ELEMENTI
D'EUCLIDE
PARTE SECONDA.

Cav.re Paolo Guid Galileo 1614

A

QUINTO LIBRO
DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
OVVERO
SCIENZA UNIVERSALE DELLE PROPORZIONI
SPIEGATA COLLA DOTTRINA
DEL GALILEO

Con nuov' ordine diſteſa, e pubblicata da Vincenzio Viviani ultimo ſuo Diſcepolo.

IN FIRENZE. 1718.

Pe'l Carlieri all' Inſegna di S. Luigi.
Con licenza de' Superiori.

SERENISS. E REVERENDISS.

SIG. PRINCIPE
CARDINALE
LEOPOLDO
DE' MEDICI.

NELL' offerire umilmente quest' Opera all' ALTEZZA V. R. convien pur che mi vaglia ancor' io del concetto, ormai

comuniſſimo a gli Scrittori, il quale è, di non poter nè dover dedicar i lor libri, che a chi e' s'eleggono di dedicargli. Vero è che ciò, che a molti ſuggeriſce l'adulazione, a me lo detta la verità, e la giuſtizia, la quale m'obbliga a reſtituir nelle mani di V. A. quel frammento Matematico del gran Galileo mio riverito Maeſtro, che gia dalle medeſime ricevei. Di queſto dunque, che mi ha porto materia di far il preſente nuovo diſteſo del quinto libro d' Euclide, ſpero che l'A. V. non ſia per iſdegnar il principale argomento (ben chè improprio, come d'Elementi, al ſuo grand' Intelletto profondato nelle cognizioni più nobi-

li) poichè trattandoſi quì di Proporzioni, anche i principj di queſte debbon eſſer conſiderati per una delle più eſſenziali parti, e più degne della Geometria, la quale, dall' A. V. così altamente poſſeduta come in altri generoſamente favorita, fa che molto ben le ſia noto, che ſe colla ſola cognizione de' primi quattro Libri ſi voleſſe rilevar, e coſtruir qualcoſa nelle Matematiche, ſarebbe appunto un modellar colla polvere, ſenza arrivar mai a formar coſa conſiſtente, e maſſiccia. La Scienza delle Proporzioni (ſiami lecito dir così) è quell' Umido, che legando 'nſieme il reſto della materia, la prepara, e la con-

diziona ad ogni più esquisito lavoro, abilitandola a prender, e ritener qualunque forma di gran rilievo. Di quì è che tanti celebri Matematici, conoscendo l' importanza di essa, tentarono per varie vie di renderla esente da ogni dubbiezza, e che fino un Galileo, occupato pur a bastanza nelle sue peregrine speculazioni, la stimò non disdicevole oggetto alla sua industriosa applicazione, il che poi diede animo ancora a me d' impiegarvi intorno qualche tempo, e fatica per ridurla nella forma, che quì si vede. Resta ch' io supplichi l' A. V. R. che nel gradire, per quella poca parte, ch' io v'abbia, questo piccol tributo del

mio riverente ossequio, si compiaccia di riconoscervi ancora quello dell' Autore, il quale, siccome io mi assicuro ch' e' si sarebbe sommamente pregiato di ottenerla per Protettore di ciò, che di lui ho qui voluto indrizzarle, così godo, che in questa mia elezione e' conseguisca da me, ultimo suo Discepolo, un nuovo pegno della mia affettuosa gratitudine. E quì all' Altezza Vostra m' inchino profondamente.

Di Firenze dal mio Studio, il dì 10. d' Agosto 1674.

Di V. A. R.

Umilissimo Servidore
Vincenzio Viviani.

NO-

NOBILI GEOMETRI PRINCIPIANTI.

QUesta volta, fuor dell'uſato ſtile degli Scrittori, io m'era perſuaſo di paßarmela ſenza Proemio col ſuppoſto, che 'l detto, ed avvertito da me ſparſamente in quest' Opera poteſſe diſpenſarmi dal darvene innanzi più diſtinta notizia, la quale ho di poi per convenevole riconoſciuta.

Sono già ſcorſi venticinque anni che dal Sereniſſimo, e Reverendiſs. Sig. Principe Cardinal LEOPOLDO DE' MEDICI, io fui onorato d'una Scritura intitolata Principio della

quinta Giornata del Galileo, *presentatagli poco prima da Evangelista Torricelli, l'uno, e l'altro a bastanza celebre al Mondo per la sublimità delle loro altissime speculazioni. Di questa, ch' era di mano di esso Torricelli, (con tutto che del suo contenuto io avessi anticipata notizia) così imperfetta com' era, e quale quì vedrete, con permissione dell' Altezza Sua io mi presi copia. Conteneva Dimostrazioni del Galileo delle diffinizioni quinta, e settima del quinto Libro d' Euclide, siccome de' Conversi loro, spettanti tutte alle grandezze tanto proporzionali, che non proporzionali, colle quali dimostrazioni preteſe il Galileo d' aver rimosse le difficultà, che incontrar sogliono i principian-*

ti in dover ammetter per diffinizioni quelle, che piuttosto paiono Teoremi da dimostrarsi. E perchè in tale scrittura vien detto che, posti simili fondamenti, si sarebbe potuto poi compendiare in parte, e riordinare tutto 'l quinto Libro d' Euclide, ritrovandomi alcuni anni sono per grave indisposizione della mia testa, affatto inabile a più ardue contemplazioni, mi posi a riformare, e a distendere su le medesime Dimostrazioni del Galileo questa Scienza universale delle Proporzioni, alla qual' Opera, divertitone in quel tempo da altri affari, per soddisfar al desiderio del Sig. Conte Benedetto Porto mio amorevol Signore, e della Geometria, non men che

dell' ingenuità innamorato, ho dato ora fine, DIO lodato, con miglior ordine, e modo che ho saputo. Nè di questo io mi son contentato, perchè ho voluto ancora, col resto che quì vedrete, e che grato al certo vi sarà, pubblicarla sotto i benigni auspicj di S. A. R. (a cui per ogni conto io doveva indirizzarla) sì per assicurare al mio Galileo le sue proprie dimostrazioni, che con qualche pericolo erano andate in volta già son molti anni, sì per farle comuni a Voi bramosi d' incamminarvi senz' intoppo per la via Elementare d' una Scienza così importante, quale è questa delle Proporzioni, la quale, per mio avviso, ha tanta parte nell' invenzioni Mate-

matiche, quanta, per avventura, in virtù di ſuo proprio rivolgimento, e col maſchil vigore di ſua calorifica luce ſe ne abbia il Sole, Anima del ſuo nobil Siſtema, ch' ei con mirabili, ed incognite Proporzioni vi và perpetuamente operando.

Quello poi ch' io miſenta della validità della preſente maniera del Galileo, in comparazione delle tenute da altri Autori, i quali per altre vie han tentato, e con ſomma lode, di render più chiara queſta ſcienza, io veramente, eſſendo i paragoni mai ſempre odioſi, non ardirei pronunziare; oltre che tutto ciò ch' io addaceſſi a favor di queſta, chi non ne faceſſe riſcontro, potrebbe forſe pigliarlo come da Diſcepolo ap-

paſ-

passionato verso 'l Maestro. Non posso già contenermi di commendare quello di plausibile, che ha in se questo modo, e forse più di qualch'altro, che è l'applicar le sue dimostrazioni con assoluta considerazione a qualunque genere di grandezze, come fa Euclide, ed il conformarsi quasi in tutto con esso, e co' di lui Assiomi, senza introdurre novità maggiore che nelle diffinizioni, e nel far Teoremi dimostrati quegli, che come principj noti vengon supposti da Euclide stesso, e dagli altri Geometri suoi Seguaci: il che poi è quel solo che in tale Scienza pareva da desiderarsi; sfuggendosi nel rimanente la confusione per chi va studiando l'Opere geometriche degli

altri Autori, i quali, e nel citare, e nel dimostrare all' ordine del quinto Libro si riferiscono: Che se quì m' è occorso variarlo in parte, o per comodità di provar le cose avvenire, o per facilitare, o per abbreviare il trattato, vi ho anche riparato col porre nel Margine, ed ancora in piè di ciascuna Proposizione il numero, al quale corrispondono quelle del medesimo Euclide. E per dare a ciascuno il dover suo, vi ho notato in oltre di chi sia 'l modo, col qual' io ne ò distesa la prova.

Ho scritto nella lingua della mia nobil Patria, prima per conformarmi al disteso della predetta quinta Giornata, e poi per non lasciar dal canto mio d'an-

dar addomeſticando alla Toſcana favella anche i termini meno uſati della Geomatria, ſeguendo 'n ciò il medeſimo Galileo, e gli Scrittori d' altre Nazioni, che in oggi, nelle materie, eziandio ſcientifiche, ſi vagliano quaſi tutti della materna.

Forſe alcuno vi ſarà, che m'attribuirà a ſoverchia ambizione il paleſarmi in fronte di queſt' Opera per ultimo Diſcepolo del Galileo; ma però molti più ſaran quei, che m'invidieranno. Il fatto ſi è che, per mia gran ventura, io ſon l' ultimo ſuo Diſcepolo, perchè egli fu continuo Maeſtro a' me ſolo per gli ultimi tre anni di ſua Vita, e di quanti ci trovammo preſenti all' ultimo ſuo reſpiro,

(*che oltre a due Sacerdoti, v'intervennero il celebre Torricelli, il Dottor Vincenzio Galilei ſuo figliuolo, e gli altri di ſua Caſa*) *io ſolo* (*benchè l'ultimo, nell' eſſermene approfittato*) *ſono a tutti ſopravviſſuto, e quaſi anche rimaſto l'ultimo di quanti più intimamente lo praticorono. E però, come tale, colla pubblicazione de' preſenti ſuoi ſcritti, intendo per ora far noto al Mondo, che* (*quantunque non ſia poſſibile offerire non ſolo a DIO, e a' Genitori, ma nè pure al Maeſtro, retribuzione ch'equivaglia al prezzo de' ricevuti benefici*) *io non traſcuro occaſione di ſoddisfar in parte al debito di ben grato diſcepolo col dar luce, e vita a preziosi, e venerabili*

evan-

avanzi di non più vulgate ſpe-
culazioni del gran Galileo mio
reverito Maeſtro ; ſiccome io
non tralaſcerò mai di onorare
l' incontraſtabil fama di cotant'
Uomo anche per mezzi in ogni
conto eccedenti le deboli forze
mie, col tentare in varie gui-
ſe d'alleggerirmi dal peſo im-
menſo degli obblighi da me do-
vuti a i dotti, prudenti, ed
amorevoli inſegnamenti di quel
Sapientiſſimo Vecchio, le di
cui ammirabili ſcoperte e ne'
Cieli, e nella Natura ſervi-
ranno di chiara, ed infallibile
ſcorta a tutta la ſaggia Poſterità.

„ *Gradiſca in tanto quel-*
„ *la grand' Anima al cuor*
„ *mio ſempre venerabile que-*
ſto pubblico monumento del mio
non mai morto amore: e Voi

novelli Geometri gradite l' ardente zelo, che ò di assiduamente giovarvi, mentre io, ripigliando i miei propri Studi, m' ingegnerò, mercè la BONTA' DIVINA, *di farvi vedere un giorno, ch' io non paßo mia vita del tutto in ozio, e che regnano in me ſentimenti di gratitudine verſo chiunque s' è compiaciuto di più che generoſamente beneficarmi.*

QUIN-

QUINTO LIBRO
DEGLI ELEMENTI
D'EUCLIDE,
OVVERO
SCIENZA UNIVERSALE
DELLE PROPORZIONI

DIFINIZIONI.

I.

GRANDEZZE omogenee s' intendon quelle, che ſon tra loro d'un medeſimo genere.

Cioè quelle, alle quali ſi convien una ſteſſa difinizion generale della lor quantità, o eſtenſione.

PEr eſempio (tra le quantità così continue, come diſgiunte) tutte le linee in generale, ſiccome tutte le ſuperficie, tutti i corpi, tutte le

velocità, tutti i momenti, tutte le forze assolute, tutti i tempi, tutti i numeri, &c. son grandezze omogenee, perchè sotto la general difinizione della linea cadono tutte le linee, tanto la retta, che la curva, o che la mista, ancorchè poste in un medesimo, o 'n diversi piani; e sotto la difinizione generale della superficie cadono tanto la superficie piana, che la concava, o che la mista, &c. e così intendasi d'ogn' altro genere di grandezze.

II.

Dif. 2. del V. lib. d' Eucl.

Tra due grandezze omogenee, e terminate disuguali: la maggiore si dice Multiplice della minore, quandola minore presa più volte pareggia, e misura appunto la maggiore.

III.

Dif. 1. del V. lib d' Eucl.

Parte, o summultiplice, cioè sottomultiplice si dice la minore di due grandezze omogence, terminate, e disuguali, che multiplicata più volte misu-

misura appunto la maggiore:

Questa, con voce forse troppo generale, da Euclide si chiama parte, ma però meglio da altri è detta parte aliquota, a differenza dell' altra detta parte aliquanta, la quale è quella grandezza minore, che replicata non misura precisamente la maggiore, e che negli Elementi de' numeri è da Euclide chiamata PARTI.

IV.

Le grandezze di qualunque genere, dicansi egualmente multiplici delle loro omogenee, quando quelle contengan queste ugual numero di volte.

Dal P. Clav.

V.

Proporzione, detta in latino indifferentemente con le voci, e *Proportio*, e *Ratio* (che forse più propriamente sarebbe detta *Relatio*) è quella scambievole relazione, o ragione, che hanno insieme due grandezze omogenee termi-

Dif. 3. e 4 del V. lib. d'Eucl. più largamente spieg.

nate, per quanto s'appartiene alla lor quantità, o continua, o disgiunta.

E le grandezze, o le quantità, fra le quali si fa tal paragone, si dicono i termini della Proporzione.

Cioè Proporzione altro non è, che quell'unica convenienza, ovvero quell'unico riguardo, o paragone, o rispetto, o relazione determinata, e particolare, che ha una quantità terminata vers' un' altra a se omogenea, e terminata in quanto quella è uguale, o per quanto ell' è maggiore, o minor di quella: Poichè non si dà proporzione, o relazione tra due grandezze omogenee, se non tra quelle, che multiplicate possono avanzarsi, le quali poi sono solamente le grandezze omogenee terminate: Siccome non si può far paragone tra due grandezze omogenee infinite, nè similmente tra una finita, ed un' altra di quantità realmente infinita.

VI.

Proporzioni simili fra le quan-

quantità (che anco si dicono indifferentemente proporzioni uguali, e proporzioni medesime) cioè fra la prima, e la seconda, e fra la terza, e la quarta, intendansi allora, quando la prima grandezza, essendo per esempio uguale, o multiplice, o summultiplice della seconda, anco la terza sia eguale, o altrettante volte multiplice, o summultiplice della quarta. Ed anco quando la prima contenendo la seconda più volte, e di più qualche parte aliquota di essa seconda, anco la terza contenga la quarta altrettante volte con altra simil parte aliquota di essa quarta. Siccome quando la prima essendo contenuta più volte dalla seconda con qualche avanzo, anco la ter-

Dif 5. del V. lib. d' Eucli. Spieg. altrimenti col Galileo.

za dalla quarta ſia contenuta altrettante volte, e con altro ſimile avanzo. Cioè finalmente quando la prima non ſia niente maggiore, nè minor del biſogno, per avere alla ſeconda riſpetto, o relazione ſimile a quella, che ha la terza verſo la quarta. Che è il medeſimo che dire: Quando la differenza tra la prima, e la ſeconda ſarà ſimile alla differenza, che è tra la terza, e la quarta, allora queſte due relazioni, o riſpetti, o proporzioni dicanſi proporzioni ſimili, o medeſime, o eguali, come più aggrada. E queſta maniera di ſpiegare le proporzioni ſimili tanto s'adatta alle quantità continue, che alle diſgiunte, le quali ſon quelle, che ſi poſſono eſprimer co' numeri.

Gran-

VII.

Grandezze, o quantità proporzionali, dicansi i termini delle proporzioni simili. *Dif. 6. del V. lib d' Eucl.*

Cioè quando la proporzione, che è tra la prima, e la seconda grandezza, sarà simile alla proporzione, che è tra la terza, e la quarta nel modo sopra dichiarato, allora questi termini primo, e secondo, terzo, e quarto dicansi grandezze proporzionali.

VIII.

Di due Proporzioni, quella della prima grandezza verso la seconda dicasi Proporzione maggiore di quella della terza verso la quarta: Cioè dicasi la prima alla seconda aver maggior proporzione, che la terza alla quarta, quando la prima sarà alquanto maggior del bisogno, acciocchè la proporzione d'essa prima verso la seconda sia simile alla *Dif. 7. del V. lib. d' Euclid. Spieg. altrim. col Galileo.*

proporzione della terza verso la quarta.

IX.

Dif. 8. e 9 del V. lib. d' Eucl. spiegate più larg.

Analogia, altrimenti detta Proporzionalità, è la similiglianza di più Proporzioni tra grandezze proporzionali, e omogenee, o pur anco di generi differenti.

Come per esempio se la proporzione, o 'l rispetto, che è fra due linee sarà simile al rispetto, che è fra due altre linee, o al rispetto fra due superficie, o fra due corpi, o fra due numeri, &c. questa tal similiglianza di rispetti, o di proporzioni, dicasi Analogia, o Proporzionalità.

Dif. 9. del V. lib. d' Eucl.

E notisi, che l'anologia, o Proporzionalità non può consistere in meno, che in tre termini di grandezze, ma però omogenee, come sarebbe ne' termini di tre linee, di tre corpi, di tre velocità, di tre numeri, &c. quando cioè il primo termine al secondo ha Proporzione simile a quella, che ha il secondo al terzo.

Ana-

X.

Analogia, o Proporzionalità continua, ſi chiama quando, nella comparazione di tre, o di quattro, o di più termini di grandezze omogenee, e proporzionali, que' di mezzo ſi prendono due volte, ſervendo ciaſcuno prima di termine conſeguente di una proporzione, e poi di termine antecedente dell'altra ſimil proporzione, che le ſuccede: cioè quando il primo termine al ſecondo ſta come 'l ſecondo al terzo, e come 'l terzo al quarto, e così continuando fino all'ultimo termine, chiamandoſi tutti quantità continue proporzionali.

XI.

Analogia, o proporzionalità diſcontinua, o diſgiunta ſi

chiama quando, fra due, o tre, o quattro, o più coppie di Proporzioni ſimili tra quantità omogenee, o pure anco tra grandezze a due a due di generi differenti, i termini de' ſimili rilpetti ſi paragonano a coppia a coppia, talmente che niuno mai de' termini conſeguenti d'una Proporzione ſerva d'antecedente all'altra ſimile, che le conſegue.

Che ſarà, quando il primo termine al ſecondo ſtarà come 'l terzo al quarto, e come 'l quinto al ſeſto, e così ſempre, &c.

Le due ſeguenti difinizioni, perchè ſon poſte da Euclide nel ſuo quinto libro, benchè non abbiano uſò prima, che nel ſeſto, eſſendo biſogno ſe di qualche dichiarazione ſi porranno quì non oſtante.

XII.

Nell' Analogia, o Propor-

zionalità continua, la prima quantità all'ultima si dice aver proporzione tante volte multiplicata della proporzione della prima grandezza alla seconda, quant'è 'l numero delle proporzioni, che cadono fra' termini estremi.

Difin. 10 e 11 del V. lib. d' Eucl. più chiar. spieg.

E così, essendo tre grandezze continue proporzionali, la prima alla terza si dirà aver duplicata proporzione di quella, che ha la prima verso la seconda: E di quattro quantità continue proporzionali, la prima alla quarta si dirà aver proporzione triplicata pur della prima proporzione tra la prima, e la seconda, e similmente la prima alla quinta proporzione quadruplicata della medesima prima proporzione, e così sempre; Che altro non vuol dire, se non che tra la proporzione della prima alla terza cadono due proporzioni della prima alla seconda; e trà la proporzione della prima alla quarta ne cadon tre; similmente tra quelle della prima alla quinta cadono quattro proporzioni, e sempre di quelle della

prima alla seconda, benchè tutte l' altre si danno simili a questa.

XIII.

Diffin. 12 del V. lib. d' Eucli. più largam. spieg.

Grandezze omologhe, ovvero corrispondenti s' intendono nelle Proporzioni simili i termini antecedenti fra loro, ed i conseguenti fra loro.

Cioè se la proporzione della grandezza A *verso* b *sarà simile alla proporzione della grandezza* C *verso* d *i termini antecedenti*, A, C, *siccome i conseguenti* b, d, *si dicono omologhi fra loro, cioè, che l' antecedente* A *della prima proporzione corrisponde all' antecedente* C *della seconda, e che 'l conseguente* b *della prima corrisponde nell' ordine al conseguente* d *della medesima seconda Proporzione.*

A. b.
C. d.

Il rimanente delle diffinizioni premesse da Euclide nel quinto libro si porranno in questo dov' esse avranno uso, in quella guisa, che fece l' ammirabil Geometra Evangelista Torricelli nel suo Trattato delle Proporzioni (com' apparisce dalle copie, che egli medesimo ne diede fuori) e così

anco

anca fece dipoi il Dottore Gio. Alfonſo Borelli Inſigne Filoſofo, e celebratiſſimo Mattematico dello Studio Piſano nel dottiſſimo, ed utiliſſimo ſuo Compendio degli Elementi d' Euclide.

XIV.

Quando ſaranno due, o tre, o quattro, o più proporzioni in continui termini omogenei, per eſempio negli A, b, C, d; la proporzione che è tra il primo termine A, e l'ultimo d, ſi dirà Proporzione compoſta di tutte queſte date proporzioni, cioè della proporzione, che è tra A, e b, di quella che è tra b, e C, e di quella che è tra C, e d.

Che altro non vuol dire, ſe non che tra la proporzione della prima A *alla quarta* d *vi mediano quelle tre altre proporzioni uniche, e determinate, per mezzo delle quali ſi forma per neceſſità quella tal determinata proporzione fra l' eſtreme A, d.*

Que-

Questa difinizione non è in Euclide, ma è ben usata così da esso nel sesto libro, ed altrove, siccome da tutti gli altri Geometri, e Mattematici; l'ho posta quì perchè m' occorre valermene qualche volta in questo Trattato. Se altri ne desidera più diffusa dichiarazione, la troverà verso 'l fine del Dialogo del Galileo quì congiunto.

XV.

Quando si dirà, o si porporrà di provare, ch' una proporzione ignota fra due grandezze omogenee è composta di due altre, o di tre, o di più note proporzioni, che sieno date in termini dello stesso, o pur di differenti generi, altro non si dovrà intendere, nè altro si vorrà provare, se non che ridotte le note proporzioni in quali si sieno termini omogenei continuati (se però in tali non fossero date prima) la proporzione ignota è la medesima

ma, o ſimile alla proporzione, che è tra 'l primo, e l' ultimo de' medeſimi preſi termini continuati. E queſto è uno de' mezzi, per cui l' ignote proporzioni rendonſi note.

Queſta Diſinizione ſimilmente non ſi trova in Euclide: ma perchè in tal ſignificato, egli, ed ogn' altro ſempre ſe n' è valſo, e l' eſperienza m' ha dimoſtrato, che molti de' Principianti ſogliono incontrar difficultà in concepirla, non riuſcirà loro infruttuoſo l' addurre in queſto luogo alcune Propoſizioni delle più Elementari attenenti a' piani, a' ſolidi, alle velocità, e a' momenti, che ſon dimoſtrate per tal via da vari Geometri, e Meccanici, affinchè, allora quando col proſeguir gli Studj v' arriveranno, ſovvenga loro d' oſſervare in eſſe, come in effetto tal diſinizione vien praticata quivi preciſamente nel modo, che ſopra s' è avvertito.

E le concluſioni ſopraccennate ſono le ſeguenti.

I.

„ Æquiangula Parallelogramma inter

„ inter ſe rationem habent eam, quę
„ ex rationibus laterum componi-
„ tur; nempe ex ratione unius la-
„ teris primi parallelogrammi ad u-
„ num latus ſecundi, & ex ratione
„ reliqui lateris primi ad reliquum
„ ſecundi.

Queſto Teorema è d' Euclide la Prop. 23. del ſeſto libro.

II.

„ Triangula, & parallelogramma
„ inter ſe proportionem habent cō-
„ poſitam ex proportione baſium
„ & ex proportione altitudinum.

Queſto Teorema è del Comandino, aggiunto alla Prop. 23. del ſeſto libro.

III.

„ Cylindri, & Coni proportionem
„ habent compoſitam ex propor-
„ tione baſium, & ex proportione
„ altitudinum.

Queſto è pure del Comandino la propoſizione ottava delle ſue aggiunte nel Comento del Trattato d' Archimede delle Conoidi, e delle Sferoidi.

IV.

„ Si duo mobilia ferantur motu
„ æquabili, inæquali tamen velo-
„ citate, ſpatia temporibus æqua-
bus

„ bus ab iplis peracta, habebunt ra-
„ tionem compoſitam ex ratione
„ velocitatum, & ex ratione tem-
„ porum.

Queſto Teorema è del Galileo la propoſizione quarta del moto equabile.

V.

„ Quarumcumque gravium à qui-
„ buslibet diſtantijs ſuſpenſorum mo-
„ menta ſunt in ratione compoſita
„ ex ratione diſtantiarum, & ex ra-
„ tione gravitatum.

Queſto Teorema fu dimoſtrato dall' acutiſſimo Matematico il Padre Buonaventura Cavalieri, e da lui ſtampato nell' anno 1647. *alla Propoſizione* 6. *della ſua quinta Eſercitazione Geometrica; benchè di tal concluſione ſi foſſe prima ſervito un tal Giovann' Anton Rocca inſigne Geometra, Diſcepolo di detto Padre, in ſuo proprio Lemma Meccanico, il quale fu poi riferito dal Torricelli in piè della Propoſizione* 18. *delle ſue Quadrature della Parabola, con proteſtarſi quivi da Uomo ingenuo, e avanti, e dopo, che tal Lemma non era ſuo, ma di eſſo Rocca. Lo riferì ancora il detto P. Cavalieri nella ſua terza Eſercitazione à facce* 231. *Ma però queſta*

me-

medesima conclusione, o Teorema quinto, molto prima era noto al nostro Galileo, come apparisce da quel suo Teorema Meccanico del Trattato delle Resistenze, premesso come Lemma al Problema, che propone.

„ Dato il peso massimo retto dal
„ mezzo d' un Cilindro, o Prisma,
„ dove la resistenza è minima, o
„ dato un peso maggiore di quello,
„ trovare nel detto Cilindro il pun-
„ to, nel quale il dato peso mag-
„ giore sia retto come peso mas-
„ simo.

Dove manifestamente si riconosce tal quinta conclusione, ed ancora il mezzo per dimostrarla; oltrechè appresso ogni Geometra è ormai regola trita, universale, e sicura (quando ella venga' nteſa colle debite circostanze) che,

Ratio homogenearum magnitudinum ab homogeneis magnitudinibus numero æqualibus productarum, componitur ex rationibus, quæ sunt inter homologas magnitudines producentes.

E chi si prenderà cura d' esaminare ciascuno degli addotti esempj, ed ogn' altro simile, troverà, che tutti vengono compresi dal suddetto ge-

neral

neral Teorema , il quale (ſe queſto ne fuſſe 'l luogo) potrebbe anco facilmente dimoſtrarſi . Ma tanto baſta avere avvertito intorno al modo di conſiderare le proporzioni ignote , quando ſi vuol provare, ch' elleno ſien compoſte d' altre note Proporzioni .

DELLA DIVISIONE DELLE PROPORZIONI.

AFFINCHE' nel presente Trattato delle Proporzioni si abbiano di queste le notizie più principali, con la maggior brevità, che possibil sia, spiegherò quì il significato d' alcuni altri nomi soliti usarsi dagli Autori nel maneggio delle medesime proporzioni.

Sopra a numero 5. *assai chiaramente fu difinito ciò che assolutamente intendere si debba per proporzione tra due grandezze omogenee, sì nella quantità continua, come nella disgiunta.*

Ma quì notisi prima, che delle quantità, o grandezze, altre son fra loro commensurabili, altre incommensurabili.

I. *Quantità fra loro commensurabili son quelle, che son multiplici d' un' altra, o che hanno di comune una medesima parte aliquota, cioè, che precisamente misura l' una, e l' altra secondo qualche numero.*

Per esempio. Una linea di 25. *palmi*

mi, e una di 10. diconſi grandezze, o quantità fra loro commenſurabili, perchè ciaſcuna di loro è multiplice di una di 5. palmi, cioè l'una, e l'altra è miſurata da queſta di 5. che è parte aliquota di ciaſcuna di loro, entrando 5. appunto 5. volte nel 25. e due volte appunto nel 10. E tal linea di 5. palmi ſi dice la comune miſura di quelle di 25. e di 10. Siccome è commenſurabile una linea di palmi 27. con una di 12. perchè eſſe hanno per comune miſura una lor parte aliquota, che è di tre palmi, la quale miſura quelle ſecond' i numeri 9 e 3. diconſi ancora commenſurabili fra di loro, quando la comune miſura di eſſe entra qualche numero di volte nella maggiore, ed una ſol volta nella minore; come ſono la linea di 10. Palmi, e quella d' uno, le quali ſon miſurate da un' altra linea d' un palmo. Sicchè i numeri ſono quantità fra loro commenſurabili, perchè almeno l' unità gli miſura tutti. E però

Quantità commenſurabili fra loro ſon quelle grandezze omogenee, che ſi poſſono eſprimer co' numeri.

II. Quantità incommenſurabili fra loro quelle s' intendono, fra le quali

quali non ſi dà mai parte aliquota comune, cioè che le miſura amendue. Quali per eſempio ſono, di qualunque quadrato il diametro, e 'l lato, fra le qua' linee (come prova Euclide nell' ultima del ſuo X libro) non ſi può mai trovarn' una terza, e aſſegnar una parte loro, benche minima, che ſia aliquota d' amendue, la quale cioè, miſurando l' una ſecondo qualche numero, miſuri anco l' altra ſecondo altro numero per appunto; e per tanto.

Incommenſurabili fra loro ſon quelle grandezze omogenee, che non ſi poſſono eſprimere, o rappreſentare inſieme co' numeri.

Ora, trattandoſi in genere delle Proporzioni fra due grandezze omogenee, alcuna ſi dice Proporzione razionale altra irrazionale.

III. Proporzion razionale è quel riſpetto, o relazione, che è fra due grandezze commenſurabili tra loro, cioè quella proporzione, che ſi può ridurre fra due numeri, come di 10. *a* 8 *di* 20. *a* 3. *di* 7. *a* 12. *di* 30. *a* 10. *di* 5. *a* 1. *&c.*

IV. Proporzione irrazionale è quella relazione, che è tra due grandezze incommenſurabili, cioè quella,

la

la quale con due numeri esprimere non si può.

E per tanto fra le quantità disgiunte, cioè fra' numeri, si dà solamente la proporzione razionale; ma fra le quantità continue si dà, e la razionale, e l' irrazionale.

In oltre generalmente, così la proporzione razionale come l' irrazionale si divide in proporzione d' ugualità, ed in proporzione di inugualità, o di disugualità.

V. Proporzione d' ugualità è quel paragone, che si fà tra due grandezze uguali fra di loro.

VI Proporzione di disugualità è il paragone fra due grandezze disuguali.

Questa pur si divide in due altre, cioè in proporzione di maggior disugualità, e in proporzione di minor disugualità.

VII. La prima, quando la proporzione, che si considera, è della grandezza maggiore verso la minore.

VIII. La seconda, quand' ella è della minore verso la maggiore.

Ma tralasciando le proporzioni irrazionali, che son riservate al Decimo Libro, e considerando solamente le razionali, è da saperſi, che quel-

quelle di maggior disugualità si distinguono in 5. generi, de' quali i primi tre sono semplici, e' rimanenti composti.

Il primo genere è quello della proporzione detta Multiplice. Il secondo della Superparticolare. Il terzo della Superparziente. Il quarto della multiplice superparticolare. Ed il quinto della Multiplice superparziente.

In altrettanti, anzi ne' medesimi generi si divide la proporzione razionale di minor disugualità, mentre però s' aggiunga a' lor nomi la voce sotto, dicendo, Summultiplice, Sussuperparticolare, Sussuperpaziente, Summultiplice sussuperparticolare, Summultiplice sussuperpaziente.

IX. Tra' generi semplici, la proporzion razionale di maggiore disugualità, detta multiplice è, quand' un numero maggiore contien più volte un minore, ed il minore misura appunto 'l maggior. E così il 12. al 4. ha proporzione multiplice, perchè 'l 12. contiene 3. volte il 4 ed il 4. misura 'l 12. E similmente le proporzioni di 15. a 3. di 18. a 6 di 30. a 5. &c si chiamano multiplici, e quella del 12. al 4. dicesi tripla, del 15. al 3.

al 3. *quintupla*, *del* 18. *al* 6. *tripla*, *del* 30. *al* 5. *seſtupla &c La proporzione, poi razionale di minor diſugualità, cioè d l minore al maggiore ſi chiama ſummultiplice, e quella del tre al* 12. *ſi dice ſuqquadrupla del tre al* 15. *ſuqquintupla, del* 6. *al* 18. *ſuttripla, &c.*

X La proporzione razionale di maggiore diſugualità, detta ſuperparticolare è, quando 'l maggior numero contiene una ſol volta il minore, e di più una parte aliquota di eſſo minore: come 'l 6. *al* 4. *diceſi aver proporzione ſuperparticolare contenendo 'l* 6. *una volta 'l* 4. *ed avanzandone due, che è parte aliquota di* 4. *e tal proporzione di* 6. *al* 4. *diceſi ſeſquialtera, che vuol dire, che il* 6. *contiene 'l* 4 *una volta, e mezzo; e l'* 8. *al* 6 *ha proporzione ſeſquiterza, cioè l'* 8 *contiene 'l* 6. *una volta, e un terzo; ed il* 10. *all'* 8. *ha proporzione ſeſquiquarta, contenendo il* 10. *l'* 8. *una volta, e un quarto, e così degli altri. La proporzione poi razionale di minor diſugualità ſi dice Suſſuperparticolare, chiamandoſi quella di* 4. *a* 6. *ſuſſeſquialtera, di* 6 *a* 8 *ſuſſeſquiterza, di* 8. *a* 10. *ſuſſeſquiquarta, &c.*

XI. La proporzione razionale di maggior diſugualità, detta ſuperparziente è, quando 'l maggior numero contiene una ſol volta 'l minore, e di più avanza parti del minore, cioè una parte non aliquota; E così 5. a 3. ha proporzione ſuperparziente, contenendoſi dal 5. il 3 una ſol volta e avanzandogli 2. che è parti del 3. e queſta proporzione ſi chiama ſuperbiparziente terza; quella di 20. a 11. ſupernonaparziente undecima, di 11. a 7. ſuperquartaparziente ſettima; di 13. a 8. ſuperquintaparziente ottava, e così dell' altre di queſto genere &c. All' incontro il minor numero al maggiore, ſi dice aver proporzione ſuſſuperparziente, e così quella di 3. a 5. chiamaſi ſuſſuperbiparziente terza; di 11. a 20. ſuſſupernonaparziente undecima &c. e così d' ogn' altra ſimile, &c.

XII. Tra' generi compoſti, la proporzione razionale di maggior diſugualità, detta multiplice ſuperparticolare è, quando 'l maggior numero contien più volte 'l minore, e gli avanza una parte aliquota dello ſteſſo minore. Ond' è che 'l 20. al 6. ſi dice aver proporzione multiplice ſuperparticolare, contenendo 'l 20. 3.

volte

volte 'l 6. *ed avanzandogli* 2. *che è parte aliquota di* 6. *e queſta ſi nomina triplaſeſquiterza, che vuol dire che 'l* 20. *contiene 'l* 6. 3. *volte, e un terzo; il* 18. *all' 8. l' ha duplaſeſquiquarta; il* 22. *al* 4. *l'ha quintupla ſeſquialtera; il* 10. *al* 4 *dupla ſeſquialtera; il* 17. *all'* 8 *dupla ſeſquiottava, &c. Per lo contrario la proporzione del minore al maggiore di queſti termini è detta ſuſſuperparticolare, denominando le ſopraddette proporzioni coll' aggiunta della prepoſizione* ſotto.

XIII. Finalmente, la proporzion razionale di maggior diſugualità detta multiplice ſuperparziente è, quando 'l maggior numero contien più volte 'l minore, e gli avanza parti dello ſteſſo minore, cioè parte non aliquota. E per tanto 11. *a* 3. *ha proporzion multiplice ſuperparziente, contenendo l'* 11. *il* 3 *tre volte, e avanzandogli* 2. *che è parti di* 3. *e queſta diceſi tripla ſuperbiparziente terza; quella di* 16. *a* 6. *dupla ſuperquartaparziente ſeſta; di* 8. *a* 3. *dupla ſuperbiparziente terza, &c Queſte proporzioni poi, quando ſono del minor termine al maggiore, ſi denominano coll' aggiunta del* ſotto, *come s' è detto dell' altra.*

DELL' ANALOGIE, O PROPORZIONALITA' PRINCIPALI.

TRe, *appreſſo gli Antichi Scrittori, ſono l' analogie, o le Proporzionalità più principalmente conſiderate, cioè: L' Arimmetica, la Geometrica (le quali ſi ſuddividono in continue, ed in diſgiunte) e la Muſica, ovvero l' Armonica.*

I. La Proporzionalità Arimmetica continua è, quando tre, o più grandezze omogenee differiſcono tra di loro per uguali differenze: cioè, quando (eſſendo tre) la differenza tra la prima, e la ſeconda ſia uguale alla differenza tra la ſeconda, e la terza (e queſta più frequentemente ſi chiama Medietà Arimmetica) O pure quando (eſſendo più di tre) la differenza tra la prima, e la ſeconda ſia uguale alla differenza, che è tra la ſeconda, e la terza, e che è tra la terza, e la quarta, e tra la quarta, e la quinta, &c.

Diſcontinua, o diſgiunta, quando, eſſendo più coppie di grandezze a due

a due

a due omogenee, la differenza tra 'l primo, e 'l secondo è uguale alla differenza, tra 'l terzo, e 'l quarto, ed a quella tra 'l quinto, e 'l sesto.

II. *La Proporzionalità Geometrica continua è, quando tre, o più grandezze omogenee differiscono tra di loro con differenze proporzionali all' intere grandezze; cioè quando (essendo tre) la differenza tra la prima, e la seconda, alla differenza tra la seconda, e la terza, stia come la prima grandezza alla seconda, o come la seconda alla terza. E questa per lo più dicesi Medietà Geometrica. O quando (essendo più di tre) la prima alla seconda stia come la seconda alla terza, e come la terza alla quarta.*

Discontinua, o disgiunta, quando, essendo più coppie di grandezze a due a due omogenee, la proporzione del primo termine al secondo sia simile a quella del terzo al quarto, e del quinto al sesto, &c.

III. *La Proporzionalità Musica, ovvero Medietà Armonica è, quando, di tre grandezze continuamente disuguali, la differenza tra la prima, e la seconda alla differenza tra la seconda, e la terza stia come la*

prima grandezza alla terza, o quando le differenze tra le grandezze ſieno proporzionali all' eſtreme.

Ma per difinire in breve le ſuddette tre medietà fra tre grandezze omogenee continuamente diſuguali, ſi dirà che

I.

Medietà Arimmetica è, quando la differenza tra la prima, e la ſeconda alla differenza tra la ſeconda, e la terza ſta come la prima grandezza alla prima.

II.

Medietà Geometrica, quando la prima differenza alla ſeconda ſta come la prima grandezza alla ſeconda.

III.

Medietà Armonica, quando la prima differenza alla ſeconda ſta come la prima grandezza alla terza.

ASSIOMI,

OVVERO COMUNI NOTIZIE.

I.

Aſſio. ſuppoſto dal Galil. SE quattro grandezze ſaranno proporzionali, cioè che in ſenſo della ſeſta difini-

nizione di queſto Trattato, la prima alla ſeconda abbia la medeſima proporzione, che la terza alla quarta; anco qualunque multiplice della prima alla ſeconda, avrà la ſteſſa proporzione, che l'egualmente multiplice della terza alla quarta. Cioè 3, 04, 07, 010, &c. delle prime alla ſeconda ſtaranno come 3, 04, 07, 010, &c. delle terze alla quarta.

II.

Similmente, ſe la prima alla ſeconda ſtarà come la terza alla quarta, anco la prima a qualunque multiplice della ſeconda ſtarà come la terza all' egualmente multiplice della quarta. Cioè la prima a 4, 09, 020, &c. delle ſeconde, ſtarà come la terza a 4, 09, 020, &c. delle quarte. *Suppoſto dal Gal.*

III.

Supp. ancora dal Torr. nel ſuo Libro delle propor. ed è la propoſ 7. del V lib. d'Eu

Le grandezze omogenee uguali ad un'altra qualunque terza hanno la medeſima proporzione.

Siccome la medeſima terza grandezza all'eguali ha la medeſima proporzione.

IV.

Supp dal Galil. ed ancora dal Torr. nel detto Libro ed è la prima parte della prop. 8. del V. d' Eu.

Le grandezze omogenee diſuguali ad un'altra qualunque terza omogenea non hanno la medeſima relazione, o proporzione, ma diverſa.

E la proporzione della maggior grandezza alla terza, in vigor dell' 8. difinizione, ſi dirà maggiore della proporzione della minor grandezza alla medeſima terza.

V.

Se una di due proporzioni ſimili, cioè uguali, è uguale,

o mag-

o maggior, o minor d'una terza proporzione, l'altra ancora sarà uguale, o maggior, o minor della medesima terza proporzione. E pel contrario,

Questo è in parte la Prop. 13. del V. d' Eucl.

Se una proporzione sarà uguale, o maggior, o minor d'una di due proporzioni simili, la medesima sarà ancora eguale, o maggior, o minor della rimanente proporzione.

Il presente Assioma corrisponde a quella comune notizia, la quale è, che se una di due grandezze uguali, è uguale, o maggior, o minor d'una terza, ancora l'altra sarà uguale, o maggior, o minor della medesima terza. Ed all' incontro.

Se una medesima terza sarà uguale, o maggior, o minor d' una di due altre, sarà anch' uguale, o maggior, o minor della rimanente.

VI.

Quelle proporzioni, che sono simili ad una medesima

Assio. supp. ancora dal Tor. in detto 5 lib. delle propor. ed è la Prop. 11. del V di Eucl.

proporzione, ſon anco ſimili fra di loro, ed all'incontro,

Quelle proporzioni, alle quali è ſimile una medeſima proporzione, ſono ſimili fra di loro.

Queſta corriſponde all' Aſſioma, che quelle grandezze, che ſon' uguali ad una medeſima ſon anco uguali fra loro.

E quelle, alle quali una medeſima grandezza è uguale, pur fr. loro ſon' uguali.

Assio- ſupp. ancora dal Torr. nel detto 5 lib. ed è la 9 propoſiz. del V d'Eucl.

VII.

Quelle grandezze, ch'ad una medeſima grandezza hanno la medeſima proporzione ſono fra loro uguali; E pel contrario,

Quelle grandezze, alle quali una medeſima grandezza ha la medeſima proporzione ſimilmente ſono uguali fra loro.

Se

VIII.

Se la minor di due proporzioni diſuguali ſarà maggior d' una terza proporzione, la maggior di eſſe due proporzioni ſarà molto maggior della medeſima terza proporzione.

Corriſponde queſto a quella notizia comune, che ſe la minor di due grandezze diſuguali ſarà maggior d' una terza grandezza, la maggior di eſſe due ſarà molto maggior della medeſima terza.

IX.

Quelle proporzioni, che ſon compoſte delle medeſime, o d' ugual numero di proporzioni ſimili ciaſcuna a ciaſcuna, ſon le medeſime, cioè ſimili fra di loro.

DOMANDA.

COncedaſi che, date due grandezze omogenee ter-

minate, qual proporzione ha la prima grandezza alla seconda, tale possa averla la seconda ad una terza a quelle omogenea. O pure che tale possa concepirsi averla una terza di qualunque genere ad un' altra quarta a se omogenea.

Come per esempio, che qual proporzione ha una superficie ad una superficie, o un corpo ad un corpo, o una forza ad una forza, o un tempo ad un tempo, &c tal possa immaginarsi, che l' abbia quella seconda superficie ad una terza, o una terza superficie ad una quarta, o pure qualunque retta linea terminata ad un' altra, &c.

Ciò è stato ammesso, e continuamente praticato da Euclide, da Archimede, e da altri Matematici d'ogni Secolo anzi dal nostro medesimo Galileo ne' suoi Dialoghi delle due nuove Scienze, come cose per lor medesime chiare, e facili da concedersi.

AVVER-

AVVERTIMENTI.

Qui è da notarsi, che questa Scienza elementare delle Proporzioni s' adatta indifferentemente, comunque occorra, alle grandezze commensurabili fra loro, ed all' incommensurabili, che son quelle, che poc' avanti si diffinirono.

In oltre, che nelle figure del presente Trattato, tutte le grandezze omogenee, che si vedono espresse in linee, o in superficie, o in corpi, ciascuno può figurarsele rappresentar quali si sieno altre grandezze, o quantità omogenee a beneplacito, come sarebbero di velocità, di tempi, di forze, &c. comunque ne vengail bisogno; essendochè [come si vedrà] niuna delle conclusioni quì dimostrate si restringa

più

più ad un genere di grandezze, che ad un altro; che però questa viene intitolata.

SCIENZA UNIVERSALE DELLE PROPORZIONI.

SCIEN-

SCIENZA UNIVERSALE

DELLE PROPORZIONI.

PROPOSIZIONE I.

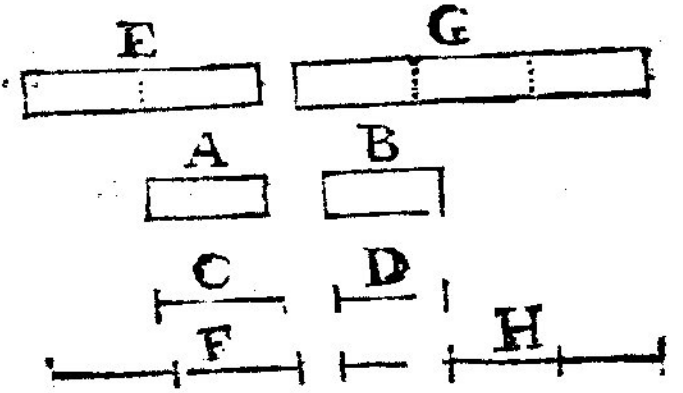
SE saranno quattro grandezze a due a due omogenee, e fra loro proporzionali, e si prendano l'ugualmente multiplici della prima, e della terza secondo qualsisia numero, e l'ugualmente multiplici della seconda, e della quarta, pur secondo qualunque numero, anco tali multiplici saranno fra loro proporzionali:

Prop. 4. del V. degli Elementi dimostr. col Galil.

Sieno date quattro grandezze proporzionali A,B,C,D, di qualunque genere (purchè a due a due sien tra loro omogenee) cioè, la prima A alla seconda B abbia pro-

por-

Dif. 6 di queſto Trat. porzione ſimile a quella della terza C, alla quarta D, ſecondo la dichiarata ſeſta diſinizione, e ſi prendano le E, F, ugualmente multipli-



Dif. 4. ci della prima, e della terza A, C, e le G, H, ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta B D, ſempre ſecondo qualunque numero di multiplicità. Dico che ancora queſte multiplici ſono proporzionali, cioè che la multiplice E della prima alla multiplice G della ſeconda ha proporzione ſimile a quella della multiplice F della terza alla multiplice H della quarta.

Imperciocchè eſſendo, per ſuppoſizione, come A a B, così C a D, *1. Aſſioma.* ſarà ancora come E multiplice di A a B così F ugualmente multiplice di C a D. Similmente, perchè ora s'è provato, che ſiccome ſta E a B, così ſta F a D, *2 Aſſioma.* ſtarà ancora come E a G multiplice di B, così F ad H ugual-

ugualmente multiplice di D Che è quello, che si propose di dimostrare.

E così vien provata dal Galileo la 4. Prop. del V. d' Euclide.

COROLLARIO.

Di quì è che essendosi dimostrato, che le proporzioni delle grandezze E, F, (ugualmente multiplici della prima, e della terza A, C) alle G, H (ugualmente multiplici della seconda, e della quarta B, D) sono simili fra di loro, è segno, che se la multiplice E è uguale alla G anco la multiplice F sarà uguale all' H, e s' ell' è maggiore, maggiore, e s' ell' è minore, minore.

Conv. della 5. dif. del V. degli Elem. d'Euclide.

Dif. 6 di quest.

Onde ne segue, che mentre sieno quattro grandezze a due a due omogenee, e proporzionali, sempre l' egualmente multiplici dell'antecedenti

denti prima, e terza, s'accordano con l'ugualmente multiplici delle conſeguenti ſeconda, e quarta, in pareggiare, o in avanzare, o in mancare.

E così vien dimoſtrato dal Galileo il converſo della 5. diſinizione del V. d' Euclide.

PROPOSIZIONE II.

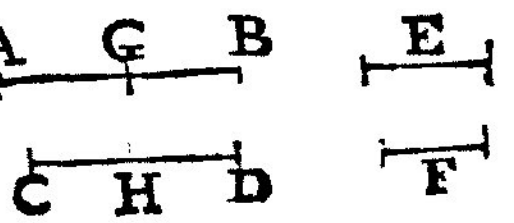
Prop. 1. del V. degli Elemen. dimoſ. con Eucl.

Se grandezze omogenee quante ſi vogliano ſaranno egualmente multiplici d' altrettante, ciaſcuna di ciaſcuna, quante volte è multiplice una di una, altrettante ancora ſaranno multiplici tutte inſieme di tutte inſieme.

Sieno quante ſi vogliano grandezze omogenee AB, CD, &c egualmente multiplici d' altrettante E, F, &c. ciaſcuna di ciaſcuna, cioè ſia la AB multiplice di E, e la CD egualmente multiplice di F, &c. Dico che quante volte è multiplice una

una di una, cioè la AB della E, altrettante è multiplice il composto delle AB, CD, del composto delle E, F.

Poichè essendo AB multiplice di E, come la CD è multiplice di F, quante parti sono in AB uguali ad E, altrettante saranno in CD uguali ad F: e però divise le AB, CD nelle parti uguali alle loro summultiplici, cioè nelle parti AG, GB, e nelle CH, HD, sarà il numero in AB uguale al numero in CD. E perchè AG, è uguale ad E, e CH ad F, ancora le AG, CH, prese insieme saranno uguali alle E, F, insieme prese. F per la medesima ragione, essendo GB uguale ad E, ed HD ad F, ancora le GB, HD insieme prese saranno uguali alle predette E, F, insieme prese.



Def. 4.

Quante dunque sono nelle AB le parti uguali alla E, o nella CD l'uguali alla F, altrettante sono nell' insieme prese AB, CD, l' uguali alle prese insieme E, F. Onde quante volte è multiplice la AB della E, o la CD della F, altrettante è multipli-

tiplice la ſomma, delle A B, C D, della ſomma delle E, F. Ed in ſimil maniera ſi continuerebbe la dimoſtrazione, quando oltre alle A B, C D foſſero date altre ſimil quantità multiplici d' altrettante ſecondo il numero della data multiplicità. Se dunque quante ſi vogliano grandezze omogenee ſaranno egualmente multiplici d'altrettante, &c. Il che ſi dovea dimoſtrare.

E queſta è la prova d' Euclide della prima Propoſ. del V. Libro.

PROPOSIZIONE III.

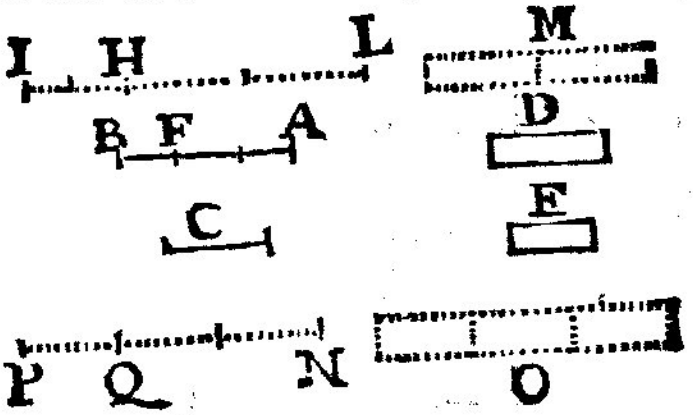
Conv. della 7. dif. del V. degli Elem. dimoſt. col Gali. ma alquan. var. nella conſtruz.

Date quattro grandezze a due a due omogenee, ma non proporzionali, e talmente che la prima alla ſeconda abbia maggior proporzione, che la terza alla quarta; è poſſibile prender in qualche modo l'egualmente multiplici della prima, e della terza, e della ſeconda, e della quarta, ſicchè la multiplice della prima ſu-

peri

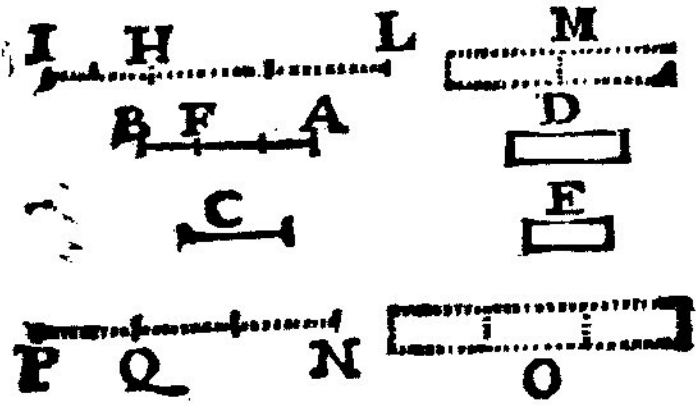
peri quella della ſeconda, ma la multiplice della terza non ſuperi quella della quarta, anzi le ſia minore.

Ponganſi le date quattro grandezze non proporzionali eſſere le AB, C, d'un medeſimo qualunque genere, e le D, E, ſimilmente d'uno ſteſſo qualunque genere, e ſia la prima AB alquanto maggior di quello, ch'ella dovrebbe eſſere, per aver alla ſeconda C proporzione ſimile a quella, che ha la terza D alla quarta E. Dico eſſervi modo di prender in certa particolar maniera l'ugualmente multiplici della prima, e della terza, ed altre ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta, ſicche quella della prima ſia maggior di quella della quarta, e quella della terza non ſia altri- en-



ti maggior di quella della quarta, anzi le ſia minore .

Per ottener ciò, s'intenda eſſer levato dalla prima quantità A B quell'eccesso, che la fa eſſer maggior di quello, ch' eſſer dovrebbe per avere a C la medeſima proporzione, che ha D ad E, e tale eccesſo ſia F B. Reſteranno per tanto quattro grandezze proporzionali, cioè la rimanente AF alla C avrà ſimil proporzione, che ha la D alla E.



In oltre ſi prendano delle part BF, F A, l'ugualmente multiplici I H, H L, con tali condizioni però, che la I H ſia aſſoluramente maggior della ſeconda grandezza C, e che la H L ſia non minore, cioè a dire, o uguale, o maggior della ſteſſa C. (Il che poterſi fare è manifeſto, per eſſer i lor ſummultipici B F, F A, quantità dello ſteſſo genere, e terminate; e perciò, quando

do col preſo numero d'egual multitudine delle B F, F A, mentre la multiplice H I è maggior di C, la multiplice H L non foſſe uguale, o maggior della medeſima C, ma rimaneſſe ancor minore, certo è, che tanto ſi potrebbe creſcere il numero di multiplicità, che la detta H L arrivaſſe ad eſſer non minor della C, ed allora tanto più la I H ſarebbe maggior della ſteſſa C, come ci fa di biſogno.) Pongaſi dunque che in queſte ugualmente multiplici I H H L ſi ſieno adempite le ſuddette condizioni pretese, e quante volte eſſe ſono multiplici delle parti loro B F, F A, altrettante volte appunto s'intẽda preſa la grandezza M multiplice della terza grandezza D.

Ed eſſendoſi preſa l'H L non minor di C, ſi multiplichi C tanto, che baſti a ſuperare H L, e ſia tal multiplice la P N, cioè proſſimamente maggior dell' H L, ſicchè levandole una ſola parte P Q dell' uguali alla C, reſti Q N uguale, o minor di H L, ovvero H L uguale, o maggior di Q N.

Per ultimo, quante volte la N P s'è preſa multiplice della ſeconda C, altrettante ſi ponga la O, multiplice della quarta E. Ora

Ora essendosi presa l'H assolutamente maggior della C, ovvero della P Q, e la H L fatta uguale, o maggior della Q N, sarà tutta insieme la I L assolutamente maggiore di tutta la P N. Il che si abbia a memoria.

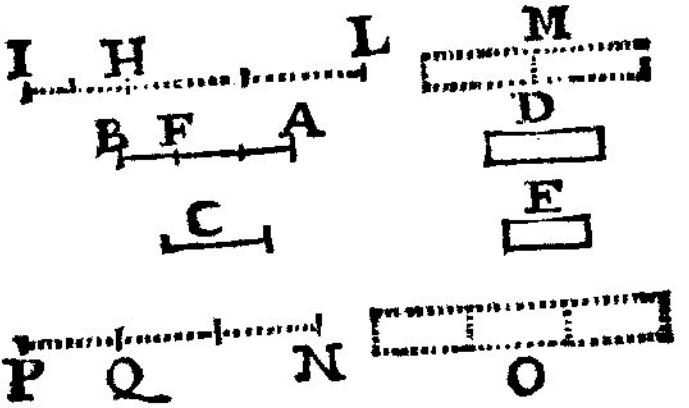
E perchè le quattro grandezze A F, C, D E, si ridussero proporzionali, e della prima A F, e della terza D, si presero le H L, M, ugualmente multiplici, e della seconda C, e della quarta E, le ugualmente multiplici P N, O, la multiplice M s'accorderà colla O, come la H L colla P N, ma la H L è minore della P N (perchè si prese P N multiplice di C, e prossimamente maggiore di H L) adunque anco la M sarà minore della O. Fin ora dunque si è provato, che I L è maggiore assolutamente di P N, e che M è minore di O.

Corol. della 1 pro pos. di ques.

Finalmente essendo I H multiplice di B F come è H L di F A, e come M di D, sarà il composto I L multiplice del composto B A come H L di F A; ovvero come M di D: sicchè I L ed M sono ugualmente multiplici delle grandezze date prima, e terza A B, D, ed anco P N ed O

Prop. 2. di ques.

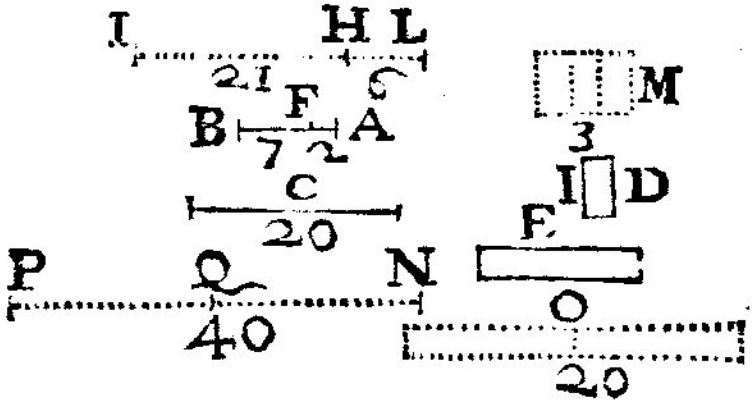
ed O ſono egualmente multiplici dell' altre date ſeconda, e quarta C, E. Ma poco ſopra dimoſtrammo I L maggiore della P N, e dipoi concludemmo la M eſſer minore della O: adunque ſi è fatto vedere, che quando la prima grandezza A B è maggiore del biſogno per aver alla ſeconda C proporzione ſimile a quella della terza D alla quarta E,



ſi può pigliare in qualche maniera l' ugualmente multiplici I L, ed M, delle A B, D, prima, e terza, e l'ugualmente multiplici P N, ed O, delle C, E, ſeconda, e quarta, che la multiplice della prima ſuperi la multiplice della ſeconda, ma la tiplice della terza non ſuperi la multiplice della quarta; poichè ſi è quì dimoſtrato, che I L ſupera P N, ma che non già M ſupera O, anzi che è minore. Il che ſi propoſe per poſſibile a farſi.

E in tal maniera vien dimostrato dal Galileo il converso della 7. difinizione del V. d' Euclide.

Ma affinchè nella passata proposizione si dimostrasse con ogni maggiore evidenza la possibilità di prender l' ugualmente multiplici della prima, e della terza grandezza, e quelle della seconda, e della quarta nella maniera proposta dal Galileo, e che



avesse luogo, ed uso la comandata costituzione di prendere la P N multiplice della seconda C in modo, che sempre ella fosse prossimamente maggiore della H L [la qual fu presa tanto multiplice dell' avanzo A F, quanto I H dell' eccesso F B) stimai ben fatto variare alquanto la costruzione da quella, che nel seguente Dialogo del Galileo si vedrà distesa. Imperciocchè, se, dopo aver presa la I H multiplice dell' eccesso B F tal-

mente, che ella superi C, ne accadesse, com' in effetto accader può, che H L presa altrettanto multiplice di F A, fosse non ostante minor di C, allora la minima multiplice di C, che è la dupla, anzi ogni grandezza eguale a C supererebbe H L, nè perciò vi sarebbe modo di pigliar la N P multiplice di C prossimamente maggiore di H L, dalla quale (tolta poi una parte P Q uguale a C) rimanasse Q N uguale, o minore di H L. Perchè nel caso, che la multiplice N P fosse dupla di C, tolta una parte P Q, vi resterebbe Q N, che è uguale a C, ancor maggiore di H L: e nel caso, che N P fosse uguale a C, toltane una parte, non vi rimarrebbe cosa alcuna; che però dopo aver presa la I H multiplice di B F, e maggiore di C, non sempre si potrebbe continuare la dimostrazione con dire I H è maggiore di C, ovvero di P Q. ed H L è maggior di Q N. adunque tutta I L è maggiore di tutta P N; perchè tal volta potrebb' esser il composto I L uguale al composto P N, e tal volta minore, come apparisce nell'esempio di questa figura

A voler dunque concludere, com' è il bisogno, che tutta I L sia maggior

di tutta PN è neceſſario, che non ſolo I H multiplice di BF ſia preſa maggior di C, ovvero di P Q, ma ancora che H L ſia maggiore, o eguale, cioè non minor di C, perchè così eſſendo, ſi potrà anco prendere N P multiplice di C, e proſſimamente maggiore di H L, e col finire la comandata conſtruzione, dimoſtrar poi quivi la propoſta, che s' è veduta.

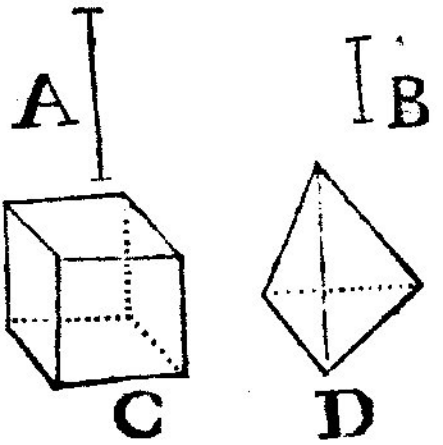
PROPOSIZIONE IV.

5. dif. del V. degli Elem. cioè Conv. del Corol. della prop. 1. di queſt. dimoſ. dal Galil.

Se di quattro grandezze date a due a due omogenee, l' ugalmente multiplici dell' antecedenti prima, e terza preſe ſecondo qualunque numero s' accorderanno ſempre nel pareggiare, o mancare., ovvero eccedere l' ugualmente multiplici riſpettivamente delle conſeguenti ſeconda, e quarta, preſi ſimilmente ſecondo qualunque numero, tali grandezze ſaranno fra loro proporzionali.

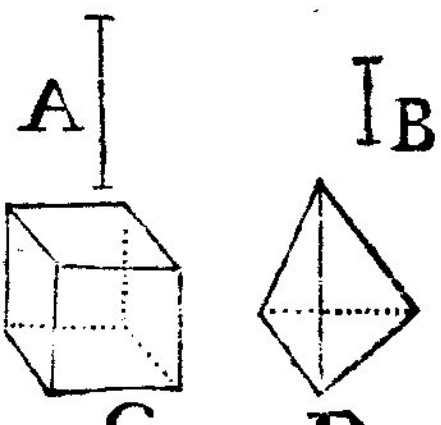
Sieno

Sieno le date grandezze A prima, e B seconda d' un medesimo qualunque genere, e C terza, e D quarta, pur tra loro d' uno stesso qualunque genere, e delle A, C, s' intendano prese l'ugualmente multiplici secondo qualsisia numero, e delle B, D, ancora l'ugualmẽte multiplici secondo qualunque numero. Dico che se la multiplice della grandezza A è sempre concorde colla multiplice della B, come la multiplice della C colla multiplice della D nel pareggiare, o nel mancare, ovvero nell' eccedere; tali grandezze son tra loro proporzionali, cioè che A a B sta come C a D.



Imperciocchè, se è possibile, sieno non proporzionali. Adunque una dell' antecedenti sarà maggior di quel, che ella dovrebbe, per avere alla sua conseguente, proporzione simile a quella dell' altra antecedente alla sua conseguente.

Sia per esempio l' antecedente A



maggiore del bisogno, dunque si potrãno pigliare dell' antecedenti A, C, l' ugualmente multiplici in una tal maniera, ed anco delle conseguenti B, D nel modo insegnato, che 'l multiplice di A sia maggior del multiplice di B, ma il multiplice di C non sia maggiore, anzi minore del multiplice di D; ma questo è totalmente contro 'l supposto, che è, che tali multiplici sieno sempre concordi, &c Adunque A non è maggior del bisogno: nè anco C, per le stesse ragioni. Onde A a B sta come
3. *Prop.* C a D, cioè queste date grandezze son tra loro proporzionali, il che bisognava dimostrare.

Ed in tal maniera vien provata dal Galileo, come Teorema, la 5. difinizione del V. d' Euclide stimata fin' ora non aver in se l' evidenza degli altri principij Geometrici: onde per l' uso della difinizione suddetta in alcune Proposizioni, sì di questo libro, come del sesto, dell' undecimo, e del duo-

duodecimo, ed in altre ancora d' Archimede, di Pappo, e di tutti gli altri Geometri [che per dimostrare la proporzionalità frà quattro grandezze, si vagliono dell' egualmente multiplici] non dovranno gli Studiosi incontrar per l' avvenire alcuna difficultà.

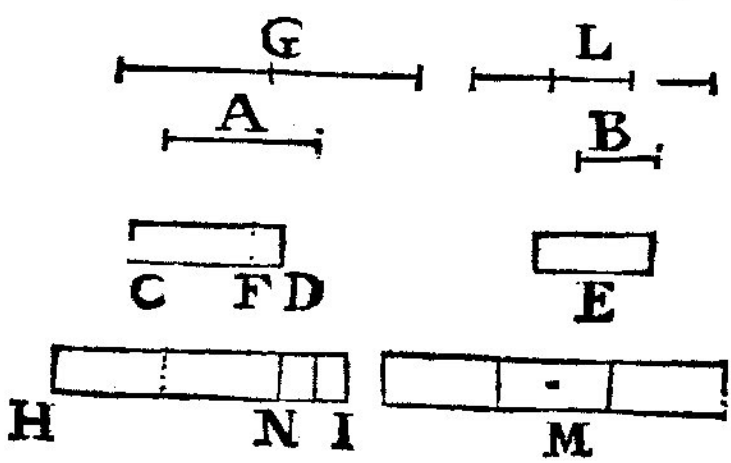
PROPOSIZIONE V.

Se di quattro grandezze date, a due, a due omogenee, preſe l'ugualmente multipli- ci dell'antecedenti prima, e terza ſecondo qualche nume- ro, e preſe in qualche manie- ra l' ugualmente multiplici delle conſeguenti ſeconda, e quarta, il multiplice della prima avanzerà il multiplice della ſeconda, ma quel della terza non avanzerà quel del- la quarta; le date quattro grandezze non ſaranno pro- porzionali, ma in ſenſo del- l'ottava difinizione di que-

7. dif. del V. degli Elem. cioè Conv. della 3 propoſ. di queſto dimoſtr. col Galil.

ſto, la prima alla ſeconda avrà maggior proporzione che la terza alla quarta.

Sieno le quattro grandezze date A prima, e B ſeconda d'uno ſteſſo qualunque genere; C D terza, ed E quarta pur di uno qualunque medeſimo genere, e ſuppongaſi, che preſe in qualche maniera le G, H I



ugualmente multiplici dell'antecedenti A, C D, e le L, M ugualmente multiplici delle conſeguenti B, E, ſi trovi, che la G, multiplice di A ſia maggior della L multiplice di B, ma che la H I multiplice di C D non ſia maggior della M multiplice di E. Dico che le A, B, C D, E, non ſono proporzionali, ma che A a B ha proporzione maggiore

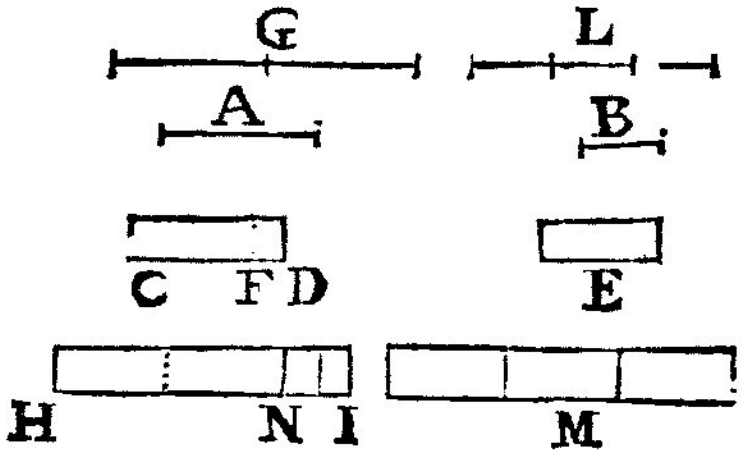
giore di C D ad E, cioè che, in senso dell' ottava difinizione, A è maggiore di quello, che ella dovrebb' esser per avere alla B la medesima proporzione, che ha la C D alla E.

Se è possibile, non sia A maggior del dovere: adunque, o ella sarà precisamente proporzionale, o minor del giusto per esser proporzionale Quanto al primo se ella fosse precisamente aggiustata, e proporzionale colla B, come è la C D colla E, sempre l'ugualmente multiplici della prima, e della terza sarebbero concordi nel pareggiare, o nel mancare, ovvero nell' eccedere l'ugualmente multiplici, della seconda, e della quarta, ma esse non son concordi, conforme a che si è supposto, adunque queste date grandezze non lon proporzionali. *Coroll. della prima Prop.*

Sia ora la A minor del giusto, se possibile è, per avere alla B la medesima proporzione, che la C D alla E. Se questo è dunque, segno è, che la terza C D è maggior del giusto per avere alla quarta E simil proporzione della prima A alla seconda B.

S' intenda per tanto levato dalla

terza C D l'eccesso D F, che la fa essere maggior de' giusto, talmente che la rimanente C F resti appunto proporzionale alla E, come è la A alla B: e dalla H I si prenda la H N multiplice della parte C F, quanto tutta la H I è multiplice di tutta la C D, ovvero quanto è la G multiplice della A; ma già sono le L M egualmente multiplici delle B, E, e la C F alla E si dice stare come la A alla B, adunque la H N multi-



plice di C F s' accorderà con la M multiplice di E, come la G multiplice di A colla L multiplice di B, ma G, per supposizione, supera L, adunque anco H N, supera M, e l' H I supera H N (perchè C D summultiplice di H I è maggiore di C F summultiplice di H N) adunque tanto più H I supera M; il che è con-

Coroll. della prima Prop.

contro 'l ſuppoſto, che fu che G ſuperaſſe L, ed H I non ſuperaſſe M. Non è dunque A minor del giuſto per avere A a B la proporzione, che ha C D ad E; e ſopra ſi dimoſtrò ancora eſſa A non eſſer proporzionale colla B, come è la C D colla E: adunque A neceſſariamente è maggiore del giuſto, cioè, in ſenſo della ſettima difinizione di queſto, A a B ha maggior proporzione di C D ad F. Se adunque di quattro quantità date, &c. il che ſi dovea dimoſtrare.

Ed in tal guiſa riman provata dal Galileo, come Teorema, la 7. difin. del V. d'Euclide, e rimoſſa la difficultà, che arrecava l'uſo di eſſa nella Propoſizione ottava del medeſimo Libro.

PROPOSIZIONE VI.

Una medeſima grandezza alla minor di due altre omogenee diſuguali, ha maggior proporzione che alla maggiore.

Secon. parte della prop. 8. del V. degli Elem. da me dimoſt.

Sieno due grandezze omogenee diſuguali, A maggiore, B minore,

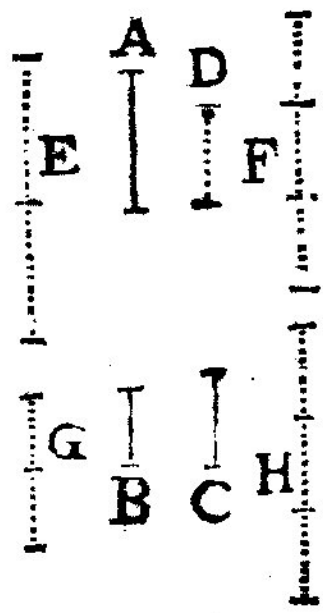
equalunque terza pur ad esse omogenea, C. Dico che la C alla B ha maggior proporzione, che alla A.

Intendasi altra D uguale alla C.

3. *Assioma,* Avrà dunque A a D la medesima proporzione, che A a C.

E perchè A è data maggior di B, ed è una C terza grandezza ad essa omogenea, avrà A a C, ovvero

4. e 5. *Assiom.* a D maggior proporzione, che B alla stessa C: e però delle A, B, come prima, e terza si potranno pigliar l'ugualmente multiplici E, G, e delle D, C come seconda, e quarta l'ugualmente multiplici F, H, talmente che la multiplice E superi la



Prop. 3. F, ma la G non superi la H, anzi le sia minore. Sia dunque ciò fatto. E perchè E supera F, e G è minor di H, sarà H maggior di G, e F minor di E: sicchè considerate ora C come prima grandezza, B come seconda, D come terza, e A come quarta, essendosi prese le H, F, ugualmente multiplici della

della prima, e della terza C, D, e le G, E, ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta B, A, e provato, che H multiplice della prima C ſupera G multiplice della ſeconda B, ma che F multiplice della terza D è minore di E multiplice della quarta A, avrà la prima C alla ſeconda B maggior proporzione, che la terza D alla quarta A, ma C, e D ſono ugua li per conſtruzione, adunque la ſola terza grandezza C alla minore B ha maggior proporzione, che alla A, il che ſi dovea dimoſtrare *Prop.* 5.

E queſta è la ſeconda parte dell' ottava Propoſ. del V. d' Euclide da me dimoſtrata.

PROPOSIZIONE VII.

Di due grandezze, che hanno proporzione ad una terza, quella, che ha maggior proporzione, è maggiore. E quella alla quale la terza ha maggior proporzione, è minore.

Prop. 10. *degli Elemen. dimoſ. con Eucl. de il converſo dell'* 8. *dif. e della* 6. *propoſ. di queſ.*

Abbia la grandezza A alla C maggior proporzione, che la B alla C. Dico, che A è maggior di B.

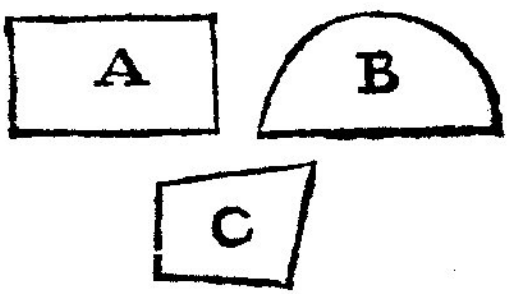
Im-

Imperciocchè, se A non è maggior di B, sarà uguale, o minore. S' ella fosse uguale avrebbe la A alla C la medesima proporzione, che la B alla medesima C, ma essa l'ha maggiore pe 'l supposto, adunque non è A uguale a B.

3. Asdi quest.

Se fosse minore A di B, averebbe A a C minor proporzione, che B a C, ma l' ha maggiore, pe 'l supposto, adunque A non è minor di B: E si è provato non esser uguale, ond'ell'è maggior di B per necessità.

4. Assioma.



Abbia in oltre C a B maggior proporzione, che ad A. Dico, che B è minor di A.

Imperciocchè se B non fosse minor di A, o sarebbe uguale, o maggiore. Se uguale, avrebbe C a B la medesima proporzione della stessa C ad A, ma l'ha maggiore, pe 'l dato, dunque non è B uguale ad A.

3. Assioma.

6. Propos.

Se fosse B maggior di A, avrebbe C a B minor proporzione, che ad A,

ma

ma l' ha maggiore, pe 'l ſuppoſto, non è dunque B maggior di A, non è anco uguale ad A, come poco ſopra ſi è dimoſtrato, e però B è neceſſariamente minor di A, il che biſognava provare.

E queſta è la dimoſtrazione d' Euclide della Propoſ. 10. *del V.*

PROPOSIZIONE VIII.

Se tra le grandezze omogenee, quante ſi vogliano antecedenti ſaranno proporzionali ad altrettante conſeguenti, ciaſcuna di ciaſcuna; come è una dell' antecedenti alla ſua conſeguente, così ſaranno tutte l'antecedenti 'nſieme a tutte 'nſieme le loro conſeguenti.

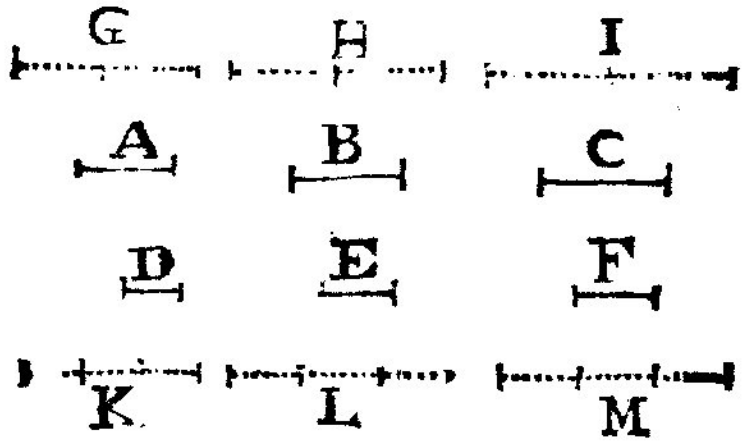
Prop. 12. *del V. degli Elemen. dimoſt. con Eucl.*

Sieno tra le grandezze omogenee quante ſi vogliano antecedenti A, B, C, con altrettante conſeguenti D, E, F, e ciaſcuna di ciaſcuna ſia nella medeſima proporzione, cioè ſtia A a D, come B ad E, e come C ad F. Dico, che la proporzione di una

di una ad una, per esempio di A a D è simile alla proporzione di tutte insieme le A, B, C, a tutte 'nsieme le D, E, F.

Prendansi le G, H, I, ugualmente multiplici quanto si vuole delle A, B, C, e le K, L, M, in qualunque modo pur egualmente multiplici delle D, E, F.

Perchè dunque A a D sta come B, ad E, e delle A, B, sono le G, H,



ugualmente multiplici, siccome delle D, E, sono ugualmente multiplici le K, L, si accorderà la G colla K, come la H con la L in avanzare, o in mancare, o in pareggiarsi. Per le medesime ragioni sarà concorde H con L come I con M, e per tanto s' accorderanno tutte 'nsieme con tutte 'nsieme, come una con una, cioè se G è uguale

Coroll. della prima Prop.

a K

a K, ancora le G, H, I, insieme prese saranno uguali alle K, L, M insieme prese, e se G è maggior di K, anco l'insieme G, H, I, saranno maggiori dell' insieme K, L, M, e se è minore, minori. Ma essendo G multiplice di A, come H di B, e come I di C; la sola G sarà multiplice della sola A, come la somma G, H, I della somma A, B, C, e per la stessa ragione la K sarà multiplice della D, come la somma K, L, M della somma D, E, F: ed ora s' è provato, che G multiplice di A s'accorda con K multiplice di D in quel modo che la somma G, H, I multiplice della somma A, B, C s'accorda con la somma K, L, M multiplice della somma D, E, F, adunque la grandezza A alla D sta come la somma A, B, C, alla somma D, E, F. Onde se grandezze omogenee quante si vogliano saranno proporzionali ad altrettante, la proporzione, che è tra una delle antecedenti alla sua conseguente, sarà simile alla proporzione, che è tra tutte l'antecedenti insieme a tutte insieme le conseguenti, il che bisognava dimostrare.

Prop. 2

Prop. 4.

Eque-

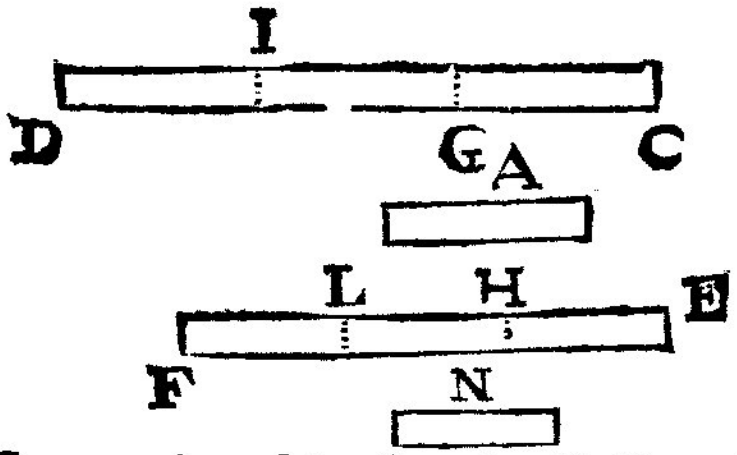
E questa è la dimostrazione d' Euclide della Prop. 12. del V.

PROPOSIZIONE IX.

Prop. 15 del V. lib. d egli Elem. dimos. con Eucl.

Le grandezze omogenee hanno tra loro la medesima proporzione delle loro ugualmente multiplici: Cioè le parti stanno fra loro come le ugualmente multiplici.

Delle grandezze omogenee A, N, sia la D C multiplice della A, come la F E della N. Dico che D C ad F E sta come A ad N.



Imperciocchè essendo D C multiplice di A come F E di N dividendo le D C, F E nelle parti uguali alle A, N, tante parti saranno nella D C uguali ad A, quante nella

F E uguali ad N. Sieno per tanto le parti in D C le D I, I G, G C, ed in F E ſiano le F L, L H, H E. Eſſendo dunque ciaſcuna delle D I, I G, G C uguali ad A ſaranno quelle uguali tra loro, ſiccome tutte le F L, L H, H E, tra loro uguali, e però come D I ad F L, così ſarà I G ad L H, e così G C ad H E; e come una dell' antecedenti ad una delle conſeguẽti, così tutte a tutte. Onde come D I ad F L, ovvero come A a N così ſtarà D C multiplice di A ad F E multiplice di N. Adunque le grandezze omogenee ſummultiplici ſono nella medeſima proporzione delle loro ugualmente multiplici, il che ſi dovea dimoſtrare. 3. *Aſſioma.* *Prop.* 8.

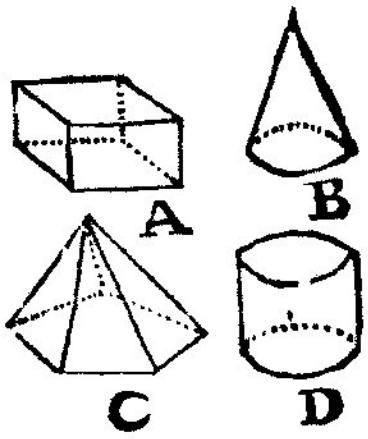
E queſta è la prova d' Euclide della prop. 15. *del V. degli Elementi, la quale fors' anco ſi poteva ſenza ſcrupolo riporre fra gli Aſſiomi, eſſendo per ſe ſteſſo manifeſto, che qual proporzione, o riſpetto, o relazione ha la prima di due grandezze omogenee verſo la ſeconda, tale l' hanno due delle prime verſo due delle ſeconde, e tale tre verſo tre, e venti verſo venti, &c.*

Pro-

PROPOSIZIONE X.

Prop. 14. del V degli Elemen. dimoſ. con Eucl.

Se di quattro grandezze omogenee la prima alla ſeconda avrà la medeſima proporzione, che la terza alla quarta, e ſia la prima maggior della terza, anco la ſeconda ſarà maggior della quarta, e ſe è uguale, uguale, e ſe è minore, minore.



Sieno quattro grãdezze omogenee A, B, C, D, e la prima A alla ſeconda B ſtia come la terza C alla quarta D, e ſia la prima A maggiore della terza C. Dico, che anco la ſeconda B è maggiore della quarta D; e che ſe è uguale, uguale, e ſe è minore, minore.

4. Aſſioma.

Poichè, ſe A ſarà maggior di C, avrà A a B maggior proporzione che la C alla medeſima B, ma come

me l' A alla B così fu data C a D, adunque anco C a D ha maggior proporzione della medesima C alla B, e però D è minor di B, cioè B maggior di D. 5. *Ass.* 7. *Prop.*

Ma se A sarà uguale a C, avrà l' A alla B la medesima proporzione della C alla stessa B, ma come A a B, così sta C a D per 'l supposto, adunque anco C a D ha la medesima proporzione della stessa C alla B: Onde la D è uguale alla B, cioè la B alla D. 3. *Ass.* 5. *Ass.* 3. *Ass.*

Se finalmente A sarà minor di C, avrà l' A alla B minor proporzione della C alla medesima B, ma come A a B, così fu posta esser C a D, adunque anco C a D ha minor proporzione della stessa C alla B, sicchè D è maggior di B, cioè la B minor della D. Se dunque di quattro grandezze omogenee la prima alla seconda, &c. il che si dovea dimostrare. 4. *Ass.* 5. *Ass.* *Prop.* 6.

E questa è la prova d' Euclide della Prop. 14 *del V libro.*

PROPOSIZIONE XI.

Se quattro grandezze a due a due omogenee saranno pro-

por-

Coroll. della 4 prop. del V. degli Elem. dimoſ. con Eucl.

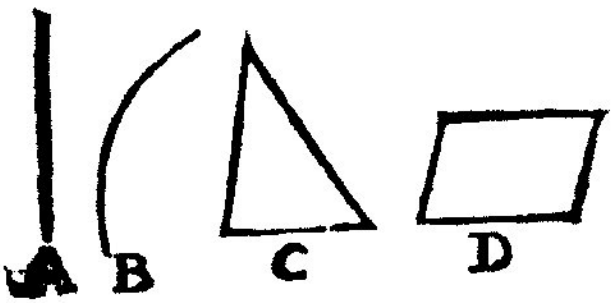
proporzionali, e *convertendole* ſaranno proporzionali.

Sia come A a B d'un medeſimo qualunque genere, così C a D pur di un ſolo qualunque genere Dico che anco B ad A ſta come D a C.

E queſto modo d'argomentare dicaſi. *Convertendo*.

Coroll. della prima Prop.

Eſſendoſi dimoſtrato, che di queſte quattro grandezze proporzionali A, B, C, D, ſempre quali ſi ſiano ugualmente multiplici della pri-



ma, e della terza A, C, s'accordano con quali ſi ſieno ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta B, D, in avanzare, o in mancare, o in pareggiarſi; è manifeſto, che queſte medeſime multiplici preſe converſamente ſi accordano ancor ſempre in mancare, o in avanzare, o in pareggiarſi. E però conſiderando le quantità B, D, come prima, e terza, e le A, C, come

me

me ſeconda, e quarta, eſſendochè ſempre l' ugualmente multiplici di quelle s' accordan coll' ugualmente multiplici di queſte, avrà la prima B alla ſeconda A la medeſima proporzione, che la terza D alla quarta C. Laonde ſe quattro grandezze a due a due omogenee ſon proporzionali, preſe al contrario, ovvero *Convertendo* ſaranno ancora proporzionali, il che biſognava dimoſtrare. *4. Propoſ.*

E queſta è la prova d' Euclide del Corollario della Prop. 10. *del V.*

PROPOSIZIONE XII.

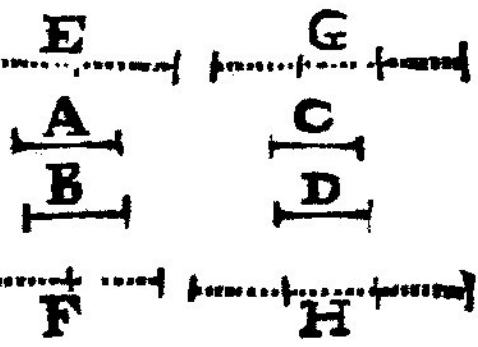
Se quattro grandezze omogenee ſaranno proporzionali, ancora *permutandole* ſaranno proporzionali. *Prop.* 16. *del V. degli Elemen.*

Sieno le date quattro grandezze omogenee proporzionali A. B, C, D, cioè ſtia l' antecedente A al ſuo conſeguente B, come l' antecedente C al ſuo conſeguente D. Dico che ancora l' antecedente A all'antecedente C ſta come 'l conſeguente B al conſeguente D. *dimoſ. con Eucl.*

E queſto modo d' argomentare dicaſi *Permutando*.

Pren-

Prendansi delle A,B, l'ugualmente multipli-



ci E F, secondo qualunque numero, siccome delle C, D, l'ugualmente multiplici G,H, pur secondo qualunque numero.

Starà dunque come la multiplice E all' ugualmente multiplice F, così la parte A alla parte B, ma anco C a D s'è posto esser come A a B, adunque E ad F sta come C a D, ma anco la multiplice G all' H sta come C a D, adunque E ad F sta similmente come G ad H. Onde se la prima E fosse uguale alla terza G, anco la seconda F sarebbe uguale alla quarta H, se maggiore, maggiore, e se minore, minore; sicchè le E, F, convengono con le G H, in avanzare, o in mancare, o in pareggiarsi, ma quelle son ugualmente multiplici delle A, B. e queste delle C, D; adunque A a C sta come B a D; e però se quattro grandezze omogenee son fra loro proporzionali ancora *Permutandole* sono proporzionali.

Prop.9.

5. Ax.

Prop. 9.

Ax.

Prop. 10.

E que-

E questa è la dimostrazione d'Euclide della Prop. 16. del V Lib.

ALTRIMENTI

Senza l'ugualmente multiplici.

Altra dimos. aggiunta da me.

Poste le medesime cose. La proporzione di A a C è composta della proporzione di A a B, e della proporzione di B a C, ma come A a B, così si è dato stare C a D, adunque la proporzione di A a C è composta di quella di C a D, e di quella di B a C, ma anco la proporzione di B a D è composta delle medesime proporzioni di C a D, e di B a C; adunque le proporzioni di A a C e di B a D, essendo composte di due simili proporzioni, sono simili fra di loro, il che, &c.

Dif. 14.

Assioma 9.

PROPOSIZIONE XIII.

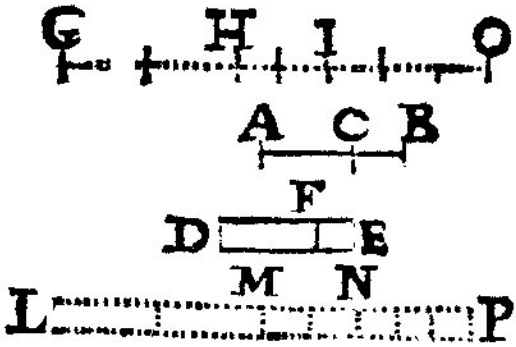
Prop. 17 V degli Elemen. dimos. con Eucl.

Se quattro grandezze a due a due omogenee saranno cõposte proporzionali, *e dividendole* saranno proporzionali.

Sieno due grandezze omogenee, e composte 'nsieme A B, B C, ed altre due pur omogenee, e composte 'nsieme D E, E F, e sien tra loro proporzionali, cioè come A B a B C così D E, ad E F. Dico che, *dividendole*, anco A C a C B sta come D F ad F E.

E questo modo d' argomentare dicasi, *Dividendo*, *o per la divisione della proporzione*.

Prendinsi delle A C, C B, e delle D F, F E, le G H, H I, e le L M,



M N, ugualmente multiplici second'un medesimo qualunque numero; ed in oltre delle C B, F E si prendano l' ugualmente multiplici I O, N P, pur second'uno stesso qualunque numero.

Perchè dunque l'H I è multiplice di C B, come l' M N di F E, il numero delle C B nella H I sarà uguale al numero delle F E nella M N. Similmente, perchè I O è multiplice

di

di CB, come NP di FF; il numero delle medeſime CB nella IO ſarà uguale al numero delle FE nella NP Se dunque il numero in HI è uguale al numero in MN, ed il numero in IO al numero in NP, tutto 'l numero delle CB in HO, ſarà uguale a tutto 'l numero dell' FE in MP. Onde le HO, MP ſono ugualmente multiplici delle CB, FE.

E perchè GH è multiplice di AC, come HI di CB, ſarà il compoſto GI multiplice del compoſto AB, come una di una, cioè come GH di AC, ovvero come LM di DF, cioè come MN di FE, ovvero come 'l compoſto LN del compoſto DE. Ma ſta come la prima AB alla ſeconda BC, così la terza DE alla quarta EF, e della prima, e della terza ſi ſon provate ugualmente multiplici le GI, LN; e della ſeconda, e della quarta ſi provaron di ſopra ugualmente multiplici le HO, MP, adunque l'ugualmente multiplici della prima, e della terza ſaranno concordi coll' ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta; cioè ſe GI è uguale ad HO, anco LN ſarà uguale ad MP; e ſe

Prop. 2.

Coroll. della prim.

è maggiore, maggiore, e ſe è minore, minore; onde tolte le pa· ti comuni H I, M N, anco il reſiduo G H s' accorderà col reſiduo I O, come il reſiduo L M col reſiduo N P in pareggiarſi, o in avanzare, o in mancare: E però conſiderata A C come prima grandezza, C B come ſeconda, D F come terza, ed F E come quarta, eſſendoſi preſe le G H, L M ugualmente multiplici della prima, e della terza, e le I O, N P ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta, e dimoſtrato, che quella della prima concorda con quella della ſeconda, come quella della terza con quella della quarta, ſtarà la prima alla ſeconda come la terza alla quarta, cioè la A C alla C B come la D F alla F E. E però quando le grandezze ſono compoſte proporzionali, *e dividendole* ſon ancora proporzionali, il che, &c.

Prop. 4

E queſta è la dimoſtrazione d' Euclide della Prop. 17. del V. Libro.

COROLLARIO.

Eſſendoſi dimoſtrato quì in primo luogo, che quando la

HI è multiplice della CB, come la MN dell' FE, e che quando la IO è multiplice della ſteſſa CB, come la NP della medeſima FE, il compoſto HO è multiplice della detta CB, come 'l compoſto MP della ſteſſa FE, ſi cava, che quando la prima è multiplice della ſeconda, come la terza della quarta, e la quinta della ſeconda, come la ſeſta della quarta, anco 'l compoſto della prima, e quinta è multiplice della ſeconda, come 'l compoſto della terza, e ſeſta è multiplice della quarta. Il che, &c.

Prop. 2 del V. degli Elemen. dedotta da me.

Eſta è la dimoſtrazione della Prop 2 del V. d'Euclide da me dedotta.

Scolio del Clav. alla Prop. 17 del V. degli Elemen.

AGGIUNTA I.

Dal dimoſtrato fin quì facilmente ſi deduce, che quando AB a BC ſta come DE ad EF, anco BC a CA ſta come EF ad FD.

E queſto modo d'argomentare dicaſi. *Per divisione converſa di proporzione.*

Prop. 13. Perchè eſſendo A B a B C, come D E ad E F, dividendo ſtarà A C a C B come D F ad F E, e convertendo B C a C A ſtarà come E F ad *Prop.* 11. F D, il che, &c.

AGGIUNTA II.

Scolio del Clav. alla Prop. 17. *del V. degli Elemen. Prop.* 11. *Prop.* 13. *Prop.* 11.

Si cava in oltre, che quando B C a B A ſta come E F ad E D, anco B C a C A ſta come E F ad F D.

E queſto modo d'argomentare dicaſi, *Per diviſion contraria di proporzione.*

Perchè eſſendo B C a B A, com' E F ad F D, convertendo A B a B C ſtarà come D E ad E F, e dividendo A C a C B come D F ad F E, e di nuovo convertendo B C a C A ſtarà come E F ad F D, il che, &c.

PROPOSIZIONE XIV.

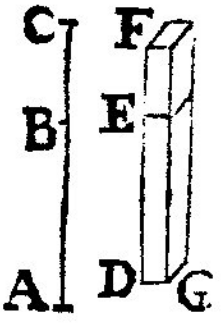
Se quattro grandezze a due a due omogenee ſaranno divi-

ſe

ſe proporzionali, e *componendole* ſaranno proporzionali.

Prop. 18 del V. degli Elemen. dimoſ. da me ſenza la prop. 10. di queſto della quale ſi ſerve Eu.

Sieno due grandezze omogenee AB, BC, inſieme congiunte, ed altre due ſimilmente omogenee unite inſieme DE, EF, e tra loro ſieno proporzionali, cioè ſtia come AB a BC così DE ad EF. Dico che componendole come AC a CB così ſta ancora DF ad FE.



E queſto modo d' argomentare dicaſi, *componendo*.

Imperciocchè ſtia come AC a CB, così qualch' altra GF all' FE, che neceſſariamente GF ſarà maggior di FE eſſendochè anco AC è maggior di CB.

Perchè dunque ſi dice come AC a CB così ſtare GF ad FE, dividendole, ſtarà come AB a BC così GE ad EF; ma come AB a BC così ſta ancora DE ad EF per la ſuppoſizione, adunque GE ad EF ſtarà, come DE alla medeſima EF, ſicchè le GE, DE ſono tra loro uguali, onde aggiunta loro di comune la EF ne verrà la GF uguale

Prop. 13.

6. Aſ.

7. Aſ.

alla DF, ma come AC a CB, così si pose stare GF ad FE, adunque anco AC a CB sta come DF (che è uguale a GF) ad FE. Sicchè se le grandezze divise sono proporzionali, e composte ancora sono proporzionali, il che, &c.

E così vien da me dimostrata la prop. 18. del V. d' Euclide.

AGGIUNTA I.

Scolio del Clav. alla Prop. 18. del V. degli Elemen.

Qui può dedursi, che quando AB a BC sta come DE ad EF divisamente prese, anco CA ad AB sta come FD a DE.

E questo modo d' argomentare dicasi, *per compositzion conversa di proporzione.*

Perchè essendo AB a BC come DE ad EF, convertendo anco CB a BA starà come FE ad ED, e componendo CA ad AB starà come FD a DE, il che, &c.

Prop. 11. Prop. 14.

AGGIUNTA II.

Similmente si ha, che quando AB a BC divisamente sta come DE ad EF, ancora AB ad AC sta come DE a DF.

Eque-

E queſto modo d'argomentare dicaſi, *per compoſizion contraria di proporzione*.

Perchè eſſendo A B a B C, come D E ad E F, convertendo B C a B A ſtarà come E F, ad E D, e componendo C A ad A B ſtarà come F D a D E, e di nuovo convertendo A B ad A C ſtarà come D E a D F. Il che, &c. *Prop.* 11. *Prop.* 14. *Prop.* 11.

E queſto è lo Scolio del Clavio alla Prop, 18. *del V. degli Elementi.*

PROPOSIZIONE XV.

Se quattro grandezze a due a due omogenee ſon compoſte proporzionali, e *per la converſione della proporzione* ſaranno proporzionali. *Corol. della Prop.* 19. *del V. degli Elemen. imoſ. col Clav.*

Sieno due grandezze compoſte A B, B C, proporzionali a due altre compoſte D E, E F. Dico che anco B A ad A C ſta come E D a D F.

E queſto modo d'argomentare dicaſi, *per converſione della proporzione*.

Perchè eſſendo per ſuppoſizione A B a B C come D E ad E F, dividendo anco A C a C B ſtarà come D F ad F E, e convertendo B C a C A come E F ad F D, e componendo B A ad A C come E D a D F. Onde quando le grandezze ſon compoſte proporzionali, anco *per converſione della proporzione* ſon fra loro proporzionali, il che, &c.

Prop. 13.
Prop. 11.
Prop. 14.

E così vien dimoſtrato dal Clavio il Corollario della Prop. 19. del V. d'Euclide.

PROPOSIZIONE XVI.

Prop. 19. del V. degli Elemen. dimoſt. con Eucl.

Se nelle grandezze omogenee ſarà come tutta a tutta, così la parte levata dall' una alla parte levata dall' altra, la rimanente alla rimanente ſtarà come tutta a tutta, o come la levata alla levata.

Sia come tutta la grandezza AB a tutta la C D del medeſimo genere, così la parte levata BE alla parte levata D F. Dico che la rimanente A E alla rimanente C F ſta pure come

me tutta la AB a tutta la CD, o come la parte BE alla parte DF.

Imperciocchè essendo per supposizione, com' AB a CD, così BE a DF, sarà permutando AB a BE come CD a DF, e dividendo AE ad EB come CF ad FD, e di nuovo permutando la rimanente AE alla rimanente CF sarà come la parte levata EB alla parte levata FD, ovvero come tutta la AB a tutta la CD

Prop. 12. *Prop.* 13. *Prop.* 12.

Se dunque starà come tutta a tutta, così la parte levata alla parte levata, anco la rimanente alla rimanente starà come tutta a tutta, o come la parte levata alla levata, il che si doveva dimostrare.

E quest' è la dimostrazione d'Euclide della Prop. 19. del V. Libro.

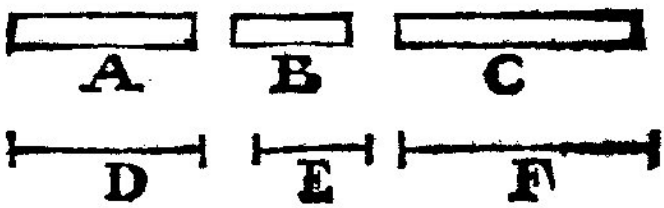
PROPOSIZIONE XVII.

Se saranno tre grandezze omogenee, ed altrettante pur tra loro omogenee, e le coppie corrispondenti di ciascun'

Prop. 20. del V. degli Elemen. dimoſt. con Eucl.

ordine ſieno proporzionali, e ſia la prima d' un ordine maggiore della ſua terza, ſarà anco la prima dell' altr' ordine maggior della ſua terza; e ſe è uguale, uguale; e ſe è minore, minore.

Sieno tre grandezze A, B, C, omogenee d' un ordine, ed altrettante D, E, F, omogenee d' un altro, e ſtia come la prima A alla ſeconda B, così la prima D alla ſe-



conda E, e come la ſeconda B alla terza C, così la ſeconda E alla terza F, e ſia in primo luogo A maggior di C. Dico che ancora D è maggior di F.

Imperciocchè eſſendo la prima A poſta maggior della terza C, la proporzione di A a B ſi dirà maggiore della proporzione di C a B: ma la proporzione di D ad E è data ſi-

4. Aſſioma.

ta ſimile a quella di A a B adunque, anco D ad E ha maggior proporzione di C a B E perchè B a C ſta come E ad F, e convertendo ſta C a B come F ad E, eſſendo provata la proporzione di D ad E maggior di quella di C a B, ſarà la medeſima proporzione di D ad E maggior' ancora di quella di F ad E; e però ſarà la prima D maggior della terza F. 5. Aſſ. Prop. 11. 5. Aſſ. Prop. 7.

Ma ſe la prima A ſi porrà uguale alla terza C: Dico pure che la prima D è uguale alla terza F.

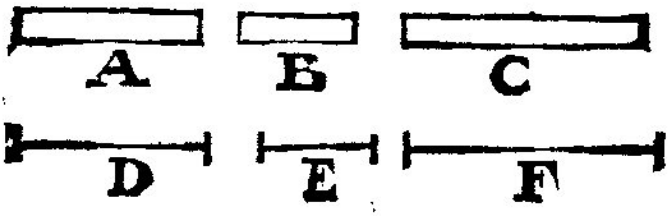
Perchè, eſſendo A uguale a C, la proporzione di A a B ſarà come quella di C a B, ma come A a B così D ad E, per ſuppoſizione, dunque anco D ad E ſta come C a B. E perchè come B a C, così fu data E ad F, e convertendo ſta come C a B, così F ad E, ſtarà ancora D ad E come F ad E, e però anco D ſarà uguale ad F. 3. Aſſ. 5. Aſſ. Prop. 11. 5. Aſſ.

Se finalmente la prima A ſi porrà minor della ſua terza C, Dico che anco la prima D è minor della ſua terza F.

Imperciocchè eſſendo dato B a C come E ad F, ed A a B come D ad E, convertendole ancora C a B Prop. 11.

ſtarà

ſtarà come F ad E, e B ad A come E a D; ma perchè A ſi pone minor di C, ſarà C maggior di A: onde per la prima parte di queſta dimoſtra-



zione eſſendo la prima C maggior della terza A, ſarà ancora la prima F maggior della terza D; cioè convertendo, eſſendo A minor di C ſarà anco D minor di F, il che, &c.

E queſta è la dimoſtrazione d' Euclide della Prop. 20. del V. Lib.

PROPOSIZIONE XVIII.

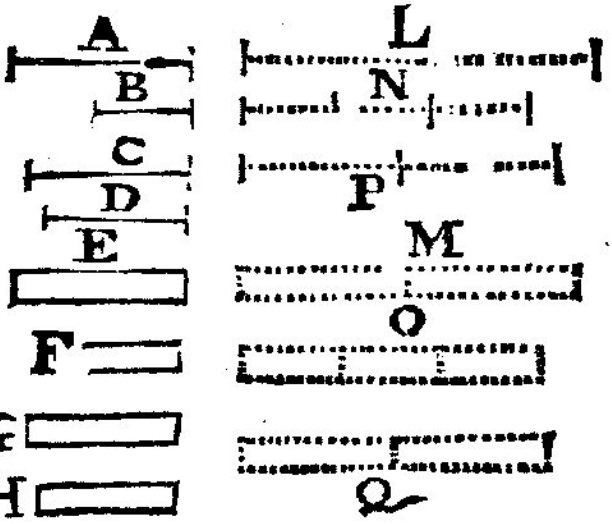
Prop. 22. del V. degli Elemen. dimoſ. con Eucl.

Se ſaranno quante ſi vogliano grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, e le coppie ordinatamente corriſpondenti di ciaſcun ordine ſieno tra loro nella medeſima proporzione, ancora *per l' egualità ordinata* ſaranno pro-

por-

zionali, cioè la prima del prim' ordine all' ultima ſtarà come la prima del ſecondo all' ultima.

Di due ordini dati d'ugual numero di grandezze omogenee ſia l'uno A, B, C, D, e l'altro E, F, G, H, e ſia la coppia A, B, proporzionale alla E, F, la B, C, alla F, G; e la C, D, alla G, H. Dico, che la

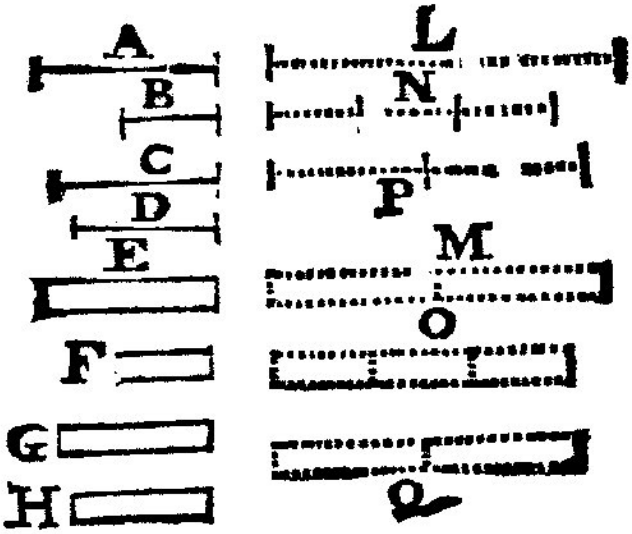


prima grandezza A all' ultima D ſta come la prima E all' ultima H.

E queſto modo d' argomentare dicaſi, *per l' egualità in proporzione ordinata*.

Si conſiderino prima le tre prime grandezze A, B, C, del primo ordine, e le tre prime E, F, G, del ſecon-

ſecondo: e delle due omologhe A, E, s' intendano preſe qualunque ugualmente multiplici L, M; ſiccome dell' omologhe B, F, qualunque egualmente multiplici N, O; ed anco delle C, G, quali ſi ſieno ugualmente multiplici P, Q.



E perchè la grandezza A alla B ſi pone ſtare come E ad F, e delle A, E, ſono egualmente multiplici le L, M, e delle B, F egualmente multiplici le N, O, ſtarà ancora L ad N come M ad O. E per la medeſima ragione N a P ſtarà come O a Q. Sono dunque tre grandezze L, N, P, d' un ordine, e tre M, O, Q, d' un altro, ed a coppia a coppia ſi ſon provate proporzionali, però ſe la prima L ſupera la terza P, anco la quarta M ſuperà

Prop. 1.

rerà la ſeſta Q, e ſe ſarà uguale, uguale, e ſe minore, minore; ma le L, M, ſon preſe egualmente multiplici delle A, E, come prima, e terza; e le P, Q delle C, G, come ſeconda, e quarta; e s'è ora provato, che la multiplice L della prima s'accorda colla multiplice P della ſeconda come la M della terza coſla Q della quarta in avanzare, o in mancare, o in pareggiarſi: adunque ſtarà la prima alla ſeconda, come la terza alla quarta, cioè la A alla C come la E alla G. *Prop.* 17. *Prop.* 4.

Conſiderando poi le tre A, C, D, e le tre E, G, H. Eſſendo ora provato, che A a C ſta come E a G, e ſtando, per ſuppoſizione, C a D come G ad H; nel modo, che s'è dimoſtrato delle tre A, B, C, e delle tre E, F, G, che la prima all'ultima ſta come la prima all'ultima, nel medeſimo ſi proverà delle tre A, C, D, e delle tre E, G, H, che A a D ſta come E ad H. E ſe rimaneſſero altre date grandezze in queſti ordini, ſi continuerebbe la dimoſtrazione nel modo ſteſſo. E però quando in due ordini d' ugual numero di grandezze omogenee le coppie corriſpondēti ſono proporzio-

zionali, la prima grandezza all'ultima del prim' ordine ſta *per l' ugualità in proporzione ordinata* come la prima all' ultima del ſecondo ordine, il che ſi doveva, &c.

E queſt' è la dimoſtrazione d' Euclide della Prop. 22. del V. Libro.

ALTRIMENTI

Agg. da me

Senza l' ugualmente multiplici.

Date le medeſime coſe. La proporzione della prima A all' ultima D è compoſta di tutte le proporzioni di mezzo di A a B di B a C di C a D. Similmente la proporzione della prima E all' ultima H è compoſta di tutte le proporzioni di mezzo tra E, ed F, tra F, e G, tra G, ed H, ma nel prim' ordine le proporzioni componenti ſon le medeſime, cioè ſimili alle proporzioni componenti nel ſecondo, ciaſcuna a ciaſcuna ordinatamente, adunque anco le proporzioni compoſte di eſſe ſaranno ſimili fra di loro, cioè la prima A all' ultima D ſtarà come la prima E all' ultima H.

Prop. 14.

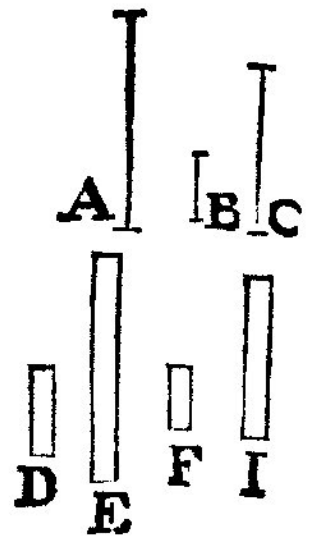
5. Aſſioma.

PRO-

PROPOSIZIONE XIX.

Se saranno tre grandezze tra loro omogenee, ed altrettante pur tra loro omogenee, e le coppie di ciascun' ordine sieno proporzionali, ma prese con ordine perturbato: ancora *per l' ugualità perturbata* saranno proporzionali.

Prop. 13 del V. degli Elemen. dimos. senza le multiplici, e senza la propos. 21. d' Euc. secondo la prop. 11. de Tratt. delle Propor. del Torr.



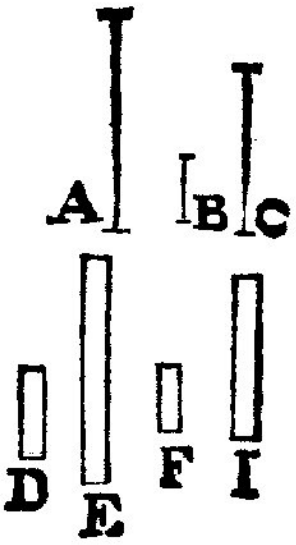
Sieno tre grandezze omogenee A, B, C, ed altrettante tra loro omogenee D, E, F, che a due a due sien nella medesima proporzione, ma con ordine perturbato, cioè A a B stia come E, ad F, e B a C come D ad E. Dico che ancora A a C sta come D ad F.

E questo modo d' argomentare dicasi, *Per l'ugualità in proporzione perturbata*.

Immaginiamoci esser come B a C, ovve-

ovvero come D ad E (che per ſuppoſizione ha la medeſima proporzione di B a C) così F ad un' altra grandezza I.

Per la domãda di queſto,



Saranno dunque le quattro grandezze D, E, F, I, proporzionali.

E perchè ſta come A a B, così E ad F, per ſuppoſizione, e come B a C, così F ad I, per conſtruzione, ſarà per l' ugualità in proporzione ordinata, A a C, come E ad I. Ma per eſſer le D, E, e le F, I quattro grandezze proporzionali, ſtarà permutando D ad F come E ad I; ma ancora A a C s' è provato ſtare come E ad I, adunque la proporzione di A a C è la medeſima, che di D ad F convenendo l'una, e l' altra colla proporzione di E ad I. E però ſe ſaranno tre grandezze omogenee, ed altrettante, &c. il che ſi doveva dimoſtrare.

Prop. 18.

Prop. 12

6. Aſ-

E così dal Torricel. vien dimoſtrata la Prop. 23. del V. d' Euclide.

AL-

ALTRIMENTI

Senza la Conſtruzione.

La proporzione di A a C ſi compone della proporzione di A a B, ovvero di E ad F, e di B a C, ovvero di D ad E; ma anco la proporzione di D ad F ſi compone delle medeſime proporzioni di E ad F, e di D ad E, adunque la proporzione di A a C è ſimile alla proporzione di D ad F, eſſendo l' una, e l' altra compoſta delle medeſime proporzioni. *Aſſioma 9.*

COROLLARIO.

Dall' eſſerſi dimoſtrato, che A a C ſta come D ad F, ſi deduce, che ſe ſaranno tre grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, che a due a due ſien proporzionali con proporzione perturbata, e che per l'ugualità, ſia la prima maggior della terza nel *Prop. 21 del V. degli Elemen. dedotta da me come roll.*

ſuo ordine, anco la quarta ſarà maggior della ſeſta nel ſuo, e le uguale, uguale, e ſe minore, minore. Poichè proprietà delle proporzionali è fra l' altre, di accordarſi fra loro i termini omologhi ad eſſer uguali, o maggiori, o minori.

E così vien provata da me la Prop. 21. del V. d' Euclide.

PROPOSIZIONE XX.

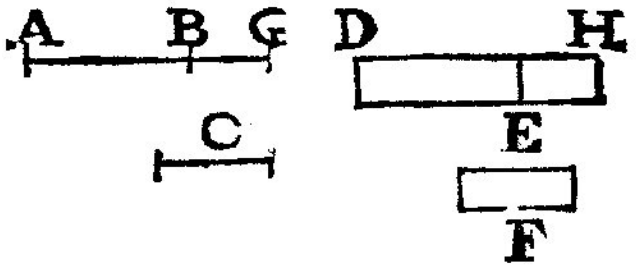
Prop. 24. del V. degli Elemen. dimoſ. con Eucl.

Se in due ordini omogenei di grandezze, la prima alla ſeconda nel prim' ordine avrà la medeſima proporzione, che la terza alla quarta nel ſecondo, e la quinta alla ſeconda nel primo la medeſima, che la ſeſta alla quarta nel ſecondo, ancora 'l compoſto della prima, e quinta alla ſeconda del primo avrà la medeſima pro-

por-

porzione, che'l composto della terza, e sesta alla quarta del secondo.

Sia nel prim' ordine di grandezze omogenee la prima A B alla seconda C come nel secondo di omogenee la terza D E alla quarta F, e la quinta B G alla seconda C, come la sesta E H alla quarta F. Dico che il composto della prima, e quinta



A B, B G alla seconda C sta come 'l composto della terza, e sesta D E, E H alla quarta F.

Imperciocchè essendo B G a C, come E H ad F, sarà convertendo C a B G come F ad E H. E perchè A B a C sta come D E ad F, per la suppositione, e C a B G sta come F ad E H, per lo dimostrato, sarà per l'ugualità in proporzione ordinata A B a B G come D E ad E H, e componendo A G a G B come D H ad H E, e sta G B a C come

Prop. 11.

Prop. 18.

Prop. 14.

H E

H E ad F, per la ſuppoſizione; adunque di nuovo per l'ugualità A G e C ſtarà come D H ad F. Se dunque la prima alla ſeconda ha la medeſima proporzione, &c. il che ſi doveva dimoſtrare.

Prop. 18.

E queſt' è la dimoſtrazione d' Euclide della Prop. 24. del V. Libro.

PROPOSIZIONE XXI.

Prop. 25 del V. degli Elemen. dimoſ. con Eucl.

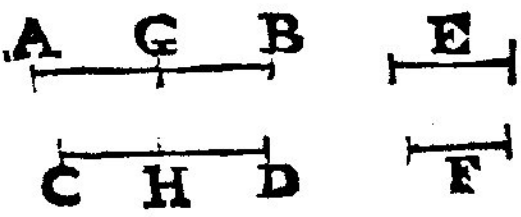
Se quattro grandezze omogenee ſon proporzionali, la maſſima, e la minima di eſſe preſe inſieme, ſon maggiori delle due rimanenti inſieme.

Sieno le quattro grandezze omogenee A B, C D, E, F, e ſtia come A B a C D, così E ad F, e ſia la A B la maſſima tra eſſe, ed F la minima. Dico che la ſomma delle A B, F, è maggior della ſomma delle C D, E.

Tagliſi dalla A B la grandezza A G uguale ad E, e dalla C D la C H uguale ad F.

Sarà dunque la A G alla C H come E ad F, ovvero come A B a C D, per la ſuppoſizione. Perchè dun-

dunque tutta la AB, a tutta la CD sta come la parte levata AG, alla levata CH, sarà ancora tutta la AB a tutta la CD come la rimanente GB alla rimanente HD. Ma tutta la AB è maggior di tutta la CD (per essersi posta AB la massima) adunque la rimanente GB sarà maggior della rimanente HD. E perchè AG, ed E sono uguali, aggiungendo loro le uguali F, CH, cioè la F alla AG, e la CH alla E, ne verranno le AG ed F insieme, uguali alle E e CH insieme: onde aggiunta alla prima somma la maggiore GB, ed alla seconda somma la minore HD, ne verranno le AB, ed F insieme, maggiori delle CD, ed E insieme, cioè la massima colla minima maggiore delle due rimanenti insieme. Se dunque saranno quattro grandezze proporzionali, &c. il che si doveva dimostrare. *prop.* 16.



E quest' è la dimostrazione d' Euclide della Prop. 25. del V. Libro.

IL FINE

Degli Elementi d'Euclide della Scienza Universale delle Proporzioni.

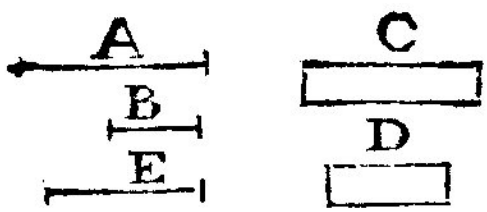
AVVERTIMENTO.

Fin quì si son posti tutti i Teoremi del V. Libro datici da Euclide, eccettuatine il terzo, il quinto, e 'l sesto intorno alle ugualmente multiplici, i quali, per esser Lemmi d' altri quì diversamente provati, e non aver uso altrove, ci è parso ben di tralasciare come inutili. Ma perchè alcuni degl' Interpreti d' Euclide conobbero, che per l' intelligenza d' Archimede, d' Apollonio, e d' altri gravi Autori Classici era necessaria la cognizione ancora d' altre Proposizioni supposte da essi, come se note fossero per mezzo degli Elementi, e queste per la maggior parte furono poi dimostrate da Pappo Alessandrino, e altre dal Campano; perciò i medesimi Interpetri le aggregarono al numero di quelle del V. Libro. Di quì è che

che noi ancora (affinchè per la Scienza più Elementare delle Proporzioni non s' abbia da ricorrere ad altro Autore) non mancheremo di aggiugnerle, dimostrandole come fanno essi Pappo, e Campano, ma coll' ordine tenuto dal Padre Clavio, diligentissimo, e dottissimo Comentatore di tutti gli Elementi d' Euclide.

PROPOSIZIONE XXII.

Se la prima alla seconda avrà maggior proporzione, che la terza alla quarta, convertendo, la seconda alla prima avrà minor proporzione, che la quarta alla terza. *Prop. 7 del 7. di Pappo*



Abbia la grandezza A alla B maggior proporzione della C alla D. Dico, che convertendo la B alla A ha minor proporzione, che la D alla C.

Intendasi, che altra grandezza E alla B sia come la C alla D: sarà dunque la proporzione di A a B *Per la domanda di questo Lett.*

maggior ancora della proporzione di E a B ; e però sarà la A maggiore di E. Onde B ad A avrà minor proporzione di B ad E ; ma come B ad E , così sta convertendo D a C (perchè come C a D, così sta per costruzione E a B) adunque ancor la proporzione di B ad A è minore, che la proporzione di D a C. E però quando la prima alla seconda, &c. il che si doveva dimostrare.

Prop. 7

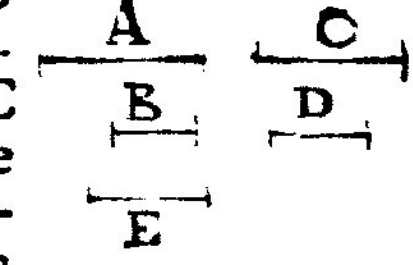
prop. 6

5. Assioma.

PROPOSIZIONE XXIII.

Prop. 5. del 7. di Pappo

Se la prima alla seconda avrà maggior proporzione, che la terza alla quarta, permutando, la prima ancora alla terza avrà maggior proporzione, che la seconda alla quarta.



Abbia A a B maggior proporzione, che C a D. Dico che permutando ancora A a C ha maggior proporzione di B a D.

Im-

Imperciocchè s'intenda, ch'un'altra E a B ſtia come C a D. Sarà dunque la proporzione di A a B maggiore ancora della proporzione di E a B, e però ſarà A maggior di E, ed A a C avrà maggior proporzione che E a C. E perchè ſta permutando E a C come B a D (eſſendoſi poſto, che E a B ſtia come C a D) ſarà dunque ancora la proporzione di A a C maggior, che di B a D, il che, &c.

Per la domanda di queſto Trat.

Prop. 7. 4. *Aſſ.*

5. *Aſſ.*

PROPOSIZIONE XXIV.

Se, dividendo, la prima alla ſeconda, avrà maggior proporzione, che la terza alla quarta, e componendo, anco la prima colla ſeconda alla ſeconda avrà maggior proporzione, che la terza colla quarta alla quarta.

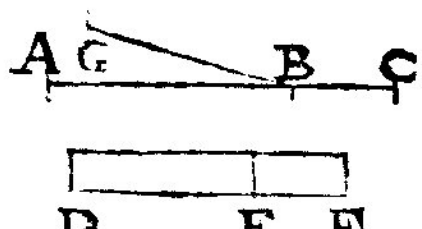
Prop. 3 *del* 7. *di Pappo*

Sia la proporzione di A B a B C maggior della proporzione di D E ad E F. Dico che componendo anco la proporzione di A C a C B, è maggior della proporzione di D F ad F E.

Intendaſi, che un' altra GB alla BC ſtia come DE ad EF. Sarà dunque la proporzione di AB a BC maggiore ſimilmente della proporzione di GB a BC, e però ſarà AB maggiore di GB; ſicchè aggiunta a queſte la comune BC, ne verrà AC maggior di GC: onde AC a CB avrà maggior proporzione, che GC alla medeſima CB: ma componendo GC a CB ſta come DF ad FE, perchè ſi poſe dividendo GB a BC come DE ad EF; adunque anco la proporzione di AC a CB ſarà maggiore della proporzione di DF ad FE. E però ſe dividendo la prima alla ſeconda avrà maggior proporzione, che la terza alla quarta, e componendo, &c. il che ſi propoſe di dimoſtrare.

Per la domanda di queſto Trat.

5 Aſ. Prop. 7.



4. Aſ.

5. Aſ.

PROPOSIZIONE XXV.

Se, componendo, la prima colla ſeconda alla ſeconda avrà maggior proporzione, che

la terza colla quarta alla quarta, e dividendo, avrà ancora la prima alla seconda maggior proporzione, che la terza alla quarta. *Prop. aggiunta. e dimoſ. dal Coman. dopo la propoſ. 5. del 7. di Pap.*

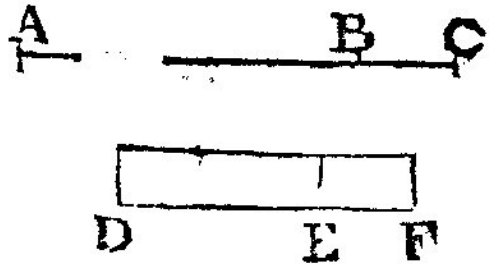
Abbia, nella paſſata figura, AC a CB maggior proporzione di DF ad FE. Dico che ancora dividendo AB a BC ha maggior proporzione di DE, ad EF.

Intendaſi che altra GC a CB ſtia come DF ad FE: ancora AC a CB avrà maggior proporzione di GC a CB; e però ſarà AC maggior di GC, e toltane di comune la BC, reſterà la AB maggior di GB, e però AB a BC avrà maggior proporzione, che GB a BC: ma dividendo come GB a BC così DE ad EF [perchè ſi poſe GC, a CB come DF ad FE] adunque anco la proporzione di AB a BC è maggior della proporzione di DE ad EF. E però ſe componendo la prima colla ſeconda alla ſeconda avrà maggior proporzione, che la terza colla quarta alla quarta, e ancora dividendo, &c. il che fu propoſto di dimoſtrare. *Domanda di queſto Tratt. 5. Aſſ. Prop. 7. 4 Aſſ. 5. Aſſ.*

PROPOSIZIONE XXVI.

Se, componendo, la prima colla ſeconda alla ſeconda avrà maggior proporzione, che la terza colla quarta alla quarta; per la converſion della proporzione, la prima colla ſeconda alla prima, avrà minor proporzione, che la terza colla quarta alla terza.

Prop. 6. del 7. di



Sia la proporzione di A C a C B maggior della proporzione di D F ad F E. Dico che per la converſione della proporzione C A ad A B ha minor proporzione, che F D a D E.

Perchè avendo A C a C B maggior proporzione di D F ad F E, e dividendo A B a B C avrà maggior proporzione di D F ad E F, e però convertendo C B a B A avrà minor proporzione di F E ad E D: perlochè e componendo C A ad A B avrà minor

Prop. 25.

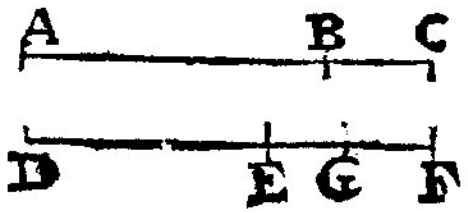
Prop. 22.

nor proporzione, che FD a DE, il che, &c. *Pro p.* 24.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se la prima alla terza ha maggior proporzione, che la seconda alla quarta, avrà ancora la prima alla terza maggior proporzione, che la prima colla secõda alla terza con la quarta. *Prop.* 8. *del* 7. *di Pappo*

Abbia AB a DE maggior proporzione, che BC ad EF. Dico che ancora AB a DE ha maggior proporzione, che AC a DF.



Sia come AB a DF. così BC ad un'altra EG E perchè s'è posto AB a DE aver maggior proporzione di BC ad EF, anco BC ad EG (che sta come AB a DE) avrà maggior proporzione, che la medesima BC all'EF. onde EG sarà minore di EF. Perchè dunque, AB a DE sta come BC ad EG, starà AC a DG come AB a DE. Ma AC ha maggior proporzione a *Dom. di que.* 5. *Ax.* *Prop.* 7. *Prop.* 8. *Prop.* 6.

D G, che a D F (perchè D G è minore di D F) adunque anco A B a D E l'avrà maggior, che A C a D F. il che, &c.

5. Aſſ.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Prop. 9. del 7. di Pappo

Se tutta a tutta ha maggior proporzione, che la parte levata alla parte levata, e la rimanente alla rimanente avrà maggior proporzione, che tutta a tutta.

Sia la proporzione di tutta la A B a tutta la C D maggiore della proporzione della parte levata A E alla parte levata C F. Dico, che anco la proporzione della rimanente E B alla rimanente F D è maggior della proporzione di tutta la A B a tutta la C D.

Eſſendo la proporzione di A B a C D maggior, che di A E a C F, ſarà ancora permutando la proporzione di A B ad A E maggior, che di C D a C F: e per la converſion della proporzione A B a B E avrà minor

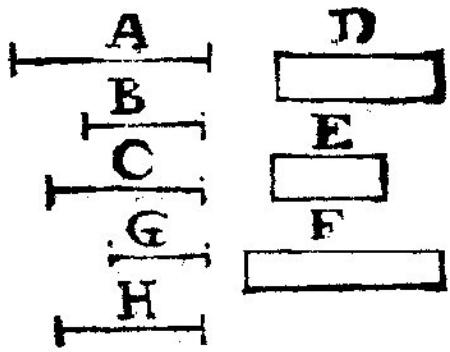
Prop. 23.

nor proporzione, che C D a D F; e permutando A B a C D avrà ſimilmente minor proporzione che E B ad F D: cioè la rimanente E B alla rimanente F D avrà maggior proporzione, che tutta la A B a tutta la C D. Il che, &c. *Prop.* 26. *Prop.* 23.

PROPOSIZIONE XXIX.

Se ſaranno tre grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, e la proporzion della prima delle prime alla ſeconda ſia maggior della proporzione della prima delle ſeconde alla ſeconda, e la proporzion della ſeconda delle prime alla terza ſia pur maggiore della proporzion della ſeconda delle ſeconde alla terza; ancora per l'ugualità in tal proporzione ordinata avrà la prima delle prime alla terza maggior proporzione, che la prima delle ſeconde alla terza. *Prop.* 31. *del V. tra le aggiunte dal Campano nella ſua traduzione d' Euc.*

Sieno tre grandezze omogenee A, B, C, ed altrettante omogenee D, E, F, e la proporzione di A a B sia maggior della proporzione di D ad E; siccome la proporzione di B a C sia maggior della proporzione di E ad F. Dico che per l'ugualità ancora A a C ha maggior proporzione di D ad F.



Per la domanda di questo. Intendasi che G a C sia come E ad F. Sarà dunque la proporzione di B a C, che era maggiore, che di E ad F, maggiore ancora, che di G a C. Onde B sarà maggior di G, e però A a G avrà maggior proporzione che a B: ma la proporzione di A a B si è posta maggior, che di D ad E, adunque la proporzione di A a G tanto più sarà maggiore, che quella di D ad E.

5. Ax. Prop. 7. 4. Ax. 8. Ax.

Per la domanda di questo. Intendasi di nuovo, che H a G sia come D ad E. Avrà per tanto A a G mag-

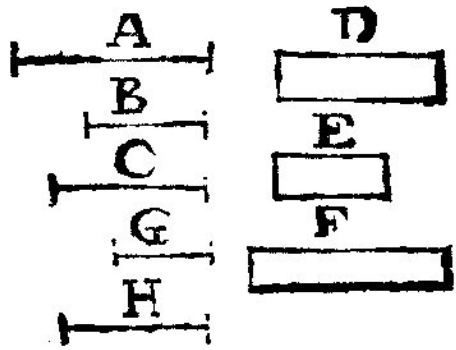
G maggior proporzione, che H a G, e però ſarà A maggior di H; ſicchè A a C avrà maggior proporzione, che H alla ſteſſa C, ma come H a C così è per l'ugualità D ad F [perche ſi fece D ad E come H a G, ed E ad F come G a C] adunque anco A a C l'avrà maggior, che D ad F, il che, &c. *5. Aſ.* *Prop.* *7.* *4. Aſ.* *Prop.* *18.* *5. Aſ.*

PROPOSIZIONE XXX.

Se ſaranno tre grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, e la prima alla ſeconda nel primo ordine abbia maggior proporzione, che la ſeconda alla terza nel ſecondo, e la ſeconda alla terza nel primo abbia maggior proporzione, che la prima alla ſeconda nel ſecondo, ancora per l'ugualità in tal proporzione perturbata, avrà la prima alla terza nel prim'ordine maggior proporzione, che la prima alla terza nel ſecondo. *Prop. 32. del V. tra le aggiunte dal Campano nella ſua traduzione d'Eu.*

Sie-

Sieno tre grandezze omogenee A, B, C, ed altre pur omogenee, D, E, F; e nel prim' ordine abbia A a B maggior proporzione di E ad F nel secondo; e B a C nel primo abbia maggior proporzione, che D ad E nel secondo. Dico che anco per l' ugualità A a C nel primo ha maggior proporzione, che D ad F nel secondo.



Domanda di questo. Intendasi, che G a C stia come D ad E, sarà dunque la proporzione di B a C, che è data maggiore della proporzione di D ad E, maggior ancora della proporzione di G a C: onde B sarà maggior di G; e però A a G avrà maggior proporzione, che la medesima A a B, ma la proporzione di A a B è posta maggiore, che di E ad F, adunque la proporzione di A a G è molto maggior, che di E ad F.

5. Ass. Prop. 7.

5. Ass.

Assioma.

In-

Intendaſi inoltre, che H a G ſtia come F ad F. Sarà dunque la proporzione di A a G maggior, che di H alla medeſima G. Onde A ſarà maggiore di H, e però A a C avrà maggior proporzione, che H alla medeſima C, ma come H a C, così ſta per l'ugualità D ad F (perchè ſi fece D ad E come G a C, ed E ad F come H a G) adunque anco la proporzione di A a C è maggiore, che quella di D ad F, il che, &c.

Domanda di queſto. 5. *Aſſ.* *Prop.* 7. 4. *Aſſ.* *Prop.* 19 5. *Aſſ.*

PROPOSIZIONE XXXI.

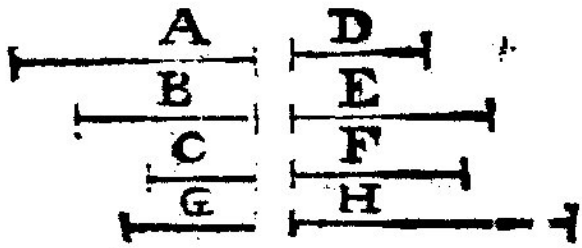
Se ſaranno due ordini d'egual numero di grandezze, e tutte omogenee, e la prima del primo ordine alla prima del ſecondo abbia maggior proporzione della ſeconda del primo alla ſeconda del ſecondo, e queſta proporzione ſia maggior della proporzione della terza del primo alla terza del ſecondo, e così ſempre finchè vi ſieno gran-

Prop. 34. *del V. aggiunta dal Cam. nella ſua traduzione d' Eudimoſ. col P. Clav.*

dezze

dezze; tutte insieme l'antecedenti a tutte insieme le conseguenti avranno maggior proporzione di tutte l'antecedenti senza la prima, a tutte le conseguenti senza la prima, ma però minor proporzione, che la prima alla prima, e maggior, che l'ultima all'ultima.

Sieno prima nel primo ordine tre grandezze, A, B, C, e nel secondo altrettante D, E, F, e tutte omogenee, e la proporzione di A a D sia maggior della proporzione di B ad E, e questa maggiore, che di C ad F. Dico che la proporzio-



ne della somma A, B, C, alla somma D, E, F, è maggiore, che della somma B, C, alla somma E, F. Ma ben minore, che della prima grandezza A alla prima D. E finalmente maggiore, che dell' ultima C all' ultima F.

Im-

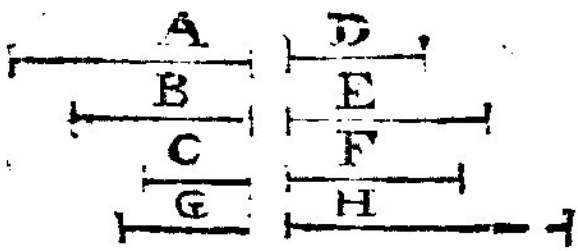
Imperciocchè avendo A a D maggior proporzione di B ad E, permutando avrà maggior proporzione A a B, che D ad E, e componendo A con B a B maggior, che D con E ad F, e di nuovo permutando A con B a D con E maggior proporzione, che B ad E. Perchè dunque tutta A, B, a tutta la D, E, ha maggior proporzione, che la parte B alla parte E, avrà ancora la rimanente A alla rimanente D maggior proporzione di tutta la A, B, a tutta la D, E. Nello ſteſſo modo appunto ſi proverà, che la ſola B alla ſola E ha maggior proporzione delle due, B, C, inſieme, alle due inſieme E, F, adunque la ſola prima A alla ſola prima D avrà molto maggior proporzione, che la ſomma B, C alla E F, e permutando, avrà maggior proporzione A a B, C, che D, ad E, F, e componendo, maggior proporzione la ſomma A, B, C, alle B, C, che la ſomma D, E, F, alle E, F, e finalmente permutando, maggior proporzione avrà la ſomma A, B, C, alla ſomma D, E, F, della ſomma B, C, alla ſomma E, F. Il che in primo luogo ſi doveva dimoſtrare.

Prop. 23. *Prop.* 24. *Prop.* 23. *Prop.* 28. *A Ro-ma* 8. *Prop.* 23. *Prop.* 24. *Prop.* 23.

Aven-

Avendo per tanto tutta la A, B, C, a tutta la D, E, F, maggior proporzione della parte levata B, C, alla levata E, F, avrà la rimanente A alla rimanente D maggior proporzione, che tutta l'A, B, C, a tutta la D, E, F, che è la seconda proposta.

E perchè B ad E ha maggior proporzione, che C ad F, e permutando, B a C l'avrà maggiore di E ad F, e componendo la B, C, a C maggiore, che la E, F ad F, e di nuovo permutando la B, C, alla E, F, maggiore, che la C alla F, ma la proporzione di A, B, C, alla D, E, F, si è provata maggiore, che di B, C, ad E, F, adunque sarà molto maggiore la proporzione di A, B, C, a D, E, F, che di C ad F, il che era l'ultimo da provarsi.



Prop. 23.

Prop. 24.

Prop. 23.

Assioma 8.

Sieno ora in ciascuno ordine quattro grandezze A, B, C, G, e D, E, F, H, e sieno date con la medesima condizione delle tre,

sic-

ſicchè ancora C ad F abbia maggior proporzione di G ad H. Dico pure ſeguirne le ſteſſe coſe.

Perchè, come ſi provò nelle tre, avrà B ad E maggior proporzione della ſomma B, C, G, alla ſomma E, F, H, e però molto maggiore A, a D, che B, C, G ad E, F, H; e permutando, maggior proporzione A, a B, C, G, che D ad F, F, H, e componendo, maggiore A, B, C, G, a B, C, G, che D, E, F, H, ad E, F, H, e permutando, maggior proporzione, A, B, C, G, a D, E, F, H, che B, C, G, ad E, F, H. *Aſſioma* 8. *Prop.* 23. *Prop.* 24 *Prop.* 23.

Eſſendo dunque la proporzione di tutta A, B, C, G, a tutta D, F, F, H, maggior della levata B, C, G, alla levata, E, F, H, e la rimanente A alla rimanente D avrà maggior proporzione, che tutta A, B, C, G, a tutta D, E, F, H. *prop.* 28.

E finalmente, come ſi dimoſtrò nelle tre, ha maggior proporzione la ſomma B, C, G, alla E, F, H, di G ad H, ed è la proporzione di A, B, C, G a D, E, F, H, maggior, che di B, C, G ad E, F, H, come ſi provò poco ſopra; adunque la ſomma A, B, C, G,

alla

alla ſomma D, E, F, H, à molto maggior proporzione, che l'ultima G all' ultima H, il che, &c.

Aſſioma 8.

Con ſimile artifizio ſi concluderà ſeguirne le ſteſſe coſe in cinque grandezze per mezzo delle prime quattro, ed in ſei per mezzo delle prime cinque, com' appunto s' è provato in quattro per via delle prime tre. E però è manifeſto tutto ciò, che ſi propoſe di dimoſtrare.

IL FINE.

Dell'Aggiunta agli Elementi d'Euclide della Scienza univerſale delle Proporzioni.

PRINCIPIO
DELLA
QUINTA GIORNATA
DEL GALILEO,

DETTATA AD EVANGELISTA TORRICELLI.

Da aggiugnerſi all'altre quattro de' Diſcorſi, e Dimoſtrazioni Matematiche intorno alle due nuove Scienze appartenenti alla Meccanica, ed a' Movimenti locali.

INTERLOCUTORI.

Salviati, Sagredo, e Simplicio.

Salv. GRandiſſima è la conſolazione ch'io ſento nel vedere, dopo l' interpoſizione di qualch' anno, rinnovata in queſto giorno la noſtra ſolita adunanza. Sò che l' ingegno vivace del Signor Sagredo è tale, che non ſa ſtare in ozio, però mi perſuado, che egli non avrà

avrà mancato di fare, nel tempo della noſtra lontananza, qualche reflessione ſopra le dottrine del moto, le quali furon lette nell' ultima Giornata de' noſtri paſſati colloquj. Io, che dalla virtuoſa converſazione di V. S. ed anco del noſtro Sig. Simplicio, ho ſempre raccolto frutti di non volgare erudizione, la prego a voler proporre qualche nuova cõſiderazione ſopra le coſe del noſtro Autore già lette da noi Così daremo principio agli uſati diſcorſi per paſſar queſta Giornata nell' occupazione di virtuoſo trattenimento.

Sagr. Non nego a V S., che in queſti anni mi ſieno paſſati per la fantaſia varj penſieri ſopra le novità dimoſtrate da quel buon Vecchio intorno alla ſua Scienza del moto, ſottopoſta, e ridotta da lui alle dimoſtrazioni della Geometria. Ed ora, poichè ella così comanda, proccurerò di rammentarmi qualche coſa, e darò a lei occaſione di beneficare il mio 'ntelletto co' ſuoi dotti ragionamenti.

Per cominciar dunque per ordine dal principio del Trattato de' moti, proporrò a V S. uno ſcrupolo

mio

mio antico rinnovatomi nel considerare la dimostrazione, che l' Autore apporta nella sua prima proposizione del moto equabile, la quale procede (come molte altre degli antichi, e moderni Scrittori) per via degli ugualmente multiplici. Questa è una certa ambignità, che io ho sempre avuta nella mente intorno alla quinta, o come altri vogliono sesta difinizione del quinto Libro d' Euclide. Stimo mia somma prosperità d' aver potuto incontrare occasione di conferir questo dubbio con V S del quale spero dover restare totalmente liberato.

Simpl. Anzi che io ancora riconoscerò questo nuovo abboccamento colle SS. VV. per benefizio singolare della fortuna, se mi succederà di poter ricever qualche luce intorno a questo punto accennato dal Sig. Sagredo. Non ebbi mai il più duro ostacolo di questo in quella poca di Geometria, che io studiai già nelle scuole da giovanetto. Però ella s'immagini quanto sia per dovermi esser caro, se dopo tanto tempo sentirò intorno a questo particolare qualche cosa di mia soddisfazione.

Sagr.

Sagr. Dico dunque, che avendo ſentito nel dimoſtrar la prima propoſizione dell' Autore intorno al moto equabile adoprarſi gli ugualmente multiplici conforme alla quinta, ovvero ſeſta difinizione del V. Libro d' Euclide, ed avendo io un poco di dubbio già antiquato intorno a queſta difinizione, non reſtai con quella chiarezza, che io avrei deſiderato nella predetta propoſizione. Ora mi ſarebbe pur caro il poter intender bene quel primo principio, per poter poi con altrettanta evidenza reſtar capace delle coſe, che ſeguono intorno alla dottrina del moto.

Salv. Proccurerò di ſoddisfare al deſiderio di V. S con addomeſticare in qualche altra maniera quella difinizione d'Euclide, e ſpianar la ſtrada per quanto mi ſarà poſſibile all' introduzione delle proporzionalità. In tanto ſappia pure di aver avuto per compagni in queſta ambiguità uomini di gran valore, i quali per lungo tempo ſono ſtati colla medeſima poca ſoddisfazione, colla quale V. S. mi dice di ritrovarſi fino a queſto giorno.

Io poi confeſſo, che per qualche

anno dopo aver istudiato il V. Libro d' Euclide, restai involto colla mente nella stessa caligine. Superai finalmente la difficultà, quando nel lo studiare le maravigliose Spirali d' Archimede, incontrai nel bel principio del Libro una dimostrazione simile alla predetta del nostro Autore. Quell' occasione mi fece andar pensando, se per fortuna ci fosse altra strada più agevole, per la quale si potesse arrivare al medesimo fine, ed acquistare per me, ed anco per altri qualche precisa cognizione nella materia delle proporzioni: però applicai allora l' animo con qualche attenzione a questo proposito, ed esporrò adesso, quanto fu da me speculato in quell' opportunità, sottoponendo ogni mio progresso al purgatissimo giudizio delle SS. VV.

Quando, e con qual' occasione sovvenisse al Galileo questa speculazione

Suppongasi primieramente (come le suppose anco Euclide, mentre le difinì) che le grandezze proporzionali si trovino; cioè che date in qualunque modo tre grandezze, quella proporzione, o quel rispetto, o quella relazione di quantità, che ha la prima verso la seconda, la stessa possa averla una terza verso

Suppoſiz.

una quarta. Dico poi, che per dare una diffinizione delle suddette grandezze proporzionali, la quale produca nell'animo del Lettore qualche concetto aggiustato alla natura di esse grandezze proporzionali dovremmo prendere una delle loro passioni, ma però la più facile di tutte, e quella per appunto, che si stimi la più intelligibile anco dal Volgo non introdotto nelle Matematiche. Così fece Euclide stesso in molt'altri luoghi. Sovvengavi, che egli non disse, il cerchio essere una figura piana, dentro la quale segandosi due linee rette, il rettangolo sotto le parti dell'una sia sempre uguale al rettangolo sotto le parti dell'altra: ovvero dentro la quale tutti quadrilateri abbiano gli angoli opposti uguali a due retti. Quand'anche così avesse detto sarebbero state buone diffinizioni. Ma mentre egli sapeva un'altra passione del cerchio più intelligibile della precedente, e più facile da formarsene concetto, chi non s'accorge, che egli fece assai meglio a mettere avanti quella più chiara, e più evidente come diffinizione, per cavar poi da ella quell'altre più re-

con-

condite, e dimoſtrarle come conclusioni?

Sagr. Per certo, che così è, ed io credo, che rari saranno gl' ingegni, i quali totalmente s' acquietino a questa difinizione, se io con Euclide dirò così.

Allora quattro grandezze sono proporzionali, quando gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, presi secondo qualunque multiplicità si accorderanno sempre nel superare, mancare, o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta.

E chi è quello d' ingegno tanto felice, il quale abbia certezza, che allora quando le quattro grandezze sono proporzionali, gli ugualmente multiplici s'accordino sempre? Ovvero, chi sa, che quegli ugualmente multiplici non s' accordino sempre anco quando le grandezze non sieno proporzionali? Già Euclide nelle precedenti difinizioni aveva detto.

La proporzione tra due grandezze essere un tal rispetto, o relazione tra di loro per quãto si appartiene alla quantità.

Ora avendo il Lettore concepito già nell' intelletto, che cosa sia la proporzione fra due grandezze, sarà difficil cosa, che egli possa in-

dere, che quel rispetto, o relazione, che è fra la prima, e la seconda grandezza, allora sia simile al rispetto, o relazione, che si trova fra la terza, e la quarta grandezza, quando quegli ugualmente multiplici della prima, e della terza s'accordano sempre nella maniera predetta con gli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta nell'esser sempre maggiori, o minori, o uguali.

Salv. Comunque ciò sia, parmi questo d' Euclide piuttosto un Teorema da dimostrarsi, che una diffinizione da premettersi. Però avend' io 'ncontrato tanti ingegni, i quali hanno arrenato in questo luogo, mi sforzerò di secondare colla difinizione delle proporzioni il concetto universale degli uomini, anche ineruditi nella Geometria, e procederò in questo modo,

Diff. delle grandezze proporzionali tra loro commensurabili

Allora noi diremo quattro grandezze esser fra loro proporzionali, cioè aver la prima alla seconda la stessa proporzione, che ha la terza alla quarta, quando la prima sarà eguale alla seconda, e la terza ancora sarà eguale alla quarta. Ovvero quando la prima sarà tante volte multiplice della seconda, quante

te

te volte precisamente la terza è multiplice della quarta. Troverà dubbio alcuno il Signor Simplicio nell' intender questo?

Simpl Certo che nò.

Salv. Ma perchè non sempre accaderà, che fra le quattro grandezze si trovi per appunto la predetta egualità, ovvero multiplicità precisa, procederemo più oltre, e domanderemo al Signor Simplicio: Intendete voi, che le quattro grandezze allora sieno proporzionali, quando la prima contenga per esempio tre volte, e mezzo la seconda, ed anco la terza contenga tre volte, e mezzo la quarta?

Simpl Intendo benissimo fin quì, ed ammetto, che le quattro grandezze sieno proporzionali, non solo nel caso esemplificato da V. S. ma ancora secondo qualsivoglia altra denominazione di multiplicità, o superparziente, o superparticolare

Salv. Per raccoglier dunque ora in breve, e con maggiore universalità tutto quello, che si è detto, ed esemplificato fin quì, diremo, che

Allora noi intendiamo quattro grandezze esser proporzionali fra loro, quando l'eccesso della prima

Diſi. generale delle grandezze proporzionali, o commenſ. tra loro, o incommenſ.

ſopra la ſeconda (qualunque egli ſia) ſarà ſimile all' eccesſo della terza ſopra la quarta.

Simp. Fin quì io non avrei difficultà, ma mi pare, che V. S. in queſta maniera non apporti la diſinizione delle grandezze proporzionali, ſe non quando le antecedenti ſaranno maggiori delle loro conſeguenti, poichè ella ſuppone, che la prima ecceda la ſeconda, e che anco la terza ecceda ſimilmente la quarta. Ma ora interrogo io come dovrò governarmi quando le antecedenti ſieno minori delle loro conſeguenti?

Sale. Riſpondo, che quando V. S. avrà le quattro grandezze in tal modo, che la prima ſia minor della ſeconda, e la terza minor della quarta, allora ſarà la ſeconda maggior della prima, e la quarta maggior della terza. Però V. S. le conſideri con queſt' ordine inverſo, e s' immagini, che la ſeconda ſia prima, e la quarta ſia terza. Così avrà le antecedenti maggiori delle conſeguenti, e non avrà biſogno di cercare allora diſinizione diverſa dalla già apportata da noi.

Sagr. Così è per appunto. Ma ſeguiti V. S. per grazia col preſuppoſto

posto già fatto di considerare sempre le antecedenti maggiori delle loro conseguenti, il che mi pare, che faciliti assai a lei il discorso, ed a noi l'intelligenza.

Salv. Stabilita questa per difinizione soggiugnerò anco in qual'altro modo s'intendano quattro grãdezze esser fra loro proporzionali, ed è questo. Quando la prima per avere alla seconda la medesima proporzione, che la terza alla quarta, non è punto nè maggiore, nè minore di quello, che ella dovrebbe essere, allora s'intende aver la prima alla seconda la medesima proporzione, che ha la terza alla quarta. Con questa occasione difinirei ancora la proporzione maggiore, e direi così:

Altro modo di difinire le grandezze prop.

Ma quando la prima grandezza sarà alquanto più grande di quel che ella dovrebbe essere per avere alla seconda la medesima proporzione, che ha la terza alla quarta, allora voglio, che convenghiamo di dire, che la prima abbia maggior proporzione alla seconda di quella, che ha la terza alla quarta.

Difi. delle grandezze non proporcommens. o incõmens.

Simpl. Bene, ma quando la prima fosse minore di quel che ella dovrebbe esser per avere alla seconda

quella medeſima proporzione, che ha la terza alla quarta?

Salv. Mentre la prima ſia minor di quel, che ſi ricercherebbe per aver alla ſeconda quella medeſima proporzione, che ha la terza alla quarta, ſarà ſegno evidente, che la terza è maggior del giuſto per aver alla quarta quella tal proporzione, che ha la prima alla ſeconda. Però in queſto caſo ancora V. S. ſi contenti di concepir l'ordine in altro modo, e s'immagini, che quelle grandezze, che erano terza, e quarta diventino prima, e ſeconda, e quell'altre, che erano prima, e ſeconda, V. S. le riponga ne' luoghi della terza, e della quarta.

Sagr. Fin'ora intendo beniſſimo il concetto di V. S., e l'introduzione, colla quale ella dà principio alla ſpeculazione delle proporzionali. Parmi ora, che ella ſi ſia meſſa in obbligo di adempire una delle due coſe, cioè o di dimoſtrare con queſti ſuoi principj tutto il quinto d'Euclide, ovvero di dedurre da queſte due difinizioni poſte da V. S. quell'altre due, che Euclide mette per quinta, e per ſettima fra le difinizioni, ſopra le quali poi egli fon-

da

da tutta la macchina del medesimo quinto Libro. Se V. S. dimostrerà queste come conclusioni non mi resterà più, che desiderare intorno a questa materia.

Salv. Questa per appunto è l'intenzion mia, poichè quando si comprenda con evidenza, che date quattro grandezze proporzionali conforme alla medesima definizione, gli ugualmente multiplici della prima, e della terza s' accordano eternamente per necessità in pareggiare, o mancare, o eccedere gli ugualmente multiplici della seconda, e quarta, allora senz'altra scorta si può entrare nel quinto Libro d'Euclide, e si possono intendere con evidenza i Teoremi delle grandezze proporzionali. Così ancora se colla posta difinizione della proporzion maggiore dimostrerò, che in qualche caso, presi gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, ed anco della seconda, e della quarta, quel della prima ecceda quel della seconda, ma quel della terza non ecceda quel della quarta, si potrà con questa dimostrazione scorrere gli altri Teoremi delle grandezze sproporzionali. Poichè quella nostra

conclusione sarà per appunto la definizione, della quale, come per principio, si serve Euclide stesso.

Simpl. Quando io restassi pertuaso di queste due passioni degli ugualmente multiplici, cioè che mentre le quattro grandezze son proporzionali, quegli eternamente s'accordano nel pareggiare, o eccedere, o mancare, e che quando le quattro grandezze non son proporzionali, quegli in qualche caso discordano, io per me non richiederei altra luce per intender con chiarezza tutto il quinto degli Elementi Geometrici.

Salv. Ora ditemi Sig Simplicio, se noi supporremo, che le quattro grandezze A, B, C, D, sieno proporzionali, cioè che la prima A alla seconda B abbia la stessa proporzione che la terza C ha verso la quarta D, intendete voi, che anco due delle prime verso la seconda avranno la medesima proporzione, che due delle terze verso la quarta?

Assioma.

A. B.

C. D.

Simpl Io l' intendo assai bene; imperciocchè mentre una prima alla seconda ha la medesima proporzione

zione, che una terza alla quarta, non saprei immaginarmi per qual ragione due delle prime alla seconda debbano aver proporzion diversa da quella, che hanno due delle terze alla quarta.

Salv. Adunque mentre V. S. intende questo, intenderà ancora che quattro, o dieci, o cento delle prime ad una seconda avranno la stessa proporzione, che hanno quattro, o dieci, o cento delle terze ad una quarta.

Simpl. Certo che sì, e purchè i numeri delle multiplici sieno ugguali, facilmente apprendo, che la prima presa due volte, o dieci, o cento, avrà la stessa proporzione verso la seconda, che ha la terza presa anch' essa due volte, o dieci, o cento, verso la quarta. Sarebbe ben difficile persuadermi il contrario

Salv. Non è dunque ardua cosa il capire, che il multiplice della prima abbia la stessa proporzione alla seconda, che ha l'ugualmente multiplice della terza alla quarta; cioè che la prima multiplicata quante volte ci pare, abbia alla seconda quella proporzione stessa, che ha la terza multiplicata altrettante volte ver-

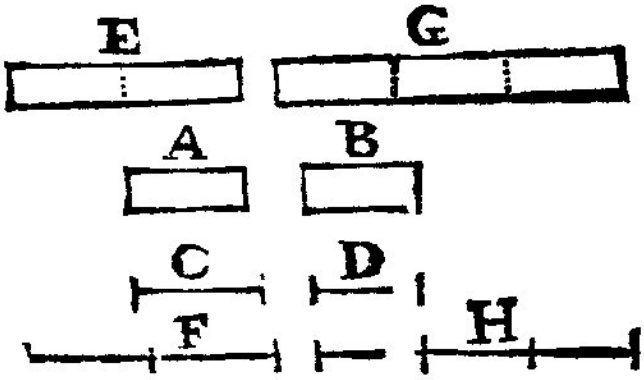
ſo la quarta. Ora tutto quello, che ho eſemplificato fin quì con multiplicare le grandezze antecedenti, ma non già le conſeguenti, immaginatevi, che ſia detto anco intorno al multiplicare le conſeguenti ſolamente, ſenza punto alterare l'antecedenti, e ditemi: Credete voi, che date quattro grandezze proporzionali, la prima a due delle ſeconde abbia proporzion diverſa da quella, che ha la terza a due delle quarte?

Simpl. Credo aſſolutamente di nò; anzi quando una prima abbia ad una ſeconda la medeſima proporzione, che una terza ha verſo la quarta, intendo aſſai bene, che quella ſteſſa prima a due, o quattro, o dieci delle ſeconde, avrà quella medeſima proporzione, che ha la ſteſſa terza verſo due, o quattro, o dieci delle quarte.

Salv. Ammettendo dunque voi queſto, confeſſate di reſtar appagato, e d'intender con facilità, che date quattro grandezze proporzionali A, B, C, D, e multiplicare egualmente la prima, e la terza, quella proporzione, che ha il multiplice E della prima A alla ſeconda B, la ſteſſa ancora abbia precitamente l'ugual-

Prop. I. *che è la quar. del V. d'Euc.*

gualmente multiplice F della terza C alla quarta D. Immaginatevi dunque, che queſte ſieno le noſtre quattro grandezze proporzionali E, B, F, D, cioè il multiplice E della prima ſia prima, la ſeconda ſteſſa B ſia ſeconda, il multiplice poi F della terza ſia terza, e la quarta D ſia quarta. V. S. mi ha anco detto di



capire, che multiplicandoſi egualmente le conſeguenti B, D, cioè la ſeconda, e la quarta ſenza alterar punto le antecedenti, la medeſima proporzione avrà la prima al multiplicato della ſeconda, che la terza al multiplicato della quarta. Ma queſte quattro grandezze ſaranno per appunto E, F, ugualmente multiplici della prima, e della terza, e G, H, egualmente multiplici della ſeconda, e della quarta.

Sagr. Confeſſo, che di ciò reſto interamente appagato, ed ora intenten-

Coroll. *che è il converſo della dif. del V. degli Elem.*

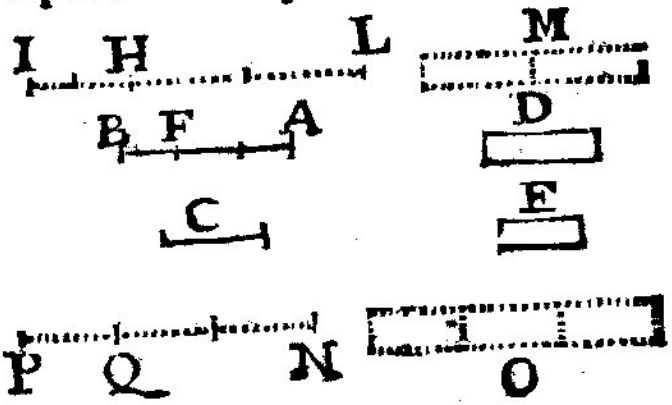
tendo beniſſimo la neceſſità, per la quale gli ugualmente multiplici delle quattro grandezze proporzionali eternamente s'accordano nell'eſſere o maggiori, o minori, o eguali, &c. Poiche, mentre preſi gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, e gli ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta V S. mi dimoſtra, che il multiplice della prima al multiplice della ſeconda ha la medeſima proporzione, che il multiplice della terza ha verſo il multiplice della quarta, ſcorgo manifeſtamente, che quando il multiplice della prima ſia maggiore del multiplice della ſeconda, allora il multiplice della terza dovrà neceſſariamente (per ſervar la proporzione) eſſer maggiore del multiplice della quarta. Quando poi ſia minore, ovvero uguale, anche il multiplice della terza dovrà eſſer minore, ovvero uguale al multiplice della quarta.

Simpl. Io ancora non ſento in ciò repugnanza veruna. Reſto bene con deſiderio d'intendere come (ſuppoſte le quattro grandezze ſproporzionali) ſia vero, che gli ugualmente multiplici non oſſervino ſempre quella concordanza nell'eſſer maggiori, o minori, o uguali. *Salv.*

Salv Io in questo ancora procurerò, che V. S. abbia compiuta soddisfazione.

Prop. II. *che è il converso della 7. difin. del V. d' Eu.*

Ponganſi le quattro grandezze date A B, C, D, E. e ſia la prima A B, alquanto maggiore di quello, che ella dovrebbe eſſere per avere alla ſeconda C quella medeſima proporzione, che ha la terza D alla quarta E. Moſtrerò, che preſi in certa particolar maniera gli ugualmente multiplici della prima, e della terza,



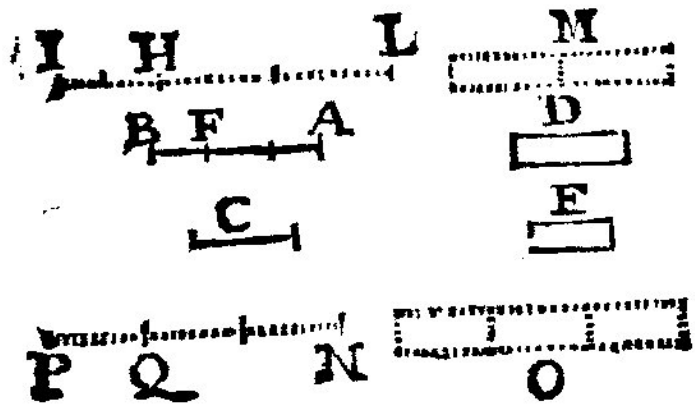
e preſi altri ugualmente multiplici della ſeconda, e quarta, quello della prima ſi troverà maggiore di quello della ſeconda, ma quello della terza non ſarà altrimenti maggiore di quello della quarta, anzi lo dimoſtrerò eſſer minore.

Intendaſi dunque eſſer levato dalla prima grandezza A B quell' eccello, il quale la faceva maggiore, di quanto ella dovrebbe eſſere, acciò

foſſe

foſſe preciſamente proporzionale, e ſia tale eccesſo l'F B. Reſteranno ora dunque le quatt.o grandezze p:oporzionali, cioè la rimanente A F alla C avrà la medeſima proporzione, che ha la D alla E.

Multiplichiſi F B tante volte, ch' ella ſia maggior della C, e ſia queſto multiplice il ſegnato H I. Prendaſi poi H L altrettante volte multiplice della A F, e la M della D,



quante volte per appunto l'H I ſarà ſtata preſa multiplice della F B. Stante queſto: non è dubbio alcuno, che tante volte ſarà multiplice la compoſta L I della compoſta A B, quante volte la H I della F B, ovvero la M della D è multiplice.

Prendaſi ora la P N multiplice della C con tal legge, che la ſteſſa P N ſia proſſimamente maggiore della L H, ed in ultimo quanto ſarà multi-

tiplice la P N della C, altrettanto pongaſi la O multiplice della E.

Ora eſſendo la multiplice P N proſſimamente maggiore della L H, ſe noi dalla P N intenderemo eſſer levata una delle grandezze ſue componenti (che ſarà eguale alla C) reſterà il reſiduo non maggiore della L H. Se dunque alla ſteſſa P N renderemo la grandezza eguale alla C, (che intendemmo eſſer levata) ed alla L H, che è non minore di detto reſiduo, aggiugneremo la H I, che pure è maggiore dell' aggiunta alla P N, ſarà tutta la L I maggior della P N.

Ecco dunque un caſo, nel quale il multiplice della prima ſupera il multiplice della ſeconda. Ma eſſendo le quattro grandezze A F, C, D, E, fatte proporzionali da noi, ed eſſendoſi preſi gli ugualmente multiplici L H, e M della prima, e della terza, e P N, e O della ſeconda, e della quarta, ſaranno eſſi (per le coſe già ſtabilite di ſopra) ſempre concordi nell' eſſer maggiori, o minori, o uguali. Però eſſendo il multiplice L H della prima grandezza minore del multiplice P N della ſeconda, per la noſtra conſtruzione, ſarà

rà anco il multiplice M della terza minore neceſſariamente del multiplice O della quarta.

Si è per tanto provato, che mentre la prima grandezza ſarà alquanto maggiore di quello, che ella doverebbe eſſere, per avere alla ſeconda la ſteſſa proporzione, che ha la terza alla quarta, allora ſarà poſſibile di prendere in qualche modo gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, e altri ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta, e dimoſtrare, che il multiplice della prima eccede il multiplice della ſecõda, ma il multiplice della terza non eccede quel della quarta

Sagr. Molto bene ho inteſo quanto V. S ha dimoſtrato fin quì. Reſta ora, che ella da queſte dimoſtrate premeſſe deduca come neceſſarie concluſioni le due controverſe diſinizioni d'Euclide, il che ſpero le ſarà facile, avendo di già dimoſtrati due Teoremi converſi di quelle.

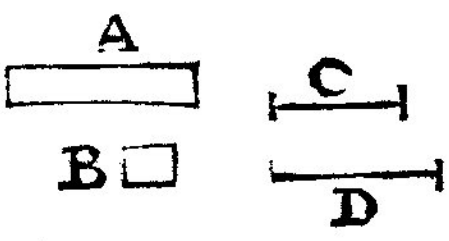
Salv. Facili per appunto riuſciranno; e per dimoſtrare la 5. diſinizione io procederò così.

Se delle quattro grandezze A, B, C, D, gli ugualmente multiplici

del-

Prop. III. *che è la dif. 5. del V. d'Eucl.*

della prima, e terza preſi ſecondo qualunque multiplicità ſempre



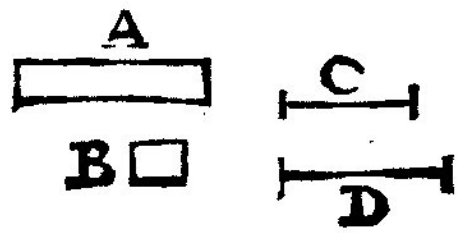
ſi accorderanno nel pareggiare, mancare, ovvero eccedere gli ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta reſpettivamente, io dico, che le quattro grandezze ſono fra di loro proporzionali.

Imperciocchè ſieno (ſe è poſſibile) non proporzionali. Adunque una delle antecedenti ſarà maggior di quello, che ella dovrebbe eſſere per avere alla ſua conſeguente la ſteſſa proporzione, che ha l'altra antecedente alla ſua conſeguente. Sia per eſempio la ſegnata A. Adunque per le coſe già dimoſtrate, pigliandoſi gli ugualmente multiplici della A, e della C, in una tal maniera, e pigliandoſi gli ugualmente multiplici delle B, D, nel modo, che ſi è inſegnato, ſi moſtrerà la multiplice di A maggior della multiplice di B, ma la multiplice di C non ſarà altrimenti maggiore, ma minore della multiplice di D, che è contro al ſuppoſto fatto da noi.

Per dimoſtrare la ſettima diſinizio-

Prop. IV. *che è la 7. dif. del V. d' Eu.*

nizione dirò così. Sieno le quattro grandezze A, B, C, D, e ſuppongaſi, che preſi in qualche particolar maniera gli ugualmente multiplici delle due antecedenti prima, e terza, e gli ugualmente multiplici delle due conſeguenti ſeconda, e quarta, ſuppongaſi dico, che ſi trovi un caſo, nel quale il multiplice di A ſia maggior del multiplice di B, ma il multiplice di C non ſia maggior del multiplice di D. Io dico, che l' A alla B avrà maggior proporzione, che la C alla D. Cioè che la A ſarà alquanto maggiore di quel, ch' ella dovrebbe eſſere per avere alla B la ſteſſa proporzione, che ha la C alla D.



Se è poſſibile non ſia A maggior del giuſto: ſarà dunque preciſamente proporzionale, ovvero minor del giuſto per eſſer proporzionale.

Quanto al primo, ſe ella foſſe preciſamente aggiuſtata, e proporzionale, ſarebbero, per le coſe già provate, gli ugualmente multiplici della

la

la prima, e della terza preſi in qualunque modo, ſempre concordi nel pareggiare, o mancare, o eccedere gli ugualmente multiplici della prima, e della terza preſi in qualunque modo, il che è contro alla ſuppoſizione.

Se poi la prima foſſe minor del giuſto per eſſer proporzionale, queſto è ſegno, che la terza ſarebbe maggiore del ſuo dovere, per avere alla quarta quella proporzione, che ha la prima alla ſeconda. Allora io direi, che ſi levaſſe dalla terza quell' eccesſo, che la fa eſſer maggior del giuſto. E però la rimanente reſterebbe poi per appunto proporzionale. Ora conſideriamo que' multiplici particolari ſuppoſti da principio; è manifeſto, che eſſendo il multiplice della prima maggior del multiplice della ſeconda, anco il multiplice della terza, cioè di quella rimanente, ſarà maggior del multiplice della quarta. Adunque ſe in cambio di pigliar il multiplice di quella rimanente ripiglieremo l' egualmente multiplice di tutta la terza intera, queſto ſarà maggior. che non era il multiplice di quella rimanente, e però ſarà queſto

ſto ſteſſo molto maggiore di quel della quarta, il che è contro la ſuppoſizione.

Sagr. Reſto ſoddisfattiſſimo di queſta dilucidazione fattami da V. S. in materia, nella quale io n'aveva già lungo tempo biſogno: ne ſaprei eſprimere, quale in me ſia maggiore, o il guſto di queſta cognizione nuovamente acquiſtata, o il rammarico di non averla io proccurata col chiederla a V. S. fin dal principio de' noſtri primi abboccamenti, tanto più avendo io inteſo, che ella la conferiva a diverſi Amici, a' quali per la vicinanza era lecito di frequentar la ſua Villa. Ma ſeguitiamo di grazia i diſcorſi, quando però il Sig. Simplicio non abbia, che replicare intorno alla materia fin quì conſiderata.

Simpl. Io non ſaprei, che ſoggiugnere, anzi reſto interamente appagato del diſcorſo, e capace delle dimoſtrazioni ſentite.

Salv. Poſti queſti fondamenti, ſi potrebbe compendiare in parte, e riordinare tutto il quinto d' Euclide, ma ciò ſarebbe una digreſſione troppo lunga, e troppo lontana dal noſtro principale intento. Oltre, che

che io ſo, che le SS. VV. averanno veduto di ſimili compendj ſtampati da altri Autori.

Ora eſſendoſi conſiderate fin quì a riquiſizione delle SS. VV. le diſinizioni quinta, e ſettima del quinto Libro, ſpero che elle concederanno volentieri a me il poter proporre adeſſo un' antica mia oſſervazione ſovvenutami ſopra un' altra diſinizione d' Euclide medeſimo. Il ſoggetto non ſarà diverſo dall' incominciato, e non parrà alieno dal noſtro propoſito, eſſendo intorno alla proporzion compoſta, la quale vien maneggiata ſpeſſe volte dal noſtro Autore ne' ſuoi Libri.

Trovaſi fra le diſinizioni del ſeſto Libro d'Euclide la quinta della proporzion compoſta, la quale dice in queſto modo:

Allora una proporzione ſi dice compoſta di più proporzioni, quando le quantità di dette proporzioni multiplicate inſieme avranno prodotto qualche proporzione. *Diſ. 5. del ſeſto lib. d'Eucl.*

Oſſervo poi, che nè il medeſimo Euclide, nè alcun altro Autore antico ſi ſerve della ſteſſa diſinizione nel modo, nel quale ell' è ſtata poſta nel Libro: onde ne ſeguono due

in-

inconvenienti cioè al Lettore difficultà d'intelligenza, ed allo Scrittore nota di ſuperfluità.

Sagr. Queſto è veriſſimo, ma non mi par probabile, che la ſuprema accuratezza d' Euclide abbia fra' ſuoi Libri poſta queſta difinizione inconſideratamente, ed in vano. Però non ſarei affatto fuor di ſoſpetto, che ella vi foſſe ſtata aggiunta da altri, o almeno alterata di tal ſorte, che ella oggidì non ſi riconoſca più, mentre dagli Autori ſi pone in opera nel dimoſtrare i Teoremi.

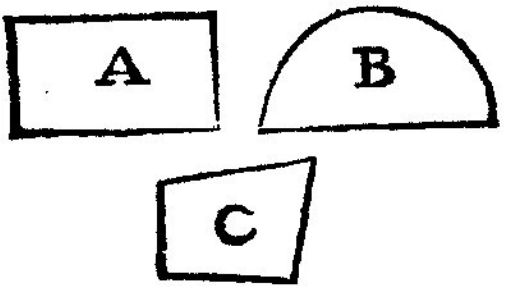
Simpl. Che gli altri autori non ſe ne ſervano, io lo crederò alle SS. VV non avendovi fatto molto ſtudio, mi diſpiacerebbe bene ſe da Euclide ſteſſo, il quale viene ſtimato da voi altri per tanto puntuale nelle ſue ſcritture, foſſe ſtata poſta indarno. Ma quì biſogna poi, ch'io confeſſi come l'intelletto mio, il quale non ſi è mai più che mediocremente inoltrato nella Matematica, ha incontrato difficultà intorno a queſta difinizione, forſe non minore, che nelle già ſpianate dal Sig Salviati.

Mi aiutai un tempo fa con legger lun-

lunghiſſimi Comenti ſcritti ſopra queſte materie, ma per dire il vero, non conobbi giammai, che mi ſi ſgombraſſero quelle tenebre, che mi tenevano offuſcato l'intelletto. Però ſe V. S. aveſſe qualche particolar conſiderazione, che mi facilitaſſe queſto ancora, l'aſſicuro, che mi ſarebbe un favore molto ſegnalato.

Salv. Forſe ella ſi preſuppone, che queſta ſia materia di profonde ſpeculazioni, e pure troverà, che non conſiſte in altro, che in un ſempliciſſimo avvertimento.

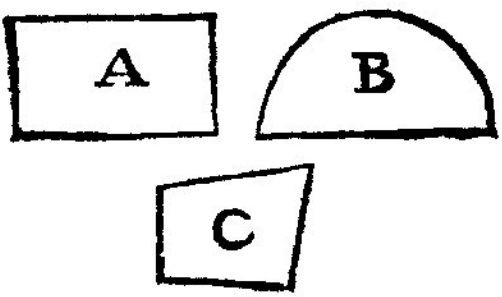
S'immagini V S. le due grandezze A, B, dello ſteſſo genere. Avrà la grandezza A alla B una tal proporzione; e dopo concepiſca eſſer



poſta fra di loro un'altra grandezza C pur dello ſteſſo genere. Si dice, che quella tal proporzione, che ha la grandezza A alla B viene ad eſſer compoſta delle due proporzioni intermedie, cioè di quella che ha la

A alla C, e di quella, che ha la C alla B. Questo è per appunto il senso, secondo 'l quale Euclide si serve della predetta difinizione.

Simpl. E' vero, che Euclide intende in questo modo la proporzione composta, ma però non intend' io, come la grandezza A alla B abbia proporzion composta delle due proporzioni, cioè della A alla C, e della C alla B.



Salv. Ora ditemi, Sig. Simplicio, intendete voi, che la A alla B abbia qualche proporzione, qualunque ella sia?

Simpl. Essendo esse del medesimo genere, Signor sì,

Salv. E che quella proporzione sia immutabile, e non possa mai essere altra, o diversa da quella, che ell' è?

Simpl. Intendo questo ancora.

Salv. Vi soggiungo ora io, che nello stesso modo per appunto l' A

alla

alla C ha una proporzione immutabile, e così anco la C alla B. La proporzione poi, che è fra le due estreme A, e B si chiama esser composta delle due proporzioni, che mediano fra esse estreme, cioè di quella, che ha la A alla C, e di quella, che ha la C alla B. *Dif. da porsi in luogo della 5. dif. del 6 d' Eu.*

Aggiungo di più, che se V. S. fra queste grandezze A, e B, s' immaginerà, che sia frapposta non una grandezza sola, ma più d'una, come ella vede in questi segni, A, C, D, B, s' intenderà pure la proporzione della A alla B esser composta di tutte le proporzioni, le quali sono intermedie fra di esse; cioè delle proporzioni, che hanno la A alla C, la C alla D, e la D alla B; e così se più fussero le grandezze sempre la prima all' ultima ha proporzion composta di tutte quelle proporzioni, le quali mediano fra di esse.

A. C. D. B.

Avverisco ora in quest' occasione, che quando le proporzioni componenti sieno uguali fra di loro, o per dir meglio sieno le stesse, allora la prima all' ultima avrà, come di sopra abbiamo detto, una tal proporzione compo-

ſta di tutte le proporzioni intermedie ; ma perche quelle proporzioni intermedie ſono tutte uguali, potremo eſprimere il medeſimo noſtro ſenſo con dire , che la proporzione della prima all' ultima è una proporzione tanto multiplice della proporzione , che ha la prima alla ſeconda, quante per appunto ſaranno le proporzioni, che ſi frappongono fra la prima , e l' ultima. Come , per eſempio , ſe fuſſero tre termini , e che la medeſima proporzione fuſſe fra la prima, e la ſeconda , che è fra la ſeconda , e la terza , allora ſarebbe vero , che la prima alla terza avrebbe proporzion compoſta delle due proporzioni , le quali ſono fra la prima , e la ſeconda, e fra la ſeconda , e la terza: ma perchè queſte due proporzioni ſi ſuppongono uguali , cioè le ſteſſe , potrà dirſi , che la proporzione della prima alla terza è duplicata dalla proporzione, che ha la prima alla ſeconda . Così , quando le grandezze foſſero quattro , ſi potrebbe dire, che la proporzione della prima alla quarta è compoſta di quelle tre proporzioni intermedie , ed ancora , che è triplicata della proporzione della prima alla ſeconda, venendo compoſta tal pro-

por-

porzione, che ha la prima alla quarta, della proporzione della prima alla seconda tre volte presa, &c.

Ma qui finalmente non vanno contemplazioni, nè dimostrazioni, imperciocchè è una semplice imposizione di nome. Quando a V. S. non piacesse il vocabolo di composta, chiamandola incomposta, o impastata, o confusa, o in qualunque modo più aggrada a V. S., solo accordiamoci in questo, che quando poi avremo tre grandezze dello stesso genere ed io nominerò la proporzione incomposta, o impastata, o confusa, vorrò intendere la proporzione, che hanno l'estreme di quelle grandezze, e non altro.

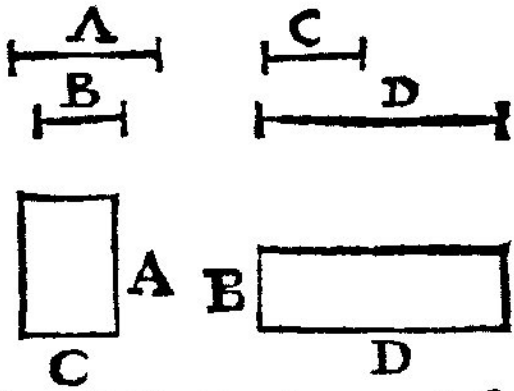
Sagr. Tutto questo intendo benissimo: anzi ho più d'una volta osservato l'artifizio d'Euclide nella proposizione, dove e' dimostra, che i paralellogrammi equiangoli hanno la proporzione composta delle proporzioni de' lati; egli si trova in quel caso aver le due proporzioni componenti in quattro termini, che sono i quattro lati de' paralellogrammi: però comanda, che quelle due proporzioni si mettano in tre termini solamente; sicchè una di quelle

proporzioni ſia fra 'l primo termine, e 'l ſecondo; l'altra ſia fra 'l ſecondo, e 'l terzo. Nella dimoſtrazione poi, non fa altro, ſe non che e' dimoſtra, che l'un paralellogrammo all'altro è come 'l primo termine al terzo, cioè ha la proporzione compoſta di due proporzioni, di quella, che ha il primo termine al ſecondo, e dell'altra, che ha il ſecondo al terzo, le quali ſono quelle due proporzioni, che prima egli aveva diſgiunte ne' quattro lati de' paralellogrammi.

Salv. V. S. diſcorre beniſſimo. Ora inteſa, e ſtabilita la diſinizione della proporzione compoſta in queſto modo (la quale non conſiſte in altro fuori, che nell' accordarſi, che ſorta di roba noi intendiamo ſotto quel nome) ſi può dimoſtrare la propoſizion ventitre del ſeſto Libro d' Euclide, come la dimoſtra egli ſteſſo, perchè quivi ei non ſuppone la diſinizione nel modo; nel quale ell' è divulgata, ma benſì nel modo detto ſopra da noi. Dopo la nominata propoſizion ventitre io ſoggiugnerei come Corollario di eſſa la divulgata diſinizione quinta del ſeſto Libro della proporzion com-

composta tramutandola però in un Teorema.

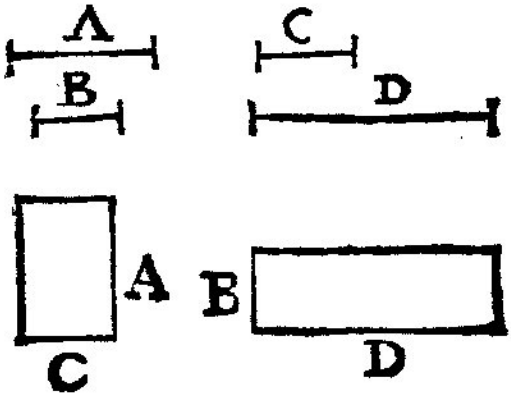
Ponganſi due proporzioni, una delle quali ſia ne' termini A, B, l'altra ne' termini C, D. Dice la diſinizione vulgata; che la proporzione compoſta di queſte due proporzioni ſi avrà, ſe noi multiplicheremo fra di loro le quantità di eſſe proporzioni. Io concorro col Sig Simplicio nel credere, che queſta ſia una Prop. V. *che è la 5. dif. del vi. d'Eu.*



propoſta difficile da capirſi, e biſognoſa di prova; però con poca fatica noi la dimoſtreremo così.

Se li quattro termini delle due proporzioni non foſſero in linee, ma in altre grandezze, immaginiamoci, che e' ſieno poſti in linee rette. Facciaſi poi delle due antecedenti A, C, un rettangolo, ſiccome delle due conſeguenti B, D un altro rettangolo. E' chiaro, per la 23. del ſeſto d'Euclide, che il ret-

tangolo fatto dalle A, C, al rettangolo dalle B, D, avrà quella proporzione, che è composta delle due proporzioni A verso B, e C verso D, le quali son quelle due, che ponemmo da principio a fine di ritrovare qual fosse la proporzione, che risultava dalla comparazione di esse. Essendo dunque la proporzione



composta delle proporzioni A verso B, e C verso D quella, che ha il rettangolo AC al rettangolo BD, per la suddetta propositzion 23. del sesto, io domando al Sig. Simplicio come abbiamo noi fatto per ritrovare questi due termini, ne' quali consiste la proporzione, che si cercava da noi?

Simpl. Io non credo, che si sia fatt' altro, se non formar due rettangoli con queste quattro linee poste da principio; uno cioè colle antecedenti A, C, e l'altro colle conseguenti B, D. *Salv.*

Salv. Ma la formazione de' rettangoli nelle linee della Geometria corriſponde per appunto alla multiplicazione de' numeri nell'Arimmetica, come ſa ogni Matematico, anche principiante, e le coſe, che noi abbiamo multiplicate ſono ſtate le linee A, C, e le linee B, D, cioè i termini omologhi delle poſte proporzioni.

Ecco dunque, come multiplicando inſieme le quantità, o le valute delle date proporzioni ſemplici, ſi produce la quantità, o la valuta della proporzione, la quale poi ſi chiama compoſta di quelle.

FINE DEL QUINTO LIBRO.

DEGLI

ELEMENTI D'EUCLIDE,

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO SESTO.

DIFINIZIONI.

I.

LE figure rettilinee ſimili ſono quelle, che anno ciaſcun angolo uguale, e dintorno agli uguali angoli i lati proporzionali.

II.

Le figure reciproche ſono, quando nell' una, e nell' altra ſono le antecedenti, e conſeguenti proporzionali.

III.

La linea retta ſi dice eſſere ſegata ſecondo l' eſtrema, e mezza proporzione, quando ſia come tutta la linea alla parte maggiore, così la maggiore alla minore.

IV.

L' altezza di ciaſcuna figura è la linea perpendicolare, che dalla cima è tirata fino alla baſe.

V.

La proporzione ſi dice eſſere compoſta di proporzioni, quando le quantità delle proporzioni multiplicate fra loro fanno una certa proporzione.

TEOREMA I.

PROPOSIZIONE I.

I triangoli, e paralellogrammi, che hanno la medeſima altezza, ſono fra loro come le baſi. Sia-

Siano i triangoli ABC, ACD, e i paralellogrammi EC, CF, che abbiano la medesima altezza, cioè la perpendicolare dal punto A tirata alla BD. Dico, che come la base BC alla base CD, così è il triangolo ABC al triangolo ACD, ed il paralellogrammo EC al paralellogrammo CF. Prolunghisi BD dall'una, e l'altra parte a' punti H L e ponganſi quante ſi vogliano BG, GH uguali alla baſe BC, ed alla bale CD ponganſi quante ſi vogliano uguali DK, KL, e giunganſi AG, AH, AK, AL, perchè dunque CB, BG, GH ſono uguali, ſaranno i triangoli AHG AGB, ABC uguali fra loro, onde quante volte la baſe HC è multiplice della baſe BC, tante volte il triangolo AHC è multiplice del triangolo ABC, e per la medeſima ragione quante volte la baſe LC, è multiplice delle baſe CD, tante volte il triangolo ALC è multiplico del triangolo ACD, e ſe la baſe HC è uguale alla bale CL, ancora il triangolo AHC ſarà uguale al triangolo ALC, e ſe la baſe HC

38. del primo

avan-

avanza la baſe CL, eziandio il triangolo AHC avanzerà il triangolo ALC, e ſe è minore, ſarà minore, eſſendo dunque quattro grandezze, cioè le due baſi BC, CD, e i due triangoli ABC, ACD, e ſi ſono preſe l'ugualmente multiplici della baſe BC, e del triangolo ABC, cioè la baſe HC, ed il triangolo AHC: e della baſe CD, e del triangolo ACD altre in qualunque modo ugualmente multiplici, cioè la baſe CL, ed il triangolo ALC, e ſi è dimoſtrato, che ſe la baſe HC avanza la baſe CL, anche il triangolo AHC avanzerà il triangolo ALC, e ſe è uguale, ſarà uguale, e ſe minore, minore, adunque è come la baſe BC alla baſe CD, così il triangolo ABC al triangolo ACD, e perchè il paralellogrammo EC è doppio del triangolo ABC, ed il paralellogrammo FC doppio del triangolo ACD, e le parti delle grandezze, che ſono multiplici nel medeſimo modo hanno fra loro la medeſima proporzione; ſarà come il triangolo ABC al triangolo ACD

4. del quin.

41. del primo.

9. del quin.

così

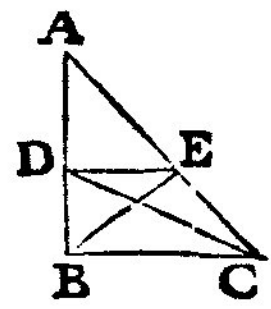
così il paralellogrammo E C al paralellogrammo C F, perchè dunque si è dimostrato, che come la base B C alla base C D, così è il triangolo A B C al triangolo A C D: e come il triangolo A B C al triangoio A C D, così è il paralellogrammo E C al parellogrammo C F; sarà come la base B C alla base C D, così il paralellogrammo E C al paralellogrammo C F, laonde i triangoli, e i paralellogrammi, che anno la medesima altezza, sono fra loro come le basi, il che bisognava dimostrare. *Ass. 6 del quin.*

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE II.

Se nel triangolo sia tirata una linea retta paralella ad un lato, quella segherà i lati di detto triangolo proporzionalmente: e se i lati del triangolo siano segati proporzionalmente, la linea retta, che congiunge i segamenti, sarà paralella all' altro lato del triangolo.

Ti-



Tirisi la DE paralella ad un lato BC del triangolo ABC. Dico, che come la BD alla DA, così è la CE alla EA. Giunganſi BE CD, adunque

37. del primo. il triangolo BDE è uguale al triangolo CDE; perchè ſono nella medeſima baſe DE, e nelle medeſime paralelle DE, BC: ed è un altro triangolo ADE, e le coſe uguali ad una medeſima anno la medeſima proporzione; come dunque il triangolo BDE al triangolo ADE, così è il triangolo CDE al triangolo ADE, ma come il triangolo BDE al triangolo ADE così è la BD alla DA; perciocchè avendo la medeſima altezza, cioè la perpendicolare dal punto E tirata alla AB, ſono fra loro come le baſi, e per la medeſima ragione come il triangolo CDE al triangolo ADE, così è la CE alla EA, adunque come la BD alla DA, così è la CE alla EA. Ma ſiano ſegati proporzionalmente i lati AB, AC del triangolo ABC, e come la BD alla DA, così ſia la CE alla EA: e giunganſi DE. Dico la DE eſſere paralella

Aſſ. 3. del quin.

Per l'ant.

Aſſ. 6. del quin.

alla

alla B C. Avendo fatto le medeſime coſe, perchè è come la B D alla D A, così la C E alla E A; ma come la B D alla D A, così è il triangolo B D E al triangolo A D E; e come la C E alla E A, così è il triangolo C D E al triangolo A D E: ſarà come il triangolo B D E al triangolo A D E, così il triangolo C D E al triangolo A D E, ed avendo amendue i triangoli B D E, C D E la medeſima proporzione al triangolo A D E, ſarà il triangolo B D E uguale al triangolo C D E: e ſono nella medeſima baſe D E ma i triangoli uguali fatti nella medeſima baſe ſono eziandio nelle medeſime paralelle, adunque la D E è paralella alla B C, la onde ſe nel triangolo ſia tirata una linea retta paralella ad un lato, quella ſegherà i lati di detto triangolo proporzionalmente: e ſe i lati del triangolo ſiano ſegati proporzionalmente, la linea retta, che congiunge i ſegamenti, ſarà paralella all' altro lato del triangolo, il che biſognava dimoſtrare.

Aſſ. 6. del quin.

Aſſ. 7. del quin.

40. del primo.

TEO-

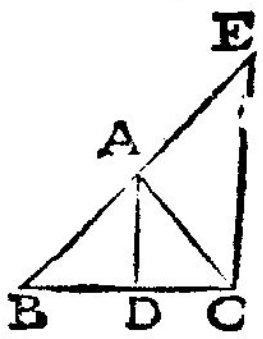
TEOREMA III.

PROPOSIZIONE III.

Se un angolo del triangolo ſia ſegato per mezzo, e la linea retta, che lo ſega, ſeghi ancor la baſe, averanno le parti della baſe la medeſima proporzione, che gli altri lati del triangolo, e ſe le parti della baſe abbiano la medeſima proporzione, che gli altri lati del triangolo, la linea retta, che dalla cima ſi tira ſino al ſegamento della baſe, ſegherà l'angolo per mezzo.

9 *del primo.* Sia il triangolo A B C, e ſeghiſi l'angolo B A C per mezzo dalla linea retta A D. Dico come la B D 31. *del primo.* alla D C, così eſſere la B A alla A C, tiriſi per C la C E paralella alla D A, e la B A prolungata concorra con eſſa nel punto E, perchè dun- 29. *del primo.* que nelle paralelle A D, E C cade una linea retta A C, farà l'angolo A C E uguale all'angolo C A D, ma

ſi po-



ſi pone l' angolo C A D uguale all' angolo B A D, adunque l' angolo B A D ſarà uguale all' angolo A C E, oltre a ciò perchè la linea retta B A E cade nelle paralelle A D, E C, l' angolo eſteriore B A D è uguale all'interiore A E C, ma ſi è dimoſtrato l'angolo A C E uguale all' angolo B A D, adunque ancor l' angolo A C E ſarà uguale all' angolo A E C; e però il lato A E ſarà uguale al lato A C, e perchè la A D è tirata paralella ad un lato del triangolo B C E, cioè ad E C; ſarà come la B D alla D C, così la B A alla A E, ma la A E è uguale alla A C, adunque è come la B D alla D C così la B A alla A C. Ma ſia come la B D alla D C, così la B A alla A C, e giungaſi A D, Dico l' angolo B A C eſſer ſegato per mezzo dalla linea retta A D, perciocchè avendo fatto le medeſime coſe, ed eſſendo come la B D alla D C, così la B A alla A C, e come la B D alla D C, così la B A alla A E concioſſiacoſachè la A D ſi ſia tirata paralella ad un lato del triangolo B C E, cioè ad E C: ſarà

6. del primo.

Per l' ant. Aſſ. 3. del quin.

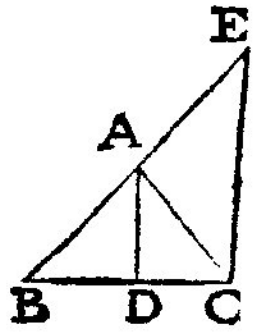
Per l' ant.

come

come la B A alla A C, così la B A alla A E. adunque la A C è uguale alla A E, e però l' angolo A E C è uguale all' angolo E C A, ma l' angolo A E C è uguale all' esteriore B A D, e l' angolo A C E è uguale all' alterno C A D, onde eziandio l' angolo B A D sarà uguale all' angolo C A D, l' angolo dunque B A C è segato per mezzo dalla linea retta A D, laonde se un angolo del triangolo sia segato per mezzo, e la linea retta, che lo sega, seghi ancor la base, averanno le parti della base la medesima proporzione, che gli altri lati del triangolo, e se le parti della base abbiano la medesima proporzione, che gli altri lati del triangolo, la linea retta, che dalla cima si tira fino al segamento della base, segherà l' angolo per mezzo, il che bisognava dimostrare.

Ass. 7 del quin.

29 del primo.

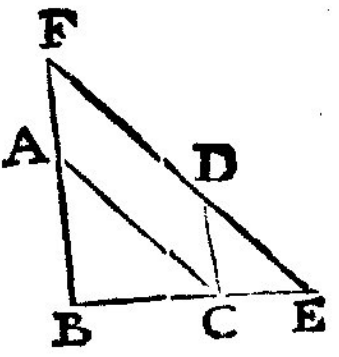


TEOREMA IV.

PROPOSIZIONE IV.

I lati de' triangoli equiangoli,

goli, che ſtanno d'intorno agli uguali angoli ſono proporzionali fra loro: ed i lati omologhi, ovvero della medeſima ragione ſono quegli, che agli angoli uguali ſi ſottopongono.



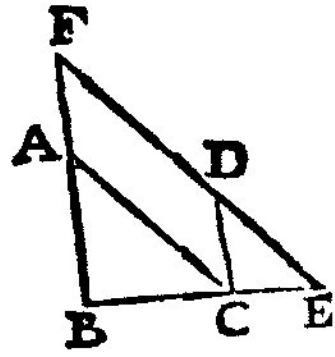
Siano i triangoli equiangoli A B C D C E, che abbiano l'angolo A B C uguale all' angolo D C E, e l'angolo A C B all' angolo D E C, ed oltr' a queſto l'angolo B A C all' angolo C D E. Dico, che de' triangoli A B C, D C E ſono proporzionali i lati, che ſtanno dintorno agli angoli uguali, ed i lati omologhi, ovvero della medeſima ragione ſono quegli, che ſi ſottopongono agli angoli uguali. Pongaſi la B C per diritto alla C E, e perchè gli angoli A B C, A C B ſono minori di due retti, e l'angolo A C B è uguale all'angolo D E C, ſaranno gli angoli A B C, D E C minori di due retti, onde le B A, E D prolungate con-

17. *del primo.*

cor-

correranno fra loro; prolunghinſi, e concorrano nel punto F, e perchè l'angolo D C E è uguale all'angolo A B C, ſarà la B F paralella alla D C, ſimilmente perchè l'angolo A C B è uguale all'angolo D E C, la A C ſarà paralella alla F E, adunque F A C D è paralellogrammo: e perciò la F A è uguale alla C D, e la A C alla F D, e perchè ſi è tirata la A C paralella ad un lato del triangolo F B E, cioè ad F E, ſarà come la B A alla A F, così la B C alla C E, ma la A F è uguale alla C D, adunque come la B A alla C D, così la B C alla C E: e permutandole come la A B alla B C, così è la D C alla C E, e perchè la C D è paralella alla B F, ſarà come la B C alla C E, così la F D alla D E, ma la D F è uguale all' A C, adunque come la B C alla C E, così la A C alla F D: e permutandole come la B C alla C A, così la C E alla E D, perchè dunque ſi è dimoſtrato, che come la A B alla B C così è la D C alla C E; e come la B C alla C A, così la C E alla

28. *del primo*.



34. *del primo*.

2. *di queſ Aſs.*

3. *del quin.*

2. *di queſ.*

alla E D: sarà per l' egualità in proporzione ordinata come la B A alla A C, così la C D alla D E, onde i lati de' triangoli equiangoli che stanno dintorno agli angoli uguali, sono proporzionali fra loro, ed i lati omologhi, ovvero della medesima ragione sono quegli, che agli angoli uguali si sottopongono, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA V.

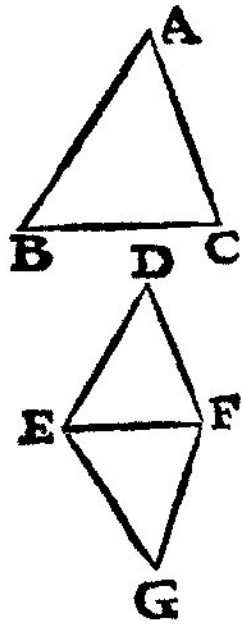
PROPOSIZIONE V.

Se due triangoli abbiano i lati proporzionali, saranno ancora equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, a' quali i lati omologhi si sottopongono.

Siano due triangoli A B C, D E F, che abbiano i lati proporzionali, e sia come la A B alla B C, così la D E alla E F: e come la B C alla C A, così la E F alla F D, ed ancora come la B A alla A C, così la E D alla D F. Dico il triangolo A B C essere equiangolo al triangolo D E F,

ed

ed avere uguali quegli angoli, a' quali si sottopongono i lati omologhi, cioè l' angolo ABC all' angolo DEF, e l' angolo BCA all' angolo EFD, ed oltre a questo l'angolo BAC all' angolo EDF. Constituiscansi nella linea retta EF, e ne' punti E, F, che sono in essa, l' angolo FEG uguale all' angolo ABC, e l' angolo EFG all' angolo BCA, onde l' angolo rimanente BAC è uguale al rimanente EGF, e però il triangolo ABC è equiangolo al triangolo EGF. sono dunque proporzionali i lati de' triangoli ABC, EGF, che stanno dintorno agli uguali angoli: ed i lati omologhi quegli, che son sottoposti agli angoli uguali, onde come la AB alla BC, così la CE alla EF, ma come la AB alla BC, così è la DE alla EF, adunque come la DE alla EF, così la GE alla EF, ed avendo ciascuna di esse DE, EG la medesima proporzione alla EF, sarà la DE uguale alla EG, e per la medesima ragione la



23. del primo.

Per l' ant.

Ass. 7. del quin.

DF

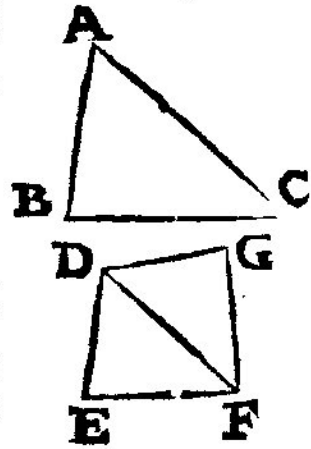
D F sarà uguale alla F G, e perchè la D F è uguale alla E G, e la E F è comune, le due D F, E F sono uguali alle due G E, F F: e la base D F è uguale alla base F G, adunque l'angolo D E F è uguale all'angolo G E F, ed il triangolo D E F uguale al triangolo G E F, e gli altri angoli uguali agli altri angoli, a' quali i lati uguali si sottopongono, onde l'angolo D F E è uguale all'angolo G F E, e l'angolo E D F uguale all'angolo E G F, e perchè l'angolo F E D è uguale all'angolo G E F, e l'angolo G E F all'angolo A B C, sarà anche l'angolo A B C uguale all'angolo F E D, e per la medesima ragione l'angolo A C B uguale all'angolo D F E, e ancora l'angolo A uguale all'angolo D, adunque il triangolo A B C sarà equiangolo al triangolo D E F, laonde se due triangoli abbiano i lati proporzionali, saranno ancora equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, a' quali i lati omologhi si sottopongono, il che bisognava dimostrare.

8 del primo.

TEOREMA VI.

PROPOSIZIONE VI.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e dintorno agli uguali angoli abbiano i lati proporzionali, saranno detti triangoli equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, a' quali gli omologhi lati si sottopongono.



Siano due triangoli A B C, D E F, che abbiano un angolo B A C uguale ad un angolo E D F, e dintorno agli uguali angoli i lati proporzionali, e sia come la B A alla A C, così la E D alla D F. Dico il triangolo A B C essere equiangolo al triangolo D E F, ed avere l' angolo A B C uguale all' angolo D E F, e l' angolo A C B all' angolo D F E. Constituiscansi nella linea retta D F, e ne' punti D F, che sono in essa, l' angolo F D G uguale ad uno degli angoli B A C, E D F, e l' angolo D F G uguale all' angolo

23. *del primo.*

A C B, adunque il rimanente angolo B è uguale al rimanente G, ed il triangolo A B C è equiangolo al triangolo D G F, e perciò come la B A alla A C, così è la G D alla D F: e si pone ancora come la B A alla A C, così essere la E D alla D F, adunque come la E D alla D F, così è la G D alla D F, e però la E D è uguale alla D G e la D F è comune, onde le due E D, D F sono uguali alle due G D D F, e l'angolo E D F è uguale all'angolo G D F; la base dunque E F è uguale alla base F G, ed il triangolo D E F uguale al triangolo G D F, e gli altri angoli uguali agli altri angoli, l'uno all'altro, a' quali sono sottoposti i lati uguali, adunque l'angolo D F G è uguale all'angolo D F E, e l'angolo G all'angolo E. ma l'angolo D F G è uguale all'angolo A C B, onde l'angolo A C B è uguale all'angolo D F E, e si pone l'angolo B A C uguale all'angolo E D F, il rimanente dunque B è uguale al rimanente E, ed il triangolo A B C è equiangolo al triangolo D E F, onde se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e dintorno agli uguali angoli abbiano i lati proporzionali, saran-

4. *di quest.* *Ass.* 6 *del quin.* *Ass.* 7 *del quin.*

4. *del primo.*

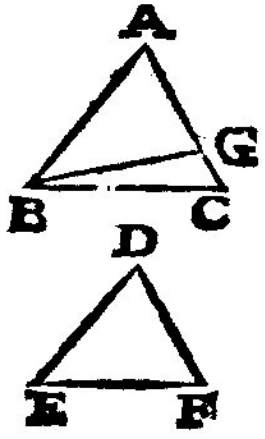
no detti triangoli equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, a' quali gli omologhi lati si sottopongono, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA VII.
PROPOSIZIONE VII.

Se due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e dintorno agli altri angoli abbiano i lati proporzionali, e de' rimanenti l'uno, e l'altro insieme, o sia minore, o non minore del retto, saranno detti triangoli equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, intorno a' quali sono i lati proporzionali.

Siano due triangoli A B C, D E F, che abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo B A C uguale all' angolo E D F, e dintorno agli altri angoli A B C, D E F i lati proporzionali, di modo che la D E alla E F sia, come la A B alla B C, e de' rimanenti angoli, che sono a' pun-

punti C,F, ſia prima l'uno, e l'altro inſieme minor del retto. Dico il triangolo A B C eſſere equiangolo al triangolo D E F, e l'angolo ABC uguale all'angolo D E F, ed il rimanente, cioè l'angolo C uguale al rimanente F. Perciocchè ſe l'angolo ABC ſia diſuguale all'angolo D E F, uno di eſſi ſarà maggiore. Sia maggiore A B C, e conſtituiſcaſi nella linea retta A B, e nel punto in eſſa B l'angolo A B G uguale all'angolo D E F, e perchè l'angolo A è uguale all'angolo D, e l'angolo A B G all'angolo D E F, ſarà eziandio il rimanente A G B uguale al rimanente D F E, adunque il triangolo A B G è equiangolo al triangolo D E F, e come la A B alla B G, così è la D E alla E F, ma come la D E alla E F, così ſi pone la A B alla B C, come dunque la A B alla B C, così la A B alla B G; ed avendo la A B la medeſima proporzione ad amendue B C, B G, ſarà la B C uguale alla B G, e perciò l'angolo C ſarà ugnale all'angolo B G C, ma l'angolo



23. *del primo.*

4. *di quef. Aſſ.*

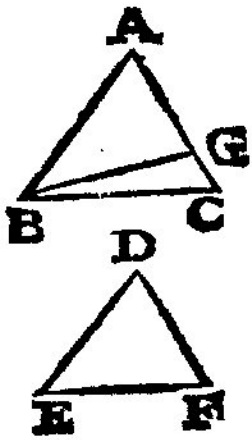
6 *del quin.*

Aſſ.

7. *del quin.*

C si pone minore del retto, adunque eziandio B G C è minore del retto, e l' angolo conseguente A G B è maggiore del retto: e si è dimostrato l' angolo A G B uguale all' angolo F, l' angolo dunque F è maggior del retto, ma si pone minore del retto, il che è inconveniente, onde l' angolo A B C non è disuguale all' angolo D E F, e l' angolo A è uguale all' angolo D, adunque ancora il rimanente C è uguale al rimanente F, ed il triangolo A B C è equiangolo al triangolo D E F. Ma pongasi ciascuno degli angoli C, F non minore del retto. Dico similmente il triangolo A B C essere equiangolo al triangolo D E F: perciocchè avendo fatte le medesime cose, dimostreremo eziandio B C essere uguale a B G, e l' angolo C uguale all' angolo B G C: ma l' angolo C non è minore del retto, adunque B G C non sarà minore del retto, ed i due angoli del triangolo B G C non saranno minori di due retti, che è impossibile, laonde l' angolo A B C non è disuguale all'

13. *del primo.*



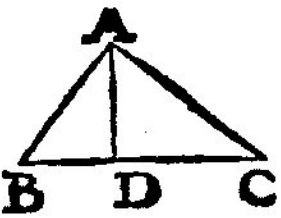
le all'angolo D E F, ma uguale neceſſariamente, e l'angolo A è uguale all'angolo D, adunque il rimanente C è uguale al rimanente F, e perciò il triangolo A B C è equiangolo al triangolo D E F, ſe dunque due triangoli abbiano un angolo uguale ad un angolo, e dintorne agli altri angoli abbiano i lati proporzionali, e de' rimanenti l'uno, e l'altro inſieme o ſia minore, o non minore del retto, ſaranno detti triangoli equiangoli, ed averanno uguali quegli angoli, intorno a' quali ſono i lati proporzionali, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla baſe ſia tirata la perpendicolare, i triangoli, che le ſtanno dintorno ed a tutto il triangolo, e fra loro ſono ſimili.

Sia il triangolo rettangolo A B C, che abbia l'angolo retto B A C, e



dal punto A tirisi la AD perpendicolare alla BC Dico che i triangoli ABD, ADC a tutto il triangolo ABC, e fra loro sono simili. Perciocchè essendo l'angolo BAC uguale all' angolo ADB, perchè l' uno, e l'altro è retto, ed essendo l' angolo B comune a' due triangoli ABC, ABD, sarà il rimanente ACB uguale al rimanente BAD. adunque il triangolo ABC è equiangolo al triangolo ABD, e perciò come la CB, che è sottoposta all' angolo retto del triangolo ABC alla AB che è sottoposta all' angolo C del detto triangolo ABC, così la AB sottoposta all' angolo retto del triangolo ABD alla BD sottoposta all' angolo BAD del medesimo triangolo ABD, che è uguale all' angolo C: e come BA ad AC; così BD a DA, e come AC a CB così DA ad AB, adunque il triangolo ABC è equiangolo al triangolo ABD, ed ha i lati proporzionali dintorno agli uguali angoli, onde il triangolo ABC è simile al triangolo ABD; dimostreremo ancora per la medesima ragione il tri-

4. di quest.

prima dif di quest.

an-

angolo A D C essere simile al triangolo A B C, e perciò l'uno, e l'altro di essi A B D, A D C è simile a tutto il triangolo A B C. Dico oltre a ciò, che i triangoli A B D, A D C sono fra loro simili, perchè l'angolo B D A retto è uguale al retto A D C; e si è dimostrato B A D uguale all'angolo C; sarà adunque il rimanente B uguale al rimanente D A C, adunque il triangolo A B D è equiangolo al triangolo A D C, e come la A B sottoposta all'angolo retto del triangolo A B D alla B D sottoposta all'angolo B A D del medesimo triangolo A B D, così la C A sottoposta all'angolo retto del triangolo A D C alla A D sottoposta all'angolo C del triangolo A D C, che è uguale all'angolo B A D: E per la medesima ragione, come la B D alla D A così la A D alla D C, e come la D A alla A B così la D C alla C A, adunque il triangolo A B D è simile al triangolo A D C, laonde se nel triangolo rettangolo dall'angolo retto alla base sia tirata la perpendicolare, i triangoli, che le stanno dintorno ed a tutto il triangolo, e fra loro sono simili, il che bisognava dimostrare. 4. di quest.

COROLLARIO.

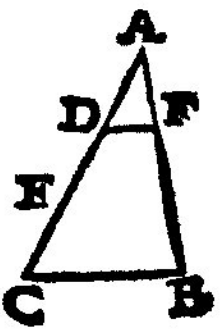
Da queſto è chiaro, che ſe nel triangolo rettangolo dall' angolo retto alla baſe ſia tirata la perpendicolare, quella ſarà proporzionale di mezzo fra le parti della baſe, ed oltre a ciò il lato, che è verſo ciaſcuna parte della baſe ſarà proporzionale di mezzo fra la baſe, e detta parte.

PROBLEMA. I;
PROPOSIZIONE IX.

Dalla data retta linea tagliare una parte propoſta.

Sia la data linea retta A B, biſogna dalla A B tagliare la parte propoſta. Propongaſi la terza parte, e tiriſi dal punto A la linea retta A C, la quale con A B contenga qualſivoglia angolo: e pigliſi nella A C qua-

qualunque punto D, e ponganſi D E, E C uguali alla A D, poi giunganſi B C, e per D tiriſi la D F paralella alla C B, e perchè ad un lato del triangolo A B C cioè a C B ſi è tirata una paralella D F, ſarà come la C D alla D A così la B F alla F A, e la C D è doppia della D A, adunque la B F ſarà doppia della F A, e la B A tripla della A F, onde dalla data retta linea ſi è tagliata la terza parte propoſta, il che biſognava fare



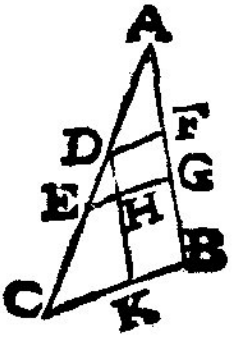
2. di quеſ.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE X.

Segare una data retta linea non ſegata, conforme ad un' altra ſegata.

Sia la data linea retta non ſegata A B, e la ſegata A C, biſogna ſegare la linea retta A B conforme alla ſegata A C. Sia ſegata la A C ne' punti D, E, e ponganſi di modo, che contengano qual' angolo ſi voglia, e congiunta la B C; per gli punti D, E,



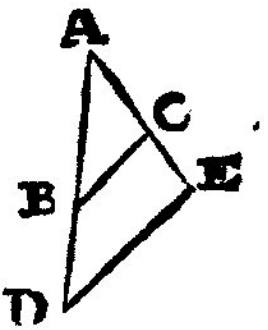
tirinſi D F, E G paralelle alla B C, e per D tiriſi la D H K paralella alla A B, adunque l'uno, e l'altro di eſſi F H, H B è paralellogrammo, e però la D H è uguale alla F G, e la H K alla G B, e perchè ad un lato del triangolo D K C, cioè a K C ſi è tirata la paralella H E, ſarà come la C E alla E D, così la K H alla H D, ed è la K H uguale alla G B, e la H D alla G F, adunque come la C E alla E D; così è la B G alla G F, ſimilmente perchè ad un lato del triangolo A G E, cioè alla E G ſi è tirata la paralella F D, come la E D alla D A, così ſarà la G F alla F A, ma ſi è dimoſtrato, che come la C E alla E D, così è la B G alla G F, come dunque la C E alla E D, così è la B G alla G F, e come la E D alla D A, così la G F alla F A, adunque ſi è ſegata una data retta linea non ſegata conforme ad un'altra ſegata, il che biſognava fare.

2. di queſ.

PRO-

PROBLEMA III.
PROPOSIZIONE XI.

Date due linee rette trovare la terza proporzionale.

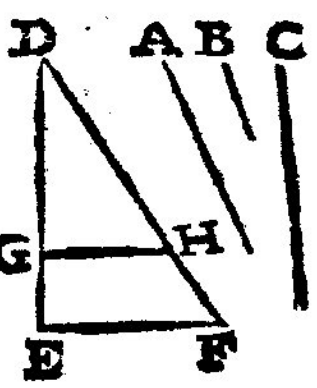


Siano due linee rette date A B, A C, e pongansi di modo, che contẽgano qualsivoglia angolo, bisogna trovare la terza proporzionale delle A B, A C Prolunghinsi le A B, A C, a' punti D, F; e pongasi la B D uguale alla A C, e giunta la B C tirisi per D la D E paralella alla B C, perchè dunque ad un lato del triangolo A D E, cioè a D E si è tirata la B C paralella, sarà come la A B alla B D, così la A C alla C E, ed è la B D uguale alla A C, adunque come la B A alla A C così è la A C alla C E, laonde date due linee rette si è trovata la terza proporzionale, il che bisognava fare. *2. di quest.*

PRO-

PROBLEMA IV.
PROPOSIZIONE XII.

Date tre linee rette, trovare la quarta proporzionale.



Siano tre linee rette date A,B,C, bisogna trovare la quarta proporzionale. Proponganſi due linee rette DE, DF, che cõtengano qualſivoglia angolo EDF e pongaſi la DG uguale alla A, e la GE uguale alla B, e la DH uguale alla C, e giunta GH tiriſi per E la EF paralella ad eſſa, e perchè ad uñ lato del triangolo DEF, cioè ad EF ſi è tirata la GH paralella, ſarà come la DG alla GE, così la DH alla HF, ed è la DG uguale alla A, e la GE alla B, e la DH alla C, come dunque la A alla B, così la C alla HF; laonde date tre linee rette ſi è trovata la quarta proporzionale, il che biſognava fare.

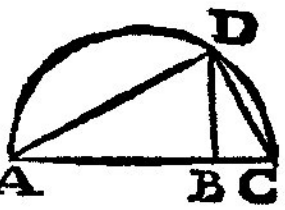
2. di queſ.

PRO-

PROBLEMA V.

PROPOSIZIONE XIII.

Date due linee rette, trovare la proporzionale di mezzo.



Siano due linee rette date A B, B C, bisogna trovare la proporzionale di mezzo. Pongansi per diritto, e nella A C descrivasi il mezzo cerchio A D C, e tirisi dal punto B la B D ad angoli retti sopra la A C, e giunganſi A D, D C, perchè dunque nel mezzo cerchio è l'angolo A D C, quello sarà retto; e perchè nel triangolo rettangolo A D C dall'angolo retto alla base si è tirata la perpendicolare D B, sarà D B proporzionale di mezzo fra le parti della base A B, B C. Date dunque due linee rette si è trovata la proporzionale di mezzo, il che bisognava fare.

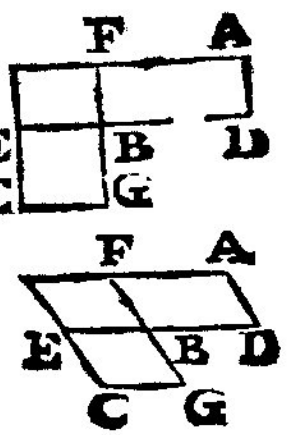
31. del terzo. Corr. della ottava di questo.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE XIV.

De' parallelogrammi uguali

li, ch' hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati dintorno agli angoli uguali si rispondono fra loro contrariamente, e que' paralellogrāmi, ch' hanno un angolo uguale ad un angolo, de' quali i lati dintorno agli angoli uguali si rispōdono contrariamente, sono fra loro uguali.



Siano i paralellogrammi uguali AB, BC, che abbiano gli angoli al B uguali, e ponganſi per diritto DB, BE, ſaranno ancora per diritto FB, BG Dico i lati, che ſono dintorno agli angoli uguali riſpondersi contrariamente fra loro, cioè, come DB a BE, così eſſere GB a BF. Compiſcaſi il paralellogrammo FE, e perchè il paralellogrammo AB è uguale al paralellogrammo BC, ed è un altro paralellogrammo EF, ſarà come AB ad EF, così BC ad FE, ma come

Aſſ. 3. del quin.

AB

AB ad FE, così è DB a BE, e come BC ad FE, così GB a BF, come dunque DB a BE, così GB a BF. onde i lati de' paralellogrammi AB, BC, che ſono dintorno agli uguali angoli, ſi riſpondono fra loro contrariamente. Ma riſpondanſi contrariamente fra loro i lati, che ſono dintorno agli uguali angoli, e ſia come DB a BE così GB a BF. Dico il paralellogrammo AB eſſere uguale al paralellogrammo BC, perciocchè eſſendo come DB a BE così GB a BF, e come DB a BE così il paralellogrammo AB al paralellogrammo FE, e come GB a BF così il paralellogrammo BC ai paralellogrammo FE, ſarà come AB ad FE, così BC ad FE, onde il paralellogrammo AB è uguale al paralellogrammo BC, adunque de' paralellogrammi uguali, ch'hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati dintorno agli angoli uguali ſi riſpondono fra loro contrariamente, e que' paralellogrammi, ch'hanno un angolo uguale ad un angolo, de' quali i lati dintorno agli angoli uguali ſi riſpondono contrariamente, ſono fra loro uguali, il che biſognava dimoſtrare.

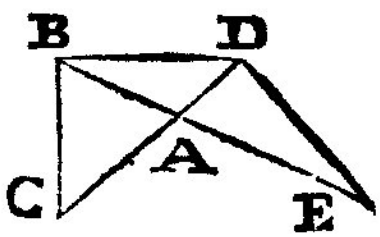
1. *di queſ.*

1. *di queſ.* *Aſſ.* 6. *del quin.* *Aſſ.* 7 *del quin.*

TEO-

TEOREMA X.
PROPOSIZIONE XV.

De' triangoli uguali, che hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati dintorno agli angoli uguali ſi riſpondono fra loro contrariamente: e que' triangoli, ch' hanno un angolo uguale ad un angolo, de' quali i lati dintorno agli uguali angoli ſi riſpondono contrariamente, ſono uguali fra loro.



Siano i triangoli A B C, A D E, che abbiano un angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo B A C all' angolo D A E. Dico i lati, che ſono dintorno agli uguali angoli contrariamente riſponderſi fra loro, cioè, come C A ad A D così eſſere E A ad A B. Ponganſi di modo, che C A ſia per diritto ad A D, adunque E A ancora ſarà per diritto ad A B,

AB, giunganſi B,D, perchè dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE, ed è un altro triangolo ABD, ſarà come il triangolo CAB al triangolo BAD, così il triangolo ADE al triangolo BAD, ma come il triangolo CAB al triangolo BAD, così CA ad AD, e come il triangolo EAD al triangolo BAD, così EA ad AB, come dunque CA ad AD, così EA ad AB, onde i lati de' triangoli ABC, ADE, che ſono dintorno agli uguali angoli, contrariamente ſi riſpondono fra loro; ma riſpondanſi fra loro contrariamente i lati de' triangoli ABC, ADE, e ſia come CA ad AD, così EA ad AB. Dico il triangolo ABC eſſere uguale al triangolo ADE, perciocchè giunti ſimilmente B,D, eſſendo come CA ad AD, così EA ad AB, e come CA ad AD, così il triangolo ABC al triangolo BAD, e come EA ad AB, così il triangolo EAD al triangolo BAD, ſarà come il triangolo ABC al triangolo BAD, così il triangolo EAD al triangolo BAD, onde l'uno, e l'altro de' triangoli ABC, ADE ha la medeſima proporzione al triangolo BAD, e per-

Aſſ. 3. del quin.

1. di queſ.

Aſſ. 6 del quin.

1. di queſ.

Aſſ. 6 del quin.

perciò il triangolo A B C è uguale al triangolo A D E, adunque de' triangoli uguali, ch' hanno un angolo uguale ad un angolo, i lati dintorno agli angoli uguali si rispondono fra loro contrariamente; e que' triangoli, ch' hanno un angolo uguale ad un angolo, de' quali i lati dintorno agli angoli uguali si rispondono contrariamente, sono uguali fra loro, il che bisognava dimostrare.

Ass. 7. del quin.

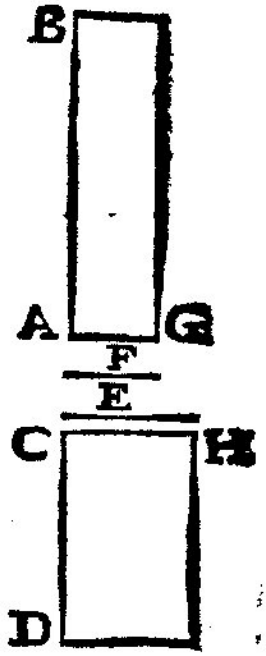
TEOREMA XI.
PROPOSIZIONE XVI.

Se quattro linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo; e se il rettangolo contenuto dall' estreme sia uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo, le quattro linee rette saranno proporzionali.

Sieno quattro linee rette proporzionali A B, C D, E, F, e sia come la

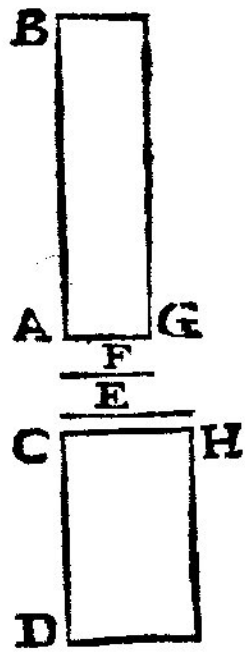
A B

AB alla CD, così la E alla F. Dico che il rettangolo contenuto dalle linee rette AB, F è uguale a quello, che si contiene dalle CD, E. Tirinsi da' punti A, C le AG, CH ad angoli retti sopra le AB, CD, e pongasi la AG uguale alla F, e la CH uguale alla E, e compiscansi i paralellogrammi BG, DH, perchè dunque come la AB alla CD, così è la E alla F, e la E è uguale alla CH, e la F alla AG; sarà come la AB alla CD, così la CH alla AG, i lati dunque de' paralellogrammi equiangoli BG, DH, che sono dintorno agli uguali angoli, si rispondono fra loro contrariamente, e perchè i lati de' paralellogrammi equiangoli, che sono dintorno agli angoli uguali si rispondono contrariamente, però il paralellogrammo BG è uguale al paralellogrammo DH, ed il paralellogrammo BG è quello, che si contiene dalle linee rette AB, F, essendo la AG uguale alla F; ed il paralellogrammo DH quello, che si contiene dalle



CD

CD, E, concioſiacoſachè la CH ſia uguale alla E, adunque il rettangolo contenuto dalle AB,F, è uguale a quello, che ſi contiene dalle CD,E. Ma il rettangolo contenuto dalle AB,F ſia uguale a quello, che ſi contiene dalle CD,E. Dico le quattro linee rette eſſere proporzionali, cioè come la AB alla CD, così eſſere la E alla F. Avendo fatte le medeſime coſe: perchè il rettangolo contenuto dalle AB, F è uguale a quello, che ſi contiene dalle CD,E, e quello, che è contenuto dalle AB.F è il rettangolo BG, eſſendo la AG uguale alla F, ed il contenuto dalle CD,E è il rettangolo DH, perciocchè la CH è uguale alla E: ſarà il paralellogrammo BG uguale al paralellogrammo DH, e ſono equiangoli, ma de' paralellogrammi uguali, ed equiangoli i lati dintorno agli angoli uguali ſi riſpondono fra loro contrariamente, onde come le AB alla CD, così è la CH alla AG, ma la CH è uguale alla E, e la AG alla F, come dunque



14. di queſ.

la

la AB alla CD così la E alla F, laonde se quattro linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo, e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo, le quattro linee rette saranno proporzionali, il che bisognava dimostrare.

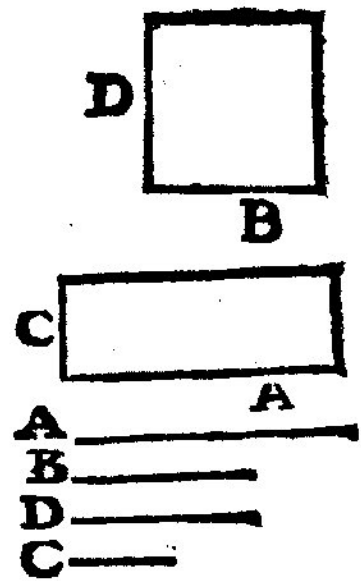
TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XVII.

Se tre linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo: e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo, le tre linee rette saranno proporzionali.

Siano tre linee rette proporzionali A, B, C, e sia come la A alla B, così la

sì la B alla C. Dico, che il rettangolo contenuto dalle A, C è uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo, cioè dalla B Pongasi la D uguale alla B, e perchè come la A alla B, così è la B alla C, e la B è uguale alla D, sarà come la A alla B, così la D alla C, ma se siano quattro linee rette proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo, adunque il rettangolo contenuto dalle A C è uguale a quello, che si contiene dalle B, D, ma il rettangolo contenuto dalle B, D è uguale al quadrato, che si fa dalla B, perciocchè la B è uguale alla D, il rettangolo dunque contenuto dalle A, C è uguale al quadrato, che si fa dalla B Ma il rettangolo contenuto dalle A, C sia uguale al quadrato, che si fa dalla B Dico come la A alla B, così essere la B alla C, Avendo fatte le medesime cose, perchè il rettangolo con-



Aff. 3. del quin. Per l'ant.

contenuto dalle A,C è uguale al quadrato, che si fa dalla B, ed il quadrato, che si fa dalla B è il rettangolo contenuto dalle B,D, essendo la B uguale alla D; sarà il rettangolo contenuto dalle A,C uguale a quello, che si contiene dalle B,D, ma se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al rettangolo, che si contiene da quelle di mezzo, saranno le quattro linee rette proporzionali: adunque come la A alla B, così è la D alla C, ma la B è uguale alla D, onde come la A alla B, così la B alla C, se dunque tre linee rette siano proporzionali, il rettangolo contenuto dalle estreme è uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo, e se il rettangolo contenuto dalle estreme sia uguale al quadrato, che si fa da quella di mezzo, le tre linee rette saranno proporzionali, il che bisognava dimostrare. *Per l'ant.*

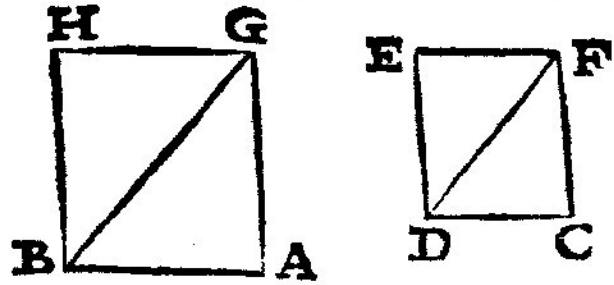
PROBLEMA VI.

PROPOSIZIONE XVIII.

Dalla data retta linea descrivere un rettilineo simile, e si-

milmente posto ad un rettilineo dato.

Sia la data retta linea A B, ed il dato rettilineo C E, bisogna dalla linea retta A B descrivere un rettilineo simile, e similmente posto al rettilineo C F. Giungansi D F, e nella linea retta A B, e ne' punti, che sono in essa, cioè A, B constituiscasi l'angolo G A B uguale all'angolo C,



e l'angolo A B G uguale all'angolo C D F, adunque l'angolo rimanente C F D è uguale al rimanente A G B, ed il triangolo F C D è equiangolo al triangolo G A B, similmente constituiscasi nella linea retta B G, e ne' punti, che sono in essa B, G l'angolo B C H uguale all'angolo D F E, e l'angolo G B H uguale all'angolo F D E, il rimanente dunque F è uguale al rimanente H, onde il triangolo F D F è equiangolo al triangolo G B H, e perchè l'angolo C F D è uguale all'angolo

4 di quest.

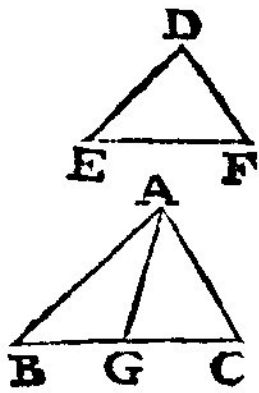
golo AGB, e l' angolo DFE all' angolo BGH, ſarà tutto CFE uguale a tutto AGH: nel medeſimo modo ſi dimoſtrerà l'angolo CDE uguale all'angolo ABH, ed è il C uguale all' A, e l'angolo E all'angolo H; è dunque il rettilineo CE equiangolo al rettilineo AH Perchè dunque è il triangolo CFD equiangolo al triangolo AGB, ſarà come la CF alla FD così la AG alla GB: ſimilmente perchè il triangolo FDE è equiangolo al triangolo GBH, ſarà come la DF alla FE così la BG alla GH, e però per l' ugualità in proporzione ordinata, ſarà come la CF alla FE così la AG alla GH, ſimilmente ſi dimoſtrerà intorno agli altri angoli uguali de' rettilinei equiangoli CE, AH eſſere i lati proporzionali: dunque il rettilineo AH ſarà ſimile al rettilineo CE, laonde dalla data retta linea ſi è deſcritto un rettilineo ſimile, e ſimilmente poſto al rettilineo dato, il che biſognava fare. 18. *de quin.* 1 *diff. di queſto.*

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XIX.

I triangoli ſimili ſono in

proporzione doppia di quella ch'hanno i lati omologhi fra loro.



Siano i triangoli ABC, DEF simili, che abbiano l'angolo B uguale all'angolo E, e sia come la AB alla BC, così la DE alla EF. di modo che il lato BC sia omologo al lato EF. Dico il triangolo ABC al triangolo DEF avere doppia proporzione di quella, che ha la BC alla EF. Pigliſi la terza proporzionale BG delle BC, EF, di modo che come la BC alla EF, così ſia la EF alla BG, e giungaſi GA, perchè dunque come la AB alla BC, così è la DE alla EF, ſarà permutandole come la AB alla DE, così la BC alla EF, ma come la BC alla EF, così è la EF alla BG, come dunque la AB alla DE, così la EF alla BG, onde i lati de' triangoli ABG, DEF, che ſono dintorno agli uguali angoli ſi riſpondono contrariamente fra loro, ma que' triangoli, ch'hanno un angolo uguale ad un angolo, de'quali i lati dintorno agli uguali

11 di queſ.

Aſſ. 6. del quin.

15 di queſ.

guali angoli si rispondono contrariamente, sono fra loro uguali, il triangolo dunque ABG è uguale al triangolo DEF, e perchè come la BC alla EF, così la EF alla EG, e se tre linee rette siano proporzionali la prima alla terza ha doppia proporzione di quella, che ha alla seconda, averà la EC alla EG doppia proporzione di quella, che ha la BC alla EF, ma come la BC alla BG così il triangolo ABC al triangolo ABG, adunque eziandio il triangolo ABC al triangolo ABG ha doppia proporzione di quella, che ha la BC alla EF: ed è il triangolo ABG uguale al triangolo DEF, laonde il triangolo ABC al triangolo DEF, ha doppia proporzione di quella, che ha la BC alla EF, adunque i triangoli simili sono in proporzione doppia di quella, ch' hanno i lati omologhi fra loro, il che bisognava dimostrare

dif. 12. del quinto.

prima di ques.

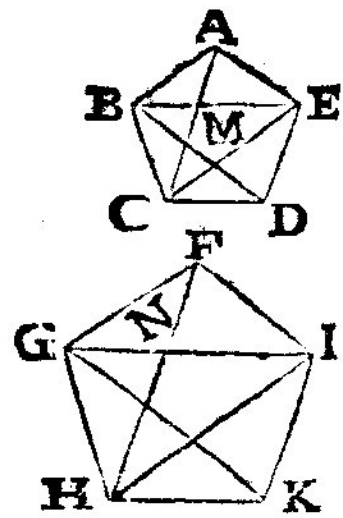
COROLLARIO.

Dalle cose dette di sopra è manifesto, che se tre linee rette siano proporzionali, come la prima alla terza, così la-

rà il triangolo fatto dalla prima, al triangolo fatto dalla ſeconda, ſimile, e ſimilmente deſcritto.

TEOREMA XIV.
PROPOSIZIONE XX.

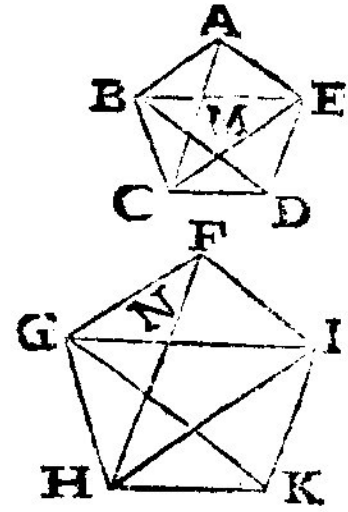
I poligoni ſimili ſi dividono in ſimili triangoli, ed uguali di numero, ed omologhi a tutti; ed il poligono al poligono ha proporzione doppia di quella, che ha il lato omologo al lato omologo.



Siano poligoni ſimili ABCDE, FGHKI, e ſia il lato Ab omologo al lato FG. Dico i poligoni ABCDE, FGHKI dividerſi in ſimili triangoli, e di numero uguali, ed omologhi a tutti, ed il poligono ABCDE al poligono FGHKI avere doppia proporzione di quella che ha AB ad FG. Giunganſi BE EC

EC, GI IH, e perchè il poligono ABCDE è ſimile al poligono FG HKI, l'angolo BAE è uguale all' angolo GFI, ed è come BA ad AE, così GF ad FI perchè dunque ſono due triangoli ABE, FGI, che hanno un angolo uguale ad un angolo, e dintorno agli uguali angoli i lati proporzionali, ſarà il triangolo ABE equiangolo al triangolo FGI, e perciò eziandio ſimile, l'angolo dunque ABE è uguale all'angolo FGI, ed è tutto l'angolo ABC uguale a tutto l'angolo FGH per la ſimilitudine de'poligoni; onde il rimanente EBC è uguale al rimanente IGH, e perchè per la ſimilitudine de' triangoli ABE FGI è come la EB alla BA. così la IG alla GF, e per la ſimilitudine ancora de' poligoni, come la AB alla BC, così è la FG alla GH; ſarà per l'ugualità ordinata come la EB alla BC, così la IG alla GH: e dintorno agli angoli uguali EBC IGH i lati ſono proporzionali, adunque il triangolo EBC è equiangolo al triangolo IGH, onde ancor è ſimile, e per la medeſima ragione il triangolo ECD è ſimile al triangolo IHK, adunque i poli- 4 *di queſt.*

goni simili A B C D E, F G H K I si dividono in simili triangoli, e di numero uguali. Dico anche omologhia tutti, cioè, che i triangoli siano proporzionali, ed antecedenti essere A B E E B C, E C D, ed i



conseguenti loro F G I, I G H, I H K, ed il poligono A B C D E al poligono F G H K I avere doppia proporzione di quella, che ha il lato omologo al lato omologo, cioè A B ad F C. Giunganſi A C, F H, e perchè per la ſimilitudine de' poligoni l'angolo A B C è uguale all'angolo F G H, ed è come la A B alla B C così la F G alla G H, ſarà il triangolo A B C equiangolo al triangolo F G H, è dunque uguale l' angolo B C A all' angolo G F H, e l' angolo B A C all' angolo G H F, oltre a ciò perchè l' angolo B A M è uguale all' angolo G F N, e ſi è dimoſtrato l angolo A B M uguale all' angolo F G N, ſarà ancora il rimanente A M B uguale al rimanente F N G; è dunque il triangolo A B M equiangolo al tri-

6 di queſ.

al triangolo FGN dimostreremo parimente il triangolo BMC essere equiangolo al triangolo GNH, come dunque la AM alla MB, così è la FN alla NG, e come la BM alla MC, così la GN alla NH, onde per l'ugualità ordinata come la AM alla MC così la FN alla NH, ma come la AM alla MC, così il triangolo ABM al triangolo MBC, ed il triangolo AME al triangolo EMC, perciocchè sono fra loro come le basi: e come uno degli antecedenti ad uno de' conseguenti, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti, come dunque il triangolo ABM al triangolo BMC, così il triangolo ABE al triangolo CBE, ma come AMB a BMC, così la AM alla MC, onde come la AM alla MC, così il triangolo ABE al triangolo EBC, e per la medesima ragione come la FN alla NH, così il triangolo FGI al triangolo GHI, ed è come la AM alla MC, così la FN alla NH, adunque come il triangolo ABE al triangolo BEC, così il triangolo FGI al triangolo GHI, e permutandogli come il triangolo ABE al triangolo FGI, così il triangolo E

1. *di quest.*

12. *del quin.*

1. *di quest.*

BC al triangolo GHI. dimoſtreremo ſimilmente giunte, che ſiano BD,GK, come il triangolo BEC al triangolo GIH, così eſſere il triangolo ECD al triangolo IHK, e perchè come il triangolo ABE al triangolo FGI, così il triangolo EBC al triangolo IGH, ed ancora il triangolo ECD al triangolo IHK, ſarà come uno degli antecedenti ad uno de' conſeguenti, così tutti gli antecedenti a tutti i conſeguẽti, adunque come il triangolo ABE al triangolo FGI, così il poligono ABCDE al poligono FGHKI, ma il triangolo ABE al triangolo FGI ha doppia proporzione di quella, che ha il lato omologo AB al lato omologo FG, perciocchè i triangoli ſimili ſono in doppia proporzione de' lati omologhi, adunque eziandio il poligono ABCDE al poligono FGHKI ha doppia proporzione di quella, che ha il lato omologo AB al lato omologo FG, onde i poligoni ſimili ſi dividono in ſimili triangoli, ed uguali di numero, ed omologhi a tutti, ed il poligono al poligono ha proporzione doppia di quella, che ha il lato omologo al lato omologo, il che biſognava dimoſtrare.

8. del quin.

Per l'ant.

Al

Al medeſimo modo ancora ne' ſimili quadrilateri ſi dimoſtrerà quegli eſſere in doppia proporzione de' lati omologhi, e ſi è dimoſtrato eziandio ne' triangoli,

COROLLARIO I.

Adunque univerſalmente le figure rettilinee ſimili fra loro ſono in proporzione doppia di quella, che hanno i lati omologhi: e ſe delle A B, F G piglieremo la terza proporzionale, che ſia X, averà la A B alla X doppia proporzione di quella, che ha la A B alla F G, ma anche il poligono al poligono, ed il quadrilatero al quadrilatero ha proporzione doppia di quella, che ha il lato omologo al lato omologo, cioè A B ad F G, e queſto ne' triangoli ancora è ſtato dimoſtrato

COROLLARIO II.

Laonde è manifesto universalmente, che se tre linee rette siano proporzionali, come la prima alla terza, così sarà la figura fatta dalla prima alla figura fatta dalla seconda, simile, e similmente descritta, il che bisognava dimostrare

TEOREMA XV.

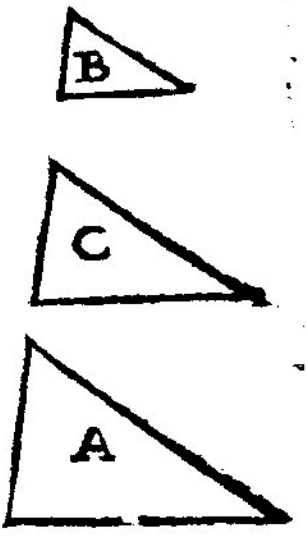
PROPOSIZIONE XXI.

I rettilinei simili ad un medesimo rettilineo, sono ancora simili fra loro.

Sia l'uno, e l'altro de' rettilinei A,B simile al rettilineo C. Dico il rettilineo A essere simile al rettilineo B. Perciocchè essendo il rettilineo A simile al rettilineo C, sarà ancor equiangolo, e dintorno agli uguali angoli averà i lati proporzionali, oltre a ciò perchè il rettilineo B è simile al rettilineo C, sa-

rà

rà eziandio equiangolo ad esso, ed avrà dintorno agli ugualiangoli i lati proporzionali, adunque l'uno, e l'altro de' rettilinei A,B è equiangolo al C, ed ha intorno agli angoli uguali i lati proporzionali, onde il rettilineo A è equiangolo al B, ed ha i lati proporzionali intorno agli uguali angoli: e però il rettilineo A è simile al rettilineo B, il che bisognava dimostrare.



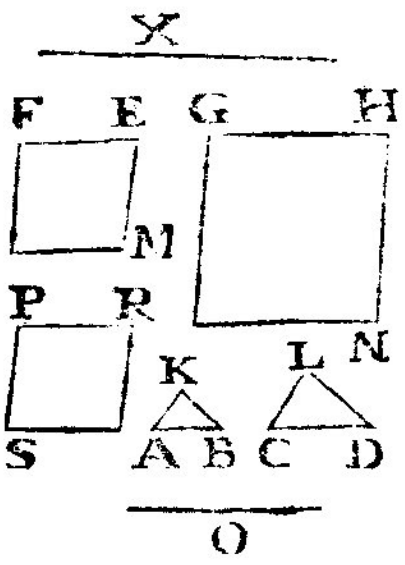
TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XXII.

Se quattro linee rette siano proporzionali, i rettilinei ancora, che si fanno da esse, simili, e similmente descritti, saranno proporzionali: e se i rettilinei, che si fanno da esse simili, e similmente descritti siano proporzionali, le

linee

linee rette ancora saranno proporzionali.



18. *di quef.* Siano quattro linee rette proporzionali A B CD, EF, GH, e sia come la A B alla CD, così la E F alla G H: e descrivansi dalle A B CD rettilinei simili, e similmente posti KAB, LCD, e dalle EF, GH descrivansi rettilinei simili, e similmente posti MF, NG. Dico che come il rettilineo KAB al rettilineo LCD, così è il rettilineo MF al rettilineo NG. Piglisi delle
11. *di quef.* AB, CD la terza proporzionale O, e delle EF, GH la terza proporzionale X, e perchè come la AB alla CD, così è la EF alla GH, e come la CD alla O, così la GH alla X, sarà per l'ugualità in proporzione ordinata come la AB alla O, così la
Coroll. 20. *di quef.* EF alla X, ma come la AB alla O, così è il rettilineo KAB al rettilineo LCD. e come la EF alla X, così il rettilineo MF, al rettilineo NG:

adun-

adunque come il rettilineo K A B al rettilineo L C D, così è il rettilineo M F al rettilineo N G. Ma sia come il rettilineo K A B al rettilineo L C D, così il rettilineo M F al rettilineo N G. Dico come la A B alla C D, così essere la E F alla G H. Facciasi come la A B alla C D, così la E F alla P R, e descrivasi dalla P R il rettilineo S R simile ad uno de' rettilinei M F, N G, e similmente posto. Perchè dunque è come la A B alla C D, così la E F alla P R, e sono descritti dalle AB, CD rettilinei simili, e similmente posti K A B L C D, e dalle E F, P R i rettilinei M F S R simili, e similmente posti; sarà come il rettilineo K A B al rettilineo L C D, così il rettilineo M F al rettilineo R S: e si pone come il rettilineo K A B al rettilineo L C D, così il rettilineo M F al rettilineo N G; adunque come il rettilineo M F al rettilineo N G, così il rettilineo M F al rettilineo S R. ed avendo il rettilineo M F la medesima proporzione all' uno, e l'altro di essi N G, S R, sarà il rettilineo N G uguale al rettilineo S R, ma è ancor simile, e similmente posto; adunque la G H è uguale alla P R, e

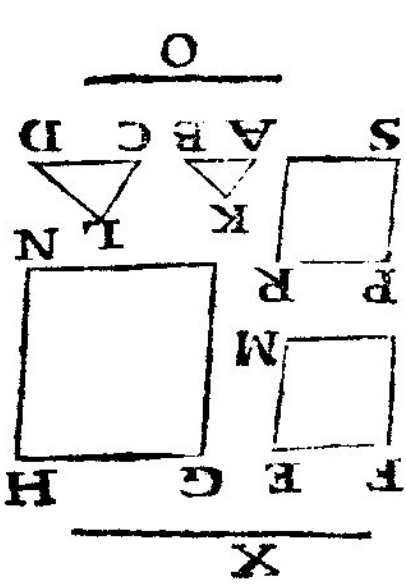
Ass. 6. del quin.

12. di quef.

Ass. 7. del quin.

per

perchè come la AB alla CD, così è la EF alla PR, ed è la PR uguale alla GH, sarà come la AB alla CD, così la EF alla GH, adunque se quattro linee rette siano proporzionali i rettilinei ancora, che si fanno da esse simili, e similmente descritti, saranno proporzionali: e se i rettilinei, che si fanno da esse simili, e similmente descritti siano proporzionali, le linee rette ancora saranno proporzionali, il che bisognava dimostrare.



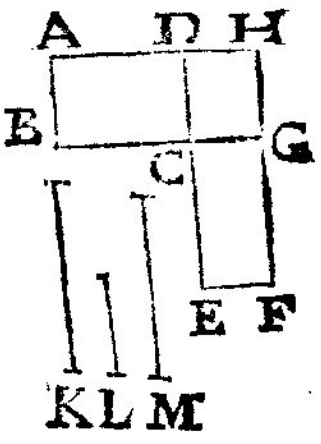
TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XXIII.

I paralellogrammi equiangoli hanno fra loro la proporzion composta de' lati.

Siano i paralellogrammi equiangoli AC, CF, che abbiano l'angolo BCD uguale all'angolo ECG.

Dico



Dico il paralellogramo AC al paralellogrammo CF avere proporzione cõposta de' lati, cioè composta della proporzione, che ha la BC alla CG, e della proporzione, che ha la DC alla CE. Pongasi la BC per diritto alla CG, sarà dunque la DC per diritto alla CE: e compiscasi il paralellogrammo DG, e proposta la linea retta K, facciasi come la BC alla CG, così la K alla L, e come la DC alla CE, così la L alla M, adunque le proporzioni di K ad L, e di L ad M sono le medesime, che le proporzioni de' lati, BC a CG, e DC a CE, ma la proporzione della K alla M è composta della proporzione della K alla L, e della proporzione della L alla M, onde eziandio la K alla M ha proporzione composta de' lati, e perchè come la BC alla CG, così è il paralellogrammo AC al paralellogrammo CH, e come la BC alla CG, così la K alla L, sarà come la K alla L, così il paralellogrammo AC al para-

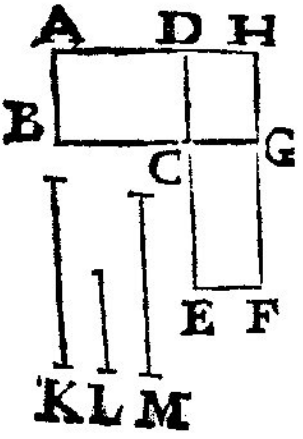
14. del primo.

12. di quest.

1. di quest. Ass. 6 del quin.

paralellogrammo CH, ſimilmente, perchè come la DC alla CE, così è il paralellogrammo CH al paralellogrammo CF, e come la DC alla CE, così la L alla M, ſarà come la L alla M così il paralellogrammo CH al paralellogrammo CF, ed eſſendoſi dimoſtrato, che come la K alla L, così il paralellogrāmo AC al paralellogrammo CH, e come la L alla M, così il paralellogrammo CH al paralellogrammo CF, ſarà per l'ugualità in proporzione ordinata come la K alla M così il paralellogrammo AC al paralellogrammo CF, ma la K alla M ha la proporzione compoſta de' lati, adunque ancora il paralellogrāmo AC al paralellogrammo CF averà la proporzione compoſta de' lati, onde i paralellogrammi equiangoli hanno fra loro la proporzion compoſta de' lati, il che biſognava dimoſtrare.

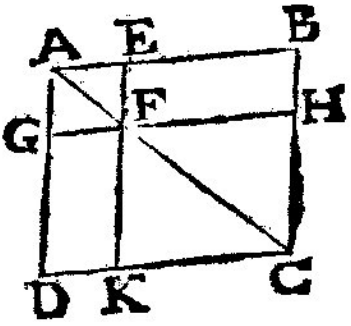
Aſſ. 6. del quin.



TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XXIV.

D' ogni paralellogrammo i paralellogrammi, che ſono dintorno al diametro ed al tutto, e fra loro ſono ſimili.



Sia il paralellogrammo A B C D, il cui diametro AC, e dintorno al medeſimo ſiano i paralellogrammi E G, H K. Dico eſſi e a tutto A B C D, e fra loro eſſer ſimili. Perchè ad uno de' lati del triangolo AB C, cioè a BC ſi è tirata la E F paralella, ſarà come la B E alla E A, così la CF alla F A, ſimilmente perchè ad un lato del triangolo A C D, cioè a C D ſi è tirata F G paralella, come la C F alla F A, così ſarà la D G alla G A, ma come la C F alla F A, così ſi è dimoſtrata la B E alla E A, onde come la B E alla E A, così la D G alla G A, e componendole come la B A alla A E, così la D A alla A G, e permutandole come la B A alla

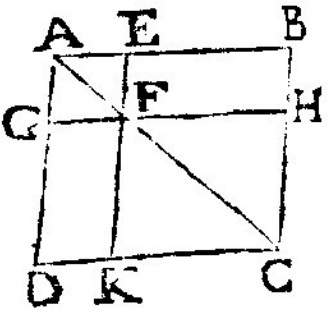
2. di queſ.

Aſſ. 6 del quin.

alla A D, così la E A alla A G, adunque de' paralellogrammi A B C D, E G i lati dintorno all'angolo comune B A D sono proporzionali, e perchè la G F è paralella alla D C, l'angolo A G F è uguale all'angolo A D C, e l'angolo G F A uguale all' angolo D C A, e l'angolo D A C è comune a' due triangoli A D C, A G F, sarà il triangolo A D C equiangolo al triangolo A G F, e per la medesima ragione il triangolo A C B è equiangolo al triangolo A F E, adunque tutto il paralellogrammo A B C D è equiangolo al paralellogrammo E G, onde come la A D alla D C così la A G alla G F: e come la D C alla C A, così la G F alla F A; e come la A C alla C B, così la A F alla F E, oltre a ciò come la C B alla B A, così la F E alla E A, perchè dunque si è dimostrato, che come la D C alla C A, così è la G F alla F A, e come la A C alla C B, così la A F alla F E, sarà per l'ugualità in proporzione ordinata come la D C alla C B, così la G F alla F E, adunque de' paralellogrammi A B C D, E G

29. del primo.

4. di quest.



EG i lati ſono proporzionali, che ſono dintorno agli uguali angoli, e però il paralellogrammo ABCD è ſimile al paralellogrammo EG, e per la medeſima ragione il paralellogrammo ABCD è ſimile al paralellogrammo KH, adunque l'uno, e l'altro di eſſi paralellogrammi EG, KH è ſimile al paralellogrammo ABCD, ma quegli, che ſono ſimili al medeſimo rettilineo, ſono ſimili ancora fra loro, onde il paralellogrammo EG è ſimile al paralellogrammo HK, adunque d'ogni paralellogrammo i paralellogrammi, che ſono dintorno al diametro ed al tutto, e fra loro ſono ſimili, il che biſognava dimoſtrare. 21. *di queſt.*

PROBLEMA VII.

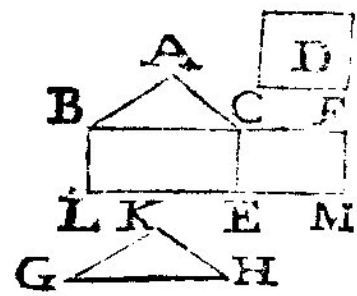
PROPOSIZIONE XXV.

Conſtituire un rettilineo ſimile ad un dato rettilineo, e uguale ad un altro dato.

Sia il rettilineo dato ABC, al quale biſogni conſtituire un ſimile, e ſia il rettilineo D, al quale biſogni conſtituire uno uguale. Adattiſi alla

linea

44. del primo. linea retta BC il paralellogrammo BE uguale al triangolo ABC, ed alla retta CE adattisi il paralellogrammo CM uguale al D nell'angolo FCE, che è uguale all' angolo CBL, la BC dunque è per diritto alla CF, e la LE alla EM. Pigliſi delle BC, CF la proporzionale di mezzo GH, e dalla GH deſcrivaſi il triangolo KGH ſimile, e ſimilmente poſto al triangolo ABC, e perchè come la BC alla GH, così è la GH alla CF; e le tre linee rette ſiano proporzionali, come la prima alla terza, così è la figura, che ſi fa dalla prima a quella, che ſi fa dalla ſeconda, ſimile e ſimilmente deſcritta, ſarà come la BC alla CF, così il triangolo ABC al triangolo KGH, ma come la BC alla CF, così il paralellogrammo BE al paralellogrammo EF, adunque come il triangolo ABC al triangolo KGH così il paralellogrammo BE al paralellogrammo EF: e permutandogli come il triangolo ABC al paralellogrammo BF, così il triangolo KGH al paralellogrammo



14. del primo.

13. del ques.

18. di ques.

Corol. della 20. di ques.

11. del quinto.

mo

mo F F, ma il triangolo A B C è uguale al paralellogrammo B E, il triangolo dunque K G H è uguale al paralellogrammo E F, ma il paralellogrammo E F è uguale al rettilineo D, onde eziandio il triangolo K G H è uguale al D: e K G H è ſimile al triangolo A B C, adunque ſi è conſtituito un rettilineo ſimile ad un dato rettilineo, ed uguale ad un altro dato, il che biſognava fare.

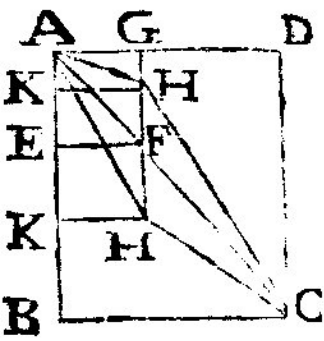
TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se da un paralellogrammo ſi tragga un paralellogrammo ſimile al tutto, e ſimilmente poſto, che abbia un angolo comune con eſſo, quello ſarà dintorno al medeſimo diametro col tutto.

Dal paralellogrammo A B C D traggaſi il paralellogrammo A F, ſimile all' A B C D, e ſimilmente poſto, che abbia l' angolo G A E comune con eſſo. Dico il paralellogrammo

A B C D



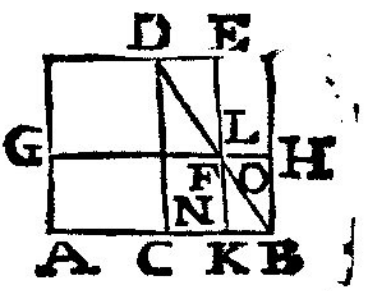
ABCD essere dintorno al medesimo diametro col parallellogrammo AF. Non già, ma se egli è possibile, sia il suo diametro AHC, e prolunghisi la GF fino al punto H, e tirisi per H ad una di esse AD, BC la paralella HK, perchè dunque il paralellogrammo ABCD è dintorno al medesimo diametro col paralellogrammo KG, sarà il paralellogrammo ABCD simile al paralellogrammo KG adunque come la DA alla AB, così la GA alla AK: ed è per la similitudine de' paralellogrammi ABCD, EG come la DA alla AB, così la GA alla AE, onde come la GA alla AE, così è la GA alla AK: ed avendo la GA la medesima proporzione all' una, e l' altra delle AK, AE sarà la AE uguale alla AK la minore alla maggiore, il che non è possibile, adunque il paralellogrammo ABCD non è dintorno al medesimo diametro col paralellogrammo AH, e perciò sarà dintorno al medesimo diametro con AF, se dunque da un paralellogram-

24. di quesi. prima diff di quesi.
Ass. 6. del quin.
Ass. 7. del quin.

grammo si tragga un paralellogrammo simile al tutto, e similmente posto, che abbia un angolo comune con esso, quello sarà dintorno al medesimo diametro con tutto, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XX.
PROPOSIZIONE XXVII.

De' paralellogrammi adattati alla medesima linea retta, e che mancano di figure paralellogramme simili, e similmente poste a quella, che si descrive dalla metà, il maggiore di tutti è il paralellogrammo adattato alla metà, essendo simile al mancamento.



Sia la linea retta AB, e seghisi per mezzo nel punto C, ed alla linea retta AB adattisi il paralellogrammo AD, che manchi della figura paralellogramma DB, simile, e similmente

posta a quella, che è descritta dalla metà di AB, cioè dalla CB. Dico de' paralellogrãmi adattati alla linea retta AB, che mancano di figure paralellogramme simili, e similmente poste alla DB, il maggior di tutti essere il paralellogrãmo AD. Adattisi alla linea retta AB il paralellogrammo AF, che manchi della figura paralellogramma FB simile, e similmente posta alla DB, Dico il paralellogrammo AD essere maggiore del paralellogrammo AF. Perciocchè essendo il paralellogrammo DB simile al paralellogrammo FB, sono dintorno al medesimo diametro, tirisi il lor diametro DB, e descrivasi la figura, perchè dunque il paralellogrammo CF è uguale al paralellogrammo HE, pongasi comune lo FB, adunque tutto CH è uguale a tutto BE, ma CH è uguale a CG, perciocchè la linea retta AC è uguale alla CB, onde il paralellogrammo GC sarà uguale al paralellogrammo EB. Pongasi CF comune, adunque tutto il paralellogrammo AF è uguale al gnomone LOF, e perciò il paralellogrammo DB cioè AD è maggior del paralellogrammo AF, adunque de' paralellogrammi adat-

Per l'ant.

43. *del primo.*

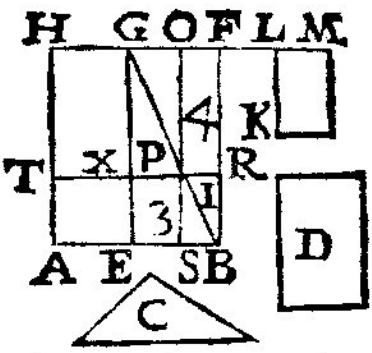
36. *del primo.*

mi adattati alla medeſima linea retta, che mancano di figure paralellogramme ſimili, e ſimilmente poſte a quella, che ſi deſcrive dalla metà, il maggior di tutti è il paralellogrāmo adattato alla metà, il che biſognava dimoſtrare.

PROBLEMA VIII.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Alla retta linea data adattare un paralellogrammo uguale ad un dato rettilineo, che manchi d'una figura paralellogramma ſimile ad un altra data, ma biſogna, che 'l dato rettilineo, al quale ſi deve adattare un paralellogrammo uguale, non ſia maggior di quello, che ſi adatta alla metà, eſſendo ſimili i mancamenti, e quello, che ſi fa dalla metà, e quello, al quale deve eſſere ſimile il mancamento.



Sia la data linea retta AB, ed il dato rettilineo, al quale bisogni adattare alla data linea AB, un parallellogrãmo uguale sia C, non maggiore di quello, che è adattato alla metà, essendo i mancamenti simili, e quello al quale deve esser simile il mancamento, sia D, bisogna alla data linea retta AB adattare un paralellogrammo uguale al dato rettilineo C, che manchi della figura paralellogramma simile a D. Seghisi per mezzo la AB nel punto E, e dalla EB descrivasi un paralellogrammo simile, e similmente posto a D, che sia EBFG, e compiscasi il paralellogrammo AG. adunque AG, o è uguale a C, o è maggiore di esso per la determinazione: e se AG sia uguale a C, già sarà fatto ciò, che si proponeva, perciocchè alla linea retta AB si è adattato un paralellogrammo AG uguale al dato rettilineo C, che manca della figura paralellogramma GB, simile a D. Ma se non è uguale, sarà HE maggiore di C, ed è HE uguale a GB, onde GB è maggior di C

18. *di quest.*

di C; conſtituiſcaſi un paralellogrã-
mo K M uguale all' eccesſo, nel
quale G B avanza C, e ſimile, e ſi-
milmente poſto a D: ma D è ſimile
a G B; onde eziandio K M ſarà ſimi-
le a G B; ſia dunque la retta linea
K L omologa alla E G, e la L M
omologa alla G F, e perchè il para-
lellogrammo G B è uguale a C, ed
a K M, ſarà G B maggiore di K M,
adunque la linea retta E G è mag-
gior della K L, e la G F della L M;
pongaſi X G uguale alla K L, e
la G O uguale alla L M, e compi-
ſcaſi il paralellogrammo X G O P,
onde il paralellogrammo G P è u-
guale, e ſimile a K M, ma K M è 21. *di*
ſimile a G B, adunque ancora G P *queſ.*
è ſimile a G B: e per tal cagione 26. *di*
G P è dintorno al medeſimo diame- *queſ.*
tro con G B, ſia il lor diametro
G P B, e deſcrivaſi la figura, perchè
dunque G B è uguale a C, e K M,
de' quali G P è uguale a K M, ſarà
il gnomone rimanente 3. 1. 4. ugua-
le al rimanente C, e perchè O R è 43. *del*
uguale a X S, pongaſi P B comu- *primo.*
ne, ſarà tutto O B uguale a tutto
X B, ma X B è uguale a T E, con-
cioſſiacoſachè il lato A E ſia uguale 36. *del*
al lato E B, onde ancor T E è ugua- *primo.*

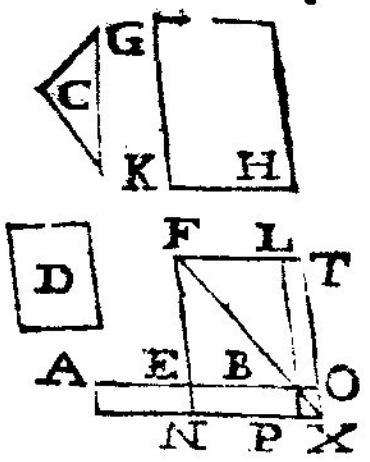
le ad O B. Pongaſi X S comune, adunque tutto T S è uguale a tutto il gnomone 3. 1. 4 ma il gnomone 3. 1. 4. è dimoſtrato uguale a C, e perciò T S ſarà uguale a C, laonde alla retta linea data ſi è adattato un paralellogrammo uguale al dato rettilineo, che manca della figura paralellogramma ſimile a una data, il che biſognava fare.

PROBLEMA IX.

PROPOSIZIONE XXIX.

Alla retta linea data adattare un paralellogrammo uguale ad un dato rettilineo, che ecceda d'una figura paralellogramma ſimile ad un altra data.

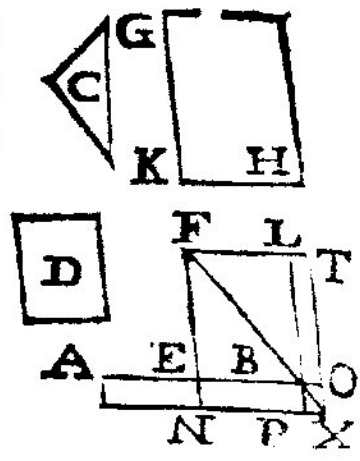
Sia la retta linea data A B, ed il rettilineo dato, al quale biſogni adattare un paralellogrammo uguale nella linea retta A B, ſia C, e quello al quale l'eccesſo deve eſſere ſimile ſia D, adunque biſogna alla linea retta A B adattare un paralellogrammo uguale al dato rettilineo C, che ecceda d'una figura paralellogram-



gramma ſimile a D. Seghiſi la AB per mezzo nel punto E: e dalla EB deſcrivaſi il paralellogrammo BF ſimile a D, e ſimilmente poſto: e coſtituiſcaſi il paralellogrammo GH uguale all'uno, e l'altro BF, C, e ſimile a D, e ſimilmente poſto, adunque il paralellogrammo GH è ſimile ad FB, e ſia KH il lato riſpondẽte ad FL, e KG riſpondente ad FE, e perchè il paralellogrammo GH è maggiore di FB, ſarà la linea retta KH maggiore di FL, e KG maggiore di FE, prolunghinſi FL, FE, ed a KH ſia uguale FLT, ed a KG uguale FEN: e compiſcaſi il paralellogrammo TN, adunque il paralellogrammo TN è uguale, e ſimile a GH, ma GH è ſimile ad EL, adunque eziandio TN ſarà ſimile ad EL, e perciò EL è dintorno al medeſimo diametro con TN. Tiriſi il lor diametro FX, e deſcrivaſi la figura, e perchè GH è uguale all'uno, e l'altro EL, C ed ancora è uguale a TN, ſarà TN uguale all'uno, e l'altro EL, C,

21. *di queſ.*

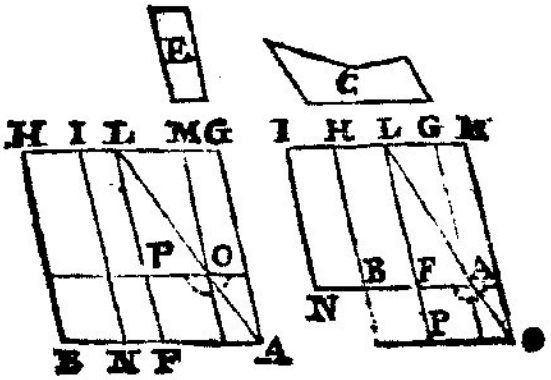
26. *di queſ.*



traggasi E L, che è comune, adunque il gnomone rimanente O X P è uguale a C, e perchè la linea A E è uguale alla E B, sarà il paralellogrãmo A N uguale al paralellogrammo N B, cioè ad L O. pongasi B X comune, adunque tutto A X è uguale al gnomone O X P, ma il gnomone O X P è uguale a C, e perciò A X è uguale a C, laonde alla retta linea data A B si è adattato un paralellogrammo A X uguale al dato rettilineo C, che eccede di una figura paralellogramma, simile ad una data, il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXVIII. e XXIX. del Sesto d' Euclide dimostrate congiuntamente dal Torricelli.

Alla data linea AB applicare un paralellogrammo uguale al dato rettilineo C, e che manchi, o ecceda d' un paralellogrammo simile al dato E: ma bisogna, che quando si deve adattare il paralellogrammo, che manchi, &c. il dato rettilineo non sia maggiore del paralellogrammo, che è simile al dato, e che è descrittibile sopra la metà della linea data.



Seghisi per mezzo la BA in F, e sopra l' FA si faccia un rettilineo FG simile al dato E, che sarà paralellogrammo, e si compisca sopra tutta la data AB, il paralellogrammo AH, dipoi Prop. 18. del libr. 6.

Prop. 45. del lib pr. alla data B H nell' angolo B H I si applichi il paralellogrammo B I uguale al dato rettilineo C, e tra le G L ed L I si prenda la media proporzionale L M e tirato il diametro L A si finisca la figura

Corol. delle Prop. 19. del 6. dal punto M Dico, che il paralellogrammo B O, che è adattato alla data A B, e che nella prima figura ha il mancamento A O, e nella seconda ha l' eccesso A O simile all' F G, ovvero al dato E, e uguale all' altro dato rettilineo C.

Prop. 1. del 6. Imperciocchè la figura A L alla simil figura L O sta come la linea G L alla linea L I delle tre G L, L M, L I in continua proporzione, ovvero come la medesima figura A L alla figura L N, adunque i paralellogrammi O L, & L N sono uguali, e nella prima figura, tutto L A è uguale a tutto L B, adunque il rimanente gnomone P A M è uguale al rimanente paralellogrammo B I.

Ass. 7. della Scien. Univ. delle Prop. Ma nella seconda figura, essendo tutto O L uguale a tutto L N come poco fa s' è provato, e la parte L A uguale alla parte L B, resterà il gnomone P A M uguale al rimanente paralellogrammo B I.

Prop. 1. del 6. E' dunque in ciascuna figura il paralellogrammo B I uguale al gnomone P A M, cioè al paralellogrammo B O (perchè il paralellogrammo B P è uguale al P A, ovvero all' A M, e aggiunto comune F O,

Per la medes.

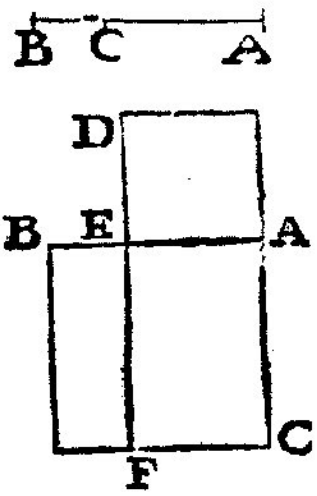
FO, tutto BO è uguale a tutto il gnomone PAMI) ma il paralellogrammo BI è fatto uguale al rettilineo C, adunque anco il paralellogrammo BO sarà uguale al medesimo C, & e il BO adattato alla data linea AB, e manca nella prima figura, ed eccede nella seconda del paralellogrammo AO simile al dato E, che è quanto fu proposto di fare.

PROBLEMA X.

PROPOSIZIONE XXX.

Segare una data linea retta terminata secondo l' estrema, e mezza proporzione.

Sia la data linea retta terminata AB, bisogna segarla secondo l' estrema, e mezza proporzione. Descrivasi dalla AB il quadrato BC, ed alla AC adattisi il paralellogrammo CD, uguale a BC, che ecceda della figura AD simile a BC, ma BC è quadrato, adunque eziandio AD sarà quadrato, e perchè BC è uguale a CD, traggasi CE, che è comune, il



46. del primo. Per l'ant.

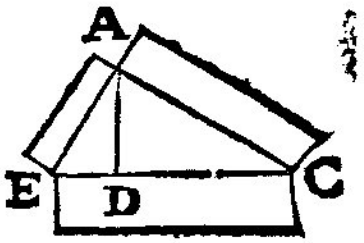
rimanente dunque B F è uguale al rimanente A D, ed è equi-
34. *di quest.* angolo ad esso, il perchè i lati de' BF, A D, che sono dintorno agli uguali angoli, si rispondono fra loro contrariamente: e perciò come F E ad E D così è A E ad E B: ed è F E uguale ad A C, cioè ad A B, e E D ad A E, onde come A B ad A E, così A E ad E B, ma A B è maggiore di A E, adunque A E è maggiore di E B, laonde la linea retta A B è segata nel punto E secondo l'estrema, e mezza proporzione, il che bisognava fare.

TEOREMA XXI.

PROPOSIZIONE XXXI.

Ne' triangoli rettangoli la figura, che si fa dal lato sottoposto all'angolo retto, è uguale alle figure fatte da'lati, che l'angolo retto contengono, simili, e similmente descritte.

Sia



Sia il triangolo rettangolo AEC, che abbia l'angolo retto EAC. Dico la figura, che si fa da EC essere uguale a quelle, che si fanno da EA, AC, simili, e similmente descritte. Tirisi la perpendicolare AD, perchè dunque nel triangolo rettangolo AEC dall' angolo retto A si è tirata la AD perpendicolare alla base EC, saranno i triangoli AED, ADC, che sono alla perpendicolare, simili al tutto AEC, e fra loro, e perchè il triangolo AEC è simile al triangolo AED, sarà come la CE alla EA, così la AE alla ED, e essendo tre linee rette proporzionali, come la prima alla terza, così sarà la figura, che si fa dalla prima a quella, che si fa dalla seconda simile, e similmente descritta, adunque come la CE alla ED, così la figura, che si fa dalla CE a quella, che si fa dalla EA simile, e similmente descritta, e per la medesima ragione come la EC alla CD, così la figura, che si fa dalla EC a quel-

8. di quest.

Corol. della 20. di quest.

a quella, che si fa dalla C A, onde come la E C alla E D, D C, così è la figura, che si fa dalla E C a quelle, che si fanno dalla E A, A C simili, e similmente descritte, ma la E C è uguale alle E D, D C, adunque la figura, che si fa dalla E C è uguale a quelle, che si fanno dalle E A, A C simili, e similmente descritte, laonde ne' triangoli rettangoli la figura, che si fa dal lato sottoposto all' angolo retto è uguale alle figure fatte da' lati, che l'angolo retto contengono simili, e similmente descritte, il che bisognava dimostrare.

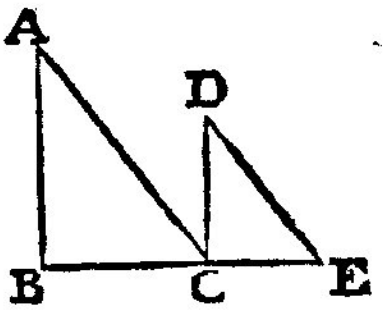
TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXXII.

Se due triangoli siano composti ad un angolo, ed abbiano due lati proporzionali a due lati, talmente che i lati loro rispondenti siano ancor paralelli, saranno gli altri lati

de'

de' triangoli posti per diritto fra loro.



Siano due triangoli A B C, D C E, che abbiano due lati B A, A C proporzionali a due lati C D, D E, e sia come B A ad A C, così C D a D E, e la A B sia paralella alla D C, e la A C alla D E. Dico la B C essere per diritto alla C E. Perciocchè essendo la A B paralella alla D C, e cadendo in esse una linea retta A C, saranno gli angoli alterni B A C, A C D fra loro uguali, e per la medesima ragione l'angolo C D E è uguale all' angolo A C D; onde altresì B A C è uguale a C D E, e perchè sono due triangoli A B C D C E, che hanno un angolo A uguale ad un angolo D, e dintorno a gli uguali angoli i lati proporzionali, cioè come B A ad A C così è C D a D E, sarà il triangolo A B C equiangolo al triangolo D C E, adunque l'angolo A B C è uguale all' angolo D C E: e si è dimostrato l' angolo A C D uguale all'angolo B A C, e però tutto

29 del primo.

6. di quest.

to ACE è uguale a' due ABC, BAC, pongaſi l'angolo ACB comune, gli angoli dunque ACE ACB ſono uguali agli angoli BAC ACB, CBA, ma BAC, ACB, CBA ſono uguali a due retti, onde eziandio gli angoli ACE, ACB ſaranno uguali a due retti, adunque ad una linea retta AC, e al punto C in eſſa due linee rette BC, CE, che non ſono poſte dalle medeſime parti fanno gli angoli da' lati ACE ACB uguali a due retti, e perciò BC ſarà per diritto a CE, onde ſe due triangoli ſiano compoſti ad un angolo, ed abbiano due lati proporzionali a due lati, talmente, che i lati loro riſpondenti ſiano ancor paralelli, ſaranno gli altri lati de' triangoli poſti per diritto fra loro, il che biſognava dimoſtrare.

14. *del primo.*

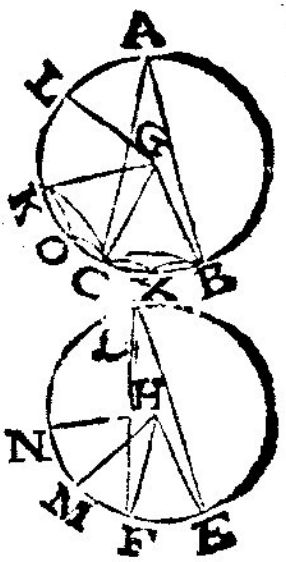
TEOREMA XXIII.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Ne' cerchi uguali gli angoli hanno la medeſima proporzione, che le circonferenze, ſopra le quali ſi fermano, o

ſia-

ſiano a' centri, ovvero alle circonferenze, ed oltre a ciò i ſettori ancora, come quegli, che ſono poſti a' centri.



Siano i cerchi uguali A B C, D E F, ed a' loro centri G, H ſiano gli angoli B G C, E H F, ed alle circonferenze gli angoli B A C E D F. Dico, che come la circonferenza B C alla circonferenza E F, così è l' angolo B G C all'angolo E H F, e l'angolo B A C all' angolo E D F, ed il ſettore ancora B G C al ſettore E H F. Ponganſi quante ſi vogliano circonferenze C K, K L uguali alla B C, e ſimilmente ponganſi quante ſi vogliano circonferenze F M, M N uguali alla E F, e giunganſi G K, G L, H M, H N, perchè dunque le circonferenze B C, C K, K L ſono fra loro uguali, ſaranno altresì gli angoli B G C, C G K, K G L, uguali fra loro, adunque quante volte la circonferenza L B è multiplice della circonferenza B C, tante volte l'an-

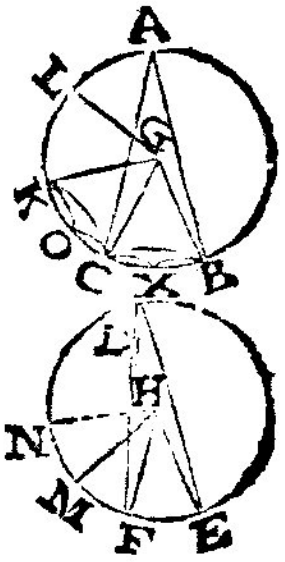
27. del terzo.

golo BGL è multiplice dell'angolo BGC: per la medesima ragione quante volte la circonferenza NE è multiplice della circonferenza EF, tante volte l'angolo EHN è multiplice dell'angolo EHF, se dunque la circonferenza BL è uguale alla circonferenza EN, e l'angolo BGL sarà uguale all'angolo EHN, e se la circonferenza BL è maggiore della circonferenza EN, e l'angolo BGL sarà maggiore dell'angolo EHN, e se minore, minore, essendo dunque quattro grandezze cioè due circonferenze BC, EF, e due angoli BGC, EHF si sono prese le ugualmente multiplici della circonferenza BC, e dell'angolo BGC, cioè la circonferenza BL, e l'angolo BGL, e le ugualmente multiplici della circonferenza EF, e dell'angolo EHF, cioè la circonferenza EN, e l'angolo EHN, e si è dimostrato, che se la circonferenza BL avanza la circonferenza EN, e l'angolo BGL avanzerà l'angolo EHN, e se è uguale, sarà uguale, e se minore, minore, onde come la circonferenza BC alla circonferenza EF, così è l'angolo BGC all'angolo EHF, ma come

4. del

me l'angolo BGC all'angolo EHF così è l'angolo BAC all'angolo EDF, essendo ciascuno doppio di ciascuno, come dunque la circonferenza BC alla circonferenza EF, così è ancor l'angolo BGC all'angolo EHF, e l'angolo BAC all'angolo EDF, onde ne' cerchi uguali gli angoli hanno la medesima proporzione, che le circonferenze, sopra le quali si fermano o siano a' centri, ovvero alle circonferenze Dico oltre a ciò come la circonferenza BC alla circonferenza EF, così essere il settore GBC al settore HEF. Giunganſi BC, CK, e presi nelle circonferenze BC, CK, i punti X, O, giunganſi BX, XC, CO, OK, e perchè le due BG, GC sono uguali alle due CG, GK, e contengono gli angoli uguali, sarà ancor la base BC uguale alla base CK, onde il triangolo GBC è uguale al triangolo GCK; e perchè la circonferenza BC è uguale alla circonferenza CK, eziandio la rimanente circonferenza, che

9. del quin.
20. del terzo.



4. del primo.

che compiſce tutto il cerchio ABC è uguale alla rimanente, che compiſce il medeſimo cerchio, adunque ancor l'angolo BXC è uguale all'
27. *del terzo.* angolo COK, e la porzione BXC è ſimile alla porzione COK, e ſo-
11 *dif del* 3. no nelle uguali linee rette BC, CK, ma quelle porzioni ſimili de' cerchi,
24. *del terzo.* che ſono nelle uguali linee rette, ſono fra loro uguali, adunque la porzione BXC è uguale alla porzione COK: ed è il triangolo BGC uguale al triangolo CGK, tutto dunque il ſettore BGC ſarà uguale a tutto'l ſettore CGK, e per la medeſima ragione il ſettore GKL è uguale all'uno, e l'altro GKC GCB, onde i tre ſettori BGC, CGK, KGL ſono fra loro uguali, e parimente i ſettori HEF, HFM HMN ſono uguali fra loro, quante volte dunque la circonferenza LB è multiplice della circonferenza CB, tante volte il ſettore BGL è multiplice del ſettore BGC; per la medeſima ragione quante volte la circonferenza NE è multiplice della circonferenza EF, tante volte il ſettore EHN è multiplice del ſettore EHF, e però ſe la circonferen-

LL è uguale alla circonferenza

EN,

EN, ed il ſettore BGL è uguale al ſettore EHN: e ſe la circonferenza BL avanza la circonferenza EN, ed il ſettore BGL avanza il ſettore EHN, e ſe è minore, minore, eſſendo dunque quattro grandezze le due circonferenze BC, EF ed i due ſettori BGC, EHF, ſi ſono preſe le ugualmente multiplici, della circonferenza BC, e del ſettore BGC, la circonferenza BL ed il ſettore BGL, e della circonferenza EF, e del ſettore EHF ugualmente multiplici la circonferenza EN, ed il ſettore EHN; e ſi è dimoſtrato, che ſe la circonferenza BL avanza la circonferenza EN, ed il ſettore BGL avanza il ſettore EHN, e ſe è uguale, uguale, e ſe minore, minore, adunque come la circonferenza BC alla circonferenza EF, così il ſettore BGC al ſettore EHF, il che biſognava dimoſtrare. *6. dif. del 5.*

COROLLARIO.

E' manifeſto ancora, che come il ſettore al ſettore, così è l'angolo all'angolo. *Aſſ 6. del 5.*

FINE DEL SESTO LIBRO.

DEGLI

ELEMENTI D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO UNDECIMO.

E DE' SOLIDI

PRIMO LIBRO.

DIFFINIZIONI.

I. Il ſolido è quello, che ha lunghezza, larghezza, e groſſezza.

II.

Il termine del ſolido è la ſuperficie.

III.

La linea retta è perpendi-

co-

colare al piano, quando con tutte le linee rette, che la toccano, e ſono nel ſoggetto piano, fa gli angoli retti.

IV.

Il piano al piano è retto, ovvero perpendicolare, quando in un piano tirate le linee rette perpendicolari ſopra il comun ſegamento de' piani ſaranno all' altro piano perpendicolari.

V.

L' inclinazione della linea retta ad un piano è, quando dal termine ſublime della linea retta ſia tirata la perpendicolare al piano, e dal punto fatto ſia tirata un altra linea fin al termine di eſſa poſto nel piano, l'angolo acuto, che ſi contiene dalla linea tirata, e dalla linea, che ſta ferma.

L' in-

VI.

L'inclinazione del piano ad un altro piano è l'angolo acuto, che ſi contiene da linee rette, le quali al comun ſegamento de' piani ſono tirate ad angoli retti nell' uno, e l'altro piano.

VII.

Il piano al piano ſimilmente è detto inclinarſi, e l'altro all' altro, quando gli angoli della inclinazione ſono uguali fra loro.

VIII.

I piani paralelli ſono quegli, che non ſi congiungono mai inſieme.

IX.

Le figure ſolide ſimili ſono quelle, che ſi contengono da piani ſimili uguali di numero.

X.

Le figure ſolide ſimili, e uguali ſono quelle, che ſi contengono da' piani ſimili, ed uguali di numero, e grandezza.

XI.

L'angolo ſolido è l'inclinazione di più, che di due linee, le quali ſi tocchino, e non ſiano nella medeſima ſuperficie con tutte l'altre linee, ovvero l'angolo ſolido è quello, che ſi comprende da più, che da due angoli piani, che non ſiano nel medeſimo piano, e ſi terminino ad un punto.

XII.

La piramide è una figura ſolida compreſa da piani, la quale da un piano ſi conſtituiſce ad un punto.

XIII.

Il Priſma è una figura ſoli-

da

da compresa da piani, de' quali due, che sono opposti sono uguali, e simili, e paralelli, ma gli altri sono paralellogrammi

XIV.

La sfera è una figura compresa, quando il mezzo cerchio si gira dintorno al diametro, che sta fermo, sin' a tanto, che sia riportato di nuovo al medesimo luogo, dal quale cominciò a moversi.

XV.

L'asse della sfera è una linea retta, che sta ferma, dintorno alla quale il mezzo cerchio si gira.

XVI.

Il centro della sfera è il medesimo, che del mezzo cerchio.

XVII.

Il diametro della sfera è

una linea retta, che paſſa per lo centro, e dall' una, e l'altra parte è terminata dalla ſuperficie della sfera.

XVIII.

Il cono è una figura compreſa, quando ſtando fermo un lato del triangolo rettangolo, di quegli, che ſono dintorno all'angolo retto, il triangolo ſi gira ſin' a tanto, che di nuovo ſia riportato al medeſimo luogo, dal quale cominciò a moverſi, e ſe la linea retta, che ſta ferma è uguale all' altro lato, che ſi gira dintorno all'angolo retto, il cono ſarà rettangolo, ovvero ortogonio, ma ſe è minore, ſarà ottuſiangolo, e ſe maggiore ſarà acutangolo.

XIX.

L'aſſe del cono è la linea

ret-

retta, che ſta ferma, dintorno alla quale il rettangolo ſi gira.

XX.

Ma la baſe è il cerchio deſcritto dalla linea retta, che ſi gira,

XXI.

Il cilindro è una figura compreſa, quando ſtando fermo un lato del paralellogrammo ortogonio di quegli, che ſono dintorno all'angolo retto, il paralellogrammo ſi giri inſino a tanto, che di nuovo torni al medeſimo luogo, dal quale cominciò a moverſi.

XXII.

L'aſſe del cilindro è la linea retta, che ſta ferma, dintorno alla quale il paralellogrammo ſi gira.

XXIII.

La baſe, i cerchi deſcritti

da' due lati opposti, che si girano.

XXIV.

I coni, e cilindri simili sono quegli, de' quali gli assi, e i diametri delle basi hanno la medesima proporzione.

XXV.

Il Cubo è una figura solida contenuta da sei quadrati uguali.

XXVI.

Il Tetraedro, ovvero piramide è figura solida compresa da quattro triangoli uguali, ed equilateri.

XXVII.

L' Ottaedro è una figura solida compresa da otto triangoli uguali, ed equilateri.

XXVIII.

Il Dodecaedro è una figura solida, che è contenuta da dodici pentagoni uguali, equilateri, ed equiangoli.

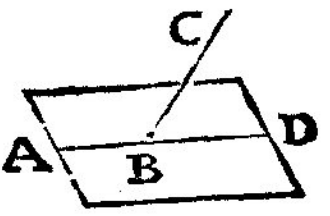
XXIX.

L'Icoſaedro è una figura ſolida, che è compreſa da venti triangoli uguali, ed equilateri.

TEOREMA I.

PROPOSIZIONE I.

Della linea non n'è parte nel ſoggetto piano, e parte in un piano elevato.



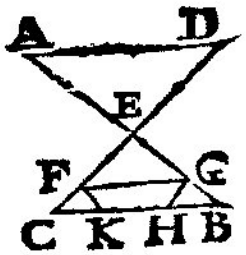
Perciocchè s'egli è poſſibile, una parte AB della linea retta ABC ſia nel ſoggetto piano, e la parte BC nel piano elevato; ſarà una linea retta continuata nel ſoggetto piano per diritto alla AB, ſia la BD; adunque a due linee rette date ABC ABD è comune la porzione AB, che non è poſſibile, perciocchè una linea retta con un'altra linea retta non conviene in più d'un punto, altrimenti le linee rette converrau-

no insieme, adunque della linea retta non n'è parte nel soggetto piano, e parte in un piano elevato.

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE II.

Se due linee rette si segano fra loro, sono in un piano, ed ogni triangolo consiste in un piano.



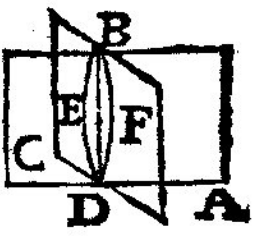
Due linee rette AB CD, seghinsi fra loro nel punto E. Dico le AB, CD essere in un piano, ed ogni triangolo consistere in un piano. Piglinsi nelle EB, EC quali punti si vogliano F,G, e giunganſi CB, FG, e tirinsi FK, GH. Dico prima il triangolo ECB essere in un piano, perciocchè se del triangolo EBC una parte FKC ovvero GBH è nel soggetto piano, e la rimanente in un altro piano, sarà anche di una delle linee EB, EC parte nel soggetto piano, e parte nell' altro, e se del triangolo ECB una parte FG, BC sia nel soggetto piano,

no, e la rimanente in un altro, di amendue le linee rette E C, E B una parte sarà nel soggetto piano, ed una in un altro, il che dimostrammo essere inconveniente, adunque il triangolo E B C è in un piano, ed in qual piano è il triangolo E B C, nel medesimo sono amendue le linee rette E C, E B, ed in quale amendue le E C, E B, nel medesimo sono le A B, C D, adunque le linee rette A B, C D, sono in un piano, ed ogni triangolo consiste in un piano. *Per l'antec.*

TEOREMA III.

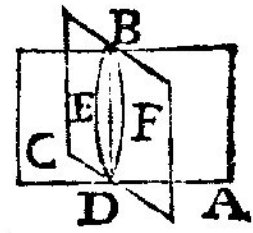
PROPOSIZIONE III.

Se due piani si seghino fra loro, il comun segamento è una linea retta.



Due piani A B, B C Seghinsi fra loro, ed il comun segamento loro sia la linea D B. Dico la linea D B essere retta. Perciocchè se non sia così, tirisi dal punto D al B nel piano A B la linea retta D F B, e nel piano B C la linea ret-

ta D E B, ſaranno i medeſimi termini di due linee rette D E B, D F B, ed eſſe conterranno uno ſpazio, che è incõveniente, adunque le D E B, D F B non ſono linee rette; ſimilmẽte dimoſtreremo niun altra, che ſi tira dal punto D al B eſſere retta, fuori che la D B, cioè il comun ſegamento de' piani A B B C, ſe dunque due piani ſi ſeghino fra loro il comun ſegamento, ſarà una linea retta, il che &c.



TEOREMA IV.

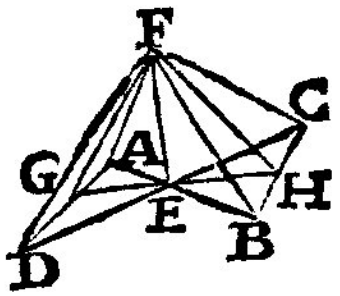
PROPOSIZIONE IV.

Se una retta linea a due linee rette, che ſi ſegano fra loro, nel comun ſegamento è perpendicolare, ſarà anco perpendicolare al piano, che paſſa per le dette linee.

Sia la linea retta E F perpendicolare a due linee rette A B, C D, che nel punto E fra loro ſi ſegano, e ſia la perpendicolare alzata ſopra il

punto

punto E. Dico la E F eziandio esser perpendicolare sopra il piano, che passa per le A B, C D. Piglinsi le linee rette A E, E B C E, E D uguali fra loro: e per E tirisi la linea retta G E H in qualunque modo, e giunganſi A D, C B, poi da qualsivoglia punto F tirinsi le F A, F G F D, F C, F H, F B, e perchè due linee rette A E, E D sono uguali a due linee rette C E, E B, e contengono angoli uguali, sarà la base A D uguale alla base C B, ed il triangolo A E D uguale al triangolo C E B, adunque ancor l' angolo D A E è uguale all' angolo E B C: e l'angolo A E G è uguale all' angolo B E H; sono dunque due triangoli A E G, B E H, che hanno due angoli uguali a due angoli l'un all' altro, ed un lato A E uguale ad un lato E B, che è dintorno agli angoli uguali, onde averanno gli altri lati uguali agli altri lati; e però G E è uguale ad E H, ed A G a B H, ed essendo la A E uguale alla E B, e la F E comune, e ad angoli retti, sarà la base A F uguale alla base E B, e per la me-

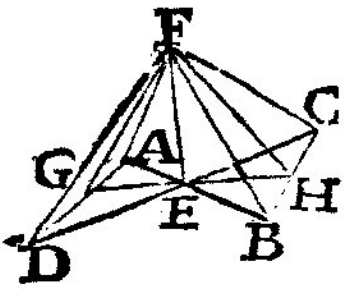


4. del primo.

26 del primo.

4. del primo.

desima ragione ancora la C F sarà uguale alla F D, oltre a ciò perchè la A D è uguale alla C B, e la A F alla F B, saranno le due F A, A D uguali alle due F B B C, l'una all'altra, e si è dimostrata la base D F uguale alla base F C, adunque l'angolo F A D è uguale all'angolo F B C: e la A G si è dimostrata uguale alla B H: ma ancor la A F è uguale alla F B: le due dunque F A, A G sono uguali alle due F B, B H, e l'angolo F A G è uguale all'angolo F B H, come si è dimostrato, onde la base G F è uguale alla base F H. E perchè si è dimostrata la G E uguale alla E H, e la F E comune, saranno le due G E, E F uguali alle due H E, E F, e la base H F è uguale alla base F G; l'angolo dunque G E F è uguale all'angolo H E F, e però amendue gli angoli G E F, H E F sono retti, adunque la F E alla G H tirata in qualunque modo per E fa gli angoli retti, similmente dimostreremo la F E con tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel soggetto piano,



8. *del primo.*

4. *del primo.*

fare

fare gli angoli retti, ma la linea retta è perpendicolare al piano, quando colle linee rette, che la toccano, e ſono nel medeſimo piano, fa gli angoli retti; onde la F E è perpendicolare al ſoggetto piano, ma il ſoggetto piano è quello, che paſſa per le linee rette A B, C D, adunque la F E ſarà perpendicolare al piano, che paſſa per le A B, C D, il perchè ſe una retta linea a due linee rette, che ſi ſegano fra loro, nel comun ſegamento è perpendicolare, ſarà ancor perpendicolare al piano, che paſſa per le dette linee, il che, &c. 3. *dif.*

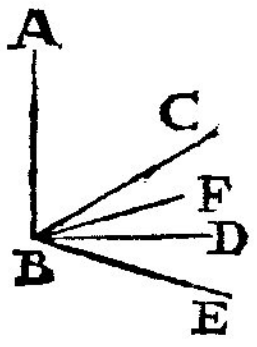
TEOREMA V.

PROPOSIZIONE V.

Se una retta linea a tre line rette, che ſi toccano fra loro, nel comun ſegamento è perpendicolare, ſaranno le dette tre linee in un medeſimo piano.

La linea retta A B ſia perpendicolare a tre linee rette B C, B D, B E nel toccamento B. Dico le B C, B D, B E

BE essere in un piano. Siano, se però è possibile, le BD, BE nel soggetto piano, e la BC in un piano elevato, ed il piano per le AB, BC prolunghisi, sarà il comun segamento nel soggetto piano una linea retta, e sia BF, sono dunque in un piano, che passa per le AB, BC tre linee rette AB, BC, BF, e perchè la AB è perpendicolare all' una, e l'altra BD, BE, sarà anche perpendicolare al piano, che passa per le DB, BE, ma il piano, che passa per le DB, BE è piano soggetto, adunque la AB è perpendicolare al soggetto piano, e però sarà perpendicolare a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel medesimo piano, ma BF, che è nel soggetto piano, la tocca, adunque l' angolo ABF è retto, e si pone retto l'angolo ABC, è dunque l' angolo ABF all' angolo ABC uguale, e sono nel medesimo piano, che non è possibile, laonde la linea BC non è in un piano elevato, dal che ne seguita, che le tre linee rette BC, BD BE, siano in un piano, se dunque una



3. di quest.

Per l'ant.

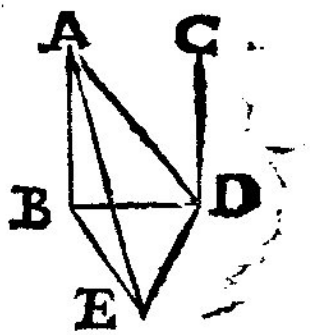
3. def.

una retta linea a tre linee rette, che si toccano fra loro nel comun segamento è perpendicolare, saranno le dette tre linee in un medesimo piano.

TEOREMA VI.

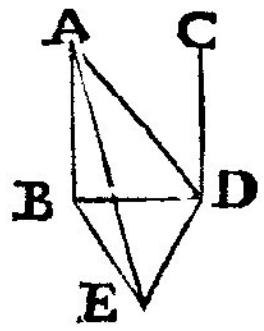
PROPOSIZIONE VI.

Se due linee rette saranno perpendicolari ad un medesimo piano, saranno paralelle fra loro.



Due linee rette AB, CD siano perpendicolari al soggetto piano. Dico la AB essere paralella alla CD. Tocchino le AB, CD il soggetto piano ne' punti B, D, e tirisi la linea retta BD, alla quale nel soggetto piano tirisi la DE perpendicolare, e posta la DE uguale alla AB, giunganſi BE, AE, AD, perchè dunque la AB è perpendicolare al soggetto piano, con tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel soggetto piano, farà gli angoli retti, ma l'una, e l'altra BD *Dif.* 3.

BE



BE tocca la AB, essendo nel soggetto piano, adunque amendue gli angoli ABD, ABE sono retti; per la medesima ragione ancora sono retti amendue CDB, CDE, e perchè la AB è uguale alla DE, e la BD è comune, saranno le due AB, BD uguali alle due ED, DB, e contengono angoli retti, la base dunque AD è uguale alla base BE, similmente perchè la AB è uguale alla DE, e la AD alla BE, le due AB, BE sono uguali alle due ED DA, e la base di esse AE è comune, l'angolo dunque ABE è uguale all'angolo EDA: ma ABE è retto, adunque è retto EDA, e però la ED è perpendicolare alla DA, ma eziandio è perpendicolare all'una, e l'altra di esse BD, DC, onde la ED è perpendicolare alle tre linee rette BD, DA, DC, nel toccamento, e per tal ragione le tre linee rette BD, DA, DC sono in un piano, ed in qual piano sono le BD, DA, nel medesimo è la AB, perciocchè ogni triangolo è in un piano, adunque è necessario, che le

8. *del primo.*

Per l'ant.

2. *di quest.*

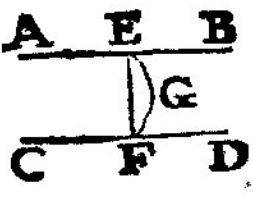
AB

AB, BD, DC siano in un piano, ed amendue gli angoli ABD, BDC sono retti, la AB dunque è paralella alla CD, onde se due linee rette saranno perpendicolari ad un medesimo piano, saranno paralelle fra loro. 28. *del primo.*

TEOREMA VII.

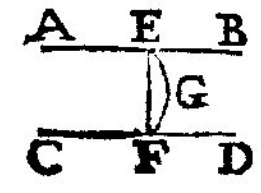
PROPOSIZIONE VII.

Se due linee rette siano paralelle, e nell' una, e l' altra di loro si piglino quali punti si vogliano, la linea retta, che congiunge detti punti, sarà nel medesima piano, nel quale sono le paralelle.



Siano due linee rette paralelle AB, CD, ed in amendue piglinsi quali punti si vogliano E, F. Dico la linea retta, che congiunge i punti E, F, essere nel medesimo piano, nel quale sono le paralelle. Sia, s' egli è possibile, in un piano elevato, come EGF, e per la EGF tirisi un piano, il quale farà il segamento nel 3. *di ques.*

log-



ſoggetto piano, una linea retta; faccialo come EF, adunque due linee rette EGF, EF conterranno uno ſpazio, che non è poſſibile, e perciò quella linea retta, che è tirata dal punto E ad F non è in un piano elevato, onde ſarà in quello, che paſſa per le paralelle AB, CD, ſe dunque due linee rette ſiano parelelle, e quello che ſegue, il che biſognava dimoſtrare.

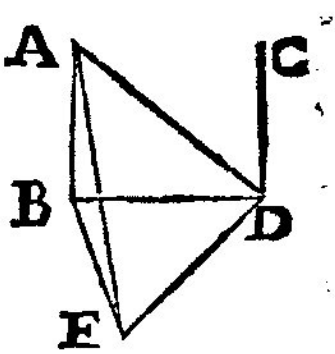
TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Se due linee rette ſiano paralelle, e l' una di loro ſia perpendicolare a qualche piano, l' altra ancora al medeſimo piano ſarà perpendicolare.

Siano due linee rette paralelle AB, CD, ed una di eſſe AB ſia perpendicolare al ſoggetto piano. Dico ancor la rimanente CD eſſere al medeſimo piano perpendicolare. Tocchino le AB, CD il ſoggetto pia-

no



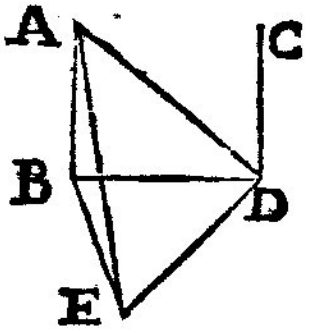
no ne' punti B, D, e giunganſi BD, adunque le AB, CD, BD ſono in un piano, tiriſi la DE nel ſoggetto piano perpẽdicolare alla BD, e *Per l'ant.* pongaſi la DE uguale alla AB, e giunganſi BE, AE, AD, e perchè la AB è perpendicolare al ſoggetto piano, ancor' a tutte le linee rette, che la toccano, e ſono nel ſoggetto piano ſarà perpendicolare, adunque amendue gli angoli ABD, ABE ſono retti, e cadendo la BD nelle linee rette paralelle AB, CD ſaranno gli angoli ABD, CDB uguali a due retti, ma è retto ABD, adunque ancor CDB è retto: e però la CD è perpendicolare alla BD; e perchè la AB è uguale alla DE, e la BD comune, le due AB, BD ſono uguali alle due ED, DB, e l'angolo ABD è uguale all'angolo EDB, perciocchè amendue ſono retti; adunque la baſe AD è uguale alla baſe BE, ſimilmente perchè la AB è uguale alla DE, e la BE alla AD, ſaranno le due AB, BE uguali alle due ED, DA, l'una all' altra, e la baſe loro AE è comune, onde

3. *dif.*

29. *del primo.*

4. *del primo.*

8. *del primo.*



onde l'angolo A B E è uguale all'angolo E D A; ed è retto A B E, adunque ancor E D A è retto, e la E D è perpendicolare alla D A, ma è perpendicolare eziandio alla B D; adunque ancor la E D farà perpendicolare al piano, che passa per le B D, D A, e con tutte le linee rette, che essendo nel medesimo piano la toccano, farà angoli retti, ma la D C è nel piano, che passa per le B A, A D, perchè nel piano per le B D, D A sono le A B, B D, e in qual piano sono le A B, B D, è la D C; onde la E D è perpendicolare alla D C; e però la C D è perpendicolare alla D E, ma ancor la C D è perpendicolare alla D B, adunque la C D a due linee rette D E, D B, che si segano fra loro nel comun segamento D è perpendicolare, e però è perpendicolare al piano, che passa per le D E, D B, ma il piano per le D E, D B è il soggetto piano, adunque la C D al soggetto piano sarà perpendicolare, il che bisognava dimostrare.

4. di quef.

9. dif.

2. di quef.

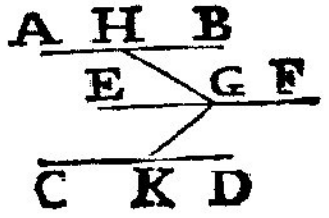
4 di quef.

TEO-

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE IX.

Le linee paralelle ad una medeſima, che non ſono nel medeſimo piano, ſono altresì fra loro paralelle.



Siano amendue A B, C D paralelle alla E F, e non siano nel medeſimo piano, nel quale è ella. Dico la A B eſſere paralella alla C D. Pigliſi nella E F qualſivoglia punto G, dal quale ſi tiri la G H perpendicolare alla E F nel piano, che paſſa per le E F, A B, e nel piano, che paſſa per E F, C D, tiriſi la G K perpendicolare alla E F, e perchè la E F è ad amendue G H, G K perpendicolare, ſarà ancora perpendicolare al piano, che paſſa per le G H, G K, e la F E è paralella alla A B, adunque anche la A B è perpendicolare al piano, che paſſa per H G K, e per la medeſima ragione la C D è perpendicolare al piano per la H G K, onde amendue

4. dif. queſ.

Per l' antec.

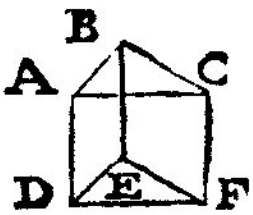
le A B, C D ſaranno perpendicolari al piano, che paſſa per le H G K, ma ſe due linee rette ſono perpendicolari ad un medeſimo piano, ſono paralelle fra loro, adunque la A B è paralella alla C D, che è quello, che biſognava dimoſtrare.

6. di queſ.

TEOREMA X.

PROPOSIZIONE X.

Se due linee, che ſi toccano ſono paralelle a due altre linee, che ſi toccano, ma non nel medeſimo piano, contengono angoli uguali.



Siano due linee rette, che ſi toccano AB, BC, paralelle a due altre, che ſi toccano D E, E F, ma non nel medeſimo piano. Dico l' angolo A B C eſſere uguale all' angolo D E F. Piglinſi le BA, BC, ED, EF fra loro uguali, e giunganſi A D, C F, B E, A C, D F, perchè dunque la B A è uguale, e paralella alla E D, ſarà ancor la A D uguale, e paralella alla

33. del primo.

la B E, e per la medeſima ragione la C F ſarà uguale, e paralella alla B E; amendue dunque A D, C F ſono uguali, e paralelle alla B E, e quelle, che ſono paralelle alla medeſima linea retta, e non ſono nel medeſimo piano, nel quale è eſſa, ſono fra loro paralelle, onde la A D è paralella alla C F, ed è uguale; ed A C, D F le congiungono, adunque la A C è uguale, e paralella alla D F; e perchè due linee rette A B B C ſono uguali a due D E, E F, e la baſe A C è uguale alla baſe D F, ſarà l'angolo A B C uguale all'angolo D E F, ſe adunque due linee rette, che ſi toccano ſono paralelle a due altre, che ſi toccano, ma non nel medeſimo piano, contengono angoli uguali, il che biſognava dimoſtrare.

Per l'antec.

33. del primo:

8. del primo.

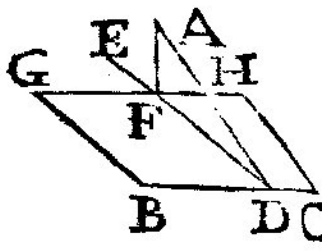
PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE XI.

Da un punto ſublime dato tirare una linea retta perpendicolare al ſoggetto piano.

Sia il dato punto ſublime A, e ſia dato il ſoggetto piano, biſogna dal punto

punto A, tirare una linea retta perpendicolare al ſoggetto piano. Tiriſi nel ſoggetto piano una linea retta in qualunque modo BC: e dal punto A alla BC tiriſi la perpendicolare AD, ſe la AD ſia perpendicolare anco al ſoggetto piano, già ſarà fatto ciò, che ſi proponeva, ma ſe nò, tiriſi dal punto D la DE perpendicolare alla BC nel ſoggetto piano, e dal punto A alla DE tiriſi la AF perpendicolare, e finalmente per F tiriſi la GH paralella alla BC, e perchè la BC è perpendicolare adamendue le DA, DE, ſarà ancor la BC perpendicolare al piano, che paſſa per le ED, DA, ed è la GH paralella ad eſſa, e ſe ſono dne linee rette paralelle, l' una delle quali ſia perpēdicolare a qualche piano, l' altra ancora ſarà al medeſimo piano perpendicolare; onde ancor la GH è perpendicolare al piano, che paſſa per le ED, DA, e però è perpendicolare a tutte le linee rette, che eſſendo nel medeſimo piano la toccano, ma AF la tocca, quale è nel medeſimo piano, che



12. *del primo.*

11. *del primo.*

12 *del primo.*

31 *del primo.*

4. *di queſ.*

8. *di queſ.*

3. *dif.*

che passa per le E D, D A, adunque la G H è perpendicolare alla F A: e però la F A è perpendicolare alla G H, ed è la A F perpendicolare alla D E, adunque la A F è ad amendue H G, D E perpendicolare, e se una retta linea a due linee rette, che si segano fra loro nel comun segamento è perpendicolare, sarà ancor perpendicolare al piano, che passa per le dette linee, onde la F A è perpendicolare al piano, che passa per le E D, G H, ma il piano per le E D, G H è il soggetto piano, adunque la A F al soggetto piano è perpendicolare, e perciò da un punto sublime dato si è tirata una linea retta perpendicolare al soggetto piano il che bisognava fare.

2. di quest.

4 di quest.

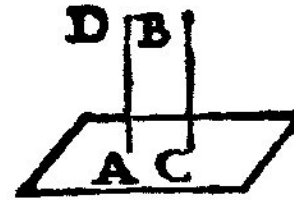
PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE XII.

Dal punto, che sia in un piano dato constituire una linea retta perpendicolare al detto piano.

Sia dato il piano soggetto, ed un punto, che è in esso sia A, bisogna

dal punto A conſtituire una linea retta perpendicolare al ſoggetto piano, intendaſi qualche punto ſublime B, dal quale ſi tiri la B C perpendicolare al ſoggetto piano, e per A tiriſi la A D paralella alla B C, perchè dunque due linee rette ſono paralelle A D, C B, ed una di eſſe B C, è perpendicolare al ſoggetto piano, ancor la rimanente A D, ſarà al ſoggetto piano perpendicolare, laonde dal punto, che è in un piano dato, ſi è conſtituita una linea retta perpendicolare al detto piano, il che biſognava fare.



Per l'ant. 13. del primo.

8. di queſ.

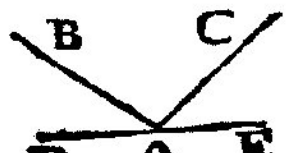
TEOREMA XI.

PROPOSIZIONE XIII.

Dal punto, che ſia in un piano dato, non ſi conſtituiranno due linee rette perpendicolari al detto piano dalla medeſima parte.

S' egli è poſſibile, dal punto A, che è nel dato piano conſtituiſcanſi due

due linee rette AB, AC dalla medeſima parte perpendicolari ad eſſo: e tirisi un piano per le BA, AC. che farà il ſegamento per lo punto A nel ſoggetto piano una linea retta, faccia la DAE, adunque le linee rette AB, AC, DAE ſono in un piano, e perchè la CA è al ſoggetto piano perpendicolare, ſarà perpendicolare a tutte le linee rette, che eſſendo nel medeſimo piano la toccano, ma DAE la tocca, che è nel ſoggetto piano, onde l'angolo CAE è retto, per la medeſima ragione è retto BAE, l'angolo dunque CAE è uguale a BAE, e ſono in un piano, che non è poſſibile, laonde dal punto, che ſia in un dato piano, non ſi conſtituiranno due linee rette perpendicolari al piano dalla medeſima parte, il che biſognava dimoſtrare.



3. di queſ.

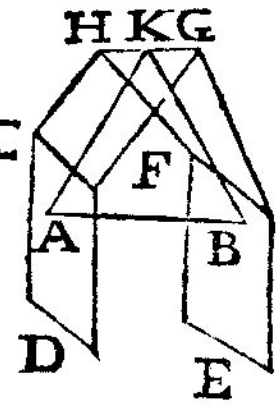
3. dif.

TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XIV.

Que' piani ſono paralelli fra loro, a' quali la medeſima

linea retta è perpendicolare:

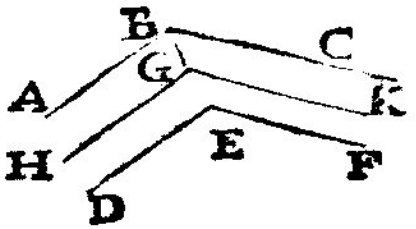


Sia la linea retta A B perpendicolare all'uno, e l'altro piano C D, E F. Dico detti piani essere paralelli. Se non è così, prolungati
2. *di quest.* si congiungeranno insieme, congiunganſi, e facciano il comun segamento la linea retta G H, ed in essa G H preso qualsivoglia punto K,
3. *dif.* giunganſi A K, B K, perchè dunque la A B è perpendicolare al piano E F, sarà perpendicolare alla B K, essendo la linea retta nel piano E F prolungato, onde l'angolo A B K è retto, e per la medesima ragione B A K è retto, e del triangolo A B K due angoli A B K, B A K sono uguali a due retti, che non è possibile, adunque i piani C D, E F prolungati non si congiungeranno insieme, e però è necessario, che C D, E F siano paralelli, onde que' piani sono paralelli fra loro, a' quali la medesima linea retta non è perpendicolare; il che bisognava dimostrare.

TEO-

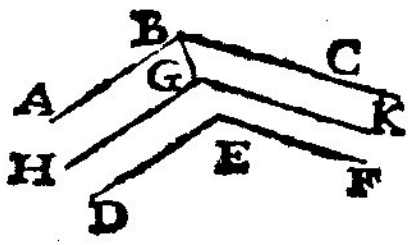
TEOREMA XIII.
PROPOSIZIONE XV.

Se due linee rette, che si toccano, siano paralelle a due altre linee, che si toccano, ma non nel medesimo piano, ancor i piani, che passano per le dette linee, saranno paralelli fra loro.



Due linee rette, che si toccano AB, BC siano paralelle a due altre, che si toccano DE, EF, e non nel medesimo piano. Dico i piani, che passano per le AB, BC, DE, EF, se si prolunghino, non cõgiungersi insieme. Tirisi dal punto B al piano, che passa per le DE, EF la perpendicolare BG, che tocchi il piano nel punto G: e per G tirisi la GH paralella alla ED, e la GK paralella alla EF, perchè dunque la BG è perpendicolare al piano, che passa per le DE, EF,

ſarà ancora perpendicolare a tutte le linee rette, che la toccano, e ſono
3. *dif.* nel medeſimo piano, e amendue GH, GK la toccano, che ſono nel medeſimo piano, adunque l'uno, e l'altro angolo BGH BGK è retto e perchè la BA è paralella alla GH, gli angoli GBA, BGH ſono uguali a due retti,
29. *del Primo.* e BGH è retto, adunque anche GBA ſarà retto; e però la GB è perpendicolare alla BA, e per la medeſima ragione la GB è perpendicolare alla BC, eſſendo dunque la BG perpendicolare alle due linee rette BA, BC, che ſi ſegano fra loro, ſarà ancor la BG perpendicolare al piano, che paſſa per le AB, BC, e per la medeſima ragione la BG è per-
4. *di queſ.* pendicolare al piano per le HG, GK, ma il piano per le HG, GK è quello, che paſſa per le DE, EF, onde la BG è perpendicolare al piano, che paſſa per le DE, EF, e ſi è dimoſtrata eziandio BG perpendicolare al piano per le AB, BC, ed è perpendicolare al piano per le DE EF, adunque la BG è perpendicolare

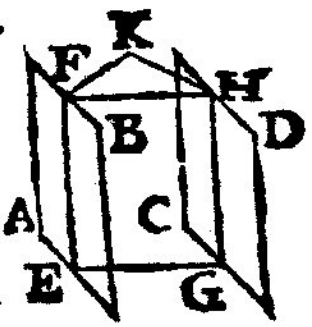


lare ad amendue i piani, che paſſano per le AB, BC, DE, EF, ma que' piani ſono paralelli fra loro, a' quali la medeſima linea retta è perpendicolare, è dunque il piano per le AB, BC paralello al piano per le DE, EF; e perciò ſe due linee rette, che ſi toccano ſiano paralelle a due altre linee, che ſi toccano, ma non nel medeſimo piano, ancora i piani, che paſſano per le dette linee ſaranno paralelli fra loro, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XIV.

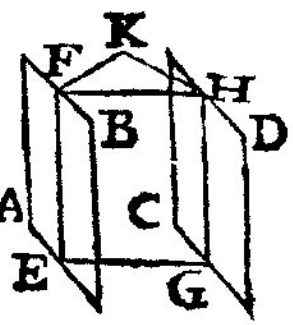
PROPOSIZIONE XVI.

Se due piani paralelli ſono ſegati da qualche piano, i comuni ſegamenti loro ſaranno paralelli.



Due piani paralelli AB, CD ſiano ſegati da qualche piano EF, GH, ed i loro comuni ſegamenti ſiano EF, GH. Dico la EF eſſere paralella alla GH, percioccchè ſe non

paralella, prolungare le E F, G H ſi congiungeranno inſieme, o verſo le parti F,H, o verſo le parti E,G, prolũghinſi prima verſo le F,H: e congiunganſi nel punto K, perchè dunque la E F K è nel piano A B, tutti i punti, che ſi pigliano nella E F K ſaranno nel medeſimo piano, ma il punto K è uno di quegli, adunque K è nel piano A B, e per la medeſima ragione K è nel piano C D, adunque i piani A B, C D prolungati ſi congiungeranno inſieme, ma non ſi congiungono, concioſſiacoſachè ſian poſti paralelli, adunque le linee rette E F G H prolungate non ſi congiungeranno verſo le parti F,H, ſimilmente dimoſtreremo ſe ſi prolunghino non congiungerſi verſo le parti E,G, e quelle, che da niuna parte ſi congiungono, ſono paralelle, onde la E F è paralella alla G H, ſe dunque due piani paralelli ſiano ſegati da qualche piano, i comuni ſegamenti loro ſaranno paralelli, il che biſognava dimoſtrare.

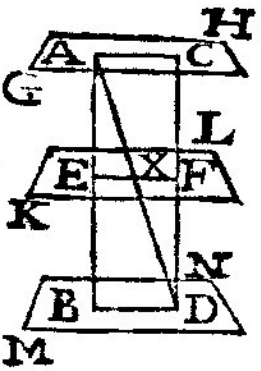


TEO-

TEOREMA XV.

PROPOSIZIONE XVII.

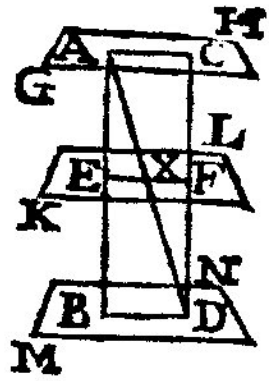
Se due linee rette si seghino da piani paralelli, saranno segate nelle medesime proporzioni.



Due linee rette AB, CD siano segate da' piani paralelli GH, KL, MN ne' punti AEB, CFD. Dico come la linea retta AE alla retta EB, così essere la CF alla FD. Giunganſi AC, BD, AD, e la AD tocchi il piano KL nel punto X; e giunganſi EX, XF, perchè dunque due piani paralelli KL, MN sono segati dal piano EBDX, i comuni segamenti EX, BD sono paralelli, per la medesima ragione, perchè due piani paralelli GH, KL sono segati dal piano AEFC, i comuni segamenti loro AC, FX sono paralelli, e perchè ad un lato del triangolo ABD, cioè a BD si è tirata la EX paralella, come la AE alla EB così sa-

Per l'ant.

sì ſarà la A X alla X D, ſimilmẽte perchè ad un lato del triangolo A D C, cioè ad A C ſi è tirata la X F paralella, ſarà come la A X alla X D, così la C F alla F D, e ſi è dimoſtrato come la A X alla X D, così eſſere la A E alla E B, come dunque la A E alla E B, così è la C F alla F D, onde ſe due linee rette ſi ſeghino da piani paralelli, ſaranno ſegate nelle medeſime proporzioni, il che biſognava dimoſtrare.

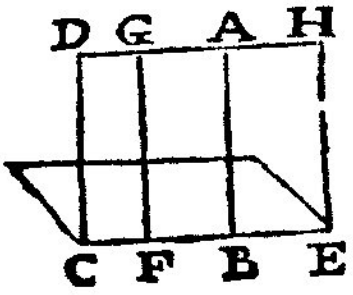


TEOREMA XVI.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se una linea retta ſia perpendicolare a qualche piano, tutti i piani, che paſſano per la detta linea, ſaranno ad angoli retti ſopra il medeſimo piano.

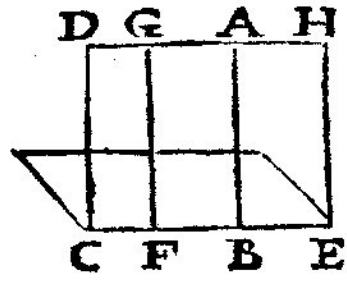
Sia la linea retta A B perpendicolare al ſoggetto piano. Dico ancora tutti



tutti i piani, che paſſano per la AB eſſere ad angoli retti ſopra il ſoggetto piano. Prolunghiſi per la AB il piano DE, e ſia del piano DE, e del ſoggetto piano il comun ſegamento CE, e pigliſi nella CE qualſivoglia punto F, dal quale nel piano DE tiriſi la FG perpendicolare alla CE, perchè dunque la AB è perpendicolare al ſoggetto piano, ſarà ancor perpendicolare a tutte le linee rette, che la toccano, e ſono nel medeſimo piano, e perciò è altresì perpendicolare alla CE, onde l'angolo ABF è retto, ma eziandio GFB è retto, adunque la AB è paralella alla FG: ed è la AB perpendicolare al ſoggetto piano, la FG dunque ſarà perpendicolare al medeſimo piano, ma il piano al piano è retto, quando in un piano tirate le linee rette perpendicolari ſopra il comun ſegamento de' piani, ſiano all'altro piano perpendicolari: ed al comun ſegamento de' piani CE tirata in un piano DE la FG perpendicolare ſi è dimoſtrata perpēdicolare al ſoggetto piano, adun-

3. *dif.*

8. *di queſt.* 4. *dif.*



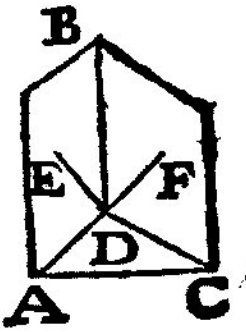
que il piano D E è retto al ſoggetto piano, ſimilmente ſi dimoſtreranno tutti i piani, che paſſano per la A B eſſere retti al detto piano, laonde ſe una linea retta ſia perpendicolare a qualche piano, tutti i piani, che paſſano per la detta linea, ſaranno ad angoli retti ſopra il medeſimo piano, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XIX.

Se due piani, che ſi ſegano, ſiano ad angoli retti ſopra qualche piano, eziandio il comune ſegamento loro ſarà perpendicolare al medeſimo piano.

Siano due piani, che ſi ſeghino A B, B C ad angoli retti ſopra il ſoggetto piano, ed il comun ſegamento loro ſia B D. Dico la B D eſſere perpendicolare al ſoggetto piano. Non già, ma s'egli è poſſibile, non ſia la B D perpendicolare al ſoggetto



to piano, e dal punto D tirisi nel piano AB la linea retta DE perpendicolare alla AD, e nel piano BC tirisi la DF perpendicolare alla CD, e perchè il piano AB è retto al soggetto piano, ed al comune segamento loro AD è tirata ad angoli retti la DE nel piano AB, sarà la DE perpendicolare al soggetto piano, similmente dimostreremo la DF essere perpendicolare al soggetto piano, onde dal medesimo punto D sono constituite due linee rette perpendicolari al soggetto piano dalla medesima parte, il che è impossibile, adunque dal punto D non si constituiranno altre linee rette perpendicolari al soggetto, piano fuori, che la DE segamento comune de' piani AB, BC, adunque se due piani, che si segano, siano ad angoli retti sopra qualche piano, eziandio il comun segamento loro sarà perpendicolare al medesimo piano.

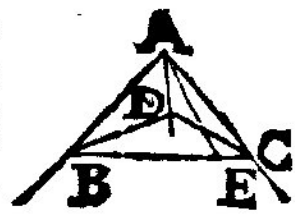
13. di questo.

TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XX.

Se un angolo solido sia conte-

tenuto da tre angoli piani, due di loro ſono maggiori del rimanente preſi in qualſivoglia modo.



L'angolo ſolido A ſia contenuto da tre angoli piani B A C, C A D, D A B. Dico degli angoli B A C, C A D, D A B due eſſere maggiori del rimanente preſi in qualunque modo. Perciocchè ſe gli angoli B A C, C A D, D A B ſiano fra loro uguali, è manifeſto due eſſere maggiori del rimanente, preſi in qualunque modo, ma ſe non ſiano uguali, ſia B A C maggiore, e nella linea retta A B, e nel punto in eſſa A conſtituiſca ſi nel piano, che paſſa per le B A, A C l'angolo B A E uguale all'angolo D A B, e pongaſi la A E uguale alla A B, e per E tirata la B E C ſeghi le linee rette A B, A C ne' punti B C, e giungan ſi B D, D C, e perchè la D A è uguale alla A E, e la A B è comune, le due D A, A B ſono uguali alle due B A, A E, e l'angolo D A B è uguale all'angolo B A E: adunque la baſe D B è ugua-

13. *del primo.*

le

le alla baſe B E, e perchè le due B D D C ſono maggiori della B C, delle quali la D B ſi è dimoſtrata uguale alla B E, ſarà la rimanente D C maggiore, che la rimanente E C, ed eſſendo la D A uguale alla A E, e la A C comune, e la baſe D C maggiore della baſe E C, ſarà l' angolo D A C maggiore dell' angolo E A C, e ſi è dimoſtrato l' angolo D A B uguale all' angolo B A E, onde gli angoli D A B, D A C ſono maggiori dell' angolo B A C, ſimilmente dimoſtreremo ſe ſi piglino due altri angoli, quali ſi ſiano, quegli eſſere maggiori del rimanente, ſe dunque un angolo ſolido ſia contenuto da tre angoli piani, due di loro ſono maggiori del rimanente, preſi in qualſivoglia modo, il che biſognava dimoſtrare. 8. *del primo.*

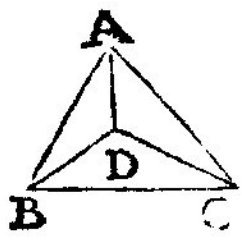
TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXI.

Ogni angolo ſolido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti.

Sia l'angolo ſolido A contenuto da angoli piani B A C, C A D, D A B.

Dico



Dico gli angoli BAC, CAD, DAB essere minori di quattro retti. Piglinsi in ciascheduna di esse AB, AC, AD quali punti si vogliano B, C, D, e giunganſi BC, CD, DB, perchè dunque l'angolo solido B è contenuto da tre angoli CBA, ABD, CBD, due quali si vogliano sono maggiori del rimanente. adunque gli angoli CBA, ABD sono maggiori dell' angolo CBD, e per la medesima ragione gli angoli BCA, ACD sono maggiori dell' angolo BCD, e gli angoli CDA, ADB maggiori dell' angolo CDB; onde sei angoli CBA, ABD, BCA, ACD, ADC, ADB sono maggiori di tre angoli CBD, BCD, CDB, ma tre angoli CBD, BDC, DCB sono uguali a due retti, adunque sei angoli CBA ABD, BCA, ACD, ADC, ADB sono maggiori di due retti, ed essendo tre angoli di ciascun triangolo ABC, ACD, ADB uguali a due retti, saranno di tre triangoli nove angoli CBA, ACB, BAC. ACD, DAC, CDA, ADB, DBA. BAD uguali a sei retti, de' quali sei angoli ABC, BCA, ACD, CDA, ADB

A, A D B, D B A, ſono maggiori di due retti, adunque i tre angoli rimanenti B A C, C A D, D A B, che contengono un angolo ſolido, ſaranno minori di quattro retti, laonde ogni angolo ſolido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XX.

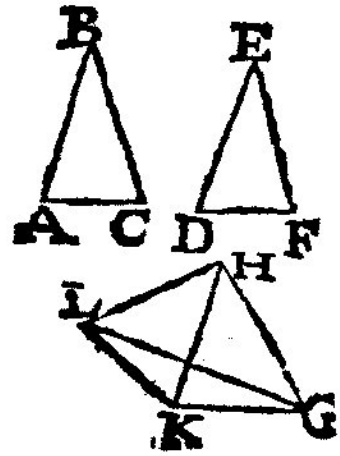
PROPOSIZIONE XXII.

Se ſiano tre angoli piani, de' quali due ſiano maggiori del rimanente, preſi in qualſivoglia modo, e ſiano contenuti da linee rette uguali, è poſſibile, che da quelle linee, che congiungono le dette linee rette, ſia conſtituito un triangolo.

Sieno tre angoli piani A B C, D E F, G H K, due de' quali ſiano maggiori del rimanente preſi in qualunque modo, cioè gli angoli A B C D E F ſiano maggiori del rimanente angolo G H K, e gli angoli D E F

G H K

G H K maggiori dell' angolo A B C, ed oltre a ciò gli angoli G H K, A B C maggiori dell' angolo D E F, e siano uguali le linee rette A B, B C, D E, E F, G H, H K, e giunganſi A C D F, G K. Dico eſſere poſſibile, che da linee rette uguali alle AC, DF, GK, ſi conſtituiſca un triangolo, cioè due quali ſi vogliano delle AC, DF, GK, eſſere maggiori della rimanente preſa in qualunque modo. Se dunque gli angoli ABC, D E F, G H K ſiano fra loro uguali, è manifeſto, che facendoſi uguali A C, D F, G K da linee uguali ad eſſe, ſi può conſtituire un triangolo, ma ſe nò, ſiano diſuguali, e nella linea retta H K, e nel punto in eſſa H conſtituiſcaſi l' angolo KHL uguale all' angolo ABC, e pongaſi ad una di eſſe A B, B C, D E, E F, G H, H K uguale H L, e giunganſi G L, K L, onde perchè le due AB, BC ſono uguali alle due K H, H L, e l' angolo B è uguale all' angolo H, ſarà la baſe A C uguale alla baſe K L: e perchè gli angoli



23. del primo.

4. del primo.

A B C

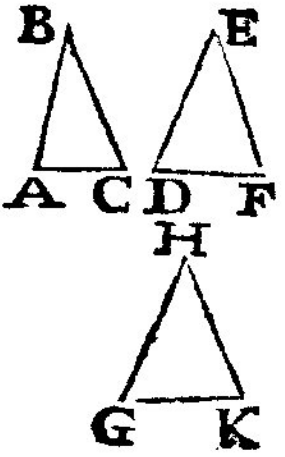
ABC, GHK ſono maggiori dell' angolo DEF, e l' angolo ABC è uguale all' angolo KHL, ſara GHL maggiore dell' angolo DEF; ed eſſendo le due GH, HL uguali alle due DE, EF, e l'angolo GHL maggiore dell' angolo E, ſarà la baſe GL maggiore della baſe DF, ma le GK, KL ſono maggiori della GL, adunque molto maggiori ſono GK KL della DF, e la KL è uguale alla AC, onde le AC, GK ſono maggiori della rimanente DF, nel medeſimo modo dimoſtreremo le AC, DF eſſere maggiori della GK, e le GK, DF maggiori della AC, è dunque poſſibile, che da linee rette uguali alle AC, DF, GK ſi conſtituiſca un triangolo, il che &c. 24. *del primo.* 20. *del primo.*

PROBLEMA III.

PROPOSIZIONE XXIII.

Conſtituire un angolo ſolido di tre angoli piani, de' quali due ſiano maggiori del rimanente, preſi in qualſivoglia modo; ma biſogna, che i tre angoli ſiano minori di quattro retti.

Sia-



Siano i tre angoli dati ABC, DEF, GHK, due de' quali presi in qualsivoglia modo siano maggiori del rimanente, e siano i tre angoli minori di quattro retti, bisogna da angoli uguali agli ABC, DEF, GHK constituire un angolo solido Taglinsi le AB, BC, DE, EF, GH, HK uguali, e giungansi AC, DF, GK, è possibile dunque, che da linee uguali ad esse AC, DF, GK si constituisca un triangolo, onde constituiscasi LMN, talmente che la AC sia uguale alla LM, e la DF alla MN, ed oltre a questo la GK alla LN, e descrivasi dintorno al triangolo LMN il cerchio LMN, e pigliſi il centro di esso, il quale sarà, o dentro al triangolo LMN, o in un lato di esso, o di fuori; sia dentro, e sia X, e giungasi LX MX, NX. Dico la AB essere maggiore della LX, se non è così, la AB, o sarà uguale alla LX, o mi-

Per l'ant.

22. del primo.

5. del quarto.

nore, sia prima uguale, perchè dunque la AB è uguale alla LX, ed è uguale alla BC, sarà la LX alla BC uguale, ma la LX è uguale alla XM; adunque le due AB, BC sono uguali alle due LX, XM l'un' all'altra, e la base AC si pone uguale alla base LM, onde l'angolo ABC è uguale all' angolo LXM, e per la medesima ragione l' angolo DEF è uguale all' angolo MXN, e l'angolo GHK all' angolo NXL, tre angoli dunque ABC, DEF, GHK sono uguali a tre angoli LXM, MXN, NXL, ma i tre LXM, MXN, NXL sono uguali a quattro retti, adunque anco i tre ABC, DEF, GHK saranno uguali a quattro retti, e si pongono minori di quattro retti; il che è inconveniente, non è dunque la AB uguale alla LX. Dico eziandio la AB non essere minore della LX, perciocchè s' egli è possibile, sia minore: e pongasi la XO uguale alla AB, e alla BC uguale la XP, e giungasi OP, perchè dunque la AB è uguale alla BC, eziandio la XO sarà uguale alla XP, adunque ancor la rimanente OL è uguale alla rimanente PM, e però la LM è paralella alla

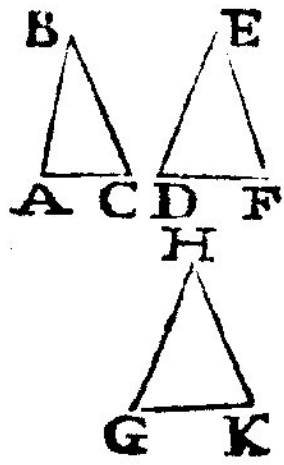
8. del primo.

Corol 15. de primo

2. del sesto.

4. del sesto.

OP



OP, ed il triangolo LMX equiangolo al triangolo OPX, è dunque come la XL alla LM, così la XO alla OP: e permutandole come la LX alla XO, così la LM alla OP; e la LX è maggiore della XO, adunque la LM è maggiore della OP, ma la LM si è posta uguale alla AC, onde ancor la AC sarà maggiore della OP, e perchè due linee rette AB, BC sono uguali alle due OX, XP, e la base AC è maggiore della base OP; sarà l'angolo ABC maggiore dell'angolo OXP, similmente dimostreremo l'angolo DEF essere maggiore dell'angolo MXN, e l'angolo GHK dell'angolo NXL, tre angoli dunque ABC, DEF, GHK sono maggiori de' tre LXM, MXN, NXL, ma gli angoli ABC, DEF, GHK si pongono minori di quattro retti, adunque gli angoli LXM, MXN, NXL saranno molto minori di quat-

25. *del primo.*

quattro retti, ma ſono uguali, che è inconveniente, non è dunque la AB minore della LX: e ſi è dimoſtrato non eſſere uguale, è dunque neceſſario, che ſia maggiore; conſtituiſcaſi dal punto X la XR perpendicolare al piano del cerchio LMN; e pongaſi il quadrato di RX uguale all' eccesſo, nel quale il quadrato di AB avanza il quadrato di LX, e giunganſi RL, RM, RN, perchè dunque la RX, è perpendicolare al piano del cerchio LMN, ſarà ancora perpendicolare a ciaſcuna di eſſe LX, MX, NX, e perchè la LX è uguale alla XM, ed è comune, e ad angoli retti la XR, ſarà la baſe LR uguale alla baſe RM, e per la medeſima ragione la RN uguale ad amendue RL, RM, adunque le tre linee rette RL, RM, RN ſono fra loro uguali; e perchè il quadrato di XR ſi pone uguale all'eccesſo, nel quale il quadrato di AB avanza il quadrato di LX, ſarà il quadrato di AB uguale a' quadrati delle LX, XR, ed il quadrato di RL è uguale a' quadrati delle LX, XR, perciocchè l' angolo LXR è retto, adunque il quadrato di AB ſarà uguale al quadrato di

Coroll. 15. *del primo.* 12. *di queſ.* 3. *dif.* 4. *del primo.* 27 *del primo*

RL

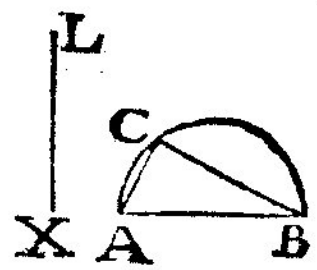
RL, e però la AB è uguale alla RL, ma alla AB è uguale ciascuna di esse BC, DE, EF, GH, HK: ed alla RL sono amendue RM, RN, uguali, ciascuna dunque di esse AB, BC, DE, EF, GH, HK è uguale a ciascuna delle RL, RM, RN, ed essendo le due LR, RM uguali alle due AB, BC, e ponendosi la base LM uguale alla base AC, sarà l'angolo LRM uguale all'angolo ABC, e per la medesima ragione l'angolo MRN all'angolo DEF, e l'angolo LRN uguale all'angolo GHK, adunque da tre angoli piani LRM, MRN, LRN, che sono uguali a tre dati ABC, DEF, GHK si è constituito l'angolo solido R, che si contiene dagli angoli LRM, MRN, LRN. Il medesimo si dimostrerebbe, quando il centro del cerchio o cadesse fuori, o in un lato di esso triangolo. Dunque si sarà costituito un angolo solido di tre angoli piani, due de' quali siano maggiori del rimanente presi in qualunque modo, che è quello, che bisognava fare.

8. del primo.

LEM-

LEMMA.

In che modo si pigli il quadrato della R X uguale a quello, nel quale il quadrato della A B avanza il quadrato della L X, dimostreremo così.



Propongansi le linee rette A B, L X, e sia A B la maggiore, e descrivasi in essa il mezzo cerchio A C B, nel quale si adatti la linea retta A C uguale alla L X, e giunganſi C B: perchè dunque nel mezzo cerchio A B C è l'angolo A C B, sarà l' angolo A C B retto, onde il quadrato della A B è uguale al quadrato della A C, ed a quello della C B, per la qual cosa il quadrato della A B avanza il quadrato della A C, quanto è il quadrato della C B: e la A C è uguale alla L X, adunque il quadrato della A B avanza il quadrato della L X quanto è 'l quadrato della C B: e però se pigliamo alla C B uguale la X R, il quadrato della A B avanze-

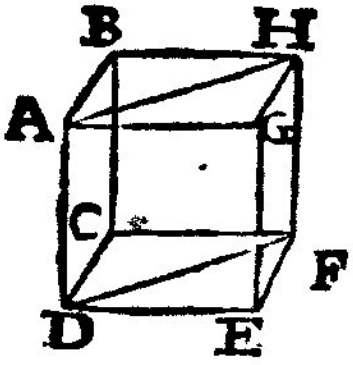
31. *del terzo.*

47. *del primo.*

rà il quadrato della L X, quanto è il quadrato, che ſi fa dalla R X.

TEOREMA XXI.
PROPOSIZIONE XXIV.

Se un ſolido ſia contenuto da piani paralelli, i piani di eſſo oppoſti ſaranno e uguali, e paralellogrammi.



Il ſolido C D GH ſia contenuto da'piani paralelli A C, G F, A H, D F, F B, A E. Dico i piani di eſſo oppoſti eſſere uguali, e paralellogrammi. Perciocchè eſſendo due piani paralelli BG, CE ſegati dal piano A C, i comuni ſegamenti loro ſono paralelli, adunque la A B è paralella alla C D, ſimilmente perchè due piani paralelli B F, A E ſono ſegati dal piano A C i comuni loro ſegamenti ſono paralelli, e però la A D è paralella alla B C, e ſi è dimoſtrata la A B paralella alla C D, onde A C ſarà paralellogram-

16. quæſ.

mo, similmente dimostreremo ciascuno di essi D F, F G, G B, B F, A E essere paralellogrammo; giunganſi A H, D F, e perchè la A B è paralella alla D C, e la B H alla C F, saranno le due A B, B H, che si toccano, paralelle alle due, che si toccano D C, C F, e non sono nel medesimo piano, onde conterranno uguali angoli, l'angolo dunque A B H è uguale all'angolo D C F, e perchè le due A B, B H sono uguali alle due D C, C F, e l'angolo A B H è uguale all'angolo D C F, sarà la base A H uguale alla base D F, ed il triangolo A B H uguale al triangolo D C F, ed essendo il paralellogrammo B G doppio del triangolo A B H, ed il paralellogrammo C E doppio del triangolo D C F, sarà il paralellogrammo B G uguale al paralellogrammo C E, non altrimenti dimostremo il paralellogrammo A C essere uguale al paralellogrammo G F, ed il paralellogrammo A E al paralellogrammo B F, se dunque un solido sia contenuto da piani paralelli, i piani di esso opposti saranno uguali, e paralellogrammi, il che bisognava dimostrare.

10. *di quest.*

34. *del primo.*

4. *del primo.*

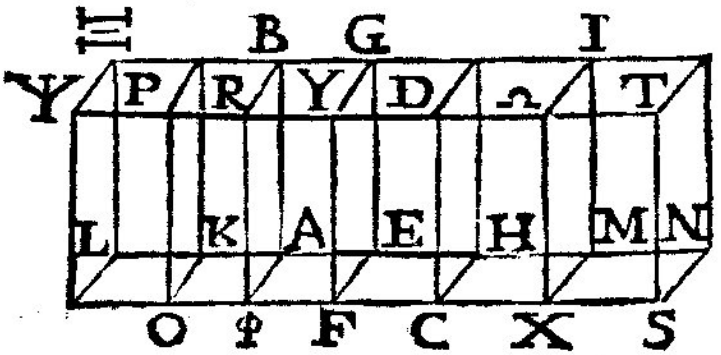
41. *del primo*

TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXV.

Se un ſolido paralellepipedo, cioè contenuto da piani paralelli, ſia ſegato da un piano paralello a' piani oppoſti, ſarà come la baſe alla baſe, così il ſolido al ſolido.

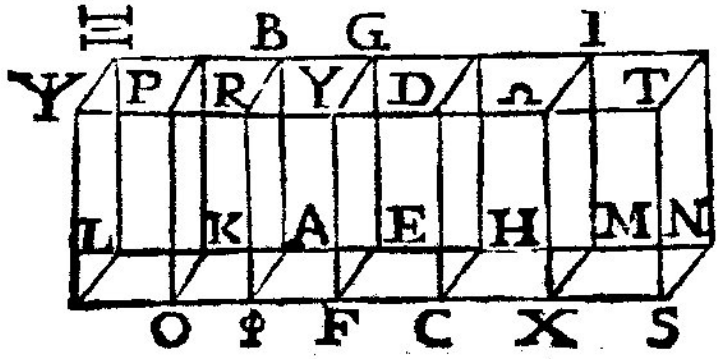
Il ſolido paralellepipedo A B D C ſia ſegato dal piano Y F, paralello a' piani oppoſti R A, D H. Dico come la baſe A E F Φ alla baſe E H C F, così eſſer il ſolido A B F Y al ſolido



E G D C. Prolunghiſi la A H dall' una, e dall' altra parte, e ponganſi alla E H quante ſi vogliano uguali H M, M N, e alla A E quante ſi vogliano uguali A K, K L, e compiſcanſi i paralellogrammi L O, K Φ, H X, M S ed i ſolidi L P, K R, D M, M T, perchè dun-

dunque le linee rette L K, K A, A E ſono fra loro uguali, ſaranno ancora i paralellogrammi L O, KΦ, A F fra loro uguali, e parimente uguali fra loro i paralellogrammi K Ξ, K B A G, ed altresì i paralellogrammi LΨ, K P, A R, perciocchè ſono oppoſti; per la medeſima ragione i paralellogrammi E C, H X, M S ſono fra loro uguali, e parimente i paralellogrammi H G, HI, I N uguali fra loro, e così i paralellogrammi DH, MΩ N T; aduuque tre piani de' ſolidi L P, K R, A Y ſono uguali a tre piani; ma tre piani a tre oppoſti ſono uguali, adunque tre ſolidi L P K R, A Y ſaranno fra loro uguali, e per la medeſima ragione eziandio tre ſolidi ED, DM, MT ſono uguali fra loro, quante volte dunque la baſe L F è multiplice della baſe A F, tante volte il ſolido L Y è multiplice del ſolido A Y: e per la medeſima ragione quante volte la baſe N F è multiplice della baſe HF, tante volte il ſolido N Y è multiplice del ſolido H Y, e ſe la baſe L F è uguale alla baſe N F, ancor il ſolido L Y ſarà uguale al ſolido N Y, e ſe la baſe L F avanza la baſe N F, eziandio il ſolido L Y avanzerà il

ſolido N Y, e ſe è minore, ſarà minore; eſſendo dunque quattro grandezze, cioè due baſi A F, F H, e due ſolidi A Y, Y H, ſi ſono preſi gli ugualmente multiplici della baſe A F, e del ſolido A Y, cioè la baſe L F, ed il ſolido L Y, e della baſe H F, e del ſolido H Y, cioè la baſe N F,



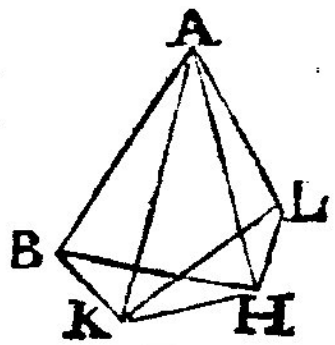
ed il ſolido N Y, e ſi è dimoſtrato, che ſe la baſe L F avanza la baſe N F, il ſolito L Y avanzerà il ſolido N Y, e ſe è uguale, ſarà uguale, e ſe minore, minore, è dunque come la baſe A F alla baſe F H, così il ſolido A Y al ſolido Y H, onde ſe il ſolido paralellepipedo ſia ſegato da un piano paralello a' piani oppoſti, ſarà come la baſe alla baſe, così il ſolido al ſolido, il che biſognava dimoſtrare.

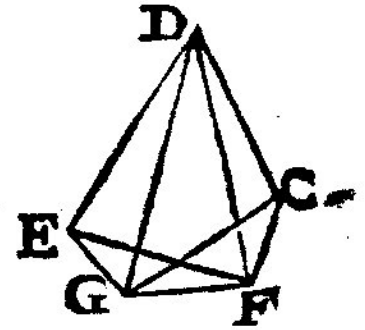
PRO-

PROBLEMA IV.

PROPOSIZIONE XXVI.

Nella data retta linea, e nel punto dato in essa constituire un angolo solido uguale ad un altro dato.

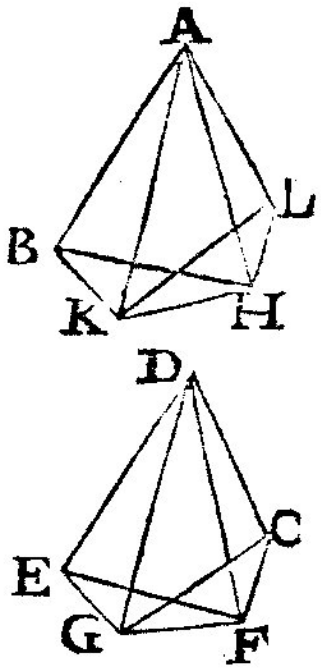




Sia la data linea retta AB, il punto in essa dato A, e l'angolo solido D, che sia contenuto da angoli piani EDC, EDF, FDC, bisogna nella data linea retta AB, e nel punto dato in essa A constituire un angolo solido uguale al dato angolo solido D. Pigliſi nella linea DF qualsivoglia punto F, dal quale si tiri la FG perpendicolare al piano, che passa per le ED, DC, e tocchi il piano nel punto G, e giunganſi DG, e nella linea retta AB, e nel punto in essa A, constituiscasi l'angolo BAL uguale all'angolo FDC, ed all'an-

11. *di quest.* 23. *del prime.*

golo EDG constituiscasi uguale l'angolo BAK, oltre a ciò pongasi la AK uguale alla DG, e dal punto K drizzisi la KH perpendicolare al piano per BAL, e pongasi la KH uguale alla GF, e giunganſi HA Dico l'angolo ſolido A, che è contenuto dagli angoli BAL, BAH, HAL, eſſere uguale all'angolo ſolido D, contenuto dagli angoli EDC, EDF, FDC. Piglinſi linee rette uguali AB, DE, e giunganſi HB, KB, FE, GE, perchè dunque la FG è perpendicolare al ſoggetto piano, ed a tutte le linee rette, che la toccano, e ſono nel ſoggetto piano ſarà perpendicolare, onde l'uno, e l'altro angolo FGD, FGE è retto, e per la medeſima ragione l'uno, e l'altro HKA, HKB è retto, e perchè le due KA, AB ſono uguali alle due GD, DE l'una all'altra, e contengono angoli uguali, ſarà la baſe BK uguale alla baſe EG, e la KH è uguale alla GF, e contengono angoli



12. di queſ.

3. dif.

4. del primo.

retti;

retti; è dunque ancor la H B uguale alla F E, ſimilmente perchè le due A K, K H ſono uguali alle due D G G F, e contengono angoli retti, ſarà la baſe A H uguale alla baſe D F, ed è la A B uguale alla D E; adunque le due H A, A B ſono uguali alle due F D, D E, e la baſe H B è uguale alla baſe E F; onde l'angolo B A H ſarà uguale all'angolo E D F, per la medeſima ragione l'angolo H A L è uguale all'angolo F D C, perciocchè ſe pigliamo le A L, D C uguali, e giunghiamo K L, H L, G C, F C, eſſendo tutto B A L uguale a tutto E D C, de' quali B A K ſi pone uguale ad E D G, ſarà il rimanente K A L uguale al rimanente G D C, e perchè le due K A, A L ſono uguali alle due G D, D C, e contengono angoli uguali, ſarà la baſe K L uguale alla baſe G C, e la K H è uguale alla G F, adunque le due L K, K H ſono uguali alle due C G G F, e contengono angoli retti; onde la baſe H L è uguale alla baſe F C, oltre a ciò perchè le due H A, A L ſono uguali alle due F D, D C, e la baſe H L è uguale alla baſe F C, ſarà l'angolo H A L uguale all'angolo F D C, ed è l'angolo B A L

4. *del primo.*

8. *del primo.*

4. *del primo.*

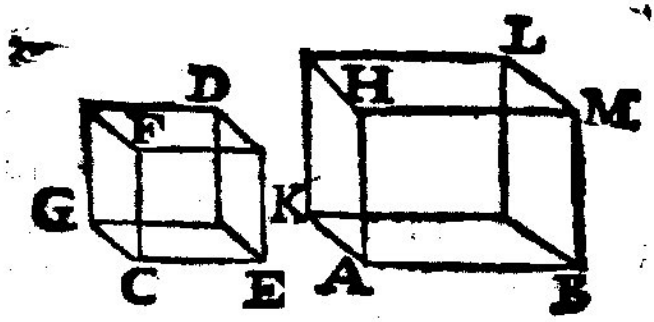
uguale all' angolo EDC, adunque nella data retta linea, e nel punto dato in essa si è constituito un angolo solido uguale ad un' altro dato, il che bisognava fare.

PROBLEMA V.

PROPOSIZIONE XXVII.

Dalla linea retta data descrivere un solido paralellepipedo simile, e similmente posto ad un altro dato.

Sia la linea retta AB, il dato solido paralellepipedo CD, bisogna dalla retta linea AB descrivere un



solido paralellepipedo simile, e similmente posto al dato solido paralellepipedo CD. Constituiscasi nella linea retta AB, e nel punto dato in essa A, un angolo uguale all'angolo

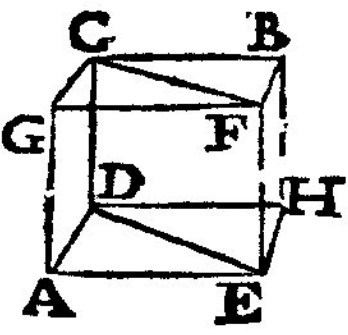
golo ſolido C, qual ſia contenuto dagli angoli B A H, H A K, K A B di modo, che l'angolo B A H ſia uguale all'angolo E C F, e l'angolo B A K all'angolo E C G, ed ancor l'angolo K A H uguale all'angolo G C F, e facciaſi come la E C alla C G, così la B A alla A K, e come la G C alla C F, così la K A alla A H, adunque per l'ugualità in proporzione ordinata come la EC alla CF, così ſarà la BA alla AH, compiſcaſi il paralellogrammo B H, ed il ſolido A L perchè dunque è come la E C alla C G, così la BA alla AK, e dintorno agli ugual'angoli E C G, B A K i lati ſono proporzionali; ſarà il paralellogrammo KB ſimile al paralellogrammo G E: per la medeſima ragione il paralellogrammo K H ſimile al paralellogrammo G F, ed il paralellogrammo H B al paralellogrammo F E, ſono dunque tre paralellogrammi del ſolido A L ſimili a tre paralellogrammi del ſolido C D, ma i tre ſono uguali, e ſimili a' tre oppoſti, e però tutto il ſolido A L ſarà ſimile a tutto il ſolido C D, adunque dalla linea retta A B ſi è deſcritto un ſolido paralellepipedo ſimile, e ſimilmente poſto al dato 12. *del ſeſto.*

ſolido paralellepipedo, il che biſognava fare.

TEOREMA XXIII.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Se un ſolido paralellepipedo ſia ſegato da un piano, che paſſi per gli diametri de' piani oppoſti, ſarà ſegato per mezzo.



Il ſolido paralellepipedo AB ſia ſegato dal piano CDEF per gli diametri de' piani oppoſti, cioè CF, DE. Dico il ſolido AB eſſere ſegato per mezzo dal piano CDEF. Perchè il triangolo CGF è uguale al triangolo CBF, ed il triangolo ADE al triangolo DEH, ed il paralellogrammo CA uguale al parelellogrammo BE, che gli è oppoſto, ed il paralellogrammo GE uguale al paralellogrammo CH, ſarà il priſma contenuto da' due triangoli CGF, ADE, e da' tre paralellogrammi GE, AC, CE, uguale al priſma, che è contenuto

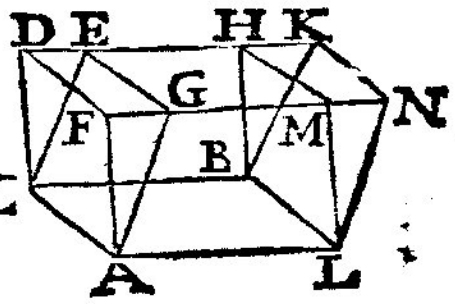
da'

da' due triangoli C F B, D E H, e da' tre paralellogrammi C H, B E, C E, concioſſiacoſachè ſiano contenuti da piani, e di numero, e di grandezza uguali, adunque tutto il ſolido A B è ſegato per mezzo dal piano C D E F, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XXIV.

PROPOSIZIONE XXIX.

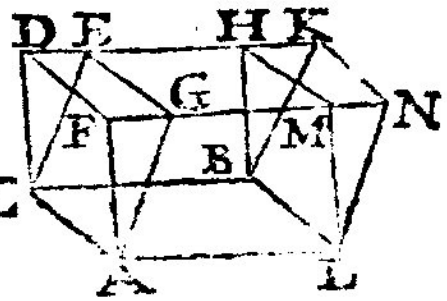
I ſolidi paralellepipedi, che hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza, de' quali i dritti ſiano nell' iſteſſe linee rette, fra loro ſono uguali.



Siano nella medeſima baſe A B i ſolidi paralellepipedi C M, C N della medeſima altezza, de' quali i dritti A F, A G, L M, L N, C D, C E, B H, B K ſiano nelle iſteſſe linee rette F N, D K. Dico il ſolido C M eſſere uguale al ſolido C N, per-

perciocchè essendo amendue CH CK paralellogrammi, sarà la CB uguale all' una, e l'altra di esse DH, EK onde ancor la DH è uguale alla EK, traggasi la comune EH; la rimanente dunque DE è uguale alla rimanente HK, e perciò eziandio il triangolo DEC è uguale al triangolo HKB, ed il paralellogrammo DG uguale al paralellogrammo HN, e per la medesima ragione il triangolo AFG è uguale al triangolo LMN, ed è il paralellogrammo CF uguale al paralellogrammo BM, ed il paralellogrammo CG al paralellogrammo BN, essendo opposti, adunque ancor il prisma contenuto da' due triangoli AFG, DEC, e da' tre paralellogrammi AD, DG, GC è uguale al prisma contenuto da' due triangoli LMN, BHK, e da' tre paralellogrammi BM, NH, BN, pongasi il solido comune, la cui base è il paralellogrammo AB, ed opposto ad esso GEHM, tutto dunque il solido paralellepipedo

34. del p. 11. del sesto.



CM

CM è uguale a tutto il ſolido paralellepipedo CN, laonde i ſolidi paralellepipedi, ch'hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza, de' quali i dritti ſiano nelle iſteſſe linee rette, fra loro ſono uguali, il che biſognava dimoſtrare.

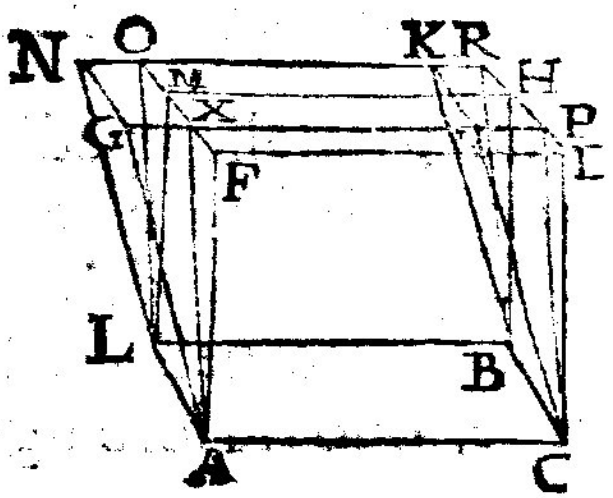
TEOREMA XXV.

PROPOSIZIONE XXX.

I ſolidi paralellepipedi, che hanno la medeſima baſe, e la medeſima altezza, de' quali i dritti non ſiano nell'iſteſſe linee rette, ſono fra loro uguali.

Siano nella medeſima baſe AB i ſolidi paralellepipedi CM, CN, e della medeſima altezza, de' quali i dritti AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK non ſiano nelle iſteſſe linee rette. Dico il ſolido CM eſſere uguale al ſolido CN. Prolunghinſi NK, DH, e GE, FM, e concorrano fra loro ne' punti R, X, ed ancora prolunghinſi FM, GE a' punti O, P, e giunganſi AX, LO, CP, BR; il ſolido CM, la cui baſe è

se è il paralellogrammo A C B L, ed opposto ad esso F D H M, è uguale al solido C O, la cui base è il paralellogrammo A C B L, ed opposto ad esso X P R O, perciocchè sono nella medesima base A C B L, ed i lor dritti A F, A X, L M, L O, C D, C P, B H, B R sono nelle medesime linee rette F O, D R, ma il so-



lido C O, la cui base è il paralellogrammo A C B L, ed opposto ad esso X P R O, è uguale al solido C N, la cui base è il paralellogrammo A C B L, ed opposto ad esso G E K N, conciossiacosachè siano nella medesima base A C B L, ed i dritti loro A G, A X, C E, C P, L N, L O. B K, B R, siano nelle medesime linee rette G P, N R, onde ancor il solido C M, sarà uguale al solido C N, adunque i solidi paralellepipedi

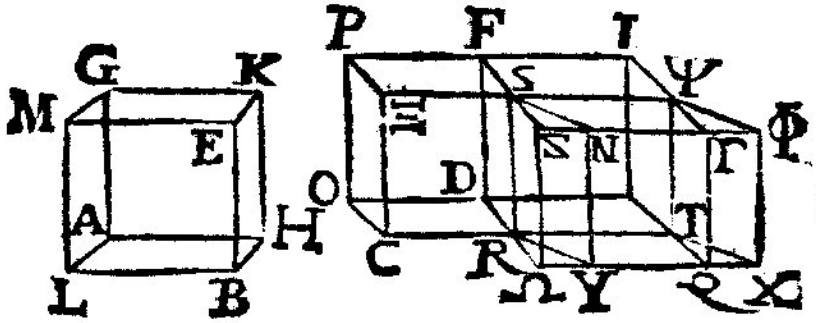
pedi, ch' hanno la medeſima baſe; e la medeſima altezza, de' quali i dritti non ſiano nelle iſteſſe linee rette, fra loro ſono uguali, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XXVI.

PROPOSIZIONE XXXI.

I ſolidi paralellepipedi, che hanno uguali baſi, e la medeſima altezza, fra loro ſono uguali.

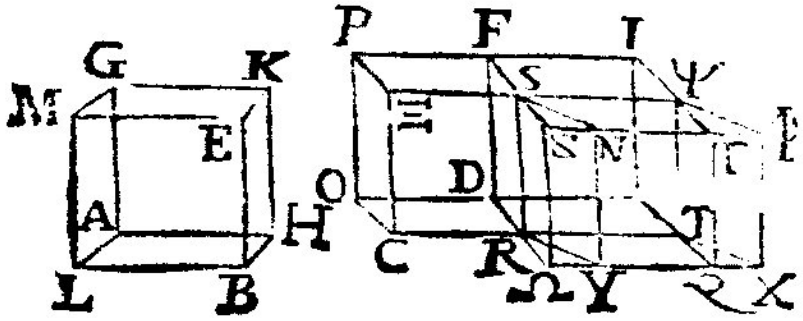
Siano nelle uguali baſi A B, C D i ſolidi paralellepipedi A E, C F, della medeſima altezza. Dico il ſolido A E eſſere uguale al ſolido C F. Si-



no prima i dritti loro H K, B E, A G, L M, O P, D F, C Ξ R S perpendicolari alle baſi A B, C D, e l' angolo A L B ſia diſuguale all' angolo C R D, e prolunghiſi la R T per diritto

alla

alla C R, e conſtituiſcaſi nella linea retta R T, e nel punto in eſſa R, l'angolo T R Y uguale all'angolo A L B, e pongaſi la R T uguale alla A L, ed alla L B uguale la R Y, e per Y tiriſi la X Y paralella alla R T, e compiſcaſi la baſe R X, ed il ſolido Ψ Y, perchè dunque le due T R, R Y ſono uguali alle due A L, L B, e contengono gli angoli ugua-



li, ſarà il paralellogrammo R X uguale, e ſimile al paralellogrammo H L, e perchè altresì la A L è uguale alla R T, e la L M alla R S, e contengono gli angoli uguali, il paralellogrammo R Ψ ſarà uguale, e ſimile al paralellogrammo A M; per la medeſima ragione il paralellogrammo L E è uguale, e ſimile al paralellogrãmo S Y, adunque tre paralellogrammi del ſolido A E ſono uguali, e ſimili a tre paralellogrammi del ſolido Ψ Y ma ancor i tre oppoſti a' tre ſono uguali, e ſimili,

24. del quaſ.

tutto

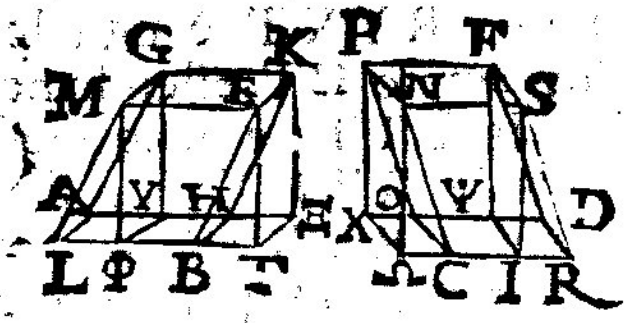
tutto dunque il ſolido paralellepipedo AE è uguale a tutto il ſolido paralellepipedo ΨY prolũghinſi DR X Y, e concorrano fra loro nel punto Ω, e per T tirisi la T Q paralella alla D Ω, e prolunghinſi T Q, O D, e concorrano in V, e compiſcansi i ſolidi ΩΨ, R I; adunque il ſolido ΦΩ la cui baſe è il paralellogrammo RΨ ed oppoſto ad eſſo Ω T, è uguale al ſolido Ψ Y, la cui baſe è il paralellogrammo RΨ, ed oppoſto ad eſſo TΦ perciocchè ſono nella medeſima baſe Ψ, e nella medeſima altezza, ed i dritti loro R Ω, R Y, T Q, T X, S Z, S N, ΨT, ΨΦ ſono nelle medeſime linee rette Ω X, Z Φ, ma il ſolido Ψ Y è uguale al ſolido A E, adunque ancor ΨΩ è uguale al ſolido A E, oltre a ciò perchè il paralellogrammo R Y X T è uguale al paralellogrammo ΩT, eſſendo nella medeſima baſe R T, e nelle medeſime paralelle R T Ω X, ma il paralellogrammo R Y X T è uguale al paralellogrammo B V, perchè ancor eſſo è uguale ad A B, ed il paralellogrammo ΩT è uguale al paralellogrammo C D, ed è un altro paralellogrammo D T; ſarà come la baſe C D alla baſe D T, così ΩT a D T, e 26. *di queſ.*

per-

perchè il ſolido paralellepipedo CI è ſegato dal piano R F paralello a' piani oppoſti, ſarà come la baſe C D alla baſe D T, così il ſolido C F al ſolido R I, e per la medeſima ragione perchè il ſolido paralellepipedo Ω I è ſegato dal piano R Ψ paralello a'piani oppoſti, come la baſe Ω T alla baſe T D, così ſarà il ſolido Ω Ψ al ſolido R I, ma come la baſe C D alla baſe D T, così la baſe Ω T alla baſe T D, come dunque il ſolido C F al ſolido R I, così il ſolido Ω Ψ al ſolido R I, ed avendo amendue i ſolidi C F Ω Ψ al ſolido R I la medeſima proporzione, ſarà il ſolido C F uguale al ſolido Ω Ψ, ed il ſolido Ω Ψ ſi è dimoſtrato uguale al ſolido A E, adunque eziandio il ſolido A E ſarà uguale al ſolido C F.

25. di queſ.

9. del quin.



Ma non ſiano i dritti A G, H K, B E, L M, C N R S, D F, O P perpendicolari alle baſi A B, C D. Dico ſimilmente il ſolido A E eſſere uguale al

le al ſolido C F. Tirinſi da' punti K, E, G, M, P, F, N, S, al ſoggetto piano le K Ξ, E T, G Y, M Φ, P X, F Ψ, N Ω, S I, e tocchino il piano ne' punti Ξ, T, Y, Φ, X, Ω Ψ, I, e giũganſi Ξ T, Y, Φ, Ξ Y, T Φ, X Ψ, X Ω, Ω I, Ψ I, adunque il ſolido K Φ è uguale al ſolido P I, perciocchè ſono nelle uguali baſi K M, P S, e della medeſima altezza, de' quali i dritti ſono perpendicolari alle baſi, ma il ſolido K Φ è uguale al ſolido A E, ed il ſolido P I, uguale al ſolido C F, concioſſiacoſachè ſiano nella medeſima baſe, e della medeſima altezza, de' quali i dritti non ſono nelle iſteſſe linee rette, adunque eziandio il ſolido A E ſarà uguale al ſolido C F laonde i ſolidi paralellepipedi, ch' hanno uguali baſi, e la medeſima altezza, fra loro ſono uguali, il che biſognava dimoſtrare.

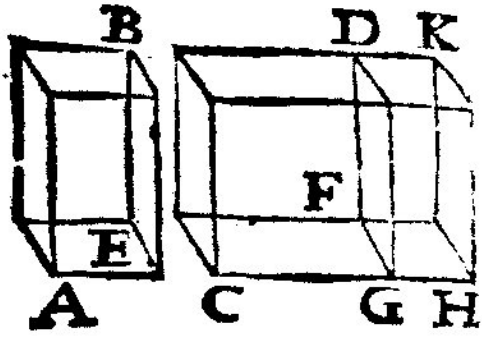
TEOREMA XXVII.

PROPOSIZIONE XXXII.

I ſolidi paralellepipedi, che hanno la medeſima altezza, fra loro ſono come le baſi.

Siano

Siano i solidi paralellepipedi AB, CD; che abbiano la medesima altezza. Dico essere fra loro, come le basi, cioè come la base AE alla base CF, così il solido AB al solido CD. Adattisi alla linea retta FG il paralellogrammo FH uguale al paralellogrammo AE e dalla base FH, e colla medesima altezza del solido CD, compiscasi il solido paralellepipedo GK, adunque il solido AB è uguale al solido GK, perciocchè sono nelle uguali basi AE, FH, e della medesima altezza, onde perchè il solido paralellepipedo CK è segato dal piano DG paralello agli opposti piani, sarà come la base HF alla base FC, così il solido HD al solido DC, ed è la base FH uguale alla base AE, ed il solido GK uguale al solido AB, adunque è come la base AE alla base CF, così il solido AB al solido CD, onde i solidi paralellepipedi, ch' hanno la medesima altezza, fra loro sono come le basi, il che bisognava dimostrare. TEO-



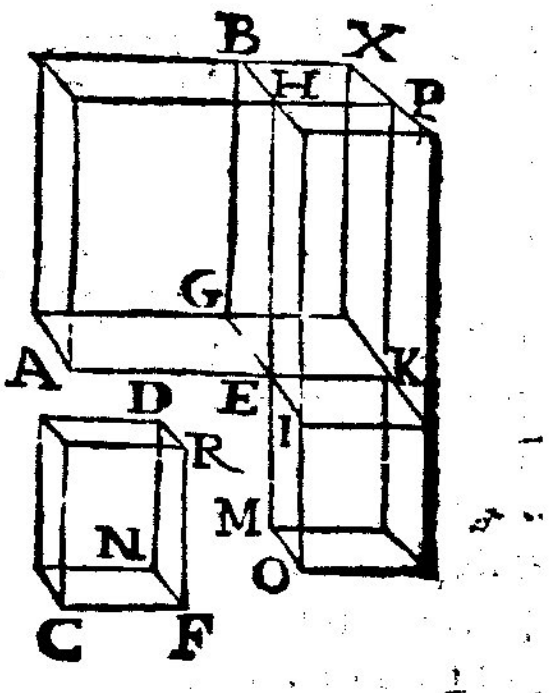
Per l'ant.

25. di quest.

TEOREMA XXVIII.

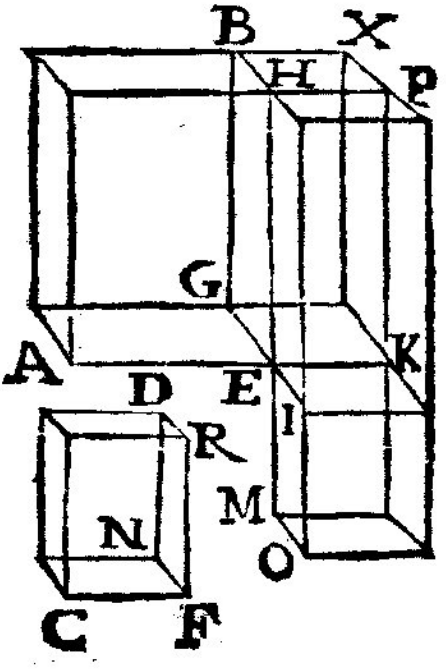
PROPOSIZIONE XXXIII.

I ſolidi paralellepipedi ſimili ſono in proporzione tripla di quella, ch' hanno i lati omologhi.



Siano i ſolidi paralellepipedi ſimili A B, C D, ed il lato A E ſia omologo al lato C F. Dico il ſolido A B al ſolido C D avere tripla proporzione di quella, che ha la A E alla C F. Prolunghinſi E K, E I, E M per diritto alle A E, G E, H E, e pongaſi la E K uguale alla C F, ed alla F N uguale la E I, ed ancora alla F R uguale la E M, e compiſcaſi il paralellogrammo K I, ed il ſolido K O. perchè

che dunque le due KE, EI sono uguali alle due CF, FN, e l'angolo KEI è uguale all' angolo CFN. essẽdo ancor l'angolo AEG uguale a CFN per la somiglianza de' solidi AB, CD, sarà eziandio il paralellogrammo KI simile al paralellogrammo CN, e per la medesima ragione il paralellogrammo KM è uguale, e simile al paralellogrammo CR, ed ancor il paralellogrammo OE al paralellogrammo DF, adunque tre paralellogrammi del solido KO sono uguali, e simili a tre paralellogrammi del solido CD, ma i tre a' tre opposti sono uguali, e simili, onde tutto il solido KO è uguale, e simile a tutto il solido CD, compiscasi il paralellogrammo GK, e dalle basi GK, KI paralellogramme, e colla medesima altezza, che



24. di quest.

AB

AB, compiſcansi i ſolidi EX, IP, e perchè per la ſomiglianza de' ſolidi AB, CD è come la AE alla CF, così la EG alla FN, e la EH alla FR, e la FC è uguale alla EK, e la FN alla EI, e la FR alla EM, ſarà come la AE alla EK, così la GE alla EI, e la HE alla EM, ma come la AE alla EK, così il paralellogrammo AG al paralellogrammo GK, e come la GE alla EI, così il paralellogrammo GK a KI, e come la HE alla EM, così il paralellogrammo PE a KM; come dunque il paralellogrammo AG al paralellogrammo GK, così GK a KI, e PE a KM, ma come AG a GK, così il ſolido AB al ſolido EX, e come GK a KI, così il ſolido XE al ſolido PI, e come PE a KM, così il ſolido PI al ſolido KO, come dunque il ſolido AB al ſolido EX, così EX a PI, e PI a KO, ma ſe ſiano quattro grandezze continuatamẽte proporzionali, la prima alla quarta ha tripla proporzione di quella, che ha alla ſeconda, adunque ancora il ſolido AB al ſolido KO ha tripla proporzione di quella, che ha AB ad EX, ma come AB ad EX, così è

1. *del ſeſto.*

Per l'ant. 11. *del quin.* 11. *dif. del* 5.

Per l'ant 1 del ſeſto. il paralellogrammo A G al paralellogrammo G K, e la linea retta A E alla retta E K, onde il ſolido A B al ſolido K O averà tripla proporzione di quella, che ha A E alla E K, ma il ſolido K O è uguale al ſolido C D, e la linea retta E K è uguale alla retta C F, adunque il ſolido A B al ſolido C D ha tripla proporzione di quella, ch' ha il lato omologo A E al lato omologo C F, il che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

Da queſto è chiaro, che ſe quattro linee rette ſiano proporzionali, come la prima alla quarta, così è il ſolido paralellepipedo, che ſi fa dalla prima al ſolido paralellepipedo fatto dalla ſeconda ſimile, e ſimilmente deſcritto, perciocchè la prima alla quarta ha tripla proporzione di quella, che ha alla ſeconda.

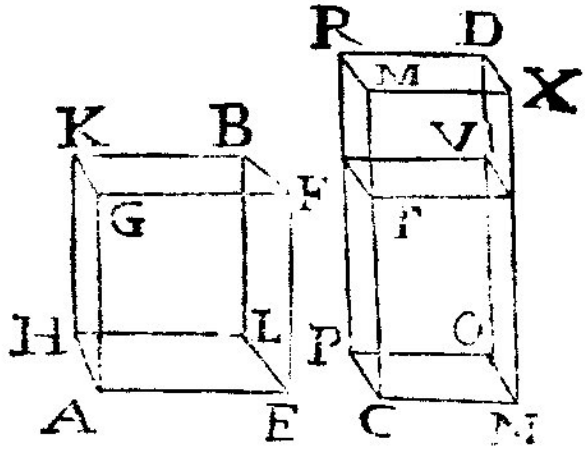
TEOREMA XXIX.

PROPOSIZIONE XXXIV.

De' ſolidi paralellepipedi uguali le baſi riſpondono contrariamente all'altezze, ed i ſolidi paralellepipedi, de' quali le baſi riſpondono contrariamente all' altezze, ſono uguali fra loro.

Siano i ſolidi paralellepipedi uguali A B, C D. Dico le baſi loro riſpondere contrariamẽte all'altezze, cioè come la baſe E H alla baſe N P così eſſere l' altezza del ſolido C D all' altezza del ſolido A B Siano prima i dritti A G, E F, L B, H K, C M, N X, O D, P R, perpendicolari alle ba-

ſi loro. Dico come la baſe E H alla baſe N P, così eſſere la C M alla A G, ſe dunque ſia uguale la baſe E H alla baſe N P, ed è il ſolido A B uguale al ſolido C D, ſarà ancor la C M uguale alla A G, perciocchè ſe eſſendo le baſi E H, N P uguali, non ſiano l'altezze A G, C M uguali, nè anche il ſolido A B ſarà uguale al ſolido C D; e ſi po-



ne uguale: non è dunque l'altezza C M diſuguale all'altezza A G, onde è neceſſario, che ſia uguale, e però come la baſe E H alla baſe N P, così ſarà la C M alla A G, dalle quali coſe appare de' ſolidi paralellepipedi A B, C D le baſi riſpondere contrariamente all'altezze. Ma la baſe E H non ſia uguale alla baſe N P, ma la E H ſia maggiore, ed è il ſolido A B uguale al ſolido C D, adunque la C M è maggiore della

A G

AG, altrimenti ſeguirebbe altresì, che i ſolidi AB, CD non foſſero uguali, che uguali ſi pongono, laonde pongaſi la CT uguale alla AG, e dalla baſe NP, e coll' altezza CT compiſcaſi il ſolido paralelellepipedo VC, perchè dunque il ſolido AB è uguale al ſolido CD, ed è un'altro ſolido VC, e le coſe uguali alla medeſima hanno la medeſima proporzione, ſarà come il ſolido AB al ſolido CV così il ſolido CD al ſolido CV, ma come il ſolido AB al ſolido CV, così la baſe EH alla baſe NP, perciocchè i ſolidi AB, CV ſono ugualmente alti, e come il ſolido CD al ſolido CV, così la baſe MP alla baſe PT, o la linea retta MC alla CT; come dunque la baſe EH alla baſe NP, così la MC alla CT, e la CT è uguale alla AG, adunque è come la baſe EH alla baſe NP, così la MC alla AG, onde le baſi de' ſolidi paralellepipedi AB, CD riſpondono contrariamente all' altezze. Ma le baſi de' ſoli di paralellepipedi AB, CD riſpondano contrariamente all'altezze, e ſia come la baſe EH alla baſe NP, così l'altezza del ſolido CD all'altezza del ſolido AB. Dico il

Aſſ. 3. del quin.

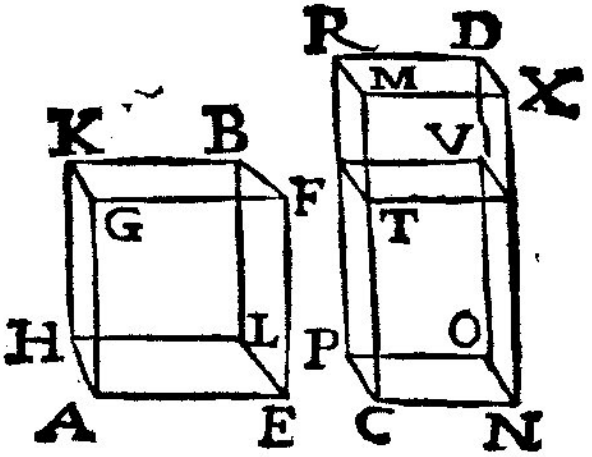
32. di queſ.

25. di queſ.

1. del ſeſta.

ſolido AB eſſere uguale al ſolido CD. Siano medeſimamente i dritti perpendicolari alle baſi, e la baſe EH ſia uguale alla baſe NP, ed è come la baſe EH alla baſe NP così l'altezza del ſolido CD all'altezza del ſolido AB; è dunque l'altezza del ſolido CD uguale all'altezza del ſolido AB, ma i ſolidi paralellepipedi, che ſono nelle uguali baſi, e

31. di quеſ.

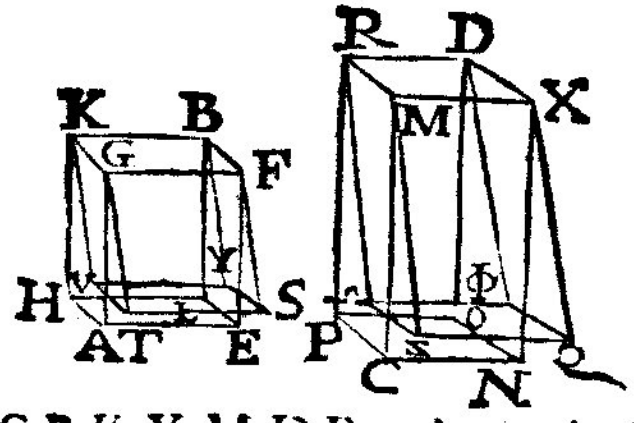


della medeſima altezza ſono uguali fra loro, adunque il ſolido AB è uguale al ſolido CD. Ma non ſia la baſe EH uguale alla baſe NP, e ſia la EH maggiore; è dunque l'altezza del ſolido CD maggiore dell'altezza del ſolido AB, cioè la CM è maggiore della AG, pongaſi di nuovo la CT uguale alla AG, e compiſcaſi ſimilmente il ſolido CV. onde perchè è come la baſe EH alla baſe NP così la MC alla AG,

e la

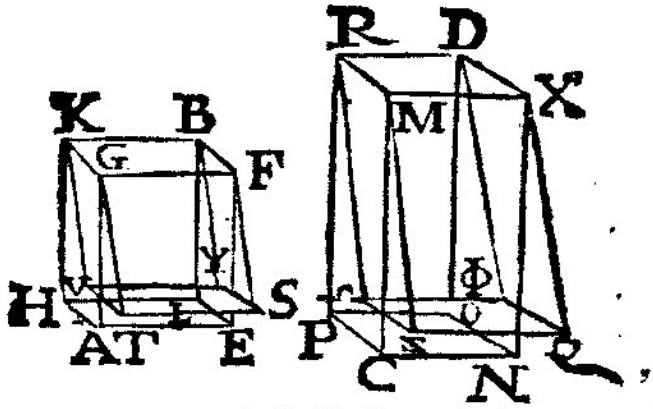
e la AG è uguale alla CT, ſarà come la baſe EH alla baſe NP, così MC a CT, ma come la baſe EH alla baſe NP, così il ſolido AB al ſolido CV; perciocchè i ſolidi AB, CV ſono ugualmente alti, e come la MC alla CT, così la baſe MP alla baſe PT, ed il ſolido CD al ſolido CV, come dunque il ſolido AB al ſolido CV così il ſolido CD al ſolido CV, ed avendo amendue i ſolidi AB, CD la medeſima proporzione al ſolido CV, ſarà il ſolido AB uguale al ſolido CD, il che biſognava dimoſtrare.

Ma non ſiano i dritti FE, BL, GA, KH, XN, DO, MC, RP, perpendicolari alle baſi loro, e da' punti FGBKXMDR a' piani delle baſi EH, NP tirinſi le perpendicolari, che tocchino i piani ne' punti STYV, QZΩΦ, e compiteanſi i ſolidi FV, XΩ. Dico ancora così eſ-



ſendo i ſolidi A B, C D uguali, che le baſi riſpondono contrariamente all'altezze, e come la baſe E H alla baſe N P, così è l'altezza del ſolido C D all' altezza del ſolido A B, perchè il ſolido A B è uguale al ſolido C D, ed al ſolido A B è uguale il ſolido F V per eſſere nella medeſima baſe F K, e della medeſima altezza, de' quali i dritti non ſono nelle medeſime linee rette, ed il ſolido

34. di quеſ.



D C è uguale al ſolido X Ω, che ſono nella medeſima baſe X R, e della medeſima altezza, i dritti de' quali non ſono nelle medeſime linee rette, ſarà eziandio il ſolido F V uguale al ſolido X Ω, ma degli uguali ſolidi paralellepipedi l'altezze de' quali ſono perpendicolari alle baſi, le baſi riſpondono contrariamente all'altezze, è dunque come la baſe F K alla baſe X R, così l'altezza del ſolido X Ω all' altezza del ſoli-

Per le coſe dimoſ. innanzi.

ſolido F V, ed è la baſe F K uguale alla baſe E H, e la baſe X R alla baſe N P, adunque come la baſe E H alla baſe N P, così è l'altezza del ſolido X Ω all'altezza del ſolido F V, perciocchè ſono le medeſime altezze de' ſolidi X Ω, F V, e parimente de' ſolidi D C, B A, come dunque la baſe E H alla baſe N P, così è l'altezza del ſolido D C all'altezza del ſolido A B, e però le baſi de' ſolidi paralellepipedi AB, C D riſpondono contrariamente all' altezze, oltre a queſto le baſi de' ſolidi paralellepipedi AB, CD riſpõdano contrariamente all' altezze, e ſia come la baſe E H alla baſe N P, così l'altezza del ſolido C D all' altezza del ſolido A B. Dico il ſolido A B eſſere uguale al ſolido CD, perchè fatte le medeſime coſe come la baſe E H alla baſe N P, così è l'altezza del ſolido C D all' altezza del ſolido A B, e la baſe E H è uguale alla baſe F K, e N P ad X R, ſarà come la baſe F K alla baſe X R, così l'altezza del ſolido C D all' altezza del ſolido A B, e ſono le medeſime altezze de' ſolidi A B, C D, e de' X Ω, F V, come dunque la baſe F K alla baſe X R, così l'altezza

del ſolido X Ω all'altezza del ſolido F V, onde le baſi de' ſolidi paralellepipedi X Ω, F V riſpondono contrariamente all'altezze, e que' ſolidi paralelipedi, de' quali le altezze ſono perpendicolari alle lor baſi, e le baſi riſpondono contrariamente all' altezze, ſono fra loro uguali, adunque il ſolido F V è uguale al ſolido X Ω, ma il ſolido F V è uguale al ſolido B A, perchè ſono nella medeſima baſe F K, e della medeſima altezza, i dritti de' quali non ſono nelle medeſime linee rette, ed il ſolido X Ω è uguale al ſolido D C, concioſſiacoſachè ſiano nella medeſima baſe X R, e della medeſima altezza, e non nelle medeſime linee rette, adunque il ſolido A B è uguale al ſolido C D, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XXX.

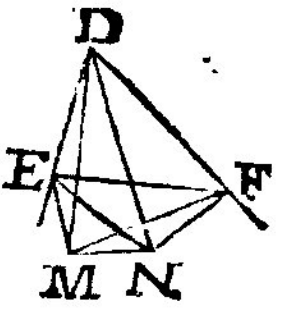
PROPOSIZIONE XXXV.

Se due angoli piani ſiano uguali, e nelle cime loro ſiano conſtituite linee rette ſublimi, che colle linee rette poſte

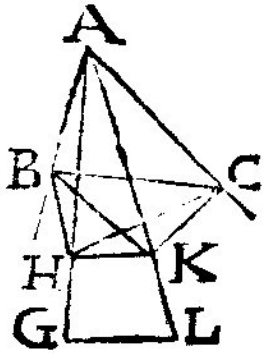
ſte da principio contengano angoli uguali, l'un all'altro; poi nelle ſublimi ſiano preſi quali punti ſi vogliano, e da quegli a' piani, ne' quali ſono i primi angoli, ſi tirino le perpendicolari, e da' punti fatti dalle perpendicolari ne' piani a' primi angoli ſi congiungano linee rette, conterranno le dette linee colle ſublimi uguali angoli.

Siano due angoli rettilinei uguali B A C, E D F, e da' punti A D conſtituiſcanſi ſublimi rette linee A G, D M, che colle linee rette poſte da principio contengano angoli uguali, l'un all'altro, cioè l'angolo M D E uguale all'angolo G A B, e l'angolo M D F uguale all'angolo G A C, e piglinſi nelle A G, D M quali punti ſi vogliano G M, da' quali ſi tirino le G L, M N perpendicolari a' piani per le B A C, E D F, che tocchino detti piani ne' punti L, N, e giunganſi L A, N D. Dico l'angolo

GAL essere uguale all'angolo MDN, Pongasi la AH uguale alla DM, e per H tirisi la HK paralella alla GL,



8. *di ques.* la GL è perpendicolare al piano per BAC, adunque eziandio la HK sarà perpendicolare al piano per BAC. Tirinsi da' punti K, N alle linee rette AB AC, DE, DF le perpendicolari KB KC, NF, NE, e giunganſi HC, CB,



47. *del primo.* MF, FE, perchè dunque il quadrato della HA è uguale a' quadrati delle HK, KA, ed al quadrato della KA ſono uguali i quadrati delle KC, CA; ſarà il quadrato della HA uguale a' quadrati delle HK, KC, CA, ed a' quadrati delle HK, KC è uguale il quadrato della HC, il quadrato dunque della HA ſarà uguale a' quadrati delle HC, CA, e però l'angolo HCA è retto, e per la medeſima ragione l'angolo DFM è retto, onde l'angolo ACH è uguale all' angolo DFM, ed è l'angolo HAC uguale all'angolo MD F, ſo-

48. *del primo.*

F, ſono dunque due triangoli MDF. HAC, che hanno due angoli uguali a due angoli, l'un'all'altro, ed un lato uguale ad un lato, che è ſottopoſto ad uno degli angoli uguali, cioè HA a DM; onde averanno ancor gli altri lati uguali agli altri lati, l'un' all'altro, e ſarà la AC uguale alla DF, ſimilmente dimoſtreremo eziandio la AB eſſere uguale alla DE. Giunganſi HB, ME: e perchè il quadrato della AH è uguale a' quadrati delle AK, KH, ed al quadrato della AK ſono uguali i quadrati delle AB, BK, ſaranno i quadrati delle AB, BK, KH uguali al quadrato della AH, ma a' quadrati delle BK, KH è uguale il quadrato della BH, perciocchè l'angolo HKB è retto, eſſendo la HK perpendicolare al ſoggetto piano, il quadrato dunque della AH è uguale a' quadrati delle AB, BH, e però l'angolo ABH è retto, e per la medeſima ragione è retto l'angolo DEM, e l'angolo BAH è uguale all'angolo EDM, che così ſi pone, ed è la AH uguale alla DM, adunque ancor la AB è uguale alla DE, onde perchè la AC è uguale alla DF, e la AB alla DE ſaranno le

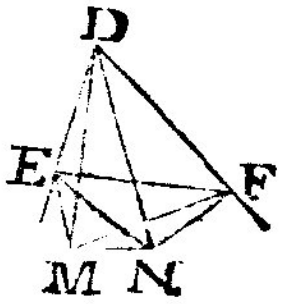
26. *del primo.*

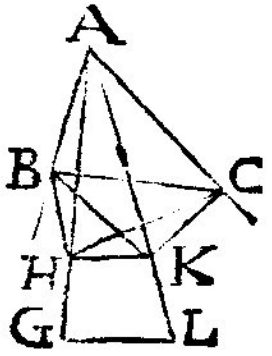
48. *del primo.*

26. *del primo.*

due

due C A, A B uguali alle due F D, D E, ma l' angolo B A C è uguale all' angolo F D E, la baſe dunque B C è uguale alla baſe E F, ed il triangolo al triangolo, e gli altri angoli agli altri angoli, adunque l' angolo A C B è uguale all' angolo D F E, ed è il retto A C K uguale al retto D F N, onde ancor il rimanente B C K è uguale al rimanente E F N, e per la medeſima ragione l' angolo C B K uguale all' angolo F E N, il perchè ſono due triangoli B C K, E F N, che hanno due angoli uguali a due angoli l' un' all' altro, ed un lato uguale ad un lato, che è fra gli angoli uguali, cioè B C ad E F, adunque averanno gli altri lati uguali agli altri lati, è dunque la C K uguale alla F N, e la A C è uguale alla D F, onde le due A C, C K ſono uguali alle due D F, F N, e contengono uguali angoli, la baſe dunque A K è uguale alla baſe D N, ed eſſendo la A H uguale al-





4. del primo.

le alla D M, ſarà ancor il quadrato che ſi fa dalla A H uguale al quadrato della D M; ma al quadrato della A H ſono uguali i quadrati delle A K, K H, perciocchè l'angolo A K H è retto, ed al quadrato della D M ſono uguali i quadrati delle D N, N M, concioſſiacoſachè l'angolo D N M ſia retto, adunque i quadrati delle A K, K H ſono uguali a' quadrati delle D N, N M, de'quali il quadrato della A K è uguale al quadrato della D N, adunque il rimanente quadrato della K H è uguale al rimanente della M N, e però la linea retta H K è uguale alla M N, e perchè le due H A, A K ſono uguali alle due M D, D N, l'un' all' altra, e la baſe H K ſi è dimoſtrata uguale alla baſe N M; ſarà l'angolo H A K uguale all'angolo M D N, il che biſognava dimoſtrare. *47. del primo.*

COROLLARIO.

Da queſto è chiaro, che ſe due angoli piani rettilinei ſiano uguali, e da eſſi ſiano conſtituite linee rette ſublimi uguali

guali, che colle linee rette poſte da principio contengano uguali angoli, l'un all'altro, le perpendicolari, che da eſſe ſi tirano a' piani, ne' quali ſono i primi angoli, ſono uguali.

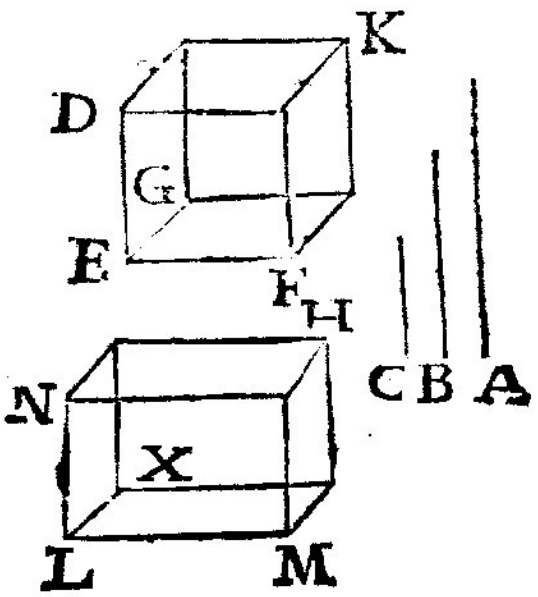
TEOREMA XXXI
PROPOSIZIONE XXXVI.

Se tre linee rette ſiano proporzionali, il ſolido paralellepipedo fatto dalle tre linee ſarà uguale a quello, che ſi fa dalla linea di mezzo eſſendo equilatero, ed equiangolo all' altro.

Siano tre linee rette proporzionali A,B,C, e ſia come la A alla B così la B alla C Dico il ſolido, che ſi fa dalle A,B,C eſſere uguale al ſolido, che ſi fa dalla B equilatero, ed equiangolo all'altro. Propongaſi l' angolo ſolido E contenuto da tre angoli piani D E G, G E F, F E D,

ed

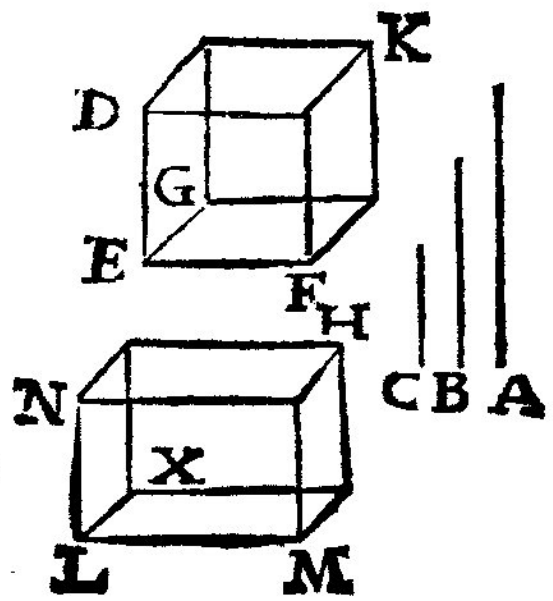
ed alla B pongasi uguale ciascuna di esse D E, E G, E F, e compiscasi il solido paralellepipedo E K, e pongasi la L M uguale alla A, e nella retta linea L M, e nel punto in essa L constituiscasi l' angolo contenuto dagl'angoli NLX, XLM, MLN uguale all'angolo solido E, e pongasi alla B uguale la LX, e alla C uguale la LN.



perchè dunque com e la A alla B così è la B alla C, e la A è uguale alla L M, e la B a ciascuna di esse L X, E F, E G, E D, e la C alla L N, sarà come la L M alla E F, così la D E alla L N. e dintorno agli uguali angoli M L N, D E F i lati si rispondono contrariamente, adunque il paralellogrammo M N è nguale al paralellogrammo D F, è perchè due

an-

angoli piani rettilinei ſono uguali D E F, N L M, ed in eſſi ſi conſtituiſcono linee rette ſublimi L X, E G uguali fra loro, e che colle linee rette poſte da principio contengono gli angoli uguali l'un all' altro, ſaranno le perpendicolari, che ſi tirano da' punti G, X a' piani per le



N L M, D E F uguali fra loro, adunque i ſolidi L H, E K ſono della medeſima altezza; e que' ſolidi paralellepipedi, che ſono nelle uguali baſi, e della medeſima altezza ſono fra loro uguali, il ſolido dunque H L è uguale al ſolido E K, ed è il ſolido H L quello, che ſi fa dalle tre A, B, C, ed il ſolido E K

quello

quello, che ſi fa dalla B, laonde ſe tre linee rette ſiano proporzionali, il ſolido paralellepipedo fatto dalle tre linee ſarà uguale a quello, che ſi fa dalla linea di mezzo, eſſendo equilatero, ed equiangolo all' altro, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XXXII.

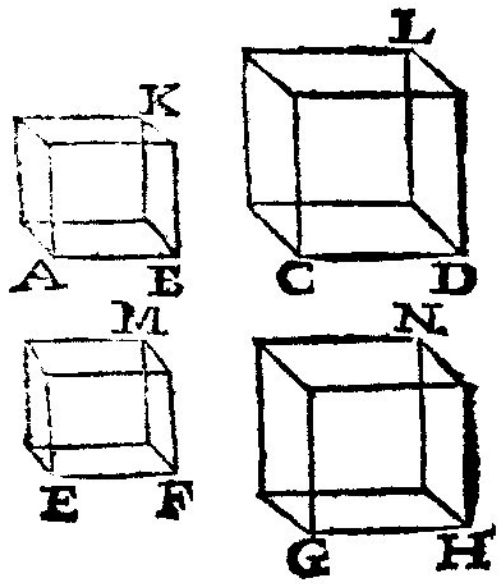
PROPOSIZIONE XXXVII.

Se quattro linee rette ſiano proporzionali, i ſolidi paralellepipedi, che ſi fanno da eſſe ſimili, e ſimilmente deſcritti ſaranno ancora proporzionali, e ſe i ſolidi paralellepipedi, che ſi fanno da eſſe ſimili, e ſimilmente deſcritti ſiano proporzionali, le linee rette ancora ſaranno proporzionali.

Siano quattro linee rette proporzionali A B, C D, E F, G H, e ſia come la A B alla C D così la E F alla G H, e deſcrivanſi dalle A B, C D, E F, G H ſolidi paralellepipedi ſimili, e ſimilmente poſti K A, L C, M E, N G,

NG. Dico come KA ad LC così essere ME ad NG. Perciocchè essendo il solido paralellepipedo KA simile ad LC, averà KA ad LC tripla proporzione di quella, che ha la AB alla CD, per la medesima ragione il solido ME al solido NG averà tripla proporzione di quella, ch'ha la EF alla GH, ed è come la

33. di quest.



AB alla CD, così la EF alla GH, come dunque AK ad LC, così ME ad NG, ma sia come il solido AK al solido LC, così il solido ME al solido NG. Dico come la linea retta AB alla retta CD così essere la retta EF alla retta GH. Perciocchè avendo AK ad LC tripla proporzione di quella, che ha la AB alla CD. e ME ad NG ha tripla pro-

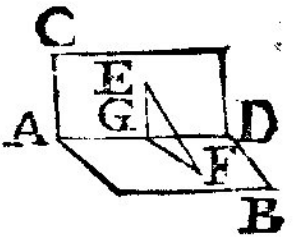
por-

porzione di ſquella, che ha ia E F alla GH, e come AK ad LC, così è ME ad NG; ſarà come ìa AB alla CD, così la EF alla GH, ſe dunque quattro linee rette ſiano proporzionali, e quello, che ſeguita, il che biſogua va dimoſtrare.

TEOREMA XXXIII.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

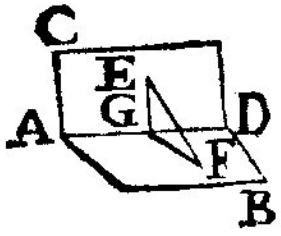
Se un piano ſia retto, ovvero perpendicolare ad un' altro piano, e da qualche punto di quegli, che ſono in un piano all'altro piano ſia tirata la perpendicolare, caderà quella nel comũ ſegamẽro di detti piani.



Sia il piano CD al piano AB retto, ovvero perpendicolare, ed il comun ſegamento loro ſia AD, e nel piano CD pigliſi qual punto ſi voglia E. Dico la perpendicolare, che dal punto E ſi tira al piano AB cadere nella AD. Non già, ma ſe eſſer può, caggia fuori

fuori, come la E F, e tocchi il piano A B nel punto F, e da F alla D A nel piano A B tirisi la F G perpendicolare, la quale

3. *dif.* eziandio sarà perpendicolare al piano C D, e giunganſi E G. Perchè dunque la F G è perpendicolare al piano C D, e la linea retta E G, che è nel medeſimo piano C D la tocca, sarà l'angolo F G E retto, ma ancora la E F è perpendicolare al piano A B, onde l'angolo E F G è retto,



17. *del primo.* e del triangolo E F G, due angoli sono uguali a due retti, che è inconveniente, non caderà dunque fuori della linea retta D A la perpèndicolare tirata dal punto F al piano A B; e però è neceſſario, che caggia in eſſa A D, ſe dunque un piano ſia retto ad un altro piano; e quello, che ſeguita, il che biſognava dimoſtrare.

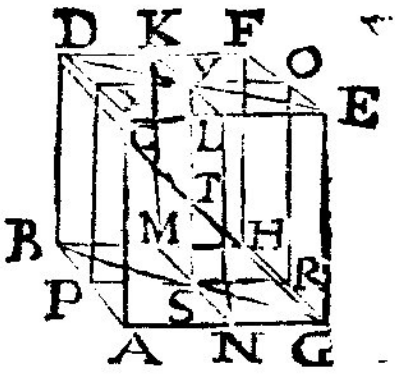
TEOREMA XXXIV.

PROPOSIZIONE XXXIX.

Se in un ſolido paralellepipedo i lati de'piani oppoſti ſiano ſegati per mezzo, e per gli

ſega-

segamenti si tirino i piani, il comun segamento de'piani, ed il diametro del solido paralellepipedo si segheranno per mezzo.

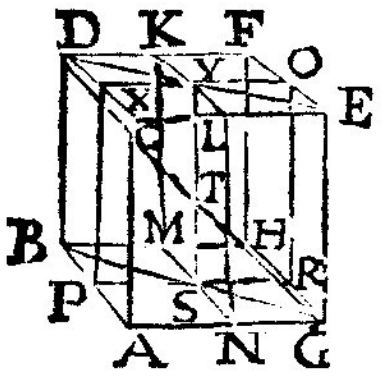


Nel solido paralellepipedo AF i lati degli opposti due piani FC, AH siano segati per mezzo ne' punti K L, M, N, X, P, O, R, e per gli segamenti si tirino i piani KN, XR, ed il comun segamento de'piani sia YS, ed il diametro del solido paralellepipedo DG. Dico le YS, DG segarsi per mezzo, cioè la YT esser uguale alla TS, e la DT alla TG. Giunganſi DY, YE, BS, SG. Perchè dunque la DX è paralella alla OE, gli angoli alterni DXY, YOF ſono fra loro uguali, e perchè la DX è uguale alla OE, e la XY alla YO, e contengono uguali angoli; ſarà la baſe DY uguale alla baſe YE, ed il triangolo DXY uguale al triangolo YOE, e gli altri angoli agli altri angoli, adunque l'an-

29. del primo.

4. del primo.

l'angolo XYD è uguale all'angolo OYE; e però la DYE è linea retta, e per la medesima ragione ancora è retta la BSG, ed è la BS uguale alla SG, e perchè



9. *di quest.* la CA è uguale, e paralella alla DB, ed è uguale, e paralella alla EG, sarà ancora la DB alla EG uguale,

33. *del primo.* e paralella, e le linee rette DE, GB le congiungono, è dunque la DE paralella alla GB, e si sono presi in amendue quali si vogliono punti DY

7. *di quest.* GS, e sono giunte le DG, YS, onde le DG, YS sono in un piano, ed essendo la DE paralella alla BC, sarà l'angolo EDT uguale all'angolo

29. *del primo.* BGT, perciocchè sono alterni: ed è l'angolo DTY uguale all'angolo

11. *del primo.* GTS, adunque sono due triangoli DTY, GTS, che hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, che è sottoposto ad uno degli angoli uguali, cioè DY, a GS, che sono la metà delle DE, BG, averanno dunque gli altri

26. *del primo.* angoli uguali agli altri angoli, onde la DT è uguale alla TG, e la YT

alla

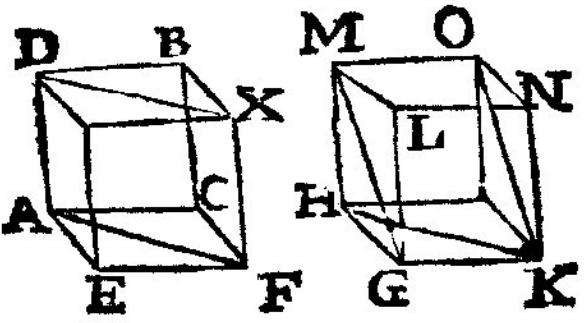
alla T S, e però se in un solido paralellepipedo i lati de' piani opposti siano segati per mezzo, e quello, che seguita, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXXV.

PROPOSIZIONE XL.

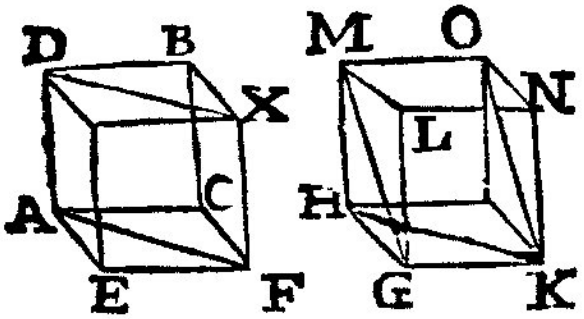
Se siano due prismi ugualmente alti, de' quali uno abbia un paralellogrammo per base, e l'altro un triangolo, e sia il paralellogrammo doppio del triangolo, detti prismi saranno fra loro uguali.

Siano i prismi ugualmente alti A B C, D E F, G H K, L M N ed uno



abbia per base il paralellogrammo H K, e l'altro il triangolo E A F, e il paralellogrammo H K sia doppio del triangolo E A F. Dico il prisma

A D X E F eſſere uguale al priſma G H, M O K. Compiſcanſi i ſolidi A X, G O, e perchè il paralellogrammo H K è doppio del triangolo E A F: ed ancora il paralellogrammo H K è doppio del triangolo G H K ſarà il paralellogrammo A F uguale al paralellogrammo HK,



ma i ſolidi paralellepipedi, che ſono nelle uguali baſi, e della medeſima altezza, ſono fra loro uguali, adunque il ſolido A X è uguale al ſolido G O, ed è il priſma A D X E E F la metà del ſolido A X, ed il priſma G H M O K, la metà del ſolido G O, adunque il priſma A B D X F E è uguale al priſma G H M O, K, onde ſe ſiano due priſmi ugualmente alti, e quello, che ſeguita, il che biſognava dimoſtrare.

38. di queſ.

IL FINE DELL' UNDECIMO LIBRO.

DEGLI

DEGLI

ELEMENTI D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO UNDECIMO.

E DE' SOLIDI

LIBRO SECONDO.

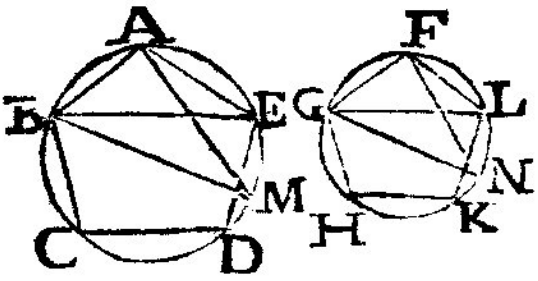
TEOREMA I.

PROPOSIZIONE I.

I POLIGONI Simili, che ſi deſcrivono ne' cerchi, ſono fra loro, come i quadrati de' diametri.

Siano i cerchi A B C D E, F G H K L, ed in eſſi poligoni ſimili A B C D E, F G H K L, ed i diametri de' cerchi ſiano B M, G N. Dico come il quadrato della B M al quadrato della G N, così eſſere il poligono

ABCDE al poligono FGHKL, giunganſi BE, AM, GL, FN, c perchè il poligono ABCDE è ſimile al poligono FGHKL, ancor l'angolo BAE è uguale all' angolo



GFL, ed è come la BA alla AE così la GF alla FL, adunque ſono due triangoli BAE, GFL, ch'hanno un angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo BAE all' angolo GFL, e dintorno agli uguali angoli i lati proporzionali, onde il triangolo ABE è equiangolo al triangolo FGL, e però l'angolo AEB è uguale all' angolo FLG, ma l' angolo AEB è uguale all' angolo AMB, perchè ſi fermano nella medeſima circonferenza, e l'angolo FLG è uguale all' angolo FNG, adunque ancora l' angolo AMB è uguale all' angolo FNG, ma l' angolo BAM retto è uguale al retto GFN, onde il rimanente è uguale al rimanente, è dunque il triangolo AMB equian-

21. *del terzo.*

31. *del terzo,*

golo

golo al triangolo F G N, e perciò come la B M alla G N, così è la B A alla G F, ma la proporzione del quadrato della B M al quadrato della G N è doppia della proporzione della B M alla G N, e della proporzione di B A a G F è doppia la proporzione del poligono A B C D E al poligono F G H K L come dunque il quadrato della B M al quadrato della G N, così il poligono A B C D E al poligono F G H K L, onde i poligoni simili, che si descrivono ne' cerchi sono fra loro come i quadrati de' diametri.

2. de sesto. Corol. del 20. del Sesto.

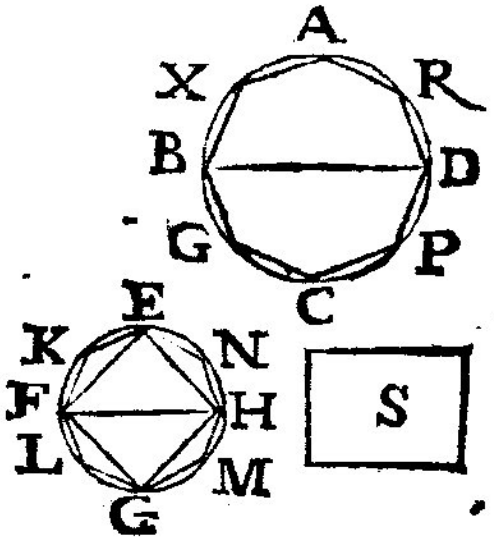
TEOREMA II.

PROPOSIZIONE II.

I cerchi fra loro sono come i quadrati de' diametri.

Siano i cerchi A B C D, E F G H, e i diametri loro siano B D, F H. Dico come il quadrato di B D al quadrato di F H, così essere il cerchio A B C D, il cerchio E F G H, perciocchè se non è così, sarà come il quadrato di B D al quadrato di F H, così il cerchio A B C D ad

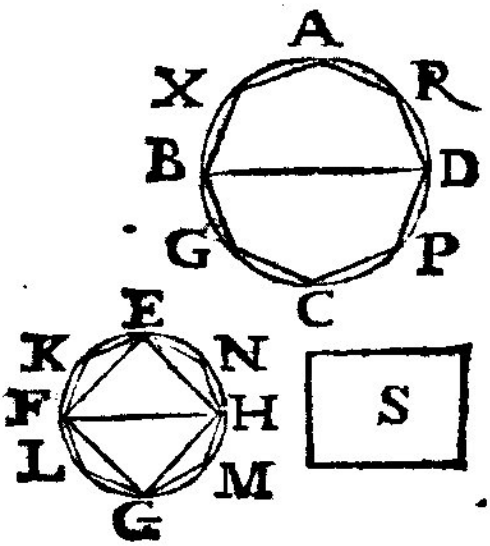
uno ſpazio o minore, o maggiore del cerchio E F G H, ſia prima a un minore, che ſia S, e nel cerchio E F G H deſcrivaſi il quadrato E F G H, il quadrato, che è deſcritto nel cerchio, è maggiore della metà



del cerchin E F G H, perchè ſe tiriamo per i punti E, F, G, H linee rette, che tocchino il cerchio, ſarà il quadrato E F G H la metà del quadrato deſcritto dintorno al cerchio, ma il cerchio è minore del quadrato deſcritto dintorno ad eſſo, adunque il quadrato E F G H è maggiore della metà del cerchio E F G H. Seghinſi per mezzo le circonferēze E F, F G, G H, H E ne' punti K, L, M N, e giunganſi E K, K F, F L, L G, G M, M H, H N, N E, adunque ciaſcuno de' triangoli E K F, F L G, G M H

GMH, HNE è maggiore, che la metà della porzione del cerchio, nella quale egli consiste, perchè se tiriamo per gli punti K, L, M, N linee rette, che tocchino il cerchio, e siniamo i paralellogrammi, che sono nelle linee rette EF, FG, GH, HF, sarà ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMH, HNE la metà del paralellogrammo, nel quale è descritto, ma la porzione è minore del paralellogrammo, adunque ciascuno de' triangoli EKF, FLG, GMH, HNE, è maggiore, che la metà della porzione del cerchio, nella quale consiste, adunque segando l'altre circonferenze per mezzo, e giungendo le linee rette, e facendo questo sempre, lasceremo alla fine alcune porzioni del cerchio, che saranno minori dell'eccesso, nel quale il cerchio EFGH avanza lo spazio S; perchè si dimostra nel primo teorema del decimo libro, che proposte due grandezze disuguali, se dalla maggiore si tragga più, che la metà, e da quello, che rimane similmente si tragga più, che la metà, e questo si faccia sempre, rimarrà alla fine una certa grandezza, la quale di qualunque grandezza pro-

posta sarà minore, laonde siano lasciate le porzioni del cerchio E F G H nelle linee rette E K, K F F L, L G, G M, M H, H N, N E, che siano minori dell' eccesso, nel quale il cerchio E F G H avanza lo spazio S, adunque il rimanente poligono E K F L G M H N sarà maggiore



dello spazio S, descrivasi ancora nel cerchio A B C D il poligono A X B G C P D R simile al poligono E K F L G M H N; adunque come il quadrato di B D al quadrato di F H, così è il poligono A X B G C P D R al poligono E K F L G M H N, ma come il quadrato di B D al quadrato di F H così è il cerchio A B C D allo spazio S, adunque eziandio come il cerchio A B C D allo spazio S, così il poligono A X B G C P

Per l'ant.

Ass. 6. del quin.

CPDR al poligono EKFLGM HN; e permutandogli come il cerchio ABCD al poligono, che è in esso, così lo spazio S al poligono EKFLGMHN. ma il cerchio ABCD è maggiore del poligono, che è in esso, onde ancor lo spazio S è maggiore del poligono EKFL GMHN, ma è minore, che è impossibile, non è dunque come il quadrato di BD al quadrato di FH così il cerchio ABCD a qualche spazio minore del cerchio EFGH, similmente dimostreremo non essere come il quadrato di FH al quadrato di BD, così il cerchio EFG H a qualche spazio minore del cerchio ABCD. Dico dunque ne anche essere come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD a qualche spazio maggiore del cerchio EFGH. Perciocchè, s'egli è possibile, sia ad uno spazio maggiore S, sarà dunque convertendogli come il quadrato di FH al quadrato di BD, così lo spazio S al cerchio ABCD, ma come lo spazio S al cerchio ABCD, così il cerchio EFGH a qualche spazio minore del cerchio ABCD, come si dimostrerà, adunque è come il

quadrato di F H al quadrato di B D, così il cerchio E F G H, a qualche ſpazio minore del cerchio A B C D, il che ſi è dimoſtrato impoſſibile, non è dunque come il quadrato di B D al quadrato di F H, così il cerchio A B C D ad uno ſpazio maggiore del cerchio E F G H, e ſi è dimoſtrato non eſſere anche a un minore, onde come il quadrato di B D al quadrato di F H, così ſarà il cerchio A B C D al cerchio E F G H, i cerchi dunque fra loro ſono come i quadrati de' diametri, il che biſognava dimoſtrare.

L E M M A.

Laonde dico, che ſe lo ſpazio S ſia maggiore del cerchio EFGH, come lo ſpazio S al cerchio A B C D, così il cerchio E FGH a qualche ſpazio minore del cerchio A B C D.

Facciaſi come lo ſpazio S al cerchio A B C D, così il cerchio E F G H ad un altro ſpazio. Dico quello eſſere minore del cerchio A B C D, per-

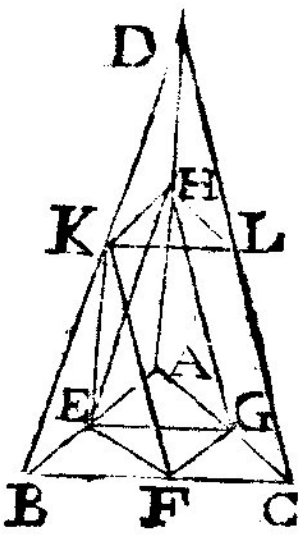
D. Perciocchè essendo come lo spazio S al cerchio A B C D, così il cerchio E F G H ad un altro spazio; sarà permutandogli come lo spazio S al cerchio E F G H, così il cerchio A B C D a detto spazio, ma lo spazio S è maggiore del cerchio E F G H, adunque ancora il cerchio A B C D è maggiore di detto spazio: e però come lo spazio S al cerchio A B C D, così è il cerchio E F G H a qualche spazio minore del cerchio A B C D.

TEOREMA III.
PROPOSIZIONE III.

Ogni piramide, che ha la base triangolare si divide in due piramidi uguali, e simili fra loro, che hanno le basi triangolari, e simili a tutta, e in due prismi uguali, che sono maggiori della metà di tutta la piramide.

Sia la piramide, la cui base sia il triangolo A B C, e la cima il punto D. Dico la piramide A B C D dividersi in due piramidi uguali, e simili tra loro, che hanno le basi triangola-

ri, e ſimili a tutta, e in due priſmi uguali, e i due priſmi eſſere maggiori della metà di tutta la piramide. Seghinſi le A B, B C, C A, A D, D B, D C per mezzo ne' punti E F G H K L, e giunganſi E H, E G G H H K, K L, L H, E K, K F, F G, perchè dunque la A E è uguale alla E B, e la A H alla H D, ſarà la E H paralella alla D B, e per la medeſima ragione la H K è paralella alla A B, è dunque H E B K paralellogrammo, onde la H K è uguale alla E B, ma la E B è uguale alla A E, adunque ancora la A E ſarà uguale alla H K, ed è la A H uguale alla H D, onde le due A E, A H ſono uguali alle due K H, H D l' una all' altra, e l' angolo E A H uguale all' angolo K H D, adunque la baſe E H è uguale alla baſe K D, e il triangolo A E H uguale, e ſimile al triangolo H K D, e per la medeſima ragione ancora il triangolo A H G uguale, e ſimile al triangolo H L D, e perchè le due linee



2. del ſeſto.

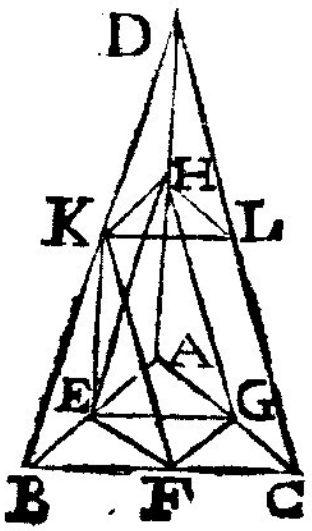
34 del primo.

29. del primo.

nee rette, che si toccano E H, H G, sono paralelle a due linee rette, che si toccano K D, D L, ma non nel medesimo piano, conterranno angoli uguali, adunque l' angolo E H G è uguale all' angolo K D L, similmente, perchè due linee rette E H, H G sono uguali alle due K D, D L, l' una all' altra, e l' angolo E H G è uguale all' angolo K D L, sarà la base E G uguale alla base K L, è dunque uguale, e simile il triangolo E H G al triangolo K D L, e per la medesima ragione il triangolo A E G è uguale, e simile al triangolo H K L, laonde la piramide, la cui base è il triangolo A E G, e la cima il punto H, è uguale, e simile alla piramide, la cui base è il triangolo H K L, e la cima il punto D, e perchè ad un lato del triangolo A D B, cioè alla A B si è tirata la H K paralella, sarà il triangolo A D B al triangolo D H K equiangolo, e hanno i lati proporzionali, è dunque il triangolo A D B simile al triangolo D H K, e per la medesima ragione il triangolo D B C simile al triangolo D K L, ed il triangolo A D C al triangolo D H L, ed essendo due linee rette B A, A C, che si toccano paralelle, 10. dell' und.

lelle alle due K H, H L, che si toccano, e non sono nel medesimo piano, conterranno angoli uguali, onde l'angolo B A C è uguale all'angolo K H L, ed è come la B A alla A C, così la K H alla H L, adunque il triangolo A B C è simile al triangolo H K L, e però la piramide, la cui base è il triangolo A B C, e la cima il punto D è simile alla piramide, la cui base è il triangolo H K L, e la cima il punto D, ma la piramide, la cui base è il triangolo H K L, e la cima il punto D, si è dimostrata simile alla piramide, la cui base è il triangolo A E G, e la cima il punto H, onde la piramide, la cui base è il triangolo A B C, e la cima il punto D, è simile alla piramide, la cui base è il triangolo A E G, e la cima il punto H, adunque amendue le piramidi A E G H, H K L D sono simili a tutta la piramide A B C D, e perchè la B F è uguale alla F C,

10. dell' und.



sarà

sarà il paralellogrammo E B F G doppio del triangolo G F C, e perchè sono due prismi ugualmente alti, l'uno de' quali ha per base il paralellogrammo, e l'altro il triangolo, ed è il paralellogrammo doppio del triangolo, saranno detti prismi uguali fra loro, adunque il prisma contenuto da' due triangoli B K F, e E H G, e da' tre paralellogrammi E B F G, E B K H, K H F G è uguale al prisma contenuto da' due triangoli G F C, H K L, e da' tre paralellogrammi K F C L, L C G H, H K F G, ed è manifesto l'uno, e l'altro prisma, e quello, la cui base è il paralellogrammo E B G F, e la linea retta H K opposta ad esso, e quello la cui base è il triangolo G F C, ed il triangolo K L H opposto ad esso essere maggiore dell'una, e l'altra delle piramidi le cui basi sono i triangoli A E G, H K L, e le cime i punti H D, perciocchè se giungiamo le linee rette E F, E H il prisma la cui base è il paralellogrammo E B F G, e la linea retta opposta ad esso H K, è maggiore della piramide, la cui base è il triangolo E B F, e la cima il punto K, ma la piramide, la cui base è il triangolo E

B F

BF, e la cima il punto K, è uguale alla piramide, la cui baſe è il triangolo AEG, e la cima il punto H, per eſſere contenute da uguali, e ſimili piani, onde il priſma, la cui baſe è il paralellogrammo EBFG, e la linea retta HK oppoſta ad eſſo, è maggiore della piramide, la cui baſe è il triangolo AEG, e la cima il punto H, ed il priſma, la cui baſe è il paralellogrammo EBFG, e la linea retta HK oppoſta ad eſſo, è uguale al priſma, la cui baſe è il triangolo GFC, ed oppoſto ad eſſo il triangolo HKL, e la piramide, la cui baſe è il triangolo AEG, e la cima il punto H è uguale alla piramide, la cui baſe è il triangolo HKL, e la cima il punto D, adunque i due priſmi, de' quali ſi è detto, ſono maggiori delle due dette piramidi, le baſi delle quali ſono i triangoli, AEG, HKL, e le cime i punti HD, onde tutta la piramide, la cui baſe è il triangolo ABC, e la cima il punto D è diviſa in due piramidi uguali, e ſimili fra loro, e ſimili a tutta, ed in due priſmi uguali, e ſono i due priſmi maggiori della metà di tutta la piramide, il che biſognava dimoſtrare.

TEO-

TEOREMA IV.

PROPOSIZIONE IV.

Se ſiano due piramidi ugualmente alte, che abbiano le baſi triangolari, e l'una, e l'altra di loro ſi divida in due piramidi uguali, e ſimili a tutta, ed in due priſmi uguali, e delle piramidi fatte l'una, e l'altra ſi divida nel medeſimo modo, e ciò ſi faccia ſempre, ſaranno come la baſe di una piramide alla baſe dell'altra, così ancora tutti i priſmi, che ſono in una piramide a tutti i priſmi, che ſono nell'altra di numero uguali.

Siano due piramidi ugualmente alte, che abbiano le baſi triangolari A B C, D E F, e le cime ſiano i punti G, H, e l'una, e l'altra di eſſe dividaſi in due piramidi fra loro uguali, e ſimili a tutta, ed in due priſmi uguali, e delle piramidi fatte

te l'una, e l'altra si intenda divisa nel medesimo modo, e questo si faccia sempre. Dico come la base A B C alla base D E F, così essere tutti i prismi, che sono nella piramide A B C G a tutti i prismi, che sono nella piramide DEFH di numero uguali. Perciocchè essendo la B X

uguale alla X C, e la A L uguale alla L C, sarà la X L paralella alla A B, ed il triangolo A B C simile al triangolo L X C, e per la medesima ragione il triangolo D E F è simile al triangolo R Q F, e perchè la B C è doppia della C X, e la E F doppia della F Q, come la B C alla C X così sarà la E F alla F Q, e dalle B C, C X sono descritti rettilinei simili, e similmente posti A B C L X C, e dalle E F, F Q rettilinei D E F R Q E simili, e similmente posti, è dun-

2. del sesto.

dunque come il triangolo B A C al triangolo L X C, così il triangolo D E F al triangolo R Q F, e permutandogli come il triangolo A B C ai triangolo D E F, così il triangolo L X C al triangolo R Q F, ma come il triangolo L X C al triangolo R Q F, così il prisma, la cui base è il triangolo L X C, ed opposto ad esso O M N al prisma, la cui base è il triangolo R Q F, e ad esso opposto S T Y; come dunque il triangolo A B C al triangolo D E F, così il prisma, la cui base è il triangolo L X C, ed opposto ad esso O M N al prisma, la cui base è il triangolo R Q F, e ad esso opposto S T Y, e perchè due prismi, che sono nella piramide A B C G sono fra loro uguali, e fra loro uguali ancora i prismi, che sono nella piramide D E F H, sarà come il prisma, la cui base è il parallellogrammo K L X B, e ad esso opposta la linea retta M O, al prisma, la cui base è il triangolo L X C, ed opposto ad esso O M N, così il prisma, la cui base è il parallellogrammo E P R Q, e ad esso opposta la linea retta S T, al prisma, la cui base è il triangulo R Q F, ed opposto ad esso S T Y, laonde com-

ponen-

ponendogli come i prismi KBXL MO, LXCMNO al prisma LXCMNO. così i prismi PEQRST, RQFSTY al prisma RQFSTY, e permutandogli come i prismi KBXLMO, LXCOMNO a' prismi PEQRST, RQFSTY, così il

prisma LXCMNO al prisma RQFSTY, e come il prisma LXCMNO al prisma RQFSTY così si è dimostrata la base LXC alla base RQF, e la base ABC alla base DEF; adunque come il triangolo ABC al triangolo DEF, così i due prismi, che sono nella piramide ABCG a' due prismi, che sono nella piramide DEFH, similmente ancora se dividiamo le piramidi fatte nel medesimo modo, come OMNG STYH, sarà come la base OMN alla base STY, così i due pri-

prismi, che sono nella piramide O M N G, a' due prismi, che sono nella piramide S T Y H, ma come la base O M N alla base S T Y, così è la base A B C alla base D E F, come dunque la base A B C alla base D E F, così i due prismi, che sono nella piramide A B C G, a' due prismi, che sono nella piramide D E F H, e i due prismi, che sono nella piramide O M N G, a' due prismi, che sono nella piramide S T Y H, e i quattro a' quattro; le medesime cose ancora si dimostreranno ne' prismi fatti per la divisione delle piramidi A K L O, e D P R S, e di tutti similmente di numero uguali, che è quello, &c.

TEOREMA V.

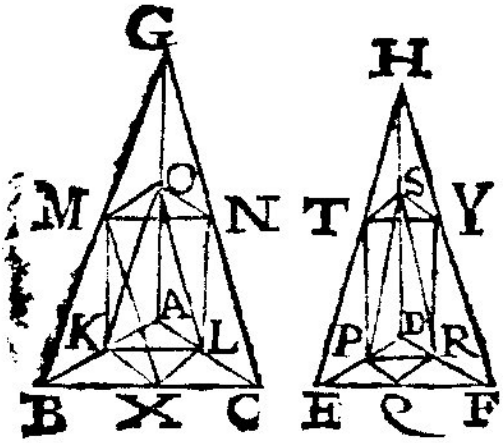
PROPOSIZIONE V.

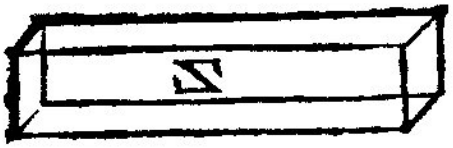
Le piramidi, che hanno la medesima altezza, e le basi triãgolari, sono fra loro come le basi.

Siano le piramidi della medesima altezza A B C G, D E F H, le cui basi siano i triangoli A B C, D E F, e le cime i punti G H. Dico come la base

A B C

ABC alla baſe DEF, così eſſere la piramide ABCG alla piramide DEFH. Perciocchè ſe non è così, ſarà come la baſe ABC alla baſe DEF, così la piramide ABCG o ad un ſolido minore della piramide DEFH, o ad un maggiore, ſia





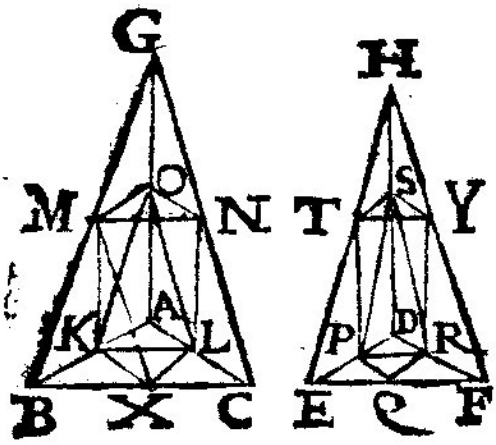
prima ad un ſolido minore, che ſia Z, e dividaſi la piramide DEFH in due piramidi uguali fra loro, e ſimili a tutta, e in due priſmi uguali, ſono dunque i due priſmi maggiori della metà di tutta la piramide, e le piramidi fatte dalla diviſione ſimilmente ſi dividano, e queſto facciaſi ſempre, ſinchè ſiano preſe alcune piramidi dalla piramide DEFH, che ſiano minori dell'eccesſo, nel quale

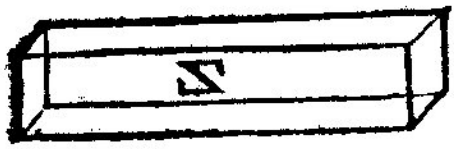
3. di queſ.

la pi-

la piramide D E F H avanza il ſolido Z piglinſi dunque, e ſiano per eſempio le piramidi D P R S, S T Y H, ſaranno i rimanenti priſmi nella piramide D E F H maggiori del ſolido Z, dividaſi ancor la piramide A B C G in altrettante parti, come la piramide D E F H, onde come la A B C alla baſe D E F, così i priſmi che ſono nella piramide A B C G a' priſmi, che ſono nella piramide D E F H, ma come la baſe A B C alla baſe D E F, così la piramide A B C G al ſolido Z, come dunque la piramide A B C G al ſolido Z, così i priſmi, che ſono nella piramide A B C G a' priſmi nella piramide D E F H, e permutandogli come la piramide A B C G a' priſmi, che ſono in eſſa, così il ſolido Z a' priſmi, che ſono nella piramide D E F H, ma la piramide A B C G è maggiore de' priſmi, che ſono in eſſa; adunque ancora il ſolido Z è maggiore de' priſmi, che ſono nella piramide D E F H, me è minore, che è impoſſibile, non è dunque come la baſe A B C alla baſe D E F, così la piramide A B C G a qualche ſolido minore della piramide D E F H, ſimilmente dimoſtreremo non eſſere

ancor a come la baſe D E F alla baſe A B C, così la piramide D E F H a qualche ſolido minore della piramide A B C G. Dico dunque non eſſer come la baſe A B C alla baſe D E F, così la piramide A B C G a qualche ſolido maggiore della piramide D E F H, perciocchè ſia ad





un maggiore ſe egli è poſſibile, come al ſolido Z, ſarà convertẽdole come la baſe D E F alla baſe A B C così il ſolido Z alla piramide A B C G; ma come il ſolido Z alla piramide A B C G, così la piramide D E F H al ſolido minore della piramide A B C G, come ſi è poco fa dimoſtrato, come dunque la baſe D E F alla baſe A B C, così la piramide D E F H a qual-

Lem. del 2. di qu.

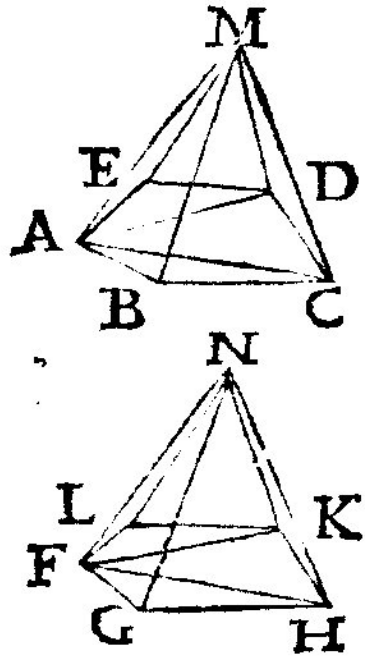
a qualche ſolido minore della piramide ABCG, il che è inconveniente, onde non è come la baſe ABC alla baſe DEF, così la piramide ABCG a qualche ſolido maggiore della piramide DEFH, e ſi è dimoſtrato non eſſer anche a un minore, come dunque la baſe ABC alla baſe DEF, così è la piramide ABCG alla piramide DEFH, e perciò le piramidi, che hanno la medeſima altezza, e le baſi triangolari ſono fra loro come la baſi, il che biſognava dimoſtrare,

TEOREMA VI.
PROPOSIZIONE VI.

Le piramidi, che hanno la medeſima altezza, e le baſi di molti angoli ſono fra loro come le baſi.

Siano le piramidi le quali hanno la medeſima altezza, e le baſi di molti angoli ABCDE, FGHKL, e le cime i punti M,N. Dico come la baſe ABCDE alla baſe FGHKL, così eſſere la piramide ABCDEM alla piramide FGHKLN.

dividasi la base A B C D E in triangoli A B C, A C D, A D E, e la base F G H K L dividasi in triangoli F G H, F H K, F K L, ed in ciascun triangolo intendansi le piramidi così alte, come le piramidi da principio, perchè dunque è come il triangolo A B C al triangolo A C D,



così la piramide A B C M alla piramide A C D M, sarà componendo come il trapezio A B C D al triangolo A C D, così la piramide A B C D M alla piramide A C D M ma come il triangolo A C D al triangolo A D E, così la piramide A C D M alla piramide A D E M, adunque per l' ugualità in proporzione ordinata

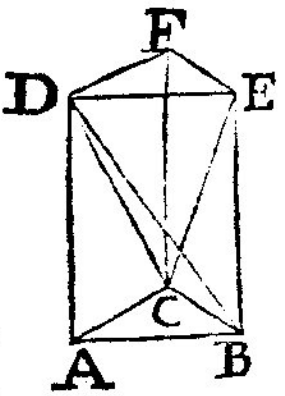
nata come la baſe ABCD alla baſe ADE così la piramide ABCD M alla piramide ADEM, e ſimilmente componendole come la baſe ABCDE alla baſe ADE, così la piramide ABCDEM alla piramide ADEM, e per la medeſima ragione come la baſe FGHKL alla baſe FKL, così la piramide FGHKLN alla piramide FKLN, e perchè ſono due piramidi ADEM FKLN, che hanno le baſi triangolari, ed hanno la medeſima altezza ſarà come la baſe ADE alla baſe FKL, così la piramide ADEM alla piramide FKLN, ed eſſendo come la baſe ABCDE alla baſe ADE, così la piramide ABCDEM alla piramide ADEM, e come la baſe ADE alla baſe FKL, così la piramide ADEM alla piramide FKLN, ſarà per l'ugualità in proporzione ordinata come la baſe ABCDE alla baſe FKL, così la piramide ABCDEM alla piramide FKLN, ma come la baſe FKL alla baſe FGHKL così era ancor la piramide FKLN alla piramide FGHKLN, onde ſimilmente per l'ugualità in proporzione ordinata come la baſe ABCDE alla baſe

FGHKL, così è la piramide ABCDEM alla piramide FGHKLN. Adunque le piramidi, che hanno la medesima altezza, e le basi di molti angoli sono fra loro come le basi, il che bisognava dimostrare.

PROBLEMA VII.

PROPOSIZIONE VII.

Ogni prisma, che ha la base triãgolare, si divide in tre piramidi uguali fra loro, che hanno le basi triangolari.

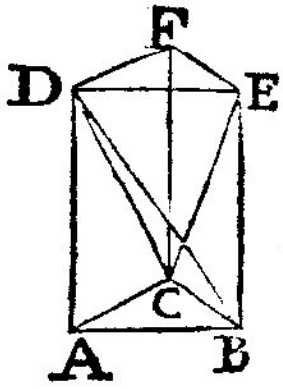


Sia il prisma ABCDEF, la cui base il triangolo ABC, e ad esso opposto il triangolo DEF. Dico il prisma ABCDEF dividersi in tre piramidi uguali fra loro, che hanno le basi triangolari. Giunganſi BD, EC, CD, perchè ABED è paralellogrammo, il cui diametro BD, sarà il trlangolo ABD uguale al triangolo EBD. Adunque la piramide, la cui base è il triangolo ABD, e la cima il punto C, è ugua-

34. *del primo.*

è uguale alla piramide, la cui baſe è il triangolo E B D, e la cima il punto C, ma la piramide, la cui baſe è il triangolo E B D, e la cima il punto C è la medeſima, che la piramide, la cui baſe è il triangolo E B C, e la cima il punto D, perciocchè ſono contenute da' medeſimi piani, adunque ancor la piramide, la cui baſe è il triangolo A B D, e la cima il punto C, è uguale alla piramide, la cui baſe il triangolo E B C, e la cima il punto D, ſimilmente perchè F C B E è paralellogrammo, il cui diametro C E, ſarà il triangolo E C F uguale al triangolo C B E, onde eziandio la piramide, la cui baſe il triangolo B E C, e la cima il punto D è uguale alla piramide, la cui baſe è il triangolo E C F, e la cima il punto D; ma la piramide, la cui baſe è il triangolo B C E, e la cima il punto D, ſi è dimoſtrata uguale alla piramide, la cui baſe il triangolo A B D, e la cima il punto C, e perciò ancor la piramide, la cui baſe è il triangolo C E F, e la cima il punto D è uguale alla piramide, la cui baſe il triangolo A B D, e la cima il punto C, adunque il priſma A B C D E F

5. *di queſ.*



è diviso in tre piramidi uguali fra loro, che hannole basi triãgolari, e perchè la piramide; la cui base è il triangolo ABD, e la cima il punto C è la medesima, che la piramide, la cui base è il triangolo CAB, e la cima il punto D, concioſſiacoſachè ſiano contenute da' medeſimi piani; ma la piramide, la cui baſe è il triangolo ABD, e la cima il punto C, ſi è dimoſtrata la terza parte del priſma, la cui baſe è il triangolo ABC, ed oopoſto ad eſſo il triangolo DEF: ſarà la piramide la cui baſe è il triangolo ABC, e la cima il punto D, la terza parte del priſma, ch'ha la medeſima baſe, cioè il triangolo ABC, ed oppoſto ad eſſo il triangolo DEF che è quello, &c.

COROLLARIO.

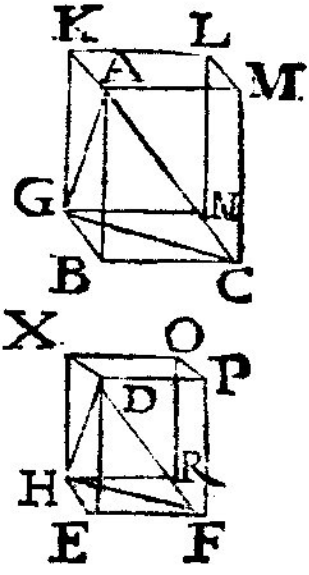
Da queſto è chiaro, che ogni piramide è la terza parte del priſma, ch'ha la medeſima baſe, e ugual' altezza.

TEO-

TEOREMA VIII.

PROPOSZIONE VIII.

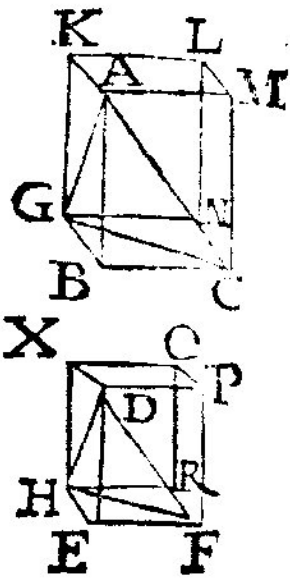
Le piramidi ſimili, ch'hanno le baſi triangolari, ſono in tripla proporzione di quella, che hanno i lati omologhi fra loro.



Siano le piramidi ſimili, e ſimilmente poſte, le cui baſi ſiano i triangoli A B C, D E E, e le cime i punti G, H. Dico la piramide A B C G alla piramide D E F H avere proporzione tripla di quella, che ha la BC alla E F. Compiſcanſi i ſolidi parallelipedi B G M L, E H P O, e perchè la piramide A B C G è ſimile alla piramide D E F H, ſarà l'angolo A B C uguale all'angolo D E F, e l'angolo G B C uguale all'angolo H E F, e l'angolo A B G, all'angolo D E H, ed è come la A B alla D E, così la B C alla E F, e la B G alla E H, perchè dunque come la

9. dif. dell' und.

AB alla DE, così la BC alla EF, e dintorno agli uguali angoli i lati sono proporzionali sarà il paralellogrammo BM simile al paralellogrammo EP, e per la medesima ragione il paralellogrammo BN è simile al paralellogrammo ER, ed il paralellogrammo BK al paralellogrammo EX, adunque i tre paralellogrammi BM, KB, BN sono simili a' tre EP, EX, ER, ma i tre MB, BK, BN a' tre opposti sono simili, ed uguali, e i tre EP, EX ER sono simili, ed uguali a' tre opposti, onde i solidi BGML, EHPO sono contenuti da piani simili, e di numero uguali, e però il solido BGML è simile al solido EHPO, ma i simili solidi paralellepipedi sono in tripla proporzione de' lati omologhi, adunque il solido BGML al solido EHPO ha tripla proporzione di quella, che ha il lato omologo BC al lato omologo EF, ma come il solido BGML al solido EHPO così la piramide ABCG alla piramide



11. *dif. del 6.*

mide DEFH, perciocchè la piramide è la sesta parte del solido, essendo il prisma, che è la metà del solido paralellepipedo, triplo della piramide, onde ancora la piramide ABCG alla piramide DEFH averà tripla proporzione di quella, che ha la BC alla EF, che è quello, &c.

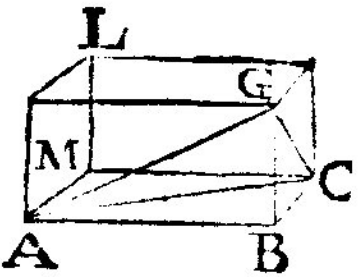
COROLLARIO.

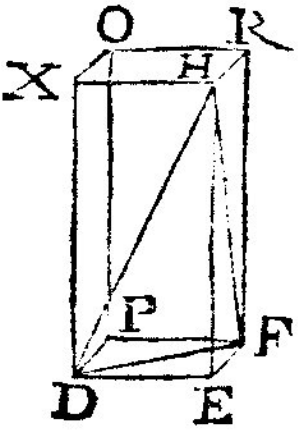
Da questo appare le simili piramidi, che hanno le basi di molti angoli, essere fra loro in proporzione tripla di quella, che hanno i lati omologhi.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE IX.

Delle piramidi uguali, e che hanno le basi triangolari, le basi rispondono contrariamẽte all'altezze, e quelle piramidi, che hanno le basi triangolari, delle quali le basi rispondono contrariamente all'altezze, sono uguali fra loro.





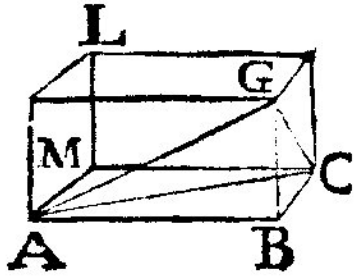
Siano le piramidi uguali, che abbiano le basi triangolari A B C, D E F, e le cime i punti G, H. Dico le basi delle piramidi A B C G, D E F H risponder contrariamente all' altezze, e come la base A B C alla base D E F, così essere l'altezza della piramide D E F H all' altezza della piramide A B G C. Compiscansi i solidi paralelepipedi B G M L, E H P O, e perchè la piramide A B C G è uguale alla piramide D E F H, ed il solido B G M L è sestuplo della piramide A B C G, ed il solido E H P O è sestuplo della piramide D E F H, sarà i solido B G M L uguale al solido E H P O; e le basi de' solidi paralelepipedi uguali rispondono all' altezze contrariamente, come dunque la base B M alla base E P, così è l'altezza del solido E H P O all'altezza del solido B G M L; ma come la base

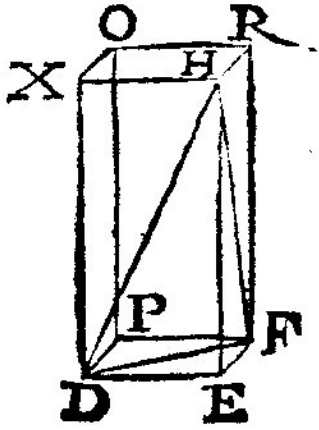
9. del quin.

34. dell' und.

baſe BM alla baſe EP, così il triangolo ABC al triangolo DEF, adunque come il triangolo ABC al triangolo DEF, così l'altezza del ſolido EHPO all'altezza del ſolido BGML, ma l'altezza del ſolido EHPO è la medeſima, che l'altezza della piramide DEFH, e l'altezza del ſolido BGML è la medeſima, che l'altezza della piramide ABCG, è dunque come la baſe ABC alla baſe DEF, così l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG, onde le baſi delle piramidi ABCG, DEFH riſpondono all'altezze contrariamente. Ma le baſi delle piramidi ABCG, DEFH riſpondano contrariamente all'altezze, e ſia come la baſe ABC alla baſe DEF, così l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG. Dico la piramide ABCG eſſere uguale alla piramide DEFH. Perciocchè fatte le medeſime coſe, come la baſe ABC alla baſe DEF, così l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG, e come la baſe ABC alla baſe DEF, così il paralellogrammo BM al paralellogrammo EP, onde come il

9. del quin. paralellogrammo BM al paralellogrammo EP così sarà l'altezza della piramide DEFH all' altezza della piramide ABCG, ma l'altezza della piramide DEFH è la medesima, che l'altezza del solido paralellepipedo EHPO, e l'altezza della piramide ABCG è la medesima, che l' altezza del solido paralellepipedo BGML, è dunque come la base BM alla base EP, così l'altezza del solido paralellepipedo EHPO all'altezza del solido paralellepipedo BGML, e que' solidi paralellepipedi, le cui basi rispondono contrariamente all'altezze, sono uguali fra loro, adunque il solido paralellepipedo BGML è uguale al solido paralellepipedo EHPO, e la piramide ABCG è la sesta parte del solido BGML, e del solido EHPO parimente la sesta parte è la piramide





DE

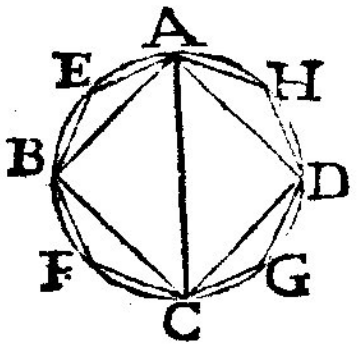
DEFH, onde la piramide ABCG è uguale alla piramide DEFH, e però delle piramidi uguali, e che hanno le basi triangolari le basi rispondono contrariamente all'altezze, e quelle piramidi, che hanno le basi triangolari, delle quali le basi rispondono contrariamente all' altezze sono uguali fra loro, il che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Dalle cose già dette si raccoglie, che di tutti i prismi uguali le basi rispondono contrariamente all'altezze, e che que' prismi, le cui basi rispondono contrariamente all' altezze sono uguali fra loro, perciocchè i prismi, che hanno le medesime basi, e la medesima altezza sono tripli delle piramidi.

TEOREMA X.
PROPOSIZIONE X.

Ogni cono è la terza parte del cilindro, che ha la medesima baſe, e uguale altezza.



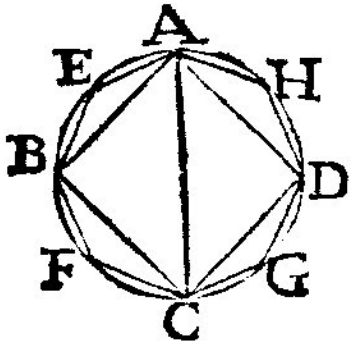
Abbia il cono la medeſima baſe, che il cilindro, cioè il cerchio A B C D, e l'altezza uguale. Dico il cono eſſere la terza parte del cilindro, cioè il cilindro eſſere triplo del cono Perchiocchè ſe il cilindro non è triplo del cono, o ſarà maggiore del triplo, o minore, ſia prima maggiore del triplo, e deſcrivaſi nel cerchio A B C D il quadrato A B C D, adunque il quadrato è maggiore della metà del cerchio, e dal quadrato A B C D drizzaſi un priſma così alto, come il cilindro, il qual priſma ſarà maggiore della metà del cilindro, perchè ſe dintorno al cerchio A B C D ſi deſcriva un quadrato, ſarà il qua-

dra-

drato descritto dentro, la metà di questo, che è descritto dintorno, e sono i solidi paralellepipedi dalle medesime basi drizzati ugualmente alti, cioè essi prismi, onde i prismi sono fra loro, come le basi, il prisma adunque drizzato dal quadrato A B C D è la metà del prisma drizzato dal quadrato, che si descrive dintorno al cerchio A B C D; ed è il cilindro minore del prisma drizzato dal quadrato, che si descrive dintorno al cerchio A B C D, il prisma dunque drizzato dal quadrato A B C D così alto, come il cilindro, è maggiore della metà del cilindro. Seghinsi le circonferenze A B, B C, C D, D A per mezzo ne' punti E, F, G, H, e giunganſi A E, E B, B F F C, C G, G D, D H, H A, adunque ciascun triangolo A E B, B F C, C G D, D H A è maggiore della metà della porzione del cerchio ABCD, nella quale consiste, come si è dimostrato di sopra, drizzinsi da ciascun triangolo A E B, B F C, C G D, D H A i prismi alti come il cilindro, onde eziandio ciascuno de' prismi drizzati è maggiore della metà della porzione del cilindro, che è dintorno ad esso, perchè se si tirino

corol. della 7. di quesſ.

rino per i punti E, F, G, H le paralelle alle AB, BC, CD, DA, e compiscansi in esse i paralellogra m mi AB, BC, CD, DA, da' quali si drizzino solidi paralellepipedi così alti come il cilindro, saranno i prismi, che sono ne' triangoli AEB, BFC, CGD, DHA la metà di ciascun de' solidi drizzati, e sono le porzioni del cilindro minori de' solidi paralellepipedi drizzati, adunque ancor i prismi, che sono ne' triangoli AEB, BFC, CGD, DHA sono maggiori della metà delle porzioni del cilindro, che sono in esse, laonde segando per mezzo l' altre circonferenze, e giungendo con linee rette, e da ciascun triangolo drizzando prismi così alti come il cilindro, e questo facendo sempre alla fine lasceremo alcune porzioni del cilindro minori dell' eccesso, nel quale il cilindro avanza il triplo del cono, lascinsi, e siano AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, adunque il rimanente prisma, la cui base è il poligono AEBFCGDH, e l' altezza



1. del decim.

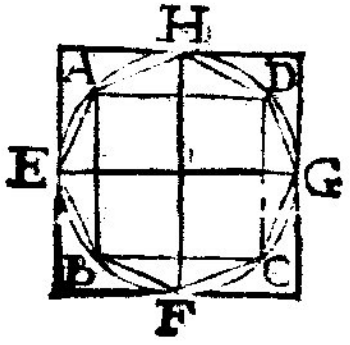
me-

medesima del cilindro è maggiore del triplo del cono, ma il prisma la cui base è il poligono AEBFC, GDH, e la medesima altezza del cilindro è triplo della piramide, la cui base è il poligonn AEBFCG DH, e la cima il medesimo punto, che del cono, la piramide dunque, la cui base il poligono AEBFCG DH, e la cima il medesimo punto, che del cono, è maggiore del cono, che ha per base il cerchio ABCD, ma è minore, essendo compresa da esso, che è impossibile, onde non sarà il cilindro maggiore, che il triplo del cono. Dico oltre a ciò ne anche essere minore, che il triplo del cono; perciocchè s'egli è possibile, sia il cilindro minore, che il triplo del cono, sarà convertendo il cono maggiore, che la terza parte del cilindro, descrivasi nel cerchio ABCD il quadrato ABCD, adunque il quadrato è maggiore, che la metà del cerchio, e dal quadrato ABCD drizzisi una piramide, che abbia la medesima cima, che il cono, la piramide dunque drizzata sarà maggiore, che la metà del cono, perciocchè come abbiamo dimostrato, se

Corol. della 7 di quest.

din-

dintorno al cerchio ſi deſcriva un quadrato, ſarà il quadrato ABCD la metà di quello, che è deſcritto dintorno al cerchio, e ſe da' quadrati ſi drizzino ſolidi paralellepipedi così alti, come il cono, quali ſi chiamano anche priſmi, ſarà quello, che ſi drizza dal quadrato ABCD la metà di quello, che è drizzato dal quadrato deſcritto dintorno al cerchio, perchè ſono fra loro come le baſi, onde eziandio le terze parti di eſſe, la piramide dunque, la cui baſe è il quadrato AB, CD, è la metà di quella piramide, che ſi drizza dal quadrato deſcritto dintorno al cerchio, ma la piramide drizzata dal quadrato deſcritto dintorno al cerchio è maggiore del cono, perchè lo comprende, adunque la piramide, la cui baſe è il quadrato ABCD, e la medeſima cima, che del cono, è maggiore della metà del cono. Seghinſi le circonferenze AB, BC, CD, DA per mezzo ne' punti E, F, G, H, e giungansi AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA.

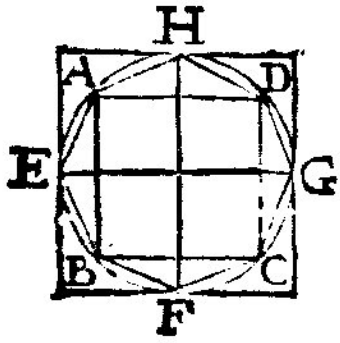


9. del quin.

A. Adunque ciaſcuno de' triangoli AEB, BFC, CGD, DHA è maggiore, che la metà della porzione del cerchio ABCD, nella quale conſiſte; drizzinſi da ciaſcun triangolo AEB, BFC, CGD, DHA le piramidi, che abbiano le medeſime cime, che il cono, ciaſcuna dunque delle piramidi drizzate al medeſimo modo è maggiore, che la metà della porzione del cono, che è dintorno ad eſſa, laonde ſegando per mezzo l'altre circonferenze, e giungendo le linee rette, e da ciaſcun triangolo drizzando la piramide, che abbia la medeſima cima, che il cono, e queſto facendo ſempre, laſceremo alla fine alcune porzioni del cono, che ſaranno maggiori dell' eccesſo, nel quale il cono avanza la terza parte del cilindro, laſcinſi, e ſiano quelle, che ſono nelle AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, adunque la rimanente piramide, la cui baſe è il poligono AEBFCGDH, e la cima la medeſima, che del cono è maggiore della terza parte del cilindro, ma la piramide, la cui baſe è il poligono AEBFCGDH, e la cima medeſima, che del cono, è la terza parte del priſma, la cui baſe

è il

è il poligono AEBFCGDH, e la medeſima altezza, che del cilindro, onde il priſma, la cui baſe è il poligono AEBFCGH, e la medeſima altezza, che del cilindro, è maggiore del cilindro, la cui baſe è il cerchio ABCD, ma è minore, perciocchè da eſſo è compreſo, che non è poſſibile; non è dunque il cilindro minore, che il triplo del cono, e ſi è dimoſtrato non eſſer maggiore, che il triplo, onde è neceſſario, che il cilindro ſia triplo del cono, e però il cono è la terza parte del cilindro, ogni cono dunque è la terza parte del cilindro, che ha la medeſima baſe, e uguale altezza, il che biſognava dimoſtrare.



COROLLARIO.

Dalle quali coſe appare ogni cono, o ſia retto, o ſcaleno, ei-

eſſere la terza parte del cilindro o retto, o ſcaleno, che ha la medeſima baſe, e uguale altezza.

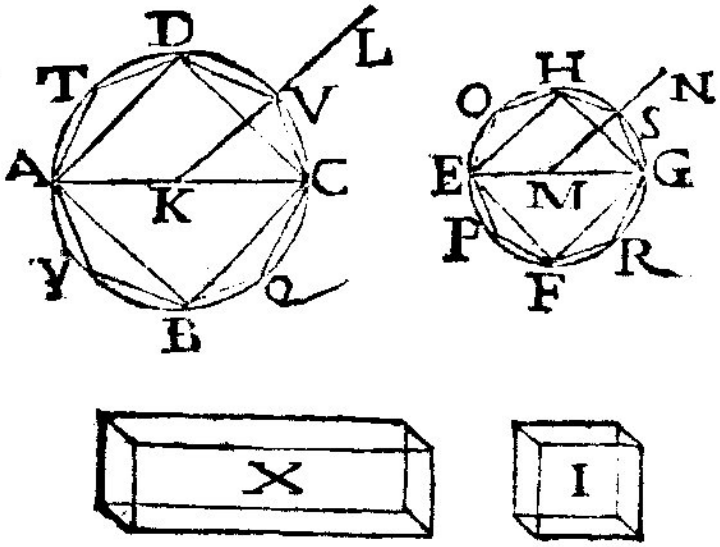
TEOREMA XI.

PROPOSIZIONE XI.

I coni, e cilindri, che hanno la medeſima altezza ſono fra loro come le baſi.

Siano i coni, e cilindri della medeſima altezza, che abbiano per baſi i cerchi A B C D, E F G H, e gli aſſi K L, M N, ed i diametri delle baſi A C, E G. Dico come il cerchio A B C D al cerchio E F G H, così eſſere il cono A L al cono E N. Se non è così, ſarà come il cerchio A B C D al cerchio E F G H, così il cono A L, a qualche ſolido o maggiore, o minore del cono E N, ſia prima ad un minore, che ſia X, e di quanto è mi-

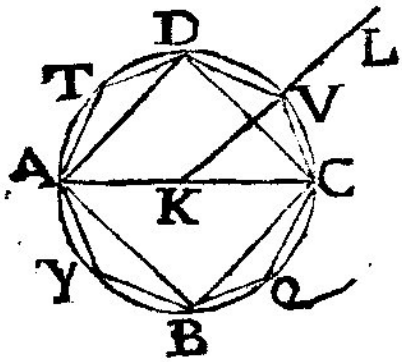
è minore il ſolido X del cono E N tanto ſia il ſolido I adunque il cono E N è uguale a' ſolidi X I. deſcri-

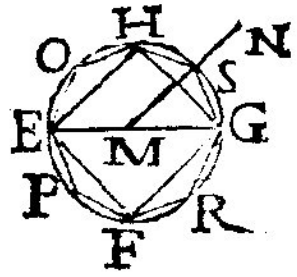


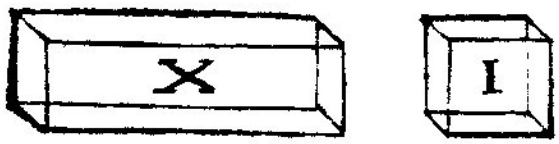
vaſi nel cerchio E F G H il quadrato E F G H, laonde il quadrato è maggiore, che la metà del cerchio, drizziſi dal quadrato E F G H una piramide così alta, come il cono, la piramide dunque drizzata è maggiore, che la metà del cono; perchè ſe deſcriviamo un quadrato dintorno al cerchio, e da eſſo drizziamo una piramide alta come il cono, farà la piramide deſcritta di dentro la metà della piramide deſcritta dintor-

torno ; perciocchè ſono fra loro come le baſi, ma il cono è minore della piramide, che è deſcritto dintorno, adunque la piramide, la cui baſe è il quadrato E F G H, e la cima la medeſima, che del cono è maggiore della metà del cono. Seghinſi le circonferenze E F, F G, G H, H E per mezzo ne' punti O P R S, e giunganſi O E, E P, P F, F R, R G, G S, S H ciaſcun triangolo dunque H O E, E P F, F R G, G S H è maggiore, che la metà della porzione del cerchio, nella quale conſiſte, drizziſi da ciaſcun triangolo H O E, E P F, F R G, G S H una piramide alta come il cono, adunque ciaſcuna delle piramidi drizzate, è maggiore, che la metà della porzione del cono, che è in eſſa, laonde ſegando l'altre circonferenze per mezzo, e giungendo con linee rette, e drizzando da ciaſcun triangolo piramidi alte come il cono, e queſto facendo ſempre laſceremo alla fine alcune porzioni del cono, che ſaranno minori del ſolido I. laſciniſi, e ſiano quelle, che ſono in eſſe H O, O E, E P, P F, F R, R G, G S, S H, adunque la rimanente piramide, la cui baſe è il poligono H O E P F R G S.

GS, e la medesima altezza, che del cono è maggiore del solido X, descrivasi nel cerchio ABCD il poligono D T A Y B Q C V simile, e similmente posto al poligono H O E P F K G S T, e da esso drizzisi una piramide alta come il cono A L,







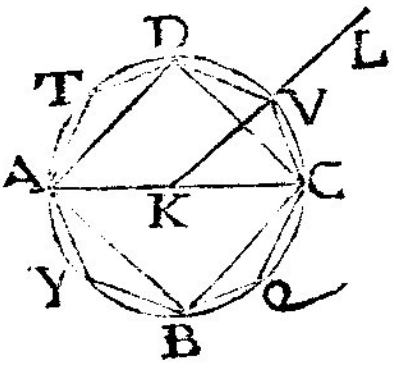
perchè dunque è come il quadrato della A C al quadrato della E G, così il poligono D T A Y B Q C V al poligono H O E P F R G S, e come il quadrato della A C al quadrato della E G, così il cerchio A B C D al cerchio E F G H; sarà come il cerchio A B C D al cerchio E F G H, così il poligono D T A Y B Q C V al poligono H O E P F R G S. ma come il cerchio A B C D al cerchio E F G H, così il cono A L al soli-

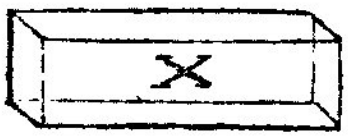
1. di quest.

2. di quest.

ſolido X, e come il poligono D T A Y B Q C V al poligono H O E P F R G S, così la piramide la cui baſe è il poligono D T A Y B Q C V, e la cima il punto L, alla piramide, la cui baſe è il poligono H O E P F R G S, e la cima il punto N, come dunque il cono A L al ſolido X, così la piramide, la cui baſe è il poligono D T A Y B Q C V, e la cima il punto L alla piramide la cui baſe è il poligono H O E P F R G S, e la cima il punto N, onde permutando come il cono A L alla piramide, che è in eſſo, così il ſolido X alla piramide, che è nel cono E N, ma il cono A L è maggiore della piramide, che è in eſſo, adunque il ſolido X è maggiore della piramide, che è nel cono E N, ma è minore, che è impoſſibile, non è dunque come il cerchio A B C D al cerchio E F G H, così il cono A L ad un ſolido minore del cono E N, ſimilmente ſi dimoſtrerà nè anche come il cerchio E F G H al cerchio A B C D, così eſſere il cono E N ha qualche ſolido minore del cono A L. Dico oltre a ciò non eſſere come il cerchio A B C D al cerchio F F G H, così il cono A L à qualche cono

maggiore del cono E N, perciocchè s'egli è possibile sia ad un solido maggiore, che sia X, convertendogli dunque come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così sarà il solido X al cono A L, ma come il solido X al cono A L, così il cono E M





a qualche solido minore del cono A L, come dunque il cerchio E F G H al cerchio A B C D, così il cono E N a qualche solido minore del cono A L, che si è dimostrato impossibile, onde non è come il cerchio A B C D al cerchio E F G H,

co-

così il cono A L a qualche ſolido maggiore del cono E N, e ſi è dimoſtrato non eſſere anche a un minore, adunque come il cerchio A B C D al cerchio E F G H, così è il cono A L al cono E N, ma come il cono al cono, così è il cilindro al cilindro, perciocchè l'uno è triplo dell'altro, è come dunque il cerchio ABCD al cerchio E F G H così i cilindri, che ſono in eſſi ugualmente alti a' coni, adunque i coni, e cilindri, che hanno la medeſima altezza ſono fra loro come le baſi, il che biſognava dimoſtrare. *Per l'ant.*

TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XII.

I coni, e cilindri ſimili ſono fra loro in tripla proporzione di quella, che hanno i diametri delle baſi.

Sia-

Siano i coni, e cilindri ſimili, le cui baſi ſiano i cerchi A B C D, E F G H, ed i diametri delle baſi B D, F H, e gli aſſi de' coni, o cilindri K L, M N. Dico il cono la cui baſe è il cerchio A B C D, e la cima il punto L al cono, la cui baſe è il cerchio E F G H, e la cima il punto N, avere proporzione tripla di quella, che ha E D ad F H. Perciocchè ſe il cono A B C D L al cono E F G H N non ha proporzione tripla di quella, che ha B D ad F H, averà il cono A B C D L a qualche ſolido minore ovvero a un maggiore del cono E F G H N proporzione tripla, l' abbia prima ad un minore, che ſia X, e deſcrivaſi nel cerchio E F G H il quadrato E F G H, il quadrato dunque è maggiore della metà del cerchio; drizziſi dal quadrato E F G H una piramide così alta come il cono; adunque la piramide drizzata è maggiore, che la metà del cono. Seghinſi le circonferenze E F, F G, G H, H E per mezzo ne' punti O, P, R S, e giungan-ſi E O, O F, F P, P G, G R, R H, H S, S E. Laonde ciaſcun triangolo E O F, F P G, G R H, H S E è maggior, che la metà della porzione del cerchio

E F

EFGH, nella quale consiste, dirizzisi da ciascun triangolo EOF, FPG, GRH, HSE una piramide, che abbia la medesima cima, che il cono, adunque ciascuna delle piramidi drizzate è maggiore, che la metà della porzione del cono, che è dintorno ad essa, e perciò segando l'altre circonferenze per mezzo, e giungendo le linee rette, e da ciascuno de' triangoli drizzando le piramidi, che abbiano la medesima cima, che il cono, e questo sempre facendo, si lasceranno alla fine alcune porzioni del cono, che saranno minori dell'eccesso, nel quale il cono EFGHN avanza il solido X, lascinsi, e siano quelle, che sono nelle EO, OF. FP, PG, GR, RH HS, SE, onde la piramide rimanente, la cui base è il poligono EOFP GRHS, e la cima il punto N è maggiore del solido X, descrivasi ancora nel cerchio ABCD il poligono ATBYCVDQ simile, e similmente posto al poligono EOFP GRHS, dal quale drizzisi una piramide, che abbia la medesima cima, che il cono: de' triangoli, che contengono la piramide, la cui base è

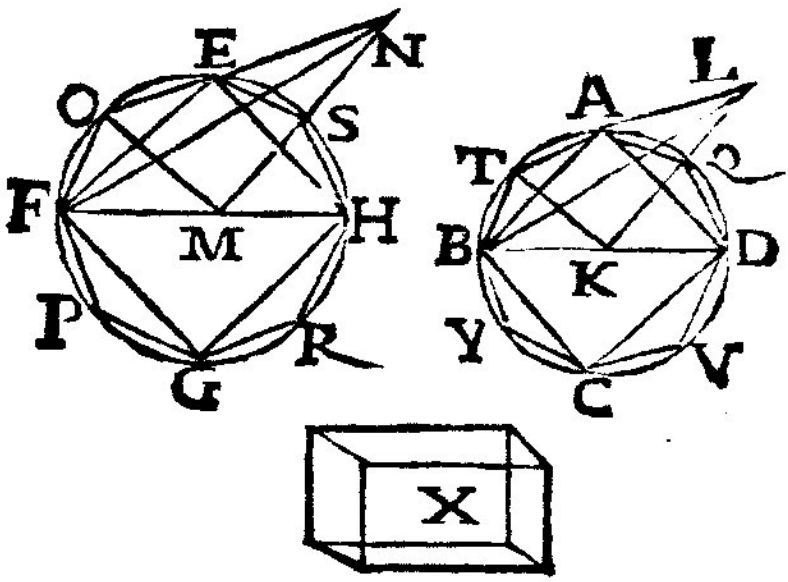
ſe è il poligono ATBYCVDQ, e la cima il punto L, uno ſia LBT, e de' triangoli, che contengono la pramide, la cui baſe è il poligono EOFPGRHS, e la cima il punto N, ſia uno NFO, e giunganſi KT, OM, perchè dunque il cono ABCDL è ſimile al cono EFGHN, ſarà come BD ad FH, così l'aſſe KL all'aſſe MN, ma come BD ad FH, così BK ad FM; adunque come BK ad FM, così KL ad MN, e permutando come BK a KL, così FM ad MN, e perchè l'una, e l'altra è perpendicolare, e dintorno agli uguali angoli BKL F, MN ſono i lati proporzionali, è dunque ſimile il triangolo BKL al triangolo FMN: e ſimilmente, perchè come BK a KT, così è FM ad MO, e dintorno agli uguali angoli BKT, FMO ſono i lati proporzionali, concioſſiacoſachè qual parte è l'angolo BKT di quattro retti, che ſono al centro K, tal ſia l'angolo FMO di quattro retti, che ſono al centro M; ſarà il triangolo BKT ſimile al triangolo FMO: e perchè ſi è dimoſtrato come BK a KL, così FM ad MN, e BK è uguale a KT, ed FM ad MO,

MO; ſarà come TK a KL, così OM ad MN, e dintorno agli uguali angoli TKL, OMN eſſendo retti, ſono i lati proporzionali; il triangolo dunque LKT è ſimile al triangolo NMO, e per la ſimilitudine de' triangoli BKL, FMN eſſendo come LB a BK, così NF ad FM, e per la ſimilitudine de' triangoli BKT, FMO, come KB a BT, così MF ad FO, ſarà per l'ugualità in proporzione ordinata come LB a BT, così NF ad FO, oltre a ciò per la ſimilitudine de' triangoli LTK, NOM eſſendo come LT a TK così NO ad OM, e per la ſimilitudine de' triangoli KBT, OMF, come KT a TB, così MO ad OF, ſarà per l'ugualità in proporzione ordinata come LT a TB, così NO ad OF; e ſi è dimoſtrato come TB a BL, così OF ad FN; onde per l'ugualità in proporzione ordinata come TL ad LB, così ON ad NF, de' triangoli dunque LTB, NOF ſono i lati proporzionali, e però i triangoli LTB NOF ſono equiangoli, e ſimili fra loro; onde ancora la piramide, la cui baſe è il triangolo BKT, e la cima il punto L, è ſimile alla pira-

mide la cui baſe è il triangolo F M O, e la cima il punto N, perciocchè ſono contenute da ſimili piani, e uguali di numero, ma le piramidi ſimili, e che hanno le baſi triangolari ſono in tripla proporzione de' lati omologhi, adunque la piramide B K T L alla piramide F M O N ha proporzione tripla di quella, che ha B K ad F M, ſimilmente da' punti A, Q, D, V, C, Y a K, e da' punti E, S, H, R, G, P ad M tirando linee rette, e da' triangoli drizzando le piramidi, che abbiano le cime medeſime, che il cono, dimoſtreremo ciaſcuna piramide del medeſimo ordine a ciaſcuna dell' altro ordine avere proporzione tripla di quella, che ha il lato B K omologo al lato omologo F M, cioè che B D ad F H, ma ſiccome uno degli antecedenti ad uno de' conſeguenti, così tutti gli antecedenti a tutti i conſeguenti, è dunque come la piramide B K T L alla piramide F M O N così tutta la piramide, la cui baſe è il poligono A T B Y C V D Q, e la cima il punto L a tutta la piramide, la cui baſe è il poligono E O F P G R H S, e la cima il punto N, onde la piramide la cui baſe è il poligono A T B Y C

V D

VDQ, e la cima il punto L, alla piramide, la cui baſe è il poligono EOFPGRHS, e la cima il punto N ha proporzione tripla di quella, che ha B D ad F H, e ſi pone il cono, la cui baſe è il cerchio A B C D, e la cima il punto L al ſolido X avere proporzione tripla di quella, che ha B D ad F H, come dunque il cono la cui baſe è il cerchio A B C D, e la cima il punto L, al ſolido X, così è la piramide la cui baſe è il poligono A T B Y C V D Q,



e la cima il punto L alla piramide, la cui baſe è il poligono EOFPGRHS, e la cima il punto N, e permutando come il cono, la cui baſe è il cerchio ABCD, e la cima il

punto N alla piramide, che è in esso, la cui base è il poligono A T B Y C U D Q, e la cima il punto L, così il solido X alla piramide, la cui base è il poligono E O F P G R H S, e la cima il punto N, ma detto cono è maggiore della piramide, che è in esso, perciocchè la comprende, adunque eziandio il solido X è maggiore della piramide, la cui base è il poligono E O F P G R H S, e la cima il punto N, ma è minore, che è impossibile, il cono dunque la cui base è il cerchio A B C D, e la cima il punto L a qualche solido minore del cono, la cui base è il cerchio E F G H, e la cima il punto N, non ha proporzione tripla di quella, che ha B D ad F H, similmente dimostreremo nè anche il cono E F G H N a qualche solido minore del cono A B C D L avere tripla proporzione di quella, che ha F H a B D, laonde dico nè anche il cono A B C D L ad un solido maggiore del cono E F G H N avere proporzione tripla di quella, che ha B D ad F H. Perciocchè s' egli è possibile l'abbia a qualche solido maggiore, che sia Z, convertendo dunque il solido Z al cono A B C D L

ha

ha proporzione tripla di quella che ha FH a BD, ma come il solido Z al cono ABCDL, così il cono EFGHN a qualche solido minore del cono ABCDL, adunque ancor il cono EFGHN a un solido minore del cono ABCDL averà proporzione tripla di quella, che ha FH a BD, che si è dimostrato impossibile, il cono dunque ABCDL ad un solido maggiore del cono EFGHN non ha tripla proporzione di quella, che ha BD ad FH, e si è dimostrato nè anche a un minore, onde il cono ABCDL al cono EFGHN ha proporzione tripla di quella, che ha BD ad FH, ma come il cono al cono, così il cilindro al cilindro, perciocchè il cilindro, che consiste nella medesima base, che il cono, ed è ugualmente alto, è triplo del cono, essendosi dimostrato ogni cono essere la terza parte del cilindro, che abbia la medesima base, e l'altezza uguale, adunque ancor il cilindro al cilindro averà proporzione tripla di quella, che ha BD ad FH, i coni dunque, e cilindri simili sono fra loro in proporzione tripla di quella, che hanno

9. del quin.

10. di quest.

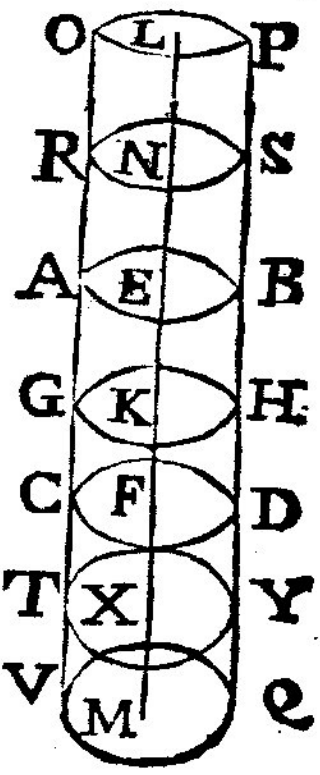
i diametri delle baſi, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XIII.

Se il cilindro ſia ſegato da un piano paralello a' piani oppoſti, ſarà come il cilindro al cilindro, così l'aſſe all' aſſe.

Il cilindro A D ſia ſegato dal piano G H paralello a' piani oppoſti A B, C D, il quale ſeghi l'aſſe E F nel punto K. Dico come il cilindro B G al cilindro G D, così eſſere l'aſſe E K all'aſſe K F. Prolunghiſi l'aſſe E F dall'una, e l'altra parte ne' punti L, M, e all' aſſe E K ponganſi uguali quante ſi vogliono E N, N L, ed all' aſſe F K uguali quante ſi vogliono F X, X M, e per gli punti L, N, X, M tirinſi piani paralelli agli



AB, CD, e ne' piani per L,N,X,M dintorno a' centri L,N, X, M, intendanſi i cerchi O P, RS, TY, V Q uguali agli AB, CD, ed intendanſi i cilindri P R, R B, D T, T Q. Perchè dunque gli aſſi L N, N E, E K ſono uguali fra loro, ſaranno i cilindri P R, R B, B G fra loro, come le baſi, e le baſi ſono uguali, adunque i cilindri P R, R B, B G ſono uguali: ed eſſendo gli aſſi L N, N E, E K, uguali fra loro, e altresì i cilindri P R, R B, B G fra loro uguali, e la moltitudine degli L N, N E, E K uguale alla moltitudine de' P R, R B, B G, quante volte è multiplice l'aſſe K L dell'aſſe E K, tante volte ſarà multiplice eziandio il cilindro P G del cilindro G B, e per la medeſima ragione quante volte è multiplice l'aſſe M K dell'aſſe K F, tante volte è multiplice ancor il cilindro Q G del cilindro G D, e ſe l'aſſe L K ſia uguale all'aſſe K M, ſarà il cilindro P G uguale al

le al cilindro G Q, e ſe l' aſſe L K ſia maggiore dell' aſſe K M, ancor il cilindro P G ſarà maggiore del cilindro G Q, e ſe minore, minore, eſſendo dunque quattro grandezze, cioè gli aſſi E K, K F, ed i cilindri B G, G D ſi ſono preſi ugualmente multiplici dell' aſſe E K, e del cilindro B G l'aſſe K L ed il cilindro P G, e dell' aſſe K F, e del cilindro G D ugualmente multiplici l'aſſe K M, ed il cilindro G Q e ſi è dimoſtrato ſe l'aſſe L K avanza l'aſſe K M, il cilindro P G ancora avanzare il cilindro G Q, e ſe è uguale, eſſere uguale, e ſe minore, minore, è dunque l'aſſe E K all' aſſe K F, come è il cilindro B G al cilindro G D, laonde ſe il cilindro ſia ſegato da un piano paralello a' piani oppoſti, ſarà come il cilindro al cilindro, così l'aſſe all'aſſe, il che biſognava dimoſtrare.

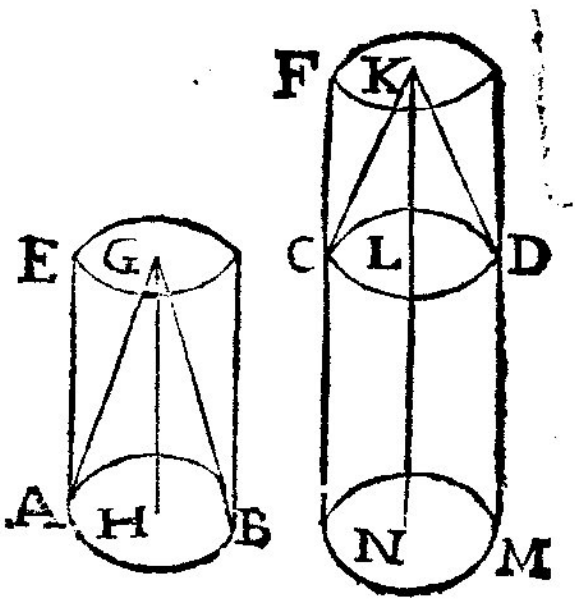
TEOREMA XIV.

PROPOSIZIONE XIV.

I coni, e i cilindri, che hanno le baſi uguali, ſono fra loro come l'altezze.

Sia-

Siano nelle uguali basi A B, C D i cilindri E B, F D. Dico come il cilindro E B al cilindro F D così essere l'asse G H all'asse K L. Prolunghisi l'asse K L al punto N, e pongasi la L N uguale all'asse G H, e dintorno all'asse L N intendasi il ci-



lindro C M, perchè dunque i cilindri E B, C M hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi, e le basi sono uguali, adunque ancora i cilindri E B, C M saranno uguali fra loro, e perchè il cilindro F M è segato dal piano C D paralello agli opposti piani, sarà come il cilindro C M al cilindro F D, così l'asse L N all'asse K L; ed il cilindro C M è uguale al cilindro E B, e l'as-

e l'asse L N all'asse G H, è dunque come il cilindro E B al cilindro F D, così l'asse G H all'asse K L, e come il cilindro E B al cilindro F D, così il cono A B G al cono C D K, perciocchè i cilindri sono tripli de' coni, adunque eziandio come l'asse G H all'asse K L, così il cono A B G al cono C D K, ed il cilindro E B al cilindro F D, onde i coni, e cilindri, che hanno le basi uguali, sono fra loro come l'altezze, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XV.

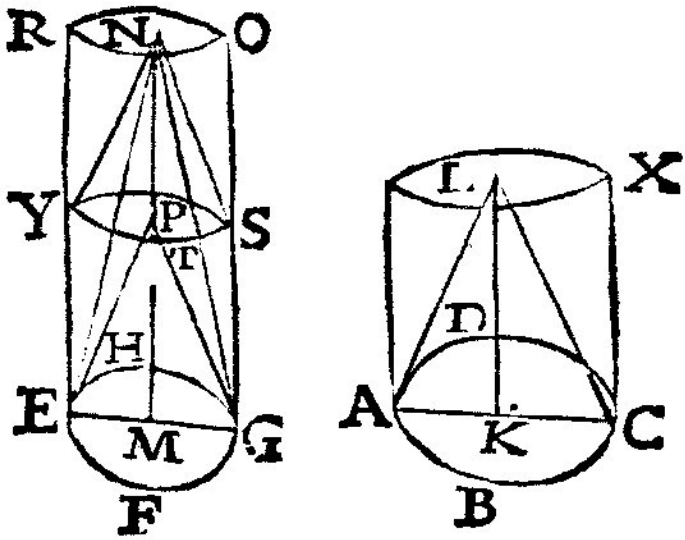
PROPOSIZIONE XV.

De' coni, e cilindri uguali le basi rispondono contrariamente all' altezze, e que' coni, e cilindri, de' quali le basi rispondono contrariamente all' altezze, sono fra loro uguali.

Siano i coni, e cilindri uguali, che hanno per basi i cerchi A B C D, E F G H, i cui diametri A C, E G, e gli assi K L, M N, che sono l'altez-

ze

ze de' coni, o cilindri, e compiſcanſi i cilindri AX, EO. Dico le baſi de' cilindri AX, EO riſpondere all' altezze contrariamente, cioè come la baſe ABCD alla baſe EFGH, così eſſere l' altezza MN all' altezza KL. Perciocchè l' altezza KL ovvero è uguale all' altezza MN, o



diſuguale, ſia prima uguale, ed è il cilindro AX uguale al cilindro EO, ma que' coni, e cilindri, che hanno la medeſima altezza fra loro ſono come le baſi; è dunque la baſe ABCD uguale alla baſe EFGH, e però ſi riſpondono contrariamente, e come la baſe ABCD alla baſe EFGH, così è l' altezza MN all' altezza KL. Ma l' altezza KL non ſia uguale all' altezza MN, ma ſia mag- 11. *di queſ.*

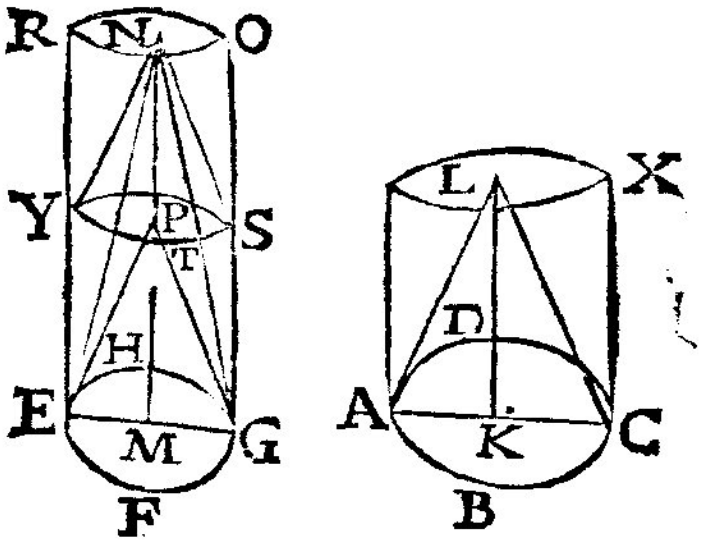
maggiore la M N ; e traggasi dalla M N la P M uguale all' altezza L K, e per P sia segato il cilindro E O dal piano T Y S paralello agli opposti piani de' cerchi E F G H , R O, ed intendasi il cilindro E S , la cui base è il cerchio E F G H , e l' altezza P M , perchè dunque il cilindro A X è uguale al cilindro E O , ed è un altro cilindro E S , sarà come il cilindro A X al cilindro E S, così il cilindro E O al cilindro E S, ma come il cilindro A X al cilindro E S , così è la base A B C D alla base E F G H , perciocchè i cilindri A X , E S hanno la medesima altezza , e come il cilindro E O al cilindro E S, così l' altezza M N all' altezza M P, conciossiacosachè il cilindro E O sia segato dal piano T Y S paralello a' piani opposti, è dunque come la base A B C D alla base E F G H , così l'altezza M N all' altezza M P , e l'altezza M P è uguale all' altezza K L, onde come la base A B C D alla base E F G H, così l'altezza M N all'altezza K L , le basi dunque de' cilindri uguali A X, E O rispondono contrariamente all' altezze. Ma le basi de' cilindri A X , E O rispondano contrariamente all'altezze , e sia

11 di quest.

13. di quest.

come

come la baſe A B C D alla baſe E F G H, così l'altezza M N all'altezza K L. Dico il cilindro A X eſſere uguale al cilindro E O. Avendo fatto le medeſime coſe, perchè come la baſe A B C D alla baſe E F G H, così è l'altezza M N all' altezza K L, e l'altezza K L è uguale all'altezza



M P, ſarà come la baſe A B C D alla baſe E F G H, così l'altezza M N all'altezza M P, ma come la baſe A B C D alla baſe E F G H, così il cilindro A X al cilindro E S, perciocchè hanno l'altezza medeſima, e come l'altezza M N all' altezza M P, così il cilindro E O al cilindro E S, è dunque come il cilindro A X al cilindro E S, così il cilindro E O al cilindro E S, onde il cilindro

A X

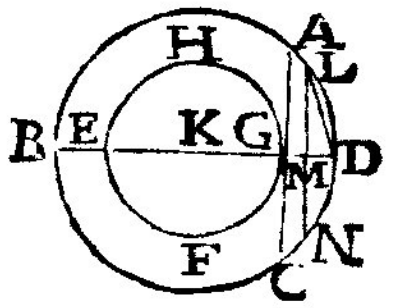
AX è uguale al cilindro EO, ſimilmente ancora ne' coni, il che biſognava dimoſtrare.

PROBLEMA I.
PROPOSIZIONE XVI.

Eſſendo due cerchi dintorno al medeſimo centro, deſcrivere nel maggiore un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocchi il minor cerchio.

Siano due cerchi dati ABCD, EFGH intorno al medeſimo centro K, biſogna nel maggior cerchio ABCD deſcrivere un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocchi il minor cerchio EFGH. Tiriſi per lo centro K la linea retta BD, e dal punto G tiriſi la AG perpendicolare alla BD, e prolunghiſi nel punto C. Adunque la AC tocca il cerchio EFGH, laonde ſegando la circonferen-

ferenza B A D per mezzo, e la ſua metà ancora per mezzo, e facendo queſto ſempre, alla fine laſceremo una circonferenza minore della A D. Laſciſi, e ſia L D, e dal punto L tiriſi la L M perpendicolare alla B D, e prolunghiſi nel punto N, e giunganſi L D, D N. Adunque la L D è uguale alla D N, e perchè la L N è paralella alla A C, e la A C tocca il cerchio E F G H, la L N non toccherà il cerchio E F G H, e molto meno le L D. D N toccheranno il cerchio E F G H, e ſe nel cerchio A B C D adatteremo linee rette uguali alla L D, deſcriveraſſi in eſſo il poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocca il minor cerchio, il che biſognava fare.



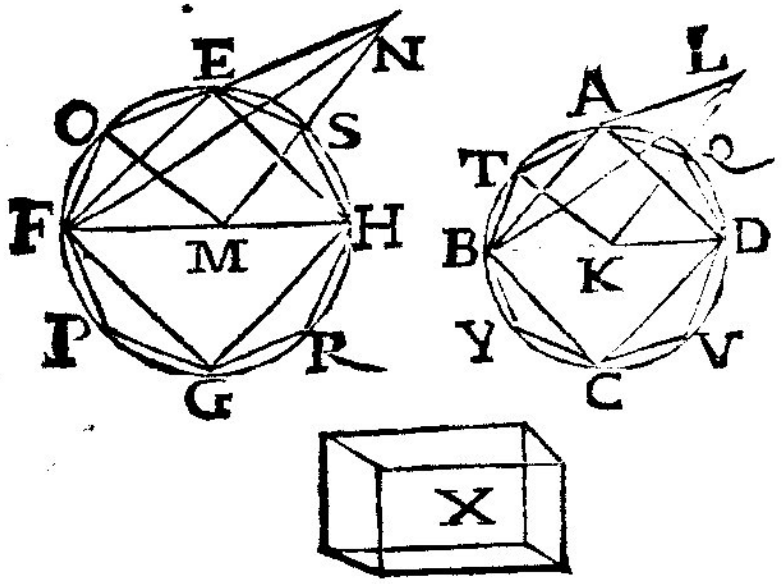
TEOREMA II.

PROPOSIZIONE XVII.

Eſſendo due sfere dintorno al medeſimo centro, deſcrivere nella maggiore un ſolido polie-

poliedro, cioè di molti lati, che non tocchi la ſuperficie della minore sfera.

Intendanſi due sfere dintorno al medeſimo centro A. Biſogna nella maggiore sfera deſcrivere un ſolido di molti lati, che non tocchi la ſuperficie della minore sfera. Seghinſi



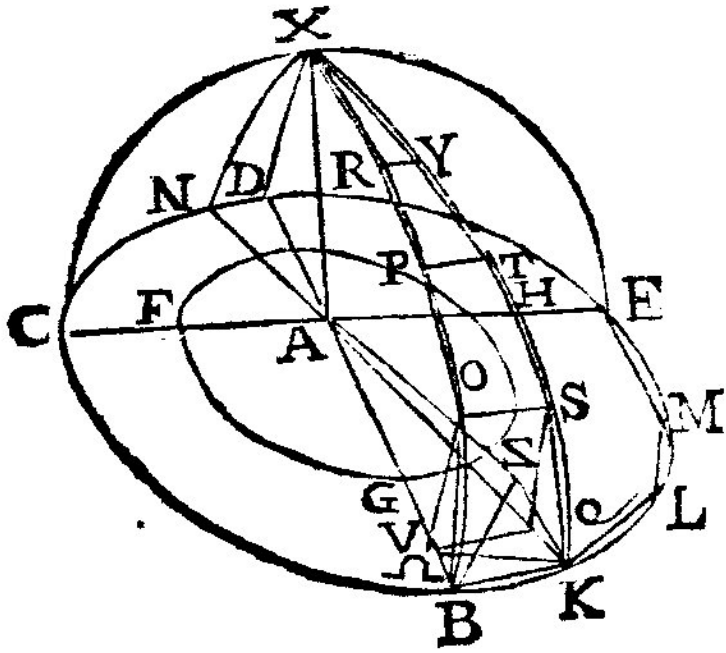
le sfere da qualche piano tirato per lo centro, i ſegamenti ſaranno cerchi, perciocchè ſtando fermo il diametro del cerchio, e girato il mezzo cerchio dintorno, ſi è fatta la sfera, adunque intendendo il mezzo cerchio in qualſivoglia poſizione, il piano, che paſſa per eſſo farà un cer-

cerchio nella ſuperficie della sfera, ed è manifeſto eſſere cerchio maſſimo, conciofſiacoſachè il diametro della sfera, quale è diametro del cerchio, e del mezzo cerchio, ſia maggiore di tutte le linee rette, che ſi tirano nel cerchio, e nella sfera. *16 del terzo.*

Sia dunque nella maggiore sfera il cerchio B C D E, nella minore il cerchio F G P, e tirinſi i due diametri d' eſſi B D, C E ad angoli retti fra loro, ed eſſendo i due cerchi B C D E, F G P dintorno al medeſimo centro, nel maggiore B C D E deſcrivaſi un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocchi il minor cerchio F G P, i lati del quale nel quadrante del cerchio B E ſiano B K, K L, L M, M E, e giunta K A prolunghiſi in N, e dal punto A conſtituiſcaſi A X perpendicolare al piano del cerchio B C D E, che tocchi la ſuperficie della sfera nel punto X, e per A X, e ciaſcuna di eſſe B D, K N tirinſi i piani, che per le coſe già dette nella ſuperficie della sfera faranno cerchi maſſimi; facciano dunque, e ſiano ne' diametri B D, K N i mezzi cerchi loro B X D, K X N, e perchè la X A è perpendicolare al piano del cerchio B C D E, *Per l'ant.*

tut-

18. dell' und. tutti i piani, che paſſano per la X A ſaranno al piano del cerchio B C D E retti, onde ancor i mezzi cerchi B E D, B X D, K X N ſono retti al medeſimo piano, e perchè i mezzi cerchi B E D, B X D, K X N ſono uguali, eſſendo negli uguali diametri B D, K N, ſaranno ancor i quadranti B E, B X, K X fra loro uguali, quan-



ti lati dunque del poligono ſono nel quadrante B E, tanti ſaranno ne' quadranti B X, K X uguali a B K, K L, L M, M E, e deſcrivanſi, e ſiano B O, O P, P R, R X, K S. S T, T Y, Y X, e giunganſi S O, T P, Y R, e da' punti O, S tirinſi le perpendi-

3. dell' und. colari al piano del cerchio B C D E, caderanno queſte ne' comuni ſega-

men-

menti de' piani B D, K N, perchè ancor i piani de' mezzi cerchi BXD, K X N, ſono retti al piano del cerchio B C D E, caggiano dunque, e ſiano O V, S Q, eſſendo dunque negli uguali mezzi cerchi B X D K X N preſe le circonferenze uguali B O, K S, e tirate le perpendicolari O V, S Q, ſarà la O V uguale alla S Q, e la B V uguale alla K Q, ed è tutta la B A uguale a tutta la K A, adunque eziandio la rimanente V A è uguale alla rimanente Q A, come dunque la B V alla V A, così la K Q alla Q A, e però la V Q è paralella alla B K ed eſſendo ciaſcuna di eſſe O V, S Q perpendicolare al piano del cerchio B C D E, ſarà la O V paralella alla S Q, e ſi è dimoſtrata uguale ad eſſa, adunque le Q V, S O ſono uguali, e paralelle, e perchè la Q V è paralella alla S O, e paralella alla K B, ſarà la S O paralella ancor alla K B; e B O, K S le congiungono, onde eziandio il quadrilatero K B O S è in un piano, perchè ſe due linee rette ſiano paralelle, ed in ciaſcuna di eſſe ſi pigliano quali punti ſi vogliano, la linea retta, che congiunge detti punti, è nel medeſimo piano, nel quale ſono

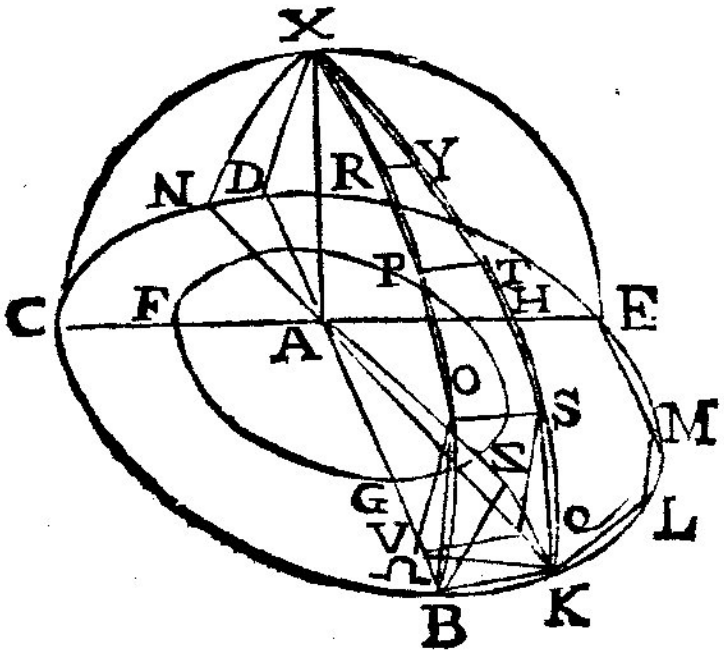
9. del ſeſto.

6. dell' und.

33 del primo

9. dell' und.

2. dell' *und.* le paralelle, e per la medeſima ragione amendue i quadrilateri S O P T T P R Y ſono in un piano, ed è in un piano il triangolo Y R X, ſe dunque da' punti O, S, P, T, R, Y intendiamo tirate le linee rette ad A, ſi conſtituirà una figura ſolida di molti lati fra le circonferenze B X, K X, compoſta di piramidi, le cui



baſi ſono i quadrilateri K B O S, S O P T, T P R Y, ed il triangolo Y R X e la cima il punto A, e ſe in ciaſcun lato K L, L M, M E, ſiccome in K B facciamo le medeſime coſe, e così negli altri tre quadranti, e nell' altra mezza sfera, ſi conſtituirà una figura di molti lati deſcritta nella sfera, e compoſta di piramidi

midi, le cui basi sono i detti quadrilateri, ed il triangolo Y R X, e gli altri del medesimo ordine, e la cima il punto A. Dico la detta figura di molti lati non toccare la superficie della minore sfera, nella quale è il cerchio F G P. Tirisi dal punto A al piano del quadrilatero K B S O la perpendicolare A Z, che lo tocchi nel punto Z, e giungansi B Z, Z K, laonde perchè la A Z è perpendicolare al piano del quadrilatero K B S O, sarà ancor perpendicolare a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel medesimo piano, adunque la A Z è perpendicolare a ciascuna di esse B Z, Z K, e perchè la A B è uguale alla A K sarà il quadrato della A B uguale al quadrato della A K, e sono i quadrati delle A Z, Z B uguali al quadrato della A B, conciossiacosachè l'angolo Z sia retto, ed i quadrati delle A Z, Z K sono uguali al quadrato della A K, onde i quadrati delle A Z, Z B sono uguali a' quadrati delle A Z, Z K, traggasi il quadrato comune della A Z, il rimanente dunque della B Z è uguale al rimanente della Z K, e però la linea retta B Z è uguale alla retta

3 dif. dell' und.

49. del primo.

Z K, ſimilmente dimoſtreremo quelle, che ſi tirano dal punto Z ad O, S eſſere uguali all' una, e l'altra di eſſe B Z, Z K, il cerchio dunque deſcritto dal centro Z coll' intervallo di una di eſſe Z B, Z K paſſerà anche per gli punti O S, e ſarà nel cerchio il quadrilatero K B O S, e perchè la K B è maggiore della Q V, e la Q V uguale alla S O, ſarà ancor la K B maggiore della S O, ma la K B è uguale all' una, e l' altra di eſſe K S, B O, l'una, e l'altra dunque K S, B O è maggiore della S O, onde eſſendo nel cerchio il quadrilatero K B O S, ed eſſendo uguali le K B, B O, K S, e la O S minore, e B Z ſemidiametro del cerchio, ſarà il quadrato della K B maggiore, che doppio del quadrato di B Z, tirifi dal punto K la K Ω perpendicolare alla B V, e perchè la B D è minore, che doppia della D Ω, ed è come la B D alla D Ω, così il rettangolo contenuto dalle D B, B Ω al rettangolo contenuto dalle D Ω Ω B, cioè deſcritto il quadrato di B Ω. e compito il parallelogrammo in Ω D: ſarà ancor il rettangolo contenuto dalle D B, B Ω minore, che doppio di quello, che

è con-

è contenuto dalle D Ω. Ω B, e giunta K D quello, che è contenuto dalle D B, B Ω e uguale al quadrato di K B, e quello, che è contenuto dalle D Ω. B è uguale al quadrato di K Ω, il quadrato dunque di K B è minore, che doppio del quadrato di K Ω, ma il quadrato di K B è maggiore, che doppio del quadrato di B Z, adunque il quadrato di K Ω è maggiore del quadrato di B Z, e perchè la B A è uguale alla A K, ſarà il quadrato di B A uguale al quadrato di A K, e ſono al quadrato di B A uguali i quadrati di B Z, Z A, e al quadrato di A K uguali i quadrati K Ω, Ω A, adunque i quadrati di B Z, Z A ſono uguali a' quadrati di K Ω, Ω A, de' quali il quadrato di K Ω è maggiore, che 'l quadrato di B Z, adunque il rimanente di Ω A è minore che 'l quadrato di Z A, e però la linea retta A Z è maggiore della retta A Ω, è dunque molto maggiore la A Z, che la A G, ed è la A Z in una baſe del poliedro, e la A G nella ſuperficie della sfera minore, onde il poliedro non tocca la ſuperficie della minore sfera, adunque eſſendo due sfere dintorno al medeſi-

mo centro, ſi è deſcritto nella maggiore un ſolido di molti lati, che non tocca la ſuperficie della minore sfera, il che biſognava fare.

COROLLARIO.

E ſe anche in un'altra sfera ſi deſcriva un ſolido poliedro ſimile al ſolido poliedro deſcritto nella sfera BCDE, averà il ſolido poliedro nella sfera BCDE al ſolido poliedro nell'altra sfera tripla proporzione di quella, che ha il diametro della sfera BCDE al diametro dell' altra sfera; perciocchè diviſi, che ſiano i ſolidi in piramidi uguali di numero, e del medeſimo ordine, ſaranno le piramidi ſimili, ma le piramidi ſimili ſo-

no fra loro in proporzione tripla di quella, che hanno i lati omologhi, adunque la piramide, la cui baſe è il quadrilatero K B O S, e la cima il punto A, alla piramide, che è nell' altra sfera del medeſimo ordine, ha proporzione tripla di quella, che ha il lato omologo al lato omologo, cioè A B ſemidiametro della sfera dintorno al centro A al ſemidiametro dell'altra sfera. E ſomigliantemente ciaſcuna piramide di quelle, che ſono nella sfera dintorno al centro A a ciaſcuna piramide del medeſimo ordine, che ſono nell' altra sfera, averà proporzione tripla di quella, che ha A B al ſemidiametro dell'altra sfera, e come è uno degli antecedenti ad uno de' conſeguenti, così

ſa-

ſaranno tutti gli antecedenti a tutti i conſeguenti, onde tutto il ſolido poliedro, che è nella sfera dintorno al centro A a tutto il ſolido poliedro, che è nell'altra sfera, averà tripla proporzione di quella, che ha A B al ſemidiametro dell' altra sfera, cioè il diametro B D al diametro dell' altra sfera.

TEOREMA XVI.

PROPOSIZIONE XVIII.

Le sfere fra loro ſono in tripla proporzione di quella, che hanno i loro diametri.

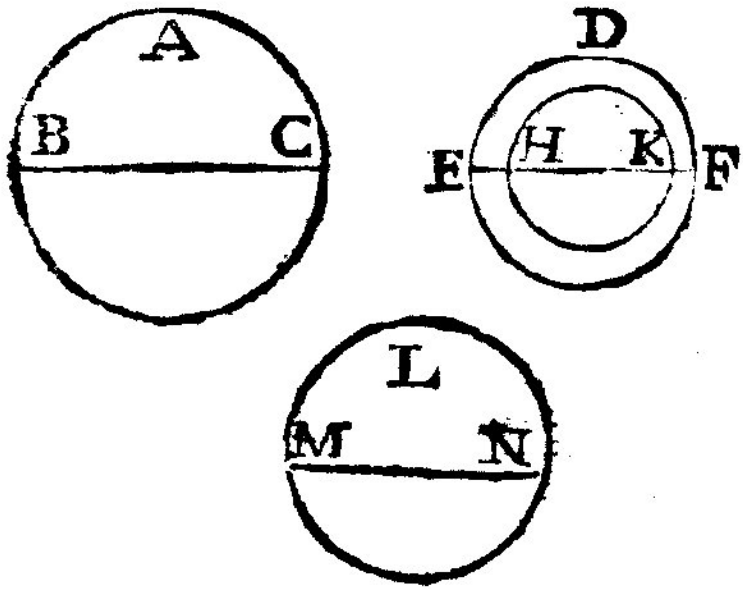
Intendanſi le sfere A B C, D E F, i diametri delle quali ſiano B C, E F. Dico la sfera A B C alla sfera D E F ave-

avere proporzione tripla di quella, che ha la BC alla EF. Se non è così, la sfera ABC ad una sfera minore di essa DEF, o a una maggiore averà proporzione tripla di quella, che ha la BC alla EF. L'abbia prima a una minore, cioè ad HK, e intendasi la sfera DEF dintorno al medesimo centro, che la sfera HK, e descrivasi nella maggiore sfera DEF un solido poliedro, che non tocchi la superficie della minore sfera HK, e nella sfera ABC descrivasi un solido poliedro simile a quello, che è descritto nella sfera DEF, adunque il solido poliedro, che è nella sfera ABC al solido poliedro, che è nella DEF averà tripla proporzione di quella, che ha la BC alla EF, e la sfera ABC alla sfera HK ha tripla proporzione di quella, che ha la BC alla EF, come dunque la sfera ABC alla sfera HK, così il solido poliedro nella sfera ABC al solido poliedro nella sfera DEF, e permutando come la sfera ABC al solido poliedro, che è in essa, così la sfera HK al solido poliedro, che è nella sfera DEF, ma la sfera ABC è maggiore del solido poliedro, che è in essa; adunque

Per l'ant.

Per lo cor. dell' ant.

que la sfera HK è maggiore del ſolido poliedro, che è nella sfera DEF, ma è ancor minore, perciocchè da eſſo è compreſa, il che non è poſſibile, la sfera dunque ABC ad una sfera minore della DEF non ha proporzione tripla di quella, che



ha la BC alla EF. Similmente dimoſtreremo nè anche la sfera DEF ad una sfera minore della ABC avere tripla proporzione di quella, che ha la EF alla BC. Dico oltre a queſto la sfera ABC non avere ad una sfera maggiore della DEF tripla proporzione di quella, che ha la BC alla EF. Perciocchè l'abbia s'egli è poſſibile ad una maggiore, che ſia LMN, convertendo dunque la sfe-

ra

ra LMN alla sfera ABC ha proporzione tripla di quella, che ha il diametro EF al diametro BC, e come la sfera LMN alla sfera ABC, così la sfera DEF ad una sfera minore della ABC, come si è dimostrato di sopra, perchè la sfera LMN è maggiore della DEF, onde ancor la sfera DEF ad una sfera minore della ABC ha proporzione tripla di quella, che ha la FE alla BC, che si è dimostrato essere impossibile, adunque la sfera ABC alla sfera maggiore della DEF non ha proporzione tripla di quella, che ha la BC alla EF, e si è dimostrato nè anche a una minore, adunque la sfera ABC alla sfera DEF averà tripla proporzione di quella, che ha la BC alla EF, il che bisognava dimostrare.

FINE DEL DVODECIMO LIBRO.