h} = 1+\Delta u$ (392) che $e^{\frac{du}{dx}h'} = (1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}$ locchè dà tosto $1+\Delta' u=(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}$ poichè $e^{\frac{du}{dx}h'} = 1+\Delta' u$.

Sviluppando il secondo membro di quest'ultima equazione, e trasportando alla caratteristica Δ nel secondo membro, gli esponenti delle potenze di Δu, si troverà come superiormente

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h \cdot 2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h \cdot 2h \cdot 3h}\Delta^3 u + \text{ecc. } (*).$$

Del calcolo inverso delle differenze per rapporto alle funzioni esplicite d'una sola variabile.

394. Il calcolo inverso delle differenze è per riguardo al calcolo diretto ciò che è il calcolo integrale per rapporto al calcolo differenziale: egli ha per oggetto di salire dalle differenze alle funzioni primitive. Mi occuperò

(*) *Queste curiose analogie delle potenze con le differenze e i differenziali sono sviluppate con molta estensione nel terzo volume del trattato in 4°. Vi ho indicato molte memorie inserite su questo argomento nelle* Transazioni filosofiche, *ed alcune osservazioni del Sig. Herschel nell'appendice ch'egli ha posto in fine della traduzione che ha fatto congiuntamente ai Signori Babbage e Peacok della seconda edizione del presente Trattato elementare.*

da prima delle differenze che sono espresse immediatamente dalla variabile indipendente, vale a dire ove si ha per determinare u_x, un' equazione della forma

$$\Delta^r u_x = f(x),$$

l' incremento di x essendo costante e dato: lo rappresenterò al modo ordinario con h.

Sia primieramente $r=1$, onde $\Delta u_x = f(x)$; per indicare l'operazione che debbe far ritrovare da Δu_x a u_x, s'impiega la caratteristica Σ, e si scrive per conseguenza

$$\Sigma \Delta u_x = u_x = \Sigma f(x),$$

le caratteristiche Δ e Σ indicando delle operazioni contrarie che si distruggono allorchè si effettuano l' una dopo l' altra su la stessa funzione.

L' operazione indicata dal segno Σ si chiama pure *integrazione*; perchè $\Sigma f(x)$ indica una vera somma. Infatti si aggiungano l' equazioni (1) del n° 375, verrà

$$u_n = u + \Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots + \Delta u_{n-1};$$

e se si rappresenta con a il primo valore di x; e con n quello di u_x, che vi si riferisce, si avrà per un qualunque valore di $x = a + nh$,

$$\Sigma f(x) = u + f(a) + f(a+h) + f(a+2h)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + f[a+(n-1)h].$$

Questa espressione che aumenterebbe di $f(a+nh)$ o di $f(x)$ se vi si aggiugnesse h all'ultimo valore attribuito ad x, e che ha quindi per differenza $f(x)$, si compone così della somma di tutti i valori che prende $f(x)$ da $x=a$ inclusivamente sino a $x=a+(n-1)h$, più del primo valore di u che è indeterminato e che quivi tiene luogo della costante arbitraria che il passaggio di u_x a Δu_x ha fatto sparire.

Per ritornare da $\Delta^r u_x = f(x)$ ad u_x è evidente che effettuare conviene tante integrazioni quante differenziazioni hanno avuto luogo, che s' indicherebbero in questo modo

$$\Sigma^r \Delta^r u_x = u_x = \Sigma^r f(x).$$

In ciascheduna di queste operazioni bisognerebbe aggiugnere una nuova costante locchè puossi ancora vedere osservando che l'equazione $\Delta^r u_x = f(x)$, non dando le differenze della funzione che cominciando dall'ordine r, lascia indeterminate le r quantità

$$u, \quad \Delta u, \quad \Delta^2 u, \ldots \Delta^{r-1} u,$$

e per conseguenza gli r primi termini dell'espressione

$$u_n = u + \frac{n}{1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u + \text{ecc.} \quad (377),$$

col mezzo della quale si passa dal valore u relativo ad $x=a$, a quello che si riferisce ad $x=a+nh$.

395. Si vede dunque quivi come nei differenziali che l'integrazione introduce un numero di costanti arbitrarie eguale all'esponente dell'ordine; ma vi è questa differenza che le quantità le quali spariscono quando si passa ai differenziali sono assolutamente costanti, invece che per distruggersi quando si prendono le differenze basta che una quantità rimanga la stessa, allorchè si passa da x a $x+h$: e di tali ne esistono: perchè è chiaro che l'espressione

$$\Phi\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{h}, \ \cos\frac{2\pi x}{h}\right),$$

la quale diventa allora

$$\varphi\left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{h} + 2\pi\right), \ \cos\left(\frac{2\pi x}{h} + 2\pi\right)\right],$$

gode di questa proprietà qualunque sia la forma della funzione φ.

Si fa entrare nel tempo istesso il seno ed il coseno nella funzione affinchè non ritorni la stessa che nel solo passaggio di x ad $x+h$, locchè non avrebbe luogo per una funzione la quale non contenesse che l'uno o l'altro poiche

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{h} = \operatorname{sen}\frac{2\pi(\frac{1}{2}h - x)}{h} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{2\pi x}{h}\right);$$

$$\cos\frac{2\pi x}{h}=\cos\frac{2\pi(h-x)}{h}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi x}{h}\right);$$

noi daremo in seguito la costruzione geometrica di queste funzioni.

396. È opportuno l' osservare che prendendo l' integrale di ciascun membro dell' equazione

$$\Delta u+\Delta v-\Delta w=\Delta(u+v-w)\ (376),$$

risulta

$$\Sigma(\Delta u+\Delta v-\Delta w)=u+v-w$$
$$=\Sigma\Delta u+\Sigma\Delta v-\Sigma\Delta w,$$

ciò che riconduce l' integrazione delle differenze polinomie a quelle delle differenze monomie.

Egualmente l' equazione

$$a\Delta u=\Delta . au \quad \text{dà} \quad \Sigma . a\Delta u=au=a\Sigma\Delta u,$$

per cui si vede che le costanti passano come si vuole sotto il segno Σ o fuori di esso.

397. Allorchè $f(x)$ è razionale e intiera, l' espressione di u_n, terminandosi dà l' integrale esatto. Diffatti se m indica l' ordine al quale le differenze di questa funzione sono costanti (380), come $\Delta^r u_x=f(x)$, segue $\Delta^m f(x)=\Delta^{r+m}u_x$, e che quest' ultima differenza è costante, si ha subitamente

$$u_n=u+\frac{n}{1}\Delta u+\frac{n'n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 u \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-r-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(r+m)}\Delta^{r+m}u,$$

u, Δu, $\Delta^2 u$, ecc. corrispondono ad $x=a$; e se si fa $a+nh=x$, u_n diverrà u_x.

Ponendo per brevità $f(x)=v_n$, verrà

$$\Delta^r u=v, \quad \Delta^{r+1}u=\Delta v, \ldots\ldots \Delta^{r+m}u=\Delta^m v;$$

u e le sue differenze sino all' ordine $r-1$ inclusivamente rimangono arbitrarie come si è già veduto.

Sia per esempio

$$\Delta u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$$

l'incremento di x essendo 1; si avrà $r=1$, $m=3$, $h=1$, e se si suppone $a=0$, si troverà

$$v=-1, \quad \Delta v=2, \quad \Delta^2 v=-4,$$
$$\Delta^3 v=6 \qquad \Delta^4 v=0 \qquad (380),$$

onde

$$\Sigma(x^3-5x^2+6x-1)=$$
$$u_x = u - 1 \cdot \frac{x}{1} + 2 \cdot \frac{x(x-1)}{1.2} - 4 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + 6 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}$$
$$= \frac{3x^4-26x^3+69x^2-58x}{12} + \text{costant.}$$

La formola generale di quest'articolo comprende il caso nel quale il valore dato per Δu_x sarebbe costante; si avrebbe allora $\Delta^2 u$ o $\Delta v = 0$.

Si vede pure immediatamente che

$$a = \frac{ax+ah-ax}{h} = \frac{\Delta . ax}{h},$$

dà, integrando il primo e l'ultimo membro,

$$\Sigma a = \frac{ax}{h} + \text{costant}, \quad \text{onde} \quad \Sigma 1 = \Sigma x = \frac{x}{h}.$$

398 Quantunque la precedente formola basti per tutte le funzioni razionali e intiere, è necessario di far conoscere alcune altre espressioni che hanno pure dei vantaggi che sono loro propri; e per cominciare da quelle che sono le più semplici, mi occuperò primieramente dei prodotti composti di fattori equidifferenti.

Sia

$$u = x(x+h)(x+2h) \ldots [x+(m-1)h];$$

se si prende la differenza si otterrà

$$\Delta u = (x+h)(x+2h)(x+3h) \ldots (x+mh)$$

$$-x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\left[x+(m-1)h\right]$$
$$=(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\left[x+(m-1)h\right]mh\,;$$

e siccome $\Sigma\dfrac{\Delta u}{mh}=\dfrac{\Sigma\Delta u}{mh}=\dfrac{u}{mh}$, si avrà

$$\Sigma(x+h)(x+2h)\ldots\left[x+(m-1)h\right]$$
$$=\frac{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\left[x+(m-1)h\right]}{mh}+costant.$$

Se per ricondurre ad m il numero dei fattori affetti dal segno Σ, si scrive ora $x-h$ in vece di x, e $m+1$ in luogo di m, verrà

$$\Sigma x(x+h)(x+2h)\ldots\left[x+(m-1)h\right]$$
$$=\frac{(x-h)x(x+h)(x+2h)\ldots\left[x+(m-1)h\right]}{(m+1)h}.$$

Si vede quivi che nell' integrale il numero dei fattori dell' unità quello dei fattori della differenza, e che il divisore è $m+1$ ciò che è ben analogo alla formola $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ (167).

S' integra egualmente la frazione

$$u=\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\left[x+(m-1)h\right]}$$

perchè prendendo la differenza, si trova

$$u=\int\frac{1}{(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+mh)}$$
$$-\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\left[x+(m-1)h\right]},$$
$$=\frac{-mh}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+mh)};$$

ritornando agl' integrali e ponendo per u il suo valore, viene

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)} = \frac{u}{mh}$$

$$= \frac{1}{mhx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]};$$

e se si scrive $m-1$ in luogo di m si otterrà

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}$$

$$= \frac{1}{(m-1)hx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-2)h]}.$$

399. Le superiori formole possono servire ancora all' integrazione delle funzioni della forma

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{ecc.},$$

poichè queste funzioni si trasformano in prodotti di fattori di cui le differenze sono costanti. Per farlo vedere scelgo quest' esempio semplicissimo: x^3 e faccio

$$x^3 = (x+h)(x+2h)(x+3h) + A(x+h)(x+2h) + B(x+h) + C,$$

supponendo che h rappresenti l' incremento di x. Se si sviluppa e che si ordini secondo le potenze di x si avrà

$$x^3 = x^3 + 6hx^2 + 11h^2x + 6h^3 + Ax^2 + 3Ahx + 2Ah^2 + Bx + Bh + C;$$

e paragonando fra loro i termini affetti della stessa potenza di x, si formeranno l' equazioni

$$6h + A = 0,$$
$$11h^2 + 3Ah + B = 0,$$
$$6h^3 + 2Ah^2 + Bh + C = 0,$$

dalle quali si ricaverà

$$A = -6h, \quad B = 7h^2, \quad C = -h^3,$$

e $x^3=(x+h)(x+2h)(x+3h)-6h(x+h)(x+2h)+7h^2(x+h)-h^3$,

locchè darà in virtù del numero precedente

$$\Sigma x^3=\frac{1}{4h}x(x+h)(x+2h)(x+3h)$$
$$-2x(x+h)(x+2h)+\frac{7}{2}hx(x+h)-h^2x+costant\ ,$$

stantechè $\Sigma-h^3=-h^3\Sigma 1=-h^2x$ (397).

400. Allorchè $u=x^{m+1}$ e che m è un numero intero viene

$$\Delta u=\frac{(m+1)}{1}x^mh+\frac{(m+1)}{1.2}x^{m-1}h^2+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^2$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}h^4\ldots+h^{m+1}x^0.$$

Integrando termine a termine ciascun membro di questa equazione, rimettendo nel primo x^{m+1}, invece di u, e passando fuori del segno Σ i fattori costanti si otterrà

$$x^{m+1}=\frac{m+1}{1}h\Sigma x^m+\frac{(m+1)m}{1.2}h^2\Sigma x^{m-1}$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{m-2}\ldots+h^{m+1}\Sigma x^0.$$

Questa equazione farebbe conoscere l'integrale Σx^m, se si avesse Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, ... Σx^0, poichè se ne ricaverebbe

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)h}-$$
$$\left\{\frac{m}{1.2}h\Sigma x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2.3}h^2\Sigma x^{m-2}\ldots+\frac{1}{m+1}h^m\Sigma x^0\right\},$$

Se si scrive successivamente in quest'ultima $m-1$, $m-2$, $m-3$, ecc., per m si formeranno delle espressioni di Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, Σx^{m-3}, ecc., che non dipenderanno che

dagli integrali delle potenze di x, le quali saranno rispettivamente inferiori a loro. Si possono pure formare questi valori risalendo; e se si prende primieramente $m=0$, viene $\Sigma x^0=\frac{x}{h}$, come nel numero 397, perchè la formola generale debbe racchiudere un solo numero m di termini affetti dal segno Σ

Facendo poscia $m=1$, $m=2$, $m=3$, ecc., e sostituendo successivamente per Σx^0, Σx^1, Σx^2, ecc., i valori ai quali si perverrà si formerà questa tavola:

$$\Sigma x^0=\frac{x}{h},$$

$$\Sigma x=\frac{1}{2}\frac{x^2}{h}-\frac{1}{2}x,$$

$$\Sigma x^2=\frac{1}{3}\frac{x^3}{h}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.3}xh,$$

$$\Sigma x^3=\frac{1}{4}\frac{x^4}{h}-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2.2}x^2h,$$

$$\Sigma x^4=\frac{1}{5}\frac{x^5}{h}-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3h-\frac{1}{5.6}xh^3,$$

$$\Sigma x^5=\frac{1}{6}\frac{x^6}{h}-\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{2.6}x^4h-\frac{1}{2.6}x^2h^3,$$

ecc.,

ove per brevità si è ommesso la costante arbitraria la quale consente a ciascun risultato.

401. In vece di spingere più oltre questa induzione si può supporre in generale

$$\Sigma x^m=Ax^{m+1}+Bx^m+Cx^{m-1}+Dx^{m-2}+\text{ecc};$$

prendendo la differenza prima di ciascun membro si troverà

$$x^m=A\frac{(m+1)}{1}x^mh$$
$$+A\frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}h^2+A\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^3+\text{ecc.}$$

$$+B\frac{m}{1}x^{m-1}h+B\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}h^2+\text{ecc.}$$

$$+C\frac{(m-1)}{1}x^{m-2}h+\text{ecc.}$$

$$+\text{ecc.},$$

e paragonando fra loro i termini affetti d'una stessa potenza di x si otterranno fra coefficenti A, B, C, D, ecc., le relazioni seguenti:

$$A=\frac{1}{(m+1)h},$$

$$B=-A\frac{(m+1)h}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$C=-A\frac{(m+1)mh^2}{2\cdot 3}-B\frac{mh}{2},$$

$$D=-A\frac{(m+1)m(m-1)h^3}{2\cdot 3\cdot 4}-B\frac{m(m-1)h^2}{2\cdot 3}-C\frac{(m-1)}{2}h,$$

ecc.,

colle quali si dedurranno facilmente gli uni dagli altri i coefficianti dell'espressione di Σx^m, qualunque siasi l'esponente m. Calcolando immediatamente i dodici primi termini si troverà

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)h}-\frac{1}{2}x^m$$

$$+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{mh}{2}x^{m-1}-\frac{1}{6\cdot 5}\frac{m(m-1)(m-2)h^3}{2\cdot 3\cdot 4}x^{m-3}$$

$$+\frac{1}{6\cdot 7}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^{m-5}$$

$$-\frac{3}{10\cdot 9}\frac{m(m-1)\ldots(m-6)h^7}{2\cdot 3\ldots 8}x^{m-7}$$

$$+\frac{5}{6\cdot 11}\frac{m(m-1)\ldots(m-8)h^9}{2\cdot 3\ldots 10}x^{m-9}$$

$$-\frac{691}{210\cdot 13}\frac{m(m-1)\ldots(m-10)h^{11}}{2\cdot 3\ldots 12}x^{m-11}$$

$$+\frac{35}{2.15}\frac{m(m-1)\ldots(m-12)h^{13}}{2.3\ldots14}x^{m-13}$$
$$+\frac{3617}{30.17}\frac{m(m-1)\ldots(m-14)h^{15}}{2.3\ldots16}x^{m-15}$$
$$+\frac{43867}{42.19}\frac{m(m-1)\ldots(m-16)h^{17}}{2.3\ldots18}x^{m-17}$$
$$-\frac{1222277}{110.21}\frac{m(m-1)\ldots(m-18)h^{19}}{2.3\ldots20}x^{m-19}$$
$$+\text{ ecc.} \qquad +\textit{costant.},$$

formola nella quale i coefficenti espressi in numeri meritano attenzione, perchè spesso ritornano nella teorica delle serie.

Prima di por termine a quest' articolo farò osservare che se si moltiplica Σx^m per h, e che si passi quest' incremento sotto il segno Σ, si avrà l' equazione

$$\Sigma x^m h = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}x^m h + \frac{1}{2}\frac{mh^2}{2.3}x^{m-1} - \text{ecc.} + \textit{costant.},$$

di cui il secondo membro ha per limite $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \textit{costant.}$, allorchè h sparisce nel qual caso $\Sigma x^m h$ si cambia in $\int x^m dx$, per quello che si è veduto nel n° 236.

402. Ciò che precede fornisce il mezzo d' integrare tutte le funzioni algebriche razionali e intere, nel caso in cui la variabile indipendente riceva un incremento costante. Sia per esempio la funzione

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D;$$

osservando che

$$\Sigma(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=A\Sigma x^3+B\Sigma x^2+C\Sigma x+D\Sigma x^0,$$

e ponendo per Σx^3, Σx^2 Σx e Σx^0, i loro valori si troverà

$$\Sigma(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=$$
$$\frac{A}{4h}x^4 - \frac{3Ah-2B}{6h}x^3 + \frac{Ah^2-2Bh+2C}{4h}x^2$$
$$+\frac{Bh^2-3Ch+6D}{6h}x+\textit{costant.},$$

403. Nell' integrazione delle funzioni trascendenti, mi limiterò alle funzioni esponenziali e circolari. Si ha dalle prime

$$\Delta \cdot a^x = a^x(a^h - 1),$$

donde risulta

$$a^x = \Sigma a^x(a^h - 1) = (a^h - 1)\Sigma a^x$$

e

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1}.$$

404. Dalle funzioni circolari si ha prima l' equazione

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \operatorname{sen} (A - B) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A + B),$$

che dà

$$\Delta \cos x = \cos (x+h) - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h \operatorname{sen}\left[x + \frac{1}{2} h\right],$$

da cui si ricava

$$\operatorname{sen}\left[x + \frac{1}{2} h\right] = -\frac{\Delta \cos x}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h}, \text{ e } \operatorname{sen} x = -\frac{\Delta \cos\left[x - {}^1/_2 h\right]}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h},$$

scrivendo $x - {}^1/_2 h$ in vece di x; prendendo poscia l' integrale di ciascun membro dell' ultima equazione si ottiene

$$\Sigma \operatorname{sen} x = -\frac{\cos (x - {}^1/_2 h)}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h} + \textit{costant.}$$

2°. L' equazione

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} {}^1/_2 (A - B) \cos {}^1/_2 (A + B),$$

dà

$$\Delta \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} (x+h) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h \cos\left[x + {}^1/_2 h\right]$$

onde segue

$$\cos (x + {}^1/_2 h) = \frac{\Delta \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h}, \quad \cos x = \frac{\Delta \operatorname{sen} (x - {}^1/_2 h)}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h},$$

$$\Sigma \cos x = \frac{\operatorname{sen} (x - {}^1/_2 h)}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h} + \textit{costant.}$$

3°. Il cambiamento delle potenze de' seni, de' coseni e de' loro prodotti in funzioni de' seni e de' coseni degli archi multipli, ricondurrà alle due formole precedenti l'integrazione della funzione generale $\operatorname{sen} x^m \cos x^n$, allorchè gli esponenti m e n saranno numeri interi positivi.

In fatti questa funzione sarà cambiata in una serie di termini della forma $A \operatorname{sen} qx$, o $A \cos qx$, di cui gl' integrali si dedurranno da quelli di $A \operatorname{sen} x$ e di $A \cos x$, scrivendo qx e qh in vece di x e di h; ed è facile vedere che si avrà in generale

$$\Sigma \operatorname{sen}(p+qx) = -\frac{\cos(p+qx-{}^1/_2 qh)}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 qh} + costant.$$

$$\Sigma \cos(p+qx) = \frac{\operatorname{sen}(p+qx-{}^1/_2 qh)}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 qh} + costant.$$

405. L'utilità dell'espressione di Σu, per sommare le serie, ha fatto si che gli Analisti molto se ne occupino, e sono pervenuti a darle molte forme elegantissime: Eulero la fece dipendere dai coefficienti differenziali di u e dall' integrale $\int u dx$. Si arriva a questo risultato partendo dalla formola

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2 z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

che dà

$$z = \frac{h}{1}\Sigma\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\Sigma\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\Sigma\frac{d^3 z}{dx^3} + \text{ecc.},$$

Se si fa $\frac{dz}{dx} = u$, verrà $z = \int u dx$ e

$$\int u dx = h\Sigma u + \alpha h^2 \Sigma\frac{du}{dx} + \beta h^3 \Sigma\frac{d^2 u}{dx^2} + \text{ecc.},$$

rappresentando con α, β, γ, ecc. i coefficienti numerici; da ciò si ricaverà

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - \alpha h \Sigma\frac{du}{dx} - \beta h^2 \Sigma\frac{d^2 u}{dx^2} - \text{ecc.}$$

espressione che pel cambiamento di u in $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ecc., conduce alle seguenti:

$$\Sigma\frac{du}{dx}=\frac{1}{h}u-\alpha h\Sigma\frac{d^2u}{dx^2}-\beta h^2\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}-\text{ecc.},$$
$$\Sigma\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{h}\frac{du}{dx}-\alpha h\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}-\beta h^2\Sigma\frac{d^4u}{dx^4}-\text{ecc.},$$
$$\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{1}{h}\frac{d^2u}{dx^2}-\alpha h\Sigma\frac{d^4u}{dx^4}-\beta h^2\Sigma\frac{d^5u}{dx^5}-\text{ecc.},$$
ecc. (*),

colle quali si elimineranno successivamente dal valore di Σu, le funzioni

$$\Sigma\frac{du}{dx},\ \Sigma\frac{d^2u}{dx^2},\ \Sigma\frac{d^3u}{dx^3},\ \text{ecc.};$$

ed è facile vedere che il risultato sarà necessariamente della forma

$$\Sigma u=\frac{1}{h}\int u\,dx+Au+Bh\frac{du}{dx}+Ch^2\frac{d^2u}{dx^2}+\text{ecc.}$$

La determinazione dei coefficienti A, B, C, ecc., si

(*) *Si formano ancora queste espressioni, osservando che* $\Sigma\frac{du}{dx}=\frac{d.\Sigma u}{dx}$, *locchè si prova in questo modo: si ha primieramente* $d\Delta u=du$, *poichè*

$$d\Delta u=d\left[f(x+h)-f(x)\right]=\left[f'(x+h)-f'(x)\right]dx,$$
$$\Delta du=\Delta f'(x)dx=\left[f'(x+h)-f'(x)\right]dx;$$

e poscia se si pone $\Sigma u=U$, *ciò che dà* $u=\Delta U$, *viene*

$$du=d\Delta U=\Delta dU,$$

onde

$$\Sigma du=\Sigma\Delta dU=dU=d\Sigma u.$$

opera quivi come nel n° 391, mediante la considerazione della funzione particolare e^x, per la quale si trova

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e^h - 1}\,;\ \int e^x dx = e^x,\ \frac{d^m . e^x}{dx^m} = e^x,$$

per cui ne segue

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} + A + Bh + Ch^2 + \text{ecc.},$$

locchè mostra che i coefficenti A, B, C, ecc. altro non sono che quelli che moltiplicano le potenze di h nello sviluppo della fnnzione $\frac{1}{e^h - 1}$, ridotta in serie ascendente rapporto a questa lettera.

Se si pone per $e^h - 1$, il suo valore

$$\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ecc. (27)},$$

non sarà difficile di calcolare almeno i primi coefficenti A, B, C, ecc.: si troverà

$$A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1}{12},\ C = 0,\ D = -\frac{1}{720}\ E = 0,\ \text{ecc.},$$

e per conseguenza

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - \frac{1}{2}u + \frac{h}{12}\frac{du}{dx} - \frac{h^3}{720}\frac{d^3 u}{dx^3} + \text{ecc. (*)}.$$

(*) *Tutti i coefficenti delle potenze pari di h sono nulli; questo è provato come la legge generale degli altri nel trattato in 4°, t. III, pag. 106 e seguente.*

La stessa formola dà per $\int u dx$, un valore che può tener luogo vantaggiosamente della formola (III) del n. 233, soprattutto quando vi si sostituisce, in vece dei coefficenti differenziali i loro valori in differenze (392

406. Si otterranno nello stesso modo, e senza maggior difficoltà gl' integrali $\Sigma\Sigma u$, ovvero $\Sigma^2 u$ $\Sigma\Sigma^2 u$, oppure $\Sigma^3 u$, e in generale $\Sigma^m u$; imperciocchè la formola

$$\Delta^m z = \frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m} h^m + \alpha \frac{\mathrm{d}^{m+1} z}{\mathrm{d}x^{m+1}} h^{m+1} + \beta \frac{\mathrm{d}^{m+2} z}{\mathrm{d}x^{m+2}} h^{m+2} + \text{ecc.}$$

conduce a

$$z = h^m \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m} + \alpha h^{m+1} \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^{m+1} z}{\mathrm{d}x^{m+1}} + \beta h^{m+2} \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^{m+2} z}{\mathrm{d}x^{m+2}} + \text{ecc.};$$

facendo in seguito $\frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m} = u$, si avrà $z = \int^m u \mathrm{d}x^m$, e per conseguenza

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m} \int^m u \mathrm{d}x^m - \alpha h \Sigma^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - \text{ecc.},$$

nella quale si porrà successivamente $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$, ecc., in vece di u per ottenere i valori

$$\Sigma^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h^m} \int^{m-1} u \mathrm{d}x^{m-1} - \alpha h \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} - \text{ecc.},$$

$$\Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{h^m} \int^{m-2} u \mathrm{d}x^{m-2} - \alpha h \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x^3} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} - \text{ecc.},$$

coll' aiuto de'quali si toglieranno $\Sigma^m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\Sigma^m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$, ecc., dall' espressione di $\Sigma^m u$. L' equazione finale potrà essere rappresentata da

---

Il risultato come quelli del n° 388, può applicarsi alle funzioni di cui non si ha l' espressione analittica ma solamente una serie di valori numerici. (Vedi il trattato in 4° t. III pag. 182 e seguente).

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m}\int^m u\mathrm{d}x^m + \frac{\mathrm{A}}{h^{m-1}}\int^{m-1} u\mathrm{d}x^{m-1}$$
$$+ \frac{\mathrm{B}}{h^{m-2}}\int^{m-2} u\mathrm{d}x^{m-2} \ldots\ldots \frac{\mathrm{M}}{h}\int u\mathrm{d}x$$
$$+ \mathrm{N}u + \mathrm{P}h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{Q}h^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \text{ecc. ;}$$

e allorchè si farà $u = e^x$, essa diverrà

$$\frac{1}{(e^h-1)^m} = \frac{1}{h^m} + \frac{\mathrm{A}}{h^{m-1}} + \frac{\mathrm{B}}{h^{m-2}} \ldots\ldots + \frac{\mathrm{M}}{h}$$
$$+ \mathrm{N} + \mathrm{P}\,h + \mathrm{Q}h^2 + \text{ecc. :}$$

i coefficenti A, B, ... M, N, ecc. sono dunque in questo luogo ancora quelli che moltiplicano le potenze di h nello sviluppo di $\frac{1}{(e^h-1)}$; e da ciò risulta fra gli integrali e le potenze negative un' analogia la quale altro non è che la continuazione di quella che hanno le differenze con le potenze positive, di modo che gl' integrali si debbono riguardare come le differenze d' un ordine di cui l' esponente è negativo. Imperocchè è chiaro che dietro ciò che si è veduto si può porre

$$\Sigma^m u = \frac{1}{\left(e^{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h}-1\right)^m} = \left(e^{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}-1\right)^{-m},$$

purchè dopo lo sviluppo si cambino le potenze $\frac{\mathrm{d}u^p}{\mathrm{d}x^p}$ in $\frac{\mathrm{d}^p u}{\mathrm{d}x^p}$, osservando che in $\frac{\mathrm{d}^{-p}u}{\mathrm{d}x^{-p}} = \mathrm{d}^{-p}u\mathrm{d}x^p$, d^{-p} equivale ad $\int^p$, ovvero scrivere ancora

$$\Sigma^m u = \left(e^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h}-1\right)^{-m} u,$$

espressioni che si deducono da quelle di $\Delta^m u$ (3$_{91}$), dando all' esponente m il segno —.

407. L'integrazione per parti si pratica tanto su le differenze quanto su i differenziali. Siano P e Q due funzioni qualunque di x; si farà

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P + z,$$

essendo z una funzione incognita della stessa variabile; e prendendo la differenza di ciascun membro di quest'equazione, si avrà

$$PQ = (Q+\Delta Q)\Sigma(P+\Delta P) - Q\Sigma P + \Delta z;$$

sviluppando e riducendo, ed osservando che $Q\Sigma\Delta P = PQ$, verrà

$$o = \Delta Q\Sigma(P+\Delta P) + \Delta z, \text{ oppure } \Delta z = -\Delta Q\Sigma(P+\Delta P),$$

e per consegnenza

$$z = -\Sigma\Delta Q\Sigma(P+\Delta P),$$

poi

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma\Delta Q\Sigma(P+\Delta P) \ldots\ldots (A),$$

formola la quale diventa

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma\Delta Q\Sigma P_1 \ (1),$$

allor si scrive P_1 per $P+\Delta P$.

Se nella formola (A) si cambia Q in ΔQ, P in ΣP_1, e che si osservi che

$$\Sigma P_1 + \Delta\Sigma P_1 = \Sigma(P^1 + \Delta P_1) = \Sigma P_2,$$

se ne dedurrà

$$\Sigma\Delta Q\Sigma P_1 = \Delta Q\Sigma^2 P_1 - \Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2,$$

e la formola (1) diverià

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1, + \Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2 \ (2).$$

cambiando poscia nell'equazione (A), Q in $\Delta^2 Q$, P in $\Sigma^2 P_2$, poi osservando che

$$\Sigma^2 P_2 + \Delta\Sigma^2 P_2 = \Sigma^2 P_3,$$

si troverà

$$\Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2 = \Delta^2 Q\Sigma^3 P^2 - \Sigma\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3 ,$$

e la formola (2) diverrà

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Sigma\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3 ,$$

locchè conduce all' espressione elegante

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta\, Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P^2 - \Delta^3 Q\Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q\Sigma^5 P_4 - \text{ecc.} ,$$

data dal Taylor nelle *Transazioni filosofiche.*

Se vi si pone per P_1, P_2, P_3, ecc., i loro valori in P, e che si effettuano le integrazioni che divengono possibili, essa si cambia in

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta\, Q(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P) - \Delta^3 Q(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{ecc.}$$

È sotto questa forma che il Coudorcet l'ha presentata nel suo *Saggio su l' applicazione deil' Analisi alla probabilità delle decisioni*, pag. 163.

Si ferma essa tutte le volte che la funzione Q conduce a delle differenze costanti in un ordine qualunque; e se la funzione P è suscettibile d' un numero sufficiente d'integrazioni successive, si perviene all' integrale esatto della funzione PQ.

Applicazione del calcolo delle differenze per sommare le serie.

408 In una serie qualunque

$$u , u_1 , u_2 , \ldots u_{n-1} , u_n ,$$

il termine generale u_n può essere considerato come la differenza della funzione che esprime la somma dei termini che lo precedono di modo che se si fa

$$u + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} = S_{n-1} ,$$

si avrà

$$\Delta S_{n-1}=u_n \quad \text{e} \quad S_{n-1}=\Sigma u_n \ (394).$$

Da ciò segue che la somma intera comprendendovi il termine generale sarà

$$S_n=\Sigma u_n+u_n.$$

Si vede pure che S_n risultando da S_{n-1} pel cambiamento di n in $n+1$, l' espressione di S_n può dedursi nello stesso modo che quella di Σu_n.

Se dunque $f(x)$ rappresenta il termine generale di una qualunque serie, nella quale la differenza della variabile indipendente sia h, la somma di questa serie, che rappresenterò con $Sf(x)$, sarà

$$Sf(x)=\Sigma f(x)+f(x),$$

ovvero si otterrà ponendo $x+h$ in vece di x, in $\Sigma f(x)$; e non bisogna lasciare d'aggiugnere al risultato una costante arbitraria.

Allorchè si domanda la somma della serie soltanto per dei valori interi dell' indice, la costante arbitraria, essendo allora una vera costante (395), si determina come quella degli integrali nei differenziali. Se si fa cominciare la serie dal termine, corrispondente all' indice $x=a$, e che si abbia in generale

$$Sf(x)=F(x)+\textit{costante.},$$

bisogna che

$F(a)+\textit{costant.}=f(a)$, onde $\textit{costant.}=f(a)-F(a)$, e

$$Sf(x)=F(x)-F(a)+f(a).$$

Se si ferma la serie al termine corrispondente all'indice $x=a+nh$, verrà

$$f(a)+f'a+h)+f(a+2h)\ldots.+f(a+nh=F(a+nh)-F(a)+f(a),$$

ciò che riducesi a

$$f'a+h)+f(a+2h)\ldots.+f(a+nh)=F(a+nh)-F(a),$$

e mostra come aspettare dovevasi che il termine $f(a)$ non fa parte della somma $Sf(x)$, presa fra i limiti $x=a$ ed $x=a+nh$, ma che se si vuole riunire questo termine conviene prendere la somma da $x=a-h$ sino a $x=a+nh$.

409. Veniamo ora alle applicazioni. Si dedurranno dalle formole del n° 398,

$$Sx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]=$$

$$\frac{x(x+h)\,(x+2h\ldots\ldots(x+mh)}{(m+1)h}+\text{costante},$$

$$S\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}=$$

$$\frac{-1}{(m-1)h(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}+\text{costante}.$$

espressioni per mezzo delle quali si otterranno le somme delle serie dirette ed inverse dei numeri figurati (*).

Nelle prime di cui i termini generali sono

$$\frac{x}{1},\quad \frac{x(x+1)}{1.2},\quad \frac{x(x-1)(x+2)}{1.2.3},\text{ ecc.},$$

si fa $h=1$ e successivamente $m=1$, $m=2$, ecc., viene

$$S\frac{x}{1}=\frac{x(x+1)}{1.2}+\text{costant.},$$

$$S\frac{x(x+1)}{1.2}=\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}+\text{costant.},$$

$$S\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}=\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4}+\text{costant.},$$

ecc.,

(*) *Vedete per queste serie, il* Suplem. *degli* Elem d'Algebra. *È bene di osservare che sono identiche con i coefficenti delle potenze di z, nello sviluppo di* $(1+z)^{-x}$.

nelle quali si possono sopprimere le costanti, perchè tutte queste espressioni spariscono quando $x=0$.

Passando alle serie inverse di cui i termini generali sono

$$\frac{1}{x},\ \frac{1.2}{x(x+1)},\ \frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)},\ \text{ecc.},$$

si trova la seconda formola in diffetto rispetto alla prima serie, a motivo del divisore $1-1$; ma per le altre, si hanno

$$1.2\,S\frac{1}{x(x+1)}=-\frac{2}{x+1}+\textit{costant.},$$

$$1.2.3\,S\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=-\frac{3}{(x+1)(x+2)}+\textit{costant.},$$

ecc.

Determinando le costanti affinchè le somme partano dal primo termine che è l'unità in ciascuna serie si trovano l'espressioni

$$\frac{2}{1}-\frac{2}{x+1},\ \frac{3}{2}-\frac{3}{(x+1)(x+2)},\ \text{ecc.},$$

le quali si riducono a $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, ecc., allorchè x è infinito, danno i limiti delle serie

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\ldots\ldots+\frac{1.2}{x(x+1)}+\text{ecc.},$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\ldots\ldots+\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}+\text{ecc.},$$

ecc.

410. Ponendo $x+h$ in vece di x nell'espressione di Σx^m (401), si otterrà egualmente Sx^m, cioè la somma delle serie

$$1,\ 2^m,\ 3^m,\ \ldots x^m.$$

Se si sviluppa in particolare Sx^2, e che si faccia $h=1$, verrà dopo le riduzioni

$$Sx^2 = \frac{2x^3+3x^2+x}{6} + constant.,$$

per la somma della serie dei quadrati $1, 4, 9, \ldots x^2$.

411. Si conchiuderà dai numeri 403, 404, che

$$Sa^x = \frac{a^{x+h}}{a^h-1} + constant.,$$

$$S \operatorname{sen} x = -\frac{\cos(x+{}^1/_2 h)}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h} + constant.,$$

$$S \cos x = \frac{\operatorname{sen}(x+{}^1/_2 h)}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h} + constant.$$

Per ottenere verbigrazia la somma delle serie

$$\operatorname{sen} a, \operatorname{sen}(a+h), \ldots \operatorname{sen}(a+nh),$$

converrà prendere $S \operatorname{sen} x$, da $x=a-h$ sino ad $x=a+nh$ (408), e verrà

$$\frac{\cos(a-{}^1/_2 h)-\cos(a+nh+{}^1/_2 h)}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h} = \frac{\operatorname{sen}(a+{}^1/_2 nh)\operatorname{sen} {}^1/_2(n+1)h}{\operatorname{sen} {}^1/_2 h}.$$

L'espressione generale di Σu del n° 405 dà pure per Su una formola generale di cui si troverà più lungi (435) una rimarchevole applicazione.

Dell' integrazione delle equazioni colle differenze a due variabili.

412. Sin qui ho supposto che la differenza della funzione cercata fosse data esplicitamente dalla variabile indipendente; ora mi occuperò dei casi in cui si ha soltanto un'equazione che contiene questa funzione, le sue differenze, la variabile indipendente ed il suo incremento. Se la funzione y dipende dalla variabile x di cui l'incremento sia costante, l'equazione proposta sarà compresa nella formola generale.

$$F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \text{ecc.}) = 0.$$

È bene osservare che se ne possono far sparire le differenze Δy, $\Delta^2 y$ ecc., rimpiazzandole coi valori consecutivi di y, poichè si ha

$$\Delta y = y_1 - y, \quad \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y, \text{ecc. } (377);$$

e il risultato prenderà la forma

$$F(x, y, y_1, y_2, \text{ecc.}) = 0,$$

nella quale si vede che ogni equazione colle differenze, fa conoscere il valore della funzione cercata per mezzo di un certo numero di valori antecedenti.

Se l'equazione fosse del prim'ordine, per esempio si avrebbe y_1 mediante y; e se fosse del secondo, se ne ricaverebbe y_2, espresso da y_1 e da y e così di seguito.

È facile di scorgere che un' equazione colle differenze equivale ad una serie, nella quale si ottiene ciascun termine, mediante la sua relazione con quelli che lo precedono e coll'indice, che segna il posto che occupa. Difatti, allorchè si ha, verbigrazia $y_2 = f(x, y, y_1)$ se ne deduce $y_3 = f(x+h, y_1, y_2)$, $y_4 = f(x+2h), y_2, y_3)$, ecc., indicando h l'incremento di x, e si forma così la serie

$$y, y_1, y_2, y_3, y_4, \text{ecc.},$$

col mezzo de' suoi due primi termini.

Questo caso particolare basta per indicare che *nella serie risultante da una qualunque equazione colle differenze vi saranno sempre tanti termini arbitrarì quante unità vi sono nell'esponente dell'ordine di quest'equazione.*

413. Si può cambiare qualunque equazione colle differenze in una equazione differenziale d'un ordine infinito sostituendo in vece di Δy, $\Delta^2 y$ ecc., i loro sviluppi dietro il n° 391; e non è meno evidente che si convertirebbe ancora qualunque equazione differenziale in una equazione colle differenze di un ordine infinito, ponendo in luogo dei coefficenti differenziali i loro sviluppi tratti dalla formola del n° 392.

Non pare che queste trasformazioni le quali hanno

l'inconveniente d'introdurre un numero infinito di termini possano generalmente essere molto utili per l'integrazione dell'equazioni: ma sono però attissime a far conoscere ciò che distingue il calcolo colle differenze. Esse provano che per la natura di quest'ultimo le differenze della variabile indipendente esser debbono necessariamente determinate; poichè se si avesse l'equazione fra

$$x, y, \Delta x, \Delta y, \Delta^2 y, \text{ ecc.},$$

nella quale l'incremento Δx rimanesse indeterminato, e che si sviluppasse secondo le potenze di Δx, Δy, $\Delta^2 y$ ecc., locchè darebbe la forma

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta x + B\Delta y \\ + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta^2 y \\ + \text{ecc.} \end{array}\right\} = 0,$$

vi si potrebbe sostituire in vece di Δy, $\Delta^2 y$ ecc., i loro sviluppi e siccome Δx vi rimarebbe ancora indeterminato converrebbe che i coefficienti delle potenze diverse di quest'incremento sparissero da loro stessi. Si otterrebbe così fra le variabili x, y ed i loro differenziali un numero infinito d'equazioni le quali accordar si dovrebbero fra di loro affinchè la proposta siguificasse qualche cosa; e in questo caso sarebbe equivalente soltanto alla prima di queste equazioni di cui le altre diverrebbero i differenziali successivi.

E supponendo l'equazione colle differenze del prim'ordine ciò che la riduce a

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \text{ecc.} = 0,$$

e prendendo

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{ecc.},$$

viene

$$B\frac{dy}{dx}\left\{\begin{matrix}\\+A\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}\Delta x\\\\\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}+E\,\frac{dy^2}{dx^2}\\+D\,\frac{dy}{dx}\\+C\\+\frac{B}{1.2}\,\frac{d^2y}{dx^2}\end{matrix}\right\}\Delta x^2+\text{ecc.}\Bigg)=0,$$

donde si ricava

$$B\frac{dy}{dx}+A=0,\quad E\frac{dy^2}{dx^2}+D\frac{dy}{dx}+C\,\frac{B}{1.2}\,\frac{d^2y}{dx^2}=0,\ \text{ecc.};$$

e se questa serie d'equazioni non può aver luogo, la proposta non potrà verificarsi che assegnando a Δx un valore particolare.

414. Posti questi preliminari entro in materia coll'integrazione dell'equazione generale del primo grado e del prim'ordine. Suppongo che la differenza della variabile x, ovvero Δx essendo 1, si abbia l'equazione $\Delta y+Py=Q$ analoga all'equazione differenziale trattata nel n° 285; un processo simile a quello del n° citato conduce all'integrale della prima.

Se si fa $y=uz$ verrà

$$\Delta y=u\Delta z+z\Delta u+\Delta u\Delta z,$$

ciò che cambierà l'equazione proposta in

$$u+z+z\Delta u+\Delta u\Delta z+Puz=Q;$$

e ponendo separatamente

$$z\Delta u+Puz=0,\quad\text{o}\quad\Delta u+Pu=0,$$

rimarrà $u\Delta z+\Delta u\Delta z=Q$, dalla quale si ricaverà

$$\Delta z=\frac{Q}{u+\Delta u}\quad\text{e}\quad z=\Sigma\,\frac{Q}{u+\Delta u}:$$

la quistione si riduce dunque ad integrare l'equazione

$$\Delta u+Pu=0,$$

nella quale si possono separare le variabili, dandole la forma $\frac{\Delta u}{u}=-P$, poichè si suppone P non contenere che x. Sia $u=e^t$, ne risulterà

$$\Delta u=e^t(e^{\Delta t}-1)\ e\frac{\Delta u}{u}=e^{\Delta t}-1=-P,$$

onde si ricaverà

$$e^{\Delta t}=1-P,\ \Delta t=l(1-P),\ e\ t=\Sigma l(1-P).$$

Ma la somma dei logaritmi della funzione $1-P$ corrisponde al prodotto continuo dei valori successivi che riceve $1-P$ fra i limiti dell'integrale vale a dire

$$(1-P_{x-1})\ (1-P_{x-2})\ (1-P_{x-3})\ \ldots\ (1-P_0)\ (408)\ ;$$

se s'indica questo prodotto con $\left[1-P_{x-1}\right]^x$, l'esponente x segnando il numero dei fattori, si avrà

$$t=l\left[1-P_{x-1}\right]^x,$$

donde si conchiuderà

$$u=e^t=\left[1-P_{x-1}\right]^x;$$

e se si fa attenzione che $u+\Delta u=u_1$, si otterrà

$$u+\Delta u=\left[1-P_x\right]^{x+1}\ e\ z=\Sigma\frac{Q}{\left[1-P_x\right]^{x+1}},$$

ciò che darà finalmente

$$y=\left[1-P_{x-1}\right]^x\Sigma\frac{Q}{\left[1-P_x\right]^{x+1}},$$

la costante arbitraria essendo compresa nell'integrale indicato.

È presso a poco in questo modo che il Lagrangia il quale fece vedere per primo l'analogia che l'equazioni colle differenze del primo grado, hanno con le equazioni differenziali dello stesso grado, ha integrato nel 1761, l'equazione superiormente trattata; egli applica poscia il suo risultato all'equazione $y_1 = Ry + Q$, che conduce ad $y + \Delta y = Ry + Q$. Confrontando quest'ultima con $\Delta y + Py = Q$, si ha $P = 1 - R$, $1 - P = R$, e per conseguenza

$$y = \left[R_{x-1}\right]^{x} \Sigma \frac{Q}{\left[R_x\right]^{x+1}},$$

Quantunque sembra lo sviluppo del prodotto $\left[1 - P_{x-1}\right]$ supporre che la differenza di x sia eguale all'unità, si può nondimeno conservare l'espressione precedente allorchè $\Delta x = h$, concependo che corrisponde a

$$(1 - P_{x-h})\,(1 - P_{x-2h})\,(1 - P_{x-3h}) \text{ ecc.},$$

ovvero trasformare l'equazione proposta in un'altra facendo $x = hx'$, locchè darebbe $\Delta x = h\Delta x'$ e $\Delta x' = 1$.

Allorchè il coefficente R è costante si ha

$$y = R^x \Sigma \frac{Q}{R^{x+1}};$$

e s'è lo stesso riguardo a Q l'integrazione indicata si effettua facilmente: si ottiene in questo caso

$$\Sigma \frac{Q}{R^{x+1}} = Q\Sigma R^{-x-1} = \frac{QR^{-x-1}}{R^{-1} - 1} = \frac{Q}{R^x(1 - R)} \quad (403),$$

e

$$y = R^x \left(\frac{Q}{R^x(1 - R)} + \textit{costant.} \right).$$

In generale il valore di y potrà essere liberato dal segno d'integrazione ogni volta che Q sarà una funzione razionale e intera di x.

415. È il metodo dato da d'Alembert per l'equazioni differenziali del primo grado e di cui ho fatto conoscere lo spirito (320), che il Lagrangia applica all'equazione

di questo grado e di un qualunque ordine colle differenze; ma in questo luogo impiegherò il processo col quale ritornò su quest'argomento nel 1775, e che ho già esposto, secondo esso, nelle equazioni differenziali.

In primo luogo il valore completo di y_x soddisfacendo all' equazione

$$y_{x+n}+P_x y_{x+n-1}+Q_x y_{x+n-2}\ldots+U_x y_x=0 \quad (A),$$

d'un qualunque ordine e del primo grado per rapporto alla funzione y, si ottiene come quella di y, nel n° 309 allorchè se ne conosce un numero n di valori particolari; perchè è chiaro che se

$$y'_x, y''_x, y'''_x, \ldots.$$

sono funzioni di x, che soddisfacciano separatamente l'equazione (A), l' espressione

$$y_x=C'y'_x+C''y''_x+C'''y'''_x+\text{ecc.}$$

vi soddisferà similmente senza determinazione delle costanti C, C', C'', ecc.; e quando il numero de' suoi termini, supposti assolutamente irreducibili fra loro sarà n, sarà quella l' integrale completo di questa equazione, poichè essa racchiuderà n costanti arbitrarie.

In secondo luogo l' equazione

$$y_{x+n}+P_x y_{x+n-1}+Q_x y_{x+n-2}\ldots+U_x y_x=V_x \quad (B),$$

la quale ha di più della precedente un secondo membro dipendente dalla sola x, vi si riconduce egualmente come nel n° 314 riguardando le costanti C', C'', C''' ecc., come funzioni di x. In quest' ipotesi l' espressione

$$y_x=C'_x y'_x+C''_x y''_x+C'''_x y'''_x+\text{ecc.},$$

conduce primieramente a

$$y_{x+1}=C'_{x+1}y'_{x+1}+C''_{x+1}y''_{x+1}+C'''_{x+1}y'''_{x+1}+\text{ecc.},$$

risultato che si trasforma in

$$\begin{aligned} y_{x+1}=&\ C'_x y'_{x+1}+C''_x y''_{x+1}+C'''_x y'''_{x+1}+\text{ecc.}\\ &+y'_{x+1}\Delta C'_x+y''_{x+1}\Delta C''_x+y'''_{x+1}\Delta C'''_x+\text{ecc.} \end{aligned}$$

mettendo per C'_{x+1}, C''_{x+1}, ecc., i loro valori

$$C'_x+\Delta C'x,\ C''_x=\Delta C''_x,\ \text{ecc.},$$

e si riduce a

$$y_{x+1}=C'_x y'_{x+1}+C''_x y''_{x+1}+C'''_x y'''_{x+1}+\text{ecc.},$$

allorchè si pone

$$y'_{x+1}\Delta C'_x+y''_{x+1}\Delta C''_x+y'''_{x+1}\Delta C'''_x+\text{ecc.}=0\ (1).$$

come se le quantità C'_x, C''_x, C'''_x, ecc., rimanessero costanti. Facendo di nuovo variare x, si otterrà

$$\begin{aligned} y_{x+2}&=C'_{x+1}y'_{x+2}+C''_{x+1}y''_{x+2}+C'''_{x+1}y'''_{x+2}+\text{ecc.}\\ &=C'_x y'_{x+2}+C''_x y''_{x+2}+C'''_x y'''_{x+2}+\text{ecc.}\\ &\quad+y'_{x+2}\Delta C'_x+y''_{x+2}\Delta C''_x+y'''_{x+2}\Delta C'''_x+\text{ecc.},\end{aligned}$$

risultato che si riduce a

$$y_{x+2}=C'_x y'_{x+2}+C''_x y''_{x+2}+C'''_x y'''_{x+2}+\text{ecc.},$$

nella supposizione di

$$y'_{x+2}\Delta C'_x+y''_{x+2}\Delta C''_x+y'''_{x+2}\Delta C'''_x+\text{ecc.}=0\ (2).$$

Facendo variare x una terza volta, si perviene a

$$y_{x+3}=C'_x y'_{x+3}+C''_x y''_{x+3}+C'''_x y'''_{x+3}+\text{ecc.},$$

ponendo

$$y'_{x+3}\Delta C'_x+y''_{x+3}\Delta C''_x+y'''_{x+3}\Delta C'''_x+\text{ecc.}=0\ (3),$$

e si continua così sino alle equazioni

$$\begin{aligned} y_{x+n-1}&=C'_x y'_{x+n-1}+C''_x y''_{x+n-1}+C'''_x y'''_{x+n-1}+\text{ecc.},\\ y'_{x+n-1}\Delta C'_x&+y''_{x+n-1}\Delta C''_x+y'''_{x+n-1}\Delta C'''_x+\text{ecc.}=0\ (n-1).\end{aligned}$$

Ora se nel valore di y_{x+n-1} si cambia x in $x+1$, si troverà

$$\begin{aligned} y_{x+n}&=C'_x y'_{x+n}+C''_x y''_{x+n}+C'''_x y'''_{x+n}+\text{ecc.}\\ &\quad+y'_{x+n}\Delta C'_x+y''_{x+n}\Delta C''_x+y'''_{x+n}\Delta C'''_x+\text{ecc.};\end{aligned}$$

ponendo nell'equazione (B) i valori di

$$y_x, y_{x+1}, \ldots y_{x+n-1}, y_{x+n},$$

osservando che nell' ipotesi e dietro l' equazione (A),

$$\begin{aligned} &y'_{x+n}+P_x y'_{x+n-1}+Q_x y'_{x+n-2} \ldots +U_x y'_x=0, \\ &y''_{x+n}+P_x y''_{x+n-1}+Q_x y''_{x+n-2} \ldots +U_x y''_x=0, \\ &y'''_{x+n}+P_x y'''_{x+n-1}+Q_x y'''_{x+n-2} \ldots +U_x y'''_x=0, \end{aligned}$$

rimarrà

$$y'_{x+n}\Delta C'_x+y''_{x+n}\Delta C''_x+y'''_{x+n}\Delta C'''_x+\text{ecc.}=V_x\ (n).$$

Facilmente si conosce che col soccorso dell' equazioni (1), (2) ... $(n-1)$, (n), si determineranno in funzioni di x le differenze $\Delta C'_x$, $\Delta C''_x$, $\Delta C'''_x$ ecc., per cui ridurrà la ricerca delle quantità C', C'', C''' ecc., all' integrazione delle funzioni di una sola variabile.

416. Non si sa in generale integrare l' equazione (A); ma allorchè i suoi coefficienti in vece di essere funzioni di x sono costanti, e si ha solamente

$$y_{x+n}+Py_{x+n-1}+Qy_{x+n-2}+Ry_{x+n-3} \ldots +Uy_x=0 \ldots (A'),$$

vi si soddisfa facendo $y=m^x$, onde risulta

$$y_{x+1}=m^{x+1},\quad y_{x+2}=m^{x+2}, \ldots y_{x+n}=m^{x+n};$$

imperciocchè diventa

$$m^n+Pm^{n-1}+Qm^{n-2}+Rm^{n-3} \ldots +U=0\ (A''),$$

e si verifica se si prendono per l' indeterminata m le radici di quest' ultima. Se dunque s' indica con m', m'', m''', ecc., queste diverse radici si avrà (n° precedente).

$$y_x=C'm'^x+C''m''^x+C'''m'''^x+ \ldots$$

Questa espressione presenta per rapporto alle quantità m', m'', m''' ecc., le stesse circostanze che l' integrale dell' equazione differenziale

$$d^n y+Pdx d^{n-1}y+Qdx^2 d^{n-2}y \ldots +Uy dx^n=0.$$

Può avvenire che fra le radici dell' equazione (A''), se ne trovino delle immaginarie o delle eguali fra loro. Nel

primo caso si ritorna alle quantità reali, mediante delle trasformazioni analoghe a quella del n° 310. Nel secondo caso per rendere completo l'integrale che ha cessato di esserlo, si ha ricorso all'artificio impiegato nel n° 311.

417. L'equazione (A′) potendo essere considerata come esprimente la natura di una serie di cui un termine qualunque rappresentato con y_{x+n}, dipende dagli n termini, che lo precedono, si riferisce alle *serie ricorrenti* (*Sup. degli Elem. d'Alg*) di cui il termine generale è y_x, e di cui la scala di relazione è

$$-P\,,\quad -Q\,,\ \ldots\ldots\ldots -U\,:$$

l'integrazione di quest'equazione corrisponde dunque alla ricerca del termine generale della serie proposta, ma avendo riguardo alla sola legge della sua formazione gli n primi termini di questa serie sono necessariamente arbitrari; e se si suppongono dati indicandoli con

$$y_0\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ \ldots\ldots y_{n-1}\,,$$

si potranno formare le equazioni

$$\begin{aligned}
y^0 &= C' + C'' + C''' + \text{ecc.},\\
y_1 &= C'm' + C''m'' + C'''m''' + \text{ecc.},\\
y_2 &= C'm'^2 + C''m''^2 + C'''m'''^2 + \text{ecc.},\\
y_3 &= C'm'^3 + C''m''^3 + C'''m'''^3 + \text{ecc.},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1} &= C'm'^{n-1} + C''m''^{n-1} + C'''m'''^{n-1} + \text{ecc.},
\end{aligned}$$

col mezzo delle quali si determineranno le costanti C', C'', C'''. . . di cui il numero è pure eguale ad n. La risoluzione di queste equazioni che d'altronde non sono che del primo grado può essere semplificata mediante degli artefici di cui l'esposizione non potrebbe far parte di un trattato elementare: mi limiterò quivi a far osservare che questa ricerca si lega con quella delle leggi dei fenomeni dietro le osservazioni.

418. Le costanti arbitrarie che completano gl'integrali colle differenze essendo funzioni arbitrarie (395), non possono essere determinate assoggettando quest'integrali a soddisfare ad un numero limitato di dati valori; poichè

è chiaro che qualunque funzione arbitraria comprende implicitamente un numero infinito di valori arbitrari. Sia per esempio l'equazione

$$y_x = X\varphi(\text{sen}\, 2\pi x,\ \cos 2\pi x),$$

dalla quale si debba ricavare un certo numero di valori

$$y_0 = a,\quad y_1 = a',\quad y_2 = a'',\ \text{ecc.}$$

Se questi valori corrispondono a

$$x = 0,\quad x = 1,\quad x = 2,\ \text{ecc.},$$

non si potrà soddisfare generalmente che alla prima delle imposte condizioni; imperocchè tosto che si avrà assegnato a $\varphi(\text{sen}\, 2\pi x,\ \cos 2\pi x)$, un primo valore determinato dal quale risulti $y_0 = a$, questo valore dovendo trovarsi lo stesso per gl'indici $x = 1$, $x = 2$ ecc., ne segue che i valori di y_x relativi a questi indici sono pure determinati; conviene dunque che le quantità date a', a'', ecc., corrispondano a degli indici intermedi.

Se invece d'assegnare un limitato numero di valori isolati indipendenti gli uni dagli altri, si suppone che nell'intervallo compreso fra $x = 0$ e $x = 1$, l'espressione y_x somministrar debba gli stessi valori che un'equazione data $y_x = f(x)$ la quistione sarà determinata. In fatti se si trattasse di trovare il valore di y che corrisponde ad un indice eguale ad un numero intero qualunque m più una frazione n, sia commensurabile o incommensurabile si calcolerebbe il valor di y_n dietro l'equazione $y_x = f(x)$; e paragonando il risultato con quello che dà allora l'equazione

$$y_n = X_n\varphi(\text{sen}\, 2\pi n,\ \cos 2\pi n),$$

si avrebbe in questo caso il valore di

$$\varphi(\text{sen}\, 2\pi n,\ \cos 2\pi n),$$

che debb'esser lo stesso che quello di

$$\varphi[\text{sen}\, 2\pi(m+n),\ \cos 2\ (m+n)],$$

essendo m un numero intero: l'equazione

$$y_x = X_2(\text{sen } 2\pi x, \cos 2\pi x)$$

diventando per questo

$$y_{m+n} = X_{m+n}\varphi(\text{sen } 2\pi n, \cos 2\pi n),$$

sarebbe affatto determinata.

La sola condizione alla quale sia soggetta l'equazione $y_x = f(x)$, si è che si ricava per y_0 e per y_1 gli stessi valori che si hanno dall'equazione

$$y_x = X\Phi(\text{sen } 2\pi x, \cos 2\pi x).$$

419. Le geometriche considerazioni schiariranno bene ciò che precede. Ecco frattanto come si può rappresentare col soccorso di una linea, la semplicissima equazione $\Delta y = 0$. Se si costruisce su la retta AR *fig.* 63, condotta ad una qualunque distanza dall'asse delle ascisse OX parallelamente a questo asse, e divisa in parti AA′, A′A″, A″A‴ ecc., eguali a Δx, delle curve tali che

ABA′B′A″B″A‴S, ACA′C′A″C″A‴T, ADA′D′A″D″A‴U ecc.,

passando per i punti A, A′, A″, A‴ ecc., e composte, fra questi punti, di parti eguali e simili, queste curve soddisferanno all'equazione $\Delta y = 0$ Questo è da prima evidente per i punti A, A′, A″, A‴ ecc.; e poscia si vede che prendendo $AP = x$, $AP' = x + \Delta x$, gli archi

AL e A′L′, AM e A′M′, AN e A′N′ ecc.,

essendo eguali e simili, le ordinate

LP e L′P′, MP e M′P′, NP e N′P′ ecc.,

saranno pure rispettivamente eguali, e si avrà quindi per ogni curva $\Delta y = 0$.

La condizione $\Delta y = 0$ non trascinando la continuità nei risultati, le curve AS, AT, AU ecc., non saranno in alcun modo assoggettate a questa legge. Il poligono EFE′F′E″F″E‴V composto di parti simili EFE′, E′F′E″ ecc., dà egualmente $\Delta y = 0$ agli intervalli segnati con Δx; lo stesso sarebbe di una serie d'archi eguali e simili d'una curva qualunque riuniti in un modo discontinuo come lo sono gli archi GH, G′H′, G″H″ ecc.

È chiaro che l'eubazione $y=\varphi\left(\text{sen}\frac{2\pi x}{\Delta x},\cos\frac{2\pi x}{x}\right)$ dà luogo a delle linee che soddisfano alle superiori condizioni.

420. Passiamo ora all'equazione generale del prim'ordine $\Delta y=F(x, y)$. Avendo scelto arbitrariamente o determinato secondo la condizione della quistione, il primo punto B *fig.* 64 della curva cercata come l'equazione proposta non fa conoscere nulla su i punti corrispondenti alla porzione delle ascisse $AA'=\Delta x$, e che dà soltanto l'ordinata $A'B'=y_1$ si potrà far passare per i punti B e B' una porzione di una curva qualunque. Fatto ciò per ottenere la porzione corrispondente all'ascissa A' A'' si prenderà al di quà d'un qualunque punto P' di quest'ascissa una distanza $PP'=AA'=\Delta x$, e innalzando l'ordinata PM, si condurrà MD' parallela a PP', ricavando poscia dall'equazione $\Delta y = F(x, y)$, il valore di Δy per l'ascissa A P, questo valore darà la retta D' M', la quale aggiunta alla P' D' =PM, farà conoscere il punto M'. Egualmente si troveranno tutti i punti dell'arco B' B'', questo arco impiegato a suo tempo come l'arco B' B', darà quelli del terzo arco B'' B''', e così di seguito.

È evidente che si potrebbe collo stesso processo continuare la curva al di qua del punto A, e che in tutti i casi ella soddisferà all'equazione proposta, poichè le differenze $\Delta y=D'M'$ avranno dei valori dedotti da quest'equazione: lascio al lettore di fare l'applicazione di questo processo alle equazioni di second'ordine e degli ordini superiori.

421. Si sono considerate in questo luogo le equazioni colle differenze nella sola ipotesi di $\Delta x=costant$; ma allorchè si suppone quest'ultima differenza variabile, il soggetto prende molt'estensione come se ne convincerà con la seguente quistione:

Sia $\varphi(x)$ *una funzione incognita di* x, *tale che se vi si cambia* x *in* $f(x)$, *poi in* $F(x)$, F *ed* f *indicando delle funzioni date, le espressioni corrispondenti* $\varphi[f(x)]$, $\varphi[F(x)]$ *abbiano fra loro una relazione data.*

Il Laplace ha con un processo semplicissimo ridotto questo genere di problemi a delle equazioni colle differenze in cui la variabile indipendente riceve solamente degli incrementi costanti. Perciò egli pone $f(x)=u_z$ $F(x)=u_{z-1}$, rappresentando u_z una funzione incognita della

variabile z; e se si può risolvere per rapporto ad x, la prima di quest' equazioni, se ne ricaverà $x=f_1(u_z)$, valore, il quale trasformerà $F(x)=u_{z+1}$ in $u_{z+1}=F[f_1(u_z)]$, equazione colle differenze ove la variabile z cresce soltanto dell'unità. Allorchè si saprà integrare quest' equazione, si avrà l'espressione di u_z in funzione di z; si otterrà così x in funzione di z; le funzioni $\varphi[F(x)]$ e $\varphi[f(x)]$ diverranno rispettivamente $\varphi(u_{z+1})$, $\varphi(u_z)$, e si potranno rappresentare con y_{z+1}, y_z, ciò che cambierà in una equazione colle differenze della forma

$$f(y_z, y_{z+1}, z)=0,$$

la relazione data fra i due stati pei quali passar debbe la funzione φ.

Prenderò per esempio l' equazione

$$\varphi(x)^2=\varphi(2x)+2,$$

per la quale $x=u_z$, $2x=u_{z+1}$. Da ciò si conchiude facilmente $u_{z+1}=2u_z$, equazione di cui l'integrale è $u_z=C.2^z$ (414).

Ponendo poscia $\varphi(x)=y_z$, $\varphi(2x)=y_{z+1}$, l' equazione proposta diventa

$$y_{z+1}=y^2{}_z-2,$$

e s' integra facendovi primieramente

$$z=1, y_1=a+\frac{1}{a},$$

locchè conduce a

$$y_2=a^2+\frac{1}{a^2},$$

$$y_3=a^4+\frac{1}{a_4},$$

$$y_4=a^8+\frac{1}{a^8},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_z=a^{2^{z-1}}+\frac{1}{a^{2^{z-1}}}.$$

L'ultimo di questi valori è l'integrale completo, poichè racchiude una quantità arbitraria a; e l'equazione $C.2^z = x$, dando $2^{z-1} = \frac{x}{2C}$, si avrà

$$y_z = \varphi(x) = a^{\frac{x}{2C}} + a^{-\frac{x}{2C}},$$

riducesi a

$$\varphi(x) = b^x + b^{-x},$$

se si pone $b = a^{\frac{1}{2C}}$.

Conviene osservare che le costanti a e C sono funzioni che non cambiano quando z diventa $z+1$ (395), e per conseguenza allorchè x diventa $2x$.

422. Combinando sempre ciascun nuovo punto di vista sotto il quale le grandezze possono essere considerate con le precedenti, gli Analitici considerano pure delle relazioni fra le differenze ed i coefficenti differenziali delle funzioni incognite; e da ciò nasce il *Calcolo colle differenze miste*

Le equazioni

$$\frac{dy}{dx} + a\Delta y + Cy = 0,$$
$$\frac{d\Delta y}{dx} + a\frac{dy}{dx} + b\Delta y + Cy = 0,$$

nelle quali a, b, c indicano delle costanti ed ove $\Delta x = 1$; sono di questo genere le più semplici. Si soddisfa a tutte due; ponendo $y = Ce^{mx}$; la prima si cambia in

$$m + a(e^m - 1) + b = 0,$$

e la seconda in

$$m(e^m - 1) + am + b(e^m - 1) + c = 0.$$

La discussione di queste trasformate e l'esame della natura e dell'estensione degli integrali che ne risultano, escono dai limiti che ho dovuto prescrivermi; ed io ho

voluto soltanto indicare il luogo di queste nuove ricerche (*).

Applicazione del Calcolo integrale alla teorica delle serie.

423. L'integrazione dei differenziali ad una sola variabile conducendo a delle serie, si è concluso che rappresentar si poteva una serie mediante un integrale; e siccome si hanno dei metodi per calcolare, almeno per approssimazione il valore di un integrale fra dati limiti (**), così si è cercato di risalire da una serie all'integrale di cui essa è uno degli sviluppi. Ed è per siffatte considerazioni che Eulero ha creato per la somma delle serie e la ricerca del lor termine generale dei metodi ingegnosissimi dei quali ecco qui alcuni esempi.

Sia primieramente

$$\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{2\alpha+\beta}{2a+b}x^2\ldots+\frac{n\alpha+\beta}{na+b}x^n+\text{ecc.}$$

la serie proposta; si moltiplicherà per px^r i due membri dell'equazione

$$s=\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{2\alpha+\beta}{2a+b}x^2\ldots+\frac{n\alpha+\beta}{na+b}x^n,$$

(*) *Si troveranno maggiori dettagli nel trattato in 4°. tom. III. cap.* 8. *Osserverò solo che il Calcolo colle differenze miste indicato da prima dal Condorcet, trattato poscia dai Sig.i Laplace, Paoli e Poisson, corrisponde a delle quistioni di Geometria, risolute anteriormente da Eulero, e che recentemente il Sig. Babbage si è occupato di queste quistioni e di quelle che sono comprese nell'enunciato del n.° precedente, che riguarda come dovente costituire un nuovo ramo d'analisi che egli chiama* Calcolo delle funzioni. (*Vedi le* Transact. phil, *anni* 1815—16—17)

(**) *Vedi la nota, p.* 601.

e passando in seguito ai differenziali si avrà

$$pd(sx^r)=\frac{p(r+r)(\alpha+\beta)x^r dx}{a+b}\ldots.$$

$$+\frac{p(n+r)(n\alpha+\beta)x^{n+r-1}dx}{na+b}.$$

Il fattore $na+b$ sparirà dal denominatore del termine generale e per conseguenza da tutti gli altri se, qualunque sia n, si ha $p(n+r)=na+b$: si farà dunque $np=na$, $rp=b$ onde

$$p=a, \quad r=\frac{b}{a},$$

locchè darà l'equazione

$$\frac{ad\left[sx^{\frac{b}{a}}\right]}{dx}=(\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}}+(2\alpha+\beta)x^{1+\frac{b}{a}}+(n\alpha+\beta)x^{n-1+\frac{b}{a}},$$

di cui il secondo membro più non racchiude alcun denominatore. Nuove operazioni simili alla precedente farebbero sparire i fatrori che rimanessero se il denominatore ne contenesse più d'uno.

Moltiplicando la stessa equazione per $px^r dx$, e prendendo poscia l'integrale di ciascun termine verrà

$$pa\int x^r d\left[sx^{\frac{b}{a}}\right]=\frac{pa(\alpha+\beta)}{a+b+ra}x^{1+\frac{b}{a}+r}\ldots+\frac{pa(n\alpha+\beta)}{na+b+ra}x^{n+\frac{b}{a}+r};$$

il fattore $n\alpha+\beta$ del numeratore sparirà se si fa

$$npa\alpha=na, \quad \beta pa=b+ra,$$

donde segue

$$p=\frac{1}{\alpha}, \qquad r=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}\left[sx^{\frac{b}{\alpha}}\right]=x^{\frac{\beta}{\alpha}}+x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}+x^{\frac{\beta}{\alpha}+2}\ldots\ldots+x^{\frac{\beta}{\alpha}+n}$$

$$=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left(1+x+x^2\ldots\ldots+x^{n-1}\right),$$

e per conseguenza

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}\left(sx^{\frac{b}{a}}\right)=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right).$$

Da ciò si ricava

$$s=\frac{{}_{\alpha}\int x^{\frac{b}{a}-1}\,\mathrm{d}\left[x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right]}{ax^{\frac{b}{a}}}.$$

424. **Nella serie che ho qui sopra** considerato il numero dei fattori sia del **numeratore** sia del denominatore era lo **stesso per ciascun termine**; ma è una classe di serie che Eulero chiama col nome d'**ultrageometriche** nella quale questo numero aumenta d' un termine all' altro: la serie.

$$s=\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{(a+b)(2a+b)}x^2\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots\ldots\ldots(na+b)}x^n$$

e di questa classe. Si vedrà che la loro somma si riduce all' integrazione d' una equazione differenziale.

Moltiplicando i due membri della superiore equazione per px^r, e prendendo i loro differenziali si otterrà.

$$\frac{p\,\mathrm{d}(sx^r)}{\mathrm{d}x}=\frac{p(1+r)(\alpha+\beta)}{a+b}x^r\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{p(n+r)(\alpha+\beta)\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots\ldots(na+b)}x^{n+r-1}.$$

Si farà sparire il fattore $na+b$ dal denominatore, ponendo

$$np+rp=na+b,$$

onde

$$np=na, \quad rp=b,$$

$$p=a, \quad r=\frac{b}{a},$$

$$\frac{ad\left[sx^{\frac{b}{a}}\right]}{dx}=(\alpha+\beta)\,x^{\frac{b}{a}}+\frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{a+b}x^{1+\frac{b}{a}}\ldots\ldots$$

$$+\frac{(\alpha+\beta\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots\left[(n-1)a+b\right]}x^{n-1+\frac{b}{a}}$$

Moltiplicando questo risultamento per px^r, e prendendo l'integrale di ciascuno dei membri si troverà l'equazione

$$pa\int x^r d\left[sx^{\frac{b}{a}}\right]=\frac{pa(\alpha+\beta)}{a+b+ra}x^{1+\frac{b}{a}+r}\ldots\ldots$$

$$+\frac{pa(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(na+b+ra)(a+b)\ldots\left[(n-1)a+b\right]}x^{n+\frac{b}{a}+r},$$

e il fattore $n\alpha+\beta$ sparirà dal numeratore se

$$npa\alpha+pa\beta=na+b+ra,$$

ovvero se

$$p=\frac{1}{\alpha}, \quad r=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}.$$

Mettendo in seguito a parte nel secondo membro il fattore comune $x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}$ verrà

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}d\left[sx^{\frac{b}{a}}\right]=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left\{1+\frac{(\alpha+\beta)x}{a+b}\ldots\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha+\beta)\ldots\left[(n-1)\alpha+\beta\right]x^{n-1}}{(a+b)\ldots\left[(n-1)a+b\right]}\right\}.$$

La serie compresa fra le grappe del secondo membro di questo risultamento non è altra cosa che la proposta da cui si è levato l'ultimo termine, e alla quale vi si è aggiunto l'unità: si conchiuderà dunque da ciò che precede

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\,\mathrm{d}\left[sx^{\frac{b}{a}}\right]=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left\{1+s-\frac{(\alpha+\beta)\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots(na+b)}x^{n}\right\}.$$

Differenziando questa equazione si libererà dall'integrazione indicata nel primo membro, e si otterrà l'equazione da cui dipende la somma cercata.

Quest'esempio mostra come si opererebbe in altri casi più complicati della classe delle serie di cui fa parte, osservando che ciascuna differenziazione offre il mezzo di far sparire un fattore dal denominatore, ed ogni integrazione un fattore dal numeratore.

425. Se si facesse astrazione dall'ultimo termine si avrebbe invece della somma particolare, il limite della serie considerata all'infinito, o la funzione *generatrice* di questa serie; poichè è chiaro che i processi superiori sono inversi a quelli coi quali si determinano le serie che soddisfano a delle equazioni differenziali date.

Se si trattasse per esempio di trovare il limite della serie

$$s=1x-1\,.\,2x^{2}+1\,.\,2\,.\,3\,x^{3}-\text{ecc.},$$

si potrebbe applicare a questa determinazione la prima trasformazione del n° precedente facendo

$$\alpha=1,\quad \beta=0,\quad a=0,\quad b=1;$$

ma vi si perverrà immediatamente moltiplicando per x i due membri dell'equazione posta superiormente e poscia differenziandoli. Si otterrà in questo modo

$$sx=1x^{2}-1\,.\,2x^{3}+1\,.\,2\,.\,3\,x^{4}-\text{ecc.};$$
$$\frac{\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x}=1\,.\,2x-1\,.\,2\,.\,3\,.\,x^{2}+1\,.\,2\,.\,3\,.\,4x^{3}-\text{ecc.};$$

e moltiplicando l'ultima equazione per x, essa diverrà

$$x\frac{\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x}=1\,.\,2x^2-1\,.\,2\,.\,3\,x^3+1\,.\,2\,.\,3\,.\,4x^4-\text{ecc.},$$

di cui il secondo membro è evidentemente eguale a $x-s$: così si avrà

$$x-s=\frac{x\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x},$$

ovvero

$$\mathrm{d}s+\frac{s(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

L'integrale di quest'ultima è

$$s=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\int e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \quad (285).$$

Affinchè la superiore espressione corrisponda alla serie proposta conviene che l'integrale sparisca allorchè $x=0$; e se si prende quello sino ad $x=1$, si avrà la quantità corrispondente alla serie divergente

$$1-1\,.\,2+1\,.\,2\,.\,3-1\,.\,2\,.\,3\,.\,4+\text{ecc.}$$

426. Gl'integrali definiti forniscono pure il mezzo di rappresentare delle porzioni della serie

$$u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1\,.\,2}+\text{ecc.},$$

partendo da un termine qualunque. Ecco come d'Alembert vi perviene, e dimostra nello stesso tempo il teorema di Taylor (*Ricerche su differenti punti importanti del sistema del mondo* tom. I, pag. 50):

Sia u' ciò che diventa la funzione u, quando vi si cambia x in $x+h$; ponendo

$$u'=u+\mathrm{P},$$

e differenziando per rapporto ad h, che non entra in u, viene

$$\frac{du'}{dh} = \frac{dP}{dh}, \text{ onde } P = \int \frac{du'}{dh}\, dh,$$

$$u' = u + \int \frac{du'}{dh}\, dh.$$

Sia

$$\frac{du}{dh} = \frac{du}{dx} + Q;$$

differenziando di nuovo per rapporto ad h, si ha

$$\frac{d^2u'}{dh^2} = \frac{dQ}{dh}, \text{ onde } Q = \int \frac{d^2u'}{dh^2}\, dh,$$

$$\frac{du'}{dh} = \frac{du}{dx} + \int \frac{d^2u'}{dh^2} dh, \int \frac{du'}{dh} dh = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \int\int \frac{d^2u}{dh^2}\, dh^2,$$

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \int\int \frac{d^2u'}{dh^2}\, dh^2.$$

Facendo ancora

$$\frac{d^2u'}{dh^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + R;$$

si trova

$$\frac{d^3u'}{dh^3} = \frac{dR}{dh}, \text{ onde } R = \int \frac{d^3u'}{dh^3}\, dh,$$

$$\frac{d^2u'}{dh^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \int \frac{d^3u'}{dh^3}\, dh,$$

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \int\int\int \frac{d^3u'}{dh^3}\, dh^3.$$

E continuando in questo modo si arriverrebbe a

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \int^n \frac{d^nu'}{dh^n}\, dh^n.$$

gl' integrali essendo presi in modo da sparire allorchè $h=o$, perchè u' ritorna u.

427. Sia per brevità $\frac{d^n u'}{dh^n} = H$; si avrà (242),

$$\int^n H dh^n =$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \left\{ h^{n-1} \int H dh - \frac{(n-1)h^{n-2}}{1} \int H h dh \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2\, h^{n-3}}{1 \cdot 2} \int H h^2 dh - \text{ecc.}, \right\};$$

ed è facile di vedere che si può sostituire alla serie superiore, l'espressione

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \int H (t-h)^{n-1} dh,$$

presa dopo $h=o$, purchè si cambi in seguito dell'integrazione t in h; imperocchè se si sviluppa quest'espressione, e si pongano fuori del segno $\int$ le potenze di t, che moltiplicano i differenti termini, e si faccia poscia $t=h$, si ricaderà su la proposta serie.

Da ciò segue che

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1 \cdot 2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \frac{h^{n-1}}{1.2 \ldots (n-1)} + \frac{1}{1.2 \ldots (n-1)} \int \frac{d^n u'}{dh^n} (t-h)^{n-1} dh,$$

purchè si prenda l'integrale in modo che sparisca quando $h=o$, e che si cambi di poi t in h.

Si può in questa formola porre in luogo di $\frac{d^n u'}{dh^n}$, $\frac{d^n u'}{dx^n}$ (89); e se si fa sotto il segno integrale $t - h = zt$, ovvero $h = t(1-z)$, si avrà

$$dh = -t dz, \quad \int \frac{d^n u'}{dx^n} (t-h)^{n-1} dh = -\int \frac{d^n u'}{dx^n} t^n z^{n-1} dz.$$

I limiti dell' integrale saranno allora $z=1$, $z=0$; si renderà positivo invertendo l' ordine di questi limiti vale a dire prendendolo da $z=0$ sino a $z=1$: finalmente ponendo t^n fuori del segno $\int$, e scrivendo h in vece di t, l'ultimo termine della formola superiore diverrà

$$\frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \int \frac{d^n u'}{dx^n} z^{n-1} dz.$$

Il Lagrangia è quello che ha dato quest' ultimo teorema, ma in un altro modo, nella *teorica delle funzioni analitiche*, 2ª. edizione n°. 35 e seguenti.

Se ne serve per provare che si può sempre rendere la somma di tutti i termini della serie di Taylor, partendo da un dato termine minore della precedente. Siano M e m il massimo ed il minimo dei valori che prende $\frac{d^n u'}{dx^n}$ nell' intervallo di x ad $x+h$; si avrà

$$\int \frac{d^n u'}{dx^n} z^{n-1} dz < M \int z^{n-1} dz \text{ e } > m \int z^{n-1} dz,$$

se il coefficente differenziale $\frac{d^n u'}{dx^n}$ non cambia segno o non diventa infinito in quest'intervallo (234). Fra i limiti dati, i due ultimi integrali sono $\frac{M}{n}$ e $\frac{m}{n}$; e prendendo h di una debita piccolezza si renderà la quantità $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} M$ piccola quanto si vorrà in confronto di $\frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}$.

428. È in questo modo che gl'integrali definiti servono a valutare delle quantità che con altri mezzi difficilmente si otterrebbe: e spesso prendono dei notabili valori.

Si vede con un semplice esame dei casi particolari dell' integrale $\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ riferiti nel n° 197, che queste espressioni si riducono ad un termine solo allorchè si prendono fra i limiti $x=0$ e $x=1$; e l'arco A divenendo

eguale al quarto della circonferenza, si hanno le due serie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2} \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1,$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1\cdot\pi}{2\cdot 2}, \qquad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1\cdot 3\pi}{2\cdot 4\cdot 2}, \qquad \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\pi}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2}, \qquad \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7},$$

$$\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\pi}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 2}, \qquad \int \frac{x^9 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9},$$

ecc.,

dalle quali generalmente si conchiude

$$\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots 2r}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots 2r}{3\cdot 5\cdot 7 \ldots (2r+1)}.$$

Il prodotto di questi risultati dà primieramente

$$\left(\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\right)\left(\int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\right) = \frac{1}{2r+1}\,\frac{\pi}{2}.$$

Dividendo al contrario il secondo pel primo si trova

$$\frac{\int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}}}{\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{(1-x^2)}}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4 \ldots\ldots 2r\cdot 2r}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5 \ldots (2r-1)(2r-1)(2r+1)}.$$

Per sapere ciò che diventa il primo membro di questa equazione, allorchè si protrae il numero dei fattori del

secondo sino all'infinito, ovvero quando si fa r infinito, prendo $x^{2r}=z$; i limiti di z sono gli stessi che quelli di x; ma si ha

$$x=z^{\frac{1}{2r}}, \quad dx=\frac{1}{2r}\,z^{\frac{1}{2r}-1}dz,$$

$$\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1}{2r}\int\frac{z^{\frac{1}{2r}}dz}{\sqrt{\left[1-z^{\frac{1}{r}}\right]}},$$

$$\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1}{2r}\int\frac{z^{\frac{1}{2r}}dz}{\sqrt{\left[1-z^{\frac{1}{r}}\right]}}.$$

Il rapporto dei differenziali essendo z^{2r}, si avvicina tanto più a 2° o ad 1 quanto il numero r aumenta; e passando al limite, considerare si può questo rapporto come eguale ad 1; egualmente avverrà di quello degl' integrali poichè cominciano e finiscono nello stesso tempo: da ciò dunque si conchiuderà

$$1=\frac{2\,2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,.\,8\,.\,8\,.\,10\,.\,10\,.\,\text{ecc.}}{\pi\;1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,.\,7\,.\,9\,.\,9\,.\,11\,.\,\text{ecc.}},$$

e per conseguenza

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,.\,8\,.\,8\,.\,10\,.\,10\,.\,12\,.\,\text{ecc.}}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,.\,7\,.\,9\,.\,9\,.\,11\,.\,11\,.\,\text{ecc.}}.$$

Questa notabile espressione del quarto della circonferenza del circolo è dovuta al **W**allis.

429. Una trasformazione dell' equazione

$$\left(\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\right)\left(\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\right)=\frac{1}{2r+1}\,\frac{\pi}{2}$$

conduce al valore dell' integrale $\int e^{-t^2}dt$, preso fra i limiti $t=o$, $t=$ infinito che si presenta in molte curiosissime ricerche.

Se si fa $x=e^{-qt^2}$, l' equazione precedente si cambia in

$$4q^2\left(\int\frac{tdte^{-qt^2}.e^{-2qrt^2}}{\sqrt{(1-e^{-2qt^2})}}\right)\left(\int\frac{tdte^{-qt^2}.e^{-q(2r+1)t^2}}{\sqrt{(1-e^{-2qt^2})}}\right)$$
$$=\frac{1}{2r+1}\frac{\pi}{2},$$

ponendo poscia $q(2r+1)=1$, e mettendo nel secondo membro il valore di $2r+1$, tutti e due divengono divisibili per q; poi dividendo sotto i radicali per $2q$, si ottiene

$$2\left\{\int\frac{tdt.e^{-t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}\right)}}\right\}\left\{\frac{tdt.e^{-t^2(1+q)}}{\sqrt{\left(\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}\right)}}\right\}=\frac{\pi}{2},$$

e siccome il limite di $\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}$, allorchè vi si fa $q=o$, è t^2, l' equazione precedente si riduce allora a

$$2(\int e^{-t^2}dt)^2=\frac{\pi}{2},\text{ onde }\int e^{-t^2}dt=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Ma t è infinito quando $x=o$, e nullo quando $x=1$: i limiti di quest' ultimo integrale sono dunque l' infinito e o; e siccome la funzione e^{-t^2} è sempre positiva, così ne segue che il segno superiore corrisponde ai limiti o e l' infinito positivo, e che l' integrale si raddoppia quando si prende da $t=-$ infinito sino a $t=+$ infinito: il suo valore è dunque allora $\sqrt{\pi}$.

430. Il Laplace considerando ancora l' espressione .... $\int e^{-t^{m+1}}t^n dt$, la pone sotto la forma $\int t^{n-m}e^{-t^{m+1}}t^m dt$, onde integrarla a parti, locchè dà

$$\int e^{-t^{m+1}}t^n dt=-\frac{1}{m+1}\left[e^{-t^{m+1}}t^{n-m}-(n-m)\int e^{-t^{m+1}}t^{n-m-1}dt\right).$$

Finchè l' esponente $n-m$ è positivo la parte liberata dal

segno $\int$ sparisce fra i limiti $t=0$ e $t=$ infinito (99) e rimane

$$\int e^{-t^{m+1}} t^n dt = \frac{n-m}{m+1} \int e^{-t^{m+1}} t^{n-m-1} dt,$$

il secondo integrale essendo preso tra i limiti medesimi del primo.

Se si fa $m=1$ si avrà

$$\int e^{-t^2} t^n dt = \frac{n-1}{2} \int e^{-t^2} t^{n-2} dt,$$

e ripetendo questa riduzione si otterrà

$$\int e^{-t^2} t^n dt = \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2r+1)}{2^r} \int e^{-t^2} t^{n-2r} dt,$$

risultamento che sparisce pel suo coefficente quando $n=2r-1$, e che, allorchè $n=2r$, dà

$$\int e^{-t^2} t^{2r} dt = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 1}{2^r} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

È bene osservare ancora che ponendo $e^{-t^{m+1}} = x$ si ha

$$\int e^{-t^{m+1}} t^n dt = \frac{1}{m+1} \int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{m+1}};$$

i limiti di x sono allora 1 e 0, e se si cambia l'ordine converrà sopprimere il segno —.

Ponendo $m=1$, $n=0$; si avrà

$$\int e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

431. Riporterò pure la valutazione di alcuni altri integrali che presentino delle curiose conseguenze; comincerò da quello di $\int e^{-a^2x^2} dx \cos rx$, fra i limiti $x=0$ ed $x=$ infinito dovuto al Laplace e rimarchevole pel processo impiegato per ottenerlo.

Ponendo

$$\int e^{-ax^2}\,dx\cos rx = y,$$

e differenziando per rapporto ad r (281) se ne ricava

$$\frac{dy}{dr} = -\int e^{-a^2x^2}x\,dx\,\text{sen}\,rx\,;$$

poi integrando a parti relativamente al fattore $e^{-a^2x^2}x\,dx$, si trova

$$\frac{dy}{dr} = \frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2}\text{sen}\,rx - \frac{r}{2a^2}\int e^{-a^2x^2}\,dx\cos rx\,,$$

ciò che riducesi a

$$\frac{dy}{dr} = -\frac{r}{2a^2}\,y\,, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dy}{dr} + \frac{r}{2a^2}\,y = 0\,,$$

allorchè si supone x infinito nella parte liberata dal segno $\int$.

La superiore equazione fra le variabili y e r ha per integrale

$$y = Ce^{-\frac{r^2}{4a^2}} \text{ (285)},$$

essendo C una costante arbitraria che si determina mediante il valore che prende y allorchè $r=0$ cioè:

$$\int e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \text{ (429)}.$$

Con questo mezzo si trova

$$\int e^{-a^2x^2}\,dx\cos r = \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Si mostra quivi un nuovo artificio di analisi il quale consiste a formare, fra gl' integrali e alcune delle costanti che contengono, delle equazioni differenziali che integrare

si possano. Questo processo e trasformazioni variatissime e ingegnosissime hanno considerabilmente moltiplicato nelle ricerche dei Sig. Laplace, Legendre, Poisson, Georges Bidone e Cauchy, le determinazioni degli integrali definiti di cui Eulero aveva già mostrato dei belli e numerosi esempi; ma ancora si desidera un metodo uniforme che riunisca in un corpo solo tutte queste ricerche al progresso delle quali dipende quello di molti rami importanti della fisica matematica.

432. Se si fa $a=0$, nel $\int e^{-a^2x^2}\mathrm{d}x\cos rx$ e nel suo valore osservando che

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}}{2a}=\frac{\sqrt{\pi}}{e^{\frac{r^2}{4a^2}}2a},$$

e che il limite di $e^{\frac{r^2}{4a^2}}2a$ (98) è allora l'infinito, si ottiene

$$\int\mathrm{d}x\cos rx=0,$$

fra i limiti $x=0$ e $x=$ infinito, risultato che sarebbe stato difficile di prevedere. In fatti si ha in generale

$$\int\mathrm{d}x\cos rx=\frac{1}{r}\operatorname{sen} rx+\textit{costant.}\ (217);$$

al primo limite ove $x=0$, la funzione $\operatorname{sen} rx=0$; ma che diventa essa quando si suppone l'arco x infinito; debbesi allora riguardare come *esattamente* eguale ad un numero intero di circonferenze? questo e ciò che non debbesi. Tutto quello che è permesso d'affermare è che niun arco assegnabile, per quanto sia grande, occupare non può il luogo di x: $\operatorname{sen} rx$ è dunque in questo caso una quantità indeterminata. Non è lo stesso del valore di ..... $\int e^{-a^2x^2}\mathrm{d}x\cos rx$ per ragione del fattore $e^{-a^2x^2}$, il quale diminuisce sempre a misura che x aumenta; e poichè questo integrale in virtù della legge di continuità ha per limite $\int\mathrm{d}x\cos rx$ il valore di questo sarà il limite di quello del primo.

Si conoscono ancora altri mezzi di confermare questo risultamento al quale Eulero è pervenuto considerando l' integrale $\int e^{-kx} dx \cos rx$, indicando k una costante qualunque. Se s' integra a parti cominciando dal fattore $dx \cos rx$ si avrà

$$\int e^{-kx} dx \cos rx = \frac{1}{r} e^{-kx} \operatorname{sen} rx + \frac{k}{r} \int e^{-kx} dx \operatorname{sen} rx,$$

poi operando su $dx \operatorname{sen} rx$,

$$\int e^{-kx} dx \operatorname{sen} rx = -\frac{1}{r} e^{-kx} \cos rx - \frac{k}{r} \int e^{-kx} dx \cos rx,$$

locchè dà

$$\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) \int e^{-kx} dx \cos rx = \frac{1}{r} e^{-kx} \operatorname{sen} rx - \frac{k}{r^2} e^{-kx} \cos rx,$$

e per conseguenza

$$\int e^{-kx} dx \cos rx = \frac{e^{-kx} (r \operatorname{sen} rx - k \cos rx)}{r^2 + k^2}.$$

Fra i limiti $x = 0$ ed $x =$ infinito l' espressione che si è ottenuta si riduce a $\frac{k}{r^2 + k^2}$, quantità che diventa nulla quando k sparisce, l' integrale proposto si cambia in $\int dx \cos rx$.

Riprendendo l' equazione

$$\int e^{-kx} dx \operatorname{sen} rx = -\frac{1}{r} e^{-kx} \cos rx - \frac{k}{r} \int e^{-kx} dx \cos rx,$$

e ponendo per l' integrale del secondo membro il suo valore già trovato si giugne a

$$\int e^{-kx} dx \operatorname{sen} rx = -\frac{e^{-kx} (r \cos rx + k \operatorname{sen} rx)}{r^2 + k^2},$$

valore che riducesi a $\frac{r}{r^2 + x^2}$, quando si prende fra i limiti $x = 0$ e $x =$ infinito.

La supposizione di $k = 0$ dà

$$\int dx \operatorname{seu} rx = \frac{1}{r},$$

altro notabile risultamento il quale non sembra seguire immediatamente dall' espressione

$$\int dx \operatorname{sen} rx = -\frac{1}{r} \cos rx + costant.$$

433. La trasformazione delle quantità reali in immaginarie è un artificio d' analisi che ha fatto scoprire molti rimarchevoli integrali definiti. Noi prenderemo qui un esempio del Sig. Fourier (*)

Allorchè nell' integrale $\int e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (429) si fa

$$t = \frac{x(1+\sqrt{-1})}{\sqrt{2}},$$

se ne ricava

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \int e^{-x^2\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\pi};$$

e siccome

$$e^{-x^2\sqrt{-1}} = \cos(x^2) - \sqrt{-1} \operatorname{sen}(x^2) \text{ (187)},$$

si ottiene poscia

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \left[\int dx \cos(x^2) - \sqrt{-1} \int dx \operatorname{sen}(x^2)\right] = \sqrt{\pi}.$$

Separando le parti reali e le parti immaginarie da quest' equazione se ne deducono due altre cioè:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int dx \cos(x^2) + \int dx \operatorname{sen}(x^2)\right] = \sqrt{\pi},$$

$$\int dx (\cos x^2) - \int dx \operatorname{sen}(x^2) = 0,$$

(*) *Teoria del Calorico*, p. 532.

onde

$$\int dx \cos(x^2) = \int dx \operatorname{sen}(x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi},$$

i limiti di x essendo o e l'infinito come quelli di t.

Conviene osservare che quest'artificio è stato adoperato soprattutto come mezzo di ricerca e che si è cercato la verificazione dei risultamenti. Quelli che ho riportati sono d'altronde noti.

434. La continuità che esiste tra i diversi valori che prende un integrale in ragione di quelli che si assegnano alle quantità da cui esso dipende ha dato luogo d'applicare gl'integrali definiti all'interpolazione delle serie (388).

Allorchè si fa $m=0$ nello sviluppo di $\int x^m dx (lx)^n$(208) e che si prende quest'integrale fra i limiti $x=0$ e $x=1$ pei quali la parte liberata dal segno $\int$ composta di termini della forma $x(lx)^r$, si annulla perchè r è positivo come n(99) non rimane che l'ultimo termine e si ha

$$\int dx (lx)^n = \pm 1.2.3.....n,$$

$+$ quando n è pari, e $-$ nel caso contrario. Si evita questa distinzione dando il segno $-$ ad lx, locchè cambia l'equazione superiore in

$$\int dx (lx)^n = \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^n = 1.2.3....n,$$

risultamento che subito si ottiene osservando che

$$sdx\left(l\frac{1}{x}\right) = x\left(l\frac{1}{x}\right)^n + n\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{n-1},$$

e che tra i limiti $x=0$, $x=1$, si ha solamente

$$\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^n = n\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{n-1}.$$

si potrà dunque considerare l'integrale $\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^n$ come esprimente il termine generale della serie dei prodotti

$1, 1, 1.2, \ldots 1.2.3 \ldots\ldots 1.2.3 \ldots n$, ecc.,

corrispondenti agl'indici

$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$, ecc.,

ed infatti ne ha tutte le proprietà conosciute per i valori di n (*). Dando dunque a quest'esponente dei valori frazionari o anche irrazionali s'introdurrebbero nella serie, dei termini intermedi soggetti alla stessa legge degli altri.

Il caso in cui $n=\frac{1}{2}$ è dei più notabili; poichè

$$\int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (430).$$

Vandermonde e Kramp avevano da molto tempo proposto d'introdurre nell'analisi la funzione che rappresenta il termine generale della superiore serie come esprimente un nuovo genere di quantità trascendenti dottate di proprietà rimarchevoli per la loro analogia con quelle delle potenze; e di poi il Sig. Legendre applicando l'espressione loro agli integrali definiti ne ha dedotto molte utilissime relazioni, ne ha calcolato delle tavole numeriche molto estese, e le ha indicate colla caratteristica Γ, ponendo per definizione

$$\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n),$$

di modo che $\Gamma(n)=\int_0^1 dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^n$ (**).

435. L'espressione di $\frac{\pi}{2}$ trovata nel numero 428 entra

---

(*) *Per vedere come il primo termine della serie superiore corrisponde a zero nella serie inferiore conviene fare* $n=0$ *in* $\int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^n$, *che diventa allora* $\int dx = x = 1$ *nei limiti prescritti.*

(**) *Vedi il Trattato in* 4° *t. III, p.* 411, 481.

in una formola data dallo Stirling per calcolare la somma di una serie di logaritmi appartenenti a dei numeri in progressione per differenza, ed alla quale si può pervenire nel seguente modo:

Dal n° 408 si ha $\mathrm{S}lx=\Sigma lx+lx$; mettendo in questa equazione per Σlx ciò che diventa l'espressione di Σu del n° 405, allorchè si fa $u=lx$ e $h=1$ ed osservando che $\int dx\,lx=x\,lx-x$ (208) si otterrà

$$\mathrm{S}lx=x\,lx-x+\frac{1}{2}\,lx + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360\,x^3} + \text{ecc.} + \textit{costant.}$$

Non si potrebbe determinare la costante facendo $x=1$ perchè la serie dei coefficienti numerici termina coll'essere divergente: si ha ricorso all'espressione di π del n° 428. Passando ai logaritmi e fermandosi al numero pari $2x$ nel numeratore si ottiene

$$l\pi-l2=\begin{cases} 2l2+2l4+2l6+2l8+2l10\ldots+2l(2x-2)+l2x \\ -l1-2l3-2l5-2l7-2l9\ldots.-2l(2x-3)-2l(2x-1); \end{cases}$$

e prendendo i limiti nella supposizione di x infinito, si trova mediante la precedente espressione di $\mathrm{S}lx$,

$$l1+l2+l3+l4\ldots.+lx=\textit{costant.}+(x+{}^1/_2)\,lx-x,$$
$$l1+l2+l3+l4\ldots.+l2x=\textit{costant.}+(2x+{}^1/_2)l2x-2x,$$
$$l2+l4+l6\ldots+l2x=\mathrm{S}lx+x\,l2=\textit{costant.}+(x+{}^1/_2)lx=x\,l2-x.$$

Togliendo la terza serie dalla seconda viene

$$l1+l3+l5+l7\ldots.+l(2x-1)=x\,lx+(x+{}^1/_2)l2-x,$$

donde si conchiude

$$\left.\begin{matrix} 2l2+2l4+2l6\ldots+2l(2x-2)+l2x \\ -2l1-2l3-2l5\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1) \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 2\,\textit{costant.}+2(x+{}^1/_2)lx+2x\,l2-2x-l2x \\ -2\,x\,lx-2(x+{}^1/_2)l2+2x\,; \end{cases}$$

e siccome il primo membro di quest'equazione è eguale a $l\pi-l2$ si ottiene dopo la riduzione del secondo

$$l\pi - l2 = 2\,costant. - 2l2,$$

$$costant. = {}^1/_2(l\pi + l2) = {}^1/_2 l2\pi = l\sqrt{2\pi},$$

risultamento notabilissimo e dietro al quale si ha

$$Slx = {}^1/_2 l2\pi + xlx - x + {}^1/_2 lx + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360\,x^3} + \text{ecc.}$$

Si renderà quest'equazione atta ad un sistema qualunque di logaritmi, moltiplicando pel modulo i termini nei quali non entrano in modo alcuno dei logaritmi (*).

Per darne un applicazione riferirò il calcolo chè Eulero ha fatto della somma dei logaritmi dei 1000 primi numeri delle tavole cioè del valore di

$$l1 + l2 + l3 \ldots\ldots + l\,1000.$$

(*) *Allorchè si passa dai logaritmi ai numeri, quest'equazione dà*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots x = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \cdot e^{z},$$

rappresentando per brevità con z la serie

$$\frac{1}{12x} - \frac{1}{360\,x^3} + \text{ecc.};$$

e siccome

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ecc. (27)},$$

se si sviluppano le potenze di z secondo quelle di x, si troverà

$$e^z = 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288\,x^2} - \frac{139}{51840\,x^3} + \text{ecc.},$$

risultato che si accorda con la formola della pag. 129 *della* Teorica analitica delle probabilità *del Laplace.*

La caratteristica l indicando dei logaritmi ordinari il modulo sarà per brevità rappresentato da M; e se si fa $x=1000$ si troverà

$$\begin{aligned}
x\,lx &= 3000,000000000000\\
+\tfrac{1}{2}\,lx &= 1,500000000000\\
+\tfrac{1}{2}\,l2\pi &= 0,399089934790\\
-\mathrm{M}\,x &= -434,294481903518\\
+\frac{\mathrm{M}}{12x} &= +0,000036191206\,8\\
-\frac{\mathrm{M}}{360\,x^3} &= -0,000000000001\,2
\end{aligned}$$

risultato ..... $2567,604644222132\,8$;

ma secondo la notazione del n° 414,

$$l1+l2+l3\ldots+l1000=l1\,.\,2\,.\,3\ldots1000=l\left[1000\right]^{1000};$$

si avrà dunque

$$l\left[1000\right]^{1000}=2567,604644222132\,8.$$

S' impara da ciò che il numero $\left[1000\right]^{1000}$, di cui il calcolo è quasi impraticabile, aver debbe 2568 cifre, e che le sette prime cifre alla sinistra sono 4023872 di modo che è compreso fra i numeri che risultano da 4023872 e da 4023873 seguiti ciascuno da 2561 zero. Questa conoscenza basta in molte ricerche in cui non si domandano che i rapporti dei prodotti di gran numeri; e in questo caso il valore approssimativo di questi rapporti diventa prezioso per l'impossibilità in cui si è di effettuare i calcoli necessari onde giugnere al valore esatto. La lunghezza di questi calcoli presenta allora un ostacolo tanto insuperabile quanto la difficoltà d' esprimere rigorosamente una funzione trascendente. Il Laplace ha molto esteso siffatte ricerche di cui le applicazioni sono frequentissime nel calcolo delle probabilità.

436. Gl' integrali definiti dando come si è veduto delle somme di serie sono stati impiegati con successo dai Signori Laplace, Parceval, Fourier, Poisson e Cauchy per esprimere gl' integrali delle equazioni differenziali parziali, come quello del numero 352 che non può integrarsi in termini finiti.

Il Laplace ha riconosciuto che la serie

$$z=\varphi(x)+\varphi''(x)\frac{y}{1}+\varphi^{IV}(x)\frac{y^2}{1\,.\,2}+\text{ecc.},$$

ottenuta nel n° 353 non era che lo sviluppo dell' integrale

$$\int e^{-t^2}dt\,\varphi(x+2t\sqrt{y}),$$

preso per rapporto a t, tra i limiti $t=-$ infinito e $t=+$ infinito, la funzione φ essendo arbitraria. Della qual cosa è facile l'assicurarsi come segue.

Si ha in primo luogo pel teorema di Taylor

$$\int e^{-t^2}dt\,\varphi(x+2t\sqrt{y})=$$

$$\varphi(x)\int e^{-t^2}dt+\frac{y^{\frac{1}{2}}}{1}\varphi'(x)\int e^{-t^2}.\,2t\,dt$$

$$+\frac{y^{\frac{2}{2}}}{1\,.\,2}\varphi''(x)\int e^{-t^2}.\,4t^2dt+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{1\,.\,2\,.\,3}\varphi'''(x)\int e^{-t^2}.\,8t^3dt$$

$$+\frac{y^{\frac{4}{2}}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\varphi^{IV}(x)\int e^{-t^2}.\,16t^4dt+\text{ecc.},$$

In secondo luogo gl'integrali che rimangono nello sviluppo spariscono per tutti gli esponenti dispari, e nel caso contrario sono eguali a

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,.\,(2r+1)}{2^r}\sqrt{\pi}\quad(430),$$

stantechè sono presi tra i limiti — infinito e + infinito. Sostituendo questi valori e racchiudendo nella funzione arbitraria $\varphi(x)$ il fattore costante $\sqrt{\pi}$, si ha precisamente la serie proposta: così l' equazione

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dz}{dy},$$

ha dunque per iutegrale

$$z = \int e^{-t^2} dt \varphi(x + 2t\sqrt{y}),$$

Quest' integrale facilmente si verifica. Si trova mediante la differenziazione sotto il segno (281),

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \int e^{-t^2} dt \varphi''(x + 2t\sqrt{y}),$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}} \int e^{-t^2} t dt \varphi'(x + 2t\sqrt{y})$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-t^2} \varphi'(x + 2t\sqrt{y}) + \int e^{-t^2} dt \varphi''(x + 2t\sqrt{y});$$

integrando a parti relativamente al fattore $e^{-t^2} t dt$; e se si suppone la funzione $\Phi'(x + 2t\sqrt{y})$ tale che il suo prodotto per e^{-t^2} rimanga nullo allorchè $t =$ infinito, $\frac{dz}{dy}$ prenderà lo stesso valore di $\frac{d^2z}{dx^2}$.

437. Quando si è integrata l'equazione differenziale parziale di un problema, rimane ancora a determinare le funzioni arbitrarie introdotte con questa operazione, lo che presenta spesso grandissime difficoltà. Il Sig. Fourier le ha subito evitate nelle sue ricerche su il calorico, impiegando in luogo degli integrali con delle funzioni arbitrarie, dei sviluppi come quelli che ho indicati nel n° 352 che formati sono di un numero indefinito di termini contenendo dei coefficienti e degli esponenti arbitrari (*). La determinazione di queste quantità dietro condizioni date lo ha condotto a delle trasformazioni che sembrano acquistare molta importanza per la soluzione delle quistioni

---

(*) *L'equazione di cui si occupa in primo luogo il Signor Fourier riducesi a* $\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0$ *ovvero* $r + t = 0$ *e nel n° 351 si trova pel suo integrale completo*

$$z = \Phi(y - x\sqrt{-1}) + \Psi(y + x\sqrt{-1}).$$

(*Teorica del calorico*, p. 162 e 207).

fisico-matematiche, e di cui per questa ragione passo a darne un' idea.

Prenderò per esempio l' equazione

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dy},$$

già trattata (352 e 436). Ponendo $z = Ae^{my} \operatorname{sen} nx$ si riduce facilmente a $-n^2 = m$, ciò che dà l' espressione indefinita

$$z = Ae^{-n^2y} \operatorname{sen} nx + A_1 e^{-n_1^2 y} \operatorname{sen} n_1 x + \text{ecc.} \ (*).$$

Ciò posto se il valore di z dovesse inoltre quando $y = 0$ ridursi ad una data funzione $f(x)$, questa condizione esigerebbe una determinazione dei coefficienti n e A tal che

$$f(x) = A \operatorname{sen} nx + A_1 \operatorname{sen} n_1 x + A_2 \operatorname{sen} n_2 x + \text{ecc.},$$

locchè conduce a trasformare la funzione $f(x)$ in una serie ordinata secondo i seni dei multipli dell' arco x.

Si troverà senza difficoltà che l' equazione differenziale proposta ammette ancora lo sviluppo indefinito

$$z = Ae^{-n^2y} \cos nx + A_1 e^{-n_1^2 y} \cos n_1 x + \text{ecc.},$$

(*) *Questo sviluppo è implicitamente compreso in quello che ho dato n° 352. Per farnelo sortire, basta di cambiare al luogo citato n in $-n^2$ ovvero $\sqrt{n}$ in $\pm n\sqrt{-1}$ poi A in $\pm \frac{A}{2\sqrt{-1}}$ ciò che dà per z le due espressioni*

$$\frac{Ae^{-n^2y + nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad -\frac{Ae^{-n^2y - nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

da cui la somma

$$Ae^{-n^2y} \frac{(e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}} = Ae^{-n^2y} \operatorname{sen} nx \ (187).$$

Avviene lo stesso in tutti gli altri termini.

e la condizione d' adempiere sarebbe in questo caso

$$f(x)=A\cos nx+A_1\cos n_1 x+A_2\cos n_2 x+\text{ecc.},$$

vale a dire la trasformazione di $f(x)$ in serie ordinata secondo i coseni dei multipli dell' arco x.

Si conoservano già molti sviluppi di questa specie: Eulero aveva osservato che (*Novi Comment. Acad. Petrop.* t. V. p. 204).

$$^1/_2 x=\text{sen } x-{}^1/_2\text{ sen } 2x+{}^1/_3\text{ sen } 3x-\text{ecc. (*)},$$

formola che risolve il problema allorchè $f(x)=x$ poichè se ne deduce

---

(*) *Questa serie è riferita nel trattato in 4° t. I, pag 94; ed ecco il mezzo impiegato onde pervenirvi. La formola*

$$l(1+u)=\frac{u}{1}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\text{ecc. (29)},$$

quando vi si cambia u *in* u^{-1}, *dà*

$$l(1+u^{-1})=\frac{u^{-1}}{1}-\frac{u^{-2}}{2}+\frac{u^{-3}}{3}-\frac{u^{-4}}{4}+\text{ecc.},$$

e mediante la sottrazione se ne deduce

$$l(1+u)-l(1+u^{-1})=l\frac{1+u}{1+u^{-1}}=lu=$$
$$\frac{u-u^{-1}}{1}-\frac{u^2-u^{-2}}{2}+\frac{u^3-u^{-3}}{3}-\text{ecc.}$$

Facendo allora $u=e^{x\sqrt{-1}}$, *donde segue* $lu=x\sqrt{-1}$,

$$u^m-u^{-m}=e^{mx\sqrt{-1}}-e^{-mx\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\,\text{sen } mx,$$

si avrà colla sostituzinne di questi valori

$$x=2\left(\frac{\text{sen } x}{1}-\frac{\text{sen } 2x}{2}+\frac{\text{sen } 3x}{3}-\text{ecc.}\right),$$

$$x = 2 \operatorname{sen} x - {}^2/_2 \operatorname{sen} 2x + {}^2/_3 \operatorname{sen} 3x - \text{ecc.}$$
$$= A \operatorname{sen} nx + A_1 \operatorname{sen} n_1 x + A_2 \operatorname{sen} n_2 x + \text{ecc.},$$

donde risulta

$$n = 1, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 3, \quad \text{ecc.},$$
$$A = {}^2/_1, \quad A_1 = -{}^2/_2, \quad A_2 = {}^2/_3, \quad \text{ecc.},$$

$$z = 2(e^{-y^2} \operatorname{sen} x - {}^1/_2 e^{-4y^2} \operatorname{sen} 2x + {}^1/_3 e^{-9y^2} \operatorname{sen} 3x - \text{ecc.}).$$

438. Noi non ci fermeremo agli altri casi particolari, ma passeremo alle determinazioni ottenute dal Sig. Fourier; e primieramente a quella dei coefficenti del secondo membro dell'equazione

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \text{ecc.},$$

in cui i moltiplicatori dell'arco x sono la serie dei numeri naturali.

Cambiando x in t in quest'equazione e moltiplicando poscia i due membri per $dt \operatorname{sen} nt$, e prendendo gl'integrali da $t = o$ sino a $t = \pi$ rappresentaudo π la semicirconferenza si avrà

$$\int f(t)\,dt \operatorname{sen} nt = a_1 \int dt \operatorname{sen} t \operatorname{sen} nt + a_2 \int dt \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} nt \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + a_m \int dt \operatorname{sen} mt \operatorname{sen} nt + \text{ecc.}$$

Ora

$$\int dt \operatorname{sen} mt \operatorname{sen} nt = {}^1/_2 \int dt \cos(m-n)t - {}^1/_2 \int dt \cos(m+n)t$$
$$= \frac{\operatorname{sen}(m-n)t}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)t}{2(m+n)} \quad (218),$$

---

e per conseguenza

$${}^1/_2 x = \operatorname{sen} x - {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3x - \text{ecc.},$$

Di più, siccome $x^2 = {}^1/_2 \int x\,dx$, $x^3 = {}^1/_3 \int x^2 dx$ *ecc., si risalirebbe senza difficoltà alle potenze superiori di* x *nello stesso modo che Daniele Bernoulli ha fatto, ma per un diverso scopo nei* Novi Comment. Acad. Petropolitanae, *ann.* 1772, *p.* 9.

espressione che i limiti o e π rendono nulla fiuchè n, supposto sempre un numero intiero differisce da m. Così per ciascun valore assegnato ad n, tutti i termini della serie precedente spariranno eccettuato quello di cui l'indice è eguale a questo valore. La sua seconda parte sparisce pure, ma la prima che si presenta allora sotto la forma $\frac{0}{0}$ ha per valore $\frac{t}{2}$ e diventa $\frac{\pi}{2}$ entro i limiti dell'integrazione; si avrà dunque

$$\int_0^{\pi} f(t)\,dt \operatorname{sen} mt = a_m \frac{\pi}{2},$$

e per conseguenza

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt \operatorname{sen} mt.$$

In questo modo ciascuno dei coefficienti a_1, a_2, ecc., è espresso con un integrale definito preso tra i limiti o e π e si ha per lo cercato sviluppo

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{sen} x\int f(t)dt \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2x\int f(t)dt \operatorname{sen} 2t \ldots\ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} mx\int f(t)dt \operatorname{sen} mt + \text{ecc.}\right] \text{ (A).}$$

Quando $f(x)=x$ viene

$$\int f(t)dt \operatorname{sen} mt = \int t\,dt \operatorname{sen} mt$$

$$= -\frac{t\cos mt}{m} + \frac{1}{m}\int dt \cos mt$$

$$= -\frac{t\cos mt}{m} + \frac{\operatorname{sen} mt}{m^2};$$

e fra i limiti o e π riducesi questo a

$$-\frac{\pi\cos m\pi}{m} = -\frac{\pi(-1)^m}{m}.$$

Dando in seguito ad m i valori 1, 2, 3, ecc., e sopprimendo π, che è fattor comune dei due membri, si trova lo sviluppo particolare

$$x = 2(\operatorname{sen} x - {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3x - \text{ecc.}),$$

riportato nel n° precedente.

439. Sia ancora

$$f(x) = a_0 \cos 0x + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \text{ecc.};$$

pongasi in luogo di x, t; moltiplichiamo per $dt \cos nt$, e prendiamo gl' integrali da $t=0$ sino a $t=\pi$, avremo

$$\int f(t)dt \cos nt = a_0 \int dt \cos 0\, t \cos nt + a_1 \int dt \cos t \cos nt \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + a_m \int dt \cos mt \cos nt + \text{ecc.},$$

poi

$$\int dt \cos mt \cos nt = {}^1/_2 \int dt \cos (m-n)t + {}^1/_2 \int dt \cos (m+n)t$$
$$= \frac{\operatorname{sen}(m-n)t}{2(m-n)} + \frac{\operatorname{sen}(m+n)t}{2(m+n)},$$

espressione che i limiti 0 e π fanno sparire fuorchè $n=m$. In questo caso il valore del suo primo termine essendo ${}^1/_2 \pi$ ne segue

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)dt \cos mt.$$

Conviene frattanto eccettuare da questo risultamento il primo termine della serie superiore pel quale $n=0$ dà solamente

$$\int_0^\pi f(t)dt = a_0 \int_0^\pi dt = a_0 \pi,$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t)dt.$$

Da ciò risulta che

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int f(t)dt +$$

$$\frac{2}{\pi} \left[\cos x \int f(t)dt \cos t + \cos 2x \int f(t)dt \cos 2t \ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$
$$\left. \ldots\ldots\ldots\ldots + \cos mx \int f(t)dt \cos mt + \text{ecc.} \right] \quad (B),$$

le integrazioni essendo effettuate fra i limiti o e π.

440. Queste espressioni sono suscettibili di discussioni delicatissime relativamente alla loro estensione. Non è questo il luogo di fermarsi su tali dettagli ma ne darò almeno sentore indicando l'andamento dei valori dei due membri dell'equazione

$$^1/_2\, x = \text{sen}\, x - {}^1/_2\, \text{sen}\, 2x + {}^1/_3\, \text{sen}\, 3x - \text{ecc.}$$

Spariscono quando $x=0$; e se si fa $x=\frac{\pi}{2}$ se ne ricava

$$^1/_4\, \pi = 1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + \text{ecc.}$$

valore ben noto (38). Ma allorchè si suppone $x=\pi$ ciò che dà $^1/_2\,\pi$ per il primo membro, il secondo sparisce: egualmente avviene pel valore $x=-\pi$, di modo che lo sviluppo non è esatto che fra i limiti $x=\pm\pi$ esclusivamente, vale a dire che i valori di $\frac{\pi}{2}$ e di $-\frac{\pi}{2}$ non vi sono compresi.

Se poscia si fa

$$x = \pi + y$$

lo sviluppo divenendo

$$-\text{sen}\, y - {}^1/_2\, \text{sen}\, 2y - {}^1/_3\, \text{sen}\, 3y - \text{ecc.},$$

non corrisponde più al primo membro che è $^1/_2\,(\pi+y)$; ma se si cambia x in $\pi - y$, verrà

$$^1/_2\,(\pi - y) = \text{sen}\, y + {}^1/_2\, \text{sen}\, 2y + {}^1/_3\, \text{sen}\, 3y + \text{ecc.},$$

locchè mostra che il primo sviluppo in y dà il valore dell'arco negativo $^1/_2\,(y-\pi)$, eccettuando però il caso ove $y=0$.

Bisogna ancora osservare che lo sviluppo di $^1/_2\, x$ dà immediatamente quello della funzione $ax+b$, che esprime l'ordinata d'un retta qualunque; ma mentre che la funzione rappresenta la retta in tutta la sua estensione lo sviluppo in seno non corrisponde che alla porzione compresa fra le ascisse $+\pi$ e $-\pi$ esclusivamente. Si può

cambiando variabile, come si vedrà in seguito, (442) passare ad altri limiti ma si otterrà soltanto una porzione di linea retta.

441. Gli sviluppi (A) e (B) debbono rappresentare rispettivamente due specie di funzioni. Il primo di cui tutti i termini cambiano di segno con l'arco x, corrisponde ai casi nei quali $f(x)$ è una funzione che gode della stessa proprietà, e che si chiama *funzione impari*, a motivo che se essa fosse sviluppata secondo le potenze di x, non conterrebbe che degli impari.

Il secondo sviluppo avendo la proprietà contraria, quella cioè di conservare lo stesso segno quantunque quello di x cambi, sarebbe particolarmente applicabile alle *funzioni pari;* ma l'uno e l'altro non sono ancora che serie, le quali si possono sorrogare come si vedrà mediante una nuova integrazione definita.

Per questo cominciamo dal riunirli osservando che una funzione qualunque $F(x)$ può essere decomposta in due parti l'una pari, cioè tale che se si rappresenta con $\varphi(x)$, si abbia $\varphi(x)=\varphi(-x)$, l'altra impari, o tale che indicandola con $\psi(x)$ venga $\psi(x)=-\psi(-x)$. Esprimendo la prima con la serie (B), la seconda con la serie (A), e addizionandole si avrà

$$\varphi(x)+\psi(x)=F(x)=\frac{1}{\pi}\int\varphi(t)dt+$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos x\int\varphi(t)dt\cos t+\cos 2x\int\varphi(t)dt\cos 2t+\text{ecc.}\\ +\text{sen}\,x\int\psi(t)dt\,\text{sen}\,t+\text{sen}\,2x\int\psi(t)dt\,\text{sen}\,2t+\text{ecc.}\end{array}\right\},$$

i limiti di questi integrali essendo ancora o e π.

Si possono estendere da $-\pi$ a $+\pi$ purchè si duplichi il primo membro, perchè la funzione $\varphi(t)$ essendo pari passerà da o a $-\pi$ cogli stessi valori che da o a π come i coseni. Veramente la funzione $\psi(t)$ avrà in questi intervalli dei segni diversi; ma siccome ella è sempre moltiplicata da un seno che cambia nello stesso tempo di segno, così il prodotto conserverà lo stesso segno: il risultato totale sarà dunque doppio; in questa guisa prendendo gl'integrali da $-\pi$ a $+\pi$ si scriverà

$$2F(x)=\frac{1}{\pi}\int\Phi(t)dt+$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos x\int\varphi(t)dt\cos t+\cos 2x\int\varphi(t)dt\cos 2t+\text{ecc.}\\ +\operatorname{sen} x\int\psi(t)dt\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 2x\int\psi(t)dt\operatorname{sen} 2t+\text{ecc.}\end{array}\right\}.$$

Bisogna ora introdurre la funzione proposta $F(x)$ in luogo delle funzioni φ e ψ lo che si fa facilmente quando si osserva che

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)dt\cos mt,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt\operatorname{sen} mt,$$

sono sempre nulli, perchè il differenziale da integrare è il prodotto di due fattori di cui un solo cambia di segno con t, cioè: $\psi(t)$ nel primo e $\operatorname{sen} mt$ nel secondo. Perciò si può senza turbare l'ultimo sviluppo aggiugnervi i termini che somministrano l'espressioni

$$\cos mx\int\psi(t)dt\cos mt,\qquad \operatorname{sen} mx\int\varphi(t)dt\operatorname{sen} mt:$$

allora moltiplicando i due membri dell'equazione per π, e dividendoli per 2, si otterrà

$$\pi F(x)=\frac{1}{2}\int\left[\varphi(t)+\psi(t)\right]dt$$

$$\left.\begin{array}{l}+\cos x\int\left[\varphi(t)+\psi(t)\right]dt\cos t+\text{ecc.}\\ +\operatorname{sen} x\int\left[\varphi(t)+\psi(t)\right]dt\operatorname{sen} t+\text{ecc.}\end{array}\right\}.$$

e per conseguenza

$$\pi F(x)=\frac{1}{2}\int F(t)dt$$

$$\left.\begin{array}{l}+\cos x\int F(t)dt\cos t+\cos 2x\int F(t)dt\cos 2t+\text{ecc.}\\ +\operatorname{sen} x\int F(t)dt\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 2x\int F(t)dt\operatorname{sen} 2t+\text{ecc.}\end{array}\right\}.$$

Il segno $\int$ riferendosi soltanto alla variabile t si possono far passare sotto i fattori in x; e siccome

$$\cos x\cos t+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} t=\cos(x-t),$$

$$\cos 2x\cos 2t+\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 2t=\cos(x-t),$$

ecc.

la precedente equazione può ridursi a

$$\pi F(x)=\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt\left[{}^1/_2+\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\text{ecc.}\right].$$

Si semplifica ancora scrivendo

$$\pi F(x)=\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt\left[{}^1/_2+S\cos m(x-t)\right],$$

la somma S essendo presa da $m=1$ sino a $m=$ infinito, e comprenda i due valori estremi (*).

442. Si possono dare all' integrale dei limiti qualunque in vece di π; basta perciò di cambiare x e t in $\frac{\pi x'}{a}$ e $\frac{\pi t'}{a}$; facendo allora $\frac{\pi t'}{a}=-\pi$, $\frac{\pi t'}{a}=+\pi$, i limiti di t' saranno $-a$ e $+a$, dt diverrà $\frac{\pi dt'}{a}$, si avrà

$$\pi F\left(\frac{\pi x'}{a}\right)=\int_{-a}^{a} F\left(\frac{\pi t'}{a}\right)dt'\left(\frac{1}{2}+S\cos\frac{m\pi}{a}(x'-t')\right).$$

Poi sopprimendo il fattore comune π, come pure l'accento affetto alle lettere x e t il quale non è più necessario, e scrivendo $f(x)$, $f(t)$, per $F\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, $F\left(\frac{\pi t}{a}\right)$, verrà

$$f(x)=\int_{-a}^{a} f(t)dt\left(\frac{1}{2a}+S\frac{1}{a}\cos\frac{m\pi}{a}(x-t)\right).$$

443. In quest' ultima formola la quantità a non essendo sottomessa ad alcuna restrizione si può supporre infinita, e si ottiene per $F(x)$ un' espressione in cui la somma S

(*) *Questa è conforme alla distinzione stabilita nel n° 408 da Eulero* (Inst. Calc. diff., *P. I^a, cap. II*, n° 59) *e pongo quivi il segno S in luogo di* Σ *che altrove si trova.*

è rimpiazzata da un integrale coi differenziali. Si pone da prima

$$\frac{m\pi}{a}=q\,,\qquad \frac{(m+1)\pi}{a}=q_1\,,$$

donde segue

$$\frac{\pi}{a}=\Delta q\,,\quad \frac{1}{a}=\frac{\Delta q}{\pi}\,,$$

$$f(x)=\int_{-a}^{a} f(t)\,dt\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{\pi}S\Delta q\cos q\,(x-t)\right).$$

Ora, più aumenta a, più Δp diminuisce, più la somma S si avvicina ad un integrale coi differenziali (232); e per passare a questo limite non bisogna che cambiare πq in dq, osservando che la variabile q prenderà tutti i possibili valori, da o sino all'infinito: si avrà dunque

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int f(t)dt\int dq\cos q(x-t),$$

formola nell'integrazione relativa a q si estende da o all'infinito, e l'integrazione relativa a t da — infinito a + infinito.

Quest'ultimo risultato si decompone in due altri quando si separano le funzioni pari dalle funzioni impari. Si sostituisce allora a $\cos q(x-t)$ il suo valore $\cos qx\cos qt + \text{sen}\,qx\,\text{sen}\,qt$, e cambiando l'ordine delle integrazioni viene

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int dq\cos qx\int f(t)dt\cos qt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int dq\,\text{sen}\,qx\int f(t)dt\,\text{sen}\,qt\,;$$

rimpiazzando poscia la funzione qualunque $f(x)$ con una funzione pari $\varphi(x)$, poi con una impari $\psi(x)$, osservando che

$$\int_{-a}^{a}\varphi(t)dt\,\text{sen}\,qt=0\,,\qquad \int_{-a}^{a}\psi(t)dt\cos qt=0.$$

dietro l' osservazione fatta nel n° 441, si otterranno le due espressioni

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int dq \cos qx \int \varphi(t) dt \cos qt ,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int dq \operatorname{sen} qx \int \psi(t) dt \operatorname{sen} q ,$$

gl' integrali essendo presi entro i limiti o e infinito per la variabile q, — infinito e + infinito per la variabile t.

444. Le formole precedenti dovute al Sig. Fourier, hanno pure molto occupato i Signori Poisson e Cauchy; questi le hanno estese alle funzioni di molte variabili, e pervenuti vi sono con diversi mezzi. Rimanderò ai loro scritti il lettore che vorrà conoscere i punti di vista sotto i quali hanno considerato questa teorica (*)

Riferirò soltanto una delle maniere con cui il Sig. Poisson ha verificato *a posteriori* la formola principale.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int f(t) dt \int dq \cos q (x - t) ,$$

trattando $\int_0^{\infty} dq \cos q (x - t)$ come il limite vero al quale tende l' integrale $\int e^{-a^2 q^2} dq \cos q (x - t)$, a misura che la quantità a decresce.

(*) *Vedi il* 18° *e il* 19° *quaderno del Giornale della scuola Politecnica, gli esercizi d'analisi del Sig. Cauchy, e il tomo VI delle* Nuove Memorie dell' Accademia delle Scienze.

In quest' ultimo il Sig. Poisson impiega la trasformazione superiore, onde pervenire all' espsessione di $\int u dx$ *indicata nella nota della pag.* 601, *e per determinare i limiti dell' errore che si commette fermandosi a quel termine che si vorrà. Nel* 1814 *il Sig. Gauss trattò lo stesso soggetto, ma con un mezzo derivato dalle formole d' interpolazione, e che si riferisce a quello che si è veduto nel* n° 388 (*Vedi il t. III delle* Commentationes societatis Gottingensis recentiores, *ann.* 1814 - 1815.)

Quest'ultima formola rientra in quella del nº 431, in cui basterà cambiare r in $x-t$ e x in q, per ottenere

$$\int e^{-a^2 q^2} dq \cos(x-t)q = \frac{e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2}}}{2a}\sqrt{\pi}.$$

e per conseguenza

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int \frac{e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2}}}{2a}\sqrt{\pi}\, f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2}} f(t)dt.$$

Ciò posto il fattore $e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2}}$ decresce nello stesso tempo che a e tende a divenir nullo, a meno che il numeratore $(x-t)^2$ del suo esponente non sia di una piccolezza paragonabile a quella di a, ciò che avrà luogo allorchè il valore della variabile t differirà poco da quello di x: è dunque soltanto in questo caso che l'integrale indicato potrà prendere un valore assegnabile. Per scoprirlo conviene fare $t=x+z$, e supporre che il valore di z rimanga fra dei limiti si ristretti che considerar si possa sempre come infinitamente piccolo e che sia permesso in conseguenza di ridurre $f(x+z)$ a $f(x)$; viene allora

$$f(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int e^{-\frac{z^2}{4a^2}} f(x)\,dz - \frac{f(x)}{2a\sqrt{\pi}}\int e^{-\frac{z^2}{4a^2}} dz.$$

Ora poichè l'integrale compreso nell'ultimo membro sparisce tosto che z ha un valore assegnabile non si cambia quello di quest'integrale estendendo z sino allo stesso infinito; ma tra questi limiti,

$$\int e^{-\frac{z^2}{4a^2}} dz = 2a\sqrt{\pi},$$

locchè fa sparire a nell'espressione $f(x)$, e la rende identica.

Discorderebbe appoggiato soltanto su il valore di un integrale definito al quale non si attribuisce, a propriamente parlare, che un solo elemento, il processo che ora ho esposto, non deve comparire delicatissimo; e ciò che lo comprova, è che applicandolo ancora ad altri integrali, in particolare ad uno di quelli del n° 432, se ne ricava sempre lo stesso risultamento ottenuto d' altronde *a priori* con delle differentissime considerazioni.

Per formarsi una chiara idea di questo passaggio d' un limite finito ad un limite infinito, non è forse inutile di esaminare l' andamento dei valori di un integrale analogo al precedente. Tale è $\int e^{-t^2} dt$, di cui si trova una tavola alla fine dell' *Analisi delle rifrazioni astronomiche* di Kramp. Si vede che quest'integrale di cui $\sqrt{\pi}=0,88622692$ è il valore tra i limiti zero e l' infinito è già ridotto a $0,0000_{19}58$ allorchè t è solamente eguale a 3. Lo scemamento debb' essere ancora ben più rapido quando l' esponente $-t^2$ è diviso per il quadrato di un numero piccolissimo come nella formola superiormente trattata, e allorchè si suppone infinitamente piccolo quest' esponente, è un limite rigoroso che si cerca e che si ottiene.

FINE.

NOTE

Nota A, *indicata alla pag.* 1 *e seguenti.*

1. Considerato nei processi che lo costituiscono, il Calcolo differenziale è più semplice delle parti superiori dell' Algebra. La sua difficoltà non consiste se non che di scorgere subito qual sia lo scopo, e concepire il senso di alcuni termini nuovi di cui si ha bisogno d' introdurre

È un problema di Geometria (quello di *Pappus*) risoluto soltanto in alcuni casi particolari, dagli antichi, che ha condotto Cartesio a inventare l'applicazione dell' Algebra all' espressione delle linee curve; è pure un problema (quello delle tangenti) che ha fatto scoprire il Calcolo differenziale.

Nei tempi d' Euclide si è potuto osservare che le tangenti godevano delle proprietà delle secanti, modificando queste proprietà come lo esige la riunione dei due punti d' intersecazione in un solo che è allora il punto di contatto. (*Vedi* il n° 128 *degli Elementi di Geometria.*) È pure su questo principio che riposano, sia esplicitamente, sia implicitamente tutti i metodi che si sono fondati su il Calcolo per condurre le tangenti alle curve Fra questi metodi, scelgo quello del Barrow, il quale non è ancora il Calcolo differenziale, ma che di più se ne avvicina.

Sia esempligrazia la parabola ordinaria data dall' equazione $y^2=px$; prendendo su questa curva due punti M e M′ *fig.* 1, per condurre una secante, ponendo

$$\begin{array}{lll} AP=x, & PP'=h, & A'P'=x+h, \\ PM=y, & M'Q=k, & P'M'=y+k, \end{array}$$

paragonando i triangoli simili M′QM e MPS, si avrà

$$M'Q : MQ :: PM : PS, \text{ onde } PS=y\frac{h}{k};$$

e poichè il punto M′ appartiene alla curva, si ha pure

$$(y+k)^2=p(x+h);$$

sviluppando quest'equazioue onde levarne i rispettivi membri $y^2 = px$, resterà

$$2yk + k^2 = ph, \text{ che riducesi a } \frac{2y+k}{p} = \frac{h}{k};$$

dunque $PS = y\frac{2y+k}{p}$. Ma se si fa coincidere il punto M' con il punto M, h e k spariscono, PS diventa PT, e il valore nella prima di queste linee riducesi a $\frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$.

La prima osservazione che qui si offre è, che malgrado la sparizione delle quantità h e k, la frazione che esprimeva il loro rapporto continuo d' esistere, o d' avere un valore apprezzabile, giacchè essa si riduce a $\frac{2y}{p}$, valore di cui la quantità $\frac{2y+k}{p}$ si avvicina a misura che k diminuisce, e dalla quale può differire di una qualsivoglia piccolissima quantità, prendendo k molto piccolo.

Questa frazione $\frac{2y}{p}$ è dunque il limite di $\frac{2y+k}{p}$, o quello del rapporto $\frac{MQ}{M'Q}$, come $\frac{PT}{PM}$ lo è di $\frac{PS}{PM}$.

Per assicurarsi che $\frac{PS}{PM}$ può avvicinarsi tanto quanto si vorrà a $\frac{PT}{PM}$, basta considerare se il punto M' passasse al disotto del punto M, il punto S cadrebbe dall'altra parte del punto T.

II. A quest' esempio ricavato dalla Geometria, aggiungiamone un altro tratto della Meccanica.

I corpi cadono verso la superficie della terra, in virtù d'una forza che agisce costantemente, ed in conseguenza della quale i loro moti s'accelerano, vale a dire che questi corpi percorrono spazi sempre maggiori in intervalli di tempo eguali, allorquando questi intervalli si prendono sempre più lontani dall'origine del moto.

Così rappresentando con 1 lo spazio percorso nel 1° secondo, nel 2° si avrà 3, nel 3° 5, e così di seguito:

sono questi i dati dell'esperienza che hanno fatto scoprire a Galileo che la forza di cui si tratta, o la gravità, è costante, vala a dire ch'ella genera sempre la stessa velocità nello stesso tempo. *Per velocità conviene intendere lo spazio che il corpo percorrerebbe nell' unità di tempo, se la forza cessasse d' agire su lui al principio di questa unità.* Posto ciò vediamo come si possono calcolare gli effetti d' una simil forza.

Invece di supporre che operi costantemente, concepiamo che le sue azioni siano istantanee come quella dell'impulsione, e che esse si ripetano a degli intervalli segnati da una frazione $\frac{1}{m}$ di secondo preso per unità di tempo. Un corpo riceverà dunque durante l'unità del tempo un numero m di queste azioni di cui gli effetti aggiugnendosi gli uni agli altri gli imprimeranno alla fine di questo tempo una velocità totale che rappresenterò con p. La velocità che risulterebbe da una sola azione sarebbe dunque $\frac{p}{m}$ sempre per l' unità di tempo. Così durante la frazione $\frac{1}{m}$, il corpo non percorrerebbe che lo spazio $\frac{p}{m^2}$. Considerando gl' intervalli consecutivi indicati qui sotto

$$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots \frac{n-1}{m}, \frac{n}{m}$$

si avrà, 1° per le velocità risultanti dalle azioni esercitate dalla forza, al principio di ciascuno di questi intervalli

$$\frac{p}{m}, \frac{2p}{m^2}, \frac{3p}{m}, \frac{4p}{m^2} \ldots\ldots\ldots \frac{np}{m};$$

2.° per gli spazi percorsi alla fine degli stessi intervalli

$$\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m^2}, \frac{3p}{m^2}, \frac{4p}{m^2}, \ldots \frac{np}{m^2};$$

la somma di tutti questi spazi di cui il numero è n, sarà per la formola relativa alle progressioni per differenza (*Elem. d'Alg.* 229),

$$\left(\frac{p}{m^2} + \frac{np}{m^2}\right)\frac{n}{2} = \frac{p}{2}\left(\frac{n}{m^2} + \frac{n^2}{m^2}\right).$$

Ora se si osserva che un numero qualunque di secondi,

indicato con t, contiene un numero mt d'intervalli eguali a $\frac{1}{m}$", e che si faccia $n=mt$, la precedente espressione diverrà

$$\frac{p}{2}\left(\frac{mt}{m^2}+\frac{m^2t^2}{m^2}\right)=\frac{pt}{2}\left(\frac{1}{m}+t\right).$$

Dunque si vede che più il numero m aumenta più le azioni della forza si avvicinano, meno la quantità $\left(\frac{1}{m}+t\right)$ differisce da t, e che la stessa sussiste allorchè si annulla la frazione $\frac{1}{m}$, lo che annienta l'intervallo supposto fra le successive azioni della forza Questo stato di cose è il limite vero al quale tende incessantemente la serie dei moti considerati più alto; e per conseguenza nell'azione continua della forza lo spazio percorso è eguale a $\frac{1}{2}pt^2$.

Ponendo il valore di n, nell'espressione $\frac{np}{m}$ della velocità acquistata dopo le n prime azioni, diverrà $\frac{mtp}{m}=pt$, quantità indipendente da m, e per conseguenza la stessa per quanto piccolo sia l'intervallo $\frac{1}{m}$.

Ora se si fa successivamente $t=0$, $=1$, $=2$, ecc., si avranno gli spazi

$$0, \left(\frac{1}{2}p\right), \quad 4\left(\frac{1}{2}p\right), \quad 9\left(\frac{1}{2}p\right), \text{ ecc.},$$

di cui le differenze sono

$$\left(\frac{1}{2}p\right), \quad 3\left(\frac{1}{2}p\right), \quad 5\left(\frac{1}{2}p\right), \text{ ecc.},$$

cioè 1, 3, 5, ecc. volte lo spazio percorso durante il 1° secondo.

Nell' esempio di pura Geometria, si sono supposti da prima de' punti distinti, due intersecazioni in vece di un contatto; ma passando al limite, si è stabilita la coincidenza dei punti, e le intersecazioni si sono cambiate in contatto.

Nell' esempio di Meccanica, in vece d' un moto continuamente accelerato, si è considerato una serie di moti uniformi o eguali, durante un certo intervallo di tempo, e di cui la rapidità crescesse soltanto nel passaggio dell' uno all' altro; ma prendendo il limite, si è annullato l' intervallo supposto fra le azioni della forza, si è cambiato una serie d' azioni isolate in una azione continua e l' insieme dei moti supposti uniformi è divenuto il moto uniformemente accelerato, come ha luogo nella natura.

Bastano questi due esempi per mostrare l' importanza della considerazione degli stati successivi pei quali passano delle quantità variabili, come le ordinate delle curve, gli spazi percorsi per l' effetto delle forze che cambiano, e di cercare, non il cambiamento in loro stesse, ma i limiti verso i quali tendono i rapporti loro.

III. Questa considerazione, che è al dì d' oggi la miglior base che dar si possa al Calcolo differenziale, si trova implicitamente nella Geometria elementare tutte le volte che paragonar conviene le linee curve alle linee rette, le aree circolari a quelle dei poligoni, i corpi rotondi ai poliedri; poichè si misurano soltanto *immediatamente* delle linee rette, dei poligoni e dei poliedri.

Imperocchè se si indica con ω l' angolo AOH, *fig.* 65, che è la metà dell' angolo al centro del poligono qualunque ABC, circoscritto al circolo di cui il raggio $OH = r$, e che si prenda l' unità per il raggio delle tavole trigonometriche si avrà

$$1 : \text{tang. } \omega :: r : AH, \text{ onde } AH = r \text{ tang. } \omega,$$
$$AB = 2r \text{ tang. } \omega.$$

Ma il lato AB è contenuto tante volte nel contorno del poligono regolare, quanto l'arco che misura l'angolo AOB, è contenuto nella circonferenza: sia dunque 2π quella che è descritta con il raggio 1, e alla quale si riferisce l'arco ω; il numero dei lati del poligono sarà $\frac{2\pi}{2\omega}$; così il suo contorno sarà

$$\frac{2\pi}{2\omega} \cdot 2r \text{ tang. } \omega = 2\pi r \cdot \frac{\text{tang. } \omega}{\omega}.$$

Ora più il numero dei lati del poligono aumentetà, più l'angolo ω diminnirà, e più il rapporto $\frac{\text{tang } \omega}{\omega}$ avvicinerà all'unità che è il suo limite (pag. 44). Se si passa a questo limite, il poligono si cambierà nel circolo e la sua circonferenza diverrà $2\pi r$, come dà la Geometria elementare.

Niente è più facile di ottenere ora la superficie del circolo. Quella del poligono ABC essendo eguale al suo contorno $2\pi r \frac{\text{tang } \omega}{\omega}$, moltiplicato per $^1/_2$ OH ovvero $^1/_2 r$, riducesi a $\pi r^2 \frac{\text{tang}\omega}{\omega}$; e passando al limite si ha πr^2, come dalla Geometria elementare.

Si applicherebbero ben facilmente questi calcoli ai corpi rotondi; ma noi non vi ci fermeremo punto: noi ci ristringeremo soltanto a far osservare che quivi il *limite* si mostra non come un modo arbitrario d'esposizione, ma bensì come dipendente dalla sostanza delle cose.

La considerazione dei limiti non è più straniera agli Elementi d'Algebra. Ne ho dato un esempio nella frazione $\frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)}$ della quale i due termini spariscono quando $a=b$, e di cui il valore è allora $2a$, e ne ho fatto uso onde spiegare un caso singolare del problema dei due lumi. (*Elem. d' Alg.*, 70, 120).

In fatti, è sempre a siffatta considerazione che bisogna ricorrere per spiegare le difficoltà che nascer possono dalle indicazioni di quantità infinite o infinitamente piccole, di cui le matematiche non hanno bisogno di supporre l'esistenza attuale, e che d'altronde non offrono disputa alcuna allo spirito. Non è dunque da maravigliarsi se, lorquando si analizza con diligenza le tooriche diverse proposte pel fondamento dei principii del Calcolo differenziale vi si scorgono sempre delle idee dei limiti.

IV. Talvolta si sono impiegate delle locuzioni viziose: ed

è perciò che si è chiamato lungo tempo il metodo dei limiti col nome di *metodo delle prime e ultime ragioni*; ma questo linguaggio non è esatto. Quando più sopra, abbiamo considerato il rapporto $\frac{2y+k}{p}$ delle linee $\frac{MQ}{M'Q}$ (pag. 604) noi non dovevamo dire che il limite $\frac{2y}{p}$ era l'ultima ragione di queste linee; poichè quando $\frac{2y+k}{p}$ si cambia in $\frac{2y}{p}$, per l'annientamento di k, i due punti M′ e M coincidono, le linee M′Q e MQ più non esistono, e più non hanno rapporto. È dunque come esistente a parte è come quantità *sui generis*, che bisogna considerare $\frac{2y}{p}$ e ciò che lega questa frazione alle quantità h e k, ovvero MQ e M′Q, è unicamente che la possano far derivare, come esprimente non il loro rapporto, ma il suo limite. Questo è ciò che lo stesso Newton ha benissimo espresso in questo passo del suo libro dei *Principii*.

„ Le ultime ragioni che hanno fra loro le quantità che „ spariscono non sono, per verità, le ragioni delle ultime „ quantità, ma i limiti di cui le ragioni delle quantità „ che decrescono all'infinito si avvicinano continuamente, „ e in modo da non differirne che pochissimo a piaci- „ mento nostro (*). „

Se si supponesse che il punto M′ subito riunito al punto M se ne allontanasse allora le linee MQ e M′Q sorgerebbero in vece di disparire, ed è in questo senso che si chiamava $\frac{2y}{p}$ la loro prima ragione.

(*) *Ultimae rationes illae quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; et quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia.* (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, lib. I, sect. 1, lem. XI, scholium.)

V. Sembrami che per chiaramente vedere il principio dei limiti, nel passaggio delle linee rette alle curve, basti di osservare che la differenza caratteristica fra una curva ed un poligono, consiste in ciò che si può sempre inscrivere nella curva un angolo tanto prossimo quanto si vorrà a due retti, lo che non puossi fare in un poligono, ove l'angolo alla circonferenza è maggiore di tutti quelli che possono essere situati fra due lati consecutivi.

Segue immediatamente da questa considerazione che, *in una curva qualunque il limite del rapporto dell'arco alla sua corda è l'unità;* imperciocchè se si prende da ciascuna parte del punto A, *fig.* 66, delle corde sempre più piccole AB=AC, AB′=AC′, ecc., e si tirino le rette BC, B′C′ ecc., e si abbassino su queste rette le perpendicolari AD, AD′, ecc., i triangoli BAD, B′AD′, ecc., daranno

$$\frac{BC}{AB+AC}=\frac{BD}{AB}=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}BAC\,\frac{B'C'}{AB'+AC'}=\frac{B'D'}{AB'}=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}B'AC' \text{ ecc.,}$$

ma gli angoli $\frac{1}{2}BAC$, $\frac{1}{2}B'AC'$, ecc., tendono incessantemente a diventar retti, i loro seni si avvicinano di più in più ad essere eguali all'unità: accade lo stesso dei rapporti delle linee spezzate colle rette che congiungono le loro estremità, unioni di linee che si avvicinano in tal modo sempre più all'arco ed alla sua corda.

Bisogna ben osservare che ciò non è semplicemente perchè il loro rapporto tende verso l'unità. I lati di un triangolo rettilineo, per esempio, conservono sempre il loro rapporto, in qualunque grado di piccolezza che si riducano, cosicchè i nuovi triangoli rimangono simili al primo, e le differenze di questi lati decrescono pure nello stesso rapporto; ma non è così per gli archi: si spianano perchè l'angolo inscritto si apre a misura che decrescono, e i loro eccessi su le corde decrescono più rapidamente che queste linee. Diffatti se si confrontono due grandezze A e a, le quali diminuiscono indefinitamente, e che si ponga $A=a+\delta$, si vedrà che il rapporto $\frac{A}{a}=\frac{a+\delta}{a}=1$

$+\frac{\delta}{a}$ non può tendere continuamente verso l'unità, in quanto che δ decresce più rapidamente che a.

Si può ancora unire alle precedenti considerazioni su gli angoli inscritti nei segmenti delle curve, la proprietà che ha il rapporto dell'ordinata alla sottotangente, d'essere il limite di quello degl'incrementi dell'ordinata e dell'ascissa. Imperocchè tre punti $M_{,}$, M, M′, *fig.* 67, su una curva qualunque determineranno due rapporti $\frac{MQ_{,}}{M_{,}Q_{,}}$ e $\frac{M'Q}{MQ}$, rispettivamente eguali alle tangenti degli angoli $MM_{,}Q_{,}$, M′MQ che le corde $M_{,}M$ e MM′ formano coll'asse delle ascisse $P_{,}P'$; e indicando questi angoli con A e B, si avrà

$$\frac{MQ_{,}}{M_{,}Q_{,}} - \frac{M_{,}Q}{MQ} = \text{tang A} - \text{tang B}.$$

Ciò posto si fa che

$$\text{tang}\,(A-B) = \frac{\text{tang A} - \text{tang B}}{1 + \text{tang A tang B}}\ (\textit{Trig.}\ 27),$$

onde

$$\text{tang A} - \text{tang B} = (1 + \text{tang A tang B})\,\text{tang}\,(A-B);$$

e se si prolunga $M_{,}M$ al di là del punto M, si formerà l'angolo RMM′, che sarà la differenza degli angoli $MM_{,}Q_{,}$ e M′MQ oppure A—B, e nello stesso tempo il supplemento dell'angolo $M_{,}MM_{,}$. Più quest'ultimo approssimerà a due retti, più il primo diminuirà, e con lui la differenza tang A — tang B dei rapporti $\frac{MQ_{,}}{M_{,}Q_{,}}$, $\frac{M'Q}{MQ}$; ma l'uno di questi rapporti essendo minore di $\frac{PM}{PT}$, mentre l'altro è maggiore, si avvicineranno tanto più a questo intermedio, quanto differiranno meno l'uno dall'altro: questo sarà dunque il loro limite comune.

NOTA B, *indicata alla pag.* 244.

I. L'equazione

$$z\sqrt{-1}=l\,(\cos z+\sqrt{-1}\,\operatorname{sen} z),$$

diventando

$$2m\pi\sqrt{-1}=l\,.\,1,$$

allorchè si prende $z=2m\pi$, fa conoscere che l'unità ha un'infinità di logaritmi diversi. Non si trova zero che ponendo $m=0$; ma per ogni altro valore intiero, sia positivo, sia negativo di m, si ottiene un'espressione immaginaria, che debb'essere considerata come un logaritmo dell'unità.

Questa proposizione che sembra un paradosso, quando si assegna ai logaritmi un origine aritmetica, deducendoli dal confronto delle progressioni (*Elem. d'Alg.* 254), diventa naturale quando si ricavano dall'equazione $y=e^x$. Imperocchè se si rappresenta con α l'esponente numerico della potenza alla quale conviene innalzare e, per produrre il valore assegnato ad y, e che si faccia $x=\alpha+z$, viene

$$e^{\alpha+z}=y, \text{ la quale riducesi a } e^z=1,$$

per essere $e^\alpha=y$. Ma l'equazione $e^z=1$, sviluppandola mediante la formola del n° 27, conduce a

$$\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\,.\,2}+\frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\text{ecc.}=0,$$

la quale si decompone nei fattori

$$z=0, \qquad 1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{1\,.\,2}+\text{ecc.}=0;$$

il primo è la *determinazione aritmetica* del logaritmo dell'unità, e il secondo contiene le *determinazioni algebriche*: questo è per riguardo alla teorica dei logaritmi, ciò che è la considerazione delle radici immaginarie dell'unità alla teorica delle potenze. (*Elem. d'Alg.* 159).

I valori $z=2m\pi\sqrt{-1}$ sono le radici del secondo fattore dell'equazione $e^z=1$, e quelle dell'equazione $y=e^x$ sono $\alpha+2m\pi\sqrt{-1}$ di modo che $l y=\alpha+2m\pi\sqrt{-1}$.

II. Per determinare queste radici, Eulero il quale le ha scoperte pel primo ha impiegato un artificio d'analisi ingegnosissimo, e che si appoggia su la proposizione dimostrata nel n° 188, dietro la quale le radici dell'equazione

$$y^n-1=0, \quad \text{sono} \quad y=\cos\frac{2m\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2m\pi}{n}.$$

Conviene primieramente osservare che

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=1+\frac{z}{1}+\frac{n-1}{1.2}\frac{z^2}{n}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{z^3}{n^2}+\text{ecc.}$$

$$=1+\frac{z}{1}+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}z^2+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}z^3+\text{ecc.}$$

ha par limite allorchè n diventa infinito

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\text{ecc.}=e^z.$$

Posto ciò l'equazione $e^z-1=0$ potrà essere surrogata dal limite di $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-1=0$; e sostituendo $1+\frac{z}{n}$ ad y, si avrà per ciò che precede

$$1+\frac{z}{n}=\cos\frac{2m\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2m\pi}{n};$$

poi prendendo i limiti relativi alla supposizione di n infinito, secondo la quale $\cos\frac{2m\pi}{n}$ e $\text{sen}\,\frac{2m\pi}{n}$, divengono rispettivamente 1 e $\frac{2m\pi}{n}$, concependo nello stesso tempo che m rimanga finito, si avrà come superiormente

$$z=2m\pi\sqrt{-1}.$$

Per scorgere meglio questo limite bisogna porre per $\cos\frac{2m\pi}{n}$ e $\operatorname{sen}\frac{2m\pi}{n}$, i loro sviluppi (37); e dietro le semplificazioni risulta

$$z=-\frac{4m^2\pi^2}{2n}+\text{ecc.}+\sqrt{-1}\left(2m\pi-\frac{8m^5\pi^3}{2\,.\,3\,.\,n^2}+\text{ecc.}\right),$$

locchè si riduce a $z=2m\pi\sqrt{-1}$, quando n è infinito.

III Può pure essere utile il far osservare che la decomposizione di y^n-1 in fattori su la quale ciò che precede è fondato, si ottiene indipendentemente dalla considerazione del n° 187. Ecco come il Lagrangia vi è pervenuto.

Le equazioni

$$\cos(n+1)z=\cos z\cos nz-\operatorname{sen} z\operatorname{sen} nz,$$
$$\cos(n-1)z=\cos z\cos nz+\operatorname{sen} z\operatorname{sen} nz,$$

addizionandole danno

$$\cos(n+1)z+\cos(n-1)z=2\cos z\cos nz,$$

donde si ricava

$$2\cos(n+1)z=2\cos z\,.\,2\cos nz-2\cos(n-1)z.$$

Ponendo poscia

$$2\cos z=y+\frac{1}{y},$$

e mettendo i numeri 1, 2, 3, ecc., in luogo di n verrà

$$2\cos 2z=\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2=y^2+\frac{1}{y^2},$$
$$2\cos 3z=\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-\left(y+\frac{1}{y}\right)=y^3+\frac{1}{y^3},$$
$$2\cos 4z=\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)-\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)=y^4+\frac{1}{y^4},$$

ecc.,

da cui si conchiuderà primieramente per analogia che

$$2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n}.$$

Per accertarsene del tutto, basta vedere che se la legge osservata ha luogo per i numeri $n-1$ e n, avrà pure luogo pel numero $n+1$. Ora se si fa

$$2\cos(n-1)z = y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}},\quad 2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n},$$

ne risulterà

$$2\cos(n+1)z = \left(y + \frac{1}{y}\right)\left(y^n + \frac{1}{y^n}\right) - \left(y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}}\right)$$
$$= y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}},$$

locchè mostra che ha luogo ancora la legge supposta, e prova che partendo dai valori $n=1$ e $n=2$, si estenderà a tutti i numeri interi.

Segue da ciò che le equazioni

$$2\cos z = y + \frac{1}{y},\quad 2\cos nz = y^n + \frac{1}{y^n},$$

le quali riduconsi a

$$y^2 - 2y\cos z + 1 = 0,\qquad y^{2n} - 2y^n\cos nz + 1 = 0,$$

hanno luogo contemporaneamente, ed hanno per conseguenza una radice comune. Ma se si rappresenta con a, e si faccia in seguito $y = \frac{1}{a}$, e si riducano tutti i termini di ciascuna equazione allo stesso denominatore, si troverà ch'esse sono verificate nello stesso tempo, con questo nuovo valore; e siccome la prima equazione non è che del secondo grado, ne risulta che essa è uno dei fattori della seconda.

Ora se si prende

$$nz = 2mi\pi + \delta,$$

verrà

$$\cos nz = \cos\delta\,, \qquad z = \frac{2mi\pi + \delta}{n}\,;$$

e quindi l' equazione

$$y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1 = 0$$

avrà per fattore

$$y^2 - 2y\cos\frac{2mi\pi+\delta}{n} + 1 = 0\,,$$

qualunque sia il numero intero che si sostituisce ad m: ecco dunque la formola del n° 191.

Per dedurne quelle del n° 190, basta fare $\delta = 0$ e $\delta = \pi$. Nel primo caso, si avrà

$$\cos\delta = 1\,, \qquad y^{2n} - 2y^n + 1 = (y^n - 1)^2,$$

poi

$$y^n - 1 = 0\,, \qquad y^2 - 2y\cos\frac{2mi\pi}{n} + 1 = 0.$$

Nel secondo caso

$$\cos\delta = -1\,, \qquad y^{2n} + 2y^n + 1 = (y^n + 1)^2,$$

poi

$$y^n + 1 = 0\,, \qquad y^2 - 2y\cos\frac{(2m+1)\pi}{\pi} + 1 = 0\,,$$

come nel n° citato.

IV. Mediante l' espressione

$$z = 2mi\pi\sqrt{-1}\,,$$

delle radici immaginarie dell' equazione $e^z - 1 = 0$, si spiegano molte difficoltà che offre l' applicazione dei logaritmi ai numeri negativi, fra gli altri questo: imperciocchè $(-a)^2 = (+a)^2 = a^2$, se ne debbe conchiudere che

$$l(-a)^2 = la^2, \quad 2l - a = 2l + a, \quad \text{onde} \quad l - a = l + a\,;$$

ma l' ultima di queste conseguenze non si accorda per niente coll' equazione $y = e^x$; giacchè mai alcun valore

reale di x non può rendere y negativo; così i numeri negativi non possono avere dei logatitmi reali.

Questo è pur confermato dall' equazione

$$z\sqrt{-1}=\mathrm{l}(\cos z+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z),$$

nella quale convien fare $z=(2m+1)\pi$, onde ottenere $\cos z=-1$, per cui risulta

$$\mathrm{l}-1=(2m+1)\pi\sqrt{-1};$$

e indicando con α il logaritmo reale di $+a$, viene

$$\mathrm{l}-a=\alpha+\mathrm{l}-1=\alpha+(2m+1)\pi\sqrt{-1},$$

formola che non dà alcun valore reale, poichè m debb' essere sempre un numero intero (188).

Frattanto è vero che l' espressioni $2\mathrm{l}+a$ e $2\mathrm{l}-a$ fanno parte di quelle di $\mathrm{l}a^2$, ma senza perciò essere eguale fra loro. In fatti α essendo il logaritmo reale di a quello di a^2 sarà 2α, e tutti i logaritmi (tanto reali che immaginari) di a^2 saranno compresi nell'espressione $2\alpha+2m\pi\sqrt{-1}$, potendo m esser pari o dispari. Nel primo caso $2m$ sarà un numero doppiamente pari, e per conseguenza l' espressione superiore si accorderà con

$$2\mathrm{l}+a=2\alpha+2\,.\,2m\sqrt{-1}:$$

nel secondo caso il numero $2m$ essendo semplicemente pari, l' espressione di $\mathrm{l}a^2$ si accorderà con

$$2\mathrm{l}-a=2\alpha+2(2m+1)\sqrt{-1};$$

ma le espressioni

$$2\alpha+2\,.\,2m\pi\sqrt{-1}, \qquad 2\alpha+2(2m+1)\pi\sqrt{-1},$$

non potrebbero accordarsi tra loro, poichè i numeri indicati sono doppiamente pari nella prima, e semplicemente pari nella seconda.

NOTA C, *indicata sulla pag.* 340.

I. Si è veduto nel n° 271 che il risultamento delle integrazioni successive, per rapporto a due variabili, non

dipende generalmente dall'ordine nel quale queste due integrazioni sono state effettuate: si può pure rendersi ragione di questa circostanza, considerando gl'integrali come delle somme di elementi mediante l'espressione data nella nota della pag. 329. Diffatti, sia l'integrale doppio $\iint z\,dx\,dy$ in cui $z=f(x,y)$, ed avendo per limiti a e a' per rapporto ad x, b e b' per rapporto ad y; cominciamo dall'integrazione relativa ad x, e poniamo $a'=a+a\alpha$; ma per brevità scriviamo $f(m,y)$ in luogo di $f(a+m\alpha,y)$, avremo dietro la citata nota,

$$\int_a^{a'} z\,dx=\alpha\left[f(0,y)+f(1,y)\ldots\ldots+f(n-1,y)\right].$$

Moltiplicando poscia per dy i due membri di quest'equazione, e integrando da $y=b$ sino ad $y=b'$, facendo $b'=b+p\alpha$, un termine qualunque $\alpha\int dy\,f(m,y)$ del secondo membro darà

$$\alpha^2\left[f(m,0)+f(m,1)+f(m,2)\ldots\ldots+f(m,p-1)\right],$$

e ne nascerà per lo sviluppo completo,

$$\int_b^{b'}\int_a^{a'} z\,dx\,dy=$$

$$\alpha^2\begin{Bmatrix} f(0,0) & +f(1,0) & +f(2,0)\ldots+f(n-1,0) \\ +f(0,1) & +f(1,1) & +f(2,1)\ldots+f(n-1,1) \\ +f(0,2) & +f(1,2) & +f(2,2)\ldots+f(n-1,2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +f(0,p-1)+f(1,p-1)+f(2,p-1)\ldots+f(n-1,p-1) \end{Bmatrix},$$

ciascuna linea rappresenta un integrale relativo ad x, e ciascuna colonna un integrale relativo ad y. Se si capovolgesse l'ordine delle integrazioni, le colonne prenderebbero il posto delle linee, e reciprocamente: e non vi sarebbe da cambiare che l'ordine delle sostituzioni; poichè nel primo caso, si comincia col sostituire ad x i suoi diversi valori, e non vi si pongono che in seguito quelli di y, mentre che si fa evidentemente il contrario nel secondo caso. Ora ciò non cambia nulla, in generale il valore dei termini dell'ultimo sviluppo, imperciocchè $f(x,y)$ debbe sempre rimanere la stessa, quando vi si pone per x e y gli stessi valori in qualunque ordine si effettuano le sostituzioni.

II. Vi è pure in ciò una eccezione, allorchè questi valori rendono $f(x, y)$ indeterminata facendola passare per l'infinito. È su la funzione $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ che il Sig. Cauchy ha da prima fatta tale osservazione. Quando vi si suppone simultaneamente $x=0$, $y=0$ quella diventa intieramente indeterminata come quella che si è considerata nel n° 154 (*Vedi ancora il Trattato in* 4°, *t. I. p.* 357 — 360 e 607); ma se si operano le sostituzioni l'una dopo l'altra, cominciando da $x=0$ si trova $\frac{y^2}{y^4}=\frac{1}{y^2}$, locchè diventa $+$ infinito allorchè vi si fa $y=0$; e nell'ordine contrario, risulta primieramente $\frac{-x^2}{x^4}=-\frac{1}{x^2}$, che la supposizione di $x=0$ cambia in $-$ infinito; ma la differenza dei due risultati cessa da che non si considera più x e y come rigorosamente nulli; non vi è dunque che un solo elemento che prenda due valori, quello che corrisponde ad $x=0$, $y=0$; e quello che conviene osservare attentamente si è, che la funzione $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ divenendo allora infinita, fa prendere a quest'elemento un valor finito che influisce su quella dell'integrale proposto; si perviene anche a due risultati differenti, secondo l'ordine nel quale si effettuano le integrazioni.

Per accertarsene bisogna osservare che se si fa

$$u=\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}\frac{y}{x}\right),$$

viene

$$\frac{du}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{du}{dy}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=z\ (279).$$

Segue da ciò che cominciando coll'integrazione relativa ad x, si ha in generale,

$$\int z\,dx = \int \frac{d^2u}{dx\,dy}\,dx = \frac{du}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2};$$

e da $x=a$ sino ad $x=a'$, si ottiene

$$\frac{a'}{a'^2+y^2} - \frac{a}{a^2+y^2}.$$

Passando poscia da

$$u = \int \frac{du}{dy}\,dy = \int \frac{a'\,dy}{a'^2+y^2} - \int \frac{a\,dy}{a^2+y^2}$$

$$= \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{a'}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{a}\right);$$

e i limiti di questa nuova integrazione essendo b e b' si trova per ultima espressione

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{b'}{a'}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{b}{a'}\right) \\ - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{b'}{a}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{b}{a}\right) \end{array}\right\}.$$

Quando si procede in ordine inverso, si ha successivamente

$$\int z\,dy = \int \frac{d^2u}{dx\,dy}\,dy = \frac{du}{dx} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

onde

$$-\frac{b'}{x^2+b'^2} + \frac{b}{x^2+b^2},$$

$$u = \int \frac{du}{dx}\,dx = -\int \frac{b'\,dx}{b'^2+x^2} + \int \frac{b\,dx}{b^2+x^2}$$

$$= -\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{b'}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{b}\right),$$

e finalmente

$$-\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{a'}{b'}\right)+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{a}{b'}\right)$$

$$+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{a'}{b}\right)-\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{a}{b}\right)$$

Non sarebbe difficile di mostrare che nel loro stato generale, le due espressioni precedenti sono identiche; ma se si fa

$$a=-1,\quad a'=1,\quad b=-1,\quad b'=1,$$

limiti fra i quali cadono $x=0$, $y=0$, e da cui risulta

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=-1)=\frac{\pi}{4},\ \operatorname{arc}(\operatorname{tang}=-1)=-\frac{\pi}{4};$$

si troveranno i valori

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi,$$

$$-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\pi,$$

che non sono eguali ma la differenza dei quali è 2π.

Se si volesse prendere $x=0$ per i primi limiti degl'integrali cercati, converrebbe fare primieramente $a'=b'=1$, e la prima espressione diverrebbe

$$\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=b)-\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{1}{a}\right)+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{b}{a}\right),$$

oppure

$$-\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=b)+\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=a)+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{b}{a}\right),$$

a motivo che

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{1}{a}\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=a).$$

Considerando allora a e b come quantità piccolissime, e trascurando in conseguenza i termini

$$\text{arc}\,(\text{tang} = a)\,,\ \text{arc}\,(\text{tang} = b)\,,$$

rimarrebbe $-\frac{\pi}{4} + \text{arc}\left(\text{tang}\,\frac{b}{a}\right)$, espressione che diventa indeterminata quando a e b sono nulli. Se si ponesse $b = ma$, si avrebbe

$$-\frac{\pi}{4} + \text{arc}\,(\text{tang} = m)\,,$$

la quantità m potendo variare da o all'infinito: nel primo caso il risultato è $-\frac{\pi}{4}$ e nel secondo $+\frac{\pi}{4}$, a cagione che $\text{arc}\,(\text{tang} = \text{infinito}) = \frac{\pi}{2}$; la differenza fra questi due valori è π. Si è da prima trovato 2π, perchè le variabili x e y, essendo elevate a delle potenze pari, nella proposta funzione, ciascun integrale da -1 a $+1$ dà un risultato doppio di quello che si ottiene da o a $+1$.

L'ambiguità che si è mostrata, non avrebbe luogo per gl'integrali

$$\int\int \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\,dx\,dy,$$

presi nei medesimi limiti quantunque la funzione

$$\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$$

si presenti sotto la forma $\frac{0}{0}$, quando vi si fa contemporaneamente $x = 0$, $y = 0$, e prende due valori diversi, secondo l'ordine delle sostituzioni, perchè questi valori essendo infiniti, essa ha in questa circostanza un solo elemento infinitamente piccolo.

III. La differenza dei valori ottenuti, variando l'ordine delle integrazioni, pervenendo unicamente dal solo elemento posto al principio delle variabili x e y, il Signor Cauchy la valuta a parte, locchè si può fare come segue.

Sia $\varphi(x, y)$ l'espressione generale di $\int z dx$, divenendo z infinito mediante dei valori di x e di y, compresi fra i limiti a e a', b e b'; rappresentando con α il valore di x, e con k una quantità piccolissima, l'integrale $\int z dx$ prese nel piccolo intervallo di $\alpha - k$ ad $\alpha + k$, sarà

$$\Phi(\alpha + k, y) - \Phi(\alpha - k, y),$$

e nella integrazione seguente, effettuata da $y = b$ sino a $y = b'$, darà la porzione

$$\int_b^{b'} dy \left[\Phi(\alpha + k, y) - \varphi(\alpha - k, y) \right],$$

che si avvicinerà tanto più a quella che corrisponde ad un solo elemento quanto il valore assegnato a k sarà più piccolo.

Nell'esempio dell'articolo II, pel quale

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \alpha = 0,$$

l'espressione superiormente trovata diventa

$$\int_{-1}^{1} dy \left(\frac{k}{k^2 + y^2} + \frac{k}{k^2 + y^2} \right) = 2 \int_{-1}^{1} \frac{k dy}{k^2 + y^2}$$

$$= 2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{1}{k}\right) - 2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = -\frac{1}{k}\right).$$

Facendo $k = 0$ per passare al limite si ha

$$2 \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = \text{infinito}) - 2 \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = -\text{infinito})$$

$$= \frac{2\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = 2\pi,$$

precisamente la differenza trovata nel citato articolo.

Gl'integali ove si considera un solo elemento, siccome

si è veduto più sopra per $\int z dx$ sono stati chiamati dal Sig. Cauchy *integrali singolari*; i lettori che vorranno maggiori dettagli su questo argomento, li troveranno nel tomo I delle *Nuove Memorie presentate all' Accademia delle Scienze da diversi dotti*, pag. 692.

FINE DELLE NOTE.

TAVOLA DELLE MATERIE

PARTE PRIMA

Calcolo differenziale.

Nozioni preliminari e principio delle differenziazioni delle funzioni d'una sola variabile. pag. 3.

Cosa vuolsi intendere colla parola *funzione.* *idem*
Del *limite* di cui è suscettibile il rapporto degl' incrementi d' una funzione a quelli della variabile da cui dipende. 5
Definizioni relative al calcolo differenziale. 7
Delle differenziali delle funzioni eguali e delle quantità che sono i limiti d'una stessa grandezza variabile. 9
Determinazione del limite del prodotto e di quello del quoziente di due quantità che variano insieme. 10
Regole per differenziare le funzioni algebraiche d'una sola variabile. 14

Delle differenziazioni successive 22

Sviluppo d'una funzione qualunque d'un binomio, o *teorema di Taylor.* 26
Teorema dello Stirling per sviluppare le funzioni. 28

Della differenziazione delle funzioni trascendenti 30

Delle funzioni esponenziali e del loro sviluppo. *idem*
Delle funzioni logaritmiche e del loro sviluppo. 33
Delle funzioni esponenziali complicate 39
Delle funzioni circolari. 40
Sviluppo delle funzioni circolari. 45

Della differenziazione delle funzioni di due o di un maggior numero di variabili 49

Teorema di Taylor, esteso alle funzioni di due variabili. *idem*
Identità dei coefficenti differenziali ottenuti mediante delle differenziazioni effettuate in un ordine variato. 52
Regole per la differenziazione delle funzioni di due variabili 54

Distinzione fra le *differenze* e i *differenziali* parziali. 56
Ricerca dei coefficienti differenziali dei diversi ordini 57
Osservazioni sui diversi modi ne' quali può indicarsi la differenziazione delle funzioni e su le notazioni che vi si riportano. 58
Regola generale per differenziare le funzioni. 60
Dello sviluppo in serie delle funzioni di due variabili, 61

Della differenziazione dell'equazioni qualunque a due variabili. 62

Regola generale. 64
Formazione dei differenziali successivi d'una equazione proposta 66
Dell'eliminazione delle costanti. 69
Di quella delle funzioni variabili. 71
Applicazione allo sviluppo delle funzioni. 72
Uso del calcolo differenziale per trovare le radici uguali delle equazione algebriche. 75

Applicazione del calcolo differenziale alla teorica delle curve. 78

Riflessione sulla metafisica del calcolo differenziale. 79
A quali linee corrispondono i differenziali. 81
Nota sul modo con cui il Leibnitz considerava il calcolo differenziale. *idem*
Nota sui diversi ordini d'infinitamente piccoli 82
In che modo si riconosce da qual lato una curva volti la sua concavita, 84
Limite del rapporto dell'arco d' una curva alla corda che lo sottende. *idem*
Espressione della differenziale dell'arco d'una curva qualunque. 86
Espressione della differenziale dell'area d'una curva qualunque. *idem*
Espressione della sotto tangente, della tangente, della normale e della sottonormale, 87
Equazioni della tangente e della normale. 89
Delle assimptote delle curve. 93

Delle curve osculatrici. 95

Del circolo osculatore e della sua determinazione *idem*
Delle osculazioni e dei diversi contatti in generale. 100
Proprieta del circolo osculatore. *idem*
Definizione delle incurvatura e del raggio d' incurvatura. 105
Applicazione della teorica del raggio d' incurvatura. *idem*

Ricerca dei punti singolari delle curve ed esame dei valori particolari che in certi casi prendono i coefficenti differenziali. 109

Del *massimo* e del *minimo* delle ordinate e delle ascisse delle curve. 109
Dell' *inflessione e del regresso.* 111
Del *regresso di seconda specie.* 114
Dei punti multipli. 115
Dei punti isolati o coniugati. 117
Che divengono i coefficienti differenziali, nei punti singolari. 118
Come la serie di Taylor cade. 119
Regola generale per scoprire i punti singolari. 124

Esame dei veri valori dell'espressioni che divengono $\frac{0}{0}$

Regola generale per le funzioni date esplicitamente per una sola variabile. 125
————————per quelle che dipendono da una equazione in cui le variabili sono miste. 132
Determinazione analitica dei *massimi*, e dei *minimi*, 134

Esempio dell' Analisi d' una curva 139

Delle curve trascendenti. 149
Della Logaritmica. *idem*
Della cicloide. 151
Delle spirali. 156
Delle coordinate polari. 157
Espressioni dei differenziali delle coordinate polari delle sottotangenti ec. 159
Trasformazione delle coordinate rettangoli in polari, e reciprocamente. 161
Trasformazione, in coordinate polari, dell'espressione del raggio di curvatura. 166

Del cambiamento della variabile indipendente o come si cambia il differenziale che si è preso per costante, in un altro che più non lo sia. 168

Formole per trasformare una espressione differenziale nella quale si è supposta costante una delle differenziali, in un altra in cui tutte due sieno variabili 170
Passaggio da questa trasformazione ad una relazione data. 171
Interpretazione geometrica di questo mutamento. 172
Della differenziazione delle equazioni simultanee. 173
Dell'eliminazione fra due equazioni differenziali. 174

Della differenziazione delle equazioni contenenti più d'una variabile indipendente. 175

Differenziazione delle equazioni a tre variabili. *idem*
————————— a più di tre variabili. 178

Eliminazione delle funzioni arbitrarie. 180

Applicazione del calcolo differenziale alla teorica delle superficie curve. 182

Della generazione delle superficie. *idem*
Condizione della loro continuità, equazioni differenziali delle loro sezioni. 185
Delle linee che hanno la maggior pendenza, delle tangenti e delle normali. 188
Della curvatura delle superficie. 192

Dei punti singolari delle superficie curve, dei massimi, e minimi delle funzioni di più variabili.

Processo analitico per determinare questi *massimi* e questi *minimi*. 198

Dell'applicazione del calcolo differenziale alle curve a doppia curvatura e delle superficie sviluppabili. 203

Loro tangenti, piani osculatori, differenziale del loro arco. *idem*
Delle superficie sviluppabili, e dei piani normali delle curve. 205
Delle diverse curvature, o *estensioni* delle curve. 213

PARTE SECONDA

Calcolo integrale.

Dell'integrazione delle funzioni razionali d'una sola variabile. 215

Definizione del calcolo integrale. *idem*
Nota sull'origine del segno $\int$, e sulle idee di Leibnitz concernenti il calcolo integrale. 216
Costanti che si possono metter fuori del segno $\int$, 217
Integrazione delle funzioni monomie. *idem*
———Della differenziale logaritmica. 218
———Delle funzioni frazionarie. 219
Decomposizione delle funzioni a integrare, in frazioni parziali, e dell'integrazioni di queste. 224
Brevi metodi per operare questa decomposizione. 225
Mezzo d'evitare gli immaginari. 228
Esempio. 234

Dell'integrazione delle funzioni irrazionali. 238

Delle funzioni contenenti il radicale. $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$ 239
Espressioni dei seni e dei coseni in esponenziali immaginari. 243
Ricerca dei fattori della funzione $x^n \pm a^n$, 246
——————————della funzione $x^{2n} \mp 2px^n + q$ 250

Dell'integrazione dei differenziali binomiali 252

In quali casi si rendono razionali. 253
Cosa è *integrazione per parti.* 254
Metodo onde ricondurre i differenziali binomii ad altri più semplici per rapporto agli esponenti. 256

Dell'integrazione per serie 264

Espressione del logaritmo, *idem*
Espressione dell'arco del circolo per la sua tangente 265
Distinzione delle serie in ascendenti e discendendenti. 266
Espressione dell'arco del circolo pel suo seno. 269

Dell integrazione delle funzioni logaritmiche ed esponenziali. 273

Delle funzioni logaritmiche. *idem*
Delle funzioni esponenziali. 276

Dell'integrazione delle funzioni circolari. 280

Conversione delle potenze del coseno e del seno d'un arco, in coseni e seni de'suoi multipli. 283
Nota sulla trasformazione inversa della precedente. 288
Integrazione immediata, dei differenziali della forma $dz \operatorname{sen} z^m \cos z.^n$. 291

Metodo generale per ottenere i valori approssimati degli integrali. 296

Della natura degli integrali, e delle costanti che bisogna aggiungervi, *idem*
Cosa s'intende per i *limiti* d'un integrale. 297
Integrali *indefiniti,* integrali *definiti* cosa sono. *idem*
Serie per avvicinarsi ad un integrale qualunque. 299
In qual modo un integrale è una somma. 303
Limiti del suo valore. 304
Conferma di ciò che precede, mediante considerazioni geometriche, 305
Applicazione del metodo sopraindicato. 310
Sviluppo degl integrali con la serie del Bernoulli. 313

Dell'integrazione delle funzioni differenziali del second'ordine e degli ordini superiori. 314

Applicazione del calcolo integrale alla quadratura delle curve ed alla loro rettificazione, alla quadratura delle superficie curve ed alla valutazione dei volumi che esse comprendono.

Della quadratura delle curve. 317

Di quella delle parabole. *idem*
Di quella delle iperbole e dei loro spazi asintotici. 319
Come quelli dell'iperbole ordinaria corrispondono ai logaritmi. 321
Del circolo, dell'elisse e delle iperbole. 323
Dei loro settori, 325
Della logaritmica, 327
Della curva di cui l'equazione è $y=\frac{a^x}{x}$ *idem*
Della cicloide. 329
Delle spirali. 330

Della rettificazione delle curve. 332

Di quella delle parabole. *idem*
Del circolo, dell'elisse e dell'iperbole. 333
Della cicloide. 335
Delle spirali. *idem*

Della cubatura dei corpi terminati da superficie curve, della quadratura delle loro aree, e dell'integrazione dei differenziali parziali. 336

Delle superficie di rivoluzione. *idem*
Dei volumi terminati da superficie curve in generale. 339
Dell'integrazione dei differenziali parziali e degli integrali doppi. 341
Nota su gli integrali difiniti di questo genere. *idem*
Applicazione alla sfera. 344
Degli integrali doppi, considerati come somme. 345
Dell' aree delle superficie curve in generale. 346
Degli integrali tripli. *idem*

Dell' integrazione dei differenziali totali, i quali comprendono più variabili indipendenti. 350

Differenziali a due variabili. *idem*
——————A più di due variabili. 354
Come si può differenziare sotto il segno $\int$. 356

Dell' integrazione delle equazioni differenziali a due variabili.

Della separazione delle variabili nelle equazioni differenziali di prim'ordine. 358

Delle equazioni omogenee. 359
Dell' equazione del primo grado e del prim'ordine. 363
Dell'equazione del *Riccati*. 365

Ricerca del fattore proprio a rendere integrabile un'equazione differenziale di prim' ordine. 370

Equazione dalla quale dipende il fattore, 372
Teorema dalle funzioni omogenee. 374

Delle equazioni di prim' ordine nelle quali i differenziali oltrepassono il primo grado. 376

Equazioni che la differenziazione rende più facile da integrare. 380
Esempio di una *soluzione particolare*. 383

Dell'integrazione dell'equazioni differenziali del second'ordine e degli ordini superiori. *idem*

Sviluppo dell' integrale d' una equazione differenziale d' un ordine qualunque a due variabili, numero delle costanti arbitrarie che contiene. *idem*
Della multiplicità degli integrali di quest'equazioni. 387
Integrazione di alcune equazioni le quali non contengono variabili primitive. 389
——————di equazioni che non ne contengono che una. 393
Delle equazioni del primo grado d'un ordine qualunque. 396
Delle equazioni simultanee del primo grado. 410
Dell'eliminazione fra le equazioni simultanee qualunque del prim'ordine. 414

Delle soluzioni particolari dell'equazioni differenziali dell'prim'ordine. 416

Loro legame coll'integrale completo. 417
Come si deducono dall'equazione differenziale. 423

Dei metodi per risolvere per approssimazione l'equazioni differenziali. 428

Risoluzione di alcuni problemi geometrici dipendenti dall'equazioni differenziali. 432

Problema delle traiettorie. 434
Della costruzione geometrica delle equazioni differenziali. 436
Interpretazione Geometrica delle soluzioni particolari. 438

Dell' integrazione dell' equazioni differenziali che contengono tre o un maggior numero di variabili.

Delle equazioni differenziali totali 441

Condizioni necessarie acciocchè un' equazione a tre variabili in cui i differenziali non passono il primo grado, possa aver per integrale una sola equazione primitiva 443
Altra condizione quando i differenziali sono elevati. 446

Delle equazioni differenziali totali che non soddisfanno alle condizioni d' integrabilità. 447

Integrazione dell'equazioni differenziali parziali del prim'ordine. 449

Nota sulle considerazione colle quali Monge univa l' integrazione delle equazioni differenziali parziali con la generazione delle superficie. 456

Dell' integrazione dell'equazioni differenziali parziali degli ordini superiori al primo. 457

Esempio d'integrali in serie. 466
Della determinazione delle funzioni arbitrarie negli integrali delle equazioni differenziali. 470

Del metodo delle variazioni

Ricerca della variazione d'una funzione qualunque. 471

Scopo di questa ricerca. *idem*

Nota sulla maniera con cui Eulero rappresenta le variazioni, con dei differenziali parziali. 473
Trasposizione della caratteristica δ dietro la caratteristica d, e sotto il segno $\int$, sviluppo della variazione delle funzioni differenziali e degli integrali. 475
Equazioni di condizione che devono aver luogo acciocchè una funzione differenziale sia integrabile per se stessa. 480

Dei massimi e dei minimi delle formole integrali indeterminate. 483

Cosa sono le formole integrali *indeterminate*. *idem*
Caratteri del *massimo* e del *minimo* di queste formole. 484
Delle equazioni che determinano la relazione fra le variabili. 485
Delle variazioni relative ai limiti degli integrali proposti. 486
Ricerca della linea più corta fra due punti. 489
Ricerca della linea lungi la quale un corpo discende nel minor tempo possibile chiamata la *brachistocrona*. 493
Dei *massimi*, e dei *minimi* relativi. 496
Esempio del problema degli *isoperimetri*. *idem*

APPENDICE AL TRATTATO ELEMENTARE

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE.

Delle differenze delle serie.

Del calcolo diretto delle differenze. 498

Formazione della tavola dei valori d'una funzione per le sue differenze successive. 499
Notazioni e principi del calcolo alle differenze. 501
Funzioni che hanno delle differenze costanti. 506
Costruzione delle tavole logaritmiche con le differenze. 507

Applicazione del calcolo delle differenze all'interpolazione delle serie. 508

Quando le quantità da interpolare corrispondono a degli indici equidifferenti. 509
Quando gli indici sono qualunque vogliasi. 513
Formola del Lagrangia. 516
Come si può impiegare alla stessa interpolazione un numero infinito di funzioni diverse. 518
L'interpolazione s'applica alla determinazione approssimata di $\int X\,dx$. 519

Dell'analogia delle differenze con le potenze. 521

Passaggio delle differenze ai differenziali, e dimostrazione del teorema di Taylor. *idem*
Analogia della differenziazione e della elevazione alle potenze 523
Espressione eguale delle differenze con differenziali. 524
Espressione inversa. 525
Applicazione all'interpolazione. 527

Del calcolo inverso delle differenze per rapporto alle funzioni esplicite d'una sola variabile. 529

Definizioni, notazioni, natura delle *costanti* arbitrarie da introdurre. 531
Dell'integrazione delle funzioni algebriche razionali. 532
Dell' integrazione delle funzioni trascendenti. 540
Sviluppo generale. di $\Sigma^{m}u$. 541
Analogia degli integrali e delle potenze negative. 545
Dell'integrazione per parti. 546

Applicazione del calcolo delle differenze per sommare le serie 547

Serie dirette e inverse dei *numeri figurati*. 549

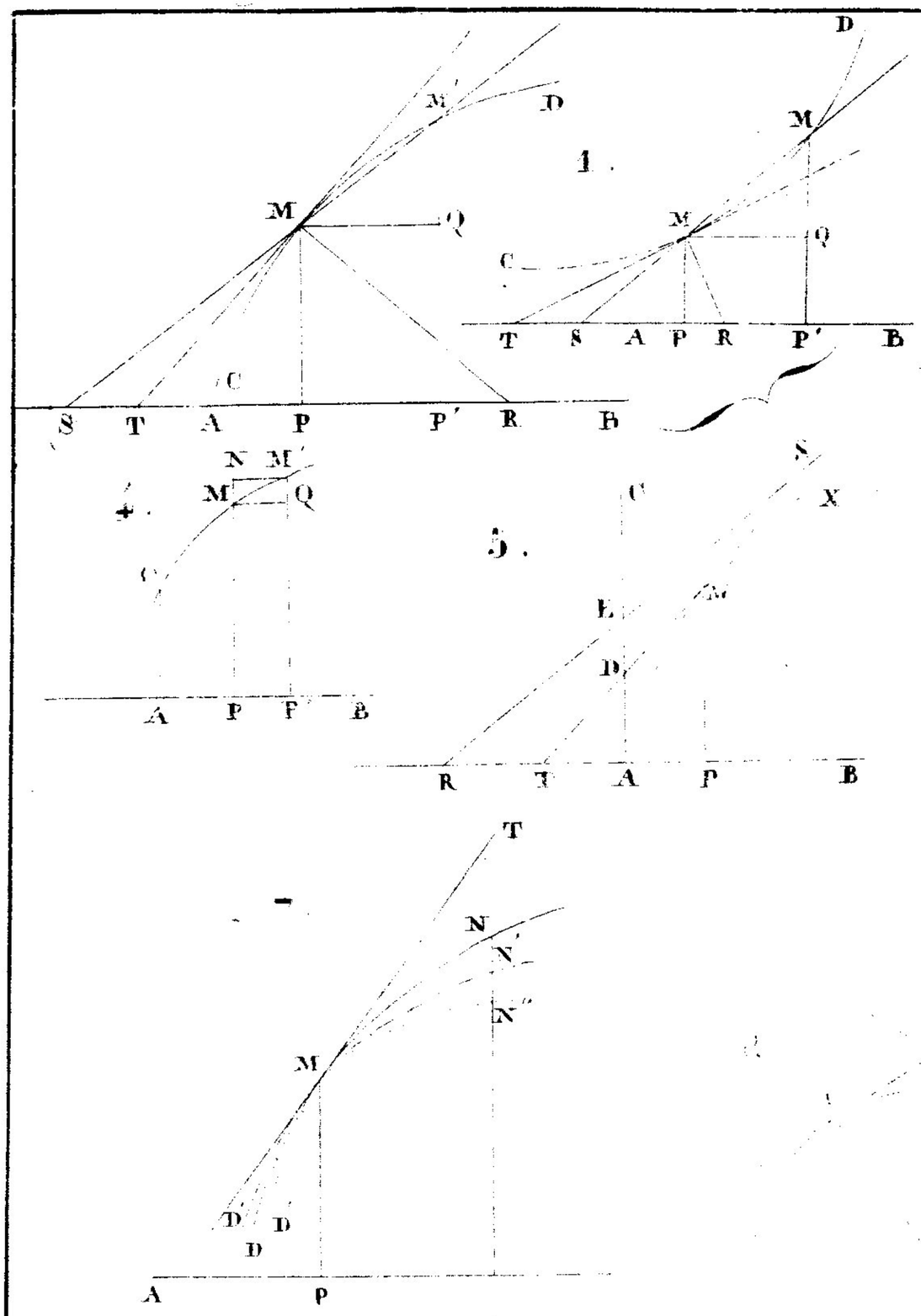
Dell'integrazione delle equazioni colle differenze a due variabili, 551

Paragone delle equazioni colle differenze con le equazioni differenziali. 552
Delle equazioni di primo grado in tutti gli ordini. 554
Corrispondenza fra queste equazioni e le serie ricorrenti. 560
Costruzione geometrica delle equazioni colle differenze. 562
Delle equazioni in cui le differenze delle due variabili sono pure variabili, e problema generale. 565
Delle equazioni colle *differenze miste*. 565

Applicazione del calcolo integrale alla teorica delle serie. 566

Addizione delle serie con degli integrali. *idem*
Addizione delle diverse porzioni della serie di Taylor. 571
Esempi dei valori particolari che prendono gl'integrali definiti. 574
Espressione della circonferenza del circolo in prodotti di un numero infinito di fattori dovuta al Wallis. 576
Applicazione degli integrali definiti all' interpolazione delle serie. 583

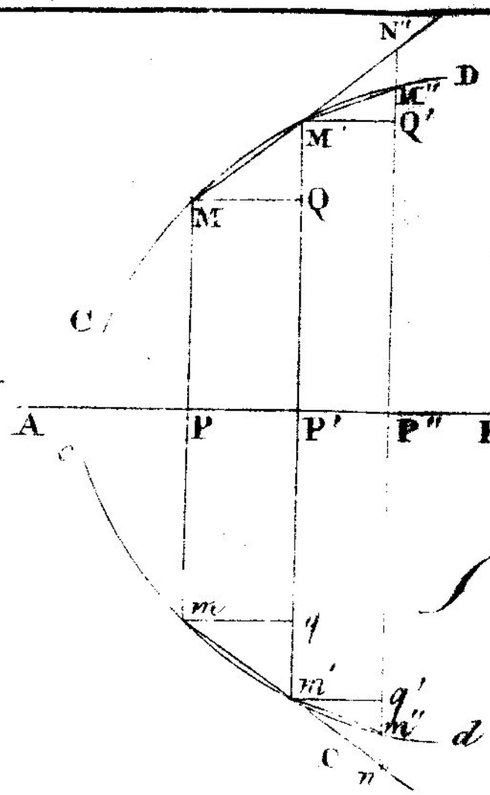
Addzione delle serie $l1+l2.....+lx$. 585
Esempio dell'uso degli integrali definiti per esprimere gli integrali delle equazioni differenziali parziali. 587
Sviluppo delle funzioni in serie di seni e di coseni d' archi multipli. 589
Teorema di Fourier. 692
Altra dimostrazione data dal Poisson. 600
Nota A. sul metodo dei limiti. 603
Nota B sui logaritmi immaginarii. 612
Nota C sugli integrali doppi e definiti, di cui il coefficente differenziale diviene infinito fra i limiti dati, e sugli integrali chiamati *singolari*. 617

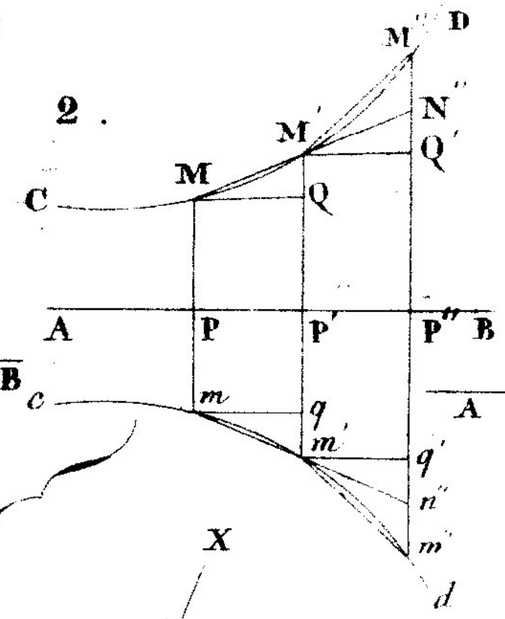

1.
D
M'
M
Q
C
S T A P P' R B

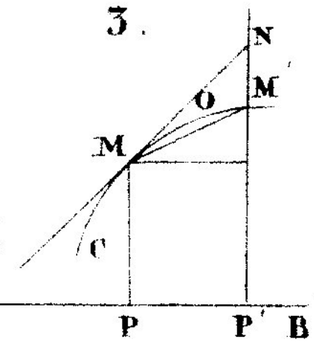
4.
N M'
M
Q
C
A P P' B

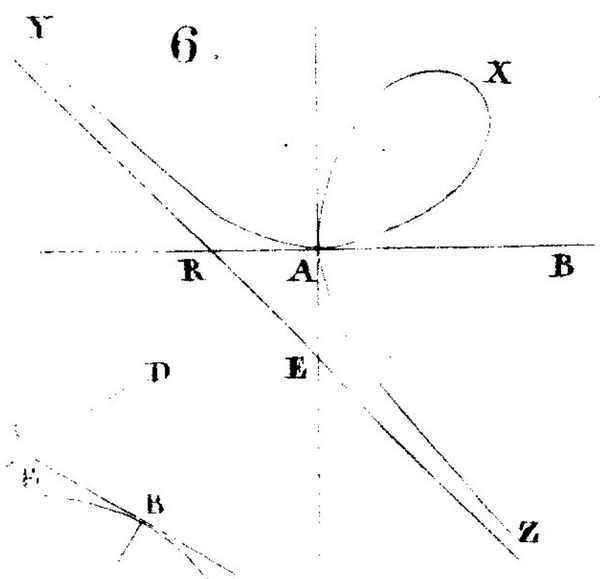
5.
S
C
X
E
D
R T A P B

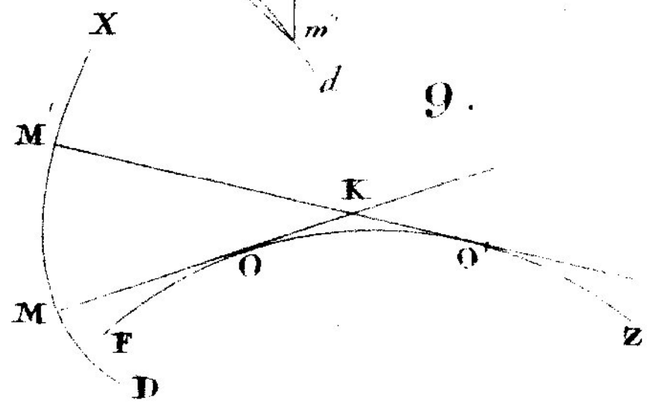
7.
T
N
N'
N''
M
D' D
D
A P

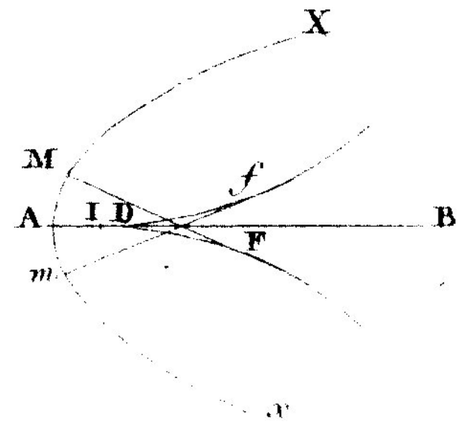

N''
D
M''
Q'
M'
Q
M
C
A P P' P'' B
c
m
q
m'
q'
m''
d
C m''

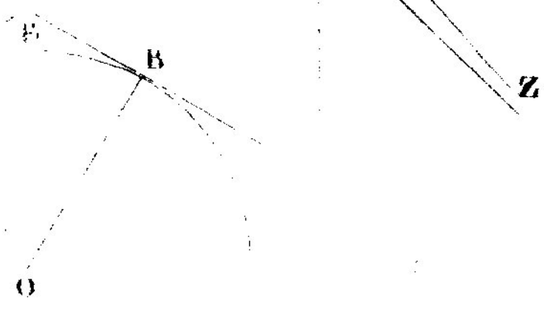

2.
M'' D
N''
M'
Q'
M
Q
C
A P P' P'' B
c
m
q
m'
q'
n''
m''
d


3.
N
O
M'
M
C
A P P' B

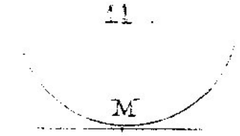

6.
Y
X
R A B
D E
Z


9.
X
M'
K
O
O'
M
F
Z
D


10.
X
M
f
A I D
B
F
m
O

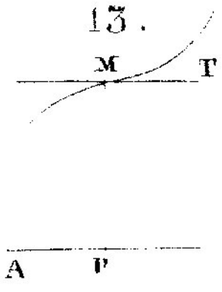

E
B
O

11.

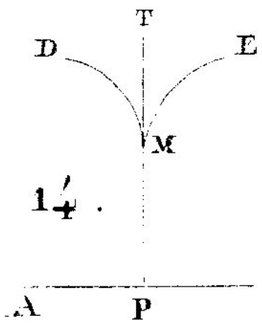


12.

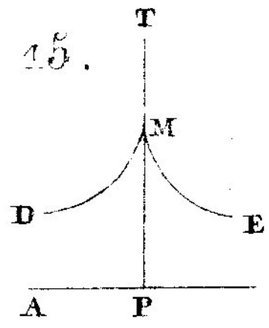
13.



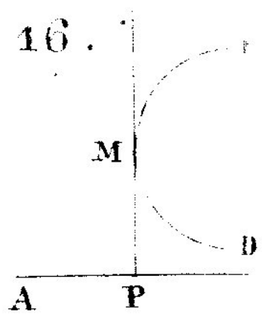
14.



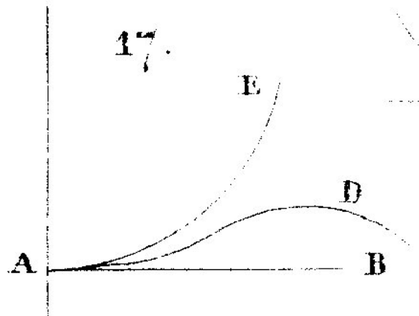
15.



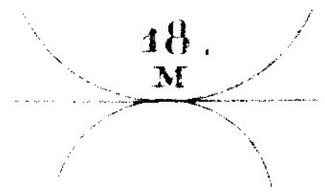
16.



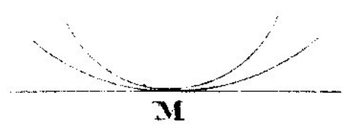
17.



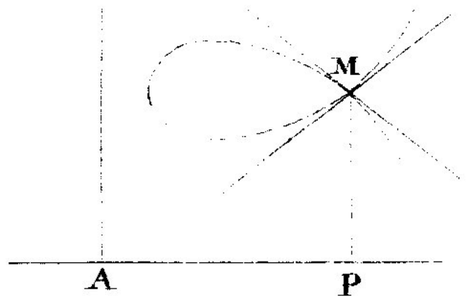
18.



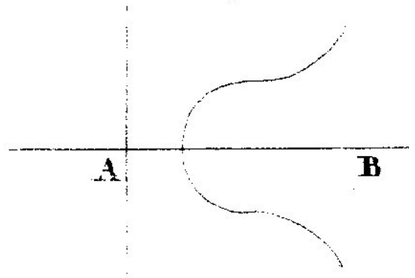
19.



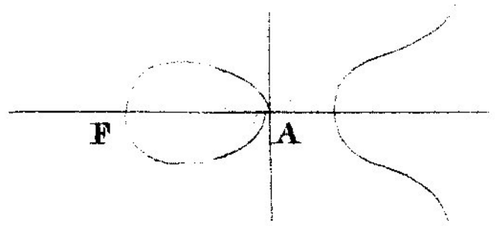
20.



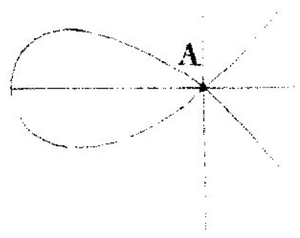
21.



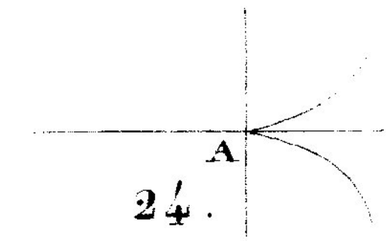
22.



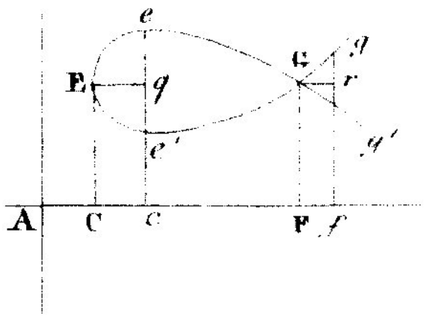
23.



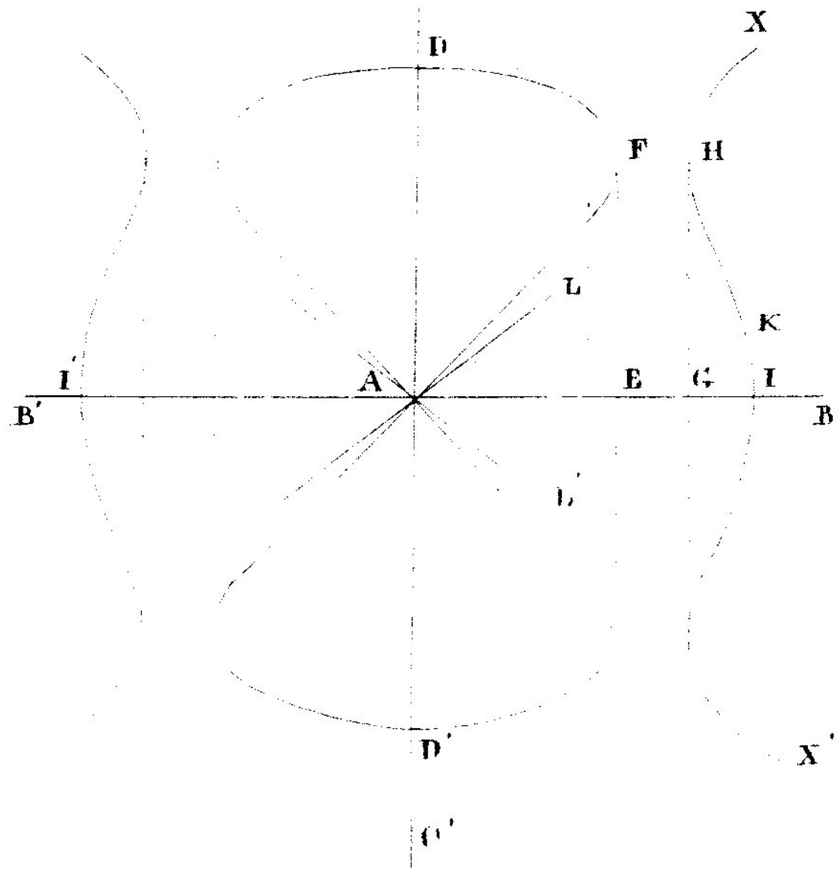
24.



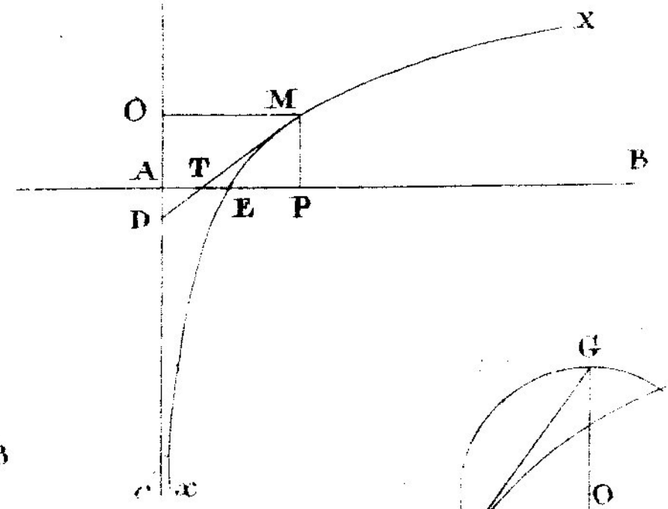
25.



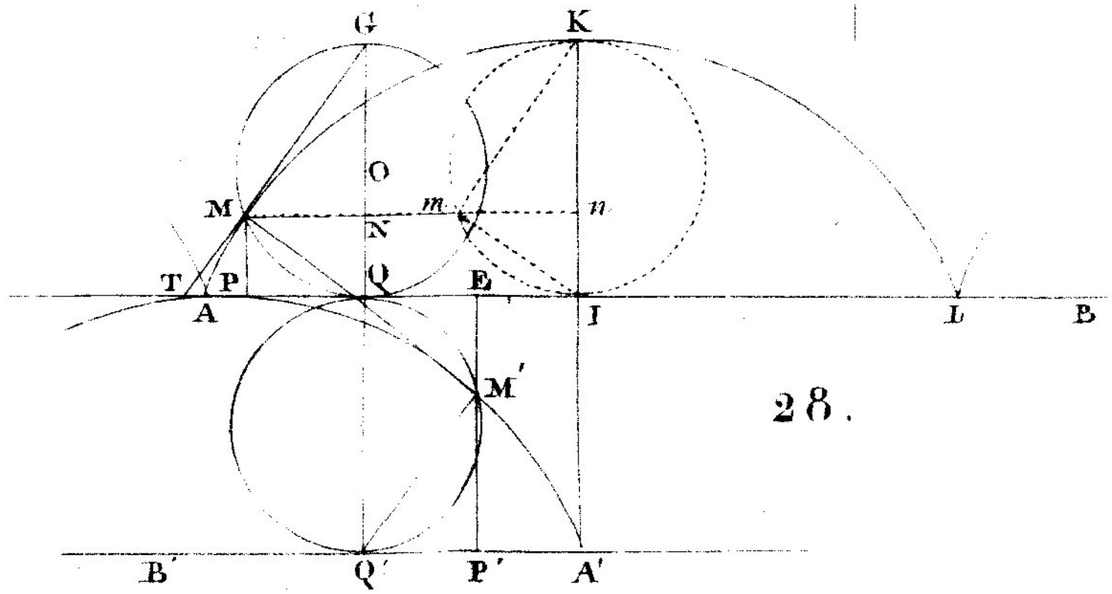
26.



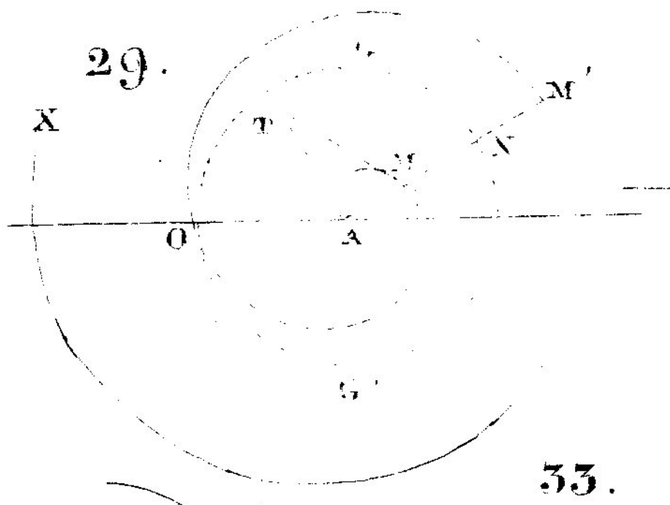
27.



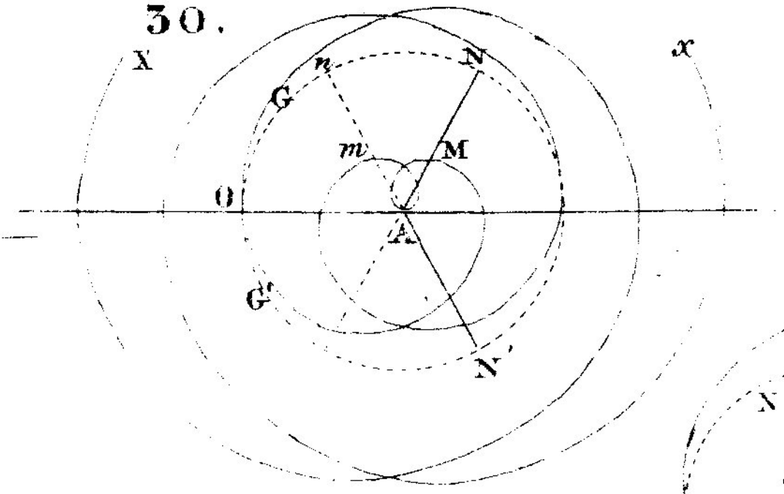
28.



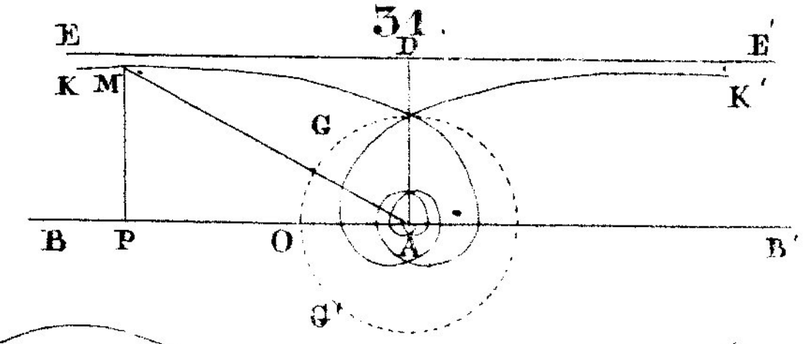
29.



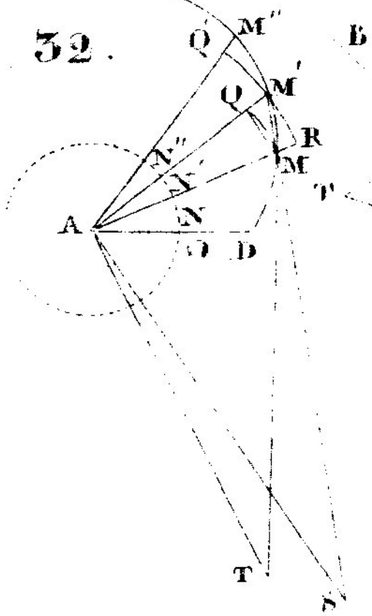
30.



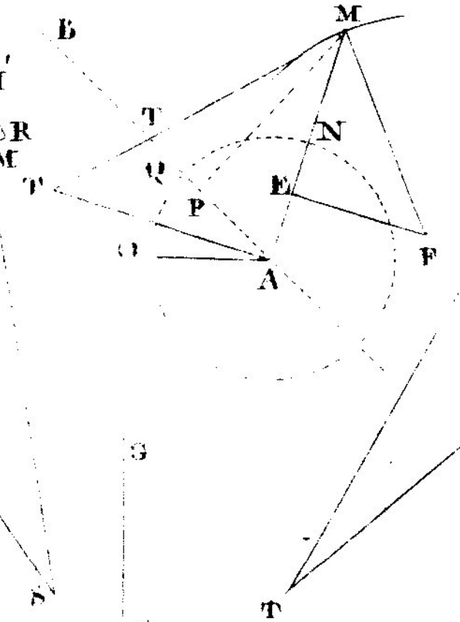
31.



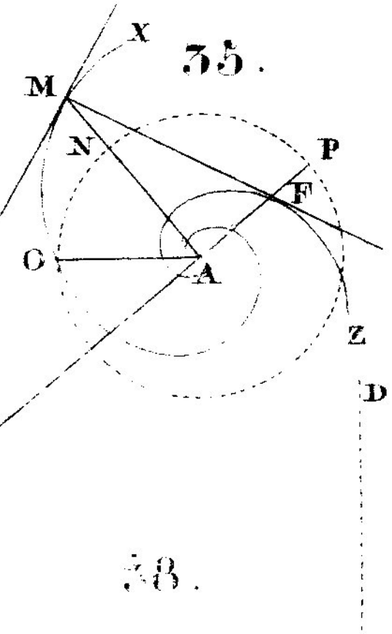
32.



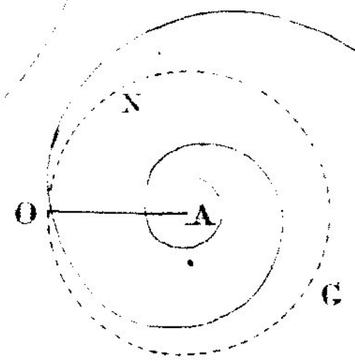
33.



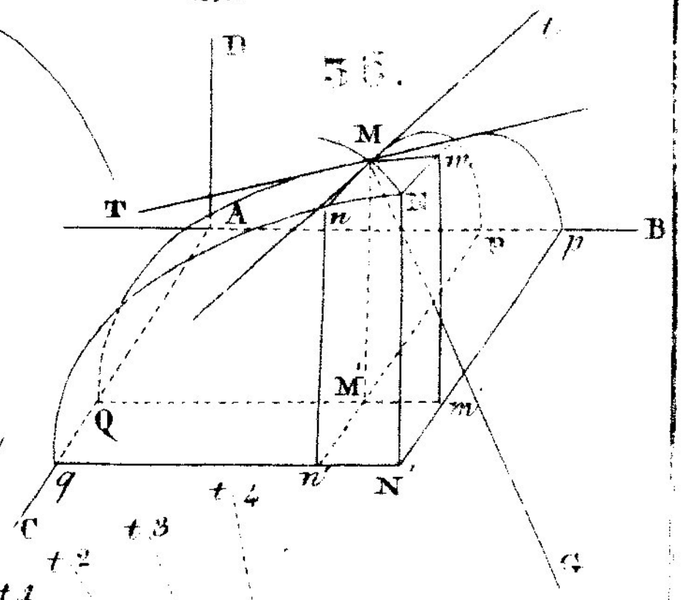
35.



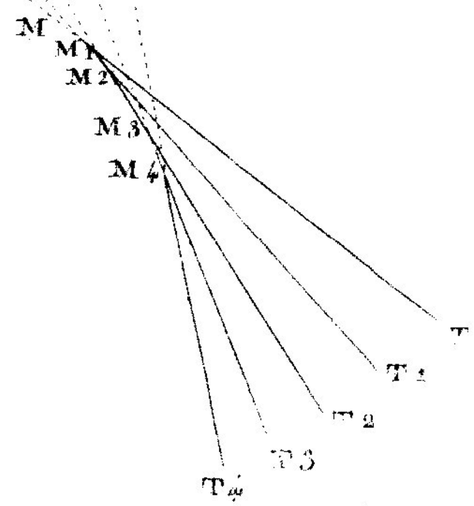
34.



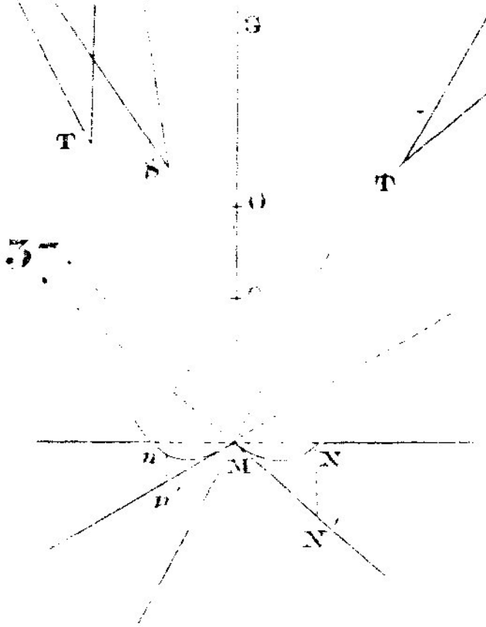
35.



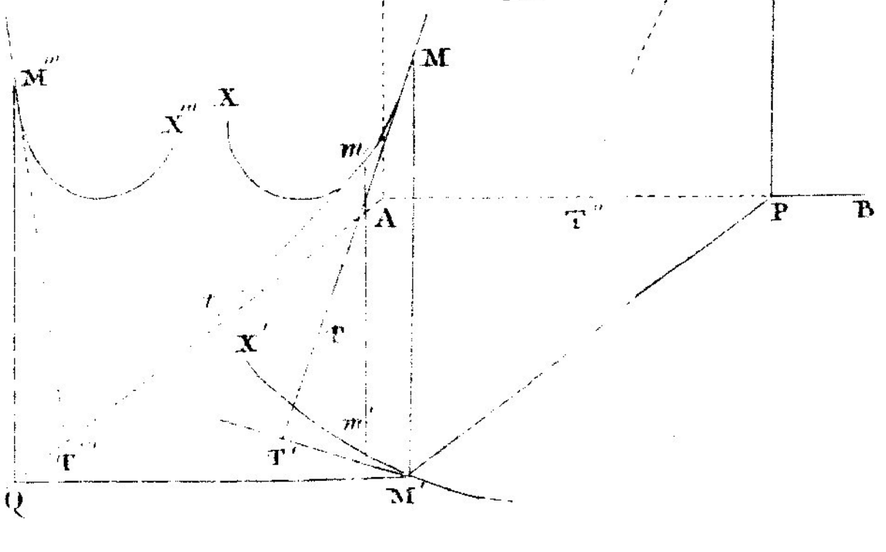
36.



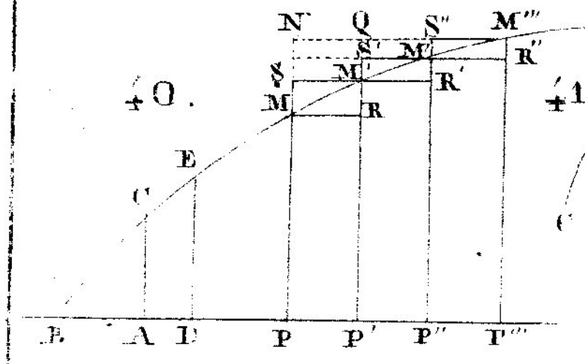
37.



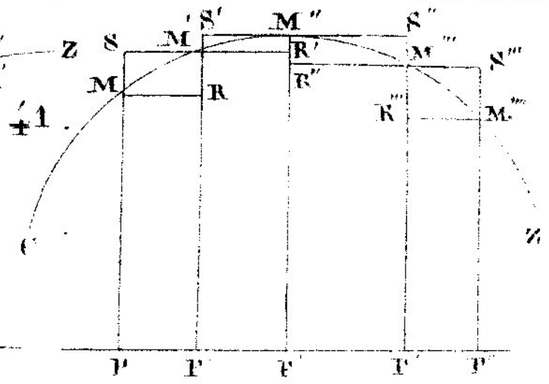
38.



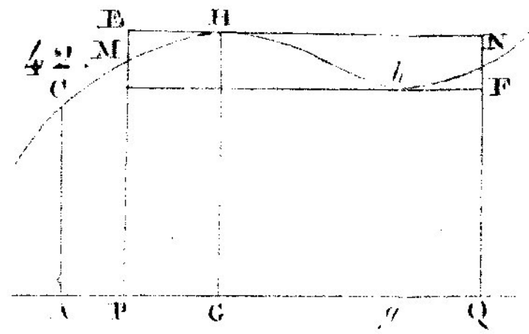
40.



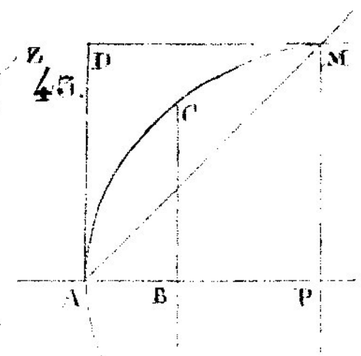
41.



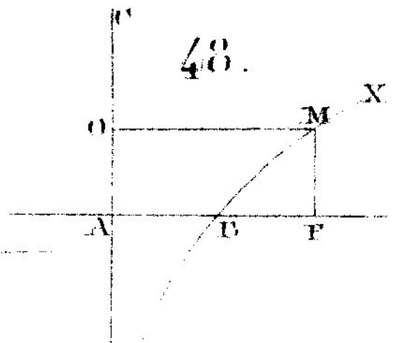
42.



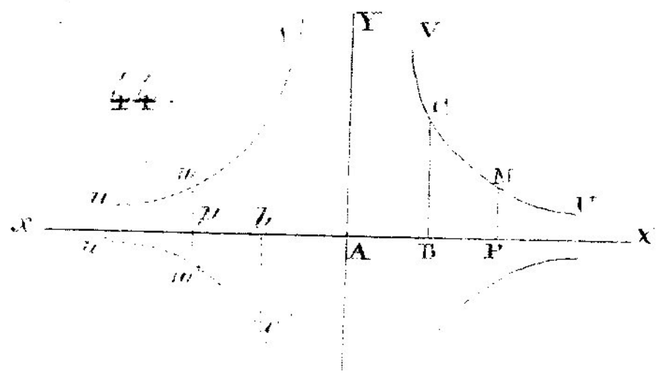
43.



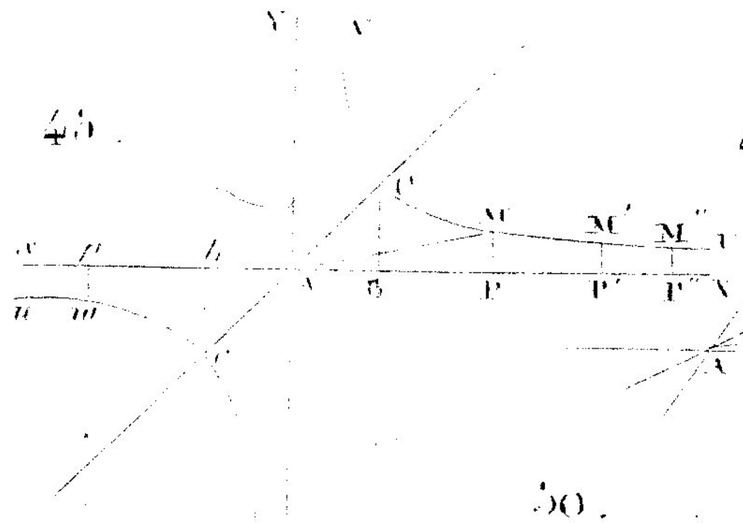
46.



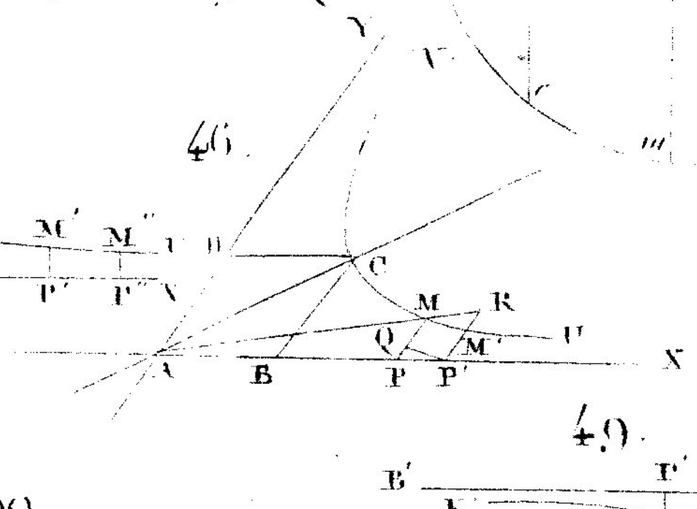
44.



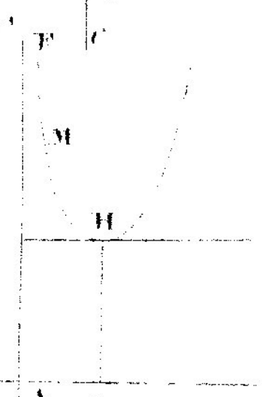
45.



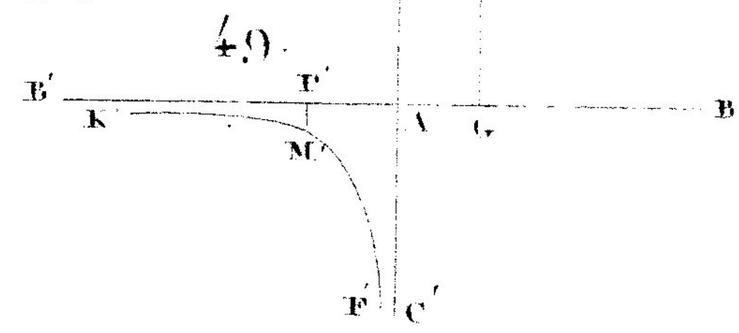
47.



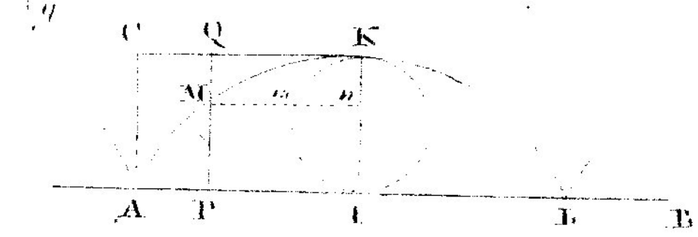
48.



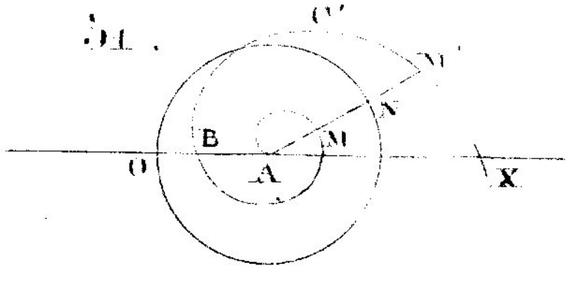
49.



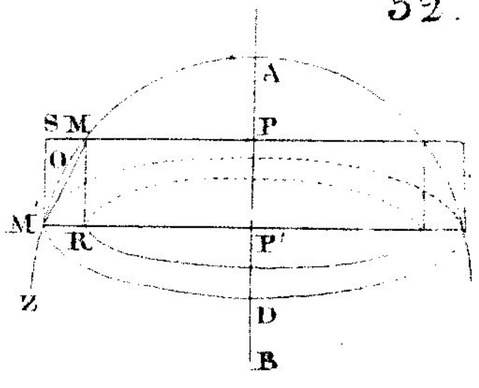
50.



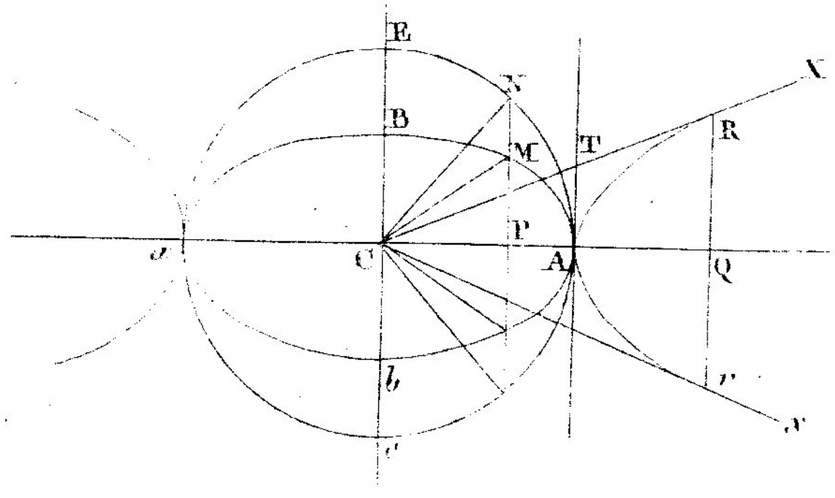
51.



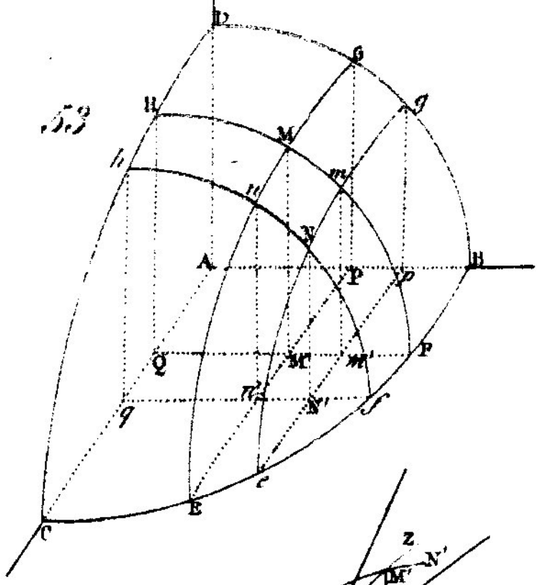
52.



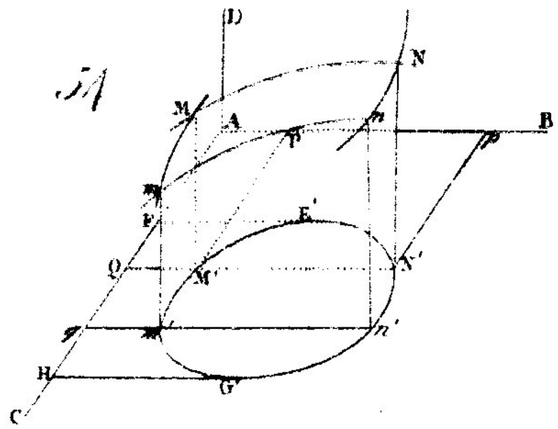
47.



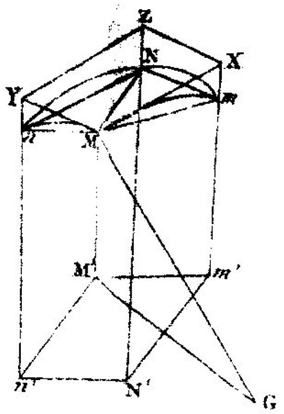
53



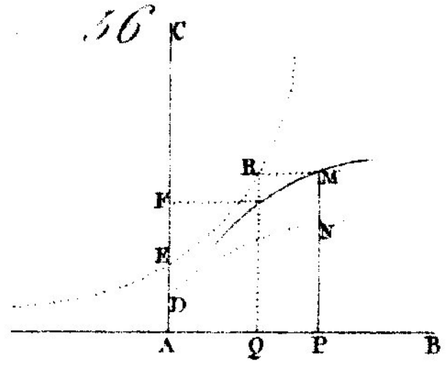
54



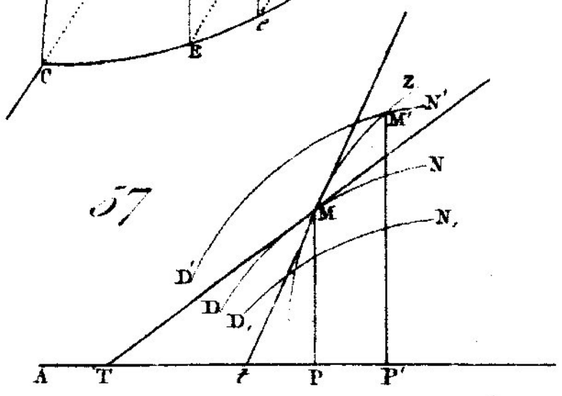
55



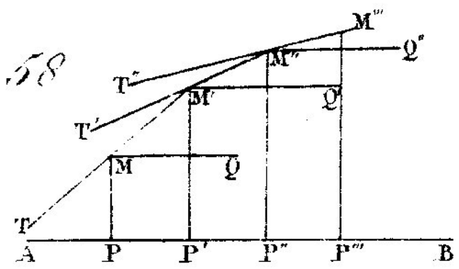
56



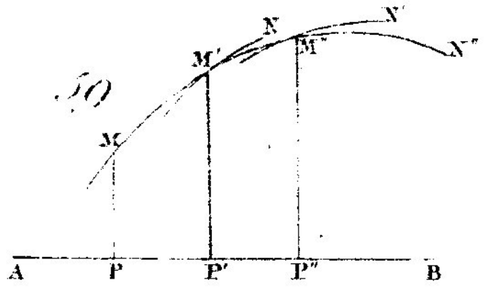
57



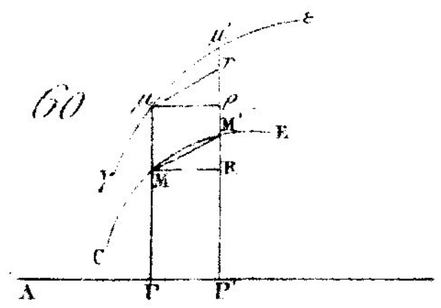
58



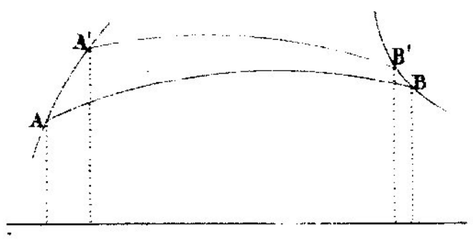
59



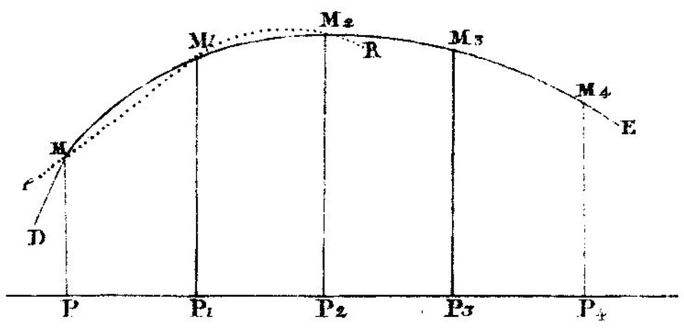
60



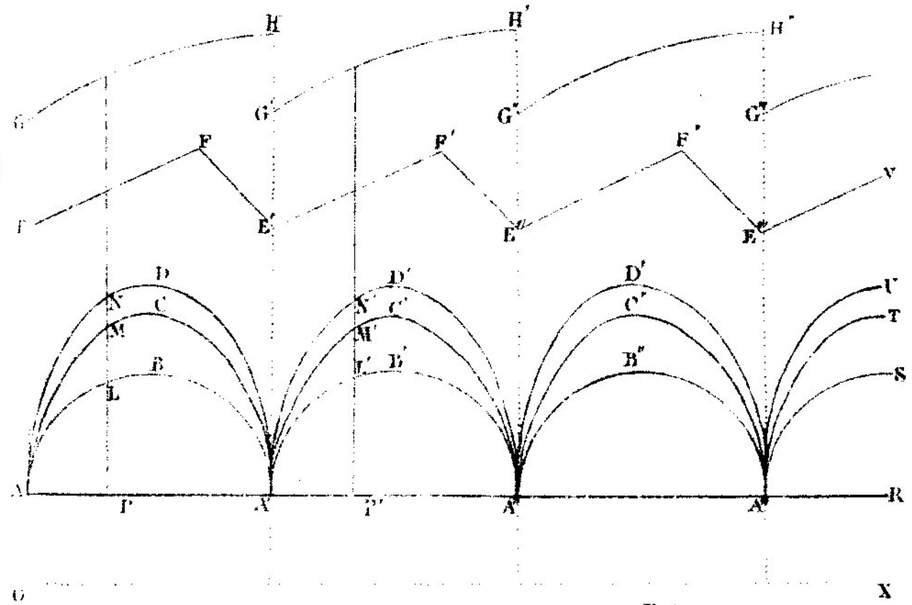
61



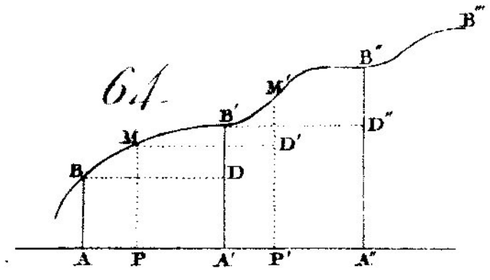
62



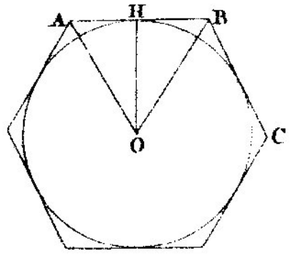
63



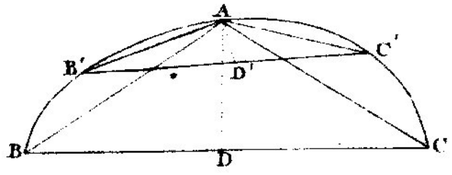
64



65



66



67

