VIVIANI
ELEM: GE

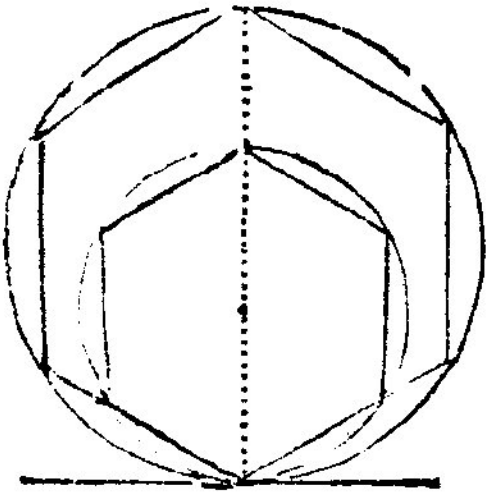
L

43

ELEMENTI
D' EUCLIDE
PARTE PRIMA.

Cons.ta Paolo Tom.o Galletti 1821

ELEMENTI
PIANI E SOLIDI
D' EUCLIDE
ALL' ILLUSTRISS. SIG. MARCH.
FILIPPO
CORSINI.



IN FIRENZE. 1718.

Pe 'l Carlieri all' Insegna di S. Luigi.
Con licenza de' Superiori.

ILLUSTRISS. SIG. SIG. PADR COL.

Aggio, prudente, e d'ammaeſtramento ripieno ho ſempre ſtimato il detto del ſoave Greco Oratore Iſocrate, mentre afferma mercatanzia, e non dono eſſere quello di colui, che a'

Principi, e a' gran Signori offeriſce coſa, di cui, eglino grandemente abbondino, e il donatore per lo contrario ne abbia penuria, parendo egli ciò fare con iſperanza di riportarne guiderdone, non da affetto di buon cuore ſoſpinto. L' iſteſſo per avventura, o non gran fatto diverſo è l'errore di chi dona coſa, che di niuno uſo eſſer può a chi la riceve, poichè oltre al non venir giammai gradita; dimoſtra, che quel dono non da oſſequioſa liberalità d'animo, ma da un più occulto fine proceda. La qual riprenſione ho tentato di ſchifare io nell' offerire a V. S. Illuſtr. i primi tributi della mia debole ſervitù, dedicandole queſti Elementi Geometrici,

i quali a Lei, che con lodevol paſſo alla glorioſa altezza della ſapienza s' incammina, potranno quando che ſia, venire certamente a biſogno; allora cioè quando dalla ſua tenera età le ſia conceduto attendere a ſtudio così ſublime. Anzi anticipatamente ancora, giacchè Ella coll' altezza del proprio ingegno il corſo degli anni oltrepaſſando, fa ſembiante di volere tralaſciata la comunal regola, con rinforzato volo pel ſentiero luminoſo della virtù inoltrarſi, emulando in tal guiſa i ſuoi maggiori, per l' eccellenza de' loro coſtumi, e della lor mente, e per gli ben condotti affari sì dell' umane, come delle divine coſe, glorioſiſſimi; i quali ſe tutti di per

ſe annoverar quì voleſſi, non ne verrei a capo così di leggieri. Poichè laſciamo ſtare de' due ſantiſſimi fratelli, che l'un dopo l'altro la ſacra Fieſolana Sede ſantamente reggendo, ora nel Cielo eterni divenuti ſono, e beati (non potendoſi i loro pregi da mortal lingua pienamente ridire) tanti ſono i Porporati, che con ſommo onore del Vaticano fino a giorni preſenti hanno la ſeconda Carica nella Chieſa di Dio ſoſtenuta, ſenza tanti altri Prelati in altiſſime dignità Eccleſiaſtiche collocati; tanti, e tanti, che nella noſtra Republica con lode di prudenti il ſommo onore goderono, tra' quali un Tommaſo, e un Filippo Conte Palatino, e ambedue nobili

qua-

giuriſconſulti, il primo de' quali eſſendo un armario di ragion civile reputato, fu fatto allo Studio Fiorentino ſopraintendere, e in una delle molte reggenze dell'altro, che quaſi emulò a Mario il novero de' conſolati, fu il detto Studio riaperto, e al primiero ſplendore ricondotto. Un Alberto Cavaliere di Rodi, che negli affari di guerra ſentì molto avanti; un Giovanni Gran Siniſcalco del Re d'Armenia, e Cav. di Spron d'oro, che ampiamente dilatò i confini alla fama della ſua ſtirpe; tanti, che ſono ſtati alle più importanti Ambaſcerie, come più abili, eletti, e hanno ſempre per i loro gran meriti goduto nella regnante Corte i primi, e più ragguardevoli

impieghi, che di preſente ancora con tanto applauſo univerſale, per la loro indicibil prudenza, e ſingolar ſaviezza, godono i preſenti ſuoi maggiori; i quali per non offendere la loro modeſtia, e per non mi conoſcere abile a tanto, d'elogio non fregio. Nè ſtarò ancora a ridire a V. S. Illuſtriſs. quanto le ſia per eſſere utile, e profittevole lo ſtudio delle Mattematiche diſcipline per emulare la fama di queſti Eroi, che hanno per tanti ſecoli renduta illuſtre la ſua proſapia, eſſendo ciò pur troppo chiaro, per eſſere elleno

A giudizio de' ſavi univerſale,

non ſolo all' acquiſto di quelle ſcienze, che il noſtro intelletto adornano del tutto

neceſſarie, ma ancora al conſeguimento di quelle arti, che l'umana ſocietà, i Regni, e le Republiche in buono ſtato conſervano, neceſſariſſime. Si degni adunque V. S. Illuſtriſs. d'accettare per dimoſtrazione del mio umile oſſequio, queſt' Operetta, piccola per ſe ſteſſa, e per la mano, che gliela porge, piccoliſſima, ma grandiſſima ſe ſi riguardi a' nomi celebri de' ſapientiſſimi autori, che l'hanno compilata, e all' uſo certamente grandiſſimo, e neceſſario di cui le ſarà, e al molto frutto, che da eſſa è per ricavarne, e inoltre non del tutto diſpregievole, ſe alla devozione dell'animo mio Ella ſi degni rimirare eſſendomi unicamente moſſo a dedicarla

all' Illuſtriſſima Signoria ſua da un efficace deſiderio d'aver l'onore pregiatiſſimo di dimoſtrarmi in faccia al Mondo, quale tutto riverente mi confermo

Di V. S. Illuſtriſs.

Devotiſs. Serv. Obbligatiſs.
Carlo Maria Carlieri.

CAR-

CARLO MARIA CARLIERI.

Alla Studioſa Gioventù.

COnciosſiacoſachè i principj di ciaſcheduna ſcienza rieſcano molte fiate duri, e malagevoli ad apprenderſi, quindi è, a mio credere, che molti ſupponendoſi ciò provenire dall' ordine dell' inſegnarli, ſi ſono col lor talento impiegati per rendergli facili, e piani, procurando di ridurgli ora più brevi, e talora anche più diſteſi, con animo però ſempre di fargli riuſcire, giuſta lor poſſa, più chiari, e più ordinati. Laonde noi veggiamo tuttora venire alla luce nuove Gramatiche d'ogni lingua, nuove Rettoriche, nuovi corſi di Filoſoſia, e Teologia, nuove introduzioni alle Leggi, e ſimiglianti ſpezie di Libri. E comecchè a molti più diffi-

ci-

cile ſembri, e più faticoſo all' intelligenza lo ſtudio della Geometria, non mancarono in varj tempi uomini per altro grandiſſimi, che s' umiliarono a compilarne gli Elementi con ordine diverſo da quello tenuto già da Euclide, per vedere di rendere più appianata, e meno oſcura quella ſcienza

Che mena dritto altrui per ogni calle.

Ma ſiccome noi veggiamo ſpeſſe volte intervenire a chi dalla chiara, e sfolgorante luce del Sole in una ombroſa, ed oſcura abitazione trapaſſa, che niuna vede di quelle coſe vedute da coloro i quali ſono quivi per qualche tratto di tempo a quel fioco lume aſſuefatti, così appunto molte volte è addivenuto, che quello, che a' loro intelletti, di quella ſcienza, che a ſpiegare imprendevano, poſſeditori perfetti, lucido, e chiaro appariva, a chi di nuovo in eſſa s' introduceva, queſto novello sentiero riuſciva viepiù ſcuro, ed intricato di quello, che ad altri foſſe ſembrato il primiero, e di maggiori difficultà attorniato, per felicemente giugnere a quel termine, che egli ſi erano nell' animo loro prefiſſi. Laonde da'

ſavi uomini è ſtato giudicato bene a' primi fonti, da' quali eramo lungamente deviati aver ricorſo, e ſulle loro bene indirizzate veſtigia alla ſapienza incamminare coloro, *che altro contento, che imparar non provano*. Che però nel dare io alle ſtampe per comodo voſtro, ſtudioſa Gioventù, gli Elementi della Geometria ho ſtimato bene prendere quei medeſimi, che alcuni anni ſono furono da Iacopo mio Padre pubblicati, cioè a dire quelli appunto, che per un corſo lunghiſſimo di tanti ſecoli ci ha tramandato Euclide. E ſe ad alcuna Dimoſtrazione reputata univerſalmente oſcura ve ne ho aggiunta altra del Torricelli, o del Viviani, non è però, che io abbia tralaſciato quella d' Euclide, acciocchè ognuno a ſuo ſenno prenda quale di eſſe gli aggrada. Per la cagione medeſima nel fine del primo Tomo ho poſto il quinto libro, così come in Euclide ſi trova, quantunque nel principio dell' altro Tomo ſia collocata la Scienza univerſale delle Proporzioni la quale nell' ultimo di ſua vita avendo in un Dialogo preſa a ſpiegare il lucido, ammirabile, e

ſem-

ſempre glorioſo ingegno del Galileo, fu poi in tal forma ridotta da quel gran geometra del Viviani, che tutto il ſuddetto quinto libro comprendeſſe, ma con una chiarezza infinitamente maggiore, per lo che comunalmente terminata la ſpiegazione del quarto libro al Tomo ſecondo ſi ſuol trapaſſare, tralaſciato il quinto diſteſo da Euclide, che perciò ſuperfluo parendo, e di verun uſo potea forſe non iſtamparſi, ſe non ſi foſſe alla venerabile antichità, e a' primi Maeſtri noſtri avuto riguardo. Si ſono quindi aggiunti varj ſentimenti d' uomini ſapientiſſimi in commendazione della Geometria, e circa alla grandiſſima, e ineſplicabile utilità della medeſima, in gran parte raccolti dal Viviani, acciocchè ſe di eſſa vi innamorerete venga queſta mia impreſa ad incontrare maggiormente il voſtro favore, il che ſpero, che ſia per ſeguire qualora a sì nobile, ed eccellente ſtudio con tutto il talento dell' animo attendiate; E vivete felice.

Di-

DIGRESSIONE
DEL
VIVIANI

Scritta in commendazione della Geometria cavata dal Ragguaglio dell'ultime Opere del Galileo a 89.

MA quì in grazia mi sia permesso, digredendo alquanto dal racconto, di far cuore al Giovane studioso, che in mancanza d'un Direttore (il qual però sul principio io non biasimo a procurarselo) voglia provarsi a veder da se stesso il primo Libro almeno d'Euclide, d'esposizion comentata la più chiara, e

dif.

diffusa, che egli trovi, quale sarebbe quella del P. Clavio; avvertendolo, che dopo la reminiscenza delle notizie comuni, che vi si premettono, l'esplicazione de' termini da usarvisi, e l'approvazion delle domande concedibili, che vi si fanno, egli segua per appunto quell'ordine, e non trapassi cosa, che più che ben non intenda; ne sul principio del cammino, benchè tediato, o stanco gli paia d'esserne, si abbandoni; nè si curi per ancor di sapere a che sia buona la Geometria: ma se pur ne è curioso, domandine al Galileo, il quale, o col suo solito piacevol motto gli dirà, che dalle dimostrazioni della Geometria attenenti alle Misure, a' Pesi, ed a' Numeri, s' impara a misurare i Goffi, a pesar gl' Ignoranti

ti, ed a numerar gli uni, e gli altri: *o pur rispondendo sul serio, gli affermerà, non potersi comprendere a che ella sia buona, se prima ella non si gusta, e dopo gustata, ella stessa colle sue tante, e sì evidenti dimostrazioni dassi a conoscer per buona a tutte le cose. Ma se per avventura una sì fatta Proposizione gli paresse incredibile, ed insieme troppo presuntuosa, in questo caso il medesimo Galileo s' ingegnerà d' insinuargliene la credenza col proporgli que' molti, e variati colori posti in confuso sopra una tavolozza, i quali, da chiunque non ne vide, e non ne seppe mai l' uso, o sarebber creduti tanti piccoli ammassamenti di sozza materia, inutile, e da doversi trar via, o al più buoni a far apparire una superficie*

rossa col rosso, gialla col giallo, e bianca col bianco, &c. nè mai gli caderebbe in pensiero, che dar si potessero al Mondo uomini di tal industria, e perizia, i quali con quegli stessi colori avesser a sapere, e potere al vivo rappresentare con ammirabil vaghezza l' immagini di tutte le cose visibili, non solo delle fabbricate dall' Arte, ma delle create dalla Natura, e quelle ancora d' ogni più strana grottesca, o chimerica fantasia, ancorchè sognatasi.

Su dunque, il Geometra principiante, a buona fede, e senza cercar più oltre, con generosa risoluzione, e con paziente assiduità si ostini pur di veder tutto, e di ben intendere quel picol Libro (siccome io l' assicuro, che gli sortirà) ed osservi allora

s'egli

s' egli si sente invogliato , o nò di proseguir la navigazione intrapresa ; quando che nò , torni al lido , che questo mare al certo non è per lui ; all'incontro se sì , vi s'inoltri pure , imperciocchè non al termine del cammino , come è solito negli altri Studi , ma fin per via s'avvedrà , che la Geometria è una chiarissima face , e sicura guida ad ogni sorta d' erudizione , e che per essa risvegliansi gli animi addormentati , ed assottiglianssi gli ottusi ingegni ; ond' e' si fanno più veloci , e più atti a penetrare , e comprendere , come è forza , che provi chiunque con essa terrà commercio , a cagione del continuo esercizio di concludenti discorsi . che far convien' in trattando seco . Di qui è , che altrettanto vero , quanto plausibi-

le oßervai ſempre quel ſaggio detto publicato da me, come del mio Sovrano Maeſtro, che La Pietra Lavagna, ſopra di cui ſi diſegnano a' Principianti le Figure Geometriche, è la Pietra del paragone degli Ingegni, *vedendoſi per prova continuamente, che quei, che reggono a tal cimento, rieſcono a tutta bontà in ogni altra facultà, e in qualunque maneggio, al quale intendano di applicarſi. Queſta verità fu così ben conoſciuta dal Divino Platone, che nell' inſtituire l'ottima Repubblica, laſciò ſcritto non eſſer veramente sì facile, ma non però fuor di propoſito il credere, che le Scienze Mattematiche ſervano di ſtrumenti per mandar giù le caterratte, che ſi parano davãti agli occhi dell' Anima ragione-*

nevole, e che questi, che dianzi trovavansi immersi in una foltissima caligine d'ignoranza, e per così dire, soffogati, anzi spenti dagli altri studi, ed esercizi, mediante poi il nuovo lume, ed il nuovo calor della Geometria, si ravvivino, e si riaccendano; e che piuttosto, che mille occhi del corpo, assai più importante sia il custodire que' dell'animo, per mezzo solamente de' quali ei vien conceduto il rimirare, ancorchè remotissime, le occulte verità, che la sola Geometria ei disvela. Questa, o Giovane generoso, essendo una cognizione, non di quello, che or và, ed or viene, ma di quello, che è in un modo sempre, nè mai si muta, può sola condurti al prezioso conseguimento del vero, e prepararti l'anima alla

con-

contemplazione della Filoſofia naturale, che il mio acutiſſimo Lince non vide ſcritta altrove, che in un ſolo, ma però vaſtiſſimo Libro, quale è quello dell' Univerſo. Queſta, *dicev' egli*, non vi è diſteſa con altro alfabeto, che di Figure della Geometria, nè con altri principj, e ragioni dimoſtratavi che Mattematiche.

Or da sì autorevoli ſentenze maggiormente eccitato il novello Navigante dia pur libere vele al proſpero vento, da cui ſente portarſi per quel piccolo ſeno degli Elementi Geometrici, perchè guidato dall'infallibil Nocchiero della Ragione, e colla propria accortezza ſcanſati que' pochi ſcogli, che nel paſſare al breve tratto de' primi Scrittori Claſſici egli incontraſſe, ſcoprirà lieto

nuovi Mondi, e s'approderà in Terra ferma da niun' altro termine circonſcritta, ſempre verde, e feconda d' immumerabili, incognite, nè per altra via penetrabili verità, e in breve accorgeraſſi per mezzo ancora della Geometria poter trapelare agli occhi foſchi delle noſtre menti qualche raggio del SOMMO SOLE, per cui, additandociſi il dritto ſentiero alla di lui cognizione, confeſſar dobbiamo in una Bontade, e Provvidenza infinita l'Onnipotenza del CREATORE, il quale, eziandio nell' interminato, e profondo abiſſo delle proprietà Matematiche, mercè

La verità, che tanto ci ſublima. *Dante par Canto 22.*

ci fa rimirar più dappreſſo l'immenſità di ſua incomprenſibil Sapienza;

E quinci appar, ch' ogni minor Natura

Canto 19 E' corto recettacolo a quel Bene,

Che non ha fine, e ſe in ſe miſura.

Che che di Scienze sì nobili ſcioccamente ſi ciarlino cert' uni agghiacciati di dentro, e di fuor caldi, i quali tuttochè privi di ſimili cognizioni, e forſe inabili a capirne i primi principi, ma ſopra tutto come di lor natura in ſommo grado ſuperbi, preſuntuoſi, e gonfi, di quello, che eſſi chiamano ſapere, arrecandoſi a gran vergogna, e direi anche a ſcrupolo, s'io non ſapeſſi, che e' ſi fingono quei, ch' e' non ſono, d'aver talvolta, interrogati, a dar quell' onorata, ingenua, e commendabile riſpoſta, che ſpeſſo udij profferire dal mio Sag-

gio

gio Maestro, cioè Questa è una di quelle tante, e tante cose ch' io non so; *e talvolta*, questa è una di quelle tante cose, ch' io so di non sapere, *sotto il manto di simulato zelo, coll' autorità ch'e' non hanno, ma ch'e' si pigliano, vanno in congiunture opportune insinuando simili studi esser pericolosi, e d' impedimento all' acquisto di quel sommo bene, al quale, sopra ogn'altra cosa, aspirar dobbiamo; per introdurre così bel bello, ed in carità il disprezzo, e l' odio verso quel di sublime, e di recondito, ch' essi ignorano, ed accrescere intanto la stima, e 'l credito a quel di abietto, e di popolare, che anche e' si presumono di sapere. Ma dicanmi, su quai fondamenti insurgono questi a detestare ciò, che mai in-*

teſero, mai conobbero, mai aſſaporarono? Forſe muovonſi dagli eſempli d'aver i Matematici co' lor Domini, co' lor Aſſiomi, e colle tante loro Dimoſtrazioni ſeminate zizzanie, ſedotti Popoli, edinfettate Republiche, Provincie, e Regni? e pure per quant' io leſſi non trova' mai, che alcuno de' tanti perfidi Innovatori Matematico foſſe, e che di Angoli, Triangoli, Coni, e Piramidi, che ſono le acute armi ſue, ſi valeſſe. Chi poi, e quali e' foſſero, non ſaprei dirlo; ma le Storie pur troppo lo diran loro. Io ſo ben queſto, che in ogni tempo le Scienze Matematiche furono accolte, favorite, e protette, ed ancor di propoſito attentamente ſtudiate, non ſolo da Principi, e da Monarchi, ma eziandio da Supremi Capi del

Cri-

Criſtianeſimo , e da Santiſſimi Padri in quelle verſatiſſimi magnificamente eſaltate , e fin coll' Opere loro illuſtrate , e più volte promoſſe da Sacratiſſimi Porporati , e di continuo profeſſate da Religioſi di rifulgente luſtro nella Chieſa Romana , ma in iſpecie da' Seguaci del ferventiſſimo Ignazio , nella di cui inclita Compagnia, ſe non aveſſe fiorito ſempre,quaſi che per naturale diſcendenza , numeroſa ſerie di Geometri , e Teologi inſieme celebratiſſimi , che quì lungo ſarebbe il ridirgli [tralaſciati tanti altri Matematici , viventi in eſſa , di chiaro nome] il ſolo eſempio dell' inſuperabile Ingegno del ſapientiſſimo, e candidiſſimo P. Onorato Fabbri colle tante ſue famoſe Opere , e Teologiche , e Fiſiche , e Matemati-

che di ſalda, e di ſingolar dottrina ripiene; e (tra i Religioſi al Secolo di rinomata venerazione) il ſolo, per meriti, eminentiſſimo Sig. Ab. Michel Angelo Ricci, onor del Secol preſente, vera Idea di ſinceriſſima integrità, come nobile poſſeſſore di ogni più grave, e profonda letteratura, e come Geometra di ſoprumana inventiva, dovrebbero pur eſſer valevoli a confonder Genti di così mal talento, e ad attutire le lor malotiche lingue. Ma non oſtante così degne teſtimonianze l'atra Ipocriſia di Coſtoro, d'apparente candor travestita a tal ſegno arriva, che anche gli induce a manifeſte, ed eſorbitantiſſime contradizioni a' lor medeſimi detti, poichè, pronunziando ad ognora colla lingua almeno, ſe non col cuore,

che tutte le Fatture di DIO, ed i Cieli in particolare cantano l'immenſa gloria di quello, e che in loro ſi vede ſcritta la Maeſtà Sua a caratteri di luce, e che quivi dobbiamo leggerla; accanto, accanto vanno inſinuando per degne d'eſſer proſcritte le Matematiche tutte, ed in conſeguenza la Venerabile Aſtronomia, il di cui ſublime, e ſingolare oficio ſi è il richiamar l'Anime di noi Mortali al riconoſcimento di lor alta origine, e con liberarle dal baſſo carcere di queſta Terra, ſu l'ali della Geometria ſua Nutrice, e dell' Ottica, e dell' Aritmetica ſue inſeparabili compagne, trasferirle colaſsù a contemplar con indicibile ſtupore per entro l'immenſe, e lucide Regioni del Cielo quegli innumerabili Mondi con

magiſtral ſimetria collocativi d' un ordinatiſſima confuſione; anzi pur ſeminati, o gettativi con generoſo diſprezzo per mano prodiga del lor medeſimo CREATORE.

Ma quì ſi avverta, che in celebrando l' Aſtronomia, e la Matematica, io non ebbi in conſiderazione la profeſſion di coloro, de quali ſcriſſe Tacito, Genus Hominum Potentibus infidū, ſperantibus fallax, quod in Civitate noſtra, & vetabitur ſemper, & retinebitur. *Non inteſi parlar di quei, che appreſſo l' indotto Volgo, colle vane loro ſuperſtizioni, e falſi indovinamenti ſi uſurparono indegnamente il nome degniſſimo di Matematico, e indifferentemente confuſero l' Aſtronomia coll' Aſtrologia. Non inteſi dico degli*

Nell' Iſtorie lib. 1.

Aſtro-

Aſtrologi giudiciari, obbrobrioſo avanzo di que' Caldei, che appeſtarono già il Mondo, e come contagioſi, e malefici, fin dalla cieca Gentilità con replicate leggi sbanditi furono dall' Italia, ed in ogni tempo dichiarati meritevoli di ſeveriſſime punizioni, e contro de quali ancora fulminarono rigoroſe, non men che giuſte cenſure, i Sacroſanti decreti de' Romani Pontefici, ammaeſtrati, mi cred'io, dal DIVINO SPIRITO, che, ſe Ignorat Homo, quid ante ſe fuerit, & quid poſt ſe futurum ſit ei, quis poterit iudicare? *Io ſolo inteſi, ed intendo di commendare i Matematici ſpeculativi, indagatori delle mirabili proprietà della quantità continua, e de' numeri. Intendo eſaltar gli Aſtronomi, che* Eccleſiaſte c. 10.

hanno per oggetto, i moti, i tempi, le grandezze, le figure, e le diſtanze delle più nobili Creature dell' ONNIPOTENZA INCREATA. Gli uni, e gli altri di queſti, col proporci le maraviglie del Cielo, e della Natura, ci eccitano ad ammirar la grandezza di DIO, il quale, quaſi diſſi occupato ſempre in geometrizzare, cioè a dire, ne i ben proporzionati lavori delle infinite, ed ammirande verità, ch' ei maneggia, per via di que' pochi, e menomiſſimi ritagli, che di laſſu ce ne cadono fra le mani, ci fa riconoſcere la ſua interminata Sapienza, e ci dimoſtra la miſera noſtra ignoranza, obbligandoci a confeßare: Quod omnium Operum DEI nullam poſſit Homo invenire rationem eorum, quæ fiunt ſub

cæpit. 8.

So-

Sole, & quanto plus laboraverit ad quærendum, tantò minùs inveniat, etiam ſi dixerit Sapiens ſe noſſe, non poterit reperire.

Or non ſon queſti, della cognizione di DIO, *e di ſe ſteſſo, acquiſti di teſori aſſai più preziosi di quei, che poſſan mai riportarſi da qualunque più avventuroſa navigazione? Ed in vero, che per giugnere a conſeguirgli (fuor delle ſoprannaturali Scienze riſervate a' ſupremi PP. ed a ſommi Teologi dalla* DIVINITA' *illuminati) non vè mezzo più atto, nè più potente della Geometria, Amica giurata della Natura, e gratisſima a* DIO, *e per le di cui mani eſſo* ID DIO Omnia in Menſura, & Numero, & Pondere diſpoſuit, *Che ſe una volta Coſtoro ſi foſſe-* Sapienza capit. 11.

ro riſoluti di cominciare a addomeſticarſele, averebbero ben compreſo (come ne avvertì loro il mio gran Galileo) che quella vana preſunzione, che dianzi avevano d'intendere, e di ſaper tutto, non veniva da altro, che dal non aver mai ſaputo, nè inteſo nulla, e dopo avere ſperimentato una ſol volta ad intender perfettamente una ſola coſa, e guſtato veramente com'è fatto il ſapere, conoſcerebbero, che, dell'altre concluſioni NIUNA, NIUNA affatto ne intendono, *e s'accorgerebbero gli Infelici d'aver peregrinato il tempo di vita loro a chius'occhi, e viſſuto mendicando all'altrui mercede, e col ſempre ſtarſene a detta di Favolatori, e di Menzogneri ſenza* MAI, MAI, MAI, *veder*

der in viſo la VERITA'.

Taccianſi fra tanto queſti Falſari della vera bontà, Rebelli a IDDIO, e Nemici infeſtisſimi degli amatori del vero, e degli induſtrioſi Cultori delle Matematiche Diſcipline, e tu Studioſo Giovane, che intento ſei ad erudirtene,

Non ti curar di lor, ma guarda, e paſſa.

Guardati, volli dirti, dal dar orecchio ad un altra ſorta di Guaſtatori ſpropoſitati, e ignoranti, ma non men preſuntuoſi degli altri, i quali ambizioſi, e vaghi d' acquiſtar nome, ſi pongono ſul grave poſto di Pirroni, tentando di rimetter sù l'antica Setta degli Scettici, col negar i principj della Geometria noti a' Fanciulli, e perciò indubitabili, come inſegnati loro dalla Natura.

Dissi sproposítati, perchè questi medesimi, che deridono la Geometria, lodan le pratiche Operazioni, che ham'origine da quella, che è giusto giusto come se altri commendassi gli scherzi vari delle fonti, e disprezzasse per l' Elemento dell'acqua, senzariguardo, che se questo non fosse di sua natura fluido, trasparente, e operante col momento di sua gravità specifica, e della sua propria altezza, niuno di que' tant' utili, e dilettevoli effetti si goderebbe.

Dissi ancora ignoranti, perchè mancando questi della più nobile prerogativa dell' anima ragionevole, da' Savi d' ogni età raffigurata per una spezie di facultà creatrice, che assai più d' ogn' altra ci approssima, e ci rende simili al CREATORE

par-

(parlo di quel retto, e ben ordinato passaggio da verità note ad ignote, che da' primi Uomini fu chiamato Inventiva) incapaci del gran pregio di questa l' aborriscono, e la disprezzano in quei, che dall' AUTOR DELLA VERITA' se ne trovano punto punto privilegiati; nè s'accorgono i miseri, che se negli andati Secoli non fossero stati Inventori e nelle Scienze, e nell' Arti, il Mondo sarebbe sempre come nascente, e tutto involto in densissime tenebre d' ignoranza, nelle quali trovandosi immersi Costoro, lodando solamente quegli esercizi, che son da loro, dove cioè si richiede, o un' assidua fatica di schiena, o un giocar di memoria, e burlansi degli altri studi, che voglion' opra d' ingegno, finezza di giudizio, e per-

spi-

ſpicacia nell' Inventiva, delle quali doti i Poverelli trovanſi ſprovveduti: ond' e' van ſeminando queſta dottrina, che le Matematiche ſpeculative ſieno ſtudi aridiſſimi, e che ſi perdano intorno a frivole ſottigliezze, di niun profitto, nè a ſe, nè al Pubblico, nè al Privato; e che aſſai più vaglia un'oncia di pratica, che cento, e mille libbre di Teorica, e coſe ſimili ſolite andar per le bocche del Volgo ignaro. Quì con ben quattro eſempi di caſi avvenuti potrebbeſi far loro toccar con mano quanto ſien falſi i lor detti, col dimoſtrare, che per mancanza di Matematica ſeguiron già inconvenienti graviſſimi, ed irreparabili; ma perchè al fatto non è rimedio, è anche ſuperfluo il parlarne; baſtando riſponder a ſimil Gente, che n' è

pur

pur in gran numero, Nè Sutor ultra crepidam, & quam quiſque norit artem, in hac ſe exerceat.

Altri poi ve ne ſono, di gran circuito ben sì, ma contenente aſſai poco ſpazio, i quali avendo le Matematiche, e per belle, e per buone, ſenza cercar altro di loro ſi danno a credere, ch'elleno ſie no ſtudi ſol per ornamento del Cavaliere, come è forſe il ballare, il ſaltar a Cavallo, il romper leggiadramẽte una lancia, o il far ſimil'altri lodevoli eſercizi, quantunque per avventura non de' più neceſſari. Da queſti tali, che più oltre non ſanno, io non premo tanto, o nobil Giovane, che tu fugga come dagli altri, anzi ti eſorto a preſtar lor fede, e dopo l'eſſerti ben corredato, di tanti, e così

degni ornamenti, ad oggetto di renderti anche più riguardevole, provati un poco, in grazia del VERO, a imparar a conoſcere, ed a rilevar i caratteri di quel primitivo Idioma, con cui, dettante la SOVRANA SAPIENZA, di propria man della Geometria furono ſcritte in cifra l' eterne Opere di quella, tutte egualmente maraviglioſe, e delle quali è permeſſo talora deciferar di quaggiù qualche breve paſſo da chi ſol ſe ne proccura la chiave, e la contraccifera, che come udiſti poc' anzi, ſta eſpreſſa colle figure, e ſpiegata dall' infallibili prove della medeſima Geometria, unica Segretaria, e Interpetre fedele della riposta VERITA' *: che ſe mai per tua gran ven-*

tura ti ſortirà balbettare, non che parlare ſpedito sì bel linguaggio, io ti aſſicuro, che ornatiſſimo allora, anzi beato in terra ti chiamerai. Trattanto ſappi, e ſappianlo ancora quei, che fin a quì ti ho deſcritti, che a giudizio de' Savi univerſale, E DI CHI QUA' EREDITO' IL FILOSOFAR COL REGNARE, *quanto di buono, di oneſto, d' utile, e dirò ancora di vago, ſi eſercita nel viver civile, tutto per ſingolar dono celeſte trae l' origin ſua, e ſuo' natali dalla ſola Geometria feconda Madre dell' altre Teoriche dimoſtrative, applicate, oltre alla Filoſofia naturale, alle pratiche dell' Arimetica, e dell' Aſtronomia, e della Muſica, e delle Meccaniche, e delle Proſpet-*

ti-

tive; alla Geografia, alla Cronologia, ed alla Nautica; oltre all'esser di sommo aiuto, in sentenza del grand' Ipocrate, alla stessa Medicina, ed insomma a tutte le Arti, e facultà ridondanti a comun beneficio, ed ad onesto diletto degli Uomini.

Che se la nostra Chiesa Cattolica si gode comodo, e quiete dalla Correzion Gregoriana del Calendario: Se un Colombo, un Vespucci arditamente s' espongono agli insulti di Mari ignoti per tentar la conquista di nuovi Mondi, e con prosperità secondante i presagi loro la conseguiscono: Se il nostro divino Galileo investiga di proprio ingegno, appena uditone il grido, il più ammirabile fra gli Strumenti da umana industria inventati: Se con esso armatane

la

la propria viſta, da queſti baſſi a' ſublimi oggetti rivolto, trapaſſa ad iſvelarci immumerabili Stelle fregiate di viva luce, ed oltre a tante

Nuove coſe, e giammai più non vedute. *Petr. Trion. 3. d'Amore.*

oſſerva, il primo, con maravigliosa accortezza il ſuo beneficio Giove, non da una ſola, ma da quattro Lune aſſiſtito, e conſagrata queſta (che ben può dirſi

Clara Deum Soboles, Magnum Iovis incrementum) *Verg. Egloga 4.*

all' Auguſta Proſapia del SVO SIGNORE, *e sì eſeguiti gli ALTI ETERNI DECREII, gli ſovvien ſubito d'intereſſarla col ſuo fortunatiſſimo Occhiale al glorioſo guadagno della tanto ricercata invenzione del navigar per lunghezza, ed alla correzion geografica dell' Iſole,*

del-

delle Coſte, e de' Continenti; e perciò con Atlantiche fatiche, e per tanti luſtri oſſerva, e rintraccia al fine l' eſatte miſure de' moti, e de' giri di queſta, coll' inclita FAMIGLIA MEDICEA, *quaſi diſſi*, GIOVIALE CONSORTERIA. *Se il medeſimo Galileo Riſtauratore, e piuttoſto Inventor del vero, e ſaldo filoſofare: anatomizza, per così dire, la Natura; e a confuſion de' paſſati Filoſofanti s' interna a contemplar le più ripoſte paſſioni del moto, per cui eſſa Natura,*

Dal gran Maeſtro di color, che ſanno.

Dante Inf Canto 4.

vien diſinita, e lo ferma egli il primo, e lo ſottopone alle rigide leggi dell' invariabile Geometria, applicandolo di più con

Ma-

Matematico artifizio alle pratiche militari; e sì per ogni guisa,

Nec Mare, nec Tellus, nec Cœli lucida Templa *Lucr. lib. 1.*

eſenti vanno dalla curioſa, e nobile perſecuzione di queſto perpicaciſſimo Lince, il tutto fu pur opra d' una profonda cognizione delle dottrine de' tempi, e de' numeri; della forma, e conſtituzione delle parti dell' Univerſo; dell' ordine, moto, e via de' raggi viſivi sì rifleſſi, come rifratti; e del mirabile operare della Natura con Matematiche dimoſtrazioni penetrato, Scienze tutte Suddite obbedientiſſime alla Geometria lor Regina. Ma ſe ciò non oſtante, queſt' Anime ſmarrite, e inviluppate quà di ſoverchio tra i lacci de terreni intereſſi, ſcor-

da-

dateſi in tutto di quel Divino, che hanno in loro.

Petr. Sou. 220. Al ver non volgon gli occupati ſenſi,
ma ſol rimirano al compiacimento, ed agli agi del proprio corpo, aſſiduamente anelando di poßeder quaggiù quel, ch' eziandio poſſeduto, non ſarà loro, ſappiano almeno, che ſe la regola aurea governa tutta la Mercatura, di cui la Turba al vil guadagno inteſa *fa sì gran conto, l'Arimmetico Geometra l'inventò. Se la buſſola, e la carta con acquiſti di teſori immenſi veggono la Nautica, il Geografo Matematico a così grand' uſi quella applicò, e queſta deſcriſſe, e ſi preparò. E che una ſola Propoſizione d'Euclide, una ſola d' Archimede dan legge, e regola, queſta*

alla

alla Meccanica tutta, e quella alla Altimetia, alla Geodeſia, e ad altre ſimiglianti pratiche, ſole avute in prezzo da Coſtoro, i quali ſe abili foſſero d'andar diſcorrendo, e con progreſſo retrogrado eſaminando, quali ſieno ſtati i principj delle più rilevanti operazioni, e de' più inſigni ritrovamenti dell'Uomo, riconoſcerebbergli in in fine dal Matematico ſpeculativo, e per conſeguente dal Geometra, che a quello inſeperabilmente procede: e così eſclamerebbero anch' eſſi col Divino Filoſofo, doverſi dar ordini rigoroſi, che niuno di queſta fiioritiſſima Città noſtra ſia tanto ardito, qual Pirrone, o Ariſtippo, di diſprezzar la Geometria, eſſendochè, quelle coſe ancora, che paion eſſer af-

fatto fuor di ſua sfera ; e che non abbiano, che far con eſſa, non ſongià di poco rilievo , ma rilevantiſſime , ed alla Republica neceſſariſſime . E ch' e ſia 'l vero riconoſcetelo appreſſo da alcuni de ſeguenti

SEN-

SENTIMENTI

DI

AUTORI ILLUSTRI

INTORNO

ALL' ECCELLENZA, E ALL' UTILITA'

DELLA GEOMETRIA.

IPOCRATE

A Teſſalo ſuo Figliuolo, della verſione del Foeſio.

GEometriæ, & Arithmetices cognitioni Studiorum adhibeto, mi Fili. Neque enim ſolum vitam tuam glorioſam, & ad multa in rebus humanis utilem, verùm etiam mentem acutiorem, & longè ſplendidiorem ad fructum eorum omnium, quæ in Arte medica uſui ſunt, conſequendum reddet. Quamquam quidem Geometriæ cognitio, cum multas, & varias formas habeat, & omnia cum demonſtratione ad exitum perducat, tum ad oſſium poſitus & articulos ſuis ſedibus emotos, tum e-

tiam ad reliquam membrorum compoſitionem, utilis futura eſt. Nam ad horum affectuum variam cognitionem facilius perveniet, tum etiam articulorum repoſitione, tum oſſium contritorum reſectione, & perforatione, & coaptatione, & ſubſtractione, reliquaque curatione ductus, qui locum, & os quale ſit ex eo emotum cognoverit. Numerorum verò ſeries, tum ad ambitus, tum ad eas mutationes, quæ præter rationem in febribus fiunt, & ad judicandos Ægros, & ad morborum ſecuritatem ſatis futura eſt. Præclarum enim eſt id tibi in Re medica ſubminiſtrari, quod intenſionis ac remiſſionis partium, quę ex parte inęquales ſunt facilem tibi abſque errore notitiam præbeat. Qua propter ad huius experientiæ facultatem valdè contendito. Vale.

PLATONE

Nel Lib. vjj. della Republica, dalla verſione di Marſilio Ficini.

GEometria, eius, quod eſt ſemper non eius, quod, & oritur quandoque, & interit cognitio eſt. Attollet igitur, o Generoſe Vir, ad Veritatem animum, atque ita ad philoſophandum præparabit cogitationem, ut ad ſupera convertamus,

quæ

quæ nunc, contra quàm decet, ad inferiora delicimus. Quàm maximè igitur præcipiendum eſt ut, qui præclariſſimam hanc habitant Civitatem, nullo modo Geometriam ſpernent; nam, & quæ præter ipſius propoſitum quodammodo eſſe videntur; haud exigua ſunt; &c.

QUINTILIANO

Nel Libro primo dell' Inſtituzione Oratoria, al Capitolo x.

IN Geometria, partem fatentur eſſe utilem teneris ætatibus, agitari namque animos, atque acui ingenia, & celeritatem percipiendi venire inde concedunt: ſed prodeſſe eam non ut cæteras artes, cùm perceptæ ſint, ſed cum diſcatur exiſtimant. Id vulgaris opinio eſt, nec ſine cauſa ſummi Viri etiam impenſam huic Scientię operam dederunt. Nam cum ſit Geometria diviſa in numero, atque formas, &c

PROCLO DIADOCO

Sopra il primo d' Euclide, al Cap. xv.

HÆc itaque Matheſis eſt, ſive Diſciplina, quæ externarum in anima rationum reminiſcentia eſt, & Mathematica (hoc eſt diſciplinativa Scientia, ut ſic exponam) propter hanc ea cognitio potiſſimum nuncupatur, quæ nobis ad earum

rationum reminiſcentiam maximè confert. Et opus igitur, atque officium huius Scientiæ quale porrò ſit, a nomine fit manifeſtum. Id nempe, quod inſitam movet cognitionem, & promit formas, quæ nobis ſecundum eſſentiam inſunt, & infert oblivionem, atque ignorantiam, quæ nobis ab ortu noſtro innatæ ſunt: & ſolvit vincula, quæ ab irrationabilitate proveniunt, ad DEI planè ſimilitudinem, huius Scientiæ Præſidis, qui intelligentia munera manifeſtat, & cuncta divinis rationibus complet: animas quoque ad mentem erigit, ac veluti è profundo exuſcitat ſopore, & inquiſitione ad ſe ipſas cõvertit, & obſtreticatione quadam perficit, puræque mentis inventione ad vitam beatam deducit.

TEONE SMIRNEO

Nell' Eſpoſizione di ciò, che appartiene all' intelligenza delle coſe Matematiche di Platone, al Cap. I. dalla verſione del dottiſſimo Bulialdo.

ERathoſtenes in Libro, cui Platonico nomen impoſuit refert, poſtquam Delios ſuper peſtis liberatione interrogantes, oraculo dato, iuſtiſſet Deus *ALTARE DVPLUM* eius, quod tunc erat erigere, multam Fabris, ingentemque obiectam animi an-

anxietatem quærentibus. *Quomodo oporteat ſolidi dati duplum efficere*. Ipſoſque adiiſſe Platonem de hoc interrogaturos, huncque eis reſpondiſſe, quod DEVS eiuſcemodi Oraculum Deliis ediderit, non quaſi dupli Altaris egenus; ſed obiecerit Græcis, & exprobaverit circa Mathematicas Scientias, & Geometriam, negligentiam, atque ſocordiam.

Più ſotto. Nos Pueros erudimus in Muſica Gymnaſtica, Literis, Geometria, & Arithmetica, nihil aliud molientes, quam ut concipiant (veluti tinturam) rationes de omni virtute quam didiſcerint, ubi prævias deterſiones, purgationes, aliaſque præparationes, has nempe Diſciplinas, quaſi quædam adſtringentia medicamenta, adhibuerimus; ut indelebilis ſententia illorū vigeat, cùm indolem, & educationem commodā nacti fuerint, nè ſtrigmenta illa abſterſiva, colorem, tincturamque abradant, voluptas ſcilicet omni perverſitate, & conſuetudine periculoſior, dolor etiam, metus, & cupiditas alio quovis ſtrigmento magis corroſiva.

Illuſtrazione ingegnoſa del luogo ſopra referito, preſa dalle Note eruditiſſime del Bulialdo.

QUemadmodum igitur lanas præparant Tinctores alumine eas re-

purgando, & condenſando, ita Philoſophus animos Diſcipulorum ſuorum præparat repurgando ipſos ab omnibus præconceptis pravis, diſtortiſque opinionibus, inſtipando que Diſciplinis Mathematicis, ut alia Philoſophica dogmata facilius, & ad ſatietatem imbibant, & firmiſſimè retineant, nec ſe prava mente abripi unquam patiantur.

SEVERINO BOEZIO

Nel Primo Lib. dell' Arimmetica, al Cap. i.

QUibus quatuor, Arithmetica nempe, Geometria, Muſica, & Aſtronomia, ſi careat Inquiſitor, Verum invenire non poſſit, ac ſine hac quidem ſpeculatione Veritatis nulli rectè ſapiendum eſt. Eſt enim Sapientia, earum rerum, quæ veræ ſunt cognitio, & integra comprehenſio. Quòd hæc qui ſpernit, ideſt, has ſemitas Sapientiæ, ei denuncio non rectè philoſophandum. Siquidem Philoſophia eſt Amor Sapientiæ, &c.

IL CARD. NICCOLO' DI CUSA.

Alla ſua Opera de' Compimenti Matematici dedicata alla Santità di PAPA NICCOLO' V. premette la ſeguente Lettera.

TAnta eſt poteſtas ſummi tui Pontificatus *NIC. V. PATER BEATIS-*

TISSIME, ut per eos, qui vim eius attentè conſideraverunt, aſſimiletur, potentiæ quadrandi rotundum, & quadrum circulandi, quaſi maior illa, dari non poſſit. Verum, cum in te non tantùm Primatus ſit clavis, & poteſtas Scientiæ ſupremæque Hierarchiæ Eccleſiæ, ſed velut perfectus Magiſter omnium ſcibilium ex tuo feliciſſimo ingenio incomparabilis notitiæ eſſe iudiceris ab omnibus, id magnificentiſſime effeciſti, ut omnium, tam Græcorum, quàm Latinorum ſcripta, quæ reperiri queunt, tua mirifica diligentia in omnium noſtrum notitiam accuratiſſimè pervenerint Ita ut etiam *Geometrica* non neglexeris; quæ ſanè omni honore digna a Maioribus noſtris habita fuerunt. Tradidiſti enim mihi proximis diebus *MAGNI ARCHIMEDIS GEOMETRICA GRÆCE TIBI PRÆSENTATA, ET TUO STUDIO IN LATINVM CONVERSA*, quæ mihi tam admiranda viſa ſunt, ut circa ipſa non niſi magna cum diligentia verſari potuerim, ex quo id effectum eſt ut meo ſtudio, & labore complementum aliquod illis addiderim; quod, *TUÆ SANCTITATI* offerre decrevi Solùm enim te dignum ſcio, ut quæ a Sæculo incognita remanſe-

runt, per te cunctis patefiant, & non tantùm ſcibilia, quæ ſemper circa quæſitam circuli quadraturam verſari conueverunt; ſed, & quæ in omni Mathematica perfectione præſtant complementum, ex his ipſis meo iudicio perfectè conſequi poſſint.

GIO. BATISTA BENEDETTI.

Nobil Veneziano Filoſofo, e Matematico di gran nome, nella ſua prefazione al Libro degli Orivoli.

SI quæ autem ſunt Diſcipline, quæ ſpeculationis excellentia, tractationis iucunditate, atque uſus utilitate præſtent, hæ profecto ſunt Mathematicæ, per quas, & Divinas operationes intelligimus, & præſtantiſſimum rerum Opificem emulamur dum ſicut ille naturalium, nos artificialium rerum Authores efficimur. Harum uſque adeo hominibus conveniunt, ut vel ex his homines ipſi an vere ſint dignoſcantur. Unde Ariſtippus Cyrenaicus ex naufragio in Rhodiorum litus exceſſus, ubi Mathematicas vidit in pulvere figuras, gaudio geſtiens, proſiliiſſe fertur, quod veſtigia hominum cognoviſſet, &c.

IL P. CRISTOFANO CLAVIO

Matematico celebratiſſimo dell'inclita Compagnia di Gesù, nella ſua Prefazione agli Elementi d'Euclide, al Cap. iv.

SI verò nobilitas, atque præſtantia Scientiæ ex certitudine demonſtrationum, quibus utitur, ſit indicanda, haud dubiè Mathematicæ diſciplinæ inter cæteras omnes præcipuum habent locum. Demonſtrant enim omnia, de quibus ſuſcipiunt diſputationem, firmiſſimis rationibus, confirmantque, ita ut verè Scientiam in Auditoris animo gignant, omnemque prorſus dubitationem tollant; id quod alijs Scientijs vix tribuere poſſumus, cùm in eis ſæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac ſententiarum varietate, in veritate concluſionum iudicanda ſuſpenſus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem apertè faciunt tot Peripateticorum Sectæ (ut alios interim Philoſophos ſilentio involvam) quæ ab Ariſtotele, veluti rami è trunco aliquo, exortæ, adeo & inter ſe, & nonnunquam a fonte ipſo Ariſtotele diſſident, ut prorſus ignores, quid nam ſibi velit Ariſtoteles, num de nominibus, an de re-

rebus potiùs diſputationem inſtituat. Hinc fit, ut pars Intepretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alii Nominales, alij denique Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos ſe eſſe gloriantur) tanquam Ductores ſequantur. Quod, quàm longe a Mathematicis demonſtrationibus abſit, neminem latere exiſtimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in Scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonſtrationumque robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, ſeù Dialogo, qui de ſummo bono inſcribitur, eam Scientiam eſſe digniorem, præſtantioremque, quæ magis ſinceritatis, veritatiſque eſt amans. Cùm igitur Diſciplinæ Mathematicæ Veritatem adeo expetant, adament, excolanque, ut non ſolùm nihil, quod ſit falſum, verum etiam nihil, quod tantùm probabile exiſtat, nihil denique admittant, quod certiſſimis demonſtrationibus non confirment, corroborentque, dubium eſſe non poteſt, quin eis primus locus inter alias Scientias omnes ſit concedendus.

Il medeſimo P. Clavio, più ſotto.

AD has omnes utilitates accedit maxima iucunditas, atque [illegible] luptas, qua cuiuſque animus his Artibus colendis, exercendiſque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex ſeptem Artibus liberalibus, in quibus non ſolùm ingenui Adoleſcentes, verùm etiam nobiles Viri, Principes, Reges, ac Imperatores ad honeſtiſſimam, maximèque liberalem oblectationem animi, quam ſumma etiam cum utilitate coniunctam pariunt, diù, multùmq; verſari ſolebant: quorum exemplum multos adhuc noſtra hac ætate imitari conſpicimus.

IL P. D. BENEDETTO CASTELLI.

Diſcepolo del Galileo, nelle Riſpoſte all' Oppoſizioni di Lodovico delle Colombe, contro al Trattato delle Galleggianti del Galileo; del medeſimo parlando.

PErò dopo l' averſi impennate l'ali con le penne delle Matematiche, ſenza le quali è impoſſibile ſollevarſi un ſol braccio da terra, ha tentato di ſcoprire almeno qualche particella degli infiniti abiſſi della Scienza naturale, la quale egli ſtima tanto

to difficile, ed immenſa, che concedendo lui, molti uomini particolari aver ſaputo perfettamente chi una, e chi un'altra, e chi più d'una dell' altre facultadi, crede poi, che tutti gli uomini inſieme ſtati al Mondo fin'ora, e che ſaranno per l'avvenire, non abbiano ſaputo, nè forſe ſiano per ſapere una piccola parte della Filoſofia naturale.

IL GALILEO

Nel Saggiatore.

PArmi di ſcorgere in alcuni ferma credenza, che nel Filoſofare ſia neceſſario appoggiarſi all'opinioni di qualche celebre Autore, ſicchè la mente noſtra, quando non ſi maritaſſe col diſcorſo d'un'altro, ne doveſſe in tutto rimanere ſterile, ed infeconda; e forſe ſtimano, che la Filoſofia ſia un libro, e una fantaſia d'un' uomo, come l'Iriade, e l'Orlando Furioſo, libri ne' quali la meno importante coſa è, che quel che vi è ſcritto ſia verò. Ma la coſa non iſta così. La Filoſofia è ſcritta in queſto grandiſſimo libro, che continuamente ci ſtà aperto innanzi agli occhi (io dico l'Univerſo) ma e' non ſi può intendere ſe prima non s'impara a 'ntender la lingua, nella quale egli è ſcritto. Egli è ſcritto

in lingua Matematica, ed i caratteri ſono Triangoli, Cerchi, ed altre figure geometriche, ſenza i quali mezzi è impoſſibile intendere umanamente parola; ſenza queſti è un' aggirarſi vanamente per un oſcuro Laberinto.

IL GALILEO

Nella prima Giornata de due Siſtemi.

Salv. SIgnor Simplicio, noi ſiamo qui tra noi diſcorrendo famigliarmente per inveſtigare qualche verità; io non avrò mai per male che voi mi paleſiate i miei errori, e quand' io non avrò conſeguita la mente d' Ariſtotile, riprendetemi pur liberamente, ch' io ve ne avrò buon grado. Concedetemi in tanto ch'io eſponga le mie difficultà, e ch' io riſponda ancora alcuna coſa alle voſtre ultime parole, dicendovi, che la Logica, come beniſſimo ſapete, è l' Organo, col quale ſi filoſofa; ma ſiccome può eſſer, ch' un Artefice ſia eccellente in fabbricar Organi, ma imperito in ſapergli ſonare, così può eſſer un gran Logico, ma poco eſperto nel ſaperſi ſervire della Logica: ſiccome ci ſon molti, che ſanno per lo ſenno a mente tutta la poetica, e ſon poi infe-

lici nel comporre quattro verſi ſolamente: altri poſſeggono tutti i precetti del Vinci, e non ſaprebbero poi dipignere uno ſgabello. Il ſonar l'Organo non s'impara da quegli, che ſanno far Organi, ma da quegli, che gli ſanno ſonare: la Poeſia s'impara dalla continua Lettura de' Poeti: il dipignere s'apprende col continuo diſegnare, e dipignere: e il dimoſtrare, dal continuo ſtudio de' libri pieni di Dimoſtrazioni, che ſon poi i libri Matematici ſoli, e non i Logici. Ora tornando al propoſito, &c.

IL GALILEO
Nella ſeconda Giornata.

Dopo aver il Salv. addotto unn Dimoſtrazione Fiſica Matematica intorno ad un ſuppoſto effetto Fiſico, ſoggiugne così il

Sagr. VEramente il diſcorſo è molto ſottile, ma altrettanto concludente; ed è forza confeſſare, ch' il voler trattare le quiſtioni Naturali ſenza Geometria, è un tentar di far quello, che è impoſſibile ad eſſer fatto.

IL GALILEO

Nella terza Giornata

Interrogato Simpl. dal Sagr. di quello gli paia d' un diſcorſo Fiſico Matematico fatto, ex hypotheſi *dal Salv. così riſponde.*

Simpl. QUeſte, (s' io devo dire il parer mio con libertà) mi paiono di quelle ſottigliezze geometriche, le quali Ariſtotele riprende in Platone, mentre lo accuſa, che per troppo ſtudio della Geometria ſi ſcoſtava dal ſaldo filoſofare: ed io ho conoſciuti, e ſentiti grandiſſimi Filoſofi Peripatetici ſconſigliare i lor Diſcepoli dallo ſtudio delle Matematiche, come quelle, che rendono l' intelletto cavilloſo, ed inabile al ben filoſofare; inſtituto diametralmente contrario a quello di Platone, che non ammetteva alla Filoſofia ſe non chi prima foſſe impoſſeſſato della Geometria.

Salv. Applaudo al conſiglio di queſti voſtri Peripatetici di diſtorre i loro Scolari dallo ſtudio della Geometria, perchè non ci è arte alcuna più accomodata di queſta per iſcoprire le fallacie loro; ma vedete quanto coteſti ſieno differenti da' Filoſofi Matematici, i quali aſſai più volentieri trattano con quei, che

ſo-

ſono informati della comune Filoſofia Peripatetica, che con quei, che mancano di tal notizia, i quali, per tal mancanza, non poſſono far paragone tra dottrina, e dottrina.

Gli Accademici del Cimento, nel Proemio al Lettore.

LA Geometria dando alla bella prima nel vero ne libera in un ſubito da ogn'altro più incerto, e faticoſo rintracciamento. Il fatto è che ella ci conduce un pezzo innãzi nel cammino delle filoſofiche ſpeculazioni, ma poi ella ci abbandona in ſul bello; Non perchè la Geometria non cammini ſpazzi infiniti, e tutta non traſcorra la univerſità dell' Opere della Natura, ſecondo che tutte obbediſcono alle Matematiche leggi, onde l'eterno intendimento con liberiſſimo conſiglio le governa, e le tempera, ma perchè di queſta sì lunga, e ſpazioſa via per anche non le tenghiamo dietro, che pochi paſſi.

E poco più ſotto. Quivi dunque (cioè nelle eſperienze) fa di meſtieri l'intenderſi da Maeſtro delle maniere del vero, e del falſo, e uſare dell' ultima perſpicacia del proprio giudizio per diſcerner bene s' ell' è, o non è. Il che per poter far me-

glio

glio non v' è dubbio, che e' biſognerebbe aver veduto alcuna volta la verità ſvelata, ed è queſto un vantaggio, che hanno ſolamente coloro, che degli ſtudi della Geometria hanno preſo qualche ſapore.

SENOFONTE

Nel libr. 4. delle Coſe memorabili.

PRimum Geometriam eo uſque diſcendam aiebat (Socrates) donec quis poſſet, ſi uſus ita ferret, terram, vel recta metiendi ratione accipere, vel tradere, vel diſtribuere, vel opus deſignare. Atque hoc tam poſſe diſci facile, ut qui animum ad dimenſionem advertat is, & ſcire poſſit, quanta ſit ipſa terra, &c.

CICERONE

nel Lucullo, ovvero lib. ii. delle Quiſtioni Accademiche.

GEometræ provideant, qui ſe profitentur non perſuadere, ſed cogere, & qui omnia vobis, quę deſcribunt probant, non quæro ex his illa initia mathematicorum, quibus non conceſſis, digitum progredi non poſſunt.

E nel libro primo delle Tuſcul. parlando de' Greci.

IN ſummo apud illos honore Geometria fuit: itaque nihil mathematicis illuſtrius.

SE-

SENECA

Epiſtola 88.

QUum ventum eſt ad naturales quęſtiones Geometriæ teſtimonio ſtatur.

PLUTARCO

Nelle Queſtioni Simpoſiache libr. vii. queſt. ii. dalla verſione di Guglielmo Silandro.

GEometria, quam Philo reliquorum principem, & Metropolin vocat excitat, & convertit intellectum veluti repurgatum, & paulatim a ſenſu liberatum.

FILONE EBREO

Nel libro de Cherubim.

GEometria vero proportione æqualitatem afferens, & quicquid in nobis enorme, immodicum, in concinnum eſt, per rhythmos, menſuras, moduloſq; muſicæ civilis recurans.

CELIO RODIGINO.

Nel lib. vii. delle Antiche Lezioni Cap. xxx.

PYthagoras autem, & cum eo multi, qui illo duce purius excitaſſe mentem videntur, ampliſſime aſtruxerunt, abſque mathematico quadrivio haud facile philoſophiæ opicem contingi, nec poſſe verum percipi. Propterea qui illud neglectui habue-

buerit, cogitare ſubinde debet ſe philoſophari haud recte. Quoniam mathematicæ diſciplinæ ſubtellia quædam ſint, ac elementa, vel gradus, quibus conſcendantur altiora, &c. Ceterum initio Geometria præcipuè, & Arithmetica in mathematicarum album a Pythagora ſunt advocatæ, quod ad omnem ſcientiam, omnemque diſciplinam capeſſendam has cum primis accomodas perſpexiſſet. Hinc & illa feſtiva vox Socratici Ariſtippi profluxit, opinor, qui ex naufragio in Rhodiorum littus maris impetu, & ventis aſſilientibus quum foret excuſſus, ac inibi mathematicas formulas eſſet intritus, gaudio geſtiens proſilivit, & bene ſperare comites iuſſit quoniam veſtigia hominum noſcitaret. Sed enim mathematica ſpeculatio ad cognitionis acumen a Platone ſuſcepta eſt, quia ſurrigat animum, & ad rerum divinarum intuitum aciem mentis exacuat, &c. Nam mathematicas ſpeculationes veluti præludium quoddam ad divinorum perpenſionem ſtatuere convenit.

EVAN-

EVANGELISTA TORRICELLI.

Nella Nona Lezione Accademica in lode delle Mattematiche.

CHe per leggere il gran Volume dell' Univerſo [cioè quel libro, ne i fogli del quale dovrebbe ſtudiarſi la vera filoſofia ſcritta da Dio] ſieno neceſſarie le Mattematiche, quegli ſe n'accorgerà, il quale con penſieri magnamini, aſpirerà alla ſcienza delle parti integranti, e de i membri maſſimi di queſto gran corpo, che ſi chiama Mondo. Quando alcuno deſideraſſe di ſapere le diſtanze de' Pianeti, e delle ſtelle, sì fra di loro, come ancora in paragon della terra, quando altri ricercaſſe le proporzioni delle loro grandezze, ovvero i tempi preciſi de' loro periodici movimenti; ſe alcuno deſideraſſe conoſcer da ſe ſteſſo l' ampiezza di queſta palla terrena, che giornalmente calpeſtiamo; ſe chiedeſſe, onde procede la varietà delle ſtagioni; qual ſia la cauſa dell' inuguaglianza de' giorni, la quale in tutti modi ſi diverſifica ſecondo le varie obliquità della ſfera.

Quid tantum oceano properent ſe tingere ſoles
Hiberni: vel qua tarda mora noctibus obſtet.

Quan-

Quando investigasse le precessioni degli Equinozj, i termini degli Eclissi, la trepidazione del Firmamento, e cose simili; certo s'accorgerebbe, che l'unico Alfabeto, e i soli caratteri, con i quali si legge il grã manoscritto della Filosofia divina nel libro dell' Universo, non sono altro, che quelle misere figure, che vedete ne' Geometrici elementi.

IL MEDESIMO TORRICELLI PIU' SOTTO.

VEnga la Geometria, la quale dovrebbe stimarsi, siccome veramente è la madre, e la regina di tutte le Scienze Mattematiche. Dovremmo riconoscere da lei tutti i giovamenti, e tutti i diletti, che derivano dall' Aritmetica, e dalla Musica, dall' Astronomia, e dalla Meccanica, e dalla Geografia, dall'Architettura, dall' Ottica, e da tutte l' altre figliuole subalternate alla Mattematica famiglia. Ma per toccar qualche suo proprio particolare, quante volte ci occorre il misurar la superficie de' campi, e la tenuta de' Poderi? Come spesso si ricerca, quante braccia cube di fabbrica sieno in un muro? Quanto sia il vano, e la capacità di una casa, o di qualunque vaso di che figura si sia? Quante braccia di terra

ſieno in un monte da traſportarſi; quante ne foſſero in un pozzo, o in un foſſo prima, che fuſſe lavorato; quant' acqua paſſi per un fiume in un' ora, ovvero in altro aſſegnato ſpazio di tempo. Queſte, e molt' altre ſimili, ſon quiſtioni, che dal ſolo Geometra, e non da alcun altro profeſſore poſſono eſſere ſciolte, e determinate. Quante volte accade dover levar piante di Città, di Fortezze, e anco di Provincie? La Geometria con ſemplici ſtrumenti vi deſcriverà la pianta deſiderata, ancora quando non poſſa avvicinarſi al luogo da deſcriverſi. Miſurerà coll'occhiate, ed eſcluderà colla lunghezza dello ſguardo, l'attività dell' Artiglierie. Ella dirà l'altezza di quella Rocca, o di quel Caſtello ſenza appreſſarviſi; ella ſopra quanto ſia il perpendicolo di quel Monte, o il diametro di queſto globo ancorchè l' uno, e l'altro ſtia immerſo nell'alriſſime viſcere del terreno Ella finalmente porterà le miſure, dovunque arriverà colla viſta; e non ſarà poſſibile nè anco all'altiſſimo Saturno d'eſentarſi dalle dimenſioni delle ſagaciſſima Geometria. Laſcio ſtar da parte, &c.

DE-

DEGLI

ELEMENTI D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO PRIMO.

DIFFINIZIONI.

I.

IL PUNTO è quello, che non ha parte, ovvero che non ha grandezza alcuna.

II.

La linea è una lunghezza ſenza larghezza.

III.

I fini della linea ſono i punti

IIII.

La linea retta è quella, che

ſi diſtende ugualmente fra' ſuoi punti.

V.

La ſuperficie è quella, che ſolamente ha lunghezza, e larghezza.

VI.

I fini della ſuperficie ſono le linee.

VII.

La ſuperficie piana è quella, che giace ugualmente fra le ſue linee.

VIII.

L' angolo piano è quella inclinazione, che fanno due linee, quando in un punto ſi toccano, e non ſon poſte dirittamente fra loro.

IX.

E quando le linee, che contengono l' angolo ſono rette, ſi chiama tal angolo rettilineo. Ma

X.

Ma quando la linea retta ſtando ſopra un' altra retta, fa gli angoli da i lati fra loro uguali, ſono amendue retti; e la linea, che ſta ſopra, ſi chiama perpendicolare a quella, alla quale ella ſopraſtà.

XI.

L' angolo ottuſo è quello, che è maggior del retto.

XII.

L' angolo acuto è quello, che è minore del retto.

XIII.

Il termine è fine di qualche coſa.

XIIII.

La figura è quella, che è contenuta da uno, o da più termini.

XV.

Il cerchio è una figura piana contenuta da una linea, che ſi chiama circonferenza, alla quale quante linee rette pervengono tirate da un punto, che è dentro alla figura, tutte fra loro ſono uguali.

XVI.

E queſto tal punto ſi chiama centro del cerchio.

XVII.

Il diametro del cerchio è una linea retta, che paſſa per lo centro, e dall'una, e l'altra parte è terminata dalla circonferenza, la quale eziandio divide il cerchio per mezzo.

XVIII.

Il mezzo cerchio è una figura contenuta dal diametro, e dalla metà della circonferenza.

La

XIX.

La porzione del cerchio è una figura contenuta dalla linea retta, e dalla circonferenza del cerchio.

XX.

Le figure, che ſono contenute da linee rette, ſi chiamano rettilinee.

XXI.

E ſe ſono contenute da tre linee, s'addimandano trilatere

XXII.

Se da quattro, quadrilatere.

XXIII.

Se da più di quattro, molti latere.

XXIIII.

Delle figure trilatere è il triangolo equilatero, il quale ha tre lati uguali.

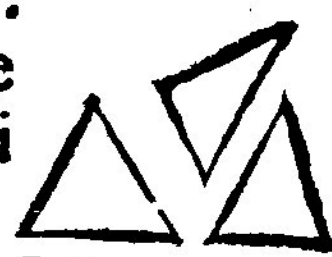
XXV.

L'iſoſcele, ovvero equicru-

re, che ha ſolamente due lati uguali.

XXVI.

Loſcaleno, che ha tutti tre i lati diſuguali.



XXVII.

Oltre a ciò delle figure trilatere è il triangolo rettangolo, il quale contiene in ſe un angolo retto.

XXVIII.

L'ottuſiangolo, che ha un angolo ottuſo

XXIX.

L' Acuziangolo, che ha tutti tre gli angoli acuti.

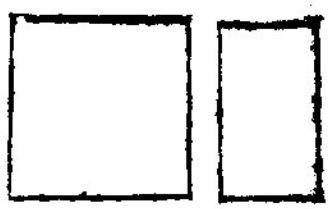
XXX.

Delle figure quadrilatere è il quadrato, il quale è equilatero, e rettangolo.

La

XXXI.

La figura dall' una parte più lunga è quella, che è rettangola, ma non equilatera.

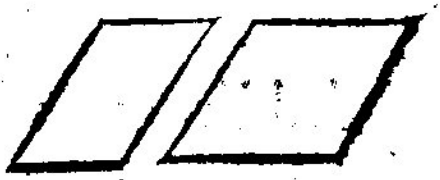


XXXII.

Il Rombo è una figura, che è equilatera, ma non rettangola.

XXXIII.

Il Romboide è una figura, che ha i lati, e gli angoli opposti fra loro uguali, ma non è nè equilatera, nè rettangola.



XXXIIII.

Oltre a questo, tutte l'altre figure quadrilatere si chiamano trapezij.

XXXV.

Le linee parallele, o equidiſtanti ſono quelle, le quali eſſendo in un medeſimo piano, e prolungate in infinito dall' una, e l' altra parte, non ſi congiungono giammai inſieme.

POSTULATI, OVVERO DIMANDE.

I.

Addimandaſi da qualſivoglia punto a qualſivoglia punto tirare una linea retta.

II.

Prolungare una linea retta terminata in continuo, e dirittamente.

III.

Da qualſivoglia centro, e con qualſivoglia intervallo deſcrivere un cerchio.

Tut-

IIII.

Tutti gli angoli retti eſſere uguali fra loro.

V.

E ſe ſopra due rette linee cadendo una retta farà gli angoli interiori, e da una medeſima parte minori di due retti, quelle linee prolungate in infinito congiungerſi inſieme da quella parte, dove ſono gli angoli minori di due retti.

ASSIOMI, OVVERO COMUNI NOTIZIE.

I.

Quelle coſe, che ſono uguali ad una medeſima, ſono ancora fra loro uguali.

II.

Se alle coſe uguali, ſi ag-

giungono coſe uguali, tutte ſono uguali fra loro.

III.

Se dalle coſe uguali ſi traggono coſe uguali, eziandio le rimanenti ſono uguali fra loro.

IIII.

Se alle coſe diſuguali ſi aggiungono coſe uguali, tutte ſono diſuguali.

V.

Se dalle coſe diſuguali ſi traggono coſe uguali, le rimanenti ſono diſuguali.

VI.

Le coſe, che ſono doppie di una medeſima, ſono uguali fra loro.

VII.

Le coſe, che ſono la metà di una medeſima, ſono fra loro uguali.

Quel-

VIII.

Quelle cose che convengono, e si adattano bene insieme, sono uguali.

IX.

Il tutto è maggiore della sua parte.

X.

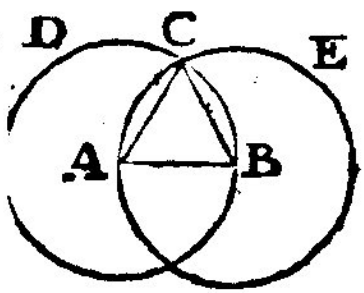
Due linee rette non comprendono spazio alcuno.

PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE I.

Sopra una data retta linea terminata costituire il triangolo equilatero.

Sia la data retta linea terminata A B. bisogna sopra essa costituire il triangolo equilatero. Dal centro A coll'intervallo A B descrivasi il cerchio B C D. similmente dal *Post.* 3. centro B coll' intervallo B A descrivasi un altro cerchio A C E, e dal punto C, nel quale i cerchi fra loro si segano, alli punti A B siano



Poſt. primo tirate le linee rette C A, C B. perchè dunque A è centro del cerchio B C D, ſarà la A C uguale alla A B. *Diff. 15* e perchè ancora B è centro del cerchio A C E, ſarà la B C uguale alla B A, e fu la C A dimoſtrata uguale alla A B, adunque l'una, e l'altra di eſſe C A, C B è uguale alla A B. ma quelle coſe, che ſono uguali ad una medeſima, ſono ancora fra loro uguali, onde la C A è uguale alla C B, e le tre linee C A, A B, B C ſono uguali fra loro. il triangolo dunque A B C, è equilatero, ed è coſtituito ſopra la data retta linea terminata A B, il che biſognava fare. *1. com. not.*

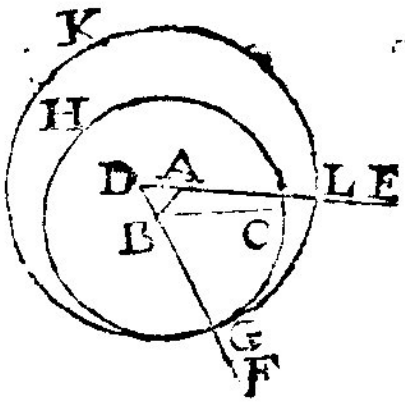
PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE II.

Da un punto dato tirare una linea retta uguale ad un altra linea data.

Sia il dato punto A, e la data retta linea B C. biſogna dal punto A ti-

A tirare una linea retta uguale alla retta BC. Tirisi dal punto A al B la retta linea A B, e sopra essa costituiscasi il triangolo equilatero D A B, e si prolunghino per diritto alle D A, D B le linee rette A E, B F, e dal centro B, con l' intervallo B C descrivasi il cerchio C G H, e similmente dal centro D, con l' intervallo D G, descrivasi il cerchio G K L. perchè dunque il punto B è centro del cerchio C G H, sarà la B C uguale alla B G, oltre a ciò perchè D è centro del cerchio G K L, sarà la D L uguale alla D G: delle quali la D A è uguale alla D B, adunque la rimanente A L è uguale alla rimanente B G, e si è dimostrata la B C uguale alla B G. onde l' una, e l' altra A L, B C è uguale alla B G, e quelle cose, che sono uguali ad una medesima, sono fra loro uguali, e però la A L è uguale alla B C. adunque dal punto dato A, si è tirata la linea retta A L uguale alla data retta linea B C, il che bisognava fare.



Post. prima. Prop. prima Post. 2. 3

Diff. 15

Com. not. 3.

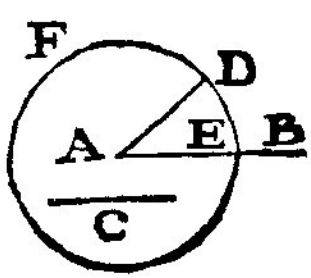
Com. not. 1.

PRO-

PROBLEMA III.

PROPOSIZIONE III.

Date due linee rette diſuguali, dalla maggiore tagliarne una uguale alla minore.



Siano date due linee rette diſuguali A B, C, delle quali A B ſia maggiore; biſogna dalla maggiore A B tagliare una linea retta uguale alla minore C. Tiriſi dal punto A la linea retta A D uguale alla C, e dal centro A con l'intervallo A D deſcrivaſi il cerchio D E F. e perchè A è centro del cerchio D E F, ſarà la A E uguale alla A D. ma ancor la C è uguale alla A D, adunque l'una, e l'altra delle A E, C ſarà uguale alla A D, e però ancor la A E è uguale alla C. date dunque due linee rette diſuguali A B, C dalla A B ſi è tagliata la A E uguale alla minore C. il che biſognava fare.

Per l' ant. poſt. 3.

Diff. 15.

Com. not. 1.

THE.

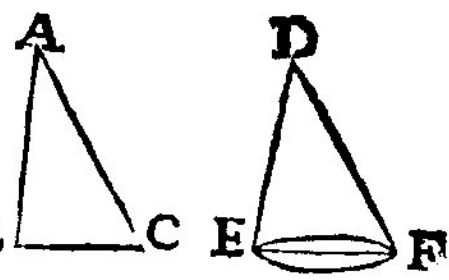
TEOREMA I.

PROPOSIZIONE IIII.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e hanno un angolo uguale ad un angolo, che è contenuto da linee rette uguali, averanno ancor la baſe uguale alla baſe, ed il triangolo ſarà uguale al triangolo, e gli altri angoli a gli altri angoli, l'uno all'altro, a quali ſono ſottopoſti i lati uguali.

Siano due triangoli A B C, D E F, quali abbiano due lati A B, A C uguali a due lati D E D F, l'uno all'altro, cioè il lato A B uguale al lato D E, ed il lato A C a D F, e l'angolo B A C uguale all'angolo E D F. Dico ancor la baſe B C eſſer uguale alla baſe E F, ed il triangolo A B C uguale al triangolo D E F, e gli altri angoli uguali a gli altri angoli, l'uno all'altro, a quali ſono ſottopoſti i lati uguali, cioè l'angolo

golo A B C all'angolo D E F, e l'angolo A C B all' angolo D F E perciocchè adattandoſi il triangolo A B C al triangolo D E F, e poſto il punto A ſopra D, e la retta linea A B ſopra la D E, ancor il punto B ſi adatterà al punto E, per eſſer la A B uguale alla D E, e adattandoſi la A B alla D E, eziandio la linea retta A C ſi adatterà alla D F, conciofiacoſachè l' angolo B A C ſia uguale all'angolo E D F, onde ancor il punto C ſi adatterà ad F, perchè la linea retta A C è uguale alla linea retta D F, ma eziandio il punto B ſi adattava ad E, adunque la baſe altresì B C ſi adatterà alla baſe E F, perciocchè ſe adattandoſi il punto B al punto E, e C ad F, la baſe B C non ſi adatterà alla baſe E F, due linee rette comprenderanno ſpazio, che non può eſſere, adunque la baſe B C ſi adatterà alla baſe E F, e ſarà uguale ad eſſa, onde ancor tutto il triangolo A B C ſi adatterà a tutto il triangolo D E F, e gli ſarà uguale, e gli



altri

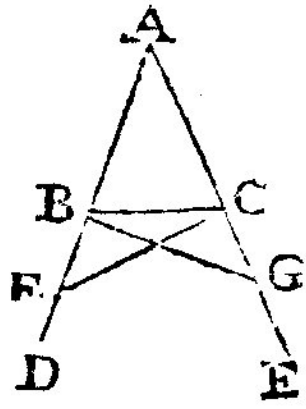
altri angoli si adatteranno a gli altri angoli, e saranno uguali ad essi, cioè l'angolo A B C all'angolo D E F, e l'angolo A C B all'angolo D F E, adunque se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, ed hanno un angolo uguale ad un angolo, che è contenuto da linee rette uguali, averanno ancor la base uguale alla base, ed il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli altri angoli a gli altri angoli, l'uno all'altro, a quali sono sottoposti i lati uguali, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE V.

Gli angoli de'triangoli equicruri sopra la base sono uguali fra loro, e prolungandosi le linee rette uguali, gli angoli sotto la base saranno ancora fra loro uguali.

Sia il triangolo equicrure A B C, c' abbia il lato A B uguale al lato A C, e si prolunghino le rette linee



nee B D, C E per diritto alle A B, A C. Dico l' angolo A B C eſſer uguale all'angolo A C B, e l' angolo C B D all' angolo B C E. Pigliſi nella linea B D qualſivoglia punto F, e dalla maggiore A E tagliſi A G uguale alla minore A F; e congiunganſi F C, G B. Perchè dunque la A F è uguale alla A G, e la A B alla A C, le due F A A C ſono uguali alle due G A A B, l'una all' altra, e contengono l'angolo comune F A G, onde la baſe F C è uguale alla baſe G B; ed il triangolo A F C uguale al triangolo A G B, e gli altri angoli ſaranno uguali a gli altri angoli, l' uno all' altro, a quali ſono ſottopoſti i lati uguali, cioè l'angolo A C F uguale all' angolo A B G, e l'angolo A F C all' angolo A G B, e perchè tutta la linea A F è uguale a tutta la A G delle quali la parte A B è uguale alla parte A C, ſarà la rimanente ancor B F uguale alla rimanente C G, ma la F C fu moſtrata uguale alla G B, adunque le due B F F C

Per 4. pri.

3. com. not.

ſono

ſono uguali alle due C G, G B l'una all'altra, e l'angolo B F C uguale all'angolo C G B, e la baſe di eſſi B C è comune, il triangolo dunque B F C ſarà uguale al triangolo C G B, e gli altri angoli a gli altri angoli, l'un all'altro, a quali ſono ſottopoſti i lati uguali, adunque l'angolo F B C, è uguale all'angolo G C B, e l'angolo B C F all'angolo C B G, e perchè tutto l'angolo A B G, è ſtato dimoſtrato uguale a tutto l'angolo A C F, de' quali l'angolo C B G, è uguale all'angolo B C F, ſarà il rimanente A B C uguale al rimanente A C B, e ſono ſopra la baſe del triangolo A B C, e fu dimoſtrato l'angolo F B C uguale all'angolo G C B, quali ſono ſotto la baſe, gli angoli dunque de' triangoli equicruri ſopra la baſe ſono uguali fra loro, e prolungate le rette linee uguali, gli angoli ſotto la baſe ſaranno ancora fra loro uguali, il che era biſogno di moſtrare.

Per l'ant.

3. Com. ant.

AVVERTIMENTO.

MA perchè la dimoſtrazione dell'antecedente propoſizione attribuita da Proclo a Talete, arrecar ſuole

le a' Principianti nella Geometria sì gran difficultà, che riuscendo talora malagevole a molti il passarla felicemente, e senza inciampo, alcuni non proseguiscono più oltre il viaggio loro; sovvenne a Vincenzio Viviani già son più di 60. anni, altra maniera più facile di dimostrare in primo luogo la prima parte solo di tal proposizione, poichè la prova della seconda egli vedde, che si poteva immediatamente cavare dalla proposizione 13. di questo libro senza bisogno sin quivi d'usarla mai, perciò è paruto bene inserirla in questo luogo, sapendo, che non solo Vincenzio Viviani, che ne fu l' inventore, ma ancora molt' altri sono stati soliti di spiegarla, e darla nel modo, che segue, dependendo tutta dalla passata 4. proposizione.

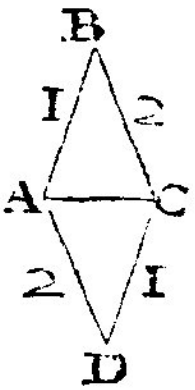
Prima parte dell' antecedente proposizione.

IN ogni triangolo equicrure gli angoli sopra la base sono uguali fra loro.

DEL *triangolo A B C sieno i lati uguali B A, B C. Dico che*

che gli angoli B A C, B C A sopra la base A C sono tra loro uguali.

IMMAGINIAMOCI rivoltarsi il triangolo A B C intorno la sua base A C, e cadere dalla parte contraria in A D C, in modo, che il lato A B cada in A D, il C B in C D, siccome l'angolo B in D, l'angolo B A C in D A C, e'l B C A in D C A.



QUI è manifesto, che essendo A B uguale ad A D, e C B a C D, e i due A B, C B, dati uguali, anco i due A D, C D saranno uguali, e perciò tutti quattro uguali: onde per nostra comodità potremo ne' triangoli A B C, A D C contrassegnare i lati a modo nostro, e dire che il lato A B nel primo è uguale al lato C D nel secondo il C B nel primo all' A D nel secondo, e l'angolo compreso A B C nel primo, è uguale all' angolo C D A nel secondo, (per esser questo per così dire l'impronta di quello) ficchè, per la precedente quarta Proposizione, gli angoli rimanenti opposti a' lati uguali sono uguali: cioè l'angolo, per esempio, B A C, nel primo triangolo, opposto al lato

B C ſegnato 2, è uguale all' angolo D C A nel ſecondo, oppoſto al lato D A ſegnato 2: ma ancora l'angolo B C A del primo è uguale all' angolo medeſimo D C A del ſecondo, (per eſſer queſto ancora la ſtampa, o l' impronta di quello) adunque ſe l' uno, e l' altr' angolo B A C, B C A è uguale al medeſimo D C A, quei due ſaranno fra loro uguali, e ſono ſopra la baſe A C del dato triangolo equicrure A B C. Adunque è manifeſto quanto ſi propoſe di dimoſtrare.

TEOREMA III.

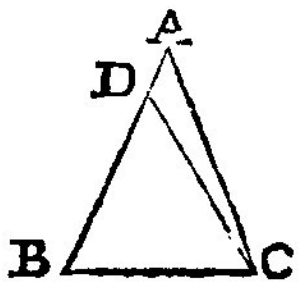
PROPOSIZIONE VI.

Se due angoli d' un triangolo ſieno uguali fra loro, eziandio i lati, che ſono ſottopoſti a gli uguali angoli, ſaranno fra loro uguali.

Sia il triangolo A B C, che abbia l' angolo A B C uguale all'angolo A C B. Dico ancor il lato A B eſſere uguale al lato A C, perciocchè ſe la A B non è uguale alla A C, una di eſſe ſarà maggiore,

ſia

sia maggiore la AB, e dalla maggiore AB tagliſi la DB uguale alla minore AC, e giungaſi DC, perchè dunque la DB è uguale alla AC, e la BC è comune, ſaranno le due DB, BC uguali alle due AC, CB, l'una all'altra, e l'angolo DBC è uguale all' angolo ACB, onde la baſe DC è uguale alla baſe AB, ed il triangolo DBC uguale al triangolo ACB, il minore al maggiore, che è inconveniente; non è dunque la AB diſuguale alla AC, ma ſarà uguale. e però ſe due angoli d' un triangolo ſiano uguali fra loro, eziandio i lati, che ſono ſottopoſti agli uguali angoli, ſaranno fra loro uguali, il che biſognava dimoſtrare.



3. *di queſ.*

4. *di queſ.*

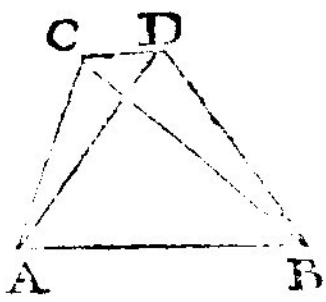
TEOREMA IIII.

PROPOSIZIONE VII.

Nella medeſima retta linea non ſi conſtituiranno in diverſi punti due linee rette uguali a due medeſime rette linee,

l'un'

l' un' all'altra, dalle medeſime parti, c'abbiano i medeſimi termini, che le prime.



Conſtituiſcanſi ſe ſia poſſibile, nella medeſima retta linea AB a due medeſime linee rette AC, CB due altre rette linee uguali AD, DB l'una all' altra in diverſi punti CD, dalle medeſime parti come CD, c'abbiano li medeſimi termini AB, che le prime rette linee, di modo che la CA ſia uguale alla DA, qual ha il medeſimo termine A, e la CB ſia uguale alla DB, che ha il medeſimo termine B, e giungaſi CD. perchè dunque la AC è uguale alla AD, ſarà ancor l'angolo ACD uguale all' angolo ADC, onde l' angolo ADC è maggiore dell' angolo DCB, e però l' angolo CDB ſarà molto maggiore dell' angolo DCB; oltre a ciò perchè la CB è uguale alla DB, eziandio l' angolo CDB ſarà uguale all' angolo DCB, ma ſi è dimoſtrato aſſai maggiore di eſſo, che

5. *di queſ.*

che è impoſſibile, adunque nella medeſima retta linea non ſi conſtituiranno in diverſi punti due linee rette uguali a due medeſime rette linee, l' una all' altra, dalle medeſime parti, c' abbiano i medeſimi termini, che le prime, il che biſognava dimoſtrare.

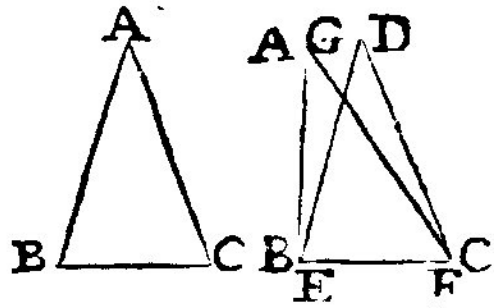
TEOREMA V.

PROPOSIZIONE VIII.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, ed hanno la baſe uguale alla baſe, averanno ancora l' angolo contenuto da uguali lati, uguale all' angolo.

Siano due triangoli A B C, D E F, che abbiano due lati A B, A C uguali a due lati D E, D F, l'uno all' altro, di modo che A B ſia uguale a D E, ed A C a D F, ed abbiano la baſe B C uguale alla baſe E F. Dico ancor l' angolo B A C eſſere uguale all' angolo E D F. Percioc-chè ſtando il triangolo A B C ſopra il triangolo D E F, e poſto il punto B ſopra E, e la linea retta B C ſopra

la E F, eziandio il punto C ſarà ſopra il punto F, perchè la B C è uguale alla E F. Onde ſtando B C ſopra E F, ſtaranno ancora le B A, A C ſopra le E D, D F, perchè ſe la baſe BC ſarà poſta ſopra la baſe E F, ed i lati B A, A C non ſiano poſti ſopra i lati E D, D F, ma ſi permutino, come E G, G F, ſaranno conſtituite nella medeſima retta linea in diverſi punti due linee rette uguali a due medeſime rette linee, l'una all' altra, dalle medeſime parti, che hanno i medeſimi termini; ma non ſi conſtituiſcono, come ſi è dimoſtrato, non è dunque vero, che ſe la baſe B C, è ſopra la baſe E F, non ſiano i lati B A, A C ſopra i lati E D, D F, adunque converranno inſieme, e l'angolo B A C ſarà ſopra l' angolo, E D F, e gli ſarà uguale, onde ſe due triangoli anno due lati uguali a due lati, l'uno all' altro, ed hanno la baſe uguale alla baſe, averanno ancora l' angolo contenuto da uguali lati, uguale all' angolo, il che biſognava dimoſtrare.



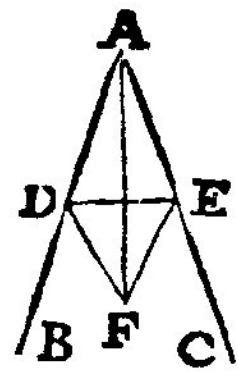
Per l' ant.

PRO-

PROBLEMA IIII.

PROPOSIZIONE IX.

Dividere per mezzo un angolo rettilineo dato.



Sia il dato angolo rettilineo B A C, biſogna dividerlo per mezzo. Pigliſi nella linea A B qualſiſia punto D, e dalla linea A C tagliſi la A E uguale alla A D, e giunta D E conſtituiſcaſi ſopra eſſa il triangolo equilatero D E F, e giungaſi A F. Dico l'angolo B A C eſſere diviſo per mezzo dalla linea retta AF; perciocchè eſſendo la A D uguale alla A E, e la A F comune, ſaranno le due D A, A F uguali alle due E A, A F, l'una all'altra, e la baſe D F è uguale alla baſe E F, adunque l'angolo D A F, è uguale all'angolo E A F, e però l'angolo rettilineo dato B A C è diviſo per mezzo dalla linea retta A F, il che biſognava fare.

3. di queſ.

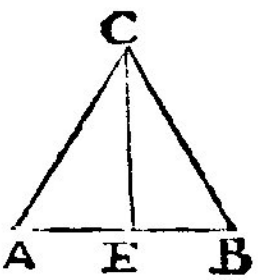
1. di queſ.

Per l'ant.

PROBLEMA V.

PROPOSIZIONE X.

Dividere per mezzo una data retta linea terminata.



Sia la data retta linea terminata A B, bisogna dividerla per mezzo. Costituiscasi sopra essa il triangolo equilatero A B C, e l'angolo A C B dividasi per mezzo con la linea retta C E. Dico la linea retta A B esser divisa per mezzo nel punto E, perciocchè essendo la A C uguale alla C B, e la C E comune, le due A C, C E sono uguali alle due B C, C E, l'una all'altra, e l'angolo A C E è uguale all'angolo B C E, adunque la base A E, è uguale alla base B E, e però la linea retta terminata A B è divisa per mezzo nel punto E, il che bisognava fare.

1. *di quest.*

L'ant.

4. *di quest.*

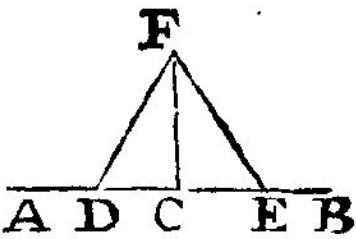
PROBLEMA VI.

PROPOSIZIONE XI.

Tirare una linea retta per-

pen-

pendicolare ad una data retta linea da un punto dato in essa.



Sia la data retta linea A B, ed il punto dato in essa C, bisogna dal punto C tirare una linea retta perpendicolare alla A B. Pigliſi nella A C qualſivoglia punto D, ed alla C D pongaſi uguale la C E, e ſopra D E conſtituiſcaſi il triangolo equilatero F D E, e giungaſi C F. Dico eſſer tirata una linea retta F C perpendicolare alla retta data A B dal punto C dato in eſſa, perciocchè eſſendo la D C uguale alla C E, e la F C comune, ſaranno le due D C, C F uguali alle due E C, C F, l'una all'altra, e la baſe D F è uguale alla baſe F E, adunque l'angolo D C F è uguale all'angolo E C F, e ſono conſeguenti, ma quando la linea retta ſtando ſopra un'altra linea retta fa gli angoli conſeguenti uguali fra loro, ciaſcuno degli angoli uguali è retto, adunque ciaſcuno d'eſſi D C F, F C E è retto, e però ſi è tirata la linea retta F C perpendicolare alla data retta linea A B dal punto C dato in eſſa, il che biſognava fare.

3. *di queſ.*

1. *di queſ.*

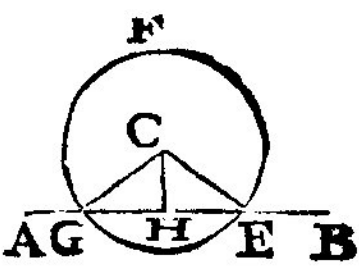
8. *di queſ.*

10 *Diff.*

PROBLEMA VII.

PROPOSIZIONE XII.

Sopra una data retta linea infinita da un punto dato, che non ſia in eſſa, tirare una linea retta perpendicolare.



Sia la data retta linea infinita A B, e il dato punto C, che non ſia in eſſa, biſogna ſopra la data retta linea infinita A B dal punto dato C, che non è in eſſa, tirare una linea retta perpendicolare. Pigliſi dall' altra parte della linea retta A B qualſivoglia punto E, e dal centro C coll' intervallo C E deſcrivaſi il cerchio E F G, e la E G ſia ſegata per mezzo nel punto H, e giungaſi C G, C H, C E. Dico ſopra la data retta linea infinita A B dal punto dato C, che non è in eſſa, eſſere tirata la C H perpendicolare; perciocchè eſſendo la G H uguale alla H E, e la H C comune; le due G H, H C ſono uguali alle due E H, H C, l'una all'

Poſt. 3. 1o. *di queſ.*

all'altra, e la baſe C G è uguale alla baſe C E, adunque l'angolo C H G è uguale all'angolo E H C, e ſono conſeguenti, ma quando la linea retta, ſtando ſopra una linea retta, fa gli angoli conſeguenti uguali fra loro, ciaſcuno de gli angoli uguali è retto, e quella linea retta, che ſta ſopra, ſi chiama perpendicolare a quella, alla quale ella ſopraſtà, adunque ſopra la data retta linea infinita A B dal dato punto C, che non è in eſſa, ſi è tirata la perpendicolare C H, il che biſognava fare. 8. *di queſt.* *Diff.* 10.

TEOREMA VI.

PROPOSIZIONE XIII.

Quando una linea retta ſtando ſopra un'altra retta linea fa gli angoli, o gli farà amendue retti, o uguali a due retti.

La linea retta A B ſtando ſopra la retta C D faccia gli angoli C B A A B D. Dico gli angoli C B A, A B D o eſſere due retti, o uguali a due retti. Perchè ſe C B A è uguale ad A B D, ſono due retti, ma *Diff.* 10.

se nò, tirisi dal punto B sopra la
11. *di quest.* C D la B E perpendicolare, adunque gli angoli C B E, E B D sono due retti, e perchè C B E è uguale alli due C B A, A B E, pongasi E B D comune, gli angoli dunque C B E, E B D sono uguali alli tre angoli C B A A B E, E B D, similmente perchè l'angolo D B A è uguale alli due angoli D B E, E B A, pongasi A B C comune, adunque gli angoli D B A A B C, sono uguali alli tre D B E, E B A, A B C, ma si è dimostrato ancor gli angoli C B E, E B D essere uguali alli medesimi tre, e quelle cose che sono uguali ad una medesima, sono uguali fra loro, adunque eziandio gli angoli C B E, E B D sono uguali a gli angoli D B A, A B C; e C B E, E B D sono due retti, onde gli angoli D B A, A B C saranno uguali a due retti, e però quando una linea retta stando sopra un'altra retta linea fa gli angoli, o gli farà amendue retti, o uguali a due retti, il che bisognava dimostrare.

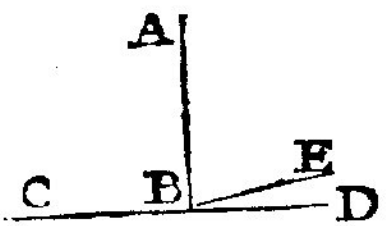
1. *com. not.*

TEO-

TEOREMA VII.

PROPOSIZIONE XIIII.

Se ad una retta linea, e ad un punto, che ſia in eſſa, due linee rette non poſte dalle medeſime parti, facciano gli angoli conſeguenti uguali a due retti, eſſe linee ſaranno per diritto fra loro.



Ad una retta linea A B, ed al punto B che è in eſſa due linee rette B C, B D non poſte dalle medeſime parti facciano gli angoli conſeguenti uguali a due retti A B C, A B D. Dico la B D eſſere per diritto alla C B; perciocchè ſe la B D non è per diritto alla C B, ſia la B E per diritto alla C B, perchè dunque la linea retta A B ſta ſopra la retta C B E, gli angoli A B C, A B E ſono uguali a due retti: ma eziandio gli angoli A B C A B D ſono uguali a due retti, onde gli angoli C B A, A B E ſaranno *Per l' ant.*

uguali alli C B A, A B D, traggaſi lo A B C comune, il rimanente dunque A B E è uguale al rimanente A B D, il minore al maggiore; che non può eſſere, adunque la B E non è per diritto alla B C, dimoſtreremo ſimilmente non eſſere alcun altra, fuori che la B D, adunque la C B ſarà per diritto alla B D, e però ſe ad una retta linea, e ad un punto, che ſia in eſſa, due linee rette non poſte dalle medeſime parti facciano gli angoli conſeguenti uguali a due retti, eſſe linee ſaranno per diritto fra loro, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA VIII.

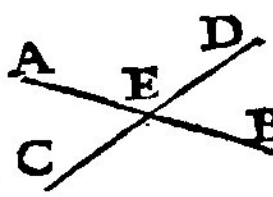
PROPOSIZIONE XV.

Se due linee rette ſi ſeghino inſieme, faranno gli angoli, che ſono alla cima, uguali fra loro.

Due linee rette A B, C D ſi ſeghino inſieme nel punto E, dico l'angolo A E C eſſere uguale all' angolo D E B, e l'angolo C E B all' angolo A E D. Perchè ſtando la linea

retta

retta A E ſopra la retta C D, fa gli angoli C E A, A E D, ſaranno uguali a due retti, ſimilmente perchè la linea rettta D E ſtando ſopra la retta A B fa gli angoli A E D, D E B, ſaranno A E D, D E B uguali a due retti, e ſi è dimoſtrato ancora gli angoli C E A, A E D eſſer uguali a due retti, adunque gli angoli C E A, A E D ſono uguali a gli angoli A E D, D E B, traggaſi il comune A E D, adunque ancora il rimanente C E A è uguale al rimanente B E D. Si dimoſtreranno parimente uguali C E B, D E A, e però ſe due linee rette ſi ſeghino inſieme, faranno gli angoli, che ſono alla cima, uguali fra loro, il che biſognava dimoſtrare.



13. *di queſ.*

1. *com. not.*

3. *com. not.*

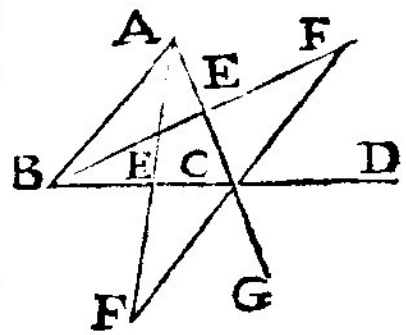
COROLLARIO.

Da queſto chiaramente ſi vede, che quante linee rette inſieme ſi ſegano, fanno gli angoli, che ſono nel ſegamento, uguali a quattro retti.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE XVI.

Prolungandoſi un lato di ciaſcun triangolo, l'angolo eſteriore è maggiore dell' uno, e l'altro interiore, ed oppoſto.



Sia il triangolo A B C, ed un lato di eſſo B C ſi prolunghi nel D, dico l' angolo eſteriore A C D eſſer maggiore dell' uno, e l' altro interiore, ed oppoſto, cioè C B A, B A C. Seghiſi A C per mezzo nel punto E, e giunta B E prolunghiſi nel punto F, e pongaſi la E F uguale alla B E, giungaſi poi F C, perchè dunque la A E è uguale alla E C, e la B E alla E F, le due A E, E B ſono uguali alle due C E, E F, l' una all' altra, e l' angolo A E B è uguale all' angolo F E C, percioccchè ſono alla cima, onde la baſe A B è uguale alla baſe F C, ed il triangolo A B E al trian-

3. di queſ.

Per l' ant. 4. di queſ.

triangolo F E C, e gli altri angoli uguali a gli altri angoli, l'uno all'altro, a' quali si sottopongono i lati uguali, adunque l'angolo B A E è uguale all'angolo E C F, ma l'angolo E C D è maggiore di E C F, l'angolo dunque A C D è maggiore dell'angolo B A E; e parimente segandosi la linea retta B C per mezzo, si dimostrerà l'angolo B C G, cioè A C D maggiore dell'angolo A B C, laonde prolungandosi un lato di ciascun triangolo, l'angolo esteriore è maggiore dell'uno, e l'altro interiore, ed opposto, il che bisognava dimostrare. *Per l' ant.*

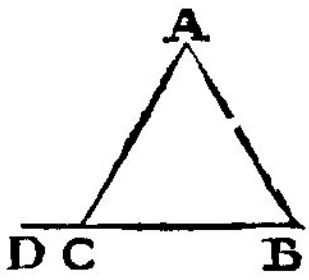
TEOREMA X.

PROPOSIZIONE XVII.

Due angoli di ciascun triangolo, presi in qualunque modo, sono minori di due retti.

Sia il triangolo A B C. Dico due angoli del triangolo A B C, presi in qualsivoglia modo, esser minori di due retti, prolunghisi la B C nel punto D, e perchè l'angolo A C D esteriore del triangolo A B C, è maggiore *Per l' ant.*

giore dell'interiore, ed oppoſto A B C, pongaſi comune lo A C B, adunque gli angoli A C D, A C B ſono maggiori de gli angoli A B C, B C A, ma gli angoli A C D, A C B, ſono uguali a due retti, che però A B C, B C A ſono minori di due retti; dimoſtreremo ſimilmente ancor gli angoli B A C, A C B, e C A B, A B C eſſer minori di due retti; adunque due angoli di ciaſcun triangolo, preſi in qualunque modo, ſono minori di due retti, il che biſognava dimoſtrare.



13. *di quеſ.*

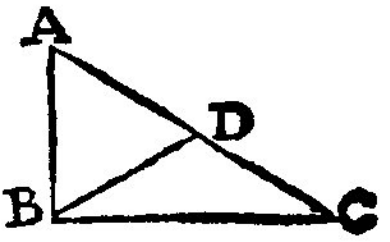
TEOREMA XI,

PROPOSIZIONE XVIII.

Il maggior lato di ciaſcun triangolo è ſottopoſto al maggiore angolo.

Sia il triangolo A B C, che abbia il lato A C maggiore del lato A B. Dico ancor l' angolo A B C eſſer maggiore dell'angolo B C A, perciocchè eſſendo la A C maggiore della A B, pongaſi la A D ugua-

uguale alla A B, e giungaſi B D, e perchè del triangolo B D C l'angolo eſteriore è A D B, ſarà queſto maggiore dell'interiore, ed oppoſto D C B, ma A D B è uguale ad A B D, eſſendo il lato A B uguale al lato A D, adunque l'angolo A B D è maggiore dell'angolo A C B, onde A B C ſarà molto maggiore di A C B, e però il maggior lato di ciaſcun triangolo è ſottopoſto al maggior angolo, il che biſognava dimoſtrare.



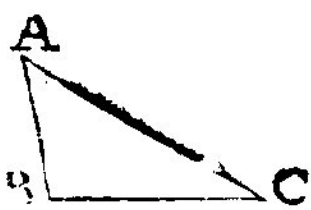
16. *di queſ.*
5. *di queſ.*

TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XIX.

Al maggior angolo di ciaſcun triangolo è ſottopoſto il maggior lato.

Sia il triangolo A B C, che abbia l'angolo A B C maggior dell'angolo B C A. Dico il lato A C eſſere maggiore del lato A B, perciocchè ſe non è maggiore, ovvero A C è uguale ad A B, ovvero è minore di eſſo,



esso, ma non è uguale, perchè ancor l' angolo A B C sarebbe uguale all' angolo A C B, che non è, e però A C non è uguale ad A B; ma nè anche è minore, perchè ancor l' angolo A B C sarebbe minore dell' angolo A C B, che non è, onde A C non è minore di A B, e si è dimostrato, che non è uguale, adunque A C è maggiore di A B, laonde al maggior angolo di ciascun triangolo è sottoposto il maggior lato, il che bisognava dimostrare.

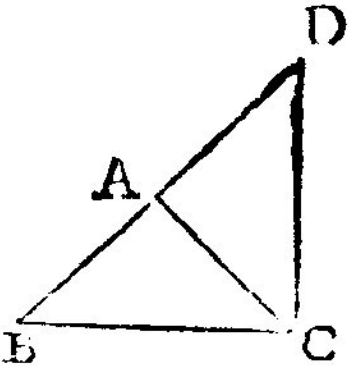
TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XX.

Due lati di ciascun triangolo presi in qualsivoglia modo sono maggiori del rimanente.

Sia il triangolo A B C. Dico due lati del triangolo A B C esser maggiori del rimanente, presi in qualsivoglia modo, cioè i lati B A, A C maggiori del lato B C, ed i lati

A B



A B, B C maggiori del lato A C, e i lati B C, C A essere maggiori di A B. Prolunghisi B A nel punto D, e pongasi A D uguale a C A, e giungasi D C, perchè dunque D A è uguale ad A C, farà ancor l'angolo A D C uguale all'angolo A C D, ma l'angolo B C D è maggiore dell'angolo A C D, adunque l'angolo B C D è maggiore dell'angolo A D C, e perchè D C B è triangolo, che ha l'angolo B C D maggiore dell'angolo B D C, ed al maggior angolo è sottoposto il maggior lato, sarà il lato B D maggiore del lato B C, ma D B è uguale alli B A, A C, onde i lati B A, A C, sono maggiori di B C; dimostreremo similmente ancor i lati A B, B C esser maggiori del lato C A, ed i lati B C, C A maggiori di A B; adunque due lati di ciascun triangolo, presi in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente, il che bisognava dimostrare.

5. di quest.

Per l' ant.

TEO-

TEOREMA XIIII.

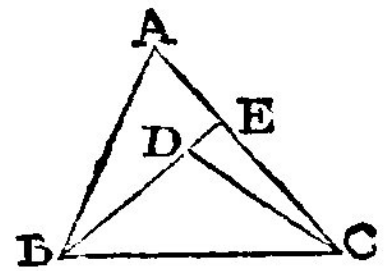
PROPOSIZIONE XXI.

Se da i termini d' un lato del triangolo ſi coſtituiſcano due linee rette di dentro, queſte ſaranno minori delli due lati del triangolo, ma conterranno l'angolo maggiore.

In un lato del triangolo A B C, cioè B C da i termini B, C coſtituiſcanſi di dentro due rette linee B D, D C. Dico B D, D C eſſer minori de gli altri due lati del triangolo B A, A C, ma contenere l'angolo B D C maggiore dell'angolo B A C. Prolunghiſi B D nel punto E, e perchè due lati di ciaſcun triangolo ſono maggiori del rimanente, ſaranno i due lati B A, A E del triangolo A B E, maggiori del lato B E; pongaſi E C comune, adunque B A, A C ſono maggiori di B E, E C, ſimilmente perchè i due lati C E, E D del triangolo C E D ſono maggiori del lato C D, pongaſi comune D B, onde C E, E B

Per l'ant.

ſono



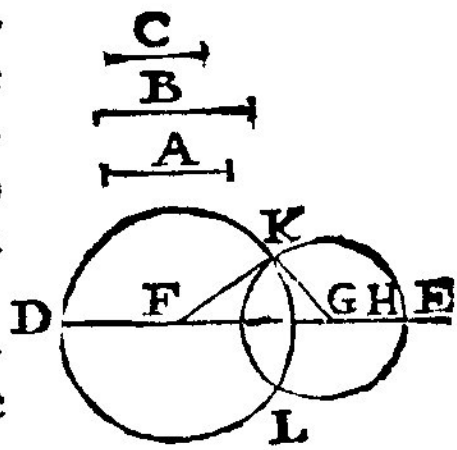
ſono maggiori di C D, D B, ma ſi è dimoſtrato B A, A C eſſer maggiori di B E, E C, adunque B A, A C ſono molto maggiori di B D, D C; oltre a ciò perchè l'angolo eſteriore di ciaſcun triangolo è maggiore dell' interiore, ed oppoſto, ſarà l'eſteriore angolo B D C del triangolo C D E, maggiore di C E D, per la medeſima ragione ancor l'angolo eſteriore C E B del triangolo A B E, è maggiore di B A C, ma l'angolo B D C ſi è dimoſtrato maggiore dell'angolo C E B, adunque l'angolo B D C ſarà molto maggiore dell'angolo B A C, onde ſe da i termini di un lato del triangolo ſi coſtituiſcano due linee rette di dentro, queſte ſaranno minori delli due lati del triangolo, ma conterranno l'angolo maggiore, il che biſognava dimoſtrare. *16. di queſ.*

PROBLEMA VIII.

PROPOSIZIONE XXII.

Da tre linee rette, che ſiano uguali a tre rette linee date con-

costituire un triangolo, ma bisogna, che due siano maggiori della rimanente, prese in qualsivoglia modo; perciocchè due lati di ciascun triangolo, presi in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente.



Siano tre linee rette date A, B, C, due delle quali siano maggiori della rimanente, prese in qualsivoglia modo, cioè che le A, B siano maggiori della C, e le A, C siano maggiori della B, ed ancora le B, C maggiori dell' A, bisogna da tre linee rette uguali alle A, B, C costituire un triangolo. Propongasi la linea retta D E terminata nel punto D, ma infinita verso il punto E, e pongasi la D F uguale alla A, e la F G uguale alla B, e la G H alla C, e dal centro F con l'intervallo F D descrivasi il cerchio

D K

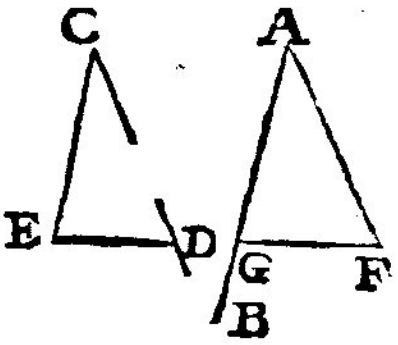
DKL, poi dal centro G con l'intervallo GH descrivasi un altro cerchio KLH, e giunganſi KF, KG. Dico da tre linee rette uguali alle A, B, C essersi costituito il triangolo KFG, perciocchè essendo il punto F centro del cerchio DKL, sarà la FD uguale alla FK, ma la FD è uguale alla A, adunque ancor la FK è uguale ad A, oltre a ciò perchè il punto G è centro del cerchio LKH, sarà la GH uguale alla GK, ma la GH è uguale alla C, adunque eziandio la GK è uguale alla C, ed è la FG uguale alla B, adunque le tre KF, FG, GK, sono uguali alle tre rette A, B, C, e però delle tre linee rette KF, FG, GK, che sono uguali alle tre rette date A, B, C si è costituito il triangolo KFG, il che bisognava fare.

PROBLEMA IX.

PROPOSIZIONE XXIII.

Nella data retta linea, e nel punto dato in essa costituire un angolo rettilineo uguale a un altr'angolo rettilineo dato.

Sia



Sia la data linea A B, ed il punto dato in essa A, e l' angolo rettilineo dato D C E, bisogna nella data linea retta A B, e nel dato punto in essa A, costituire un angolo rettilineo uguale all' angolo rettilineo dato. Pigliſi nell'una, e l' altra di esse C D, C E quali si vogliano punti D E, e giungasi D E, e da tre linee rette, che siano uguali alle tre rette C D, D E, E C, costituiscasi il triangolo A F G, di modo che la C D sia uguale alla A F, e la C E alla A G, e la D E alla F G, perchè dunque le due D C, C E sono uguali alle due F A, A G l' una all' altra, e la base D E è uguale alla base F G, sarà ancor l' angolo D C E uguale all' angolo F A G, adunque nella data rettalinea A B, e nel punto in essa dato A, si è costituito l' angolo rettilineo F A G uguale all' altro angolo rettilineo dato D C E, il che bisognava fare.

Per l' ant.

TEO.

TEOREMA XV.

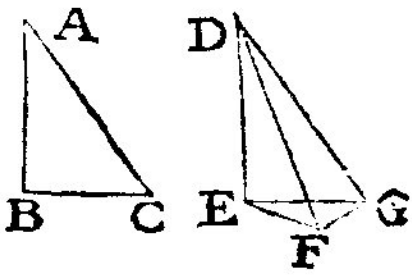
PROPOSIZIONE XXIV.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e l'angolo maggiore dell'angolo, che è contenuto da linee rette uguali, averanno ancora la baſe maggiore della baſe.

Siano due triangoli A B C, D E F, che abbiano due lati A B, A C uguali a due lati D E, D F, l'un all'altro, cioè il lato A B uguale al lato D E, ed il lato A C uguale a D F, e l'angolo B A C ſia maggiore dell'angolo E D F. Dico ancora la baſe B C eſſer maggiore della baſe E F. Perchè l'angolo B A C è maggiore dell'angolo E D F coſtituiſcaſi nella linea retta D E, e nel punto, che è in eſſa D, l'angolo E D G uguale all'angolo B A C, e pongaſi la D G uguale ad una di eſſe A C, D F, e giunganſi G E, F G; onde perchè la A B è uguale alla D E, e la A C alla D G, le due B A, A C ſo-

Per l'ant.

ſono uguali alle due E D, D G, l' una all' altra, e l' angolo B A C è uguale all' angolo E D G;



adunque la baſe B C è uguale alla baſe E G, oltre a ciò perchè la D G è uguale alla D F, e l' angolo D F G uguale all' angolo D G F, ſarà l' angolo D F G maggiore dell' angolo E G F, l' angolo dunque E F G è molto maggiore dell' angolo E G F, e perchè E F G è triangolo, che ha l' angolo E F G maggiore dell' E G F, ed al maggiore angolo è ſottopoſto il maggior lato, ſarà ancor il lato E G maggior del lato E F, ma il lato E G è uguale al lato B C, adunque ancor B C ſarà maggiore di E F, la onde ſe due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, e l' angolo maggiore dell' angolo, che è contenuto da linee rette uguali, averanno ancora la baſe maggiore della baſe, il che biſognava dimoſtrare.

4. di queſ.

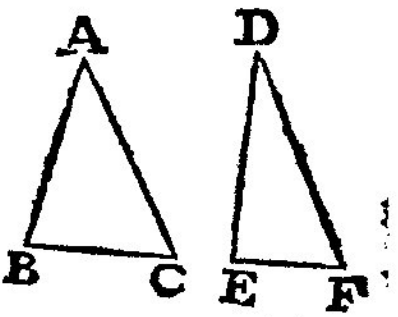
5. di queſ.

TEO.

TEOREMA XVI.

PROPOSIZIONE XXV.

Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l'uno all'altro, e la base maggiore della base, averanno ancora l'angolo maggiore dell'angolo, che da' lati uguali è contenuto.

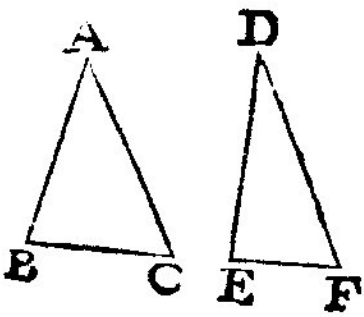


Siano due triangoli ABC, DEF, che abbiano due lati AB, AC uguali a due lati DE, DF, l'uno all'altro, cioè il lato AB uguale al lato DE, ed il lato AC al lato DF, e la base BC sia maggiore della base EF. Dico ancora l'angolo BAC essere maggiore dell'angolo EDF, perciocchè se non è maggiore, o è uguale, o minore, ma l'angolo BAC non è uguale all'angolo EDF, perchè eziandio la base BC sarebbe uguale alla base EF, il che non è, onde l'angolo BAC

4. di quest.

non è uguale all' angolo E D F, ma nè anche è minore: perchè la baſe B C ſarebbe minore della baſe E F, che non è, adunque l' angolo B A C non è minore dell' angolo E D F, e ſi è dimoſtrato, che non è uguale, l' angolo dunque B A C neceſſariamente ſarà maggiore dell' angolo E D F, e però ſe due triangoli hanno due lati uguali a due lati, l' uno all' altro, e la baſe maggiore della baſe, averanno ancora l' angolo maggiore dell'angolo, che è contenuto da lati uguali, il che biſgonava dimoſtrare.

Per ſ' ant.

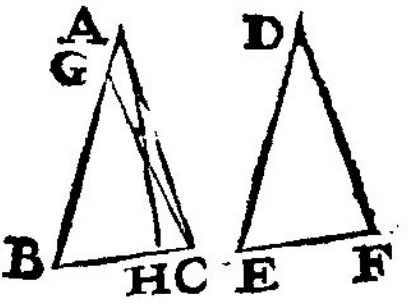


TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se due triangoli hanno due angoli uguali a due angoli, l' uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, che è fra gli angoli uguali, o che è ſottopoſto ad uno degli uguali angoli

goli, averanno ancora gli altri lati uguali a gli altri lati, l'uno all'altro, e l'angolo rimanente uguale al rimanente.



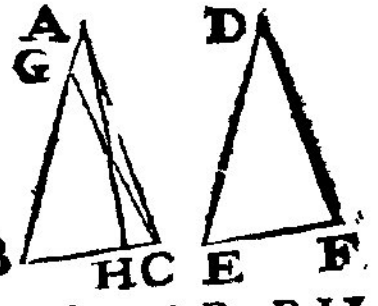
Siano due triangoli A B C, D E F, che abbiano due angoli A B C, B C A uguali alli due D E F, E F D, l'uno all'altro, cioè l'angolo A B C uguale all'angolo D E F, e l'angolo B C A all'angolo E F D, ed abbiano un lato uguale ad un lato, e primieramente quello che è fra gli angoli uguali, cioè il lato B C al lato E F. Dico ancora avere gli altri lati uguali a gli altri lati, l'uno all'altro, cioè il lato A B al lato D E, ed il lato A C a D F, ed il rimanente angolo B A C uguale al rimanente E D F, perciocchè se la A B non è uguale alla D E, una di esse sarà maggiore: sia maggiore A B, e pongasi la G B uguale alla D E, e giunganſi G C, perchè dunque la B G è uguale alla D E, e la B C alla E F, le due G B, B C sono uguali alle due D E, E F, l'una all'altra,

e l' angolo G B C è uguale all' angolo D E F, adunque la baſe G C è uguale alla baſe D F, ed il triangolo G B C al triangolo D E F, e gli altri angoli uguali a gli altri angoli, l' uno all' altro, a' quali ſono ſottopoſti i lati uguali, adunque l' angolo G C B è uguale all' angolo D F E, ma l' angolo D F E ſi pone uguale all' angolo B C A, onde ancor l' angolo B C G è uguale all' angolo B C A il minore al maggiore, che non può eſſere, non è adunque la A B diſuguale alla D E, e però ſarà uguale, e la B C è uguale alla E F, onde le due A B, B C ſono uguali alle due D E, E F, l' una all' altra, e l' angolo A B C è uguale all' angolo D E F, adunque la baſe A C è uguale alla baſe D F, ed il rimanente angolo B A C al rimanente E D F. Ma ſiano uguali quei lati, che ſi ſottopongono a gli angoli uguali, come B A a D E. Dico ancor gli altri lati eſſere uguali a gli altri lati, cioè A C a D F, e B C ad E F, ed eziandio il rimanente angolo B A C uguale al rimanente E D F, perciocchè ſe la B C non è uguale alla E F, una di eſſe è maggiore, ſia maggiore la B C, ſe eſ-

4. di queſ.

4. di queſ.

ſer



ſer può, e pongaſi la B H uguale alla E F, e giungaſi A H, perchè dunque la BH è uguale alla E F, e la A B alla D E, le due A B, B H ſono uguali alle due D E, E F, l'una all' altra, e contengono gli angoli uguali, adunque la baſe A H è uguale alla baſe D F, ed il triangolo A B H uguale al triangolo D E F, e gli altri angoli a gli altri angoli l' uno all' altro, a' quali ſono ſottopoſti i lati uguali, l' angolo dunque B H A è uguale all' angolo E F D, ma l' angolo E F D è uguale all' angolo B C A, adunque ancor l' angolo B H A è uguale all' angolo B C A onde l' angolo eſteriore B H A del triangolo A H C è uguale all' interiore, ed oppoſto B C A, che non può eſſere, e però non è diſuguale la B C alla E F, ma uguale; ed è la A B uguale alla D E, onde le due A B, B C ſono uguali alle due D E, E F, l'una all' altra, e contengono gli angoli uguali, e perciò la baſe A C è uguale alla baſe D F, ed il triangolo A B C al triangolo D E F, e l' angolo

4. di queſ.

16. di queſt.

lo rimanente B A C al rimanente E D F, adunque ſe due triangoli hanno due angoli uguali a due angoli l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, o che è fra gli angoli uguali, o che è ſottopoſto ad uno degli uguali angoli, averanno ancora gli altri lati uguali a gli altri lati, l'uno all' altro, e l'angolo rimanente uguale al rimanente, il che biſognava dimoſtrare.

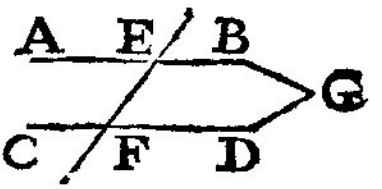
TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se cadendo una linea retta ſopra due linee rette fa gli angoli alterni uguali fra loro, ſaranno le linee rette paralelle.

La linea retta E F cadendo ſopra le due linee rette A B, C D faccia gli angoli alterni A E F, E F D uguali fra loro. Dico la linea retta A B eſſere paralella alla C D, perciocchè ſe non è paralella, le A B, C D prolungate, o verſo le parti B D, o verſo le A C concorreranno inſieme,

me, prolunghinſi, e concorrano inſieme dalle parti B D nel punto G,



l'angolo dunque eſteriore A E F del triangolo G E F è maggiore dell' interiore, ed oppoſto E F G, ma è ancora uguale, il che non può eſſere, adunque le A B, C D prolungate non concorreranno dalle parti B D; ſi dimoſtrerà parimente non concorrere dalle parti A C, e quelle, che non concorrono in alcuna delle parti, ſono paralelle fra loro, onde la A B è paralella alla C D, ſe dunque cadendo una linea retta ſopra due linee rette fa gli angoli alterni uguali fra loro, ſaranno le linee rette paralelle, il che biſognava dimoſtrare.

16. *di queſ.*

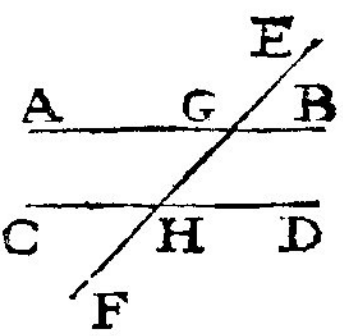
Diff. 35.

TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Se cadendo una linea retta ſopra le due linee rette fa l'angolo eſteriore uguale all' interiore, ed oppoſto, e dalle medeſime parti, ovvero gl' in-

teriori, e dalle medesime parti uguali a due retti, le linee rette saranno paralelle fra loro.



Cadendo sopra due linee rette A B, C D la linea retta E F faccia l'angolo esteriore E G B uguale all'interiore, ed opposto G H D, ovvero gli angoli interiori, e dalle medesime parti B G H, G H D uguali a due retti. Dico la linea retta A B esser paralella alla C D, perciocchè essendo l'angolo E G B uguale all'angolo G H D, e l'angolo E G B all'angolo A G H, sarà ancor l'angolo A G H uguale all'angolo G H D, e sono alterni; adunque la A B è paralella alla C D, oltre a ciò perchè gli angoli B G H, G H D sono uguali a due retti, e sono ancora gli angoli A G H, B G H uguali a due retti, saranno gli angoli A G H, B G H uguali a gli angoli B G H, G H D, traggasi il comune B G H, adunque il rimanente A G H, è uguale al rimanente G H D, e sono alterni, onde

15. *di quest.* *Per l' ant.*

la

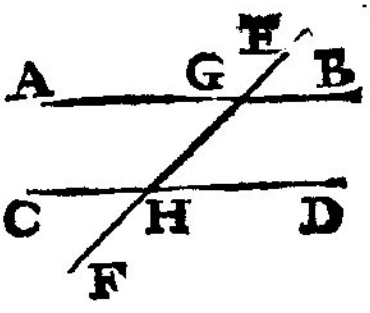
la A B ſarà paraleila alla C D. Se dunque cadendo una linea retta ſopra due linee rette fa l' angolo eſteriore uguale all' interiore, ed oppoſto, e dalle medeſime parti, ovvero gl' interiori, e dalle medeſime parti uguali a due retti, le linee rette ſaranno paralelle fra loro, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XX.

PROPOSIZIONE XXIX.

Cadendo una linea retta ſopra le linee rette paralelle, farà gli angoli alterni uguali fra loro, e l' eſteriore uguale all' interiore, ed oppoſto, e dalle medeſime parti, e gli interiori, e dalle medeſime parti uguali a due retti.

Caggia ſopra le linee rette paralelle A B, C D la linea retta E F. Dico che farà gli angoli alterni A G H, G H D uguali fra loro, e l' eſteriore E G B uguale all' interiore, ed oppoſto, e dalle medeſime parti G H D, e gli interiori, e dalle



le medesime parti B G H, G H D uguali a due retti. Perciocchè se non è uguale A G H a G H D, uno di essi sarà maggiore sia maggiore A G H, e perchè l'angolo A G H è maggiore dell'angolo G H D, pongasi B G H comune, gli angoli dunque A G H, B G H sono maggiori degli angoli B G H, G H D, ma gli angoli A G H, B G H sono uguali a due retti, adunque gli angoli B G H, G H D sono minori di due retti, e quelle linee rette, che da minori di due retti si prolungano in infinito, concorrono fra loro; onde le linee rette A B, C D prolungate fra loro concorreranno, ma non concorrono, ponendosi paralelle, non è dunque l'angolo A G H disuguale all'angolo G H D, onde è necessario, che sia uguale, ma l'angolo A G H è uguale all'angolo E G B, e però ancor E G B sarà uguale a G H D, pongasi B G H comune, adunque gli angoli E G B, B G H sono uguali a gli angoli B G H, G H D, ma gli angoli E G B, B G H sono uguali a due retti, adunque

13. *di quest.*

Post. 5.

15. *di quest.*

13. *di quest.*

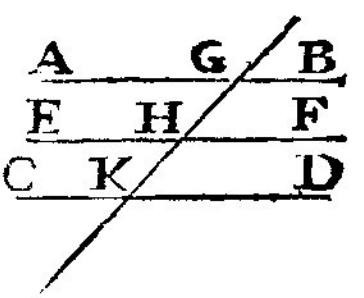
ezian-

eziandio B G H , G H D ſaranno uguali a due retti ; e però cadendo una linea retta ſopra le linee rette paralelle farà gli angoli alterni uguali fra loro, e l'eſteriore uguale all'interiore, ed oppoſto, e dalle medeſime parti, e gl' interiori, e dalle medeſime parti, uguali a due retti, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XXI.

PROPOSIZIONE XXX.

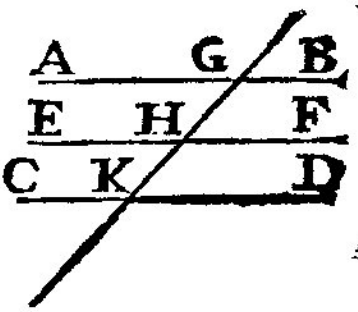
Quelle linee, che ſono paralelle alla medeſima retta linea, ſaranno anche fra loro paralelle.



Siano amendue le A B, C D paralelle alla E F. Dico ancor la A B alla C D eſſer paralella. Caggia ſopra eſſe la linea retta G K, e perchè ſopra le linee rette paralelle AB, EF cade la linea retta G K, l'angolo A G H è uguale all'angolo G H F. Poi perchè ſopra le linee rette paralelle E F, C D cade la linea retta

Per l' ant.

G K, l' angolo G H F è uguale all' angolo G K D, e si è dimostrato l' angolo A G H uguale all' angolo G H F, adunque ancor l' angolo A G K sarà uguale all'angolo G K D, e sono alterni, onde la A B è paralella alla C D, e però quelle linee, che sono paralelle alla medesima linea retta, saranno anche paralelle fra loro, il che bisognava dimostrare.



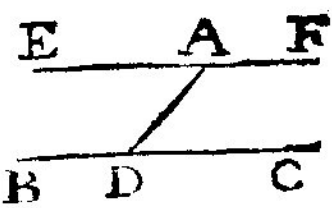
27. *di quest.*

PROBLEMA X.

PROPOSIZIONE XXXI.

Per un punto dato tirare una linea retta paralella ad una data retta linea.

Sia il dato punto A, la data retta linea B C, bisogna per lo punto A tirare una linea retta paralella alla B C. Pigliſi nella B C qualsivoglia punto D, e giungasi A D, e nella linea retta D A, e nel punto in essa A co-



costituiscasi l'angolo D A E uguale all'angolo A D C, e per diritto alla E A prolunghisi la linea retta A F, perchè dunque la linea retta A D cadendo sopra le due linee rette B C, E F fa gli angoli alterni E A D, A D C uguali fra loro, sarà la E F paralella alla B C, adunque per lo dato punto A si è tirata la linea retta E A F, paralella alla retta linea B C, il che bisognava fare. 23. di quest. 27. di quest.

TEOREMA XXII.

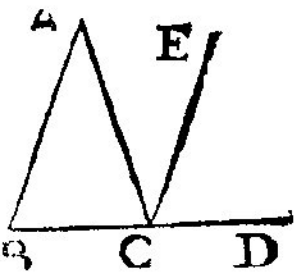
PROPOSIZIONE XXXII.

L' angolo esteriore di ciascun triangolo, prolungandosi un lato, è uguale alli due interiori, ed opposti, ed i tre angoli interiori del triangolo sono uguali a due retti.

Sia il triangolo A B C ed un lato di esso B C prolunghisi nel punto D. Dico l'angolo esteriore A C D essere uguale alli due interiori, ed opposti C A B, A B C, e i tre angoli interiori A B C, B C A, C A B

del

del triangolo essere uguali a due retti. Tirisi per lo punto C la C E paralella alla linea retta A B, e perchè la A B è paralella alla C E, ed in esse cade la C A, gli angoli alterni B A C, A C E sono uguali fra loro, oltre a ciò perchè la A B è paralella alla C E, ed in esse cade la linea retta B D, l'angolo esteriore E C D è uguale all'interiore, ed opposto A B C, e si è dimostrato l'angolo A C E uguale all' angolo B A C, onde tutto l'esteriore angolo A C D è uguale alli due interiori, ed opposti B A C A B C, pongasi A C B comune; adunque gli angoli A C D, A C B sono uguali alli tre A B C, B C A, C A B, ma gli angoli A C D, A C B sono uguali a due retti, onde ancor A C B, C B A, C A B saranno uguali a due retti, adunque l'angolo esteriore di ciascun triangolo, prolungandosi un lato, è uguale alli due interiori, ed opposti, e i tre angoli interiori del triangolo sono uguali a due retti, il che bisognava dimostrare.



Per l' ant.

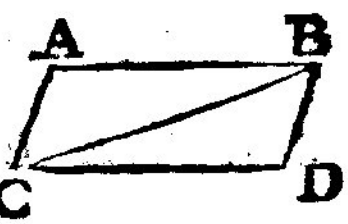
29. di quest.

TEO-

TEOREMA XXIII.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Quelle linee rette, che congiungono le uguali, e paralelle dalle medesime parti, ancor esse sono uguali, e paralelle.



Siano uguali, e paralelle A B, C D, e le linee rette A C, B D le congiungano dalle medesime parti. Dico le A C, B D essere uguali, e paralelle, giungasi B C, perchè la A B è paralella alla C D, e cade in esse la B C, gli angoli alterni A B C, B C D sono uguali, oltre a ciò perche la A B è uguale alla C D, e la B C comune, le due A B, B C sono uguali alle due D C, C B: e l'angolo A B C è uguale all' angolo B C D, adunque la base A C è uguale alla base B D; ed il triangolo A B C al triangolo B C D, e gli angoli rimanenti sono uguali alli rimanenti, l' uno all' altro, a quali si sottopongono i lati uguali, onde

29. *di quest.*

4. *di quest.*

de l'angolo A C B è uguale all'angolo C B D, e perchè nelle due linee rette A C, B D cadendo la linea retta B C fa gli angoli alterni A C B, C B D uguali fra loro, la A C è paralella alla B D: e si è dimostrata uguale ad essa, adunque quelle linee rette, che congiungono le uguali, e paralelle dalle medesime parti, anch'esse sono uguali, e paralelle, il che bisognava dimost.

27 di quest.

TEOREMA XXIV.

PROPOSIZIONE XXXIV.

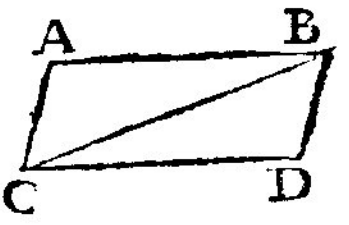
Degli spazj paralellogrammi i lati, e gli angoli opposti sono fra loro uguali, ed il diametro gli sega per mezzo.

Sia il paralellogrammo A C D B, il cui diametro sia B C. Dico i lati opposti del paralellogrammo A C, D B, e gli angoli essere uguali fra loro, ed il diametro B C segargli per mezzo, perciocchè essendo la A B paralella alla C D, e cadendo in esse la linea retta B C, gli angoli alterni A B C, B C D sono uguali fra loro, similmente perchè la A C,

29. di quest.

è pa-

è paralella alla B D, ed in eſſe cade la B C, gli angoli alterni A C B, C B D ſono uguali



fra loro, ſono adunque due triangoli A B C, C B D, che hanno due angoli A B C, B C A uguali a due angoli B C D, C B D, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, che è fra gli angoli uguali, comune ad amendue B C, adunque averanno ancora i lati rimanenti uguali alli rimanenti, l'uno all'altro, e l'angolo rimanente uguale al rimanente, e perciò il lato A B è uguale al lato C D, ed il lato A C a B D, e l'angolo B A C uguale all'angolo B D C, e perchè l'angolo A B C è uguale all'angolo B C D, e l'angolo C B D all'angolo A C B, ſarà tutto l'angolo A B D uguale a tutto A C D, e ſi è dimoſtrato l'angolo B A C uguale all'angolo B D C, adunque degli ſpazj paralellogrammi i lati, e gli angoli oppoſti ſono uguali fra loro. Dico ancora il diametro ſegargli per mezzo, perciocchè eſſendo la A B uguale alla C D, e la B C comune, le due A B, B C ſono uguali alle due D C,

25. di queſt.

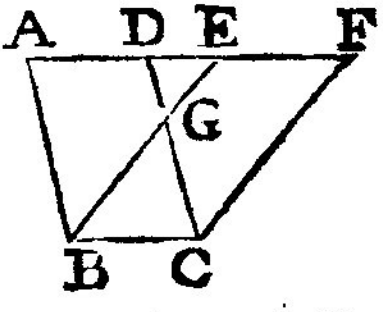
D C, C B, l'una all' altra, e l'angolo A B C uguale all' angolo B C D, e però la baſe A C è uguale alla baſe D B, ed il triangolo A B C uguale al triangolo B C D, adunque il diametro B C ſega per mezzo il paralellogrammo A C D B, il che biſognava dimoſtrare.

4. di quеſ.

TEOREMA XXV.

PROPOSIZIONE XXXV.

I paralellogrammi coſtituiti nella medeſima baſe, e nelle medeſime paralelle, ſono fra loro uguali.



Siano i paralellogrammi A B C D, E B C F nella medeſima baſe B C, e nelle medeſime paralelle A F, B C. Dico il paralellogrammo A B C D eſſere uguale al paralellogrammo E B C F, perciocchè eſſendo A B C D paralellogrammo, la A D è uguale alla B C, e per la medeſima ragione la E F è uguale alla B C, onde la A D ſarà

ugua-

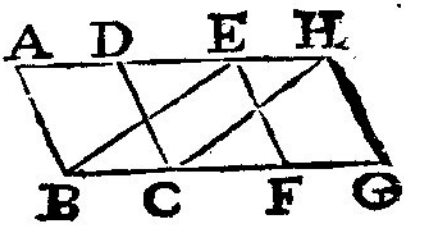
uguale alla E F, e la D E è comune, adunque tutta la A E è uguale a tutta la D F, ed è la A B uguale alla C D, onde le due E A, A B sono uguali alle due F D, D C, l'una all'altra, e l'angolo F D C uguale all'angolo E A B, l'esteriore all'interiore, la base dunque EB è uguale alla base F C, ed il triangolo E A B uguale al triangolo F D C, traggasi il comune D G E, sarà il rimanente trapezio A B G D uguale al rimanente E G C F. Pongasi il triangolo G B C comune, adunque tutto il paralellogrammo A B C D sarà uguale a tutto il paralellogrammo E B C F, e perciò i paralellogrammi costituiti nella medesima base, e nelle medesime paralelle sono fra loro uguali, il che bisognava dimostrare. *4. di ques.*

TEOREMA XXVI.

PROPOSIZIONE XXXVI.

I paralellogrammi costituiti nelle uguali basi, e nelle medesime paralelle sono uguali fra loro.

Siano



Siano i paralellogrammi ABCD, E F G H costituiti nelle basi uguali B C, F G, e nelle medesime paralelle A H, B G. Dico il paralellogrammo A B C D essere uguale al paralellogrammo E F G H. Congiungasi B E, C H, e perchè la B C è uguale alla F G, e la F G alla E H, sarà ancora la B C uguale alla E H: e sono paralelle, e B E, C H le congiungono, ma quelle, che congiungono le uguali, e paralelle dalle medesime parti, anch' esse sono uguali, e paralelle, adunque le B E, C H sono uguali, e paralelle, onde E B C H è paralellogrammo, ed uguale al paralellogrammo A B C D, perchè ha la medesima base B C; ed è costituito nelle medesime paralelle B C, A H, per la medesima ragione il paralellogrammo E F G H è uguale al medesimo paralellogrammo E B C H, e però il paralellogrammo A B C D sarà uguale al paralellogrammo E F G H, adunque i paralellogrãmi costituiti nelle uguali basi, e nelle medesime paralelle sono uguali fra loro, il che bisognava dimostrare. *TEO-*

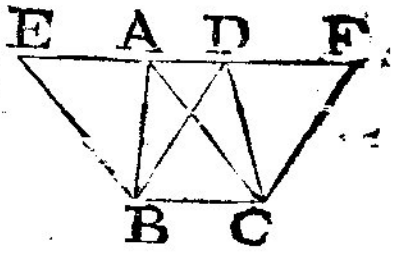
34. di quest.

Per l' ant.

TEOREMA XXVII.

PROPOSIZIONE XXXVII.

I triangoli costituiti nella medesima base, e nelle medesime paralelle sono uguali fra loro.



Siano i triangoli A B C, D B C nella medesima base B C, e nelle medesime paralelle A D, B C. Dico il triangolo A B C essere uguale al triangolo D B C. Prolunghisi la A D dall' una, e l' altra parte ne' punti E F, e per B tirisi la B E paralella alla C A, e per la C la C F paralella alla B D, adunque è paralellogrammo l' uno, e l' altro E B C A, D B C F, ed il paralellogrammo E B C A è uguale al paralellogrammo D B C F, perchè sono nella medesima base B C, e nelle medesime paralelle B C, E F: ed il triangolo A B C è la metà del paralellogrammo E B C A, conciossiacosachè il diametro A B lo seghi per mezzo: ed il triangolo

31. *di quest.*

35. *di quest.*

DBC

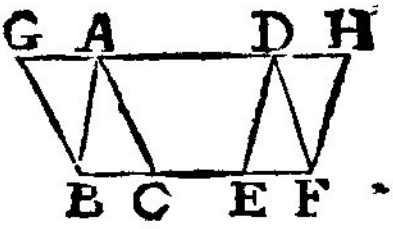
34. *di quef.* D B C è la metà del paralellogrammo D B C F, ſegandolo per mezzo il diametro D C, e quelle coſe, che ſono la metà delle uguali, ſono anche uguali fra loro, il triangolo dunque A B C è uguale al triangolo D B C, onde i triangoli coſtituiti nella medeſima baſe, e nelle medeſime paralelle ſono uguali fra loro, il che biſognava dimoſtrare.

7. *com. not.*

TEOREMA XXVIII.

PROPOSIZIONE XXXVIII

I triangoli coſtituiti nelle uguali baſi, e nelle medeſime paralelle, fra loro ſono uguali.



Siano i triangoli A B C, D E F nelle baſi uguali B C, E F, e nelle medeſime paralelle B F, A D. Dico il triangolo A B C eſſer uguale al triangolo D E F. Prolunghiſi A D dall' una, e l' altra parte ne' punti G, H, e per B tiriſi B G paralella alla C A, e per F tiriſi F H paralella alla D E, adunque

31. *di quef.*

quel' uno, e l'altro di essi G B C A, D E F H è paralellogrammo, ed è il paralellogrammo G B C A uguale al paralellogrammo D E FH, perciocchè sono nelle basi uguali B C, E F, e nelle medesime paralelle BF, G H, ma il triangolo A B C è la metà del paralellogrammo G B C A, conciossiacosachè il diametro AB lo sega per mezzo, e il triangolo D E F è la metà del paralellogrammo D E F H, segandolo per mezzo il diametro D F: e quelle cose, che sono la metà delle uguali, sono uguali fra loro, adunque il triangolo A B C è uguale al triangolo D E F: e però i triangoli costituiti nelle uguali basi, e nelle medesime paralelle fra loro sono uguali, il che bisognava dimostrare.

36. di ques.

34. di ques.

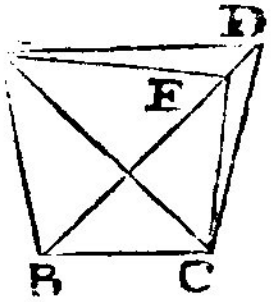
7. com. not.

TEOREMA XXIX.

PROPOSIZIONE XXXIX.

I triangoli uguali, costituiti nella medesima base, e dalle medesime parti, sono eziandio nelle medesime paralelle.

Siano



Siano i triangoli uguali A B C, D B C nella medeſima baſe B C, e dalle medeſime parti. Dico eſſere ancora nelle medeſime paralelle; giungaſi A D Dico la A D eſſere paralella alla B C, perciocchè, ſe non è paralella, tiriſi per A la linea retta A E paralella alla B C, e giungaſi E C, adunque il triangolo A B C è uguale al triangolo E B C, eſſendo nella medeſima baſe B C, e nelle medeſime paralelle B C, A E, ma il triangolo A B C è uguale al triangolo D B C, onde eziandio il triangolo D B C è uguale al triangolo E B C, il maggiore al minore, che non può eſſere, non è adunque A E paralella alla B C, ſimilmente dimoſtreremo niuna altra eſſere paralella, fuor che la A D, adunque la A D è paralella alla B C, e però i triangoli uguali coſtituiti nella medeſima baſe, e dalle medeſime parti ſono eziandio nelle medeſime paralelle, il che biſognava dimoſtrare.

31. *di queſ.*

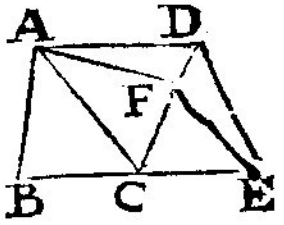
37. *di queſ.*

TEO-

TEOREMA XXX.

PROPOSIZIONE XL.

I triangoli uguali coſtituiti nelle baſi uguali, e dalle medeſime parti, ſono anche nelle medeſime paralelle.



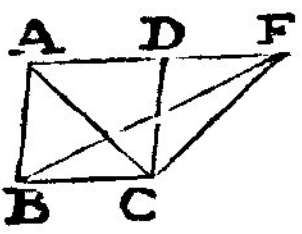
Siano i triangoli uguali A B C, C D E coſtituiti nelle baſi uguali B C, C E. Dico eziandio eſſere nelle medeſime paralelle; giungaſi A D. Dico la A D eſſer paralella alla B E, perchè ſe non è, tiriſi per A la A F paralella alla B E, e giungaſi F E, adunque il triangolo A B C è uguale al triangolo F C E, eſſendo coſtituiti nelle baſi uguali, e nelle medeſime paralelle B E, A F, ma il triangolo A B C è uguale al triangolo D C E, onde ancor il triangolo D C E ſarà uguale al triangolo F C E il minore al maggiore, che non può eſſere; la A F dunque non è paralella alla B E; dimoſtreremo ſimilmente non eſſer alcun' altra paralella, fuori che la A D adun-

que la A D ſarà paralella alla B E, e però i triangoli uguali coſtituiti nelle baſi uguali, e dalle medeſime parti, ſono anche nelle medeſime paralelle, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XXXI.

PROPOSIZIONE XLI.

Se il paralellogrammo, ed il triangolo hanno la medeſima baſe, e ſono nelle medeſime paralelle, il paralellogrammo è doppio del triangolo.



Il paralellogrammo A B C D, ed il triangolo F B C abbiano la medeſima baſe B C, e ſiano nelle medeſime paralelle B C, A F. Dico il paralellogrammo A B C D eſſer doppio del triangolo F B C Giungaſi A C, adunque il triangolo A B C è uguale al triangolo F B C, perchè ſono nella medeſima baſe B C, e nelle medeſime paralelle B C, A F, ma il paralellogrammo A B C D è doppio del triangolo A B C, ſegandolo per mez-

37. di queſ.

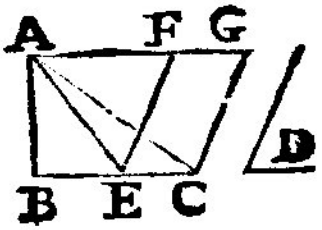
4. di queſ.

mezzo il diametro A C, onde sarà anche doppio di esso triangolo F B C, e però se il paralellogrammo, ed il triangolo hanno la medesima base, e sono nelle medesime paralelle, il paralellogrammo è doppio del triangolo, il che bisognava dimostrare.

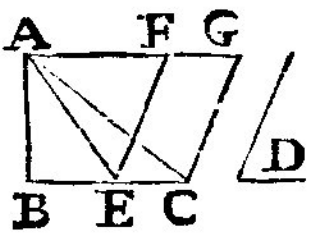
PROBLEMA XI.

PROPOSIZIONE XLII.

Costituire nell' angolo rettilineo dato un paralellogrammo uguale al dato triangolo.



Sia il dato triangolo A B C, l' angolo rettilineo dato sia D, bisogna nell' angolo rettilineo uguale ad esso D costituire un paralellogrammo uguale al triangolo A B C Seghisi B C per mezzo nel punto E, e giunta A E nella linea retta E C, e nel punto ch' è in essa E costituiscasi l' angolo C E F, uguale all' angolo D, e per A tirisi la A G paralella alla E C, e per C tirisi la C G paralella alla F E, adun- 23. *di quest.*

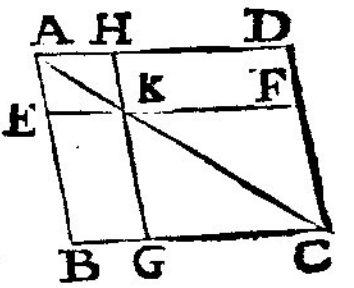


que F E C G è paralellogrammo, e perchè la B E è uguale alla E C, sarà anche il triangolo A B E uguale al triangolo A E C, conciosiacosachè siano nelle basi uguali B E, E C, e nelle medesime paralelle B C, G A; il triangolo dunque A B C è doppio del triangolo A E C, ed è eziandio il paralellogrammo FECG doppio del triangolo AEC, perchè ha la medesima base, ed è nelle medesime paralelle, onde il paralellogrammo F E C G è uguale al triangolo A B C: ed ha l'angolo C E F uguale all' angolo dato D, adunque si è costituito nell' angolo C E F, che è uguale al dato angolo D, il paralellogrammo F E C G uguale al dato triangolo A B C, il che bisognava fare.

TEOREMA XXXII.

PROPOSIZIONE XLIII.

In ogni spazio paralellogrammo i supplementi di quei paralellogrammi, che sono d'intorno al diametro, sono uguali fra loro. Sia



Sia il paralellogrammo A B C D, il cui diametro A C: e dintorno ad esso A C siano i paralellogrammi E H, F G: e quei che si chiamano supplementi B K, K D. Dico il supplemento B K esser uguale al supplemento K D, perciocchè essendo A B C D paralellogrammo, ed il suo diametro A C, sarà il triangolo A B C uguale al triangolo A D C, poi perchè E K H A è paralellogrammo, il cui diametro A K, sarà il triangolo A E K uguale al triangolo A H K, e per la medesima ragione il triangolo K G C è uguale al triangolo K F C, sarà dunque il triangolo A E K insieme col triangolo K G C uguale al triangolo A H K insieme con K F C, ed è tutto il triangolo A B C uguale a tutto il triangolo A D C, adunque il rimanente supplemento B K è uguale al rimanente K D, e però in ogni spazio paralellogrammo i supplementi di quei paralellogrammi, che sono d'intorno al diametro, sono uguali fra loro, il che bisognava dimostrare.

34. *di quest.*

PROBLEMA XII.

PROPOSIZIONE XLIV.

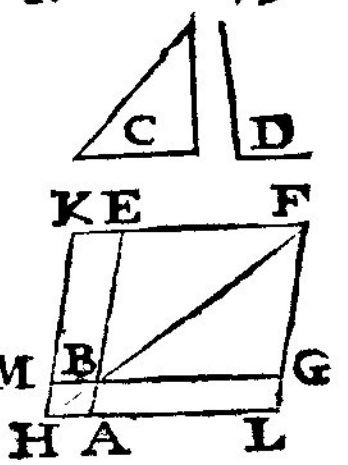
Alla data retta linea in un angolo rettilineo dato adattare un paralellogrammo uguale al dato triangolo.

Sia la data retta linea A B, ed il dato triangolo C, e l' angolo rettilineo dato D, biſogna alla data retta linea A B nell' angolo uguale a D adattare un paralellogrammo, che ſia uguale al dato triangolo C. Coſtituiſcaſi il paralellogrammo B E K M uguale al triangolo C nell' angolo E B M, che ſia uguale a D: e pongaſi la B E per diritto alla A B: e per A tiriſi la A H paralella ad una di eſſe B M, E K, e giungaſi H B, perchè dunque nelle paralelle A H, E K cade la linea retta H K, gli angoli A H K, H K E ſono uguali a due retti, onde B H K, H K E ſono minori di due retti: e quelle linee, che da angoli minori di due retti ſi prolungano in infinito, concorrono fra loro, adunque le H B, K E prolungate concorreran-

42. *di queſ.*

29. *di queſ.*

5. *Poſt.*



ranno. Prolunghinſi, e concorrano nel punto F e per F tiriſi la F L paparalella ad una di eſſe E A, K H, e le A H, M B prolunghinſi ne i punti G, L, adunque K H L F è paralellogrammo, il cui diametro H F: e d' intorno ad H F ſono i paralellogrammi M A, E G, ed i ſupplementi K B, B L, adunque L B è uguale a B K, ma ancora B K è uguale al triangolo C, onde eziandio L B ſarà uguale al triangolo C, e perchè l' angolo M B E è uguale all' angolo A B G, ed anco è uguale all' angolo D, adunque alla data retta linea A B nell' angolo A B G, che è uguale all' angolo D, ſi è adattato il paralellogrammo L B, uguale al dato triangolo C, il che biſognava fare.

31. *di queſ.*

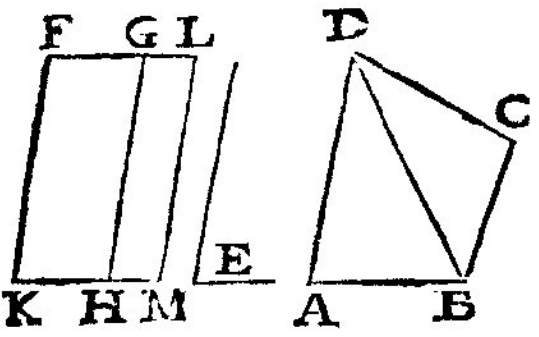
Per l' ant.

PROBLEMA XIII.

PROPOSIZIONE XLV.

Coſtituire, in un angolo

rettilineo, dato un paralellogrammo uguale ad un dato rettilineo.



Sia il dato rettilineo A B C D, e l' angolo rettilineo dato E, bisogna in un angolo uguale ad E costituire un paralellogrammo uguale al rettilineo A B C D. Giungasi B D, e costituiscasi il paralellogrammo F H, uguale al triangolo A D B nell' angolo H K F, uguale ad E, e poi alla linea retta G H adattisi il paralellogrammo G M, uguale al triangolo D B C, nell' angolo G H M, che è uguale ad E, e perchè l' angolo E è uguale ad amendue H K F, G H M, sarà anche H K F uguale a G H M, pongasi K H G comune, adunque gli angoli F K H K H G sono uguali a gli angoli K H G G H M, ma F K H, K H G sono uguali a due retti, adunque K H G G H M saranno uguali a due retti, e però nella linea retta G H, e nel da-

42. di quest.

Per 1. ant.

dato punto H. che è in essa, le due linee rette K H, H M non poste dalle medesime parti fanno gli angoli conseguenti uguali à due retti, adunque la K H è per diritto alla H M, e perchè nelle paralelle K M, F G cade la linea retta H G, gli angoli alterni M H G, H G F sono uguali, pongasi H G L comune, gli angoli dunque M H G, H G L sono uguali a gli angoli H G F, H G L ma gli angoli M H G, H G L sono uguali a due retti, onde ancor gli angoli H G F, H G L saranno uguali a due retti, adunque la F G è per diritto alla G L, e perchè la K F è uguale e paralella alla H G, ed ancor la H G alla M L, sarà la K F uguale e paralella alla M L, e sono congiunte dalle linee rette K M, F L, adunque le K M, F L ancora sono uguali e paralelle, onde K F L M è paralellogrammo, ed essendo il triangolo A B D uguale al paralellogrammo H F, ed il triangolo D B C al paralellogrammo G M, sarà tutto il rettilineo ABCD uguale a tutto il paralellogrammo K F L M, si è dunque costituito nell'angolo F K M, che è uguale al dato angolo E, il paralellogrammo

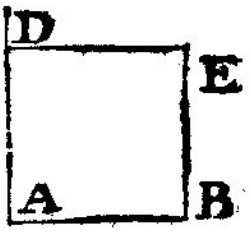
14. *di quest.*
29. *di quest.*
34. *di quest.*
30. *di quest.*
33. *di quest.*

K F L M, uguale al dato rettilineo A B C D, il che bisognava fare.

PROBLEMA XIV.

PROPOSIZIONE XLVI.

Dalla data linea retta descrivere un quadrato.



Sia la data linea retta A B, bisogna dalla A B descrivere un quadrato Tirisi la A C ad angoli retti sopra la A B dal punto A dato in essa, e pongasi la A D uguale alla A B, e per D tirisi la D E paralella alla A B, e per B la B E paralella alla A D, adunque A D E B è paralellogrammo, e la A B è uguale alla D E, e la A D alla B E, ma ancora a B A è uguale alla A D, onde le quattro B A, A D, D E, E B; sono uguali fra loro: e però il paralellogrammo A D E B è equilatero. Dico parimente esser rettangolo, perciocchè cadendo nelle paralelle A B, D E la linea retta A D, gli angoli B A D, A D E sono uguali a due retti, ma B A D è retto, adun-

31. *di quest.*

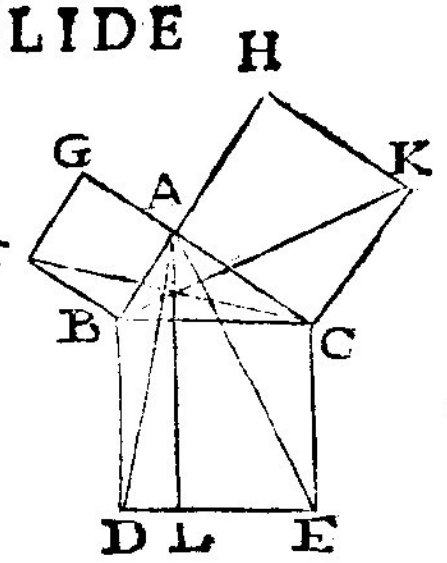
adunque eziandio A D E ſarà retto, e degli ſpazj paralellogrammi i lati, e gli angoli oppoſti ſono uguali fra loro: e però ciaſcuno degli angoli oppoſti A B E, B E D è retto: ed A D E B è rettangolo, ma ſi è dimoſtrato ancora eſſere equilatero, laonde è neceſſario, che ſia quadrato, e ſi è deſcritto dalla linea retta A B, il che biſognava fare. 34. *de queſ.*

TEOREMA XXXIII.

PROPOSIZIONE XLVII.

Ne triangoli rettangoli il quadrato, che ſi deſcrive dal lato ſottopoſto all' angolo retto, è uguale a gli quadrati deſcritti da i lati, che l' angolo retto contengono.

Sia il triangolo rettangolo A B C, che abbia l' angolo B A C retto. Dico il quadrato deſcritto dalla retta B C eſſere uguale agli quadrati, che ſi deſcrivono dalle B A, A C, deſcrivaſi dalla B C, il quadrato B D E C, e dalle B A, A C i quadrati G B, H C: e per A tiriſi A L para-



lella ad una di esse B D, C E: e giungasi A D, F C, perchè dunque l' uno, e l' altro degli angoli B A C, B A G è retto, ad una linea retta B A, ed al dato punto in essa A due linee rette A C, A G, non poste dalle medesime parti fanno gli angoli conseguenti uguali a due retti, adunque C A è per diritto alla A G; e per la medesima ragione la A B è per diritto alla A H, e perchè l' angolo D B C è uguale all' angolo F B A, essendo amendue retti, pongasi comune A B C, adunque tutto l' angolo D B A è uguale a tutto F B C, e perchè le due A B, B D sono uguali alle due F B, B C, l' una all' altra, e l' angolo D B A è uguale all' angolo F B C, sarà ancor la base A D uguale alla base F C, ed il triangolo A B D uguale al triangolo F B C, ed il paralellogrãmo B L è doppio del triangolo A B D perchè hanno la medesima base B D, e sono nelle medesime pa-

14 *di quest.*

4. *di quest.*

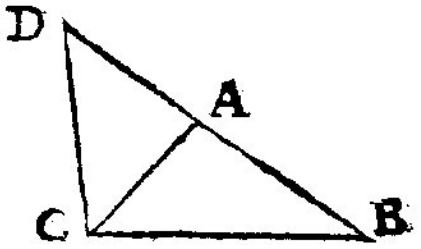
paralelle B D, A L; ed il quadrato G B è doppio del triangolo F B C, perchè anch' eſſi hanno la medeſima baſe F B, e ſono nelle medeſime paralelle FB, GC, ma quelle coſe, che ſono doppie delle uguali, ſono uguali fra loro, adunque il paralellogrammo B L è uguale al quadrato G B; e giunte parimente A E, B K ſi dimoſtrerà anche il paralellogrammo C L uguale al quadrato H C, tutto dunque il quadrato B D E C è uguale agli due quadrati G B, H C, e ſi deſcrive il quadrato B D E C dalla linea retta B C, ed i quadrati G B, H C dalle B A, A C, adunque il quadrato BE deſcritto dal lato BC è uguale a gli quadrati deſcritti da i lati B A A C, onde ne' triangoli rettangoli il quadrato, che ſi deſcrive dal lato ſottopoſto all'angolo retto, è uguale a gli quadrati deſcritti da i lati, che l'angolo retto contengono, il che biſognava dimoſtrare. 41. di queſ.

TEOREMA XXXIV.

PROPOSIZIONE XLVIII.

Se il quadrato deſcritto da uno

uno de' lati del triangolo ſia uguale a' quadrati, che ſi deſcrivono dagli altri lati, l' angolo contenuto dagli altri due lati del triangolo ſarà retto.



Il quadrato, che ſi deſcrive da un lato BC del triangolo A B C ſia uguale a gli quadrati deſcritti dagli altri lati del triangolo B A, A C. Dico l' angolo B A C eſſer retto. Tiriſi dal punto A la A D ad angoli retti ſopra la A C, e pongaſi la A D uguale alla B A, e giungaſi D C, perchè dunque la D A è uguale alla A B; ſarà anche il quadrato della D A uguale al quadrato della A B. pongaſi comune il quadrato della A C, adunque i quadrati delle D A, A C ſono uguali a' quadrati delle B A, A C, ma a' quadrati delle D A, A C è uguale il quadrato della D C, perchè l' angolo D A C è retto, ed a quadrati delle B A, A C ſi pone uguale il quadrato della B C, adunque il quadrato

drato della D C è uguale al quadrato della B C, e però il lato D C è uguale al lato C B, e perchè la D A è uguale alla A B, e la A C è comune, le due D A, A C ſono uguali alle due B A, A C, e la baſe D C è uguale alla baſe C B, l' angolo dunque D A C è uguale all'angolo B A C: e D A C è retto, onde ancor B A C ſarà retto, adunque ſe il quadrato deſcritto da uno de' lati del triangolo ſia uguale a' quadrati, che ſi deſcrivono dagli altri lati, l' angolo contenuto dagli altri due lati del triangolo ſarà retto, il che biſognava dimoſtrare. 8. *di queſ.*

FINE DEL PRIMO LIBRO.

DE-

DEGLI

ELEMENTI D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO SECONDO

DIFFINIZIONI.

I.

OGNI paralellogrammo rettangolo ſi dice eſſer contenuto da due rette linee, che coſtituiſcono l'angolo retto.

II.

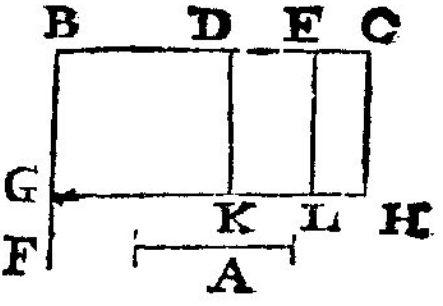
In ogni ſpazio paralellogrammo ciaſcuno degli paralellogrammi, che ſono d'intorno al diametro di eſſo, con gli due ſupplementi, ſi chiamerà Gnomone.

TEO-

TEOREMA I.

PROPOSIZIONE I.

Se sono due linee rette, delle quali una sia segata in quante parti si vogliono, il rettangolo contenuto dalle due linee è uguale agli rettangoli, che si contengono dalla linea non segata, e da ciascuna parte dell'altra.



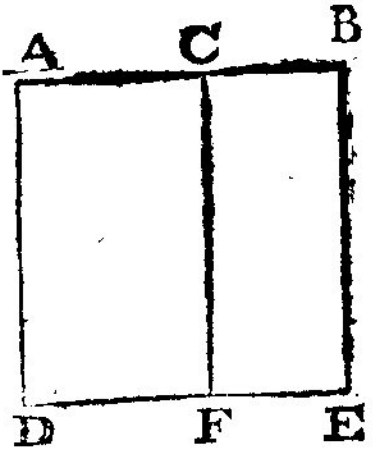
Siano due linee rette A, B C, e la B C sia segata in qualunque modo ne' punti D, E. Dico il rettangolo contenuto dalle linee rette A, B C essere uguale al rettangolo contenuto dalle A, B D, ed al rettangolo contenuto dalle A, D E, ed a quello, che si contiene dalle A, E C perciocchè tirisi dal punto B la B F ad angoli retti sopra la B C, e pongasi la B G uguale alla A, poi per G tirisi la G H paralella alla B C, e per

e per li punti D,E,C, tirinſi le DK, E L, C H paralelle alla B G, adunque il rettangolo B H è uguale a gli rettangoli B K, D L, E H: ed è il rettangolo BH quello, che ſi contiene dalle A, B C, contenendoſi dalle G B, B C, ed eſſendo la B G uguale alla A, ed il rettangolo BK è quello, che ſi contiene dalle A, BD; perciocchè ſi contiene dalle G B, BD, delle quali la GB è uguale alla A, ed il rettangolo D L è quello, che ſi contiene dalle A, D E, concioſiacoſachè D K, cioè B G, ſia uguale alla A, parimente il rettangolo E H è quello, che ſi contiene dalle A, EC, il rettangolo dunque contenuto dalle A, B C è uguale al rettangolo contenuto dalle A, B D, ed al contenuto dalle A, D E, ed al contenuto dalle A, E C, onde ſe ſono due linee rette, l' una delle quali ſia ſegata in quante parti ſi vogliono, il rettangolo contenuto dalle due linee è uguale a gli rettangoli, che ſi contengono dalla linea retta non ſegata, e da ciaſcuna parte dell'altra, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE II.

Se una linea retta ſia ſegata in qualſivoglia modo, i rettangoli contenuti da tutta la linea, e da ciaſcuna delle parti, ſono uguali al quadrato, che ſi fa da tutta la linea.



La linea retta A B ſia ſegata in qualſivoglia modo nel punto C. Dico, che il rettangolo cõtenuto dalle A B, B C inſieme con quello che ſi contiene dalle B A, A C è uguale al quadrato di A B. Deſcrivaſi dalla A B il quadrato A D E B, e tiriſi per C la C F paralella ad una di eſſe A D, B E, adunque il quadrato A E è uguale a gli rettangoli A F, C E, ed è A E il quadrato di A B, ed il rettangolo A F è contenuto dalle B A, A C, contenendoſi dalle D A, A C, delle quali A D è uguale ad A B,

46. del prim.

31. del prim.

A B, ed il rettangolo C E è contenuto dalle A B, B C, concioſiacoſachè la B E ſia uguale alla A B, onde il rettangolo B A C inſieme col rettangolo A B C è uguale al quadrato di A B. Se dunque una linea retta ſia ſegata in qualſivoglia modo, i rettangoli contenuti da tutta, e da ciaſcuna delle parti, ſono uguali al quadrato di tutta la linea, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA III.

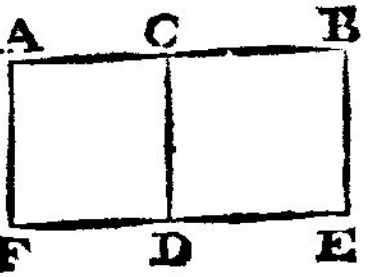
PROPOSIZIONE III.

Se una linea retta ſia ſegata in qualunque modo, il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una parte di eſſa ſarà uguale al rettangolo, che ſi contiene dalle parti, ed al quadrato, che ſi fa dalla detta parte.

La linea retta A B ſia ſegata in qualunque modo nel punto C. Dico che il rettangolo A B C è uguale al rettangolo A C B inſieme col quadrato, che ſi fa dalla B C. De-

ſcri-

46. *del prim.* 31. *del prim.*



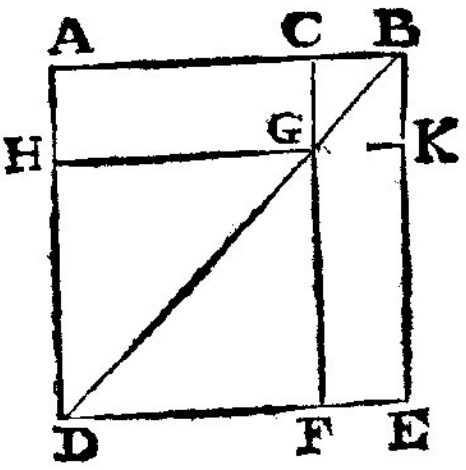
ſcrivaſi dalla B C il quadrato C D E B e prolunghiſi E D in F, e per A tiriſi la A F parallella ad una di eſſe C D, B E, ſarà il rettangolo A E uguale alli rettangoli A D, C E, ed il rettangolo A E è contenuto dalle A B, B C, perciocchè ſi contiene dalle A B, B E, delle quali B E è uguale alla B C: ed il rettangolo A D è contenuto dalle A C, C B, concioſiacoſachè D C ſia uguale alla C B, ed è D B il quadrato, che ſi fa dalla B C, laonde il rettangolo A B C è uguale al rettangolo A C B inſieme col quadrato di B C. Se dunque una linea retta ſia ſegata in qualunque modo, il rettangolo contenuto da tutta la linea, e da una parte di eſſa, ſarà uguale al rettangolo, che ſi contiene dalle parti, ed al quadrato, che ſi fa dalla detta parte, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA IV.

PROPOSIZIONE IV.

Se una linea retta ſia ſegata in qualunque modo, il qua-

quadrato di tutta la linea sarà uguale agli quadrati delle parti, ed al rettangolo contenuto due volte dalle dette parti.



Sia la linea retta A B divisa in qualunque modo nel punto C. Dico che il quadrato di A B è uguale agli quadrati di A C, C B, ed a quel rettangolo, che si contiene due volte dalle A C, C B. Descrivasi dalla A B il quadrato A D E B, e giungasi B D, e per C tirisi C G F paralella ad una di esse A D, B E, e per G tirisi H K paralella ad una delle A B, D E, perchè dunque la C F è paralella alla A D, ed in esse cade la B D, sarà l'angolo B G C esteriore uguale all'interiore, ed opposto A D B, ma l'angolo A D B è uguale all' angolo A B D, perchè il lato B A è uguale al lato A D, onde l' angolo C G B è uguale all'angolo G B C, è per tal cagione il lato B C è uguale al

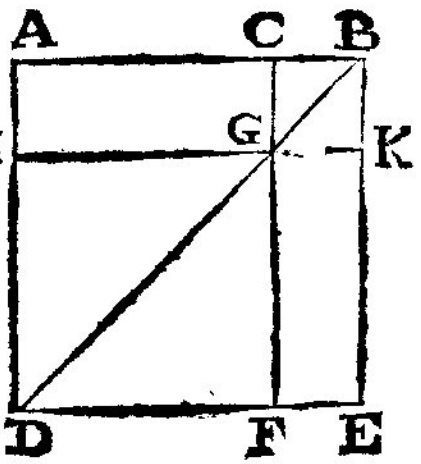
46. *del prim.*

31. *del prim.*

29. *del prim.*

5. *del prim.*

6. *del prim.*



le al lato C G, ma ancora il lato C B è uguale al lato G K, e C G a B K adunque eziandio G K è uguale a K B; e C G K B è equilatero. Dico oltre a ciò essere rettangolo, perchè essendo la C G paralella alla B K, ed in esse cade la C B, gli angoli K B C, G C B sono uguali a due retti, ed è retto l'angolo K B C, adunque eziandio G C B è retto, e retti sono gli angoli opposti C G K, G K B, onde C G K B è rettangolo, ma fu dimostrato, che è ancora equilatero, adunque C G K B è quadrato, che si fa da B C, e per la medesima ragione H F è quadrato, che si fa da H G, cioè da A C, laonde H F, C K sono quadrati di A C, C B, e perchè il rettangolo A G è uguale al rettangolo G E, ed è A G quello, che si contiene dalle A C, C B, concioſiacosachè G C sia uguale a C B, sarà ancora G E uguale a quello, che si contiene dalle A C, C B, onde i ret-

34. del prim.

29. del prim.

34 del prim.

i rettangoli A G, G E ſono uguali a quello, che due volte è contenuto dalle A C, C B, e ſono H F, C K i quadrati di A C, C B, quattro dunque H F, C K, A G, G E ſono uguali a gli quadrati di AC, CB, ed al rettangolo, che due volte dalle AC, C B è contenuto, ma H F, C K, A G, G E ſono tutto il quadrato A D E B, che ſi fa da A B, il quadrato dunque di A B è uguale a gli quadrati di A C, C B, ed al rettangolo, che due volte è contenuto dalle A C, C B, laonde ſe una linea ſia diviſa in qualunque modo, il quadrato di tutta la linea ſarà uguale a gli quadrati delle parti ed al rettangolo contenuto due volte dalle dette parti, e queſto è quello, che biſognava dimoſtrare.

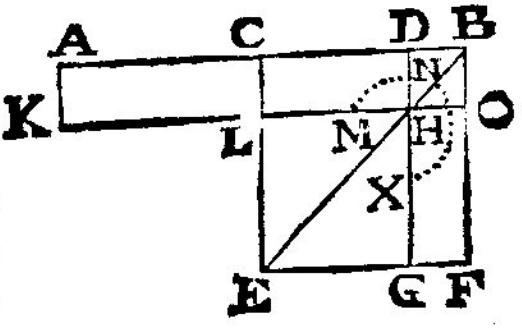
COROLLARIO.

Da queſto ſi vede chiaramente, che negli ſpazj quadrati i paralellogrammi, che ſono dintorno al diametro, ſono ancora loro quadrati.

TEOREMA V.

PROPOSIZIONE V.

Se una linea retta ſia ſegata in parti uguali, ed in parti diſuguali, il rettangolo contenuto dalle parti diſuguali inſieme col quadrato della linea, che è fra i ſegamenti, ſarà uguale al quadrato della metà di tutta la linea.



Sia la linea retta A B ſegata in parti uguali nel punto C, ed in parti diſuguali nel D. Dico, che il rettangolo contenuto dalle A D, D B inſieme col quadrato di C D è uguale al quadrato di C B. Deſcrivaſi da B C il quadrato C E F B, e giungaſi B E, e per D tiriſi la D H G paralella ad una di eſſe C E, B F, e per H tiriſi K L O paralella ad una delle C B, E F, e finalmente per A tiriſi

risi A K paralella ad una delle C L, B O, e perchè il supplemento C H è uguale al supplemento H F, pongasi D O comune, adunque tutto il rettangolo C O è uguale a tutto D F, ma C O è uguale ad A L, concioſiacoſachè A C ſia uguale a C B, onde eziandio A L è uguale a D F, pongasi C H comune, ſarà il tutto A H uguale a F D, D L, ma A H è contenuto dalle AD.DB, perciocchè D H è uguale a D B, ed F D, D L è 'l gnomone M N X, adunque il gnomone M N X è uguale al rettangolo, che è contenuto dalle A D, D B, pongaſi L G comune, che è uguale al quadrato di C D, laonde il gnomone M N X, ed L G ſono uguali al rettangolo contenuto dalle A D, D B, ed al quadrato di C D, ma il gnomone M N X, ed L G ſono tutto il quadrato C E F B, qual ſi fa da C B; adunque il rettangolo A D B inſieme col quadrato di C D è uguale al quadrato di C B, ſe dunque una linea retta ſia ſegata in parti uguali, ed in parti diſuguali, il rettangolo contenuto dalle parti diſuguali inſieme col quadrato della linea, che è fra i ſegamenti, ſarà uguale

45. del prim.

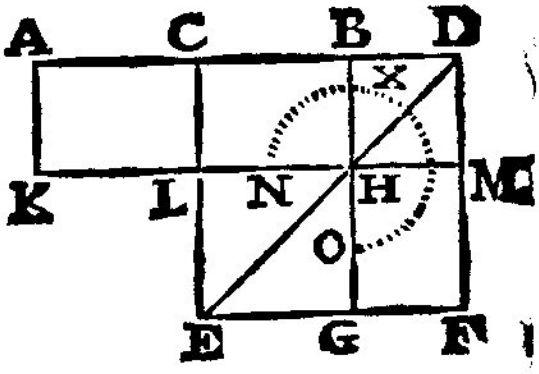
36. del prim.

al quadrato della metà di tutta la linea, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA VI.

PROPOSIZIONE VI.

Se una linea retta sia segata per mezzo, e vi si aggiunga qualche altra linea per diritto, il rettangolo contenuto da tutta la linea colla giunta, e dalla giunta insieme col quadrato della metà, sarà uguale al quadrato, che si fa dalla metà, e dalla giunta siccome da una linea sola.



Seghisi la linea retta A B per mezzo nel punto C, e aggiungavisi B D per diritto. Dico, che il rettangolo A D B insieme col quadrato di B C è uguale al quadrato, che si fa dalla C D. Descrivasi dalla C D il quadrato C E

46. del prim.

C E F D, e giungaſi D E, e per B tiriſi B H G paralella ad una di eſſe C E, D F, e per H tiriſi K L M paralella ad una delle A D, E F, e finalmente per A tiriſi A K paralella ad una delle C L, D M. Perchè dunque la A C è uguale alla C B, il rettangolo A L ſarà uguale al rettangolo C H. Ma C H è uguale ad H F, onde A L ſarà uguale ad H F, pongaſi C M comune, adunque tutto il rettangolo A M è uguale al gnomone N X O, e A M è contenuto dalle A D, D B, concioſiacoſachè la D M ſia uguale alla D B, e però il gnomone N X O è uguale al rettangolo A D B, ſimilmente pongaſi comune L G, che è uguale al quadrato di C B, adunque il rettangolo A D B, inſieme col quadrato di C B è uguale al gnomone N X O, e ad L G, ma il gnomone N X O, ed L G ſono tutto il quadrato C E F D, che ſi fa da C D, laonde il rettangolo A D B inſieme col quadrato di B C è uguale al quadrato di C D; ſe dunque una linea retta ſia ſegata per mezzo, e vi ſi aggiunga qualche altra linea per diritto, il rettangolo contenuto da tutta la linea, col-

31. *del prim.*

36. *del prim.*

43. *del prim.*

la giunta, e dalla giunta, insieme col quadrato della metà, sarà uguale al quadrato della metà, e della giunta, siccome di una sola linea, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA VII.

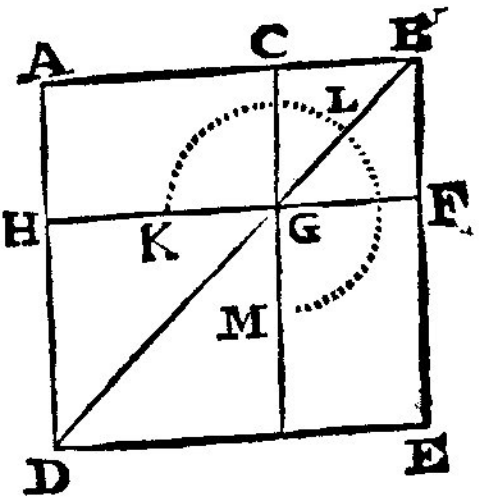
PROPOSIZIONE VII.

Se una linea retta sia segata in qualunque modo, i quadrati, che si fanno da tutta la linea, e da una parte, sono uguali al rettangolo contenuto due volte da tutta la linea, e dalla detta parte insieme col quadrato dell' altra parte.

Sia la linea retta A B segata in qualunque modo nel punto C. Dico, che i quadrati di A B, B C sono uguali al rettangolo contenuto due volte dalle A B, B C, ed al quadrato di A C. Descrivasi dalla A B il quadrato A D E B, e constituiscasi la figura. Perchè dunque il rettangolo A G è uguale al rettangolo G E, pongasi comune C F, onde tutto il rettangolo A F è uguale a

46. del prim.

43. del prim.



le a tutto C E, e perciò i rettangoli A F, C E ſono doppi del rettangolo A F, ma A F, C E ſono il gnomone K L M, ed il quadrato C F, adunque il gnomone K L M, ed il quadrato C F ſono doppi del rettangolo A F, e quello, che è contenuto due volte dalle A B, B C è doppio del rettangolo A F, perciocchè la B F è uguale alla B C, adunque il gnomone K L M, ed il quadrato C F ſono uguali al rettangolo, che due volte dalle A B, B C è contenuto. Pongaſi D G comune, che è il quadrato di A C, onde il gnomone K L M, ed i quadrati B G, G D ſono uguali a quello, che due volte è contenuto dalle A B, B C, ed al quadrato di A C, ma il gnomone K L M, ed i quadrati B G, G D ſono A D E B, e C F, cioè i quadrati di A B, B C, i quadrati dunque di A B, B C ſono uguali al rettangolo, che è contenuto due volte dalle A B, B C, inſieme col quadra-

to di AC, laonde ſe una linea retta ſia ſegata in qualunque modo, i quadrati, che ſi fanno da tutta la linea, e da una parte ſono uguali al rettangolo contenuto due volte da tutta la linea, e dalla detta parte, inſieme col quadrato dell' altra parte, il che biſognava dimoſtrare.

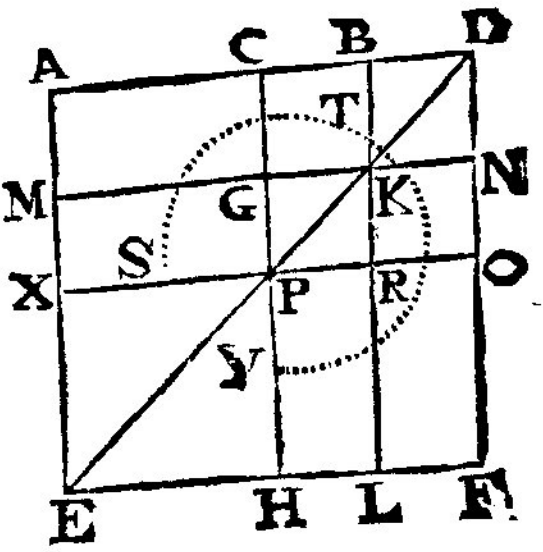
TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Se una linea retta ſia ſegata in qualunque modo, il rettangolo contenuto quattro volte da tutta la linea, e da una delle parti inſieme col quadrato dell' altra parte, ſarà uguale al quadrato, che ſi fa da tutta la linea, e dalla detta parte, ſiccome da una linea ſola.

Sia la linea retta A B ſegata in qualunque modo nel punto C. Dico, che il rettangolo contenuto quattro volte dalle A B, B C inſieme col quadrato di A C è uguale al qua-

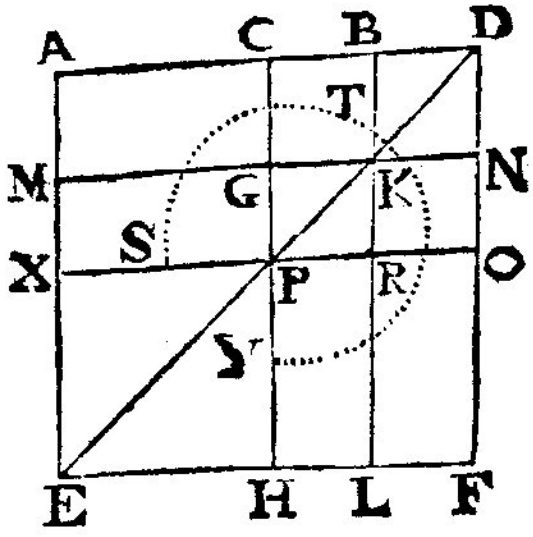
quadrato di A B, B C come di una linea sola. Prolunghisi la linea retta A B in D, e sia la B D uguale alla C B, e dalla A D



descrivasi il quadrato A E F D, e facciasi la figura doppia, perchè dunque la C B è uguale alla B D, ed è la C B uguale alla G K, e la B D alla K N, sarà eziandio la G K uguale alla K N, e per la medesima ragione la P R è uguale alla R O, e perchè la C B è uguale alla B D, e la G K alla K N, sarà il rettangolo C K uguale al rettangolo K D, ed il rettangolo G R al rettangolo R N. Ma C K è uguale ad R N, conciosiacosachè siano supplementi del paralellogrammo C O, onde eziandio K D è uguale a G R, e quattro rettangoli D K, K C, G R, R N, sono uguali fra loro, e però sono quadrupli del rettangolo C K, similmente perchè la C B è uguale alla B D, e la B D alla B K, cioè

34. del prim.

alla C G, e la C B alla G K, cioè alla G P, ſarà ancor la C G uguale alla G P, ed è la P R uguale alla R O, adunque il rettangolo A G è uguale al rettangolo M P, ed il rettangolo P L al rettangolo R F, ma M P è uguale a P L, eſſendo ſupplementi del paralellogrammo M L: e per tal cagione A G è uguale ad R F, & de i quattro A G, M P, P L, R F fra loro ſono uguali, e quadrupli di A G,



e ſi è dimoſtrato, che i quattro C K, K D, G R, R N ſono quadrupli i C K, otto dunque, che contengono il gnomone S T Y ſono quadrupli di A K, e perchè A K è quello, che ſi contiene dalle A B, B C, eſſendo la B K uguale alla B C, ſarà il contenuto quattro volte dalle A B, B C quadruplo di A K, e fu dimoſtrato il gnomone S T Y quadruplo di A K, adunque quello che è contenuto quattro volte dalle A B, B C è

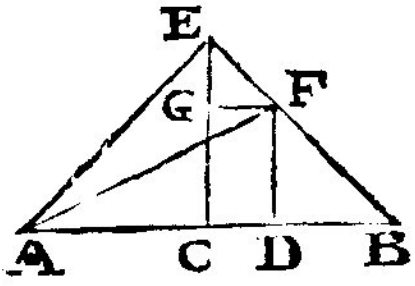
B C è uguale al gnomone S T Y. Pongasi comune X H, che è uguale al quadrato di AC, sarà quello che è contenuto quattro volte dalle A B, B C insieme col quadrato di A C uguale al gnomone S T Y, ed al quadrato X H, ma il gnomone S T Y, ed X H sono tutto il quadrato A E F D, che si descrive da A D, il rettangolo dunque, che si contiene quattro volte dalle A B, B C insieme col quadrato di A C è uguale al quadrato di A D, cioè a quello che si descrive dalle AB, BC siccome da una sola linea, laonde se una linea retta sia segata in qualunque modo, il rettangolo contenuto quattro volte da tutta la linea, e da una parte, insieme col quadrato dell' altra parte, sarà uguale al quadrato, che si fa da tutta la linea, e dalla detta parte, siccome da una linea sola, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE IX.

Se una linea retta sia segata in parti uguali, ed in parti

diſuguali, i quadrati che ſi fanno dalle parti diſuguali, ſono doppi del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea, che è fra gli ſegamenti.



Sia la linea retta A B ſegata in parti uguali nel punto C, ed in parti diſuguali nel D. Dico che i quadrati di A D, D B ſono doppi degli quadrati di A C, C D. Tiriſi dal punto C la C E ad angoli retti ſopra la A B; e pongaſi uguale all'una, e l'altra di eſſe A C, C B, e giungaſi E A, E B. Poi per D tiriſi la D F paralella alla C E, e per F tiriſi la F G paralella alla A B; e giungaſi A F. Perchè dunque la A C è uguale alla C E, ſarà l'angolo E A C uguale all'angolo A E C, ed eſſendo retto l'angolo C, i rimanenti A E C, E A C ſaranno uguali ad un retto, e ſono uguali fra loro, adunque l'uno, e l'altro di eſſi A E C, E A C è la metà d'un retto, e per la medeſima ragione l'uno, e l'altro delli C E B, E B C è la metà d'un

11. del prim.

32. del prim.

5. del prim.

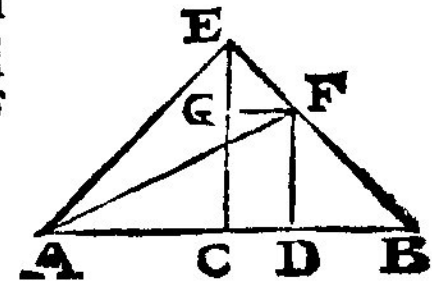
32. del prim.

d'un retto, onde tutto l'angolo AEB è retto, e perchè l'angolo GEF è la metà d'un retto, ed è retto, EGF, essendo uguale all'interiore, ed opposto ECB, sarà eziandio il rimanente EFG la metà d'un retto, onde l'angolo GEF è uguale all'angolo EFG, e però il lato EG è uguale al lato GF, similmente perchè l'angolo B è la metà d'un retto, ed FDB è retto, concioſiacoſachè ſia uguale all'interiore, ed oppoſto ECB, ſarà il rimanente BFD la metà d'un retto, l'angolo dunque B è uguale all'angolo DFB, ed il lato DF al lato DB, e perchè la AC è uguale alla CE, ſarà anche il quadrato di AC uguale al quadrato di CE, onde i quadrati di AC, CE ſono doppi del quadrato di AC, ma agli quadrati di AC, CE è uguale il quadrato di EA, per eſſere l'angolo ACE retto, adunque il quadrato di EA, è doppio del quadrato di AC, oltre a ciò perchè la EG è uguale alla GF, ſarà il quadrato di EG uguale al quadrato di GF, e per tal cagione i quadrati di EG, GF ſono doppi del quadrato di GF, ma a gli quadrati di EG, GF è uguale il

29. *del prim.*

6. *del prim.*

47. *del prim.*

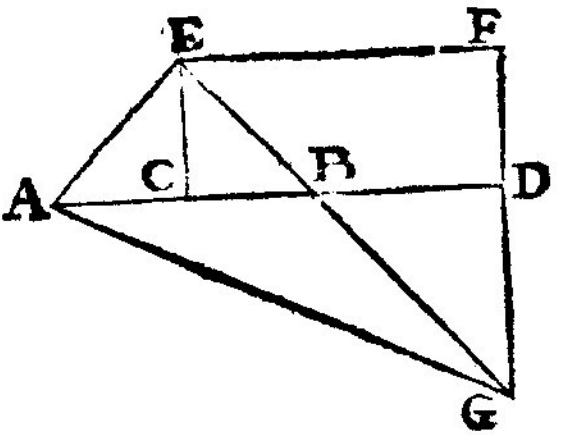


le il quadrato di E F, adunque il quadrato di E F è doppio del quadrato di G F, ed è G F uguale a C D, onde il quadrato di E F è doppio del quadrato di C D, ma eziandio il quadrato di A E è doppio del quadrato di A C, i quadrati dunque di A E, E F ſono doppi degli quadrati di A C, C D, ed agli quadrati di A E, E F è uguale il quadrato di A F, perciocchè l' angolo A E F è retto, adunque il quadrato di A F è doppio degli quadrati di A C, C D, ma al quadrato di A F ſono uguali i quadrati di A D, D F, eſſendo l' angolo D retto, che però i quadrati di A D, D F ſono doppi degli quadrati di A C, C D, ma la D F è uguale alla D B, i quadrati dunque di A D, D B ſono doppi degli quadrati di A C, C D, laonde ſe una linea retta ſia ſegata in parti uguali, ed in parti diſuguali, i quadrati, che ſi fanno dalle parti diſuguali, ſono doppi del quadrato della metà, e del quadrato di quella linea, che è fra gli ſegamenti, il che biſognava dimoſtrare. *TEO.*

TEOREMA X.

PROPOSIZIONE X.

Se una linea retta ſia ſegata per mezzo, e vi ſi aggiunga un' altra linea per diritto, i due quadrati, che ſi fanno da tutta la linea colla giunta, e dalla giunta, ſono doppi del quadrato della metà, e del quadrato, che ſi fa dalla metà, e dalla giunta, ſiccome da una ſola linea.



Sia la linea retta A B ſegata per mezzo nel punto C, ed aggiungaſi ad eſſa per diritto la linea B D. Dico, che i quadrati di A D, D B ſono doppi degli quadrati di A C, C D. Tiriſi dal punto C la C E ad angoli retti ſopra la A B, e pongaſi uguale a ciaſcuna

11. *del prim.*

di

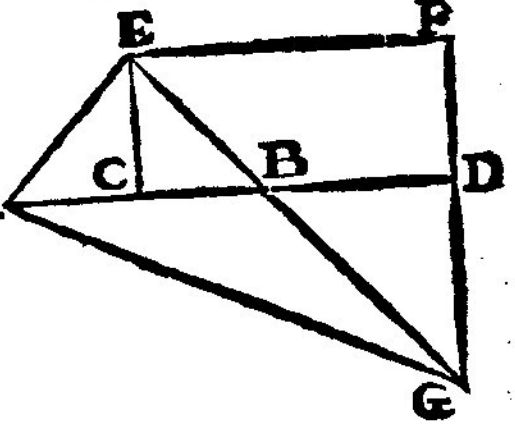
di esse A C, C B; e giungasi A E, E B Poi per E tirisi la E F paralella alla A D, e per D tirisi la D F paralella alla C E, e perchè nelle paralelle E C, F D cade la linea retta EF, sono gli angoli C E F, E F D uguali a due retti, gli angoli dunque F E B, E F D sono minori di due retti, ma le linee rette prolungate in infinito dagli angoli minori di due retti concorrono insieme, adunque prolungandosi le E B, F D concorreranno dalle parti di B D. Prolunghinsi, e concorrano nel punto G, e giungasi A G. Perchè dunqne la A C è uguale alla C E, eziandio l' angolo A E C sarà uguale all' angolo E A C, e l'angolo C è retto onde l' uno, e l' altro di essi E A C, A E C, sarà la metà d' un retto, e per la medesima ragione sarà la metà d'un retto l' uno, e l'altro di essi C E B, E B C, adunque A E B è retto, e perchè E B C è la metà d' un retto, sarà anche la metà d'un retto D B G, essendo alla cima, ovvero contrapposto. Ma B D G altresì è retto, per essere uguale all'alterno D C E, il rimanente dunque D G B è la metà d' un retto, e però è uguale a D B G, onde il

29. *del prim.*

15. *del prim.*

29. *del prim.*

lato



6. *del prim.*

lato B D è uguale al lato D G. ſimilmente perchè E G F è la metà d'un retto, ed è retto, l'angolo F, eſſendo uguale all'angolo oppoſto C, ſarà il rimanente F E G la metà d'un retto, ed uguale ad E G F, onde eziandio il lato G F è uguale al lato E F, eſſendo dunque la E C uguale alla C A, il quadrato di E C ſarà uguale al quadrato di C A, e però i quadrati di E C, C A ſono doppi del quadrato di C A, ma a gli quadrati di E C C A è uguale il quadrato di E A, il quadrato dunque di E A è doppio del quadrato di A C. E perchè la G F è uguale alla F E eziandio al quadrato di G F ſarà uguale il quadrato di F E, adunque i quadrati di G F, F E ſono doppi del quadrato di E F, ma a gli quadrati di G F, F E è uguale il quadrato di E G, e per tal cagione il quadrato di E G, è doppio del quadrato di E F, ed è la E F uguale alla C D; il quadrato dunque di E G è doppio

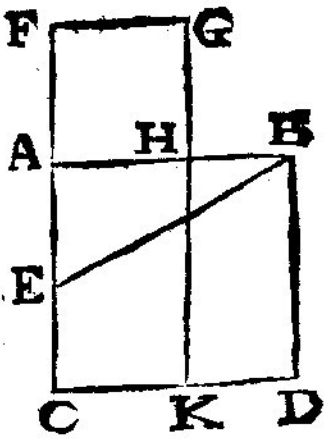
pio del quadrato di C D, ma il quadrato di E A ſi è dimoſtrato doppio del quadrato di A C, onde i quadrati di A E, E G ſono doppi de' quadrati di A C, C D, ed a quadrati di A E, E G è uguale il quadrato di A G, il quadrato dunque di A G è doppio degli quadrati di A C, C D, ma al quadrato di A G ſono uguali i quadrati di A D, D G, per la qual coſa i quadrati di A D, D G ſono doppi degli quadrati di A C, C D, ma la D G è uguale alla D B, i quadrati dunque di A D D B ſono doppi degli quadrati di A C, C D, laonde ſe una linea retta ſia ſegata per mezzo, e vi ſi aggiunga un'altra linea per diritto, i due quadrati, che ſi fanno da tutta la linea colla giunta, e dalla giunta, ſono doppi del quadrato della metà, e del quadrato, che ſi fa dalla metà, e dalla giunta, ſiccome da una ſola linea, il che biſognava dimoſtrare.

PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE XI.

Segare una linea retta data tal-

talmente, che il rettangolo contenuto da tutta linea, e da una delle parti ſia uguale al quadrato dell' altra parte.



Sia la retta linea data A B, biſogna ſegarla in tal modo, che il rettãgolo contenuto da tutta la linea, e da una parte ſia uguale al quadrato dell' altra parte. Deſcrivaſi dalla A B il quadrato A B D C, e ſeghiſi A C per mezzo nel punto E: e giungaſi B E, poi prolungata C A in F pongaſi E F uguale a B E: e dalla A F deſcrivaſi il quadrato F G H A: e G H prolunghiſi in K. Dico, che la A B è ſegata in H talmente, che il rettangolo A B H è uguale al quadrato di A H. Perciocchè eſſendo la linea A C ſegata per mezzo in E, e vi ſi aggiunge A F per diritto, il rettangolo C F A inſieme col quadrato di A E ſarà uguale al quadrato di E F, ma E F è uguale alla E B, il rettangolo dunque C F A inſieme col quadrato di A E è

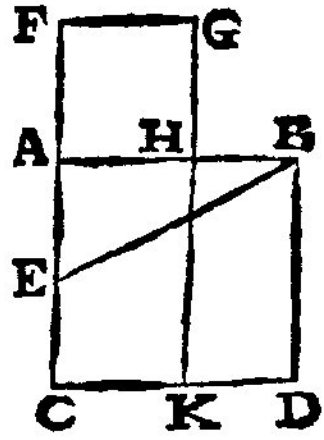
46. del prim.

10. del prim.

46. del prim.

6. del queſ.

47. del prim. A E è uguale al quadrato di E B; ed al quadrato di E B ſono uguali i quadrati di B A, A E, concioſiacoſachè l' angolo A ſia retto, onde il rettangolo C F A inſieme col quadrato di A E è uguale a i quadrati di B A, A E, traggaſi il comune quadrato di A E, adunque il rimanente rettangolo C F A è uguale al quadrato di A B, ma C F A è il rettangolo F K, perciocchè la A F è uguale alla F G, ed il quadrato di A B è A D, onde il rettangolo F K è uguale al quadrato A D. Traggaſi A K comune, il rimanente adunque F H è uguale al rimanente H D, ed è H D il rettangolo A B H, eſſendo la A B uguale alla B D, ed F H è 'l quadrato di A H, laonde il rettangolo A B H è uguale al quadrato di A H: e però la data retta linea A B è ſegata in H talmente che il rettangolo A B H è uguale al quadrato di A H, il che biſognava fare.



TEO-

TEOREMA XI.

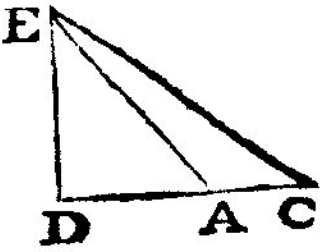
PROPOSIZIONE XII.

Ne triangoli ottusiangoli il quadrato, che si fa dal lato sottoposto all' angolo ottuso è tanto maggiore degli quadrati fatti da' lati, che l' angolo ottuso comprendono, quanto è il rettangolo contenuto due volte da un de' lati, che sono d' intorno all' angolo ottuso, cioè da quello nel quale prolungato cade la perpendicolare, e dalla linea presa di fuori della perpendicolare verso l'angolo ottuso.

Sia il triangolo ottusiangolo AEC, che abbia l' angolo ottuso E A C, e dal punto E tirisi alla C A prolungata la perpendicolare E D. Dico che il quadrato di C E è tanto maggiore degli quadrati di E A, A C, quanto il rettangolo, che due volte dalle C A, A D è contenuto,

12. *de prim.*

Per-



Perciocchè essendo la linea C D segata in qualunque modo nel punto A; 4. di quest. sarà il quadrato di C D uguale a gli quadrati di CA, AD, ed al rettangolo che due volte è contenuto dalle CA, A D. pongasi comune il quadrato di D E, adunque i quadrati di C D, DE sono uguali agli quadrati di C A, AD, DE, ed al rettangolo, che due volte è contenuto dalle CA, AD; ma a gli quadrati di CD, DE è uguale il quadrato di CE, perciocchè l' angolo D è retto, essendo la E D perpendicolare: ed a gli quadrati di A D, D E è uguale il quadrato di A E, onde il quadrato di C E è uguale a gli quadrati di C A, A E, ed al rettangolo, che due volte dalle CA, A D è contenuto, il quadrato dunque di C E è tanto maggiore degli quadrati di C A, A E, quanto è il rettangolo, che due volte è contenuto dalle C A, A D, laonde ne triangoli ottusiangoli il quadrato, che si fa dal lato sottoposto all'angolo ottuso, è tanto maggiore degli due quadrati fatti da i lati, che comprendono l'angolo ottuso, quanto è il ret-

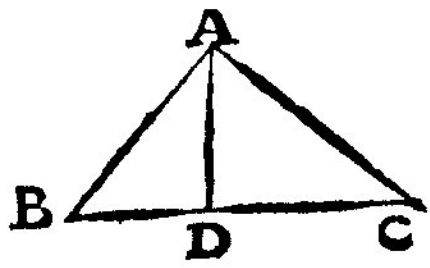
il rettangolo contenuto due volte da uno de' lati, che ſono d'intorno all'angolo ottuſo, cioè da quello, nel quale prolungato cade la perpendicolare, e dalla linea preſa di fuori della perpendicolare verſo l'angolo ottuſo, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XII.
PROPOSIZIONE XIII.

Ne triangoli acuziangoli, il quadrato che ſi fa dal lato ſottopoſto all' angolo acuto, è tanto minore de i quadrati fatti da i lati, che l'angolo acuto comprendono, quanto è il rettangolo contenuto due volte da uno de' lati, che ſono d' intorno all' angolo acuto, cioè da quello, nel quale cade la perpendicolare, e dalla linea preſa di dentro dalla perpẽdicolare verſo l'ãgolo acuto.

Sia il triangolo acuziangolo ABC, che abbia l'angolo B acuto, e dal punto A alla B C tirisi la perpendico-

12. *del prim.* dicolare A D.



Dico che il quadrato di A C è tanto minore de' quadrati di C B, B A, quanto è il rettangolo contenuto due volte dalle C B, B D. Perchè essendo la linea retta C B segata in qualunque modo nel punto D, saranno i quadrati di C B, B D uguali al rettangolo, che due volte si contiene dalle C B, B D, ed al quadrato di D C, pongasi il quadrato di A D comune, i quadrati dunque di C B, B D, D A sono uguali al rettangolo, che due volte dalle C B, B D si contiene, ed agli quadrati di A D, D C, ma a i quadrati di B D, D A è uguale il quadrato di A B, perciocchè l' angolo D è retto, ed a quadrati di A D, D C è uguale il quadrato di A C, onde i quadrati di C B, B A sono uguali al quadrato di A C, ed al rettangolo due volte contenuto dalle C B, B D, e per tal cagione il quadrato di A C è tanto minore de i quadrati di C B, B A, quanto è il rettangolo contenuto due volte dalle C B, B D,

7. *di quest.*

adun-

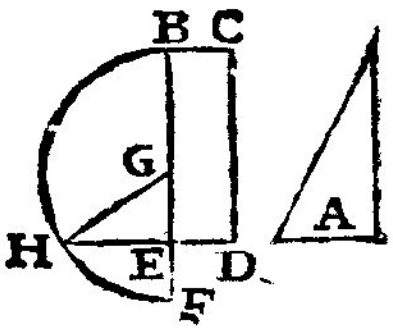
adunque ne triangoli acuziangoli il quadrato, che si fa dal lato sottoposto all'angolo acuto è tanto minore degli quadrati fatti da' lati che l'angolo acuto comprendono, quanto è il rettangolo contenuto due volte da uno de'lati, che sono d'intorno all'angolo acuto, cioè da quello nel quale cade la perpendicolare, e dalla linea presa di dentro dalla perpendicolare, verso l'angolo acuto, il che bisognava dimostrare.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE XIV.

Constituire un quadrato uguale ad un dato rettilineo.

Sia il dato rettilineo A, bisogna costituire un quadrato uguale al rettilineo A, costituiscasi il paralellogrammo rettangolo BCDE, uguale al rettilineo A, se dunque B E è uguale ad E D, sarà fatto quello che si proponeva, perciocchè al rettilineo A si farà costituito il quadrato B D uguale, ma se B E non è uguale ad E D, una di esse sarà maggiore, sia maggiore B E, e prolunghisi in F, e pongasi E F ugua- 45. del prim.



le ad E D, poi diviſa F B per mezzo nel punto G, dal centro G coll' interval lo di una di eſſe G B, G F deſcrivaſi il mezzo cerchio B H F, e prolunghiſi D E in H, e giungaſi G H, perchè dunque la linea retta B F è diviſa in parti uguali nel punto G, ed in parti diſuguali nel E, ſarà il rettangolo B E F inſieme col quadrato di E G uguale al quadrato di G F, e G F è uguale a G H, onde il rettangolo B E F inſieme col quadrato di G E è uguale al quadrato di G H, ma al quadrato di G H ſono uguali i quadrati H E, E G. Il rettangolo dunque B E F inſieme col quadrato di E G è uguale a gli quadrati di H E, E G. Traggaſi il quadrato di E G comune, adunque il rettangolo rimanente B E F è uguale al quadrato di E H, ma il rettangolo B E F è eſſo paralellogrammo B D, perciocchè E F è uguale ad E D, il paralellogrammo dunque B D è uguale al quadrato di E H, ma è uguale eziandio al rettilineo A, e però il

5. di queſ.

47. del prim.

retti-

rettilineo A ſarà uguale al quadrato di E H, laonde al rettilineo A ſi è coſtituito un quadrato uguale, cioè quello, che ſi deſcrive da E H, il che biſognava fare.

FINE DEL SEC. LIBRO.

DEGLI

ELEMENTI D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO TERZO

DIFFINIZIONI.

I.

I CERCHI uguali sono quegli, che hanno i diametri, ovvero i semidiametri loro uguali.

II.

La linea retta si dice toccare il cerchio, la quale toccandolo, e prolungata non lo sega.

III.

I cerchi si dicono toccarsi

fra loro, quali toccandoſi non ſi ſegano.

IV.

Le linee rette nel cerchio ſi dicono eſſere ugualmente diſtanti dal centro, quando le perpendicolari tirate dal centro ſopra quelle ſono uguali.

V.

E quella linea, ſi dice eſſere più diſtante dal centro, ſopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

VI.

La porzione del cerchio, è una figura contenuta dalla linea retta, e dalla circonferenza.

VII.

L' angolo della porzione è quello, che ſi comprende dalla linea retta, e dalla circonferenza del cerchio.

L'an-

VIII.

L'angolo nella porzione è quello, che si contiene da due linee rette tirate da un punto della circonferenza a i termini della linea, che è base di detta porzione.

IX.

Ma quando le linee rette, che contengono l'angolo pigliano una parte della circonferenza, sopra quella si dice fermarsi l'angolo.

X.

Il settore del cerchio è una figura contenuta dalle linee rette, che partitesi dal centro fanno un angolo, e dalla circonferenza presa da esse.

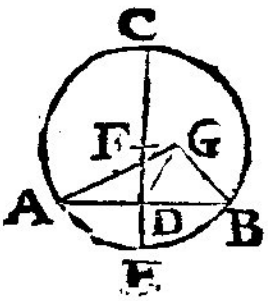
XI.

Le porzioni simili de' cerchi sono quelle, che pigliano angoli uguali, ovvero sopra le quali si fermano angoli uguali

PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE I.

Trovare il centro d' un dato cerchio.



Sia il dato cerchio A B C, biſogna di eſſo trovare il centro. Tiriſi in eſſo una linea retta A B, comunque ſi voglia, e ſeghiſi per mezzo nel punto D, poi dal punto D tirata la D C ad angoli retti ſopra la A B, prolunghiſi fino all' E, e ſeghiſi la C E per mezzo nel punto F. Dico il punto F eſſere centro del cerchio A B C, perciocchè ſe non è F, ſia s' egli è poſſibile un altro punto G, e giungaſi G A, G D, G B, perchè dunque A D è uguale alla D B, ed è comune la D G, ſaranno le due A D, D G uguali alle due G D, D B, l'una all'altra, e la baſe G A è uguale alle baſe G B, partendoſi dal centro G, l' angolo dunque A D G è uguale all' angolo G D B, ma quando la linea retta ſtando ſopra un altra linea

10. *del prim.*

11. *del prim.*

2. *Poſt.*

Diff.

15. *del prim.*

8. *del prim*

Diff.

10 *del Prim.*

nea retta fa gli angoli da i lati fra loro uguali, sono amendue retti, e perciò l' angolo G D B è retto, ma è retto ancora F D B, adunque l'angolo F D B è uguale all' angolo G D B, il maggiore al minore, che è impossibile, onde il G non è centro del cerchio A B C, dimostreremo parimente non essere altro punto fuori, che F, adunque F è centro del cerchio A B C, il che bisognava fare.

C O R O L L A R I O.

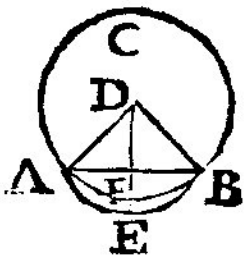
Da questo si comprende chiaramente, che se nel cerchio una linea retta sega un' altra linea retta per mezzo, e ad angoli retti, il centro del cerchio è nella linea che sega.

T E O R E M A I.

PROPOSIZIONE II.

Se nella circonferenza del cerchio si piglino due punti, comunque si voglia, la linea

retta, che gli congiunge caderà dentro al cerchio.



Sia il cerchio ABC, e nella circonferenza di esso pigliſi due punti, quali ſi ſiano A B. Dico che la linea retta tirata dal punto A al B cade dentro al cerchio; perciocchè s' egli è poſſibile caggia di fuori, come A E B, e preſo il centro del cerchio A B C, qual ſia D giungaſi D A, D B; e prolunghiſi D F in E, eſſendo dunque la D A uguale alla D B, ſarà ancor l' angolo D A E uguale all' angolo D B E, e perchè ſi prolunga un lato del triangolo D A E, cioè A E B, ſarà l' angolo D E B maggiore dell' angolo D A E, ma l'angolo D A E è uguale all' angolo D B E, onde l' angolo D E B è maggiore dell' angolo D B E, ed all' angolo maggiore è ſottopoſto il maggior lato, adunque la D B è maggiore della D E: e la D B è uguale alla D F, e perciò la D F è maggiore della D E, la minore della maggiore, il che è impoſſibile, onde la linea retta tirata dal punto A al B

Per l' ant.

5. del prim.

16 del prim.

18. del prim.

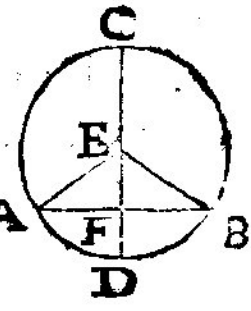
A al B non caderà fuori del cerchio. Dimostreremo parimente, che ne anche cade in essa circonferenza, onde è necessario, che caggia di dentro, se dunque nella circonferenza del cerchio si piglino due punti comunque si voglia, la linea retta, che gli congiunge caderà dentro al cerchio, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE III.

Se una linea retta, tirata nel cerchio per lo centro seghi per mezzo una linea retta non tirata per lo centro, la segherà ad angoli retti, e segandola ad angoli retti la segherà per mezzo.

Sia il cerchio A B C, e la linea retta tirata in esso per lo centro CD seghi per mezzo la retta A B non tirata per lo centro nel punto F. Dico, che la sega ad angoli retti, pigliſi il centro del cerchio A B C, che sia E, e giungasi E A, E B, 1. *di quest.*



perchè dunque la A F è uguale alla F B, e la F E è comune, saranno le due uguali alle due, e la baſe E A è uguale alla baſe E B, l' angolo dunque A F E ſarà uguale all' angolo B F E, ma quando una linea retta ſtando ſopra un' altra retta fa gli angoli da i lati fra loro uguali, ſono amendue retti: onde l' uno, e l' altro A F E, B F E è retto, e perciò la linea retta C D, che tirata per lo centro ſega per mezzo la retta A B non tirata per lo centro, la ſegherà ancor ad angoli retti, ma la C D ſeghi la A B ad angoli retti. Dico, che eziandio la ſega per mezzo, cioè, che la A F è uguale alla F B, avendo fatte le medeſime coſe perchè la E A ſemidiametro del cerchio è uguale alla E B, ſarà ancor l'angolo E A F uguale all' E B F, e l' angolo A F E retto è uguale al retto B F E, adunque i due triangoli E A F, E B F hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato E F cioè comune all'uno, e l' altro, che è ſottopoſto ad uno degli angoli uguali, e perciò averanno gli altri

8. *del prim.*

10. *diff. del pr.*

15. *diff. del pr.*

5. *del prim.*

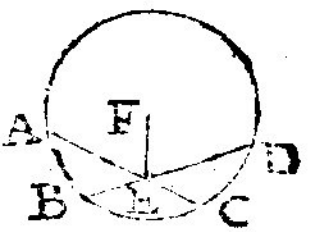
4 *poſt.*

tri lati uguali a gli altri lati è la A F sarà uguale alla F B, adunque se una linea retta tirata nel cerchio per lo centro seghi per mezzo una linea retta non tirata per lo centro, la segherà ancor ad angoli retti, e segandola ad angoli retti, la segherà ancor per mezzo, il che bisognava dimostrare. 26. *del prim.*

TEOREMA III.

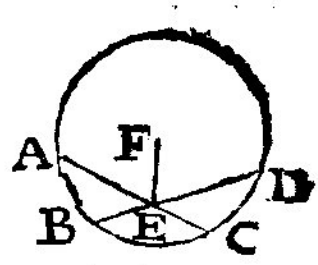
PROPOSIZIONE IV.

Se due linee rette nel cerchio non tirate per lo centro si seghino fra loro, non si segheranno mai per mezzo.



Sia il cerchio A B C D, e seghinsi in esso due linee rette non tirate per lo centro A C, B D, nel punto E. Dico, che non si segano per mezzo, perciocchè se sia possibile, seghinsi per mezzo di maniera che la A E sia uguale alla E C, e la B E alla E D. Pigliſi poi il centro del cerchio A B C D, che sia F, e giungasi E F, perchè dunque la linea 1. *di quest.*

nea retta F E tirata per lo centro ſega per mezzo una linea retta A C non tirata per lo centro, la ſegherà ad angoli retti, onde l' angolo F E A ſarà retto, ſimilmente perchè la linea retta F E ſega per mezzo una linea retta B D, non tirata per lo centro, la ſegherà ad angoli retti, e perciò l' angolo FEB ſarà retto, e ſi è dimoſtrato retto lo F E A, ſarà dunque l' angolo F E A uguale all' angolo F E B, il minore al maggiore, che è impoſſibile, adunque le A C, B D non ſi ſegano per mezzo, onde ſe nel cerchio due linee rette non tirate per lo centro ſi ſeghino fra loro, non ſi ſegheranno mai per mezzo, il che biſognava dimoſtrare.



Per l' ant.

TEOREMA IV.

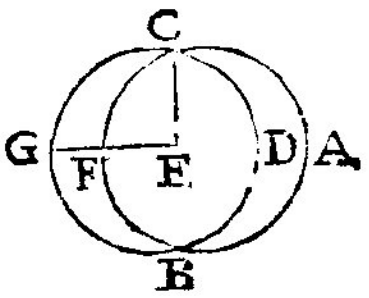
PROPOSIZIONE V.

Se due cerchi ſi ſeghino fra loro, non averanno il medeſimo centro.

Due cerchi A B C, C D G ſe-

ghin

ghisi fra loro ne punti B, C. Dico, che non hanno il medesimo centro, sia se esser può, il centro E, e giungasi E C, ed E F G tirisi in qualsivoglia modo, e perchè E è centro del cerchio A B C, la C E sarà uguale alla E F, oltre a ciò perchè E è centro del cerchio C D G, sarà la C E uguale alla E G, ma si è dimostrata C E uguale alla E F, adunque la E F sarà uguale alla E G, la minore alla maggiore, che non può essere, e perciò il punto E non è centro degli cerchi A B C, C D G, laonde se due cerchi si seghino fra loro, non averanno il medesimo centro, il che bisognava dimostrare.



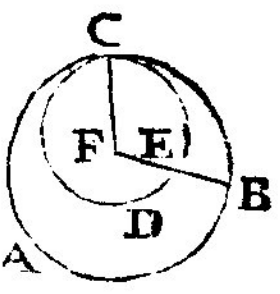
TEOREMA V.

PROPOSIZIONE VI.

Se due cerchi si tocchino fra loro di dentro, non averanno il medesimo centro.

Due cerchi A B C, C D E tocchinsi di dentro nel punto C. Dico, che

che essi non hanno il medesimo centro, sia F, se esser può, e giungasi F C: e tirisi F E B in qualunque modo, perchè dūque F è centro del cerchio A B C, la C F sarà uguale alla F B, oltre a questo essendo F centro del cerchio C D E, la C F sarà uguale alla F E, ma si è dimostrata la C F uguale alla F B, adunque la F E è uguale alla F B, la minore alla maggiore, che non può essere, laonde il punto E non è centro delli cerchi A B C, C D E, se dunque due cerchi si tocchino fra loro di dentro, non averanno il medesimo centro, il che bisognava dimostrare.

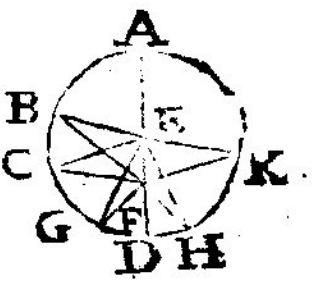


TEOREMA VI.

PROPOSIZIONE VII.

Se nel diametro del cerchio si pigli qualche punto, che non sia centro del cerchio, e da esso caggiano nel cerchio alcune linee rette, la maggiore di tutte sarà quella, nella quale è il centro, e la minore sa-

re sarà la rimanente, e delle altre la più vicina a quella, che passa per lo centro sempre è maggiore della più lontana, e solamẽte due uguali caderãno dal med. punto nel cerchio dall'un'e l'altra parte della minore



Sia il cerchio A B C D, il cui diametro A D: ed in essa A D pigliſi un punto F, che non sia centro: e sia il centro del cerchio E: e dal punto F caggiano alcune linee rette nel cerchio A B C D. e siano F B, F C, F G. Dico la F A essere maggiore di tutte, e la F D minore: e delle altre, la F B maggiore della F C, e la F C maggiore della F G, congiungasi B E, C E, G E, e perchè due lati di ciascun triangolo sono maggiori del rimanente, saranno le B E, E F maggiori della B F, ma la A E è uguale alla E B, adunque le B E, E F sono uguali alla A F, e perciò la A F è maggiore della F B, oltre a ciò perchè la B E è uguale alla E C, e la 20. *de prim.*

e la F E comune, saranno le due B E, E F uguali alle due C E, E F, ma l'angolo B E F è maggiore dell'angolo C E F, adunque la base B F è maggiore della base F C, per la medesima ragione ancor la C F è maggiore della F G, e perchè le G F, F E sono maggiori della E G, e la G E è uguale alla E D, saranno le G F, F E maggiori della E D, traggasi la comune E F, adunque la rimanente G F è maggiore della rimanente F D, onde la maggiore di tutte è F A, e la minore F D, e la B F è maggiore della F C, e la C F maggiore della F G. Dico, che dal punto F caggiono due linee rette uguali solamente nel cerchio A B C D dall'una, e l'altra parte della minore F D, costituiscasi nella linea E F, e nel punto dato in essa E l'angolo F E H uguale all'angolo G E F, e congiungasi F H, perchè dunque la G E è uguale alla E H, e la E F è comune, le due G E, E F sono uguali alle due H E, E F, e l'angolo G E F uguale all'angolo H E F, onde la base F G sarà uguale alla base F H. Dico, che dal F nel cerchio non cade altra linea uguale alla F G, caggia

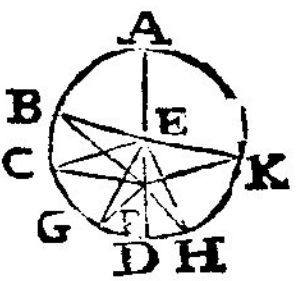
24. del prim.

23. del prim.

4. del prim.

se

se esser può F K, ed essendo la F K uguale alla F G, e la F H uguale alla F G, sarà eziandio la F K uguale alla F H, cioè la più



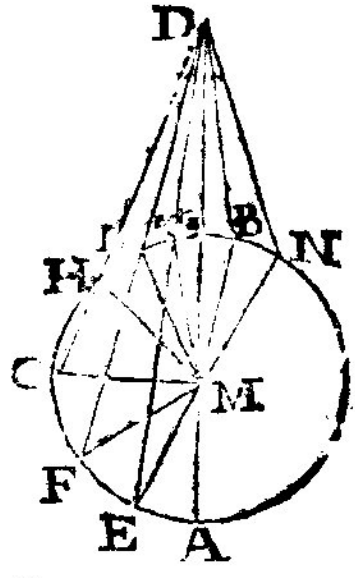
vicina a quella, che passa per lo centro alla più lontana, che non può essere, laonde dal punto F, non caderà altra linea retta nel cerchio uguale alla G F, fuorche una sola; se dunque si pigli nel diametro del cerchio qualche punto, che non sia centro del cerchio, ed il rimanente che segue, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA VII.

PROPOSIZIONE VIII.

Se fuori del cerchio si pigli qualche punto, e da quello si tirino linee rette al cerchio, una delle quali passi per lo centro, e l' altre in qualsivoglia modo, di quelle che caggiono sopra la circonferenza concava la maggior di tutte sa-

te ſarà quella, che paſſa per lo centro, e dell' altre la più vicina a quella, che paſſa per lo centro ſarà ſempre maggiore della più lontana, ma di quelle, che caggiono ſopra la circonferenza curva, la minore ſarà quella, che è fra il punto preſo, ed il diametro, e delle altre la più vicina alla minore ſarà minore della più lontana: e due ſole uguali caggiono dal punto nel cerchio dall' una, e l' altra parte della minore.



Sia il cerchio A B C, e pigliſi fuori del cerchio un punto D, e da quello tirinſi nel cerchio alcune linee rette D A, D E, D F, D C, e ſia la D A per lo centro. Dico, che di quelle, che caggiono nella circonferenza concava A E F C

AEFC, la DA, che passa per lo centro è maggiore di tutte, e minore quella, che è posta fra il punto D, ed il diametro AG, cioè la DG: e la DE è maggiore della DF, e la DF maggiore della DC, e di quelle, che caggiono nella circonferenza curva HLKG la più vicina alla minore di tutte DG è sempre minore della più lontana, cioè la DK minore della DL, e la DL minore della DH; perciocchè pigliſi il centro del cerchio ABC, che ſia M: e congiungaſi ME, MF, MC, MK, ML, MH, e perchè la AM è uguale alla ME, pongaſi comune la MD, adunque la AD è uguale alla EM, MD, ma le EM, MD ſono maggiori della ED, adunque eziandio la AD è maggiore della ED; oltre a ciò perchè la ME è uguale alla MF, pongaſi comune la MD, ſaranno le EM, MD uguali alle MF, MD, e l'angolo EMD è maggiore dell'angolo FMD, onde la baſe ED ſarà maggiore della baſe FD. Dimoſtreremo ſimilmente la FD eſſere maggiore della CD, adunque la maggiore di tutte è la DA, e la DE è maggiore della DF, e la DF maggiore della

1. *del terzo*

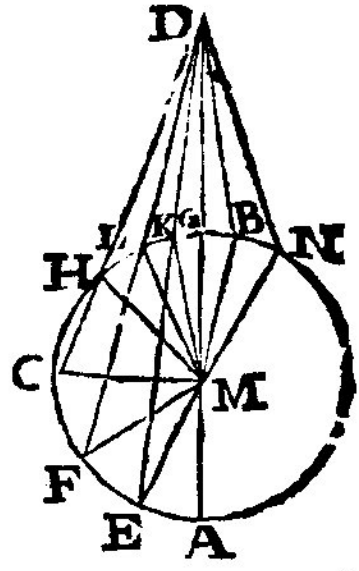
15. *dif. del pr.*

20. *del prim.*

15. *dif. del pr.*

24. *del prim.*

della D C. Poi eſ-
20. *del prim.* ſendo le M K, K D maggiori della M D, e la M G uguale alla M K, ſarà la rimanente K D maggiore della rimanente G D, laonde la G D è minore della D K, e perciò



la G D è minore di tutte, e perchè in un lato del triangolo M L D
21. *del prim.* cioè in M D ſi coſtituiſcono dentro due linee rette M K, K D, ſaranno le M K, K D minori delle M L, L D, delle quali la M K è uguale alla M L, la rimanente dunque D K è minore della rimanente D L. Dimoſtreremo parimente la D L eſſer minore della D H, e perciò la D G è minore di tutte, e la D K minore della D L, e la D L minore della D H. Dico eziandio che due ſole uguali caggiono dal punto D nel cerchio dall'una, e l'altra parte della minore, coſtituiſcaſi nella linea retta M D, e nel dato punto in eſſa M l'angolo D M B uguale all'angolo K M D, e congiungaſi D B. perchè dunque la

M K

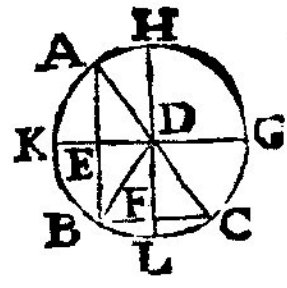
M K è uguale alla M B, e la M D comune, le due K M, M D ſono uguali alle due B M, M D, l'una all'altra, e l'angolo K M D uguale all'angolo B M D, onde la baſe D K è uguale alla baſe D B. Dico, che dal punto D niun'altra cade nel cerchio, uguale alla D B, caggia, ſe eſſer può, la D N, e perchè la D K è uguale alla D N, ed è uguale alla D B, ſarà la D B uguale alla D N, cioè la più vicina alla minore di tutte uguale alla più lontana, che ſi è dimoſtrato impoſſibile, laonde dal punto D non caderanno nel cerchio A B C più di due linee rette uguali dall'una, e l'altra parte della minore G D, ſe dunque fuori del cerchio ſi pigli qualche punto, e quelle coſe, che ſeguono, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE IX.

Se dentro al cerchio ſi pigli qualche punto, e da quello ſopra il cerchio caggiano più

più di due linee rette uguali, il punto preſo ſarà centro del cerchio.



Sia il cerchio ABC, e pigliſi dentro di eſſo il punto D, dalquale caggiano nel cerchio più di due linee rette uguali, come DA, DB, DC. Dico, che il punto D è centro del cerchio ABC, giungaſi A B, B C, e ſeghinſi per mezzo ne' punti E F, e congiunte le E D, D F prolunghiſi ne' punti G K H L perchè dunque la A E è uguale alla E B, e la E D comune, ſaranno le due A E, E D uguali alle due B E, E D, e la baſe D A è uguale alla baſe D B, onde l'angolo A E D ſarà uguale all' angolo B E D, e perciò amendue gli angoli A E D, B E D ſono retti, e la G K ſegando per mezzo la A B, la ſega ancor ad angoli retti, e perchè ſe nel cerchio una linea retta ſega per mezzo un' altra linea retta, e ad angoli retti, il centro del cerchio è nella linea che ſega, ſarà nella G K il centro del cerchio ABC

10. *del prim.*

8. *del prim.*

Corol. del pr. di que.

e per

e per la medesima ragione il centro del cerchio A B C è nella H L, e le linee rette G K, H L, non anno cosa alcuna comune fuor che 'l punto D, adunque D è centro del cerchio A B C, laonde se dentro al cerchio si pigli qualche punto, e da quello sopra il cerchio caggiano più di due linee rette uguali, il punto preso sarà centro del cerchio.

TEOREMA IX.
PROPOSIZIONE X.

Un cerchio non sega un altro cerchio in più di due pūti.

Il cerchio A B C segni il cerchio D E F in più di due punti, cioè in B G, F H, e pigliſi il centro del cerchio A B C, che ſia R, e congiungaſi R B, R G, R F, e perchè dentro al cerchio D E F ſi è preſo un punto R, dal quale caggiono nel cerchio più di due linee rette uguali R B, R F, R G, il punto R ſarà centro del cerchio D E F. Ma la R è centro del cer-

1. di queſ.

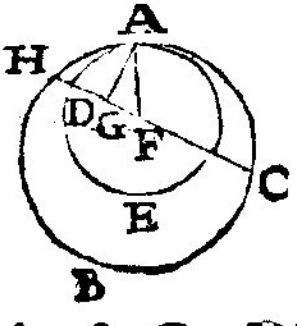
9. di queſt.

chio A B C, sarà dunque il medesimo R centro di due cerchi, che si tegano, il che non può essere, laonde un cerchio non tega un altro cerchio in più di due punti, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA X.

PROPOSIZIONE XI.

Se due cerchi si tocchino di dentro, e si piglino i lor centri, la linea retta, che congiunge i centri, prolungata caderà nel toccamento.



Tocchinsi di dentro due cerchi A B C, A D E nel punto A, e pigliſi il centro del cerchio A B C, che sia F, ed il centro del cerchio A D E, che sia G. Dico, che la linea retta tirata dal punto F al G prolungandosi cade nel punto A. Caggia, se sia possibile, come la F G D H, e congiungansi A F, A G; e perchè le A G, G F sono maggiori della F A, cioè della F H, traggasi la comune F G, adunque

1. di queſt.

20. del prim.

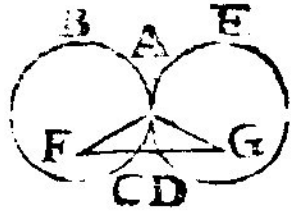
que la rimanente A G è maggiore della G H, ma la A G è uguale alla G D onde la G D è maggiore della G H, la minore della maggiore, che è impossibile, onde non caderà una linea retta tirata dal punto F al G fuori del toccamento A, e perciò è necessario, che caggia in esso, adunque se due cerchi si tocchino di dentro, e si piglino i lor centri, la linea retta, che congiunge i centri, prolungata caderà nel toccamento, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XI.

PROPOSIZIONE XII.

Se due cerchi si tocchino di fuori, la linea retta, che congiunge i centri loro passerà per lo toccamento.

Due cerchi A B C, A D E tocchinsi di fuori nel punto A: e pigliſi il centro del cerchio A B C che ſia F ed il centro del cerchio A D E cioè G. Dico, che la linea retta tirata dal punto F al G passa per lo toccamento. Non già, ma se è pos- 1. *di quest.*



ſibile, caggia come F C D G: e giunganſi F A, A G, perchè dunque F è centro del cerchio A B C, ſarà la A F uguale alla F C, e perchè G è centro del cerchio A D E, la A G ſarà uguale alla G D, e ſi è dimoſtrata la A F uguale alla F C, adunque le F A, A G ſono uguali alle F C, D G, e tutta la F G è maggiore delle F A, A G; ma è minore, che è impoſſibile, onde non è vero, che una linea retta tirata dal punto F al G non paſſi per lo toccamento A, e perciò è neceſſario che vi paſſi, adunque ſe due cerchi ſi tocchino di fuori, la linea retta che congiunge i centri loro paſſerà per lo toccamento, il che bſognava dimoſtrare.

20. del prim.

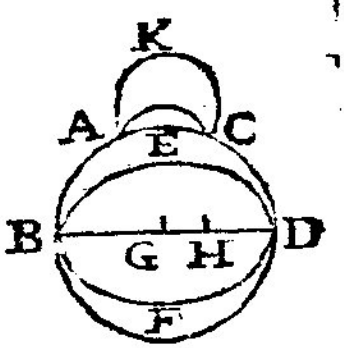
TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XIII.

Il cerchio non tocca un altro cerchio in più di un punto, o lo tocchi di dentro, o di fuori.

Il cer-

Il cerchio A B D C, se è possibile tocchi il cerchio E B F D prima di dentro in più di un punto, cioè in B, D: e pigliſi il centro del cerchio A B D C, che ſia G, ed il centro del cerchio E B F D, cioè H, adunque la linea retta tirata dal punto G all' H caderà ne' punti B, D caggia come B G H D, e perchè G è centro del cerchio ABDC, ſarà la B G, uguale alla G D, adunque la B G è maggiore della H D, e la B H molto maggiore della HD, oltre a queſto perchè H è centro del cerchio E B F D, ſarà la B H uguale alla H D, ma ſi è dimoſtrata molto maggiore, che è impoſſibile, adunque il cerchio non tocca di dentro un altro cerchio in più di un punto. Dico, che ne anche di fuori lo tocca, perciocchè ſe è poſſibile, il cerchio ACK tocchi di fuori il cerchio ABDC in più di un punto, cioè in A, C, e giungaſi A C, perchè dunque nella circonferenza dell'uno, e l'altro cerchio ABDC, ACK ſi ſono preſi due punti, quali ſi vogliono A C, la linea retta, che gli congiunge ca-



1. *di queſ.*

11. *di queſ.*

15. *del prim.*

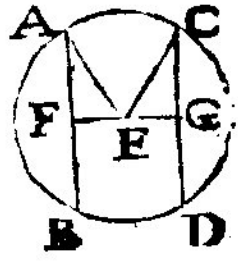
2 *di queſ.*

caderà dentro all'uno, e l'altro, ma cade dentro al cerchio A B D C, e fuori del cerchio A C K, che è inconveniente, adunque il cerchio non tocca un altro cerchio di fuori in più di un punto, e ſi è dimoſtrato, che nè anche di dentro lo tocca, onde il cerchio non tocca un altro cerchio in più di un punto, o lo tocchi di dentro, o di fuori, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XIV.

Nel cerchio le linee rette uguali ſono ugualmente diſtãti dal centro, e quelle che ſono ugualmente diſtanti dal centro, ſono fra loro uguali.



Sia il cerchio ABDC, ed in eſſo linee rette uguali AB, CD. Dico ch' elle ſono ugualmente diſtanti dal centro. Pigliſi il centro del cerchio A B C D, che ſia E, e da eſſo tirinſi E F, E G perpendicolari alle A B, C D, e giunganſi le A E, E C, e per-

1. *di quеſ.*

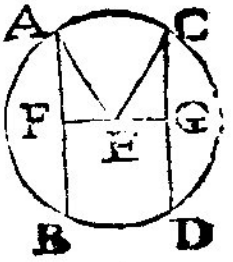
perchè una linea retta E F tirata per lo centro sega la linea retta A B non tirata per lo centro ad angoli retti, la segherà ancora per mezzo onde la A F è uguale alla F B, e la A B è doppia della A F, e per la medesima ragione la C D è doppia della C G, e la A B è uguale alla C D, adunque la A F è uguale alla C G, ed essendo la A E uguale alla E C, il quadrato della A E sarà uguale al quadrato della E C, ma i quadrati delle A F, F E sono uguali al quadrato della A E, perchè l'angolo F è retto, ed i quadrati delle E G, G C sono uguali al quadrato di E C, essendo l'angolo G retto, adunque i quadrati di A F, F E sono uguali a gli quadrati di C G, G E, de' quali il quadrato della A F è uguale al quadrato della C G, perciocchè la A F è uguale alla C G, adunque il rimanente quadrato, che si fa dalla F E è uguale al rimanente fatto dalla E G, e però la F E è uguale alla E G, ma nel cerchio si dicono le linee rette essere ugualmente distanti dal centro, quando le perpendicolari tirate dal centro sopra quelle sono uguali, adunque le A B C D sono ugualmente distanti dal cen-

3. *di quest.*

47. *del prim.*

4. *diff. di qu.*

tro. Ma le A B, C D siano ugualmente distanti dal centro, cioè sia la F E uguale alla E G. Dico che la A B è uguale alla C D. Avendo fatto le medesime cose dimostreremo eziandio, che la A B è doppia della A F, e la C D doppia della C G, e perchè la A E è uguale alla E C, sarà ancora il quadrato della A E uguale al quadrato della E C; ma i quadrati delle E F, F A sono uguali al quadrato della A E, ed i quadrati delle E G, G C uguali al quadrato della E C, adunque i quadrati delle E F, F A sono uguali a gli quadrati di E G, G C, de' quali il quadrato della E G è uguale al quadrato della E F, perchè la E G è uguale alla E F, adunque il rimanente quadrato della A F è uguale al rimanente quadrato della C G, e però la A F è uguale alla C G, ed è la A B doppia della A F, e la C D doppia della C G, onde la A B sarà uguale alla C D, adunque nel cerchio le linee rette uguali sono ugualmente distanti dal centro, e quelle che sono ugualmente distanti dal centro sono fra loro uguali, il che bisognava dimostrare.



47. del prim.

TEO-

TEOREMA XIV.

PROPOSIZIONE XV.

Nel cerchio la maggiore di tutte è il diametro, e dell' altre sempre la più vicina a quella, che passa per lo centro è maggiore della più lontana.

Sia il cerchio A B C D, il cui diametro A D, ed il centro E, e la più vicina al diametro A D sia la B C, e la più lontana F G. Dico che la A D è maggior di tutte, e la B C è maggiore della F G. Tirinsi dal centro le E H, E K perpendicolari alle B C, F G, e perchè la B C è più vicina a quella, che passa per lo centro, e la F G più lontana, sarà la E K maggiore della E H. Pongasi la E L uguale alla E H, e per L tirata la L M ad angoli retti sopra la E K prolunghisi in N, e giunganſi E M, E N, E F, E G, e perchè la E H è uguale alla E L, sarà la B C uguale alla M N, e perchè la A E è uguale ad E M, e la

12. *del prim.*

5. *Dif. di que.*

Per l'ant.

D E alla E N, ſarà la A D uguale alle M E E N, ma le M E, E N ſono maggiori della M N, adunque la A D è maggiore della M N, ed è la M N uguale alla B C, onde la A D è maggiore della B C, ed eſſendo le due E M, E N uguali alle due F E, E G, e l' angolo M E N maggiore dell' angolo F E G, ſarà la baſe M N maggiore della baſe F G, ma ſi è dimoſtrata la M N uguale alla B G, e però la B C è maggiore della F G, adunque la maggiore di tutte è il diametro A D, e la B C è maggiore della F G, onde nel cerchio la maggiore di tutte è il diametro, e dell'altre ſempre la più vicina a quella, che paſſa per lo centro è maggiore della più lontana, il che biſognava dimoſtrare.

20. *del prim.*

15. *diff. del pr.*

24. *del prim.*

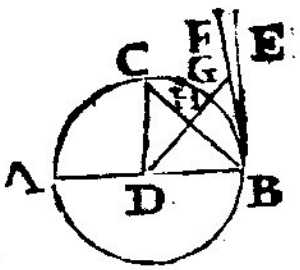
TEOREMA XV.

PROPOSIZIONE XVI.

Quella linea, che dalla eſtremità del diametro è tirata ad angoli retti, cade fuori del cerchio, e nel luogo che è fra

la li-

la linea retta, e la circonferenza non cade alcun' altra linea, e l'angolo del mezzo cerchio è maggiore d' ogni angolo acuto rettilineo, ed il rimanente è minore.

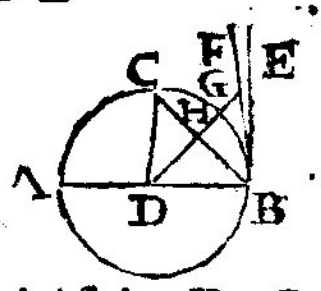


Sia il cerchio A B C intorno al centro D, ed al diametro A B. Dico, che la linea retta tirata dal punto B ad angoli retti ſopra la A B cade fuori del cerchio. Non già, ma ſe è poſſibile, caggia di dentro, come la B C: e giungaſi D C, perchè dunque la D B è uguale alla D C ſarà ancor l' angolo D B C uguale all' angolo B C D; e D B C è retto; onde ſimilmente B C D è retto; e perciò gli angoli D B C, B C D ſono uguali a due retti, il che è impoſſibile, adunque la linea retta tirata dal punto B ad angoli retti ſopra la A B non caderà dentro al cerchio. Dimoſtreremo parimente che ne anche caderà in eſſa circonferenza: e però è neceſſario che caggia di fuori; caggia come la B E. Dico, che nel luogo che è fra la linea

5. *del prim.*

17. *del prim.*

nea retta B E, e la circonferenza C H B non cade altra linea retta. Perciocchè caggia, se fia possibile, come la F B: e dal punto D tirisi la D G perpendicolare alla F B, e perchè l'angolo B G D è retto, e D B G è minore del retto, sarà la B D maggiore della D G, ma la D B è uguale alla D H, adunque la D H è maggiore della D G, la minore della maggiore, che è impossibile, onde nel luogo, che è fra la linea retta, e la circonferenza, non caderà altra linea retta. Dice oltre a ciò, che l'angolo del mezzo cerchio contenuto dalla linea retta B A, e dalla circonferenza C H B è maggiore di ogni angolo acuto rettilineo, ed il rimanente contenuto dalla circonferenza C H B, e dalla linea retta B E è minore di ogni angolo acuto rettilineo. perciocchè se vi è qualche angolo rettilineo maggiore del contenuto dalla linea retta B A, e dalla circonferenza C H B e minore del contenuto dalla circonferenza C H B, e dalla linea retta B E, nel luogo che è fra la circonferenza C H B, e la linea retta



19. *del prim.*

B E

B F caderà qualche linea retta, che farà l'angolo maggiore del contenuto dalla linea retta B A, e dalla circonferenza C H B, che è contenuto da linee rette, e minore del contenuto dalla circonferenza C H B, e dalla linea retta B E ma non ci cade, non sarà dunque l'angolo acuto contenuto da linee rette, maggiore dell'angolo contenuto dalla linea retta B A, e dalla circonferenza C H B, e minore del contenuto dalla circonferenza C H B, e dalla linea retta B E, il che &c.

COROLLARIO.

Di quì è manifesto che la linea retta, la qual si tira dalla estremità del diametro ad angoli retti, tocca il cerchio, e che la linea retta tocca il cerchio in un punto solo, perciocchè quella, che passa per due punti cade di dentro, come già si è dimostrato.

SCOLIO.

ESendochè tra i luoghi degli Elementi d' Euclide con varietà d' opinione agitati, uno sia quello ormai vulgatissimo intorno all' angolo detto del contatto, del quale si fa menzione in questo passato Teorema, par dovere, che quì piuttosto, che altrove si soddisfaccia alla curiosità di coloro, i quali ne desiderano qualche notizia. E perchè il Galileo, e Vincenzio Viviani ultimo suo Discepolo non solo hanno gran parte in questi Elementi, ma ancora il detto, ed affermato da loro sopra all' angolo del contatto è assai plausibile, e molto breve, perciò s' è risoluto trascrivere in questo luogo il lor parere, e non quello d' altri Autori.

PA-

PARERE DEL GALILEO.

Intorno all' angolo del Contatto ſpiegato da eſſo in una Lettera di riſpoſta ſcritta dalla Villa d' Arcetri ne' 30. Ottobre 1635. a Giovan Cammillo Glorioſi Matematico Napoletano, e ſtampata da queſto nella ſua terza Deca dell' Eſercitazioni Matematiche a faccie 146. dell' impreſſione di Napoli nel 1639 in quarto.

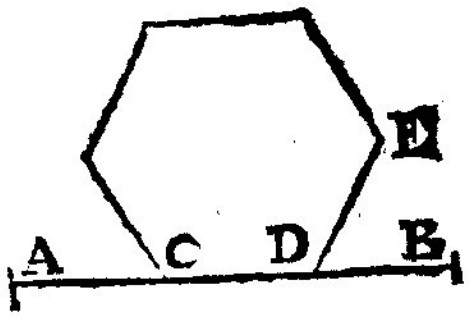
Dopo d'accuſare la ricevuta di queſta Deca inviatagli dall' Autore, così ſegue il Galileo.

IN tanto, per ſegno d' aver pur veduto qualcoſa delle ſottiliſſime ſpeculazioni di V. S. voglio conferirle certo mio diſcorſo, che gran tempo fa mi paſsò per la fantaſia, per provare, che l' angolo del contatto ſia detto così equivocamente, e che inſomma non ſia veramente angolo, convenendo in queſto col Vieta, le cui ragioni molto acutamente par che V. S. vada

redar-

redarguendo; ficchè se mi mostrerà la fallacia della mia, che mi par poco men che concludente dimostrazione, bisognerà ch'io sia con Lei.

Stando dunque su la ricevuta diffinizione, che *l'Angolo sia l'inclinazione di due linee poste in un piano, che si toccano in un punto, e non son poste fra loro per diritto*; figuriamoci un Poligono rettilineo, ed equilatero inscritto nel Cerchio. E' manifesto le inclinazioni, o direzioni de' suoi lati esser tante quanti gli stessi lati, se saranno di numero dispari, ovvero quante la metà, se il numero sarà pari, avendo gli opposti la medesima direzione. Ora se intenderemo a qualsisia linea retta A B *della seguente figura* esser applicato il lato C D d' uno di detti Poligoni, questo con quella non formerà angolo, cãminando amendue per la medesima direzione, ma bensì lo formerà il lato seguente DE, come quello, che sopra la segnata retta si eleva, ed inclinandosegli sopra la rotta. E perchè 'l cerchio si concepisce esser un Poligono di lati infiniti, è necessario che nel suo perimetro sieno tutte le direzioni, cioè infinite; e però vi è quella di qual-



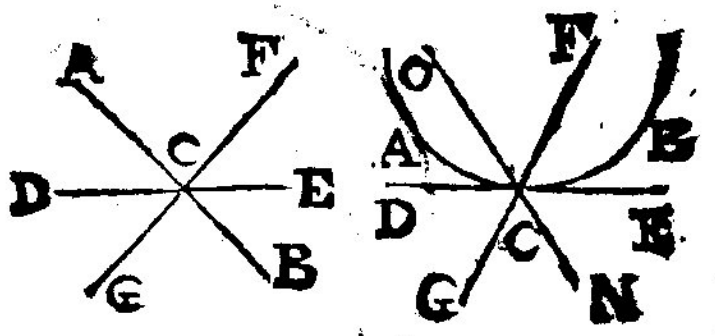
qualsivoglia linea retta segnata, la quale non può intendersi essere altra, che quella del lato (degl' infiniti che ne ha il Cerchio) che ad essa sia applicato; adunque quello del Cerchio, che alla linea retta si applica, non forma angolo con essa; e tal' è il punto del contatto. Quì poi non si può dire, che sebbene il punto che tocca, non contiene angolo colla tangente, tuttavia pur lo contenga il punto contiguo conseguente; siccome nel Poligono, non il lato, che s' applica alla retta proposta, ma il lato seguente è quello, che l' angolo forma, e constituisce; non si può dico dir questo, perchè il punto, che succede a quel del contatto, non tocca la retta, la quale da un sol punto del Cerchio, e non da più vien toccata; ma nella diffinizione dell'angolo si ricerca, oltre all'inclinazione, il toccamento ancora, adunque il chiamato angolo del contatto è con errore detto così, nè è veramente angolo, nè ha grandezza alcuna.

Sov-

Sovviemmi anco, oltre a molt' altri, aver fatto un discorso in cotal forma.

Se stando ferma la D E, intenderemo la segante A B girarsi sopra 'l punto del segamento C; sicchè dallo stato A B calando A verso D, trapassi in G F, facendo l'angolo F C E superiore alla D E, dove prima conteneva l'inferiore E C B; è manifesto l'angolo B C E andarsi per tal conversione inacutendo, e restringendo in modo, che finalmente la sua quantità si annichili, e del tutto svanisca, il che accaderà quando essa retta A B si congiugnerà colla D E. Ora applicando lo stesso discorso all'arco A C B segato dalla retta O N nel punto C, constituendo i supposti angoli misti A C O, N C B; se intenderemo essa retta O N girarsi sopra 'l punto C, da O verso D inacutendo i detti angoli, e finalmente trapassando nello stato di G C F, sicchè l'angolo inferiore N C B si faccia superiore, come F C B, non comprendo come ciò possa accadere senza passar per l'annichilazione di essi angoli, la quale annichilazione non può essere, se non quando essa retta

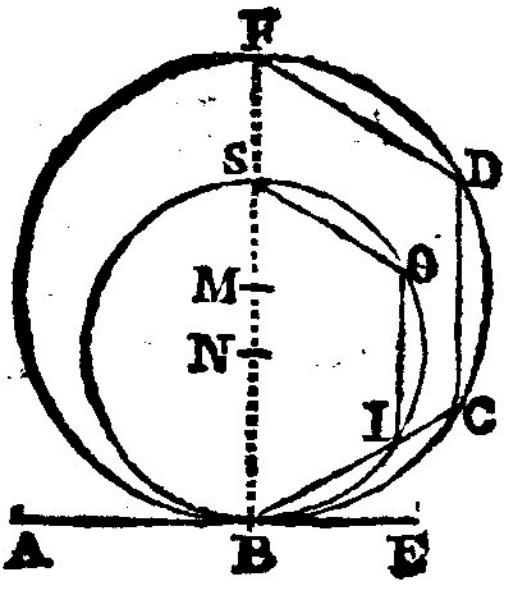
ta convertibile non ſegaſſe più la curva A C B, il che avviene quan-



do eſsa ſi uniſce colla tangente D E. Nell' arco dunque, e nella tangente non ſono angoli, ma l' annichilazione degli angoli.

Il diſcorſo anco, che vien fatto per confermare, che l' angolo della contingenza non ſolamẽte ſia quanto, ma talmente quanto ch' e' ſia diviſibile in infinito, mentre ſi deſcrivano cerchi maggiori, che paſſino per lo medeſimo toccamento, è, s' io non m' inganno, manchevole; imperciocchè non l' angolo, il quale dico non aver quantità, ma ben lo ſpazio tra la circonferenza del minor cerchio, e la retta tangente vien diviſo, e ſuddiviſo dalle maggiori, e maggiori circonferenze; il che aſſai chiaramente mi par che ſi poſsa moſtrare coll'eſempio de' molti Poligoni rettilinei ſimili,

li, e diſeguali nella ſeguente maniera.



Sieno nella retta M B perpendicolare alla A E, i centri M, N, di due cerchi diſeguali toccanti la A E nel medeſimo punto B, ed intendaſi nel minore inſcritto un Poligono equilatero, del quale ſieno lati le rette B I, I O, O S, e prolungata la B I termini nella circonferenza del cerchio maggiore nel punto C; è manifeſto la linea B C eſſere un lato del Poligono ſimilmente inſcritto nel cerchio maggiore, nel quale le due C D, D F ſieno lati conſeguenti. Quì ſi vede che 'l perimetro F D C B divide ben lo ſpazio intercetto tra 'l perimetro del Poligono S O I B, e la retta B E; ma non però vien diviſo l' angolo I B E, eſſendo il lato I B parte del lato B C, ed eſſo angolo I B E comune, anzi lo ſteſ-

ſo

ſo del fatto dalla EB, e da i due lati de' Poligoni BI, BC; e diſcorrendo nello ſteſso modo di tutti gli altri Poligoni tra loro ſimili, di qualunque numero di lati, e quanto ſi voglia differenti in grandezza, l'angolo IBE ſarà ſempre comune, nè giammai ſegato, ma ben'andrà ſempre facendoſi più acuto multiplicãdoſi i lati del Poligono; vero è che l'angolo IBE ſarebbe eſso ancora diviſo dal lato d' un Poligono maggiore, tuttavolta ch' e' foſse di più lati, ed in conſeguenza diſſimile. Di quì mi par che ſi poſsa ritrarre, che eſsendo i Cerchi tutti Poligoni ſimili di lati infiniti, applicandogli alla retta AE nel comune toccamento B, venga ben lo ſpazio tra la tangente, e l'arco interno BIOS diviſo dall' arco eſteriore BCDF, ma non già l' angolo B, eſsendo comune ad amendue i Poligoni; e l'eſſere i Cerchi tutti Poligoni ſimili di lati infiniti, toglie il poterſi dire il cerchio maggiore eſser Poligono di più lati, che il minore, e perciò atto a dividerli il ſuo angolo, perchè ſiccome non ſi può intendere Poligono alcuno poterſi inſcrivere in un cerchio, benchè immenſo, di

lati innumerabili, che uno di altrettanti (e però ſimile) non ſi poſsa inſcrivere in qualſivoglia altro, benchè piccoliſſimo, così non ſi può dire, che l'angolo del contatto non ſia uno, e comune ad amendue i cerchi; e ſe tal' angolo non è diviſibile, non è quanto, e ſe non è quanto, non è vero angolo, ma equivocamente così detto.

Conſideriſi appreſso, che ſiccome multiplicandoſi più, e ſempre più nel cerchio S O B il numero de' lati del Poligono, l' angolo I B E ſempre ſi fa più acuto, par che per neceſsaria conſeguenza ne ſegua, che dove i lati ſieno infiniti, tal' angolo ſia infinitamente acuto, cioè non quanto, e non angolo. &c.

Segue dipoi il Galileo con altro breve capitolo eſaminando alcune concluſioni, che il Glorioſi inferiſce dalle ragioni addotte dal ſopranno-minato Franceſco Vieta: Ma eſſendochè per l' intelligenza di tali ponderazioni converrebbe riferire e ciò che ſcriſſe l' iſteſſo Vieta, e ciò che v' appoſe il Glorioſi, colla riſpoſta di queſto al medeſimo Galileo, onde troppo in lungo s' andrebbe, ſi tralaſcia di traſcriver più oltre eſſo capitolo

pitolo, rimettendo i Curiosi, a sodisfarsi pel rimanente ne' proprj Autori; poichè non s'è preteso di portar quì il progresso tutto della questione, colle proposte, e risposte altrui, ma solamente le principali ragioni, che a stimar nullo tal' angolo mossero il Galileo, al di cui parere liberamente si sottoscrisse Vincenzio Viviani, mosso non solo dalle ragioni del suo maestro, ma da molt' altre delle proprie, alcune delle quali son queste.

Altre ragioni di Vincenzio Viviani per dimostrare la nullità dell' angolo del contatto.

Se tra le condizioni dell' angolo piano volle Euclide nella diffinizione di esso, quella ancora, che le linee constituentilo non sieno poste fra loro in diritto, parmi che di quì assai manifestamente si comprenda, ch' ei non intese per modo alcuno di chiamar con quel nome l' incontro d' una linea curva con una retta, e perciò non quello della circonferenza d' un Circhio colla retta linea toccantelo, essendo assolutamente impossibile constituire, o adattare una linea curva tal-

talmente ch' ella torni in dirittura con una retta, e tanto più è impossibile il far ciò con due curve insieme congiunte; onde non potendosi mai con esse linee effettuare la vietata posizione, superfluamente, e fuori di proposito l'avrebbe egli esclusa da simil sorta d' accoppiamento. Se dunque egli stimò necessaria alla diffinizione dell' angolo piano quella particolare eccezione, parmi che di quì concluder si debba, che egli intese di parlar d' angoli fatti solo da quelle linee, che qualche volta coll' eccettuata posizione si abbattono d' accoppiarsi: E tali sono le linee rette solamente, due delle quali toccandosi in qualche punto comune ad esse, possono dopo l' infinite inclinazioni, e aperture sempre maggiori, giugnere finalmente a situarsi tra loro in una medesima dirittura. Di quì è, che io mi fo a credere, che Euclide adducesse la diffinizione solamente per l'angolo rettilineo, e non quella generale per questo, e per gli altri, chiamati comunemente curvilinei, cornicolari, e misti, &c. E ciò maggiormente mi si conferma dall' osservare, che il medesimo Euclide in tutti i suoi Elementi, & in ogn' altra sua Opera

cogni.

cognita a noi, non propone mai, come si dice, ex profello, *di dimostrare alcun Teorema, o di risolver Problema intorno a gli angoli, che son detti curvilinei, nè gli paragona mai fra di loro, come egli fa in più luoghi de' rettilinei. Che se nel suo terzo Libro si trova, che tali accoppiamenti fatti dalla circonferenza del Cerchio con una retta, che lo tocchi, o da quella, che passi per lo suo centro, o da altre che lo seghino vengono paragonati, nella proposizione precedente cogli angoli acuti rettilinei, e nella 31. coll'angolo retto, io non son lontano dal creder quello, di che sospettò col Peletario quel sublime 'ngegno Franzese tra' Restauratori dell' antica Geometria fosse il primo, dico Francesco Vieta, che queste tali comparazioni sieno state aggiunte alla fine di dette Proposizioni da qualche bello spirito degli Antichi, o come sogliamo dire, da qualche Saccente: anzi tengo per fermo, che cotal' uomo le cavasse quivi come Corollari delle medesime proposte d' Euclide, onde poi a contemplazione di queste sue aggiunte gli convenisse alterar la diffinizione dell' angolo premessa da Euclide al suo primo Li-*

bro, la quale ſtando forſe così (Angolo è quella scambievole inclinazione di due linee rette poste in un piano, che toccandosi in un punto non son poste in dirittura fra di loro) *la riformaſſe per farla più generale, e che ſerviſſe a quelle ſue aggiunte, con levar la condizione di* rette *alle linee, e così la riduceſſe univerſale per tutti gli angoli da lui inteſi, e che di poi v' aggiugneſſe di proprio la diffinizione particolare pe' ſoli rettilinei, ſiccome ancora che al terzo Libro premetteſſe la diffinizione per gli angoli delle porzioni, la quale io per me ſtimo adattata a queſti non meno impropriamente, che a quello chiamato del contatto. Ma in qualunque modo ciò ſia ſeguito, non mi par già ch' e' meriti il conto il diffonderſi, e confonderſi di vantaggio in ſimil conteſa; poichè quando bene il tutto foſſe veramente d' Euclide ſteſſo, non sò poi veder che gran biaſimo glie ne venga, e qual pregiudizio reſulti alla ſtabilità de' fondamenti Geometrici, ond' egli occorra affannarſene col medeſimo Vieta dicente, che non a torto ſi tiene per qualcuno tali concluſioni controverſe eſſere adulterine* ne ſibi non ſatis con-

conſtet Euclides, & alioqui Geometrica multa corruant fundamenta; *perchè finalmente quando mai ſi concordi, o ſi conceda, che l'addotta diffinizione non ſi competa ad altri angoli, che a' rettilinei, e che queſti ſoli come enti, e però come quanti ſieno diviſibili, e comparabili fra di loro, e che gli altri tutti improprianente ſi chiamino angoli, e ſi voglia poi, non oſtante, che le comparazioni de' curvilinei co' rettilinei ſieno proprie d' Euclide, il maggior diſordine, che accader poſſa in Geometria ſarà, che le dette comparazioni fatte nel fine delle citate propoſizioni del terzo Libro ſieno improprie, o non vere, e conſeguentemente n' avverrà, che il numero delle vere proprietà Geometriche (il qual non vi è dubbio, ch' e' ſia infinito) manchi di un due, o di un tre al più. Ma che? eſſo numero pur tuttavia reſterà infinito. Oltreche, quando tali concluſioni ſi toglieſſero affatto dagli Elementi, tutto il rimanente avrebbe per appunto ſuo vigor come prima, come che eſſe abbian fine nel medeſimo lor principio, e da eſſe non dipenda pur una delle tant' altre proprietà dimoſtrate in tutti i quindici Li-*

bri degli Elementi d' Euclide, o degli altri Trattati, che di lui ci son pervenuti alle mani.

Se altri poi sostenendo la parte contraria, dirà la diffinizione dell' angolo piano esser propria d' Euclide in quella forma ch' ella vi si legge, ma che per esser posta universale tanto per l' accoppiamento delle linee curve, che delle rette, quella condizione ch' esclude la posizione delle linee per diritto, riguarda solamente all' inclinazione, quand elleno sieno rette, e perciò vi è necessaria; io facilmente mi accomoderò a concedergli il tutto senza contesa; ma gli soggiugnerò bene, che se è angolo ancora l'inclinazione, che ha una linea curva sopra una retta, egli mi assegni quale, e quanta sia la parte di essa curva, la quale determina l' inclinazione colla medesima retta, cioè (se per esempio, essendo circonferenza di cerchio) se ne debbano prender novanta, e più gradi, ovvero ottanta, o quaranta, o dieci, o due, o uno, o un mezzo, &c. o pure, se (qualunque sia il numero de' gradi presi) l' angolo sia il medesimo sempre. La prima cosa non può dirsi, perchè non vi è ragione,

per

per cui più un numero di gradi, che un altro ſtabiliſca l' inclinazione della circonferenza colla retta. Non ancora la ſeconda, perchè dovendo le due linee coſtituenti l' angolo aver fra di loro direzioni diverſe, e non la medeſima, ma averle però ciaſcuna linea ſempre verſo una ſteſſa parte, è vero che quanto alla retta ell' ha direzione ſempre verſo quella parte ſecondo la quale ell' è diſteſa, tanto nel prenderne una piccola porzione, che una grande, ma la direzione della circonferenza non riguarda già verſo la ſteſſa parte nel termine d' un arco piccolo, che di un maggiore, e però eſſendo diverſe le direzioni delle diverſe parti della medeſima curva, diverſi ancora ſaranno gli angoli, che le dette parti fanno colla medeſima retta linea, e non ſempre gli ſteſſi, come e' ſi pongono.

Se poi ſi diceſſe, che le direzioni degli archi vanno preſe non a' loro eſtremi termini, ma a quel punto dove eſſe convengono colla retta, io domando col Galileo, ſe in ciaſchedun cerchio ſono tutte le direzioni, ſicchè non ne ſieno più nel maggiore, che nel minore. E' forza dire, che in

ciascuno sono tutte. Stante ciò io soggiungo col medesimo Galileo sù l' ultima sua figura, che la direzione B E, che è la medesima, che quella del punto B dell' arco B I, dovrà esser anco in qualche punto dell' arco B C, e questa non potrà esser altrove che nel comun punto B: e però amendue gli archi B I, B C, e la retta B E hanno al punto B la medesima direzione; ma dove è la medesima direzione non si forma angolo, adunque, &c.

Dico in oltre col Galileo in primo luogo, che quando due cerchi si toccano per di fuori, una sola retta linea, e non più si può tirare per lo punto del lor contatto fra le circonferenze, la quale non le seghi, e questa è la tangente qualunque de' cerchi a quel punto stesso del contatto: adunque la quantità dell'angolo fatto dalle dette circonferenze, è tanta, quanta è la quantità della larghezza di quella sola retta tangente, che passa fra di esse, ch' è lo stesso che dire, quest' angolo non ha quantità: L'angolo poi formato dalla retta tangente, e da una sola delle dette circonferenze sarà quanto è la metà della larghezza della medesima retta

ta tangente, cioè similmente sarà non quanto.

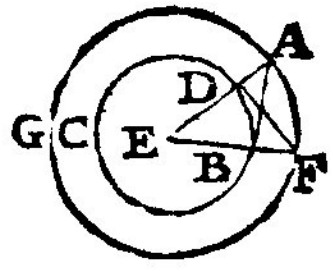
Secondariamente, che d' ogni angolo rettilineo quanto, se ne può assegnare un minore, sicchè quell' angolo, che di tutti i rettilinei quanti è minore, bisogna ch' e' sia non quanto, ma il minore di tutti gli acuti rettilinei quanti, è quello, che si fa dalla circonferenza del cerchio, e dalla retta linea tangente per la Prop. precedente d' Euclide, adunque tal' angolo è non quanto, cioè non è angolo, ma impropriamente così detto.

Oltre all' addotte, altre ragioni vi sarebbero per confermare il non essere di sì fatt' angolo: ma perchè in fine tal disputa è, come dir sogliamo, di lana caprina, chiunque ha più genio alle controversie di cose frivole (che di questi il Mondo letterato pur troppo abbonda) che alla sodezza delle verità irrefragabili Matematiche, potrà veder' a piacer suo ciò che negando, o affermando ingegnosamente ne scrissero, oltre a' mentovati Autori, il Cardano, il Pelctario, il Clavio, il Tacquet, ed altri celebri Matematici.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE XVII.

Dal punto dato tirare una linea retta, che tocchi il dato cerchio.



Sia il punto dato A, ed il dato cerchio B C D, bisogna dal punto A tirare una linea retta, che tocchi il cerchio BC D. Pigliſi il centro del cerchio, che ſia E, e congiunta la A E, dal centro E coll'intervallo E A, deſcrivaſi il cerchio A F G, e dal punto D tiriſi la D F ad angoli retti ſopra la E A, e congiungaſi E B F, A B. Dico che dal punto A è tirata la A B, che tocca il cerchio B C D, perciocchè eſſendo E centro de' cerchi B C D, A F G, ſarà la E A uguale alla E F, e la E D uguale alla E B, onde le due A E, E B ſono uguali alle due F E, E D, ed hanno l'angolo E comune, adunque la baſe D F è uguale alla baſe A B, ed il triangolo D E F uguale al triangolo

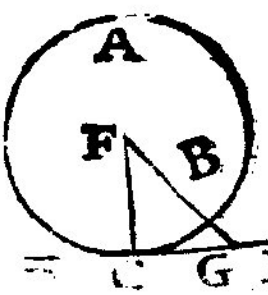
1. *di queſ.* 11. *del prim.*

golo E B A, e gli altri angoli agli altri angoli, e perciò l'angolo EBA è uguale all'angolo E D F, e l'angolo E D F è retto, onde anco EBA è retto, e la E B è semidiametro. Ma quella, che è tirata dalla estremità del diametro del cerchio ad angoli retti, tocca il cerchio, adunque dal punto dato A si è tirata una linea retta A B che tocca il cerchio B C D, il che bisognava fare. *Per l' ant.*

TEOREMA XVI.

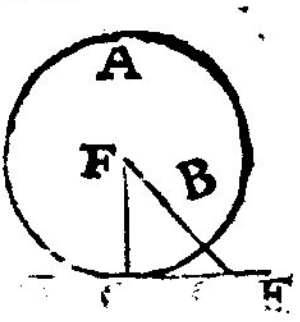
PROPOSIZIONE XVIII.

Se una linea retta tocca il cerchio, e dal centro si tira un'altra linea retta al toccamento, quella è perpendicolare sopra la linea che tocca.



La linea retta D E tocchi il cerchio A B C nel punto C, e pigliſi il centro del cerchio A B C che ſia F, dal quale tiriſi la F C al C. Dico cha la F C è perpendicolare alla D E, ma se non è così tiriſi dal punto F la F G per- *1. dè queſ.* *12. del prim.*

pendicolare alla DE, perchè dunque l'angolo FGC è retto, sarà GCF acuto, e perciò l'angolo FGC sarà maggiore dell'angolo FCG, ma il maggior lato è sottoposto al maggiore angolo, adunque la FC è maggiore della FG; e la FC è uguale alla FB, onde la FB sarà maggiore della FG, la minore della maggiore, che è impossibile. La FG dunque non è perpendicolare alla DE, dimostreremo parimente, che non è altra linea fuor che la FC, laonde la FC è perpendicolare alla DE, se dunque una linea retta tocca il cerchio, e dal centro si tira un'altra linea retta al toccamento, quella è perpendicolare sopra la linea che tocca, il che bisognava dimostrare.



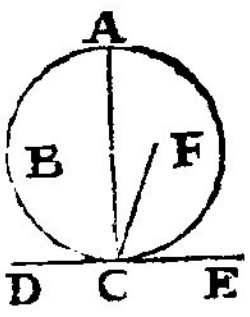
19. *del prim.*

TEOREMA XVII.

PROPOSIZIONE XIX.

Se una linea retta tocca il cerchio, e dal toccamento si tira un'altra linea retta perpendicolare alla linea che tocca,

ca, in quella è il centro del cerchio.



Una linea retta D E tocchi il cerchio A B C nel punto C, e tirisi dal punto C la C A perpendicolare alla D E Dico che 'l centro del cerchio è nella A C, non già, ma se è possibile, sia il centro F, e giungasi C F, perchè dunque una linea retta D E tocca il cerchio A B C, e la F C è tirata dal centro al toccamento, sarà la F C perpendicolare alla D E, adunque l'angolo F C E è retto; e l'angolo A C E è parimente retto; onde l'angolo F C E è uguale all'angolo A C E, il minore al maggiore, che è impossibile, adunque F non è centro del cerchio A B C, dimostreremo ancora, che non è in alcun'altra fuor che in essa A C, onde se una linea retta tocca il cerchio, e dal toccamento si tira un'altra linea retta perpendicolare alla linea che tocca, in quella è il centro del cerchio, il che bisognava dimostrare.

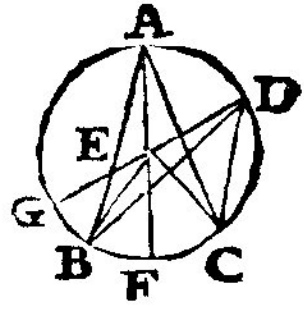
32. del primi.

Per l'ant.

TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XX.

L'angolo che è nel centro del cerchio è doppio di quello che è nella circonferenza, quando hanno la medesima circonferenza per base.



Sia il cerchio A B C, nel cui centro E sia l'angolo B E C, e nella circonferenza sia B A C, ed abbiano la medesima circonferenza B C per base. Dico che l'angolo B E C è doppio dell'angolo B A C. Giungasi la A E, e prolunghisi ad F, e perchè la E A è uguale alla E B, sarà eziandio l'angolo E A B uguale all'angolo E B A, onde gli angoli E A B, E B A sono doppi dell'angolo E A B, ma l'angolo B E F è uguale a gli angoli E A B, E B A, adunque l'angolo B E F è doppio dell'angolo E A B, e per la medesima ragione l'angolo F E C è doppio dell'angolo E A C, onde tutto l'an-

5. del prim.

32. del prim.

l'angolo B E C è doppio di tutto l'angolo B A C, pieghisi poi, e sia un altro angolo BDC, e giunta la D E prolunghisi nel G, dimostreremo similmente che l'angolo G E C è doppio dell'angolo E D C, de' quali G E B è doppio dello E D B, adunque il rimanente B E C è doppio del rimanente B D C, onde l'angolo, che è nel centro del cerchio, è doppio di quello che è nella circonferenza, quando hanno la medesima circonferenza per base, il che bisognava dimostrare.

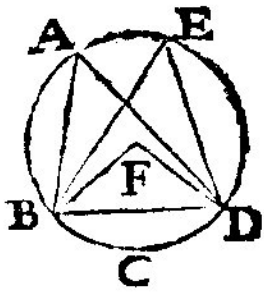
TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XXI.

Gli angoli, che sono nella medesima porzione del cerchio sono fra loro uguali.

Sia il cerchio A B C D E, e nella medesima porzione B A E D siano gli angoli B A D, B E D. Dico che quegli fra loro sono uguali. Pigliſi il centro del cerchio ABCDE, che sia F: e giunganſi B F, F D, e perchè l'angolo B F D è nel centro, e l'angolo B A D nella circonfe- 1. *di quest.*

renza, ed hanno la medesima circonferenza B C D per base,



Per l' ant. l' angolo B F D sarà doppio dell' angolo B A D, e per la medesima ragione l' angolo B F D è doppio dell' angolo B E D, onde l' angolo B A D è uguale all' angolo B E D, adunque gli angoli che sono nella medesima porzione del cerchio, sono fra loro uguali, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XX.

PROPOSIZIONE XXII.

De' quadrilateri, che si descrivono ne' cerchi, gli angoli opposti sono uguali a due retti

Sia il cerchio A B C D, ed in esso il quadrilatero A B C D. Dico che gli angoli di esso opposti sono uguali a due retti, giungansi A C, B D, e

32. del prim. perchè tre angoli d' ogni triangolo sono uguali a due retti, saranno tre angoli del triangolo A B C, cioè

CAB

CAB, ABC, BCA uguali a due retti, ma l'angolo CAB è uguale all'angolo BDC, perchè sono nella medesima porzione BADC, e l'angolo ACB è uguale all'angolo ADB, essendo nella medesima porzione ADCB adunque tutto l'angolo ADC è uguale a gli angoli BAC, ACB pongasi l'angolo ABC comune a gli due angoli A, C, e separatamente all'angolo D, saranno gli angoli ABC, BAC, ACB uguali a gli angoli ABC, ADC, ma gli angoli ABC, BAC, ACB sono uguali a due retti, gli angoli dunque ABC, ADC saranno uguali a due retti; dimostreremo similmente, che gli angoli BAD, DCB sono uguali a due retti, adunque de' quadrilateri, che si descrivono ne' cerchi gli angoli opposti sono uguali a due retti, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXI.

PROPOSIZIONE XXIII.

Nella medesima linea retta due porzioni di cerchi simili, e diseguali non si constitui-

ranno

ranno giammai dalla medesima parte.

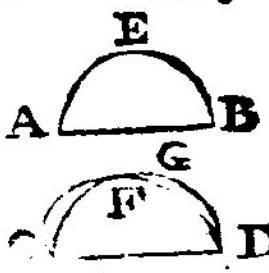
Constituiscansi, se però è possibile, nella medesima linea retta A B due porzioni di cerchi simili, e disuguali, e dalla medesima parte, ACB ADB: e tirisi ACD, e giungansi CB, BD, perchè dunque la porzione ACB è simile alla porzione ADB, e simili porzioni de' cerchi sono quelle, che pigliano angoli uguali, sarà l'angolo ACB uguale all' angolo ADB, l' esteriore all' interiore, che non è possibile, adunque nella medesima linea retta due porzioni di cerchi simili, e disuguali non si constituiranno giammai dalla medesima parte, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXIV.

Simili porzioni di cerchi fatte nelle linee rette uguali sono uguali fra loro.

Siano



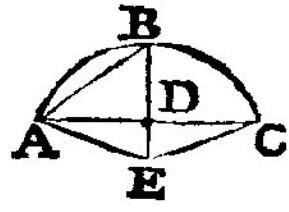
Siano nelle linee rette uguali A B, C D ſimili porzioni di cerchi A E B, C F D Dico che la porzione A E B è uguale alla porzione C F D, perciocchè adattandoſi la porzione A E B alla porzione C F D, e poſto il punto A ſopra il punto C, e la linea retta A B ſopra la C D, eziandio il punto B ſi adatterà al punto D, perchè la A B è uguale alla C D, ed adattandoſi la linea retta A B alla retta C D, ſi adatterà ancor la porzione A E B alla porzione C F D, che ſe la linea A B ſi adatterà alla C D, e la porzione A E B non ſi adatterà alla porzione C F D, ma ſi muterà come C G D il cerchio C G D ſegherà il cerchio C F D in più di due punti, cioè ne punti C G D, il che è impoſſibile, onde non è vero che adattandoſi la linea retta A B alla C D non ſi adatti ancor la porzione A E B alla porzione C F D, e però ſi adatterà, e ſarà uguale ad eſſa, adunque ſimili porzioni di cerchi fatte nelle linee rette uguali ſono uguali fra loro, il che biſognava dimoſtrare.

PRO-

PROBLEMA III.

PROPOSIZIONE XXV.

Data una porzione di cerchio descrivere il cerchio, del quale ella è porzione.



Sia la data porzione di cerchio A B C, bisogna descrivere il cerchio della porzione A B C, di cui ella è porzione. Seghisi la A C per mezzo in D, e dal punto D tirisi la D B ad angoli retti sopra la A C, e giungasi A B, adunque l'angolo A B D o è maggiore dell'angolo B A D, o minore, o uguale. Sia dunque maggiore, e costituiscasi nella linea retta B A, e nel dato punto in essa A l'angolo B A E uguale all'angolo A B D, e prolunghisi la B D in E, e giungasi E C, perchè dunque l'angolo A B E è uguale all'angolo B A E, sarà la linea retta B E uguale alla E A, e perchè la A D è uguale alla D C, e la D E comune, le due A D, D E sono uguali alle due C D, D E, l'una all'altra, e l'angolo A

10. del prim.

11. del prim.

23. del prim.

6. del prim.

D E

D E è uguale all' angolo C D E, conciossiacosachè l' uno, e l' altro sia retto, adunque eziandio la base A E è uguale alla base E C, ma si è dimostrata la A E uguale alla E B, onde la B E è uguale alla E C, e perciò le tre linee rette AE, EB, EC sono fra loro uguali, adunque dal centro E coll' intervallo di una di esse A E, E B, E C descrivendosi il cerchio passerà eziandio per gli altri punti, laonde data la porzione del cerchio si è descritto il cerchio, di cui ella è porzione, il che bisognava fare.

TEOREMA XXIII.

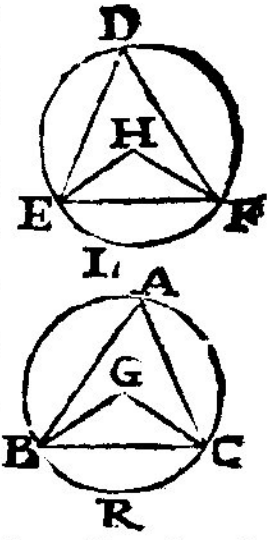
PROPOSIZIONE XXVI.

Ne' cerchi uguali gli uguali angoli si fermano sopra le circonferenze uguali, o siano gli angoli a' centri, ovvero alle circonferenze.

Siano ABC, DEF cerchi uguali, ed in essi angoli uguali B G C, E H F a' centri, e B A C, E D F alle circonferenze. Dico che la circonferenza B R C è uguale alla circonfe-

renza

renza E L F. Giungansi B C, E F, e perchè i cerchi A B C, D E F sono uguali, saranno anche i lor semidiametri uguali, adunque le due B G, G C sono uguali alle due E H, H F, e l' angolo G uguale all' angolo H, onde la base B C è uguale alla base E F, oltre a ciò perchè l' angolo A è uguale all' angolo D, la porzione B A C sarà simile alla porzione E D F, e sono nelle linee rette uguali B C, E F, ma le simili porzioni de' cerchi nelle linee rette uguali sono uguali fra loro, adunque la porzione B A C è uguale alla porzione E D F, ma tutto il cerchio A B C è uguale a tutto D E F, onde la rimanente circonferenza B R C sarà uguale alla rimanente E L F, adunque ne' cerchi uguali gli uguali angoli si fermano sopra le circonferenze uguali, o siano gli angoli a' centri, ovvero alle circonferenze, il che bisognava dimostrare.



1. *diff. di qu.*

4. *del prim.*

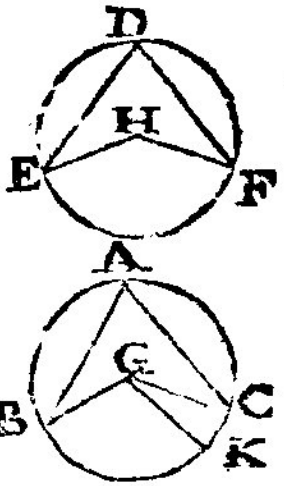
10 *dif. di que.*

24. *di quef.*

TEO-

TEOREMA XXIV.
PROPOSIZIONE XXVII.

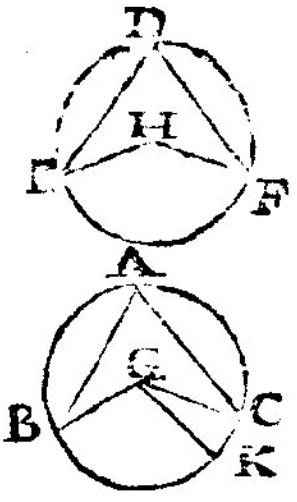
Ne'cerchi uguali gli angoli che ſi fermano ſopra le circonferenze uguali ſono uguali fra loro, o ſiano a'centri, ovvero alle circonferenze.



Ne' cerchi uguali A B C, D E F, e nelle circonferenze uguali B C, E F, ſiano gli angoli a' centri B G C, E H F, e alle circonferenze B A C, E D F. Dico che l'angolo B G C è uguale all' angolo E H F, e l'angolo B A C all' angolo E D F; perciocchè ſe l'angolo B G C è uguale all' angolo E H F, è manifeſto ancor l'angolo B A C eſſer uguale all' angolo E D F, ma ſe non è così, uno di eſſi ſarà maggiore: ſia maggiore B G C, e conſtituiſcaſi nella linea retta B G, e nel punto G che è in eſſa, l'angolo B G K uguale all' angolo E H F, ma gli uguali ango-

20. *di queſt.*

angoli si fermano sopra le circonferenze uguali, quando sono a' centri, adunque la circonferenza B K è uguale alla circonferenza E F, e la circonferenza E F, è uguale alla circonferenza B C, onde la B K è uguale alla B C, la minore alla maggiore, che è impossibile, adunque l' angolo B G C non è diuguale all' angolo E H F, e perciò è uguale, e l' angolo A è la metà dell' angolo B G C, e l' angolo D la metà dell' angolo E H F, onde l' angolo A è uguale al D, adunque ne' cerchi uguali gli angoli, che si fermano sopra le circonferenze uguali, sono uguali fra loro, o stano a' centri, ovvero alle circonferenze, il che bisognava dimostrare.



Per l' ant.

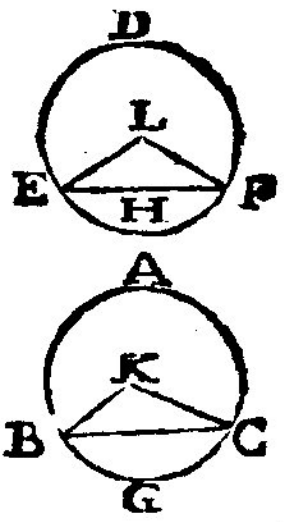
20. di quest.

TEOREMA XXV.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Ne' cerchi uguali le uguali rette linee tagliano circonferenze uguali, cioè la maggiore

re uguale alla maggiore, e la minore alla minore.



Siano i cerchi ABC, DEF uguali, ed in essi le uguali rette linee BC, EF, che taglino le circonferenze BAC, EDF, maggiori, e le BGC, EHF minori. Dico che la circonferenza BAC maggiore è uguale alla maggiore EDF, e la minore BGC alla minore EHF. Piglinsi i centri de' cerchi K, L, e giunganſi BK, KC, EL, LF; e perchè i cerchi ſono uguali, ſaranno eziandio uguali i lor ſemidiametri, adunque le due BK KC ſono uguali alle due EL, LF, e la baſe BC è uguale alla baſe EF, onde l' angolo BKC è uguale all' angolo ELF, ma gli angoli uguali ſi fermano ſopra le uguali circonferenze, quando ſono a' centri, e però la circonferenza BGC è uguale alla circonferenza EHF, ma tutto il cerchio ABC è uguale a tutto il DEF, onde la rimanente circonferenza BAC ſarà uguale alla rimanente EDF, adunque ne' cer-

1 *di queſ.*

diff. 1. *di qu.*

8. *del prim.*

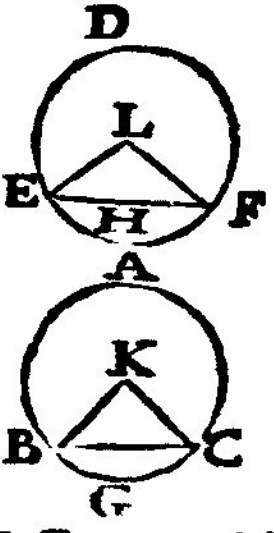
26. *di queſ.*

cerchi uguali le uguali rette linee tagliano circonferenze uguali, cioè la maggiore alla maggiore, e la minore alla minore, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXVI.

PROPOSIZIONE XXIX.

Ne' cerchi uguali sotto l'uguali circonferenze son poste linee rette uguali.



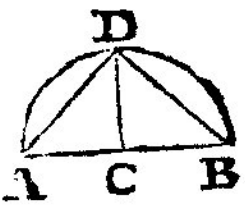
Siano i cerchi uguali A B C, D E F, e piglinsi in essi le circonferenze B G C, E H F uguali, e giunganſi B C, E F. Dico, che la linea retta B C è uguale alla retta E F. Piglinsi i centri de cerchi K, L, e giunganſi B K, K C, E L, L F, perchè dunque la circonferenza B G C è uguale alla circonferenza E H F, sarà l'angolo B K C uguale all' angolo E L F, e perchè i cerchi A B C D E F sono uguali, saranno uguali ancora i semidiametri, adunque le due B K, K C sono uguali alle due E L,

E L, L F, e contengono angoli uguali, onde la baſe B C è uguale alla baſe E F, adunque ne' cerchi uguali ſotto l'uguali circonferenze ſon poſte linee rette uguali, il che biſognava dimoſtrare.

PROBLEMA IV.

PROPOSIZIONE XXX.

Dividere una data circonferenza per mezzo.



Sia la data circonferenza A D B, biſogna dividerla per mezzo. Giungaſi A B, e dividaſi per mezzo nel C, e dal punto C tiriſi la C D ad angoli retti ſopra la A B, e giungaſi A D, D B, perchè dunque la A C è uguale alla C B, e la C D comune, le due A C, C D ſono uguali alle due B C, C D, e l'angolo A C D è uguale all'angolo B C D, eſſendo l'uno, e l'altro retto, adunque la baſe A D è uguale alla baſe D B, ma le linee rette uguali tagliano circonferenze uguali, la maggiore alla maggiore, e la minore alla minore, ed è l'una, e l'altra di eſſe A D, B D

10. *del prim.*
11. *del prim.*
4. *poſt.*
4. *del prim.*
28. *di queſ.*

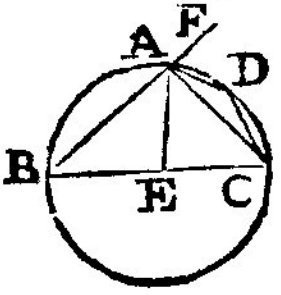
minore del mezzo cerchio, onde la circonferenza A D sarà uguale alla circonferenza D B, adunque una data circonferenza si è divisa per mezzo, il che bisognava fare.

TEOREMA XXVII.

PROPOSIZIONE XXXI.

Nel cerchio l'angolo, che è nel mezzo cerchio, è retto, e quello, che è nella maggior porzione, è minore del retto; e quello, che è nella minor porzione, è maggiore del retto, oltre a questo l' angolo della porzion maggiore è maggior del retto, e l' angolo della porzion minore è minore del retto.

Sia il cerchio A B C D, il cui diametro B C, ed il centro E, e giungansi B A, A C, A D, D C. Dico che l'angolo che è nel mezzo cerchio B A C è retto, e quello che è nella porzione A B C maggiore del



del mezzo cerchio, cioè l'angolo A B C è minore del retto, e quello che è nella porzione A D C minore del mezzo cerchio, cioè l'angolo A D C è maggiore del retto. Giungasi A E, e prolunghisi la B A in F, perchè dunque la B E è uguale alla E A, l'angolo E A B sarà uguale all'angolo E B A, e similmente perchè la E A è uguale alla E C, sarà l'angolo A C E uguale all'angolo C A E, adunque tutto l'angolo B A C è uguale agli due angoli A B C, A C B, e l'angolo F A C fuori del triangolo A B C è uguale a gli due A B C, A C B, l'angolo dunque B A C è uguale all'angolo F A C, e perciò l'uno, e l'altro di essi è retto, onde l'angolo B A C nel mezzo cerchio B A C è retto, e perchè i due angoli A B C, B A C del triangolo A B C sono minori di due retti, e B A C è retto, sarà l'angolo A B C minore del retto, ed è nella porzione A B C maggiore del mezzo cerchio, ed essendo nel cerchio il quadrilatero A B C D, e ne' quadrilateri, che si descrivono ne' cerchi gli angoli oppo-

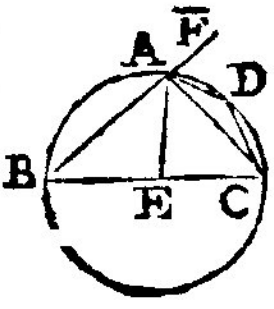
5. *del prim.*

32. *del prim.*

13. *del prim.*

17. *del prim.*

22. *di quest.*



sti sono uguali a due retti, saranno gli angoli A B C, A D C uguali a due retti, e l'angolo A B C è minore del retto, adunque il rimanente A D C sarà maggiore del retto, ed è nella porzione A D C minore del mezzo cerchio. Dico oltre a ciò, che l'angolo della portion maggiore, che è contenuto dalla circonferenza A B C, e dalla linea retta A C, è maggiore del retto, e l'angolo della minor porzione contenuto dalla circonferenza A D C, e dalla linea retta A C, è minore del retto, il che appare manifestamente, perciocchè essendo l'angolo contenuto dalle linee rette B A, A C retto, sarà il contenuto dalla circonferenza A B C, e dalla linea retta A C maggiore del retto, e perchè l'angolo contenuto dalle linee rette C A, A F è retto, sarà quello, che è contenuto dalla linea retta C A, e dalla circonferenza A D C, minore del retto, adunque nel cerchio l'angolo, che è nel mezzo cerchio è retto, e quello, che è nella portion maggiore, è minore del retto, e quello, che è nella mi-

nor

nor porzione è maggiore del retto; oltre a queſto l' angolo della porzion maggiore è maggiore del retto, e l' angolo della porzion minore è minore del retto, il che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

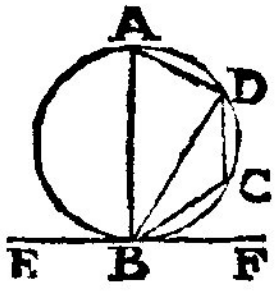
Di quì è manifeſto, che ſe un angolo del triangolo ſia uguale agli altri due angoli, egli ſarà retto, perciocchè l' angolo conſeguente è uguale a' medeſimi due, e quando gli angoli conſeguenti ſono uguali, è neceſſario, che ſiano retti.

TEOREMA XXVIII.

PROPOSIZIONE XXXII.

Se una linea retta tocca il cerchio, e dal toccamento nel cerchio ſia tirata una linea retta, che lo ſeghi, gli angoli, che ella fa colla linea che tocca, ſono uguali a quegli, che ſi

conſtituiſcono nell'altre porzioni del cerchio.



La linea retta E F tocchi il cerchio A B C D nel punto B, e dal punto B tiriſi nel cerchio A B C D una linea retta B D, che lo ſeghi in qualunque modo. Dico che gli angoli, che fa la B D colla linea che tocca E F, ſono uguali a quegli, che ſi conſtituiſcono nell' altre porzioni del cerchio, cioè che l'angolo F B D è uguale all'angolo conſtituito nella porzione D A B, cioè ad eſſo D A B, e l' angolo E B D uguale all'angolo D C B, conſtituito nella porzione D C B. Tiriſi dal punto B la B A ad angoli retti ſopra la E F, e pigliſi nella circonferenza B D qualſivoglia punto C, e giunganſi A D, D C, C B; perchè dunque una linea retta E F tocca il cerchio A B C D nel punto B, e dal toccamento B è tirata una linea retta B A ad angoli retti ſopra la E F, ſarà nella B A il centro del cerchio A B C D, onde la B A è diametro del medeſimo cerchio, e l'angolo A D B nel mezzo cerchio è retto

11. *del prim.*

19. *di queſt.*

Per l' ant.

retto

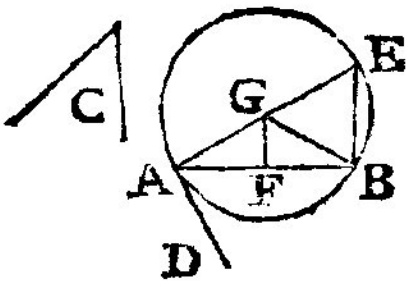
retto, adunque gli angoli rimanenti B A D, A B D ſono uguali ad un retto, ma l' angolo A B F ancora è retto, e perciò è uguale agli angoli B A D, A B D, traggaſi il comune A B D, onde il rimanente D E F è uguale a quello, che conſiſte nell' altra porzione del cerchio, cioè all' angolo B A D, e perchè nel cerchio è il quadrilatero A B C D, e gli angoli di eſſo oppoſti ſono uguali a due retti, ſaranno gli angoli D B F, D B E uguali agli angoli B A D, B C D; de' quali B A D ſi è dimoſtrato uguale a D B F, adunque il rimanente D B E ſarà uguale a quello, che è coſtituito nell' altra porzione del cerchio D C B, cioè a D C B, onde ſe una linea retta tocca il cerchio, e dal toccamento nel cerchio ſia tirata una linea retta, che lo ſeghi, gli angoli, ch' ella fa colla linea che tocca, ſono uguali a quegli, che ſi conſtituiſcono nell' altre porzioni del cerchio, il che biſognava dimoſtrare. 22. *di queſ.*

PROBLEMA V.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Conſtituire una porzione di cer-

cerchio nella data linea retta, che pigli l'angolo uguale all' angolo rettilineo dato.



Sia la data linea retta A B, ed il dato angolo retrilineo C. Biſogna deſcrivere una porzione di cerchio nella data linea retta A B, che pigli l' angolo uguale all' angolo C. Nella data retta linea A B, e nel punto A dato in eſſa, conſtituiſcaſi l'angolo B A D, uguale all' angolo C, e dal punto A tiriſi la A E ad angoli retti ſopra la A D, e ſeghiſi la A B per mezzo in F e dal punto F tiriſi la F G ad angoli retti ſopra la A B, e giungaſi G B. perchè dunque la A F è uguale alla F B, e la F G comune, le due A F, F G ſono uguali alle due B F, F G, e l' angolo A F G uguale all' angolo G F B, adunque la baſe A G è uguale alla baſe G B, onde dal centro G coll' intervallo A G deſcritto il cerchio paſſerà ancor per B, deſcrivaſi e ſia A B E, e giungaſi E B, e perchè dalla eſtremità

23 *del prim*

10. e 11. *del pr.*

4. *del prim.*

del

del diametro A E, e dal punto A è tirata la A D ad angoli retti ſopra la AE, toccherà la A D il cerchio, e perchè una linea retta A D tocca il cerchio A B E, e dal toccamento, che è in A, è tirata una linea retta A B nel cerchio A B E, l'angolo D A B ſarà uguale all'angolo, che conſiſte nell'altra porzione del cerchio, cioè allo A E B, ma eſſendo l'angolo D A B uguale all'angolo C, ſarà l'angolo C uguale all'angolo A E B, onde nella data linea retta A B ſi è deſcritta la porzione del cerchio A E B, che piglia l'angolo A E B uguale all'angolo dato C, il che biſognava fare.

Cor. della 16. di queſ.

Per l'ant.

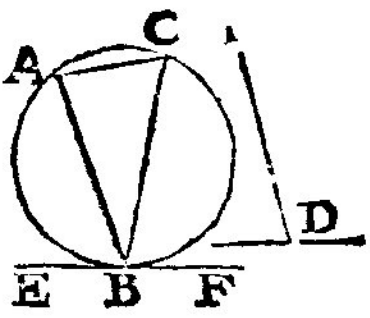
PROBLEMA VI.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Dal dato cerchio tagliare una porzione, che pigli l'angolo uguale all'angolo rettilineo dato.

Sia il cerchio dato A B C, ed il dato angolo rettilineo D. Biſogna dal cerchio A B C tagliare una porzione, che pigli l'angolo uguale al-

l'angolo D. Tirisi
17. *di quesf.* la linea retta E F, che tocchi il cerchio ABC nel punto B, e nella linea retta E F, e nel punto B, che è in



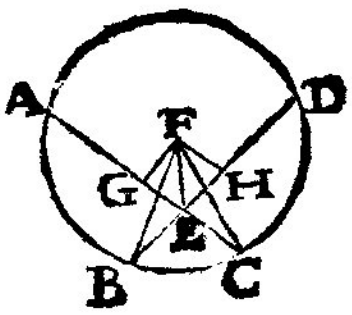
23. *del prim.* essa, constituiscasi l'angolo F B C uguale all'angolo D, e perchè la linea retta E F tocca il cerchio A B C nel punto B, e dal toccamento B è
32. *di quest.* tirata la B C, l' angolo F B C sarà uguale a quello, che consiste nell'altra porzione del cerchio, ma F B C è uguale all' angolo D, adunque eziandio l'angolo, che è nella porzione B A C sarà uguale all'angolo D, onde dal dato cerchio A B C si è tagliata una porzione B A C, che piglia l'angolo uguale all'angolo rettilineo dato D, il che bisognava fare.

TEOREMA XXIX.

PROPOSIZIONE XXXV.

Se nel cerchio due linee rette si taglino fra loro, il rettangolo contenuto dalle parti di una è uguale al rettangolo, che

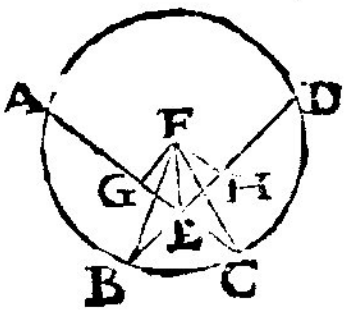
che ſi contiene dalle parti dell'altra.



Seghinſi fra loro le due linee rette A C, B D, nel cerchio A B C D nel punto E. Dico che il rettangolo contenuto dalle A E, E C è uguale a quello, che ſi contiene dalle D E, E B. Pigliſi il centro del cerchio A B C D che ſia F, e da F tirinſi le F G, F H, perpendicolari alle linee rette A C, D B, e giunganſi F B, F C, F E, perchè dunque una linea retta G F tirata per lo centro ſega una linea retta A C non tirata per lo centro ad angoli retti, la ſega ancora per mezzo, onde la A G è uguale alla G C, e perchè la linea retta A C è diviſa in parti uguali nel punto G, ed in parti diſuguali nello E, ſarà il rettangolo contenuto dalle AE, EC inſieme col quadrato di E G uguale al quadrato di G C, aggiungaſi il quadrato di G F comune, adunque il rettangolo A E C, inſieme co' quadrati di E G, G F, è uguale a' quadrati di C G, G F, ma il quadrato

1. *di queſ.* 12. *del prim.* 3. *di queſ.* 5. *del ſec.*

47. del prim.

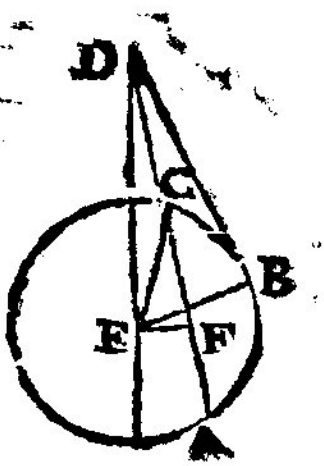


di F E è uguale a' quadrati di E G, G F, ed il quadrato di F C uguale a' quadrati di C G, G F, il rettangolo dunque A E C insieme col quadrato di F E è uguale al quadrato di F C, ma la C F è uguale alla F B, onde il rettangolo A E C insieme col quadrato di E F è uguale al quadrato di F B, e per la medesima ragione il rettangolo D E B insieme col quadrato di F E è uguale al quadrato di F B; adunque il rettangolo A E C insieme col quadrato di F E è uguale al rettangolo D E B insieme col quadrato di F E, traggasi il quadrato comune di F E, sarà il rettangolo rimanente A E C uguale al rimanente D E B, onde se nel cerchio due linee rette si taglino fra loro, il rettangolo contenuto dalle parti di una è uguale al rettangolo, che si contiene dalle parti dell' altra, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXX.

PROPOSIZIONE XXXVI.

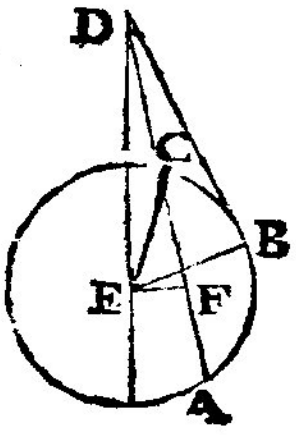
Se fuori del cerchio si pigli qualche punto, e da quello caggiano nel cerchio due linee rette, delle quali una seghi il cerchio, e l'altra lo tocchi, il rettangolo contenuto da tutta la linea che sega, e dalla parte presa di fuori fra 'l punto, e la circonferenza curva, è uguale al quadrato della linea, che tocca.



Pigliſi un punto D fuori del cerchio A B C, e da eſſo caggiano nel detto cerchio, due linee rette D C A, e D B, e la D C A ſeghi il cerchio A B C, e la D B lo tocchi. Dico che il rettangolo A D C è uguale al quadrato, che ſi fa dalla D B. Pigliſi il centro E, e da E tiriſi la E F perpen-

1. *di queſ.*

12. *del prim.* pendicolare alla A C, e giungansi E B, E C, E D, adunque l' angolo E F D è retto, e perchè una linea retta E F tirata per lo centro sega una linea retta A C non tirata per lo centro ad angoli retti, la segherà ancor per mezzo, onde la A F è uguale a F C, oltre a ciò, perchè la linea retta A C è segata per mezzo nel punto F, e se le aggiunge la C D, il rettangolo A D C insieme col quadrato di F C è uguale al quadrato di F D. Pongasi il quadrato di F E comune, adunque il rettangolo A D C insieme co' quadrati delle C F, F E è uguale a' quadrati delle D F, F E, ma il quadrato di D E è uguale a' quadrati di DF. FE perciocchè l'angolo E F D è retto, ed il quadrato di C E è uguale a' quadrati di C F, FE, adunque il rettangolo A D C insieme col quadrato di E C è uguale al quadrato di E D, e la C E è uguale alla E B, onde il rettangolo A D C insieme col quadrato di E B è uguale al quadrato di E D, ma al quadrato di ED sono uguali i qua-



3. *di quest.*

6. *del sec.*

47. *del prim.*

dra-

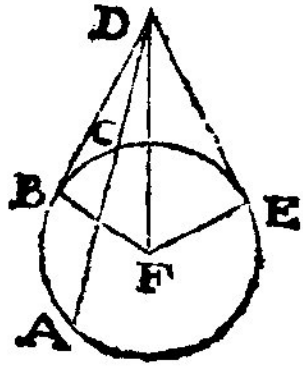
drati di EB,BD,perciocchè l'angolo EBD è retto, adunque il rettangolo A D C insieme col quadrato di E B è uguale a'quadrati di E B, B D, traggasi il quadrato comune di E B, il rimanente dunque rettangolo A D C sarà uguale al quadrato di D B, laonde se fuori del cerchio si pigli qualche punto, e le cose che seguono; il che bisognava dimostrare.

TEOREMA XXXI.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Se fuori del cerchio si pigli qualche punto, e da quello caggiano nel cerchio due linee rette, una delle quali seghi e l'altra s'accosti al cerchio, ed il rettangolo contenuto da tutta la linea che segha, e dalla parte presa di fuori fra 'l punto, e la circonferenza curva, sia uguale al quadrato della linea, che s'accosta al cerchio, la linea, che s' accosta, toccherà il cerchio.

Pigli-



Pigliſi fuori del cerchio A B C un punto D, e da quello caggiano nel cerchio due linee rette D C A, D B, e la D C A ſeghi il cerchio, e la D B s'accoſti ad eſſo, ed il rettangolo A D C ſia uguale al quadrato, che ſi fa dalla D B. Dico che la D B tocca il cerchio ABC. Tirifi una linea retta DE, che tocchi il cerchio A B C, e pigliſi il centro del cerchio A B C che ſia F, e giungaſi F E, F B, F D, adunque l'angolo F E D è retto, e perchè la D E tocca il cerchio A B C, e la D C A lo ſega, il rettangolo A D C, ſarà uguale al quadrato di D E, ma il rettangolo A D C ſi pone uguale al quadrato di DB, onde il quadrato di D E ſarà uguale al quadrato di D B, e perciò la linea D E è uguale alla D B, e la F E è uguale alla F B, adunque le due D E, E F ſono uguali alle due D B, B F; e la baſe loro F D è comune, onde l'angolo D E F è uguale all' angolo D B F, ma D E F è retto, adunque D B F ancora è retto, e prolungandoſi

17. di queſ. *1. di queſ. Per l'anſ.* *8. del prim.*

F B

FB è diametro, e quella, che dalla eſtremità del diametro del cerchio è tirata ad angoli retti, tocca il cerchio, adunque la DB tocca il cerchio A B C neceſſariamente. Dimoſtreraſſi ancora il medeſimo, ſe il centro ſia nella linea A C, la onde ſe fuori del cerchio ſi pigli qualche punto, e l'altre coſe che ſeguono, il che biſognava dimoſtrare.

Cor. della 16. di queſ.

FINE DEL TERZO LIBRO.

DEGLI

ELEMENTI D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO QUARTO

DIFFINIZIONI.

I.

LA figura rettilinea ſi dice eſſer deſcritta in un'altra figura rettilinea, quando ciaſcun angolo della figura deſcritta tocca ciaſcun lato di quella, nella quale eſſa è deſcritta.

II.

Similmente la figura ſi dice eſſer deſcritta intorno ad un'altra figura, quando ciaſcun

ſcun lato della figura deſcritta tocca ciaſcun angolo di quella, intorno alla quale eſſa è deſcritta.

III.

La figura rettilinea ſi dice eſſer deſcritta nel cerchio, quando ciaſcun angolo della figura deſcritta tocca la circonferenza del cerchio.

IV.

La figura rettilinea ſi dice eſſer deſcritta intorno al cerchio, quando ciaſcun lato della figura deſcritta tocca la circonferenza del cerchio.

V.

Il cerchio parimente ſi dice eſſer deſcritto in una figura rettilinea, quando la circonferenza del cerchio tocca ciaſcun lato della figura, nella quale egli è deſcritto.

VI.

Il cerchio ſi dice eſſer deſcritto intorno ad una figura rettilinea, quando la circonferenza del cerchio tocca ciaſcun angolo della figura, intorno alla quale egli è deſcritto.

VII.

La linea retta ſi dice adattarſi nel cerchio, quando l'eſtremità ſue arrivano ſino alla circonferenza del cerchio.

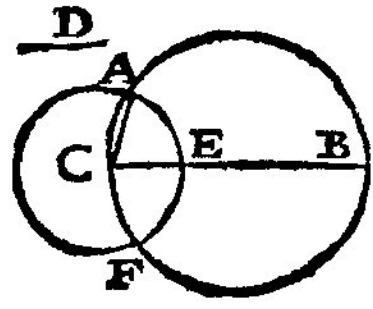
PROBLEMA I.

PROPOSIZIONE I.

Nel dato cerchio adattare una retta linea uguale ad un' altra data, la quale non ſia maggiore del diametro.

Sia il cerchio dato A B C, e la linea retta data D, non maggiore del diametro del cerchio, biſogna adat-

adattare nel cerchio A B C la linea retta uguale alla D. Tirisi il diametro del cerchio A B C, che sia B C, e se B C è uguale alla D, sarà fatto ciò che si proponeva, perciocchè nel cerchio ABC si sarà adattata la CB uguale alla linea retta D; ma se non è uguale, la B C è maggiore della D, pongasi la C E uguale alla D, e dal centro C coll' intervallo C E de-



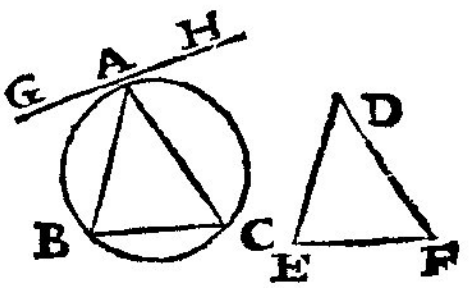
3. *del prim.* scrivasi il cerchio A E F, e giungasi C A, perchè dunque il punto C è centro del cerchio A E F, la C A sarà uguale alla C E, ma la D è

15. *diff del pr.* uguale alla C E, adunque eziandio la D sarà uguale alla A C, onde nel dato cerchio A B C si è adattata la A C uguale alla data linea retta D, non maggiore del diametro del cerchio, il che bisognava fare.

PROBLEMA II.

PROPOSIZIONE II.

Nel dato cerchio descrivere un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato.



Sia il dato cerchio A B C, ed il triangolo dato D E F. Bisogna descrivere nel cerchio A B C un triangolo equiangolo al triangolo D E F. Tirisi una linea retta G A H, che tocchi il cerchio A B C nel punto A e nella linea retta A H, e nel punto in essa A, constituiscasi l' angolo H A C uguale all'angolo D E F. Poi nella linea retta A G, e nel punto in essa A constituiscasi l' angolo G A B uguale all' angolo D F E, e giungasi B C, perche dunque una linea retta H A G tocca il cerchio A B C, e dal toccamento è tirata nel cerchio la A C, l' angolo H A C sarà uguale a quello, che è nell'altra porzione del cerchio, cioè all' angolo A B C, ma l' angolo H A C è uguale all' angolo D E F, adunque l' angolo A B C è uguale all' angolo D E F, e per la medesima ragione l' angolo A C B è uguale all' angolo D F E; ed il rimanente B A C sarà uguale al rimanente E D F, adunque il triangolo A B C è equiangolo al triangolo D E F, ed è descritto nel cer-

17. *del ter.*

23. *del prim.*

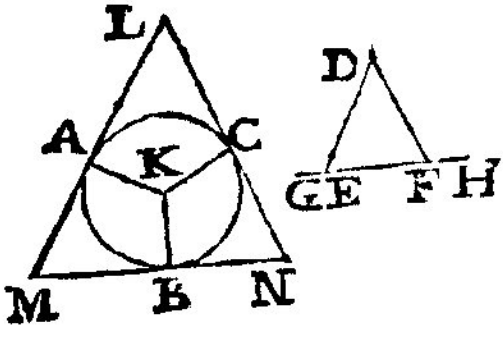
32. *del ter.*

cerchio A B C, onde nel dato cerchio ſi è deſcritto un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato, il che biſognava fare.

PROBLEMA III.

PROPOSIZIONE III.

D'intorno al dato cerchio deſcrivere un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato.



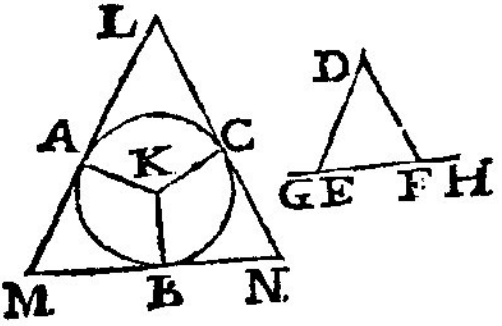
Sia il dato cerchio A B C, ed il triangolo dato D E F. Biſogna deſcrivere d' intorno al cerchio A B C un triangolo equiangolo al triangolo D E F. Prolunghiſi da ciaſcuna parte la E F ne' punti H, G, e pigliſi K centro del cerchio A B C, e la linea retta K B tiriſi in qualſivoglia modo, e conſtituiſcaſi nella linea retta K B, e nel punto, che è in eſſa, K, l' angolo B K A uguale all' angolo D E G, e l' angolo B K C uguale all'

1. *del ter.*

23. *del prim.*

17. *del ter.*

all' angolo DFH, e per gli punti A, B C, tirinsi le linee rette L A M, M B N, N C L,



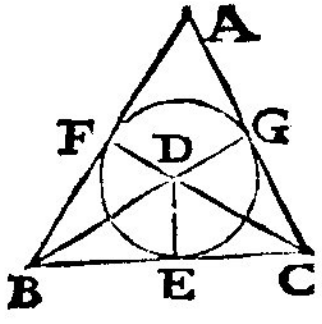
che tocchino il cerchio A B C, perchè dunque L M, M N, N L, toccano il cerchio A B C ne' punti A, B, C, e dal centro K a' punti A, B, C si tirano le linee rette K A, K B, K C, saranno gli angoli a' punti A, B, C retti, e perchè i quattro angoli del quadrilatero A M B K sono uguali a quattro retti, dividendosi in due triangoli, gli angoli de' quali K A M, K B M sono retti, i rimanenti A K B, A M B saranno uguali a due retti, e gli angoli D F G, D E F sono uguali a due retti; gli angoli dunque A K B, A M B sono uguali a gli angoli D E G, D E F, de' quali A K B è uguale a D E G, il rimanente dunque A M B sarà uguale al rimanente D E F; dimostrerassi parimente, che l' angolo C N B è uguale all' angolo D F E, adunque il rimanente M L N è uguale al rimanente E D F, ed il triangolo L M N è equiangolo al triangolo D E F, ed è 18. *del ter.*

descritto intorno al cerchio A B C; onde d'intorno al dato cerchio si è descritto un triangolo equiangolo ad un altro triangolo dato, il che bisognava fare.

PROBLEMA IV.

PROPOSIZIONE IV.

Nel dato triangolo descrivere un cerchio.



Sia il triangolo dato A B C. bisogna nel triangolo A B C descrivere un cerchio. Seghinsi gli angoli A B C, B C A per mezzo colle linee rette B D, C D, le quali concorrano insieme nel punto D, e dal punto D tirinsi le D E, DF, D G perpendicolari alle linee rette A B, B C, C A, e perchè l'angolo A B D è uguale all' angolo C B D, ed è l' angolo retto B E D uguale al retto B F D, saranno due triangoli E B D, D B F ch' hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato B D comune all' uno, e all' altro

9. del primo.

12. del primo.

che

che è ſottopoſto ad un degli angoli uguali, adunque ſaranno gli altri lati uguali a gli altri lati, e ſarà D E uguale a D F, e per la medeſima ragione D G ſarà uguale a D F, onde D E è uguale a D G, adunque tre linee rette D E, D F, D G ſono fra loro uguali, e perciò deſcrivendoſi il cerchio dal centro D coll'intervallo di una di eſſe D E, D F DG, paſſerà anche per gli altri punti, e toccherà le linee rette A B, BC, C A, eſſendo gli angoli E,F,G retti, perciocchè ſe le ſegherà, quella che è tirata dalla eſtremità del diametro del cerchio ad angoli retti caderà dentro al cerchio, che è inconveniente, adunque il cerchio deſcritto dal centro D coll'intervallo di una di eſſe D E, D F, D G non ſegherà le linee rette A B, B C, C A; adunque le toccherà, e ſarà il cerchio deſcritto nel triangolo A B C, laonde nel dato triangolo ſi è deſcritto il cerchio, il che biſognava fare.

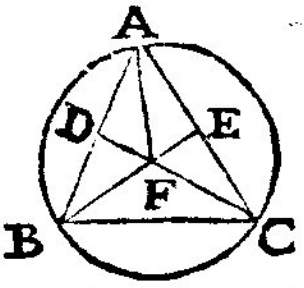
26. *del prim.*

16. *del terzo.*

PROBLEMA V.

PROPOSIZIONE V.

D'intorno al dato triangolo deſcrivere un cerchio.



Sia il triangolo dato A B C, biſogna deſcrivere un cerchio d' intorno al triangolo dato A B C Seghinſi le AB. AC per mezzo ne' punti D, E, e da' D, E tirinſi le D F, E F ad angoli retti ſopra le B A, A C, le quali o concorreranno dentro al triangolo A B C, ovvero nella linea retta B C, o fuori di eſſa; concorrano dentro al triangolo nel punto F, e giungaſi B F, F C, F A. Perchè dunque la A D è uguale alla D B, e la D F è comune, e ad angoli retti, ſarà la baſe A F uguale alla baſe F B; ſi dimoſtrerà parimente, che la C F è uguale alla F A, onde la B F ancora è uguale alla F C, adunque le F A, F B, F C ſono fra loro uguali, e deſcrivendoſi un cerchio dal centro F coll' intervallo di una di eſſe F A, F B, F C, paſſerà anche per gli altri punti, e ſarà deſcritto il cerchio d' intorno al triangolo A B C, deſcrivaſi come A B C, il che biſognava fare.

10. del primo.

11. del primo.

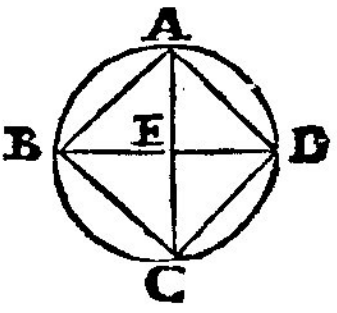
4. del primo.

PRO-

PROBLEMA VI.

PROPOSIZIONE VI.

Nel dato cerchio descrivere un quadrato.



Sia il dato cerchio A B C D, bisogna in esso descrivere un quadrato. Tirinsi AC, BD diametri del cerchio A B C D ad angoli retti fra loro, e giungasi AB, B C, C D, D A, perchè dunque la B E è uguale alla E D, conciossiacosachè il punto E sia centro, e la E A è comune, e ad angoli retti, sarà la base B A uguale alla base A D, e per la medesima ragione l' una e l' altra di esse B C, C D è uguale all' una e l' altra B A, A D, il quadrilatero dunque A B C D è equilatero. Dico che ancora è rettangolo, perciocchè essendo la linea retta B D diametro del cerchio A B C D, sarà B A D mezzo cerchio, onde l'angolo B A D è retto, e per la medesima ragione ciascuno di essi A B C, B C D, C D A è retto, adunque il quadrilatero ABCD è rettangolo, e si è dimostrato, che

4 del prim.

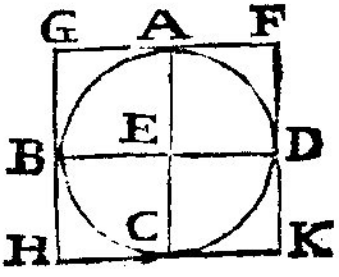
31 del terzo.

to, che è equilatero, onde sarà necessariamente quadrato, ed è descritto nel cerchio A B C D, adunque nel dato cerchio si è descritto un quadrato, il che bisognava fare.

PROBLEMA VII.

PROPOSIZIONE VII.

Dintorno al dato cerchio descrivere un quadrato.



Sia il cerchio dato A B C D, bisogna descrivere un quadrato dintorno ad esso. Tirinsi due diametri del cerchio A B C D, cioè A C, B D ad angoli retti fra loro, e per gli punti A B C D tirinsi le F G, G H, H K, K F, che tocchino il cerchio A B C D. perchè dunque la F G tocca il cerchio A B C D, e dal centro E al toccamento, che è nell' A, si tira la E A, gli angoli che sono ad A saranno retti, per la medesima ragione gli angoli ne' punti B, C, D sono ancora retti, e perchè l' angolo A E B è retto, ed è retto parimente lo E B G, sarà

18. del terzo.

sarà la GH paralella alla AC, e per la medesima ragione la AC, è paralella alla FK, dimostreremo similmente, che l'una e l'altra di esse GF, HK è paralella alla BED, e perciò la GF è paralella alla HK. sono dunque GK, GC, AK, FB, BK, paralellogrammi, onde la GF, è uguale alla HK, e la GH, alla FK, e perchè la AC è uguale alla BD, ma la AC è uguale all' una e l'altra di esse GH, FK, e la BD, uguale all' una e l' altra GF, HK, sarà l'una e l'altra ancora GH, FK uguale all' una e l' altra, GF, HK, il quadrilatero dunque FGHK è equilatero. Dico che eziandio è rettangolo, perciocchè essendo GBEA, paralellogramo, ed essendo l'angolo AEB, retto, sarà AGB ancora retto; dimostreremo parimente che gli angoli ne' punti H, K, F sono retti, adunque il quadrilatero FGHK, è rettangolo, e si è dimostrato che è equilatero, onde è necessario che sia quadrato, ed è descritto dintorno al cerchio ABCD, adunque dintorno al dato cerchio si è descritto il quadrato, il che bisognava fare.

28 *del prim.*

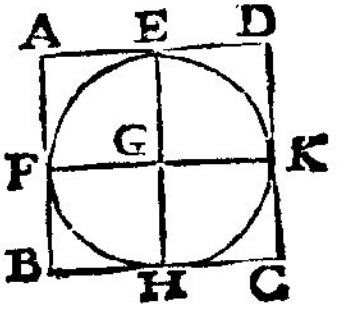
34 *del prim.*

34 *del prim.*

PROBLEMA VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Nel dato quadrato descrivere un cerchio.



Sia il dato quadrato A B C D, bisogna in esso descrivere un cerchio. Seghisi l'una, e l' altra di esse A B, A D per mezzo ne' punti F E, e per E tirisi la E H paralella ad una di esse AB, CD, e per F tirisi la F K paralella ad una delle A D, B C, adunque ciascuno di essi A K, K B, A H, H D, A G, G C, B G, G D, è paralellogrammo, ed i lati loro opposti sono uguali, e perchè la D A è uguale alla A B, e la A E è la metà della A D, e la A F la metà della A B, sarà la A E uguale alla A F, onde i lati opposti sono ancora uguali, e perciò la F G è uguale alla G E; dimostreremo similmente che l' una, e l' altra di esse G H, G K, è uguale all' una, e l'altr F G, G E, le quattro dunque G E, G F, G H, G K, sono fra loro uguali.

10 *del prim.*

31 *del prim.*

24 *del prim.*

onde

onde descrivendosi un cerchio dal centro G coll' intervallo di una di esse G E, G F, G H, G K, passerà ancora per gli altri punti, e toccherà le linee rette A B, B C, C D, D A, perciocchè gli angoli ne' pūti E, F, H, K, sono retti, che se il cerchio seghera le linee rette A B, B C, C D, D A, quella che dall'estremità del diametro del cerchio è tirata ad angoli retti caderà dentro al cerchio, il che è inconveniente, adunque il cerchio descritto dal centro G coll' intervallo di una di esse G E, G F, G H, G K, non segherà le linee rette A B, B C, C D, D A, perciò necessariamente le toccherà, e sarà descritto nel quadrato A B C D, adunque nel dato quadrato si è descritto un cerchio, il che bisognava fare.

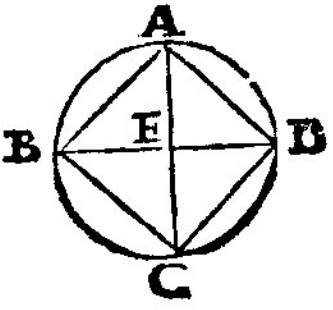
16 del terzo.

PROBLEMA IV.

PROPOSIZIONE IV.

Dintorno al dato quadrato descrivere un cerchio.

Sia il dato quadrato A B C D, bisogna dintorno ad esso descrivere un cerchio, Giunganſi A C, B D, che si seghino fra loro nel punto E,



e perchè la D A, è uguale alla A B, e la A C è comune, le due D A, A C, sono uguali alle due B A, A C, e la base D C è uguale alla base C B, onde l'angolo D A C sarà uguale all' angolo B A C, l' angolo dunque D A B, e segato per mezzo dalla linea retta A C; dimostreremo ancora, che ciascun angolo A B C, B C D, C D A, è segato per mezzo dalle linee rette A C, B D, e perchè l' angolo D A B è uguale all' angolo A B C, ed è l' angolo E A B, la metà dell' angolo D A B, e l' angolo E B A, dell' angolo A B C, sarà l' angolo E A B uguale all' angolo E B A, onde ancora il lato E A è uguale al lato E B, dimostreremo similmente, che l' una, e l' altra delle linee rette E C, E D è uguale all' una e l' altra di esse E A, E B, adunque le quattro linee rette E A, E B, E C, E D, sono fra loro uguali, e descrivendosi un cerchio dal centro E col. l'intervallo di una di esse E A, E B, E C, E D, passerà anche per gli altri punti, e sarà descritto dintorno al quadrato A B C D, descrivasi come

8 del prim

6 del prim.

ABCD

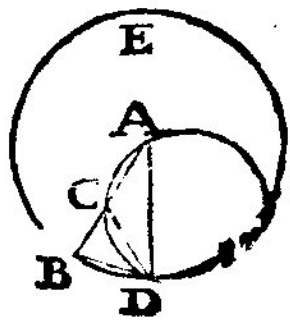
ABCD adunque dintorno al dato quadrato ſi è deſcritto un cerchio, il che biſognava fare.

PROBLEMA X.

PROPOSIZIONE X.

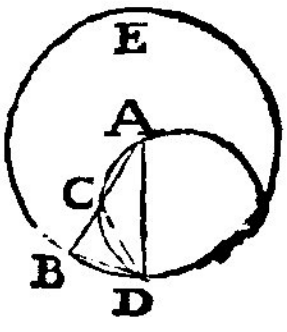
Conſtituire un triangolo equicrure, che abbia amendue gli angoli, che ſono alla baſe, doppj del rimanente.

Sia una linea retta AB, e ſeghiſi nel pũto C di modo che il rettangolo contenuto dalle AB BC ſia uguale al quadrato che ſi deſcrive da CA, e dal centro A coll'intervallo AB deſcrivaſi il cerchio BDE, e ſi adatti nel cerchio BDE una linea retta BD, uguale alla AC, che non ſarà maggiore del diametro del cerchio BDE, e giunte DA, DC deſcrivaſi il cerchio ACD d'intorno al triangolo ADC. adunque perchè il rettangolo ABC è uguale al quadrato, che ſi fa dalla AC, ed è la AC uguale alla BD, ſarà il ret-



II *del ſec.*

I *di queſ.*



tangolo ABC uguale al quadrato di B D; e perchè fuori del cerchio A C D si è preso un punto B, e dal B caggiono nel cerchio A C D due linee rette B C A, B D, l' una delle quali sega, e l'altra cade sopra il cerchio, ed il rettangolo ABC è uguale al quadrato di D B, la linea retta D B toccherà il cerchio A C D, e perchè B D tocca, e dal toccamento, che si fa al D, è tirata la D C, l'angolo B D C sarà uguale a quello, che è constituito nell'altra porzione del cerchio, cioè all' angolo D A C, ed essendo l'angolo B D C uguale all' angolo D A C, pongasi l' angolo C D A comune, adunque tutto B D A è uguale a' due angoli C D A, D A C, ma l' angolo esteriore B C D è uguale agli angoli C D A, D A C, laonde B D A ancora è uguale a B C D, ma l' angolo B D A è uguale all' angolo C B D, perciocchè il lato A D è uguale al lato A B, adunque D B A sarà uguale a B C D, e gli tre angoli B D A, D B A, B C D, saranno fra loro uguali, e perchè l' angolo D B C è uguale all' angolo B C D,

ultim. del ter. *32 del. terzo.* *5 del prim.*

sarà

ſarà il lato B D uguale al lato D C, ſa B D è poſta uguale a C A. adunque eziandio A C è uguale a C D, e l' angolo C D A all' angolo D A C, onde gli angoli C D A, D A C ſono doppj dell' angolo D A C, e l' angolo B C D è uguale agli angoli C D A, D A C, adunque B C D è doppio del D A C, ma B C D è uguale all' uno e l' altro di eſſi B D A, D B A, e perciò l' uno e l' altro B D A, D B A è doppio del D A B, laonde ſi è conſtituito un triangolo equicrure, che ha amendue gli angoli, che ſono alla baſe, doppj del rimanente, il che biſognava fare. *6 del prim.*

PROBLEMA XI.

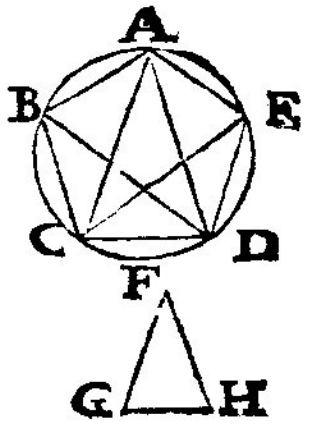
PROPOSIZIONE XI.

Nel dato cerchio deſcrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato cerchio A B C D E, biſogna in eſſo deſcrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo. Facciaſi un triãgolo equicrure F G H, che abbia ciaſcuno degli angoli G, H doppio dell' angolo F, e deſcrivaſi *Per l' ant.*

nel

nel cerchio A B C D E il triangolo A C D equiangolo al triangolo F G H, di modo che C A D sia uguale all' angolo F, e ciascuno di essi A C D, C D A sia uguale a ciascuno degli angoli G, H, adunque l' uno, e l' altro A C D, C D A è doppio dell' angolo C A D; seghisi ciascuno di essi A C D, C D A per mezzo colle linee rette C E, D B, e giungansi A B, B C, C D, D E, E A, perchè dunque ciascuno di essi A C D, C D A è doppio dell' angolo C A D, e sono segati per mezzo colle linee rette C E, D B, i cinque angoli D A C, A C E, E C D, C D B, B D A sono fra loro uguali, e gli angoli uguali si fermano sopra le circonferenze uguali, adunque le cinque circonferenze A B, B C, C D, D E, E A sono uguali fra loro. Ma le linee rette uguali sono poste sotto l'uguali circonferenze, onde le cinque linee rette A B, B C, C D, D E, E A fra loro sono uguali, ed il pentagono A B C D E è equilatero. Dico che è ancora equiangolo; perchè essendo la cir-



2 *di quest.*

9 *del prim.*

26 *del ter.*

29 *del ter.*

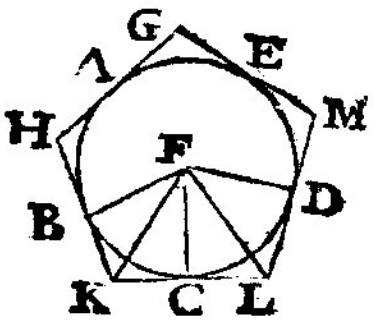
circonferenza A B uguale alla circonferenza D E, pongasi B C D comune, sarà tutta la circonferenza A B C D uguale a tutta la circonferenza E D C B, ma sopra la circonferenza A B C D si ferma l'angolo A E D. e sopra la circonferenza E D C B si ferma l'angolo B A E, adunque l'angolo B A E è uguale all'angolo A E D, e per la medesima ragione ciascuno degli angoli A B C, B C D, C D E è uguale a ciascuno di essi B A E, A E D, onde il pentagono A B C D E è equiangolo, e si è dimostrato essere equilatero, adunque nel dato cerchio si è descritto un pentagono equilatero, ed equiãgolo, il che bisognava fare.

PROBLEMA XII.

PROPOSIZIONE XII.

Dintorno al dato cerchio descrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato cerchio A B C D E, bisogna dintorno al cerchio A B C D E descrivere il pentagono equilatero, ed equiangolo. Intendansi i punti degli angoli del pẽtagono descrit-



Per l'ant. scritto nel cerchio ABCDE, di modo che le circonferenze A B, B C, C D, D E, E A siano fra loro uguali, e per i punti A, B, C D, E, tirinsi le linee GH HK, K L, L M, MG, che tocchino il cerchio, e preso il centro del cerchio A B C D E che sia F giunganſi *17. del terzo.* F B, F K, F C, F L, F D, e perchè la linea retta K L tocca il cerchio A B C D E nel punto C, e dal centro F al toccamento, che è al C, ſi è tirata la linea retta F C, ſarà la F C perpendicolare alla K L, gli angoli *18 del terzo,* dunque al C amendue ſono retti, e per la medeſima ragione gli angoli B D, ſono ancora retti, e perchè l'angolo F C K è retto, il quadrato di F K è uguale a' quadrati di F C, C K, e parimente il quadrato di *47 del prim.* F K, è uguale a' quadrati di F B, B K, onde i quadrati di F C, C K, ſono uguali a' quadrati di F B, B K, de' quali il quadrato di F C è uguale al quadrato di F B, adunque il quadrato rimanente di C K ſarà uguale al quadrato di B K, e però la B K, è uguale alla C K, e perchè F B, è

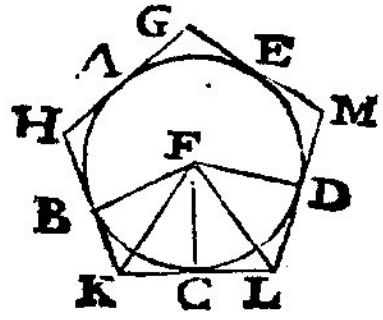
ugua-

uguale alla F C, ed F K è comune, le due B F, F K ſono uguali alle due C F, F K, e la baſe B K, è uguale alla baſe K C, l' angolo dunque, B F K, è uguale all' angolo K F C, e l' angolo B K F all' angolo F K C, onde l'angolo B F C è doppio dell' angolo K F C, e l' angolo B K C, doppio dell' angolo F K C, e per la medeſima ragione l' angolo C F D è doppio dell'angolo C F L, e l'angolo C L D doppio dell' angolo C L F, e perchè la circonferenza B C, è uguale alla circonferenza C D, l'angolo B F C, ſarà uguale all' angolo C F D, ed è l'angolo B F C doppio dell'angolo K F C, e l'angolo D F C, doppio dell'angolo L F C, onde l'angolo K F C, è uguale all' angolo C F L, adunque ſono due triangoli F K C, F L C, che hanno due angoli uguali a due angoli l' uno all' altro, ed un lato uguale ad un lato, che ad eſſi è comune F C, laonde averanno gli altri lati uguali agli altri lati, e l' angolo rimanente uguale al rimanente, adunque la linea retta K C è uguale alla retta C L, e l'angolo F K C, all'angolo F L C, e perchè K C è uguale a C L, ſarà la K L doppia della K C, e per la medeſi-

8 *del prim.*

27 *del terzo.*

26 *del prim.*



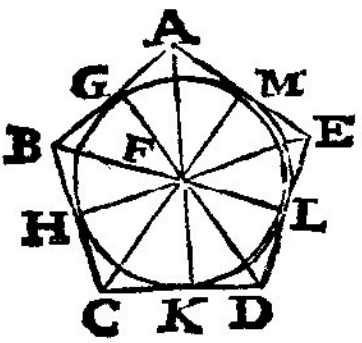
desima ragione si dimostrerà che la H K è doppia della B K, oltre a ciò perchè la B K si è dimostrata uguale alla K C, e la K L è doppia della K C, e la H K doppia della B K, sarà la H K, uguale alla K L, e similmente ciascheduna di esse G H, G M, M L, si dimostrerà uguale all' una, e l' altra H K, K L, adunque il pentagono G H K L M è equilatero. Dico che eziandio è equiangolo, perciocchè essendo l' angolo F K C uguale all' angolo F L C, e si è dimostrato, che l'angolo H K L è doppio dell' angolo F K C, e l' angolo K L M doppio dell' angolo F L C, sarà anche l' angolo H K L uguale all' angolo K L M, e parimente si dimostrerà, che ciascuno di essi K H G, H G M, G M L è uguale ad amendue H K, L K, L M. adunque i cinque angoli G H K, H K L, K L M, L M G, M G H, sono fra loro uguali, e però il pentagono G H K L M è equiangolo, e si è dimostrato anche, che è equilatero, ed è descritto dintorno al cerchio A B C D E, il che bisognava fare.

PRO-

PROBLEMA XIII.

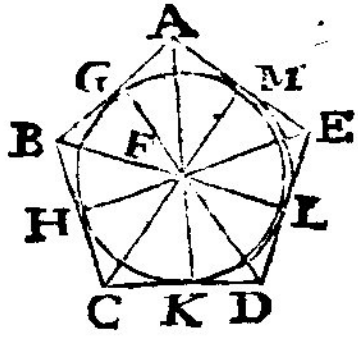
PROPOSIZIONE XIII.

Nel dato pentagono, che ſia equilatero, ed equiangolo deſcrivere un cerchio.



Sia il dato pentagono equilatero, ed equiangolo A B C D E, biſogna nel pentagono A B C D E deſcrive un cerchio. Seghiſi l' uno, e l' altro angolo B C D, C D E per mezzo colle linee rette C F, D F, e dal punto F, nel quale convergono fra loro C F, D F, tirinſi le linee rette F B, F A, F E. perchè dunque la B C è uguale alla C D, e la C F comune, le due BC, C F ſono uguali alle due DC, C F, e l' angolo B C F è uguale all' angolo D C F onde la baſe B F è uguale alla baſe F D, ed il triangolo B F C è uguale al triangolo D C F, e gli altri angoli agli altri angoli, a' quali ſono ſottopoſti i lati uguali, ſarà dunque l'angolo C B F uguale all' angolo C D F, e perchè l'angolo

4 del prim.



lo C D E è doppio dell'angolo C D F, e l' angolo C D E è uguale all' angolo A B C, e l' angolo C D F uguale all'angolo C B F, sarà l'angolo C B A doppio dell'angolo C B F, e però l' angolo A B F è uguale all' angolo F B C, adunque l' angolo A B C è diviso per mezzo dalla linea retta B F ; si dimostrerà ancora che ciascuno degli angoli B A E, A E D, è diviso per mezzo dalle linee rette A F, F E, onde dal punto F tirinsi alle linee rette A B, B C, C D, D E, E A le perpendicolari F G, F H, F K, F L, F M, e perchè l' angolo H C F è uguale all' angolo K C F, ed è il retto F H C uguale al retto F K C, saranno i due triangoli F H C, F K C, che anno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, cioè F C comune a ciascuno di essi, che è sottoposto ad uno degli angoli uguali, averanno dunque gli altri lati uguali agli altri lati, e sarà la perpendicolare F H uguale alla perpendicolare F K. Si dimostrerà eziandio, che ciascuna di esse F L, F M, F G

26 del prim.

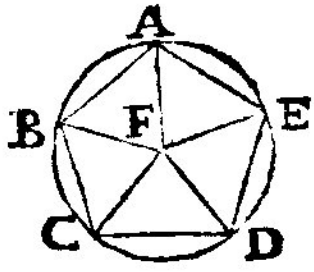
F G è uguale all' una, e l'altra F H; F K, adunque le cinque linee rette F G, F H, F K, F L, F M, ſono fra loro uguali, e però deſcrivendo ſi un cerchio dal centro F coll' intervallo di una di eſſe F G, F H, F K, F L, F M, paſſerà eziandio per gli altri punti, e toccherà le linee rette A B, B C, C D, D E, E A, perciocchè gli angoli G, H, K, L, M, ſono retti, imperciocchè ſe non le toccando le ſegherà, quella, che è tirata dalla eſtremità del diametro del cerchio ad angoli retti, caderà dentro al cerchio, il che ſi è dimoſtrato eſſere inconveniente, onde è neceſſario che le tocchi, deſcrivaſi come G H K L M, adunque nel dato pentagono, che è equilatero, ed equiangolo ſi è deſcritto un cerchio, il che biſognava fare.

PROBLEMA XIV.

PROPOSIZIONE XIV.

Dintorno al dato pentagono, che ſia equilatero, ed equiangolo deſcrivere un cerchio.

Sia il dato pentagono equilatero ed equiangolo A B C D E, biſogna din-



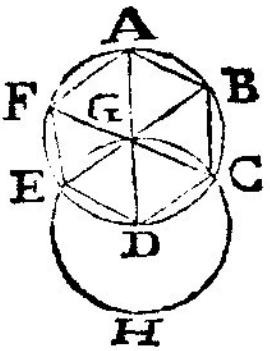
dintorno al pentagono A B C D E descrivere un cerchio. Seghisi ciascuno degli angoli B C D, C D E per mezzo colle linee rette C F, F D, e dal punto F, nel quale convengono le linee rette, tirinsi le F B, F A, F E, a' punti B, A, E, come nell' antecedente, si dimostrerà che ciascuno degli angoli C B A, B A E, A E D, è segato per mezzo dalle linee rette B F, F A, F E, e perchè l' angolo B C D è uguale all' angolo C D E, e l' angolo F C D è la metà dell' angolo B C D, e l' angolo C D F la metà dell' angolo C D E, sarà l' angolo F C D uguale all' angolo C D F, onde il lato C F è uguale al lato F D, si dimostrerà parimente, che ciascuna F B, F C, F E è uguale a ciascuna di esse F C, F D, adunque le cinque linee rette F A, F B, F C, F D, F E, sono fra loro uguali, onde dal centro F coll' intervallo di una di esse F A, F B, F C F D, F E, descrivendosi un cerchio passerà eziandio per gli altri punti, e sarà descritto dintorno al pentangono A B C D E, che è equilatero, ed equiangolo, descrivasi, e sia

A B

ABCDE, adunque dintorno al dato pentagono equilatero, ed equiangolo si è descritto un cerchio, il che bisognava fare.

PROBLEMA XV.
PROPOSIZIONE XV.

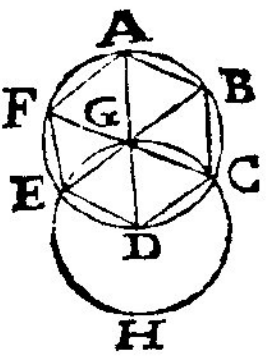
Nel dato cerchio descrivere un essagono equilatero, ed equiangolo.



Sia il dato cerchio ABCDEF, bisogna nel cerchio ABCDEF, descrivere un essagono equilatero, ed equiãgolo. Tirisi il diametro AD del cerchio ABCDEF, e pigliſi il centro del cerchio che ſia G, e dal centro D coll'intervallo DG, descrivaſi il cerchio EGCH, e giunte EG, CG, prolunghinſi ne' punti B, F, e giunganſi AB, BC, CD, DE, EF, FA, Dico che l'eſſagono ABCDEF è equilatero, ed equiangolo, perciocchè eſſendo il punto G centro del cerchio ABCDEF, la GE ſarà uguale alla GD, e perchè D è centro del cerchio EGCH la DE ſarà

x del terzo.

tà uguale alla D G. ma la G E si è dimostrata uguale alla G, D adunque la G E è uguale alla E D; onde il triangolo E G D è equilatero, e però i tre angoli di esso E G D, G D E, D E G sono uguali fra loro, perciocchè gli angoli, che sono alla base de' triangoli equicruri sono uguali, e sono i tre angoli del triangolo uguali a due retti, adunque l'angolo E G D è la terza parte di due retti, dimostreremo anche che D G C è la terza parte di due retti, e perchè la linea C G stando sopra la retta E B fa gli angoli, che sono da' lati E G C, C G B uguali a due retti, sarà il rimanente ancora C G B la terza parte di due retti, onde gli angoli E G D, D G C, C G B sono fra loro uguali, e perciò gli angoli che sono alla cima di essi B G A, A G F, F G E sono uguali agli angoli E G D, D G C, C G B, i sei angoli dunque E G D, D G C, C G B, B G A, A G F, F G E sono fra loro uguali, ma gli angoli uguali si fermano sopra le circonferenze uguali, adunque le sei circonferenze A B, B C, C D, D E E F



5 del prim.

32 del prim.

13 del prim.

15 del prim.

26 del terzo.

E F, F A, ſono uguali fra loro, ma le linee rette uguali ſono ſottopoſte alle uguali circonferenze, onde è neceſſario, che le ſei linee rette ſiano fra loro uguali, e però l'eſſagono A B C D E F è equilatero. Dico che è ancora equiangolo, perciocchè eſſendo la circonferenza A F uguale alla circonferenza E D, pongaſi la circonferenza A B C D comune, tutta dunque la circonferenza F A B C D è uguale a tutta la circonferenza E D C B A, e l'angolo F E D ſi ferma ſopra la circonferenza F A B C D, e l'angolo A F E ſopra la circonferenza E D C B A, adunque l'angolo A F E è uguale all'angolo D E F, ſi dimoſtreranno ancora gli altri angoli dell'eſſagono A B C D E F uguali all'uno, e l'altro di eſſi A F E, F E D, onde l'eſſagono A B C D E F è equiangolo, e ſi è dimoſtrato, che è equilatero, ed è deſcritto nel cerchio A B C D E F, adunque nel dato cerchio ſi è deſcritto un eſſagono equilatero ed equiangolo, il che biſognava fare.

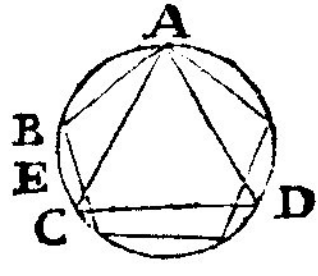
COROLLARIO.

Di qui è chiaro, che il lato

dell'eſſagono è uguale al ſemidiametro del cerchio, e ſe per gli punti A B C D E F ſi tireranno linee rette, che tocchino il cerchio, ſarà dintorno al cerchio deſcritto un eſſagono equilatero, ed equiangolo, come ſi è detto nel pentagono; e ſimilmente nel dato eſſagono deſcriveremo un cerchio di dentro, e di fuori il che biſognava fare.

PROBLEMA XVI.
PROPOSIZIONE XVI.

Nel dato cerchio deſcrivere un quindecagono equilatero, ed equiangolo.



Sia il dato cerchio A B C D, biſogna nel cerchio ABCD, deſcrivere un quindecagono equilatero, e equiangolo. Adattiſi nel cerchio A B C D il lato

lato AC del triangolo equilatero descritto in esso, ed il lato AB del pentagono equilatero. di qual parti dunque il cerchio ABCD è 15., delle medesime la circonferenza ABC, essendo la terza parte del cerchio, sarà 5. e la circonferenza AB, che è la quinta parte sarà 3. la rimanente dunque BC è 2 seghisi la BC per mezzo nel punto E, onde l'una, e l'altra delle circonferenze BE, EC, è la quintadecima parte del cerchio ABCD, se dunque congiungendo BE, EC accomoderemo linee rette uguali ad esse continuamente nel cerchio ABCD, sarà descritto in esso un quindecagono equilatero, e equiangolo, il che bisognava fare.

Somigliantemente dalle cose dette nel pentagono, se per le divisioni del cerchio tireremo linee rette, che lo tocchino, si descriverà dintorno ad esso un quindecagono equilatero, e equiangolo, oltre a questo nel dato quindecagono equilatero, e equiangolo descriveremo un cerchio di dentro, e di fuori.

FINE DEL QUARTO LIBRO.

DEGLI

ELEMENTI D' EUCLIDE

TRADOTTI IN VOLGARE

LIBRO QUINTO

DIFFINIZIONI.

I.

LA grandezza è parte della grandezza, cioè la minore della maggiore, quando la minore misura la maggiore.

II.

La grandezza maggiore è multiplice della minore, quãdo la minore misura la maggiore.

III.

La proporzione è una certa convenienza di due grandezze del medesimo genere in quanto appartiene alla quantità.

IV.

Le grandezze si dicono aver proporzione fra loro, le quali multiplicate si possono avanzare.

V.

Le grandezze si dicono essere nella medesima proporzione, la prima alla seconda, e la terza alla quarta, quando le ugualmente multiplici della prima, e della terza, ovvero insieme avanzano le ugualmẽte multiplici della seconda, e della quarta secondo qualsivoglia multiplicazione, ovvero insieme le pareggiano

ovve-

ovvero insieme sono avanzate da loro.

VI.

Le grandezze, che hanno la medesima proporzione si chiamino proporzionali.

VII.

Quando delle ugualmente multiplici, la multiplice della prima avanzerà la multiplice della seconda, e la multiplice della terza non avanzerà la multiplice della quarta, allora la prima alla seconda si dirà aver maggior proporzione, che la terza alla quarta.

VIII.

L'analogia è una somiglianza di proporzioni.

IX.

L'Analogia consiste almeno in tre termini.

X.

Quando tre grandezze ſono proporzionali, la prima alla terza ſi dirà aver doppia proporzione di quella, che ha alla ſeconda.

XI.

Quando quattro grandezze ſono proporzionali, la prima alla quarta ſi dirà aver tripla proporzione di quella, che ha alla ſeconda, e ſempre una di più, ſecondo che l' Analogia procederà innanzi.

XII.

Omologhe, ovvero di ſimil ragione ſono le grandezze antecedenti alle antecedenti e le conſeguenti alle conſeguenti.

XIII.

La proporzione permutata è quando ſi piglia l' antece-

dente all' antecedẽte, e la conſeguente alla conſeguente.

XIV.

La proporzione converſa è quando ſi piglia la conſeguente come antecedente all' antecedente come conſeguente.

XV.

La compoſizione della proporzione è quando ſi piglia l' antecedente inſieme colla conſeguente come una alla conſeguente.

XVI.

La diviſione della proporzione è quando ſi piglia l' eccesſo, nel quale l' antecedente avanza la conſeguente, ad eſſa conſeguente

XVII.

La converſione della proporzione è quando ſi piglia

l' antecedente all' eccesso, nel quale l' antecedente avanza la conseguente.

XVIII.

L' ugual proporzione è quando siano più grandezze, e altre grandezze di numero uguali a quelle, che si piglino a due a due, e nella medesima proporzione, e come nelle prime grandezze la prima all' ultima, così nelle seconde grandezze la prima sia all'ultima, ovvero altramẽte, quando si pigliano le grandezze estreme levandone quelle, che sono in mezzo.

XIX.

L'analogia ordinata è quando sia come l'antecedente alla conseguente, così l' antecedente alla conseguente, e come la conseguente ad un' al-

tra, così la conſeguente ad un' altra.

XX.

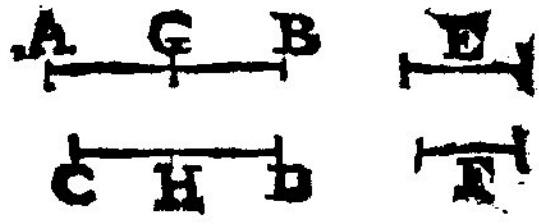
L' analogia perturbata è quando ſiano tre grandezze, e ſiano altre grandezze di numero uguali, e come nelle prime grandezze l' antecedente alla conſeguente, così nelle ſeconde l' antecedente alla conſeguente, e come nelle prime la conſeguente ad un' altra, così nelle ſeconde un' altra all' antecedente.

TEOREMA I.

PROPOSIZIONE I.

Se quante grandezze si vogliano siano ugualmente multiplici di quante si vogliano uguali di numero, ciascuna di ciascuna, quante volte è multiplice una grandezza di una, tante volte saranno multiplici ancor tutte di tutte.

Siano quante grandezze si vogliano *AB*, *CD*, di quante si vogliano grandezze E, F, di numero uguali, ciascuna ugualmente multiplice di



ciascuna. Dico che quante volte la *AB* è multiplice della E, tante volte le *AB*, *CD*, sono multiplici delle E, F. Perciocchè essendo la *AB*, ugualmente multiplice della E, e la *GD* della F, quante grandezze so-

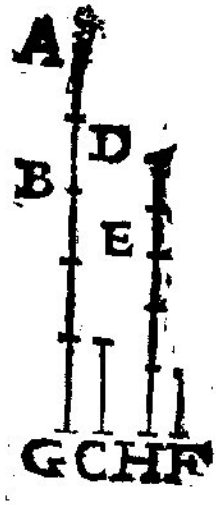
no

no nella A B, uguali alla E, tante ſaranno nella C D uguali alla F, dividaſi la A B in parti uguali alla E, che ſiano A G, G B, e la C D dividaſi in parti uguali alla F, cioè C H, H D, ſarà dunque la moltitudine delle parti C H, H D uguale alla moltitudine delle A G, G B, e perchè la A G è uguale alla E, e la C H alla F, ſaranno ancor le A G, C H uguali alle E F; e per la medeſima ragione eſſendo G B uguale alla E, e la H D alla F, ſaranno anche G B, H D uguali alle E F, quante dunque ſono nella A B, uguali alla E, tante ſaranno nelle A B, C D, uguali alle E, F, onde quante volte è multiplice la A B, della E, tante volte ſaranno multiplici le A B C D, delle E F, ſe dunque quante grandezze ſi vogliano ſiano ugualmente multiplici di quante ſi vogliano uguali di numero, ciaſcuna d ciaſcuna, quante volte è multiplice una grandezza di una, tante volte ſaranno multiplici ancor tutte di tutte, il che biſognava dimoſtrare,

TEOREMA II.

PROPOSIZIONE II.

Se la prima della ſeconda ſia multiplice come la terza della quarta, e ſia la quinta della ſeconda multiplice come la ſeſta della quarta, ſarà ancor compoſta la prima, e la quinta della ſeconda multiplice, come la terza, e la ſeſta della quarta.



Sia la prima A B della ſeconda C multiplice, come la terza D E della quarta F, e ſia la quinta B G della ſecõda C multiplice, come la ſeſta E H della quarta F. Dico anche compoſta la prima, e la quinta A G, eſſer multiplice della ſeconda C, come la terza, e la ſeſta D H, della quarta F. Perchè eſſendo la A B multiplice della

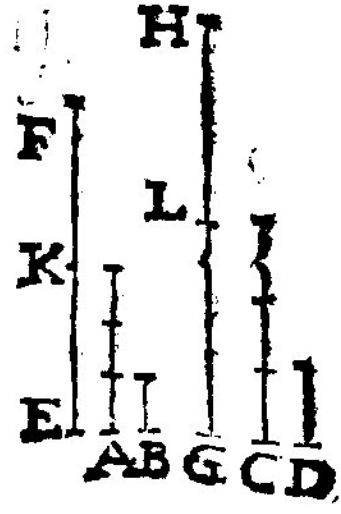
la C come la D E della F, quante grandezze ſono nella A B uguali alla C, tante ſaranno eziandio nella D E uguali alla F, e per la medeſima ragione quante ſono nella B G uguali alla C, tante ſaranno nella E H uguali alla F. quante dunque ſono in tutta la A G uguali alla C, tante ſaranno in tutta la D H uguali alla F. onde quante volte è multiplice la A G della C, tante volte ſarà la D H multiplice della F, e perciò compoſta la prima, e la quinta A G della ſeconda C ſarà multiplice come la terza, e la ſeſta D H della quarta F. adunque ſe la prima della ſeconda ſia multiplice come la terza della quarta, ec. ſarà anche compoſta la prima, e la quinta multiplice della ſeconda, come la terza, e la ſeſta della quarta, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA III.

PROPOSIZIONE III.

Se la prima ſia multiplice della ſeconda come la terza della quarta, e ſi piglino le ugual-

gualmente multiplici della prima, e della terza, sarà ancora per la ugual proporzione, l'una, e l'altra delle grandezze prese, ugualmente multiplice dell'una, e dell'altra, cioè l'una della seconda, e l'altra della quarta.



Sia la prima A della seconda B multiplice come la terza C della quarta D, e piglinsi le EF, GH ugualmente multipli delle A, C. Dico che la FE è multiplice della B come la GH della D. Perciocchè essendo la EF multiplice della A come la GH della C. quante grandezze sono nella EF uguali alla A, tante saranno anche nella GH uguali alla C. dividasi la EF in grandezze uguali alla A, cioè EK, KF, e la GH dividasi in grandezze

dezze uguali alla C, cioè GL, LH. ſarà dunque la moltitudine delle EK, KF uguale alla moltitudine delle GL, LH, e perchè la A è multiplice della B, come la C della D, e la EK è uguale alla A, e la GL alla C, ſarà la EK multiplice della B, come la GL della D, e per la medeſima ragione la KF ſarà multiplice della B, come la LH della D. perchè dunque la prima EK della ſeconda B è multiplice come la terza GL della quarta D, e la quinta KF della ſeconda B è multiplice, come la ſeſta LH della quarta D. ſarà anche compoſta la prima, e la quinta EF della ſeconda B multiplice, come la terza, e la ſeſta GH della quarta D. ſe dunque la prima ſia multiplice della ſeconda come la terza della quarta, e ſi piglino le ugualmente multiplici della prima, e della terza, ſarà ancora per l' ugual proporzione l' una, e l'altra delle grandezze preſe ugualmente multiplice dell' una, e dell' altra, cioè l' una della ſeconda, e l' altra della quarta, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA IV.
PROPOSIZIONE IV.

Se la prima alla ſeconda abbia la medeſima proporzione, che la terza alla quarta, e le ugualmente multiplici della prima, e della terza alle ugualmente multiplici della ſeconda, e della quarta ſecondo qualſivoglia multiplicazione, averanno la proporzione medeſima facendoſi comparazione fra loro.

Abbia la prima A alla ſeconda B la medeſima proporzione, che la terza C alla quarta D, e piglinſi E, F in qualunque modo ugualmente multiplici delle A, C, ed altre G, H, in qualunque modo ugualmente multiplici delle B, D. Dico che la E alla G è come la F alla H. Piglinſi ancora le K, L, ugualmente multiplici delle E F, e le M, N ugualmente multiplici delle G, H; perchè dunque la E è multiplice della A, com

al

la F della C, e si pigliano le K, L ugualmente multiplici delle E F, sarà la K, multiplice della A, come la L della C, per la medesima ragione la M sarà multiplice della B, come la N della D, e perchè come la A alla B, così è la C alla D, e si sono prese le K, L ugualmẽte multiplici delle A, C ed altre M, N, in qualũque modo ugualmente multiplici delle B, D se la K avanza la M, e la L avanzerà la N, e se è uguale, sarà uguale, e se minore, minore, e sono le K, L ugualmente multiplici delle E, F, e le M, N in qualunque modo ugualmente multiplici delle G, H: come dunque la E alla G, così sarà la F alla H. laonde, il che bisognava dimostrare.

Per l' ant.

Perchè dunque si è dimostrato, che se la K avanza la M, e la L avanzerà la N, e se è uguale, sarà uguale, e se minore, minore, è manifesto ancora, che se la M avanza

laK

la K, e la N avanzerà la L, e se è uguale sarà uguale, e se è minore, minore, e però come la G alla E, così la H alla F.

COROLLARIO.

Da questo si fa chiaro, che se quattro grandezze siano proporzionali, saranno anche per lo contrario, cioè convertendosi proporzionali.

TEOREMA V.

PROPOSIZIONE V.

Se una grandezza sia multiplice di un' altra grandezza, come la parte tratta dall' una della parte tratta dall' altra, sarà la rimanente multiplice della rimanente, come tutta di tutta.

Sia la grandezza A B multiplice della grandezza C D, come la parte tratta A E, della parte tratta C F.

F. Dico la rimanente ancora E B, della rimanente F D eſſer multiplice, come tutta la AB di tutta la C D, perciocchè quante volte la A E è multiplice della CF, tante volte e faccia la EB, multiplice della C G, e perchè la A E è multiplice della CF, come la E B della C C, ſarà la A E ugualmente multiplice della C F, e la A B della G F, e ſi pone la AE ugualmente multiplice della C F, e la A B della C D, adunque la A B è ugualmente multiplice dell'una, e dell'altra G F, C D, e perciò la G F è uguale alla C D, traggaſi la C F comune, la rimanente dunque G C è uguale alla rimanente D F, onde eſſendo la A E ugualmente multiplice della C F, e la E B della C G, è la C G uguale alla D F, ſarà la A E ugualmente multiplice della C F, e la E B della F D, e ſi pone la A E ugualmente multiplice della C F, e la A B della C D adunque la E B è ugualmente multiplice della F D, e la A B della C D, la rimanente dunque E B è multiplice del-

1. di queſ.

1. com. not

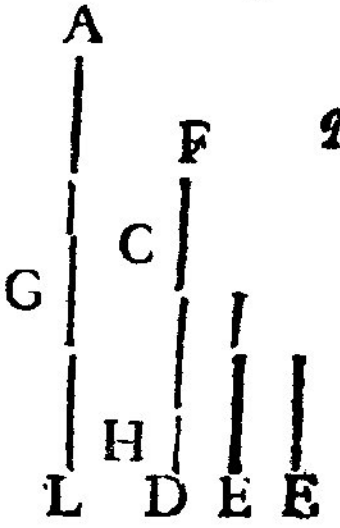
della rimanente F D, come tutta la A B di tutta la C D, onde, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA VI.
PROPOSIZIONE VI.

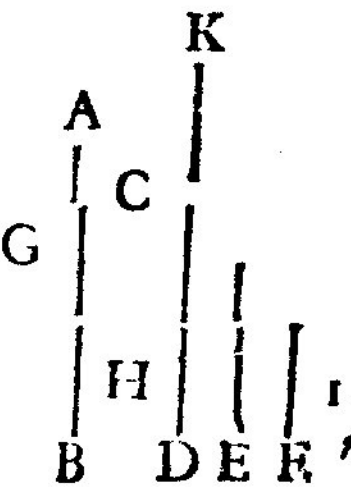
Se due grandezze ſiano ugualmente multiplici di due altre grandezze, e ſiano tratte da loro parti ugualmente multiplici delle medeſime, ſaranno le rimanentio uguali alle medeſime, o ugualmente multiplici di eſſe.

Siano due grandezze A B, C D, ugualmente multiplici di due grandezze E, F, e le A G, C H, tratte da eſſe, ſiano ugualmente multiplici delle medeſime. Dico che le rimanenti G B, H D, o ſono uguali ad eſſe E, F, o ugualmente multiplici. Sia primieramente la G B uguale alla E, Dico che la H D, è uguale alla F, pongaſi la C K, uguale alla F, e perchè la A G è ugualmente multiplice della E, e la C H della F, ed è la G B uguale alla E, e la C K uguale al-

le alla F, ſarà la AB ugualmente multiplice della E, e la KH della F, ma ſi pone la AB ugualmente multiplice della E, e la CD della F, onde la KH è ugualmente multiplice della F, e la CD della F, perchè dunque ciaſcuna di eſſe KH, CD è ugualmente multiplice della F, ſarà la KH uguale alla CD, traggaſi la CH comune, adunque la rimanente KC è uguale alla rimanente HD, ma la KC è uguale alla F, onde eziandio la HD è uguale alla F, e perciò la GB ſarà uguale alla E, e la HD alla F, dimoſtreremo ſimilmente, ſe la GB è multiplice della E, ancora la HD eſſere ugualmente multiplice della F, adunque ſe, il che biſognava dimoſtrare.



1. *di que*

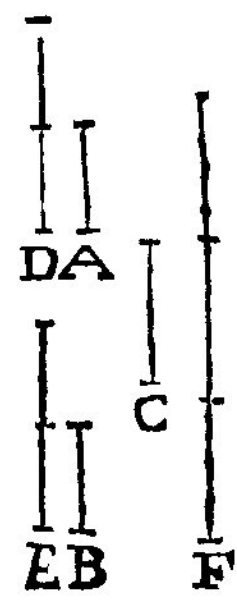


1. *com. not.*

TEO-

TEOREMA VII.
PROPOSIZIONE VII.

Le grandezze uguali alla medeſima hanno la medeſima proporzione, e la medeſima alle uguali.



Siano grandezze uguali A B. ed un' altra qualſivoglia grandezza C. Dico, che ciaſcuna di eſſe A,B ha la medeſima proporzione alla C, e la C parimente a ciaſcuna di eſſe A B ha la medeſima proporzione. Piglinſi le D,E ugualmente multiplici delle A,B, e un' altra F, come ſi voglia multiplice della C. perchè dunque la D è ugualmente multiplice della A, e la E della B, ed è la A uguale alla B, ſarà eziandio la D uguale alla E, ed un' altra come ſi voglia multiplice la F. ſe dunque la D avanza la F, e la E avanza eſſa F, e ſe è uguale, ſarà uguale, e ſe minore, mino-

1. *com. not.*

5 *dif.*

minore, e le D,E ſono ugualmente multiplici delle A B, e l' altra F come ſi voglia multiplice della C, ſarà dunque come la A alla C, così la B alla C. Dico oltre a ciò la C aver la medeſima proporzione all' una, e l'altra di eſſe A B, perciocchè facendoſi le medeſime coſe, dimoſtreremo ſimilmente la D eſſer uguale alla E, e un'altra eſſer la F, onde ſe la F avanza la D, avanzerà ancora la E, e ſe è uguale, ſarà uguale, e ſe è minore, minore, e la F è multiplice della C, e altre D,E in qualſivoglia modo ugualmente multiplici delle A,B, adūque come la C alla A, così ſarà la C alla B, onde, il che biſognava dimoſtrare. 5. *dif.*

TEOREMA VIII.

PROPOSIZIONE VIII.

Delle grandezze diſuguali la maggiore alla medeſima ha maggior proporzione, che la minore, e la medeſima alla minore ha maggior proporzione, che alla maggiore.

Siano A B, C grandezze diſuguali, e ſia la A B maggiore, ed un'altra D ſia comunque ſi voglia. Dico che la AB ha maggior proporzione alla D, che la C alla D, e la D ha maggior proporzione alla C, che alla A B. Perciocchè eſſendo la A B maggiore della C, pongaſi la B E uguale alla C, onde la minor di eſſe A E, E B multiplicata ſarà alla fine maggiore della D; ſia prima la A E minore della E B, e multiplichiſi la AE, fin tanto che ſi faccia maggiore della D, e ſia la F G multiplice della A E, la quale ſia maggiore della D, e quante volte la F G è multiplice della AE, tante volte ſi faccia multiplice la GH della E B, e la K della C, e pigliſi la L doppia della D, e la M tripla, e ſempre una più, fin che quella che ſi piglia, ſia fatta multiplice della D, e primieramente maggiore della K. Pigliſi, e ſia la N, quadrupla della D, e primieramente maggiore della

4. *dif.*

K,

K, perchè dunque la K è primieramente minore della N, non sarà la K minore della M; ed essendo la F G ugualmente multiplice della A E, e la G H della E B, sarà ancora la F G ugualmente multiplice della A E, e la F H della A B, e la F G ugualmente multiplice della A E, e la K della C, adunque la F H è ugualmente multiplice della A B, e la K della C; e perciò le F H, K saranno ugualmente multiplici delle A B, C, oltre a ciò perchè la G H è ugualmente multiplice della E B, e la K della C, ed è la E B uguale alla C, sarà anche la G H uguale alla K, ma la K non è minore della M, adunque la G H non è minore della M, ma la F G è maggiore della D onde tutta la F H sarà maggiore di amendue D, M, ma amendue D M sono uguali alla N; perciocchè la M è tripla della D, ed amendue M, D sono quadruple della D, e la N è quadrupla della D, adunque amendue M, D sono uguali alla N, ma la F H è maggiore della M, D, onde la F H avanza la N, ma la K non avanza la N, e sono F H, K ugualmente multiplici delle A B, C, ed un' altra N comunque si voglia

1. di quest.

1. comun. not.

multiplice della D, adunque la A B, ha maggior proporzione alla D, che la C alla D. Dico ancora la D alla C aver maggior proporzione, che la D alla A B, perciocchè facendosi le medesime cose similmente dimostreremo la N avanzare la K, e non avanzare la F H, ed è la N multiplice della D, e le F H, K altre in qualunque modo ugualmente multiplici delle A B, C, adunque la D ha maggior proporzione alla C, che la D alla A B. Ma sia la A E, maggiore della E B, sarà la minore E B multiplicata alla fine maggiore della D. multiplichisi, e si la G H, multiplice della E B, e maggiore della D, e quante volte la G H è multiplice della E B, tante volte facciasi la F G multiplice della A E, e la K della C, dimostreremo similmente le F H, K, essere ugualmente multiplici delle A B, C, pigliſi poi la N multiplice della D, e primieramente maggiore della F G, adun-

que

que la F G non è minore della M, ed è la F G maggiore della D, onde tutta la F H avanza la D, M, cioè la N, e la K non avanza la N, perchè la F G essendo maggiore della G H, cioè della K; non avanza la N, e similmente finiremo la dimostrazione come di sopra, adunque, il che bisognava dimostrare.

TEOREMA IX.

PROPOSIZIONE IX.

Quelle grandezze, che alla medesima hanno la medesima proporzione, sono uguali fra loro, e quelle, alle quali la medesima ha la medesima proporzione, sono ancora fra loro uguali.

Abbia ciascuna delle A, B la medesima proporzione alla C. Dico che la A è uguale alla B. perchè se non fusse uguale, non averebbe ciascuna di esse A, B la medesima proporzione alla C, ma l'hanno, adun-

A | C | *Per l'ant.*
B |

gue la A è uguale alla B. abbia oltre a ciò la C la medesima proporzione a ciascuna di esse A, B. Dico che la A è uguale alla B. e se non è così, la C non avrà la medesima proporzione a ciascuna di esse A, B. ma ha la medesima, adunque la A necessariamente è uguale alla B. onde, il che bisognava dimostrare.

Per l' ant.

TEOREMA X.

PROPOSIZIONE X.

Delle grandezze, che hanno proporzione alla medesima, quella, che ha maggior proporzione è maggiore; e quella alla quale la medesima a maggior proporzione, è minore.

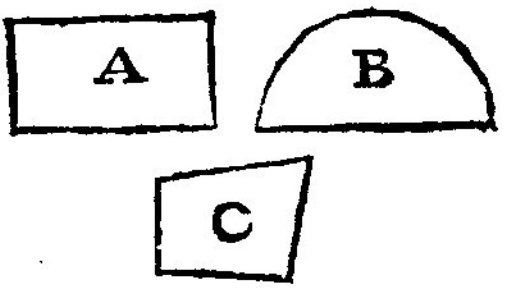
Abbia la A alla C maggior proporzione, che la B alla C. Dico, che la A è maggiore della B. Perciocchè se non è maggiore, o sarà uguale, o minore, ma non è uguale la A alla B, perciocchè ciascuna di esse A, B averebbe la medesima proporzione alla C: ma non l'hanno, adunque l'A non è ugua-

7. di quest.

gua-

è uguale alla B. ma nè anche la A è minore della B, perchè la A averebbe minor proporzione alla C, che la B, ma non l'ha minore, onde la A non è minore della B, e ſi è dimoſtrato, che non è anche uguale, adunque ſarà la A maggiore della B, oltre a ciò abbia la C maggior proporzione alla B, che la C alla A. Dico, che la B è minore

8. *d queſ.*



della A, e ſe non è minore, o ſarà uguale, o maggiore, ma la B non è uguale alla A, perchè la C averebbe la medeſima proporzione a ciaſcuna di eſſe A, B, e non l'ha, adunque la A non è uguale alla B. ma nè anche la B è maggiore della A, perchè la C averebbe minor proporzione alla B, che alla A; e non l'ha, non è dunque la B maggiore della A, e ſi è dimoſtrato, che non è anche ugnale, e però la B ſarà minore della A, adunque, il che biſognava dimoſtrare.

7. *di queſ.*

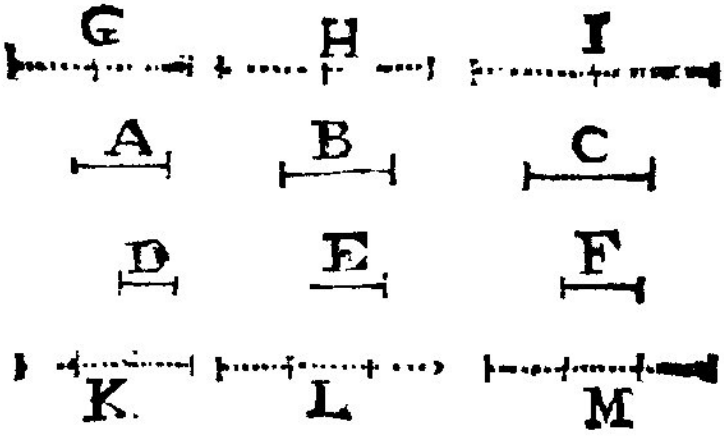
8. *di queſ.*

TEOREMA XI.

PROPOSIZIONE XI.

Quelle proporzioni, che ſono le medeſime ad una medeſima, ſono ancora le medeſime fra loro.

Sia come l'A alla D così la B all' E, e come la B all' E così la C all' F. Dico come l' A alla D, così eſſere la C alla F. Piglinſi le G, H, I



ugualmente multiplici delle A, B, C, ed altre K, L, M in qualſivoglia modo ugualmẽte multiplici delle D, E, F. Perchè dunque come l' A alla D così è la B all' E, e ſi ſon preſe delle A, B le G, H ugualmente multiplici, e delle D, E altre in qualunque modo

modo ugualmente multiplici K,L, ſe la G avanza la K, e la H avanzerà la L, e ſe è uguale, ſarà uguale, e ſe minore, minore. E perchè come la B all'E, così è la C all'F, e ſi ſon preſe le H,I ugualmente multiplici delle B,C, e delle E,F altre in qualſivoglia modo ugualmẽte multiplici L,M, ſe l'H avanza la L, anco la I avanzerà la M, e ſe è uguale ſarà uguale, e ſe è minore minore. Ma ſe la H avanza la L, anco la G avanzerà la K, e ſe è minore, ſarà minore, e ſe è uguale uguale, e ſono le G I ugualmente multiplici delle A C, e la K, M in qualſivoglia modo ugualmente multiplici delle D,F. Adunque come la A alla D, così è la C alla F. e perciò, il che biſognava dimoſtrare. *Converſa della 5. diff.*

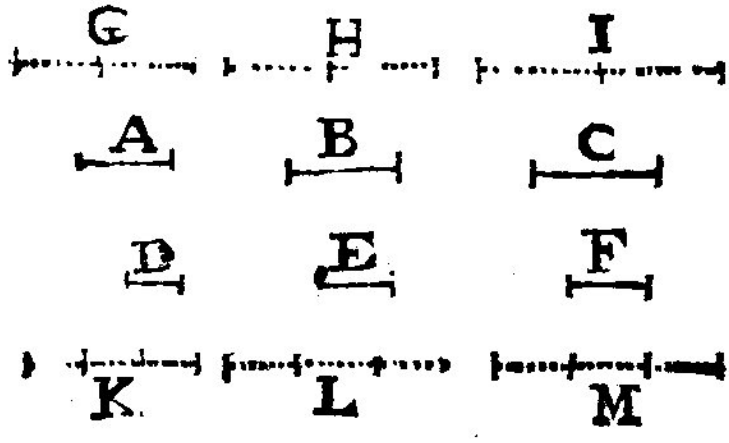
TEOREMA XII.

PROPOSIZIONE XII.

Se quante grandezze ſi vogliano ſiano proporzionali, come una dell'antecedenti a una delle conſeguenti così ſa-

ranno tutte le antecedenti a tutte le conſeguenti.

Siano quante grandezze ſi vogliono proporzionali A D, B E, C F, e come A a D, così ſtia B ad E, e C ad F. Dico come la A alla D così eſſere le A, B, C alle D, E, F. Piglinſi delle A, B, C le ugualmente multiplici G, H, I, e delle D, E, F,



altre in qualunque modo ugualmẽte multiplici K, L, M. Perchè dunque come la A alla D, così è la B alla E, e la C alla F, e delle antecedenti A, B, C ſi ſon preſe le G, H, I ugualmente multiplici, e delle conſeguẽti D E F altre in qualunque modo ugualmente multiplici K, L, M; ſe la G avanza la K, e la H avanzerà la L, e la F la M; e ſe è uguale ſa-

Con. verſa 5. diff.

ranno

ranno uguali, e ſe minore, minori. Onde ſe la G avanza la K, e le G,H,I avanzeranno le K,L,M, e ſe è minore ſaranno minori, e ſe uguale, uguali, e ſono le G,e G,H,I ugualmente multiplici delle A, ed A,B,C, e ſono le K, e H, L, M in qualſivoglia modo ugualmente multiplici delle D, e D,E,F. Adunque come l'A alla D, così le A,B,C alle D,E,F. Laonde, il che biſognava dimoſtrare. 1. di queſ.

TEOREMA XIII.

PROPOSIZIONE XIII.

Se la prima alla ſeconda abbia la medeſima proporzione, che la terza alla quarta, e la terza alla quarta abbia maggior proporzione, che la quinta alla ſeſta, ancora la prima alla ſeconda averà maggior proporzione, che la quinta alla ſeſta.

La prima A abbia la medeſima proporzione alla ſeconda B, che la

terza C alla quarta D, e la terza C abbia maggior proporzione alla quarta D, che la quinta E alla ſeſta F. Dico che la prima A ha maggior proporzione alla ſeconda B, che la quinta E alla ſeſta F. Perciocchè avendo la C maggior proporzione alla D, che la E alla F, ſono alcune grandezze ugualmente multiplici delle C E, ed altre in qualunque modo ugualmente multiplici delle D, F, delle quali la multiplice della C avanza la multiplice della D, e la multiplice della E non avanza la multiplice della F, piglinſi, e ſiano G, H ugualmente multiplici delle C E, e delle D, F altre in qualunque modo ugualmente multiplici K, L, di modo, che la G avanzi la K, ma la H non avanzi la L, e quanta volte la G è multiplice della C, tante volte la M ſia multiplice dell'A: e quan-

Converſa delle 7. dif. 8. di queſ.

e quante volte la K è multiplice della D, tante volte ſia multiplice la N della B, e perchè come la A alla B, così è la C alla D, e ſi ſono preſe delle A, C le M, G ugualmente multiplici, e delle B, D altre in qualunque modo ugualmente multici N, K, ſe la M avanza la N, e la G avanzerà la K, e ſe è uguale, ſarà uguale, e ſe minore, minore, ma la G avanza la K, adunque la M avanzerà la N, ma la H non avanza la L, e ſono le M, H ugualmente multiplici delle A, E, e le N, L delle B, F altre in qualunque modo ugualmente multiplici, onde la A averà maggior proporzione alla B, che l' E alla F. ſe dunque, il che biſognava dimoſtrare.

Converſa della 5. diffi

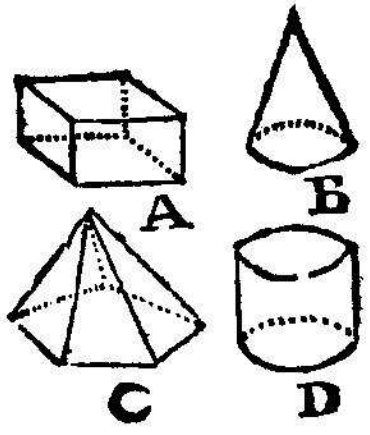
7. diff.

TEOREMA XIV.

PROPOSIZIONE XIV.

Se la prima alla ſeconda abbia la medeſima proporzione, che la terza alla quarta, e ſia la prima maggiore della terza, ſarà anche la ſeconda maggiore

re della quarta, e se uguale, uguale, e se minore minore.



La prima A abbia la medesima proporzione alla seconda B, che la terza C alla quarta D, e sia la A maggiore della C. Dico che ancora la B sarà maggiore della D: perciocchè essendo la A maggiore della C, ed un' altra grandezza in qualunque modo B, averà la A alla B maggior proporzione, che la C alla B, ma come la A alla B, così la C alla D, adunque anche la C averà maggior proporzione alla D, che la C alla B; e quella alla quale la medesima ha maggior proporzione, è minore, onde la D è minore della B, e perciò la B è maggiore della D, dimostreremo similmente se la A è uguale alla C, la B ancora esser uguale alla D, e se l' A è minore della C, la B ancora essere minore della D, adunque, il che bisognava dimostrare.

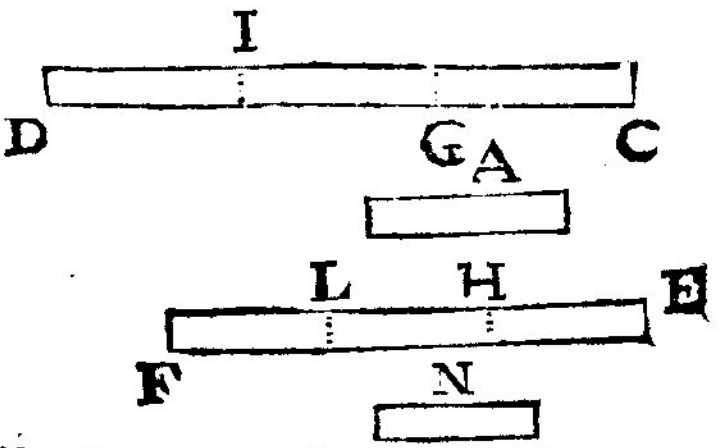
8. di quest. *Per l'ant.* *10. di quest.*

TEO-

TEOREMA XV.
PROPOSIZIONE XV.

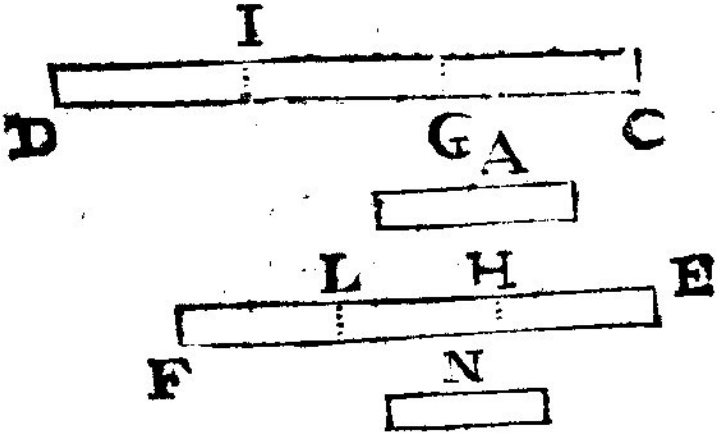
Le parti di quelle grandezze, che ſono multiplici nel medeſimo modo facendoſi comparazione fra loro, hanno la medeſima proporzione.

Sia la C D multiplice dell' A come l' E F dell' N. Dico, che come l' A alla N, così è la C D all' E F. Perciocchè eſſendo la D C multiplice.



della A come l' F E dell' N, quante grandezze ſono nella C D uguali all' A, tante ſaranno nell' E F uguali all' N. Dividaſi la C D in grandezze uguali all' A, che ſiano D I, I G, G C.

GC, e l'EF dividasi in grandezze uguali all' N cioè FL, LH, HE. Sarà dunque la moltitudine delle DI, IG, GC uguale alla moltitudine delle FL, LH, HE. E perchè sono DI, IG, GC uguali, e sono FL LH, HE fra loro uguali, come la



DI all'FL così sarà l'IG alla LH, e la GC all' HE, e come uno degli antecedenti a uno de' conseguenti, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti; dunque come DI ad FL così sarà DC ad FE. Ma la DI è uguale all' A, e l'FL all' N, dunque come l' A alla N così la DC all' FE. Le parti dunque, il che bisognava dimostrare.

12. *di quest.*

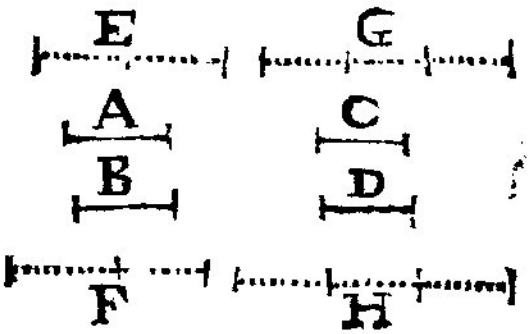
TEO-

TEOREMA XVI.

PROPOSIZIONE XVI.

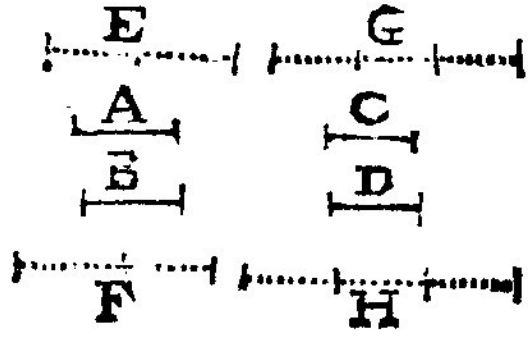
Se quattro grandezze ſiano proporzionali, ſaranno ancora permutandoſi proporzionali.

Siano quattro grandezze proporzionali A B, C D, e ſia come l'A alla B, così la C alla D. Dico, che ancora permutandoſi ſono proporzionali, cioè che come l'A alla C, co-



sì è la B alla D. Piglinſi le E, F ugualmente multiplici delle A, B, e delle C, D altre in qualunque modo ugualmente multiplici G, H, perchè dunque la E è ugualmente multiplice della A, e l'F della B, e le parti delle grãdezze, che ſono multiplici nel medeſimo modo facẽdoſi comparazione fra loro, hanno la medeſima *Per l'ant.*

desima proporzione; sarà come l'A alla B così l'E all' F, ma come l'A alla B, così è la C alla D, adunque come la C alla D, così è l'E all' F, e perchè le G,H sono ugualmente multiplici delle C,D,e le parti delle grandezze, che sono multiplici nel medesimo modo,facendosi comparazione fra loro,hanno la medesima proporzione; sarà come la C



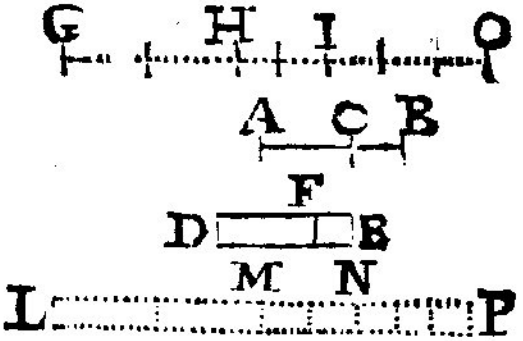
alla D, così la G all'H, ma come la C alla D, così l'E all' F, adunque come l'E all' F, così è la G all'H, ma se quattro grandezze siano proporzionali, e la prima sia maggiore della terza, sarà anche la seconda maggiore della quarta, e se uguale, uguale, e se minore, minore; e sono le E,F ugualmente multiplici delle A B, e le G,H altre in qualunque modo ugualmente multiplici delle C.D,onde come l'A alla C, così sarà la B alla D, se dunque quar-

quattro grandezze ſiano proporzionali, ſaranno ancora permutandoſi proporzionali, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XVII.
PROPOSIZIONE XVII.

Se quattro grandezze a due a due omogenee ſaranno compoſte proporzionali, e dividendole ſaranno proporzionali.

Sieno due grandezze omogenee, e compoſte inſieme AB, BC, ed altre due pur omogene, e compoſte inſieme DE, EF, e ſien tra loro

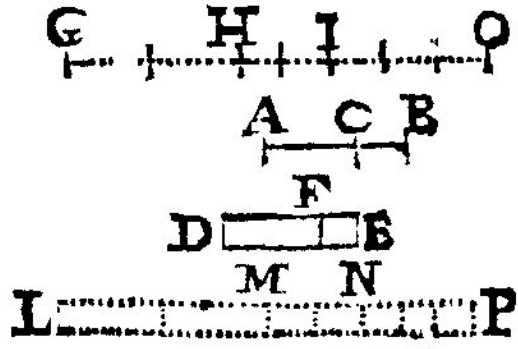


proporzionali, cioè come AB a BC, così DE, ad EF. Dico che, dividendole, anco AC a CB ſta come DF ad FE.

Prendanſi delle AC, CB, e delle DF, FE, le GH, HI, e le LM, MN

MN ugualmente multiplici ſecondo un medeſimo qualunque numero, ed in oltre delle CB, FE ſi prendano l'ugualmente multiplici IO, NP, pur ſecond' uno ſteſſo qualunque numero.

Perchè dunque l' HI è multiplice di CB, come l' MN di FE, il numero delle CB nella HI ſarà uguale al numero delle FE nella MN.



Similmente, perchè IO è multiplice di CB, come NP di FE, il numero delle medeſime CB nella IO ſarà uguale al numero delle FE nella NP. Se dunque il numero in HI è uguale al numero in MN, ed il numero in IO al numero in NP, tutto il numero delle CB in HO, ſarà uguale a tutto 'l numero dell' FE in MP. Onde le HO, MP ſono ugualmente multiplici delle CB, FE.

E perchè GH è multiplice di AC, come HI di CB, ſarà il compoſto

GI

GI, multiplice del composto AB, come una di una, cioè come GH, di AC, ovvero come LM, di DF, cioè come MN, di FE, ovvero come il composto LN, del composto DE. Ma sta come la prima AB, alla seconda BC, così la terza DE, alla quarta EF, e della prima, e della terza si son provate ugualmente multiplici le GI, LN, e della seconda, e della quarta si provarono di sopra ugualmente multiplici le HO, MP, adunque l'ugualmente multiplici della prima, e della terza saranno concordi coll'ugualmente multiplici della seconda, e della quarta; cioè se GI, è uguale ad OH anco LN, sarà uguale ad MP, e se è maggiore, maggiore, e se è minore, minore: onde tolte le parti comuni HI, NM, anco il residuo GH, s'accorderà col residuo IO, come'l residuo LM, col residuo NP in pareggiarsi, o in avanzare, o in mancare: e però considerata AC, come prima grandezza, CB come seconda, DF come terza, ed FE come quarta, essendosi prese le GH, LM, ugualmente multiplici della prima, e della terza, e le IO, NP, ugualmente multiplici della secõda,

e del

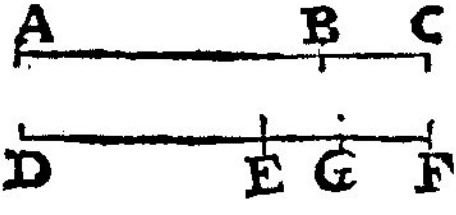
e della quarta, e dimostrato, che quella della prima concorda con quella della seconda, come quella della terza con quella della quarta starà la prima alla seconda come la terza alla quarta cioè la AC, alla CB, come la DF, alla FE. E però quando le grandezze sono composte proporzionali, e dividendole son' ancora proporzionali. Il che &c.

TEOREMA XVIII.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se le grandezze divise siano proporzionali, saranno ancora composte proporzionali.

Siano le grandezze divise proporzionali AB, BC, DG, GF, e come l'AB, alla BC, così la DG, alla GF. Dico che composte ancora



sono proporzionali, cio è che come l' AC, alla CB, così è la DF, alla FG. Perciocchè se non è come la AC, alla CB, così la DF, all'FC sarà come l' AC, alla CB, così DF, o

a una

a una minore della FG, o a una maggiore. Sia prima a una maggiore, cioè alla FE. E perchè come l'AC alla CB, così DF ad FE, ſono le grãdezze compoſte proporzionali, adunque ancora diviſe ſaranno proporzionali, e perciò come l'AB alla BC così la DE alla EF, adunque eziandio come la DG alla GF, così la DE all'EF. Ma la prima DG è maggiore della terza DE onde la ſeconda GF, ſarà maggiore della quarta EF ma è minore, che è impoſſibile. Non è dunque come l'AC alla CB così la DF alla FE. Dimoſtreremo parimente, che non è alla minore di FG. Adunque è neceſſario, che ſia alla GF. onde. il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XIX.

PROPOSIZIONE XIX.

Se ſia come tutta a tutta, così una parte tratta ad una parte tratta, ſarà ancora la rimanente alla rimanente, come tutta a tutta.

Sia

Sia come tutta A B a tutta C D, così la parte tratta A E alla parte tratta C F. Dico, che la rimanente E B è alla rimanente F D, come tutta A B a tutta C D. Perciocchè essendo come tutta A B a tutta C D, così la A E alla C F, sarà eziandio permutandosi come la B A alla A E, così la D C alla C F, e perchè le grandezze composte sono proporzionali, e divise ancora saranno proporzionali, adunque come la B E alla E A, così la D F alla F C, e similmente permutandosi come la B E alla D F, così la E A alla F C, ma come la A E alla C F, così fu posta essere la A B alla C D, la rimanente dunque E B sarà alla rimanente F D, come tutta A B a tutta C D, onde, il che bisognava dimostrare.

16. *di quest.*

17. *di quest.*

E perchè si è dimostrato, che come la A B alla C D, così è la E B alla F D, sarà permutandosi come la A B alla B E così la C D alla D F; adunque le grandezze composte sono proporzionali, ma si è dimostrato come la B A alla A E, così la D C alla C F, il che è per la conversione della proporzione.

COROLLARIO.

Da queſto è chiaro, ſe le grandezze compoſte ſiano proporzionali, eziandio per la converſione della proporzione ſaranno proporzionali.

TEOREMA XX.

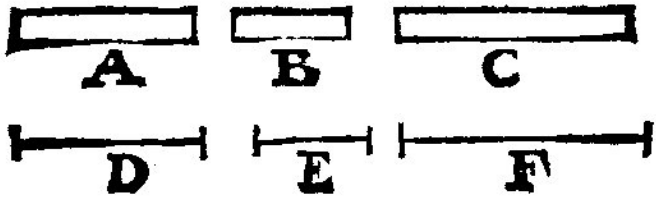
PROPOSIZIONE XX.

Se ſiano tre grandezze, e ſiano altre grãdezze di numero uguali a quelle, che ſi pigliano a due a due, e nella medeſima proporzione e per la proporzione uguale, la prima ſia maggiore della terza, ſarà ancora la quarta maggiore della ſeſta; e ſe uguale, uguale e ſe minore, minore.

Siano tre grandezze A, B, C; ed altre ad eſſe uguali di numero D, E, F, preſe a due a due, e nella medeſima proporzione, e ſia come la A

alla B, così la D, alla E, e come la B, alla C, così la E, alla F, ma per l'ugual proporzione sia maggior la A, della C Dico che la D è maggior della F, e se uguale, uguale, e se minore, minore. Perciocchè essendo la A maggior della C, e un' altra in qualunque modo B, e la maggiore alla medesima ha maggior

8. *di quest.*



proporzione, che la minore; averà la A, maggior proporzione alla B, che la C, alla B, ma come la A alla B, così la D, alla E. e convertendosi come la C alla B, così la F, alla E, adunque ancor la D all' E ha maggior proporzione, che la F alla E, ma delle grandezze, che hanno proporzione alla medesima, quella che ha maggior proporzione è maggiore, onde la D è maggiore della F, dimostreremo similmente se la A sia uguale alla C, e la D essere uguale alla F, e se minore, minore, adunque, il che bisognava dimostrare.

10. *di quest.*

TEO-

TEOREMA XXI.

PROPOSIZIONE XXI.

Se ſiano tre grandezze, e ſiano altre grandezze di numero uguali a quelle, che ſi piglino a due a due, e nella medeſima proporzione, e ſia l'analogia loro perturbata, e per l'ugual proporzione la prima ſia maggiore della terza, ſarà ancora la quarta maggiore della ſeſta, e ſe uguale, uguale, e ſe minore minore.

Siano tre grandezze proporzionali A,B,C, ed altre di numero uguali a quelle D,E,F, preſe a due a due, e nella medeſima proporzione, e ſia la loro analogia perturbata, cioè come la A, alla B, così ſia la E, alla F, e come la B, alla C, così la D alla E, e per l' ugual proporzione l'

A sia maggiore della C. Dico che ancora la D è maggiore della F, e se uguale, uguale, e se minore, minore, perciocchè essendo la A, maggiore della C, ed un' altra B, averà la A, maggior proporzione alla B, che la C, alla B; ma come la A, alla B, così è la E alla F, e convertendosi come la C alla B, così la E alla D, onde la E averà maggior proporzione alla F, che la E alla D, ma quella alla quale la medesima ha maggior proporzione, è minore, adunque la F è minore della D, e perciò la D sarà maggiore della F. dimostreremo similmente se la A sia uguale alla C, e la D essere uguale alla F, e se minore, minore, laonde, il che bisognava dimostrare.

8. di quest.

10 di quest.

TEOREMA XXII.

PROPOSIZIONE XXII.

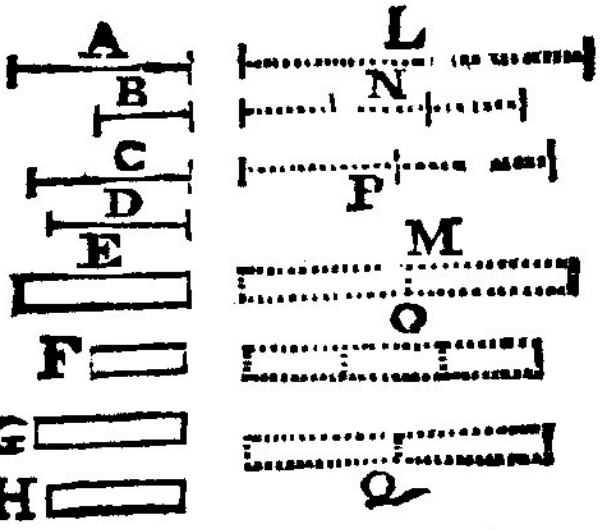
Se siano quante grandezze si vogliano, e siano altre grandezze di numero uguali a quelle,

quelle, che ſi pigliano a due a due nella medeſima proporzione, ſaranno ancora per la proporzione uguale nella medeſima proporzione.

Siano quante grandezze ſi vogliano A,B,C, e altre di numero uguali a quelle E,F,G, preſe a due a due nella medeſima proporzione, e ſia come l' A, alla B, così l' E all' F, e come la B alla C, così l' F, alla G.

Dico per la proporzione uguale eſſere nella medeſima proporzione, cioè come l' A alla C così eſſere l' E alla G. Piglinſi delle A,E, ugualmente multiplici le L,M, e delle B,F, altre in qualunque modo ugual-

mente multiplici N,O, e delle C,G, altre in qualsivoglia modo ugualmente multiplici P,Q. Perchè dūque come l' A alla B, così l' E all' F, e si son prese L,M, ugualmente multiplici di A,E; e delle B,F, altre in qualunque modo ugualmẽte multiplici N, O, sarà come la L all' N, così l' M all' O; e per la medesima ragione come l' N, alla P, così l' O



4 *di quesf.* all'a Q. Ed essendo tre grandezz L N, P, e altre di numero uguali a quelle M,O,Q, prese a due a due nella medesima proporzione; per
20 *di quesf.* la proporzione uguale se la L avanza la P, e l' M, avanzerà la Q, se è uguale sarà uguale, e se è minore minore; e sono le L,M, ugualmente multiplici delle A,E, e le P,Q, altre in qualsivoglia modo ugualmente

mente multiplici delle C, G. Onde come l'A, alla C, così l'E alla G, se dunque, il che bisognava dimostrare.

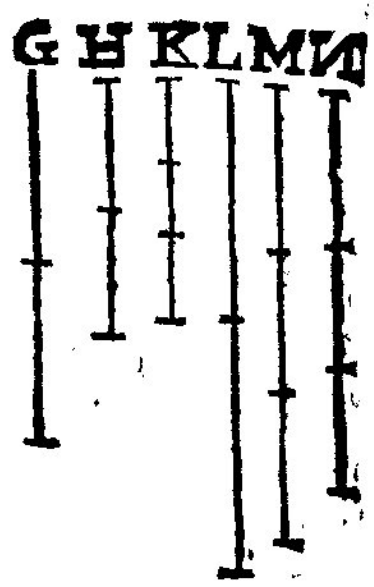
TEOREMA XXIII.

PROPOSIZIONE XXIII.

Se siano tre grandezze, e siano altre grandezze di numero uguali a quelle, che si piglino a due a due nella medesima proporzione, e sia l'analogia loro perturbata, saranno ancora per la proporzione uguale nella medesima proporzione.

Siano tre grandezze A,B,C, e altre grandezze di numero uguali a quelle prese a due a due nella medesima proporzione D,E,F, e sia la loro analogia perturbata, e come la A alla B, così sia la E alla F; e come la B alla C, così la D alla E. Dico come la A alla C, così essere la D alla F. Piglinsi le G,H,K, ugualmente multiplici delle A,B, C, e delle D,E,F, altre in qualunque modo ugual-

ugualmente multiplici L, M, N, e perchè le G, H, ſono ugualmente multiplici delle A, B, e le parti delle multiplici nel medeſimo modo hanno la medeſima proporzione, ſarà come la A alla B, così la G alla H, e per la medeſima ragione come la E alla F, così la M alla N, ed è come la A alla B, così la E alla F, come dunque la G alla H, così la M alla N, e perchè come la B alla C, così è la D alla E, e ſi ſono preſe H, L, ugualmente multiplici delle B, D, e delle C, E, altre in qualſivoglia modo ugualmente multiplici K, M, ſarà come la H alla K, così la L alla M, e ſi è dimoſtrato, che come la G alla H, così la M alla N, perchè dunque le tre grandezze ſono proporzionali G, H, K, ed altre di numero uguali a quelle L, M, N, preſe a due



a due

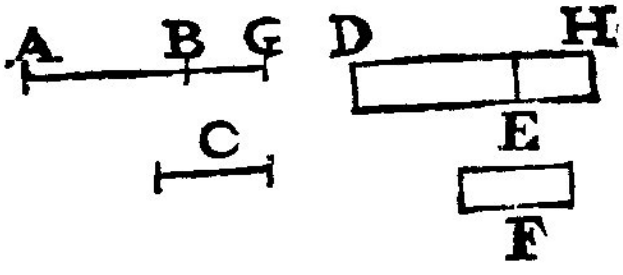
a due nella proporzione medeſima, ed è la loro analogia perturbata, per la ugual proporzione ſe la G avanza la K, e la L avanzerà la N, e ſe è uguale, uguale, e ſe minore, minore, ma ſono le G,N, ugualmente multiplici delle A,D, e le K,N, ugualmente multiplici delle C,F, come dunque la A alla C, così ſarà la D alla F, laonde, il che biſognava dimoſtrare.

TEOREMA XXIV.
PROPOSIZIONE XXIV.

Se la prima alla ſeconda abbia la medeſima proporzione, che la terza alla quarta, e la quinta alla ſeconda abbia la medeſima proporzione, che la ſeſta alla quarta, averà ancor compoſta la prima, e la quinta alla ſeconda la medeſima proporzione, che la terza, e la ſeſta alla quarta.

Abbia la prima AB, alla ſeconda C, la medeſima proporzione, che la ter-

terza D E alla quarta F, ed abbia la quinta B G alla ſeconda C, la medeſima proporzione, che la ſeſta E H alla quarta F. Dico che compoſta la prima, e la quinta A G, alla ſeconda C, ha la medeſima proporzione, che la terza, e la ſeſta D H, alla quarta F. Perciocchè eſſendo come la B G alla C, così la E H alla F,



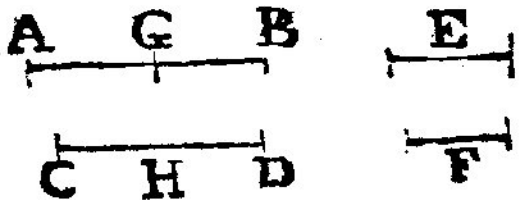
ſarà convertendoſi come la C alla B G, così la F alle E H, e perchè come la A B alla C, così la D E alla F, e come la C alla B G, così la F alla E H, ſarà per la proporzione uguale come la A B alla B G, così la D E alla E H, ed eſſendo le grandezze diviſe proporzionali, ſaranno ancor compoſte proporzionali, come dunque la A G alla G B, così è la D H alla H E, ma come la G B alla C, così la E H alla F, adunque per la ugual proporzione come la A G alla C, così ſarà la D H alla F, onde, il che biſognava dimoſtrare.

TEO-

TEOREMA XXV.
PROPOSIZIONE XXV.

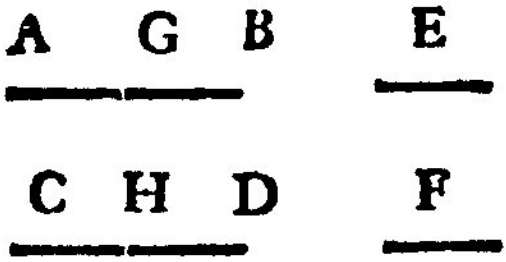
Se quattro grandezze siano proporzionali, la maggiore di tutte, e la minore saranno maggiori delle due rimanenti.

Siano quattro grandezze proporzionali A B, C D, E, F, e sia come la A B alla C D, così la E alla F: e sia la maggiore di tutte A B, e la minore F. Dico le A B, F esser mag-



giori delle C D, E. Pongasi la A G uguale alla E, e la C H uguale alla F, perchè dunque come la A B alla C D, così la E alla F, ed è la A G uguale alla E, e la C H uguale alla F; sarà come la A B alla D C, così la A G alla C H, e perchè come tutta A B a tutta C D, così la parte tratta A G alla parte tratta C H, sarà ancor la rimanente G B alla rima- 19. di quest.

manente H D, come tutta A B a tutta C D, ed è la A B maggiore della C D, adunque la G B è maggiore della H D, ed essendo la AG uguale alla E, e la C H alla F, saranno le A G,F uguali alle C H,E, ma se alle cose disuguali s' aggiun-



4.com. not. gano cose uguali, tutte saranno disuguali, adunque essendo le G B H D disuguali, perciocchè la G B è maggiore, se alla G B si aggiungano le A G, F, ed alla H D si aggiungano C H, E, si faranno A B, F necessariamente maggiori delle C D E, laonde se quattro grandezze siano proporzionali, la maggior di tutte, e la minore saranno maggiori delle due rimanenti, il che bisognava dimostrare.

FINE DEL QUINTO LIBRO.