CROIX

ALGEBRE

T. I.

ELEMENTI D'ALGEBRA

DEL SIGNORE

S. F. LACROIX.

TOMO I.

ELEMENTI D'ALGEBRA

DEL SIGNORE

S. F. LACROIX

TRADOTTI

SULL'EDIZIONE VIII. FRANCESE

DEL MDCCCX.

INSIEME COL COMPLEMENTO

PUBBLICATO DAL MEDESIMO AUTORE.

FIRENZE
PRESSO GUGLIELMO PIATTI
1810.

La presente Edizione è posta sotto la salva-guardia della Legge, essendosi adempito a quanto viene in essa prescritto.

TAVOLA

Nozioni preliminari sopra il passaggio dall' Aritmetica *all'* Algebra ; *spiegazione , ed uso dei segni algebrici .* pag. 1
Qual sia la natura , ed il fine dell' Algebra . *ivi*
Dei segni , di cui ci serviamo nell' Algebra . 3
Risoluzione di alcuni Problemi per mezzo dei segni algebrici . 4
Cosa sia una Formula . 12
Dell' Equazioni . 14
Cosa bisogni fare per risolvere un Problema col soccorso dell' Algebra . *ivi*
Cosa sia un'*equazione* , una dei suoi *membri* , un suo *termine* . 15
Della risoluzione dell' Equazioni di primo grado ad una sola incognita . 17
Regola per far passare un termine da un membro in un altro . 19
Per liberar l'incognita dalle quantità , che la moltiplicano . 21
Per fare sparire i denominatori . 23
Cosa bisogni fare per porre un Problema in equazione . 25
Esempj . *ivi*
Metodi per effettuare , quanto e possibile , le operazioni indicate sulle quantità rappresentate da lettere . 32
Spiegazione delle parole *monomj* , *binomj* , ec., *polinomj* , *incomplesse* , *e complesse* . 33
Dell' addizione delle quantità algebriche . *ivi*
Cosa sia un coefficiente . 34
Regola per eseguir la somma . 35
Regola per la riduzione delle quantità algebriche. 36
Della sottrazione delle quantità algebriche . 37
Regola per eseguire la sottrazione . 38
Della moltiplicazione delle quantità algebriche . *ivi*
Maniera d' indicare la moltiplicazione delle quantità algebriche . 39
Cosa sia una Potenza . 41
Cosa sia un'esponente . 42

Come si formino le Potenze d' un numero. *ivi*
Regole per la moltiplicazione delle quantità monomie. 43
Cosa sia il *grado* d' un prodotto. *ivi*
Nota sulla parola *dimensione*. 44
Della moltiplicazione delle quantità complesse. *ivi*
Regole dei segni. 47
Regole per eseguir la moltiplicazione. 48
Esempj sulla moltiplicazione delle quantità complesse. *ivi*
Cosa sia un' espressione *omogenea*. 52
Espressione del prodotto della somma di due quantità per la lor differenza, del quadrato, e del cubo d' un binomio. *ivi*
Maniera d'indicar la moltiplicazione delle quantità complesse. 54
Della divisione delle quantità algebriche. *ivi*
Regole per dividere le quantità monomie. 55
Cosa significhi una quantità, il cui esponente è *zero*. 56
Come si semplicizzi una divisione indicata allorchè dessa non può effettuarsi. 57
Divisione delle quantità complesse. 60
Cosa sia l' *ordinare* i termini d' una quantità. 61
Regole per eseguire la divisione. 63
Esempj di divisione. 64
Cosa bisogni fare allorchè si trovan più termini contenenti la medesima Potenza della lettera, per rapporto alla quale si è ordinata l' espressione. 67
Esempio. *ivi*
Delle Frazioni algebriche. 70
Come si riconosca che una divisione di quantità complesse non può effettuarsi. 71
Come, allorchè è possibile, si semplicizzi la frazione, che ne resulta. *ivi*
Cosa sia il massimo comun divisore di due quantità algebriche. *ivi*
Come si determini. 72
Precauzione necessaria per riuscir nell' operazione allorchè la quantità, che si prende per divisore, contiene più termini dove la lettera, per

rapporto alla quale abbiamo ordinato, si trova al medesimo *grado*. 75
Cosa bisogni fare per ottenere in principio i divisori indipendenti da questa lettera. 79
Recapitolazione del calcolo delle Frazioni. 80
Risoluzione d' un' Equazion letterale di primo *grado*. 84
Dei Problemi a due incognite, e delle quantità negative. 85
Esempj. *ivi*
Cosa bisogni fare allorchè si arriva ad un' Equazione, i cui due membri sono affetti dal segno —. 89
Problema, nel quale il valore d' una dell' incognite è affetto dal segno —. *ivi*
Cosa significhi questo segno. 90
In qual maniera i valori affetti dal segno — debbano sodisfare all' equazioni del Problema. 93
Epilogo dell' osservazioni precedenti. 95
Cosa sieno le *soluzioni negative*. *ivi*
Dimostrazione delle regole del calcolo delle quantità negative isolate. 96
Come si combinino, per rapporto ai lor segni, i monomj isolati. 98
Come si possa trovare il vero enunciato d' un Problema, rispetto al quale abbiamo incontrati dei valori negativi. 99
Problema, i di cui differenti casi offrono degli esempj di diverse singolarità, che possono presentare l'espressioni dell' incognita nell' equazioni di primo *grado*. *ivi*
Cosa significhino il resultato $\frac{m}{0}$, 107
——— il resultato $\frac{0}{0}$. 110
Nota sull' uso della parola *identica*. *ivi*
Conclusion generale di ciò che precede. 111
Uso del cangiamento di segno delle quantità per abbracciare più Problemi in un solo. *ivi*
Risoluzione dei Problemi precedenti non impiegandovi che una sola incognita. 113
Problema, il quale conduce all' Equazioni generali di primo *grado* a due incognite. 117

Della risoluzione d' un numero qualunque d' equazioni di primo grado contenenti un egual numero d' incognite. 121
Regola generale per dedurne un'equazione a una sola incognita *eliminando* successivamente tutte l'altre. *ivi*
Esempj. 122
Problemi da risolversi. 129
Formule generali per la risoluzione dell' Equazioni di primo grado. 131
Metodo generale per eliminar tra due equazioni un'incognita al primo *grado*. 133
Valori generali dell'incognite nell'equazioni di primo *grado* a tre incoguite. 137
Regola generale per formare i valori dell'incognite. 138
Applicazione delle formule generali. 140
Dell' equazioni di secondo grado a una sola incognita. 142
Esempj dell'equazioni di secondo grado, le quali non contengono che un termine incognito. *ivi*
Dell'estrazione delle radici quadrate dei numeri interi. 143
Dei numeri i quali non sono quadrati perfetti. 151
Carattere, dal quale si riconosce che la radice trovata non è troppo piccola. 151
Come si faccia il quadrato d'una frazione, e come se n' estragga la radice. *ivi*
Qualunque numero *primo*, il quale divide il prodotto di due numeri, divide necessariamente uno di questi numeri. *ivi*
I numeri interi, i quali non sono quadrati, non hanno radice nè in numeri interi, nè in numeri frazionarj. 154
Cosa sia un *incommensurabile*, o *irrazionale*. 155
Come s' indichi mediante i radicali la radice da estrarsi. *ivi*
Metodo per approssimarsi alle radici. *ivi*
Metodo per abbreviare mediante la divisione l'estrazione delle radici. 157
Metodo per continuarla indefinitimente colle frazioni ordinarie. 159
Manierad'ottener più semplicemente che sia pos-

sibile la radice approssimativa d'una frazione, i cui termini non son dei quadrati. 160
Risoluzione dell'equazioni di secondo *grado*, le quali non contengono che il quadrato dall'incognita. 161
La radice quadrata d'una quantità può esser presa tanto col segno +, quanto col segno —. 163
La radice quadrata d'una quantità negativa è *immaginaria*. 165
Dell'equazioni complete di secondo *grado*. 166
Formula generale per l'equazioni di secondo *grado* a una sola incognita. *ivi*
Regola generale, che bisogna seguir per risolverle. 169
Esempj, sui quali dimostransi le proprietà delle soluzioni negative. 170
Problema, che fa vedere in qual caso i Problemi di secondo *grado* divengano assurdi. 173
Dell'espressioni, che si dicono *immaginarie*. 176
Prova diretta che l'equazioni di secondo *grado* hanno sempre due radici. 177
Risoluzione d'alcuni Problemi. 178
Problema, il quale conduce a dei valori singolari allorchè si risolve colla formula generale. 183
Dell'estrazione della radice quadrata delle quantità algebriche. 190
Trasformazione, per mezzo della quale si posson semplicizzare le quantità radicali. *ivi*
Estrazione della radice quadrata delle quantità monomie. *ivi*
——— delle polinomie. 193
Della formazione delle Potenze dei monomj, e dell'estrazione delle loro radici. 197
Tavoladelle sette prime Potenze dei numeri, da 1 fino a 9. 198
Come s'alzi una quantità monomia ad una Potenza qualunque. 199
Come s'estragga la radice d'un *grado* qualunque da una quantità monomia. 200
Come si semplicizzi un'espression radicale monomia. 201
Delle radici *immaginarie* in generale. 202
Degli esponenti frazionarj. 203

Degli esponenti negativi. 204
Della formazione delle Potenze delle quantità complesse. 206
Maniera d'indicare queste Potenze. *ivi*
Forma del prodotto d'un numero qualunque di fattori di primo *grado*. 207
Osservazioni, col mezzo delle quali si deduce da questo prodotto lo sviluppo d'una Potenza qualunque d'un binomio. *ivi*
Teoria generale delle permutazioni, e delle combinazioni. 211
Formazione dello sviluppo d'una Potenza qualunque del binomio. 216
Teoria generale della formula del binomio. *ivi*
Applicazione della formula del binomio a degli esempj. 217
Trasformazione di questa formula per facilitarne l'uso. 219
Applicazione a un trinomio. 220
Dell'estrazione delle radici delle quantità complesse. *ivi*
Dell'estrazione della radice cubica dei numeri interi. *ivi*
Dell'estrazione della radice cubica delle frazioni. 226
Metodi per approssimarsi alle radici cubiche dei numeri, i quali non son dei cubi perfetti. 228
Dell'estrazione delle radici dei gradi più elevati. 229
Dell'estrazione delle radici delle quantità letterali. 232
Dell' Equazioni a due termini. 234
Divisione di $x^m - a^m$ per $x - a$. 236
Dei fattori dell' equazione $x^m - a^m$, e delle radici dell'unità. 237
Legge generale sopra il numero delle radici d'un' Equazione, e distinzione delle *determinazioni aritmetiche*, e delle *determinazioni algebriche* delle radici dei numeri. 239
Dell' Equazioni, le quali posson risolversi come quelle di secondo grado. 240
Determinazione delle loro diverse radici. 241
Del calcolo dei radicali. 243
Metodi per effettuare sui radicali del medesimo *grado* le quattro operazioni fondamentali. *ivi*
Metodi per alzare un radicale ad una Potenza qualunque. 246

Metodi per estrarre la radice d'un *grado* qualunque, 247
—— per ridurre a un medesimo *grado* radicali di *gradi* differenti. 249
—— per passar sotto un radicale un fattor, che n'è fuori, *ivi*
—— per la moltiplicazione, e la divisione dei radicali qualunque. *ivi*
Osservazioni sopra qualche caso singolare del calcolo dei radicali. 250
Determinazione del prodotto $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$. 251
Delle diverse espressioni del prodotto $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b}$. 253
Del calcolo degli esponenti frazionarj. 255
Come se ne concludano le regole date per il calcolo dei radicali. 256
In che cosa consista il vantaggio, ch' egli ha su quest'ultimo. 257
Teoria generale dell' Equazioni. 258
Sotto qual forma si pongano l' equazioni. 259
Cosa sia la radice d'un' equazione. *ivi*
Proposizione fondamentale di questa Teoria. 260
Della decomposizione dell' equazioni in fattori semplici, o di primo *grado*. 261
Del numero dei divisori di primo grado, che può avere un'equazione. 265
Della composizione d' un'equazione per dei fattori semplici, o di primo grado. *ivi*
Formazione dei suoi coefficienti. *ivi*
Nota sulla composizione dell' equazioni. 267
Quanti fattori d' un grado dato possa avere un' equazione. 269
Dell' Eliminazione tra l' Equazioni dei gradi superiori al primo. *ivi*
Della sostituzione del valore d' una dell'incognite. 270
Regola per fare sparire un radicale. 271
Formule generali dell' equazioni a due incognite, ed in qual maniera si pongano sotto la forma d' equazioni a una sola. 272
Formule d'eliminazione tra due equazioni di secondo *grado*. 273
—— *Nota* sopra un metodo d' eliminazione analogo a quello del n. 84. *ivi*

Condizione, allà quale debbono sodisfare i valori d'una medesima incognita comune a due equazioni. 274
In qual maniera la ricerca del comun divisore di due equazioni conduca all' eliminazione d' una delle incognite. 275
Cosa bisogni fare, allorchè s' è ottenuto il valore di una delle incognite nell' equazion finale, per risalire a quello dell'altra incognita. 276
Casi singolari, nei quali l' equazioni proposte sono contradittorie, o sivvero lasciano il Problema indeterminato. 278
Metodo per eliminare un'incognita tra due equazioni qualunque. *ivi*
Metodo, che *Euler* sostituisce alla ricerca del comun divisore. 279
Inconvenienti dell' eliminazion successiva delle incognite allorchè si hanno più di due equazioni, ed indicazione del grado, al quale dee salire l' equazion finale. 284
Della ricerca dalle radici commensurabili, e delle radici eguali dell' Equazioni numeriche. *ivi*
Qualunque equazione, i cui coefficienti son dei numeri interi, quello del primo termine essendo 1, non può aver per radici che dei numeri interi, o dei numeri incommensurabili. 285
Maniera di fare sparir le frazioni da un' equazione. 286
Ricerca dei divisori commensurabili di primo grado. 287
Maniera d'ottener l'equazione, le cui radici sono le differenze tra una delle radici della proposta, e tutte le altre. 294
Ricerca delle radici eguali. 296
Formazione dell' equazione alle differenze tra tutte le radici prese due a due, e dell' equazione ai quadrati di queste differenze. 299
Mezzo per fare sparire un termine qualunque d'un' equazione. 301
Della decomposizione dell' equazioni in fattori d' un *grado* superiore al primo. 303
Della risoluzion per approssimazione dell' Equazioni numeriche. 304

Come possa riconoscersi che un' equazione ha una radice reale compresa tra due numeri dati. 304
Determinazione d'un numero, che renda il primo termine maggior della somma di tutti gli altri. 308
Qualunque equazione di *grado* impari ha almeno una radice reale di segno contrario al suo ultimo termine. 311
Qualunque equazione di *grado* pari ha almeno due radici reali, e di segno contrario allorchè il suo ultimo termine è negativo. *ivi*
Determinazione dei limiti delle radici in un esempio. 312
Applicazione a quest' esempio del metodo di *Newton* per approssimarsi alle radici d' un' equazione. 313
Caratteri, dai quali si riconosce il grado d' approssimazione, al quale siamo arrivati. 314
Inconveniente di questo metodo. 315
Come si possa evitarlo, tanto per l' equazioni ai quadrati delle differenze delle radici, 316
——— quanto moltiplicando le radici per dei numeri più, o meno grandi. 320
Uso della divisione delle radici per facilitar la risoluzione d' un' equazione, i cui coefficienti son dei numeri grandi. 321
Metodo d'approssimazione dovuto al Sig. *Lagrange*. 322
Delle Proporzioni. e delle Progressioni. 326
Principali proprietà dell' *equidifferenza*, e della *proporzione*. 327
Cangiamenti, che si possono far subire alle proporzioni. *ivi*
Della progressione per *differenze*. 334
Termine generale. *ivi*
Somma. 336
Della progressione per *quozienti*. *ivi*
Termine generale. 337
Somma. 338
Delle progressioni per *quozienti*, la cui somma ha un limite determinato. 339
Maniera di dedur tutti i termini d' una progression per *quozienti* dell' espressione della sua somma. 340

Divisione di m per $m-1$, continuata all'infinito. 341
In quali casi il quoziente di quest'operazione è convergente, e può esser preso per il valore approssimativo della frazione $\frac{m}{m-1}$. 342
Cosa sieno le serie *divergenti*. 345
Teoria delle Quantità esponenziali, e dei Logaritmi. *ivi*
Del legame, ch'esiste tra le differenti maniere di calcolare. 346
Conseguenze notabili, che resultano dalla generazione dei numeri mediante le Potenze d'un solo. 348
Cosa sia un *logaritmo*, una *base* di *logaritmi*. 349
Maniera di calcolare delle Tavole di *logaritmi*. 350
Nota contenente il metodo proposto da *Long*, e la Tavola delle Potenze *decimali* di 10. 352
Cosa sia la *caratteristica* dei *logaritmi*. 353
Dei *logaritmi* delle frazioni. 356
Dei *complementi aritmetici*. 359
Maniera di passar da un sistema di *logaritmi* ad un altro. 360
Qual sia il *logaritmo* di *zero*. 361
Applicazione dei *logaritmi* alla valutazione numerica delle formule algebriche. *ivi*
Applicazione dei *logaritmi* alla *regola del tre*. 362
I *logaritmi* dei numeri in progressione per *quozienti* sono in progressione per *differenze*. 363
Applicazione dei *logaritmi* alla risoluzione dell'equazioni ove l'incognita entra com'esponente. *ivi*
Problemi relativi al frutto del denaro. 364
Del *frutto* semplice. 365
Del frutto *composto*. *ivi*
Dell'*annualità*. 370
Come si possano paragonare tra loro delle somme pagabili in epoche differenti. 372
Aggiunta. 375
Nota sul Problema dei due *corrieri*. *ivi*

Alfabeto per facilitar la lettura dei calcoli ove si fa uso delle Lettere Greche.

A α.....Alpha.
B β ς.....Beta.
Γ γ $\digamma$ .....Gamma.
Δ δ.....Delta.
E ε.....Epsilon.
Z ζ.....Zêta.
H η..... .Eta.
Θ θ ϑ..... Theta.
I ι.....Iota.
K $\varkappa$.....Cappa.
Λ λ.....Lambda
M μ..... Mu.
N ν.....Nu.
Ξ ξ.....Xi.
O o.....Omicron.
Π π ϖ.....Pi.
P ρ ϱ.....Rho.
Σ ς..... Sigma.
T τ $\jmath$..... Tau.
Υ υ..... Upsilon.
Φ ϕ.....Phi.
X χ.....Chi.
Ψ ψ.....Psi.
Ω ω..... Omèga.

pag.	vers.	ERRORI	CORREZIONI
13	17	*l' eccesso l' eccesso*	*l' eccesso*
31	20	$36-x$	$12-x$
40	13	4 . 5 . 3 abcdefmn	4 . 5 . 3 *abcdefmn*
56	10	l' esponente del quoziente	l' esponente delle lettere del quoziente
65	6	del dividendo	del divisore
69	7	$2b^4b^2$	$2b^4c^2$
75	3	$19b$	$19b^2$
94	2	n.° 40	n.° 42
97	31	la quantità $b-b$	le quantità $+b$, e $-b$
122	16	*quanto costato*	*quanto costava*
129	15	prevenne	pervenne
155	18	radice quadrato	radice quadrata
ivi	19	quadrata perfetto	quadrato perfetto
ivi	31	*irragionale*	*irrazionale*
186	21	il numeratore della frazione	i due termini della frazione
195	4	quella d' un trinomio	quello d' un trinomio
196	16	il termine $4ca^3b$	il termine $-4ca^3b$
199	14	*ri forma*	*si forma*
200	29	la radice quadra	la radice quarta
201	25	delle radici	delle radici del medesimo grado
208	16	quello da' fattori	quello dei fattori
209	1	$(x^{m-3}$	Cx^{m-3}
215	17	che lo procede	che lo precede
242	3	$\binom{85}{2}^2$	$\left(\frac{35}{2}\right)^2$
252	22	dall' ambiguità	dell' ambiguità
260	14	Qx^{n-2}	Qx^{n-2}
261	3	x^{m-2}	x^{n-2}
261	6	ax^{n-2}	ax^{n-2}
262	4	Px^{n-1}	Px^{n-1}
264	4	$(a-\alpha)(a^{m-1}$	$(a-\alpha)(a^{n-1}$
289	1	nel secondo termine	nel primo membro
292	16	$\frac{Q'}{a}$	$\frac{Q'}{a}$
342	24	successivamen	successivamente
354	22	2.047128548	1.047128548
373	15	$b(1+r)^{p-q}$	$b(1+r)^{q-p}$

ELEMENTI D'ALGEBRA

Nozioni preliminari sopra il passaggio dell'Aritmetica all'Algebra; spiegazione, ed uso dei segni algebrici.

1. Abbiamo dovuto osservare nel *Trattato elementare d'Aritmetica* più Problemi, la cui soluzione è composta di due parti; una, che ha per fin di cercare a quali delle quattro *operazioni fondamentali* si rapporta la determinazione del numero incognito per mezzo dei numeri dati; e l'altra l'applicazione di queste regole. La prima parte, indipendente da qualunque maniera di scrivere i numeri, o da qualunque sistema di numerazione, s'aggira interamente sullo sviluppo delle conseguenze, che resultano esplicitamente, o implicitamente dall'enunciato, o dal modo col quale quest'enunciato lega i numeri cogniti coi numeri incogniti, e vale a dire s'occupa delle relazioni, che stabilisce tra questi numeri. In generale si può, se queste relazioni non son complicate, trovare col semplice ragionamento il valore dei numeri incogniti. Bisogna per questo decomporre le condizioni, che fissano le relazioni enunciate, traducendo queste relazioni in una serie di frasi equivalenti, l'ultima delle quali debb'essere concepita in questi termini: *L'incognita eguaglia la somma, o la differenza, o il prodotto, o il quoziente delle tali, e tali grandezze*. L'esempio

seguente schiarirà ciò, che queste nozioni generali posson contenere d' oscuro.

Dividere un numero dato in due parti tali che la prima sorpassi la seconda d' un eccesso dato.

Per arrivarvi s' osserverà 1.° che

La parte maggiore è eguale alla minore, più l' eccesso dato,

e che per conseguenza, se la parte minor fosse cognita, aggiungendole quest' eccesso se n' avrebbe la maggiore.

2.° che

La parte maggiore unita alla minore formano il numero da dividersi.

Sostituendo in quest' ultima frase a queste parole, *la parte maggiore*: l' espressione equivalente riportata quì sopra, cioè, *la parte minore, più l' eccesso dato*, si trova che

La parte minore, più l' eccesso dato, più ancora la parte minore formano il numero da dividersi.

Ma allora la frase può essere abbreviata enunciandola così

Due volte la parte minore unita con l' eccesso dato formano il numero da dividersi;

e se ne conclude necessariamente che

Due volte la parte minore è eguale al numero da dividersi, diminuito dell' eccesso dato:

dunque

Una volta la parte minore è eguale alla metà della differenza tra il numero da dividersi, e l' eccesso dato,

Ovvero, il che torna lo stesso,

La parte minore è eguale alla metà del numero da dividersi meno la metà dell' eccesso dato.

Ecco dunque sciolto il Problema proposto, poichè, per ottener le parti cercate, serve far

delle operazioni puramente aritmetiche sopra dei numeri cogniti.

Se, per esempio, il numero da dividersi fosse 9, e l'eccesso della parte maggiore sulla minore 5, la parte minore sarebbe, secondo la regola spiegata, eguale a $\frac{9}{2}$ meno $\frac{5}{2}$, ovvero a $\frac{4}{2}$, o finalmente 2; e la maggiore composta della minore più l'eccesso 5, sarà eguale a 7.

2. I ragionamenti, semplicissimi nel Problema proposto qui sopra, ma complicatissimi in altri, si compongono, in generale, d'un certo numero d'espressioni, tali come *aggiunto ad*, *diminuito di*, *è eguale ad*, ec., ripetute frequentemente, e dipendenti dalle operazioni, per le quali le grandezze, che entrano nell'enunciato del Problema, son legate tra loro, è chiaro che si abbrevierebbero molto rappresentando ciascuna di queste espressioni con un segno; e ciò si fa come segue:

Per indicar la *somma*, si fa uso del segno $+$, che significa *più*.

Per la *sottrazione*, s'adopera il *segno* $-$, che significa *meno*.

Per la *moltiplicazione*, s'usa il *segno* $\times$, che significa *moltiplicato per*

Per indicare che due quantità deggiono esser divise l'una per l'altra, si pone la seconda sotto la prima, e si separano con una linea: $\frac{5}{4}$ significa 5 *diviso* per 4.

Finalmente, per indicare che due quantità son eguali, si pone tra le loro espressioni il segno $=$, che significa *eguale*.

Questi compendj, benchè di già considerabilissimi, non sono ancora bastanti; poichè siamo obbligati di ripetere spesso *il numero da dividersi*, *il numero dato ec.*, *la parte minore*, *il numero cercato*, *ec.*; ciò che allunga molto la frase. A riguardo delle quantità date l'espediente, che si è offerto a prima vista, è stato di prendere, per rappresentarle, dei numeri determinati, che servan d'esempio, come n'abbiamo fatto uso in Aritmetica; ma la cosa non essendo possibile a riguardo dei numeri incogniti, vi fu sostituito un *segno* di convenzione, il quale ha variato col tempo. Finalmente è stato convenuto d'impiegare le *lettere* dell'Alfabeto; quasi sempre ci serviamo dell'ultime, come in Arimetica si mette un x per il quarto termine d'una Proporzione, della quale non si conoscano che i tre primi: dall'uso di questi *segni* ne resulta l'*Algebra*.

Con questo mezzo vado a riprendere il Problema del n.° 1., e rappresenterò l'incognita, o il numero *minore* con una lettera x, per esempio il numero *da dividersi*, e l'*eccesso dato* coi due numeri 9, e 5; la *maggiore* delle parti cercate sarà espressa per $x+5$, e la lor somma per $x+5+x$: si avrà dunque,

$$x+5+x=9;$$

ma, scrivendo $2x$ per il doppio della quantità x, ne resulterà

$$2x+5=9.$$

Quest'espressione mostrando che bisogna aggiunger 5 al numero $2x$ per aver 9, ne concluderò che $2x=9-5$, ovvero che $2x=4$, e che finalmente $x=\frac{4}{2}=2$.

E ravvicinando adesso ciò che significano le frasi abbreviate, che ho scritte per mezzo dei *segni* con-

venuti, a quelle, che mi hanno condotto alla soluzione col solo ragionamento, si vedrà che le une non sono se non che la traduzione dell' altre.

Il numero 2, resultato delle operazioni precedenti, non conviene che all' esempio particolare, che ho scelto, laddove che il solo ragionamento insegnandoci che *la parte minore è eguale alla metà del numero da dividersi, meno la metà dell' eccesso dato*, fa vedere come il numero *incognito* si compone coi numeri *dati*, e somministra una regola, per mezzo della quale si posson risolvere tutti i casi particolari compresi nel Problema enunciato.

Questo vantaggio del ragionamento, impiegato solo, dipende da ciò, che non indicando alcun numero in particolare, i numeri *dati* passano senz' alterazione da una frase all'altra, mentre che considerando dei numeri determinati, si effettuano, a misura che si presentano, tutte le operazioni sopra questi numeri; e quaudo siamo arrivati al resultato, non resta alcuna traccia del come il numero 2, al quale si può arrivare con un' infinità d' operazioni differenti, è stato formato per mezzo dei numeri *dati* 9, e 5.

3. Si eviteranno questi inconvenienti rappresentando con dei caratteri indipendenti da qualunque valore particolare, e sopra i quali non si possa per conseguenza effettuare alcun calcolo, *il numero da dividersi, e l' eccesso dato*. Le *lettere* dell' Alfabeto sono adattatissime a quest' uso, ed il Problema proposto può col mezzo loro enunciarsi così:

Dividere un numero cognito, rappresentato per a, *in due parti tali, che la maggiore abbia sulla minore un eccesso dato, rappresentato per* b.

Indicando la parte minore per x,

La maggiore sarà espressa per $x + b$,

La lor somma, o il numero da dividersi, sarà equivalente a $x + x + b$, ovvero a $2x + b$.

La prima condizion del Problema darà dunque

$$2x + b = a.$$

Adesso egli è manifesto che, se bisogna aggiungere al doppio di x, o a $2x$ la quantità b, per fare la quantità a, ne resulta che sia necessario diminuire a di b per ottenere $2x$, e che per conseguenza $2x = a - b$.

Da ciò si concluderà che la metà di $2x$, ovvero $x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$.

Quest' ultimo resultato essendo tradotto nel linguaggio ordinario, mediante la sostituzione delle parole, e delle frasi, che sono indicate dalle *lettere*, e dai *segni*, ch' esso contiene, somministra la regola trovata quì sopra, secondo la quale, *per conseguir la minore delle parti cercate, si dee dalla metà del numero da dividersi, o da* $\frac{a}{2}$, *togliere la metà dell' eccesso dato, o* $\frac{b}{2}$.

Conoscendo la parte *minore*, se n' avrà la *maggiore* con aggiungere alla *minore* l' *eccesso dato*. Quest' osservazione è sufficiente per terminar di risolvere il Problema proposto; ma l' Algebra dà di più: essa somministra una regola per calcolare la parte *maggiore* senza il soccorso della *minore*, ed ecco come: $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ essendo il valor di quest' ultima, aumentandolo dell' eccesso b, si avrà per la parte *maggiore* $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$; ora $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$ esprime che, dopo aver tolta da $\frac{a}{2}$ la metà di b, bisogna

al *resto* aggiunger b tutto intero, ovvero due metà di b; il che si riduce ad aumentare $\frac{a}{2}$ d' una metà di b, ovvero di $\frac{b}{2}$. È evidente da ciò che $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$ si riduce ad $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$; e traducendo quest'espressione, si vede che *la maggiore delle due parti cercate è uguale alla metà del numero da dividersi più la metà dell'eccesso dato.*

Nel Problema particolare, di cui mi sono occupato in primo luogo, il numero da dividersi era 9, l'eccesso d' una parte sopra l'altra, 5; per risolverlo con le regole, alle quali ora sono arrivato, bisognerà effettuare sopra i numeri 9, e 5 le operazioni indicate concernenti a, e b.

La metà di 9 essendo $\frac{9}{2}$, e quella di 5 essendo $\frac{5}{2}$, si avrà per la parte *minore*

$$\frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

per la *maggiore*

$$\frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

4. Ho indicato quì sopra per x la *minore* delle due parti, e n'ho dedotta la *maggiore*; se si volesse cercare immediatamente quest' ultima, si osserverebbe che, rappresentandola per x, l'altra sarebbe $x - b$; poichè si passa dalla *maggiore* alla *minore* togliendo l' eccesso della prima sulla seconda. Il numero da dividersi sarebbe allora espresso per $x + x - b$, ovvero per $2x - b$, e s' averebbe per conseguenza.

$$2x - b = a.$$

Questo resultato fa veder che $2x$ sorpassa la quantità a della quantità b, e che in conseguenza $2x=a+b$. Prendendo la metà di $2x$, e della quantità che gli è eguale, per avere il valor di x, se ne ricava

$$x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2};$$

il che dà, per calcolar la *maggiore* delle due parti cercate, la medesima regola che quì sopra. Non mi tratterrò a dedurne l'espressione della *minore*.

La stessa relazione tra dei numeri *dati*, e dei nnmeri *incogniti* può esser espressa in più maniere differentissime; quella, che ha condotto allo scioglimento del precedente Problema, resulta ancora dall'enunciato, che segue.

Conoscendo la somma a *di due numeri, e la lor differenza* b, *trovar ciascuno di questi numeri*; poichè, in altri termini, il numero da dividersi è la *somma* delle due parti cercate, e la lor differenza è l'*eccesso* della *maggiore* sulla *minore*. Questo cangiamento nei termini dell'enunciato essendo applicato alle regole trovate di sopra, esse danno:

Il minor dei due numeri cercati è eguale alla metà della loro somma, meno la metà della lor differenza;

Il maggiore è eguale alla metà della loro somma, più la metà della lor differenza.

5. Ecco un Problema analogo al precedente, ma un poco più complicato.

Dividere un numero dato in tre parti tali, che l'eccesso della media sulla minore sia un numero dato, e l'eccesso della maggior sulla media sia un altro numero dato.

Per fissare l'idee, darò primieramente ai numeri cogniti dei valori determinatì.

Supporrò che il numero da dividersi sia 230;

Che l'eccesso della parte *media* sulla *minore* sia 40;

Che l' eccesso della parte *maggior* sulla *media* sia 60.

Indicando la parte *minore* per x,

La *media* sarà la *minore* più 40, ovvero $x+40$,

E la *maggiore* sarà la *media* più 60, ovvero $x+40+60$.

Ora, le tre parti prese insieme debbon fare il numero da dividersi; dunque

$$x+x+40+x+40+60=230.$$

E riunendo da una parte i numeri *dati*, e dall' altra i numeri *incogniti*, x si troverà 3 volte nel resultato, e, per abbreviare, si scriverà

$$3x+140=230.$$

Ma poichè bisogna aggiungere 140 al triplo di x per fare 230, ne segue che togliendo 140 da 230 si avrà precisamente il triplo di x, ovvero

$$3x=230-140,$$

o sivvero

$$3x=90;$$

e ne segue da ciò che $x=\frac{90}{3}$, ovvero $=30$.

E aggiungendo a 30 l' *eccesso* 40 della *media* sulla *parte minore*, si avrà 70 per la parte *media*.

Ed aggiungendo a 70 l' *eccesso* 60 della parte *maggior* sulla *media*, si avrà 130 per la parte maggiore.

6. Se i numeri *cogniti* fossero differenti da quelli indicati nell' enunciato, si risolverebbe pure il Problema seguendo il metodo tenuto nel paragrafo precedente; ma si sarebbe obbligati a ripetere tutti i ragionamenti, e tutte le operazioni,

per mezzo delle quali siamo arrivati al numero 30, poichè nulla ci fa vedere come il valor dell'*incognita* si formi per mezzo delle quantità cognite, 2 30; 40, e 60. Per render la soluzione indipendente dai valori particolari dei numeri, e far vedere come il valor dell'*incognita* si forma per mezzo delle quantità *cognite*, enuncierò adesso il Problema nel modo seguente.

Dividere un numero dato a *in tre parti tali che l'eccesso della media sulla minore sia un numero dato* b, *e l'eccesso della maggiore sulla media sia un numero dato* c.

Indicando, come qui sopra, per x la quantità *incognita*, e scrivendo, per mezzo dei *segni* convenuti, e dei simboli a, b, c, che rappresentano le quantità *cognite* del Problema, i ragionamenti fatti precedentemente sopra i numeri, si formerà di nuovo

la *parte minore* x
la *media* $x + b$
la *maggiore* $x + b + c$.

La riunione di queste tre parti componendo il numero da dividersi, si dee avere

$$x + x + b + x + b + c = a.$$

Siffatta espressione, per quanto sia semplice, può ancora abbreviarsi; poichè, siccome essa fa vedere che x entra tre volte nel numero da dividersi, e che b v' entra due volte, in vece di $x + x + x$ scriverò $3x$, in vece di $+ b + b$ scriverò $2b$, e proverrà

$$3x + 2b + c = a.$$

Quest'ultima espressione fa conoscere che bisogna aggiunger al triplo del numero rappresentato da x il doppio del numero rappresentato da b, ed altraccio il numero, rappresentato da c per formare

il numero a; laonde, se dal numero a si toglie il doppio del numero b, e poi ancora il numero c, si avrà precisamente il triplo di x, ovvero che

$$3x = a - 2b - c:$$

ora, x essendo il terzo di tre volte x, ovvero di $3x$, se ne concluderà che

$$x = \frac{a - 2b - c}{3}.$$

Bisogna ben osservare che non avendo assegnato alcun valore particolare ai numeri rappresentati da a, b, c, il resultato, cui sono giunto, non dà alcun valore determinato per x; esso indica solamente quali operazioni bisogna fare sopra questi numeri allorquando si assegna loro un valore speciale per dedurne quel dell' *incognito*.

Infatti, l' espressione $\frac{a - 2b - c}{3}$, alla quale x è eguale, può esser tradotta nel linguaggio ordinario scrivendo, in luogo delle *lettere*, la denominazione dei numeri, ch' esse rappresentano, ed in vece dei *segni* l'enunciazione dell'operazioni, che indicano; formeremo così questa frase:

Dal numero da dividersi togliete il doppio dell'eccesso della parte media sulla minore, ed oltracciò l' eccesso della maggior sulla media, e prendete il terzo del resto.

E seguendo questa frase letteralmente, si determinerà, per le prime operazioni dell' Aritmetica, la parte *maggiore*. Il numero da dividersi essendo, per esempio, 230, gli *eccessi* 40, e 60, come nel numero antecedente, si toglierà da 230 due volte 40, ovvero 80, e 60, resterà 90, il cui terzo sarà 30, come digià l'abbiamo trovato.

Se il numero da dividersi fosse 520, i due

eccessi 50, e 120, si toglierebbe da 520 due volte 50, ovvero 100, e 120, resterebbe 300, il cui terzo, ovvero 100, sarebbe la parte *minore*; si troverebbero le altre due aggiungendo 50 a 100, il che farebbe 150; poscia aggiungendo 120 a questo resultato, il che farebbe 270; e così le tre parti domandate sarebbero

100, 150, 270,

e la lor *somma* sarebbe 520, come l' esige il Problema.

I resultati algebrici al più spesso altro non sono che l'indicazione dell'operazioni da effettuarsi sopra dei numeri per trovarne degli altri; tali resultati in generale si chiamano *Formule*.

Questo Problema, benchè più complicato di quello del num.° 1., può ancora essere risoluto col linguaggio ordinario; ciò rendesi manifesto dalla Tavola annessa, ove di fronte a ciascun ragionamento si è posta la sua traduzione in caratteri Algebrici. L' esame attento di questa Tavola non dee lasciare alcun dubbio sull' utilità dell' Algebra, e sopra le circostanze della sua prima invenzione.

PROBLEMA

Dividere un numero in tre parti tali che l'*eccesso* della *media* sulla *minore* sia un numero *dato*, e che l'*eccesso* della *maggiore* sulla *media* sia un altro numero *dato*.

SOLUZIONE.

Col linguaggio ordinario.	*Con la Scrittura Algebrica.*
	Sia il numero da dividersi designato per a.
	L'eccesso della parte *media* sulla *minore*, per . . . . . b.
	L'eccesso della *maggiore* sulla *media*, per . . . . . c.
	La *minore* sia . . . . . x.
La parte *media* sarà la *minore*, più l'*eccesso* della *media* sulla *minore*.	La *media* sarà $x+b$.
La parte *maggiore* sarà la *media*, più l'*eccesso* della *maggiore* sulla *media*.	La *maggiore* $x+b+c$.
Le tre parti riunite insieme formano il numero proposto:	
Dunque la parte *minore*, più la parte *minore*, più l'*eccesso* l'*eccesso* della *media* sulla *minore*, più ancora la parte *minore*, più l'*eccesso* della *media* sulla *minore*, più l'*eccesso* della *maggiore* sulla *media*, eguagliano il numero da dividersi:	Dunque $x+x+b+x+b+c=a$.
Dunque tre volte la parte *minore*, più due volte l'*eccesso* della *media* sulla *minore*, più ancora l'*eccesso* della *maggiore* sulla *media* eguagliano il numero da dividersi:	$3x+2b+c=a$.
Dunque tre volte la parte *minore*, eguaglia il numero da dividersi, meno due volte l'*eccesso* della *media* sulla *minore*, meno ancora l'*eccesso* della *maggiore* sulla *media*:	$3x=a-2b-c$.
Dunque finalmente la parte *minore* è eguale al terzo di quel, che resta dopo che si è tolto dal numero da dividersi due volte l'*eccesso* della *media* sulla *minore*, ed oltracciò l'*eccesso* della *maggior* sulla *media*.	$x=\frac{a-2b-c}{3}$.

7. I *segni* convenuti nel numero 2°. non sono i soli, di cui ci serviamo in Algebra; nuove considerazioni in seguito n' introdurranno dei nuovi. Abbiamo digià dovuto osservare che ho indicata nel num.° 2.° la moltiplicazione di x per 2, e nei num.i 5°. e 6°. quella di x per 3, quella di b per 2, ponendo solamente queste cifre avanti delle *lettere* x, e b, senz' alcuna interposizione di *segno*, e così ne farò uso d' ora in avanti; di maniera che ogni numero posto alla sinistra d' una *lettera* sarà moltiplicatore del numero, che rappresenta questa *lettera*: $5x$, $5a$, ec., indicheranno 5 volte x, cinque volte a, ec; $\frac{3}{4}x$, ossia $\frac{3x}{4}$, ec., indicheranno i $\frac{3}{4}$ di x, ovvero 3 volte x diviso per 4, ec.

In generale la *moltiplicazione* s' indicherà d'ora in poi mettendo i *fattori* in seguito gli uni degli altri, senza alcuna frapposizione di *segno*, ogni volta che non ne resulterà confusione.

Così l'espressioni ax, bc, ec., saranno equivalenti ad $a \times x$, $b \times c$, ec. Ma non si potrà sopprimere il segno $\times$ allorchè si tratterà di numeri, perchè allora l'espressione 3×5, il cui valore è 15, divenendo 35 per l'omissione del segno $\times$, cangerebbe interamente di significato. In questo caso si sostituisce spesso un punto al segno $\times$, e si scrive 3.5.

Dell' Equazioni.

8. Esaminando con attenzione la soluzion de'Problemi dei num.i 3.° e 6.°, la troveremo composta di due parti assai ben distinte. Nella prima si esprimono, per mezzo dei caratteri algebrici, le relazioni, che l'enunciato del Problema stabilisce tra le

qnantità *cognite*, e le quantità *incognite*; e ciò conduce ad eguagliare due quantità tra di loro, cioè:

Nel num.° 3.° le quantità $2x+b$, e a.

Nel num.° 6.° le quantità $3x+2b+c$, e a.

Poi da questa eguaglianza si deducono una serie di conseguenze, che portano finalmente ad eguagliare l'*incognita* x a un insieme di quantità *date* connesse tra loro per delle operazioni, che si sanno eseguire: ecco la seconda parte della soluzione.

Le due parti, che ho pocanzi indicate, si trovano in quasi tutti i Problemi, che son d'attenenza dell' Algebra. È difficile dare, almen per adesso, una regola, secondo la quale si possa effettuare la prima parte, quella, cioè, che ha per oggetto la traduzione in caratteri algebrici delle condizioni del Problema. Bisogna, per riescirvi, familiarizzarsi colla scrittura algebrica, ed acquistar l'abitudine di decomporre l'enunciato d'un Problema in tutte le sue circostanze, sien queste esplicite, o implicite. Ma allorchè siamo arrivati a formar i due numeri, che il Problema suppone eguali tra loro, abbiamo dei metodi per dedurre da quest' espressione algebrica il valor dell' *incognita*, ch'è l'oggetto della seconda parte della soluzione. Prima di farli conoscere spiegerò qualche denominazione, di cui gli Algebristi si servono per quest' oggetto.

Un' *Equazione* è l'eguaglianza di due quantità.

L'insieme delle quantità, che sono da una medesima parte del segno $=$, si chiama *membro*; un'equazione ha dunque due *membri*.

Quello, ch'è a sinistra di chi legge, si dice il *primo membro*; l'altro è il *secondo*.

Nell' Equazione $2x + b = a$, $2x + b$ è il *primo membro*, a il *secondo*.

Le quantità, che compongono un medesimo *membro*, allorchè esse son separate dai segni $+$, o $-$, si chiaman *termini*.

Così il primo *membro* dell' equazione $2x + b = a$ contiene due *termini*, cioè, $2x$, e $+b$.

L' equazione $\frac{3}{4}x + 7 = 8x - 12$ ha due *termini* in ciascun de' suoi *membri*, cioè:

$\frac{3}{4}x$, e $+7$ nel primo,
$8x$, e -12 nel secondo.

Benchè io abbia preso a caso, e per servir d' esempio, l' equazione $\frac{3}{4}x + 7 = 8x - 12$, essa debb' essere considerata come tutte l' altre, delle quali parlerò in appresso, provenienti da Problemi, di cui si può trovar sempre un enunciato traducendo in linguaggio ordinario l' equazione proposta. Quella, di cui si tratta, si riduce a

Trovare un numero x tale che aggiungendo 7 ai $\frac{3}{4}$ di x, la *somma* sia eguale a 8 volte x meno 12.

Parimente, l' equazione $ax + bc - cx = ac - bx$, nella quale le *lettere* a, b, c rappresentano delle quantità *cognite*, corrisponde al Problema seguente:

Trovare un numero x *tale che moltiplicandolo per un numero dato* a, *poi aggiungendovi il prodotto de' due numeri dati* b, *e* c, *e togliendo da questa somma il prodotto del numero dato* c *per il numero* x, *abbiasi un resultato eguale al prodotto dei numeri* a, e c, *diminuito di quello dei numeri* b, *e* x.

Coll' esercitarsi molto a passare dal linguaggio ordinario alla scrittura algebrica, e da questa ritornare al primo, si arriverà a familiarizzarsi coll' Algebra, la cui difficoltà non consiste in

altro se non che nella perfetta intelligenza dei *segni*, e nell' impiego dei medesimi.

Ricavare da un' equazioue il valor dell' *incognita*, ovvero arrivare ad aver quest' *incognita* sola in un *membro*, e quantità tutte *cognite* nell' altro, questo è ciò, che si dice *risolvere* quell' equazione.

I diversi Problemi, che si possono aver da risolvere, conducendo a equazioni più, o meno composte, si son divise queste in più classi, o *gradi*. Vado ad occuparmi primieramente dell' *equazioni di primo gradо*. Si chiaman così l'equazioni, nelle quali le *incognite* non sono moltiplicate nè per loro stesse, nè fra di loro.

Della risoluzione dell' Equazioni di primo grado ad una sola incognita.

9. Abbiamo digià ved uto che risolvere un'equazione vuol dire arrivare ad un' espressione, nella quale l'*incognita*, sola in un *membro*, sia eguagliata a quantità *cognite*, nell' altro *membro* combinate tra loro per dell' operazioni, che si sappiano effettuare. Segue da ciò che bisogna, per condurre un' equazione a questo stato, *liberar* l' *incognita* dalle quantità *cognite*, con le quali essa si trova combinata. Ora l'*incognita* può trovarsi combinata in tre maniere diverse colle quantità *cognite*:

1.° Per *addizione*, e *sottrazione*, come nell'equazioni

$$x + 5 = 9 - x,$$
$$a + x = b - x;$$

2°. Per *addizione, sottrazione e moltiplicazione*, come nell' equazioni

$$7x - 5 = 12 + 4x,$$
$$ax - b = cx + d;$$

3.° Finalmente per *addizione*, *sottrazione*, *moltiplicazione*, e *divisione*, come nell' equazioni

$$\frac{5x}{3}+8=\frac{11}{12}x+9,$$

$$\frac{ax}{b}+cx-d=\frac{mx}{n}+\frac{p}{q}.$$

Si libera l'*incognita* dalle *addizioni*, e *sottrazioni*, ov' essa entra con delle quantità *cognite*, riunendo in un sol *membro* tutti i *termini* ov' essa si trova; e per questo bisogna saper far passare un *termine* da un *membro* in un altro.

1o. Per esempio, nell' equazione

$$7x-5=12+4x$$

bisogna far passare il *termine* $4x$ dal secondo *membro* nel primo, ed il *termine* -5 dal primo nel secondo. Per questo dobbiamo osservare che, scancellando $+4x$ nel secondo *membro*, si vien questo a diminuire della quantità $4x$, e che bisogna operare la medesima *sottrazione* nel primo *membro*, per conservar l' equaglianza di questi due *membri*: scriverem dunque $-4x$ nel primo *membro*, che diverrà $7x-5-4x$, ed avremo

$$7x-5-4x=12.$$

Scancellar -5 dal primo *membro* vuol dire sopprimere la *sottrazione* indicata di 5 unità, ed in conseguenza vuol dire aumentar questo *membro* di 5 unità; dobbiamo dunque, per conservar l'eguaglianza, aumentar pure il secondo *membro di* 5 unità, ovvero scriver $+5$ in questo *membro*, il quale diventerà $12+5$, e avremo

$$7x-4x=12+5.$$

Ed effettuando le operazioni indicate, ne resulterà l' equazione

$$3x=17.$$

Da questi ragionamenti, che possono applicarsi a qualunque esempio che sia, si vede che scancellando in un *membro* un *termine* affetto dal segno $+$, il quale per conseguenza aumentava questo *membro*, bisogna sottrar questo *termine* dall'altro *membro*, ovvero scriverlo col segno $-$; che al contrario, quando il *termine*, che si scancella, ha il segno $-$, siccome con la sua presenza diminuiva il *membro* dov'egli era, bisogna aumentar l'altro *membro* del medesimo *termine*, ovvero scriverlo in quest'ultimo col segno $+$. Concluderemo da ciò questa regola generale:

Per far passare un termine qualunque d'un equazione da un membro nell'altro, bisogna scancellarlo nel membro ove egli si trova, e scriverlo nell'altro con un segno contrario a quello, ch'esso aveva in principio.

Per metter questa regola in pratica, bisogna fare attenzione che il primo *termine* di ciascun *membro*, quando non è preceduto da alcun segno, s'intende ch'egli abbia il segno $+$. Passando dunque il *termine* cx dell'equazion letterale $ax - b = cx + d$ dal secondo *membro* nel primo, s'avrà

$$ax - b - cx = d;$$

passando in seguito il *termine* $-b$ del primo *membro* nel secondo, verrà

$$ax - cx = d + b.$$

11. Per mezzo della regola precedente si possono primieramente riunire in un solo dei *membri* tutti i *termini* affetti dall'*incognita*, e nell'altro tutte le quantità *cognite*; e sotto questa forma, il *membro*, dove si trova l'*incognita*, può sempre decomporsi in due *fattori*, uno de' quali non contenga che delle quantità *cognite*, e l'altro sia la sola *incognita*.

Questa semplificazione si presenta da se stessa tutte le volte che l'equazion proposta è numerica, e ch'essa non contiene *frazioni*, perchè allora tutti i *termini* affetti dall'*incognita* si riducono a un solo. Se s'avesse, per esempio, $10x+7x-2x=25+7$, effettuando le operazioni indicate su ciascun *membro*, si troverebbe successivamente

$$17x-2x=32,$$
$$15x=32;$$

e siccome $15x$ si decompone nei due *fattori* 15, e x, si avrebbe dunque il *fattore* incognito x dividendo per il *fattore cognito* 15 il numero 32 eguale al prodotto $15x$; d'onde deriva

$$x=\frac{32}{15}.$$

La decomposizione si fa della stessa maniera nell'equazioni letterali simili alla seguente

$$ax=bc;$$

perchè il *termine* ax indica immediatamente il prodotto di a per x; e se ne conclude

$$x=\frac{bc}{a}.$$

Sia adesso l'eqnazione

$$ax-bx+cx=ac-bc,$$

che contiene tre *termini* affetti dall'*incognita*. Poichè ax, bx, cx rappresentano i prodotti respettivi di x per le quantità a, b, c, l'espressione $ax-bx+cx$ tradotta in linguaggio ordinario dà questa frase.

Primieramente da x *preso tante volte, quante unità sono in* a, *togliete tante volte* x, *quante son le unità che sono in* b, *ed aggiungete al restante la medesima quantità* x *tante volte, quante unità sono in* c.

Segue da ciò che in totalità l'*incognita* x si trova presa tante volte, quante unità vi sono nella *differenza* dei numeri a, e b aumentata del numero c, vale a dir tante volte che l'indica il numero $a-b+c$; i due *fattori* del primo *membro* sono per conseguenza $a-b+c$, e x: si ha dunque

$$x = \frac{ac-bc}{a-b+c}.$$

Questo ragionamento, che può applicarsi a qualunque altro esempio, fa vedere che, *dopo la riunione in un sol membro, dei diversi termini contenenti l'incognita, il fattore, che moltiplica quest'incognita, si forma di tutte le quantità, che la moltiplicano isolatamente, riunite coi segni, dai quali esse son precedute; e si ottiene l'incognita dividendo il membro tutto cognito per il fattore, di cui si tratta.*

Dietro a questa regola l'equazione $ax-3x=bc$ dà

$$x = \frac{bc}{a-3}.$$

Parimente l'equazione $x+ax=c-d$ conduce a

$$x = \frac{c-d}{1+a};$$

perchè bisogna osservare che la lettera x essendo sola, debb'essere riguardata come moltiplicata per l'unità. Si vede d'altronde che in $x+ax$, l'incognita si trova contenuta una volta di più che in ax, ed è per conseguenza moltiplicata per $1+a$.

12. È manifesto che se tutti i termini dell'equazione contenessero un fattor comune, si potrebbe sopprimere questo fattore senza turbar l'eguaglianza; poichè non si farebbe che dividere per un mé-

desimo numero tutte le parti spettanti alle due quantità, che si suppongono eguali tra loro.

Sia, per esempio, l'equazione

$$6abx - 9bcd = 12bdx + 15abc.$$

Osservo primieramente che i numeri 6, 9, 12, e 15 son divisibili per 3, e sopprimendo questo fattore, non farò che prendere il terzo di tutte le quantità, che formano l'equazione; avrò dopo questa riduzione,

$$2abx - 3bcd = 4bdx + 5abc.$$

Osservo in seguito che la lettera b, combinata in ciascun termine per via di moltiplicazione, indica un fattor comune a tutti questi termini; sopprimerò anco questa, e verrà

$$2ax - 3cd = 4dx + 5ac.$$

Ed applicando a quest'ultima equazione le regole de' num. 10. e 11., ricaverò successivamente

$$2ax - 4dx = 5ac + 3cd,$$

$$x = \frac{5ac + 3cd}{2a - 4d}.$$

13. Passo adesso all'equazioni, i cui termini hanno dei divisori: si potrebbero applicar ad esse immediatamente le regole precedenti tutte le volte che l'incognita non entra nei denominatori; ma è spesso più semplice ridur tutti i termini allo stesso denominatore, il qual può sopprimersi in seguito.

Sia, per esempio, l'equazione

$$\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}.$$

Osserverò che l'Aritmetica dà delle regole per ridur le frazioni al medesimo denominatore, e per convertire degl'interi in frazioni d'una specie data (*Aritm.* 79. 69.), e trasformerò mercè

queste regole in frazioni del medesimo denominatore tutti i termini dell' equazione proposta.

E cominciando primieramente dalle frazioni, che sono

$$\frac{2x}{3}, \quad \frac{4x}{5}, \quad \frac{5x}{7},$$

le cangerò, per la prima delle citate regole, in

$$\frac{5\times7\times2x}{3\times5\times7}, \quad \frac{3\times7\times4x}{3\times5\times7}, \quad \frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7};$$

dipoi, per convertire gl' interi 4, e 12 in frazioni, altro non si dovrà far che moltiplicargli per il denominatore comune delle frazioni, cioè, per $3\times5\times7$, e si avrà

$$3\times5\times7\times4, \quad 3\times5\times7\times12.$$

Rimettendo in seguito tutti questi termini nell'equazion proposta, essa diverrà

$$\frac{5\times7\times2x}{3\times5\times7}+\frac{3\times5\times7\times4}{3\times5\times7}=\frac{3\times7\times4x}{3\times5\times7}+\frac{3\times5\times7\times12}{3\times5\times7}-\frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7};$$

e si potrà sopprimere il denominatore, poichè non si farà per questo che moltiplicar tutte le sue parti per il denominatore (*Aritm.* 54), il che non può turbar l' eguaglianza: verrà per questa soppressione,

$$5\times7\times2x+3\times5\times7\times4=3\times7\times4x+3\times5\times7\times12-3\times5\times5x,$$

ovvero

$$70x+420=84x+1260-75x;$$

Equazione senza denominatori, dalla qual si ricaverà il valore di x per le regole precedenti.

L' ispezione del resultato qui sopra, come pure l' applicazion delle regole d' Aritmetica precitate, fanno vedere evidentemente che nell' ope-

razione di cui si tratta, *i numeratori di ciascuna frazione debbono esser moltiplicati per il prodotto dei denominatori di tutte l'altre, gl'interi per il prodotto di tutti i denominatori, e che non bisogna tener alcun conto del denominatore comune delle frazioni resultanti.*

L'Equazione $70x+420=84x+1260-75x$ diviene successivamente

$$70x+75x-84x=1260-420$$
$$61x=840$$
$$x=\frac{840}{61}=13\frac{47}{61}.$$

Il medesimo metodo s'applica all'Equazioni letterali, osservando che non si può allor che indicare le moltiplicazioni, che si effettuano quando si tratta di numeri.

Sia, per esempio, l'Equazione

$$\frac{ax}{b}-c=\frac{dx}{e}+\frac{fg}{h};$$

ne dedurremo

$$ehXax-bchXc=bhXdx+beXfg;$$

resultato, che può scriversi più semplicemente ponendo, conforme alla convenzione stabilita nel n°.7., di seguito gli uni agli altri, senza interposizione di segno, i fattori di ciascun prodotto, e invertendo l'ordine delle moltiplicazioni per conservar l'ordine alfabetico, più facile nell'enunciazion delle lettere: così verrà

$$aehx-bcehxx=bdhx+befg;$$

dal che ne concluderemo

$$aehx-bdhx=befg+bceh,$$
$$x=\frac{befg+bceh}{aeh-bdh}.$$

14. Benchè non si possa dare alcuna regola

generale, e precisa per formar l'Equazione relativa a un Problema qualunque, esiste frattanto un precetto, la cui applicazion ben intesa non mancherà di condurre al fine proposto. Ecco questo precetto.

Indicare col mezzo dei segni algebrici sulle quantità cognite rappresentate tanto da numeri quanto da lettere, e sulle quantità incognite rappresentate sempre da lettere, i medesimi ragionamenti, e le medesime operazioni, che bisognerebbe eseguire per verificare i valori dell' incognite s' essi fossero dati.

Per farne uso, bisogna primieramente determinare con diligenza quali sono le operazioni, che l'enunciato del Problema contiene, tanto esplicitamente, che implicitamente; ma in questo appunto precisamente consiste la difficoltà di *mettere in equazione* un Problema proposto.

Eeco alcuni esempj affin di mostrare l'applicazione del precetto sopraccitato. Ho scelti i due primi fra i Problemi risoluti in Aritmetica, ad oggetto di por sott'occhio la facilità che apporta la scrittura algebrica riguardo allo sviluppo degli enunciati.

1.° *Sieno due fontane, di cui la prima versando sola per 2 ore* $\frac{1}{2}$ *riempie un certo bacino, e la seconda riempie il bacino medesimo versando sola per 3 ore* $\frac{3}{4}$*; quanto tempo sarà necessario perchè lo stesso bacino sia ripieno dalle due fontane versando insieme.*

Se l'ultimo tempo fosse dato, si verificherebbe il medesimo calcolando le quantità d' acqua versate da ciascuna fontana, e riunendo i resultati ci assicureremmo ch' esse compongono la totalità dell' acqua, che può contenere il bacino.

Ad effetto di formar l'Equazione, designe-

remo per x il tempo incognito, ed indicheremo sopra x le operazioni enunciate di sopra; ma affin di render la soluzione indipendente dai numeri dati, e parimente d'abbreviare l'espressione di quelli dell'enunciato, che son frazionarj, si rappresenteranno ancor questi per via di lettere; laonde potremo scrivere a in vece di 2 ore $\frac{1}{2}$, e b in vece di 3 ore $\frac{3}{4}$.

Ciò posto, prendendo, come in Aritmetica, la capacità del bacino per unità, si vedrà che

La prima fontana, che lo riempie sola in un numero a d'ore, verserà in un'ora una quantità d'acqua espressa dalla frazione $\frac{1}{a}$; e per conseguenza essa fornirà in un numero x d'ore la quantità $x \times \frac{1}{a}$, ovvero $\frac{x}{a}$ (*Aritm.* 53.).

La seconda fontana, che riempie il medesimo bacino in b ore, versa in un'ora una quantità d'acqua espressa dalla frazione $\frac{1}{b}$; e per conseguenza in un numero x d'ore essa fornirà la quantità $x \times \frac{1}{b}$, ovvero $\frac{x}{b}$.

La quantità totale d'acqua fornita dalle due fontane insieme sarà dunque

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b};$$

e questa quantità dovendo eguagliar quella, che contiene il bacino, e ch'è stata presa per unità, avrem finalmente l'equazione,

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1.$$

Questa equazione, trattata con le regole precedenti, conduce a

$$b\,x + a\,x = a\,b,$$

$$x = \frac{a\,b}{b + a}.$$

L'ultima formula dà, per risolvere tutti i casi del Problema proposto, questa regola semplicissima:

Dividere il prodotto dei numeri, ch'esprimono il tempo, che impiega ciascuna fontana in particolare a riempire il bacino, per la somma di questi numeri; il quoziente esprimerà il tempo, che bisognerà alle due fontane per riempirlo simultaneamente.

Applicando questa regola ai numeri dell'enunciato, si ha

$$2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{15}{4} = \frac{75}{8},$$

$$2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} = \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{20}{8} + \frac{30}{8} = \frac{50}{8},$$

di dove nasce

$$x = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}.$$

2.° *Sia a un numero da dividersi in tre parti, che abbian tra loro i medesimi rapporti che i numeri dati* m, n, *e* p.

E' visibile che la verificazion del Problema si farebbe come segue:

Indicando per x la 1.ª parte, si avrà

$$m : n :: x : \text{la } 2^{a} \text{ parte} = \frac{n\,x}{m} \text{ (}\textit{Aritm.}\text{ 116.)},$$

$$m : p :: x : \text{la } 3^{a} \text{ parte} = \frac{p\,x}{m};$$

e riunendo le tre parti ,troveremmo il numero da dividersi: avremo dunque l'equazione

$$x + \frac{n\,x}{m} + \frac{p\,x}{m} = a\,.$$

Riducendo tutti i suoi termini al denominatore m, essa diverrà

$$m\,x + n\,x + p\,x = a\,m\,,$$

e ricaveremo

$$x = \frac{a\,m}{m + n + p}\,.$$

Questo resultato non è che la traduzione algebrica della *Regola di società* (*Aritm.* 124.); poichè, riguardando i numeri m, n, p come esprimenti i capitali dei mercanti, $m + n + p$ è il capital totale, a il frutto da dividersi, e l'espressione

$$x = \frac{m\,a}{m + n + p}$$

indica che *una parte si ottiene moltiplicando il capitale corrispondente per il frutto totale, e dividendo il prodotto per la somma dei capitali:* ciò conduce alla proporzione *il capitale totale: ad un capitale parziale :: il frutto totale : al frutto parziale.*

15. La formazione dell'Equazion del Problema seguente esige alcune osservazioni speciali, che non si sono ancor presentate.

Un pescatore, affine d'incoraggire il suo figlio, gli promette 5 *centesimi per ciascun tiro di rete, nel quale egli avrà preso del pesce; ma esso ancora restituirà a suo padre* 3 *centesimi per ciascun tiro infruttuoso. Dopo* 12 *tiri di rete il padre, ed il figlio fanno il lor conto. Il primo*

dee al secondo 28 *centesimi: quanti tiri di rete avrà egli avuti felici?*

Se si rappresenta il numero di questi tiri o getti di rete per x, il numero dei tiri infruttuosi sarà $12 - x$; e, se questi numeri fossero dati, si verificherebbero moltiplicando 5 centesimi per il primo, onde ottenere ciò che il padre dee dare al figlio, e 3 centesimi per il secondo, ond'avere ciò che il figlio debbe restituire al padre: il primo numero dovrebbe sorpassare il seeondo dei 28 centesimi, che il padre debbe al suo figlio.

Si avrà per il primo numero x volte 5 centesimi, ovvero $5x$. A riguardo del secondo numero si presenta una difficoltà: come mai può ottenersi il prodotto di 3 per $12 - x$? Se, in vece di x, s'avesse un numero dato, effettuerebbesi prima la sottrazione indicata, poi si moltiplicherebbe 3 per il resto; ma per adesso la cosa non è possibile, e bisogna procurare d'effettuar la moltiplicazione avanti la sottrazione, o almeno di ridurre il resultato a una collezione di termini algebrici simili a quelli, che contengono l'equazioni, che si sanno risolvere.

Con un poco d'attenzione si fa palese che, prendendo 12 volte il numero 3, si ripete il 3 tante volte di più quante son le unità, che contiene il numero x, del quale si dovea prima diminuire il moltiplicatore 12; di maniera che il vero prodotto sarà

36 diminuito di 3 preso x volte, o di $3x$, ovvero

$$36 - 3x.$$

Questa conclusion può verificarsi facilmente dando a x dei valori numerici. Se, per esempio, x fosse eguale a 8, si avrebbe 3 da prendersi 12

volte — 8 volte; e, se si trascurasse — 8 volte, si metterebbe nel resultato 8 volte di più il numero 3; il vero prodotto sarà dunque

$$3 \times 12 - 3 \times 8 = 36 - 24 = 12 .$$

Tal resultato si accorda con quello, che s' ottiene togliendo primieramente 8 da 12; perchè allora

$$12 - 8 = 4, \quad \text{e} \quad 3 \times 4 = 12 .$$

Ciò posto, poichè ciò, che il padre debbe a suo figlio, è espresso por $5x$, e quello, che il figlio dee a suo padre, vien espresso da $36 - 3x$, bisogna che il secondo numero tolto dal primo dia per resto 28; ma quì ancora nasce una nuova difficoltà: come togliere $36 - 3x$ da $5x$, senza aver prima sottratto $3x$ da 36?

Si elude questa difficoltà osservando che, se si trascurasse il termine $-3x$, e si togliesse da $5x$ il numero 36 tutt' intero, si sarebbe tolto necessariamente $3x$ di più; poichè non è che dopo d'avere diminuito 36 di $3x$, che bisogna toglier quest' ultimo da $5x$. Così la differenza $5x - 36$ debb' essere aumentata di $3x$ per formare la quantità, che dee restare dopo che abbiam tolto da $5x$ il numero espresso da $36 - 3x$: questa quantità sarà dunque

$$5x - 36 + 3x ;$$

e si avrà l' equazione

$$5x - 36 + 3x = 28 ;$$

che successivamente riducesi a

$$8x - 36 = 28 ,$$
$$8x = 28 + 36 ,$$
$$8x = 64 ,$$
$$x = \frac{64}{8} = 8 .$$

Son dunque 8 i tiri di rete felici, e 4 per conseguenza gl' infruttuosi.

Infatti 8 tiri a 5 centesimi l' uno danno 40 cent.
4 tiri a 3 danno 12

differenza 28,

come l' esige l' enunciato del Poblema.

Se si volesse rendere generale la soluzione, si rappresenterebbe per a la somma, che il padre dà a suo figlio per ciascun tiro di rete felice, per b ciò che il figlio rende a suo padre per ciascun tiro di rete infruttuoso, per c il numero totale dei getti di rete, e per d ciò che il padre debbe a suo figlio dopo questo numero di tiri. E designando sempre per x il numero de' tiri felici, $c - x$ sarà quello de' tiri infruttuosi; ciascun tiro della prima specie portando al figlio una somma a, x tiri porteranno $a \times x$ ovvero $a\,x$, ed i tiri infruttuosi porteranno al padre la somma b moltiplicata per il numero $c - x$.

Il ragionamento, col quale abbiamo trovato tutte le parti, di cui si compone il prodotto di $36 - x$ per 3, si applica egualmente al caso generale. Se si trascura primieramente $-x$ per formare il prodotto $b\,c$ di b per c tutto intero, la somma b sarà ripetuta x volte di più, e per conseguenza il vero prodotto sarà $b\,c - b\,x$

Per togliere questo prodotto dalla somma $a\,x$, bisogna osservare ancora, come nell' esempio numerico, che se si togliesse la quantità $b\,c$ intera, si toglierebbe di più la quantità $b\,x$, di cui la prima debb' esser avanti diminuita; e per conseguenza il vero resto non è solamente $a\,x - b\,c$, ma $a\,x - b\,c + b\,x$.

Questo resto dovendo essere eguale a d, l' equazion del Problema sarà

$$a\,x - bc + b\,x = d,$$

e darà

$$a\,x + b\,x = d + b\,c,$$

$$x = \frac{d + b\,c}{a + b}.$$

Siffatta formula generale indicando quali operazioni bisogna fare sopra i numeri a, b, c, d, per ottenere l'incognita x, possiamo tradurla in Regola, ovvero scrivere in luogo delle lettere a, b, c, d i numeri dati: l'ultima operazione è ciò che si dice *sostituire* i valori dei dati, o sivvero *metter la formula in numeri*. Applicando quelli dell'esempio citato, viene

$$x = \frac{28 + 3 \times 12}{5 + 3};$$

ed effettuando poscia le operazioni indicate, si ha, come sopra,

$$x = \frac{28 + 36}{8} = \frac{64}{8} = 8.$$

Metodi per effettuare, quant'è possibile, le operazioni indicate sulle quantità rappresentate da lettere.

16. Il Problema precedente ha fatto vedere che bisognava, per certi casi, decomporre in moltiplicazioni parziali una moltiplicazione indicata sulla somma, o differenza di più quantità; e nel n.° 11. abbiamo fatto precisamente il contrario, decomponendo la quantità $a\,x - b\,x + c\,x$, che rappresenta il resultato di più moltiplicazioni seguite da addizioni, e da sottrazioni, nei due fattori $a - b + c$, e x, che non indicano che una sola moltiplicazione preceduta da addizione, e sottrazinne. I ragionamenti, dei quali ci siamo serviti in queste due circostanze, possono esser ridotti a regole; e sulle quantità rappresentate da lettere resulteran delle operazioni, che si son

chiamate *moltiplicazioni*, e *divisioni algebriche*, per l' analogia ch' esse hanno con le operazioni dell' Aritmetica, che portano i medesimi nomi.

Abbiam concepite, in virtù della medesima analogia, due operazioni, che portano i nomi d'*addizione*, e *sottrazione*, nelle quali mirasi al fine di riunire in una sola più espressioni algebriche, o di toglierle l' una dall' altra; ma quest' operazioni, come le precedenti, diverse da quelle dell' Aritmetica in ciò che i lor resultati non sono il più spesso che dell' indicazioni d' operazioni da effettuarsi, non presentano se non che una trasformazione d' operazioni primitivamente indicate in altre, che producono il medesimo effetto. Succede soltanto che si semplicizzano l'espressioni, o si dà loro una forma propria a manifestare le condizioni, che deggion essere soddisfatte.

Per ispiegar quest' operazioni, si chiamano quantità *monomie* quelle, che non hanno che un solo termine, come $+2a$, $-3ab$, ec.; *binomie* quelle, che n' hanno due, come $a+b$, $a-b$, $5a-2x$, ec; *trinomie* quelle, che n' hanno tre; *quadrinomie* quelle che n' hanno quattro; ed in generale *polinomie* le quantità composte di più termini. È bene osservare che i monomj si chiamano ancora quantità *incomplesse*, ed i polinomj quantità *complesse*.

Dell' addizione delle quantità algbriche.

17. L' addizione delle quantità monomie si fa unendole col segno $+$; così b sommato con a s' indica con $a+b$. Ma quando ci progonghiamo di sommare insieme dell' espressioni algebriche, abbiamo nel medesimo tempo per fine di semplicizzare il resultato con ridurlo al più piccol nu-

mero di termini possibile mediante la riunione di più di questi termini in uno solo.

Questa riunione è quella, ch'è stata effettuata nei num.i 2., e 5., riducendo la quantità $x + x$ a $2x$, la quantità $x + x + x$ a $3x$. Essa non può aver luogo che a riguardo delle quantità espresse dalle medesime lettere, le quali quantità si chiamano per questa ragione *quantità simili*. Si riguarda la quantità letterale come un' unità, che si trova ripetuta un certo numero di volte; così le quantità $2a$, e $3a$, considerate come due, o tre unità d'una specie particolare, formano, per la loro addizione, $5a$, ovvero 5 unità della medesima specie. Parimente $4ab$, e $5ab$ formano $9ab$.

In questo caso l'addizione si opera sopra le cifre, che precedono la quantità letterale, e che indicano quante volte essa è ripetuta. Queste cifre si chiamano *coefficienti*. Il *coefficiente* è dunque il moltiplicatore della quantità, davanti la quale è posto; e bisogna ben rammentarsi che quando esso non è scritto, egli è tacitamente eguale all'unità; perchè $1a$ è la stessa cosa che a.

18. Allorchè si tratta di sommare delle quantità qualunque, come

$$4a + 5b \quad , \text{ e } \quad 2c + 3d,$$

il totale debb' essere evidentemente composto di tutte le parti unite insieme; bisogna dunque scrivere

$$4a + 5b + 2c + 3d:$$

Se al contrario si avessero

$$4a + 5b \quad , \text{ o } \quad 2c - 3d,$$

bisognerebbe, nella lor somma, scrivere col segno $-$, o indicar come sottrattiva la quantità $3d$, che dovendo esser tolta da $2c$, diminuirebbe ne-

cessariamente d'altrettanto la somma, che formerebbesi riunendo $2c$ con la prima delle quantità proposte; laonde si avrebbe

$$4a + 5b + 2c - 3d.$$

Questi due esempj fan manifesto che *l'addizione algebrica dei polinomj si effettua scrivendo in seguito le une dell'altre, con i lor segni, le quantità che bisogna sommare, e osservando che i termini, i quali non son preceduti da alcun segno, s'intende che abbiano il segno* $+$.

L'operazione spiegata quì sopra non è, a parlar propriamente, che un indicazione, mediante la quale la somma di due quantità complesse è ridotta all'addizione, e alla sottrazione d'un certo numero di quantità monomie; ma se l'espressioni da aggiungersi conterranno de' termini *simili*, si potranno riunir questi termini operando immediatamente su i lor coefficienti.

Sieno, per esempio, l'espressioni

$$4a + 9b - 2c,$$
$$2a - 3c + 4d,$$
$$7b + c - e;$$

la somma indicata sarà, dietro alla regola antecedente,

$$4a + 9b - 2c + 2a - 3c + 4d + 7b + c - e.$$

Ma i termini $4a$, e $+2a$ essendo formati di quantità *simili*, si riuniscono in uno solo eguale a $6a$.

Parimente i termini $+9b$, $+7b$ danno $16b$.

I termini $-2c$, e $-3c$, ambedue sottrattivi, producono nel totale il medesimo effetto che la sottrazione d'una quantità eguale alla loro somma, e vale a dire, che la sottrazione di $5c$; e siccome, in virtù del termine $+c$, dovremo al contrario aggiunger c, resterà solamente da sottrar $4c$.

La somma dell'espressioni proposte sarà dunque ridotta a

$$6a + 16b - 4c + 4d - e.$$

19. L'ultima operazione praticata quì sopra, e per la qual si riuniscono tutti i termini *simili* in uno solo, qualunque segno essi abbiano, chiamasi *riduzione*. *Essa s'effettua facendo la somma delle quantità simili affette dal segno +, quella delle quantità simili affette dal segno —; poi togliendo la più piccola di queste due somme dalla più grande, e dando al resto il segno della più grande.*

E da osservarsi che la riduzione si applica a tutte le operazioni algebriche.

Ecco, per esercitare il Lettore, alcuni esempj d'addizioni coi lor resultati.

1.° Sommare le quantità

$$\begin{array}{l} 7m + 3n - 14p + 17r \\ 3a + 9n - 11m + 2r \\ 5p - 4m + 8n \\ 11n - 2b - m - r + s \end{array};$$

resultato $7m + 3n - 14p + 17r + 3a + 9n - 11m + 2r + 5p - 4m + 8n + 11n - 2b - m - r + s$.

Facendo la riduzione, quest'ultima quantità si cangia nella seguente

$$-9m + 31n - 9p + 18r + 3a - 2b + s,$$

ovvero $31n - 9m - 9p + 18r + 3a - 2b + s$

cominciando da un termine, che abbia implicito il segno +.

2.° Sommare le quantità.

$$\begin{array}{l} 11bc + 4ad - 8ac + 5cd \\ 8ac + 7bc - 2ad + 4mn \\ 2cd - 3ab + 5ac + an \\ 9an - 2bc - 2ad + 5cd \end{array};$$

resultato $11bc+4ad-8ac+5cd+8ac+7bc-2ad$
$+4mn+2cd-3ab+5ac+an+9an-2bc$
$-2ad+5cd$.

E riducendo questa quantità, essa diviene
$16bc+5ac+12cd+4mn-3ab+10an$.

Della sottrazione delle quantità algebriche.

20. La sottrazion de' monomj s' indica, come abbiam convenuto, ponendo il segno — tra la quantità da sottrarsi, e quella, da cui si sottrae:

b sottratto da a si scrive $a-b$.

Allorchè le quantità son *simili*, la sottrazione si opera immediatamente sopra i lor *coefficienti*.

Se da $5a$ si toglie $3a$, vien di resto $2a$.

A riguardo della sottrazione de' polinomj bisogna distinguer due casi: 1.° Se la quantità da sottrarsi ha tutti i suoi termini affetti dal segno +, bisogna evidentemente darle il segno —, poichè dobbiam togliere successivamente tutte le parti della quantità da sottrarsi.

Se, per esempio, da $5a-9b+2c$, si vuol togliere $2d+3e+4f$, bisogna scrivere

$$5a-9b+2c-2d-3e-4f.$$

2.° Se la quantità da sottrarsi ha dei termini affetti dal segno —, bisogna dare a questi termini il segno +. Infatti, se dalla quantità a si volesse togliere $b-c$, e si scrivesse primieramente $a-b$, avremmo diminuito a dell' intera quantità b; ma la sottrazione non dovea effettuarsi che dopo aver prima diminuito b della quantità c: abbiamo dunque tolto di più questa quantità, che bisogna per conseguenza restituire col segno +; il che darà per vero resultato

$$a-b+c.$$

Questo ragionamento, che si può applicare

a tutti i casi consimili, fa vedere che il segno — di c ha dovuto esser cangiato in +; e ritornando al resultato precedente, concluderemo che *la sottrazione delle quantità algebriche si effettua scrivendo in seguito della quantità, da cui se ne vuol sottrarre un' altra, quest'altra dopo d'aver cangiati i segni + in —, e* viceversa, *i segni — in +.*

Allorchè abbiamo scritto il resultato, che somministra primieramente la regola enunciata quì sopra, si fanno, se vi abbian luogo, delle riduzioni conformi al precetto del n.° 19., come lo vedremo negli esempj seguenti.

1.° Sottrarre da $17a+2m-9b-4c+23d$
la quantità . . . . $51a-27b+11c-4d$

Resultato . . . . . $17a+2m-9b-4c+23d$
$-51a+27b-11c+4d.$

E seguendo la riduzione, questa quantità diviene
$-34a+2m+18b-15c+27d,$
ovvero
$2m-34a+18b-15c+27d.$

2.° Sottrarre da $5ac-8ab+9bc-4am$
la quantità . . . . . $8am-2ab+11ac-7cd.$

Resultato $5ac-8ab+9bc-4am$
$-8am+2ab-11ac+7cd.$

Effettuando la riduzione, proviene
$-6ac-6ab+9bc-12am+7cd,$
o sivvero $9bc-6ac-6ab-12am+7cd.$

Della moltiplicazione delle quantità algebriche.

21. Fino a tanto che non si consideran nelle lettere se non i valori numerici delle quantità, delle quali esse tengono il posto, dobbiamo formarci della moltiplicazione algebrica la medesi-

ma idea che della moltiplicazione aritmetica (*Aritm.* 21. 66.). Così *moltiplicare* a *per* b *vuol dire comporre con la quantità rappresentata da* a *un' altra quantità nella stessa maniera che la quantità rappresentata da* b *lo è con l' unità*.

Abbiamo di già fatto conoscere nei numeri 2., e 7. i segni, dei quali abbiam convenuto far uso per indicar la moltiplicazione; ed il prodotto di *a* per *b* si scriverà in conseguenza tanto per $a \times b$, che per $a \,.\, b$, ovvero finalmente per $a\, b$.

Abbiamo assai di sovente bisogno d' indicar più moltiplicazioni successive, come quella di *a* per *b*, dipoi del prodotto $a\, b$ per *c*, quindi di quest' ultimo per *d*, e così discorrendo. In questo caso si rende evidente che l' ultimo resultato è un numero, il quale ha per fattori i numeri *a*, *b*, *c*, *d* (*Aritm.* 22.); e, generalizzando l' ultima delle convenzioni richiamate quì sopra, *s' indica questo prodotto scrivendo in seguito l' un dell' altro, e senza alcuna frapposizione di segno, i fattori, dai quali esso è formato*. Abbiamo in questa maniera l' espressione $a\, b\, c\, d$.

Reciprocamente, qualunque espression, che sia tale come $a\, b\, c\, d$, formata cioè da più lettere scritte immediatamente in seguito l' une all' altre, esprime sempre il prodotto dei numeri rappresentati da queste lettere.

Ho digià fatto tacitamente uso di queste convenzioni, nelle quali i coefficienti numerici son pure compresi, poichè essi sono apertamente fattori della quantità proposta. Difatti, $15\, a\, b\, c\, d$, esprimendo la quantità $a\, b\, c\, d$ presa 15 volte, esprime ancora il prodotto dei cinque fattori 15, *a*, *b*, *c*, *d*.

22. Segue da ciò che per indicare la molti-

plicazione di più monomj, tali come $4abc$, $5def$, $3mn$, bisogna scrivere queste quantità in seguito l'une dell'altre, senza interposizion di segno, e verrà

$$4abc\,5def\,3mn;$$

ma siccome abbiam fatto vedere in Aritmetica, n.° 82., che si poteva invertere l'ordine dei fattori d'un prodotto senza che il valore di questo prodotto cangiasse, si profitta di tal circostanza per avvicinare i fattori numerici, la moltiplicazione de' quali può effettuarsi per le regole dell'Aritmetica: si concepisce dunque il prodotto come indicato nell' ordine 4. 5. 3 a b c d e f m n; ed effettuando la moltiplicazione de' numeri 4, 5, 3, avremo solamente.

$$60abcdefmn\ (*).$$

23. L'espression d'un prodotto si abbrevia molto allorchè egli contiene dei fattori eguali. In vece di scriver più volte di seguito la lettera, che rappresenta uno di questi fattori eguali, non si scrive che una sol volta, e *s'indica con un numero quante volte essa avrebbe dovuto scriversi come fattore;* ma perchè questo numero indica

---

(*) L'uso dei simboli algebrici abbreviando molto la prova della presente proposizione, ho creduto doverla quì richiamare per mezzo di questi simboli.

Se si scrive il prodotto $abcdef$ come segue, cioè $abc\times de\times f$, e si cambi l'ordine dei due fattori del prodotto de per avere ed (*Aritm.* 27.), verrà $abc\times ed\times f$, ovvero, $abcedf$. È evidente che potremo con delle nuove decomposizioni far qualunque cangiamento, che si vorrà, nell'ordine de' fattori del prodotto notato.

delle moltiplicazioni successive, egli debb'essere segnalatamente distinto dal *coefficiente*, il quale non indica che addizioni: ecco perchè si pone alla destra della lettera, ed un poco al di sopra, laddove che il coefficiente è sempre scritto a sinistra della lettera, e sulla medesima linea.

Dopo convenzioni siffatte il prodottodi a per a, che sarebbe indicato, secondo il numero 21., per $a\,a$, diviene a^2. Il 2 superiore fa vedere che il numero rappresentato dalla lettera a è due volte fattore nell' espressione proposta, e che non bisogna in conseguenza confonderlo con $2\,a$, che non è altro se non il compendio di $a+a$. Per ben concepire l'errore, che si commetterebbe prendendo una espressione per l' altra, serve sostituire dei numeri alle lettere. Se si avesse, per esempio, $a=5$, $2\,a$ diverrebbe $2.\,5=10$, e $a^2=a\times a=5.\,5=25$.

Continuando l' istesso metodo, si vedrà che per esprimere un prodotto, nel quale a fosse tre volte fattore, bisognerebbe scrivere a^3 in vece di $a\,a\,a$; parimente a^5 rappresenta un prodotto, nel quale a è cinque volte fattorc, ovvero equivalente ad $a\,a\,a\,a\,a$.

24. I prodotti formati così da moltiplicazioni successive d' una stessa quantità son chiamati in generale *potenze* di questa medesima quantità.

La quantità stessa, o sivvero a si chiama la prima potenza.

La quantità moltiplicata per se medesima, ovvero $a\,a$, o a^2, è la seconda potenza, che chiamasi ancora il *quadrato*.

La quantità moltiplicata due volte di segui-

to per se stessa, o aaa, oppure a^3, è la terza potenza, che si chiama ancora *cubo* (*).

In generale una potenza qualunque s'esprime per il numero dei fattori eguali, dai quali essa è formata: a^5, oppure $aaaaa$, è la quinta potenza di a.

Per mostrare l'applicazione di queste denominazioni, prenderò il numaro 3, ed avrò

1.ª potenza 3
2.ª . . . . . 3. 3 = 9
3.ª . . . . . 3. 3. 3 = 9. 3 = 27
4.ª . . . . 3. 3. 3. 3 = 27. 3 = 81
5.ª . . . 3. 3. 3. 3. 3 = 81. 3 = 243.

Il numero, ch'esprime la potenza d'un altro, si chiama *esponente* dell'ultimo.

L'esponente, allorchè è eguale all'unità, non si scrive: a è la stessa cosa che a^1.

Si fa chiaro da ciò, che precede che, *per formare una potenza d'un numero, bisogna moltiplicar questo numero per se stesso una volta di meno che non vi sono unità nell'esponente della potenza*.

25. Poichè l'esponente indica il numero dei fattori eguali, che formano l'espressione, di cui egli fa parte, e che il prodotto di due quantità dee aver per fattori tutti quelli, che forman ciascuna di queste quantità, ne segue che l'espressione a^5, nella quale a è 5 volte fattore, moltiplicata per l'espressione a^3, nella quale a è 3

(*) Le denominazioni di *quadrato*, e di *cubo* dipendono da considerazioni geometriche, e rompendo l'uniformità del linguaggio dei prodotti formati da fattori eguali, sono improprissime in Algebra; ma a causa della lor brevità s'impiegano di frequente.

volte fattore, dee dare un prodotto, nel quale a sia 8 volte fattore, ed in conseguenza espresso per a^8, e che in generale *il prodotto di due potenze del medesimo numero dee avere per esponente la somma di quelli del moltiplicando, e del moltiplicatore*.

26. Segue da ciò che *quando due monomj hanno delle lettere comuni, si può abbreviar l'espressione del prodotto di queste quantità sommando insieme gli esponenti delle lettere simili del moltiplicando, e del moltiplicatore*.

Per esempio, l'espressione del prodotto delle quantità a^2b^3c, ed $a^4b^5c^2d$, che sarebbe $a^2b^3c\,a^4b^5c^2d$ seguendo le convenzioni del n.° 21., si abbrevia riunendo i fattori espressi colla medesima lettera; il che dà

$$a^2\,a^4\,b^3\,b^5\,c\,c^2\,d,$$

d'onde concludesi

$$a^6\,b^8\,c^3\,d,$$

scrivendo

a^6 in vece di $a^2\ a^4$
b^8 in vece di $b^3\ b^5$
c^3 in vece di $c\,c^2$, ovvero di $c^1\ c^2$.

27. Nella stessa maniera che si distinguono le potenze dal numero de' fattori eguali, da cui esse sono formate, si classan pure i prodotti qualunque per il numero dei fattori semplici, o *primi*, che gli formano; e darò a queste classi il nome di *gradi*. Il prodotto $a^2\ b^3\ c$ sarà, per esempio del 6.° grado, perchè contiene 6 fattori semplici, cioè, 2 fattori a, 3 fattori b, e 1 fattore c. E' evidente che i fattori a, b, e c riguardati quì come *primi*, non lo son che riguardo all'Algebra, la qual non permette di decomporli; ma essi possono rappre-

sentare d'altronde de' numeri composti: non si tratta adesso che dello stato lor generale (*).

I coefficienti espressi in numeri non si contano nella considerazione del grado delle quantità algebriche; non si ha riguardo che alle lettere.

È manifesto (21. 25.) che quando si moltiplican due monomj l'uno per l'altro, il numero, ch' esprime il grado del prodotto, è la somma di quelli, che esprimono il grado di ciascun di questi monomj.

28. La moltiplicazione delle quantità complesse si riduce a quella delle quantità monomie, considerando separatamente ciascun termine del moltiplicando, e del moltiplicatore nello stesso modo che nell' Aritmetica s' opera in particolare sopra ciascuna cifra dei numeri, che ci proponghiam di moltiplicare (*Aritm.* 33.); la riunione de' prodotti parziali compone il prodotto totale: ma l'Algebra presenta una circostanza di più che non s' incontra nei numeri. Questi non hanno termini da togliere, ovvero parti sottrattive; le unità, diecine, centinaja, ec., che gli compongono,

---

(*) Per una conseguenza dell' analogia indicata nella *Nota* della pagina 42. si chiama comunemente *dimensione* ciò ch' io chiamo *grado*. L' espressione riportata quì sopra avrebbe, nel linguaggio ordinario, 6 dimensioni. Quest' esempio prova bene l' assurdità dell' antica nomenclatura, stabilita sopra ciò che i prodotti di 2, o di 3 fattori misurano l' aree delle superficie, o i volumi dei corpi; quantità, che han respettivamente due, o tre dimensioni: ma passato questo termine, la corrispondenza tra l' espressioni algebriche, e le figure geometriche cessa, poichè l' estensione non può aver mai più di tre dimensioni.

son sempre sommate tra loro, ed allora è evidente che il prodotto totale dee formarsi dalla somma dei prodotti di ciascuna parte del moltiplicando per ciascuna parte del moltiplicatore.

Lo stesso succede quando si tratta d' espressioni letterali, di cui tutti i termini son riuniti tra loro col segno $+$.

Il prodotto di $a + b$
moltiplicato per c
è $\overline{ac + bc}$,

e si ottiene moltiplicando ciascuna parte del moltiplicando per il moltiplicatore, ed aggiungendo i due prodotti parziali ac, e bc. Se il moltiplicando contenesse più di due parti, l' operazione sarebbe sempre la stessa.

Allorchè il moltiplicatore è la somma di più termini, è visibile che il prodotto si compone della somma de' prodotti del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore.

Il prodotto di $a + b$
moltiplicato per $c + d$
$\overline{ac + bc}$
è $+ad + bd$;

perchè moltiplicando primieramente $a + b$ per c, s' ottiene $ac + bc$; poi moltiplicando $a + b$ per il secondo termine d del moltiplicatore, si trova $ad + bd$, e la somma di questi due resultati dà $ac + bc + ad + bd$ per il prodotto totale.

29. Allorchè il moltiplicando contiene delle parti sottrattive, i prodotti di queste parti per il moltiplicatore deggion esser tolti dagli altri, o vale a dire, deggion essere preceduti dal segno $-$. Per esempio,

il prodotto di $a - b$
moltiplicato per c
è $\overline{ac - bc}$;

perchè ogni volta che prenderemo tutta intera la quantità a che avrebbe dovuto essere diminuita di b avanti la moltiplicazione, prenderemo di più la quantità b; il prodotto ac, nel quale a intera è presa tante volte quante l'indica il numero c, sorpasserà per conseguenza il prodotto cercato della quantità b presa tante volte quante l'indica il numero c, ovvero del prodotto bc: bisognerà dunque toglier bc da ac, il che darà, come quì sopra,

$$ac - bc.$$

Lo stesso ragionamento s'applicherà a ciascuna delle parti sottrattive del moltiplicando, qualunque ne fosse il numero, e qualunque fosse quello dei termini del moltiplicatore, purchè essi fossero tutti affetti dal segno $+$. Si vede da questi esempj che i termini del moltiplicando affetti dal segno $+$ danno un prodotto parziale affetto dal segno $+$, laddove quelli, che sono affetti dal segno $-$, ne dann' uno affetto dal segno $-$. Segue da ciò che *quando il moltiplicatore parziale ha il segno* $+$, *il prodotto parziale ha il medesimo segno del moltiplicando parziale.*

3o. Il contrario ha luogo quando il moltiplicatore contiene delle parti sottrattive; i prodotti formati da queste parti debbon esser presi con un segno contrario a quello, ch' essi averebbero stando alla regola precedente. Resteremo di ciò convinti dall' esempio seguente.

Sia il moltiplicando $a - b$
il moltiplicatore $c - d$

$$\overline{\begin{array}{l} ac - bc \\ -ad + bd \end{array}}$$

il prodotto sarà ;

perchè il prodotto del moltiplicando per il primo termine *a* del moltiplicatore sarà, in virtù dell' esempio precedente, $ac-bc$; ma, prendendo *c* tutto intero per moltiplicatore, in vece di *c* diminuito di *d*, si prende la quantità $a-b$ tante volte di più quante l' indica il numero *d*; così il prodotto $ac-bc$ sorpassa quel, che si cerca, del prodotto di $a-b$ per *d*. Ora, quest' ultimo è, per ciò che precede, $ad-bd$; ed affine di toglierlo dal primo bisogna cangiarne i segni (20.): avremo dunque $ac-bc-ad+bd$ per il resultato richiesto.

31. Riepilogando le conseguenze degli esempj quì sopra, concluderemo *che la moltiplicazione de' polinomj s' effettua moltiplicando successivamente, secondo le regole date pei monomj* (num.i 21. e 26.) *tutti i termini del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, e avvertendo che, se il moltiplicatore parziale ha il segno* +, *il prodotto parziale dee avere il medesimo segno del moltiplicando parziale, ed il segno contrario se il moltiplicatore parziale ha il segno* —.

Se si sviluppano i differenti casi di quest' ultima regola, troveremo,

1.° Che un termine, il quale ha il segno +, moltiplicato per un termine, che ha il segno +, dà un prodotto, che ha il segno +.

2.° Che un termine, il quale ha il segno —, moltiplicato per un termine, che ha il segno +, dà un prodotto, che ha il segno —.

3.° Che un termine, il quale ha il segno +, moltiplicato per un termine, che ha il segno —, dà un prodotto, che ha il segno —.

4.° Che finalmente un termine, il quale ha il segno —, moltiplicato per un termine, che ha il segno —, dà un prodotto, che ha il segno +.

Questa Regola fa vedere che *quando il moltiplicando, ed il moltiplicatore parziali hanno il medesimo segno, il prodotto ha il segno* +, *e che, s' essi hanno dei segni differenti, il prodotto ha il segno* —.

Affine di facilitare la pratica della moltiplicazione dei polinomj, ecco la recapitolazion delle regole, che bisogna seguire in quest' operazione.

1.° *Determinare il segno di ciascun prodotto parziale secondo la regola precitata:* questa è la regola dei segni.

2.° *Formare il coefficiente, facendo il prodotto di quelli del moltiplicando, e del moltiplicatore parziali* (22.): questa è la regola de' coefficienti.

3.° *Scrivere in seguito le une dell' altre tutte le lettere differenti contenute nel moltiplicando, e nel moltiplicatore parziali* (21.): questa è la regola delle lettere.

4.° *Dare alle lettere comuni al moltiplicando, e al moltiplicatore parziali un esponente eguale alla somma di quelli, ch' essi hanno in questo moltiplicando, ed in questo moltiplicatore* (25.): questa è la regola degli esponenti.

L' esempio, che segue, offre l' applicazione di tutte le regole divisate.

Moltiplicando $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

Moltiplicatore $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

Prodotti parziali
$$\begin{cases} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ -20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ +10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \end{cases}$$

Resultato ridotto

$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

La prima linea dei prodotti parziali contien quelli di tutti i termini del moltiplicando per il primo termine a^3 del moltiplicatore: questo termine avendo il segno $+$, i prodotti, ch'ei somministra, hanno i medesimi segni dei termini corrispondenti del moltiplicando (31).

Il primo termine $5a^4$ del moltiplicando avendo il segno $+$, non si scrive quello del primo prodotto parziale, che sarebbe pure $+$; il coefficiente 5 di a^4 essendo moltiplicato per il coefficiente 1 di a^3, dà 5 per quello del prodotto parziale; la somma dei due esponenti della lettera a è $4+3$, ovvero 7: il primo prodotto parziale è dunque $5a^7$.

Il secondo termine $-2a^3b$ del moltiplicando avendo il segno $-$, il prodotto ha il segno $-$; il coefficiente 2 di a^3b moltiplicato per il coefficiente 1 di a^3 dà 2 per coefficiente del prodotto; l'esponente della lettera a, la quale è comune ai termini, che si moltiplicano, è $3+3$, ovvero 6, e si scrive in seguito la lettera b, la qual non si trova che nel moltiplicando parziale: il secondo prodotto parziale è dunque $-2a^6b$.

Il terzo termine $+4a^2b^2$ dà un prodotto parziale affetto dal segno $+$, e che, per le regole applicate ai due termini precedenti, si trova $+4a^5b^2$.

La seconda linea contiene i prodotti di tutti i termini del moltiplicando per il secondo termine $-4a^2b$ del moltiplicatore; quest'ultimo avendo il segno $-$, tutti i prodotti, ch'esso dà, debbon avere de' segni contrarj a quelli de' termini corrispondenti del moltiplicando: i coefficienti, le lettere, e gli esponenti si formano come nella linea precedente.

La terza linea finalmente contiene i prodotti

di tutti i termini del moltiplicando per il terzo termine $+2b^3$ del moltiplicatore; questo termine avendo il segno $+$, tutti i prodotti, ch' esso dà, hanno il medesimo segno dei termini corrispondenti del moltiplicando.

Dopo d' aver formati tutti i prodotti parziali, di cui si compone il prodotto totale, s' esamina attentamente quest' ultimo, per veder se contenga de' termini simili; allorchè esso ne contiene, si riducono, secondo la regola del num.° 19, osservando che due termini, per esser simili, deggiono contenere non solo le medesime lettere, ma ancora affette dagli esponenti medesimi. Nell' esempio di sopra vi sono tre riduzioni, cioè,

$-2a^6b$ e $-20a^6b$, il che dà $-22a^6b$,

$+4a^5b^2$ e $+8a^5b^2$, il che dà $+12a^5b^2$,

$-16a^4b^3$ e $+10a^4b^3$, il che dà $-6a^4b^3$.

Queste riduzioni essendo eseguite, abbiamo per resultato la linea ultima dell' esempio.

Ecco in oltre, per esercitare il Lettore, un esempio di moltiplicazione, ch' è facile a effettuarsi dopo ciò che precede.

Moltiplicando $5a^4b^2+7a^3b^3-15a^5c+23b^2d^4-17bc^3d^2-9abcdm^2$

Moltiplicatore $11b^3-8c^3+5abc-2bdm$

Prodotti parziali

$$55a^4b^5+77a^3b^6-165a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2$$
$$-40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3+120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2$$
$$+25a^5b^3c+35a^4b^4c-75a^6bc^2+115ab^3cd^4-85ab^2c^4d^2-45a^2b^2c^2dm^2$$
$$-10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m+18ab^2cd^2m^3$$

Resultato semplicizzato

$$55a^4b^5+77a^3b^6-140a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2-40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3$$
$$+120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2+35a^4b^4c-75a^6bc^2+115ab^3cd^4-85ab^2c^4d^2$$
$$-45a^2b^2c^2dm^2-10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m+18ab^2cd^2m^3$$

33. I metodi della moltiplicazione fanno vedere che, se tutti i termini del moltiplicando son del medesimo grado (27), e quelli del moltiplicatore sien pure del grado stesso, tutti i termini del prodotto saranno d'un grado espresso dalla somma dei numeri, ch'esprimono il grado dei termini di ciascun dei fattori.

Nel primo esempio il moltiplicando è del quarto grado, il moltiplicatore del terzo; il prodotto è del settimo.

Nel secondo esempio il moltiplicando è del sesto grado, il moltiplicatore del terzo; il prodotto e del nono.

L'espressioni consimili a quelle, che abbiamo citate, i cui termini cioè son del medesimo grado, si chiamano espressioni *omogenee*. L'osservazione, che abbiamo fatta sopra i loro prodotti, è utile a prevenire gli errori, che si potrebber commettere dimenticandosi di qualcuno de' respettivi fattori nelle moltiplicazioni parziali.

34. Le operazioni algebriche effettuate sopra quantità letterali lasciando vedere come le diverse parti di queste quantità concorrono alla formazione dei resultati, fanno spesso conoscere delle proprietà generali dei numeri indipendentemente da alcun sistema di numerazione. Le moltiplicazioni seguenti conducono a conseguenze di questo genere notabilissime, e d'un' applicazione frequente in appresso.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$a + b$$

$$a^3 + 2a^2b + ab^2$$
$$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

La prima, dalla quale resulta che la quantità $a+b$ moltiplicata per $a-b$ dà a^2-b^2, fa vedere che, *se si moltiplica la somma di due numeri per la lor differenza, il prodotto sarà la differenza de' quadrati di questi numeri.*

Se si prende, per esempio, la somma 11 de' numeri 7, e 4, e si moltiplichi per la differenza 3 di questi numeri, il prodotto 3×11, ovvero 33, sarà eguale alla differenza tra 49 quadrato di 7, e 16 quadrato di 4.

Per il secondo esempio, nel quale $a+b$ è due volte fattore, si fa chiaro che *la seconda potenza, ovvero il quadrato, d' una quantità composta di due parti*, a, e b, *contiene il quadrato della prima parte, più il doppio del prodotto della prima parte per la seconda, più il quadrato della seconda.*

Il terzo esempio, ove abbiamo moltiplicato la seconda potenza di $a+b$ per la prima, fa vedere che *la terza potenza, o il cubo, d' una quantità composta di due parti, contiene il cubo della prima, più tre volte il quadrato della prima moltiplicato per la seconda, più tre volte la prima moltiplicata per il quadrato della seconda, più finalmente il cubo della seconda.*

35. Siccome è necessario sovente il decomporre una quantità in due fattori, e lasciar sempre in tutta evidenza, quanto mai sia possibile, la for-

mazione delle quantità, che si considerano, non s'effettuan le operazioni algebriche se non che quando non possiam dispensarcene assolutamente; bisogna, per questa ragione, stabilire de' segni proprj ad indicar la moltiplicazione tra delle quantità complesse.

Ci serviamo infatti delle parentesi, tra le quali racchiudonsi i differenti fattori del prodotto indicato. L'espressione

$$(5a^4-3a^2b^2+b^4)(4ab^2-ac^2+d^3)(b^2-c^2),$$

per esempio, indica il prodotto delle quantità complesse

$5a^4-3a^2b^2+b^4$, $4ab^2-ac^2+d^3$, e b^2-c^2.

Alcuni altri però di data un poco remota si sono serviti di linee poste al di sopra dei fattori, come si vede quì sotto,

$$\overline{5a^4-3a^2b^2+b^4}\times\overline{4ab^2-ac^2+d^3}\times\overline{b^2-c^2};$$

ma le linee potendo essere prolungate più, o meno di quel che sia necessario, rendono questo segno meno preciso delle parentesi, che non lascian mai equivoco sulla totalità delle quantità comprese in ciascun fattore: perciò esse hanno prevalso.

Della divisione delle quantità complesse.

36. La divisione algebrica debb'essere considerata nello stesso modo che la divisione aritmetica, cioè, come un'operazione, che serve a discoprire uno dei fattori d'un prodotto dato, allorchè conoscesi l'altro. Dopo di questa definizione, il quoziente moltiplicato pel divisore dee riprodurre il dividendo.

Applicando queste nozioni alle quantità monomie, vedremo per il n.° 21. che il dividendo sarà composto dai fattori del divisore, e da quelli

del quoziente; dunque, *sopprimendo nel dividendo tutti i fattori, che compongono il divisore, il resultato sarà il quoziente, che si ricerca.*

Sia, per esempio, il monomio $72a^5b^3c^2d$ da dividersi per l'altro monomio $9a^3bc^2$; bisogna, secondo la regola enunciata quì sopra, sopprimere nella prima di queste quantità i fattori della seconda, che son respettivamente

$$9, a^3, b, \text{ e } c^2:$$

bisogna dunque, perchè la divisione possa effettuarsi, che questi fattori sieno nel dividendo. E prendendoli per ordine, si vede primieramente che il coefficiente 9 del divisore debb'esser fattore del coefficiente 72 del dividendo, ovvero che 9 dee dividere esattamente 72; il che difatto succede, poichè $72=9\times8$: sopprimendo dunque il fattore 9, resterà il fattore 8 per coefficiente del quoziente.

Segue ancora dalle regole della moltiplicazione (25) che l'esponente 5 della lettera *a* nel dividendo è la somma degli esponenti, ch'essa ha nel divisore, e nel quoziente; quest'ultimo esponente sarà perciò la differenza tra gli altri due, ovvero $5-3=2$: così la lettera *a* avrà, nel quoziente, l'esponente 2. Per la stessa ragione, la lettera *b* avrà nel quoziente un esponente eguale a $3-1$, o sivvero 2. Finalmente il fattore c^2 essendo comune al dividendo, ed al divisore, debb'esser soppresso; ed avremo, per conseguenza,

$$8a^2b^2d$$

per il domandato quoziente.

Si ragionerà nella stessa maniera sopra qualunque altro esempio, e concluderemo da ciò, che precede, che, *per effettuare la divisione delle quantità monomie, bisogna dividere il coefficiente del dividendo per quello del divisore;*

Sopprimere nel dividendo le lettere, che son comuni al divisore, allorquando esse hanno il medesimo esponente; ed allorquando l'esponente non è lo stesso, togliere l'esponente del divisore da quello del dividendo; il resto sarà l'esponente, che dee avere la lettera nel quoziente;

Finalmente scrivere nel quoziente le lettere del dividendo, che non si trovano nel divisore.

37. Applicando la regola pocanzi data per formar l'esponente del quoziente a una lettera, che avesse il medesimo esponente nel dividendo, e nel divisore, si troverebbe *zero* per l'esponente, ch'essa dovrebbe aver nel quoziente: a^3 diviso per a^3, per esempio, darebbe a^0. Affin di sapere ciocchè possa significare una simile espressione, bisogna risalire alla sua origine, e considerare che, rappresentando il quoziente della divisione della quantità a^3 per se stessa, ella dee corrispondere all'unità, che indica appunto quante volte una quantità è contenuta in se stessa. Procede da ciò che *l'espressione* a^0 *è un simbolo equivalente all'unità, e che dee per conseguenza essere rappresentato da* 1. Possiamo dunque dispensarci da scriver le lettere, che hanno *zero* per esponente; perocchè allora ciascuna delle medesime non rappresenta che l'unità. Così a^3bc^2 diviso per a^2bc^2, dando $a^1b^0c^0$, si riduce ad a, come possiamo ancora assicurarcene effettuando la soppressione dei fattori comuni al dividendo, ed al divisore.

Si vede da questo che la seguente proposizione, cioè, *ogni quantità, che ha zero per esponente*, ed equivale a 1, non è a parlar propriamente se non che la spiegazione d'un resultato, al quale conduce la convenzion stabilita sulla maniera di scrivere le potenze delle quantità mediante i loro esponenti.

Perchè la divisione possa effettuarsi, bisogna 1.° che il divisore non contenga nessuna lettera, che non si trovi nel dividendo; 2.° che l'esponente delle lettere nel divisore non sorpassi quello, ch'esse hanno nel dividendo; 3.° finalmente che il coefficiente del divisore divida esattamente quello del dividendo.

38. Quando tutte queste condizioni non abbian luogo, la divisione non può che indicarsi sotto la forma d'una frazione, secondo la convenzione del num.° 2; e bisogna cercare in seguito di semplicizzare questa frazione sopprimendo i fattori, che son comuni nel medesimo tempo al dividendo, ed al divisore, se ve ne sono: poichè (*Aritm.* 57.) è patente che i principj, sopra i quali riposa la teoria delle frazioni aritmetiche, essendo indipendenti da qualunque valore particolare de' loro termini, convengono alle frazioni rappresentate dalle lettere, come a quelle espresse dai numeri.

Dietro a questi principj *si sopprimono primieramente i fattori numerici comuni ai coefficienti del dividendo, e del divisore, poi le lettere, che son comuni al dividendo, ed al divisore, ed hanno il medesimo esponente nell'uno, e nell'altro. Allorchè l'esponente non è lo stesso, si toglie il più piccolo dal più grande, e si dà questo resto per esponente alla lettera, che non si scrive che in quel dei due termini della frazione dov'essa aveva l'esponente il più alto.*

L'esempio seguente schiarirà questa regola.

Sia $48a^3b^5c^2d$ da dividersi per $64a^3b^3c^4e$; il quoziente non può indicarsi che sotto la forma frazionaria $\frac{48a^3b^5c^2d}{64a^3b^3c^4e}$;

ma i coefficienti 48, e 64 son ambedue divisibili per 16; per la soppressione di questo fattor comune, il coefficiente del numeratore diverrà 3, e quello del denominatore 4. La lettera *a* avendo il medesimo esponente 3 nei due termini della frazione, ne segue che a^3 è un fattor comune al dividendo, ed al divisore, e che lo potremo pure sopprimere.

Per conoscere il numero de' fattori *b* comuni ai due termini della frazione, bisogna dividere il più elevato, ch'è b^5, per b^3, secondo la regola di già data, ed il quoziente b^2 c'insegna che $b^5 = b^3 \times b^2$. Sopprimendo dunque il fattor comune b^3, resterà nel numeratore il fattor b^2.

Per rapporto alla lettera *c*, il fattor più elevato essendo c^4 nel denominatore, se si divida per c^2, lo decomporremo in $c^2 \times c^2$; e sopprimendo il fattore c^2, comune ai due termini, questa lettera sparirà dal numeratore, ma resterà nel denominatore coll'esponente 2.

Finalmente le lettere *d*, ed *e* resteranno nei loro posti respettivi, poichè nello stato, in cui esse sono, non indicano alcun fattore, che sia comune all'una ed all'altra.

Con queste diverse operazioni la frazione proposta riducesi a

$$\frac{3\,b^2\,d}{4\,c^2\,e},$$

ch'è l'espressione più semplice sin a tanto che non daremo alcun valore numerico alle lettere: imperocchè la detta frazione potrebbe anco di più esser ridotta se queste lettere venissero rimpiazzate da numeri contenenti dei fattori comuni.

39. Un'osservazione, che non bisogna omettere è che se tutti i fattori del dividendo entras-

sero nel divisore, e che di più ne contenessero ancora degli altri, che loro fossero particolari, sarebbe necessario, dopo la soppressione de' primi fattori, metter l'unità in luogo del dividendo, o numeratore della frazione. Difatti, in questo caso possiam sopprimere nei due termini della frazione tutti i fattori del numeratore, e vale a dire, dividere i due termini della frazione per il numeratore; ma quest'ultimo essendo diviso per se medesimo, dee dar l'unità per quoziente, della qual'unità bisogna farne il nuovo numeratore.

Sia, per esempio, la frazione

$$\frac{4\,a^2\,b\,c}{12\,a^2\,b^3\,c\,d};$$

i fattori 12, a^2, b^3, e c si dividono respettivamente pei fattori 4, a^2, b, e c, ed è come se si dividessero i due termini della frazione proposta per il numeratore $4\,a^2\,b\,c$: ora, la quantità $4\,a^2\,b\,c$ divisa per se stessa dà 1 per quoziente, e la quantità $12\,a^2\,b^3\,c\,d$ divisa per la prima dà, per le regole precitate, $3\,b^2\,d$: la nuova frazione è dunque

$$\frac{1}{3\,b^2\,d}.$$

40. Segue dalle regole della moltiplicazione che, quando una quantità monomia moltiplica una quantità polinomia, essa divien fattore comune di tutti i termini di quest'ultima. Si profitta di tal'osservazione per semplicizzar le frazioni, di cui il numeratore, ed il denominatore sono dei polinomj, che han de' fattori comuni a tutti i lor termini.

Sia l'espressione

$$\frac{6\,a^4 - 3\,a^2\,b\,c + 12\,a^2\,c^2}{9\,a^2\,b - 15\,a^2\,c + 24\,a^3};$$

esaminando la quantità $6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2$, si re-

de che il fattore a^2 è comune a tutti i di lui termini, poichè $a^4 = a^2 \times a^2$, ed inoltre i numeri 6, 3, e 12 son tutti divisibili per 3; di maniera che $6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2 = 2a^2 \times 3a^2 - bc \times 3a^2 + 4c^2 \times 3a^2$. Parimente il denominatore ha per fattor comune $3a^2$, perchè i fattori a^2, e 3 entrano in tutti i suoi termini, ed abbiamo
$9a^2b - 15a^2c + 24a^3 = 3b \times 3a^2 - 5c \times 3a^2 + 8a \times 3a^2$.
Sopprimendo dunque il fattore $3a^2$ tanto nel numeratore, che nel denominatore, la frazione proposta diverrà

$$\frac{2a^2 - bc + 4c^2}{3b - 5c + 8a}.$$

41. Passo adesso al caso dove il dividendo, ed il divisore son ambedue complessi, e nel quale non si può più conoscere a prima vista se il divisore è, o non è fattore del dividendo.

Poichè il divisore, moltiplicato per il quoziente, dee riprodurre il dividendo, bisogna che quest' ultimo contenga tutti i prodotti parziali di ciascun termine del divisore per ciascun termine del quoziente; e, se si potessero ritrovare i prodotti formati da ciascun termine del divisore in particolare, dividendoli per questo termine, ch' è cognito, otterremmo quelli del quoziente nella medesima maniera che in Aritmetica si scoprono tutte le cifre del quoziente dividendo successivamente pel divisore i numeri, che si risguardano come i prodotti parziali di questo divisore per le diverse cifre del quoziente. Ma nei numeri questi prodotti parziali si presentan per ordine, principiando dall' unità situata nell' ultimo posto sulla sinistra, a motivo della subordinazione stabilita tra le unità di ciascuna cifra del dividendo dipendente-

mente dal posto, ch'esse occupano. Non vale il medesimo in Algebra, ma vi si supplisce col dispor tutti i termini del dividendo, e del divisore in modo che gli esponenti delle potenze dell'istessa lettera diminuiscano in ciascun termine, andando dalla sinistra verso la destra nel modo che vedesi, per rapporto alla lettera a, nelle quantità

$$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5,$$
$$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2,$$

delle quali una è il prodotto, e l'altra il moltiplicando nell'operazione del n.° 32: questo è ciò, che si dice *ordinare* le quantità proposte.

Allorchè esse sono così disposte, è evidente che, qualunque sia il fattore, per cui bisogna moltiplicar la seconda, onde ottenerne la prima, il termine $5a^7$, col quale questa comincia, risulta dalla moltiplicazione del termine $5a^4$, col quale comincia l'altra, moltiplicato per il termine ove a fosse al più alto esponente nel fattore cercato, e che trovasi il primo in questo fattore allorchè egli è ordinato per rapporto ad a. Dividendo dunque il monomio $5a^7$ per il monomio $5a^4$, il quoziente a^3 sarà il primo termine del fattore cercato. Ora, per le regole della moltiplicazione, il prodotto totale dovendo contenere i diversi prodotti parziali resultanti dalla moltiplicazione di tutto il moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, ne segue che la quantità, presa quì come dividendo, dee contenere i prodotti di tutti i termini del divisore $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$ per il primo termine del quoziente a^3; ed in conseguenza, se si tolgono dal dividendo questi prodotti, che sono $5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$, il resto $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ non conterrà altri termini se non quelli, che resultano dalla moltiplicazione del divisore

per il secondo, il terzo, ec. termini del quoziente.

Questo resto può dunque essere considerato come un divisore parziale; ed il suo primo termine, nel quale a ha l'esponente più alto, non ha potuto procedere che dalla moltiplicazione del primo termine del divisore per il secondo del quoziente. Ma il primo termine del dividendo parziale avendo il segno —, bisogna assegnar quello, che dee avere il termine, che gli corrisponde nel quoziente: ora questo è assai facile mercè la 1.ª regola del n.° 31; perchè la quantità $-20a^6b$, riguardata come un prodotto parziale, avendo un segno contrario a quello del moltiplicando parziale $5a^4$, resulta che il moltiplicatore parziale debb' essere affetto dal segno —. La divisione essendo dunque eseguita sopra i monomj $-20a^6b$, e $5a^4$, darà $-4a^2b$ per questo secondo termine. Se si moltiplica poi questo termine per tutti quelli del divisore, e si tolga il prodotto dal dividendo parziale, il resto $+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ altro non conterrà che i prodotti del divisore pel terzo, e successivi termini del quoziente.

E riguardando questo resto come un nuovo dividendo parziale, il suo primo termine $10a^4b^3$ non può essere che il prodotto del primo termine del divisore per il terzo termine del quoziente; ed in conseguenza quest' ultimo si otterrà dividendo l'uno per l'altro i monomj $10a^4b^3$, e $5a^4$. Il quoziente $2b^3$ essendo moltiplicato per tutto il divisore, dà dei prodotti, la cui sottrazione esaurisce il dividendo parziale; il che prova che il quoziente non ha che tre termini.

Se desso avesse dovuto averne un maggior numero, si sarebbero evidentemente trovati come gli antecedenti; e se, come si suppone, il dividendo ha

per fattore il divisore; la sottrazion del prodotto di questo divisore per l'ultimo termine del quoziente dee sempre esaurire l'ultimo dividendo parziale.

42. Per facilitare la pratica delle regole trovate quì sopra, 1.° *Si dispongono il dividendo, ed il divisore come per la divisione de' numeri, ordinando cioè l'uno, e l'altro per rapporto ad una medesima lettera, e vale a dire, scrivendo i lor termini in modo che gli esponenti di questa lettera vadano decrescendo.*

2.° *Si divide il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, e si scrive il resultato nel posto determinato per il quoziente.*

3.° *Si moltiplica tutto il divisore per il quoziente parziale, che abbiam trovato; si toglie dal dividendo; e si fa la riduzione de' termini simili.*

4.° *Si riguarda questo resto come un nuovo dividendo di cui si divide il primo termine per il primo termine del divisore; si scrive il resultato come secondo termine del quoziente; e si prosegue l'operazione sopra questo termine come qui sopra, fino a tanto che tutti i termini del dividendo sien esauriti.*

E osservando che un prodotto ha il medesimo segno del moltiplicando allorchè il moltiplicatore ha il segno +, e che, nel caso contrario, ha il segno — (31), se ne conclude che *quando il dividendo parziale, ed il primo termine del divisore hanno il medesimo segno, il quoziente dee avere il segno +; e se essi han dei segni contrarj, il quoziente dee avere il segno —*: questa è la regola de' segni.

Le divisioni parziali si effettuano col mezzo delle regole date per le quantità monomie.

Si divide il coefficiente del dividendo per quello del divisore: quest'è la regola dei coefficienti.

Si scrivono nel quoziente le lettere comuni al dividendo, ed al divisore con un esponente eguale alla differenza di quelli, dai quali son esse affette in questi due termini; e finalmente le lettere, che non son che nel dividendo: sono queste le regole per le lettere, e per gli esponenti.

43. Ad oggetto d'applicar queste regole alle quantità

$$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5,$$
$$5a^4-2a^3b+4a^2b^2,$$

le quali m'hanno testè servito d'esempio quì sopra, si disporranno come se si trattasse d'effettuare la divisione aritmetica.

Dividendo	*Divisore*
$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$	$5a^4-2a^3b+4a^2b^2$
$-5a^7+2a^6b-4a^5b^2$	*Quoziente*
	$a^3-4a^2b+2b^3$

Resto $-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$
$+20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3$

Resto $+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$
$-10a^4b^3+4a^3b^4-8a^2b^5$

Resto 0.

Il segno del primo termine $5a^7$ del dividendo essendo lo stesso di quello di $5a^4$, primo termine del divisore, dovremo por nel quoziente il segno +;

ma siccome si tratta del primo termine, ometterem questo segno.

Dividendo $5a^7$ per $5a^4$, si ha per quoziente a^3, che scriveremo sotto del divisore.

Moltiplicando successivamente i tre termini del dividendo per il primo termine a^3 del quoziente, e scrivendo il prodotto sotto i termini corrispondenti del dividendo, dopo d'aver cangiati in contrario tutti i segni di questi prodotti affin di sottrarli (20), formeremo la quantità

$$-5a^7+2a^6b-4a^5b^2,$$

della quale faremo la riduzione cumulativamente col dividendo, e n' otterremo per resto

$$-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

Continuando la divisione su questo resto, il primo termine $-20\,a^6\,b$ diviso per $5a^4$ darà per quoziente $-4a^2b$, questo quoziente avendo il segno — a causa che il dividendo, ed il divisore hanno dei segni diversi. E moltiplicandolo per tutti i termini del divisore, e cangiando i segni, formerassi la quantità

$$20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3,$$

della quale faremo la riduzione insieme col dividendo, e conseguiremo per resto

$$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

Dividendo il primo termine di questo nuovo dividendo parziale $10a^4\,b^3$, per il primo termine $5a^4$ del divisore, moltiplicando per il resultato $+2b^3$ tutto il divisore, scrivendo i prodotti sotto il dividendo parziale, avvertendo di cangiar loro il segno, e facendo la riduzione, non resta niente; il che fa vedere che $+2b^3$ è l' ultimo termine del quoziente cercato, che ha in conseguenza per espressione $a^3-4a^2b+2b^3$.

44. È a proposito d'osservare che nella divi-

sione le moltiplicazioni de' differenti termini del quoziente pel divisore producono spesso de' termini, che non si trovano nel dividendo, e che bisogna dividerli in seguito per il primo termine del divisore. Questi termini son quelli, che si sono distrutti allorchè abbiamo formato il dividendo per la moltiplicazione de' suoi fattori, cioè del quoziente, e del divisore. Ecco un esempio notabile di riduzioni siffatte.

Sia $a^3 - b^3$ da dividersi per $a - b$:

Divisore

$$\begin{array}{l|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \hline -a^3 + a^2 b & a^2 + ab + b^2 \\ \hline \quad + a^2 b - b^3 & \\ \quad - a^2 b + ab^2 & \\ \hline \quad\quad + ab^2 - b^3 & \\ \quad\quad - ab^2 + b^3 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Moltiplicazione

$$\begin{array}{l} a - b \\ a^2 + ab + b^2 \\ \hline a^3 - a^2 b \\ + a^2 b - ab^2 \\ + ab^2 - b^3 \\ \hline \textit{Resultato} \quad a^3 - b^3 . \end{array}$$

Il primo termine a^3 del dividendo, diviso per il primo termine a del divisore, dà per quoziente a^2; e moltiplicando questo quoziente pel divisore, e cangiando i segni de' prodotti, si trova $-a^3 + a^2 b$: il termine $-a^3$ distrugge il primo termine del dividendo ma resta il termine $a^2 b$, che non si trovava nel dividendo; siccome questo contien la lettera a, si può dividerlo per il primo termine del divisore, e se n'ottiene $+a b$. Moltiplicando questo quoziente pel divisore, e cangiando i segni dei prodotti, avremo $-a^2 b + a b^2$: il termine $-a^2 b$ distrugge il precedente, ma resta il termine $+a b^2$,

che parimente non si trovava nel dividendo; si divida questo per a, avremo per quoziente $+b^2$; moltiplicando questo quoziente parziale pel divisore, avremo, cangiando i segni, $-ab^2+b^3$: il primo termine $-ab^2$ distruggerà il precedente, ed il secondo $+b^3$ distruggerà l'ultimo termine $-b^3$, che restava, del dividendo.

Per ben comprendere il meccanismo della divisione, serve di gettar gli occhj sulla moltiplicazion del quoziente a^2+ab+b^2 per il divisore $a-b$, posto alla destra della division precedente; vedremo che tutti i termini riprodotti nelle divisioni parziali son quelli, che si distruggono nel risultato della moltiplicazione.

45. Succede qualche volta che la quantità, rapporto alla quale si sono ordinati il dividendo, ed il divisore, si trova alzata alla medesima potenza in più termini, sì del dividendo, come del divisore. In tal caso bisogna disporre in una medesima colonna, ovvero scrivere immediatamente in seguito gli uni degli altri questi termini, osservando d'ordinarli tra loro per rapporto ad un'altra lettera.

Sia $-a^4b^2+b^2c^4-a^2c^4-a^6+2a^4c^2+b^6+2b^4c^2+a^2b^4$ da dividersi per $a^2-b^2-c^2$.

Ordinando la prima di queste quantità rapporto alla lettera a, si porranno in una medesima colonna i termini $-a^4b^2+2a^4c^2$, in un'altra i termini $+a^2b^4-a^2c^4$, e finalmente nell'ultima colonna i tre termini $+b^6+2b^4c^2+b^2c^4$, ordinandogli per rapporto alla lettera b, come si vede nella pagina susseguente.

Il primo termine $-a^6$ del dividendo essendo diviso pel primo termine a^2 del divisore, dà per primo termine del quoziente $-a^4$; formando in

appresso i prodotti di questo quoziente per tutti i termini del divisore, cangiando i segni di questi prodotti, onde toglierli dal dividendo, e ponendo in una medesima colonna i termini affetti dalla stessa potenza di a, proviene, dopo la riduzione de' termini simili, il primo resto, che prenderemo come secondo dividendo parziale.

Il primo termine $-2a^4b^2$ di questo nuovo dividendo essendo diviso per a^2, dà per secondo termine del quoziente $-2a^2b^2$; formando in seguito i prodotti di questo quoziente per tutti i termini del divisore, cangiando i segni di questi prodotti per toglierli dal dividendo parziale, e ponendo in una stessa colonna i termini affetti dalla medesima potenza di a, procede, dopo fatta la riduzione de' termini simili, il 2.° resto, che prenderemo per un terzo dividendo parziale.

L'operazione continuandosi nella stessa maniera sopra il 2.° resto, e sopra i seguenti, troveremo ancora tre termini del quoziente. L'ultimo essendo moltiplicato per tutti i termini del divisore, dà un prodotto, che, tolto dal 4.° resto, lo distrugge interamente; la divisione si fa dunque esattamente, ed in conseguenza il divisore è fattore del dividendo.

$$
\begin{array}{l|l}
-a^6-a^4b^2+a^2b^4+b^6 & a^2-b^2-c^2 \\
\cline{2-2}
+2a^4c^2-a^2c^4+2b^4c^2 & -a^4-2a^2b^2-b^4 \\
\qquad\qquad +b^2c^4 & \qquad +a^2c^2-b^2c^2 \\
+a^6-a^4b^2 & \\
\qquad -a^4c^2 & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

1.° *resto* $-2a^4b^2+a^2b^4+b^6$
$+a^4c^2-a^2c^4+2b^4c^2$
$+b^2c^4$
$+2a^4b^2-2a^2b^4$
$-2a^2b^2c^2$

2.° *resto* $+a^4c^2-a^2b^4+b^6$
$-2a^2b^2c^2+2b^4b^2$
$-a^2c^4+b^2c^4$
$-a^4c^2+a^2b^2c^2$
$+a^2c^4$

3.° *resto* $-a^2b^4+b^6$
$-a^2b^2c^2+2b^4c^2$
$+b^2c^4$
$+a^2b^4-b^6$
$-b^4c^2$

4.° *resto* $-a^2b^2c^2+b^4c^2$
$+b^2c^4$
$+a^2b^2c^2-b^4c^2$
$-b^2c^4$

---

0 0.

46. Si facilita qualche volta la divisione col decomporre a colpo d' occhio una quantità in due fattori. Se s' avesse, per esempio, $8a^6-4a^3b^2+4a^3+2a^3-b^2+1$ da dividersi per $2a^3-b^2+1$, questo divisore formando i tre ultimi termini del dividendo, servirà di cercare s' egli sia fattor de' tre primi; ma questi ultimi hanno visibilmente per fattor comune $4a^3$, poichè $8a^6-4a^3b^2+4a^3=4a^3(2a^3-b^2+1)$. Per quest' osservazione il dividendo diventerà

$$4a^3(2a^3-b^2+1)+2a^3-b^2+1,$$

ovvero $(2a^3-b^2+1)(4a^3+1)$:

la divisione s'effettuerà dunque immediatamente, sopprimendo il fattore $2a^3 - b^2 + 1$ identico al divisore, ed il quoziente sarà $4a^3 + 1$.

L'abitudine al calcolo algebrico suggerisce moltissime osservazioni di questo genere, per mezzo delle quali si abbreviano le operazioni.

Ed esercitandosi molto si arriva facilmente a conoscere la decomposizione dei Polinomj in fattori; questi spesso si rendono evidentissimi allorchè in vece di effettuare le moltiplicazioni, che si presentano, non si fa altro fuorchè indicarle.

Delle Frazioni Algebriche.

47. Quando s'applica il metodo della divisione algebrica a delle quantità, di cui l'una non è fattore dell'altra, si riconosce l'impossibilità d'effettuarla con esattezza, perchè si arriva, nel corso dell'operazioni, ad un resto, di cui il primo termine non può esser diviso per quello del divisore. Eccone adesso un esempio:

$$\begin{array}{r|l} a^3 + a^2b + 2b^3 & a^2 + b^2 \\ \hline -a^3 - ab^2 & a + b \end{array}$$

1.° *resto* $a^2b - ab^2 + 2b^3$

$-a^2b - b^3$

2.° *resto* $-ab^2 + b^3$.

Il primo termine $-ab^2$ del secondo resto non può dividersi per a^2, primo termine del divisore; così la divisione s'arresta a questo punto. Si potrebbe, come nell'Aritmetica, unire al quoziente $a+b$ la frazione $\frac{-ab^2+b^3}{a^2+b^2}$, che ha per numeratore

il resto, e per denominatore il divisore; ed allora il quoziente sarebbe

$$a + b + \frac{b^3 - ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Si vede facilmente che *la divisione debbe arrestarsi quando si arriva ad un resto, di cui il primo termine non contiene la lettera, per rapporto alla quale si è ordinato, se non che elevato ad una potenza inferiore a quella della medesima lettera nel primo termine del divisore.*

48. Allorchè la dviisione algebrica di due quantità non può effettuarsi, l'espression del quoziente resta indicata sotto una forma frazionaria, prendendo il dividendo pel numeratore, ed il divisore per il denominatore; ed afin di ridurla al maggior segno di semplicità possibile, bisogna cercare se il dividendo, ed il divisore han de' fattori comuni per sopprimerli tutti (38). Ma quando si tratta di polinomj, i fattori comuni non si scoprono con la medesima facilità che nei monomj; si trovano in generale cercando con un metodo analogo a quello, che abbiamo spiegato in Aritmetica pei numeri, il *massimo comun divisore* delle due quantità proposte.

Non si possono assegnar le grandezze relative dell' espressioni algebriche fino a che non si dan de' valori alle lettere, ch' esse contengono; la denominazione del *massimo comun divisore,* applicata a una quantità, non dee dunque esser presa rigorosamente nel medesimo senso come nell' Aritmetica.

In Algebra bisogna intendere per il *massimo comun divisore* di due espressioni quello de' lor divisori comuni, che contien più fattori in tutti i suoi

termini, ovvero ch' è di grado più alto (27). La sua determinazione riposa, come in Aritmetica, sopra questo principio: *Qualunque divisor comune a due quantità dee dividere ancora il resto della lor divisione.*

La dimostrazione, che n' abbiam data nel n.° 61. dell' Aritmetica, diviene più chiara allorchè vi s' impiegano i simboli algebrici. Infatti, se si rappresenta per D il comun divisore, le due quantità proposte potranno esser espresse dai prodotti AD, e BD, formati dal divisor comune, e dal fattore, pel quale esso è moltiplicato in ciascuna di quelle due quantità. Ciò posto, se Q indica il quoziente intero, e R il resto, che somministra la divisione di AD per BD, avremo

$$AD = BD \times Q + R \text{ (}\textit{Aritm.}\text{ 61)};$$

dividendo in seguito per D i due membri di quest' equazione, si otterrà

$$A = BQ + \frac{R}{D};$$

e poichè il primo membro, che in questo caso debb' esser composto dei medesimi termini del secondo, è intero, bisognerà che $\frac{R}{D}$ si riduca ad un' espression senza divisore, vale a dire che R sia divisibile esattamente per D.

Secondo questo principio *si comincerà*, come in Aritmetica, *dal cercare se una delle quantità sia ella stessa divisore dell' altra; se la divisione non si farà esattamente, si dividerà il primo divisor per il resto, e così di seguito; e quello dei resti, che dividerà esattamente il precedente, sarà il massimo comun divisore delle due quantità proposte*. Ma sarà necessario apportare nelle divisioni

indicate grande attenzione, la quale dipende dalla natura delle quantità algebriche.

Non si dee primieramente cercare il divisor comune di due espressioni algebriche se non quando esse hanno delle lettere comuni; bisogna sceglierne una di queste, per rapporto alla quale si ordineranno l'espressioni proposte; e prenderemo per dividendo quella, ove questa lettera avrà il più alto esponente; l'altra sarà il divisore.

Sieno le due quantità

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2b - 5ab^2 + b^3,$$

le quali sono digià ordinate rispetto alla lettera a; prenderemo la prima per dividendo, e la seconda per divisore. Presentasi, nel principio dell'operazione, una difficoltà, che non s'incontra nei numeri, ed è che il primo termine del divisore non può dividere esattamente quello del dividendo, a causa dei fattori 4, e b dell'uno, i quali non sono nell'altro. Ma la lettera b essendo comune a tutti i termini del divisore senza esserlo a tutti quelli del dividendo, ne segue (40) che b è fattore del divisore, e non lo è del dividendo; ora, ogni divisor comune a due quantità non può comporsi che de' fattori, che son comuni all'una, ed all'altra; dunque, se esiste un tal divisore tra le due quantità proposte, non può trovarsi che tra i fattori della quantità $4a^2 - 5ab + b^2$, che resta quand'abbiam tolto b dalla quantità $4a^2b - 5ab^2 + b^3$; così il Problema si riduce a cercare il massimo comun divisore delle due quantità

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Per la ragione medesima che abbiam potuto sopprimere in una delle quantità proposte il fat-

tore b, che non entrava nell' altra, possiamo ancora introdurre in quest' ultima un nuovo fattore, purchè non sia fattor della prima. Con quest' operazione il massimo comun divisore di quelle due quantità, che non è formato che de' fattori comuni ad entrambe, non sarà punto alterato. Profitterò di quest' avvertenza, onde moltiplicare la quantità $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ per 4, che non è fattore della quantità $4a^2 - 5ab + b^2$, affin di render possibile la divisione del primo termine dell' una per il primo dell' altra.

Avrò in siffatta maniera per dividendo la quantità

$$12\,a^3 - 12\,a^2\,b + 4\,a\,b^2 - 4b^3,$$

e per divisore la quantità

$$4\,a^2 - 5\,a\,b + b^2;$$

ed il quoziente parziale sarà $3a$.

Moltiplicando il divisore per questo quoziente, e togliendo il prodotto dal dividendo, verrà per resto

$$3\,a^2\,b + a\,b^2 - 4b^3;$$

quantità, che in conseguenza del principio già posto nel cominciamento di quest' articolo dee pur avere con $4a^2 - 5ab + b^2$ lo stesso massimo comune divisor che la prima.

Profittando dell' osservazioni fatte quì sopra, sopprimo il fattore b, comune a tutti i termini del resto di sopra, e lo moltiplico per 4, affin di render possibile la divisione del suo primo termine per quello del divisore. Ho allora per dividendo

$$12\,a^2 + 4\,a\,b - 16\,b^2,$$

e per divisore la quantità

$$4\,a^2 - 5\,a\,b + b^2;$$

il quoziente parziale è 3.

Moltiplicando il divisore per il quoziente, e

togliendo il prodotto dal dividendo, abbiamo per resto

$$19ab - 19b2;$$

ed il Problema è ridotto a cercare il massimo comun divisore tra questa quantità, e

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Ma la lettera a, per rapporto alla quale si fa la divisione, non essendo più nel resto che al primo grado, mentre ch'essa è al secondo nel divisore, quest'ultimo è quello, che bisogna prendere per dividendo, e del resto dobbiamo farne il divisore.

Prima di cominciar questa nuova divisione sopprimo nel divisore $19ab - 19b^2$ il fattore $19b$ comune a tutti i suoi termini, e che non è fattore del dividendo; ho dunque per dividendo la quantità

$$4a^2 - 5ab + b^2,$$

e per divisore

$$a - b.$$

La divisione s'opera esattamente; dunque $a - b$ è il massimo comun divisore richiesto.

E risalendo dall'ultima divisione fino alla prima, si proverebbe *a posteriori* che la quantità $a - b$ dee dividere esattamente le due quantità proposte, e che essa debb'essere la più composta di quelle, che possan dividerle; e dividendo per $a - b$ le due quantità proposte, cioè,

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3, \; 4a^2b - 5ab^2 + b^3,$$

si decompongono nel modo, che segue:

$$(3a^2 + b^2)\ (a - b), \; (4ab - b^2)\ (a - b).$$

49. Allorchè la quantità, che si prende per divisore, contiene più termini, ove la lettera, per rapporto a cui s'è ordinata, si trova al medesimo grado, v'è un'avvertenza da farsi, senza la quale l'operazione non si terminerebbe. Eccone un esempio.

Sieno le quantità

$$a^2 b + ac^2 - d^3 \,,\; ab - ac + d^2 \,;$$

se si prepara l' operazione, come per una divisione ordinaria,

$$\begin{array}{r|l} a^2b + ac^2 - d^3 & ab - ac + d^2 \\ \hline -a^2b + a^2c - ad^2 & a \\ \hline \end{array}$$

resto $a^2c + ac^2 - ad^2 - d^3$,

dividendo primieramente a^2b per ab, si trova a per quoziente; moltiplicando il divisore per questo quoziente, e togliendone i prodotti dal dividendo, il resto conterrà un nuovo termine, ove a sarà al secondo grado, cioè a^2c proveniente dal prodotto di $-ac$ per a. L' operazione non avrà fatto in questa maniera nessun progresso; poichè, prendendo il resto $a^2c + ac^2 - ad^2 - d^3$ per dividendo, e moltiplicandolo per b, affine di render possibile la division per ab, si avrà

$$\begin{array}{r|l} a^2bc + abc^2 - abd^2 - bd^3 & ab - ac + d^2 \\ \hline -a^2bc + a^2c^2 - acd^2 & ac \\ \hline \end{array}$$

resto $a^2c^2 + abc^2 - acd^2 - abd^2 - bd^3$;

ed il termine $-ac$ riprodurrà ancora un termine a^2c^2, ove a sarà al secondo grado.

Per evitar quest' inconveniente, bisogna osservare che il divisore $ab - ac + d^2 = a(b - c) + d^2$; riunendo i termini $ab - ac$ in uno solo, e facendo, per abbreviare i calcoli, $b - c = m$, avremo per divisore $am + d^2$; ma allora bisognerà moltiplicar tutto il dividendo $a^2b + ac^2 - d^3$ per il fattore m, all' effetto d' avere un nuovo dividendo, il cui primo termine sia divisibile per la quantità am, che

forma il primo termine del divisore: l'operazione diventerà

$$\begin{array}{r|l} a^2bm+ac^2m-d^3m & am+d^2 \\ \hline -a^2bm-abd^2 & ab+c^2 \end{array}$$

1.° resto $-abd^2+ac^2m-d^3m$
$-ac^2m-c^2d^2$

2.° resto $-abd^2-c^2d^2-d^3m$.

Questa volta i termini affetti da a^2 son tolti dal dividendo, e non restan altri che i termini affetti dalla prima potenza di a. Per farli sparire, divideremo primieramente il termine ac^2m per am, ed avrem per quoziente c^2; moltiplicando il divisore per il quoziente, e togliendo i prodotti dal dividendo, si avrà il 2.° resto; prendendo questo 2.° resto per un nuovo dividendo, sopprimendo il fattore d^2, che non è fattore del divisore, verrà

$$-ab-c^2-dm,$$

che moltiplicheremo di nuovo per m, e conseguiremo

$$\begin{array}{r|l} -abm-c^2m-dm^2 & am+d^2 \\ \hline +abm+bd^2 & -b \end{array}$$

resto $+bd^2-c^2m-dm^2$.

Il resto $bd^2-c^2m-dm^2$ di quest'ultima divisione non contenendo più a, ne segue che, se esiste tra le due quantità proposte un divisore comune, questo è indipendente dalla lettera a.

Arrivati a tal punto non si può più continuare la divisione per rapporto alla lettera a; ma osserveremo che, se veramente esista un comun divisore indipendente da a tra le quantità $bd^2-c^2m-dm^2$, e $am+d^2$, bisogna ch'esso divida separa-

tamente le due parti am, e d^2 del divisore; poichè, in generale, se una quantità è ordinata per rapporto alle potenze della lettera a, ogni divisore di questa quantità, indipendente da a, debbe dividere separatamente le quantità, che moltiplicano le diverse potenze di questa lettera.

Per convincersene, serve far attenzione che, in questo caso, ciascuna delle quantità proposte debb' essere il prodotto d' una quantità indipendente da a, e dal divisor comune, che n' è indipendente. Ora, se abbiam, per esempio, l' espressione

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E,$$

nella quale le lettere A, B, C, D, E indican delle quantità qualunque indipendenti da a, e che si moltiplichi per una quantità M, anch' essa indipendente da a, il prodotto

$$MAa^4 + MBa^3 + MCa^2 + MDa + ME,$$

ordinato per rapporto ad a, conterrà pure le medesime potenze di a come per l' avanti; ma il coefficiente di ciascuna di queste potenze sarà un multiplo di M.

Ciò posto, se riponghiamo per m la quantità $(b-c)$, che quella lettera rappresenta, avremo le quantità

$$bd^2 - c^2(b-c) - d(b-c)^2,$$
$$a(b-c) + d^2:$$

ora, è visibile che $b-c$, e d^2 non hanno alcun fattore comune; dunque le due quantità proposte non hanno tampoco divisore comune.

Se non si fosse potuto conoscere dalla sola ispezione che non esisteva divisor comune tra $b-c$, e d^2, sarebbe stato necessario cercare il massimo comun divisore, ordinandole per rapporto a una

medesima lettera, ed assicurarsi in seguito se questo divisor divideva ancora la quantità

$$bd^2 - c^2(b-c) - d(b-c)^2 .$$

50. In vece di rimettere alla fin dell' operazione la ricerca del massimo comun divisore indipendente dalla lettera, per rapporto alla quale si sono ordinate le due quantità, è più comodo di cercarlo in principio; perchè, il più sovente, i resti provenienti da ciascuna operazione son più complicati a misura che ci avanziamo nella medesima, ed il calcolo divien di più in più laborioso.

Sieno, per esempio, le quantità

$$a^4b^2 + a^3b^3 + b^4c^2 - a^4c^2 - a^3bc^2 - b^2c^4,$$
$$a^2b + ab^2 + b^3 - a^2c - abc - b^2c;$$

dopo d' averle ordinate rispetto alla lettera a, il che darà

$$(b^2-c^2)a^4 + (b^3-bc^2)a^3 + b^4c^2 - b^2a^4,$$
$$(b-c)a^2 + (b^2-bc)a + b^3 - b^2c,$$

Osservo primieramente che s' esse hanno un divisore comune, che sia indipendente da a, bisogna che questo divida partitamente ciascuna delle quantità, che moltiplicano le diverse potenze di a (49), come pure le quantità $b^4c^2 - b^2c^4$, e $b^3 - b^2c$, che non contengono quella lettera.

Il Problema dunque è ridotto a trovar i divisori comuni delle due quantità $b^2 - c^2$, e $b - c$; ed a verificare in progresso se tra questi divisori ve ne siano alcuni, che possan dividere a un tempo

$$b^3 - bc^2 \text{ e } b^2 - bc, \quad b^4c^2 - b^2c^4 \text{ e } b^3 - b^2c.$$

Dividendo $b^2 - c^2$ per $b - c$, si trova un quoziente esatto $b + c$; $b - c$ è dunque divisore comune delle quantità $b^2 - c^2$, e $b - c$, che patentemente non possono averne altri; poichè la quantità $b - c$ non è divisibile che per se stessa, e per l' unità. Bisogna dunque accertarsi se $b - c$ divida l' altre quan-

tità riportate quì sopra, ovvero, s'esso divida nel medesimo tempo le due quantità proposte: ciò difatto succede, e ne derivano

$$(b+c)a^4+(b^2+bc)a^3+b^3c^2+b^2c^3,$$
$$a^2+ba+b^2.$$

Per ridurre quest'ultime espressioni al più alto segno possibile di semplicità, fa di mestieri provare se la prima sia divisibile per $b+c$; questa divisione essendo tentata riesce, e non si dee far altro se non cercare il comun divisore di queste quantità semplicissime

$$a^4+ba^3+b^2c^2,$$
$$a^2+ba+b^2.$$

E operando sopra quest'ultime quantità come lo prescrive la regola, s'arriva, dopo la seconda divisione, ad un resto, che contiene la lettera a alzata solamente alla prima potenza; e siccome questo resto non è il comun divisore, concludiam che la lettera a non fa parte del comun divisore cercato, il quale non è composto, per conseguenza, che del solo fattore $b-c$.

Se, oltre a questo comun divisore, se ne fosse trovato un altro, nel quale fosse entrata la quantità a, sarebbe bisognato moltiplicare questi due divisori l'uno per l'altro, affin d'ottenere il massimo comun divisore cercato.

Queste osservazioni saranno bastanti, allorchè avremo acquistato qualche poco d'abituazion nell'Analisi, per arrivare, in tutti i casi, al massimo comun divisore; e troverem facilmente che le quantità

$$6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2,$$
$$9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3$$

hanno per massimo comun divisore $3a^2-2c^2$.

51. Le quattro *operazioni fondamentali*, e va-

le a dire, la *somma*, la *sottrazione*, la *moltiplicazione*, e la *divisione*, s'effettuano sopra le frazioni algebriche come sulle frazioni aritmetiche, avvisandosi solamente di seguir, nell' operazioni prescritte dalle regole dell'Aritmetica, i metodi accennati di sopra a riguardo delle quantità algebriche. Io mi limiterò dunque a richiamar quì queste regole, dando un esempio dell' applicazion di ciascuna: principierò, come ho fatto nell'Aritmetica, dalla moltiplicazione, e divisione delle frazioni, perchè queste operazioni non esigono alcuna trasformazione preparatoria.

1.° Per la moltiplicazione, abbiamo

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a\,c}{b} (\textit{Aritm.}\ 53.),$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d} (\textit{Aritm.}\ 70.).$$

2.° Per la divisione,

$\frac{a}{b}$ da dividersi per c, somministra $\frac{a}{b\,c}$, ovvero $\frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$ (*Aritm.* 54., 70.);

$\frac{a}{b}$ da dividersi per $\frac{c}{d}$, somministra $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$ (*Aritm.* 73.).

3.° Le frazioni $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, essendo ridotte al medesimo denominatore, divengono respettivamente

$$\frac{a\,d}{b\,d}, \frac{b\,c}{b\,d} (\textit{Aritm.}\ 79.).$$

Le frazioni

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h};$$

per la medesima riduzione, diventano respettivamente

$$\frac{adfh}{bdfh}, \quad \frac{cbfh}{bdfh}, \quad \frac{ebdh}{bdfh}, \quad \frac{gbdf}{bdfh}.$$

52. Ho dato nel num.° 79. dell' Aritmetica un metodo per arrivare in certi casi ad un denominatore più semplice di quel che resulta dalla regola generale; i simboli algebrici ne facilitan molto l' applicazione, come adesso vedremo.

Per esempio, se si hanno le due frazioni $\frac{a}{bc}, \frac{d}{bf}$, è facile l' osservare che i due denominatori sarebber gli stessi mentre f fosse fattore del primo, e c fattor del secondo: si moltiplicheranno dunque i due termini della prima frazione per f, e i due termini della seconda per c, il che darà le frazioni $\frac{af}{bcf}$, e $\frac{cd}{bcf}$, più semplici di $\frac{abf}{bbcf}$, e $\frac{bcd}{bbcf}$, che s' avrebbero moltiplicando pei denominatori primitivi.

Generalmente *si riuniscono in un solo prodotto, per comporne il denominator comune, tutti i fattori differenti, che son contenuti nei denominatori delle frazioni proposte; e non rest' altro che a moltiplicare il numeratore di ciascuna frazione pei fattori di questo prodotto, i quali mancano nel denominatore di questa frazione.*

Avendo, per esempio, le frazioni $\frac{a}{b^2c}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, formo il prodotto b^2cfg; moltiplico il numeratore della prima frazione per fg, quello della

seconda per bcg, quello della terza per b^2f, ed ottengo

$$\frac{afg}{b^2cfg}, \quad \frac{bcdg}{b^2cfg}, \quad \frac{b^2ef}{b^2cfg}.$$

53. La somma delle frazioni

$$\frac{a}{d}, \quad \frac{b}{d}, \quad \frac{c}{d},$$

che hanno il medesimo denominatore; ovvero

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d} \text{ (}Aritm.\text{ 80.)}.$$

La differenza delle frazioni

$$\frac{a}{d}, \text{ e } \frac{b}{d},$$

che hanno il medesimo denominatore, ovvero

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}.$$

L' intero a unito alla frazione $\frac{b}{c}$, ovvero l' espressione

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c} \text{ (}Aritm.\text{ 81.)}.$$

Parimente l' espressione

$$a-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}.$$

Viceversa

l' espressione $\frac{ac+b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}$;

l' espressione $\frac{ac-b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=a-\frac{b}{c}$.

I termini delle frazioni precedenti essendo monomj, se s' avessero delle frazioni, i cui termini fos-

sero polinomi, altro non dovrebbesi fare fuorchè eseguire, col mezzo delle regole date per le quantità complesse, le operazioni indicate sopra i monomj; ed è per ciò che avremo

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{a-b}{c-d}=\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{(c+d)(c-d)}$$
$$=\frac{a^3+ab^2-a^2b-b^3}{c^2-d^2}.$$

Il quoziente della frazione

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}$$ divisa per $$\frac{a-b}{c-d}$$

è $$\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{c-d}{a-b}=\frac{(a^2+b^2)(c-d)}{(c+d)(a-b)},$$
$$=\frac{a^2c+b^2c-a^2d-b^2d}{ac+ad-bc-bd};$$

è così dell' altre operaaioni consimili.

54. Allorchè ben si possegga tutto ciò che precede, possiam risolvere un' equazione di primo grado, per quanto complicata essa sia.

Se s' avesse, per esempio, l' equazione

$$\frac{(a+b)(x-c)}{a-b}+4b=2x-\frac{ac}{3a+b},$$

comincieremo da fare sparire i denominatori, indicandone solamente l' operazioni; verrebbe allora

$$(a+b)(x-c)(3a+b)+4b(a-b)(3a+b)$$
$$=2x(a-b)(3a+b)-ac(a-b);$$

poi, effettuando le moltiplicazioni, si troverebbe

$$3a^2x+4abx+b^2x-3a^2c-4abc-b^2c$$
$$+12a^2b-8ab^2-4b^3=$$
$$6a^2x-4abx-2b^2x-a^2c+abc;$$

e trasportando in un solo membro tutti i termini affetti da x, otterremo

$$-3a^2x+8abx+3b^2x$$
$$=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3;$$

dal che concludesi finalmente

$$x=\frac{2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3}{-3a^2+8ab+3b^2}.$$

Dei Problemi a due incognite, e delle quantità negative.

55. Nei Problemi risoluti precedentemente non abbiam fatto entrare che un' incognita sola, per mezzo della quale abbiamo espresso con le quantità cognite tutte le condizioni del Problema. E spesso più comodo, per alcuni di questi Problemi, d' impiegare due incognite; ma allora bisogna che s' abbiano, esplicitamente, o implicitamente, due condizioni conducenti a formar due equazioni, senza delle quali non si potrebbero a un tempo determinar le due incognite.

Il Problema del num.° 3. soprattutto nel modo, ch' è stato enunciato nel num.° 4., si presenta naturalmente con due incognite, che sono l' uno, e l' altro de' numeri ricercati. Infatti, se s' indicano

il più piccolo per x,
il più grande per y,
la loro somma per a,
la lor differenza per b,

avremo, per l' enunciato del Problema,

$$x+y=a,$$
$$y-x=b.$$

Ciascuna di queste due equazioni, considerata sola, non può assolutamente determinare nessuna delle due incognite. Se dalla seconda, per esempio, ricavasi il valore di y, essa darà

$$y = b + x;$$

valore, che a colpo d' occhio sembra non dar nulla di ciò, che si cerca, poichè contiene la quantità x, la qual non è data; ma, se in luogo dell' incognita y si pone nella prima equazione il valore, ch' essa rappresenta, quest' equazione non contenendo più allora che la sola incognita x, darà il di lei valore pei metodi già insegnati.

Avremo difatto, per mezzo di questa sostituzione,

$$x + b + x = a,$$

oppure

$$2x + b = a,$$

o finalmente

$$x = \frac{a - b}{2};$$

e ponendo questo valore di x in quello di y, ch' è $b + x$, otterremo

$$y = b + x = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}:$$

avremo dunque, pei due numeri incogniti, le medesime espressioni che nel num.° 3.

E agevol vedere difatti che la soluzione quì sopra non differisce punto in sostanza da quella del num.° 3.; ho solamente impostata, e risoluta la seconda equazione $y - x = b$, ch' io m' era contentato sol d' enunciare nel n.° precitato, e n' aveva concluso, senza calcolo algebrico, che il numero maggiore era $x + b$.

56. Sia pur proposto questo Problema:

Un operajo lavorando presso un particolare per 12 *giorni, ed avendo seco lui pei* 7 *primi giorni la sua moglie col figlio, ha ricevuto* 74 *franchi; ha lavorato in seguito, presso il medesimo particolare, altri* 8 *giorni, per* 5 *de' quali aveva con lui la moglie col figlio, ed ha ricevuto, per questo tempo,* 50 *franchi. Si domanda quanto gua-*

dagnava per giorno per la sua parte, e quanto guadagnavano insieme la sua moglie, e il suo figlio.

Sia x il guadagno giornaliero del marito,

y quello coacervato della moglie, e del figlio;

12 giorni di lavoro del marito produrranno $12x$,

7 giorni della moglie col figlio daranno $7y$;

avremo dunque, per la prima condizion del Problema,

$$12x + 7y = 74;$$

8 giorni di lavoro del marito produrranno $8x$

5 giorni della moglie col figlio daranno $5y$;

avrem dunque, per la seconda condizion del Problema,

$$8x + 5y = 50.$$

E ragionando qui della stessa maniera come nel precedente Problema, prenderemo il valore di y dalla prima equazione, e l avremo

$$y = \frac{74 - 12x}{7};$$

si porrà questo valore nella seconda, moltiplicandola per 5, poichè v'è $5y$, e verrà

$$8x + \frac{370 - 60x}{7} = 50;$$

equazione, la quale non contien altro che la sola incognita x.

Risolvendola, avrem successivamente

$$56x + 370 - 60x = 350,$$

$$370 - 4x = 350;$$

passando $-4x$ nel secondo membro, e 350 nel primo, otterremo

$$370 - 350 = 4x$$

$$20 = 4x$$

$$\frac{20}{4} = x$$

$$5 = x.$$

Conoscendo x, che abbiamo trovato eguale a 5, se si pone questo valor nella formula, ossia equazione

$$y = \frac{74 - 12x}{7},$$

il secondo membro diverrà cognito; poichè averemo

$$y = \frac{74 - 12 \times 5}{7} = \frac{74 - 60}{7} = \frac{14}{7} = 2:$$ laonde

$y = 2$.

Il marito dunque guadagnava 5 franchi per giorno, laddovecchè la moglie col figlio non ne guadagnavan che 2.

57. Il lettore avrà potuto osservare che, risolvendo quì sopra l'equazione $370 - 4x = 350$, ho fatto passare $4x$ nel secondo membro: io n'ho fatt'uso a scanso d'una piccola difficoltà, che avrebbe avuto luogo senza di questo, e vado adesso a somministrarne lo schiarimento.

Lasciando $4x$ nel primo membro, e passando 370 nel secondo, avrebbesi

$$-4x = 350 - 370;$$

e riducendo il secondo membro, a forma della regola del n.° 19., sarebbe venuto

$$-4x = -20.$$

Ma poichè abbiamo evitato nel num.° precedente il segno —, dal quale era affetta la quantità $4x$, passandola nell'altro membro; e parimente la quantità $350 - 370$ è divenuta $370 - 350$ cangiando membro; e finalmente sappiamo che una quantità passando da un membro nell'altro cangia di segno (10.), è evidente che possiamo arrivare ai medesimi resultati cangiando immediatamente il segno delle quantità $-4x$, e $+350 - 370$, il che darà

$$4x = -350 + 370$$

ovvero $4x = 370 - 350$;

equazione, ch'è la stessa cosa di

$$370 - 350 = 4x.$$

Si può ancora non eseguire il cangiamento del segno fuorchè sull' ultimo resultato

$$-4x = -20;$$

e viene allora, come quì sopra,

$$4x = 20.$$

Segue da ciò che *si potran transportare da un membro in un altro tutte le quantità affette dall'incognita; s'osserverà solamente di cangiar nel medesimo tempo i segni nei due membri dell'ultimo resultato, allorchè l'incognita sarà affetta dal segno* —.

58. Prima d'intraprender, per mezzo delle lettere, la risoluzion generale del Problema del num.° 56., vado ad esaminare un altro caso particolare. Suppongo che la prima somma ricevuta dall'Operajo sia di 46 franchi, e la seconda 30 franchi, le altre circostanze restando le stesse; l'equazioni del Problema saranno

$$12x + 7y = 46,$$
$$8x + 5y = 30.$$

La prima dà

$$y = \frac{46 - 12x}{7};$$

moltiplicando questo valore per 5, onde metterne il resultato in luogo di $5y$ nella seconda, avremo

$$8x + \frac{230 - 60x}{7} = 30;$$

togliendo i denominatori, otterremo

$$56x + 230 - 60x = 210,$$

ovvero $56x - 60x = 210 - 230,$

oppure $-4x = -20;$

e cangiando i segni dei due membri, secondo l'osservazione del num.° precedente, troverem finalmente

$$4x = 20,$$

$$x = \frac{20}{4} = 5.$$

Se si sostituisce nell'espressione di y in luogo di x il suo valore 5, verrà

$$y = \frac{46 - 60}{7};$$

e riducendo il numerator del valore di y, avremo

$$y = \frac{-14}{7}.$$

Ora, come dobbiam noi interpetrare il segno —, dal quale è affetta la quantità — 14? Si concepisce bene ciò, che vuol dire l'insieme di due quantità separate dal segno — allorchè la quantità da sottrarre è minore di quella, dalla quale si dee sottrarre; ma da qual cosa possiamo noi togliere una quantità, la quale non è unita ad alcun'altra nel membro dov'essa si trova? Per ischiarir questa specie di paradosso, il miglior mezzo, che affacciasi, è quello di risalire alle stesse equazioni, ch'esprimono le condizioni del Problema; poichè stando più presso al suo enunciato, comprenderemo meglio le circostanze, che han dato luogo alla presente difficoltà.

Riprendo dunque l'equazione

$$12x + 7y = 46;$$

pongo in luogo di x il suo valore 5, e viene

$$60 + 7y = 46.$$

La sola ispezione di quest'equazione fa conoscere un'assurdità. Infatti non è possibile formare il num.° 46 aggiungendo qualche cosa al num.° 60, che solo già sorpassa 46.

Prendo pure la seconda equazione

$$8x + 5y = 30,$$

e ponendovi 5 in luogo di x, trovo

$$40 + 5y = 30;$$

medesima assurdità, che abbiam trovata pocanzi, poichè bisognerebbe che il num.° 30 avesse potuto formarsi aggiungendo qualche cosa al num.° 40.

Ma le quantità $12x$, ovvero 60 nella prima equazione, $8x$, ovvero 40 nella seconda, esprimono ciò, che guadagna l'Operajo col solo suo lavoro; le quantità $7y$, e $5y$ rappresentano i guadagni attribuiti alla sua moglie insiem col suo figlio, mentre che i numeri 46, e 30 rappresentano la somma data pel salario cumulato di tutte tre queste persone: dobbiam veder bene al presente in che cosa consiste l'assurdità.

A forma dell'enunciato l'Operajo guadagnerebbe più da se solo di quel che non fa ajutato dalla moglie, e dal figlio; è dunque impossibile di considerare il guadagno attribuito al lavoro della moglie, e del figlio come un aumento al salario di questo tale Operajo.

Ma se, in vece di prendere il denaro attribuito alla moglie, ed al figlio come un guadagno, noi lo riguardiamo come una spesa fatta per essi a carico dell'Operajo, allora bisognerebbe togliere questo denaro da quello, che il marito avrebbe guadagnato egli solo, e non vi sarebbe più contradizione nessuna nell'equazioni, poichè diverrebbero

$$60 - 7y = 46,$$
$$40 - 5y = 30:$$

si ricaverebbe tanto dall'una, come dall'altra.

$$y = 2;$$

e si concluderebbe da ciò che l'Operajo guadagna 5 franchi per giorno, e che la sua moglie col suo

figlio gli cagionano una spesa di due franchi per giorno; il che possiamo d'altronde verificare nel modo seguente.

Per 12 giorni di lavoro l'Operajo guadagna

$$5^{\text{fr.}} \times 12, \text{ ovvero } 60^{\text{fr.}};$$

la spesa della sua moglie col suo figlio per 7 giorni è di

$$2^{\text{fr.}} \times 7, \text{ ovvero } 14^{\text{fr.}};$$

restan dunque all'Operajo 46 franchi.

Per 8 giorni di lavoro l'Operajo guadagna

$$5^{\text{fr.}} \times 8, \text{ ovvero } 40^{\text{fr.}};$$

la spesa della sua moglie col suo figlio per 5 giorni è di

$$2^{\text{fr.}} \times 5, \text{ ovvero } 10^{\text{fr.}};$$

restan dunque all'operajo 30 franchi.

È adesso ben chiaro che all'enunciato del num.° 56. bisogna, perchè il Problema proposto sia possibile coi dati precedenti, sostituire il seguente.

Un operajo lavorando presso un particolare per 12 *giorni, avendo avuto seco lui nei primi* 7 *giorni la sua moglie, e il suo figlio, che gli cagionavano una spesa, ha ricevuto* 46 *franchi; ha lavorato in seguito altri* 8 *giorni, per* 5 *de' quali aveva con lui la sua moglie, e il suo figlio, i quali gli cagionavano ancora la medesima spesa, ed ha ricevuto* 30 *franchi. Si domanda quanto guadagnava per giorno, e quanto spendeva nel medesimo tempo per sua moglie col figlio.*

Chiamando x il guadagno giornaliero dell'operajo, e y la spesa per la sua moglie col suo figlio, durante il medesimo tempo, l'equazioni del Problema saranno evidentemente

$$12x - 7y = 46,$$
$$8x - 5y = 30,$$

le quali, essendo risolute come quelle del num.° 56., daranno

$$x = 5^{\text{fr.}}, y = 2^{\text{fr.}}.$$

59. In tutti i casi, ove troveremo pel valor dell' incognita un numero affetto dal segno —, potremo rettificar l' enunciato del Problema in una maniera analoga alla precedente, esaminando accuratamente qual sia la quantità, che d' additiva ch' ell' era nel primo enunciato, dee divenir sottrattiva nel secondo; ma l' Algebra dispensa da qualunque ricerca a questo riguardo allorchè sappiamo operar convenevolmente sopra l' espressioni affette dal segno —; imperocchè quest' espressioni essendo dedotte dall' equazioni del Problema, debbono *sodisfare* a queste equazioni, e vale a dire, che sottoponendole alle operazioni indicate nell' equazioni, dobbiam trovare pel primo membro un valore eguale a quel del secondo. Così, l' espressione $\frac{-14}{7}$, ricavata dall' equazioni

$$12x + 7y = 46,$$
$$8x + 5y = 30,$$

dee, unitamente al valore $x = 5$, dedotto dalle equazioni medesime, verificarle ambedue.

La sostituzione del valore di x dà primieramente

$$60 + 7y = 46,$$
$$40 + 5y = 30.$$

Resta da fare la sottrazione di $\frac{-14}{7}$ in luogo di y; e per questo fa di mestieri moltiplicare quest' espressione per 7, e per 5, avendo riguardo al segno —, da cui vien affetta.

Se si applica la regola de' segni, data nel num.° 40. per la divisione, avremo

$$\frac{-14}{7} = -2;$$

poi, per la regola de' segni relativa alla moltiplicazione, otterremo

$$7 \times -2 = -14,$$
$$5 \times -2 = -10.$$

L' equazioni

$$60 + 7y = 46, \text{ e } 40 + 5y = 30,$$

divenendo respettivamente

$$60 - 14 = 46, \text{ e } 40 - 10 = 30,$$

saranno verificate, non peraltro sommando le due parti del primo membro, ma togliendone la seconda dalla prima, come abbiam fatto quì sopra dietro alla considerazion della forma di queste equazioni.

60. I dati del Problema del num.° 58. non hanno permesso di risolverlo nel senso del primo enunciato, e vale a dire, per addizione, ossia riguardando come un guadagno il denaro attribuito alla presenza della moglie, e del figlio dell' operajo; il secondo enunciato non converrebbe niente di più ai dati del Problema del num.° 56.

Se, in questo caso, si volesse considerar y com' esprimente una spesa, l' equazioni

$$12x - 7y = 74,$$
$$8x - 5y = 50,$$

che si avrebbero allora, darebbero

$$x = 5, \text{ e } y = \frac{-14}{7};$$

e la sostituzione del valore di x cangerebbe primieramente quest' equazioni in

$$60 - 7y = 74,$$
$$40 - 5y = 50.$$

L'assurdità di questi due risultati è precisamente contraria a quella dei resultati del num.° 58., poichè si tratta adesso d'arrivare a de' resti maggiori de' numeri 60, e 40, dai quali si tolgono le quantità $7y$, e $5y$.

Non solamente il segno —, dal quale è affetta l'espressione di y, indica un'assurdità, ma la rettifica ancora; poichè, seguendo la regola de' segni,

$$\frac{-14}{7} = -2$$

e
$$-7 \times -2 = +14,$$
$$-5 \times -2 = +10.$$

Per questo mezzo l'equazioni

$$60 - 7y = 74,\ 40 - 5y = 50,$$

divenendo

$$60 + 14 = 74,\ 40 + 10 = 50,$$

si verificano per addizione; ed in conseguenza le quantità $-7y$, e $-5y$, trasformate in $+14$, $+10$, in vece d'esprimere delle spese a carico dell'operajo, son riguardate come un vero guadagno per il medesimo: si ricade dunque, anco in questo caso, sopra il vero enunciato del Problema.

61. Siamo istruiti dagli esempj precedenti che *si posson trovare negli enunciati de' Problemi del primo grado certe contradizioni, che l'Algebra fa non solamente conoscere, ma di cui indica ancora la rettificazione, rendendo sottrattive certe quantità, che s'erano riguardate come additive, ovvero additive certe quantità, che si erano riguardate come sottrattive, dando per le incognite de' valori affetti dal segno —.*

Ecco ciò, che bisogna intendere allorchè diciamo comunemente che i valori affetti dal segno —, che si chiamano *soluzioni negative*, risolvono in

un senso opposto al suo enunciato il Problema, ov' essi s'incontrano.

Segue da ciò che, a parlar propriamente, possiam riguardar come non formanti che un sol Problema quelli, i cui enunciati son collegati tra loro in modo che le soluzioni, che sodisfanno ad uno de' suoi enunciati, posson, per mezzo d'un semplice cangiamento di segno, sodisfare anco all'altro.

62. Poichè le quantità negative risolvono, in un certo senso, i Problemi, che loro hanno data origine, è a proposito d'esaminare più da vicino l'uso di queste quantità, e primieramente d'assicurarsi della maniera, colla quale conviene effettuare le operazioni indicate a loro riguardo.

Abbiamo di sopra fatt' uso delle regole de' segni precedentemente trovate, per ciascuna dell' operazioni fondamentali; ma queste regole non sono state punto dimostrate sopra quantità monomie isolate. Nella sottrazione, per esempio, abbiamo supposto che bisoguava toglier da a l'espressione $b-c$, nella quale la quantità negativa $-c$ era preceduta da una quantità positiva b. A tutto rigore il ragionamento non dipendendo punto dal valore di b, converrebbe egualmente quandò s'avesse $b=0$, il che ridurrebbe l'espressione $b-c$ a $-c$; ma la teorìa delle quantità negative essendo ad un tempo stesso una delle più importanti, e delle più spinose dell' Algebra, è a proposito d'appoggiarla sopra basi più solide.

Per arrivare a tal fine, bisogna rimontare all'origine delle quantita negative.

La maggior sottrazione, che si possa eseguire sopra una quantità, è quella di toglierla dalla quantità medesima; ed in questo caso abbiamo

zero per resto: così $a - a = 0$. Ma allorchè la quantità da togliersi sorpassa quella, dalla quale bisogna toglierla, siamo obbligati di cangiar l'ordine indicato affine di togliere la più *piccola* dalla più grande, ed il segno —, dal quale rimane affetto il resto, serve per rammentarsi questo cangiamento d'ordine. Allorchè da 3, per esempio, bisogna togliere 5, ovvero tutte le volte che abbiamo la quantità $3 - 5$, la sottrazione non essendo possibile, vi si sostituisce quella di 3 tolto da 5, ed il resto 2 rimane affetto dal segno —, per indicare che abbiam cangiato l'ordin de' numeri 3, e 5; questo segno fa veder nel medesimo tempo che il numero 2 è ciò che mancava perchè l'ultima delle sottrazioni possibili sul numero 3 non ha potuto operarsi; di maniera che, se si fosse aggiunto 2 alla prima quantità, avremmo avuto $3 + 2 - 5$, ovvero *zero*. Esprimeremo dunque, per mezzo dei segni algebrici, l'idea, che dobbiamo annettere alla quantità negativa $-a$, formandone l'equazione $a - a = 0$, ovvero riguardando i simboli $a - a$, $b - b$, ec., come equivalenti a *zero*.

Ciò posto, si concepisce che, se si unisca alla quantità qualunque a il simbolo $b - b$, che in sostanza non è che *zero*, non si cangerà punto il valore di quella quantità, e che in conseguenza l'espressione $a + b - b$ non è che un'altra maniera di scrivere la quantità a; il che è d'altronde evidente, poichè i termini $+ b - b$ si distruggono.

Ma avendo, per questo cangiamento di forma, fatto entrare nella composizione di a la quantità $b - b$, si fa chiaro che, per sottrarre una qualunque di queste quantità, serve lo scancellarla. Se sarà $+ b$, che si voglia sottrarre da a, lo casseremo, e resterà $a - b$; il che si accorda col

la convenzion stabilita nel n.° 2.: se, al contrario, sarà $-b$, casseremo quest' ultima quantità, e resterà $a+b$, come si concluderebbe eziandio dal n.° 20.

A riguardo della moltiplicazione, si osserverà che il prodotto di $a-a$ per b debb' essere $ab-ab$, perchè il moltiplicando essendo eguale a *zero*, il prodotto dee pure esser *zero*; ed il primo termine essendo ab, il secondo dee necessariamente essere $-ab$, affin di distruggere il primo.

Concluderemo da ciò che $-a$ moltiplicato per $+b$ dee dar $-ab$.

E moltiplicando a per $b-b$, avrem pure $ab-ab$, perchè il moltiplicatore essendo eguale a *zero*, il prodotto sarà parimente eguale a *zero*, e bisognerà in conseguenza che il secondo termine sia $-ab$ per distruggere il primo $+ab$.

Dunque $+a$ moltiplicato per $-b$ dee dar $-ab$.

In ultimo, se si moltiplica $-a$ per $b-b$, il primo termine del prodotto essendo, secondo ciò che precede, $-ab$, bisognerà che il secondo termine sia $+ab$, poichè il prodotto debb' esser nullo ad un tempo come lo è il moltiplicatore.

Dunque $-a$ moltiplicato per $-b$ dee dare $+ab$.

E ravvicinando questi risultati, se ne deducono le medesime regole che quelle del num.° 31.

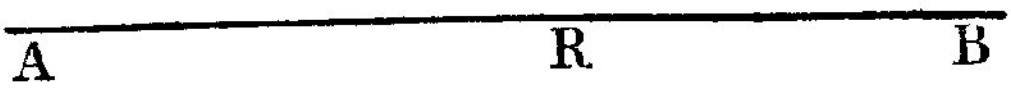
Il segno d' un quoziente, combinato con quello del divisore secondo le regole proprie alla moltiplicazione, dee riprodurre il segno del dividendo: concluderem dal già detto che la regola de' segni, data nel n.° 42., conviene ancora al caso attuale, e che per conseguenza *le quantità monomie, allorchè esse sono isolate, si combinano, per rap-*

porto ai lor segni, nella stessa maniera che quando esse fanno parte de' polinomj.

63. Seguendo queste osservazioni potremo sempre, allorchè incontrerem dei valori negativi, risalire al vero enunciato del Problema risoluto, cercando in qual maniera questi valori sodisfanno all' equazioni del Problema proposto; questo è ciò che verrà confermato dall' esempio seguente, il qual si riporta a de' numeri di specie differente da quelle considerate nel n.° 56.

64. *Due corrieri, per andare all' incontro l'uno dell' altro, partono nel medesimo tempo da due Città, la cui distanza è data; si sa quanti chiliometri fa ciascun de' corrieri in un' ora, e si domanda, a qual punto della strada, che unisce le due Città, questi corrieri s' incontreranno.*

A fine di rendere più evidenti le circostanze del Problema, ho posto quì sotto una figura, nella quale i punti indicati dalle lettere majuscole A, e B rappresentato i luoghi di partenza dei due corrieri.



Esprimerò secondo il solito con lettere minuscole i dati, e le incognite del Problema:

a la distanza dei punti di partenza A, e B,

b il numero de' chiliometri, che percorre in un' ora il corriere partito dal punto A,

c il numero de' chiliometri, che percorre nel medesimo tempo il corriere partito dal punto B.

La lettera R essendo posta nel punto d' incontro de' due corrieri, chiamero

x la lunghezza di viaggio AR percorsa dal primo,

y la lunghezza B R percorsa dall' altro;
e siccome

$$AR + BR = AB,$$

avrò l' equazione

$$x + y = a.$$

Considerando in seguito che le lunghezze x, e y son percorse nel medesimo tempo, osserveremo che il primo corriere, il quale fa un numero b di chiliometri in un' ora di tempo, impiegherà a percorrer lo spazio x un tempo espresso da $\frac{x}{b}$.

Parimente il secondo corriere, che trascorre un numero c di chiliometri in un' ora, impiegherà a percorrer lo spazio y un tempo espresso da $\frac{y}{c}$: avremo dunque

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

L' equazioni del Problema saranno per conseguenza

$$x + y = a,$$
$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

E facendo sparire il denominatore b dalla seconda, avremo

$$x = \frac{by}{c};$$

ponendo questo valor di x nella prima equazione, essa diventerà

$$\frac{by}{c} + y = a,$$

e concluderemo

$by + cy = ac$, di dove ricavasi $y = \frac{ac}{b + c}$.

Rimettendo il valore di y in quel di x, otterremo

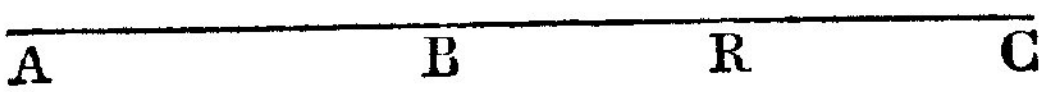
$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b+c}, \text{ ovvero } x = \frac{abc}{c(b+c)} \ (51),$$

oppur finalmente

$$x = \frac{ab}{b+c} \ (38).$$

Poichè non entra alcun segno — nei valori di x, e y, è evidente che per tutti i numeri, che si sostituiscono alle lettere a, b, c, si troveran sempre per x, e per y due numeri affetti dal segno +, e che in conseguenza il Problema proposto sarà sempre risoluto nel senso preciso dell' enunciato. Infatti si concepisce facilmente che in tutti i casi, ove due corrieri vanno nel tempo stesso l' uno contro dell' altro, essi debbono necessariamente incontrarsi.

65. Suppongo adesso che i due corrieri vadano nel medesimo senso, quello, cioè, che parte dal punto A corra dietro all' altro, che parte dal punto B, il quale tende verso un punto C, posto al di là del punto B per rapporto al punto A.



É evidente che, in quest' ipotesi, il corriere partito dal punto A non può incontrare il corriere partito dal punto B, s' egli non va con maggior celerità di quest' ultimo; ed il punto d' incontro R non può ersere altrimenti tra A, e B, ma al di là di B, per rapporto ad A.

Conservando i medesimi dati che sopra, e avvertendo che in questo caso

$$AR - BR = AB,$$

s' avrà

$$x - y = a.$$

La seconda equazione

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

non esprimendo che l'eguaglianza dei tempi impiegati dai corrieri nel percorrer gli spazj A R, e B R, non cangia punto.

Le due equazioni quì sopra, essendo risolute come le precedenti, danno

$$x = \frac{by}{c},$$

$$\frac{by}{c} - y = a, \qquad by - cy = ac,$$

$$y = \frac{ac}{b-c},$$

$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b-c} = \frac{abc}{c(b-c)},$$

e finalmente

$$x = \frac{ab}{b-c}.$$

Quì i valori di x, e y non saran positivi eccetto che quando prenderem b maggiore di c, e vale a dire, quando supporrem che il corriere partito dal punto A vada con celerità maggiore dell'altro.

Se, per esempio, facciamo

$$b = 20, \qquad c = 10,$$

si ha

$$x = \frac{20a}{20-10} = \frac{20a}{10} = 2a,$$

$$y = \frac{10a}{20-10} = \frac{10a}{10} = a;$$

dal che resulta che il punto d' incontro R è lontano dal punto A di due volte A B.

Se in seguito supponghiamo b minore di c, onde si facciano, per esempio,

$$b = 10, \qquad c = 20;$$

trovasi

$$x = \frac{10\,a}{10-20} = \frac{10\,a}{-10} = -a,$$

$$y = \frac{20\,a}{10-20} = \frac{20\,a}{-10} = -2\,a.$$

Questi valori essendo affetti dal segno —, fanno veder che il Problema non può essere risoluto nel senso del suo enunciato. Infatti è assurdo il supporre che il corriere partito dal punto A non percorrendo che dieci chiliometri per ora, possa mai arrivare il corriere partito dal punto B, il quale fa 20 chiliometri parimente per ora, e ch' è avanti al primo.

66. Frattanto questi medesimi valori risolvono il Problema in un certo senso, poichè sostituendoli nell' equazioni

$$x - y = a,$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

abbiamo per le regole de' segni

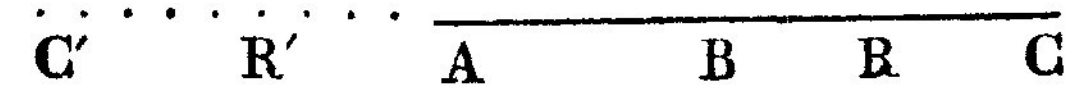
$$-a + 2\,a = a,$$

$$-\frac{a}{10} = -\frac{2\,a}{20}.$$

Queste due equazioni son sodisfatte, poichè effettuando le riduzioni, che si presentano, il primo membro divien eguale al secondo; e se facciamo attenzione ai segni de' termini, che compongon la prima, vedremo come bisogna modificar l' enunciato del Problema per toglierne l' assurdità.

Difatto è lo spazio a corrispondente a x, e percorso dal primo corriere, che vien sottratto dallo spazio $2a$ corrispondente a y, e percorso dal secondo corriere; ciò è dunque come se si fosse cangiato y in x, e x in y, e si fosse supposto che il corriere partito dal punto B andasse dietro dell'altro.

Questo cangiamento nell'enunciato ne produce uno nella direzion degli spazj de' due corrieri; essi non tendono altrimenti verso il punto C, ma dal lato opposto verso il punto C′, come lo mostra la seguente figura



ed il loro incontro si fa in R′. Resulta da ciò

$$BR' - AR' = AB,$$

il che dà

$$y - x = a;$$

d'altronde abbiam sempre

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

e si troverà

$$x = \frac{ab}{c-b} = \frac{10a}{20-10} = a,$$

$$y = \frac{ac}{c-b} = \frac{20a}{20-10} = 2a:$$

valori positivi, i quali risolvono il Problema nel preciso senso del suo enunciato.

67. Questo Problema presenta un caso, nel quale egli è affatto assurdo. Siffatto caso ha luogo allorchè si suppone che i due corrieri si movano colla stessa velocità; è visibile che da qualunque lato si facciano camminare, essi non possono mai

incontrarsi; poichè conservan sempre tra loro la stessa distanza dei loro punti di partenza. Quest' assurdità, che nessuna modificazione nell' enunciato può far disparire, si manifesta evidentemente nell' equazioni.

Abbiamo allora $b = c$, poichè i corrieri, andando colla stessa celerità, percorrono il medesimo spazio in un' ora; l' equazione

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

diviene

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

e dà

$$x = y.$$

Di qui nasce che l' equazione $x - y = a$ si cangia in

$$x - x = a, \text{ ovvero } 0 = a;$$

resultato apertamente assurdo, poichè suppone nulla una quantità a, la cui grandezza è già data.

68. Quest'assurdità si manifesta in una maniera assai singolare nei valori delle due incognite

$$x = \frac{ab}{b-c}, \quad y = \frac{ac}{b-c};$$

il loro denominatore divenendo zero allorchè $b = c$, abbiamo

$$x = \frac{ab}{0}, \quad y = \frac{ac}{0}.$$

Non s' intende facilmente qual poss' essere il quoziente d' una divisione quando il divisore è *zero*; si vede solo che, se si prendesse b pochissimo differente da c, i valori di x, e y diverrebber

grandissimi. Per convincersene, non dobbiamo far altro che prendere

$$b = 6^{\text{chil.}} \quad , \quad c = 5,\ 8^{\text{chil.}} \text{, ed}$$

avremo

$$x = \frac{6\,a}{0,2} = 30\,a\,,$$

$$y = \frac{5,8\,a}{0,2} = 29\,a\,;$$

si passi in seguito a

$$b = 6\ , \quad c = 5,9\text{, ed}$$

avremo

$$x = \frac{6\,a}{0,1} = 60\,a\,,$$

$$y = \frac{5,9\,a}{0,1} = 59\,a\,;$$

facciasi ancora

$$b = 6\ , \quad c = 5,99\,,$$

e verrà

$$x = \frac{6\,a}{0,01} = 600\,a:$$

$$y = \frac{5,99\,a}{0,01} = 599\,a:$$

vedesi facilmente che il divisore diminuendo a misura che si rende più piccola la differenza dei numeri b, e c, si ottengono de' valori di più in più maggiori.

Frattanto, siccome, per quanto piccola che sia una quantità, essa non può esser giammai considerata come *zero*, ne segue che, per quanto poco i numeri rappresentati da b, e c sien differenti, e in conseguenza, per quanto grandi sieno i valori resultanti di x, e y, non mai s'arriverebbe a quelli, che corrispondono al caso di $b = c$.

Questi ultimi non potend' essere rappresentati da nessun numero, per quanto si supponga grandissimo, son detti *infiniti*; e qualunque espressione della forma $\frac{m}{0}$, il cui denominatore è *zero*, è riguardata come il simbolo dell' *infinito*.

Tal esempio dimostra che l' *infinito matematico* è un' idea negativa, poichè non vi s' arriva che posta l' impossibilità d' assegnare una quantità, che risolver possa il Problema.

Potrebbesi dimandar quì come i valori

$$x = \frac{a\,b}{0}, \quad y = \frac{a\,c}{0}$$

sodisfacciano all' equazioni proposte; perchè è una proprietà essenziale dell' Algebra che i simboli dei valori dell' incognite, qualunque essi sieno, essendo sottomessi all' operazioni indicate sopra le medesime incognite, sodisfacciano all' equazioni del Problema proposto.

Sostituendoli nell' equazioni

$$x - y = a$$
$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

che si referiscono al caso ove $b = c$, abbiamo, per la prima,

$$\frac{a\,b}{0} - \frac{a\,b}{0} = a,$$

ovvero

$$\frac{a\,b - a\,b}{0} = a, \text{ oppure } a\,b - a\,b = a \times 0,$$

o finalmente

$$0 = 0, \text{ poichè } a \times 0 = 0.$$

La seconda equazione somministra, nella medesima circostanza,

$$\frac{a\,b}{0\times b} = \frac{a\,b}{0\times b};$$

i due membi di ciascuna equazione divenendo eguali, quest' equazioni son sodisfatte.

Resta ancor da spiegare come la nozione indicata dall' espressione $\frac{a\,b}{0}$ corregga l'assurdità della resultanza trovata nel n.° 67. A tal effetto dividendo per x i due membri dell' equazione

$$x - y = a;$$

avremo

$$1 - \frac{y}{x} = \frac{a}{x};$$

e siccome l' equazione

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$$

dà $x = y$, la prima diverrà

$$1 - 1 = \frac{a}{x}, \text{ ovvero } 0 = \frac{a}{x}.$$

L' errore consiste quì nella quantità $\frac{a}{x}$, di cui il secondo membro sorpassa il primo; ma quest' errore diverrà semprepiù minore a misura che prenderemo per x un maggior numero. Ecco dunque, e con tutta ragione, che l'Algebra dà per x un'espressione, che alcun numero, per quanto grande egli sia, non potrebbe rappresentarla, ma che venendo alla serie di quelli, i quali rappresentan de' numéri di più in più grandi, indica in qual senso si può rendere di più in più piccolo l' error della fatta supposizione.

69. Se i corrieri andassero colla stessa celerità, e nel medesimo senso, partendo dal medesimo

punto, il loro incontro non si farebbe altrimenti in un punto particolare, poichè questo averebbe luogo in tutta l'estensione del loro corso: è bene il vedere come tal circostanza sia rappresentata dai valori, che prendono in questo caso le incognite x, e y.

Il punto A, ed il punto B essendo coincidenti, abbiamo, per questo caso, $a=0$, e sempre $b=c$; laonde ne viene

$$x=\frac{0.b}{0}=\frac{0}{0}, y=\frac{0.c}{0}=\frac{0}{0}.$$

Per interpetrare questi valori, i quali indicano una divisione, in cui il dividendo, ed il divisore son nulli ambedue, ritorno all' equazioni solite del Problema. La prima diventando

$$x-y=0, \text{ dà } x=y;$$

e sostituendo questo valore nella seconda equazione, ch' è allora

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b}, \text{ deriva } \frac{y}{b}=\frac{y}{b}.$$

L' ultima equazione avendo i suoi due membri identici, e vale a dire, composti de' medesimi termini, presi col medesimo segno, è sodisfatta qualunque sia il valore, che diasi ad y, e non è sufficiente a determinar quest' incognita. D' altronde è chiaro che l' equazione

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b} \text{ riducesi a } x=y,$$

e non esprime, per conseguenza, nulla di più della

prima (*). Resulta solamente dall' una, e dall' altra che i due corrieri saran sempre insieme, perchè le distanze x, e y, partendo ambedue dal punto A, son eguali, ed i loro valori restan d' altronde *indeterminati*. L' espressione $\frac{0}{0}$ è quì dunque il simbolo d' una quantità *indeterminata*: dico *qui*, poichè vi sono de' casi dove ciò non succede; ma allora l' espressioni proposte non hanno la stessa origine della precedente.

70. Per darne un esempio, sia

$$\frac{a\,(a^2-b^2)}{b\,(a-b)}.$$

Questa quantità divien $\frac{0}{0}$ nella sua forma attuale allorchè facciamo $a=b$; ma, se prima riducasi alla sua espressione più semplice, sopprimendo cioè il fattore $a-b$ comune al numeratore, e denominatore, si trova

$$\frac{a\,(a+b)}{b},$$

che dà $2a$ nel caso di $a=b$.

Non era la stessa cosa de' valori di x, e y trovati nel num.° antecedente, poichè essi non son suscettibili d' esser ridotti a un' espressione più semplice.

(*) Per abbreviare il discorso, gli Analisti applicano all' equazioni medesime l' epiteto d' *identiche*:

$\frac{y}{b}=\frac{y}{b}$ è un' equazione *identica*, $5-3x=5-3x$ n' è un' altra; e quando due equazioni non esprimono che la stessa cosa, si dice che queste due equazioni son *identiche*.

Segue da ciò, che abbiam detto, che quando s' incontra un'espressione, la quale diviene $\frac{0}{0}$, bisogna, avanti di decidere del suo valore, cercar se il numeratore, e denominatore hanno qualche fattor comune, il quale, diventando *zero*, renda questi due termini eguali a *zero* nel medesimo tempo; e sopprimendolo, otterremo il vero valore dell'espressione proposta. Vi sono peraltro de' casi, che potrebbero ancora sfuggire a siffatto metodo; ma i limiti di quest' Opera non mi permettou altro che di por sott' occhio il *fatto analitico*. Nel Trattato del *Calcolo differenziale* si danno i metodi generali per trovar il vero valor delle quantità, le quali divengano $\frac{0}{0}$ (*).

71. Ciò, che precede, fa veder chiaramente che *le soluzioni algebriche o sodisfanno completamente all' enunciato del Problema, quand' è possibile, o indicano una modificazione da farsi nell' enunciato, allorchè i dati presentano delle contradizioni, le quali posson essere tolte, o finalmente fanno conoscere un' impossibilità assoluta; ogni volta che non v' è alcun mezzo di risolvere coi medesimi dati un Problema analogo, in un certo senso, al primo proposto.*

72. Bisogna osservare nella soluzione dei differenti casi del Problema precedente che il cangiamento di segno dell'incognite x, e y risponde ad un cangiamento nella direzion degli spazj, che

---

(*) Vedasi il *Trattato del Calcolo differenziale*, e del *Calcolo integrale* nel Tomo I.°, ovvero il *Trattato elementare* sopra lo stesso argomento.

queste incognite rappresentano. Quando l'incognita y era contata da B verso A, essa aveva nell'equazione

$$x + y = a$$

il segno $+$, ed ha preso il segno $-$ nel secondo caso allorchè si è portata dal lato opposto, ossia da B verso C, n.° 65.; poichè abbiam avuto per prima equazione

$$x - y = a.$$

Effettuando questo cangiamento di segno nella seconda equazione

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

si troverebbe

$$\frac{x}{b} = \frac{-y}{c};$$

resultato, che non è quello, che abbiamo dato nel citato num.°; ma fa di mestieri riflettere che lo spazio y si compone di multipli dello spazio c, che percorre in un'ora il corriere partito dal punto B, e questo spazio essendo diretto nel medesimo senso dello spazio y, debb'esser supposto del medesimo segno, e dee prendere per conseguenza il segno $-$ allorchè l'abbiam dato a y: fatta quest'osservazione, avremo

$$\frac{x}{b} = \frac{-y}{-c}, \text{ ovvero } \frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Serve dunque un semplice cangiamento di segno per comprendere il secondo caso del Problema nel primo. Ed è per questa ragione che l'Algebra somministra ad un tempo la soluzione di più Problemi analoghi.

Il Problema del n.° 15. n'offre un esempio molto evidente. Abbiam supposto in quell'arti-

colo che il padre dovesse al figlio una somma d; se si volesse risolvere il Problema nell' ipotesi opposta, e vale a dire, supponendo che il figlio debba a suo padre la somma d, servirà cangiare il segno di d nel valore di x, ed avremo

$$x = \frac{bc - d}{a + b};$$

finalmente, se si suppongon saldati ambedue, bisognerà far $d = 0$, e verrà

$$x = \frac{bc}{a + b}.$$

Nulla è più facile che verificar queste due soluzioni ponendo di nuovo il Problema in equazione per ciascuno dei casi, che abbiamo enunciati.

73. A sol oggetto di conservare l' analogia tra i Problemi dei num.i 56. e 64. ho impiegate due incognite nel secondo. Si potevan risolvere l' uno e l' altro con un' incognita sola: imperocchè, quando si dice che l' operajo ha ricevuto 74 franchi per 12 giorni del suo lavoro, e 7 di quello della sua moglie e suo figlio, resulta che, se si chiama y il guadagno della moglie e del figlio, e dai 74 franchi si tolgano $7y$, resta $74 - 7y$ per dodici giornate dell' operajo; dal che ne segue ch' esso guadagnava $\frac{74 - 7y}{12}$ per giorno.

Calcolando nella stessa maniera il di lui guadagno nella seconda supposizione, troveremo ch' ei guadagnava $\frac{50 - 5y}{8}$ per giorno.

Ed eguagliando queste due quantità, formerem l' equazione

$$\frac{74 - 7y}{12} = \frac{50 - 5y}{8}.$$

Parimente nel Problema del n.° 64.

A R B

se x denota lo spazio AR percorso dal corriere partito dal punto A, BR$=a-x$ sarà quello del corriere partito dal punto B andando vers' A; questi due spazj essendo percorsi nel tempo medesimo dai corrieri, che trascorrono respettivamente i numeri b, e c di chiliometri per ora, s'avrà

$$\frac{x}{b}=\frac{a-x}{c},$$

d'onde

$$cx=ab-bx,$$

$$x=\frac{ab}{b+c}.$$

La differenza tra le soluzioni, che ora abbiam date, e quelle dei num.i 56. e 64. non consiste che in questo, cioè, che abbiamo formata, e risoluta la prima equazione col soccorso del linguaggio ordinario, senza impiegarvi la scrittura algebrica; ed è evidente che quanto più spingeremo avanti l'uso del primo metodo, meno resterà da farsi con il secondo.

74. Si aggiunge qualche volta al Problema del n.° 64. una circostanza, la quale non lo rende già più difficile.

A R C B

Si supponga che il corriere partito dal punto B *si sia posto in viaggio un numero* d *d'ore avanti di quello, che partesi dal punto* A.

E chiaro che ciò si riduce a cangiare il punto di partenza del primo; poichè, s'egli trascorre un numero c di chiliometri per ora, percorrerà uno

spazio BC$=cd$ in d ore; e si troverà nel punto C allorchè l'altro corriere partirà dal punto A; di modo che l'intervallo tra i due punti di partenza sarà

$$AC=AB-BC=a-cd.$$

Scrivendo dunque $a-cd$ in luogo di a nell'equazione del n.° precedente, s'avrà

$$\frac{x}{b}=\frac{a-cd-x}{c},$$

$$x=\frac{ab-bcd}{b+c}.$$

Se i corrieri andassero nel medesimo senso,

A B C R

l'intervallo tra i punti di partenza sarebbe

$$AC=AB+BC=a+cd;$$

lo spazio percorso dal corriere partito dal punto A sarebbe AR, laddove che quello dell'altro corriere sarebbe

$$CR=AR-AC;$$

avrebbesi dunque

$$\frac{x}{b}=\frac{x-a-cd}{c},$$

dalla quale equazione ricavasi

$$x=\frac{ab+bcd}{b-c}.$$

75. Enunciato in questa maniera il Problema offre un caso ove l'interpetrazione del valor negativo trovato per x affaccia qualche difficoltà; quest'è allorchè, facendo andare i corrieri in senso contrario, si dà al numero d un valor tale che lo spazio BC rappresentato da cd divien maggiore di a, che rappresenta AB.

C R A B

Allora il corriere partito dal punto B si trova in C dall'altro lato del punto A nel momento che si fa partire quest'ultimo verso del punto B: v'è dunque assurdità nel supporre che i due corrieri possano in questo caso incontrarsi.

Se s'avesse, per esempio,

$a=400$ chil., $b=12$ chil., $c=8$ chil., $d=60$ chil.;

ne resulterebbe $cd=480$ chil.; e così il punto C sarebbe a 80 chil. al di là del punto A per rapporto al punto B; ma troverebbesi allora

$$x=\frac{400.12-60.8.12}{8+12}=\frac{400.3-60.2.12}{2+3}$$

$$=\frac{1200-1440}{5}=-\frac{240}{5}=-48.$$

Perciò l'incontro de' due corrieri averebbe luogo in un punto R, posto a 48 chil. dall'altro lato del punto A, ma tra A, e C, benchè sembri che il corriere partito dal punto B dovendo continuare il suo corso al di là del punto C, non potrebbe esser incontrato dall'altro se non che oltrepassato quest'ultimo punto.

Per conoscere il Problema risoluto in questo caso, bisogna sostituire in luogo di x il numero negativo $-m$ nell'equazione, che diviene

$$-\frac{m}{b}=\frac{cd-a-m}{c}.$$

Si vede che lo spazio percorso dal corriere

C R A B

partito dal punto B è $cd-a-m$, ovvero ciò che resta di BC quando da esso si tolgono AB, e AR, vale a dire, CR; e che, per conseguenza, il corriere essendo arrivato al punto C, ha

dovuto ritornare indietro da C verso R. Questo ritorno, che sembrava al primo aspetto ben singolare, nasce dalla supposizione che i due corrieri andassero in senso contrario; condizione, che non sarebbe soddisfatta se quello, il qual è partito dal punto B, avesse continuato il suo corso al di là del punto C (*Vedasi la Nota alla fine del presente Volume*).

76. Il Problema del n.° 56. essendo generalizzato, enunciasi come segue:

Un operajo avendo passato un numero a *di giorni in una casa, ed avendo seco lui la sua moglie e il suo figlio per un numero* b *di giorni, ha ricevuto una somma* c; *ha il medesimo operajo passato in seguito nella stessa casa un numero* d *di giorni, ha avuto questa volta con lui la sua moglie e suo figlio per un numero* e *di giorni, ed ha ricevuto una somma* f: *si domanda quanto egli guadagnava per giorno, e quanto guadagnavano nel tempo stesso la sua moglie insiem col suo figlio.*

Sien sempre x il prezzo della giornata dell'operajo, e y quello della giornata della sua moglie e suo figlio;
per un numero a di giorni, egli avrà ax;
per un numero b di giorni la sua moglie e suo figlio avranno by, laonde

$$ax + by = c;$$

per un numero d di giorni egli avrà dx,
per un numero e di giorni la sua moglie e suo figlio avranno ey, onde

$$dx + ey = f:$$

ecco le due equazioni generali del Problema.

Ricavasi dalla prima

$$x = \frac{c - by}{a};$$

moltiplicando questo valore per d affin di sostituirlo in luogo di x nella seconda equazione, s' avrà

$$dx = \frac{cd - bdy}{a},$$

ed in conseguenza

$$\frac{cd - bdy}{a} + ey = f.$$

E facendo sparire i denominatori di quest'equazione, conseguiremo

$$cd - bdy + aey = af,$$

dalla quale concluderem successivamente

$$aey - bdy = af - cd,$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Conoscendo adesso y, se si pone il suo valore in quello di x, quest' ultimo sarà cognito; avremo perciò

$$x = \frac{c - b\dfrac{af - cd}{ae - bd}}{a}.$$

Per semplicizzare quest' espressione, bisogna primieramente far la moltiplicazione indicata sulle quantità

$$b, \text{ e } \frac{af - cd}{ae - bd},$$

il che dà

$$x = \frac{c - \dfrac{abf - bcd}{ae - bd}}{a};$$

poi ridur c al denominatore della frazione, che l' accompagna, ed effettuare la sottrazione di questa frazione (53), e proviene

$$= \frac{\dfrac{ace - bcd - abf + bcd}{ae - bd}}{a},$$

ovvero, riducendo,

$$x = \frac{\dfrac{ace - abf}{ae - bd}}{a} \text{ (*)}.$$

(*) Potrebbesi aver qualche difficoltà sopra il senso di quest'espressione: per prevenirla, bisogna far attenzione alla linea di divisione, che si trova posta sopra la linea inferiore. Così, nell' espressione $x = \frac{A}{B}$, A rappresenta il dividendo, tanto intero che frazionario, e B il divisore tanto nell' una che nell' altra supposizione. Dietro a convenzione siffatta l' espressione $x = \frac{\frac{A}{C}}{B}$ significa che x è uguale al quoziente della frazione $\frac{A}{C}$ diviso per B, e l' espressione $x = \frac{A}{\frac{B}{C}}$ indica per x il quoziente di A diviso per la frazione $\frac{B}{C}$; finalmente si

Effettuando la divisione per a (51), si troverà

$$x = \frac{ace - abf}{a^2c - abd};$$

e sopprimendo il fattore a comune al numeratore, e denominatore (38), avremo in ultimo

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

I valori

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

s'applicano nella stessa maniera di quelli, che abbiam trovati qui sopra, concernenti l'equazioni letterali a una sola incognita: si sostituiscon, cioè, in luogo delle lettere i numeri particolari all'esempio, che abbiamo prescelto.

Otterremo i resultati del n.° 56. facendo

$$a = 12,\ b = 7,\ c = 74,$$
$$d = 8,\ e = 5,\ f = 50,$$

e quelli del n.° 58., facendo

$$a = 12,\ b = 7,\ c = 46,$$
$$d = 8,\ e = 5,\ f = 30.$$

77. I valori di x, e y non convengono solamente al Problema proposto; essi s'estendono a tutti quelli, che conducono a due equazioni del primo *grado* a due incognite: poichè è patentis-

---

ha per l'espressione $x = \frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}}$ il quoziente della frazione $\frac{A}{C}$ diviso per la frazione $\frac{B}{D}$.

Queste osservazioni fanno comprendere la necessità di porre le linee o *sbarre* di divisione in modo ch'esse indichino i resultati, che ci proponghiam d'indicare.

simo che queste equazioni son necessariamente comprese nelle formule

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f,$$

purchè s'intenda per le lettere a, b, d, ed e l'insieme delle quantità date, che moltiplicano respettivamente le incognite x, e y, e per le lettere c, e f l'insieme dei termini tutti cogniti, passati nel secondo membro.

Della risoluzione d'un numero qualunque d'equazioni del primo grado, *contenenti un simil numero d'incognite.*

78. Allorchè un Problema contiene altrettante condizioni distinte quante sono l'incognite, ciascuna di queste condizioni dà un equazione, nella quale succede spesso che le incognite son mescolate tra loro, come l'abbiam già veduto nei Problemi a due incognite; ma, se queste incognite non sono che al primo *grado*, si può, come di già l'abbiam fatto nei num.i precedenti, *prendere in una dell'equazioni il valore d'una dell'incognite, come se tutto il resto fosse cognito, e sostituire questo valore in tutte l'altre equazioni, le quali, dopo di ciò, non conterranno che l'altre incognite.*

Quest'operazione, per mezzo della quale scancellasi una dell'incognite, si chiama *eliminazione*. Pel suo mezzo, se si han tre equazioni a tre incognite, ne dedurremo due equazioni a due incognite, le quali si tratteranno come l'abbiam fatto di sopra; ed avendo ottenuti i valori delle due ultime incognite, gli sostituiremo nell'espression della prima.

Se avessimo quattro equazioni a quattro in-

cognite, ne dedurremmo primieramente le tre equazioni a tre incognite, le quali tratteremmo nel modo, che abbiamo detto; dipoi avendo trovati i valori delle tre incognite gli sostituiremmo, nell'espressione della prima, e così di seguito.

Ecco, per esempio, un Problema, che contiene tre incognite, e tre equazioni.

79. *Sono stati comprati separatamente i carichi di tre vetture, il primo di questi, che conteneva* 30 *misure di segale,* 20 *d'orzo, e* 10 *di grano è costato* 230 *franchi;*

Il secondo, che conteneva 15 *misure di segale,* 6 *d'orzo, e* 12 *di grano, è costato* 138 *franchi;*

Il terzo, che conteneva 10 *misure di segale,* 5 *d'orzo, e* 4 *di grano, è costato* 75 *franchi:*

Si domanda quanto costato la misura della segale, quella dell'orzo, e quella del grano.

Sia x il prezzo della misura della segale,
y quello della misura dell'orzo,
z quello della misura del grano.

Per sodisfare alla prima condizione, osserveremo che

30 misure di segale varranno $30x$,
20 misure d'orzo varranno $20y$,
10 misure di grano varranno $10z$;

ed il tutto dovendo ammontare a 230 franchi, avrem l'equazione

$$30x + 20y + 10z = 230.$$

Per la seconda condizione avremo

15 misure di segale, che varranno $15x$,
6 d'orzo $6y$,
12 di grano $12z$,

e per conseguenza

$$15x + 6y + 12z = 138.$$

Per la terza condizione avremo

10 misure di segale, che varranno $10x$,
5 d'orzo $5y$,
4 di grano $4z$,

e per conseguenza

$$10x+5y+4z=75.$$

Il Problema proposto sarà dunque ridotto alle tre equazioni

$$\begin{aligned} 30x+20y+10z&=230,\\ 13x+6y+12z&=138,\\ 10x+5y+4z&=75. \end{aligned}$$

Prima d'intraprenderne la soluzione, esamino s'è possibile semplicizzarle, dividendo per un medesimo numero (12) i due membri di qualcheduna; e vedo che posso dividere tutti i termini della prima per 10, e tutti quelli della seconda per 3; effettuate queste divisioni, non deggio occuparmi che dell'equazioni

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=23,\\ 5x+2y+4z&=46,\\ 10x+5y+4z&=75. \end{aligned}$$

Potendo scegliere un'incognita qualunque per averne il valore, prendo quello di z nella prima equazione, perchè quest'incognita non avendo coefficiente, il suo valore sarà una quantità senza divisore, ovvero intera; e viene

$$z=23-3x-2y.$$

E ponendo questo valore nella seconda, e terza equazione, si cangian esse in

$$\begin{aligned} 5x+2y+92-12x-8y&=46,\\ 10x+5y+92-12x-8y&=75; \end{aligned}$$

e riducendo il primo lor membro, trovasi

$$\begin{aligned} 92-7x-6y&=46,\\ 92-2x-3y&=75. \end{aligned}$$

Per risolver quest'equazioni, le quali non conten-

gono adesso che due incognite, prendo nella prima il valore dell' incognita y, ed ottengo

$$y = \frac{92 - 46 - 7x}{6}, \text{ ovvero } y = \frac{46 - 7x}{6};$$

e per mezzo della sostituzione di questo valore, la seconda equazione diviene

$$92 - 2x - 3 \times \frac{46 - 7x}{6} = 75.$$

Potrei, col metodo ordinario, mandar via il denominatore 6; ma osservo che questo denominatore essendo divisibile per 3, può ciò semplicizzarsi effettuando sulla frazione $\frac{46 - 7x}{6}$ la moltiplicazione per 3, conformemente al n.° 54. dell'*Aritmetica*: con questo mezzo ho

$$92 - 2x - \frac{46 - 7x}{2} = 75.$$

E facendo adesso sparire il denominatore 2, trovo

$$184 - 4x - 46 + 7x = 150;$$

essendo ridotto il primo membro, viene

$$138 + 3x = 150;$$

dal che si conclude

$$x = \frac{150 - 138}{3} = \frac{12}{3}, \text{ ovvero } x = 4.$$

La sostituzione di questo valore nell'espressione di y dà

$$y = \frac{46 - 7 \times 4}{6} = \frac{46 - 28}{6} = \frac{18}{6}, \text{ ovvero } y = 3;$$

e per la sostituzione dei valori di x, e y nell'espressione di z, s' ottiene

$$z = 23 - 3 \times 4 - 2 \times 3 = 23 - 12 - 6, \text{ ovvero } z = 5.$$

Segue da ciò che la misura della segale
costava 4 franchi,
quella dell' orzo 3,
quella del grano 5.

Quest' esempio, nel medesimo tempo ch' egli offre l' applicazione del metodo del num.° precedente, debb' esser notato pei compendj di calcolo, che abbiam praticati.

80. Vado a risolvere ancora il Problema seguente.

Un uomo, che si è incaricato di trasportare de' vasi di porcellana di tre grandezze, ha pattuito ch' ei pagherà tanto per ciascun vaso, che romperà, quanto riceverà per quelli, che consegnerà in buono stato.

Gli si consegnano primieramente due vasi piccoli, quattro medj, e nove grandi; rompe i medj consegna gli altri in buono stato, è riceve una somma di 28 franchi.

Gli si danno dipoi sette vasi piccoli, tre medj, e cinque grandi; questa volta restituisce in buon grado i piccoli, e i medj, ma rompe i cinque grandi, e riceve solamente 3 franchi.

Finalmente gli si consegnano nove vasi piccoli, dieci medj, ed undici grandi; rompe tutti gli ultimi, e non riceve in conseguenza che 4 franchi.

Si domanda quanto gli è stato pagato pel trasporto d' un vaso di ciascuna grandezza.

Sia x il prezzo del trasporto d' un vaso piccolo,
y quello del trasporto d' un medio,
z quello del trasporto d' un grande.

È visibile che ciascuna somma, che riceve il portatore, è la differenza tra ciò, che gli si perviene pei vasi, ch' egli restituisce in buono stato, e ciò, che dee per quelli, che ha rotti; fatta quest'os-

servazione, le tre condizioni del Problema somministrano respettivamente le seguenti equazioni:

$$2x - 4y + 9z = 28,$$
$$7x + 3y - 5z = 3,$$
$$9x + 10y - 11z = 4.$$

La prima di queste equazioni dà

$$x = \frac{28 + 4y - 9z}{2};$$

e, per la sostituzione di questo valore, l'equazioni seconda, e terza diventeranno

$$\frac{196 + 28y - 63z}{2} + 3y - 5z = 3,$$
$$\frac{252 + 36y - 81z}{2} + 10y - 11z = 4.$$

Mandando via i denominatori, avremo

$$196 + 28y - 63z + 6y - 10z = 6,$$
$$252 + 36y - 81z + 20y - 22z = 8;$$

riducendo il primo membro, otterremo

$$196 + 34y - 73z = 6,$$
$$252 + 56y - 103z = 8;$$

prendendo il valore di y dalla prima di queste equazioni, s'avrà

$$y = \frac{73z - 190}{34}.$$

Per mezzo di questo valore, la seconda diviene

$$252 + 56 \times \frac{73z - 190}{34} - 103z = 8;$$

essendo liberata del denominator 34, essa si cangia in

$$34 \times 252 + 56 \times 73z - 56 \times 190 - 34 \times 103z = 34 \times 8,$$

ovvero in

$$8568 + 4088z - 10640 - 3502z = 272:$$

la riduzione del primo membro di questo resultato conduce a

$$586z - 2072 = 272,$$

dalla quale ricavasi

$$z = \frac{2344}{586} = 4.$$

E risalendo dal valore di z a quello di y, avremo

$$y = \frac{73 \times 4 - 190}{34} = \frac{292 - 190}{34} = \frac{102}{34} = 3;$$

e con questi due valori troveremo

$$x = \frac{28 + 4 \times 3 - 9 \times 4}{2} = \frac{28 + 12 - 36}{2} = \frac{4}{2},$$ ovvero $x = 2$.

Sono stati pagati dunque 2 franchi per il trasporto d'un vaso piccolo,
3 per quello d'un medio,
4 per quello d'un grande.

Quest'esempio serve per veder come bisogna operare in tutti gli altri casi.

81. Succede spesso che tutte le incognite non entrano a un tempo in tutte l'equazioni: questa circostanza non cangia però il metodo; serve esaminar bene la concatenazion dell'incognite per passar dall'une alle altre.

Sieno, per esempio, le quattro equazioni

$$3u - 2y = 2,$$
$$2x + 3y = 39,$$
$$5x - 7z = 11,$$
$$4y + 3z = 41,$$

contenenti le incognite u, x, y, e z.

Con un poco d'attenzione si vede che, se si prende dalla seconda equazione il valore di x, per sostituirlo nella terza, il resultato contenendo allora y, e z, farà conoscere, nel combinarla con la

quarta equazione, queste due quantità; poscia col valore di y avremo quelli di u, e x per mezzo della prima, e seconda equazione. Ed operando così, faremo il seguente calcolo:

$$x = \frac{39-3y}{2},$$

$$5 \times \frac{39-3y}{2} - 7z = 11,$$

ovvero $195 - 15y - 14z = 22$,

oppure $15y + 14z = 173\,(57)$.

Le due equazioni

$$15y + 14z = 173,$$
$$4y + 3z = 41,$$

essendo risolute, daranno

$$y = 5, \quad z = 7;$$

e, per mezzo di questi valori, avremo

$x = \frac{39-3\times5}{2} = \frac{39-15}{2} = \frac{24}{2}$, ovvero $x = 12$,

$u = \frac{2+2y}{3} = \frac{2+10}{3} = \frac{12}{3}$, ovvero $u = 4$:

i numeri cercati son dunque

4, 12, 5, e 7.

82. Il metodo, che ho esposto, s'applicherebbe all' equazioni letterali nello stesso modo che all' equazioni numeriche; ma la moltitudine delle lettere, che bisognerebbe impiegare per rappresentar generalmente i dati allorchè il numero dell' equazioni, e dell' incognite sorpassa 2, ha impegnato gli Algebristi a cercare una maniera d' esprimerli più semplicemente; io la farò conoscere nell' articol seguente: ma, affine di dare al Lettore l' occasione d' esercitarsi a porre i Problemi in equazione, e a risolverli, ho riunito quì sotto

una serie d'enunciati, ed ho indicato al termine di ciascuno i resultati, che si debbon trovare

1.° *Un padre essendo interrogato sull' età del suo figlio, risponde: se dal doppio dell' età, ch'egli ha adesso, voi togliete il triplo di quella, che aveva sei anni sono, avrete la sua eta attuale.*

Risposta: *Il figlio aveva* 9 *anni.*

2.° *Diofante, l'autore de' più antichi Libri d' Algebra, che ci restino, passò nella sua fanciullezza la sesta parte del tempo, ch' ei visse, una dodicesima nell' adolescenza, dipoi si maritò, e passò in questa unione il settimo della sua vita, aumentato di cinque anni, prima d'avere un figlio, al quale egli sopravvisse quattr' anni, e non arrivò che alla metà dell' età, alla quale prevenne suo padre: qual' età aveva Diofante allorchè morì?*

Risposta: 84 *anni.*

3.° *Un mercante preleva ogni anno dai fondi, ch' egli ha nel commercio, una somma di* 1000 *franchi per le spese della sua famiglia; frattanto ogn' anno il suo capitale aumenta del terzo di ciò, che resta, ed alla fin di tre anni trovasi raddoppiato: quanto aveva il mercante al principio della prima annata.*

Risposta: 14800 *franchi.*

4.° *Un mercante ha due specie di thé, la prima di* 14 *franchi il chiliogrammo, la seconda a* 18 *franchi: quanto dee prenderne di ciascuna specie per formarne una cassa di* 100 *chiliogrammi, che costi* 1680. *franchi?*

Risposta: 30 *chiliogrammi della prima specie, e* 70 *della seconda.*

5.° *E stato riempito in* 12 *minuti un vaso contenente* 39 *litri d' acqua, facendo versarvi successivamente due fontane, una delle quali sommi-*

nistra 4 litri per minuto, e l'altra 3: si domanda per quanti minuti ciascuna fontana ha versato?

Risposta: *la prima per 3 minuti, e la seconda per 9.*

6.° *Un orologio segnando mezzogiorno, la lancetta de' minuti si trova sopra quella dell' ore: si domanda a qual punto della mostra si farà il prossimo futuro incontro delle lancette.*

Risposta: *a quello, che indica* 1. *ora, 5 minuti e* $\frac{5}{11}$.

Osservazione. *Questo Problema rapportasi a quello del* n.° 65.

7.° *Un uomo incontrando de' poveri, vuol dare a ciascuno 25 centesimi; ma contando la sua moneta, si accorge che gli mancan per questo 70 centesimi; allora egli non dà che 20 centesimi a ciascun povero, e gli avanzano 25 centesimi: si domanda quanta moneta aveva quest' uomo, e qual' era il numero de' poveri?*

Risposta: *egli aveva 1 franco, e 65 centesimi; ed i poveri erano in numero di 7.*

8. *Tre fratelli hanno comprato una possessione per 50000 franchi; manca al primo per pagar egli sol questo acquisto la metà del denaro, che ha il secondo; questo pagherebbe l' acquisto da se solo se si aggiungesse a ciò, ch' egli possiede, il terzo di ciò, che ha il primo; finalmente il terzo avrebbe bisogno per fare il medesimo pagamento, d' unire a ciò, che egli ha, il quarto di ciò, che possiede il primo: quanto denaro aveva ciascuno?*

Risposta: *il primo ha 30000 franchi, il secondo 40000 ed il terzo 42500.*

9.° *Dopo una partita di giuoco, tre giuocatori contano il loro denaro; uno solo avendo perduto, gli altri due hanno vinto ciascuno una som-*

ma eguale a quella, ch' essi hanno posta al giuoco; dopo una seconda partita uno dei giuocatori, che aveva vinto nella precedente, perde, e gli altri due vincon ciascuno una somma eguale a quella, ch' essi aveano al principio della seconda partita; a una terza partita il giuocatore, che fino a quel momento avea vinto, perde con ciascuno degli altri due una somma eguale a quella, ch' essi avevano al principio di quest' ultima partita; ed allora escono i tre giuocatori avendo ciascuno 120 *franchi: quanto avean essi al principio del giuoco?*

Risposta.

Quello, che ha perduto nella prima partita, aveva 195 *franchi*
quello, che ha perduto nella seconda, 105,
quello, che ha perduto nella terza, 60.

Formule generali per la risoluzione dell' equazioni di primo grado.

83. Ad oggetto d' ovviare all' inconveniente, che ho fatto osservare nel principio del num.° antecedente, s' è immaginato di rappresentare colla medesima lettera tutti i coefficienti d' una medesima incognita, ma di distinguerli prendendoli affetti da uno, o più apici, secondo il numero dell' equazioni. L' equazioni generali a due incognite si scrivono come segue:

$$a\,x + b\,y = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

I coefficienti dell' incognita x son rappresentati ambedue per a, quelli di y per b; ma l' apice, da cui sono affette le lettere della seconda equazione, fa vedere che queste lettere non si considerano come aventi il medesimo valore delle loro corrispondenti

nella prima. Così a' è una quantità differente da a, b' una quantità differente da b.

Quando si han tre equazioni, si scrivono come segue:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d,\\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= d',\\ a''\,x + b''\,y + c''\,z &= d''. \end{aligned}$$

Tutti i coefficienti dell' incognita x son designati per la lettera a, quelli di y per b, quelli di z per c; ma ciascuna lettera porta degli apici differenti di numero, i quali indicano ch' essa appartiene a diverse quantità. Così a, a', a'' son tre quantità differenti; e l' istesso delle altre lettere.

Seguendo questo metodo, se s' avessero quattro incognite, e quattro equazioni, si scriverebbero come segue:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z + d\,u &= e,\\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d'\,u &= e',\\ a''\,x + b''\,y + c''\,z + d''\,u &= e'',\\ a'''\,x + b'''\,y + c'''\,z + d'''\,u &= e'''. \end{aligned}$$

84. Affine di semplicizzare i calcoli con evitar le frazioni, si modifica il metodo dell' eliminazione nel modo seguente.

Sieno l' equazioni

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c,\\ a'\,x + b'\,y &= c'; \end{aligned}$$

è evidente che se una dell' incognite, x per esempio, avesse il medesimo coefficiente nelle due equazioni, servirebbe di toglierle l' una dall' altra, per fare sparir quest' incognita. Ciò rendesi manifesto a prima vista sull' equazioni

$$\begin{aligned} 10\,x + 11\,y &= 27,\\ 10\,x + 9\,y &= 15, \end{aligned}$$

le quali danno

$11y - 9y = 27 - 15$, ovvero $2y = 12$, oppure $y = 6$.

È visibile che possiam rendere immediatamente i coefficienti di x eguali nell' equazioni

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

col moltiplicare i due membri della prima per a', coefficiente di x nella seconda, e i due membri della seconda per a coefficiente di x nella prima; con questo mezzo otterremo,

$$\begin{aligned} aa'x + a'b\,y &= a''c, \\ aa'x + a\,b'y &= a\,c'. \end{aligned}$$

Dipoi togliendo la prima di queste dalla seconda, l' incognita x sparirà, ed avrem solamente

$$(a\,b' - a'b)\,y = a\,c' - a'c;$$

equazione, che altro non contiene fuorchè l' incognita y; e dedurremo

$$y = \frac{a\,c' - c\,a'}{a\,b' - b\,a'}.$$

Il metodo, che ho adesso impiegato, può sempre applicarsi all' equazioni di primo grado, per eliminare una dell' incognite qualunque siasi.

Eliminando nella stessa maniera l' incognita y, s' avrebbe il valore di x.

Se s' applica questo metodo a tre equazioni contenenti x, y, e z, potremo primieramente eliminare x tralla prima e seconda, poi tralla prima e la terza; arriveremo così a due equazioni, che non conterranno altro che y, e z; e tra queste elimineremo in seguito y.

Se si effettua il calcolo, l' equazione in z, alla quale arriveremo, avrà un fattore comune a tutti i suoi termini, e non sarà in conseguenza la più semplice, che si possa ottenere.

85. *Bezout* ha dato un metodo semplicissimo per eliminar simultaneamente tutte le incognite ad eccezione di una, e per il quale il Problema im-

mediatamente riducesi a dell'equazioni, le quali contengono un' incognita di meno che le proposte. Benchè questo metodo non sia necessario che quando si tratta d'equazioni a tre incognite, comincierò da applicarlo a quelle, le quali non ne contengon che due, a fin d'abbracciare completamente il soggetto.

Sieno le due equazioni

$$a x + b y = c,$$
$$a' x + b' y = c' :$$

moltiplicando la prima per una quantità m, che sia indeterminata, verrà

$$a m x + b m y = c m;$$

e togliendo da questo resultato l'equazione

$$a' x + b' y = c',$$

avremo

$$a m x - a' x + b m y - b' y = c m - c',$$

ovvero $(a m - a) x + (b m - b') y = c m - c'$.

Poichè la quantità m è indeterminata, possiamo supporla tale che $b m = b'$; in questo supposto il termine moltiplicato per y andando a zero, si ha

$$x = \frac{c m - c'}{a m - a'};$$

ma a motivo di $b m = b$, resulta

$$m = \frac{b'}{b} :$$

dunque

$$x = \frac{\frac{c b'}{b} - c'}{\frac{a b'}{b} - a'} = \frac{c b' - b c'}{a b' - b a'}$$

Se, in vece di supporre $b\,m = b'$, si fa $a\,m = a'$, il termine affetto da x sarà distrutto, e verrà

$$y = \frac{c\,m - c'}{b\,m - b'}.$$

Il valore di m non sarà più lo stesso di quello ora trovato; poichè avremo

$$m = \frac{a'}{a};$$

e, sostituendolo nel valore di y, troveremo

$$y = \frac{c\,a' - a\,c'}{b\,a' - a\,b'}.$$

Cangiando i segni del numeratore, e denominatore di questo valore, il suo denominatore sarà lo stesso che quello di x, poichè avremo

$$y = \frac{a\,c' - c\,a}{a\,b' - b\,a}.$$

86. Sieno adesso le tre equazioni

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= d, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= d', \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z &= d''. \end{aligned}$$

L'analogia ci condurrà facilmente a moltiplicare la prima, e la seconda per due, quantità indeterminate m, e n, a sommarle insieme, ed a toglierne la terza; poichè, per questo mezzo, esse saranno impiegate tutte nel tempo stesso, e le due nuove quantità m, e n, delle quali è permesso disporre a piacere, potranno essere determinate in modo da fare sparire nel medesimo tempo due incognite dal resultato. Operando come abbiam detto, e riunendo i termini, che moltiplicano una medesima incognita, avremo

$$\begin{aligned} (am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z, \\ = dm + d'n - d''. \end{aligned}$$

Se vogliamo eliminare x, e y, bisognerà per questo suppor l'equazioni

$$\begin{aligned} a\,m + a'n &= a', \\ b\,m + b'n &= b''; \end{aligned}$$

ed allora verrà

$$z = \frac{d\,m + d'n - d''}{c\,m + c'n - c''}.$$

Dalle due equazioni, nelle quali m, e n sono le incognite, è facile di dedurre il valore di queste quantità per mezzo de' resultati ottenuti nel num.° precedente; poichè serve cangiare x in m, y in n, e scrivere in luogo delle lettere

$$\left.\begin{matrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{matrix}\right\} \text{ le lettere } \left\{\begin{matrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{matrix}\right.$$

il che darà

$$m = \frac{a''b' - b''a'}{a\,b' - b\,a'},$$

$$n = \frac{a\,b'' - b\,a''}{a\,b' - b\,a'}.$$

Sostituendo questi valori in quello di z, e riducendo tutti i termini allo stesso denominatore, si troverà

$$z = \frac{d(b'a'' - a'b'') + d'(ab'' - ba'') - d''(ab' - ba')}{c(b'a'' - a'b'') + c'(ab'' - ba'') - c''(ab' - ba')}.$$

Se si volessero eliminare i termini affetti da x, e da z, avremmo avuta y, le lettere m, e n sarebbero dipendute dalle due equazioni

$$a\,m + a'n = a'', \qquad c\,m + c'n = c'',$$

e, operando come quì sopra, si sarebbe trovato

$$y = \frac{d(c'a'' - a'c'') + d'(ac'' - ca'') - d''(ac' - ca')}{b(c'a'' - a'c'') + b'(ac'' - ca'') - b''(ac' - ca')}.$$

Finalmente, ponendo l' equazioni

$$b\,m + b'n = b'', \qquad c\,m + c'n = c'',$$

si mandano a *zero* i termini moltiplicati per y, e per z, e s'ottiene

$$x = \frac{d(c'b'' - b'c'') + d'(bc'' - cb'') - d''(bc' - cb')}{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb'') - a''(bc' - cb')}.$$

Questi valorî essendo sviluppati in modo da avere i lor termini alternativamente positivi, e negativi, e cangiando nel tempo stesso i segni del numeratore, e quei del denominatore, nella prima e nella terza, potremo dar loro le forme seguenti:

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

87. Sieno le quattro equazioni

$$\begin{aligned} a\ x + b\ y + c\ z + d\ u &= e,\\ a'\ x + b'\ y + c'\ z + d'\ u &= e',\\ a''\ x + b''\ y + c''\ z + d''\ u &= e'',\\ a'''x + b'''y + c'''z + d'''u &= e''';\end{aligned}$$

si moltiplicheranno la prima per m, la seconda per n, la terza per p; si sommeranno, e togliendone in seguito la quarta, troveremo

$$\begin{aligned}(am + a'n + a''p - a''')x + (bm + b'n + b''p - b''')y\\ + (cm + c'n + c''p - c''')z + (dm + d'n + d''p - d''')u\\ = em + e'n + e''p - e'''.\end{aligned}$$

Per aver u stabiliremo

$$\begin{aligned} a\,m + a'n + a''p &= a''',\\ b\,m + b'n + b''p &= b''',\\ c\,m + c'n + c''p &= c''',\end{aligned}$$

e ne dedurremo

$$u = \frac{e\,m + e'n + e''p - e'''}{d\,m + d'n + d''p - d'''}.$$

L'equazioni precedenti, le quali debbono dare m, n, e p, si risolveranno con le medesime formule trovate pel caso di tre incognite. Questo metodo dee sembrar comodissimo, e semplicissimo; ma l'osservazion della forma de' resultati ottenuti quì sopra somministra il mezzo di ritrovarli senz'alcun calcolo.

88. Per risalire al primo anello della catena, prendo l'equazione a una incognita $a\,x = b$, e ne ricavo

$$x = \frac{b}{a},$$

dove si vede che il numeratore è il termine cognito b, ed il denominatore è il coefficiente a dell'incognita. Le due equazioni

$$a\,x + b\,y = c, \qquad a'x + b'y = c',$$

hanno dato

$$x = \frac{c\,b' - b\,c'}{a\,b' - b\,a'}, \qquad y = \frac{a\,c' - c\,a'}{a\,b' - b\,a'}.$$

Il denominator si compone ancora delle lettere a, a', b, b', che moltiplicano le incognite: si scrive primieramente la lettera a accosto alla lettera b, il che dà $a\,b$; si cangiano in seguito a, e b tra di loro per avere $b\,a$, e dando a questa disposizione il segno —, viene $a\,b - b\,a$; si pone finalmente un apice alla seconda lettera di ciascun termine: ecco formato il denominatore $a\,b' - b\,a'$.

Vediamo adesso in qual maniera possiam dedurne il numeratore. E facile il vedere che per quello di x si cangiano le a in c, e i b in c per quello di y; poichè con tal mezzo si trova per uno

$cb' - bc'$, e per l'altro $ac' - ca'$. *Il numeratore dunque deducesi dal denominatore*, nel caso di due incognite come nel caso di una sola, *cangiando cioè il coefficiente dell' incognita, che cerchiamo, nel termine tutto cognito, e conservando d' altronde gli apici tali quali com' essi sono.*

La sola ispezion dei valori resultanti dall' equazioni a tre incognite serve per far vedere ch' esse non isfuggono a questa regola. A riguardo del lor denominatore, bisogna un poco più d' attenzione per conoscerne la formazione. Frattanto, poichè nel caso di due incognite il denominatore presenta tutte le disposizioni possibili di due lettere a, e b, che moltiplican queste incognite, è naturale il pensare che, quando vi saranno tre incognite, il denominatore debba contener le disposizioni consimili di tre lettere a, b, c; e per formare queste disposizioni con ordine, ci conterremo nella maniera seguente.

Si forman primieramente le disposizioni $ab - ba$ delle due lettere a e b; in seguito alla prima ab scriveremo la lettera c, ed otterremo abc; e facendo passar questa lettera in tutti i posti, avendo l' attenzion di cangiare il segno ciascuna volta, e di non turbar l' ordine respettivo di a, e b, ne resulta

$$abc - acb + cab.$$

Operando nello stesso modo sulla seconda disposizione delle due lettere $-ba$, si trova

$$-bac + bca - cba:$$

riunendo qnesti prodotti ai tre precedenti, poi segnando le seconde lettere con un apice, e la terza con due, s' ottiene

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'';$$

resultato conforme a quello, che presentan le formule ottenute immediatamente.

È facile concluder da ciò che, per formare il denominatore nel caso di quattro incognite, bisognerà introdurre la lettera d in ciascuno de' sei prodotti

$$a\,b\,c - a\,c\,b + c\,a\,b - b\,a\,c + b\,c\,a - c\,b\,a,$$

e far loro occupar successivamente tutti i posti; il termine $a\,b\,c$, per esempio, somministrerebbe quattro seguenti

$$a\,b\,c\,d - a\,b\,d\,c + a\,d\,b\,c - d\,a\,b\,c.$$

Operando nella stessa maniera sopra gli altri cinque prodotti, il resultato totale avrebbe ventiquattro termini, in ciascuno de' quali la seconda lettera porterebbe un apice, la terza due, e la quarta tre. I numeratori dell' incognite u, z, y, e x s' otterrebbero per mezzo della regola citata quì sopra (*).

89. Per far servir queste formule alla risoluzione dell' equazioni numeriche, bisognerà paragonar l' equazioni proposte, termine a termine, coll' equazioni generali de' numeri precedenti.

Ad oggetto di risolvere, per esempio, le tre equazioni

$$\begin{aligned} 7x + 5y + 2z &= 79, \\ 8x + 7y + 9z &= 122, \\ x + 4y + 5z &= 55, \end{aligned}$$

(*) M. *Laplace* nella seconda Parte delle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze per l' anno 1772. pagina 294. ha dimostrate queste regole *a priori*.

bisognerà paragonare, termine a termine, queste equazioni con quelle del n.° 86., il che darà

$$a = 7, b = 5, c = 2, d = 79,$$
$$a' = 8, b' = 7, c' = 9, d' = 122,$$
$$a'' = 1, b'' = 4, c'' = 5, d' = 55;$$

sostituendo questi valori nell' espressioni generali dell' incognite x, y, e z, ed effettuando le operazioni indicate, troveremo

$$x = 4, y = 9, z = 3.$$

È importante osservare che le medesime espressioni serviranno ancora allorquando l' equazioni proposte non avranno tutti i termini affetti dal segno $+$, come sembran supporlo l' equazioni generali, dalle quali sono dedotte queste espressioni. Se si avessero, per esempio,

$$3x - 9y + 8z = 41,$$
$$-5x + 4y + 2z = -20,$$
$$11x - 7y - 6z = 37,$$

bisognerebbe, paragonando i termini di queste equazioni ai loro corrispondenti nell' equazioni generali, aver riguardo ai segni; il che darebbe

$$a = +3, b = -9, c = +8, d = +41,$$
$$a' = -5, b' = +4, c' = +2, d' = -20,$$
$$a'' = +11, b'' = -7, c'' = -6, d'' = +37,$$

e determinare in seguito, conforme alle regole del n.° 31., il segno, che debbe aver ciascun termine dell' espressioni generali di x, y, z dipendentemente dai segni de' fattori, dei quali è composto. Operando in questa maniera si troverebbe, per esempio, che il primo termine del denominatore comune, ch' è $ab'c''$, divenendo $+3 \times +4 \times -6$, cangia di segno, e produce -72. Facendo la medesima attenzione a' riguardo degli altri termini, tanto dei numeratori, che dei denominatori, e prendendo da una parte la somma di quelli, che

son positivi, e dall' altra di quelli, che son negativi, si troverà

$$x = \frac{2774 - 2834}{592 - 622} = \frac{-60}{-30} = +2,$$

$$y = \frac{3022 - 2932}{592 - 622} = \frac{+90}{-30} = -3,$$

$$z = \frac{3859 - 3889}{592 - 622} = \frac{-30}{-30} = +1.$$

Dell' Equazioni di secondo grado a una sola incognita.

90. Nell' equazioni, che ho trattato fin qui, le incognite non arrivavano che alla prima potenza, ovvero le diverse incognite non eran tampoco moltiplicate tra loro: queste equazioni non erano dunque che del *primo grado;* ma, se solamente si proponesse il Problema seguente: *Trovare un numero, il quale essendo moltiplicato pel suo quintupio, il prodotto sia eguale a* 125., designando questo numero per x, il suo quintuplo sarebbe $5x$, e si avrebbe

$$5x^2 = 125.$$

Quest' equazione è del *secondo grado* perchè dessa contiene x^2, ovvero la seconda potenza dell'incognita. Se si libera questa seconda potenza dal suo coefficiente 5, otterremo

$$x^2 = \frac{125}{5}, \text{ ovvero } x^2 = 25.$$

Non si saprebbe quì concludere il valor dell'incognita come nel n.° 11., ed il Problema proposto è solamente condotto a *trovare un numero, il quale moltiplicato per se stesso dia* 25. Con un poco d' attenzione si riconosce che questo numero è 5., ma

succede raramente che si possa indovinare così la soluzione cercata; siamo dunque condotti a questo nuovo Problema aritmetico: *Trovare un numero, che moltiplicato per se stesso dia un prodotto eguale ad un numero proposto*, ovvero, ch'è la stessa cosa, ritornar dalla seconda potenza al numero, che l'ha prodotta, e che si chiama la sua *radice quadrata*. Vado a occuparmi primieramente della risoluzione di questo Problema, perchè dessa servirà per determinar le incognite in tutte l'equazioni di secondo grado.

91. Il metodo, che bisogna impiegare all'oggetto di trovare, o *estrar* le radici dei numeri, suppone che si conoscano le seconde potenze di quelli, che sono espressi per mezzo d'una sola cifra; ecco dunque i nove primi numeri colle loro seconde potenze scritte al disotto di ciascheduno

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Si vede da questa Tavola che la seconda potenza d'un numero espresso da una sola cifra non ne contien più di due: 10, ch'è il più piccol numero espresso da due cifre, n'ha tre nel suo quadrato 100. Per prepararsi a decompor la seconda potenza d'un numero espresso da due cifre, bisogna prima studiarne la formazione; e per questo, vado a cercare come ciascuna parte del numero 47, per esempio, concorra alla produzione del quadrato di questo numero.

Si può decomporre il 47 in $40+7$, ovvero in 4 diecine, e 7 unità; rappresentando per a le diecine del numero proposto, e per b le sue unità, la di lui seconda potenza sarà espressa per

$$(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2,$$ e

vale a dire, ch'essa conterrà tre parti, cioè: *il*

quadrato delle diecine, due volte il prodotto delle diecine per le unità, ed il quadrato delle unità. Nell'esempio, che ho scelto, $a = 4$ diecine, ovvero 40 unità, e $b = 7$ unità; avrem dunque

$$a^2 = 1600$$
$$2ab = 560$$
$$b^2 = 49$$

totale $a^2 + 2ab + b^2 = 2209 = 47 \times 47$.

Per ritornare adesso dal numero 2209 alla sua radice 47, osserveremo primieramente che il quadrato delle diecine 1600, non ha cifre significative d'un ordine inferiore alle centinaja, e ch'egli è il maggior quadrato, che possano contenere le 22 centinaja di 2209, poichè 22 cade tra 16, e 25, vale a dire tra il quadrato di 4, e quello di 5, come il 47 cade tra 4 diecine, ovvero 40, e 5 diecine, ovvero 50.

Se dunque cerchiamo il maggior quadrato contenuto in 22 troveremo 16, la cui radice 4 esprimerà le diecine di quella di 2209: togliendo in seguito 16 centinaja, ovvero 1600, da 2209, il resto 609 conterrà ancora il doppio prodotto delle diecine per le unità, cioè 560, ed il quadrato delle unità, o sivvero 49. Ma il doppio prodotto delle diecine per le unità non avendo cifre d'un ordine inferiore alle diecine dee trovarsi nelle due prime cifre 60 del resto 609, le quali conterranno in oltre le diecine provenute dal quadrato dell'unità. Frattanto, se dividiamo 60 per il doppio delle diecine 8, avremo, trascurandone il resto, un quoziente 7 eguale alle unità ricercate. Dipoi, moltiplicando 8 per 7, formeremo il doppio prodotto delle diecine per le unità, cioè 560, il quale tolto dal resto totale 609, otterremo una differenza 49, la quale debb'essere, e lo è difatto, il quadrato delle unità.

L'operazione, della quale ho sin quì ragionato, si dispone nel modo seguente:

22, 09	47
16	87
60,9	
609	
000.	

Si scrive il numero proposto come se si trattasse di dividerlo per un altro, e si destina per la radice il posto, che dovrebbe occupare il divisore. Dipoi si separano per mezzo d'una virgola le unità, e le diecine, affine di non considerare che le due prime cifre sulla sinistra, le quali debbono contenere il quadrato delle diecine della radice. Si cerca il maggior quadrato 16 contenuto in queste due cifre; si porta la radice 4 al posto, che le è stato destinato, e si toglie 16 da 22.; allato del resto 6 s' abbassano le due altre cifre 09 del numero proposto; si separa l'ultima, che non entra nel doppio prodotto delle diecine per le unità; si divide la parte restante a sinistra per 8, doppio delle diecine della radice; il che dà per quoziente le unità 7; e per formar simultaneamente le due ultime parti del quadrato, che deggion esser contenute in 609, si scrive 7 allato di 8, e ne resulta 87 eguale al doppio delle diecine, più le unità, ovvero $2a+b$, il quale essendo moltiplicato per 7, ossia per b, riproduce $609 = 2ab+b^2$, ovvero il doppio prodotto delle diecine per le unità, più il quadrato delle unità: facendo la sottrazione non resta niente, e l'operazion terminata prova che 47 è la radice quadrata di 2209.

Si debba ancora estrar la radice quadrata

da 324; dispongo l'operazione nel modo, che segue:

3, 24	18
1	
22,4	28
224	
000	

;

e secondo ciò, ch'è stato già detto, trovo 1 per le diecine della radice; queste diecine essendo raddoppiate, danno il numero 2, per il quale bisogna dividere le due prime cifre 22 del resto. Ora 22 contiene 2 undici volte, e nella radice non solamente non si può avere nè più di 10 nè 10, ma anco il 9 stesso sarebbe troppo grande nel caso attuale; poichè scrivendo 9 allato di 2, e moltiplicando 29 per 9, come la regola lo prescrive, s'avrebbe per resultato 261, il quale non può togliersi da 224. Non si dee dunque riguardare la divisione di 22 per 2 sennonchè come un mezzo approssimativo per trovar le unità, e bisogna diminuire il quoziente ottenuto fino a tanto che arrivisi ad un prodotto, che non sorpassi il resto 224; condizione, alla quale sodisfà il numero 8., poichè $8 \times 28 = 224$; dunque la radice cercata è 18.

Formando le tre parti del quadrato di 18, si trova:

$$a^2 = 100$$
$$2ab = 160$$
$$b^2 = 64$$

totale $324 = 18 \times 18.$,

e si vede che le sei diecine, le quali son contenute nel quadrato dell'unità, essendo riunite a 160, doppio prodotto delle diecine per le unità, alteran questo prodotto di maniera che la divi-

sione pel doppio delle diecine non può sempre dare le sole unità.

92. L'estrazione della radice quadrata d'un numero composto di tre, o quattro cifre, non dee portare difficoltà dopo ciò, che precede; ma è necessaria ancora qualche maggior particolarità per porre il Lettore in istato d'estrar la radice da un numero espresso da quante cifre si vogliano; e ciò vedrem che dipende dai principj digià spiegati.

Ogni numero intero al disotto di 100 non avrà che quattro cifre nel suo quadrato, poichè quello di 100 è 10000, ovvero, il più piccol numero espresso da cinque cifre. Ciò posto, per esaminare la formazion del quadrato d'un numero di sopra 100, di 473, per esempio, si potrà decompor questo numero in $470+3$, ovvero 47 diecine più 3 unità; e per dedurre il suo quadrato dalla formula

$$a^2+2ab+b^2$$

faremo $a=47$ diecine $=470$ unità, $b=3$ unità, d'onde

$$\begin{array}{rr} a^2= & 220900 \\ 2ab= & 2820 \\ b^2= & 9 \\ \hline \text{Totale} & 223729=473\times473. \end{array}$$

Si vede perciò in quest'esempio che il quadrato delle diecine non ha cifre significative d'un ordine inferiore alle centinaja, e ciò debb'essere in generale, poichè delle diecine moltiplicate per delle diecine producon sempre delle centinaja (*Aritm.* 32).

Dunque nella parte 2237, che resta sulla sinistra del num.° proposto, dopo che n'avrem separate le diecine, e le unità, dobbiam cercare il quadrato delle diecine; e siccome 473 cade tra 47

diecine, ovvero 470, e 48 diecine, ovvero 480, il 2237 dee cadere tra il qnadrato di 47, e quello di 48; dal che procede che il maggior quadrato contenuto in 2237 sarà quello di 47, ovvero delle diecine della radice. E' evidente che, per trovare queste diecine, bisogna operare come se si volesse estrar la radice quadrata da 2237; ma, in vece di giunger così ad un resultato esatto, si troverà un resto contenente le centinaja formate dal doppio prodotto delle 47 diecine moltiplicate per le unità.

Per effettuare il calcolo, si dispone l'operazione come si vede quì appresso:

22,37,29	473
16	87
63,7	943
60 9	
282,9	
282 9	
000 0	

Si separano in primo luogo le due ultime cifre 29, e per estrar la radice dal numero 2237, che resta sulla sinistra, si separano pure le due ultime cifre 37 di questo numero; in questa maniera il numero proposto è diviso in membri di due cifre ciascuno, andando dalla destra verso sinistra. S'opera sopra i primi due membri come abbiam fatto nel numero precedente sul numero 2209, e si ottengono le due prime cifre della radice 47, ma si trova un resto 28, il quale unito alle due cifre 29 dell'ultimo membro contiene il doppio del prodotto di 47 diecine per le unità, ed il quadrato del-

le unità. Si separa la cifra 9, la quale non può far parte del doppio prodotto delle diecine per le unità, e si divide 282 per 94, doppio di 47 diecine; scrivendone il quoziente 3 allato del 94, e moltiplicando 943 per 3, viene 2829; numero precisamente eguale all' ultimo resto; e l' operazione è così terminata.

93. Per far vedere come si debba operare sopra un numero qualunque, passo ad estrar la radice da 22391824. Qualunque sia questa radice, possiamo sempre concepirla decomposta in diecine, e unità, come negli esempj precedenti. Il quadrato delle diecine non avendo alcuna cifra significativa d' un ordine inferiore alle centinaja, le due ultime cifre 24 non potranno esservi comprese. Si separeranno dunque, e il Problema sarà ridotto primieramente a cercare il maggior quadrato contenuto nella parte 223918, che resta a sinistra. Questa parte essendo composta di più di due cifre, bisogna concludere che il numero, il quale esprime le diecine della radice cercata, ha più d' una cifra; questo numero può dunque anch' esso esser decomposto in diecine, e unità. Il quadrato di queste diecine non entrando nelle due ultime cifre 18 della parte 223918, sarà dunque nelle cifre 2239, che restano a sinistra, dove bisognerà cercare questo quadrato; e poichè 2239 ha pure più di due cifre, il quadrato, ch' egli dee contenere, ne conterrà almeno due nella sua radice; il numero esprimente le diecine, che noi cerchiamo, avrà dunque più d' una cifra. È finalmente perciò in 22, che bisogna cercare il quadrato di quel numero, che rappresenta le unità dell' ordine il più elevato della dimandata radice. Da questa serie di ragionamenti, che si possono spingere tanto lontano che si

vorrà, il numero proposto si troverà diviso in membri di due cifre andando dalla destra a sinistra: è necessario nulladimeno d'essere prevenuti che l'ultimo membro a sinistra potrà non contener che una sola cifra.

Il numero proposto essendo così diviso in membri, e disposto come si vede nell'esempio, che segue, s'opera sui tre primi membri come nell'esempio del num.° antecedente; ed allorchè avrem trovate le tre prime cifre 473, allato al resto 189 abbasseremo il quarto membro 24, e si considera il numero 18924 come contenente il doppio prodotto delle 473 diecine trovate per le unità cercate più il quadrato di queste unità. Si separa l'ultima cifra 4, e si dividono quelle, che restano a sinistra, per 946, doppio di 473, e si fa in seguito la verificazion del quoziente 2, come nelle operazioni antecedenti.

22, 39, 18, 24	4732
16	87
63,9	943
609	9462
301,8	
2829	
1892,4	
1892 4	
0000 0	

L'operazione si termina a questo punto nell'esempio precedente; ma è facil vedere che, se vi fosse un membro di più, le quattro cifre trovate 4732 esprimerebbero le diecine d'una radice, di cui si cercherebbero le unità, e che, per conseguenza, bisognerebbe dividere il resto, che allora si avrebbe, più la prima cifra del membro seguente pel doppio di queste diecine, e così di seguito per ciascuno dei membri da successivamente abbassarsi.

94. Se succedesse che, dopo avere abbassato un membro, il resto unito alla prima cifra di questo membro non contenesse il doppio delle cifre

trovate, bisognerà porre o nella radice; poichè allora la radice non averebbe unità di quest' ordine: si abbasserebbe in seguito il membro seguente per continuare l' operazione secondo il solito. L' esempio quì unito è relativo a questo caso; non si sono scritte le quantità da sottrarsi, ma si son effettuate le sottrazioni a mente come nella divisione.

49,42,09	703
04,20,9	1403
00 00 0	

95. Tutti i numeri proposti non son quadrati perfetti, e gettando gli occhi sulla Tavola alla pagina 143. si vede che tra i quadrati di ciascuno dei nove primi numeri esistono delle lacune comprendenti più numeri, i quali non hanno la corrispondente radice; 45, per esempio, non è un quadrato, poichè cade tra 36, e 49. Succederà il più delle volte che il numero, del quale si cercherà la radice quadrata, non l'avrà; ma operando come se il numero l' avesse, il resultato sarebbe la radice del maggior quadrato possibile, ch' esso contiene. Se si cerca, per esempio, la radice di 2276, troveremo 47, e resterà 67; il che dimostra che il maggior quadrato contenuto in 2276 è quello di 47, ovvero 2209.

Siccome potrebbe restar dubbiezza, dopo d'aver trovata la radice del maggior quadrato contenuto in un numero, d' aver posta qualche cifra troppo debole nella radice, ecco un mezzo di riconoscere se il resto sia troppo considerabile, e se la radice trovata sia troppo piccola. Il quadrato di $a+b$ essendo

$$a^2+2ab+b^2,$$

se facciamo $b=1$, il quadrato di $a+1$ sarà

$$a^2+2a+1;$$

quantità, che differisce da a^2, quadrato di a, del

doppio di *a* più l'unità. Dunque, *se la radice trovata dovesse essere aumentata dell'unità, o di più dell'unità, bisognerebbe che il suo quadrato, tolto dal numero proposto, lasciasse un resto almeno eguale a due volte questa radice, più l'unità.* Tutte le volte che questa circostanza non avrà luogo, la radice estratta sarà sicuramente quella del maggior quadrato contenuto nel numero proposto.

96. Poichè, per moltiplicare una frazione per una frazione, bisogna moltiplicare i numeratori tra loro, come pure i denominatori, è manifesto che il prodotto d'una frazion per se stessa, ovvero *il quadrato d'una frazione è eguale al quadrato del suo numeratore, diviso per il quadrato del suo denominatore*. Segue da ciò che, *per estrar la radice quadrata da una frazione, bisogna estrar quella del suo numeratore, e quella del suo denominatore*. Così la radice di $\frac{25}{64}$ è $\frac{5}{8}$, perchè 5 è la radice quadrata di 25, e 8 quella di 64.

E una cosa importantissima da osservarsi che non solamente i quadrati delle frazioni propriamente dette son sempre delle frazioni, ma che *ogni numero frazionario irriducibile, essendo moltiplicato per se stesso, darà sempre un numero frazionario pure irriducibile.*

97. Questa proposizione riposa sulla seguente. *Ogni numero primo* P, *che divide il prodotto* A B *di due fattori* A, e B, *divide necessariamente uno di questi numeri.*

Suppongo che non divida B, e che B lo sorpassi. Designando per q il quoziente intero di questa divisione, e per B' il resto, avremo

$$B = qP + B',$$

di onde, moltiplicando per A, dedurremo

$$AB = q\,AP + AB',$$

e dividendo i due membri di quest'equazione per P, n'otterremo

$$\frac{AB}{P} = q\,A + \frac{AB'}{P},$$

dalla quale resulta che la divisibilità di A B per P porta quella del prodotto AB' pel medesimo numero. Ora B' essendo il resto della divisione di B per P, è necessariamente minore di P; così, non potendo dividersi B' per P, si dividerà P per B'; avremo un quoziente q', ed un resto B''; quindi si dividerà P per B'', avremo un quoziente q'', ed un resto B''', e così di seguito, poichè P è un numero *primo*.

Ciò posto, avremo questa serie d'equazioni

$$P = q'\,B' + B'', \qquad P = q''\,B'' + B''', \text{ ec.;}$$

e moltiplicando ciascuna di quest'equazioni per A, otterremo

$$AP = q'AB' + AB''; \qquad AP = q''AB'' + AB'''; \text{ ec.;}$$

dividendo per P, verrà

$$A = q'\frac{AB'}{P} + \frac{AB''}{P}, \quad A = q''\frac{AB''}{P} + \frac{AB'''}{P}, \text{ ec.;}$$

resultati, i quali fanno vedere che AB' essendo divisibile per P, i prodotti AB'', AB''', ec. lo debbon essere pure. Ma i resti B', B'', B''', ec. divenendo sempre più piccoli, si dee cader finalmente sull'unità, poichè le operazioni indicate quì sopra si continuano nella stessa maniera fintantochè i resti sorpassano 1, attesochè P è un numero *primo*; quando siamo arrivati all'unità, abbiamo il prodotto $A \times 1$, che debb'essere divisibil per P. Dunque anco A debb'esser divisibile per P.

Segue da ciò che, se il numero *primo* P, che si suppone non divider B, non dividesse A, non dividerebbe neppure il prodotto di questi numeri.

(*Questa dimostrazione è presso a poco estratta dalla Teoria dei numeri* di M. Legendre).

98. Adesso, allorchè la frazione $\frac{b}{a}$ è irriducibile, non vi è alcun numero *primo*, che possa dividere nel tempo stesso b, ed a; e siccome, dopo ciò che precede, ogni numero intero, che non divida a, non può dividere $a \times a$, ovvero a^2, e qualunque numero *primo*, che non divida b, non divide neppure $b \times b$, ovvero b^2, diviene evidente che la frazione $\frac{b^2}{a^2}$ è pure irriducibile come $\frac{b}{a}$.

99. Resulta da quest' ultima proposizione che *tutti i numeri interi, i quali non son quadrati perfetti, non possono aver radice non solamente in numeri interi, ma neppure in numeri frazionarj*. Frattanto si concepisce che debb'esistere una quantità, che moltiplicata per se stessa produca un numero qualunque, 2276, per esempio, e che in tal caso questa quantità è compresa tra 47, e 48; poichè 47×47 dà un prodotto minore di questo numero, 48×48 ne dà uno maggiore; e dividendo l'intervallo, che v'è tra 47, e 48, in frazioni, si trovan dei numeri, i quali moltiplicati per loro stessi danno dei prodotti maggiori del quadrato di 47, minori di quello di 48, ed approssimanti di più in più al numero 2276.

L'estrazione della radice quadrata, applicandola a numeri, i quali non son quadrati perfetti, dà dunque origine ad una nuova specie di numeri, nello stesso modo che la divisione genera le frazioni; ma evvi questa differenza tra le frazioni, e le radici de' numeri, i quali non son quadrati perfetti, cioè, che i primi, che si compongono sempre d' un numero esatto di parti dell' unità, hanno con quest' unità una *misura comune*, ovvero un rap-

porto espresso da dei numeri interi, laddove che i secondi non l' hanno.

Considerando l'unità come divisa in cinque parti, per esempio, s'esprima con nove di queste parti il quoziente della divisione di 9 per 5, ovvero $\frac{9}{5}$; $\frac{1}{5}$ essendo contenuto cinque volte nell' unità, e nove volte in $\frac{9}{5}$, è la *comune misura* dell' unità, e della frazione $\frac{9}{5}$, ed il rapporto di queste quantità è quello dei numeri interi 5, e 9.

E considerando che i numeri interi, come pur le frazioni, hanno coll' unità una misura comune, si dice che queste quantità sono *commensurabili* coll' unità, ovvero semplicemente *commensurabili*; e perchè le loro *ragioni*, o *rapporti* con l' unità son espressi da numeri interi, s' indicano pure i numeri interi, e le frazioni sotto la comun denominazione di *numeri razionali*.

Al contrario la radice quadrata d' un numero, il quale non è quadrata perfetto, è *incommensurabile*, ovvero *irrazionale;* perchè non potendo essere rappresentata da alcuna frazione, ne segue che in qualunque numero di parti si supponga divisa l' unità, non ve ne sarà mai alcuna, per quanto piccola sia, che possa misurare nel medesimo tempo, ed in una maniera esatta, questa radice, e l' unità.

Per indicare in generale una radice da estrarsi, sia che si possa ottenerla esattamente, o nò, ci serviamo del segno $\sqrt{\ }$, che chiamasi *radicale;*

$\sqrt{16}$ è la stessa cosa che 4.,

$\sqrt{2}$ è *incommensurabile*, o *irragionale*.

100. Benchè non si possa per mezzo d' alcun numero intero, o frazionario ottenere un' espressione esatta di $\sqrt{2}$, nulladimeno possiamo approssimarvi di tanto quanto si vuole convertendo que-

sto numero 2 in una frazione, il cui denominatore sia un quadrato; e la radice del numeratore, presa solamente in numeri interi, darà quella del numero proposto, espressa in parti della specie indicata dalla radice quadrata del denominatore.

Se si converta, per esempio, il nnmero 2 in 25.^{mi}, avremo $\frac{50}{25}$. La radice di 50 essendo 7 in numeri interi, e quella di 25 essendo esattamente 5, avremo $\frac{7}{5}$, ovvero $1\frac{2}{5}$ per la radice di 2; valore, che differisce dal vero meno d' un quinto.

101. È manifesto da questa operazione fondata sopra ciò, che abbiamo veduto nel num.° 96.°, cioè che il quadrato d' una frazione vien espresso da una nuova frazione, che abbia per numeratore il quadrato del numerator primitivo, e per denominatore il qnadrato del denominator primitivo ch' essa s' applica a qualunque specie di frazioni che sia, e più facilmente ancora alle *decimali*, che a tutte l' altre. Infatti segue dallo stesso principio che il quadrato d' un numero espresso in decimi debb' esser composto di centesimi, quello d' un numero espresso in centesimi debb' esserlo in dieci millesimi e così di seguito; e che in conseguenza *il numero delle cifre decimali del quadrato è sempre doppio di quello delle cifre della radice*. Quest'ultima osservazione può dedursi ancora dal principio della moltiplicazione de' numeti *decimali*, come quella che vuole che un prodotto contenga tante cifre *decimali* quante ve ne sono in uno insieme dei fattori e nell' altro. Nel caso attuale, il numero proposto, considerato come il prodotto della sua radice moltiplicata per se stessa, dee aver due volte tante cifre *decimali* quante n' ha questa radice.

Essendo ben inteso ciò, che precede, è facil concludere che, se si vuole ottenere la radice qua-

drata di 227, per esempio, approssimata fino alle centesime parti, bisogna ridur questo numero in diecimillesime, e vale a dire, aggiungere quattro *zeri* alla destra di questo numero, il che darà 2270000 diecimillesime; n' estrarremo dunque la radice come da un simil numero d' unità, ma per indicare che il resultato debb' essere in centesime, separereremo con una virgola le due ultime cifre alla destra. Troveremo in questa maniera che la radice di 227, dentro l' errore più piccolo d' una centesima parte, è 15,06. Eccone l' operazione:

2,27,00,00	1506
12,7	25
2 00 00	3006
1964	

Se il numero proposto contenesse di già dei *decimali*, bisognerebbe renderne il loro numero pari, esigendo ciò l' estrazione della radice. Affine d' estrarre, per esempio, la radice di 51,7, si porrebbe uno *zero* in seguito di questo numero perchè egli avesse almeno delle centesime, e s' estrarrebbe in appresso la radice quadrata da 51,70. Se si volesse avere una decimale di più, si porrebbero due *zeri* di più in seguito di questo numero, il che darebbe 51,7000, e troverebbesi 7,19 per la sua radice.

Quei, che vorranno esercitarsi, potran cercare le radici quadrate de' numeri 2, e 3 con sette *decimali*, il che esigerà ch' essi pongano quattordici *zeri* alla destra di questi numeri, e dovran trovare per resultati

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136, \quad \sqrt{3} = 1{,}7320508.$$

102. Allorchè avrem trovato più della metà

delle cifre, che si vogliono avere nella radice, si può ottenerne il rimanente mediante la sola divisione. Sia, per esempio, 32976; la radice quadrata di questo numero è 181 con un resto 215; dividendo questo resto 215 per 362 doppio di 181, e spingendo il quoziente fino a due *decimali*, avremo 0,59, che bisognerà unire a 181, d' onde ne resulterà 181, 59 per la radice di 32976, esatta almeno fino ai centesimi.

Per provar la legittimità di ciò, che precede, indico per N il numero proposto, per a la radice del maggior quadrato contenuto in questo numero, e per b ciò che bisogna aggiungere alla radice affine d'aver la radice esatta del numero proposto; avremo, dietro a queste denominazioni,

$$N = a^2 + 2ab + b^2,$$

ovvero $$N - a^2 = 2ab + b^2;$$

e dividendo per $2a$, troveremo

$$\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

Questo resultato dimostra che il primo membro potrà esser preso per il valore di b ogni qual volta la quantità $\frac{b^2}{2a}$ sarà minore d' un' unità dell' ordine il più basso, che trovisi in b. Ma il quadrato d'un numero non potendo avere al più che due volte tante cifre quante n' ha questo numero, ne segue che, se il numero delle cifre di a sorpassa il doppio di quelle di b, la quantità $\frac{b^2}{2a}$ sarà allora una frazione.

Nell' esempio precedente $a = 181$ unità, ovvero 18100 centesime, ha per conseguenza una cifra di più del quadrato di 59 centesime; così

la frazione $\frac{b^2}{2a}$ diviene allora $\frac{3481}{36100}$, e si trova assai al disotto d'un' unità della seconda parte 59, ovvero d'un centesimo d'unità della prima.

103. Ciò conduce ad un metodo per approssimarsi alla radice quadrata d'un numero per mezzo delle frazioni ordinarie, continuando indefinitamente il modo dell'estrazione delle radici; esso è fondato su ciò che a essendo la radice del maggior quadrato contenuto in N, b è necessariamente una frazione; e la quantità $\frac{b^2}{2a}$ essendo allora assai più piccola di b, si può trascurare.

Debbasi, per esempio, estrar la radice quadrata da 2; il maggior quadrato contenuto in questo numero essendo 1, dopo d'averlo tolto resta 1. Dividendo questo resto pel doppio della radice si trova $\frac{1}{2}$; prendendo questo quoziente per la quantità b, viene, per una prima approssimazione della radice, $1 + \frac{1}{2}$, ovvero $\frac{3}{2}$. Alzando questa radice al quadrato, si trova $\frac{9}{4}$, che tolti da 2, ovvero da $\frac{8}{4}$, danno per resto $-\frac{1}{4}$. In questo caso la formula

$$\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}$$

diviene

$$-\frac{1}{12} = b + \frac{b^2}{2a}:$$

prendendo $-\frac{1}{12}$ per b, verrà per la seconda approssimazione, $\frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$; quadrando $\frac{17}{12}$, si troverà $\frac{289}{144}$, quantità che sorpassa ancor 2, ovvero $\frac{288}{144}$: sostituendo $\frac{17}{12}$ in luogo di a, resulterà

$$-\frac{1}{12 \times 34} = b + \frac{b^2}{2a};$$

il che darà

$$b = -\frac{1}{12 \times 34} = -\frac{1}{408};$$

la terza approssimazione sarà dunque

$$\frac{17}{12} - \frac{1}{12 \times 34} = \frac{17 \times 34 - 1}{408} = \frac{577}{408}.$$

È facile continuar quest'operazione quanto vorrassi. Darò nel *Complemento* di questo Trattato altre formule più comode per estrar le radici generalmente.

104. All'effetto d'approssimarsi alla radice quadrata d'una frazione l'idea, che si offre in principio, è quella d'estrarre per approssimazione la radice quadrata dal numeratore, e finalmente dal denominatore; ma facendo un poco di riflessione, ci accorgeremo ben presto che si può evitare una di queste operazioni, operando in modo che il denominatore sia un quadrato perfetto, il che non riducesi ad altro che a moltiplicare i due termini della frazione proposta pel denominatore suddetto. Se si avesse, per esempio, da estrar la radice quadrata da $\frac{3}{7}$, si cangerebbe questa frazione in

$$\frac{3 \times 7}{7 \times 7} = \frac{21}{49},$$

moltiplicando i suoi due termini per il denominatore 7. La radice del numeratore di quest'ultima frazione, essendo presa in numeri interi, darà $\frac{4}{7}$ per radice quadrata di $\frac{3}{7}$; e questa radice differisce dal vero meno d'un settimo.

Per conseguire un maggior grado d'approssimazione, bisognerebbe convertire, almeno avvicinandosi al vero, la frazione $\frac{3}{7}$ in un'altra, il cui

denominatore fosse il quadrato d'un numero maggior di 7. Avrebbesi, per esempio, approssimata presso a $\frac{1}{15}$ la radice cercata, se si convertisse $\frac{2}{7}$ in 225^{mi}; poichè 225 è il quadrato di 15; così verrebbe $\frac{675}{7}$ di 225^{mi}, ovvero $\frac{96}{225}$; valore, che differisce dal vero meno di $\frac{1}{225}$; la radice di $\frac{96}{225}$ è tra $\frac{9}{15}$, e $\frac{10}{15}$, ma si approssima più alla seconda frazion che alla prima, perchè 96 è più vicino a 100 che 81: si avrebbe dunque $\frac{10}{15}$, ovvero $\frac{2}{3}$ per la radice di $\frac{3}{7}$, prossima al vero più di $\frac{1}{15}$:

Se si volessero impiegare i *decimali* per estrar la radice approssimata dal numeratore della frazione $\frac{21}{49}$, si troverebbe 4,583 per la radice approssimata del numeratore 21, e si dividerebbe questo resultato per la radice del nuovo denominatore. Spingendo il quoziente fino alla terza *decimale*, si trova 0,655.

105. Siamo attualmente in istato di risolver tutte l'equazioni, nelle quali non entra che la seconda potenza dell'incognita combinata con delle quantità cognite.

Serve per questo di *riunire in un solo membro tutti i termini affetti da questa potenza, poi liberarla dei suoi moltiplicatori per la regola del n.° 11.; si ottiene il valor dell'incognita estraendo la radice quadrata dall'altro membro.*

Sia, per esempio, l'equazione

$$\frac{5}{7}x^2 - 8 = 4 - \frac{2}{3}x^2.$$

Facendo sparire i divisori, trovasi primieramente

$$15x^2 - 168 = 84 - 14x^2.$$

Trasportando nel primo membro il termine $14x^2$, e nel secondo il termine 168, otterremo

$$15x^2 + 14x^2 = 84 + 168,$$

ovvero

$$29x^2 = 252,$$

e

$$x^2 = \frac{252}{29}$$

$$x = \sqrt{\frac{252}{29}}.$$

Bisogna osservar bene che per indicar la radice della frazione $\frac{252}{29}$ è necessario far passar l'apice del segno $\surd$ al disotto della linea, che separa il numerator dal denominatore. Se avessi scritto $\frac{\surd\overline{252}}{29}$, quest'espressione averebbe indicato il quoziente, che dà la radice quadrata del numero 252 quando s'è divisa per 29; resultato ben differente dal primo, nel quale la divisione debb'essere effettuata prima dell'estrazione della radice.

Sia ancora l'equazion letterale

$$a x^2 + b^3 = c x^2 + d^3;$$

operando come sulla precedente, avrem successivamente

$$a x^2 - c x^2 = d^3 - b^3$$

$$x^2 = \frac{d^3 - b^3}{a - c},$$

$$x = \sqrt{\frac{d^3 - b^3}{a - c}}.$$

Farò osservare in tal circostanza che, quando si vuole indicar la radice quadrata d'una quantità *complessa*, bisogna prolungar la linea superiore del *radicale* sopra tutta la quantità.

La radice della quantità $4 a^2 b - 2 b^3 + c^3$ si scriverebbe nel modo seguente

$$\surd\overline{4 a^2 b - 2 b^3 + c^3},$$

ovvero ancora

$$\surd (4 a^2 b - 2 b^3 + c^3),$$

sostituendo così alla linea superiore al *radicale* una parentesi contenente tutte le parti della quantità, dalla quale bisogna estrar la radice; e quest'ultima espressione è preferibile all'altra (35).

In generale, qualunque equazione di secondo grado della specie, che qui considero, potrà, per mezzo della trasposizion de' suoi termini, esser ridotta alla forma

$$\frac{p\,x^2}{q} = a,$$

$\frac{p}{q}$ indicando il coefficiente, qualunque sia, di x^2; e ricaveremo

$$x^2 = \frac{a\,q}{p},$$

$$x = \sqrt{\frac{a\,q}{p}}.$$

106. Per rapporto ai numeri assoluti questa risoluzione è completa, poichè essa riducesi a praticar sopra il numero, sia intero, sia frazionario, che rappresenta la quantità $\frac{a\,q}{p}$, un' operazione aritmetica, la quale conduce sempre ad un resultato esatto, o approssimante al vero di tanto quanto vorrassi; ma avendo riguardo ai segni, dai quali le quantità posson essere affette, l'estrazione della radice quadrata lascia un' ambiguità, mediante la quale ogni equazione di secondo grado è suscettibile di due soluzioni, mentre che quelle di primo grado non n' hanno che una.

Infatti, nell' equazion generale $x^2 = 25$, il valore di x essendo la quantità, che alzata al quadrato, produce 25, esso potrà, se si considerano le quantità algebriche, essere affetto indifferentemente dal segno $+$, o dal segno $-$; poichè, sia che s' indichi per $+5$, o per -5, avremo egualmente pel suo quadrato

$+5 \times +5 = +25$, ovvero $-5 \times -5 = +25$:

possiam dunque prendere

$$x = +5,$$

ovvero

$$x = -5.$$

Per la stessa ragione, in virtù dell'equazion generale

$$x^2 = \frac{aq}{p},$$

avremo indistintamente

$$x = +\sqrt{\frac{aq}{p}}$$

o sivvero

$$x = -\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

Queste due espressioni comprendonsi nella seguente

$$x = \pm\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

ove il doppio segno $\pm$ denota che può essere affetto alternativamente dal segno $+$, o dal segno $-$ il valor numerico di

$$\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

Nasce da ciò, che abbiamo osservato, questa regola generale, cioè, *che bisogna dare alla radice quadrata d'una quantità qualunque il doppio segno* $\pm$.

Seguendo questa regola, si potrebbe domandare perchè, x essendo la radice quadrata di x^2, non si dà anco a x il doppio segno $\pm$? Risponderemo primieramente con M.r Develey (*Algèbre d'Emile*, T. II.) che la lettera x essendo stata posta semplicemente senza segno (e vale a dire col segno $+$) come il simbolo dell'incognita, fa di me-

stieri determinarne il valore in questo stato, e che quando si cerca un numero x, il cui quadrato sia b, per esempio, non vi sono che queste due soluzioni possibili: $x = +\sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$. Oltrediciò, quand'anco, risolvendo l'equazione $x^2 = b$, si scrivesse $\pm x = \pm\sqrt{b}$, e si disponessero questi segni in tutti i modi possibili, cioè,

$$+x = +\sqrt{b}, \qquad -x = -\sqrt{b},$$
$$+x = -\sqrt{b}, \qquad -x = +\sqrt{b},$$

non si otterrebbe nulla di più; poichè cangiando il segno dei membri della seconda equazione di ciascuna linea (57.), ricaderebbesi sulle prime.

107. Segue pure dalla considerazione de' segni che, se il secondo membro dell'equazion generale

$$x^2 = \frac{aq}{p},$$

fosse un numero negativo, l'equazione sarebbe assurda; poichè il quadrato d'una quantità affetta tanto dal segno $+$ quanto dal segno $-$ essendo sempre affetto dal segno $+$, non si può trovare nè nell'ordine delle quantità positive, nè in quel delle negative alcuna quantità, il cui quadrato sia negativo.

S'esprime questa particolarità allorchè diciamo che *la radice d'una quantità negativa è immaginaria*.

Se s'arrivasse all'equazione

$$x^2 + 25 = 9,$$

ricaveremmo

$$x^2 = 9 - 25,$$

ovvero

$$x^2 = -16:$$

ora, non v'è alcun numero, che moltiplicato per

se stesso possa mai produrre — 16. È vero per altro che — 4 moltiplicato per + 4 dà — 16; ma queste due quantità, avendo un segno diverso, non posson esser considerate come eguali, ed il loro prodotto non è per conseguenza un quadrato. Vedremo in seguito nuovi schiarimenti su questa specie di contradizione, che bisogna ben distinguer da quella del n.° 58, che un semplice cangiamento al segno dell' incognita ha fatto sparire: nel caso presente è il segno del quadrato x^2, che bisognerebbe cangiare.

108. Un' equazione di secondo grado a una sola incoguita, per esser completa, dee contenere tre specie di termini, cioè, termini affetti dal quadrato dell' incognita, altri affetti dall' incognita al primo grado, altri finalmente tutti cogniti: tali son l' equazioni

$$x^2 - 4x = 12, \qquad 4x - \tfrac{3}{5}x^2 = 4 - 2x.$$

La prima è, a qualche riguardo, più semplice della seconda, perchè essa non contien che tre termini, il quadrato di x è preso positivamente, e non ha per coefficiente che l' unità. L' equazioni di secondo grado, prima di risolverle, si pongon sempre sotto quest' ultima forma; di tal maniera che desse posson esser allora rappresentate dalla formula seguente

$$x^2 + px = q,$$

p, e q indicando quantità cognite, sì positive che negative.

E manifesto che ridurremo qualunque equazione di secondo grado a questo stato, 1.° passando in un sol membro tutti i termini affetti da x (10); 2.° cangiando il segno a ciascun termine dell' equazione per render positivo quello di x^2, s' esso era negativo in principio (57); 3.° dividendo tutti,

termini dell' equazione pel moltiplicatore di x^2, se questo quadrato lo ha (11), ovvero moltiplicando pel suo divisore, se desso è diviso (12).

Applicando queste regole all' equazione

$$4x - \tfrac{3}{5}x^2 = 4 - 2x,$$

essa diviene, allorchè si passano nel primo membro i termini affetti da x,

$$-\tfrac{3}{5}x^2 + 6x = 4;$$

quando si cangiano i segni,

$$\tfrac{3}{5}x^2 - 6x = -4;$$

quando si moltiplica pel divisore 5,

$$3x^2 - 30x = -20;$$

e quando dividesi pel moltiplicatore 3,

$$x^2 - 10x = -\tfrac{20}{3}.$$

Paragonando quest' equazione colla formula generale

$$x^2 + px = q,$$

s' avrà, per questo caso pasticolare,

$$p = -10, q = -\tfrac{20}{3}.$$

109. Affin d' arrivare alla soluzione dell' equazioni così preparate, bisogna rammentarsi quello, che ho fatto osservare (34), cioè, che il quadrato d'una quantità composta di due termiui contien sempre il quadrato del primo termine, il doppio del primo termine moltiplicato per il secondo, ed il quadrato del secondo; e che per conseguenza il primo membro dell' equazione

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

nella quale a, e b sono quantità cognite, è un quadrato perfetto, cioè quello di $x + a$, o sivvero che ne resulta

$$(x + a)(x + a) = b.$$

Prendendo la radice quadrata del primo membro; e indicandone quella del secondo, avremo

$$x + a = \pm \sqrt{b};$$

equazione, che non è altro se non che del primo grado per rapporto all'incognita x, e dà, trasponendo,

$$x = -a \pm \sqrt{b}.$$

Un'equazione di secondo grado sarebbe dunque facilmente risoluta s'essa fosse ridotta alla forma

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

e vale a dire, se il suo primo membro fosse un quadrato.

Ma il primo membro dell'equazion generale

$$x^2 + px = q$$

contiene di già due termini, che possono riguardarsi come facienti parte del quadrato d'un binomio, cioè x^2, che sarà il quadrato del primo termine x, e px, che sarà il doppio del primo moltiplicato per il secondo, il quale non può essere in conseguenza se non che la metà di p, ovvero $\frac{1}{2}p$. Per terminare il quadrato del binomio $x + \frac{1}{2}p$, sarebbe necessario ancora il quadrato del secondo termine $\frac{1}{2}p$; ma questo quadrato può esser formato, poichè p, ed $\frac{1}{2}p$ sono quantità cognite, e può ben essere aggiunto in seguito al primo membro, purchè s'aggiunga nel medesimo tempo ancora al secondo affine di conservarne l'eguaglianza; quest'ultimo membro resterà sempre tutto cognito.

Il quadrato d'un $\frac{1}{2}p$ essendo $\frac{1}{4}p^2$, la sua addizione ai due membri dell'equazion proposta

$$x^2 + px = q$$

la cangia nella seguente

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2;$$

resultato, il cui primo membro è il quadrato di

$x + \frac{1}{2}p$: prendendo dunque la radice quadrata dei due membri, ho

$$x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} \qquad (106),$$

e trasponendo, viene

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2},$$

dalla quale successivamente ricavasi

$$x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2},$$

$$x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}.$$

Ho dato il segno + al secondo termine $\frac{1}{2}p$ della radice del primo membro dell' equazione proposta a motivo che il secondo termine di questo membro era positivo; fa di mestieri porre il segno — nel caso contrario, perchè il quadrato $x^2 - 2ax + a^2$ corrisponde al binomio $x - a$.

La risoluzione d' un' equazione qualunque di secon do grado otterrassi paragonando quest' equazione alla formula generale

$$x^2 + px = q,$$

oppure applicando immediatamente all' equazion proposta l' operazione, che abbiamo fatta su questa formula, la quale può enunciarsi così:

Rendere il primo membro dell' equazion proposta un quadrato perfetto, aggiungendovi, come al secondo membro, il quadrato della metà della quantità, che moltiplica la prima potenza dell' incognita; eguagliare in seguito le radici quadrate di ciascun membro, avvertendo che quella del primo è composta dell' incognita, e della metà della quantità data, che la moltiplica nel secondo termine, presa col segno di questa quantità; e che la radice del secondo membro debb' essere preceduta dal doppio segno ±, e indicata dal segno √, s' essa non può ottenersi immediatamente.

Eccone degli esempj.

110. *Trovare un numero tale, che aggiungendolo 7 volte al suo quadrato, la somma sia* 44.

Indicando per x il numero cercato, l'equazione sarà evidentemente

$$x^2 + 7x = 44.$$

Per risolverla, prendo $\frac{7}{2}$, metà del coefficiente 7, che moltiplica x, ed alzandolo a quadrato, ho la quantità $\frac{49}{4}$, che aggiungo a ciascun membro nel modo, che segue,

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4};$$

e riducendo il secondo membro in una sola frazione, viene

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \frac{225}{4}.$$

La radice quadrata del primo membro è, secondo la regola precitata, $x + \frac{7}{2}$, e si trova per quella del secondo $\frac{15}{2}$; abbiam dunque l'equazione

$$x + \frac{7}{2} = \pm \frac{15}{2},$$

dalla quale ricavasi

$$x = -\frac{7}{2} \pm \frac{15}{2},$$

ovvero $$x = -\frac{7}{2} + \frac{15}{2} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$x = -\frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{22}{2} = -11.$$

Il primo valore di x risolve il Problema nel senso del suo enunciato; poichè abbiamo per questo valore

$$x^2 = 16,$$
$$7x = 28,$$

somma . . . . . 44.

Quanto al secondo, siccom' esso è affetto dal segno —, il termine $7x$ diventando

$$7 \times -11 = -77,$$

debb' esser tolto da x^2, in modo che l'enunciato del Problema risoluto dal numero — 11 è il seguente:

Trovare un numero tale, che tolto 7 volte dal suo quadrato, resti 44.

Il valor negativo modifica dunque quì il Problema in una maniera analoga a quella, che abbiam veduta per l'equazioni di primo grado.

Se ponesi in equazione l'enunciato quì sopra, otterremo

$$x^2 - 7x = 44,$$

e risolvendola verrebbe

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4},$$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{225}{4}$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm\frac{15}{2},$$

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{15}{2},$$

$$x = \frac{22}{2} = 11,$$

$$x = \frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Il valor negativo di x è divenuto positivo, perchè desso sodisfà letteralmente al nuovo enunciato, ed il valor positivo, che non vi sodisfà nella stessa maniera, è divenuto negativo.

Da ciò si fa chiaro che, rispetto al secondo grado, l'Algebra riunisce nella medesima formula due Problemi, che hanno tra loro una certa analogìa.

111. Qualche volta gli enunciati, i quali portano ad equazioni di secondo grado, son suscettibili di due soluzioni; il seguente è in questo caso.

Trovare un numero, che, se s' aggiunga 15 *al suo quadrato, la somma sia eguale a* 8 *volte lo stesso numero.*

Sia x il numero cercato; l' equazion del Problema sarà

$$x^2 + 15 = 8x.$$

E ponendo quest' equazione sotto la forma prescritta dal n.° 108, avremo

$$x^2 - 8x = -15,$$
$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16,$$
$$x^2 - 8x + 16 = 1,$$
$$x - 4 = \pm 1,$$
$$x = 4 \pm 1,$$

ovvero

$$x = 5,$$
$$x = 3.$$

Vi son dunque due numeri differenti 5, e 3, i quali godono della comua proprietà compresa nell' enunciato.

112. Qualche volta pure s' incontrano degli enunciati, i quali non posson essere risoluti in alcun modo nel loro senso preciso, e che debbon esser modificati; uno di questi casi è quello dove le due radici dell' equazione son *negative*, come quelle della seguente

$$x^2 + 5x + 6 = 2.$$

Quest' equazione, la quale dice che *il quadrato del numero cercato, aumentato di* 5 *volte questo numero, e ancora di* 6, *dee dare una somma eguale a* 2, non può evidentemente essere verificata per addizione, come richiedesi; poichè di

già 6 sorpassa 2: infatti, se si risolve, trovasi successivamente

$$x^2 + 5x = -4,$$

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4},$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm\frac{3}{2},$$

$$x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1,$$

$$x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4.$$

I segni $\pm$, dai quali son affetti i numeri 1, e 4, fan vedere che il termine $5x$ debb' esser tolto dagli altri, ovvero che l' enunciato dee, per i due valori, esser espresso come segue:

Trovare un numero tale, che se si tolga 5 volte dal suo quadrato, e che al resto si aggiunga 6, s' abbia 2 per resultato.

Quest' enunciato somministra l' equazione

$$x^2 - 5x + 6 = 2,$$

che dà per x i due valori *positivi* 1, e 4.

113. Sia dato ancora questo Problema:

Dividere un numero p *in due parti, il cui prodotto sia eguale a* q.

Designando per x una di queste parti, l' altra sarà espressa da $p - x$, e il lor prodotto sarà $px - x^2$; avrem dunque l' equazione

$$px - x^2 = q,$$

ovvero, cangiando i segni,

$$x^2 - px = -q:$$

risolvendo quest' ultima equazione, si troverà

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Se, per particolarizzare il Problema, si facesse

$$p = 10, q = 21,$$

s' avrebbe

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21},$$

oppure

$$x = 5 \pm 2,$$

$$x = 7,$$

$$x = 3,$$

e vale a dire che una delle parti sarebbe 7, e l'altra per conseguenza $10 - 7$, ossia 3.

Se al contrario si prendesse 3 per x, l' altra parte sarebbe $10 - 3$, ovvero 7; di maniera che, per rapporto all' enunciato attuale, il Problema non ha, a parlar propriamente, che una soluzione, poichè la seconda non è che un cangiamento d' ordine tralle parti.

L' ispezione attenta del valore di x fa vedere che nel Problema, di cui si tratta, non si posson prendere indistintamente i numeri p, e q; poichè, se q sorpassasse $\frac{p^2}{4}$, ovvero il quadrato di $\frac{1}{2}p$, la quantità $\frac{p^2}{4} - q$ sarebbe *negativa*, e si ricaderebbe sul carattere d' assurdità osservato nel n.° 107.

Se si prendesse, per esempio,

$$p = 10, \text{ e } q = 30,$$

verrebbe

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 30} = 5 \pm \sqrt{-5};$$

il Problema sarebbe dunque impossibile con questi dati.

114. L' assurdità dei Problemi, che conducono a delle radici immaginarie, non si manifesta che in virtù della conclusione; e dobbiamo desiderar di conoscere da dei caratteri dipendenti, e più

prossimi all' enunciato, in che cosa consista l' assurdità del Problema, dalla quale risulta quella della sua soluzione; questo è ciò, che ci sarà fatto conoscere in una maniera precisa dalla considerazione seguente.

Sia d la differenza delle due parti del numero proposto; la maggiore sarà $\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$, la minore $\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$ (3); ora, è dimostrato (29, 30, e 34) che

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{d}{2}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}:$$

dunque il prodotto delle due parti del numero proposto, qualunque esse sieno, sarà sempre minore di $\frac{p^2}{4}$, ovvero del quadrato della metà della loro somma, fino a che d non sarà nullo; e quando questa circostanza abbia luogo, ciascuna di queste due parti essendo eguale a $\frac{p}{2}$, il loro prodotto non è che $\frac{p^2}{4}$: egli è dunque assurdo il dimandar ch' esso sia maggiore; ed è con ragione che l' Algebra, rispondendo allora in una maniera contraddittoria ai principj, prova per questa ragione che ciò, che cerchiam, non esiste.

L' equazione

$$x^2-px=-q,$$

ottenuta dal precedente Problema, comprende tutte quelle del secondo grado ove q è *negativo* nel secondo membro; le sole nelle quali si possano incontrar radici *immaginarie*, poichè il termine $\frac{p^2}{4}$ posto sotto il radicale conserva sempre il

segno $+$, qualunque sia quello di p. Infatti, supponendo che p fosse *negativo*, avrebbesi allor l'equazione

$$x^2 + px = -q, \text{ ovvero } x^2 + px + q = 0,$$

che non può ammettere alcuna soluzion *positiva*, poichè il suo primo membro non contiene che termini addittivi. Per saper se l'incognita x potesse essere *negativa*, servirebbe cangiare x in $-y$; il che renderebbe y *positivo*, e darebbe l'equazione

$$y^2 - py + q = 0, \text{ ovvero } y^2 - py = -q,$$

la quale è precisamente quella del num.° antecedente: ora, dietro ciò, che precede, non potendo esistere de' valori per y, non ve ne son dunque neppure per x.

Dalle osservazioni fatte quì sopra si vede come, e perchè, *allorquando il termine tutto cognito d'un' equazione del secondo grado è negativo nel secondo membro, e maggior del quadrato della metà del coefficiente della prima potenza dell'incognita, quest'equazione non può avere che delle radici* immaginarie.

115. L'espressioni

$$\sqrt{-b}, \quad a + \sqrt{-b},$$

ed in generale quelle, che comprendono la radice quadrata d'una quantità negativa, si chiamano *quantità immaginarie* (*). Queste altro non sono che dei simboli d'assurdità, i quali tengono il luogo del valore, che avremmo ottenuto se il Problema fosse stato possibile.

Non si trascuran essi nel calcolo, perchè suc-

(*) Sarebbe più esatto il dire *espressioni*, o *simboli immaginarj*, perocchè questi non son quantità.

cede qualche volta che combinandoli, dietro a certe leggi, l'assurdità si distrugge, ed il resultato divien reale. Se ne troveran degli esempj nel *Complemento*.

116. Siccome importa molto pei principianti d'acquistare delle nozioni esatte sopra tutti i *fatti* d'Analisi, che sembrano allontanarsi dall'idee comuni, ho creduto che bisognasse ancora aggiungere qualche schiarimento a ciò, che abbiam veduto (106) sulla necessità d'ammettere due soluzioni nell'equazioni di secondo grado.

Vado a dimostrare che, *se esiste una quantità* a, *la quale sostituita in luogo di* x *sodisfaccia all'equazione di secondo grado* $x^2 + px = q$, *e sia, per conseguenza, il valor di* x, *quest'incognita avrà pure un altro valore*. Difatto, se sostituiscasi a in luogo di x, ne resulterà $a^2 + pa = q$; e poichè, per ipotesi, a è il valor di x, q sarà necessariamente eguale alla quantità $a^2 + pa$: potrem dunque scrivere questa quantità in luogo di q nell'equazione proposta, la quale diventerà perciò

$$x^2 + px = a^2 + pa.$$

Trasportando tutti i termini del secondo membro nel primo, verrà

$$x^2 + px - a^2 - pa = 0,$$

che potremo scriver così

$$x^2 - a^2 + p(x - a) = 0;$$

ed a motivo che

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \quad (34),$$

si vede immediatamente che il primo membro è divisibile per $x - a$, e dà un quoziente esatto, cioè, $x + a + p$: abbiam dunque, in conseguenza di ciò,

$$x^2 + px - q = x^2 - a^2 + p(x - a) = (x - a)(x + a + p).$$

È evidente adesso che un prodotto è eguale a *zero* allorquando uno qualunque de' suoi fattori diviene *zero*; si dee dunque avere

$$(x-a)(x+a+p)=0$$

non solamente quando $x=a$, il che dà

$$x-a=0,$$

ma ancora quando $x+a+p=0$, da cui resulta

$$x=-a-p.$$

È dunque dimostrato che, se a è un dei valori di x, $-a-p$ sarà necessariamente l'altro.

Questo resultato s'accorda coi due valori compresi nella formula

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};$$

poichè, prendendo per a il primo, $-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, per esempio, si troverebbe per l'altro

$$-a-p=+\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}-p=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2},$$

ch'è infatti la seconda *radice*.

Tornerò in seguito sopra queste osservazioni, le quali contengono il germe della *Teoria generale dell'equazioni* d'un grado qualunque.

117. La difficoltà di porre i Problemi in equazione è per il secondo grado, e in generale per qualunque grado che sia, la stessa che per il primo, e consiste sempre nella maniera di sviluppare tutte le condizioni distinte, comprese nell'enunciato, e d'esprimerle per mezzo dei caratteri Algebrici. I Problemi precedenti non offrivano alcuna difficoltà a questo riguardo, ma dobbiam essere sufficientemente esercitati riguardo a quelli del primo grado; frattanto vado a risolvere alcuni Problemi, i quali daranno luogo a molte utili osservazioni.

Si sono impiegati due operaj, i quali gua-

dagnano dei salarj differenti; il primo, essendo stato pagato alla fine d'un certo numero di giorni, ha ricevuto 96 *franchi; e il secondo, che ha lavorato* 6 *giorni di meno, non ha avuto che* 54 *franchi; se questo avesse lavorato tutti i giorni, e l'altro avesse mancato per* 6 *giorni, essi avrebbero ricevuto ambedue la stessa somma: si domanda quanti giorni ciascuno ha lavorato, ed il prezzo della loro respettiva giornata.*

Questo Problema, che sembrava a prima vista contener molte incognite, si risolve facilmente per mezzo d' una sola, poichè l' altre s' esprimono agevolmente per mezzo di questa.

Designando per x il numero de' giorni del lavoro del primo operajo,

$x-6$ sarà quello de' giorni del lavoro del secondo,

$\frac{96^{fr.}}{x}$ sarà il prezzo della giornata del primo operajo,

$\frac{54^{fr.}}{x-6}$ quello della giornata del secondo.

se quest' ultimo avesse lavorato per x giorni, avrebbe guadagnato

$$x \times \frac{54}{x-6}, \text{ ovvero } \frac{54x}{x-6},$$

ed il primo lavorando solamente per $x-6$ giorni, non averebbe avuto che

$$(x-6)\frac{96}{x}, \text{ o sivvero } 96\frac{(x-6)}{x}:$$

l' equazion del Problema sarà dunque

$$\frac{54x}{x-6} = \frac{96(x-6)}{x}.$$

È necessario primieramente fare sparire i denominatori di quest' equazione, e s' ottiene

$$54x^2 = 96(x-6)(x-6);$$

i numeri 54, e 96 essendo ambedue divisibili per 6, si semplicizza questo resultato, e si trova

$$9x^2 = 16(x-6)(x-6).$$

Potrebbesi preparare quest' equazione secondo la regola del num.° 108. affin di risolverla; ma l'oggetto di questa regola non essendo che quello di facilitar l' estrazione della radice di ciascun membro dell' equazione proposta, esso è inutile in questo caso, ove i due membri si presentano immediatamente sotto la forma di quadrati; poichè si fa manifesto che $9x^2$ è il quadrato di $3x$, e che $16(x-6)(x-6)$ è il quadrato di $4(x-6)$: avrem dunque subito

$$3x = \pm 4(x-6),$$

da cui resulta

$$3x = 4x - 24, x = 24,$$

$$3x = -4x + 24, x = \frac{24}{7}.$$

Mercè la prima soluzion del Problema, il primo operajo ha lavorato 24 giorni, ed ha guadagnato, per conseguenza, $\frac{96^{fr.}}{24}$, ovvero 4 franchi per giorno, laddove che il secondo non ha lavorato che 18 giorni, ed ha guadagnato $\frac{54^{fr.}}{18}$, ovvero tre franchi per giorno.

La seconda soluzione corrisponde ad un altro Problema numerico connesso coll' equazion proposta in una maniera analoga a quella, che ho avvisata nel n.° 111.

118. *Si rimettono ad un Banchiere due cambiali tratte sulla stessa persona; la prima di* 550 *franchi pagabile in sette mesi; la seconda di* 720 *franchi pagabile in quattro mesi, ed esso dà per pagamento totale una somma di* 1200 *franchi: si*

domanda qual sia stata la quantità annuale del frutto, secondo il quale queste cambiali sono state scontate.

A fine d'evitar le frazioni nell'espressione dei frutti per sette mesi, e per quattro, rappresenterò per $12x$ quel che produce annualmente una somma di 100 franchi; ed allora il frutto d'un mese sarà x. Ciò posto, il valore presente della prima cambiale s'otterrà facendo la proporzione

$$100+7x : 100 :: 550 : \frac{55000}{100+7x} \text{ (}Aritm.\text{ 120);}$$

il valore presente della seconda cambiale resulterà parimente dalla proporzione

$$100+4x : 100 :: 720 : \frac{72000}{100+4x}.$$

Riunendo questi due valori, l'equazion del Problema sarà

$$\frac{55000}{100+7x} + \frac{72000}{100+4x} = 1200.$$

Le due formule, o membri potendosi divider per 200, si ha

$$\frac{275}{100+7x} + \frac{360}{100+4x} = 6;$$

facendo in seguito sparire i denominatori, si trova tosto

$$275(100+4x)+360(100+7x)=6(100+7x)(100+4x),$$

$$27500+1100x+36000+2520x=$$

$$60000+6600x+168x^2,$$

che riducesi a

$$168x^2+2980x=3500;$$

e dividendo tutto per 2, s'ottiene

$$84x^2+1490x=1750,$$

che dà finalmente

$$x^2+\frac{1490}{84}x=\frac{1750}{84}.$$

Paragonando quest' equazione colla formula

$$x^2 + px = q,$$

proviene

$$p = \frac{1490}{84}, q = \frac{1750}{84}.$$

e l' espressione

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

si cangia in

$$x = -\frac{745}{84} \pm \sqrt{\frac{745.745.}{84.84} + \frac{1750}{84.}}.$$

È necessario primieramente ridurre le frazioni comprese sotto il *radicale* a una sola; avremo

$$\frac{745.745 + 1750.84}{84.84} = \frac{702025}{84.84};$$

e osservando che il denominatore di questa frazione è un quadrato perfetto, altro non resterà che da estrar la radice quadrata dal numeratore; se si limita questa radice alle millesime parti, troveremo 837, 869 per quella di 702025; e dandole per denominatore 84, i valori di x saranno

$$x = -\frac{745}{84} + \frac{837,869}{84} = \frac{92,869}{84},$$

$$x = -\frac{745}{84} - \frac{837,869}{84} = -\frac{1582,869}{84}.$$

Il primo di questi valori egli è il solo, che risolva il Problema nel senso del suo enunciato. Dividendo il di lui denominatore per 12, avremo (*Aritm.* 54.)

$$12x = \frac{92,869}{7} = 13,267,$$

e vale a dire che il frutto annuo è di 13, 267 per 100.

119. Il Problema seguente è degno d'attenzione atteso le circostanze, che presenta l'espression dell'incognita.

Dividere un numero dato in due parti, i cui quadrati sieno in un dato rapporto.

Sia a il numero dato,

m il rapporto de' quadrati delle due parti,

x una di queste parti;

l'altra sarà $a - x$;

e, secondo l'enunciato del Problema, avrem l'equazione

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)} = m.$$

Si presentan due strade conducenti a risolverla: possiamo o prepararla per darle la forma $x^2 + px = q$, e risolverla in seguito col metodo generale, ovvero, profittando dell'avvertenza facile a farsi che la frazione

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}$$

è un quadrato, poichè il suo numeratore, ed il suo denominatore sono quadrati, ne concluderemo immediatamente

$$\frac{x}{a-x} = \pm\sqrt{m},$$

$$x = \pm(a-x)\sqrt{m}.$$

Risolvendo separatamente le due equazioni del primo grado comprese in questa formula, cioè,

$$x = +(a-x)\sqrt{m},$$

$$x = -(a-x)\sqrt{m},$$

ne ricaveremo

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}};$$

$$x = \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Per la prima soluzione, la seconda parte del numero proposto è

$$a - \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a+a\sqrt{m}-a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

e le due parti

$$\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}, \text{ e } \frac{a}{1+\sqrt{m}}$$

sono, come lo esige l' enunciato del Problema, ambedue minori del numero proposto.

Per la seconda soluzione, abbiamo

$$a + \frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a-a\sqrt{m}+a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a}{1-\sqrt{m}};$$

e le due parti sono allora

$$-\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}, \text{ e } \frac{a}{1-\sqrt{m}}.$$

I loro segni essendo contrarj, il numero a non è più, a parlar propriamente, la loro somma, ma la lor differenza.

Allorchè si fa $m = 1$, e vale a dir si suppone che i quadrati delle due parti cercate son eguali, abbiamo

$$\sqrt{m} = 1;$$

la prima soluzione dà due parti eguali

$$\frac{a}{2}\ ,\ \frac{a}{2}\ ;$$

resultato evidente per se medesimo; mentre che la seconda soluzione dà due resultati infiniti (68), cioè,

$$\frac{-a}{1-1}\text{, ovvero }\frac{-a}{0}\text{, e }\frac{a}{1-1}\text{, o sivvero }\frac{a}{0}\ ;$$

il che debb' essere, poichè non resta che riguardare due quantità come infinitamente grandi rapporto alla lor differenza a per poter supporre il rapporto de' lor quadrati eguale all' unità.

Infatti, sieno x, e $x-a$ queste due quantità; il rapporto de' lor quadrati sarà

$$\frac{x^2}{x^2-2ax+a^2}\ ,$$

e dividendo i due termini di questa frazione per x^2, essa diverrà

$$\frac{1}{1-\frac{2a}{x}+\frac{a^2}{x^2}}\ :$$

ora, è visibile che quanto più il numero x sarà grande, altrettanto più le frazioni $\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$ saranno piccole, e più il rapporto quì sopra si approssimerà ad esser eguale a $\frac{1}{1}$, ovvero a 1.

120. Per paragonare adesso al metodo, che abbiam tenuto, il metodo generale, svilupperem l'equazione

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}=m\ :$$

avrem successivamente

$$x^2 = m(a-x)(a-x)$$
$$x^2 = ma^2 - 2max + mx^2,$$
$$x^2 - mx^2 + 2amx = a^2m,$$
$$(1-m)x^2 + 2amx = a^2m,$$
$$x^2 + \frac{2amx}{1-m} = \frac{a^2m}{1-m};$$

e facendo $p = \frac{2am}{1-m}$, $q = \frac{a^2m}{1-m}$,

la formula generale darà

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}}.$$

Questi valori di x sembrano assai differenti da quelli, che sono stati trovati di sopra; frattanto essi vi si riducono, e l'esempio di cui mi occupo, può esser utile per far veder l'importanza delle trasformazioni, che le diverse operazioni algebriche producono nell'espressioni delle quantità.

È necessario primieramente ridurre al medesimo denominatore le due frazioni comprese sotto il *radicale*; ciò s'effettuerà moltiplicando per $1-m$ il numeratore della seconda, e verrà

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m^2}{1-m} = \frac{a^2m^2 + a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)} =$$
$$\frac{a^2m^2 + a^2m - a^2m^2}{(1-m)(1-m)} = \frac{a^2m}{(1-m)(1-m)}.$$

Il denominatore essendo un quadrato, resterà solamente da estrar la *radice* dal numeratore, e s'avrà

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}} = \frac{\sqrt{a^2m}}{1-m};$$

ma l'espressione $\sqrt{a^2m}$ può ancora semplicizzarsi,

È patente che il quadrato d' un prodotto si compone del prodotto de' quadrati di ciascuno dei suoi fattori; poichè, per esempio,

$$b\,c\,d \times b\,c\,d = b^2 c^2 d^2,$$

e che, per conseguenza, la *radice* di $b^2\,c^2\,d^2$ non è altra cosa che il psodotto delle *radici* b, c, e d, dei fattori b^2, c^2, e d^2. Applicando quest' osservazione al prodotto $a^2 m$, si vede che la sua *radice* è il prodotto di a, *radice* di a^2, per $\sqrt{m}$, ch' è l' indicazione della *radice* di m, ovvero che

$$\sqrt{a^2 m} = a\sqrt{m}.$$

Segue da queste trasformazioni diverse che

$$x = -\frac{a\,m}{1-m} \pm \frac{a\sqrt{m}}{1-m},$$

ovvero

$$x = -\frac{a\,m - a\sqrt{m}}{1-m}.$$

$$x = -\frac{a\,m + a\sqrt{m}}{1-m}.$$

Per quanto semplici sieno quest' espressioni, esse per altro non sono ancor quelle del num.° precedente; e parimente, se si cerca di verificarle per il caso di $m = 1$, esse diventano

$$x = \frac{-a+a}{1-1} = \frac{0}{0},$$

$$x = \frac{-a-a}{1-1} = \frac{-2a}{0}.$$

Si ritrova nella seconda il simbolo dell' *infinito* come precedentemente, ma la prima presenta questa forma indeterminata $\frac{0}{0}$, della quale n' abbiamo di già veduti degli esempj nei num.i 69. e 70.; e prima di proferire sopra il suo valore, torna a proposito esaminare s' essa cada nel caso del num.° 70,

vale a dire, se sia un fattor comune al numeratore, e al denominatore, che vada a *zero* per la supposizione di $m = 1$.

L'espressione $\dfrac{-am+a\sqrt{m}}{1-m}$

riducesi a $\dfrac{a(-m+\sqrt{m})}{1-m} = \dfrac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}$.

Vediamo di già che il numeratore non diviene *zero* se non quando diventa *zero* il fattore $\sqrt{m}-m$; bisogna dunque cercare se quest'ultimo avesse qualche fattor comune col denominatore $1-m$. Per evitar l'imbarazzo, che potrebbe causare il segno radicale, faccio $\sqrt{m} = n$, e concludo, prendendone i quadrati, $m = n^2$: ciò cangia le quantità

$$\sqrt{m}-m, \text{ e } 1-m$$

in

$$n-n^2, \text{ e } 1-n^2;$$

ora $n-n^2 = n(1-n)$, e $1-n^2 = (1-n)(1+n)$ (34); rimettendo per n il suo valore $\sqrt{m}$, si ha

$$\sqrt{m}-m = (1-\sqrt{m})\sqrt{m},$$

$$1-m = (1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m}),$$

ed in conseguenza

$$\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m} = \frac{a(1-\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})} =$$

$$\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}};$$

resultato simile a quello del n.° 119.

Si riduce parimente il secondo valore di x osservando che

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m} = \frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})} = \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}},$$

come nel citato n.° 119 (*).

Non è difficile il vedere ch' io avrei potuto evitare i radicali nei calcoli precedenti rappresentando per m^2 il rapporto de' quadrati delle due parti del numero proposto; ma allora m ne sarebbe stata la radice quadrata, che può sempre riguardarsi come cognita allorchè il suo quadrato è dato. Tuttavia non sarebbesi a prima vista conosciuto il fine d' un simile cangiamento di dati, di cui gli Algebristi fanno spesso un grand' uso per semplicizzare i calcoli; ecco perchè invito il Lettore a ricominciare la soluzion del Problema ponendo m^2 in vece di m.

(*) L' esempio, che ho trattato sì a lungo, corrisponde a un Problema risoluto da *Clairaut* nella sua *Algebra*, l' enunciato del quale è il seguente: *Trovare sopra una linea, la quale unisca due lumi qualunque, il punto ove questi due lumi tramandano un' egual luce*. Ho spogliato questo Problema dalle circostanze fisiche, le quali sono estranee all' oggetto di quest' Opera, e non possono che distrar l' attenzione, ch' esigono le circostanze algebriche, considerabilissime per loro stesse, e che, per questa ragione, io ho sviluppate più di quello che non avea fatto *Clairaut*.

Dell' estrazione della radice quadrata delle quantità algebriche.

121. Il Problema precedente serve per indicare come bisogna condursi nella soluzione dei Problemi letterali, ed ha presentata una trasformazione, che importa di ben osservare, cioè, quella di

$$\sqrt{a^2 m} \text{ in } a\sqrt{m} \text{ (pag. 177.)};$$

poichè pel suo mezzo si posson ridurre al minor numero possibile i fattori contenuti sotto il radicale, e semplicizzar semprepiù l' estrazione della radice, che resta da farsi.

Questa trasformazione consiste, come lo abbiam veduto nell' esempio citato, in *prender separatamente la radice di tutti i fattori, i quali son dei quadrati, e scriver queste radici fuori del segno come moltiplicatori di questo radicale, sotto del quale si lascian tali, com' essi sono, i fattori che non siano quadrati.*

Questa regola suppone primieramente che si sappia conoscere se una quantità algebrica è un quadrato, e in tal caso estrarne la radice; e perciò fa di mestieri distinguere le quantità *monomie* dalle *polinomie*.

122. Resulta evidentemente dalla regola degli esponenti nella moltiplicazione, che *la seconda potenza d' una quantità qualunque ha un esponente doppio di quello di questa quantità.*

Si ha, per esempio,

$$a^1 \times a^1 = a^2, a^2 \times a^2 = a^4, a^3 \times a^3 = a^6, \text{ec.}$$

Segue da ciò che *ogni fattor, ch' è un quadrato, debb' avere un esponente pari, e che se n' ottien la radice di questo fattore scrivendo la*

sua lettera con un esponente eguale alla metà dell' esponente primitivo.

Così abbiamo

$\sqrt{a^2} = a^1$, ovvero a; $\sqrt{a^4} = a^2$, $\sqrt{a^6} = a^3$, ec.

A riguardo de' fattori numerici, l'estrazione delle loro radici si opera, se ha luogo, colle regole precedentemente insegnate.

Dopo di queste osservazioni, i fattori a^6, b^4, c^2 dell' espressione

$$\sqrt{64\, a^6\, b^4\, c^2}$$

son dei quadrati, il numero 64 è il quadrato di 8; dunque *l' espressione proposta essendo il prodotto di fattori quadrati, avrà per radice il prodotto delle radici di ciascuno di questi fattori* (121); ed in conseguenza

$$\sqrt{64\, a^6\, b^4\, c^2} = 8\, a^3\, b^2\, c.$$

123. Allorchè questa circostanza non ha luogo, *bisogna cercare di decomporre il prodotto proposto in due altri, uno dei quali non contenga che i fattori quadrati, e l' altro i fattori non quadrati;* e per questo è necessario considerare a parte ciascuno de' suoi fattori.

Sia, per esempio,

$$\sqrt{72\, a^4\, b^3\, c^5}.$$

Si riconosce facilmente che fra i divisori del numero 72 vi son dei quadrati perfetti, cioè 4, 9, e 36; e prendendone il maggiore, si ha

$$72 = 36 \times 2.$$

Il fattore a^4 essendo un quadrato, si pone da parte; passando in seguito al fattore b^3, che non lo è, poichè il numero 3 è *impari*, si osserva che questo fattore può decomporsi in due altri b^2, e b, di cui il primo è un quadrato, e che si ha

$$b^3 = b^2 . b;$$

vedesi ancora che

$$c^5 = c^4 . c ;$$

sarebbe lo stesso di qualunque lettera, che avesse un esponente *impari*. Tutte queste decomposizioni danno

$$72a^4b^3c^5 = 36 . 2a^4b^2 . bc^4 . c ;$$

e riunendo i fattori quadrati si ottiene

$$36a^4b^2c^4 \times 2bc .$$

Finalmente, prendendo la radice dal primo prodotto di fattori quadrati, e indicando quella del secondo, si ha

$$\sqrt{72a^4b^3c^5} = 6a^2bc^2\sqrt{2bc} .$$

Ecco ancora alcuni esempj di riduzioni consimili, preceduti dai calcoli, i quali le pongono in evidenza,

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}} = \sqrt{a^2\frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}} =$$

$$a\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{ab} ;$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}ab^2} = 6\sqrt{\frac{25 . 3ab^2}{49 . 2}} = 6\sqrt{\frac{25b^2 . 3a}{49 . 2}} =$$

$$\frac{6 . 5}{7}b\sqrt{\frac{3a}{2}} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}} ;$$

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{n^2} + \frac{a^2m}{n}} = \sqrt{\frac{a^2m^2 + a^2mn}{n^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{n^2}(m^2 + mn)} = \frac{a}{n}\sqrt{m^2 + mn} .$$

Fa di mestieri osservare, per rapporto al primo, che si può far escire dal radicale il denomi-

natore delle frazioni algebriche, rendendolo un quadrato, secondo ciò ch' è stato detto nel n.° 104. per le frazioni numeriche.

124. Passo adesso all' estrazione della radice quadrata dei *polinomj*. È importante il ricordarsi che nessun *binomio* è un quadrato perfetto, perchè ogni *monomio* alzato a quadrato non produce che un *monomio*, e il quadrato d' un *binomio* contien sempre tre parti (34).

Sarebbe un grave sbaglio prendere per $\sqrt{a^2+b^2}$ il *binomio* $a+b$, benchè a sia separatamente la radice di a^2, e b quella di b^2; poichè il quadrato di $a+b$ essendo $a^2+2ab+b^2$, contiene ancora il termine $+2ab$, il qual non si trova nell' espressione $\sqrt{a^2+b^2}$.

Sia dunque il trinomio

$$24a^2b^3c+16a^4c^2+9b^6:$$

affine di trovare in quest' espressione le tre parti componenti il quadrato d' un *binomio*, io l' ordino in rapporto ad una delle sue lettere, per esempio, alla lettera a; s' ottiene

$$16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6.$$

Allora, qualunque sia la radice cercata, supponendola ordinata per rapporto alla medesima lettera a, il quadrato del suo primo termine dee necessariamente formare il primo termine $16a^4c^2$ della quantità proposta; il doppio prodotto del primo termine della radice pel secondo dee dare il secondo termine $24a^2b^3c$ della quantità proposta; e finalmente il quadrato dell' ultimo termine della radice debb' esser precisamente l' ultimo termine $9b^6$ della quantità proposta. Dopo queste considerazioni, l' operazion si dispone come si vede quì appresso:

$$\begin{array}{l|l} 16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6 & \left\{\begin{array}{l} 4a^2c+3b^3 \text{ radice} \\ 8a^2c+3b^3 \end{array}\right. \\ -16a^4c^2 & \\ \hline +24a^2b^3c+9b^6 & \\ -24a^2b^3c-9b^6 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}.$$

Estraggo primieramente la radice quadrata dal primo termine $16a^4c^2$, ed il resultato $4a^2c$ (122) è il primo termine della radice, il quale si scrive a destra sulla medesima linea della quantità proposta.

Tolgo da questa quantità il quadrato $16a^4c^2$ del primo termine $4a^2c$ della radice, e facendo la riduzione, non restano che i due termini $24a^2b^3c+9b^6$.

Il termine $24a^2b^3c$ essendo il doppio prodotto del primo termine della radice $4a^2c$ per il secondo, ottengo quest' ultimo dividendo $24a^2b^3c$ per $8a^2c$, doppio di $4a^2c$, che si scrive al disotto della radice; il quoziente $3b^3$ è il secondo termine della radice.

La radice è adesso determinata; ma bisogna, perchè dessa sia esatta, che il quadrato del secondo termine sia $9b^6$, ovvero che il doppio $8a^2c$ del primo termine della radice, aumentato del secondo $3b^3$, e moltiplicato pel secondo stesso, produca i due ultimi termini del quadrato (91); in conseguenza, allato di $8a^2c$ scrivo $+3b^3$, moltiplico $8a^2c+3b^3$ per $3b^3$; il prodotto essendo tolto dai due ultimi termini della quantità proposta, non resta niente, e ne concludo che questa quantità è il quadrato di $4a^2c+3b^3$.

È evidente che i medesimi ragionamenti, e i medesimi metodi possono applicarsi a tutte le quantità composte di tre termini.

125. Allorchè la quantità, dalla quale si vuol' estrar la radice, ha più di tre termini, essa non è altrimenti il quadrato d'un *binomio;* ma supponendola quella d'un *trinomio* $m+n+p$, e rappresentando per l la somma $m+n$ dei suoi due primi termini, questo *trinomio* cangiandosi in $l+p$, il suo quadrato diviene

$$l^2+2lp+p^2,$$

ove il quadrato l^2 del *binomio* $m+n$ essendo sviluppato, produrrebbe i termini $m^2+2mn+n^2$. Così, allorchè avremo ordinata la quantità proposta, il primo termine sarà evidentemente il quadrato del primo termine della radice, e il secondo conterrà il doppio prodotto del primo termine della radice per il secondo della radice medesima: avremo dunque quest' ultimo dividendo il secondo termine della quantità proposta per il doppio della radice del primo. Conoscendo allora i due primi termini della radice cercata, compiremo il quadrato di questi due termini, rappresentato quì per l^2, e togliendolo dalla quantità proposta, resterà

$$2lp+p^2;$$

quantità, che contiene il doppio prodotto di l, ovvero del primo *binomio* $m+n$ per il resto della radice, più il quadrato di questo resto, e fa veder che bisogna operare con questo *binomio* come abbiam fatto col primo termine m della radice.

Sia, per esempio, la quantità

$$64a^2bc+25a^2b^2-40a^3b+16a^4+64b^2c^2-80ab^2c;$$

io l'ordino per rapporto alla lettera a, e dispongo l'operazione come precedentemente,

$$
\begin{array}{l|l}
16a^4 - 40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2 & 4a^2 - 5ab + 8bc \\
\quad + 64a^2bc & \hline
-16a^4 & 8a^2 - 5ab \\
\hline
1^\circ \text{ resto} - 40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2 & 8a^2 - 10ab + 8bc \\
\quad + 64a^2bc & \\
\quad + 40a^3b - 25a^2b^2 & \\
\hline
2^\circ \text{ resto} \ldots\ldots + 64a^2bc - 80ab^2c + 64b^2c^2 & \\
\quad - 64a^2bc + 80ab^2c - 64b^2c^2 & \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Ciò fatto, estraggo la radice quadrata dal primo termine $16a^4$, ed ottengo $4a^2$ per il primo termine della radice cercata; ne formo il quadrato, che tolgo dalla quantità proposta.

Raddoppio il primo termine della radice, e scrivo al disotto il resultato $8a^2$, per cui divido il termine $40a^3b$, col quale principia il primo resto; ottengo $-5ab$ per il secondo termine della radice; io lo scrivo in seguito di $8a^2$, e moltiplico il tutto per questo secondo termine, e tolgo il resultato dal resto, sopra cui opero.

In questa maniera ho tolto dalla quantità proposta il quadrato del *binomio* $4a^2 - 5ab$; il secondo resto altro non contiene che il doppio prodotto di questo *binomio* per il terzo termine della radice, e il quadrato di questo termine; raddoppio la quantità $4a^2 - 5ab$, il che dà

$$8a^2 - 10ab,$$

ch' io scrivo al disotto di $8a^2 - 5ab$, e che prendo per divisore del secondo resto: il primo termine del quoziente, ch' è $8bc$, è il terzo termine della radice.

Io scrivo pure questo quoziente in seguito di $8a^2 - 10ab$, e moltiplico il tutto per questo termine; tolgo i prodotti dal resto, sul quale opero, e si trova interamente distrutto: la quantità proposta è dunque il quadrato di

$$4a^2 - 5ab + 8bc .$$

È facile adesso d' estender tanto lontano quanto vorremo l' operazione quì sopra, la quale è d' altronde perfettamente simile a quella, ch' è stata indicata pei numeri.

Della formazione delle potenze, e dell' estrazione delle loro radici.

126. L'operazione aritmetica, dalla quale dipende la risoluzioue dell' equazioni del secondo grado, e per la quale si torna dal quadrato alla quantità, che l' ha formato, ovvero alla radice quadrata, non è che un caso particolare d' un altro più generale, il quale serve a *trovare un numero, di cui si conosca una potenza qualunque*. Si concepisce che quest' operazione conducente ad un resultato, che si esprime sempre per la parola *radice*, ma con aggiungervi l' indicazione del *grado*, essendo inversa di quella, che serve a trovar la potenza, non può esser dedotta che dall' esame delle circostanze di quest' ultima, nello stesso modo che succede per la divisione a riguardo della moltiplicazioae, con cui questo soggetto ha d' altronde dei rapporti, che ben presto ci saran manifesti.

È per mezzo della moltiplicazione che si perviene alle potenze de' numeri interi (24), ed è visibile che quelle delle frazioni si formano alzando il loro numeratore, e denominatore alla potenza proposta (96).

Viceversa la radice d'una frazione s'ottiene, di qualunque grado che sia, prendendo quella del numeratore, e l'altra del denominatore.

L'uso de' simboli algebrici essendo comodissimo per esprimere tutto ciò, che dipende dalla composizione, e decomposizion delle quantità, si procede primieramente alla formazione delle potenze dell'espressioni algebriche; poichè, a riguardo di quelle dei numeri, ciò che abbiam detto nel n.° 24. serve per ritrovarle.

Tavola delle 7 prime potenze dei numeri, da 1 fino a 9.

1.ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.ª	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3.ª	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4.ª	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5.ª	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6.ª	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7.ª	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

Ho principalmente riportata quì questa Tavola, affin di mostrare con qual rapidità si accrescono le potenze de' numeri a misura ch'esse divengono più elevate; osservazione, ch'è importan-

tissima per il seguito. Si vede infatti che la settima potenza di 2 è digià 128, e che quella di 9 ascende a 4782969.

Si concepisce facilmeute da ciò che le potenze delle frazioni propriamente dette decrescono rapidissimamente; poichè le potenze del denominatore diventano di più in più grandi per rapporto a quelle del numeratore. La settima potenza di $\frac{1}{2}$, per esempio, sarebbe $\frac{1}{128}$, e quella d' $\frac{1}{9}$ sarebbe solamente

$$\frac{1}{4782969}.$$

127. Segue dal sapersi che in un prodotto ciascuna lettera ha per esponente la somma degli esponenti, ch' essa ha in ciascuno de' suoi fattori (26), che *la potenza d'una quantità monomia si forma moltiplicando l' esponente di ciascun fattore per l' esponente di questa potenza.*

La terza potenza di a^2b^3c, per esempio, si otterrà moltiplicando gli esponenti 2, 3, e 1 delle lettere a, b, c per 3, esponente della potenza dimandata: avremo $a^6b^9c^3$; ed infatti questa potenza riducesi a

$$a^2\,b^3\,c \times a^2\,b^3\,c \times a^2\,b^3\,c = a^{2.3}\,b^{3.3}\,c^{1.3}.$$

Se la quantità proposta avesse un coefficiente numerico, bisognerebbe pure alzar questo coefficiente numerico, alla potenza proposta; così la quarta potenza di $3ab^2c^5$ è

$$81\,a^4\,b^8\,c^{20},$$

perchè quella di 3 è 81.

128. A riguardo de' segni, dai quali possono essere affette le quantità *monomie*, bisogna osservare che *tutte le potenze, di cui l' esponente è*

pari, hanno il segno +, *e che quelle, il cui esponente è impari, hanno il medesimo segno della quantità, che le ha formate.*

Infatti, le potenze d' un grado *pari* resultano dalla moltiplicazione d' un numero *pari* di fattori; e i segni —, combinati 2 a 2 nella moltiplicazione, danno sempre al prodotto il segno + (31): Al contrario, se il numero de' fattori è *impari*, il prodotto avrà il segno — quando i fattori ne saranno affetti, poichè esso risulterà dal prodotto d' un numero *pari* di fattori, ed in conseguenza positivo, moltiplicato per un fattor negativo.

129. Per ritornare dalla potenza alla quantità, che l' ha formata, ovvero alla sua radice, non si dee far altro che rovesciar le regole date quì sopra; e vale a dire, *dividere l' esponente di ciascuna lettera per quello, che indica il grado della radice, che si vuole estrarre.*

Troveremo in questa maniera la *radice cubica*, ovvero *del terzo grado*, dell' espressione $a^6 b^9 c^3$, dividendo per 3 gli esponenti 6, 9, e 3, il che darà

$$a^2 b^3 c .$$

Allorchè l' espressione proposta ha un coefficiente numerico, bisogna prendere la radice ancora di questo, per formare il coefficiente della quantità letterale, che si ottiene col mezzo della regola precedente.

Se dimandasi, per esempio, la radice quadra di $81 a^4 b^8 c^{20}$, vedremo, mediante la Tavola del n.° 126., che 81 è la quarta potenza di 3; e dividendo per 4 gli esponenti delle lettere, avrebbesi per resultato

$$3 a b^2 c^5 .$$

Nel caso che la radice del coefficiente numerico non potesse trovarsi col mezzo della Tavola

precitata, s'estrae pei metodi, che darò in appresso.

130. È evidente che l'estrazione delle radici non può effettuarsi sulla parte letterale de' *monomj* se non che quando ciascuno degli esponenti è divisibile per quello della radice; nel caso contrario non possiam che indicare l'operazione aritmetica, che bisognerà fare allorchè sostituiremo de' numeri alle lettere.

Ci serviamo pure a quest'oggetto del segno $\sqrt{\ }$; ma, per indicare il *grado* della radice, si pone l'esponente come si vede quì sotto, nell'espressioni

$$\sqrt[3]{a}, \qquad \sqrt[5]{a^2},$$

di cui la prima rappresenta la radice cubica, o del terzo *grado*, di a, e la seconda la radice quinta di a^2.

L'espressioni affette dal segno $\sqrt{\ }$, di qualunque *grado* esse sieno, possono spesso semplicizzarsi facendo attenzione che, secondo il n.° 127., *una potenza qualunque d'un prodotto è formata dal prodotto della medesima potenza di ciascuno dei suoi fattori*, e che, in conseguenza, *la radice qualunque d'un prodotto è formata dal prodotto delle radici di ciascun de' suoi fattori*. Resulta da quest'ultimo principio che, *se la quantità sottoposta al radicale ha dei fattori, i quali sieno delle potenze esatte del medesimo grado che il radicale, potremo prendere separatamente le radici di questi fattori, e moltiplicare il loro prodotto per la radice indicata degli altri fattori.*

Sia, per esempio,

$$\sqrt[5]{96\,a^5\,b^7\,c^{11}}.$$

Si vede che

$$96 = 32 \times 3 = 2^5 . 3,$$

che a^5 è la quinta potenza di a,

che $b^7 = b^5 . b^2$,

che $c^{11} = c^{10} . c$;

abbiamo per conseguenza

$$96\, a^5\, b^7\, c^{11} = 2^5\, a^5\, b^5\, c^{10} \times 3\, b^2\, c.$$

Il primo fattore ha per radice quinta la quantità $2\,a\,b\,c^2$, e s'ottiene

$$\sqrt[5]{96 a^5 b^7 c^{11}} = 2\,a\,b\,c^2 \sqrt[5]{3\,b^2\,c}.$$

131. Qualunque potenza *pari* dovendo avere il segno $+$ (128), alcuna quantità affetta dal segno $-$ non può essere una potenza di grado *pari*, e non ha radice di questo *grado*. Segue da ciò che *qualunque radicale d'un grado pari, che contiene una quantità negativa, è un'espressione immaginaria*.

$$\sqrt[4]{-a}, \quad \sqrt[6]{-a^4}, \quad b + \sqrt[\cdot]{-a b^7}$$

sono dell'espressioni *immaginarie*.

Non si possono in conseguenza assegnare, nè esattamente, nè per approssimazione, pei *gradi*, di cui l'esponente è *pari*, se non che le radici delle quantità positive; e *queste radici posson essere affette indifferentemente dal segno* $+$, *o dal segno* $-$; perchè nell'uno, e l'altro caso desse riproducon egualmente la quantità proposta col segno $+$, e s'ignora a quale dei due desse appartengono.

Non è lo stesso pei *gradi impari*, nei quali le potenze hanno lo stesso segno che le loro radici (128): *dobbiamo dare alle radici di questi gradi il segno, dal quale la potenza è affetta*; e non vi sono *immaginarj* in questo caso.

132. È a proposito l'osservare che l'applicazione della regola data nel n.° 129. per l'estrazione delle radici de' *monomj* col mezzo degli esponenti de' loro fattori conduce naturalmente a indicar con dei segni più comodi per il calcolo che il segno $\sqrt{\ }$ le radici, le quali non possono algebricamente ottenersi.

Allorchè dimandasi, per esempio, la radice terza di a^5, bisogna, secondo la regola citata, dividere l'esponente 5 per 3; ma la divisione non potendo esattamente effettuarsi, conduce ad un numero frazionario $\frac{5}{3}$; e la forma, che prende allora l'esponente del resultato, indica che l'estrazione non è possibile nello stato attuale della quantità proposta: dobbiamo dunque risguardare le due espressioni

$$\sqrt[3]{a^5} \quad , \quad e \quad a^{\frac{5}{3}}$$

come equivalenti.

L'ultima ha nulladimeno sulla prima il vantaggio di condur subito alla semplicizzazione, di cui la quantità $\sqrt[3]{a^5}$ è suscettibile; poichè, se s'estrae l'intero, contenuto nella frazione $\frac{5}{3}$, avremo $1+\frac{2}{3}$, ed in conseguenza

$$a^{\frac{5}{3}} = a^{1+\frac{2}{3}} = a^1 \times a^{\frac{2}{3}} \quad (25);$$

di dove si vede che la quantità $a^{\frac{5}{3}}$ è composta di due fattori, di cui il primo è razionale, e l'altro riducesi a $\sqrt[3]{a^2}$.

Lo stesso concluderebbesi dall'espressione $\sqrt[3]{a^5}$, per mezzo del n.° 130., ma l'esponente frazionario la riduce immediatamente: avremo d'altronde occasione di riconoscere in altre operazioni i vantaggi dell'espressioni frazionarie.

Per adesso serve osservare che la divisione de-

gli esponenti, nel caso ove dessa possa effettuarsi corrisponde all'estrazione delle radici; si dee, allorchè dessa è indicata, risguardarla come il simbolo della medesima operazione, e ne concluderemo che l'espressioni

$$\sqrt[n]{a^m} \text{ , e } a^{\frac{m}{n}}$$

sono equivalenti

Ecco ancora le convenzioni stabilite sulla maniera d'esprimere le potenze, le quali conducono, per analogia, e per maggior estensione, a dei simboli particolari, come nel n.° 37. siamo arrivati all'espressione $a^0 = 1$.

133. Osservo in quest'occasione che la regola degli esponenti, relativa alla divisione (36), essendo applicata come quella dei segni, relativa alla sottrazione (20), conduce anch'essa a nuove espressioni per una certa classe di frazioni.

Infatti, abbiamo per mezzo di queste regole

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

ma, se l'esponente n del denominatore sorpassi l'esponente m del numeratore, l'esponente della lettera a nel secondo membro sarà negativo.

Se, per esempio, $m = 2$, $n = 3$, avremo

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1};$$

ma d'altronde, semplicizzando la frazione $\frac{a^2}{a^3}$, troveremo $\frac{1}{a}$: l'espressioni

$$\frac{1}{a} \text{ , e } a^{-1}$$

son dunque equivalenti.

In generale, abbiamo per la regola degli esponenti

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-m-n} = a^{-n},$$

e d'altronde

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n};$$

resulta da ciò che l'espressioni

$$\frac{1}{a^n}, \quad \text{e} \quad a^{-n}$$

sono equivalenti.

Infatti, il segno —, che precede l'esponente n, essendo preso nel senso del n.° 62, fa vedere che l'esponente proposto viene da una frazione, di cui il denominatore contiene n fattori a di più che il numeratore, come lo esprime ancora $\frac{1}{a^n}$; possiamo dunque, allorchè s'incontra una qualunque di queste espressioni, sostituirvi l'altra.

Dopo quest'osservazione, la quantità $\frac{a^2b^3}{c^2d^3}$, considerata come

$$a^2 b^3 \times \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{d^3},$$

può esser posta sotto la forma

$$a^2 b^3 c^{-2} d^{-3}, \text{ e}$$

vale a dire, *che possiam far passare nel numeratore tutti i fattori del denominatore, dando ai loro esponenti il segno* —.

Reciprocamente, *allorchè una quantità contiene dei fattori affetti da un esponente negativo, si portan questi nel denominatore, dando il segno* + *ai loro esponenti;* di maniera che la quantità

$$a^2 b^3 c^{-2} d^{-3}$$

ritorna $\dfrac{a^2 b^3}{c^2 d^3}$.

Della formazione delle potenze delle quantità complesse.

134. Comincierò da osservare che le potenze delle quantità *complesse* s' indicano collocando queste quantità dentro parentesi, alla quale si dà l'esponente della potenza. L'espressione

$$(4a^2 - 2ab + 5b^2)^3,$$

per esempio, indica la terza potenza della quantità $4a^2 - 2ab + 5b^2$. S' esprimerebbe pure questa potenza come quì sotto

$$\overline{4a^2 - 2ab + 5b^2}^{\,3}.$$

135. Le quantità *binomie* son le più semplici dopo le *monomie*; tuttavia, se si volessero formar le potenze per mezzo delle moltiplicazioni successive, non s'arriverebbe in questa maniera che a dei resultati particolari per ciascuna potenza, come lo sono, per la seconda, e la terza, quelli, che ho fatto osservare nel n.° 34: formerebbesi questa Tavola

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4^3x + a^4;$$

ec.

ma non si potrebbe comprendere facilmente la legge dei coefficienti da questi resultati. Riflettendo alle regole della moltiplicazione, riconosceremo che i coefficienti numerici nascono dalle riduzioni, che vengono dall'eguaglianza dei fattori, che formano una potenza, e che, se impediremo queste riduzioni, renderemo la composizion de' prodotti più evidente.

Per produr questi effetti, serve il dare a tutti i *binomj*, che si moltiplicano, dei secondi termini differenti; prendere, per esempio,

$$x+a,\quad x+b,\quad x+c,\quad x+d, \text{ ec.}$$

Effettuando le moltiplicazioni, che vado a indicare, e ponendo in una stessa colonna i termini affetti da una medesima potenza di x, è facil trovare che

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+ab,$$
$$+bx$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+ax^2+abx+abc,$$
$$+bx^2+acx$$
$$+cx^2+bcx$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+ax^3+abx^2+abcx+abcd;$$
$$+bx^3+acx^2+abdx$$
$$+cx^3+adx^2+acdx$$
$$+dx^3+bcx^2+bcdx$$
$$+bdx^2$$
$$+cdx^2.$$

Senza spinger più avanti questi prodotti, possiamo già riconoscer la legge della lor formazione. Se immaginiamo che tutti i termini affetti dalla stessa potenza di x, e posti nella colonna medesima, non ne formin che un solo, come, per esempio,

$$ax^3+bx^3+cx^3+dx^3=(a+b+c+d)x^3,$$

e così degli altri,

1.° *Si trova in ciascun prodotto un termine di più di quel che vi siano unità nel numero dei fattori.*

2.° *L'esponente di* x *nel primo termine è lo stesso che il numero dei fattori, e va diminuendo dell'unità da un termine a quel che lo segue.*

3.° *La più alta potenza di* x *non ha per coefficiente che l'unità; quella, che la segue, ovvero che ha un' unità di meno nel suo esponente, è moltiplicata per la somma dei secondi termini dei*

binomj ; quella, che ha due unità di meno nel suo esponente, lo è per la somma dei diversi prodotti, che si ottengono moltiplicando due a due i secondi termini de' binomj: quella, che ha tre unità di meno nel suo esponente, lo è per la somma de' diversi prodotti, che ottengonsi moltiplicando tre a tre i secondi termini de' binomj; e così di seguito; finalmente nell' ultimo termine l' esponente di x *essendo considerato come eguale a zero* (37), *si trova composto del primo diminuito di tante unità quante ve ne sono nel numero de' fattori; e questo termine contiene il prodotto di tutti i secondi termini de' binomj.*

È facil vedere che la forma di questi prodotti dee restar soggetta alle medesime leggi, qualunque siasi il numero da' fattori. Frattanto possiamo anco averne una prova diversa dall' analogìa.

136. Primieramente è evidente che qualunque prodotto di questa specie dee contener le potenze successive di x cominciando da quella, il cui esponente è eguale al numero de' fattori, che abbiamo moltiplicati, fino a quella, il cui esponente è *zero*. Per indicarne generalmente il resultato, esprimerem questo numero colla lettera m; le potenze successive di x saranno indicate da

$$x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, \text{ ec.}$$

Porremo le lettere A, B, C, ... Y, per le quantità, che debbon moltiplicarle, a partirsi da x^{m-1}; ma il numero de' termini, il quale dipende dai valori particolari dati all' esponente, restando indeterminato fino a che l' esponente medesimo non è fissato, non si possono scriver che i primi, e gli ultimi termini dell' espressione; e s' indican per una serie di punti i termini intermedj, i quali son sottintesi.

Così la formula

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + (x^{m-3} \ldots\ldots + Y,$$

rappresenta il prodotto d' un numero qualunque m di fattori $x+a, x+b, x+c, x+d$, ec.

Se la moltiplichiamo per un nuovo fattore $x+l$, otterremo

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots \\ \quad + lx^m + lAx^{m-1} + lBx^{m-2} \ldots + lY \end{array}\right\}.$$

È evidente 1.° che se A è la somma degli m secondi termini a, b, c, d, ec., $A+l$, sarà quella di $m+1$ secondi termini a, b, c, d, ec. l, e che in conseguenza la composizione assegnata a questo coefficiente sarà vera per il prodotto del grado $m+1$, se dessa è vera per quello del grado m.

2.° Se B è la somma dei prodotti di m quantità a, b, c, d ec., prese due a due, $B+lA$ esprimerà quella dei prodotti di $m+1$ quantità a, b, c, d, ec., l, prese pure due a due: poichè A essendo la somma dei prodotti dei primi, lA sarà quella dei lor prodotti per la nuova quantità introdotta l; dunque la composizione assegnata sarà vera per il grado $m+1$, se dessa lo è per il grado m.

3.° Se C è la somma dei prodotti di m quantità a, b, c, d ec., presi tre a tre, $C+lB$ sarà quella de' prodotti di $m+1$ quantità a, b, c, d, ec., l, prese pure tre a tre; poiche lB, secondo ciò, che precede, esprimerà la somma dei prodotti dei primi, presi due a due, moltiplicati per la nuova quantità introdotta l: dunque la composizione assegnata sarà vera per il grado $m+1$, se dessa ha luogo per il grado m.

Si vede che questa maniera di ragionare s'estende a tutti i termini, e che l'ultimo lY sarà il prodotto degli $m+1$ secondi termini.

Le osservazioni enunciate nel num.° 135. essendo vere rispetto al quarto grado, per esempio, lo saranno, secondo ciò che abbiam detto, per il quinto, per il sesto, ed elevandosi così di grado in grado, esse saranno provate in generale.

Segue da ciò che il prodotto d' un numero qualunque di fattori binomj $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ec. essendo rappresentato da

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\text{ec.},$$

A sarà sempre la somma delle m lettere $a, b, c,$ ec., B quella dei prodotti di queste quantità prese due a due, C quella dei prodotti di queste quantità prese tre a tre, e così di seguito

Per abbracciar la legge di quest' espressione in un sol termine, io ne considero uno situato in un posto indeterminato; per questa ragione, lo rappresenterò per $N\,x^{m-n}$

Questo termine sarà il secondo, se faremo $n=1$, il terzo, se faremo $n=2$, l' undecimo se faremo $n=10$. ec. Nel primo caso la lettera N sarà la somma delle m lettere $a, b, c,$ ec; nel secondo quella dei lor prodotti due a due; nel terzo quella dei lor prodotti dieci a dieci; ed in generale quella dei lor prodotti n a n.

137. Per cangiare i prodotti

$$(x+a)(x+b), (x+a)(x+b)(x+c),$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d), \text{ ec.}$$

nelle potenze di $x+a$, cioè in

$$(x+a)^2, \quad (x+a)^3,$$
$$(x+a)^4, \quad \text{ec.}$$

serve fare negli sviluppi di questi prodotti

$$a=b, \quad a=b=c,$$
$$a=b=c=d \quad \text{ec.}$$

Tutte le quantità, le quali moltiplicano una medesima potenza di x, diverranno allora eguali tra loro; e così il coefficiente del secondo termine, il quale, nel prodotto

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, e $a+b+c+d$

si cangerà in $4a$; quello del terzo termine, nel medesimo prodotto essendo

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$

diverrà $6a^2$; e da ciò è facil conoscere che i coefficienti delle diverse potenze di x si cangeranno in una sola potenza di a, ripetuta tante volte quanti sono i termini, ed espressa per il numero dei fattori, che contengono questi termini. Così il coefficiente N, che moltiplica la potenza x^{m-n}, nello sviluppo generale sarà la potenza n di a, ovvero a^n, ripetuta tante volte quanti sono i differenti prodotti, i quali posson formarsi prendendo in tutte le maniere possibili un numero n di lettere, da tene un numero m. La ricerca dunque del coefficiente del termine affetto da x^{m-n} dipende da quella del numero di questi prodotti.

138. Per arrivare a scoprir il numero, di cui si tratta, bisogna primieramente distinguere le disposizioni, o *permutazioni* dai prodotti, o *combinazioni*. Due lettere a, e b, non danno che un prodotto, ma son suscettibili di due disposizioni ab, e ba; tre lettere a, b, c, che non dan che un prodotto, son suscettibili di sei disposizioni (88); e così di seguito.

Affine di fissare le idee, suppongo che vi sieno in tutto 9 lettere,

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i,$$

e che si tratti di disporle $7a7$; è evidente che scegliendo a piacimento una disposizione di sei di

queste lettere, $a\ b\ c\ d\ e\ f$ per esempio, vi potremo unir successivamente ciascuna delle tre lettere rimanenti g, h, i, e si avranno in questa maniera tre disposizioni di 7 lettere, cioè,

$$abcdefg,\quad abcdefh,\quad abcdefi.$$

Ciò, che abbiam detto sopra una disposizione particolare di sei lettere, converrà egualmente a tutte le altre; e ne dobbiamo concludere che ciascuna disposizione di sei lettere ne darà tre di sette lettere, e vale a dire, tante quante son le lettere, che restano, e non vi sono impiegate. Dunque, se il numero delle disposizioni di sei lettere è rappresentato per P, avremo quello delle disposizioni di sette lettere moltiplicando P per 3, ovvero $9-6$. Rimpiazzando i numeri 9, e 7 per m, e n, e riguardando P come il numero delle disposizioni, di cui son suscettibili m lettere prese in numero $n-1$, il ragionamento non cangerà, ed avremo ancora per il numero delle disposizioni composte di n lettere

$$P\,(m-(n-1)),\text{ ovvero }P\,(m-n+1).$$

Questa formula contiene implicitamente tutti i casi particolari. Affin di dedurre, per esempio, il numero delle disposizioni di m lettere, prese due a due, faremo $n=2$, il che darà

$$n-1=1,$$

ed avremo

$$P=m,$$

poichè P eguaglierà allora il numero delle lettere prese una ad una: resulterà dunque da ciò

$$m\,(m-2+1),\text{ ovvero }m\,(m-1).$$

Ponendo in seguito

$$P=m\,(m-1),\text{ e }n=3,$$

troveremo pel numero delle disposizioni, di cui son suscettibili m lettere prese 3 a 3,

$$m(m-1)(m-3+1) = m(m-1)(m-2);$$

e facendo

$$P = m(m-1)(m-2), \text{ e } n = 4,$$

otterremo

$$m(m-1)(m-2)(m-3)$$

per il numero delle disposizioni 4 a 4. Calcoleremo dunque successivamente l'espressioni del numero delle disposizioni formate da tante lettere quante si vorranno (*).

139. Per passare adesso dal numero delle disposizioni di n lettere a quello dei prodotti differenti, fa di mestieri conoscere il numero delle disposizioni, di cui è suscettibile un sol prodotto. Per questo, osserveremo che, se in una qualunque di

---

(*) In queste disposizioni si escludono le ripetizioni della stessa lettera, perchè la ricerca, della quale ci occupiamo, non l'ammette; ma la Teorìa delle permutazioni, e delle combinazioni servendo di base al *Calcolo delle probabilità*, presenta de' Problemi, nei quali questa circostanza può aver luogo. Per calcolarne l' effetto, nell'esempio, di cui mi sono servito, basterà d'osservare che si possono scrivere indifferentemente ciascuna delle nove lettere $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ in seguito del prodotto di 6 lettere $abcdef$. Chiamando dunque P il numero delle disposizioni di questa specie, avremo $P \times 9$ per il numero delle disposizioni di 7 lettere. Mercè della stessa ragione, se P indica il numero delle disposizioni di m lettere prese $n-1$ a $n-1$, quello delle disposizioni n a n sarà Pm.

Ciò posto, il numero delle disposizioni di m lettere prese 1 a 1 essendo evidentemente m, quello delle disposizioni 2 a 2 sarà $m \times m$, ovvero m^2; quello delle disposizioni 3 a 3 sarà $m \times m \times m$, ovvero m^3; e finalmente m^n esprimerà il numero delle disposizioni n a n.

queste disposizioni si fissa una delle lettere nel primo posto, potremo fare tra tutte l'altre tante permutazioni quante ne comporta un prodotto di $n - 1$ lettere. Prendo, per esempio, il prodotto $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$, composto di 7 lettere; si può, lasciando a nel primo posto, scriver questo prodotto in tante maniere quante son le disposizioni, che ammette un prodotto di sei lettere $b\,c\,d\,e\,f\,g$; ma tutte le lettere del prodotto proposto possono essere collocate successivamente nel primo posto; così, chiamando Q il numero delle disposizioni, di cui è suscettibile un prodotto di sei lettere, avremo $Q \times 7$ per quello delle disposizioni d'un prodotto composto di 7 lettere. Segue da ciò che, se Q indica il numero delle disposizioni, che può somministrare un prodotto di $n - 1$ lettere, $Q\,n$ esprimerà il numero delle disposizioni d'un prodotto di n lettere.

Tutti i casi particolari si deducono senza pena da questa formula; poichè, facendo $n = 2$, è osservabile che, quando non vi è che una sola lettera, o $Q = 1$, viene $1 \times 2 = 2$ per il numero delle disposizioni d'un prodotto di due lettere; prendendo in seguito $Q = 1 \times 2$, e $n = 3$, avremo $1 \times 2 \times 3 = 6$ per il numero delle disposizioni d'un prodotto di tre lettere; facendo ancora $Q = 1 \times 2 \times 3$, e $n = 4$, ne resulterà $1 \times 2 \times 3 \times 4$, ovvero 24 disposizioni possibili in un prodotto di 4 lettere; e così in seguito.

140. Essendo ben inteso ciò, che precede, è facil vedere che dividendo il numero totale delle disposizioni di n lettere, ottenuto dalle m lettere proposte, per il numero delle disposizioni, di cui un medesimo prodotto è suscettibile, avrem per quoziente il numero dei prodotti differenti, che si posson formare prendendo in tutte le maniere pos-

sibili n fattori fra queste m lettere. Questo numero sarà dunque espresso da $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ (*); e secondo ciò, che abbiam veduto nel num.° 137, $\frac{P(m-n+1)}{Qn} a^n x^{m-n}$ sarà il termine affetto da x^{m-n} nello sviluppo di $(x+a)^m$.

E evidente che il termine, che precede il suddetto, sarà espresso da $\frac{P}{Q} a^{n-1} x^{m-n+1}$; poichè, ritornando verso il primo termine, l'esponente di x aumenta d' un' unità, e quello di a diminuisce d' altrettanto; di più P, e Q son le quantità relative al numero $n-1$.

141. Se si fa $\frac{P}{Q} = M$, i due termini consecutivi indicati quì sopra diverranno

$$Ma^{n-1} x^{m-n+1}, \text{ e } M\frac{(m-n+1)}{n} a^n x^{m-n};$$

resultati, che fan vedere come ciascun termine dello sviluppo di $(x+a)^m$ si forma dal termine, che lo procede.

(*) È a proposito l'avvertire che, facendo successivamente

$$n=2, \quad n=3, \quad n=4, \text{ ec.},$$

la formula $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ diviene

$$\frac{m(m-1)}{1.2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}, \text{ec.};$$

numeri, i quali esprimono respettivamente quante combinazioni possono farsi con un numero qualunque m di cose, prendendole *due a due*, ovvero *tre a tre*, oppure *quattro a quattro*, ec.

E partendo dal primo termine, che è x^m, si arriva al secondo facendo $n = 1$: abbiamo $M = 1$, poichè x^m non ha per coefficiente che l'unità, e ne resulta $\frac{1 \times m}{1} a x^{m-1}$, o sivvero $\frac{m}{1} a x^{m-1}$. Per passare al terzo termine, si fa $M = \frac{m}{1}$, e $n = 2$, il che dà $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$. Il quarto si ottiene per la supposizione di $M = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$, e $n = 3$, e ciò conduce a $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$; e così in seguito; laonde ne proviene la formula

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \text{ec.},$$

la quale si può convertire in questa regola:

Per passar da un termine a quel, che lo segue, moltiplicate il coefficiente numerico per l'esponente di x *nel primo, dividete per il numero, che indica il posto di questo termine, aumentate d'un'unità l'esponente di* a, *e diminuite di tanto parimente quello di* x.

Benchè non si possa fissare ii numero dei termini di questa formula se non che assegnando un valor particolare a m, non dee frattanto restare alcun dubbio sulla legge, che seguono i termini della formula per quanto si suppongan lontani dal primo, e si vede che

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} a^n x^{m-n}$$

esprime il termine, il quale n' ha n che lo precedono.

Quest' ultima formula si chiama il *termine generale* della serie

$$x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \text{ec.};$$

perchè, facendo successivamente

$$n = 1, \quad n = 2, \quad n = 3, \text{ ec.},$$

desso dà tutti i termini di questa serie.

142. Applichiamo adesso la regola del numero precedente alla formazione dello sviluppo di $(x + a)^5$; il primo termine essendo

$$x^5, \text{ ovvero } a^0 x^5 \ (37),$$

il secondo sarà

$$\frac{5}{1} a^1 x^4, \text{ o sivvero } 5 a x^4;$$

il terzo

$$\frac{5 \times 4}{2} a^2 x^3, \text{ oppure } 10 a^2 x^3;$$

il quarto

$$\frac{10 \times 3}{3} a^3 x^2, \text{ ovvero } 10 a^3 x^2;$$

il quinto

$$\frac{10 \times 2}{4} a^4 x, \text{ ovvero } 5 a^4 x;$$

il sesto

$$\frac{5 \times 1}{5} a^5 x^0, \text{ ovvero } a^5.$$

Quì termina lo sviluppo, perchè, onde passare al termine che seguirebbe, bisognerebbe moltiplicare per l' esponente di x del sesto, e questo esponente è *zero*.

Ciò è quello appunto, che la formula pur fa

vedere; poichè il settimo termine avendo per coefficiente numerico

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6},$$

contiene nel caso attuale il fattore $m-5$, il quale diviene $5-5$, ovvero o; e questo medesimo fattore entrando nei termini, che seguono, gli rende tutti nulli.

E riunendo i termini, che ho ottenuti quì sopra, viene

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

143. Si dedurrebbe in generale dalla formula del numero 141. lo sviluppo della potenza qualunque d'un qualsisia *binomio*: se s'avesse, per esempio, da formar la sesta potenza di $2x^3 - 5a^3$, servirebbe sostituir nella formula alle potenze di x, e a quelle di $2x^3$, e $-5a^3$ respettivamente; poichè se si facesse

$$2x^3 = x', \text{ e } -5a^3 = a',$$

avrebbesi

$$(2x^3 - 5a^3)^6 = (x' + a')^6 =$$
$$x'^6 + 6a'x'^5 + 15a'^2x'^4 + 20a'^3x'^3$$
$$+ 15a'^4x'^2 + 6a'^5x' + a'^6 \ (141),$$

e resterebbe da sostituire per x', e per a' le quantità, che indican queste lettere. Si troverebbe così

$$(2x^3)^6 + 6(-5a^3)(2x^3)^5 + 15(-5a^3)^2(2x^3)^4$$
$$+ 20(-5a^3)^3(2x^3)^3 + 15(-5a^3)^4(2x^3)^2$$
$$+ 6(-5a^3)^5(2x^3) + (-5a^3)^6,$$

ovvero $64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12}$
$$- 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6$$
$$- 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18}.$$

I termini di questo sviluppo sono alternativamente positivi, e negativi; ed è visibile che suc-

vederà sempre lo stesso allorchè il secondo termine del *binomio* proposto avrà il segno —.

144. Si prepara la formula del num.° 141. in una maniera, che ne facilita l'applicazione nei casi analoghi al precedente.

Difatto osservando che

$$x^{m-1} = \frac{x^m}{x},\quad x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2},\ x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3},\ \text{ec.};$$

essa può scriversi nel modo seguente,

$$x^m + \frac{m}{1}\frac{a}{x}x^m + \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}\frac{a^2}{x^2}x^m + \text{ec.},$$

la quale riducesi a

$$x^m\left\{1 + \frac{m}{1}\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}\frac{a^2}{x^2}\right.$$

$$\left.\frac{m(m-1)(m-2)}{1\ \ 2\ .\ 3}\frac{a^3}{x^3} + \text{ec.}\right\},$$

isolando il fattor comune x^m. Per calcolare col mezzo di questa formula, bisogna *formar la serie de' numeri*

$$\frac{m}{1},\quad \frac{m-1}{2},\quad \frac{m-2}{3},\quad \frac{m-3}{4},\ \text{ec.},$$

moltiiicar primieramente il primo per la frazione $\frac{a}{x}$, *poi il resultato per il secondo, e ancora per la frazione* $\frac{a}{x}$, *poi ancora il resultato per il terzo, e per la frazione* $\frac{a}{x}$, *e così di seguito; rianir tutti questi termini, aggiungere l'unità, e finalmente moltiplicare il tutto per il fattore* x^m.

Nell'esempio $(2x^3 - 5a^3)^6$ bisogna scrivere $(2x^3)^6$ in vece di x^m, e $-\frac{5a^3}{2x^3}$ in vece di $\frac{a}{x}$. Lascerò al Lettore la cura d'effettnare il calcolo (*).

145. Si riduce facilmente lo sviluppo d'una potenza d'un *polinomio* qualunque a quello delle potenze del *binomio* nel modo, che ora farò veder sul *trinomio* $a+b+c$, del quale formo adesso la terza potenza.

Faccio primieramente $b+c=m$, ed ottengo $(a+b+c)^3=(a+m)^3=a^3+3a^2m+3am^2+m^3$; ponendo in seguito per m il *binomio* $b+c$, ch'essa rappresenta, ho

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3.$$

Altro non resta che sviluppare le potenze del *binomio* $b+c$, ed effettuar sopra queste potenze le moltiplicazioni indicate; il che darà

$$\begin{aligned} &a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ &+3a^2c+6abc+3b^2c\\ &+3ac^2+3bc^2\\ &+c^3 \end{aligned}$$

Dell'estrazione delle radici delle quantità complesse.

146. Avendo esposta la composizione delle potenze delle quantità *complesse*, passo adesso all'estrazione delle loro radici, principiando dalla radice cubica dei numeri.

(*) La formula dello sviluppo di $(x+a)^m$ conviene a tutti i valori dell'esponente m, e s'applica egualmente al caso, in cui quest'esponente fosse frazionario, o negativo. Tal proprietà, ch'è importantissima, è dimostrata nel *Complemento* di questo *Trattato*.

Per operar l' estrazione della radice cubica dei numeri, fa di mestieri conoscer primieramente i cubi dei numeri d' una sola cifra; si troveranno questi nella seconda linea della seguente Tavola

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729;

ed il cubo di 10 essendo 1000, qualunque numero di tre cifre non contiene che il cubo d' un numero d' una sola cifra.

La formazione del cubo d' un numero di due cifre s' opera in una maniera analoga a quella del quadrato; poichè, decomponendo questo numero in diecine, e unità, indicando poi le prime per a, le seconde per b, viene

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

il che dimostra che *il cubo, ovvero la terza potenza d' un numero composto di diecine, e unità, contien quattro parti, cioè, il cubo delle diecine tre volte il quadrato delle diecine moltiplicato per le unità, tre volte le diecine moltiplicate per il quadrato dell' unità, e finalmente il cubo delle unità.*

Sia 47 il numero, del qual si domanda la terza potenza; facendo $a = 4$ diecine, ovvero 40, $b = 7$ unità, troveremo

$$\begin{aligned} a^3 &= 64000 \\ 3a^2b &= 33600 \\ 3ab^2 &= 5880 \\ b^3 &= 343 \\ \hline \text{Totale} \ldots\ldots\ldots\ & 103823 = 47 \times 47 \times 47. \end{aligned}$$

Per ritornare adesso dal cubo 103823 alla sua radice 47, osserveremo primieramente che 64000, cubo delle 4 diecine, non ha cifre significative d' un

ordine inferiore alle milliaja; possiam dunque, nella ricerca del cubo delle diecine, far astrazione dalle centinaja, dalle diecine, e dalle unità del numero 103823. Dopo di ciò, disponendo l'operazione come per l'estrazione della radice quadrata, separereremo le tre prime cifre sulla destra con una virgola; il maggior cubo contenuto in 103 sarà quello delle diecine. Vedremo dalla Tavola precedente che questo cubo è 64, la cui radice è 4; porrem dunque 4 nel posto destinato per la radice. Si sottrarrà in seguito 64 da 103; ed allato del resto 39 abbasseremo le tre ultime cifre. Il resto totale 39823 conterrà ancora tre parti del cubo, cioè, tre volte il quadrato delle diecine moltiplicato per le unità, ovvero $3a^2b$, tre volte le diecine moltiplicate per il quadrato delle unità, ovvero $3ab^2$, e il cubo delle unità, ovvero b^3. Se s'avesse il valor del prodotto $3a^2b$, siccome si conoscon di già le diecine a, dividendo questo prodotto per $3a^2$, s'otterrebbero le unità b; ma, benchè non conoscasi $3a^2b$, sappiamo frattanto che questo prodotto non debb'avere alcuna cifra significativa d'un ordine inferiore alle centinaja, poichè desso contiene il fattore a^2, ch'esprime il quadrato delle diecine; non può dunque trovarsi che nella parte 398, che resta, del numero 39823, dopo che si son separate le diecine, e le unità; parte, che contiene inoltre le centinaja, che provengono dal prodotto $3ab^2$ delle diecine per il quadrato delle unità, e dal cubo b^3 delle stesse unità.

103,823	47
64	48
39 8,23	

Dividendo 398 per 48, ch'esprime, nell'esempio proposto, il triplo del quadrato delle diecine $3a^2$, ovvero 3×16, troverem per quoziente 8; ma ciò, che precede, fa vedere che non si dee

adottar questa cifra per le unità della radice cercata senza averla prima verificata; ciò si fa formando le tre ultime parti del cubo, che dee contenere il resto 39823. Facendo $b = 8$, si trova

$$\begin{aligned} 3a^2b &= 38400 \\ 3ab^2 &= 7680 \\ b^3 &= 512 \\ \hline \text{Totale} \ldots\ldots\ldots & 46592; \end{aligned}$$

e questo resultato sorpassando 39823, prova che bisogna diminuire il numero 8 preso per le unità. Provando 7 nella stessa maniera, si vede ch' esso sodisfà alle condizioni, e che per conseguenza 47 è la radice cercata.

In vece di fare la verificazion, che ho eseguita, si preferisce per ordinario d' alzare immediatamente al cubo il numero, ch' esprimono le due cifre trovate, moltiplicandolo pel suo quadrato. Operando in questa maniera sopra 48, si troverà

$$48 \times 48 \times 48 = 110592;$$

e questo numero essendo maggior del proposto 103823, mostra pur che la cifra 8 è troppo grande.

147. Ciò, che abbiam praticato sull' esempio qui sopra, debb' effettuarsi nella stessa maniera sopra tutti i numeri espressi da più di tre cifre, e meno di sette. Avendo separate le tre prime verso la destra, cercheremo il maggior cubo contenuto nella parte restante a sinistra; porteremo la sua radice nel posto, che le è stato destinato; toglierem questo cubo dalla parte del numero proposto, sulla quale abbiamo operato; allato del resto abbasseremo le tre ultime cifre; separeremo le diecine, e le unità; e divideremo ciò, che resta a sinistra, per il triplo del quadrato delle diecine

trovate; ma prima di scrivere il quoziente alla radice, lo verificheremo alzando a cubo il numero, ch'esprime questa cifra unita alle diecine cognite. Se il resultato di quest'operazione è troppo grande, diminuiremo la cifra delle unità; procederemo a una nuova verificazione; e così in seguito fino a che non si trovi un resultato eguale al numero proposto, o minore di questo numero, se desso non è un cubo perfetto. In questo caso la radice trovata non è che quella del maggior cubo, ch'esso contiene. Siccome abbiamo spesso dei resti considerabilissimi, ecco da che cosa potremo conoscere se la cifra delle unità è troppo debole.

Il cubo di $a+b$, allorchè facciamo $b=1$, divien quello di $a+1$, ed ha per espressione

$$a^3+3a^2+3a+1;$$

quantità, la quale sorpassa a^3, cubo di a, di

$$3a^2+3a+1.$$

Segue da ciò che *fintantochè il resto d'un'estrazione della radice cuba sarà minore di tre volte il quadrato della radice, più tre volte la radice, più l'unità, questa radice non sarà troppo piccola.*

148. Per estrar la radice cuba da 105823817, osserveremo primieramente che qualunque sia il numero delle cifre di questa radice, se si decompone in unità, e diecine, il cubo di quest'ultime non potrà far parte delle tre ultime cifre verso la destra, e dovrà per conseguenza trovarsi in 105823. Ma il maggior cubo contenuto in 105823 avrà più d'una cifra nella sua radice, la quale potrà in conseguenza decomporsi in unità, e diecine, ed il cubo di queste diecine, non discendendo al disotto delle millesime, non potrà far parte delle tre ultime cifre 823. Se, dopo la separazion di queste, restasser sempre più di tre cifre verso la sinistra,

si ripeterebbe il ragionamento precedente, ed arriverebbesi così ad indicare il posto del cubo delle unità dell' ordine il più elevato della radice cercata col dividere il numero proposto in membri di tre cifre, andando dalla destra alla sinistra; l'ultimo potrà contenerne meno di tre.

Ciò posto, dopo d' aver preparata l' operazione secondo il solito, cercheremo primieramente, per la regola del num.° precedente, la radice cubica dei due primi membri, e troveremo 47 per resultato; toglieremo il cubo di questo numero dai due membri, che lo contengono; allato del resto 2000 abbasseremo il membro seguente 817; ed il numero 2000817 dee contenere le tre ultime parti del cubo d'un numero, del quale 47 esprime le diecine, e di cui si cercano le unità: troverem dunque queste unità, come nell' esempio del numero precitato, separando le due ultime cifre verso la destra del resto, e dividendo la parte a sinistra per 6627, triplo del quadrato di 47. Verificheremo il quoziente 3 alzando 473 a cubo, e troveremo per resultato lo stesso numero proposto, perchè questo numero è un cubo perfetto.

105,823,817	473
64	48
418,23	6627
10382 3	
2000 8,17	
105823 817	
000 000 000	

La spiegazione dell' esempio quì sopra può tenere il luogo di regola generale. Se il numero proposto avesse un membro di più, si continuerebbe l' operazione come l' abbiam fatto pel terzo, e non bisognerebbe mancare di porre uno *zero* alla radice se il numero da dividersi sulla sinistra del resto non contenesse quello, pel quale bisogna dividerlo: abbasserebbesi allora il membro seguente, e s' opererebbe su questo membro riunito al resto come sui precedenti.

149. Poichè *il cubo d'una frazione s'ottiene moltiplicando questa frazione pel suo quadrato, ovvero, ciò ch'è lo stesso, cubando il suo numeratore, e cubando il suo denominatore*, ne segue che *ricaderemo sulla radice, prendendo quella del nuovo numeratore, e quella del nuovo denominatore*. Il cubo di $\frac{5}{6}$, per esempio, è $\frac{125}{216}$; prendendo la radice cubica di 125, e quella di 216, si ritrova $\frac{5}{6}$.

Tal'è il metodo, che bisogna seguire allorchè il numeratore, e denominatore sono ambedue cubi perfetti: ma allorchè ciò non ha luogo, ci risparmiamo la pena d'estrar la radice dal denominatore, moltiplicando pel suo quadrato i due termini della frazion proposta; poichè il denominatore resultante da quest'operazione diviene il cubo del denominator primitivo, e non resta che a prendere la radice del numeratore. Se si avesse, per esempio, $\frac{3}{5}$, moltiplicando i due termini di questa frazione per 25, quadrato del denominatore, avrebbesi

$$\frac{75}{5\times 5\times 5};$$

la radice del denominatore è 5: quanto a quella di 75, si trova ch'essa è tra 4, e 5. Limitandosi a 4, avremo $\frac{4}{5}$ per la radice cubica di $\frac{3}{5}$, prossima al vero colla differenza di meno di $\frac{1}{5}$. Per avere una maggior esattezza, bisognerà estrar la radice approssimativa da 75 col mezzo, che indicherò in seguito.

Allorchè il denominatore fosse un quadrato perfetto, servirà moltiplicare i due termini della frazione per la radice quadrata del denominatore. Così, per trovar la radice cubica di $\frac{4}{9}$, moltiplico i due termini per 3, radice quadrata di 9, ed ottengo

$$\frac{12}{3\times 3\times 3};$$

prendendo la radice del maggior cubo 8 contenuto in 12, s' ottiene $\frac{2}{3}$ per la radice cercata, che differisce dal vero meno di $\frac{1}{3}$.

150. Segue da ciò, ch' è stato dimostrato nel n.° 97, che la radice cubica d' un numero, il quale non è un cubo perfetto, non può esprimersi esattamente per alcuna frazione, comunque grande sia il suo denominatore: sarà dunque questa una quantità *irrazionale*, ma d' una specie diversa da quella della radice quadrata; poichè il più spesso è impossibile d' esprimer l' una per l' altra.

151. Si potrebbe ottener la radice cubica approssimata per mezzo delle frazioni ordinarie, servendosi d' un metodo analogo a quello, che ho fatto conoscere nel n.° 103. sulla radice quadrata; metodo, ch' è troppo facile a immaginarsi per non meritare di trattenermivi, visto d' altronde che riescirebbe di poco comodo.

Il miglior mezzo d' impiegar le frazioni ordinarie per questa ricerca consiste nell' estrar la radice in frazioni d' una specie data. Affine di conseguir, per esempio, la radice cubica di 22, che differisca dal vero meno della quinta parte dell' unità, osserveremo che il cubo di $\frac{1}{5}$ è $\frac{1}{125}$, e ridurremo in conseguenza 22 in $\frac{2750}{125}$: essendo la radice cuba di 2750 presa in numeri interi, avremo $\frac{14}{5}$, ovvero $2\frac{4}{5}$ per quella di 22.

152. Il mezzo, ch'è più in uso ond' estrarre per approssimazione la radice cubica d'un numero, consiste nel convertir questo numero in frazion *decimale*; ma è da osservarsi che ciò non può essere se non in millesime, o in millionesime parti, ec., perchè le decime divengon millesime allorchè s'alzano alla terza potenza, le centesime si cangiano in millionesime, ed in generale *il numero delle cifre decimali, che si trovan nel cubo, è triplo di quello, che ne contien la radice*. Bisogna concluder da ciò che si dee porre in seguito del numero proposto tre volte tanti *zeri* quanti sono i *decimali*, che si vogliano nella sua radice. Faremo in appresso l'estrazione secondo le regole precedentemente esposte, e separemo nel resultato il numero di cifre *decimali* richiesto.

Se si volesse aver, per esempio, la radice cubica di 327, che differisca dal vero men d'un centesimo, si scriverebber sei *zeri* in seguito a questo numero, e s'estrarrebbe, secondo la regola, la radice da 327000000. Eccone l'operazione:

327,000,000	688
216	108
1110,00	13872
3144 32	
125 680,00	
325 660 672	
1 339 328	

Si separerebbero in seguito due cifre *decimali* sulla destra del resultato, e s'avrebbe 6,88: ma sarà

più esatto il prendere 6,89, perchè il cubo dell' ultimo numero, benchè maggiore di 327, si approssima più di quello di 6,88.

Se il numero proposto contenesse già dei *decimali*, bisognerebbe, prima di cominciar l'estrazione, porre alla sua destra tanti *zeri* quanti ne sarebbero necessarj per rendere il numero delle cifre *decimali* multiplo di 3. Sia, per esempio, 0,07, scriveremo 0,070: prendendo la radice di 70 millesime, troveremo 0,4. Per ispingere l'esattezza fino ai centesimi, bisognerebbe porre altri tre *zeri*, il che farebbe 0,070000. La radice di 70000, estratta in numeri interi, essendo 41, quella di 0,07, esatta fino ai centesimi, sarà 0,41.

153. Dopo aver dati i mezzi d' estrar la radice quadrata, e la radice cuba dei numeri, la formula del *binomio* conduce ad un metodo analogo per ottener la radice d' un grado qualunque; ma prima d' espor questo metodo farò qualche osservazione sull' estrazion delle radici, il cui esponente è un numero, che abbia dei divisori.

L' estrazione della radice quarta può effettuarsi col mezzo di due estrazioni successive della radice quadrata; poichè, prendendo in primo luogo la radice quadrata d' una quarta potenza, di a^4, per esempio, si cade sul quadrato, ovvero a^2; resultato, la cui radice quadrata è a, ovvero la quantità cercata.

Vedrem parimente che tre estrazioni successive della radice quadrata equivalgono all' estrazione della radice ottava; poichè la radice quadrata di a^8 è a^4; quella di a^4 è a^2; e finalmente quella di a^2 è a.

È evidente in questa maniera che qualunque radice d' un grado espresso da qualcuno dei numeri 2, 4, 8, 16, 32, ec., e vale a dire da una potenza

di 2, s' otterrà per mezzo d' una serie d' estrazioni della radice quadrata.

Le radici, i cui esponenti non son dei numeri *primi*, posson ridursi ad altre d' un grado meno elevato; la radice sesta, per esempio, si otterrà per mezzo d' un' estrazione della radice quadrata, seguìta da un' estrazione della radice cubica. Per convincersene, fa di mestieri osservare che operando in questa maniera sopra a^6, si trova in primo luogo a^3, e poi a; potrebbesi ancora prender prima la radice cubica, il che darebbe a^2; indi la radice quadra, ed avrebbesi a.

154. Passo adesso al metodo generale, il quale applicherò al quinto grado; questo metodo sarà più facile a intendersi sopra un caso particolare, e paragonandolo a quello, che ho dato per l' estrazione della rádice quadrata, e per quella della radice cubica, vedrem senza pena come bisognerà operare per un grado qualunque.

Sia da estrarsi pertanto la radice quinta da 231554007. Osservo primieramente che il più piccol numero di due cifre, vale a dire 10, n' ha sei alla sua quinta potenza, ch' è 100000, e ne concludo che la radice quinta del numero proposto ha almeno due cifre: potrò dunque rappresentare questa radice per $a+b$, a essendo le diecine, e b le unità, ed il numero propósto avrà per sua espressione

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \text{ec.}$$

Non isviluppo tutti i termini di questa potenza perchè serve conoscere la composizion de' due primi, come adesso vedremo.

Ciò posto, è evidente che a^5, ovvero la quinta potenza delle diecine di questa radice, non potendo discendere al di sotto delle centinaja di mil-

liaja, non fa parte delle cinque prime cifre alla destra: separo dunque queste cinque cifre. Se ne restassero più di cinque a sinistra, farei riguardo a queste il medesimo ragionamento, che ho fatto adesso, e decomporrei così il numero proposto in tanti membri di cinque cifre, andando dalla destra alla sinistra: l'ultimo di questi membri verso la sinistra conterrà la quinta potenza delle unità dell'ordine il più alto, che sia nella radice.

Formando le quinte potenze dei numeri d'una sola cifra, riconosco che 2315 cade tra la quinta potenza di 4, ch'è 1024, e quella di 5, ch'è 3125.

2315,54007	47
1024	
12915,4007	1280

Prendo dunque 4 per le diecine della radice cercata; e togliendo la quinta potenza di questo numero, o sivvero 1024, dal primo membro del numero proposto, ho di resto 1291, allato del quale faccio discendere il membro seguente. Il numero, che ne resulta, dee contenere i termini $5a^4b + 10a^3b^2 +$ ec., che restano di $(a+b)^5$, dopo che abbiam tolto a^5; ma il più elevato di questi termini è $5a^4b$, ovvero cinque volte la quarta potenza delle diecine moltiplicata per le unità, perchè non discende al disotto delle diecine di milliaja. Per considerarlo in particolare, separeremo le quattro ultime cifre sulla destra, le quali non ne fan parte, ed il numero 12915, che resta a sinistra, conterrà questo termine, più le diecine di milliaja provenienti dai termini, che lo seguono. Si vede dunque che dividendo 12915 per $5a^4$, o sivvero per cinque volte la quarta potenza delle 4 diecine trovate, ci approssimeremo alle unità. La quarta potenza di 4 è 256; il suo quintuplo si eleva a 1280; dividendo 12915 per 1280, si troverebbe 10 per quoziente; ma non si può por più

di 9 nella radice, e bisogna ancora, prima d'adottar questa cifra, vedere se la radice 49, che s'ottiene aggiungendola alle 4 diecine, che digià abbiamo, produca una quinta potenza maggiore del numero dato. Si trova in questa maniera che bisogna diminuire il numero 49 di due unità, e che la vera radice è 47, con un resto eguale a 2209000; poichè la quinta potenza di 47 è 229345007, e vale a dire, che la radice esatta del numero proposto cade tra 47, e 48.

Se vi fosse un membro di più, s'abbasserebbe per unirlo al resto, che in questo caso ha lasciato la sottrazione della quinta potenza effettuata sopra i due primi membri; opererebbesi sul resto totale come lo abbiam fatto sul precedente, e così in seguito.

Dopo quello, che abbiamo detto, è facile l'applicazione al caso attuale delle regole date tanto per estrar la radice quadrata, e la radice cubica delle frazioni, quanto per approssimarsi alle radici delle potenze imperfette di questi gradi.

155. Col mezzo di metodi fondati sui principj medesimi arrivasi ad estrar le radici delle quantità letterali: l'esempio seguente servirà per far vedere come dobbiam contenerci per un grado qualunque:

Abbiam trovato nel n.° 143 la sesta potenza di $2x^3 - 5a^3$; riprendo questa potenza per estrarne la radice sesta; e per far ciò la dispongo nel modo seguente:

$$\begin{array}{l|l} 64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 & \\ \quad + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 & \\ \quad + 15625a^{18} & \dfrac{2x^3 - 5a^3}{192x^{15}} \\ -64x^{18} & \\ \hline \text{resto} - 960a^3x^{15} + \text{ec.} & \end{array}$$

La quantità proposta essendo ordinata per rapporto a x, il suo primo termine debb'esser la sesta potenza del primo termine della radice ordinata nella stessa maniera; prendendo in conseguenza la radice sesta di $64x^{18}$, secondo la regola del n.° 129, avremo $2x^3$.

Alzando questo resultato alla sesta potenza, e sottraendola dalla quantità proposta, il resto, che ottiensi, comincia necessariamente dal secondo termine dello sviluppo della sesta potenza de' due primi termini della radice. Ora, nell'espressione

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + \text{ec.}$$

questo termine è il prodotto di sei volte la quinta potenza del primo termine della radice per il secondo, e se si divide per $6a^5$, il quoziente sarà il secondo termine b.

Bisogna dunque formare il sestuplo della quinta potenza del primo termine $2x^3$ della radice, il che darà

$$6 \times 32\, x^{15}, \text{ o sivvero } 192\, x^{15},$$

e dividere per questa quantità il termine $-960\, a^3 x^{15}$, col quale principia il resto dell'operazion precedente; il quoziente $-5a^3$ è il secondo termine della radice. Per verificarlo, alzerebbesi alla sesta potenza il *binomio* $2x^3 - 5a^3$, ed il resultato darebbe la quantità proposta.

Se la radice dovesse contenere un termin di più, troverebbesi, dopo l'operazione di sopra esposta, un secondo resto, il quale principierebbe col sestuplo del prodotto della quinta potenza dei due primi termini della radice per il terzo, il quale perciò bisognerebbe dividere per $6\,(2x^3 - 5a^3)^5$: il quoziente sarebbe questo terzo termine della radice; si verificherebbe formando la sesta potenza dei tre termini già trovati. Si procederebbe nella stessa maniera per trovar tutti i ter-

mini consecutivi, qualunque fosse il numero dei medesimi.

Dell' Equazioni a due termini.

156. Ogni equazione, la quale non contiene che una sola potenza dell' incognita, combinata con delle quantità cognite, può sempre ridursi a due termini, uno de' quali è la riunione di tutti quelli, che contengon l' incognita, e l' altro comprende l' insieme delle quantità date: lo abbiam già veduto per il secondo grado nel n.° 105., ed è facile concepirlo per un grado qualunque.

Se abbiam, per esempio,

$$a^2 x^5 - a^5 b^2 = b^4 c^3 + a c x^5,$$

passando tutti i termini affetti da x in un sol membro, ne dedurremo

$$a^2 x^5 - a c x^5 = b^4 c^3 + a^5 b^2,$$

ovvero $(a^2 - ac) x^5 = b^4 c^3 + a^5 b^2$.

Se adesso si rappresentano le quantità

$$a^2 - a c \text{ per } p, \quad b^4 c^3 + a^5 b^2 \text{ per } q,$$

l' equazion precedente diverrà

$$p x^5 = q;$$

e liberando del coefficiente la quantità x^5, avremo

$$x^5 = \frac{q}{p},$$

dalla quale concluderemo

$$x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}.$$

In generale, qualunque equazione a due termini essendo ridotta alla forma

$$p x^m = q,$$

dà allora

$$x^m = \frac{q}{p};$$

e prendendo la radice del grado m da ciascun membro, si conseguisce

$$x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}.$$

157. Bisogna osservare che, se l'esponente m è un numero *impari*, il radicale non avrà che un sol segno, e sarà quello della quantità sotto il medesimo radicale.

Quando poi l'espouente m sarà *pari*, il radicale avrà il doppio segno $\pm$; sarà *immaginario* se la quantità $\frac{q}{p}$ è negativa, ed il Problema sarà allora assurdo, come per il secondo grado (131).

Ecco degli esempj.

L'equazione $x^5 = -1024$. dà

$$x = \sqrt[5]{-1024} = -4,$$

perchè l'esponente 5 è *impari*.

L'equazione $x^4 = 625$ dà

$$x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5,$$

perchè l'esponente 4 è *pari*.

Finalmente, l'equazione $x^4 = -16$ dando

$$x = \pm\sqrt[4]{-16},$$

non conduce che a dei valori *immaginarj*, perchè l'esponente 4 essendo *pari*, la quantità posta sotto il radicale è negativa.

158. Prima d'andar avanti, farò conoscere un fatto analitico, il quale sarà utilissimo tanto per il seguito di quest'Opera che per il suo *Complemento*, ed è notabile per se stesso: questo è che tutte l'espressioni $x - a$, $x^2 - a^2$, $x^3 - a^3$, ed in generale $x^m - a^m$ (m essendo un numero intero positivo qualunque) son esattamente divisi-

bili per $x-a$. La cosa è evidente per la prima; si sa che la seconda

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)\ (34);$$

e per mezzo della divisione si decomporrebbero facilmente le altre. Dividendo parimente x^m-a^m per $x-a$, troverebbesi per quoziente

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\text{ec.},$$

l'esponente di x andando sempre diminuendo, e quello di a aumentando nella stessa maniera; ma in vece di seguire le particolarità di quest'operazione, porrò immediatamente l'equazione

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1},$$

la qual può verificarsi, moltiplicando il secondo membro per $x-a$. Diviene allora,

$$\begin{array}{l} x^m+ax^{m-1}+a^2x^{m-2}\ldots\ldots+a^{m-2}x^2+a^{m-1}x \\ \quad -ax^{m-1}-a^2x^{m-2}-a^3x^{m-3}\qquad\qquad -a^{m-1}x-a^m; \end{array}$$

tutti i termini della prima linea, a partir dal secondo, essendo gli stessi, ad eccezione del segno, che quelli, i quali precedon l'ultimo della seconda linea, resta solamente, dopo le riduzioni x^m-a^m, e vale a dire il dividendo proposto.

Bisogna osservare che in seguito dei termini a^2x^{m-2} vien nella linea superiore il termine a^3x^{m-3}, il quale si trova distrutto dal suo corrispondente nella linea inferiore; e che parimente nella linea inferiore trovasi avanti il termine $a^{m-1}x$ un termine $a^{m-2}x^2$, il quale distrugge il suo corrispondente superiore. Questi termini non sono scritti, perchè si sottintendon compresi nelle lacune indicate dai punti.

159. Ciò conduce a delle conseguenze importantissime relativamente all'equazione a due termini $x^m=\frac{q}{p}$.

Indicando per a il numero, che s'ottiene per l'estrazione immediata della radice, estratta secondo le regole del num.° 154., si ha

$$\frac{q}{p} = a^m, \text{ ovvero } x^m = a^m,$$

e trasportando il secondo membro nel primo, viene

$$x^m - a^m = 0.$$

La quantità $x^m - a^m$ si divide per $x - a$, e si ha, per il num.° precedente,

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1});$$

quest'ultimo resultato, che svanisce allorchè $x=a$, diverrebbe egualmente nullo se s'avesse

$$x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots . + a^{m-2}x + a^{m-1} = 0 \ (116);$$

e se in conseguenza esistesse un valore di x, il quale sodisfacesse a quest'ultima equazione, esso sodisfarebbe egualmente alla proposta.

Questi valori hanno coll'unità delle relazioni semplicissime, le quali si scopriranno facendo $x=ay$; per mezzo di ciò l'equazione $x^m - a^m = 0$, diverrà

$$a^m y^m - a^m = 0, \text{ ovvero } y^m - 1 = 0;$$

dal che otterremo i valori di x moltiplicando quelli di y per il numero a.

L'equazione $y^m - 1 = 0$ dà in primo luogo

$$y^m = 1, \quad y = \sqrt[m]{1} = 1;$$

poi, dividendo $y^m - 1$ per $y - 1$, s'ottiene

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots . + y^2 + y + 1;$$

e questo quoziente, essendo eguagliato a *zero*, è l'equazione, da cui dipendono gli altri valori di y, i quali avranno, nello stesso modo che l'unità, la proprietà di sodisfare all'equazione

$$y^m - 1 = 0, \text{ ovvero } y^m = 1; \text{ e}$$

vale a dire che la loro potenza del grado m sarà l'unità.

Da ciò resulta questa conseguenza, singolare a prima vista, cioè, che l'unità può aver più *radici* oltre a se stessa.

Queste *radici*, le quali sono *immaginarie*, hanno, malgrado ciò, un uso frequente nell'Analisi: ma non posso quì far conoscere se non che quelle dei quattro primi gradi, perchè, col mezzo di ciò che precede, non si può risolvere che per questi soli gradi l'equazione

$$y^{m-1} + y^{m-2} \ldots\ldots + 1 = 0,$$

la quale le somministra.

Sia 1.° $m = 2$, abbiamo

$$y^2 - 1 = 0,$$

dalla quale ricavasi

$$y = +1, \quad y = -1.$$

2.° Facendo $m = 3$, si ottiene

$$y^3 - 1 = 0,$$

dalla quale deducesi

$$y = 1,$$

poi $$y^2 + y + 1 = 0.$$

Quest'ultima equazione essendo risoluta, dà

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2};$$

così abbiamo, per questo grado, le tre radici

$$y = 1, y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Le due ultime sono *immaginarie*; ma, se ne facciamo il cubo, formando a norma del n.° 34. quello del numeratore, e se s'osserva che il quadrato di $\sqrt{-3}$ essendo -3, il suo cubo è $-3\sqrt{-3}$, troveremo pure $y^3 = 1$, come per la radice $y = 1$.

3.° Prendendo $m = 4$, si ha

$$y^4 - 1 = 0,$$

dalla quale se ne deriva

$$y = 1,$$

dipoi $$y^3 + y^2 + y + 1 = 0,$$

Non si vede a colpo d' occhio come si possa risolvere quest' equazione; ma osservando che

$$y^4 - 1 = (y^2 + 1)\,(y^2 - 1),$$

abbiam successivamente

$$y^2 - 1 = 0, \quad y^2 + 1 = 0,$$

dalle quali resulta

$$y = +1, y = -1, y = +\sqrt{-1}, y = -\sqrt{-1}.$$

Di questi quattro valori due solamente sono *reali*, e gli altri due *immaginarj*.

Siffatta moltiplicità di *radici* dell' unità dipende da una legge generale dell' equazioni, dietro alla quale un' incognita ammette tanti valori quante unità vi sono nell' esponente del grado dell' equazione, che la determina; e quando il Problema non comporta questo numero di soluzioni *reali*, esso divien completo per mezzo di simboli puramente algebrici, i quali trovandosi sottomessi alle operazioni indicate nell' equazione, la verificano parimente.

Segue da ciò che le *radici* dei numeri hanno due specie d' espressioni, o valori; la prima, ch' io chiamerò *determinazione aritmetica*, è il *numero*, che si trova pei metodi esposti nel n.° 154., e ch' è unico per ciascun caso particolare; la seconda comprende i valori *negativi*, e l' espressioni *immaginarie*, ch' io designerò sotto il nome di *determinazioni algebriche*, perchè desse non debbon la loro esistenza che alla considerazione dei segni dell' Algebra.

Dell' equazioni, le quali posson risolversi come quelle del secondo grado.

160. Il carattere di queste equazioni consiste in questo ch' esse non contengono che due potenze differenti dell' incognita, dove l' esponente dell' una è doppio di quello dell' altra; la formula generale è

$$x^{2m} + px^m = q;$$

p, e q essendo quantità cognite.

Se prendiamo in primo luogo x^m per l' incognita, ovvero se facciasi $x^m = u$, avremo

$$x^{2m} = u^2,$$

ed in conseguenza

$$u^2 + pu = q,$$

$$u = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2} \text{ (109)};$$

rimettendo x^m in luogo di u, otterremo

$$x^m = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2};$$

equazione a due termini, poichè la quantità

$$-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

non contenendo che delle operazioni cognite, da effettuarsi sopra delle quantità date, debb' esser riguardata come cognita.

Rappresentando per a, e per a' i due valori di questa quantità, avremo

$$x^m = a, \text{ e } x^m = a',$$

dalle quali ricaveremo

$$x = \sqrt[m]{a}, \text{ e } x = \sqrt[m]{a'}.$$

Se l' esponente m fosse *pari*, in vece dei due valori quì sopra n' avremo quattro; poichè cia-

scun radicale sarebbe suscettibile del segno $\pm$; avrebbesi dunque

$$x = +\sqrt[m]{a},\ x = +\sqrt[m]{a'},$$

$$x = -\sqrt[m]{a},\ x = -\sqrt[m]{a'};$$

e questi quattro valori saranno *reali* se le quantità a, e a' sian *positive*.

Tutti i valori di x resteranno compresi in una formula sola, indicando immediatamente la *radice* dei due membri dell'equazione

$$x^m = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2};$$

il che darà

$$x = \sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}}.$$

Il Problema seguente conduce ad un' equazione di questo genere.

161. *Decomporre il numero 6 in due fattori tali che la somma de' loro cubi sia 35.*

Sia x uno di questi fattori, l'altro sarà $\frac{6}{x}$, ed avremo, per la somma dei loro cubi, x^3, e $\frac{216}{x^3}$, l'equazione

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = 35,$$

la quale riducesi a

$$x^6 + 216 = 35x^3,$$

ovvero a $$x^6 - 35x^3 = -216.$$

Se riguardasi x^3 come incognita, otterremo, per mezzo della regola dell'equazioni di secondo grado,

$$x^3 = \tfrac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{35}{2}\right)^2 - 216};$$

effettuando i calcoli numerici quivi indicati, troveremo

$$\left(\tfrac{35}{2}\right)^2 = \tfrac{1225}{4}$$

$$\sqrt{\left(\tfrac{35}{2}\right)^2 - 216} = \sqrt{\tfrac{361}{4}} = \tfrac{19}{2},$$

ed in conseguenza

$$x^3 = \tfrac{35}{2} + \tfrac{19}{2} = \tfrac{54}{2} = 27,$$

$$x^3 = \tfrac{35}{2} - \tfrac{19}{2} = \tfrac{16}{2} = 8,$$

dalle quali ricavasi

$$x = \sqrt[3]{27} = 3,$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Il primo valore dà per il secondo fattore $\frac{6}{3}$, ovvero 2, laddove che il secondo valore conduce a $\frac{6}{2}$ ovvero 3; abbiam dunque in un caso 3, e 2 pei fattori cercati, e nell' altro 2, e 3. Queste due soluzioni non differiscono che per un cangiamento d' ordine nei due fattori del numero 6.

162. L' equazioni, che ho considerate, son egualmente comprese nella legge generale enunciata al n.° 159; poichè bisogna moltiplicare i valori di $\sqrt[m]{a}$, e $\sqrt[m]{a}$ per le *radici* dell' unità del grado m.

Applicando questa considerazione all' equazione

$$x^6 - 35x^3 = -216,$$

troveremo le sei *radici* seguenti:

$$x = 1 \times 3, \qquad x = 1 \times 2,$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 3, \qquad x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 2,$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 3, \qquad x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 2,$$

delle quali le due sole prime sono *reali*.

Del calcolo dei radicali.

163. Il gran numero dei casi, ne' quali non si possono estrarre esattamente le *radici*, e la lunghezza dell' operazione necessaria affine di conseguirle per approssimazione, han condotto gli Algebristi a procurar d' eseguire immediatamente sulle quantità sottomesse ai segni radicali le operazioni fondamentali concernenti le loro *radici*, ed a semplicizzarne tanto quanto era possibile i resultati in tal modo da ridurre alla fin del calcolo l' operazione la più complicata, e vale a dir l' estrazione, e da non doverla così effettuare che sopra i più piccoli numeri, ovvero sull' espressioni le più semplici, che i Problemi proposti possano comportare.

L' addizione, e la sottrazione delle quantità radicali dissimili non può che indicarsi col mezzo dei segni $+$, e $-$. Per esempio, le somme

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b},$$

le differenze

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b},$$

non son suscettibili d' altra espressione.

Non sarebbe lo stesso della quantità

$$4a\sqrt[3]{2b} + \sqrt[3]{16a^3b} - \frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b},$$

perchè i radicali, che la compongono, possono divenir simili mediante la semplicizzazione indicata nel n.° 130. Osserverebbesi primieramente che

$$\sqrt[3]{16a^3b} = \sqrt[3]{8a^3.2b}, \quad \text{ovvero} \quad 2a\sqrt[3]{2b},$$
$$\sqrt[3]{2a^6b} = \sqrt[3]{a^6.2b}, \quad \text{ovvero} \quad a^2\sqrt[3]{2b},$$

ond' avrebbesi

$$4a\sqrt[3]{2b} + 2a\sqrt[3]{2b} - \frac{5a^2c}{ad}\sqrt[3]{2b},$$

e riducendo otterrebbesi

$$6a\sqrt[3]{2b} - \frac{5ac}{d}\sqrt[3]{2b}, \text{ ovvero } \left(6d - 5c\right)\frac{a}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

164. A riguardo dell' altre operazioni, il calcolo de' radicali riposa sopra questo principio di già citato: *Se s'alzano i differenti fattori d'un prodotto a una medesima potenza, il prodotto sarà alzato a questa potenza*. Da un altro lato, è visibile che si alza una quantità *radicale* alla potenza del medesimo esponente dello stesso *radicale* sopprimendo questo segno *radicale*. Per esempio, $\sqrt[7]{a}$, alzata alla settima potenza, è semplicemente a, poichè quest' operazione, inversa di quella, che indica il segno $\sqrt[7]{\ }$, non fa che ridurre al suo primo stato la quantità a.

Ciò posto, se, per esempio, nell' espressione

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b}$$

si sopprimono i radicali, il resultato ab sarà la settima potenza del prodotto indicato quì sopra; e prendendo la radice settima, concluderemo

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{ab}.$$

Questo ragionamento, il qual può applicarsi a qualunque altro caso, fa manifesto che, *per moltiplicar due espressioni radicali del medesimo grado, bisogna fare il prodotto delle quantità poste sotto i radicali, e rendere affetto questo prodotto da un segno radicale del medesimo grado.*

Per mezzo di questa regola, si ha

$$3\sqrt{2ab^3} \times 7\sqrt{5a^3bc} = 21\sqrt{10a^4b^4c} =$$

$$21a^2b^2\sqrt{10c}:$$

$$4\sqrt{a^2-b^2} \times \sqrt{a^2+b^2} = 4\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} =$$

$$4\sqrt{a^4-b^4}:$$

$$\sqrt[9]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}} \times \sqrt[5]{\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$= \sqrt[8]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4} \times \frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a^3(2a^6-b^6)}{a^4-b^4} \times \frac{b^3c^2}{d^2}(a^2+b^2)}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a^3b^3c^2}{d^2} \times \frac{2a^6-b^6}{a^2-b^2}},$$

a motivo che

$$a^4-b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2).$$

165. Se si considera che la settima potenza dell'espressione $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}$, per esempio, è $\frac{a}{b}$, ne concluderemo, prendendo la radice settima di quest'ultimo resultato, che

$$\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}} = \sqrt[7]{\frac{a}{b}};$$

dal che ne segue che, *per dividere l'una per l'altra due quantità radicali del medesimo grado, bisogna prendere il quoziente delle quantità sotto-*

poste ai radicali, e rendere questo quoziente affetto da un radicale del medesimo grado.

Si trova, per mezzo di questa regola che

$$\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{6ab}{3a}} = \sqrt{2b};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}} = \sqrt{a-b};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[6]{b^3c^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^3c^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2c^2}}.$$

166. Deducesi dalla regola della moltiplicazione dei radicali del medesimo grado, data nel n.° 164., che *per alzare una quantità radicale a una potenza qualunque, serve alzare a questa potenza la quantità sottoposta al radicale, e rendere questo resultato affetto dal medesimo radicale;* poichè, per esempio, alzare $\sqrt{ab}$ alla terza potenza vuol dire effettuare il prodotto

$$\sqrt{ab} \times \sqrt{ab} \times \sqrt{ab};$$

e siccome i *radicali* son del medesimo grado, bisogna (164) moltiplicare tra loro le quantità affette dai medesimi, poi porre il segno *radicale* avanti il prodotto; il che dà

$$\sqrt{a^3b^3}.$$

Parimente $\sqrt[7]{a^2b^3}$ alzata alla quarta potenza dà $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$, la quale riducesi a

$$ab\sqrt[7]{ab^5},$$

decomponendo a^8b^{12} in $a^7b^7 \times ab^5$, e prendendo la *radice* dal fattore a^7b^7 (130).

È a proposito pur d'osservare che, *quando l'esponente del radicale è divisibile per quello della potenza, alla quale s'alza la quantità proposta, l'operazione s'effettua dividendo il primo esponente per il secondo*. Per esempio,

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a},$$

perchè $\frac{6}{2} = 3$.

Infatti, $\sqrt[6]{a}$ indica una quantità, la quale è sei volte fattore in a, e la quantità $\sqrt[3]{a}$, la quale s'ottiene dividendo l'esponente 6 per 2, non essend'altro che tre volte fattore in a, equivale in conseguenza al prodotto di due dei primi fattori; dessa è dunque la seconda potenza d'uno di questi fattori, ovvero di $\sqrt[6]{a}$.

Lo stesso ragionamento s'applicherebbe all'esempio quì sopra, ed a qualunqu'altro:

$$\left(\sqrt[12]{a^2b}\right)^3 = \sqrt[4]{a^2b}.$$

167. Rovesciando le regole dell'articolo precedente, si conseguiscono quelle, che fa di mestieri seguire nell'estrazione delle *radici* dalle quantità *radicali*.

E manifesto primieramente riguardo alla prima che, *se gli esponenti delle quantità sottoposte al radicale son divisibili per quello della radice, che si vuole estrarre, effettueremo l'operazione come se non vi fossero de' radicali, e daremo al resultato il radical primitivo*.

Si trova, per esempio, che

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^6}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[6]{a^2},$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4b^8}} = \sqrt[8]{\sqrt[4]{a^4b^8}} = \sqrt[8]{ab^2}.$$

Dalla seconda regola del num.° precedente si conclude che *l'estrazione della radice delle quantità radicali s'indica in generale moltiplicando l'esponente del radicale per quello della radice, che vuolsi estrarre*.

Per mezzo di questa regola, trovasi che

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}.$$

Difatto, $\sqrt[5]{a^4}$ è una quantità, ch'è cinque volte fattore in a^4 (24, 129); ma la *radice* cubica di $\sqrt[5]{a^4}$ dovendo pure esser tre volte fattore in quest' ultima quantità, si troverà 5×3 volte, ovvero 15 volte fattore nella prima a^4: dunque $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$. Proverebbesi parimente che $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$.

168. Poichè moltiplicando l'esponente d'una quantità sottoposta ad un *radicale* per un numero (166) alzasi alla potenza indicata da questo numero la radice indicata, e moltiplicando pure per il medesimo numero l'esponente del *radicale* (167) s'estrae dal resultato una *radice* del grado eguale a quello della potenza, che abbiam formata, ne segue che questa seconda operazione riduce al suo primo stato la quantità proposta.

L'espressione $\sqrt[5]{a^3}$, per esempio, può cangiarsi in $\sqrt[35]{a^{21}}$, la quale si ottiene moltiplicando per 7 gli esponenti 5, e 3; poichè moltiplicar per 7 l'esponente di a^3 vuol dire formar la settima potenza del *radicale* proposto, il che dà il radicale $\sqrt[5]{a^{21}}$; e moltiplicando per sette l'esponente 5 del *radicale* $\sqrt[5]{a^{21}}$ vuol dire prendere la *radice* settima

del resultato; operazione, la quale distrugge l'effetto della prima.

169. Per questa doppia operazione *riduconsi al medesimo grado un numero qualunque di radicali di gradi diversi moltiplicando ad un tempo l'esponente di ciascun radicale, e quelli delle quantità al medesimo sottoposte per il prodotto degli esponenti di tutti gli altri radicali*. L'identità dei nuovi esponenti dei radicali è per se stessa evidente, poichè dessi sono formati dal prodotto di tutti gli esponenti dei *radicali* primitivi; e dietro a ciò, che precede, ciascuna quantità *radicale* non ha cangiato valore.

Per mezzo di questa regola si trasformano

$$\sqrt[5]{a^3b^2}, \text{ e } \sqrt[7]{c^4d^3},$$

in $$\sqrt[35]{a^{21}b^{14}}, \text{ e } \sqrt[35]{c^{20}d^{15}};$$

parimente le tre quantità

$$\sqrt[3]{ab^2}, \quad \sqrt[5]{a^2c^3}, \quad \sqrt[7]{b^4c^3}$$

respettivamente divengono

$$\sqrt[105]{a^{35}b^{70}}, \quad \sqrt[105]{a^{42}c^{63}}, \quad \sqrt[105]{b^{60}c^{45}}.$$

Se vi fosser dei numeri sotto dei *radicali*, bisognerebbe alzare ancor questi alla potenza espressa dal prodotto degli esponenti degli altri *radicali*.

170. Parimente si può *passar sotto il segno radicale un fattor, che sia fuori, alzandolo alla potenza espressa dall'esponente del radicale*.

Cangerem, per esempio,

$$a^2 \text{ in } \sqrt[5]{a^{10}}, \text{ e } 2a\sqrt[3]{b} \text{ in } \sqrt[3]{8a^3b}.$$

171. Dopo d'aver ridotti al medesimo grado, per la trasformazion precedente, dei radicali qualunque, applicherem loro senza difficoltà le regole date nei num.i 164, e 165 concernenti la molti-

plicazione, e la divisione delle quantità *radicali* del medesimo grado.

Sia in generale

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s};$$

cangio (169)

$$\sqrt[m]{a^p b^q}, \qquad \sqrt[n]{b^r c^s},$$

in $\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}}$, $\sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}}$;

e la regola del n.° 164 dà

$$\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}} \times \sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}} = \sqrt[mn]{a^{np} b^{nq+mr} c^{ms}}$$

per il prodotto dei *radicali* proposti.

Abbiam pure per il n.° 165.

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}}}{\sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq}}{b^{mr} c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

Osservazioni sopra qualche caso singolare del calcolo dei radicali.

172. Le regole, dalle quali abbiam fatto dipendere il calcolo dei radicali s' applicano senza difficoltà alle quantità *reali*, ma esse indurrebbero in errore per rapporto alle quantità *immaginarie* se non si accompagnassero da alcune osservazioni, le quali dipendono dalle proprietà dell' equazioni a due termini.

Per esempio la regola del n.° 164. dà immediatamente

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{a^2};$$

e se noi ci contentassimo di prender $+a$ per $\sqrt{a^2}$, il resultato sarebbe visibilmente falso, poichè il prodotto $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, essendo il quadrato di $\sqrt{-a}$, dee ottenersi sopprimendo il radicale, ed è in conseguenza eguale a $-a$.

Bezout ha spiegata benissimo questa difficoltà osservando che quando s' ignora in qual maniera sia stato formato il quadrato a^2, e che se ne dimanda la radice, si dee assegnare egualmente $+a$, e $-a$; ma quando sappiam d' altronde quale di queste due quantità è stata moltiplicata per se stessa onde produrre a^2, non è più permesso, ritornando indietro, di prenderne un' altra. Questo caso è evidentemente quello dell' espressione $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$: sappiamo allora che la quantità a^2 compresa sotto il radicale $\sqrt{a^2}$ viene da $-a$ moltiplicata per $-a$; l' ambiguità dunque cessa, e quando ritorniamo alla radice bisogna porre $-a$.

Lo stesso imbarazzo avrebbe pur luogo per il prodotto $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ se non si fosse condotti, perchè non v' è alcun segno — nell' espressione, a prendere immediatamente il valore positivo di $\sqrt{a^2}$. Bisognerebbe far attenzione che in questo caso a^2 venendo da $+a$ moltiplicato per $+a$, la sua radice dee necessariamente esser $+a$.

Questi ragionamenti non lasciano nessun dubbio sul caso particolare, che ho considerato; ma ve ne son altri, i quali non si possono spiegar chiaramente se non che per mezzo delle proprietà dell' equazioni a due termini.

173. Se, per esempio, si domandasse il prodotto $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1}$, riducendo il secondo radicale

al medesimo grado del primo (169), si avrebbe

$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{+1} = \sqrt[4]{a};$$

resultato *reale*, benchè sia evidentissimo che la quantità *reale* $\sqrt[4]{a}$ moltiplicata per la quantità *immaginaria* $\sqrt{-1}$ dee dare un prodotto *immaginario*. Non bisogna creder frattanto che l'espressione $\sqrt[4]{a}$ sia interamente falsa, ma solamente che si prende allora in un senso troppo particolare.

Infatti, $\sqrt[4]{a}$ considerata algebricamente essendo l'espressione dell'incognita x nell'equazione a due termini

$$x^4 - a = 0,$$

è suscettibile di quattro determinazioni differenti (159); poichè, se facciamo $a = \alpha^4$, rappresentando per α il valore numerico di $\sqrt[4]{a}$, fatta astrazione dal segno, ovvero la determinazione *aritmetica* di questa quantità, avremo i quattro valori $\alpha \times +1$, $\alpha \times -1$, $\alpha \times +\sqrt{-1}$, $\alpha \times -\sqrt{-1}$, la terza delle quali è precisamente il prodotto proposto.

Con un poco d'attenzione riconoscesi facilmente la causa dall'ambiguità, che abbiamo osservata. La seconda potenza $+1$ della quantità -1 posta sotto il radicale quadrato potendo esser prodotta tanto da $+1 \times +1$ che da -1×-1, s'introducono nella quantità $\sqrt[4]{1}$ due determinazioni, le quali non si trovavano in $\sqrt{-1}$.

In generale, la maniera, colla quale abbiam trovata la regola, che serve a formare il prodotto $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b}$, riducesi ad alzar questo prodotto alla

potenza mn; poichè, se si fosse rappresentato questo prodotto per z, e si fosse fatto

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = z,$$

alzando primieramente alla potenza m, si sarebbe ottenuto

$$a \sqrt[n]{b^m} = z^m;$$

e di poi alzando alla potenza n, sarebbesi avuto

$$a^n b^m = z^{mn}.$$

Questo prodotto non essendo dunque cognito che per la sua potenza del grado mn, ovvero per un' equazione a due termini di questo grado, debb' avere mn determinazioni (159); e si concepiscono facilmente allorchè si fa attenzione che l' espressioni $\sqrt[m]{a}$, e $\sqrt[n]{b}$ non essendo altra cosa che i valori delle incognite x, e y, nell' equazioni a due termini

$$x^m - a = 0, \quad y^n - b = 0,$$

ed in conseguenza suscettibili di m, e di n determinazioni, potremo, combinando ciascuna delle m determinazioni di x con ciascuna delle n determinazioni di y, ottenere mn determinazioni del dimandato prodotto.

Quando si tratta di quantità *reali*, la scelta non è imbarazzante, perchè il numero delle determinazioni di questa specie non sorpassa mai due (157), che non differiscono che per il segno.

174. Facendo uso della trasformazione notata nel n.° 159, si fa cadere tutta la difficoltà sulle radici di $+1$, ovvero di -1; poichè, se si pone $x = \alpha t$, e $y = \varepsilon u$, α, e ε indicando le determi-

nazioni *numeriche* di $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, senza aver riguardo al segno, l'equazioni

$$x^m \mp a = 0, \qquad y^n \mp b = 0$$

divengono

$$t^m \mp 1 = 0, \qquad u^n \mp 1 = 0,$$

e se ne ricava l'espressione

$$xy = \sqrt[m]{\pm a} \times \sqrt[n]{\pm b} = \alpha\, \mathfrak{C}\, t\, u = \alpha\, \mathfrak{C} \sqrt[m]{\pm 1} \times \sqrt[n]{\pm 1};$$

nella quale $\alpha\, \mathfrak{C}$ rappresenta il prodotto dei numeri $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, ovvero la determinazione *aritmetica* della radice del grado mn del numero $a^n b^m$.

Quando vorremo particolarizzare il prodotto dei radicali $\sqrt[m]{\pm a}$, $\sqrt[n]{\pm b}$ per una determinazione speciale di questi radicali, bisognerà trovare dietro l'equazioni

$$t^m \mp 1 = 0, \qquad u^n \mp 1 = 0$$

le diverse espressioni di $\sqrt[m]{\pm 1}$, $\sqrt[n]{\pm 1}$, e combinarle convenevolmente.

Del rimanente, queste operazioni non si presentano che di rado per alcuni casi semplicissimi: ecco quì i principali:

1.° $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\,(\sqrt{-1} \times \sqrt{-1})$:

sopprimo il radicale di $\sqrt{-1}$, ed ottengo

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}.$$

2.° $\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab}\,(\sqrt[4]{-1})^2$;

io non moltiplico quì -1 per -1, perchè ricaderei sull' ambiguità osservata nel n.° 173; ma osservo che il quadrato della radice quarta non

è altra cosa che la radice quadrata, e viene allora

$$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab} \times \sqrt{-1}.$$

3.° $\sqrt[6]{-a} \times \sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{ab} \times (\sqrt{-1})^2 = \sqrt[6]{ab} \times \sqrt[3]{-1}$

$$= \sqrt[6]{ab} \times -1 = -\sqrt[6]{ab}.$$

Si troverebbero in questa maniera dei resultati alternativamente *reali*, ed *immaginarj*.

Del calcolo degli esponenti frazionarj.

175. Allorchè si pongono i radicali in luogo degli esponenti frazionarj, che lor corrispondono (132), l'applicazione immediata delle regole degli esponenti somministra i medesimi resultati, che danno i metodi usati nel calcolo dei radicali.

Infatti, se si trasforman le quantità

$$\sqrt[5]{a^3b^2}, \qquad \sqrt[5]{a^3c^2}$$

in $$a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}, \qquad a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}},$$

avremo

$$\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[5]{a^3c^2} = a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}} =$$

$$a^{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}};$$

poscia osservando che $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$, che in conseguenza

$$a^{\frac{6}{5}} = a^{1+\frac{1}{5}} = a \times a^{\frac{1}{5}} \text{ (25)},$$

he $a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}$ equivale a $\sqrt[5]{ab^2c^2}$, verrà

$$\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[5]{a^3c^2} = a\sqrt[5]{ab^2c^2};$$

resultato non solamente esatto, ma ancora ridotto alla sua espressione più semplice.

Sia l'esempio generale $\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s}$; i radicali proposti si trasformano in

$$a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}, \qquad b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}},$$

ed otterremo, secondo le regole degli esponenti (25),

$$a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}} \times b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}} = a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}.$$

Se si vuole adesso effettuar l'addizione delle frazioni $\frac{q}{m}, \frac{r}{n}$, fa di mestieri ridurle al medesimo denominatore, ed affine di dar dell'uniformità ai resultati, bisogna fare lo stesso anco sulle frazioni $\frac{p}{m}, \frac{s}{n}$; s'ottiene per questo mezzo

$$a^{\frac{np}{mn}} b^{\frac{nq+mr}{mn}} c^{\frac{ms}{mn}};$$

e passando ai radicali si ha

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s} = \sqrt[mn]{a^{np} b^{nq+mr} c^{ms}}.$$

176. La divisione s'effettua colla stessa semplicità: abbiasi, per esempio,

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{\sqrt[5]{a^4 c}} = \frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}} c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}} c^{\frac{1}{5}}} \quad (38);$$

il che riducesi a

$$\frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}}};$$

e passando ai radicali si ha

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{\sqrt[5]{a^4 c}} = \sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}$$

In generale abbiamo

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}} = \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m} - \frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}};$$

e riducendo al medesimo denominatore gli esponenti frazionarj, per effettuare la sottrazione indicata, si trova

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{np}{mn}} b^{\frac{nq - mr}{mn}}}{c^{\frac{ms}{mn}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq - mr}}{c^{ms}}}.$$

E' facil vedere che la riduzione degli esponenti frazionarj al medesimo denominatore fa quì lo stesso effetto che la riduzione dei radicali al medesimo grado, e conduce precisamente agli stessi resultati (171).

177. E' parimente evidente, per la regola del n.° 127, che

$$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^n = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n = a^{\frac{np}{m}} = \sqrt[m]{a^{np}},$$

e per quella del n.° 129.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}} = a^{\frac{p}{mn}} = \sqrt[mn]{a^p}.$$

Il calcolo degli esponenti frazionarj è un degli esempj più ragguardevoli dell' utilità dei segni allorchè dessi son bene scelti. L' analogia, che regna tra gli esponenti frazionarj, e quelli, che sono interi, rende le regole, che dobbiam seguire nel calcolo di questi ultimi, applicabili a quelle

degli altri, mentre che sono stati necessarj dei ragionamenti particolari per discoprir le regole del calcolo dei radicali, perchè il segno $\sqrt{\ }$, che gli esprime, non ha alcun legame coll' operazion, che gli genera. Più che c' inoltriamo nell' Algebra, più riconosconsi i numerosi vantaggi, che ha prodotti in questa scienza il simbolo degli esponenti immaginato da *Descartes*.

Teoria generale dell' Equazioni.

178. L' equazioni del primo grado, e del secondo sono, a parlar propriamente, le sole, delle quali s' abbia una soluzione completa; ma si sono scoperte nell' eqnazioni d' un grado qualunque delle proprietà generali, le quali conducono a risolverle allorchè esse sono *numeriche*, ed offrono delle numerose conseguenze per le parti più elevate dell' Algebra. Queste proprietà dipendono da una forma particolare, sotto la quale può esser disposta qualunque equazione.

Supponendola tanto generale quant' essa può essere per un grado qualunque, un' equazione dee contenere tutte le potenze dell' incognita, da quella del suo grado fino alla prima inclusivamente, moltiplicate ciascuna per delle quantità cognite, e in oltre un termine tutto cognito.

L' equazion generale del quinto grado, per esempio, conterrà tutte le potenze dell' incognita dalla prima fino alla quinta inclusivamente; e, se vi siano più termini affetti dalla potenza medesima dell' incognita, bisognerà concepirli riuniti in un solo, come lo abbiam fatto per l' equazioni di secondo grado nel n.° 108. Dipoi passeremo, come abbiam fatto nel medesimo num.°, tutti i termini dell' equazione in un solo membro; l' altro sarà

necessariamente eguale a *zero*; e renderemo il primo termine positivo cangiando, se sarà necessario, tutti i segni de' termini dell' equazione.

Avremo con questo mezzo un' espressione simile alla seguente:

$$nx^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0,$$

nella quale bisogna osservare che le lettere n, p, q, r, s, t posson rappresentare tanto dei numeri negativi che dei numeri positivi; poi dividendo tutto per n, affine di non lasciare al primo termine che l' unità per coefficiente, facendo

$$\frac{p}{n}=\mathrm{P},\frac{q}{n}=\mathrm{Q},\frac{r}{n}=\mathrm{R},\frac{s}{n}=\mathrm{S},\frac{t}{n}=\mathrm{T},$$

verrà

$$x^5+\mathrm{P}x^4+\mathrm{Q}x^3+\mathrm{R}x^2+\mathrm{S}x+\mathrm{T}=0.$$

D' ora in avanti supporrò che siansi sempre preparate l' equazioni nel modo, che abbiam fatto adesso, e rappresenterò l' equazion generale d' un grado qualunque per

$$x^n+\mathrm{P}x^{n-1}+\mathrm{Q}x^{n-2}\ldots\ldots+\mathrm{T}x+\mathrm{U}=0.$$

La lacuna indicata dai punti si riempie allorchè si dà all' esponente n un valore particolare.

Qualunque quantità, o espressione, tanto *reale*, che *immaginaria*, la quale posta in luogo dell' incognita x in un' equazione, preparata come sopra, rende il primo membro eguale a *zero*, e per conseguenza sodisfà al Problema, si chiama *radice dell' equazione proposta*. Ma, siccome quì non si tratta di potenze, questa denominazione è più generale di quella, che ho data sino al presente alla parola *radice* (90. 129.).

179. Ecco una proposizione analoga a quelle dei numeri 116., e 159., e che dee risguardarsi come fondamentale.

La radice d'un' equazione qualunque

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots\ldots+Tx+U=0$$

essendo rappresentata da a , *il primo membro di quest' equazione dividesi esattamente per il binomio* x—a .

Difatto, poichè *a* è un valore di *x*, abbiamo necessariamente.

$$a^n+Pa^{n-1}+Qa^{n-2}\ldots\ldots+Ta+U=0,$$

ed in conseguenza

$$U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\ldots\ldots-Ta;$$

di maniera che l'equazion proposta è identicamente la stessa che

$$\left.\begin{array}{l} x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots\ldots+Tx \\ -a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\ldots\ldots-Ta \end{array}\right\}=0,$$

e riducesi a

$$\left.\begin{array}{l} x^n-a^n+P(x^{n-1}-a^{n-1})+Q(x^{n-2}-a^{n-2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+T(x-a) \end{array}\right\}=0.$$

Le quantità

$$x^n-a^n,\quad x^{n-1}-a^{n-1},\quad x^{n-2}-a^{n-2},\ldots x-a,$$

essendo tutte divisibili per $x-a$ (158), è evidente che il primo membro dell' equaziou proposta avrà tutti i suoi termini divisibili per questa quantità, e sarà in conseguenza divisibile per $x-a$, come dall' enunciato della proposizione apparisce (*).

(*) *D' Alembert* prova la medesima Proposizione nel modo, che segue:

Se si concepisce che il primo membro dell'equazion proposta sia diviso per $x-a$, e che l'operazione sia stata spinta fino a che non sieno esauriti tutti i termini affetti da x, il *resto*, se vi sarà, non potrà contenere x Rappresentando questo *resto* per R, e chiamando Q il quoziente qualunque siasi, cui sarem pervenuti, avrem necessariamente

180. Per formare il quoziente, altro non si dee far che sostituire in luogo delle quantità,

$$x^n - a^n,\ x^{n-1} - a^{n-1},\ x^{n-2} - a^{n-2},\ \ldots\ x - a$$

i quozienti, ch' essi danno allorchè si dividono per $x - a$, e che son respettivamente

$$\begin{array}{llll} x^{n-1} & + ax^{n-2} & + a^2x^{n-3} \ldots\ & + a^{n-1}, \\ & x^{n-2} & + a\,x^{n-3} & + a^{n-2}, \\ & & x^{n-3} & + a^{n-3}, \\ & & \ldots\ldots\ldots & \\ & & & + 1. \end{array}$$

Ordinando il resultato per rapporto alle potenze di x, troveremo

$$\begin{array}{llll} x^{n-1} & + a\,x^{n-2} & + a^2\,x^{n-3} \ldots\ & + a^{n-1} \\ & + \mathrm{P}x^{n-2} & + \mathrm{P}a x^{n-3} \ldots\ & + \mathrm{P}\,a^{n-2} \\ & & + \mathrm{Q}\,x^{n-3} \ldots\ & + \mathrm{Q}a^{n-3} \\ & & \ldots\ldots\ldots & \\ & & & + \mathrm{T}. \end{array}$$

181. E visibile, dietro alle sole regole della divisione, che il primo membro dell' equazione

$$x^n + \mathrm{P}x^{n-1} + \mathrm{Q}x^{n-2} + \text{ec.} = 0$$

essendo diviso per $x - a$, darà un quoziente della forma

$$x^n + \mathrm{P}x^{n-1} \ldots\ + \text{ec.} = \mathrm{Q}(x-a) + \mathrm{R}.$$

Ora, allorchè in vece di x si sostituisce a, il primo membro va a *zero*, poichè a è il valore di x; il termine $\mathrm{Q}(x-a)$ va parimente a *zero* per motivo del fattore $x-a$, che diviene *zero*; si dee dunque avere $\mathrm{R}=0$; e ciò indipendentemente dalla sostituzione, poichè questo *resto* non contenendo x, la sostituzione non può effettuarvisi, ed anco dopo conserva lo stesso valore, ch'egli avea per l'avanti.

Resulta da ciò che, in tutti i casi, $\mathrm{R}=0$, e che in conseguenza

$$x^n + \mathrm{P}\,x^{n-1} + \mathrm{Q}\,x^{n-2} + \text{ec.}$$

è divisibile esattamente per $x-a$.

$$x^{n-1}+P'x^{n-2}+Q'x^{n-3}+\text{ec.},$$

P', Q', ec. indicando delle quantità cognite, differenti da P, Q, ec.: avrem dunque

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=(x-a)(x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{ec.});$$

e seguendo l'osservazione del num.° 116., l'equazion proposta si verificherà in due maniere, cioè, facendo

$$x-a=0, \text{ ovvero } x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{ec.}=0.$$

Se adesso l'equazione

$$x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{ec.}=0$$

ha una radice b, il suo primo membro sarà divisibile per $x-b$; avremo ancora

$$x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{ec.}=(x-b)(x^{n-2}+P''x^{n-3}+\text{ec.}),$$

ed in conseguenza

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=(x-a)(x-b)(x^{n-2}+P''x^{n-3}+\text{ec.});$$

l'equazione proposta potrà dunque verificarsi in tre maniere, cioè facendo

$$x-a=0, \text{ ovvero } x-b=0, \text{ ovvero } x^{n-2}+P''x^{n-3}+\text{ec.}=0.$$

Se l'ultima di quest'equazioni ha una radice c, il suo primo membro si decomporrà pure in due fattori

$$x-c,\ x^{n-3}+P'''x^{n-4}+\text{ec.}=0,$$

ed avremo

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)(x^{n-3}+P'''x^{n-4}+\text{ec.});$$

dal che si fa manifesto che l'equazion proposta potrà verificarsi in quattro maniere, cioè, facendo

$$x-a=0,\ x-b=0,\ x-c=0,\ x^{n-3}+P'''x^{n-4}+\text{ec.}=0$$

E continuando lo stesso ragionamento, otterrem successivamente dei fattori de' gradi

$$n-4,\ n-5,\ n-6,\ \text{ec.};$$

e se ciascuno di questi fattori, eguagliato a *zero*, è suscettibile d' una *radice*, il primo membro dell'equazion proposta sarà ridotto alla forma

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots.(x-l),$$

e vale a dire, sarà decomposto in tanti fattori di primo grado quante saranno le unità dell' esponente n del suo grado. L' equazione

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=0$$

potrà dunque verificarsi in n maniere, cioè, facendo $x-a=0$, ovvero $x-b=0$, oppure $x-c=o$, ossia $x-d=0$, o sivvero finalmente

$$x-l=0.$$

Fa di mestieri osservare che queste equazioni non debbon essere riguardate come vere che alternativamente, e che si cadrebbe in delle manifeste contradizioni se si supponesse che le medesime avessero luogo simultaneamente. Difatto, da $x-a=0$ ricavasi $x=a$, laddove che $x-b=0$ conduce a $x=b$; conseguenze, le quali non possono insieme accordarsi allorchè a, e b, son quantità diseguali.

182. Il primo membro dell' equazion proposta

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=0$$

essendo decomposto in n fattori di primo grado,

$$x-a, x-b, x-c, x-d, \ldots. x-l,$$

non potrà essere divisibile per alcun' altra espressione di questo grado. Infatti, se la divisione per un binomio $x-\alpha$, differente dai primi, fosse possibile, avrebbesi

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\text{ec.}),$$

ed in conseguenza

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots.(x-l)$$
$$=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\text{ec.}):$$

ma il primo membro di quest' equazione va a *zero* quando $x=a$; dee dunque succeder lo stesso del secondo, il quale, in quest' ipotesi, diviene

$$(a-\alpha)(a^{n-1}+pa^{n-2}+\text{ec.});$$

e siccome a, e α son supposti ineguali, il primo fattore $a-\alpha$ non è *zero*: sarà dunque il fattore

$$a^{n-1}+pa^{n-2}+\text{ec.},$$

che dee divenirlo; e così la quantità a è necessariamente *radice* dell'equazione

$$x^{n-1}+px^{n-2}+\text{ec.}=0.$$

Segue da ciò che il suo primo membro è divisibile per $x-a$, e che

$$x^{n-1}+px^{n-2}+\text{ec.}=(x-a)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\text{ec.}),$$

dal che ne resulta che

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-l)$$
$$=(x-\alpha)(x-a)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\text{ec.}).$$

Dividendo i due membri di quest' equazione per $x-a$, ne dedurremo

$$(x-b)(x-c)(x-d)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-l)$$
$$=(x-\alpha)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\text{ec.}).$$

Dimostreremo, come qui sopra, che il secondo fattore

$$x^{n-2}+p'x^{n-3}+\text{ec.}$$

del secondo membro debb' essere divisibile per $x-b$, il che ridurrà l' equazione suddetta a

$$(x-c)(x-d)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-l)$$
$$=(x-\alpha)(x^{n-3}+p''x^{n-4}+\text{ec.}).$$

E continuando in questa maniera torremo successivamente dal primo membro, e dal secondo $(n-1)$ fattori; non resterà dunque nell' uno che $x-l$, e nell' altro che $x-\alpha$, e ne concluderemo dunque

$$x-l=x-\alpha, \text{ ovvero } l=\alpha.$$

Segue da questo, e dalle cose precedenti *che un' equazione d' un grado qualunque non può ammettere più divisori binomj di primo grado di quel che vi sien unità nell' esponente del di lei grado, e ch' essa non può avere in conseguenza un maggior numero di radici.*

183. Riguardando un' equazione come il prodotto d' un numero di fattori

$$x-a,\quad x-b,\quad x-c,\quad x-d,\text{ ec.}$$

eguale all' esponente del suo grado, essa prenderà la forma del prodotto indicato nel n.° 135., con questa modificazione però, che i termini saranno alternativamente positivi, e negativi.

Se ci limitiam, per esempio, a quattro fattori, avremo

$$\begin{array}{l} x^4-ax^3+abx^2-abcx+abcd=0. \\ \quad -bx^3+acx^2-abdx \\ \quad -cx^3+adx^2-acdx \\ \quad -dx^3+bcx^2-bcdx \\ \quad +bdx^2 \\ \quad +cdx^2 \end{array}$$

I secondi termini del binomj $x-a$, $x-b$, $x-c$, ec. essendo le *radici* dell' equazione, presi con un segno contrario, le proprietà rilevate nel n.° 135., e provate in generale nel n.° 136., avranno luogo per il caso attuale nella maniera seguente:

Il coefficiente del secondo termine, preso con un segno contrario, sarà la somma delle radici.

Il coefficiente del terzo termine sarà la somma dei prodotti delle radici moltiplicate due a due.

Il coefficiente del quarto termine, preso con un segno contrario, sarà la somma dei prodotti delle radici, moltiplicate tre a tre; e così in se-

guito, osservando di cangiare i segni de' coefficienti dei termini situati in posto *pari*.

L' ultimo termine, soggetto come gli altri alla stessa legge, *sarà il prodotto di tutte le radici*.

Eguagliando, per esempio, a *zero* il prodotto dei tre fattori

$$x-5,\ x+4,\ x+3,$$

formerem l' equazione

$$x^3+2x^2-23x-60=0,$$

le *radici* della quale saranno

$$+5,\ -4,\ -3:$$

avremo per la lor somma

$$5-4-3=-2:$$

per quella dei loro prodotti due a due

$$+5\times-4+5\times-3-4\times-3=-20-15+12=-23,$$

e per il prodotto delle tre radici avremo

$$+5\times-4\times-3=60.$$

In questa maniera pure si dedurrebbero i coefficienti $2, -23, -60$, osservando di cangiare i segni di quelli del secondo, e del quarto termine.

Se si eguaglia a *zero* il prodotto dei fattori

$$x-2,\ x-3,\ \text{e}\ x+5,$$

l' equazion resultante

$$x^3-19x+30=0,$$

mancando del termine affetto da x^2, potenza immediatamente inferiore a quella del primo termine, *manca del secondo termine*, e ciò perchè la somma delle radici, la quale, presa con il segno contrario, forma il coefficiente del secondo termine, è qui

$$2+3-5,$$

ovvero *zero*, oppure, in altri termini, perchè

la somma delle *radici positive* è eguale a quella delle *negative* (*).

(*) Potrebbesi credere che per iscoprir le *radici* d'un'equazione qualunque del quarto grado

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

fossesufficiente paragonarla col prodotto accennato nel num.° 183, osservando d'eguagliare le quantità, le quali moltiplicano nell' una, e nell'altra le medesime potenze di x; ed è per questa ragione che la maggior parte degli Autori elementari pensano di dimostrare che *un' equazione d'un grado qualunqne è il prodotto di tanti fattori semplici quante son le unità, che si trovano nell' esponente del suo grado*: vedremo da ciò, che segue, che il loro ragionamento è falso. Io non concludo questa proposizione se non che condizionalmente nel num.° 182., poichè sarebbe necessario, per affermarla positivamente, dimostrare che un'equazione d' un grado qualunque ha una *radice* o *reale* o *immaginaria*; cosa, che non sembra facile a farsi negli *Elementi*, e che felicemente non è allor necessaria; si posson d'altronde vedere nel *Complemento* le reflessioni, che ho riportate su questo soggetto.

Formando l'equazioni

$$\begin{aligned} -a-b-c-d &= p \\ +ab+ac+ad+bc+bd+cd &= q \\ -abc-abd-acd-bcd &= r \\ abcd &= s \end{aligned}$$

per ricavarne i valori delle lettere a, b, c, d, i quali sarebbero le *radici* dell' equazione proposta, il calcolo sarebbe complicatissimo se si volesse impiegar per la determinazion dell'incognite a, b, c, d il metodo del num.° 78.; ma, se si moltiplica la prima dell' equazioni quì sopra per a^3, la seconda per a^2, la terza per a, e si sommino questi tre prodotti con la quarta, membro a membro, avremo

$$-a^4=pa^3+qa^2+ra+s,$$

dalla quale conchiudesi, per mezzo d'una semplice trasposizione,

$$a^4+pa^3+qa^2+ra+s=0.$$

Quest' equazione non contien altro che a, ma dessa

184. Quando si considera un' equazione come formata dal prodotto di più fattori semplici, oppure di primo grado, si prova (182) ch' essa non può averne che un numero espresso dall' esponente n del suo grado; ma, se questi fattori si combinan due a due, si formeranno delle quantità di secondo grado, le quali pure saranno fattori dell' equa-

---

è interamente simile alla proposta: la difficoltà d' ottenere a è dunque la stessa di quella per ottener x.

Così, come lo ha detto *Castillon* (*Mem. di Berlino, anno* 1789.): „ Si prova in tutti i Corsi d' Algebra „ che per mezzo del prodotto di più binomj semplici „ formasi un' equazione di qualunque grado si voglia, „ ma non si prova in alcuno che un' equazione for- „ mata per mezzo della moltiplicazione di più binomj „ semplici possa aver dei coefficienti tali quali vor- „ rannosi „.

Se, in vece di moltiplicare le tre prime equazioni in a, b, c, d per a^3, a^2, e a respettivamente, si moltiplicassero per b^3, b^2, e b, o sivvero per c^3, c^2, e c, oppure per d^3, d^2, e d, e che si sommassero pure i prodotti con la quarta, avrebbesi nel primo caso

$$-b^4 = pb^3 + qb^2 + rb + s,$$

nel secondo

$$-c^4 = pc^3 + qc^2 + rc + s,$$

nel terzo

$$-d^4 = pd^3 + qd^2 + rd + s;$$

dal che ne segue che siamo condotti alla stessa equazione tanto per aver a, che per aver b, ec. Difatto, le quantità a, b, c, d essendo tutte disposte della stessa maniera in ciascuna equazione, non esiste ragione, mercè della quale una sia determinata per qualche operazione differente da quelle, che determinan l' altre; e in generale, se, nella ricerca di più quantità incognite, siamo obbligati d' impiegar per ciascuna i medesimi ragionamenti, le medesime operazioni, e le medesime quantità cognite, tutte queste quantità saranno necessariamente *radici* d' una stessa equazione.

zione proposta, e il cui numero sarà espresso da

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \quad (140).$$

Per esempio, il primo membro dell' equazione

$$\begin{array}{l} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0, \\ \quad - bx^3 + acx^2 - abdx \\ \quad - cx^3 + adx^2 - acdx \\ \quad - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ \qquad\quad + bdx^2 \\ \qquad\quad + cdx^2 \end{array}$$

essendo il prodotto di

$$(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d),$$

può decomporsi in fattori di secondo grado nelle sei maniere seguenti

$$\begin{array}{l} (x-a)\ (x-b) \times (x-c)\ (x-d), \\ (x-a)\ (x-c) \times (x-b)\ (x-d), \\ (x-a)\ (x-d) \times (x-b)\ (x-c), \\ (x-b)\ (x-c) \times (x-a)\ (x-d), \\ (x-b)\ (x-d) \times (x-a)\ (x-c), \\ (x-c)\ (x-d) \times (x-a)\ (x-b); \end{array}$$

e ne resulta che un' equazione di quarto grado può aver sei divisori di secondo.

E combinando i fattori semplici tre a tre, formeremo i divisori di terzo grado della proposta; per un' equazione del grado n il numero ne sarà

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

e così di seguito.

Dell' Eliminazione tra l' Equazioni dei gradi superiori al primo.

185. La regola del n.° 78., oppure il metodo del n.° 84. serve sempre per eliminare tra due

equazioni un' incognita, la quale non passi il primo grado, qualunque sia d' altronde quello dell' altre incognite; e quando ancora l' incognita non si trovasse al primo grado se non che in una dell' equazioni proposte, la regola del n.° 78. applicherebbesi nella stessa maniera.

Se si hanno, per esempio, l' equazioni

$$ax^2+bxy+cy^2=m^2,$$
$$x^2+xy=n^2,$$

prenderemo dalla seconda il valore di y, il quale sarà

$$y=\frac{n^2-x^2}{x};$$

sostituendo questo valore, ed il suo quadrato, in luogo di y, e y^2 nella prima equazione, otterremo un resultato in x solamente.

186. Se l' equazioni proposte fossero ambedue di secondo grado per rapporto all' una, ed all' altra incognita, non si potrebbe applicare il metodo precedente se non che risolvendo una, dell' Equazioni o per rapporto a x, oppure per rapporto a y.

Sien, per esempio, l' equazioni

$$ax^2+bxy+cy^2=m^2.$$
$$x^2+y^2=n^2:$$

la seconda somministra

$$y=\pm\sqrt{n^2-x^2};$$

sostituendo nella prima questo valore di y, e del suo quadrato, otterremo

$$ax^2\pm bx\sqrt{(n^2-x^2}+c(n^2-x^2)=m^2$$

L' oggetto propostosi sembra sodisfatto, poichè questo resultato non contiene altrimenti l' incognita y; ma non possiamo risolvere l' equazione in x senza ridurla a una forma razionale, facendo cioè sparire il radicale, sotto del quale si trova l' incognita.

E facil vedere che, se il radicale sia solo in un membro, si farà sempre sparire alzando questo membro al quadrato; riunendo dunque, per mezzo della trasposizione dei termini $\pm bx\sqrt{n^2-x^2}$, e m^2, tutti i termini razionali in un solo membro, avremo

$$ax^2+c(n^2-x^2)-m^2=\mp bx\sqrt{n^2-x^2},$$

e prendendo il quadrato di ciascun membro, formerem l' equazione

$$\left.\begin{array}{l} a^2x^4+c^2(n^2-x^2)^2+m^4 \\ +2acx^2(n^2-x^2)-2am^2x^2-2cm^2(n^2-x^2) \end{array}\right\}=b^2x^2(n^2-x^2),$$

la qual più non contiene dei radicali.

Il metodo, che abbiamo impiegato per fare sparire il radicale, debb' essere ben osservato, perchè si ha spesso occasion di servirsene; esso consiste nell' *isolare il radicale, che si vuol fare sparire, e nell' alzare consecutivamente i due membri dell' equazione proposta alla potenza indicata dal grado del medesimo radicale*.

187. La complicazione di questo metodo, la quale divien grandissima allorchè vi sono più radicali, unita alla difficoltà di risolvere una dell' equazioni proposte per rapporto a una dell' incognite, difficoltà, che spesso è insormontabile nello stato attuale dell' Algebra, ha fatto cercare un metodo, per mezzo del quale si può senza di ciò effettuar l' eliminazione; di tal maniera che la risoluzione dell' equazioni venga ad essere l' ultima delle operazioni, ch' esiga la soluzion dei Problemi.

Per render più facili i calcoli, si pongano l' equazioni a due incognite sotto la forma d' equazioni a una sola, non lasciando in mostra che quella, la quale vogliasi eliminare. Se s' avesse, per esempio,

$$x^2+axy+bx=cy^2+dy+e,$$

si trasporrebbero tutti i termini in un sol membro; ordinando per rapporto a x, otterrebbesi

$$x^2+(ay+b)\,x-cy^2-dy-e=0,$$

e facendo, per abbreviare,

$$ay+b=\mathrm{P},\quad -cy^2-dy-e=\mathrm{Q},$$

s'averebbe

$$x^2+\mathrm{P}x+\mathrm{Q}=0.$$

L'equazion generale del grado m a due incognite dee contenere tutte le potenze di x, e di y, le quali non superan questo grado, come pure i prodotti, nei quali la somma degli esponenti di x, e y non s'alza al di sopra di m; possiam dunque rappresentare nel modo seguente l'equazion generale del grado m a due incognite:

$$x^m+(a+by)x^{m-1}+(c+dy+ey^2)x^{m-2}+(f+gy+hy^2+ky^3)x^{m-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(p+qy+ry^2\ldots+uy^{m-1})x+p'+q'y+r'y^2\ldots+v'y^m=0.$$

Non abbiam dato coefficiente a x^m in quest'equazione, perchè si può sempre, mediante la divisione, liberar del suo moltiplicatore qualunque termine vogliasi d'un'equazione; e se facciamo

$$a+by=\mathrm{P},c+dy+ey^2=\mathrm{Q},f+gy+hy^2+ky^3=\mathrm{R},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p+qy\ldots+uy^{m-1}=\mathrm{T},\ p'+q'y\ldots\ldots+v'y^m=\mathrm{U},$$

l'equazione quì sopra prenderà la forma

$$x^m+\mathrm{P}x^{m-1}+\mathrm{Q}x^{m-2}+\mathrm{R}x^{m-3}\ldots+\mathrm{T}x+\mathrm{U}=0.$$

188. Sarà bene osservare che l'eliminazione di x tra due equazioni di secondo grado

$$x^2+\mathrm{P}x+\mathrm{Q}=0\ ,\ x^2+\mathrm{P}'x+\mathrm{Q}'=0$$

può effettuarsi immediatamente togliendo la seconda equazion dalla prima. Quest'operazion somministra

$$(P'-P')x+Q-Q'=0,$$

da cui ricavasi

$$x=-\frac{Q-Q'}{P-P'};$$

sostituendo questo valore in una delle due equazioni proposte, uella prima, per esempio, troveremo

$$\frac{(Q-Q')^2}{(P-P')^2}-\frac{P(Q-Q')}{P-P'}+Q=0:$$

facendo sparire i denominatori, avremo

$$(Q-Q')^2-P(P-P')(Q-Q')+Q(P-P')^2=0;$$

finalmente, sviluppando i due ultimi termini, e riducendo,

$$(Q-Q')^2+(P-P')(PQ'-QP')=0.$$

Altro non resterà ora da fare che sostituire per P, Q, P', e Q' i valori particolari al caso, che quì s'esamina (*).

(*) Si dà qualche volta, per eliminare un'incognita tra due equazioni dei gradi superiori, un metodo, ch'io applicherò alle seguenti

$$Nx^3+Px^2+Qx+R=0,$$
$$N'x^3+P'x^2+Q'x+R'=0.$$

Moltiplicando la prima per N', la seconda per N, e togliendo il secondo prodotto dal primo, come nel numero 84., otterremo

$$(N'P-NP')x^2+(N'Q-NQ')x+N'R-NR'=0\ (a).$$

Moltiplicando di nuovo la prima dell' equazioni proposte per R', la seconda per R, e togliendo il secondo prodotto dal primo, troveremo

$$(R'N-RN')x^3+(R'P-RP')x^2+(R'Q-RQ')x=0;$$

dividendo tutto per x, avremo

$$(R'N-RN')x^2+(R'P-RP')x+R'Q-RQ'=0\ (b):$$

avrem dunque, in vece dell'equazioni proposte, due equazioni, (a), e (b), del secondo grado solamente per rapporto a x. Se si rappresentano per

189. Avanti di passare a equazioni ove l'incognita x, la quale debb'eliminarsi, s'alza al di là del secondo grado, dimostrerò in qual maniera si riconosca che il valore d'una qualunque dell'incognite sodisfà nel medesimo tempo alle due equazioni. Affine di fissar meglio le idee, prenderò un esempio particolare, ma il ragionamento non sarà men generale.

Sien l'equazioni

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0 \ldots\ldots (1),$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0 \ldots\ldots (2),$$

che supporrò date da un Problema, in virtù del quale dobbiamo aver $y=3$.

Per verificare quest'ultima asserzione, fa di mestieri primieramente sostituir 3 in luogo di y nell'equazioni proposte, il che dà

$$x^3+9x^2+27x-98=0 \ldots (a),$$
$$x^2+12x-28=0 \ldots\ldots (b);$$

equazioni, le quali debbono ammettere il medesimo valor di x sé quello, che abbiamo assegnato per y, sia vero. Se s'indica il valore di x per α, bisognerà, in virtù di ciò ch'è stato provato nel num.° 179., che l'equazione (a), e l'equazione (b) sien divisibili ambedue per $x-\alpha$; esse avran dunque un divisore comune, del quale $x-\alpha$ dee farne

---

$$nx^2+px+q=0,$$
$$n'x^2+p'x+q=0,$$

e che si trattino come le due proposte, ne dedurrem facilmente due equazioni di primo grado per rapporto a x. Non istarò a dir altro sopra un metodo assolutamente incompleto, il quale non diffonde alcuna luce sulla maniera, mediante la quale più equazioni possono accordarsi tra loro, e sulla determinazion dell'incognita eliminata.

parte. Infatti trovasi per questo comun divisore $x-2$ (48), abbiamo dunque $a=2$. Così il valore di $y=3$ conviene al Poblema, e corrisponde a $x=2$.

Se restasse qualche dubbio che il comun divisore dell' equazioni (a), e (b) avesse dovuto dare il valor di x, si toglierebbe osservando che quest' equazioni riduconsi alle seguenti

$$(x^2+11x+49)\ (x-2)=0,$$
$$(x+14)\ (x-2)=0,$$

dalle quali si fa manifesto ch' esse son sodisfatte allorchè vi si pone 2 in luogo di x.

190. Il mezzo, che ho indicato per trovare il valor di x quando quello di y è cognito, può applicarsi immediatamente all' eliminazione.

Poichè l' equazioni (1), e (2) acquistano, allorchè y è determinato conformemente alla natura del Problema, un divisor comune, ch' esse non avean per l' avanti, non si dee far altro che cercare la condizione, dalla quale dipende l' esistenza di tal divisore. Per questo sarà necessario operare sull' equazioni proposte nello stesso modo che si farebbe per trovare il divisor comune, s' esso esistesse (48); ed allorchè saremo arrivati ad un resto indipendente da x, eguagliandolo a *zero*, questo esprimerà la condizion dimandata, alla quale debbono sodisfare i valori di y perchè le due equazioni date possano ammettere nello stesso tempo un medesimo valore per x. L' equazione così formata sarà l' *equazione finale* del Problema proposto.

La Tavola quì unita contiene le particolarità delle operazioni relative all' equazioni

$$x^3+3x^2y+3xy^2-93=0,$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0,$$

le quali m' hanno occupato nel num.° precedente: trovasi per l'ultimo divisore

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98;$$

ed il resto eguagliato a *zero* dà

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2910y-4302=0;$$

equazione, la quale ammette, oltre al valore $y=3$ quì sopra indicato, tutti gli altri valori di y, dei quali è suscettibile il Problema proposto.

191. Allorchè abbiamo ottenuto un valore di y nell'equazione finale, per arrivare a quello di x bisogna sostituire il primo nel penultimo resto, il quale diviene divisor comune delle due equazioni proposte. Sapendo, per esempio, che $y=3$, porrem questo numero nella quantità

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98,$$

la quale eguaglieremo in seguito a *zero*, ed otterremo l'equazione di primo grado

$$91x-182=0, \text{ ovvero } x=2.$$

Potrebbe succedere che il valor di y rendesse nullo per se stesso il penultimo resto; in tal caso sarebbe allora il resto precedente, ovvero quello, nel quale x trovasi al secondo grado, che diverrebbe il divisor comune delle due equazioni proposte. Ponendovi il valor di y, e dipoi eguagliandolo a *zero*, avrebbesi un' equazione di secondo grado con la sola x, i due valori della quale corrisponderebbero al valor cognito di y. Se questo valore riducesse pure a *zero* il resto di secondo grado, farebbe mestieri ricorrere al precedente, ove x ascenderebbe al terzo grado, perchè desso, in questo caso, sarebbe il divisor comune delle due equazioni proposte; ed il valore di y corrisponderebbe a tre valori di x. In generale, sarà necessario risalir fino a un resto, il quale non si distrugga per la sostituzione del valore di y.

Può ancora accadere che non si trovi resto, ovvero che il resto non contenga che quantità cognite.

Nel primo caso, le due equazioni hanno un divisore comune senz'alcuna determinazione di y; esse son dunque della forma

$$P \times D = o, \qquad Q \times D = o,$$

D essendo il divisor comune. E' manifesto che si sodisfà ad ambedue nel medesimo tempo, facendo primieramente $D = o$; e quest'equazione determinerà una dell'incognite per mezzo dell'altra, quando il fattore D le conterrà ambedue; ma se desso non ne contiene che una, quest'ultima sarà determinata, e l'altra resterà interamente indeterminata. Se facciamo in seguito

$$P = o, \qquad Q = o$$

nello stesso tempo, ci procurerem pure due equazioni, le quali potranno somministrare delle soluzioni determinate del Problema proposto.

Sia, per esempio,

$$(ax + by - c)\,(mx + ny - d) = o,$$
$$(a'x + b'y - c')\,(mx + ny - d) = o;$$

supponendo in primo luogo nullo il secondo fattore, comune alle due equazioni, non avremo tra le incognite x, e y se non che la sola equazione

$$mx + ny - d = o;$$

e sotto questo punto di vista il Problema sarà indeterminato: ma sopprimendo questo fattore, si cadrà sull'equazioni

$$ax + by - c = o, \qquad a'x + b'y' - c' = o,$$

oppure $ax + by = c, \qquad a'x + b'y = c';$

ed in questo senso il Problema sarà determinato, poichè si avranno tante equazioni che incognite.

Nel caso ove il resto non contenga che delle quantità date, le due equazioni proposte sono contradittorie; poichè il divisor comune, il quale stabilisce la loro esistenza simultanea, non può aver luogo che per una condizione, a cui è impossibile sodisfare; poichè dessa cade sopra quantità date, e presenta un resultato assurdo. Questo caso si referisce a quello, che abbiam veduto nel n.° 68. per l'equazioni di primo grado.

192. Tutto ciò, che abbiam detto, s'applica evidentemente a due equazioni qualunque,

$$x^m + \mathrm{P}x^{m-1} + \mathrm{Q}x^{m-2} + \mathrm{R}x^{m-3} \ldots + \mathrm{T}x + \mathrm{U} = 0,$$
$$x^n + \mathrm{P}'x^{n-1} + \mathrm{Q}'x^{n-2} + \mathrm{R}'x^{n-3} \ldots + \mathrm{Y}'x + \mathrm{Z}' = 0,$$

ove la seconda incognita y è inviluppata coi coefficienti P, Q, ec. P', Q', ec. Opererebbesi come per trovare il massimo comun divisore dei lor primi membri; si eguaglierebbe a *zero* il resto indipendente da x: questa sarebbe l'equazione finale in y; e si risalirebbe ai resti precedenti per conseguire il divisor comune, il quale dee darci x.

Bisogna allontanare accuratamente tutti quei fattori comuni, i quali potrebbero introdursi mediante le moltiplicazioni, che si effettuano in veduta di rendere il primo termine d'uno dei polinomj dìvisibile per il primo termin dell'alrro; senza di questa precauzione s'arriverebbe ad un resultato più complicato di quello che non debb'essere l'equazion, che si cerca. Quando abbiam l'attenzione di non impiegar per queste moltiplicazioni che i fattori più semplici, non v'è luogo a temere che l'equazione finale venga alterata. Se mai se ne dubitasse, servirebbe, affin di convincersene, omettere queste operazioni sussidiarie; allora i coefficienti delle diverse potenze di x in ciascun termine del quoziente sarebbero delle frazioni,

come pur le sarebbero i termini differenti del resto; ma riducendo questi al medesimo denominatore, verrebbe per numeratore il medesimo resultato, che somministra il metodo ordinario, e che condurrebbe in conseguenza alla medesima equazione finale (*).

193. Euler, in vece di cercare il divisore comune col metodo ordinario, impiega un metodo più comodo; e ciò, che segue, lo farà sufficientemente conoscere.

Sieno le due equazioni

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = 0;$$

rappresentando per $x - \alpha$ il fattore, che debb' esser comune all'una, ed all'altra, potremo considerare la prima come il prodotto di $x - \alpha$ per il fattore di secondo grado $x^2 + px + q$, e la seconda come il prodotto di $x - \alpha$ per il fattore di terzo grado $x^3 + p'x^2 + q'x + r'$, p e q, p', q' e r' essendo coefficienti indeterminati: avrem dunque

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x - \alpha)(x^2 + px + q),$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = (x - \alpha)(x^3 + p'x^2 + q'x + r').$$

(*) Segue da ciò, che precede, che la ricerca dell'equazione finale ricavata da due equazioni a due incognite, è, in generale, un Problema determinato: ma la stessa equazion finale può corrispondere ad un'infinità di sistemi d'equazioni a due incognite. Invertendo il metodo, per mezzo del quale s'ottiene il massimo comun divisore di due quantità, sarebbe estremamente facile formare a piacimento siffatti sistemi; ma questo Problema ha pochissim' uso nelle Matematiche elementari, per non doversi quì trattenere, e per non incaricarsi delle osservazioni minute, alle quali esso potrebbe dar luogo. Questi son oggetti, che bisogna lasciare alla sagacità dei Lettori intelligenti, i quali non mancan mai di trovarli da loro stessi, se qualche circostanza fa a loro sentirne il bisogno.

Eliminando il binomio $(x-\alpha)$ come un'incognita al primo grado (84), troveremo

$$(x^3+Px^2+Qx+R)(x^3+p'x^2+q'x+r')=$$
$$(x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S')(x^2+px+q).$$

Questo resultato dee verificarsi senza che vi sia bisogno d'assegnare a x alcun valore particolare. Ciò non può mai succedere senza che il primo membro non sia composto dei medesimi termini del secondo: bisognerà dunque, dopo d'aver effettuate le moltiplicazioni predette, eguagliare tra loro i coefficienti, che ciascuna potenza di x avrà nei due membri, ed otterremo in questa maniera l'equazioni seguenti:

$$P+p'=P'+p \qquad Rp'+Qq'+Pr'=S'+R'p+Q'q$$
$$Q+Pp'+q'=Q'+P'p+q \qquad Rq'+Qr'=S'p+R'q$$
$$R+Qp'+Pq'+r'=R'+Q'p+P'q \qquad Rr'=S'q.$$

Siccome queste equazioni sono in numero di sei, e non contengono che cinque quantità indeterminate, cioè, p, q, p', q', e r', potremo eliminar queste quantità, le quali non superano il primo grado, ed arrivare ad un'equazione, la quale non conterrà se non che le quantità P, Q, R, P', Q', R', e S', e sarà conseguentemente l'equazione finale in y (*).

(*) Il metodo d'*Euler*, or ora spiegato, riducesi a moltiplicare ciascuna dell'equazioni proposte per un fattore, i cui coefficienti sieno indeterminati, ad eguagliare i prodotti, e a disporre i coefficienti in modo che i termini affetti dall'incognita x si distruggan tra loro. In questa maniera esso l'ha presentato nella sua *Introduzione all'Analisi degl'Infiniti*. La k designando l'esponente del grado dei prodotti, quello dei fattori si trova $k-m$ per l'equazione del grado m, e $k-n$ per quella del grado n. Il primo termine di cia-

194. Sieno primieramente, per esempio, l' equazioni

$$x^2+Px+Q=0, \qquad x^2+P'x+Q'=0;$$

i fattori, i quali moltiplicano $x-\alpha$, saranno quì di primo grado, o sivvero $x+p$, e $x+p'$ solamente: avrem dunque

$$R=0,\ R'=0,\ S'=0,\ q=0,\ q'=0,\ r'=0,$$

ed avremo

$$\left.\begin{array}{l} P+p' =P'+p \\ Q+Pp'=Q'+P'p \\ \quad Qp'=Q'p \end{array}\right\}, \text{ o sivvero } \left\{\begin{array}{l} p-p' =P-P' \\ P'p-Pp'=Q-Q' \\ Q'p-Qp'=0. \end{array}\right.$$

Ricaveremo dalle due prime equazioni

$$p=\frac{(P-P')P-(Q-Q')}{P-P'}$$

$$p'=\frac{(P-P')P'-(Q-Q')}{P-P'}.$$

Sostituendo questi valori nella terza, resulterà

$$(P-P')Q'P-(Q-Q')Q'=(P-P')P'Q-(Q-Q')Q,$$

ovvero $(P-P')(PQ'-QP')+(Q-Q')^2=0$.

---

scuno di questi fattori avendo l'unità per coefficiente, uno contiene $k-m$ coefficienti indeterminati, e l'altro $k-n$. La somma dei prodotti contiene k termini affetti da x; ma non bisogna distruggerne che $k-1$, perchè quel, che contiene la più alta potenza di x, svanisce per se medesimo. Segue da ciò che il numero totale $2k-m-n$ dei coefficienti indeterminati debb'esser eguale a $k-1$, e che in conseguenza $k=m+n-1$; dobbiam dunque moltiplicare l'equazione del grado m per un fattore del grado $n-1$, quella del grado n per un fattore del grado $m-1$, ed eguagliare i prodotti termine a termine; regola simile a quella, che abbiamo data nel Testo. E' bene osservare che questo primo metodo d' *Euler* contiene il germe di quello, che *Bezout* ha sviluppato in una maniera sì lunga, e così penosa nella sua *Teoria dell' Equazioni*.

Adesso bisogna dividere l'equazione $x^2 + Px + Q$ per il fattore $x + p$, affine d'aver per quoziente $x - \alpha$, il quale debb'esser comune alle due equazioni proposte, e che essendo eguagliato a *zero* dà il valore di x rappresentato per α. Effettuando questa divisione, trascureremo il resto, il quale è precisamente l'equazione finale in y: avremo in conseguenza per quoziente $x + P - p$, dal quale ricaveremo

$$x = p - P,$$

e ponendo per p il suo valore trovato di sopra, ne resulterà

$$x = -\frac{Q - Q'}{P - P'}.$$

195. Affine di dare al Lettore l'occasione d'esercitarsi, indicherò i calcoli da farsi per eliminare x dalle due equazioni

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0, \quad x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = 0$$

In questo caso averemo

$$S' = 0, \qquad r' = 0 \text{ (193)},$$

e ricaveremo queste cinque equazioni:

$$\begin{aligned}
P + p' &= P' + p,\\
Q + Pp' + q' &= Q' + P'p + q,\\
R + Qp' + Pq' &= R' + Q'p + P'q,\\
Rp' + Qq' &= R'p + Q'q\\
Rq' &= R'q,
\end{aligned}$$

alle quali darò la forma seguente:

$$\begin{aligned}
p - p' &= P - P',\\
P'p - Pp' + q - q' &= Q - Q',\\
Q'p - Qp' + P'q - Pq' &= R - R',\\
R'p - Rp' + Q'q - Qq' &= 0,\\
R'q - Rq' &= 0.
\end{aligned}$$

Si potrebbe, per mezzo delle regole del n.° 88, ricavare immediatamente da quattro qualunque di queste equazioni i valori dell'incognite p, p', q, e q'; ma la semplicità della prima, e dell'ultima di queste medesime equazioni permette d'arrivare più prontamente al resultato. Faccio, per abbreviare,

$$P - P' = e, \quad Q - Q' = e', \quad R - R' = e'',$$

e deduco in seguito dalla prima, e dall'ultima dell'equazioni proposte

$$p' = e - p, \quad q' = \frac{R'q}{R};$$

indi sostituendo questi valori nelle tre altre, e facendo sparire il denominatore R, s'ottiene

$$(P + P')Rp + (R - R')q = R(Pe + e') \ldots (a),$$

$$(Q + Q')Rp + (RP' - PR')q = R(Qe + e'') \ldots (b),$$

$$(R + R')Rp + (RQ' - QR')q = R^2 e \ldots\ldots\ldots (c).$$

Se adesso si ricavino dall'equazioni (a), e (b) i valori di p, e q (88), e si sopprima il fattore R, il quale sarà comune al numeratore, e denominatore, avremo

$$p = \frac{(Pe + e')(RP' - PR') - (R - R')(Qe + e'')}{(P + P')(RP' - PR') - (R - R')(Q + Q')},$$

$$q = \frac{(P + P')(Qe + e'')R - R(Pe + e')(Q + Q')}{(P + P')(RP' - PR') - (R - R')(Q + Q')};$$

ponendo questi valori nell'equazione (c), otterremo un'equazione finale, divisibile per R, e che riducesi a

$$\begin{aligned}&(R + R')[(Pe + e')(RP' - PR') - (R - R')(Qe + e'')]\\ &+ (RQ' - QR')[(P + P')(Qe + e'') - (Pe + e')(Q + Q')]\\ &= Re\,[(P + P')(RP' - PR') - (R - R')(Q + Q')],\end{aligned}$$

ove non resta altro da fare che sostituire in luogo delle lettere e, e', e'' le quantità, che le medesime rappresentano

196. Se s'avessero fra le tre incognite x, y, e z un simil numero d'equazioni indicate da (1), (2), (3), e si volessero determinar queste incognite, potrebbesi combinar, per esempio, l'equazione (1) coll'equazione (2), e coll'equazione (3), per eliminare x, e mandar via in seguito y dai due resultati, che si sarebbero conseguiti; ma è necessario osservare che, per mezzo di quest'eliminazion *successiva*, le tre equazioni proposte non concorrono nella stessa maniera a formar l'equazione finale: l'equazione (1) è impiegata due volte, mentre che l'equazioni (2), e (3) non lo sono che una; e da ciò succede che il resultato, al quale s'arriva, è complicato con un fattore straniero alla Questione (84). *Bezout*, nella sua *Teoria dell'Equazioni*, ha fatt' uso d'un metodo, il quale non è soggetto a quest'inconveniente, e col di cui mezzo dimostra che *il grado d'un'equazione finale resultante dall'eliminazione tra un numero qualunque d'equazioni complete, contenenti un egual numero d'incognite, e di gradi qualunque, è eguale al prodotto degli esponenti, che indicano i gradi di queste equazioni*. *M. Poisson*, Professore nella *Scuola Politecnica*, ha dato della medesima Proposizione una dimostrazion più diretta, e più corta di quella di *Bezout*: le nozioni prelimiuari, che la medesima esige, non mi permettono d'esporla adesso, ma la troveremo nel *Complemento*.

Della ricerca delle radici commensurabili, e delle radici eguali dell'Equazioni numeriche.

197. Dopo aver fatto conoscere le principali

proprietà dell' equazioni algebriche, e la maniera d' eliminarne le incognite, allorchè ve ne sono più, vado a occuparmi della risoluzione numerica deli'equazioni a una sola incognita, e vale a dire della ricerca delle loro radici, allorchè i lor coefficienti son espressi in numeri (*).

Principierò da dimostrare *che quando l'equazione proposta non ha per coefficienti che dei numeri interi, e che quello del suo primo termine è l'unità, le sue radici reali non potranno esprimersi con delle frazioni, e non potrann' essere in conseguenza che dei numeri interi, o dei numeri incommensurabili.*

Per dimostrarlo, sia l'equazione

$$x^n + \mathrm{P}\,x^{n-1} + \mathrm{Q}\,x^{n-2} \ldots\ldots + \mathrm{T}\,x + \mathrm{U} = 0,$$

nella quale sostituiscasi una frazione irriducibile $\frac{a}{b}$ in luogo di x; essa diverrà

$$\frac{a^n}{b^n} + \mathrm{P}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \mathrm{Q}\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} \ldots\ldots + \mathrm{T}\frac{a}{b} + \mathrm{U} = 0;$$

e riducendo tutti i suoi termini al denominatore medesimo, avremo

$$a^n + \mathrm{P}a^{n-1}b + \mathrm{Q}a^{n-2}b^2 \ldots\ldots + \mathrm{T}ab^{n-1} + \mathrm{U}b^n = 0,$$

dalla quale ricavasi

$$a^n + b(\mathrm{P}a^{n-1} + \mathrm{Q}a^{n-2}b \ldots\ldots + \mathrm{T}ab^{n-2} + \mathrm{U}b^{n-1}) = 0.$$

(*) Non evvi, per i gradi superiori al quarto, risoluzion generale; non v'è neppure, a parlar propriamente, se non se quella dell'equazioni di secondo grado, che si possa riguardare come completa. L'espressioni delle radici dell'equazioni di terzo, e di quarto grado sono complicatissime, soggette a eccezioni, e molto men comode nella pratica in confronto del metodo, che darò adesso: si troveranno d'altronde nel *Complemento*.

Il primo membro di quest' ultima equazione è formato di due parti intere, una delle quali è divisibile per b, e l'altra non l'è (98), poichè si suppone la quantità $\frac{a}{b}$ ridotta alla sua espressione più semplice, ovvero che a, e b non abbiano alcun divisore comune; una di queste parti non può dunque distrugger l'altra.

198. Dopo quest' osservazione si riconobbe l'utilità di fare sparir le frazioni da un' equazione, ovvero di render interi i suoi coefficienti, ma in modo peraltro che il primo termine non n'acquistasse un altro diverso dall' unità; arrivasi a ciò *facendo l'incognita proposta eguale a una nuova incognita divisa pel prodotto di tutti i denominatori dell' equazione*, poi riducendo tutti i termini al medesimo denominatore col metodo del n.° 52.

Sia, per esempio, l' equazione

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{n} + \frac{c}{p} = 0;$$

prenderemo $x = \frac{y}{m\,n\,p}$, e ponendo quest' espressione di x nell' equazion proposta, otterremo

$$\frac{y^3}{m^3 n^3 p^3} + \frac{ay^2}{m^3 n^2 p^2} + \frac{by}{m\,n^2\,p} + \frac{c}{p} = 0:$$

il divisore del primo termine contenendo tutti i fattori degli altri divisori, si moltiplican tutti i termini per questo divisore, e si riduce poi ciascun termine alla sua espressione più semplice; trovasi allora

$$y^3 + a\,n\,p\,y^2 + b\,m^2\,n\,p^2 y + c\,m^3 n^3 p^2 = 0.$$

Quando i denominatori m, n, p hanno dei divisori comuni, non bisogna allora divider y che pel più piccolo numero, per il quale possan dividersi

nel medesimo tempo tutti i denominatori. Queste semplicizzazioni son facilissime per non aver bisogno di trattenervisi: mi limiterò solamente a far osservare che, se tutti i denominatori fossero eguali a m, servirebbe far $x = \frac{y}{m}$.

L'equazion proposta, che sarebbe allora

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{m} + \frac{c}{m} = 0,$$

diverrebbe

$$\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{m^3} + \frac{by}{m^2} + \frac{c}{m} = 0,$$

ed avrebbesi

$$y^3 + ay^2 + bmy + m^2c = 0.$$

È manifesto che l'operazione di sopra riducesi a moltiplicar tutte le *radici* della proposta per il numero m; perchè $x = \frac{y}{m}$ somministra $y = mx$.

199. Adesso, poichè a essendo la *radice* dell'equazione

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots + Tx + U = 0,$$

si ha

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta \,(179),$$

ne resulta che a è necessariamente uno dei divisori del numero intero U, e che in conseguenza, allorchè questo numero ha pochi divisori, servirà di sostituirli successivamente in luogo di x nell'equazion proposta, per riconoscere s'essa ha una *radice*, o nò in numeri interi.

Se abbiam l'equazione

$$x^3 - 6x^2 + 27x - 38 = 0,$$

il numero 38 non avendo per divisori che i numeri

$$1, \quad 2, \quad 19, \quad 38,$$

si proveran questi, tanto *positivamente*, che *negativamente*, e troveremo che il solo numero intero $+2$ sodisfà all'equazione proposta, ovvero che $x = 2$. Divideremo in seguito l'equazione proposta per $x - 2$; eguagliando a *zero* il quoziente, formerem l'equazione

$$x^2 - 4x + 19 = 0,$$

le cui *radici* sono *immaginarie*; e risolvendola troveremo che $x^3 - 6x^2 + 27x - 38 = 0$, ammette tre radici

$$x = 2, \quad x = 2 + \sqrt{-15}, \quad x = 2 - \sqrt{-15}.$$

200. Il metodo, che ho indicato per discoprire il numero intero, che sodisfà a un'equazione, diviene impraticabile allorchè l'ultimo termine di quest'equazione ha molti divisori; ma l'equazione

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots . - Ta,$$

somministra delle nuove condizioni, le quali abbreviano molto il calcolo. Affine di rendere il metodo più chiaro, prenderò, com'esempio, l'equazione

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0;$$

a indicando sempre la radice, averemo

$$a^4 + Pa^3 + Qa^2 + Ra + S = 0,$$

ovvero $S = -Ra - Qa^2 - Pa^3 - a^4$,

dalla quale ricaveremo

$$\frac{S}{a} = -R - Qa - Pa^2 - a^3.$$

Si vede primieramente da quest'ultima equazione che $\frac{S}{a}$ debb'essere un numero intero.

Passando in seguito R nel secondo termine, otterremo

$$\frac{S}{a} + R = -Qa - Pa^2 - a^3;$$

facendo, per abbreviare, $\frac{S}{a} + R = R'$, e dividendo i due membri dell'equazione

$$R' = -Qa - Pa^2 - a^3$$

per a, avremo

$$\frac{R'}{a} = -Q - Pa - a^2,$$

dalla quale concluderemo che $\frac{R'}{a}$ debbe ancora esser un numero intero.

Trasportando Q nel primo membro, facendo $\frac{R'}{a} + Q = Q'$, poi dividendo i due membri per a, conseguiremo

$$\frac{Q'}{a} = -P - a,$$

dalla quale concluderemo che $\frac{Q'}{a}$ debb' essere un numero intero.

Portando finalmente P nel primo membro, facendo $\frac{Q'}{a} + P = P'$, e dividendo per a, avremo

$$\frac{P'}{a} = -1.$$

Riunendo le condizioni, che ho enunciate, ve-

dremo che il numero *a* sarà la *radice* dell'equazione proposta se sodisfarà all'equazioni

$$\frac{S}{a} + R = R',$$
$$\frac{R'}{a} + Q = Q',$$
$$\frac{Q'}{a} + P = P',$$
$$\frac{P'}{a} + 1 = 0;$$

di maniera che R', Q', e P' sieno numeri interi.

Segue da ciò, che, per assicurarsi se uno dei divisori *a* dell'ultimo termine S sia la *radice* dell'equazion proposta, bisogna

1.° *Divider l'ultimo termine per il divisore* a, *ed aggiungere al quoziente il coefficiente del termine affetto da* x.

2.° *Dividere questa somma pel divisore* a, *ed aggiungere al quoziente il coefficiente del termine affetto da* x^2.

3.° *Dividere questa somma per il divisore* a, *ed aggiungere al quoziente il coefficiente del termine affetto da* x^3.

4.° *Dividere questa somma per il divisore* a, *ed aggiungere al quoziente l'unità, ovvero il coefficiente del termine affetto da* x^4: *il resultato dovrà essere eguale a zero se* a *n'è difatto la radice*.

Le regole sopraddette convengono a un grado qualunque, osservando che non dobbiamo trovare *zero* per resultato se non che quando saremo giunti al primo termine dell'equazione proposta (*).

(*) Non sarebbe difficile assicurarsi, per mezzo della formula dei quozienti data nel num.° 180, che

201. Allorchè s'applican queste regole ad un esempio numerico, si può disporre il calcolo in modo da far subire ciascuna prova a tutti i divisori dell'ultimo termine nel medesimo tempo.

Ecco, per l'equazione

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0,$$

la Tavola del calcolo:

$+15, + 5, + 3, + 1, - 1, - 3, - 5, -15,$
$+ 1, + 3, + 5, +15, -15, - 5, - 3, - 1,$
$-19, -17, -15, - 5, -35, -25, -23, -21,$
$- 5, - 5, +35,$
$+18, +18, +58,$
$+ 6, +18, -58,$
$- 3, + 9, -67,$
$- 1, + 9, +67,$
0

Tutti i divisori dell'ultimo termine 15 son disposti per ordine di grandezza, tanto col segno $+$ quanto col segno $-$, in una medesima linea (ch'è la linea dei divisori a).

La seconda linea contiene i quozienti del numero 15 divisi successivamente per tutti i suoi divisori $\left(\text{questa è la linea delle quantità } \frac{S}{a}\right)$.

---

le quantità $\frac{S}{a}$, $\frac{R'}{a}$, $\frac{Q'}{a}$, prese col segno $-$, sono, principiando dall'ultimo termine, i coefficienti del quoziente del polinomio

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S$$

diviso per $x - a$, il qual'è, in conseguenza,

$$x^3 - \frac{Q'}{a}x^2 - \frac{R'}{a}x - \frac{S'}{a}.$$

La terza linea è stata formata aggiungendo alla precedente il coefficiente — 20, il quale moltiplica x (questa è la linea delle quantità $R' = \frac{S}{a} + R$).

La quarta linea contiene i quozienti di ciascun numero della precedente pel divisore, che gli corrisponde $\left(\text{quest' è la linea delle quantità } \frac{R'}{a}\right)$. Abbiam trascurati in questa linea tutti i numeri, i quali non erano interi.

La quinta linea resulta dai numeri scritti nella precedente aggiunti col numero 23, il quale moltiplica x^2 (questa linea comprende le quantità Q').

La sesta linea contiene i quozienti dei numeri della precedente per il divisore, che lor corrisponde, $\left(\text{dessa contiene le quantita } \frac{Q'}{a}\right)$.

La settima comprende le somme dei numeri della precedente, e del coefficiente — 9, il quale moltiplica x^3 (vi si trovano le quantità $\frac{Q'}{a} + P$).

L' ottava finalmente s' ottiene dividendo ciascuno dei numeri della precedente per il divisore corrispondente $\left(\text{quest' è la linea di } \frac{P}{a}\right)$; e, siccome non si trova — 1 che nella colonna segnata + 3, se ne conclude che l' equazione proposta non ha che una radice *commensurabile*, cioè + 3; di maniera che dessa è divisibile per $x - 3$ (*).

(*) Formando il quoziente, dietro la *Nota* antecedente, si trova

$$x^3 - 6x^2 + 5x - 5.$$

Possiam dispensarci da comprendere nella Tavola i divisori $+1$, e -1, dei quali più facilmente si fa la prova mediante la loro sostituzione immediata nell' equazion proposta.

202. Sia data altresì, per esempio, l' equazione

$$x^3 - 7x^2 + 36 = 0.$$

Dopo d' essersi assicurati che i numeri $+1$, e -1 non sodisfanno a quest' equazione, formeremo, dietro alle regole precedenti, la Tavola seguente, osservando che il termine moltiplicato per x, mancando in quest' equazione, debb' esser considerato come se avesse *zero* per coefficiente; bisogna dunque sopprimer la terza linea, e dedurre immediatamente la quarta dalla seconda.

+36,	+18,	+12,	+9,	+6,	+4,	+3,	+2,	−2,	−3,	−4,	−6,	−9,	−12,	−18,	−36
+1,	+2,	+3,	+4,	+6,	+9,	+12,	+18,	−18,	−12,	−9,	−6,	−4,	−3,	−2,	−1

$+1$,	$+4$,	$+9$,	$+9$,	$+4$,	$+1$
-6,	-3,	$+2$,	$+2$,	-3,	-6
-1,	-1,		-1,	$+1$,	$+1$
0,	0,		0.		

Si trovano in quest' esempio tre numeri, i quali sodisfanno a tutte le condizioni, cioè, $+6$, $+3$, e -2. Così s' ottengono nel medesimo tempo le tre radici, delle quali l' equazion proposta è suscettibile, e si riconosce ch' essa è il prodotto dei tre fattori semplici $x-6$, $x-3$, e $x+2$.

203. È a proposito l' osservare che vi sono dell' equazioni letterali, che si trasformano immediatamente in equazioni numeriche.

Se s' avesse, per esempio,

$$y^3 + 2py^2 - 33p^2y + 14p^3 = 0,$$

facendo $y = px$, s' averebbe

$$p^3x^3 + 2p^3x^2 - 33p^3x + 14p^3 = 0,$$

resultato divisibile per p^3, che riducesi a

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0.$$

Il divisore *commensurabile*, di quest'ultima equazione essendo $x + 7$, e dando $x = -7$, averemo

$$y = -7p.$$

L'equazione in y è di quelle, che chiamansi *equazioni omogenee*, perchè, facendo astrazione dai coefficienti numerici, ciascun dei suoi termini contiene il medesimo numero di fattori (*).

204. Allorchè si conosca una delle radici d'un'equazione, possiamo prendere per incognita la differenza tra questa radice, ed una qualunque dell'altre; arrivasi con tal mezzo ad un'equazione d'un grado minore della proposta, la quale gode di più proprietà ragguardevoli.

Sia l'equazion generale

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

e sieno a, b, c, d, ec. le sue radici; sostituendovi $a + y$ in luogo di x, e sviluppando le potenze, avremo

$$\left.\begin{array}{l}
a^m + ma^{m-1}y + \dfrac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2 + \ldots + y^m \\
+Pa^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2}y + \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y^2 + \ldots \\
+Qa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3}y + \dfrac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y^2 + \ldots \\
+Ra^{m-3} + (m-3)Ra^{m-4}y + \dfrac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y^2 + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+Ta + Ty \\
+U
\end{array}\right\} = 0;$$

(*) I Lettori che vorran maggiori specialità sulla ricerca dei *divisori commensurabili* dell'Equazioni, gli

resultato, del quale la prima colonna, simile all'equazion proposta, svanisce per se medesima, poichè a è una delle radici di questa equazione; possiam dunque sopprimere questa colonna, e dividere inseguito per y tutti i termini rimanenti: conseginremo allora

$$\left.\begin{array}{l} ma^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{2} a^{m-2}y + \ldots + y^{m-1} \\ +(m-1)\mathrm{P}a^{m-2} + \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}\mathrm{P}a^{m-3}y + \ldots \\ +(m-2)\mathrm{Q}a^{m-3} + \dfrac{(m-2)(m-3)}{2}\mathrm{Q}a^{m-4}y + \ldots \\ +(m-3)\mathrm{R}a^{m-4} + \dfrac{(m-3)(m-4)}{2}\mathrm{R}a^{m-5}y + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

$$+\mathrm{T}$$

Quest'equazione avrà visibilmente per le sue $m-1$ radici

$$y = b-a, \quad y = c-a, \quad y = d-a \ldots\ldots \text{ ec.}$$

Io la rappresenterò per

$$\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{2}y + \frac{\mathrm{C}}{2.3}y^2 \ldots\ldots + y^{m-1} = 0 \ldots\ldots\ldots (d),$$

facendo, per abbreviare,

$$ma^{m-1} + (m-1)\mathrm{P}a^{m-2} + (m-2)\mathrm{Q}a^{m-3} \ldots\ldots + \mathrm{T} = \mathrm{A}$$
$$m(m-1)a^{m-2} + (m-1)(m-2)\mathrm{P}a^{m-3} \ldots\ldots = \mathrm{B}$$

ec.,

ed indicherò per V l'espressione

$$a^m + \mathrm{P}a^{m-1} + \mathrm{Q}a^{m-2} \ldots\ldots + \mathrm{T}a + \mathrm{U}.$$

---

troveranno nella III. Parte degli *Elementi d'Algebra d.Clairaut*. Questo Geometra s'è tanto occupato dell'equazioni *letterali* quanto dell' equazioni *numeriche*.

205. Se l'equazion proposta ha due radici eguali, se s'ha, per esempio, $a = b$, uno dei valori di y, cioè $b - a$ diverrà *zero*; bisognerà dunque che l'equazione (d) sia sodisfatta facendovi $y = 0$: ora, quest'ipotesi manda a *zero* tutti i termini, eccettuato il termine cognito A: quest'ultimo dee dunque essere *zero* per se medesimo: il valore di a dee dunque sodisfare ad un tempo all'equazioni

$$V = 0, \quad \text{e} \quad A = 0.$$

Quando la proposta avrà tre radici eguali ad a, cioè $a = b = c$, due delle radici dell'equazione (d) diverranno nulle nel medesimo tempo, cioè $b - a$, e $c - a$; in questo caso l'equazionè (d) sarà divisibile due volte di seguito per $y - 0$ (179), o sivvero per y; ma ciò non può succeder che quando i coefficienti A, e B son *zero*: bisogna dunque che il valore di a sodisfaccia nel tempo medesimo alle tre equazioni

$$V = 0, \quad A = 0, \quad B = 0.$$

E proseguendo questi ragionamenti, vedremo che allorquando la proposta avrà quattro radici eguali, l'equazione (d) avrà tre radici eguali a *zero*, ovvero sarà divisibile tre volte di seguito per y; lo che esige che i coefficienti A, B, C sien nulli nel medesimo tempo, e che il valore di a sodisfaccia in conseguenza nel tempo stesso alle quattro equazioni

$$V = 0, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Non solamente si può, con siffatto mezzo, riconoscer se una radice data a si trovi più volte fra quelle dell'equazion proposta, ma si deduce anco un metodo per accertarsi se quest'equazone abbia delle radici ripetute, delle quali se n'ignora il valore.

A tal oggetto fa di mestieri osservare che nel caso, ove s' ha $A = o$, o sivvero

$$ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3} \ldots + T = o,$$

possiam riguardar a come la radice dell' equazione

$$mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} \ldots + T = o,$$

x indicando allora un' incognita qualunque; e poichè a è parimente la radice dell' equazione $V = o$, o sivvero

$$x^m + Px^{m-1} + \text{ec.} = o,$$

segue dal n.° 189. che $x - a$ è un fattor comune alle due equazioni suddivisate.

Cangiando parimente a in x nelle quantità B, C, ec., il binomio $x - a$ diverrà similmente fattore delle nuove equazioni $B = o$, $C = o$, ec. se la radice a manda nel tempo medesimo a *zero* le quantità primitive B, C, ec.

Ciò, che abbiam detto riguardo alla radice a, converrà egualmente a qualunque altra radice, la quale fosse più volte ripetuta; così, cercando, mediante il metodo del massimo comun divisore, i fattori comuni all' equazioni

$$V = o, \quad A = o, \quad B = o, \quad C = o, \text{ ec.}$$

questi fattori daranno le radici eguali della proposta, nell' ordin seguente.

I fattori comuni alle due prime equazioni solamente son dei fattori doppj della proposta, e vale a dire, che trovandosi per comun divisore tra $V = o$, e $A = o$ un' espressione della forma $(x - \alpha)(x - \epsilon)$, per esempio, l' incognita x avrà due valori eguali ad α, e due altri eguali a ϵ, ovvero la proposta avrà questi quattro fattori

$$(x - \alpha), (x - \alpha), (x - \epsilon), (x - \epsilon).$$

I fattori comuni nello stesso tempo alle tre prime dell'equazioni quì sopra denotan dei fattori tripli nella proposta, e vale a dire che, se i primi son della forma $(x-\alpha)(x-\epsilon)$, per esempio, i secondi saranno della forma seguente $(x-\alpha)^3$ $(x-\epsilon)^3$. È facile spinger queste considerazioni tant'oltre quanto vorrassi.

206. Egli è a proposito l'osservare che l'equazione $A=0$, la quale, pel cangiamento di a in x, diviene

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T=0,$$

si deduce immediatamente dall'equazione $V=0$, oppure dalla proposta

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0,$$

moltiplicando ciascun termine di quest'ultima per l'esponente della potenza di x, ch'esso contiene, e diminuendo in seguito quest'esponente d'un'unità; sopra di che bisogna avvertire che il termine U essendo equivalente a $U\times x^0$, debb'andare a *zero* in quest'operazione, dove si trova moltiplicato per *zero*. L'equazione $B=0$ si ricava da $A=0$, della stessa maniera che $A=0$ ricavasi da $V=0$; $C=0$ ricavasi da $B=0$, come quest'ultimo si ricava da $A=0$; e così di seguito (*).

207. Per ischiarir ciò con un esempio, prenderò l'equazione

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0;$$

(*) Si dimostra nella maggior parte dei Libri elementari, ma assai incompletamente, che il divisor comune tra l'equazioni $V=0$, e $A=0$ contiene i fattori eguali alzati ad una potenza minore d'un'unità che nella proposta: si concluderebbe ciò facilmente da quel, che precede; ma io rimando questa Proposizione al *Complemento*, ove dessa è dimostrata in una maniera, che sembrami semplice, e nuova.

l'equazione $A=0$ diviene in questo caso

$$5x^4-52x^3+201x^2-342x+216=0;$$

il suo divisor comune con la proposta è

$$x^3-8x^2+21x-18.$$

Questo divisore essendo di terzo grado, dee contener egli stesso più fattori; bisogna dunque cercare se desso n'abbia dei comuni coll'equazione $B=0$, la quale è in questo caso

$$20x^3-156x^2+402x-342=0;$$

e si trova difatto per resultato $x-3$: dunque la proposta ha tre radici eguali a 3, oppure ammette $(x-3)^3$ nel numero dei suoi fattori. Dividendo allora il primo divisor comune per $x-3$ tante volte di seguito quante è possibile, e vale a dire due volte, trovasi $x-2$. Questo divisore non essendo comune che all'equazion proposta, ed all'equazione $A=0$, non entra che due volte nella proposta. Si vede in ultimo che quest'equazione è equivalente a

$$(x-3)^3(x-2)^2=0.$$

208. L'equazione (d), che dà le differenze tra la radice b, e ciascuna dell'altre, allorchè si pone b in luogo di a, le differenze tra la radice c, e ciascuna delle altre allorchè ponghiam c in luogo di a, ec., non cangiando di forma mediante queste diverse sostituzioni, e conservando i medesimi coefficienti come la proposta, può essere generalizzata in maniera da contenere tutte le differenze delle radici combinate due a due. Per ottener ciò, serve d'eliminar a per mezzo dell'equazione

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots\ldots+Ta+U=0;$$

poichè il resultato non dipendendo che dai coefficienti, e non conservando alcuna traccia della

radice, che abbiamo considerata in particolare, converrà a tutte egualmente.

È manifesto che l'equazione finale debb'elevarsi al grado $m(m-1)$; imperocchè le sue radici

$$\begin{array}{llll} a-b, & a-c, & a-d, & \text{ec.} \\ b-a, & b-c, & b-d, & \text{ec.} \\ c-a, & c-b, & c-d, & \text{ec.} \end{array}$$

son tante quante le permutazioni, che si posson formare disponendo, due a due, le m lettere a, b, c, ec. Di più, poichè le quantità

$a-b$ e $b-a$, $a-c$ e $c-a$, $b-c$ e $c-b$, ec.

non son differenti che riguardo al segno, le radici dell'equazione saranno eguali due a due, facendo astrazione dal segno; di tal maniera che, quando avremo $y=\alpha$, avremo nel tempo medesimo $y=-\alpha$. Resulta da ciò che quest'equazione non dee contener che dei termini ove l'incognita sale ad un grado *pari*; perchè il suo primo membro debb'essere il prodotto d'un certo numero di fattori di secondo grado della forma

$$y^2-\alpha^2=(y-\alpha)(y+\alpha) \quad (184);$$

essa dunque sarà della forma

$$y^{2n}+py^{2n-2}+qy^{2n-4}\ldots\ldots+ty^2+u=0.$$

Facendo $y^2=z$, la cangeremo in

$$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}\ldots\ldots+tz+u=0;$$

e l'incognita z essendo il quadrato di y, avrà per valori i quadrati delle differenze delle radici della proposta.

Torna in acconcio osservare che le differenze tra le radici *reali* della proposta essendo necessariamente *reali*, i loro quadrati saran *positivi*, e che in conseguenza l'equazione in z non avrà che delle radici *positive* se la proposta non n'abbia che delle *reali*.

Sia, per esempio, l'equazione

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

facendovi $x = a + y$, avremo

$$\left.\begin{array}{l} a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3 \\ -7a - 7y \\ +7 \end{array}\right\} = 0.$$

Sopprimendo i termini $a^3 - 7a + 7$, di cui l'insieme è nullo, dietro l'equazione proposta, e dividendo il resto per y, otterremo

$$3a^2 + 3ay + y^2 - 7 = 0;$$

eliminando a tra quest'equazione, e l'equazione

$$a^3 - 7a + 7 = 0,$$

avremo

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 49 = 0;$$

facendo $z = y^2$, conseguiremo

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

209. La sostituzione di $a + y$ in luogo di x nell'equazione

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + U = 0 \ (204),$$

s'impiega qualche volta per fare sparire uno dei termini di quest'equazione. S'ordina allora il resultato per rapporto alle potenze di y, che rimpiazza l'incognita x, e si riguarda la quantità a come una seconda incognita, la qual si determina eguagliando a *zero* il coefficiente del termine, che si vuol fare sparire. Abbiamo in questa maniera

$$\left.\begin{array}{l} y^m + may^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2y^{m-2} \ldots\ldots + a^m \\ \quad + Py^{m-1} + (m-1)\,Pay^{m-2} \ldots\ldots + Pa^{m-1} \\ \qquad\quad + \qquad\quad Qy^{m-2} \ldots\ldots + Qa^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + U \end{array}\right\} = 0.$$

Se il termine, che si vuol togliere, è il secondo, ovvero quello, ch' è affetto da y^{m-1}, si fa $ma + P = 0$, dal che ricavasi $a = -\frac{P}{m}$. Sostituendo questo valore nel resultato, non restano che i termini affetti da

$$y^m, \quad y^{m-2}, \quad y^{m-3}, \text{ ec.}$$

Segue da ciò che *si fa svanire il secondo termine d' un' equazione sostituendo all' incognita di quest' equazione una nuova incognita, alla quale s' unisce il coefficiente del secondo termine preso con un segno contrario a quello, dal quale è affetto, e diviso per l' esponente del primo termine.*

Sia, per esempio, l' equazione

$$x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0;$$

la regola somministra

$$x = y - \tfrac{6}{3} = y - 2;$$

e sostituendo, otterremo

$$\left.\begin{array}{r} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ +6y^2 - 24y + 24 \\ -3y + 6 \\ +4 \end{array}\right\} = 0,$$

che si riduce a

$$y^3 - 15y + 26 = 0,$$

ove il termine affetto da y^2 non vi si trova altrimenti. Si farebbe sparire il terzo termine (affetto da y^{m-2}) eguagliando a zero l' insieme delle quantità, che lo moltiplicano, e vale a dire ponendo l' equazione

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 + (m-1)Pa + Q = 0.$$

Seguendo questo metodo, riconoscerem facilmente che l'eliminazione del quarto termine dipenderà da un'equazione di terzo grado; e così in seguito fino all'ultimo, il quale non potremo fare svanire se non che ponendo l'equazione

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + U = 0,$$

assolutamente simile alla proposta.

La ragione di questa somiglianza è agevole a discoprirsi. Eguagliare a *zero* l'ultimo termine dell'equazione in y vuol dir supporre che uno dei valori di quest'incognita è *zero*; e, se si ammette quest'ipotesi nell'equazione $x = y + a$, ne resulta $x = a$, cioè, che in questo caso la quantità a è necessariamente un dei valori di x.

210. Abbiamo qualche volta bisogno di decomporre un'equazione in fattori d'un grado superiore al primo; io non potrei quì esporre in particolare i diversi metodi, che si possono a quest'effetto impiegare; darò solamente un esempio di siffatta ricerca.

Sia l'equazione

$$x^5 - 24x^3 + 12x^2 - 11x + 7 = 0,$$

della quale bisogna determinare i fattori di terzo grado: rappresento uno di questi fattori per

$$x^3 + px^2 + qx + r,$$

i coefficienti p, q, r essendo *indeterminati*. Essi deggion essere tali che il primo membro dell'equazion proposta sia divisibile esattamente per il fattore $x^3 + px^2 + qx + r$ indipendentemente da qualunque valore di x; ma facendo attualmente la divisione, troveremo per resto,

$$-(p^3 - 2pq - 24p + r - 12)x^2$$
$$-(p^2q - pr - q^2 - 24q + 11)x$$
$$-(p^2r - qr - 24r - 7);$$

espressione, che annullerebbesi per se stessa, e indipendentemente da x, se si mettessero per le lettere p, q, e r i valori, che convengono allo stato del Problema: avrebbesi dunque allora

$$p^3 - 2pq - 24p + r - 12 = 0$$
$$p^2q - pr - q^2 - 24q + 11 = 0$$
$$p^2r - qr - 24r - 7 = 0.$$

Queste tre equazioni contengono le condizioni necessarie per *determinare* le incognite $p, q,$ e r, ed il Problema proposto riducesi alla loro risoluzione.

Della risoluzione per approssimazione dell' Equazioni numeriche.

211. Dopo d'aver terminata la ricerca dei divisori *commensurabili*, bisogna ricorrere ai metodi d'approssimazione, i quali riposano sul principio seguente:

Allorchè si son trovate due quantità, le quali, sostituite in un' equazione in luogo dell' incognita, danno due resultati di segno contrario, possiamo concludere che una delle radici dell' equazion proposta è compresa tra queste due quantità, ed è per conseguenza reale.

Sia, per esempio,

$$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0;$$

se si sostituiscano successivamente 2, e 20 in luogo di x, il primo membro, in vece di ridursi a *zero*, sarà eguale a -31 nel primo caso, ed a $+2939$ nel secondo: se ne può dunque concludere che quest' equazione ha una radice *reale* compresa tra 2, e 20, e vale a dire, maggior di 2, e minore di 20.

Siccome avrò spesso bisogno d'esprimere tal relazione, impiegherò i segni $>$, e $<$, di cui si servono gli Algebristi per esprimere l'ineguaglianza di due grandezze, ponendo la maggiore delle due quantità avanti l'apertura del segno, e l'altra al suo vertice. Scriverò in conseguenza

$x > 2$ per x maggiore di 2,

$x < 20$ per x minore di 20.

Ciò posto, per provare la precedente asserzione, possiam ragionare nel modo seguente. Riunendo in una parte i termini *positivi* dell'equazion proposta, e in un'altra i termini *negativi*, si ha

$$x^3 + 7x - (13x^2 + 1),$$

quantità, la qual s'è trovata *negativa* allorchè abbiamo fatto $x = 2$, perchè, in quest'ipotesi,

$$x^3 + 7x < 13x^2 + 1,$$

e ch'è divenuta *positiva* allorquando abbiam fatto $x = 20$, perchè allora

$$x^3 + 7x > 13x^2 + 1:$$

di più è manifesto che le quantità

$$x^3 + 7x, \quad \text{e} \quad 13x^2 + 1$$

aumentan ciascuna dal canto loro allorchè si danno a x dei valori di più in più grandi, e che prendendo questi valori così prossimi gli uni agli altri quanto si vorrà, potremo far crescere le quantità proposte per dei gradi di tal piccolezza, quanta giudicheremo a proposito. Ma, poichè la prima delle quantità quì sopra minore in principio della seconda, è divenuta in seguito maggiore, si fa evidente ch'essa ha un accrescimento più rapido che l'altra, per mezzo del quale essa compensa l'eccesso, che quest'ultima aveva sopra di lei, ed in seguito la sorpassa: esiste dunque un istante ove queste due quantità son eguali. » Nella stessa

» maniera, dice *Lagrange*, che due mobili, i quali » suppongasi che percorrano una medesima retta, » e partano nel medesimo tempo da due differenti » punti, arrivano nel tempo stesso a due altri » punti, ma in modo che quello dei mobili, ch' era » addietro in principio, si trovi in seguito più avanti » dell' altro, debbono necessariamente incontrarsi » nel loro corso. »

Il valore di x, qualunque egli sia (ma l'esistenza del quale è stata già dimostrata), che rende

$$x^3 + 7x = 13x^2 + 1,$$

dando

$$x^3 + 7x - (13x^2 + 1) = 0,$$

o sivvero $x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0,$

è necessariamente la *radice* dell'equazione proposta.

Ciò, che abbiamo veduto sull' equazione particolare

$$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0,$$

può applicarsi ad un' equazione qualunque, della quale esprimerò i termini *positivi* per P, ed i *negativi* per N. Sia a il valore di x, il quale ha dato un resultato *negativo*, e b quello, che n' ha dato uno *positivo;* queste due circostanze non han potuto aver luogo se non perchè per la prima sostituzione s'aveva $P < N$, e per la seconda $P > N$; P avendo dunque sorpassato N, ne concluderemo, come quì sopra, ch' esiste un valore di x compreso tra a, e b, il quale dà $P = N$.

Il superiore ragionamento sembra esigere che i valori, che si son dati a x sieno ambedue *positivi*, oppure ambedue *negativi;* perchè, allorquando essi hanno dei segni diversi, quello, ch'è *negativo*, fa cangiar di segno i termini dell'equa-

zion proposta, i quali contengono delle potenze *impari* di x, ed in conseguenza l'espressioni P, e N non son composte della stessa maniera in una sostituzione, e nell'altra. Questa difficoltà sparisce facendo $x = 0$; mediante questa sostituzione l'equazion proposta riducesi al suo ultimo termine, il quale si trova necessariamente di segno contrario a quello del resultato della prima, o della seconda sostituzione. Sia, per esempio, l'equazione

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 15x - 3 = 0,$$

il cui primo membro, allorchè facciamo

$$x = -1, \quad \text{e} \quad x = 2,$$

diviene $+12$, e -45. Supponendo $x = 0$, riducesi a -3; le due sostituzioni

$$x = 0, \quad \text{e} \quad x = -1,$$

dan dunque dei resultati di segni contrarj; ma, ponendo $-y$ in luogo di x, l'equazion proposta si cangia in

$$y^4 + 2y^3 - 3y^2 + 15y - 3 = 0,$$

e si ha

$$P = y^4 + 2y^3 + 15y, \quad N = 3y^2 + 3,$$

nelle quali

$$P < N \text{ allorchè } y = 0,$$
$$P > N \text{ allorchè } y = 1.$$

Possiamo ragionar dunque nel caso attuale come nel precedente, e concluderne che l'equazione in y ha una radice *reale* compresa tra 0, e $+1$; dal che ne segue che quella dell'equazione in x si trova tra 0, e -1, ed in conseguenza tra 2, e -1.

La proposizione enunciata non potendo presentar che dei casi compresi nell'uno, o nell'al-

tro di quelli, che ho esaminati, è sufficientemente provata.

212. Prima d'andar più avanti, farò osservare che *qualunque siano il grado d'un'equazione, ed i suoi coefficienti, possiam sempre assegnare un numero, il quale, sostituito in luogo dell'incognita, renda il primo termine maggior della somma di tutti gli altri*. Conoscesi a prima vista la verità di quest'asserzione, per poco che siasi osservato il procedimento, che seguono gli accrescimenti delle diverse potenze d'un numero maggiore dell'unità (126). Fra queste potenze, la più alta sorpassa tanto più quelle, che le sono inferiori, quanto il numero, di cui si tratta, è più considerevole; di tal manierachè niente limita gli eccessi della prima sopra ciascuna dell'altre; ecco in qual modo possiam trovare un numero, il qual sodisfaccia alla condizione enunciata,

È manifesto che il caso più sfavorevole sarebbe quello dove tutti i coefficienti dell'equazione si rendessero *negativi*, ed eguali al più grande di loro, e vale a dire, se in luogo di

$$x^m + P x^{m-1} + Q x^{m-2} \ldots\ldots + T x + U = 0,$$

si prendesse

$$x^m - S x^{m-1} - S x^{m-2} \ldots\ldots - S x - S = 0,$$

indicandosi da S il maggiore dei coefficienti P, Q, ..., T, U. Il primo membro di quest'ultima equazione essendo posto sotto la forma

$$x^m - S(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots + 1),$$

osserveremo che

$$x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1} \text{ (158) ;}$$

quest'espressione cangerà la precedente in

$$x^m - \frac{S(x^m - 1)}{x - 1}, \text{ ovvero in } x^m - \frac{S x^m}{x - 1} + \frac{S}{x - 1};$$

e se si pone M in luogo di x, conseguiremo

$$M''' - \frac{S M''}{M-1} + \frac{S}{M-1};$$

quantità, che renderemo evidentemente *positiva* se facciamo

$$M''' = \frac{S M''}{M-1}.$$

Adesso, se dividasi ciascun membro di quest' equazione per M'', avremo

$$1 = \frac{S}{M-1}, \text{ ovvero } M = S + 1.$$

Sostituendo dunque in luogo di x il maggiore dei coefficienti *negativi* dell' equazione aumentato dell' unità, renderemo il primo termine maggior della somma di tutti gli altri.

Il numero M potrebbe esser minore, se non si volesse che render la parte *positiva* dell' equazion proposta maggior della *negativa*; poichè servirebbe, per ciò, di rendere il primo termine superiore alla somma di tutti gli altri, quando ancora i lor coefficienti fossero eguali non al maggiore di tutti, ma solamente al maggiore dei coefficienti *negativi*: non dovrebbesi dunque che prender per M questo coefficiente aumentato dell' unità (*).

Segue da questo che le radici *positive* dell'equa-

(*) Trovansi nella *Risoluzione dell' equazioni numeriche di M. Lagrange* delle formule, le quali somministran dei limiti più ristretti; ma ciò, che ho detto di sopra, serve per rendere indipendenti dalla considerazione dell' *Infinito* le Proposizioni fondamentali della *Risoluzione dell' equazioni*.

zion proposta son necessariamente comprese tra *zero*, e $S+1$.

Possiam pure scoprire col medesimo mezzo un limite delle radici *negative;* è necessario per questo sostituire $-y$ in luogo di x nell'equazion proposta, e fare in modo di rendere il primo termine *positivo*, se desso divien *negativo* (178). È evidente per questa trasformazione che i valori *positivi* di y corrispondono ai *negativi* di x, e viceversa. Se R è il massimo coefficiente *negativo*, dopo tal cangiamento, $R+1$ sarà un limite dei valori *positivi* di y, ed in conseguenza $-R-1$ sarà quello dei valori *negativi* di x.

Finalmente, se si volesse ottenere per la minore delle radici un limite più approssimato che *zero*, vi s'arriverebbe sostituendo $\frac{1}{y}$ in luogo di x nell'equazione proposta, e preparando la trasformata in y come l'abbiamo prescritto nel numero 178. I valori di y essendo inversi di quelli di x, il maggiore de' primi corrisponderebbe al più piccolo dei secondi, e reciprocamente. Se dunque $S'+1$ indicasse il limite superiore dei valori di y, ovvero si fosse avuto

$$y < S'+1,$$

il che darebbe

$$\frac{1}{x} < S'+1,$$

ne resulterebbe successivamente

$$1 < (S'+1)x, \frac{1}{S'+1} < x.$$

Infatti è facil vedere che si può, senza turbar l'ordine di grandezza di due quantità separate da dei segni $<$, o sivvero $>$, moltiplicarle,

o dividerle per una stessa quantità, e che si può ancora sommare, o sottrarre una stessa quantità da ciascun lato dei segni $>$, e $<$, i quali godono, a questo riguardo, delle medesime proprietà che il segno d'eguaglianza.

213. Segue da ciò, che precede, che *qualunque equazioue di grado impari ha necessariamente una radice reale d'un segno contrario a quello del suo ultimo termine;* poichè, se si prende il numero M tale che il segno della quantità

$$M^m + P M^{m-1} + Q M^{m-2} \ldots + T M \pm U$$

non dipenda che da quello del suo primo termine M^m, l'esponente m essendo *impari*, il termine M^m sarà dello stesso segno del numero M (128). Ciò posto, se l'ultimo termine U ha il segno $+$, e si faccia $x = -M$, avremo un resultato contrario a quello, che ci somministra la supposizione di $x = 0$; dal che si fa manifesto che la proposta ha una radice tra o, e $-M$, vale a dir *negativa*. Se l'ultimo termine U ha il segno $-$, facciasi allora $x = +M$; s'ottiene un resultato di segno contrario alla supposizione di $x = 0$; ed in questo caso la radice si trova tra o, e $+M$, vale a dir *positiva*.

214. Allorchè l'equazion proposta è di grado *pari*, il primo termine M^m restando *positivo* qualunque siasi il segno, che si dà alla quantità M, non possiamo assicurarci da ciò, che precede, dell'esistenza d'una radice *reale*, se l'ultimo termine ha il segno $+$; poichè, sia che si faccia $x = 0$, o sivvero $x = \pm M$, s'ha sempre un resultato *positivo;* ma, quando questo termine è *negativo*, si trovano, facendo

$$x = +M, \quad x = 0, \quad x = -M,$$

tre resultati affetti respettivamente dai segni $+$,

—, e +, ed in conseguenza l' equazion proposta ha almeno due radici *reali* in questo caso, una *positiva* tra M, e o, l' altra *negativa* compresa tra o, e — M: *dunque ogni equazione di grado pari, il cui ultimo termine è negativo, ha almeno due radici reali,* una positiva, e l' altra negativa.

215. Passo adesso alla risoluzione dell' equazioni per approssimazione, ed affine di render più chiaro ciò, che ho da dire sopra questo soggetto, prendo immediatamente un esempio. Sia l' equazione

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0;$$

il suo massimo coefficiente negativo essendo —4, segue dal n.° 212. che la sua maggior radice positiva sarà minore di 5. Sostituendo $-y$ in luogo di x, essa diviene

$$y^4 + 4y^3 + 3y + 27 = 0;$$

e questo resultato avendo tutti i suoi termini positivi, fa vedere che y debb' essere negativo; dal che ne segue che x è necessariamente positivo, e che l' equazion proposta non può aver radici negative: le radici *reali* son dunque comprese tra o, e + 5.

Il primo metodo, che si presenta per arrivare a dei limiti più approssimativi, consiste nel suppor successivamente

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4;$$

e se due di questi numeri, sostituiti nell' equazion proposta, danno dei resultati di segni contrarj, essi saranno dei nuovi limiti delle radici. Ora, facendo

$x = 1$, il suo primo membro diviene + 21,
$x = 2$ ..... + 5,
$x = 3$ ..... — 9,
$x = 4$ ..... + 15:

si vede dunque che quest' equazione ha due radici *reali*, una compresa tra 2, e 3, e l'altra tra 3, e 4. Per approssimarsi ancor più al valore del primo limite, prenderemo il medio dei due numeri, che lo comprendono; così averemo 2, 5 (*Aritm.* 129.): supporremo in seguito $x = 2,5$; il resultato di questa sostituzione, il qual' è

$$+39,0625 - 62,5 - 7,5 + 27 = -3,9375,$$

dimostra, perchè è negativo, che la radice cercata cade tra 2, e 2, 5. Prendendo il medio di questi due numeri, otterremo 2, 25; limitandosi a $x = 2,3$, avrem la radice cercata, che differisce dal vero suo valore di meno d' un decimo, e ce n' approssimeremo rapidissimamente mediante il seguente metodo, dovuto a *Newton*.

Faremo $x = 2,3 + y$; è evidente che l'incognita y non sarà che una piccola frazione, di cui potrem trascurare il quadrato, e le potenze superiori: avremo in tal modo

$$\begin{aligned} x^4 &= (2,3)^4 + 4(2,3)^3 y \\ -4x^3 &= -4(2,3)^3 - 12(2,3)^2 y \\ -3x &= -3(2,3) - 3y; \end{aligned}$$

mediante queste sostituzioni, l' equazione proposta diverrà

$$-0,5839 - 17,812y = 0,$$

e somministrerà

$$y = -\frac{0,5839}{17,812}.$$

In questa prima operazione non anderemo al di là delle centesime parti, e ne resulterà

$$y = -0,03, \text{ e } x = 2,3 - 0,03 = 2,27.$$

Per ottenere un nuovo valore di x più esatto del precedente, supporremo $x = 2,27 + y'$; e sosti-

tuendo nell'equazion proposta, non si terrà conto che delle prime potenze di y'. Si troverà

$$-0{,}04595359 - 18{,}046468\,y' = 0,$$

dalla quale

$$y' = -\frac{0{,}04595359}{18{,}046468} = -0{,}0025,$$

ed in conseguenza $x = 2{,}2675$. Possiamo, continuando questo metodo, approssimarci tanto quanto vorremo al vèro valore di x.

La seconda radice *reale*, compresa tra 3, e 4, e calcolata nella stessa maniera, sarà

$$x = 3{,}6797,$$

arrestandosi alla quarta decimale.

216. Conoscerem l'esattezza del metodo esposto cercando il *limite* dei valori de' termini, che si trascurano.

Se l'equazione proposta fosse

$$x^m + \mathrm{P}\,x^{m-1} + \mathrm{Q}\,x^{m-2} \ldots\ldots + \mathrm{T}\,x + \mathrm{U} = 0,$$

la sostituzione di $a + y$ in luogo di x darebbe per resultato il primo di quelli, che ho trovati nel n.° 204., perchè a non essendo la radice dell'equazione, ma solamente un valor prossimo di x, non manda a *zero* la quantità

$$a^m + \mathrm{P}\,a^{m-1} + \mathrm{Q}\,a^{m-2} \ldots\ldots + \mathrm{T}\,a + \mathrm{U}.$$

Rappresentando quest'ultima per V, avremo, in luogo dell'equazione (*d*) del n.° precitato, la seguente,

$$\mathrm{V} + \frac{\mathrm{A}}{1}y + \frac{\mathrm{B}}{1.2}y^2 + \frac{\mathrm{C}}{1.2.3}y^3 \ldots\ldots + y^m = 0,$$

dalla quale ricaveremo

$$\mathrm{A}y = -\mathrm{V} - \frac{\mathrm{B}}{1.2}y^2 - \frac{\mathrm{C}}{1.2.3}y^3 \ldots\ldots - y^m,$$

$$y = -\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} - \frac{\mathrm{B}y^2}{1.2\,\mathrm{A}} - \frac{\mathrm{C}y^3}{1.2.3\mathrm{A}} \ldots\ldots - \frac{y^m}{\mathrm{A}}.$$

Trascurando le potenze di y superiori alla prima, ci fermiamo a

$$y = -\frac{V}{A},$$

• l'errore è

$$-\frac{By^2}{1.2A} - \frac{Cy^3}{1.2.3A} \ldots\ldots - \frac{y^m}{A}.$$

Se a non differisce dal vero valore di x che d' una quantità minore di $\frac{1}{p}a$, l'errore di sopra diverrà minore del numero, che si otterrebbe ponendovi $\frac{1}{p}a$ in luogo di y; il che darà

$$-\frac{B}{1.2A}\left(\frac{a}{p}\right)^2 - \frac{C}{1.2.3A}\left(\frac{a}{p}\right)^3 \ldots\ldots - \frac{1}{A}\left(\frac{a}{p}\right).$$

Calcolando questa quantità, ci assicureremo s' essa può essere trascurata di fronte a $\frac{V}{A}$, e se si trovasse troppo considerevole, farebbe di mestieri cercar per a un numero più prossimo al valor vero di x.

Del rimanente, allorchè abbiam calcolati più numeri y, y', y'', ec., e che i resultati ottenuti formano una serie decrescente, l' approssimazione cessa d' esser dubbiosa.

217. Il metodo, del quale ho fatt' uso, è conosciuto sotto il nome di *Metodo delle Sostituzioni successive*. *M. Lagrange* lo ha considerabilmente perfezionato nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* (*anni* 1767, e 1768). Esso ha primieramente osservato che non sostituendo che dei numeri interi, si potrebbe passare al di là di più

radici senz' accorgersi delle medesime. Difatto, se si avesse, per esempio, l' equazione

$$(x-\tfrac{1}{3})\,(x-\tfrac{1}{2})\,(x-3)\,(x-4)=0,$$

e che si sostituissero in luogo di x i numeri 0, 1, 2, 3, ec., si passerebbe al di là delle radici $\frac{1}{3}$, e $\frac{1}{2}$ senza riconoscerne l' esistenza; poichè avrebbersi

$$(0-\tfrac{1}{3})\,(0-\tfrac{1}{2})\,(0-3)\,(0-4)=+\tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\times 3\times 4$$
$$(1-\tfrac{1}{3})\,(1-\tfrac{1}{2})\,(1-3)\,(1-4)=+\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\times 2\times 3,$$

resultati del medesimo segno. E facil vedere che tal circostanza dipende da questo, cioè che la sostituzione di 1 in luogo di x fa cangiar nello stesso tempo il segno ai due fattori $x-\frac{1}{3}$, e $x-\frac{1}{2}$, i quali, di negativi ch' essi erano allorchè si poneva *zero* in luogo di x, son divenuti ambedue positivi; ma, se si fosse posto per x un numero compreso tra $\frac{1}{3}$, e $\frac{1}{2}$, il fattore $x-\frac{1}{3}$ solo avrebbe cangiato di segno, e sarebbesi ottenuto un resultato negativo.

Si cadrà necessariamente sopra un simil numero, sostituendo in luogo di x dei numeri, la cui differenza sia minore di quella delle radici $\frac{1}{3}$, e $\frac{1}{2}$. Se, per esempio, si fanno le sostituzioni $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, ec., troveremo due cangiamenti di segno.

Potrebbesi obiettare all' esempio di sopra che, allorquando abbiam fatto sparire i coefficienti frazionarj da un' equazione, dessa non può aver per radici che dei numeri interi, o sivvero irrazionali, e non delle frazioni; ma è facil vedere che i numeri irrazionali, i quali sono stati quì rimpiazzati da delle frazioni per maggiore semplicità, posson differir tra di loro meno dell' unità.

In generale, i resultati saran del medesimo segno tutte le volte che le *sostituzioni* cangeranno

il segno d'un numero pari di fattori. Per ovviare a quest'inconveniente, è necessario porre tra i numeri da sostituirsi, dal più piccol limite fino al più grande, una differenza più piccola delle differenze, che possono aver tra loro le radici dell'equazion proposta: mediante ciò le *sostituzioni* cadranno necessariamente tra le radici consecutive, e non faranno cangiar di segno che un solo fattore. Quest'operazion non esige che si conosca la più piccola differenza delle radici, ma solamente un limite, al disotto del quale essa non possa cadere.

Per procurarsi questo limite, formerem l'equazione dei quadrati delle differenze delle radici (208).

Sia

$$z^n + p z^{n-1} + q z^{n-2} \ldots + t z + u = 0 \ldots \text{(D)},$$

quest'equazione: per ottener il più piccolo limite delle sue radici, faremo (212) $z = \frac{1}{v}$, ed otterremo

$$\frac{1}{v^n} + p\frac{1}{v^{n-1}} + q\frac{1}{v^{n-2}} \ldots + t\frac{1}{v} + u = 0,$$

o sivvero, riducendo tutti i termini al medesimo denominatore

$$1 + pv + qv^2 \ldots\ldots + tv^{n-1} + uv^n = 0;$$

dipoi isolando v^n,

$$v^n + \frac{t}{u}v^{n-1} \ldots + \frac{q}{u}v^2 + \frac{p}{u}v + \frac{1}{u} = 0;$$

e se $-\frac{r}{u}$ indica il massimo coefficiente negativo di quest'equazione, avremo

$$\frac{1}{\frac{r}{u} + 1} < z.$$

Non bisogna considerar quì che il limite positivo, il solo che si rapporti alle radici reali della proposta.

Conoscendo il limite

$$\frac{1}{\frac{r}{u}+1} = \frac{u}{r+u},$$

minor del quadrato della più piccola differenza delle radici della proposta, n' estrarrem la radice quadrata, o almen prenderemo il numero razionale immediatamente al disotto di questa radice; questo numero, che indicherò per k, esprimerà l'intervallo, che bisognerà frapporre tra ciascuno dei numeri da sostituirsi. Formeremo così le due serie $0, +k, +2k, +3k,$ ec.

$$-k, -2k, -3k, \text{ ec.},$$

delle quali non prenderemo che i termini compresi tra i limiti della minore, e della maggiore delle radici positive, e tra quelli della minore, e della maggiore delle radici negative della proposta. I cangiamenti di segno, che offrirà la serie dei resultati ottenuti mediante la sostituzione di ciascuno di questi numeri in luogo di x nell'equazione proposta, manifesteranno le sue diverse radici reali, tanto positive, che negative.

218. Sia, per esempio, l'equazione

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

la qual m' ha condotto nel n.° 208. all'equazione

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0:$$

facendo $z = \frac{1}{v}$, e ordinando per rapporto a v il resultato di questa sostituzione, si conseguisce

$$v^3 - 9v^2 + \frac{42}{49}v - \frac{1}{49} = 0,$$

dalla quale ricavasi

$$\nu < 10, \ \varepsilon > \frac{1}{10}:$$

bisognerà dunque prender $k =$, o sivvero $< \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Si sodisfarebbe a questa condizione prendendo $k = \frac{1}{4}$, ma serve supporre $k = \frac{1}{3}$; poichè, ponendo 9 in luogo di ν nell' equazion precedente, s' ottiene un resultato positivo, che non può divenir che maggiore allorchè daremo a ν un valor più considerevole, perchè i termini ν^3, e $9\nu^2$ già si distruggono, e $\frac{42}{49}\nu$ supera $\frac{1}{49}$.

Il maggior limite delle radici positive dell' equazion proposta

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

è 8, e quello delle radici negative è — 8.; avremo dunque da sostituire per x i numeri

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots\ldots\ldots, \frac{24}{3},$$
$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots\ldots\ldots, -\frac{24}{3}.$$

Possiamo evitar le frazioni facendo $x = \frac{x'}{3}$;

poichè allora le differenze tra i valori di x' saranno triple di quelle, che si trovano tra i valori di x, e sorpasseranno in conseguenza l' unità: non avremo che da sostituir successivamente

$$0, \ 1, \ 2, \ 3, \ldots\ldots\ldots, \ 24,$$
$$-1, -2, -3, \ldots\ldots\ldots, -24$$

nell'equazione

$$x'^3 - 63x' + 189 = 0.$$

I segni dei resultati cangeranno da $+4$ a $+5$, da $+5$ a $+6$, e da -9 a -10; di maniera che avremo i valori positivi

$$\left.\begin{array}{l} x' > 4 \text{ e } < 5 \\ x' > 5 \text{ e } < 6 \end{array}\right\}, \text{ di dove } \left\{\begin{array}{l} x > \frac{4}{3} \text{ e } < \frac{5}{3} \\ x > \frac{5}{3} \text{ e } < \frac{6}{3}, \end{array}\right.$$

ed il valor negativo di x' cadendo tra -9, e -10, quello di x sarà tra $-\frac{9}{3}$, e $-\frac{10}{3}$.

Conoscendo adesso le diverse radici dell'equazione proposta a $\frac{1}{3}$ presso, potremo approssimarvi di più, come nel numero 215.

219. Ciò che abbiam praticato sull'esempio del n.° 215., e su quello del num.° precedente, si applicherà a un'equazione d'un grado qualunque, e farà conoscere i valori prossimi di tutte le radici *reali*, di quest'equazione. Non si può nulladimeno disconvenire che il calcolo non divenga laborioso allorchè l'equazion proposta s'eleva un poco di grado; ma in molti casi non sarà necessario ricorrere all'equazione (D), o sivvero vi supplirem per dei mezzi, che lo studio delle ramificazioni ulteriori dell'Analisi farà conoscere (*).

Farò intanto osservare che le sostituzioni successive dei numeri 0, 1, 2, 3, cc. in luogo di x

---

(*) Si può veder parimente nel *Trattato della Risoluzione numerica dell' Equazioni* un metodo elegantissimo dato da *M. Lagrange* a scanso d'impiegar l'equazione (D).

offrono spesso degl' indizj bastanti per far sospettar l'esistenza delle radici, la cui differenza è minore dell' unità. Nell' esempio, di cui m' occupo, esse danno i resultati

$$+7,\quad +1,\quad +1,\quad +13,$$

i quali ritornan crescenti dopo d'aver decresciuto da $+7$ a $+1$. Questo moto retrogrado porta naturalmente a credere che tra i due numeri $+1$, e $+2$ cadano due radici o eguali, o quasi eguali. Per verificare questo sospetto, fa di mestieri moltiplicar l'incognita. Facendo $x = \frac{y}{10}$, si trova

$$y^3 - 700y + 7000 = 0;$$

equazione, la quale ha due radici positive, una tra 13, e 14, l'altra tra 16, e 17.

Il numero dei tentativi necessarj per iscoprire queste radici non è grandissimo; poichè non è che tra 10, e 20, ove bisogna cercare y; ed i valori di quest' incognita essendo determinati in numeri interi, se ne concludono quelli di x, i quali differiscon dal vero meno d'un decimo.

220. Allorchè i coefficienti dell' equazione, che ci proponghiam di risolvere, son dei numeri considerevolissimi, è comodo trasformarla in un'altra, di cui i coefficienti sien contenuti in dei limiti più ristretti. Se si avesse, per esempio,

$$x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0,$$

farebbesi $x = 10z$; s'otterrebbe

$$z^4 - 8z^3 + 19{,}98z^2 - 14{,}937z + 0{,}5 = 0.$$

In questo resultato ci contenteremo primieramente di prendere i numeri interi, i quali più s' approssimano ai coefficienti, ed avrebbesi in tal maniera

$$z^4 - 8z^3 + 20z^2 - 15z + 0{,}5 = 0:$$

Troverebbesi senza pena che z ha due valori reali compresi tra 0, e 1, tra 1, e 2; dal che ne segue che quelli della proposta sono tra 0, e 10, e tra 10, e 20.

Non parlerò quì punto della ricerca delle radici *immaginarie*, perchè dessa riposa su dei principj, la cui sposizione mi condurrebbe troppo lontano; io la rimetto al *Complemento* di questo *Trattato*.

221. Il Sig. *Lagrange* ha dato alle *sostituzioni successive* una forma, la quale ha il vantaggio di far conoscere immediatamente a ciascuna operazione di quanto ci siamo approssimati alla vera radice, e non esige che se n'abbia in principio il valore, che differisca dal vero meno d'un decimo.

Rappresenterò per a il numero intero immediatamente al di sotto della radice cercata; altro non bisognerà per ottener questa radice che aumentar a d'una frazione: avremo dunque $x = a + \frac{1}{y}$. L'equazione in y, che resulterà dalla sostituzione di questo valore nella proposta, avrà necessariamente una radice maggiore dell' unità; chiamando b il numero intero immediatamente al disotto di questa radice, otterremo per una seconda approssimazione $x = a + \frac{1}{b}$. Ma b non essendo per rapporto a y se non che ciò che a è per rapporto a x, potremo, nell' equazione in y, far $y = b + \frac{1}{y'}$, e y' sarà necessariamente maggiore dell' unità; chiamando b' il numero intero immediatamente al disotto della radice dell' equazione in y', avremo

$$y = b + \frac{1}{b'} = \frac{bb' + 1}{b'};$$

rimettendo questo valore in quello di x, ne resulterà

$$x = a + \frac{b'}{bb' + 1}$$

per il terzo valore approssimato di x. Ne troveremo un quarto facendo $y' = b' + \frac{1}{y''}$; poichè, se b'' indica il numero intero immediatamente al disotto di y'': avremo

$$y' = b' + \frac{1}{b''} = \frac{b'b'' + 1}{b''},$$

dalla quale

$$y = b + \frac{b''}{b'b'' + 1} = \frac{bb'b'' + b'' + b}{b'b'' + 1};$$

$$x = a + \frac{b'b'' + 1}{bb'b'' + b'' + b},$$

e così di seguito.

222. Vado ad applicar questo metodo all' equazione

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Abbiamo digià veduto (218) che la minore delle radice *positive* di quest' equazione era tra $\frac{4}{3}$, e $\frac{5}{3}$, vale a dire tra 1, e 2; farò dunque $x = 1 + \frac{1}{y}$, ed avrò

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

Il limite delle radici *positive* di quest' ultima è 5, e sostituendo successivamente 0, 1, 2, 3, 4 in luogo di y, riconosceremo ben presto ch' essa ha

due radici maggiori dell' unità, cioè, una tra 1, e 2, e l' altra tra 2, e 3 Ne resulterà dunque

$$x = 1 + \tfrac{1}{1}, \text{ e } x = 1 + \tfrac{1}{2},$$

vale a dire

$$x = 2, \quad e \quad x = \tfrac{3}{2}.$$

Questi due valori corrispondono a quelli, che ho trovati tra $\frac{6}{3}$, e $\frac{5}{3}$, tra $\frac{5}{3}$, e $\frac{4}{3}$, e che non differiscon tra loro neppure d' un' unità.

Per portar più avanti il grado d'esattezza della prima radice, la qual corrisponde a $y = 1$, faremo

$$y = 1 + \frac{1}{y'}$$

ed avremo

$$y'^3 - 2y'^2 - y' + 1 = 0.$$

Non troveremo in quest' equazione che una sola radice maggiore dell' unità, e compresa tra 2, e 3; il che darà

$$y = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2},$$

di dove $x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Supponendo in seguito $y' = 2 + \frac{1}{y''}$, ne resulterà

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0;$$

troveremo y'' tra 4, e 5, e prendendo il minor limite 4, otterremo

$$y' = 2 + \tfrac{1}{4}, \; y = 1 + \tfrac{4}{9} = \tfrac{13}{9}, \; x = 1 + \tfrac{9}{13} = \tfrac{22}{13},$$

Nulla è più facile che proseguir questo metodo facendo $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$; e così in seguito.

Ritorno adesso al secondo valore di x, che ho trovato eguale a $\frac{3}{2}$ per una prima approssimazione, e che corrisponde a $y = 2$: faccio $y = 2 + \frac{1}{y'}$, e sostituisco nell' equazione in y; avrò, do-

po d'aver cangiati i segni per rendere il primo termine positivo,

$$y'^3 + y'^2 - 2y' - 1 = 0.$$

Quest'equazione non avrà, come la sua corrispondente, se non se una radice, la quale sorpassi l'unità, cioè, tra 1, e 2; prendendo $y' = 1$, ne resulterà

$$y = 3, \qquad x = \tfrac{4}{3}.$$

Ponendo ancora

$$y' = 1 + \frac{1}{y''},$$

conseguiremo

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0;$$

equazione, la quale dà y'' tra 4, e 5, da cui ne viene in conseguenza

$$y' = \tfrac{5}{4}, \quad y = \tfrac{14}{5}, \quad x = \tfrac{19}{14}.$$

Per andar avanti, faremo $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$; e così di seguito.

L'equazione $x^3 - 7x + 7 = 0$ ha ancora una radice negativa compresa tra -3, e -4. Per approssimarvisi di più, faremo $x = -3 - \frac{1}{y}$; il che darà

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0, y > 20, e < 21,$$

dalla quale resulterà

$$x = -3 - \tfrac{1}{20} = -\tfrac{61}{20}.$$

Ed andando più oltre, supporremo $y = 20 + \frac{1}{y'}$ ec., e n'otterrem successivamente dei valori di più in più esatti.

Le differenti trasformate in y, y', y'', ec. non

avranno mai che una radice maggiore dell' unità, fintantochè due, o un maggior numero di radici della proposta non saranno comprese tra i medesimi limiti a, e $a+1$; ma, quando questa circostanza avrà luogo, come l'abbiam veduto nell' esempio quì sopra, troveremo in alcuna dell'equazioni in y, y', ec. più valori maggiori dell' unità, dai quali si partiranno le serie d' equazioni, le quali faranno conoscere in particolare le diverse radici, che la proposta ha tra i limiti a, e $a+1$.

Il Lettore potrà esercitarsi ancora sull'equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

la cui radice *reale* cade tra 2, e 3; troverà pei valori interi di y, y', ec.

10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, ec.,

e pei valori approssimati di x,

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1307}{624}, \frac{16415}{7837}.$$

Delle proporzioni, e delle progressioni.

223. Abbiam veduto nell' *Aritmetica* la definizione, e le proprietà fondamentali della *proporzione*, e dell'*equidifferenza*, vale a dire, diciò che si chiama la *proporzione geometrica*, e la *proporzione aritmetica;* applicherò adesso l'*Algebra* a queste nozioni, ed arriverò con tal mezzo a dei resultati, i quali sono d' un uso frequente nella *Geometria*.

Principierò da far osservare che l'*equidifferenza*, e la *proporzione* posson esprimersi mediante dell' equazioni. Sieno A, B, C, D i quattro termini della prima; a, b, c, d quelli della seconda: avremo

$B-A=D-C$ (*Aritm.* 127), $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (*Aritm.* 111);

equazioni, le quali deggion essere risguardate come equivalenti all' espressioni

$$A\,.\,B:C\,.\,D, \qquad a:b::c:d,$$

e che danno

$$A+D=B+C, \qquad ad=bc.$$

Segue da ciò che *nell' equidifferenza la somma dei termini estremi eguaglia quella dei termini medj*, e che *nella proporzione il prodotto dei termini estremi è eguale a quello dei termini medj*, nello stesso modo che l' abbiam veduto nell' Aritmetica (127, 113) per mezzo di ragionamenti, dei quali l' equazioni quì sopra non ne son che la traduzione.

Le proposizioni reciproche delle precedenti dimostransi facilmente; poichè dall' equazioni

$$A+D=B+C, \qquad ad=bc$$

si torna immediatamente a

$$D-C=B-A, \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

ed in conseguenza, *allorchè quattro qnantità sono tali che due tra loro dian la medesima somma, o sivvero il prodotto medesimo che l' altre due, le prime sono i medj, e le seconde gli estremi* (o reciprocamente) *d' un' equidifferenza, o d' una proporzione*.

Quando $B=C$, l' *equidifferenza* è detta *continua*; lo stesso è della *proporzione* allorchè $b=c$; e si ha allora

$$A+D=2B, \qquad ad=b^2:$$

vale a dire, che *in un' equidifferenza continua la somma degli estremi è eguale al doppio del medio*,

ed *in una proporzion continua il prodotto degli estremi è eguale al quadrato del medio*. Ricavasi da ciò

$$B = \frac{A + D}{2}, \qquad b = \sqrt{ad};$$

la quantità B è il *medio* (o sivvero la media proporzionale aritmetica) tra A, e D; e la quantità *b* la *media proporzionale* (geometrica) tra *a*, e *d*.

L'equazioni fondamentali

$$B - A = D - C, \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

conducono ancora alle susseguenti

$$C - A = D - B, \qquad \frac{c}{a} = \frac{d}{b};$$

le quali fanno vedere che si può, nell'espressioni A . B : C . D, *a* : *b* :: *c* : *d*, cangiare i medj di posto, e de-lurne A . C : B . D, *a* : *c* :: *b* : *d*. In generale potremo fare tutte le trasposizioni di termini, le quali s'accorderanno coll'equazioni

$A + D = B + C$, e $a\,d = b\,c$ (*Aritm.* 114).

Lascerò adesso da parte l'*equidifferenza* per occuparmi della *proporzione*.

224. Si può ai due membri dell'equazione $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ aggiungere, o da essi togliere una medesima quantità *m*, di maniera che s'avrà

$$\frac{b}{a} \pm m = \frac{d}{c} \pm m;$$

riducendo i termini di ciascun membro al denominatore medesimo, conseguiremo

$$\frac{b \pm m\,a}{a} = \frac{d \pm m\,c}{c};$$

equazione, la quale può mettersi sotto la forma

$$\frac{c}{a} = \frac{d \pm m\,c}{b \pm m\,a},$$

e riducesi a questa *proporzione*

$$b \pm m\,a : d \pm m\,c :: a : c;$$

e siccome $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, avrem parimente

$$\frac{d \pm m\,c}{b \pm m\,a} = \frac{d}{b},$$

o sivvero $b \pm m\,a : d \pm m\,c :: b : d$.

Queste due *proporzioni* possono enunciarsi così. *Il primo conseguente, più, o meno un certo numero di volte il suo antecedente, stà al secondo conseguente, più o meno il medesimo numero di volte il suo antecedente, come il primo termine stà al terzo, o sivvero come il secondo stà al quarto.*

Paragonando solamente le somme tra loro, e le differenze tra loro, avremo

$$\frac{d + m\,c}{b + m\,a} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{d - m\,c}{b - m\,a} = \frac{c}{a},$$

d'onde concluderemo

$$\frac{d + m\,c}{b + m\,a} = \frac{d - m\,c}{b - m\,a}$$

vale a dire

$$b + m\,a : d + m\,c :: b - m\,a : d - m\,c,$$

oppure, cangiando i medj di posto,

$$b + m\,a : b - m\,a :: d + m\,c : d - m\,c;$$

e se facciamo $m = 1$, avrem solamente

$$b + a : b - a :: d + c : d - c,$$

che enunciasi così:

La somma dei due primi termini stà alla lor

differenza come la somma dei due ultimi stà alla lor differenza.

225. La proporzione $a : b :: c : d$ potendo scriversi come segue

$$a : c :: b : d,$$

avremo $$\frac{c}{a} \pm m = \frac{b}{d} \pm m,$$

di dove $$\frac{c \pm m\,a}{a} = \frac{d \pm m\,b}{b},$$

e finalmente

$$c \pm m\,a : d \pm m\,b :: a : b, \quad \text{ovvero} \quad :: c : d;$$

dal che ne resulta che *il secondo antecedente, più, o meno un certo numero di volte il primo, stà al secondo conseguente, più, o meno lo stesso numero di volte il primo, come uno qualunque degli antecedenti stà al suo conseguente.*

Questa proposizione può ancora concludersi immediatamente da quella del numero precedente; poichè, cangiando i medj di posto nella *proporzion* primitiva

$$a : b :: c : d,$$

e quindi applicando loro la proposizione citata, abbiamo successivamente

$$a : c :: b : d,$$

$$c \pm m\,a : d \pm m\,b :: a : b, \quad \text{ovvero} \quad :: c : d;$$

e rendendo per quest' ultima alle lettere a, b, c, d la denominazione, ch' esse hanno nella proporziou primitiva, s' ottiene il precedente enunciato.

Facendo $m = 1$, ricaveremo le proporzioni particolari

$$c \pm a : d \pm b :: a : b$$
$$:: c : d,$$

$$c + a : c - a :: d + b : d - b;$$

il che vuol dire che *la somma, o la differenza degli antecedenti, stà alla somma, o alla differenza de' conseguenti, come un antecedente stà al suo conseguente*, e che *la somma degli antecedenti stà alla lor differenza, come la somma dei conseguenti stà alla lor differenza*.

In generale, se abbiamo

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{h}{g}, \text{ ec.},$$

e si faccia $\frac{b}{a} = q$, avremo

$$\frac{d}{c} = q, \frac{f}{e} = q, \frac{h}{g} = q, \text{ ec.};$$

il che darà

$$b = aq, \quad d = cq, \quad f = eq, \quad h = gq, \text{ ec.};$$

e aggiungendo quest' equazioni, membro a membro, otterremo

$$b + d + f + h = aq + cq + eq + gq,$$

o sivvero $b + d + f + h = q\,(a + c + e + g)$;

dal che ne segue

$$\frac{b + d + f + h}{a + c + e + g} = q = \frac{b}{a}.$$

Enunciasi questo resultato dicendo che *in una serie di rapporti eguali* a : b :: c : d :: e : f :: g : h, *ec. la somma d' un numero qualunque di antecedenti stà alla somma d' un egual numero di conseguenti, come un antecedente stà al suo conseguente*.

226. Allorchè si hanno queste due equazioni

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \text{e} \quad \frac{f}{e} = \frac{h}{g},$$

si posson moltiplicare i primi membri tra loro,

e i secondi membri parimente tra loro, ed otterremo

$$\frac{bf}{ae} = \frac{dh}{cg};$$

equazione equivalente alla proporzione

$$ae : bf :: cg : dh,$$

la quale conseguirebbesi pure moltiplicando ciascun termine della proporzione

$$a : b :: c : d$$

per quello, che gli corrisponde nell'altra

$$e : f :: g : h.$$

Due proporzioni moltiplicate così, termine a termine, si dicon *moltiplicate per ordine;* ed i prodotti, che ne resultano, son, come vedesi, in proporzione: i nuovi rapporti sono i rapporti *composti* dei rapporti primitivi (*Aritm.* 123).

È facile di convincersi che s'arriverebbe egualmente a una proporzione dividendo due proporzioni, termine a termine, o sivvero per *ordine*.

227. Allorchè si ha

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

ne possiamo concludere che

$$\frac{b^m}{a^m} = \frac{d^m}{c^m}.$$

da cui ne resulta

$$a^m : b^m :: c^m : d^m,$$

d'onde si fa manifesto che *i quadrati, i cubi, ed in generale le potenze simili di quattro quantità in proporzione sono altresì in proporzione.*

La stessa cosa averebbe luogo per delle potenze frazionarie; poichè

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}};$$

e che

$$\sqrt[m]{\frac{d}{c}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}};$$

dal che ne resulta

$$\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}},$$

oppure

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d},$$

se $a : b :: c : d$; vale a dire, che *le radici del medesimo grado di quattro quantità in proporzione sono esse pure in proporzione.*

Tali sono i principali punti della Teorìa delle proporzioni. Questa Teorìa non è stata inventata che per iscoprir delle quantità, paragonandole con altre quantità. Abbiam conservati per lungo tempo i nomi Latini annessi ai differenti cangiamenti, o trasformazioni, che può subire una proporzione: si principia oggigiorno a non caricarne più la memoria di quelli, che studiano le Matematiche, e tutto l'edifizio delle proporzioni diverrebbe inutile, se a lor si sostituissero l'equazioni corrispondenti; il che darebbe, io penso, più uniformità ai metodi, e più chiarezza alle idee.

228. Dalle proporzioni alle progressioni il passaggio è facile. Avendo concepito nell'equidifferenza *continua* tre quantità, di cui l'ultima sorpassava la seconda di tanto quanto questa sorpassava la prima, abbiamo subito immaginato di considerare un numero indefinito di quantità a, b, c, d, ec., tali che ciascuna di esse sorpassasse quella, che la precede, d'una quantità δ; di maniera che

$b = a + \delta$, $c = b + \delta$, $d = c + \delta$, $e = d + \delta$, ec.:

l'insieme di queste quantità si scrive così

$$\div a . b . c . d . e . f . \text{ec.},$$

e si chiamava *progressione aritmetica*: ma ho creduto dover cangiar questo nome in quello di *progressione per differenze*. (*Vedete* nell'Aritm. *la Nota del n.°* 127.)

Possiam calcolare un termine qualunque di questa progressione senza il soccorso degl'intermedj. Infatti, se si pone per b il suo valore in quello di c, ne resulterà

$$c = a + 2\delta;$$

mediante quest'ultimo troveremo

$$d = a + 3\delta; \text{ dipoi } e = a + 4\delta;$$

e così in seguito: dal che si fa manifesto che chiamando l il termine, il cui posto fosse espresso per n, avrebbesi

$$l = a + (n - 1)\delta.$$

Sia, per esempio, la progressione

$$\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . \text{ec.}:$$

quì il primo termine $a = 3$, la differenza (o sivvero la *ragione*) $\delta = 2$; troverem per l'ottavo termine

$$3 + (8 - 1)2 = 17,$$

nello stesso modo che si conclude calcolando tutti quelli, che lo precedono.

La progressione, che ho considerata, era *crescente;* scrivendola in un ordine inverso, nel modo seguente,

$\div 17.15.13.11.9.7.5.3.1.-1.-3.$ ec.,

dessa sarebbe *decrescente*. Ne troveremo ancora un termin qualunque mediante la formula $a+(n-1)\delta$, osservando che δ debb' esser supposto negativo, poichè la differenza debbe allor togliersi da un termin qualunque per ottener quello, che segue.

229. Arrivasi pure semplicissimamente a conoscere la somma d' un numero qualunque di termini della progressione per differenze. Questa progressione essendo rappresentata da

$$\div a.b.c.\ldots\ldots\ldots\ldots i.k.l,$$

e S designando la somma di tutti i suoi termini, avremo

$$S=a+b+c.\ldots\ldots\ldots+i+k+l.$$

Scrivendo i termini del secondo membro di quest'equazione in un ordine inverso del precedente, avrem parimente

$$S=l+k+i.\ldots\ldots\ldots+c+b+a.$$

Se si sommano quest' equazioni, e riuniscansi i termini, che si corrispondono, conseguiremo

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)\ldots.+(i+c)+(k+b)+(l+a):$$

ma, per la natura della progressione, si ha, partendo dal primo termine,

$$a+\delta=b, b+\delta=c, \ldots\ldots i+\delta=k, k+\delta=l,$$

ed in conseguenza, partendo dall' ultimo,

$$l-\delta=k, k-\delta=i, \ldots\ldots c-\delta=b, b-\delta=a:$$

l'addizione dell' equazioni corrispondenti fa vedere immediatamente che

$$a + l = b + k = c + i, \text{ ec.},$$

e che in conseguenza

$$2\,S = n\,(a + l),$$

di dove proviene

$$S = \frac{n\,(a + l)}{2}.$$

Applicando questa formula alla progressione

$$\div 3 . 5 . 7 . 9 . \text{ec.},$$

troveremo, per la somma degli otto primi termini,

$$\frac{(3 + 17)\,8}{2} = 80.$$

230. L'equazione

$$l = a + (n - 1)\,\delta,$$

unita a

$$S = \frac{(a + l)\,n}{2}$$

somministra il mezzo di trovar due qaalunque delle cinque quantità a, δ, n, l, e S, allorchè si conoscono le altre tre. Io non mi tratterrò nel trattare ciascuno dei casi, i quali possono presentarsi.

231. Abbiam ricavato dalla proporzione la progression per *quozienti* (o sivvero la progressione *geometrica*), la quale consiste in una serie di termini tali che il quoziente d'un termine diviso per quello, che lo precede, è lo stesso, in qualunque parte sien presi questi due termini. Le serie

$$\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \text{ec.},$$
$$\div\div 45 : 15 : 5 : \tfrac{5}{3} : \tfrac{5}{9} : \text{ec.}$$

sono delle progressioni di questo genere; il quoziente (o sivvero la *ragione*) è 3 nell'una, e $\frac{1}{3}$ nell'altra: la prima è *crescente*, e la seconda *decrescente*. Ciascuna di queste progressioni forma una serie di rapporti eguali, ed è per questo che desse si scrivono nella maniera soprindicata.

Sieno

$$a, b, c, d, \ldots\ldots\ldots k, l$$

i termini d'una progressione qualunque per quozienti; facendo $\frac{b}{a} = q$, avrò, per la natura di questa progressione,

$$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \ldots = \frac{l}{k},$$

o sivvero $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$, $\ldots l = kq$. Ponendo successivamente il valor di b in quello di c, quest'ultimo in quello di d, e così degli altri, otterremo

$$b = aq,\ c = aq^2,\ d = aq^3,\ e = aq^4, \ldots l = aq^{n-1},$$

designando per n il posto del termine l, oppure il numero dei termini, i quali si sono considerati nella progressione.

Mediante la formula $l = aq^{n-1}$ si può calcolare un termin qualunque senza il soccorso degl' intermedj. Il decimo termine della progressione

$$\div\div 2 : 6 : 18 : \text{ec},$$

per esempio, è eguale a $2 \times 3^9 = 39366$.

232. Si può conseguire eziandio la somma di tanti termini quanti vorremo della progressione

$$\div\div a : b : c : d, \text{ ec.}$$

sommando tra loro l'equazioni

$$b = aq,\ c = bq,\ d = cq,\ e = dq, \ldots l = kq;$$

poichè ne resulterà

$$b+c+d+e\ldots+l=(a+b+c+d\ldots+k)q;$$

e chiamando S la somma cercata, avremo

$$b+c+d+e\ldots.+l=\mathrm{S}-a$$
$$a+b+c+d\ldots.+k=\mathrm{S}-l,$$

d' onde concluderemo

$$\mathrm{S}-a=q(\mathrm{S}-l),$$

ed in conseguenza

$$\mathrm{S}=\frac{ql-a}{q-1}.$$

Nell' esempio suddivisato troverebbesi per la somma dei primi dieci termini della progressione

$$\div\ 2\vdots 6\vdots 18\vdots \text{ ec.}$$

$$\frac{2\times 3^{10}-2}{2}=3^{10}-1=59048.$$

233. Le due equazioni

$$l=aq^{n-1},\quad \mathrm{S}=\frac{ql-a}{q-1}$$

contengono le relazioni, che le cinque quantità a, q, n, l, e S debbono avere tra loro nella progression per quozienti, e faranno conoscere due qualunque di queste quantità allorchè le altre tre saran date.

234. Se si sostituisca aq^{n-1} in luogo di l nell' espressione di S, otterremo

$$\mathrm{S}=\frac{a(q^n-1)}{q-1},$$

Allorchè q sarà un numero intero, la quantità q^n sarà tanto più grande, quanto il numero n sarà più considerevole; e S sarà suscettibile di sorpassare qualunque quantità che si voglia, dan-

do a n un valor convenevole, e vale a dire, prendendo un numero sufficiente di termini della progressione proposta. Ma, se q sia una frazione rappresentata da $\frac{1}{m}$, avremo

$$S = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{a\,m\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{m - 1} = \frac{a\,m - \frac{a}{m^{n-1}}}{m - 1};$$

ed è evidente che quantopiù il numero n diverrà maggiore, più il termine $\frac{a}{m^{n-1}}$ diverrà minore, e più in conseguenza il valor di S approssimerà la quantità $\frac{a\,m}{m-1}$, dalla quale esso non differisce che di

$$\frac{a}{(m-1)\,m^{n-1}}.$$

dunque, quanti più termini prenderemo della progressione proposta, più la lor somma si approssimerà ad $\frac{a\,m}{m-1}$. Dessa potrà ancor differirne meno di qualunque quantità per quanto piccola si possa assegnare senza poterle esser mai rigorosamente eguale.

La quantità $\frac{a\,m}{m-1}$, che io designerò per L, è, come vedesi, un *limite*, al quale le somme parziali rappresentate da S si approssiman di più in più.

Applicando queste considerazioni alla progressione

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\,1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{16} : \text{ec},$$

avremo

$$a = 1, \quad q = \frac{1}{m} = \frac{1}{2},$$

di dove

$$m = 2, \quad \mathrm{L} = \frac{a\,m}{m-1} = 2;$$

e più che prenderem termini della suddivisata progressione, più la lor somma si approssimerà ad esser eguale a 2. Trovasi infatti

$$1 = 1 = 2 - 1$$
$$1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} = 2 - \tfrac{1}{2}$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{4} = 2 - \tfrac{1}{4}$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8} = 2 - \tfrac{1}{8}$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{31}{16} = 2 - \tfrac{1}{16}$$

ec.

L'espressione di L può esser considerata come la somma della progression decrescente per quozienti continuata all'infinito; ed è appunto in questa maniera che dessa si rappresenta ordinariamente; ma non si può frattanto formarsene un'idea ben chiara se non che ravvisandola sotto il punto di vista d'un *limite*.

235. Possiam ricavare dall'espressione

$$\mathrm{S} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

tutti i termini, i quali compongono la progressione, di cui dessa rappresenta la somma; poichè, se s'effettua la divisione di $q^n - 1$ per $q - 1$ (158), si troverà

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \ldots + q^{n-1},$$

il che somministrerà

$$\mathrm{S} = a + a\,q + a\,q^2 \ldots + a\,q^{n-1}.$$

Il valore di L sodisfà allo stesso fine allorchè si effettua la divisione di m per $m-1$ nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|l} m & m-1 \\ \hline -m+1 & 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{ec.} \\ \hline -1+\frac{1}{m} & \\ -\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2} & \\ -\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3} & \\ \text{ec.} & \end{array}$$

Si divide primieramente m nel modo ordinario per il primo termine del divisore, il che dà per quoziente 1; si moltiplica questo quoziente pel divisore, e si toglie il prodotto dal dividendo; si divide in seguito il resto 1 per il primo termine del divisore; trovasi per quoziente $\frac{1}{m}$, il qual si moltiplica pel divisore, e si trova per resto $\frac{1}{m}$; s'opera su questo resto come sul precedente. Continuando così, conosceremo ben presto la legge, che seguono tutti i quozienti parziali, e si fa chiaro che l'espressione $\frac{m}{m-1}$ è equivalente alla serie

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{ec.},$$

continuata all'infinito; ponendo per m il suo va-

lore $\frac{1}{q}$, e moltiplicando per a, si trova

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \text{ec.},$$

per la progressione, di cui L n' esprime il *limite*.

236. Si riguarda lo sviluppo

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{ec.},$$

come il valore della frazione $\frac{m}{m-1}$ ogni qualvolta che desso è *convergente*, vale a dire, che i termini, i quali lo compongono, diminuiscono nell' allontanarsi dal primo.

Infatti, se si termina la precedente divisione successivamente al primo, al secondo, al terzo. ... resto, si trovano

i quozienti	ed i resti
1	1
$1 + \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
ec.	ec.;

gli uni si approssimano al vero valor tanto più, quanto più gli altri vanno diminuendo; e questa circostanza non ha luogo che quando m sorpassa l'unità. In tutti gli altri casi, non si può permettere di trascurare i resti, i quali sempre aumentando fan veder che i quozienti s' allontanano sempre più dal vero valore.

Per isehiarir ciò, serve il far successivamen- $m = 2$, $m = 1$, $m = \frac{1}{2}$: la prima supposizione somministra

$$\frac{m}{m-1} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{ec.};$$

ed abbiamo digià veduto (234) che difatto la serie, che compone il secondo membro, si approssima di più in più a 2.

La seconda supposizione dà

$$\frac{m}{m-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ec.}$$

Questo resultato $1 + 1 + 1 + 1 + \text{ec.}$, continuato all'infinito, dà pure una quantità infinita, come lo richiede la natura dell'espressione $\frac{1}{0}$: nulladimeno, se, in quest'esempio, non si tenesse conto dei resti, si caderebbe in un'assurdità; poichè, siccome il divisore moltiplicato per il quoziente dee riprodurre il dividendo, bisogna che

$$1 = (1 + 1 + 1 + \ldots\ldots)0;$$

ora, il secondo membro va rigorosamente a *zero*; averebbesi dunque $1 = 0$.

La terza supposizione conduce a delle conseguenze non meno assurde, quando si trascurano i resti, e si riguarda la serie resultante com'esprimente il valore della frazione, dalla quale dessa deriva. Facendo $m = \frac{1}{2}$, si trova

$$\frac{m}{m-1} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{ec.};$$

resultato evidentemente falso.

Queste contradizioni spariscono osservando che, nel secondo caso, i resti

$$1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3} \text{ec.}$$

son tutti eguali a 1, e che, poichè dessi non diminuiscono, non è permesso di trascurarli, per quanto lontano s'inoltri la serie. Aggiungendo dunque uno di questi resti al secondo membro dell'equazione

$$1 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots)0,$$

dessa diviene esatta: nel terzo caso, i resti

$$1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3} \text{ ec.}$$

formano la progressione crescente 1, 2, 4, 8, 16, ec., ed aggiungendo a ciascun quoziente la frazione, che resulta dal resto, che l' accompagna, l'espressioni rigorose di $\frac{m}{m-1}$ sono

$$1 + \frac{1}{m-1}$$

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m-1)}$$

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2(m-1)},$$

le quali tutte s'accordano a dare -1 allorchè $m = \frac{1}{2}$.

Se si prendesse $m = -n$, la frazione $\frac{m}{m-1}$ diverrebbe $\frac{n}{n+1}$; la serie, ch'esprime lo sviluppo di questa frazione, cangerebbesi in

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \text{ec.};$$

o facendo $n = 1$, avrebbesi

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{ec.};$$

sviluppo, il quale diviene alternativamente 1, e *zero*, e che si allontana in conseguenza, ora per eccesso, or per difetto, dal vero valore di $\frac{n}{n+1}$, eguale in questo caso a $\frac{1}{2}$: ma la serie suddivisata non essendo *convergente*, non può dar questo vero

valore, e bisogna necessariamente tener conto del resto, qualunque siasi il termine, in cui ci arrestiamo.

Se si suppone nella serie precedente $n = 2$, avremo

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \text{ec.};$$

serie, di cui le somme parziali 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, ec. sono alternativamente minori, e maggiori del vero valore di $\frac{n}{n+1}$, il quale è $\frac{2}{3}$; ma desse vi si approssimano indefinitamente, perchè la serie proposta è *convergente*.

Benchè le serie *divergenti*, e vale a dire, quelle i cui termini vanno aumentando, si allontanino sempre più dal vero valore dell' espressione, dalla quale esse derivano, considerate nulladimeno come sviluppi di queste espressioni, desse possono far conoscere quelle delle lor proprietà, le quali non dipendono dalla lor somma.

237. Spingendo qualunque siasi divisione algebrica, come ho fatto quì sopra (235) a riguardo di m per $m - 1$, arriverem sempre ad esprimere il quoziente mediante una serie infinita di termini *monomj*. L' estrazioni delle radici continuate della stessa maniera sui resti successivi, nel caso delle potenze imperfette, condurrebbero pure a dei resultati di serie infinite; ma queste serie otterrannosi più facilmente mediante la formula del *binomio*, conforme farò vedere nel *Complemento*, dove tratterò delle serie le più conosciute.

Teoria delle Quantità esponenziali, e dei Logaritmi.

238. In tutti i Problemi risoluti fin quì le

incognite non entravano punto negli esponenti; ma non sarebbe lo stesso se si volesse determinare il numero dei termini d'una progression per quozienti, il cui primo termine, l'ultimo, e la ragione fossero i dati. Difatto, avrebbesi per questo

$$l = a\,q^{n-1} \quad (231),$$

nella quale equazione l'incognita sarebbe n; e facendo, per abbreviare, $n - 1 = x$, si otterrebbe $l = aq^x$. I metodi diretti esposti precedentemente non saprebber risolvere quest'equazione; e le quantità tali come x non posson essere rappresentate da uno dei segni, dei quali ho già fatto uso. Per gettare un poco di luce sopra questo soggetto, rammenterò, dietro *Euler*, il legame ch'esiste tra le diverse operazioni dell'Algebra, e come ciascuna di esse dia origine a una nuova specie di quantità.

239 Sieno a, e b due quantità, che ci proponghiamo di sommare insieme: si ha

$$a + b = c;$$

e se da quest'eqnazione vogliasi ricavare a, o b, si trova

$$a = c - b, \quad b = c - a;$$

ecco, come si vede, l'origine della sottrazione: e quando quest'operazione non può effettuarsi nell'ordine come dessa è indicata, il resultato divien negativo.

L'addizion ripetuta d'una medesima quantità genera la moltiplicazione: a indicando il moltiplicatore, b il moltiplicando, e c il prodotto, si ha

$$ab = c,$$

dalla quale ricavasi

$$a = \frac{c}{b}, \quad b = \frac{c}{a};$$

e da ciò nasce la divisione, e nascono le frazioni, le quali ne sono il seguito allorchè dessa non può effettuarsi senza resto.

La moltiplicazion ripetuta d'una quantità per se stessa produce le potenze di questa quantità: esprimendo per b il numero delle volte che a è fattore nella potenza, che si considera, si ha

$$a^b = c.$$

Questa equazione differisce essenzialmente dalle precedenti in ciò che le quantità a, e b non v'entrano ambedue della stessa maniera; dal che ne segue che non si può risolvere l'equazione per rapporto all'una come per rapporto all'altra. Se si cerca a, una semplice estrazion di radice serve a trovarla, e quest'operazione dà luogo ad una nuova specie di quantità, cioè alle irrazionali: ma la determinazione di b dipende da dei metodi particolari, i quali farò conoscere allorchè avrò esposte le principali proprietà dell'equazione $a^b = c$.

240. È facil vedere che conservando lo stesso valore della lettera a, ch'io supporrò al di sopra dell'unità, e variando convenevolmente quello di b, potremo ottener per c tutti i numeri possibili. Difatto, facendo $b = 0$, si ha $c = 1$; poi, allorchè b crescerà, i valori corrispondenti di c sorpasseranno di più in più l'unità, e potranno aumentarsi tanto quanto vorremo. Il contrario avrà luogo se si prenda b negativo; l'equazione $a^b = c$ cangiandosi in $a^{-b} = c$, o sivvero $\frac{1}{a^b} = c$, i valori di c anderan sempre diminuendo, e potranno divenir tanto piccoli quanto vorremo. Si può dunque dall'equazione medesima ricavare tutti i numeri positivi possibili tanto interi che frazionarj, nel caso ove a sorpassi l'unità.

Sarebbe lo stesso se si avesse $a < 1$: solamente i valori di c progredirebbero in senso inverso dal caso precedente; ma supponendo $a = 1$, si troverebbe $c = 1$ qualunque valore si desse a b: si dee ancora, in tutto ciò che seguirà, riguardar a come differente essenzialmente dall' unità.

Per meglio indicare che a non cangia, e che le altre due quantità b, e c sono indeterminate, io le rappresenterò per le lettere x, e y, ed avrò l' equazione $a^x = y$, nella quale a ciascun valore di y corrisponde un valore di x, di maniera che una di queste quantità è determinata dall' altra, e reciprocamente.

241. Questa generazione di numeri per mezzo delle potenze d' una medesima quantità è interessantissima non solamente in rapporto all' Algebra, ma altresì pei soccorsi, ch' ella somministra per abbreviare i calcoli numerici. Difatto, se si considera un altro numero y', e s' indichi per x' il valore corrispondente di x, avremo $a^{x'} = y'$, ed in conseguenza, se si moltiplica y per y', conseguiremo

$$y y' = a^x \times a^{x'} = a^{x+x'};$$

se si divide troveremo

$$\frac{y'}{y} = \frac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x};$$

finalmente, se si prenda la potenza m di y, e la radice n^{ma}, avremo

$$y^m = (a^x)^m = a^{mx}$$

per l' una, e

$$y^{\frac{1}{n}} = (a^x)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{x}{n}}$$

per l' altra.

Segue dai due primi resultati che conoscendo gli esponenti x, e x' relativi ai numeri y, e y', troveremo, prendendone la loro somma, l'esponente che corrisponde al prodotto yy', e prendendone la lor differenza, quello che corrisponde al quoziente $\frac{y'}{y}$. Le due ultime equazioni fanno vedere che l'esponente relativo alla potenza m^{ma} di y s'ottiene mediante una semplice moltiplicazione, e quello che corrisponde alla radice n^{ma} con una semplice divisione.

È facile concluder da ciò che, se si avesse una Tavola, nella quale, allato di ciascuno dei numeri y, si trovassero i valori corrispondenti di x, di manierachè essendo dato y si potesse avere x, e reciprocamente, *la moltiplicazione di due numeri qualunque si ridurrebbe ad una semplice addizione*, perchè, in vece d'operar sopra questi numeri, si sommerebbero i valori di x, che vi corrispondono, e cercando dipoi nella Tavola il numero, al quale corrisponde questa somma, avrebbesi pure il dimandato prodotto. Il quoziente dei numeri proposti troverebbesi nella medesima Tavola di fronte alla differenza dei valori di x, i quali lor corrispondono, e *la divisione s'effettuerebbe allora mediante una sottrazione*.

Questi due esempj fanno vedere oltremodo l'utilità, di cui posson essere delle Tavole simili a quelle, delle quali ho parlato; così l'uso loro n'è molto esteso fino da *Neper*, il quale fu il primo ad immaginarle. I valori di x vi son indicati sotto il nome *di logaritmi*, ed in conseguenza i *logaritmi son gli esponenti delle potenze, alle quali bisogna alzare un numero invariabile per dedurne successivamente tutti i possibili numeri*.

Il numero invariabile si chiama base delle Tavole, o del Sistema dei logaritmi.

In seguito rappresenterò il *logaritmo* di y per ly; avremo $x = ly$, ed a motivo di $y = a^x$, otterremo $y = a^{ly}$.

242. Le proprietà dei logaritmi essendo indipendenti dai valori particolari del numero a, o sivvero dalla lor *base*, ne segue che si posson formare un' infinità di Tavole differenti, dando a questo numero tutti i valori possibili, diversi dall' unità. Prendendo, per esempio, $a = 10$, avremo $y = (10)^{ly}$, e troveremo immediatamente che i numeri

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, ec.,

i quali son tutti delle potenze di 10, hanno per *logaritmi*, in quest' ipotesi, i numeri

0, 1, 2, 3, 4, 5, ec.

Possiamo di già verificare su questa serie le proprietà, che ho enunciate nel num.° precedente: aggiungendo i logaritmi di 10, e di 1000, i quali sono 1, e 3, si vede tosto che la lor somma 4 corrisponde sotto il 10000, ch' è il prodotto dei numeri proposti.

243. I logaritmi dei numeri intermedj tra 1 e 10, 10 e 100, 100 e 1000, ec. non possono ottenersi che per approssimazione. Se si trattasse, per esempio, d' avere il logaritmo di 2, bisognerebbe risolvere l' equazione $(10)^x = 2$, applicandovi il metodo dato nel n.° 221., e trovare in primo luogo il numero intero, che più si approssima al valore di x. Si conosce ben presto che x è tra 0, e 1, poichè $(10)^0 = 1$, $(10)^1 = 10$; faremo dunque $x = \frac{1}{z}$, ed otterremo $(10)^{\frac{1}{z}} = 2$,

oppure $10 = 2^z$; ora z si trova tra 3, e 4: supporrem dunque $z = 3 + \frac{1}{z'}$, e ne resulterà

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z'}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{z'}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z'}},$$

o sivvero $2^{\frac{1}{z'}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$,

oppur finalmente $2 = (\frac{5}{4})^{z'}$.

Il valore di z' cadendo tra 3, e 4, faremo

$$z' = 3 + \frac{1}{z''};$$

avrem l'equazione

$$2 = (\tfrac{5}{4})^{3+\frac{1}{z''}} = (\tfrac{5}{4})^3 . (\tfrac{5}{4})^{\frac{1}{z''}},$$

dalla quale ricaveremo

$(\frac{5}{4})^{\frac{1}{z''}} = 2(\frac{4}{5})^3 = \frac{128}{125}$, ovvero $(\frac{128}{125})^{z''} = \frac{5}{4}$;

e dopo un piccol numero di tentativi troveremo che z'' è tra 9, e 10. Potremo inoltrarci della stessa maniera; ma, siccome io non ho indicato questo metodo che per far vedere la possibilità di trovare i logaritmi di tutti i numeri, mi limiterò a supporre $z'' = 9$; e risalendo, otterremo

$$z' = \frac{28}{9},\ z = \frac{93}{28},\ x = \frac{28}{93}.$$

Questo valore di x, ridotto in decimali, è esatto fino alla quarta cifra, poichè desso dà

$$x = 0,\ 30107;$$

e dei calcoli portati ad un maggior grado di rigore ci hanno insegnato che, spingendo fino a 7 decimali, avrebbesi

$$x = 0,3010300.$$

Per interpetrare questo valore di x come quello d'un esponente, bisogna concepire che se

si alza il numero 10 alla potenza indicata dal numero 3010300, e se n' estragga dal resultato una radice del grado 10000000, avremo un numero approssimatissimo a 2, e vale a dire, che $(10)^{\frac{3010300}{10000000}} = 2$, con pochissima differenza: il primo membro è un poco più grande di 2, ma il numero $(10)^{\frac{3010299}{10000000}}$ sarebbe più piccolo (*).

244. Moltiplicando successivamente per 2, 3, 4, ec. il logaritmo di 2, ottengonsi quelli dei numeri 4, 8, 16, ec., i quali sono le 2.ª, 3.ª, 4.ª, ec., potenze di 2.

Aggiungendo al logaritmo di 2 i logaritmi di 10, di 100, di 1000, ec., se ne deducono quelli di 20, di 200, di 2000, ec., ed è evidente che basta d' avere i logaritmi dei numeri *primi* per trovare i logaritmi di tutti i numeri *composti*, i quali non posson essere che delle potenze, o dei prodotti di numeri *primi*. Il numero 210, per esempio, essendo eguale a

$$2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

(*) Il metodo indicato in questo numero non sarebbe praticabile per dei numeri un poco grandi, ma eccone un altro dato da *Long*, Geometra Inglese, nelle *Transaz. Filosofiche* per l'anno 1724. n.° 339, il quale può essere utilissimo.

La determinazione di x nell' equazione $(10)^x = y$ essendo laboriosissima, si può procedere in un ordine inverso, cioè darsi x per ottenere y, e formare una Tavola dei valori di y corrispondenti a quelli di x, la quale servirà in seguito, come vedremo, a determinare x per y.

Si prendono in primo luogo per x dei valori da 0,1 fino a 0,9, e tutto si riduce a determinare il valore di y, il qual corrisponde a $x = 0,1$, ed è $(10)^{\frac{1}{10}}$, perchè gli altri valori di y, cioè,

il suo logaritmo sarà eguale a

$$l\,2+l\,3+l\,5+l\,7,$$

ed a motivo che $5=\frac{10}{2}$, avremo

$$l\,5=l\,10-l\,2.$$

245. I *logaritmi*, che son sempre espressi in decimali, son necessariamente composti di due parti, cioè, delle unità, poste alla sinistra della virgola, e delle cifre decimali, le quali si trovano alla destra. La prima parte porta il nome di *caratteristica*, perchè nei logaritmi, ch'io considero per adesso, i quali risultano dalla supposizione

---

$$(10)^{\frac{2}{10}},\quad (10)^{\frac{3}{10}},\text{ ec.,}$$

sono le 2.ª, 3.ª, ec. potenze della prima.

L' estrazione della radice quadrata fa primieramente conoscere

$$(10)^{\frac{1}{2}},\text{ ovvero }(10)^{\frac{5}{10}}=3{,}162\,277\,660\,;$$

poi estraendo la radice quinta da questo resultato, si perviene a

$$(10)^{\frac{1}{10}}=1{,}258925_{4}12.$$

Mediante un metodo simile ricaveremo da

$$(10)^{\frac{1}{10}}=1{,}258925412$$

il valore di

$$\sqrt{(10)^{\frac{1}{10}}}=(10)^{\frac{1}{20}}=(10)^{\frac{5}{100}}=1{,}122c18454\,;$$

poi prenderemo la radice quinta, formeremo

$$(10)^{\frac{1}{100}}=1{,}023292992\,;$$

e risalendo alle potenze 2.ª, 3.ª, . . . 9.ª, ne otterremo i valori di y corrispondenti a quelli di x, da 0,01 fino a 0,09.

Si concepisce facilmente che in questa maniera formeremo ancora i valori di y mediante quelli di x, da

di $a = 10$, e si chiamano *logaritmi ordinarj*, questa parte fa conoscere in qual ordine d' unità cada

---

0,001 fino a 0,009; da 0,0001, fino a 0,0009, e che potremo comporre la Tavola seguente.

Log.	Numeri Natur.	Log.	Numeri Natur.
0,9	7,943282347	0,00009	1,000207254
8	6,309573445	8	1,000184224
7	5,011872336	7	1,000161194
6	3,981071706	6	1,000138165
5	3,162277660	5	1,000115136
4	2,511886432	4	1,000092106
3	1,995262315	3	1,000069080
2	1,584893193	2	1,000046053
1	1,258925412	1	1,000023026
0,09	1,230268771	0,000009	1,000020724
8	1,202264435	8	1,000018421
7	1,174897555	7	1,000016118
6	1,148153621	6	1,000013815
5	1,122018454	5	1,000011513
4	1,096478196	4	1,000009210
3	1,071519305	3	1,000006908
2	2,047128548	2	1,000004605
1	1,023292992	1	1,000002302
0,009	1,020939484	0,0000009	1,000002072
8	1,018591388	8	1,000001842
7	1,016248694	7	1,000001611
6	1,013911386	6	1,000001381
5	1,011579454	5	1,000001151
4	1,009252886	4	1,000000921
3	1,006931669	3	1,000000690
2	1,004615794	2	1,000000460
1	1,002305238	1	1,000000230
0,0009	1,002074175	0,00000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382506	6	1,000000138
5	1,001151956	5	1,000000115
4	1,000921459	4	1,000000092
3	1,000691015	3	1,000000069
2	1,000460623	2	1,000000046
1	1,000230285	1	1,000000023

il numero, di cui abbiamo il logaritmo. Tutti i logaritmi dei numeri tra 1, e 10 cadendo tra 0,

---

Per mezzo di questa Tavola troveremo il logaritmo d' un numero qualunque, dividendolo per 10 un numero di volte sufficiente. Affine d'ottener, per esempio, quello di 2549, divideremo in primo luogo questo numero per $(10)^3$, oppure 1000, ch' è la più gran potenza di 10, che desso possa contenere, ed avremo

$$2549 = (10)^3 \times 2{,}549 ;$$

poi cercherem nella Tavola la potenza di 10 immediatamente al disotto di 2,549, troveremo

$$(10)^{0{,}4} = 2{,}511886432,$$

dividendo 2,549 per quest' ultimo numero, conseguiremo

$$2{,}549 = (10)^{0{,}4} \times 1{,}014775177.$$

Cercando di nuovo nella Tavola la potenza di 10 immediatamente al disotto di 1,014775177, troveremo

$$(10)^{0{,}006} = 1{,}013911386 ;$$

poi dividendo per questo numero il quoziente precedente, 1,014775177, avremo un terzo quoziente

1,000851742.

Continueremo a operare in questa maniera fino a che non siamo arrivati a un quoziente, il quale non differisca dall' unità che nell' ordine dei decimali, che ci siam proposti di trascurare.

Risguardando quì il terzo come eguale all' unità, il numero proposto sarà decomposto in fattori, i quali saranno delle potenze di 10, poichè avremo

$$2549 = (10)^3 \times (10)^{0{,}4} \times (10)^{0{,}006} = (10)^{3{,}406},$$

dal che rendesi manifesto che 3.406 è il logaritmo del numero 2549. Spingendo le divisioni fino al numero di 7, troveremo che questo logaritmo è 3.406369.

La medesima Tavola serve ancora più facilmente per trovar un numero col mezzo del suo logaritmo: eccone quì un esempio.

Sia 2,547 il logaritmo dato; il numero cercato sarà

e 1, hanno necessariamente o per *caratteristica*: tutti quelli dei numeri compresi tra 10, e 100 hanno 1; tutti quelli dei numeri compresi tra 100, e 1000, han 2: in generale, *la caratteristica* d'un logaritmo ha tante unità quante cifre ha il numero proposto men una.

246. Un'osservazione non meno importante è questa, che i logaritmi dei numeri, i quali son decupli gli uni degli altri, hanno la medesima parte decimale: per esempio,

54360 ha per log. 4.73352794,
5436 3,73352794,
543,6 2,73352794,
54,36 1,73352794,
5,436 0,73352794;

poichè ciascuno di questi numeri essendo il quoziente di quello, che lo precede, diviso per 10, il logaritmo dell'uno s'ottiene togliendo un'unità dalla caratteristica dell'altro (241, 242).

247. Dietro a ciò, che è stato detto nel n.° 240, i logaritmi dei numeri frazionarj son negativi nell'ipotesi attuale, e si deducono facilmente da

---

$(10)^{2,547} = (10)^2 \times (10)^{0,5} \times (10)^{0,04} \times (10)^{0,007}$;

desso sarà dunque eguale al prodotto dei numeri

$(10)^2 = 100$
$(10)^{0,5} = 3,162277660$
$(10)^{0,04} = 1,096478196$
$(10)^{0,007} = 1,016248694$

presi nella Tavola precitata; ed avremo in conseguenza

$2,547 = \text{l. } 352,357.$

Il Signor *Dodson* ha pubblicata in Inghilterra, sotto il titolo d'*Anti-logarithmiccanon*, una Tavola della medesima specie di quella quì esposta, ma molto più estesa, e il cui oggetto è di far trovare a qual numero corrisponde un logaritmo dato.

quelli dei numeri intieri, osservando che una frazione rappresenta il quoziente della divisione del numeratore pel denominatore. Quando il numeratore è minor del denominatore il suo logaritmo è pure più piccolo di quel del denominatore, ed in conseguenza, togliendo l'ultimo dal primo, avremo un resto negativo.

Affin d'ottenere il logaritmo della frazione $\frac{1}{2}$, per esempio, toglieremo da 0, ch'esprime il logaritmo di 1, la frazione 0,3010300, la qual rappresenta quello di 2, ed otterremo

$$-0,3010300.$$

Togliendo da 0 il numero 1,3010300, ch'è il logaritmo di 20, avremo il logaritmo di $\frac{1}{20}$ eguale a

$$-1,3010300;$$

il logaritmo di 3 essendo 0,4771213, quello di $\frac{2}{3}$ sarà

$$0,3010300 - 0,4771213 = -0,1760913.$$

248. Dalla maniera, mediante la quale si ottengono i logaritmi delle frazioni, fatta astrazione dal loro segno, si vede ch' essi appartengono (241) al quoziente della divisione del denominatore per il numeratore, e corrispondono in conseguenza al numero, per il quale bisognerebbe dividere l'unità, onde ottenere la frazione proposta. Difatto $\frac{2}{3}$, per esempio, può esser posto sotto la forma $\frac{1}{\frac{3}{2}}$, e $l\frac{2}{3} = l3 - l2 = 0,1760913$.

Sarebbe poco comodo, per trovare il valore della frazione, alla quale appartiene un logaritmo negativo dato, cercare il numero, a cui corrisponde allorchè desso è positivo; poichè bisognerebbe effettuare la divisione dell'unità per questo numero; ma, se si toglie questo logaritmo da 1, 2, 3, ec. unità, il resto apparterrà al numero, il quale

esprime la frazione cercata allorchè si converte in decimali, perocchè questa sottrazion corrisponde alla divisione dei numeri 10, 100, 1000, ec. per il numero del logaritmo proposto.

Sia, per esempio, — 0,3010300: se, non avendo riguardo al suo segno, si tolga questo logaritmo da 1, o sivvero da 1,0000000, il resto 0,6989700 corrispondendo a 5 fa vedere che la frazione cercata è eguale a 0, 5, poichè abbiam supposto l'unità composta di 10 parti.

Se, allorchè cercasi il logaritmo d'una frazione, si concepisca subito l'unità formata di 10, oppure di 100, ovvero di 1000, o sivvero ec. parti, oppure, il che torna lo stesso, se si aumenti la *caratteristica* del logaritmo del numeratore d'un numero d'unità sufficiente perchè se ne possa fare la sottrazione di quello del denominatore, avremo in siffatta maniera un logaritmo positivo, il quale potrà impiegarsi in luogo di quello, che abbiamo indicato più alto.

Affine di porre dell'uniformità nei calcoli, si aumenta il più spesso di 10 unità la *caratteristica* del logaritmo del numeratore. Relativamente alla frazione $\frac{2}{3}$, per esempio, si ha

$$10,3010300 - 0,4771213 = 9,8239087.$$

È facil vedere che questo logaritmo sorpassa di 10 unità il logaritmo negativo — 0,1760913, e che in conseguenza, se lo sommeremo con altri, introdurremo 10 unità di più nel resultato; ma la sottrazione di queste 10 unità non dee contarsi per un'operazione particolare, ed allorchè dessa sarà effettuata, avremo eseguita nel tempo medesimo quella di 0,1760913. Difatto, sia N il numero, al quale si aggiunge il logaritmo positivo 9,8239087; il resultato dell'operazione sarà rappresentato da

$$N + 10 - 0{,}1760913;$$

e se si toglie 10, avrem solamente

$$N - 0{,}1760913.$$

Dopo ciò, che precede, si cangia la sottrazione in addizione impiegando, in luogo del numero da sottrarsi, il suo *complemento aritmetico*, e vale a dir quel che resta allorchè togliesi questo numero da uno dei numeri 10, 100, 1000, ec.; resultato, il quale s'ottiene togliendo da 10 l'unità semplici del numero proposto, e tutte le altre da 9: ciò fatto, si aggiunge questo *complemento* al numero, dal quale bisognerebbe sottrarre il proposto, e si toglie dalla somma un'unità dell'ordine stesso, sul quale abbiam preso il *complemento*.

È evidente che, se il *complemento* sia ripetuto più volte, bisognerà togliere, dopo l'addizione, tante unità dell'ordine, sul quale è stato preso il *complemento*, quante unità vi sono nel suo moltiplicatore; e per la stessa ragione, se s'impiegano più *complementi*, sarà necessario di togliere per ciascuno le unità nell'ordine, sul quale è stato preso, o sivvero tante unità quanti sono i *complementi*, se tutti sien presi sopra una stessa unità.

Qualche volta questa sottrazione non può effettuarsi; il resultato allora si è il *Complemento Aritmetico* del logaritmo d'una frazione, e corrisponde nelle *Tavole* all'espressione di questa frazione convertita in decimali. Quando restano ancora 10 unità da togliersi dalla *caratteristica*, ch'è il caso il più ordinario, è lo stesso come se si fosse moltiplicato per 10000000000 il numeratore della frazione cercata, ond'effettuarne la divisione per il denominatore; la *caratteristica* del logaritmo del quoziente fa conoscere qual sia l'or-

dine il più elevato delle unità, che contiene questo quoziente, rapporto a quelle del dividendo. Nel 9,8239087 la *caratteristica* 9 dimostra che il quoziente debbe aver una cifra di meno del numero, per il quale si è moltiplicata l'unità; ed in conseguenza se, per ridurre il quoziente al suo vero valore, si separano 10 cifre decimali, la sua prima cifra significativa verso la sinistra sarà delle decime parti; non si troverebbero che delle centesime, delle millesime, ec. pei numeri, i cui *complementi aritmetici* avessero le *caratteristiche* 8, 7, ec.

249. Ciò, che abbiam detto sul Sistema dei logaritmi, nel quale $a = 10$, contiene i principj generali necessarj per l'intelligenza delle Tavole, le quali son quasi tutte precedute da un' Istruzione relativa alla loro disposizione particolare, ed alla maniera di servirsene, alla qual Istruzione rimando i Lettori. Io indicherò loro frattanto le *Tavole* di *Callet* (edizion stereotipa), e quelle di *Borda*, come quelle che sono estesissime, e comodissime.

250. Quando si ha il logaritmo d'un numero y per un valore particolare di a, o sivvero per una base particolare, è facile d'ottenere il logaritmo del medesimo numero in qualunque altro Sistema. Difatto, se si ha $a = y$, per un' altra base A avremo $A^X = y$, X essendo differente da x; ricaveremo da ciò $A^X = a^x$. Prendendo i logaritmi relativamente al sistema, la cui base è a, otterremo

$$l\, A^X = l\, a^x:$$

ora, $l\, a^x = x$ per ipotesi, e $l\, A^X = X\, l\, A$ (241): dúnque $X\, l\, A = x$, oppure $X = \frac{x}{l\, A}$; ma considerando A come base, X sarà il logaritmo di y nel

Sistema relativo a questa base: se dunque s' indica quest' ultimo per $\mathrm{L}y$, affin di distinguerlo dall' altro, avremo

$$\mathrm{L}y = \frac{\mathrm{l}y}{\mathrm{l\,A}},$$

e *troveremo il logaritmo di* y *nel secondo Sistema dividendo il suo logaritmo preso nel primo per il logaritmo della base del secondo Sistema.*

L' equazion precedente somministra pure $\frac{\mathrm{l}y}{\mathrm{L}y} = \mathrm{l\,A}$; il che fa vedere che qualunque sia il numero y, esiste tra i logaritmi $\mathrm{l}y$, e $\mathrm{L}y$ un rapporto invariabile rappresentato da $\mathrm{l\,A}$.

251. In qualunque sistema si sia, il logaritmo di 1 è sempre *zero*; poichè, qualunque sia a, abbiam sempre $a^{\circ} = 1$. I logaritmi essendo suscettibili d' accrescimento indefinito, si dice che dessi divengono infiniti nel medesimo tempo che i numeri; e siccome, allorchè y è un numero frazionario, si ha $y = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$, si vede che più y diminuisce, più x dee aumentare negativamente, ma che tuttavia non si può mai assegnare per x un numero, il quale renda x esattamente nullo. Tale è il senso, nel quale bisogna intendere che *il logaritmo di zero è eguale all' infinito negativo*, così come trovasi in molte Tavole.

252. Vado adesso a dare alcuni esempj dell' uso, che si può fare dei logaritmi nella valutazione numerica delle formule. Segue dal num.° 241, e dalla definizione dei logaritmi, che dà l' equazione $a^{\mathrm{l}y} = y$, che

$$\mathrm{l}(\mathrm{A\,B}) = \mathrm{l\,A} + \mathrm{l\,B}, \quad \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right) = \mathrm{l\,A} - \mathrm{l\,B},$$

$$\mathrm{l\,A}^m = m\,\mathrm{l\,A}, \qquad \mathrm{l\,A}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,\mathrm{l\,A}.$$

Applicando queste regole alla formula

$$\frac{A^2\sqrt{B^2-C^2}}{C\sqrt[5]{D^3EF}},$$

la quale è assai complicata, troveremo

$$l(A^2\sqrt{B^2-C^2}) = l[A^2\sqrt{(B+C)(B-C)}] = 2lA+\tfrac{1}{2}l(B+C)+\tfrac{1}{2}l(B-C),$$

$$l(C\sqrt[5]{D^3EF}) = lC+\tfrac{3}{5}lD+\tfrac{1}{5}lE+\tfrac{1}{5}lF,$$

ed in conseguenza

$$l\left(\frac{A^2\sqrt{B^2-C^2}}{C\sqrt[5]{D^3EF}}\right) =$$

$$2lA+\tfrac{1}{2}l(B+C)+\tfrac{1}{2}l(B-C)-lC-\tfrac{3}{5}lD-\tfrac{1}{5}lE-\tfrac{1}{5}lF.$$

Se si prendessero i *complementi aritmetici* di lC, $\frac{3}{5}lD$, $\frac{1}{5}lE$, $\frac{1}{5}lF$, e s'indicassero per C', D', E', F', in luogo del resultato precedente avrebbesi

$$2lA+\tfrac{1}{2}l(B+C)+\tfrac{1}{2}l(B-C)+C'+D'+E'+F',$$

osservando di togliere dalla somma tante unità dell'ordine, sul quale abbiam presi i *complementi*, quanti sono i *complementi*, e vale a dir 4. Allorchè sarem pervenuti al logaritmo della formula proposta, le Tavole faran conoscere il numero, al quale questo logaritmo appartiene, e qual'è il valore cercato.

253. L'uso il più frequente dei logaritmi è quello, che se ne fa per trovare il quarto termine d'una proporzione. È manifesto che, se $a : b :: c : d$, avremo

$$d = \frac{bc}{a}, \quad \text{di dove} \quad ld = lb + lc - la,$$

vale a dire, che *il logaritmo del quarto termine*

cercato è eguale alla somma dei logaritmi dei due medj diminuita del logaritmo dell'estremo cognito, o sivvero *alla somma dei logaritmi dei medj più il complemento aritmetico del logaritmo dell'estremo cognito*.

254. Se si prendono i logaritmi di ciascun membro dell' equazione $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, la quale esprime il carattere della proporzione, avremo

$$1b - 1a = 1d - 1c \text{ (252)},$$

dalla quale resulta che i quattro logaritmi

$$1a . 1b : 1c . 1d$$

formano un' equidifferenza (223).

La serie dell' equazioni

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \text{ ec. (231)}$$

conduce parimente a

$$1b - 1a = 1c - 1b = 1d - 1c = 1e - 1d \text{ ec.},$$

e se ne conclude che alla progression per quozienti

$$\div a : b : c : d : e, \text{ ec.}$$

corrisponde la progressione per differenze

$$\div 1a . 1b . 1c . 1d . 1e, \text{ ec.},$$

e che in conseguenza *i logaritmi dei numeri in progression per quozienti sono in progressione per differenze*.

255. Se s' avesse l' equazione $b^z = c$, si risolverebbe facilmente col mezzo dei logaritmi; poichè $1b^z$ essendo eguale a $z1b$, avrebbesi $z1b = 1c$, ed in conseguenza $z = \frac{1c}{1b}$. L' equazione $b^{\frac{z}{c}} = d$ si tratterebbe nella stessa maniera; facendo primieramente $c^z = u$, verrebbe

$b^u = d$, $u \, l\, b = l\, d$, $u = \frac{l\, d}{l\, b}$, o sivvero $c^z = \frac{l\, d}{l\, b}$;

prendendo nuovamente i logaritmi, troverebbesi

$$z \, l\, c = l \left(\frac{l\, d}{l\, b} \right) = l\, l\, d - l\, l\, b, \text{ e } z = \frac{l\, l\, d - l\, l\, b}{l\, c}.$$

In quest' ultima espressione $l\, l\, b$ indica il logaritmo del logaritmo di b, e s' ottiene considerando quest' ultimo logaritmo come un numero. Le quantità b^z, b^{c^z}, e tutte quelle, che ne derivano, si chiamano *esponenziali*.

Problemi relativi all' interesse del danaro.

256. La Teoria delle progressioni per quozienti, e quella dei logaritmi trovano la loro applicazione nelle speculazioni concernenti l' interesse del danaro. Per intendere ciò, che vado ad esporre sopra questo soggetto, bisogna sapere che i vantaggi, che procura una somma di denaro a quel, che la impiega, tanto al cambio del commercio, che a far eseguir dei lavori produttivi, son tanto più grandi quante più sono le volte che desso può rinnuovar questi cambi, o sivvero moltiplicare questi lavori. Segne da ciò che un uomo, il quale prenda una somma di danaro per farla fruttare, debbe, rendendo questa somma al fine d' un certo tempo, unirvi una retribuzione per indennizzare il prestatore dei vantaggi, che desso sarebbesi procurati se gli avesse impiegati egli stesso. Tal' è l' idea, che dobbiam farci dell' interesse del denaro. Per determinarlo, si paragonano tutte le somme a quella di 100 franchi presa per unità, e si conviene di ciò che dee fruttare quest' ultima alla fine d' un tempo

dato, per esempio d' un anno. Non è quì il luogo d' esporre le considerazioni, che in ciascun genere di speculazione fanno alzare, ed abbassare il frutto del denaro; desse non possono entrare che negli *Elementi d' Aritmetica politica, e commerciale*, i quali debbon essere preceduti da quelli del *Calcolo delle probabilità*, ed il mio oggetto in ciò, che segue, non è che di risolvere alcuni dei problemi, i quali offrono le progressioni per quozienti.

Supporrò, in generale che siasi convenuto di dare al fine d' anno per la somma 1 un' interesse indicato da r; r essendo una frazione: è evidente che l' interesse della somma 100 nel medesimo tempo sarà $100\,r$; che quello d' una somma qualunque a sarà espresso da $a\,r$; e, se s' indica quest' ultimo per α, avremo

$$\alpha = a\,r.$$

Mediante questa relazione, è facile trovar il frutto per una somma qualunque allorchè si ha quello, che danno 100. franchi, o sivvero dà qualunque altra somma in un tempo cognito; questo Problema si chiama *calcolo d' interesse semplice*.

257. Ma, se il prestatore in vece di ritirar ciascun anno il frutto del capitale, che desso ha guadagnato, lo lascia in mano al debitore per farlo fruttare unitamente alla somma, o sorte primitiva nell' anno seguente, al fine di quest' anno il capitale avrà acquistato un valore, il qual troveremo nel modo seguente: il capital primitivo essendo a, aumentato dell' interesse $a\,r$, diverrà, alla fine del primo anno,

$$a + a\,r = a\,(1 + r).$$

Se adesso si faccia

$$a\,(1 + r) = a',$$

il frutto della somma a' per un anno essendo $a'r$, quello della somma $a(1+r)$ sarà, per un secondo anno, $ar(1+r)$; e nello stesso modo che al fine del primo anno il capitale a aumentato del frutto, che dovea dare, è divenuto $a(1+r)$ il capitale a' diverrà alla fine del secondo anno

$$a'(1+r)=a(1+r)^2=a''.$$

Se il dator del denaro non ritiri ancora il capitale a'' alla fin di quest'anno, ed egli lo lasci per un terzo anno, alla fine di questo gli sarà dovuto, secondo ciò che precede,

$$a''(1+r)=a(1+r)^3=a'''.$$

Si vede facilmente che dopo il quarto anno a''' sarà cangiato in

$$a'''(1+r)=a(1+r)^4,$$

e così di seguito, e che in conseguenza la somma data a frutto in principio, e le somme da rendersi alla fine del primo, del secondo, del terzo, del quarto, ec. anno formano questa progression per quozienti

$$\div a : a(1+r) : a(1+r)^2 : a(1+r)^3 : a(1+r)^4 : \text{ec.},$$

di cui il quoziente è $1+r$, ed il termine generale

$$a(1+r)^n=A,$$

il numero n indicando quello degli anni decorsi dall'istante dell'imprestito.

Sia, per esempio, la quota del frutto al 5 per 100, vale a dire che per 100 franchi prestati per un anno debbasi rendere 105 franchi: abbiam dunque

$100r=5$, oppure $r=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$, e $1+r=\frac{21}{20}$.

Se si volesse sapere ciò che diviene la somma a, abbandonata, così come suol dirsi, per 25 anni, avrebbesi allora

$$n = 25, \quad \text{e} \quad a\left(\frac{21}{20}\right)^{25}$$

in vece della somma primitiva. La 25.ma potenza di $\frac{21}{20}$ valutasi prontamente per mezzo dei logaritmi, poichè si ha (252)

$$l\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 25\, l\,\frac{21}{20} = 25\,(l21 - l20) = 0{,}5297322\,;$$

il che somministra

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 3{,}386 \quad \text{incirca}, \quad A = 3{,}386\, a\,;$$

e da ciò si fa manifesto che 1000 franchi prestati nel modo indicato diverranno 3386 franchi alla fine di 25 anni, comprendendovi i frutti, ec.

Se il cambio durasse 100 anni, troverebbesi

$$A = a\left(\frac{21}{20}\right)^{100} = 131\, a$$

incirca; così 1000 franchi produrrebbero, dopo questo spazio di tempo, una somma di 131000 franchi all'incirca. Questi esempj dimostrano con qual rapidità i fondi s'aumentano per l'accumulazione degli interessi composti.

258. L'equazione

$$A = a(1 + r)^n$$

dà luogo a quattro Problemi: il primo conoscendo a, r, e n, trovar A, si presenta ogni qualvolta si cerca ciò che diviene il capitale dopo un numero n d'anni; io n'ho già dato un esempio.

Il secondo, conoscendo a, A, e n trovare r, conduce a conoscere la quota del frutto per mezzo della somma primitiva, di quella che è stata

rimborsata, e del tempo che l'imprestito ha durato; si ha in questo caso

$$1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

Il terzo, conoscendo A, r, e n trovar a, è nel quale s'ottien

$$a=\frac{A}{(1+r)^n},$$

ha per oggetto di determinare il capitale, che bisogna porre per aver diritto dopo un numero n d'anni a una somma A.

Il quarto, conoscendo A, a, e r trovare n, non può risolversi che mediante i logaritmi (238, 252). Prendendo quello di ciascun membro dell'equazion proposta, s'ottiene

$$lA=la+n\,l(1+r),$$

d'onde

$$n=\frac{lA-la}{l(1+r)}.$$

Con quest'nltimo trovasi in quanti anni il capitale a debb'aver prodotto una somma A.

Per darne un esempio, suppongo che si cerchi il tempo, ch'è necessario perchè la somma primitiva raddoppisi, la quota del frutto essendo sempre al 5 per 100; avremo

$$A=2a,\quad lA=la+l2,$$

ed in conseguenza

$$n=\frac{l2}{l\frac{21}{20}}=\frac{l2}{l21-l20}=\frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}=14{,}21$$

all'incirca.

259. Il Problema seguente è uno dei più complicati, che si propongano ordinariamente sopra questo argumeuto. Supponesi che il dator del denaro ponga ciascun anno una nuova somma, ch'egli unisce al capital di quest'anno, e ciò per un numero n di anni; si domanda qual' è alla fine dell' ultimo il totale di tutte queste somme accumulate coi loro frutti composti. Sieno a, b, c, d, ... k le somme poste il primo, il secondo, il terzo, il quarto, ec. anno; la somma a restando nelle mani del debitore per un numere n di anni diverrà

$$a(1+r)^n;$$

la somma b, la quale non resta che $n-1$ anni, si cangerà in

$$b(1+r)^{n-1};$$

la somma c data per $n-2$ anni solamente diverrà

$$c(1+r)^{n-2};$$

e così dell' altre; finalmente l' ultima quantità k, la quale non è impiegata che per un anno, non dà che

$$k(1+r):$$

avremo dunque

$$A=a(1+r)^n+b(1+r)^{n-1}+c(1+r)^{n-2}....+k(1+r).$$

Calcolando ciascun termine del secondo membro separatamente, avremo il valore di **A**.

L' operazione molto si semplicizza allorchè

$$a=b=c=d....=k;$$

poichè in questo caso si ha

$$A=a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}...+a(1+r):$$

il secondo membro di quest'equazione forma una progression per quozienti, il cui primo termine è

$a(1+r)$, l'ultimo $a(1+r)^n$, il quoziente $1+r$, e la cui somma è in conseguenza

$$\frac{a(1+r)^{n+1}-a(1+r)}{r}\ (232):$$

avrem dunque allora

$$A=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}.$$

Quest'equazione presenta pure quattro Problemi corrispondenti a quelli, che ho enunciati sull'equazione

$$A=a(1+r)^n.$$

260. I Fondi, che si chiamano *annualità*, sono gl'inversi del precedente; è il debitore, che dimette o sconta un capitale coi suoi frutti in diversi pagamenti fatti in dei termini egualmente distanti. I pagamenti effettuati dal debitore avanti l'epoca del rimborso posson essere considerati come anticipazioni fatte al creditore in conto di questo rimborso, il valor delle quali dipende dal tempo, che passa tra una di quest'epoche, e l'altra. Così, indicando ciascun pagamento per a, il primo pagamento, che ha luogo $n-1$ anni avanti lo spirar dell'ultimo termine, rapporto a quest'epoca equivale necessariamente ad $a(1+r)^{n-1}$; il secondo, riportato all'istess'epoca, non vale che $a(1+r)^{n-2}$; il terzo, $a(1+r)^{n-3}$; e così degli altri fino all'ultimo, il quale non ha che il valore di a. Ma da un altro canto la somma data a cambio essendo rappresentata da A, diverrà nelle mani del debitore dopo n anni un capitale $A(1+r)^n$, che dovrà esser eguale a tutte le anticipazioni riunite, che il creditore ha ricevute da lui: avremo dunque

$$A(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-3}\ldots+a,$$

ovvero, calcolando la somma della progressione, la quale forma il secondo membro,

$$A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r};$$

equazione, nella quale possiam prendere alternativamente per incognita la quantità A, ch'io chiamerò il *prezzo* dell'*annualità*, perchè è la somma, che dessa rappresenta, la quantità a, ch'è la *quota* dell'*annualità*, la quantità r, ch'è la quota del frutto, e finalmente la quantità n, che esprime la durata dell'*annualità*. Per trovare quest'ultima, bisogna necessariamente ricorrere ai logaritmi: si libera in primo luogo $(1+r)^n$, il che dà

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar},$$

e prendendo i logaritmi, s'ottiene

$$n\,l(1+r) = l\,a - l(a - Ar),$$

da cui

$$n = \frac{l\,a - l(a - Ar)}{l(1+r)}.$$

261. Per mostrar l'uso delle formule suddivisate, le applicherò al Problema seguente.

Trovar qual somma bisogna dare annualmente per estinguere in 12 *anni un debito di* 100 *franchi coi suoi frutti per questo tempo, il frutto annuo essendo al* 5 *per* 100.

In questo esempio conosconsi le quantità

$$A = 100, \quad n = 12, \quad r = \frac{1}{20},$$

e si cerca l'*annualità* a; l'equazione

$$A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}$$

essendo risoluta per rapporto alla lettera a, somministra

$$a = \frac{A\,r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Bisogna mettere in quest' espressione i valori delle lettere A, r, e n, e per maggior facilità calcolare in primo luogo mediante i logaritmi la quantità $(1+r)^n$, la quale riducesi a $(\frac{21}{20})^{12}$, e troveremo

$$(\tfrac{21}{20})^{12} = 1{,}79586.$$

Per mezzo di questo valore otterremo

$$a = \frac{100 \cdot \frac{1}{20} \cdot 1{,}79586}{1{,}79586 - 1} = \frac{5 \cdot 1{,}79586}{0{,}79586},$$

e calcolando l' ultima espressione tanto immediatamente che col mezzo dei logaritmi, troveremo

$$a = 11{,}2826.$$

Sarà dunque necessaria un' *annualità* di 11$^{fr.}$, 28 per estinguere in 12 anni il capitale 100, la quota annuale del frutto essendo al 5 per 100.

262. Maggiori particolarità rispetto a questi Problemi passerebbero i limiti, che mi sono prescritti; osserverò solamente che, per paragonare il valor di più somme rapporto a quello, il qual dee pagarle, o riceverle, bisogna ridurle alla medesima epoca, e vale a dire, cercare qual capitale desse darebbero a una stess' epoca. Un Banchiere, per esempio, dee una somma a, pagabile in n anni; per saldare il suo debito dà un effetto, il cui valore è rappresentato da b, e dee pagarsi in p anni; riportando la prima somma al momento, in cui egli eseguisce la sua operazione, essa non equivale che ad $\frac{a}{(1+r)^n}$, perchè questa debb' esser considerata come il valor primitivo

d'un capitale divenuto a dopo n anni; la somma b non equivale, per la ragione medesima, a quest' epoca che a $\frac{b}{(1+r)^p}$: la differenza

$$\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}$$

esprimerà dunque, secondo che dessa sarà positiva o negativa, ciò che dee dare o ricevere il Banchiere in regresso del suo cambio; e se questo regresso non potesse pagarsi che in un numero q d'anni, indicando per c il suo valore al momento dell'operazione, diverrebbe

$$c(1+r)^q;$$

di maniera che sarebbe equivalente a

$$\left(\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}\right)(1+r)^q = a(1+r)^{q-n} - b(1+r)^{p-q}$$

Le somme $a, b, \ldots k$, nel n.° 259, sono state tutte ridotte all'epoca, in cui doveva pagarsi la somma A; e nel num.° 260 ciascuno dei pagamenti, come pure la somma A, sono stati riportati all'epoca, alla quale l'*annualità* dovea terminarsi.

FINE.

AGGIUNTA

Nota indicata nella pagina 116.

Nei num.i 66, o 75 ho interpetrate le soluzioni negative mediante l'esame dell' equazioni, ch' esse verificano immediatamente, conforme io n'aveva usato più alto; e questo mezzo m' è sempre sembrato esatto, perchè si tratta solamente di far vedere che queste soluzioni hanno un senso ragionevole, poichè desse risolvono dei Problemi analoghi al proposto: ma vi sono spesso più maniere di formar questi Problemi, e la seguente, che mi ha comunicata il Sig. *Français*, Geometra distinto, Professore della *Scuola d' Artiglieria* di Magonza mi è sembrata più semplice di quella, che si trova in questi *Elementi*.

„ Egli pensa che si debba allontanare dall' enunciato
„ del Problema del n.° 63. l'idea della partenza dei cor-
„ rieri, col supporli in viaggio fin da un tempo indefini-
„ to, e che in conseguenza bisognerebbe impostarlo nel
„ modo seguente: *Due corrieri seguono il medesimo viag-*
„ *gio nel medesimo senso* C'ABC (pag. 104): *dopo ch' essi*
„ *hanno corso ciascuno per un tempo qualunque, uno si*
„ *trova in* A *nel momento che l' altro si trova in* B: *si co-*
„ *noscono le loro celerità, e la distanza* AB: *si dimanda*
„ *in qual punto del loro corso essi s' incontreranno*? „

Quest' enunciato conduce alla medesima equazione che quello del n.° 65., ma „ allorchè abbiamo stabi-
„ lita la continuazione del movimento, la soluzion
„ negativa si spiega senza che sia necessario di can-
„ giare la direzione d' un dei corrieri. Infatti, poichè
„ il lor movimento non ha avuto principio dai punti
„ A, e B, ma che ambedue prima dell' istante, nel
„ qual si suppongono arrivati a questi punti, s' era-
„ no di già mossi nella stessa maniera per un tempo
„ indefinito, andando da C' verso B, è facile conce-
„ pire che il corriere, che in questo punto è avanti
„ a quello, che allora è in A, il quale va meno pre-
„ sto, ha dovuto in una cert' epoca trovarsi dietro a
„ questo, e incontrarlo prima del suo arrivo al punto
„ A. Il segno — indica allora (come nell' applica-
„ zione dell' Algebra alla Geometria) che bisogna
„ prendere la distanza AR' nel senso opposto alla di-
„ stanza AR, che si è riguardata come positiva. Il
„ cangiamento da farsi nell' enunciato, perchè la so-
„ luzion negativa divenga positiva, riducesi a stabi-

„ lire che i corrieri hanno dovuto incontrarsi prima „ d'arrivare al punto A in vece d'incontrarsi dipoi„.

Difatto, quando si pone il punto R′ tra A, e C′, in luogo di porlo tra A, e B, si trova $AB = BR' - AR'$; dal che ne resulta l'equazione $y - x = a$ in luogo di $x - y = a$, la quale s'era ottenuta in principio; nè v'è bisogno di cangiare il segno di c, la seconda equazione restando sempre $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

Il Signor *Français* applica, non meno felicemente, queste considerazioni al caso del n.° 75, considerando i corrieri come dei mobili sottomessi ad un moto continuo principiato da un tempo indefinito. Esso enuncia il Problema nel modo, che segue: „ *Due mobili si* „ *muovono uniformemente sulla medesima retta* CB „ (pag. 114), *uno nella direzione* BC, *l'altro nella* „ *direzione* CB, *con delle celerità date; quello, che* „ *muovesi nel primo senso, si trova in* B *un numero co-* „ *gnito d'ore prima che l'altro sia pervenuto ad* A: *si* „ *dimanda in qual punto della retta indefinita* BC *si* „ *farà il loro incontro?*

„ La soluzione $x = -48$ chiliometri vuol dire che i „ due mobili si sono incontrati nel punto R prima „ che quello, il quale viene da C verso B, fosse arri- „ vato al punto A, e che il secondo, il quale va da B „ a C, fosse nel punto C dov'egli si trova, quando „ l'altro è nel punto A.„

La posizione assegnata al punto R si verifica osservando che ne resulta $AC = BC - AB = cd - a$, in luogo di $a + cd$, che s'era ottenuto in principio (pag. 115), ed in conseguenza $\frac{x}{b} = \frac{cd - a - x}{c}$; equazione, la qual somministra $x = 48$.

In questa maniera non v'è alcun rovesciamento da fare nel senso del moto. In verità le circostanze materiali del Problema sono cangiate, e com'io l'ho detto più alto, ciò prova ch'esistono più Problemi fisici corrispondenti alle medesime relazioni matematiche; ma gli enunciati di sopra hanno il vantaggio di non ferire la legge di continuità, e s'avvicinan così alla considerazion delle linee, la quale dipinge nella maniera più semplice, e più generale le circostanze del cangiamento dei segni delle grandezze. (Vedete il *Trattato elementare di Trigonometria* e d'*Applicazion dell'Algebra alla Geometria*.)

$$x^3+3x^2y+3y^2x-98 \;\big|\; x^2+4xy-2y^2-10$$
$$-x^3-4x^2y+2y^2x+10x \;\big|\; x-y$$
$$-x^2y+5y^2x+10x-98$$
$$+x^2y+4y^2x-2y^3-10y$$

1.° Resto $\ldots\ldots +(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$

$$x^2+4xy-2y^2-10 \;\big|\; (9y^2+10)x-2y^3-10y-98$$

ovvero $(9y^2+10)x^2+36xy^3-18y^4-110y^2-100 \;\big|\; (9y^2+10)x-2y^3-10y-98$
$$+40xy$$
$$-(9y^2+10)x^2+2xy^3+98x \;\big|\; x+38y^3+50y+98$$
$$+10xy$$
$$+38xy^3-18y^4-110y^2-100$$
$$+50xy$$
$$+98x$$

ovvero $(38y^3+50y+98)(9y^2+10)x-162y^6-1170y^4-2000y^2-1000$
$$-(38y^3+50y+98)(9y^2+10)x+76y^6+480y^4+3920y^3+500y^2+5880y+9604$$

2.° Resto $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -86y^6-690y^4+3920y^3-1500y^2+5880y+8604$

Dividendo tutti i termini di questo resto per 2, rendendo il primo termine positivo ed eguagliandolo a zero, s' ottiene

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0.$$